

## Tesis Doctoral

# El formalismo de contextos generalizados y sus aplicaciones

Losada, Marcelo Adrián

2016-03-28

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Losada, Marcelo Adrián. (2016-03-28). El formalismo de contextos generalizados y sus aplicaciones. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

Cita tipo Chicago:

Losada, Marcelo Adrián. "El formalismo de contextos generalizados y sus aplicaciones". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2016-03-28.

**EXACTAS** UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



**UBA**

Universidad de Buenos Aires



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Física

*El formalismo de contextos generalizados y sus aplicaciones*

Tesis presentada para optar al título de  
Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Físicas

por *Marcelo Adrián Losada*

Director de tesis: Roberto Laura  
Consejero de estudios: Rafael Ferraro

Lugar de Trabajo: Instituto de Física de Rosario - CONICET

Buenos Aires, marzo 2016  
Fecha de defensa: 28 de marzo de 2016



## Resumen

En este trabajo se presenta un enfoque de historias cuánticas, alternativo a la teoría de Historias Consistentes, denominado *formalismo de Contextos Generalizados* y se demuestra que es adecuado para definir probabilidades a expresiones que involucran propiedades a distintos tiempos.

Además se analizan las relaciones existentes entre estos dos formalismos y se prueba que cuando la condición de consistencia de Historias Consistentes se impone para todo estado, se obtiene la condición de compatibilidad del formalismo de Contextos Generalizados. En este caso se demuestra que ambos formalismos son equivalentes para describir propiedades a distintos tiempos.

También se discute el problema de las retrodicciones de propiedades contrarias en ambos formalismos de historias cuánticas. Se muestra que en el caso de las Historias Consistentes es posible la retrodicción de propiedades contrarias, mientras que en el formalismo de Contextos Generalizados esto no es posible.

Por último, se presentan algunas aplicaciones del formalismo de Contextos Generalizados a situaciones físicas: el proceso de medición, el experimento de la doble rendija y el proceso de decaimiento.

**PALABRAS CLAVES:** historias cuánticas, propiedades cuánticas, lógica cuántica, reticulado, traslación temporal.



# *The formalism of generalized contexts and its applications*

## **Abstract**

We develop a quantum history approach, alternative to the theory of Consistent Histories, called formalism of Generalized Contexts and we prove that it is suitable to define probabilities of expressions involving properties at different times.

We also analyze the relationships between these two formalisms and we show that when the consistency condition of Consistent Histories theory is imposed for all states, the compatibility condition of the formalism of Generalized Contexts is obtained. In this case we obtain that both formalism are equally useful to describe properties at different times.

Furthermore, we discuss the retrodiction of contrary properties in both quantum histories formalisms. We show that in the Consistent Histories formulation it is possible to retrodict contrary properties, while in the formalism of Generalized Contexts this is not possible.

Finally, we apply the formalism of Generalized Contexts to some physical situations: the measurement process, the double-slit experiment and the decay process.

**KEY WORDS:** quantum histories, quantum properties, quantum logic, lattice, time translation.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>8</b>
<b>2. Mecánica cuántica</b>	<b>12</b>
2.1. Inicios de la mecánica cuántica . . . . .	12
2.2. Formulación ortodoxa de la Mecánica Cuántica . . . . .	15
2.3. Reticulado de propiedades . . . . .	20
2.3.1. Estructuras algebraicas . . . . .	20
2.3.2. Reticulado de propiedades de un sistema clásico . . . . .	26
2.3.3. Reticulado de propiedades de un sistema cuántico . . . . .	27
2.4. Conclusiones parciales . . . . .	31
<b>3. Historias Cuánticas</b>	<b>32</b>
3.1. Introducción . . . . .	32
3.2. Historias Consistentes . . . . .	33
3.3. Contextos Generalizados . . . . .	37
3.3.1. Contextos Generalizados Clásicos . . . . .	37
3.3.2. Contextos Generalizados cuánticos . . . . .	41
3.4. Relaciones entre Historias Consistentes y Contextos Generalizados . . . . .	51
3.4.1. Teoría de historias consistentes independientes del estado . . . . .	51
3.4.2. Historias consistentes independientes del estado y Contextos Generalizados . . . . .	53
3.5. Retrodicción de propiedades contrarias . . . . .	54
3.5.1. Propiedades contrarias en la mecánica cuántica ortodoxa . . . . .	55
3.5.2. Propiedades contrarias en la teoría de Historias Consistentes . . . . .	56
3.5.3. Propiedades contrarias en el formalismo de Contextos Generalizados . . . . .	57
3.6. Conclusiones parciales . . . . .	58
<b>4. Aplicaciones de los Contextos Generalizados</b>	<b>62</b>
4.1. Experimento de la doble rendija . . . . .	62
4.1.1. Experimento de la doble rendija sin aparatos de medición . . . . .	64
4.1.2. Experimento de la doble rendija con aparatos de medición . . . . .	65
4.2. Proceso de medición . . . . .	67
4.2.1. Medición cuántica . . . . .	68
4.2.2. Mediciones consecutivas y colapso del vector de estado . . . . .	68
4.3. Proceso de decaimiento . . . . .	71

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	7
4.3.1. Proceso de decaimiento e interpretación ortodoxa . . . . .	72
4.3.2. Proceso de decaimiento e interpretaciones modales . . . . .	73
4.3.3. Proceso de decaimiento sin instrumentos de medición . . . . .	74
4.3.4. Proceso de decaimiento con instrumentos de medición . . . . .	75
4.4. Conclusiones parciales . . . . .	77
<b>5. Conclusiones</b>	<b>80</b>
<b>6. Apéndice</b>	<b>84</b>

# Capítulo 1

## Introducción

El 14 de diciembre de 1900, Max Karl Ernst Ludwig Planck presentó ante la Sociedad Alemana de Física un artículo titulado “La teoría de la ley de distribución de energías del espectro normal”. El trabajo fue recibido sin mayor entusiasmo. Sin embargo, acababa de nacer la física cuántica.

En aquellos años la ciencia física se consideraba prácticamente cerrada con las teorías de Newton y Maxwell. Casi todos los fenómenos encontraban una explicación en el marco de estas teorías y se pensaba que aquellos que todavía no habían podido ser explicados acabarían por resolverse con las leyes disponibles. No obstante, algunos fenómenos se resistían a ser explicados bajo el marco de la mecánica clásica y el electromagnetismo. Uno de ellos era la radiación de cuerpo negro. Para explicar este fenómeno Planck propuso en su artículo lo que ahora se conoce como hipótesis cuántica de Planck, a saber, que la luz y la materia no intercambian energía en cantidades cualesquiera, sino únicamente en cantidades discretas proporcionales a su frecuencia.

La idea de Planck significó el inicio de un nuevo tipo de física que permitió entender una gran cantidad de fenómenos donde las cantidades físicas no toman valores continuos, sino únicamente valores discretos. Guiado por la hipótesis de Planck, en 1905, Albert Einstein explicó el efecto fotoeléctrico postulando que la luz está compuesta por partículas cuánticas individuales. Años más tarde, en 1913, Niels Bohr presentó su modelo atómico cuántico, en el cual las órbitas de los electrones están discretizadas y el pasaje de una órbita a otra sólo es posible emitiendo o absorbiendo cantidades discretas de energía. Otro fenómeno de naturaleza esencialmente cuántica fue observado en 1922 por Walther Gerlach y Otto Stern. Detectaron que el momento angular del electrón toma valores discretos. Para explicar este fenómeno Ralph Kronig, George Uhlenbeck y Samuel Goudsmit postularon la existencia de un momento angular intrínseco discretizado, al que denominaron *espín*. Posteriormente, en 1924, Louis-Victor de Broglie formuló su hipótesis sobre la dualidad onda-partícula de los electrones. Según de Broglie toda la materia presenta características tanto ondulatorias como corpusculares, comportándose de uno u otro modo dependiendo del experimento específico.

Basándose en estas ideas nació la mecánica cuántica moderna. En 1925, Werner Heisenberg presentó la formulación matricial de la mecánica cuántica. Un año más tarde Erwin Schrödinger desarrolló una formulación equivalente, conocida como mecánica ondulatoria. Posteriormente el matemático John von Neumann unificó ambas teorías en un

formalismo común presentado de manera matemáticamente rigurosa. A esta formulación se la conoce como mecánica cuántica ortodoxa.

En la formulación ortodoxa de la mecánica cuántica cada sistema físico se representa por un espacio de Hilbert y sus estados puros se representan por medio de vectores de dicho espacio. Los estados tienen dos tipos de evoluciones temporales. Por un lado, cuando no se realizan mediciones sobre el sistema, la dinámica está determinada por la ecuación de Schrödinger. Por otro lado, cuando el sistema es medido, el estado colapsa al autoestado correspondiente al valor de la magnitud medida. A esta segunda evolución usualmente se la conoce como postulado de colapso del vector de estado. Las propiedades del sistema están representadas por subespacios cerrados del espacio de Hilbert y los observables se representan por los operadores lineales autoadjuntos de este espacio. El conjunto de todas las propiedades tiene estructura de reticulado ortocomplementado, lo que permite definir operaciones lógicas entre propiedades, como la conjunción, la disyunción o la negación. Luego, a partir de la regla de Born, se define una función probabilidad sobre este conjunto. De esta forma es posible calcular probabilidades de las distintas operaciones entre propiedades.

Esta formulación provee un exitoso algoritmo para predecir los resultados de las mediciones experimentales. Sin embargo, la distinción tajante entre el proceso de medición y el resto de los procesos físicos conduce a ciertas dificultades interpretativas. En particular, no es aplicable a sistemas cerrados en los cuales se incluyen a los aparatos de medición. Esto resulta de fundamental importancia en el caso de la cosmología cuántica, en la que el sistema físico es el universo en su totalidad.

Además, como todas las propiedades están referidas a un mismo tiempo, no es posible definir operaciones entre ellas a tiempos distintos. Sin embargo, en muchos procesos físicos es necesario considerar expresiones que involucran propiedades en diferentes instantes. Por ejemplo, en el proceso de medición, una propiedad del sistema medido, en un tiempo previo al de la medición, tiene que ser relacionada con una propiedad del aparato de medición, en un tiempo posterior al de la medición.

Con vistas a superar estas dificultades se desarrollaron diferentes teorías de historias cuánticas. En 1984, Robert B. Griffiths presentó la primera versión de la teoría de Historias Consistentes [7]. Años después presentó algunas modificaciones de aquella versión [8,9]. Por otro lado, Roland Omnès publicó una serie de trabajos [26–28] en los que contribuyó al desarrollo de esta teoría. Paralelamente, Murray Gell-Mann y James Hartle desarrollaron un formalismo de historias similar denominado *Historias Decoherentes* [6]. Si bien estas teorías no son idénticas, sus fuertes similitudes justifican que se las englobe como teorías de historias cuánticas.

Las teorías de historias pretenden resolver las dificultades mencionadas previamente. Por un lado, proveen una interpretación de la mecánica cuántica en la que los procesos de medición son tratados de la misma forma que el resto de los procesos físicos. La medición pierde su estatus privilegiado y pasa a ser descrita como una interacción física ordinaria entre un sistema a ser medido y un aparato de medición. Por lo tanto, estas teorías resultan aplicables a sistemas cerrados en los cuales se incluyen los aparatos de medición.

Por otro lado, extienden el formalismo estándar de la mecánica cuántica de modo tal de poder definir operaciones lógicas entre propiedades a distintos tiempos. Para ello introducen la noción de historia que generaliza a la noción de evento. Una historia se

define como una secuencia de eventos a distintos tiempos u operaciones lógicas entre ellas.

La teoría de Historias Consistentes define qué familias de historias cuánticas son legítimas y permite asignarles probabilidades bien definidas. Para obtener una familia de historias consistentes, éstas deben satisfacer ciertas condiciones denominadas *condiciones de consistencia*. Pero, como las condiciones de consistencia dependen del estado inicial, las propiedades del sistema que pueden ser incluidas en una descripción válida también dependen del estado. Esto es diferente de lo que sucede en el formalismo ortodoxo de la mecánica cuántica, donde los contextos de propiedades admisibles no dependen del estado.

Motivados por esta dificultad conceptual, Roberto Laura, Leonardo Vanni y Marcelo Losada desarrollaron un enfoque alternativo de historias cuánticas denominado *formalismo de Contextos Generalizados* [18,22], que independiza el conjunto de historias cuánticas del estado inicial del sistema. Este enfoque permite describir propiedades en distintos instantes y asignarles probabilidades bien definidas, generalizando el concepto de contexto de la mecánica cuántica a distintos tiempos.

Este trabajo está dedicado al estudio del formalismo de Contextos Generalizados. El punto de partida son los artículos [18,22], en los que se desarrolló el formalismo y se estudió su estructura algebraica. Además, se investigan las relaciones entre este formalismo y la teoría de Historias Consistentes [20] y se demuestran ciertas conexiones entre las condiciones que ambas teorías imponen a los conjuntos de historias cuánticas. También se analiza la posibilidad de la retrodicción de propiedades contrarias en ambos enfoques de historias cuánticas. Finalmente, se aplica el formalismo de Contextos Generalizados a tres procesos físicos: el experimento de la doble rendija [22], el proceso de medición [23] y el proceso de decaimiento [19].

La organización del trabajo es la siguiente. En el capítulo 2 se presentan las ideas centrales de la mecánica cuántica que serán necesarias para introducir las teorías de historias cuánticas. En la sección 2.1 se resume el proceso histórico que dio lugar al surgimiento de la formulación ortodoxa de la mecánica cuántica. En la sección 2.2 se enuncian los axiomas de la mecánica cuántica siguiendo la presentación de von Neumann. En la sección 2.3 se analiza la estructura lógica del conjunto de propiedades de los sistemas cuánticos y se mencionan las motivaciones para el desarrollo de teorías de historias cuánticas.

El capítulo 3 está dedicado a las historias cuánticas. Se introducen dos teorías de historias: la teoría de Historias Consistentes en la sección 3.2 y el formalismo de Contextos Generalizados en la sección 3.3. Luego, en la sección 3.4, se estudian las relaciones entre ambas teorías y en la sección 3.5 se analiza el problema de la retrodicción de propiedades contrarias.

En el capítulo 4 se aplica el formalismo de Contextos Generalizados a tres situaciones de interés físico: el experimento de la doble ranura en la sección 4.1, el proceso de medición en la sección 4.2 y el proceso de decaimiento en la sección 4.3.

Por último, en el capítulo 5 se presentan las conclusiones del trabajo y en el capítulo 6 se incluye un apéndice con las demostraciones de los teoremas que no son esenciales para la comprensión de las ideas principales de la investigación.



# Capítulo 2

## Mecánica cuántica

En este capítulo se presentan las ideas centrales de la mecánica cuántica que serán necesarias para introducir las teorías de historias cuánticas. En la primera sección se resume el proceso histórico que dio lugar al surgimiento de la formulación ortodoxa de la mecánica cuántica. En la segunda sección se enuncian sus axiomas, siguiendo la presentación de von Neumann. En la tercera sección se analiza la estructura del conjunto de propiedades de un sistema cuántico. Por último, se mencionan algunos de los aspectos de la mecánica cuántica que motivaron el desarrollo de las teorías de historias cuánticas.

### 2.1. Inicios de la mecánica cuántica

Se considera como fecha de nacimiento de la mecánica cuántica el 14 de diciembre de 1900, día en el cual Max Planck presentó ante la Sociedad Alemana de Física su célebre artículo titulado “La teoría de la ley de distribución de energías del espectro normal”.

En aquella época reinaba un gran optimismo en el mundo de la física respecto a las teorías de Newton y Maxwell. Se consideraba que todos los fenómenos físicos iban a terminar siendo explicados bajo sus leyes. Sin embargo, algunos de ellos se resistían a ser explicados bajo el paradigma de la mecánica clásica y el electromagnetismo. Uno de ellos era la radiación de cuerpo negro.

Las teorías existentes sostenían que los cuerpos emiten radiación de forma continua. Sin embargo, bajo este supuesto no era posible explicar el espectro del cuerpo negro. Para resolver el problema Planck propuso una idea revolucionaria: la luz y la materia no intercambian energía en cantidades cualesquiera, sino únicamente en cantidades discretas proporcionales a su frecuencia. Más tarde su propuesta fue conocida como hipótesis cuántica de Planck. Este aporte abrió un nuevo camino en la física que permitiría entender una gran cantidad de fenómenos donde las cantidades físicas no toman valores continuos, sino únicamente cantidades discretas. Más adelante estos fenómenos se denominarían *cuánticos*.

Albert Einstein fue uno de los primeros en aplicar la hipótesis cuántica de Planck. En 1905 publicó su famoso artículo “Sobre un punto de vista heurístico sobre la producción y transformación de la luz”, por el cual años después recibiría el Premio Nobel de física. Einstein consideró a la luz como un gas formado por un gran número de partículas, más

tarde denominadas *fotones*, cuyas energías tienen un comportamiento discreto, tal como había sugerido Planck. Esta idea permitió explicar el efecto fotoeléctrico como el resultado de la incidencia de las partículas de luz sobre los electrones del metal. Además, el trabajo de Einstein predijo que la energía con la que los electrones escapan del material aumenta linealmente con la frecuencia de la luz incidente. Sorprendentemente este fenómeno aún no había sido observado en los laboratorios. Su demostración experimental fue llevada a cabo en 1915 por el físico estadounidense Robert Andrews Millikan.

Otra aplicación notable de la hipótesis cuántica fue realizada por el físico danés Niels Bohr, en el año 1913, para explicar la estabilidad atómica y la existencia de espectros de emisión atómica característicos. Años antes, Ernest Rutherford había propuesto el modelo atómico planetario, basado en un núcleo central y electrones orbitando a su alrededor. El problema de este modelo era que contradecía la teoría electromagnética, según la cual los electrones, al ser partículas cargadas, deberían girar perdiendo energía hasta finalmente precipitar al núcleo. Para superar este problema Bohr propuso un modelo atómico alternativo basado en tres postulados: (i) los electrones describen órbitas circulares en torno al núcleo sin irradiar energía, (ii) no toda órbita está permitida, sino únicamente aquellas que satisfacen una condición de cuantización, (iii) el electrón sólo emite o absorbe energía en los saltos de una órbita permitida a otra. A partir de estos postulados, Bohr explicó las líneas espectrales del átomo de hidrógeno y la estabilidad del átomo de Rutherford.

El modelo atómico de Bohr significó un avance en el conocimiento del átomo y de la teoría cuántica. Sin embargo presentaba ciertas dificultades para explicar el espectro de átomos más complejos y aún en el caso del átomo de hidrógeno no explicaba el espectro de estructura fina. Estas dificultades dieron lugar a nuevas aplicaciones de la hipótesis cuántica de Planck.

En 1922, los físicos alemanes Otto Stern y Walther Gerlach observaron que el momento angular del electrón toma valores discretos. Para explicar este fenómeno Ralph Kronig, George Uhlenbeck y Samuel Goudsmit postularon la existencia de un momento angular intrínseco, que únicamente toma dos valores, conocido como espín. Dos años más tarde, el físico francés Louis-Victor de Broglie formuló su famosa hipótesis sobre la dualidad onda-partícula de la materia. Según de Broglie toda la materia presenta características tanto ondulatorias como corpusculares, comportándose de uno u otro modo dependiendo del experimento específico. Esta propuesta estuvo basada en la idea de Einstein para explicar el efecto fotoeléctrico. Einstein había sugerido que en determinados procesos la luz se comporta como corpúsculos. De Broglie se preguntó si no podría ser de manera inversa, es decir, que una partícula material pudiese mostrar en ciertas circunstancias comportamientos ondulatorios. Esta hipótesis se confirmó tres años después para el caso de los electrones, al observar fenómenos de difracción en el experimento de la doble rendija de Young, una característica propia de las ondas.

Al conjunto de estos procedimientos heurísticos, desarrollados a partir de la hipótesis de Planck, se lo suele denominar *teoría cuántica antigua*. Si bien no llegó a ser una teoría completa y matemáticamente consistente, dio lugar al surgimiento de la teoría cuántica moderna.

El desarrollo de la mecánica cuántica moderna tuvo su inicio en 1925, cuando Werner Heisenberg concibió la idea de representar las cantidades físicas a través de conjuntos de números complejos dependientes del tiempo. Fue Max Born quien se dio cuenta de que

esa forma de trabajar ya había sido estudiada por los matemáticos y no era otra cosa que la teoría de matrices. Meses después el nuevo enfoque fue desarrollado conjuntamente por Born, Ernest Pascual Jordan y el propio Heisenberg; y se convirtió en lo que hoy se conoce como mecánica matricial, la primera formulación completa y consistente de la mecánica cuántica.

Uno de los resultados más llamativos de su propuesta fue el famoso principio de incertidumbre, que afirma que las cantidades físicas representadas por matrices que no conmutan no pueden ser determinadas simultáneamente con arbitraria precisión. En particular, la posición y el momento de una partícula son cantidades físicas representadas por matrices que no conmutan. Por lo tanto, cuanto más se determina la posición de una partícula, menos se puede determinar su momento, lo cual implica que las partículas no tienen asociadas trayectorias bien definidas. El principio de incertidumbre no tiene análogo clásico y constituye una de las diferencias fundamentales entre la física clásica y la física cuántica.

Paralelamente a la formulación matricial, Erwin Schrödinger desarrolló una formulación equivalente de la mecánica cuántica, conocida como mecánica ondulatoria. En enero de 1926 publicó un trabajo titulado “Cuantificación como un problema de valores propios” en el cual introdujo la función de onda y presentó lo que hoy se conoce como la ecuación de Schrödinger. Además, mostró que daba los valores correctos para las energías del átomo de hidrógeno. En un segundo trabajo resolvió el oscilador armónico cuántico, el rotor rígido y la molécula diatómica, y dio una nueva derivación de la ecuación de Schrödinger. Finalmente, en un tercer trabajo demostró la equivalencia de su formulación con la de Heisenberg. Estos trabajos fueron de gran importancia para el desarrollo de la mecánica cuántica e inmediatamente fueron reconocidos por la comunidad científica.

La introducción de la función de onda fue una idea novedosa, sin embargo, no quedaba claro cómo debía interpretarse este nuevo objeto matemático. En un principio, Schrödinger esperaba que la función de onda representara algún tipo de entidad real, de manera similar al campo electromagnético, pero esto no resultó adecuado. En 1926, Max Born publicó un artículo en el que propuso la interpretación probabilística de la función de onda. Según Born, la probabilidad de medir una partícula en una determinada posición viene dada por el cuadrado del valor absoluto de la función de onda evaluada en dicha posición. Esta interpretación permitió relacionar los cálculos de la mecánica ondulatoria con las observaciones experimentales. A la regla para obtener la probabilidad se la conoce como regla de Born.

Con no sólo una, sino dos formulaciones completas, la mecánica cuántica se desarrolló de manera abrupta. Se aplicó a los átomos, moléculas, sólidos y a cuestiones relativas a la estructura de las estrellas. También se logró resolver el átomo de helio, que había derrotado a la teoría cuántica antigua. Además se inició el camino de unificación de la mecánica cuántica y la relatividad especial. En 1927, Paul Dirac propuso una ecuación de onda relativista para el electrón, más tarde conocida como ecuación de Dirac. Esta ecuación predijo la existencia del espín del electrón y condujo a Dirac a postular la existencia del positrón.

Sin embargo, aún hacía falta unificar las teorías de Heisenberg y Schrödinger en un formalismo común y presentarlo de manera matemáticamente rigurosa. Esta tarea fue desarrollada por el matemático húngaro John von Neumann. En 1932 publicó el libro

*La fundamentación matemática de la mecánica cuántica*, el cual no tardó en convertirse en un clásico de la literatura sobre física cuántica. En este trabajo se presentó una versión axiomática de la teoría cuántica, posteriormente conocida como mecánica cuántica ortodoxa, la cual incluye como casos particulares las formulaciones de Heisenberg y de Schrödinger.

La formulación de la mecánica cuántica de von Neumann se basa en ciertos espacios abstractos denominados *espacios de Hilbert*. Un sistema cuántico tiene asociado un espacio de Hilbert y cada estado puro del sistema es representado por un vector de dicho espacio, análogamente a lo que sucede en mecánica clásica con el espacio de fases. Los observables, como la posición, el momento o la energía, se representan por operadores autoadjuntos sobre el espacio de Hilbert y las propiedades del sistema por subespacios de dicho espacio. De esta manera, la física cuántica queda representada por las matemáticas de los espacios de Hilbert y sus operadores lineales.

El conjunto de todas las propiedades tiene estructura de reticulado ortocomplementado, lo que permite definir operaciones entre propiedades lógicas, como la conjunción, la disyunción o la negación. Luego, a partir de la regla de Born, se define una función de probabilidad sobre este conjunto. De esta forma es posible calcular probabilidades de las distintas operaciones entre propiedades.

En un trabajo complementario de 1936, von Neumann y Garret Birkhoff analizaron la estructura algebraica del conjunto de las propiedades de los sistemas cuánticos, y demostraron que la estructura lógica de la mecánica cuántica es sustancialmente diferente de la lógica clásica. En particular, demostraron que las leyes distributivas de la lógica clásica,

$$\begin{aligned} p \vee (q \wedge r) &= (p \vee q) \wedge (p \vee r), \\ p \wedge (q \vee r) &= (p \wedge q) \vee (p \wedge r), \end{aligned}$$

no son válidas para la teoría cuántica [2]. Esta propiedad de la lógica cuántica se conoce como no distributividad y será esencial al estudiar sus diferencias con la estructura lógica de la mecánica clásica.

El formalismo matemático desarrollado por von Neumann llegó a convertirse en la formulación estándar de la mecánica cuántica y en el punto de partida obligado para las diferentes interpretaciones de la teoría. Para la formulación de las teorías de historias cuánticas se requiere tener presente dicha formulación. En la siguiente sección se describen sus aspectos centrales.

## 2.2. Formulación ortodoxa de la Mecánica Cuántica

En el clásico libro *La fundamentación matemática de la mecánica cuántica*, John von Neumann presentó la primera versión axiomática de la mecánica cuántica. Su formulación no tardó en convertirse en la versión estándar de la teoría y se denominó *formulación ortodoxa de la mecánica cuántica*. Para la formulación de las teorías de historias cuánticas son imprescindibles algunos aspectos de esta formulación. A continuación se describen los conceptos centrales de la mecánica cuántica ortodoxa y se presentan sus axiomas.

En toda teoría podemos distinguir dos tipos de conceptos: primitivos y derivados. Los primeros no admiten definición, mientras que los segundos se definen a partir de los primeros. En el caso de la formulación ortodoxa, se cuentan entre los conceptos primitivos las siguientes nociones físicas fundamentales, a saber: *sistema físico*, *estado*, *observable* y *propiedad*. Estas nociones son centrales y forman parte de sus axiomas. Si bien en tanto conceptos primitivos no son definibles, deben ser dotados de contenido empírico por medio de una interpretación. A continuación se presenta una caracterización de los mismos [12, 13].

#### CONCEPTOS PRIMITIVOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

- **Sistema físico:**

Es una porción del universo elegida para ser descripta por medio de la teoría. Todo aquello que no forma parte del sistema es llama ambiente. El ambiente en sí mismo no es objeto de análisis, sin embargo sus efectos sobre el sistema se han de tener en cuenta. La elección del sistema físico es una decisión del investigador, la cual está guiada por motivos pragmáticos. Una vez determinado el sistema físico quedan determinadas ciertas propiedades invariables del objeto descripto, como la cantidad de partículas, sus masas o sus cargas eléctricas.

- **Estado:**

Los estados de un sistema físico determinan las distribuciones de probabilidad para cada posible medición del sistema físico. Dos estados son distintos si difieren en al menos una distribución de probabilidad para alguna medición del sistema. Usualmente los estados se identifican con las clases de preparaciones equivalentes realizadas sobre el sistema físico.

- **Observable:**

Es una cantidad física que se puede medir en el sistema físico en consideración.

- **Propiedad:**

Son los posibles rangos de valores de las cantidades físicas de un sistema.

Luego de caracterizar las nociones físicas fundamentales, se definen los axiomas de la teoría. Las presentaciones axiomáticas en la literatura presentan ciertas diferencias. En este escrito se ha elegido seguir, principalmente, a la formulación de M. L. Dalla Chiara, R. Giuntini y R. Greechie [3].

#### AXIOMAS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

- **Axioma 1: Sistema físico**

*Todo sistema físico aislado  $\mathcal{S}$  se representa por un espacio de Hilbert complejo separable  $\mathcal{H}$ .*

La formulación von Neumann se basa en la matemática de los espacios de Hilbert. Este espacio cumple el mismo rol que el espacio de fases en la mecánica clásica.

■ **Axioma 2: Sistema compuesto**

*Los sistemas físicos compuestos se representan por el producto tensorial de los espacios de Hilbert que representan a cada subsistema que lo compone.*

Sea un sistema físico  $\mathcal{S}$  compuesto por dos subsistemas  $\mathcal{S}_1$  y  $\mathcal{S}_2$ , representados por los espacios de Hilbert  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$ , respectivamente. Según este axioma, el sistema compuesto  $\mathcal{S}$  se representa por el espacio de Hilbert  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ .

■ **Axioma 3: Estados**

*Los estados de un sistema físico se representan por operadores autoadjuntos, no negativos y de traza uno, sobre el espacio de Hilbert del sistema.*

Los operadores sobre  $\mathcal{H}$  que satisfacen estas propiedades se llaman operadores densidad y generalmente se notan con la letra griega  $\rho$ .

- $\rho^\dagger = \rho$  (Autodjunto)
- $\langle \varphi | \rho | \varphi \rangle \geq 0; \forall |\varphi\rangle \in \mathcal{H}$  (No negativo)
- $Tr(\rho) = 1$  (De traza uno)

Dentro del conjunto de estados se distinguen dos tipos, a saber, los estados puros y los estados mezcla. Los primeros corresponden a la máxima información sobre el sistema, mientras que los segundos no necesariamente representan máxima información.

Un hecho relevante es que, si bien no todo estado es un proyector ortogonal, todo estado puede escribirse como una suma ponderada, finita o infinita, de proyectores ortogonales. Es decir, para todo operador densidad  $\rho$  de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , existen una base ortonormal numerable  $\{|\varphi_i\rangle\}_{i \in I}$  de vectores de  $\mathcal{H}$  y un conjunto numerable de números reales positivos  $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ , llamados pesos de  $\rho$ , tales que

$$\rho = \sum_{i \in I} \lambda_i |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i|, \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1 \quad \forall i \in I \quad \text{y} \quad \sum_{i \in I} \lambda_i = 1.$$

*Estados puros:* Un estado puro es aquel que se representa por un operador densidad  $\rho$  que, a su vez, es un proyector ortogonal, es decir,  $\rho^2 = \rho$ .

Por lo tanto, también pueden representarse por los subespacios unidimensionales asociados a sus respectivos proyectores ortogonales o, como suele ser costumbre, por un vector de norma uno de dicho subespacio.

Existen condiciones equivalentes para caracterizar a los estados puros. Se puede demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

1.  $\rho^2 = \rho$ .
2.  $Tr(\rho^2) = 1$ .
3. Existe  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$  tal que  $\rho = |\phi\rangle \langle \phi|$ .

*Estados mezcla:* Un estado mezcla es aquel que se representa por un operador densidad  $\rho$  que no es un proyecto ortogonal. Los estados mezcla satisfacen las siguientes propiedades:

1.  $\rho^2 \neq \rho$ .
2.  $Tr(\rho^2) < 1$ .
3. No existe  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$  tal que  $\rho = |\phi\rangle\langle\phi|$ .

■ **Axioma 4: Observables**

*Cada observable  $\mathcal{A}$  de un sistema físico se representa por un operador autoadjunto  $A$ . Los valores que puede tomar el observable  $\mathcal{A}$  son todos los valores que constituyen el espectro de su respectivo operador  $A$ .*

Si el espectro es discreto, entonces está formado por los autovalores del operador  $A$ . Sean  $a_1, a_2, \dots$ , sus autovalores y  $\Pi_1, \Pi_2, \dots$  los proyectores asociados a cada autovalor, entonces la descomposición espectral toma la forma

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \Pi_i.$$

En particular, si  $A$  es no degenerado, cada autovalor tiene asociado un proyector sobre un espacio vectorial unidimensional. Sea  $|a_i\rangle$  el autovector asociado al autovalor  $a_i$  y sea  $\Pi_i = |a_i\rangle\langle a_i|$  su proyector asociado. Entonces, la descomposición espectral de  $A$  es la siguiente

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i |a_i\rangle\langle a_i|.$$

■ **Axioma 5: Propiedades**

*Las propiedades de un sistema físico se representan por subespacios de  $\mathcal{H}$  o por sus respectivos proyectores ortogonales.*

Los subespacios de un espacio de Hilbert son subespacios vectoriales cerrados. Como para cada subespacio vectorial cerrado  $V \subseteq \mathcal{H}$  existe un único proyector ortogonal  $\Pi_V$  (es decir,  $\Pi_V^2 = \Pi_V, \Pi_V^\dagger = \Pi_V$ ) tal que  $V = \Pi_V \mathcal{H}$ , entonces cada propiedad puede representarse indistintamente por un subespacio  $V$  o por su respectivo proyector  $\Pi_V$ . Al conjunto de todos los subespacios de  $\mathcal{H}$  se lo denota por  $\mathcal{C}(\mathcal{H})$  y al conjunto de todos los proyectores ortogonales sobre  $\mathcal{H}$  se lo denota por  $\Pi(\mathcal{H})$ .

■ **Axioma 6: Dinámica**

*La evolución temporal espontánea de los estados de un sistema físico aislado está determinada por la ecuación de Liouville – von Neumann.*

Si en un tiempo  $t_0$  el sistema físico se encuentra en el estado inicial  $\rho_0$ , en un tiempo  $t$  el sistema se encontrará en el estado  $\rho(t)$ , dado por

$$\rho(t) = U(t, t_0)\rho_0U^\dagger(t, t_0),$$

donde  $U(t, t_0) = e^{-iH(t-t_0)/\hbar}$  es el operador de evolución temporal y  $H$  el operador hamiltoniano del sistema físico. Como  $H$  es autoadjunto, se puede demostrar

$$U^\dagger(t, t_0) = U(t_0, t); \quad U^\dagger(t, t_0)U(t, t_0) = U(t, t_0)U^\dagger(t, t_0) = I.$$

■ **Axioma 7: Postulado de colapso**

*Dado un sistema físico en un estado  $\rho$ , luego de una medición no destructiva de una propiedad representada por el proyector  $\Pi$ , el estado  $\rho$  colapsa a un nuevo estado dado por:*

$$\rho \longmapsto \frac{\Pi\rho\Pi}{\text{Tr}(\rho\Pi)}.$$

■ **Axioma 8: Probabilidad**

*Dado un sistema físico en un estado  $\rho$ , la probabilidad de que se mida una propiedad  $p$ , representada por el proyector  $\Pi_p$ , está dada por la regla de Born:*

$$\text{Pr}_\rho(p) = \text{Tr}(\rho\Pi_p).$$

Se puede demostrar que para cualquier estado  $\rho$  y cualquier propiedad  $p$ ,

$$\text{Pr}_\rho(p) \in [0, 1].$$

Más aún, para la propiedad trivial  $p = \mathbf{1}$ , representada por  $\Pi_{\mathbf{1}} = I$ , se tiene que

$$\text{Pr}_\rho(\mathbf{1}) = \text{Tr}(\rho I) = 1.$$

Estas dos propiedades no son suficientes para definir una probabilidad, hace falta una tercera condición, a saber, la condición de  $\sigma$ -aditividad.

Para poder plantear esta última condición hace falta que el conjunto de todas las propiedades tenga una estructura de reticulado booleano. En la próxima sección se introducen los elementos básicos de los reticulados, se demuestra que el conjunto de propiedades de un sistema cuántico tiene estructura de reticulado ortocomplementado y se explica cómo obtener una probabilidad a partir de la regla de Born.

## 2.3. Reticulado de propiedades

En la sección anterior se describieron las nociones físicas fundamentales de la mecánica cuántica. Entre ellas se encuentra el concepto de propiedad, el cual no sólo ocupa un rol central en la mecánica cuántica, sino también en la mecánica clásica.

En la mecánica clásica todo sistema físico se representa por un espacio de fases. Los estados del sistema se representan por puntos de dicho espacio y las propiedades son representadas por sus subconjuntos. Por ejemplo, si el sistema clásico es un péndulo, a la propiedad “la velocidad en el punto más bajo de la trayectoria es mayor que 5 metros por segundo” se la representa por un conjunto de estados del sistema que verifiquen esa propiedad, es decir, un subconjunto del espacio de fases. En cambio, en la mecánica cuántica cada sistema físico se representa por un espacio de Hilbert y sus propiedades por subespacios vectoriales cerrados o por sus correspondientes proyectores ortogonales.

En ambos casos el conjunto de todas las propiedades de un sistema físico presenta cierta estructura algebraica particular, a saber, la de reticulado ortocomplementado. Esta estructura es la que permite definir operaciones lógicas entre propiedades, como la conjunción, la disyunción o la negación. Sin embargo, una diferencia fundamental entre los reticulados clásicos y cuánticos es que los primeros son reticulados distributivos, mientras que los segundos no lo son. Esta característica es necesaria para poder definir una probabilidad. Por lo tanto, en el caso cuántico sólo es posible definir probabilidades sobre los subreticulados distributivos del reticulado de propiedades.

La estructura de reticulado también es de interés para el estudio de las teorías de historias cuánticas, pues el conjunto de todas las historias de un sistema cuántico posee la misma estructura algebraica. En los siguientes apartados se analizan los reticulados clásicos y cuánticos. Para ello primero se deben recordar las definiciones de algunos conceptos algebraicos básicos.

### 2.3.1. Estructuras algebraicas

En este apartado se resumen brevemente las definiciones de algunas nociones algebraicas que estarán presentes a lo largo del trabajo [1, 3, 12].

#### Definición 2.3.1 (Relación)

Sean  $A$  y  $B$  conjuntos. Una relación  $R$  entre  $A$  y  $B$  es un subconjunto del producto cartesiano  $A \times B$ .

Dados  $x \in A$  e  $y \in B$ , se dice que  $x$  está relacionado con  $y$  si  $(x, y) \in R$  y se nota  $xRy$ .

#### Definición 2.3.2 (Propiedades de las relaciones)

Sea  $R \subseteq A \times A$  una relación.  $R$  se dice:

- **Reflexiva** si y sólo si, para todo  $x \in A$ ,  $xRx$ .
- **Simétrica** si y sólo si, para todo  $x, y \in A$ ,  $xRy$  implica  $yRx$ .
- **Antisimétrica** si y sólo si, para todo  $x, y \in A$ ,  $xRy$  e  $yRx$  implican  $x = y$ .
- **Transitiva** si y sólo si, para todo  $x, y, z \in A$ ,  $xRy$  e  $yRz$  implican  $xRz$ .

**Definición 2.3.3** (*Relación de equivalencia*)

Sea  $R \subseteq A \times A$  una relación.  $R$  es una relación de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva, y se nota con el símbolo  $\sim$ .

**Definición 2.3.4** (*Clase de equivalencia*)

Sea  $\sim \subseteq A \times A$  una relación de equivalencia y sea  $x \in A$ . Se llama clase de equivalencia de  $x$  al conjunto formado por todos los elementos de  $A$  equivalentes a  $x$ , y se nota  $[x]$ .

$$[x] = \{y \mid y \sim x\}.$$

Al conjunto formado por todas las clases de equivalencia se lo nota  $A/\sim$ .

**Definición 2.3.5** (*Relación de orden*)

Sea  $R \subseteq A \times A$  una relación.  $R$  es una relación de orden si es reflexiva, antisimétrica y transitiva, y se nota con el símbolo  $\leq$ .

**Definición 2.3.6** (*Conjunto parcialmente ordenado*)

Dados un conjunto  $A$  y una relación de orden  $\leq$  sobre  $A$ , se llama conjunto parcialmente ordenado al par  $(A, \leq)$ .

**Definición 2.3.7** (*Supremo e ínfimo*)

Sea  $(A, \leq)$  un conjunto parcialmente ordenado y  $X$  un subconjunto de  $A$ . Dado  $s \in A$ ,  $s$  es un supremo de  $X$  si satisface:

- (I)  $\forall x \in X, x \leq s$ ;
- (II)  $\forall a \in A$ ; si  $a \geq x \forall x \in X$ , entonces  $s \leq a$ .

Dado  $i \in A$ ,  $i$  es un ínfimo de  $X$  si satisface:

- (I)  $\forall x \in X, i \leq x$ ;
- (II)  $\forall a \in A$ ; si  $a \leq x \forall x \in X$ , entonces  $a \leq i$ .

Si existen el ínfimo y el supremo, son únicos.

**Definición 2.3.8** (*Reticulado*)

Sea  $(A, \leq)$  un conjunto parcialmente ordenado.  $(A, \leq)$  es un reticulado si satisface las siguientes condiciones:

- i) Para todo  $x, y \in A$ , existe el supremo de  $\{x, y\}$ .
  - ii) Para todo  $x, y \in A$ , existe el ínfimo de  $\{x, y\}$ .
- Dados  $x, y \in A$ , se notan:  $x \vee y = \sup\{x, y\}$ ,  $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ .

Los reticulados satisfacen una serie de propiedades interesantes. El siguiente teorema presenta las más relevantes.

**Teorema 2.3.9** Sea  $(A, \leq)$  un reticulado y sean  $x, y, z \in A$ , entonces se cumplen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
x \wedge x = x; \quad x \vee x = x & \quad (\text{Idempotencia}) \\
x \wedge y = y \wedge x; \quad x \vee y = y \vee x & \quad (\text{Conmutatividad}) \\
x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z; \quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z & \quad (\text{Asociatividad}) \\
x \wedge (x \vee y) = x; \quad x \vee (x \wedge y) = x & \quad (\text{Absorción}) \\
x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z); \quad (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z) & \quad (\text{Desigualdades distributivas})
\end{aligned}$$

Las cuatro primeras propiedades capturan la estructura algebraica de los reticulados. A partir de ellas es posible dar una definición alternativa de los reticulados.

**Definición 2.3.10** (*Reticulado como estructura algebraica*)

Una estructura algebraica  $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee)$ , donde  $A$  es un conjunto no vacío y  $\vee, \wedge$  son dos operaciones binarias sobre  $A$ , es un reticulado si satisface las cuatro primeras propiedades del teorema 2.3.9: idempotencia, conmutatividad, asociatividad y absorción.

A partir de esta definición se obtiene un reticulado de acuerdo con la primera definición. Para esto basta definir una relación de orden  $\leq$  en  $A$  dada por

$$x \leq y \text{ si y sólo si } x \vee y = y.$$

Luego,  $(A, \leq)$  es un reticulado y se cumple

$$\sup\{x, y\} = x \vee y, \quad \inf\{x, y\} = x \wedge y.$$

**Definición 2.3.11** (*Reticulado completo y  $\sigma$ -completo*)

Un reticulado  $(A, \leq)$  se dice completo si para todo subconjunto  $X \subseteq A$  existen el ínfimo y el supremo, y se dice  $\sigma$ -completo si para todo subconjunto numerable  $X \subseteq A$  existen el ínfimo y el supremo.

**Definición 2.3.12** (*Reticulado acotado*)

Un reticulado  $(A, \leq)$  es acotado si existen en  $A$  un elemento nulo  $\mathbf{0}$  y un elemento universal  $\mathbf{1}$ , tales que

$$\mathbf{0} \leq x, \quad x \leq \mathbf{1}, \quad \forall x \in A.$$

En caso de existir, son únicos.

**Definición 2.3.13** (*Cubrimiento*)

Sea  $(A, \leq)$  un reticulado y sean  $x, y \in A$ . Se dice que  $x$  cubre a  $y$  si  $y \leq x$ ,  $y \neq x$  y  $\forall z \in A$  tal  $y \leq z \leq x$ ,  $y = z$  o  $x = z$ .

Es decir,  $x$  cubre a  $y$  si  $x$  es inmediatamente superior a  $y$  respecto a la relación de orden  $\leq$ .

A partir de la noción de cubrimiento se define la propiedad de cubrimiento, característica importante de algunos reticulados, entre ellos los reticulados de propiedades de la mecánica cuántica.

**Definición 2.3.14** (*Propiedad de cubrimiento*)

Un reticulado  $(A, \leq)$  tiene la propiedad del cubrimiento si y sólo si  $\forall x, y \in A$ , si  $x$  cubre a  $x \wedge y$ , entonces  $x \vee y$  cubre a  $y$ .

Algunos reticulados acotados contienen elementos particulares, llamados átomos. Estos ocupan un rol especial en los reticulados de propiedades clásicos y cuánticos.

**Definición 2.3.15** (*Átomo*)

Sea  $(A, \leq)$  un reticulado acotado. Un elemento  $x \in A$  es un átomo si y sólo si  $x$  cubre al elemento nulo  $\mathbf{0}$ .

**Definición 2.3.16** (*Atomicidad*)

Un reticulado  $(A, \leq)$  es atómico si y sólo si,  $\forall y \in A - \{\mathbf{0}\}$ , existe un átomo  $x$  tal que  $x \leq y$ .

Todo reticulado finito es atómico. Al mismo tiempo, existen reticulados infinitos acotados que no son atómicos, por ejemplo el intervalo real  $[0, 1]$  con el orden usual de los números reales.

**Definición 2.3.17** (*Reticulado atomístico*)

Un reticulado atómico  $(A, \leq)$  es atomístico si  $\forall y \in A$  existe un conjunto de átomos,  $\{x_i\}_{i \in I}$ , tales que  $y = \sup\{x_i \mid i \in I\}$ .

Cuando  $(A, \leq)$  es atomístico, al conjunto de sus átomos se lo llama generador del reticulado y se dice que  $A$  está generado por dicho conjunto.

**Definición 2.3.18** (*Reticulado complementado*)

Un reticulado  $(A, \leq)$  es complementado si es acotado y, para todo  $x \in A$ , existe  $y \in A$  tal que

$$x \wedge y = \mathbf{0} \quad y \quad x \vee y = \mathbf{1}.$$

El elemento  $y$  se llama complemento de  $x$ .

En un reticulado complementado cada elemento puede tener más de un complemento, sin embargo, si también es distributivo, entonces cada elemento  $x$  tiene un único complemento, y satisface  $(x')' = x$ .

A partir de un reticulado complementado es posible definir una operación unaria que recoja las propiedades de la negación lógica, denominada *complementación*.

**Definición 2.3.19** (*Reticulado ortocomplementado*)

Una estructura  $(A, \leq, ')$  es un reticulado ortocomplementado si

(i)  $(A, \leq)$  es un reticulado complementado;

(ii)  $'$  es una operación unaria sobre  $A$ , llamada complementación, que satisface lo siguiente:

(a)  $x'$  es un complemento de  $x$ .

$$(b) \ x = (x)'$$

La existencia de una operación de negación nos permite definir una relación de ortogonalidad.

**Definición 2.3.20** (*Ortogonalidad*)

Sea  $(A, \leq, ')$  un reticulado ortocomplementado y sean  $x, y \in A$ . Se dice que  $x$  es ortogonal a  $y$  si  $x \leq y'$ , y se nota  $x \perp y$ .

Un conjunto  $S \subseteq A$  se dice ortogonal si, para todo  $x, y \in S$  tales que  $x \neq y$ ,  $x \perp y$ .

En un reticulado ortocomplementado  $(A, \leq, ')$  valen las siguientes propiedades:

- (1)  $x \wedge x' = \mathbf{0}$  (No contradicción);
- (2)  $x \vee x' = \mathbf{1}$  (Tercero excluido);
- (3)  $x \leq y$  implica  $y' \leq x'$  (Contraposición);
- (4)  $x' \wedge y' = (x \vee y)'$  (Ley de De Morgan);
- (5)  $x' \vee y' = (x \wedge y)'$  (Ley de De Morgan).

La última propiedad del teorema 2.3.9 es importante para caracterizar un tipo de reticulados que será de interés a lo largo del trabajo, a saber, los reticulados distributivos.

**Definición 2.3.21** (*Reticulado distributivo*)

Un reticulado es distributivo si las desigualdades distributivas son igualdades, es decir

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \quad \forall x, y, z \in A.$$

Es fácil ver que si alguna de las desigualdades distributivas es una igualdad, entonces la otra también lo es.

Es importante mencionar que el reticulado de propiedades de los sistemas cuánticos no es distributivo, sin embargo, satisface una condición más débil, llamada ortomodularidad.

**Definición 2.3.22** (*Reticulado ortomodular*)

Un estructura  $(A, \leq, ')$  es un reticulado ortomodular si es un reticulado ortocomplementado y satisface las siguientes condiciones:

- (i)  $\forall x, y \in B$ , si  $x \perp y$  entonces  $x \vee y \in B$
- (ii)  $\forall x, y \in B$ , si  $x \leq y$  entonces  $y = x \vee (x \wedge y)'$

Un ejemplo de reticulado ortomodular es el reticulado de subespacios cerrados de un espacio de Hilbert. Este reticulado es fundamental para la mecánica cuántica, pues las propiedades de un sistema cuántico se representan por subespacios cerrados de un espacio de Hilbert.

Otra propiedad que puede satisfacer un reticulado es la modularidad, la cual es una condición más débil que la distributividad, pero más fuerte que la ortomodularidad.

**Definición 2.3.23** (*Reticulado modular*)

Un reticulado  $(A, \leq)$  es modular si satisface

$$\forall x, y, z \in B, \text{ si } x \leq y \text{ entonces, } x \vee (z \wedge y) = (x \vee z) \wedge y$$

Todo reticulado distributivo es modular y todo reticulado modular es ortomodular, pero las implicaciones a la inversa, en general, no se cumplen. Más precisamente,

$$\text{Distributividad} \not\Rightarrow \text{Modularidad} \not\Rightarrow \text{Ortomodularidad}.$$

Una característica importante de los reticulados ortomodulares es que si son atómicos, entonces son atomísticos, es decir, todo elemento del reticulado es el supremo de algún conjunto de átomos.

Una clase especial de reticulados son aquellos que son ortocomplementados y distributivos, pues recogen la estructura del cálculo proposicional de la lógica de primer orden y físicamente se corresponden con la estructura del conjunto de propiedades de los sistemas clásicos. A estos reticulados se los llama booleanos.

**Definición 2.3.24** (*Reticulado booleano*)

Un reticulado booleano es un reticulado ortocomplementado y distributivo.

Si un reticulado es complementado y distributivo, resulta ser ortocomplementado. Por lo tanto, también es un reticulado booleano. Un ejemplo fundamental de reticulado booleano es el álgebra de conjuntos.

Sea  $U$  un conjunto y sea  $(A, \leq, ')$  una estructura tal que:

- (i)  $A = \mathcal{P}(U)$  es el conjunto de partes de  $U$ ;
- (ii)  $\leq$  es la inclusión de conjuntos  $\subseteq$ ;
- (iii)  $'$  es el complemento de conjuntos.

Entonces,  $(A, \leq, ')$  resulta un reticulado booleano y además:

- El ínfimo  $\wedge$  y el supremo  $\vee$  están dados por la intersección  $\cap$  y la unión  $\cup$  de conjuntos respectivamente;
- El elemento nulo  $\mathbf{0}$  es el conjunto vacío y el elemento universal  $\mathbf{1}$  es el conjunto  $U$ .

Hasta aquí se han presentado las definiciones de las estructuras algebraicas que serán necesarias para describir la estructura de los conjuntos de propiedades de los sistemas físicos. En los siguientes apartados se describen los reticulados de propiedades de los sistemas clásicos y cuánticos.

### 2.3.2. Reticulado de propiedades de un sistema clásico

La mecánica clásica, al igual que la mecánica cuántica, presenta ciertas nociones físicas fundamentales, a saber: *sistema físico*, *estado*, *observable* y *propiedad*. Estos conceptos se representan por entidades matemáticas [12].

Los sistemas físicos se representan por un espacio de coordenadas y momentos generalizados, al cual se denomina *espacio de fases* y se denota por  $\Gamma$ ,

$$\Gamma = \{(\bar{q}, \bar{p}) \mid \bar{q} \text{ son las coordenadas generalizadas y } \bar{p} \text{ son los momentos generalizados}\}.$$

Los estados del sistema se representan por puntos de dicho espacio y los observables están dados por funciones de  $\Gamma$  a los reales. Por último, las propiedades se representan por subconjuntos del espacio de fases.

- Sistema físico  $S \iff \Gamma_S$
- Estado  $\mathcal{E} \iff (\bar{x}_{\mathcal{E}}, \bar{p}_{\mathcal{E}}) \in \Gamma_S$
- Observable  $\mathcal{O} \iff f_{\mathcal{O}} : \Gamma_S \rightarrow \mathbb{R}$
- Propiedad  $p \iff C_p \subseteq \Gamma_S$

Se dice que un sistema físico  $S$  en un estado  $\mathcal{E}$  tiene una propiedad  $p$  si y sólo el estado  $\mathcal{E}$  está representado por un punto  $(\bar{q}_{\mathcal{E}}, \bar{p}_{\mathcal{E}}) \in \Gamma_S$  que pertenece al subconjunto  $C_p$ , es decir

$$\text{El sistema } S, \text{ preparado en } \mathcal{E}, \text{ tiene } p \iff (\bar{q}_{\mathcal{E}}, \bar{p}_{\mathcal{E}}) \in C_p \subseteq \Gamma_S.$$

El conjunto de todas las propiedades de un sistema clásico está representado por el conjunto de partes de  $\Gamma$ , el cual se denota por  $\mathcal{P}(\Gamma)$ . Si se considera a este conjunto, con la relación de orden dada por la inclusión de conjuntos  $\subseteq$ , se obtiene un reticulado acotado, distributivo y complementado, con las siguientes características:

- El ínfimo y el supremo están dados por la intersección y la unión de conjuntos,
  - $\inf(C_1, C_2) = C_1 \cap C_2$ ,
  - $\sup(C_1, C_2) = C_1 \cup C_2$ .
- El elemento nulo viene dado por el conjunto vacío y el elemento universal por el espacio de fases,
  - $\mathbf{0} = \emptyset$ ,
  - $\mathbf{1} = \Gamma$ .
- Se satisfacen las igualdades distributivas,
  - $C_1 \vee (C_2 \wedge C_3) = (C_1 \vee C_2) \wedge (C_1 \vee C_3), \quad \forall C_1, C_2, C_3 \in \mathcal{P}(\Gamma)$ ,
  - $C_1 \wedge (C_2 \vee C_3) = (C_1 \wedge C_2) \vee (C_1 \wedge C_3), \quad \forall C_1, C_2, C_3 \in \mathcal{P}(\Gamma)$ .
- Para cada  $C \in \mathcal{P}(\Gamma)$ , el conjunto  $\Gamma - C \in \mathcal{P}(\Gamma)$  es un complemento,

- $C \cap (\Gamma - C) = \emptyset$ ,
- $C \cup (\Gamma - C) = \Gamma$ .

Además, como el reticulado es complementado y distributivo, entonces resulta ser ortocomplementado, con la operación de complementación dada por el complemento de conjuntos. A este reticulado se lo llama reticulado clásico y se lo denota por  $\mathcal{R}_\Gamma = (\mathcal{P}(\Gamma), \subseteq, ^c)$ , donde  $^c$  designa al complemento de conjuntos.

Un reticulado ortocomplementado y distributivo se llama booleano y posee la misma estructura algebraica que el cálculo proposicional de la lógica de primer orden. Las operaciones lógicas entre propiedades se representan de la siguiente manera:

- Disyunción  $p \vee q \longleftrightarrow C_p \cup C_q$ ,
- Conjunción  $p \wedge q \longleftrightarrow C_p \cap C_q$ ,
- Negación  $\neg p \longleftrightarrow \Gamma - C_p$ .

Una característica importante de este reticulado es que las propiedades asociadas a los estados del sistema, es decir, las propiedades representadas por conjuntos de la forma  $\{(\bar{q}, \bar{p})\}$ , son los átomos del reticulado. Además, todo subconjunto no vacío contiene algún punto del espacio de fases, entonces el reticulado satisface la propiedad de cubrimiento y, por lo tanto, es atómico.

Como es atómico y booleano, entonces resulta ser atomístico. Es decir, todo elemento es el supremo de algún conjunto de átomos. El conjunto de átomos es el generador del reticulado  $\mathcal{R}_\Gamma$  y está dado por  $\{ \{(\bar{q}, \bar{p})\} \mid (\bar{q}, \bar{p}) \in \Gamma \}$ . Para todo  $C \in \mathcal{P}(\Gamma)$ ,

$$C = \sup \{ \{(\bar{q}, \bar{p})\} \mid (\bar{q}, \bar{p}) \in C \} = \bigcup_{(\bar{q}, \bar{p}) \in C} \{(\bar{q}, \bar{p})\}.$$

### 2.3.3. Reticulado de propiedades de un sistema cuántico

En la mecánica cuántica también aparecen las mismas nociones físicas fundamentales: *sistema físico*, *estado*, *observable* y *propiedad*. Cada una de ellas se representa por una entidad matemática.

- Según el axioma 1, los sistemas físicos se representan por espacios de Hilbert separables y se notan con la letra  $\mathcal{H}$ .

$$\text{Sistema físico } S \iff \mathcal{H}_S$$

- Según el axioma 3, los estados de un sistema físico se representan por operadores autoadjuntos, no negativos y de traza uno, los cuales se llaman operadores densidad y se notan con la letra  $\rho$ .

$$\text{Observable } \mathcal{O} \iff O : \mathcal{H}_S \rightarrow \mathcal{H}_S$$

Se distinguen dos tipos de estados: estados puros y estados mezcla. Los estados puros están representados por operadores densidad que son proyectores ortogonales.

Por lo tanto, también pueden representarse por los subespacios vectoriales unidimensionales asociados a sus respectivos proyectores ortogonales. Esto no es posible para los estados mezcla.

- Según el axioma 4, un observable  $\mathcal{O}$  se representa por un operador autoadjunto  $O$ .

$$\text{Observable } \mathcal{O} \iff O : \mathcal{H}_S \rightarrow \mathcal{H}_S$$

- Según el axioma 5, las propiedades se representan por subespacios vectoriales cerrados del espacio de Hilbert. Como para cada subespacio vectorial cerrado  $V$  existe un único proyector  $\Pi_V : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ , tal que  $V = \Pi_V \mathcal{H}$ , entonces cada propiedad  $V$  también puede representarse por su respectivo proyector  $\Pi_V$ .

$$\text{Propiedad } p \iff V_p \subseteq \mathcal{H}_S$$

El conjunto de todas las propiedades de un sistema cuántico está representado por el conjunto de todos los subespacios vectoriales cerrados de  $\mathcal{H}$ , al cual se denota por  $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ . Si se considera a este conjunto, con la relación de orden dada por la inclusión de conjuntos  $\subseteq$ , se obtiene un reticulado acotado y complementado, con las siguientes características:

- El ínfimo y el supremo están dados por la intersección de conjuntos y la suma de subespacios, respectivamente,
  - $\inf(V_1, V_2) = V_1 \cap V_2$ ,
  - $\sup(V_1, V_2) = V_1 + V_2$ .
- El elemento nulo viene dado por el subespacio que únicamente contiene al vector nulo y el elemento universal está dado por el espacio de Hilbert,
  - $\mathbf{0} = \{0_{\mathcal{H}}\}$ , donde  $0_{\mathcal{H}}$  es el vector nulo de  $\mathcal{H}$ ,
  - $\mathbf{1} = \mathcal{H}$ .
- Para cada  $V \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ , su complemento ortogonal  $V^\perp \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$  es un complemento,
  - $V \cap V^\perp = \{0_{\mathcal{H}}\}$ ,
  - $V + V^\perp = \mathcal{H}$ .

Si se considera a este reticulado junto con la operación de complementación dada por el complemento ortogonal, se cumple

$$(V^\perp)^\perp = V, \forall V \in \mathcal{H}.$$

Por lo tanto, se obtiene un reticulado ortocomplementado, al cual se llama reticulado cuántico y se denota por  $\mathcal{R}_{\mathcal{H}} = (\mathcal{C}(\mathcal{H}), \subseteq, ^\perp)$ .

Las operaciones lógicas entre propiedades se representan de la siguiente manera:

- Disyunción  $p \vee q \iff V_p + V_q$ ,

- Conjunción  $p \wedge q \longleftrightarrow V_p \cap V_q$ ,
- Negación  $\neg p \longleftrightarrow V_p^\perp$ .

Al igual que el reticulado clásico, el reticulado cuántico es atómico. Las propiedades asociadas a los estados puros del sistema, es decir aquellas representadas por subespacios unidimensionales, son los átomos del reticulado. Además, como todo subespacio cerrado, distinto del  $\{0_{\mathcal{H}}\}$ , contiene a algún subespacio unidimensional, entonces el reticulado satisface la propiedad de cubrimiento y, por lo tanto, es atómico.

Una diferencia fundamental entre este reticulado y el reticulado clásico es que el segundo es distributivo, mientras que el primero no lo es (si  $\dim(\mathcal{H}) \geq 2$ ). Para ver que el reticulado  $\mathcal{R}_{\mathcal{H}}$ , con  $\dim(\mathcal{H}) \geq 2$ , es no distributivo, basta considerar tres subespacios vectoriales unidimensionales  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ , mutuamente ortogonales entre sí, e incluidos en un subespacio vectorial  $W$ , de dimensión dos. Entonces, se obtiene

$$X \cap Y = X \cap Z = Y \cap Z = \{0_{\mathcal{H}}\}, \quad X \cup Y = X \cup Z = Y \cup Z = W,$$

luego,

$$\begin{aligned} \{0_{\mathcal{H}}\} &= (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \not\supseteq X \cap (Y \cup Z) = X, \\ X &= X \cup (Y \cap Z) \not\supseteq (X \cup Y) \cap (X \cup Z) = W. \end{aligned}$$

Por lo tanto, en general, no se satisfacen las igualdades distributivas.

Sin embargo, sí se satisface una condición más débil, a saber, la ortomodularidad. Además se cumple que todo reticulado cuántico es modular si y sólo si la dimensión de  $\mathcal{H}$  es finita.

Como  $\mathcal{R}_{\mathcal{H}}$  es atómico y ortomodular, entonces es atomístico. El generador de  $\mathcal{R}_{\mathcal{H}}$  está dado por  $\{V \in \mathcal{C}(\mathcal{H}) \mid \dim(V) = 1\}$ . Para todo  $W \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ ,

$$W = \sup \{V \subseteq W \mid \dim(V) = 1\} = \sum_{\substack{V \subseteq W \\ \dim(V)=1}} V.$$

La no distributividad del reticulado de propiedades es una característica fundamental de la mecánica cuántica, debido a la cual su estructura lógica difiere de la lógica clásica. Por esta razón, para definir una medida de probabilidad no es posible considerar simultáneamente el conjunto de todas las propiedades, sino que se debe elegir un subreticulado booleano.

Una forma de obtener un subreticulado booleano es elegir un conjunto  $B$  de subespacios cerrados mutuamente ortogonales de  $\mathcal{H}$ , tales que sumados den todo el espacio de Hilbert, es decir

$$B = \{V_i \mid i \in \sigma, V_i \text{ es un subespacio cerrado de } \mathcal{H}, V_i \perp V_j \text{ si } i \neq j, \sum_{i \in \sigma} V_i = \mathcal{H}\},$$

donde  $\sigma$  es un conjunto de índices.

A partir del conjunto  $B$ , se define el conjunto  $C_B$  formado por sumas arbitrarias de elementos de  $B$ ,

$$C_B = \{V \subseteq \mathcal{H} \mid V = \sum_i \alpha_i V_i, \alpha_i = 0, 1\}. \quad (2.1)$$

El conjunto  $C_B$ , junto con la relación de orden dada por la inclusión de conjuntos y la operación unaria dada por el complemento ortogonal, es un subreticulado booleano de  $\mathcal{R}_{\mathcal{H}}$ . Además, es un reticulado atómico y atomístico, cuyo átomos son todos los elementos de  $B$ . Por lo tanto,  $B$  es el generador de  $C_B$ . El conjunto  $C_B$  se denomina *contexto de propiedades generado por  $B$*  y los elementos de  $B$  son sus propiedades atómicas.

Los proyectores  $\Pi_i$  asociados a los subespacios  $V_i \in B$  satisfacen las siguientes relaciones

$$\sum_{i \in \sigma} \Pi_i = I, \quad \Pi_i \Pi_j = \delta_{ij} \Pi_j, \quad i, j \in \sigma,$$

donde  $I$  es el operador identidad de  $\mathcal{H}$ . Cuando un conjunto de proyectores ortogonales satisfacen las relaciones anteriores, se dice que forman una descomposición proyectiva de la identidad. Además, todos los pares de propiedades del contexto de propiedades  $C_B$  son compatibles, es decir, están representadas por proyectores que conmutan.

Una vez que se tiene un subreticulado booleano  $C_B$ , se puede definir una probabilidad  $\text{Pr}_t : C_B \rightarrow \mathbb{R}$ , usando la regla de Born tal como fue enunciada en el axioma 8. Si  $\rho_t$  es el operador densidad que representa al estado del sistema al tiempo  $t$ , entonces la probabilidad está dada por

$$\text{Pr}_t(V) = \text{Tr}(\rho_t \Pi_V), \quad \forall V \in C_B.$$

La función  $\text{Pr}_t$  es una medida de probabilidad, pues satisface los axiomas de Kolmogorov:

- (i)  $\text{Pr}_{\rho_t}(V) \geq 0$ ,
- (ii)  $\text{Pr}_{\rho_t}(\mathcal{H}) = 1$ ,
- (iii) Si  $V_1 \cap V_2 = \{0_{\mathcal{H}}\}$ , luego  $\text{Pr}_{\rho_t}(V_1 + V_2) = \text{Pr}_{\rho_t}(V_1) + \text{Pr}_{\rho_t}(V_2)$ .

Se debe notar que para cada  $\rho_t$  hay una función probabilidad  $\text{Pr}_{\rho_t}$  distinta.

Se dice que un sistema físico  $S$ , en un estado  $\mathcal{E}$ , tiene probabilidad  $\alpha$  de tener la propiedad  $p$  si y sólo  $\text{Pr}_{\rho_{\mathcal{E}}}(V_p) = \alpha$ , con  $V_p$  el subespacio asociado a la propiedad  $p$  y  $\rho_{\mathcal{E}}$  el operador densidad asociado al estado  $\mathcal{E}$ . Es decir,

$$\text{El sistema } S, \text{ preparado en } \mathcal{E}, \text{ tiene probabilidad } \alpha \text{ de tener } p \iff \text{Pr}_{\rho_{\mathcal{E}}}(V_p) = \alpha.$$

En particular, si se considera un estado  $\mathcal{E}$  y una propiedad  $p$  (con  $\Pi_p$  su proyector ortogonal asociado), tales que  $\Pi_p \rho_{\mathcal{E}} \Pi_p = \rho_{\mathcal{E}}$ , entonces  $\text{Pr}_{\rho_{\mathcal{E}}}(V_p) = 1$ . Por lo tanto,

$$\text{Si } \Pi_p \rho_{\mathcal{E}} \Pi_p = \rho_{\mathcal{E}} \implies S \text{ tiene } p.$$

La mecánica cuántica ortodoxa permite obtener subreticulados de propiedades booleanos y definir una medida de probabilidad para cada estado y cada tiempo sobre estos subreticulados. Sin embargo, como todas las propiedades están referidas a un mismo tiempo, no es posible asignar probabilidades a operaciones entre propiedades a distintos tiempos. Las teorías de historias cuánticas se desarrollaron con vistas a superar esta dificultad. Entre ellas se encuentran la teoría de Historias Consistentes [7–9] y el formalismo de Contextos Generalizados [18,22]. En el siguiente capítulo se presentan estas dos teorías y se analizan sus relaciones.

## 2.4. Conclusiones parciales

En este capítulo se presentaron los aspectos centrales de la mecánica cuántica, los cuales serán necesarios para el entendimiento del resto del trabajo y, en particular, para la formulación de las teorías de historias cuánticas.

En la sección 2.1 se describió brevemente la historia de la mecánica cuántica, desde sus comienzos con la hipótesis cuántica de Planck, pasando por las contribuciones de Einstein, Bohr y de Broglie a la teoría cuántica antigua, hasta llegar a las formulaciones matricial y ondulatoria de la teoría cuántica moderna, y finalmente a la versión axiomática de von Neumann.

En la sección 2.2 se describió la formulación ortodoxa de la mecánica cuántica, la cual será utilizada a lo largo de todo el trabajo. Se caracterizaron sus conceptos primitivos y se enunciaron sus axiomas.

En la sección 2.3 se consideraron las propiedades de los sistemas físicos en general y, en particular, las propiedades de los sistemas cuánticos. En las teorías físicas las propiedades de un sistema se representan por objetos matemáticos. En la mecánica clásica se representan por subconjuntos del espacio de fases y en la mecánica cuántica por subespacios vectoriales cerrados del espacio de Hilbert. En ambos casos el conjunto de todas las propiedades tiene estructura de reticulado ortocomplementado. Esto permite definir operaciones lógicas entre propiedades, como la conjunción, la disyunción o la negación.

El objetivo de esta sección fue analizar la estructura algebraica del conjunto de propiedades de los sistemas cuánticos. Primero se resumieron los conceptos necesarios para describir dicha estructura, la noción central es la de reticulado. Después se presentó a modo de ejemplo el reticulado de propiedades clásico y se mostró que es ortocomplementado y distributivo.

A continuación se describió el reticulado de propiedades cuántico, se mostró que también es ortocomplementado, pero no es distributivo. La no distributividad es una característica fundamental de la mecánica cuántica y a ella se deben sus principales diferencias con la mecánica clásica. Para poder definir una probabilidad el reticulado tiene que ser ortocomplementado y distributivo, por lo tanto, se explicó cómo obtener un subreticulado distributivo a partir del reticulado completo de propiedades. Luego, se definió una probabilidad siguiendo la regla de Born.

Por último se mencionó una limitación del reticulado de propiedades cuántico, a saber, que todas las propiedades están referidas a un mismo tiempo y, por lo tanto, no es posible asignar probabilidades a operaciones entre propiedades a distintos tiempos. Esta dificultad motivó el desarrollo de las teorías de historias cuánticas, las cuales permiten realizar operaciones entre propiedades a diferentes tiempos.

En el próximo capítulo se analizan las teorías de historias cuánticas. Las estructuras matemáticas explicadas en este capítulo serán de utilidad, pues las historias de un sistema físico también tienen estructura de reticulado.

# Capítulo 3

## Historias Cuánticas

En este capítulo se introducen dos teorías de historias cuánticas: la teoría de Historias Consistentes y el formalismo de Contextos Generalizados. Se estudian sus relaciones y además se analiza el problema de la retrodicción de propiedades contrarias.

### 3.1. Introducción

El desarrollo de las teorías de historias cuánticas estuvo motivado por dos aspectos de la mecánica cuántica ortodoxa calificados de insatisfactorios por algunos autores. Uno de ellos de carácter interpretativo, a saber, el tratamiento de la medición como un proceso físico particular, distinto del resto de las interacciones físicas; y otro de carácter formal, a saber, la incapacidad de describir operaciones lógicas entre propiedades a distintos tiempos.

La interpretación ortodoxa de la mecánica cuántica provee un exitoso algoritmo para predecir los resultados de las mediciones experimentales. Sin embargo, la distinción tajante entre los procesos de medición y el resto de los procesos físicos conduce a ciertas dificultades interpretativas. En particular, no es aplicable a sistemas cerrados en los que se incluyen a los aparatos de medición.

Además, como se mencionó en el capítulo anterior, en el formalismo ortodoxo de la mecánica cuántica el conjunto de todas las propiedades tiene estructura de reticulado ortocomplementado, lo que permite definir operaciones lógicas entre propiedades. Sin embargo, como todas las propiedades están referidas a un mismo tiempo, no es posible definir operaciones entre ellas a tiempos distintos. En muchos procesos físicos es necesario considerar expresiones que involucran propiedades en diferentes instantes. Por ejemplo, en el proceso de medición, una propiedad del sistema, en un tiempo anterior al de la medición, tiene que ser relacionada con una propiedad del aparato de medición, en un tiempo posterior al de la medición.

Motivados por estas dificultades se desarrollaron diferentes teorías de historias cuánticas. En 1984, Robert B. Griffiths presentó la primera versión de la teoría de Historias Consistentes [7]. Tiempo después presentó algunas modificaciones de aquella versión [8,9]. Por otro lado, Roland Omnès publicó una serie de trabajos [26–28] en los que contribuyó al desarrollo de esta teoría. Paralelamente, Murray Gell-Mann y James Hartle desarrolla-

ron un formalismo de historias similar al de historias consistentes, denominado *Historias Decoherentes* [6]. Años más tarde Roberto Laura, Leonardo Vanni y Marcelo Losada desarrollaron un formalismo alternativo de historias denominado *formalismo de Contextos Generalizados* [18, 22], el cual se propone evitar algunas de las complicaciones de los anteriores enfoques. Si bien estas teorías no son idénticas, sus fuertes similitudes justifican que se las englobe como teorías de historias cuánticas.

Las teorías de historias cuánticas pretenden resolver las dificultades mencionadas previamente. Por un lado, proveen una interpretación de la mecánica cuántica en la que los procesos de medición son tratados de la misma forma que el resto de los procesos físicos. La medición pierde su estatus privilegiado y pasa a ser descrita como una interacción ordinaria entre un sistema y un aparato de medición. La dinámica de la medición es descrita por la ecuación de Schrödinger y, en consecuencia, ya no se requiere el postulado adicional de colapso del vector de estado. Por lo tanto, es aplicable a sistemas cerrados en los que se incluyen los aparatos de medición.

Por otro lado, extienden el formalismo ortodoxo de la mecánica cuántica de modo tal de poder definir operaciones lógicas entre propiedades a distintos tiempos. Para ello introducen la noción de historia que generaliza a la noción de evento. Un evento se define como una propiedad a un tiempo. Una historia se define como una secuencia de eventos a distintos tiempos u operaciones lógicas entre ellas, como la conjunción, la disyunción o la negación.

Por ejemplo, si se consideran  $n$  tiempos,  $t_1 < \dots < t_n$ , y las propiedades  $p_i$  y  $q_i$  en cada tiempo  $t_i$ , entonces  $\check{p} = \{(p_1, t_1); \dots; (p_n, t_n)\}$  es la historia en la que en cada tiempo  $t_i$  se da la propiedad  $p_i$  y  $\check{q} = \{(q_1, t_1); \dots; (q_n, t_n)\}$  es la historia en la que en cada tiempo  $t_i$  se da la propiedad  $q_i$ . A su vez,  $\check{p} \vee \check{q}$ ,  $\check{p} \wedge \check{q}$  y  $\neg \check{p}$  son las historias que resultan de las operaciones lógicas (disyunción, conjunción y negación, respectivamente) entre las historias  $\check{p}$  y  $\check{q}$ .

Al igual que en el caso de la propiedades a un tiempo, no es posible asignar probabilidades al conjunto de todas las historias. Por lo tanto, primero se debe seleccionar un subconjunto de ellas que satisfaga ciertas condiciones. Las diferentes teorías de historias cuánticas postulan distintas condiciones para decidir qué conjuntos de historias se pueden predicar simultáneamente de un sistema y asignarles probabilidades.

En las siguientes secciones se presentan las ideas centrales de dos teorías de historias cuánticas: la teoría de Historias Consistentes y el formalismo de Contextos Generalizados.

## 3.2. Historias Consistentes

En esta sección se resume el formalismo de Historias Consistentes siguiendo esencialmente la presentación de Robert B. Griffiths [8].

La teoría de Historias Consistentes brinda un formalismo para representar historias cuánticas y además provee una interpretación de la mecánica cuántica independiente del observador, en la que la medición es descrita como un proceso físico ordinario. Como no es posible asignar probabilidades al conjunto de todas las historias cuánticas, se postulan ciertas condiciones para decidir qué conjuntos de historias se pueden predicar simultáneamente de un sistema físico.

Para representar historias de  $n$  tiempos se utiliza el espacio que se obtiene al multiplicar  $n$  copias del espacio de Hilbert del sistema, es decir  $\check{\mathcal{H}}_n = \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}$ . El espacio  $\check{\mathcal{H}}_n$  es un producto tensorial de espacios de Hilbert, por lo tanto, también es un espacio de Hilbert, y se denomina *espacio de Hilbert de historias de  $n$  tiempos*.

Dadas  $n$  propiedades  $p_i$ , representadas por los subespacios vectoriales cerrados  $V_i$  o sus respectivos proyectores ortogonales  $\Pi_i$ , se considera la historia  $\check{p} = \{(p_1, t_1); \dots; (p_n, t_n)\}$ . La teoría de Historias Consistentes representa a la historia  $\check{p}$  con el operador que resulta de multiplicar tensorialmente cada uno de los proyectores  $\Pi_i$ , es decir,  $\check{\Pi} = \Pi_1 \otimes \dots \otimes \Pi_n$ , o equivalentemente con el subespacio asociado  $\check{V} = V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ ;

$$\check{p} = \{(p_1, t_1); \dots; (p_n, t_n)\} \longleftrightarrow \check{V} = V_1 \otimes \dots \otimes V_n \longleftrightarrow \check{\Pi} = \Pi_1 \otimes \dots \otimes \Pi_n.$$

El operador  $\check{\Pi}$  está definido sobre el espacio  $\check{\mathcal{H}}$  y como cada  $\Pi_i$  es un proyector ortogonal,  $\check{\Pi}$  también lo es.

Las historias que resultan de realizar operaciones lógicas entre otras historias se representan de la siguiente manera,

- Disyunción  $\check{p} \vee \check{q} \longleftrightarrow \check{U} + \check{V} \longleftrightarrow \check{\Pi}_{\check{U} + \check{V}},$
- Conjunción  $\check{p} \wedge \check{q} \longleftrightarrow \check{U} \cap \check{V} \longleftrightarrow \check{\Pi}_{\check{U} \cap \check{V}},$
- Negación  $\neg \check{p} \longleftrightarrow \check{U}^\perp \longleftrightarrow \check{\Pi}_{\check{U}^\perp}.$

Al igual que en el caso del reticulado de propiedades cuánticas, el conjunto de todas las historias de un sistema forma un reticulado ortocomplementado, pero no distributivo. Para poder definir una buena probabilidad sobre las historias cuánticas es necesario elegir un subconjunto de historias que tengan estructura de reticulado ortocomplementado y distributivo, es decir, booleano. Una vez que se obtiene un subreticulado de historias booleano, las operaciones lógicas en términos de los proyectores se expresan de la siguiente manera,

- Disyunción  $\check{p} \vee \check{q} \longleftrightarrow \check{\Pi}_{\check{p} \vee \check{q}} = \check{\Pi}_{\check{p}} + \check{\Pi}_{\check{q}} - \check{\Pi}_{\check{p}} \check{\Pi}_{\check{q}},$
- Conjunción  $\check{p} \wedge \check{q} \longleftrightarrow \check{\Pi}_{\check{p} \wedge \check{q}} = \check{\Pi}_{\check{p}} \check{\Pi}_{\check{q}},$
- Negación  $\neg \check{p} \longleftrightarrow \check{\Pi}_{\neg \check{p}} = \check{I} - \check{\Pi}_{\check{p}}.$

donde  $\check{I}$  es la identidad de  $\check{\mathcal{H}}$ .

Para obtener un subreticulado distributivo de historias primero se debe elegir para cada tiempo  $t_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) un contexto de propiedades generado por las propiedades atómicas  $\Pi_i^{k_i}$ , con  $k_i \in \sigma_i$ . Luego, a partir de ellos se consideran las historias  $p^{\mathbf{k}}$ , con  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ , formadas por las propiedades atómicas  $p_i^{k_i}$  en cada tiempo  $t_i$ , es decir,

$$p^{\mathbf{k}} = \{(p_1^{k_1}, t_1); \dots; (p_n^{k_n}, t_n)\}, \quad \mathbf{k} \in \Sigma = \sigma_1 \times \dots \times \sigma_n.$$

Las historias  $p^{\mathbf{k}}$  se representan por los proyectores  $\check{\Pi}^{\mathbf{k}}$ , dados por

$$\check{\Pi}^{\mathbf{k}} = \Pi_1^{k_1} \otimes \dots \otimes \Pi_n^{k_n}.$$

Como los operadores  $\Pi_i^{k_i}$  forman una descomposición proyectiva de la identidad de  $\mathcal{H}$ , es decir,

$$\Pi_i^{k_i} \Pi_i^{k'_i} = \delta_{k_i k'_i} \Pi_i^{k_i}, \quad \sum_{k_i \in \sigma_i} \Pi_i^{k_i} = I, \quad k_i, k'_i \in \sigma_i, \quad i = 1, \dots, n; \quad (3.1)$$

entonces los operadores de historias  $\check{\Pi}^{\mathbf{k}}$  forman una descomposición proyectiva de la identidad de  $\check{\mathcal{H}}$ ,

$$\check{\Pi}^{\mathbf{k}} \check{\Pi}^{\mathbf{k}'} = \delta_{\mathbf{k} \mathbf{k}'} \check{\Pi}^{\mathbf{k}}, \quad \sum_{\mathbf{k} \in \Sigma} \check{\Pi}^{\mathbf{k}} = \check{I},$$

donde  $\Sigma = \sigma_1 \times \dots \times \sigma_n$ .

Paso seguido, se definen las historias generales que resultan de realizar disyunciones arbitrarias de historias  $\check{p}^{\mathbf{k}}$  y se representan por la suma de sus respectivos proyectores,

$$\check{p} = \bigvee_{\mathbf{k} \in \Sigma_{\check{p}}} \check{p}^{\mathbf{k}} \longleftrightarrow \check{\Pi}^{\check{p}} = \sum_{\mathbf{k} \in \Sigma_{\check{p}}} \check{\Pi}^{\mathbf{k}}, \quad \Sigma_{\check{p}} \subseteq \Sigma.$$

Por último, se considera el conjunto formado por todos los proyectores  $\check{\Pi}^{\check{p}}$ ,

$$\left\{ \check{\Pi} = \sum_{\mathbf{k} \in \Sigma} \alpha_{\mathbf{k}} \check{\Pi}^{\mathbf{k}} \mid \alpha_{\mathbf{k}} = 0, 1 \right\}, \quad (3.2)$$

al cual se denomina *familia de historias*.

Las familias de historias tienen estructura de reticulado booleano, por lo tanto, es posible definir una medida sobre ellas. Además son reticulados atómicos y sus historias atómicas están representadas por los operadores  $\check{\Pi}^{\mathbf{k}}$ . Como son reticulados atomísticos, toda historia puede escribirse como la suma de algún conjunto de historias atómicas, es decir, el conjunto de historias atómicas es el generador de la familia de historias.

Para definir una probabilidad sobre estos conjuntos, la teoría de Historias Consistentes introduce el *operador cadena*. Para cada historia atómica representada por  $\check{\Pi}^{\mathbf{k}}$  el operador cadena viene dado por

$$C(\check{\Pi}^{\mathbf{k}}) = \Pi_{1,0}^{k_1} \Pi_{2,0}^{k_2} \dots \Pi_{n,0}^{k_n}, \quad (3.3)$$

donde  $\Pi_{j,0}^{k_j} = U(t_0, t_j) \Pi_j^{k_j} U(t_j, t_0)$  y  $t_0$  es el tiempo en el cual es considerado el operador de estado  $\rho_{t_0}$ . Para los demás elementos de una familia de historias el operador cadena se obtiene por extensión lineal. Es decir, dada una historia general  $\check{p}$ , representada por el proyector  $\check{\Pi}^{\check{p}} = \sum_{\mathbf{k} \in \Sigma_{\check{p}}} \check{\Pi}^{\mathbf{k}}$ , su operador cadena viene dado por

$$C(\check{\Pi}^{\check{p}}) = \sum_{\mathbf{k} \in \Sigma_{\check{p}}} C(\check{\Pi}^{\mathbf{k}}), \quad \Sigma_{\check{p}} \subseteq \Sigma \quad (3.4)$$

Luego, se define la probabilidad de una historia de la siguiente manera,

$$\Pr_{HC}(\check{\Pi}^{\check{p}}) = \text{Tr}(C^\dagger(\check{\Pi}^{\check{p}}) \rho_{t_0} C(\check{\Pi}^{\check{p}})), \quad (3.5)$$

donde se ha incorporado el subíndice  $HC$  al símbolo de la probabilidad para distinguirla explícitamente de la probabilidad  $\Pr_{CG}$  del formalismo de Contextos Generalizados, que será definida en la próxima sección.

Sin embargo, en general, la probabilidad  $\text{Pr}_{HC}$  no satisface la condición de aditividad. Para que  $\text{Pr}_{HC}$  sea una buena probabilidad es necesario que las historias atómicas satisfagan condiciones extras, denominadas *condiciones de consistencia*,

$$\text{Re}[\text{Tr}(C^\dagger(\check{\Pi}^{\mathbf{k}})\rho_{t_0}C(\check{\Pi}^{\mathbf{k}'}))] = 0, \quad \text{para todo } \mathbf{k} \neq \mathbf{k}'. \quad (3.6)$$

Un conjunto de historias que satisface estas condiciones se denomina *familia de historias consistentes*.

La teoría de Historias Consistentes es adecuada para representar historias y asignarle probabilidades bien definidas siempre y cuando formen parte de una misma familia de historias consistentes. Cada familia de historias consistentes provee una posible descripción del sistema físico. Diferentes familias de historias consistentes deben ser consideradas como descripciones complementarias de un mismo sistema físico. Sin embargo, a diferencia con el caso clásico, estas descripciones complementarias no siempre pueden combinarse en una única y más refinada descripción del sistema. Este hecho lleva a una cuestión central de la teoría de Historias Consistentes, la regla de no mezclar familias de historias consistentes. Los razonamientos sobre un sistema físico no pueden mezclar familias de historias consistentes. Los razonamientos que involucran a más de una familia son inválidos. Esta regla prohíbe combinar diferentes familias, pero no prohíbe el uso de ninguna en particular. Todas las familias son *igualmente* válidas y hay plena *libertad* de elegir la familia que se considere más *útil* para la descripción del sistema físico.

Esto puede resumirse en los siguientes tres principios [9]:

■ ***Principio de igualdad:***

Todas las familias de historias consistentes son igualmente válidas para describir un sistema físico.

■ ***Principio de libertad:***

Cualquier familia de historias consistentes puede elegirse para describir un sistema físico.

■ ***Principio de utilidad:***

No todas las familias de historias consistentes son igualmente útiles para describir un sistema físico.

Las familias de historias consistentes deben satisfacer condiciones de consistencia que dependen del estado del sistema, por lo tanto, las historias válidas para la descripción de un sistema físico resultan dependientes del estado sistema. Esto es diferente de lo que sucede en la mecánica cuántica ortodoxa, en la cual los contextos de propiedades válidos son todos los subreticulados de propiedades distributivos, independientemente del estado del sistema.

En las teorías axiomáticas de la mecánica cuántica el estado es considerado como una funcional sobre el espacio de observables y, por lo tanto, aparece de alguna manera en una posición subordinada. Como las historias cuánticas juegan el rol de los observables, parece razonable que las familias de historias válidas satisfagan condiciones independientes del estado del sistema. Además, las condiciones de consistencia admiten demasiadas

familias de historias y algunas de ellas son de difícil interpretación [5, 16]. Si se modifica la restricción y se imponen las condiciones de consistencia para todo estado, se limita el número de historias admisibles.

Por último, en la mecánica cuántica ordinaria la relación de orden entre dos propiedades tiene una clara interpretación probabilística. Dadas dos propiedades  $p$  y  $q$  del mismo contexto, con respectivos subespacios  $V_p$  y  $V_q$  del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , se puede probar que la probabilidad de la propiedad  $p$ , condicionada a la propiedad  $q$ , es igual a uno para todos los estados si y sólo si  $V_p \subseteq V_q$ . En la teoría de Historias Consistentes no hay una conexión tan fuerte a menos que se impongan las condiciones de consistencia para todo estado.

Esta cuestión motivó el desarrollo de una versión de historias cuánticas alternativa, denominada *formalismo de Contextos Generalizados*, en la cual los conjuntos de historias admisibles para la descripción de un sistema físico son independientes del estado del sistema. En la siguiente sección se presenta dicho formalismo.

### 3.3. Contextos Generalizados

Con el objetivo de superar algunas de las dificultades de la teoría de Historias Consistentes, Roberto Laura, Leonardo Vanni y Marcelo Losada desarrollaron una versión alternativa de historias cuánticas, denominada *formalismo de Contextos Generalizados* [18, 22].

Este formalismo extiende a la mecánica cuántica ortodoxa de modo tal de poder asignar probabilidades a historias cuánticas. Al igual que en el caso de la teoría de Historias Consistentes, para que las probabilidades estén bien definidas hacen falta condiciones adicionales sobre los conjuntos de historias. El formalismo de Contextos Generalizados se basa en la noción de traslación temporal de propiedades. La condición de compatibilidad adicional a imponer sobre las historias es la conmutación de los correspondientes proyectores cuando son trasladados a un tiempo común.

Al igual que en las demás teorías de historias cuánticas, la medición pierde su estatus privilegiado y pasa a ser considerada como una interacción física ordinaria entre un sistema y un aparato de medición. La dinámica de la medición es descrita por la ecuación de Schrödinger y, en consecuencia, ya no se requiere el postulado adicional de colapso del vector de estado.

Para ilustrar la idea general de este formalismo primero se describe la versión clásica de los Contextos Generalizados.

#### 3.3.1. Contextos Generalizados Clásicos

En este apartado se presenta el formalismo de Contextos Generalizados aplicado al caso de la mecánica clásica [22], el cual, si bien no es estrictamente necesario, es útil para luego introducir el caso cuántico.

### Mecánica clásica

En la mecánica clásica cada sistema físico se representa por un espacio de fases  $\Gamma$ ,

$$\Gamma = \{(\bar{q}, \bar{p}) \mid \bar{q} \text{ son las coordenadas generalizadas y } \bar{p} \text{ son los momentos generalizados}\}.$$

Los estados del sistema se representan por los puntos  $(\bar{q}, \bar{p})$  de  $\Gamma$  y su dinámica está determinada por las ecuaciones de Hamilton,

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\dot{p}_j, \quad \frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j,$$

donde  $H$  es el operador hamiltoniano del sistema.

Un estado representado por el punto  $(\bar{q}, \bar{p}) \in \Gamma$  al tiempo  $t$  evoluciona al estado representado por el punto  $(\bar{q}', \bar{p}') = S_{t't}(\bar{q}, \bar{p})$  al tiempo  $t'$ , donde la transformación  $S_{t't} : \Gamma \rightarrow \Gamma$  es invertible ( $S_{t't}^{-1} = S_{tt'}$ ) y preserva la medida.

Las propiedades del sistema son representadas por subconjuntos del espacio de fases. Dada una propiedad  $p$  del sistema físico, se denomina  $C_p$  al subconjunto de  $\Gamma$  que la representa,

$$\text{Propiedad } p \iff C_p \subseteq \Gamma_S.$$

Se dice que el sistema *tiene* una propiedad  $p$  si y sólo si el sistema está en un estado representado por un punto del espacio de fases  $(\bar{q}, \bar{p})$  perteneciente a  $C_p$ .

El conjunto de todas las propiedades del sistema es el conjunto de todos los subconjuntos de  $\Gamma$ , el cual, junto con la relación de orden dada por la inclusión de conjuntos, tiene estructura de reticulado booleano.

En ciertos casos no se conoce el punto exacto del espacio de fases que representa al estado, sino únicamente se conoce la distribución de probabilidad de hallar al estado en un dado punto del espacio. Por lo tanto, no hay certeza de si el sistema tiene, o no, una dada propiedad. Sin embargo, en estos casos sí se puede saber la probabilidad de que posea una propiedad apelando a la distribución de probabilidad, la cual se representa con una función distribución  $\rho_t : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ , no negativa y normalizada. Si  $\rho_t(\bar{q}, \bar{p})$  es la densidad de probabilidad a un tiempo  $t$ , la densidad de probabilidad a un tiempo  $t'$  está dada por

$$\rho_{t'}(\bar{q}, \bar{p}) = \rho_t(S_{t't}^{-1}(\bar{q}, \bar{p})). \quad (3.7)$$

A partir de la densidad de probabilidad  $\rho_t$  es posible definir una probabilidad sobre el conjunto de todas las propiedades. La mecánica estadística clásica asigna a cada propiedad  $C$  al tiempo  $t$  la siguiente probabilidad

$$\text{Pr}_t(C) = \int_C \rho_t(x) dx;$$

la cual satisface los axiomas de Kolmogorov:

- i)  $\text{Pr}_t(C) = \int_C \rho_t(x) dx \geq 0$  para toda propiedad  $C$ .
- ii)  $\text{Pr}_t(\Gamma) = \int_\Gamma \rho_t(x) dx = 1$ .
- iii) Si  $C \cap C' = \emptyset$ , entonces  $\text{Pr}_t(C \cup C') = \text{Pr}_t(C) + \text{Pr}_t(C')$ .

Se debe tener en cuenta que el conjunto de propiedades representado por  $\mathcal{P}(\Gamma)$  es independiente del tiempo. Todas las propiedades están representadas a un mismo tiempo y la probabilidad  $\text{Pr}_t : \mathcal{P}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}$  está definida a un mismo tiempo  $t$  para todas las propiedades.

En lo que sigue se presenta el formalismo de Contextos Generalizados para el caso de la mecánica clásica, el cual incorpora propiedades a distintos tiempos.

### Historias clásicas

Se denomina *evento* a una propiedad representada por el conjunto  $C$  al tiempo  $t$  y se representa por el par  $(C, t)$ . Se llama espacio de eventos al conjunto de todos los eventos de un sistema físico y se denota  $E$ . Para desarrollar un formalismo de historias se debe definir una probabilidad sobre el espacio de eventos.

La probabilidad para una propiedad  $C$  a un tiempo  $t$  está dada por

$$\text{Pr}_t(C) = \int_C \rho_t(x) dx.$$

Usando la ecuación (3.7), se obtiene

$$\text{Pr}_t(C) = \int_C \rho_{t'}(S_{t't} x) dx = \int_{S_{t't} C} \rho_{t'}(x) dx = \text{Pr}_{t'}(C'), \quad (3.8)$$

donde  $C' = S_{t't} C$  y se interpreta como la propiedad  $C$  trasladada temporalmente desde el tiempo  $t$  al tiempo  $t'$ .

La expresión (3.8) muestra que en mecánica estadística clásica la probabilidad  $\text{Pr}_t$  de la propiedad  $C$  al tiempo  $t$  tiene el mismo valor que la probabilidad  $\text{Pr}_{t'}$  de la propiedad trasladada temporalmente  $C' = S_{t't} C$  al tiempo  $t'$ . Sin embargo, debe notarse que  $\text{Pr}_t(C)$  y  $\text{Pr}_{t'}(C')$  son obtenidas a partir de diferentes distribuciones de probabilidad  $\rho_t$  y  $\rho_{t'}$ .

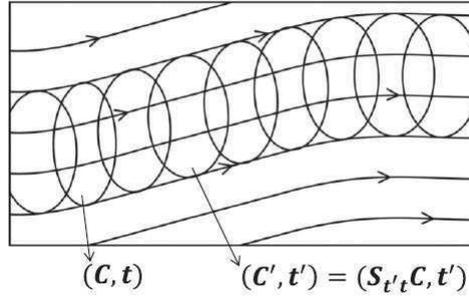
La traslación temporal define una relación sobre el espacio de eventos:

$$(C', t') \sim (C, t) \text{ si y sólo si } C' = S_{t't} C.$$

Esta relación es transitiva, reflexiva y simétrica, por lo tanto es una relación de equivalencia. Como toda relación de equivalencia, parte al espacio de eventos  $E$  en clases de equivalencias. Se denomina  $[C, t]$  a la clase de equivalencia que contiene a los eventos equivalentes a  $(C, t)$ , y al conjunto de todas las clases de equivalencia se lo llama  $[E]$ . Eventos de una misma clase de equivalencia no son esencialmente diferentes, pues están relacionados por una traslación temporal y satisfacen la ecuación (3.8). En la figura 3.1 se representa una clase de equivalencia de eventos para un espacio de fases de dos dimensiones.

Para poder definir una probabilidad sobre el conjunto  $[E]$  es necesario dotarlo de una estructura de reticulado booleano. Para ello se define una relación de orden y una operación de complementación sobre  $[E]$  de la siguiente manera.

*Relación de orden:*  $[C_1, t_1] \leq [C_2, t]$  si y sólo si  $S_{t_0 t_1} C_1 \subseteq S_{t_0 t_2} C_2$ , con  $t_0$  arbitrario.


 Figura 3.1: Clase de equivalencia  $[C, t]$ .

(Esta definición es independiente de  $t_0$ , pues si  $S_{t_0 t_1} C_1 \subseteq S_{t_0 t_2} C_2$ , luego  $S_{t'_0 t_0} S_{t_0 t_1} C_1 \subseteq S_{t'_0 t_0} S_{t_0 t_2} C_2$ , y por lo tanto  $S_{t'_0 t_1} C_1 \subseteq S_{t'_0 t_2} C_2$ .)

*Complementación:*  $\overline{[C, t]} = [\Gamma - C, t]$ .

De esta forma se obtiene la estructura  $([E], \leq, \overline{\phantom{x}})$ , que resulta ser un reticulado booleano, es decir, un reticulado acotado, ortocomplementado y distributivo. A continuación se detallan sus características:

- El ínfimo y el supremo están dados por
  - $\text{Inf}([C, t], [C', t']) = [(S_{t_0 t} C \cap S_{t_0 t'} C'), t_0] = [C, t] \wedge [C', t']$ ,
  - $\text{Sup}([C, t], [C', t']) = [(S_{t_0 t} C \cup S_{t_0 t'} C'), t_0] = [C, t] \vee [C', t']$ .
- El elemento nulo y el elemento universal están dados por
  - $\mathbf{0} = [\emptyset, t]$ , con  $t$  es un tiempo arbitrario.
  - $\mathbf{1} = [\Gamma, t]$ , con  $t$  es un tiempo arbitrario.
- La operación de complementación  $\overline{[C, t]} = [\Gamma - C, t]$  satisface
  - $[C, t] \wedge \overline{[C, t]} = [\emptyset, t]$ ,
  - $[C, t] \vee \overline{[C, t]} = [\Gamma, t]$ ,
  - $\overline{\overline{[C, t]}} = [C, t]$ .
- Para todo  $[C_1, t_1]$ ,  $[C_2, t_2]$  y  $[C_3, t_3]$  se satisfacen las igualdades distributivas
  - $[C_1, t_1] \vee ([C_2, t_2] \wedge [C_3, t_3]) = ([C_1, t_1] \vee [C_2, t_2]) \wedge ([C_1, t_1] \vee [C_3, t_3])$ ,
  - $[C_1, t_1] \wedge ([C_2, t_2] \vee [C_3, t_3]) = ([C_1, t_1] \wedge [C_2, t_2]) \vee ([C_1, t_1] \wedge [C_3, t_3])$ .

A partir de esta estructura se pueden representar historias clásicas de la siguiente manera:

$$\check{p} = \{(p_1, t_1); \dots; (p_n, t_n)\} \longleftrightarrow [C_1, t_1] \wedge \dots \wedge [C_n, t_n],$$

donde  $C_i$  representa a la propiedad  $p_i$ , con  $1 \leq i \leq n$ . Las demás historias se representan a partir de las historias atómicas.

Una vez construido el reticulado booleano de historias clásicas, se puede definir una probabilidad generalizando la probabilidad de la mecánica estadística clásica,

$$\Pr[C, t] = \int_C \rho_t(x) dx.$$

Es fácil ver que  $\Pr : [E] \longrightarrow \mathbb{R}$  está bien definida, es decir, no depende del evento representativo de la clase de eventos. Dados  $(C_1, t_1) \sim (C_2, t_2)$ , luego  $S_{t_2 t_1} C_1 = C_2$ , y

$$\Pr[C_1, t_1] = \int_{C_1} \rho_{t_1}(x) dx = \int_{S_{t_2 t_1} C_1} \rho_{t_1}(S_{t_2 t_1}^{-1} x') \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| dx' = \int_{C_2} \rho_{t_2}(x') dx' = \Pr[C_2, t_2].$$

Además, se puede demostrar que  $\Pr : [E] \longrightarrow \mathbb{R}$  satisface los axiomas de Kolmogorov.

Este formalismo es adecuado para asignar probabilidades a las historias del sistema. Sean las clases  $[C_1, t_1]$  y  $[C_2, t_2]$ :

La probabilidad para la conjunción está dada por

$$\begin{aligned} \Pr([C_1, t_1] \wedge [C_2, t_2]) &= \Pr([C_{10}, t_0] \wedge [C_{20}, t_0]) \\ &= \Pr([C_{10} \cap C_{20}, t_0]) = \int_{C_{10} \cap C_{20}} \rho_{t_0}(x) dx. \end{aligned}$$

La probabilidad para la disyunción está dada por

$$\begin{aligned} \Pr([C_1, t_1] \vee [C_2, t_2]) &= \Pr([C_{10}, t_0] \vee [C_{20}, t_0]) \\ &= \Pr([C_{10} \cup C_{20}, t_0]) = \int_{C_{10} \cup C_{20}} \rho_{t_0}(x) dx. \end{aligned}$$

Donde  $C_{10} = S_{t_0 t_1} C_1$  y  $C_{20} = S_{t_0 t_2} C_2$  son las propiedades trasladadas a un tiempo común  $t_0$  de  $C_1$  y  $C_2$ .

En este apartado se ha presentado un formalismo para asignar probabilidades a historias de sistemas clásicos. En el siguiente apartado se presenta un formalismo análogo para sistemas cuánticos.

### 3.3.2. Contextos Generalizados cuánticos

En el apartado anterior se describió un formalismo para representar historias en sistemas clásicos. En este apartado se presenta un formalismo análogo para sistemas cuánticos, denominado *formalismo de Contextos Generalizados* [18, 22].

El formalismo de Contextos Generalizados, al igual que la teoría de Historias Consistentes, permite representar historias cuánticas y asignarles probabilidades. Sin embargo, en este formalismo no se requiere un espacio de Hilbert más grande, sino que basta con considerar el espacio de Hilbert del sistema físico. Además, los conjuntos de historias admisibles para la descripción de un sistema físico no dependen del estado del sistema. A continuación se describe el formalismo.

Sea un sistema físico cuyo espacio de Hilbert es  $\mathcal{H}$  y cuya dinámica está dada por el operador de evolución temporal  $U(t, t') = e^{-iH(t-t')}$ , donde  $H$  es el hamiltoniano del sistema.

Siguiendo el caso clásico, se define un evento como una propiedad a un tiempo y se representa con el par  $(V, t)$ , donde  $V$  es el subespacio que representa a la propiedad y  $t$  el tiempo. También se define el conjunto  $E$ , formado por todos los eventos del sistema,

$$E = \{(V, t) \mid t \in \mathbb{R} \text{ y } V \text{ es un subespacio vectorial cerrado de } \mathcal{H}\}.$$

Al igual que en el caso clásico, es necesario definir una relación de equivalencia sobre el conjunto  $E$ . Para esto se define la relación de traslación temporal de eventos de la siguiente manera. Dados dos eventos representados por  $(V, t)$  y  $(V', t')$ ,

$$(V', t') \text{ es una traslación temporal de } (V, t) \iff V' = U(t', t)V.$$

Es interesante notar que la regla de Born asigna la misma probabilidad a la propiedad representada por  $V$  al tiempo  $t$  que a la representada por  $V'$  al tiempo  $t'$ ,

$$\begin{aligned} \text{Pr}_{t'}(V') &= \text{Tr}(\rho_{t'} \Pi_{V'}) = \text{Tr}(\rho_{t'} U(t', t) \Pi_V U^{-1}(t', t)) \\ &= \text{Tr}(U(t, t') \rho_t U^{-1}(t, t') \Pi_V) = \text{Tr}(\rho_t \Pi_V) = \text{Pr}_t(V), \end{aligned}$$

donde  $\rho_t$  y  $\rho_{t'}$  son los estados del sistema en los tiempos  $t$  y  $t'$ , y los proyectores asociados satisfacen  $\Pi_{V'} = U(t', t) \Pi_V U^{-1}(t', t)$ .

Este resultado sugiere que los eventos conectados por una traslación temporal no deben ser considerados como esencialmente diferentes. La relación  $(V', t') \sim (V, t)$  definida por  $V' = U(t', t)V$  es una relación de equivalencia. Por lo tanto, cada elemento de  $E$  pertenece a un solo conjunto de eventos equivalentes. Se denomina  $[V, t]$  a la clase de eventos equivalentes al evento  $(V, t)$ , es decir,

$$[V, t] = \{(V', t') \mid (V', t') \sim (V, t)\}.$$

Al conjunto formado por todas las clases de equivalencia de eventos se lo nota  $[E]$ ,

$$[E] = \{[V, t] \mid (V, t) \in E\}.$$

Para poder definir una probabilidad sobre el conjunto  $[E]$  es necesario dotarlo de una estructura de reticulado booleano. Para ello se define una relación de orden y una operación de complementación sobre  $[E]$  de la siguiente manera.

*Relación de orden:*  $[V_1, t_1] \leq [V_2, t_2]$  si y sólo si  $U(t_2, t_1)V_1 \subseteq V_2$ .

*Complementación:*  $\overline{[V, t]} = [V^\perp, t]$ .

En las siguientes dos proposiciones se prueba que la relación  $\leq$  está bien definida, es decir, no depende del elemento representativo de la clase de equivalencia, y que es una relación de orden sobre  $[E]$ .

**Proposición 1:** *La relación  $\leq$  está bien definida.*

Si  $[V_1, t_1] \leq [V_2, t_2]$ , luego  $U(t_2, t_1)V_1 \subseteq V_2$ . Dados  $(V'_1, t'_1) \sim (V_1, t_1)$  y  $(V'_2, t'_2) \sim (V_2, t_2)$  se tiene que  $U(t_1, t'_1)V'_1 = V_1$  y  $U(t_2, t'_2)V'_2 = V_2$ .

Por lo tanto,  $U(t_2, t_1)V_1 = U(t_2, t_1)U(t_1, t'_1)V'_1 = U(t_2, t'_1)V'_1 \subseteq V_2 = U(t_2, t'_2)V'_2$ . Luego,  $U(t'_2, t_2)U(t_2, t'_1)V'_1 \subseteq V'_2$ , entonces  $U(t'_2, t'_1)V'_1 \subseteq V'_2$ .

Por lo tanto,  $[V'_1, t'_1] \leq [V'_2, t'_2]$ . ■

**Proposición 2:** *La relación  $\leq \subseteq [E] \times [E]$  es una relación de orden.*

*Reflexividad:*  $U(t, t)V = V$ , luego  $[V, t] \leq [V, t]$ .

*Transitividad:* Si  $[V, t] \leq [V', t']$  y  $[V', t'] \leq [V'', t'']$ , luego  $U(t', t)V \subseteq V'$  y  $U(t'', t')V' \subseteq V''$ . Por lo tanto,  $U(t'', t')U(t', t)V \subseteq U(t'', t')V' \subseteq V''$ . Luego,  $U(t'', t)V \subseteq V''$ , y por lo tanto,  $[V, t] \leq [V'', t'']$ .

*Antisimetría:* Si  $[V, t] \leq [V', t']$  y  $[V', t'] \leq [V, t]$ , luego  $U(t', t)V \subseteq V'$  and  $U(t, t')V' \subseteq V$ . Por lo tanto,  $U(t', t)V \subseteq V'$  y  $V' \subseteq U(t', t)V$ . Luego  $U(t', t)V = V'$ , entonces  $[V, t] = [V', t']$ .

Como  $\leq$  es reflexiva, antisimétrica y transitiva, es una relación de orden. ■

Además, se puede ver que para cada par de elementos  $[V, t], [V', t'] \in [E]$ ,  $\text{Sup}\{[V, t], [V', t']\}$  y  $\text{Inf}\{[V, t], [V', t']\}$  existen y están dados por

$$\begin{aligned} \text{Sup}\{[V, t], [V', t']\} &= [V, t] \vee [V', t'] = [U(t_0, t)V + U(t_0, t')V', t_0], \\ \text{Inf}\{[V, t], [V', t']\} &= [V, t] \wedge [V', t'] = [U(t_0, t)V \cap U(t_0, t')V', t_0], \end{aligned}$$

donde  $t_0$  es un tiempo arbitrario. En las siguientes dos proposiciones se presentan las demostraciones.

**Proposición 3:**  $\text{Sup}\{[V, t], [V', t']\} = [U(t_0, t)V + U(t_0, t')V', t_0]$ .

- (I)  $U(t_0, t)V \subseteq U(t_0, t)V + U(t_0, t')V'$ . Luego,  $[V, t] \leq [U(t_0, t)V + U(t_0, t')V', t_0]$ .
- (II)  $U(t_0, t')V' \subseteq U(t_0, t)V + U(t_0, t')V'$ . Entonces  $[V', t'] \leq [U(t_0, t)V + U(t_0, t')V', t_0]$ .
- (III) Sea  $[V'', t'']$  tal que  $[V, t] \leq [V'', t'']$  y  $[V', t'] \leq [V'', t'']$ . Luego  $U(t'', t)V \subseteq V''$  y  $U(t'', t')V' \subseteq V''$ . Por lo tanto,  $U(t'', t)V + U(t'', t')V' \subseteq V''$ , y luego  $U(t'', t_0)(U(t_0, t)V + U(t_0, t')V') \subseteq V''$ . Entonces,  $[U(t_0, t)V + U(t_0, t')V', t_0] \leq [V'', t'']$ .

Por lo tanto,  $\text{Sup}\{[V, t], [V', t']\} = [U(t_0, t)V + U(t_0, t')V', t_0]$ . ■

**Proposición 4:**  $\text{Inf}\{[V, t], [V', t']\} = [U(t_0, t)V \cap U(t_0, t')V', t_0]$ .

- (I)  $U(t_0, t)V \cap U(t_0, t')V' \subseteq U(t_0, t)V$ . Luego,  $[U(t_0, t)V \cap U(t_0, t')V', t_0] \leq [U(t_0, t)V, t_0] = [V, t]$ .
- (II)  $U(t_0, t)V \cap U(t_0, t')V' \subseteq U(t_0, t')V'$ . Luego,  $[U(t_0, t)V \cap U(t_0, t')V', t_0] \leq [U(t_0, t')V', t_0] = [V', t']$ .

(III) Sea  $[V'', t'']$  tal que  $[V'', t''] \leq [V, t]$  y  $[V'', t''] \leq [V', t']$ . Luego,  $V'' \subseteq U(t'', t)V$  y  $V'' \subseteq U(t'', t')V'$ . Por lo tanto,  $V'' \subseteq (U(t'', t)V \cap U(t'', t')V') = U(t'', t_0)(U(t_0, t)V \cap U(t_0, t')V')$ . Luego,  $[V'', t''] \leq [U(t_0, t)V \cap U(t_0, t')V', t_0]$ .

Por lo tanto,  $\text{Inf}\{[V, t], [V', t']\} = [U(t_0, t)V \cap U(t_0, t')V', t_0]$ . ■

Como para cada par de elementos de  $[E]$  existen el supremo y el ínfimo, entonces  $([E], \leq)$  es un reticulado. Además,  $([E], \leq)$  tiene elemento nulo y elemento universal dados por  $[\{0_{\mathcal{H}}\}, t]$  y  $[\mathcal{H}, t]$ , respectivamente. Por lo tanto, es un reticulado acotado.

**Proposición 5:**  $[\{0_{\mathcal{H}}\}, t]$  y  $[\mathcal{H}, t]$  son el elemento nulo y el elemento universal, respectivamente, de  $([E], \leq)$ .

Se tiene que  $U(t', t)\{0_{\mathcal{H}}\} = \{0_{\mathcal{H}}\} \subseteq V'$  para todo subespacio vectorial  $V'$  de  $\mathcal{H}$ . Luego,  $[\{0_{\mathcal{H}}\}, t] \leq [V', t']$  para todo  $[V', t'] \in [E]$ . Por lo tanto,  $[\{0_{\mathcal{H}}\}, t]$  es el elemento nulo del reticulado  $[E]$ .

Para cada subespacio vectorial  $V'$  se tiene  $U(t, t')V' \subseteq \mathcal{H}$ , y  $[V', t'] \leq [\mathcal{H}, t]$ . Entonces,  $[\mathcal{H}, t]$  es el elemento universal de  $[E]$ . ■

Además,  $([E], \leq)$  resulta un reticulado complementado, con  $[V^\perp, t]$  un complemento de  $[V, t]$ .

**Proposición 6:**  $([E], \leq)$  es un reticulado complementado.

Dado  $[V, t] \in [E]$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{Sup}([V, t], [V^\perp, t]) &= [U(t, t)V + V^\perp, t] = [V + V^\perp, t] = [\mathcal{H}, t], \\ \text{Inf}([V, t], [V^\perp, t]) &= [U(t, t)V \cap V^\perp, t] = [V \cap V^\perp, t] = [\{0_{\mathcal{H}}\}, t]. \end{aligned}$$

Luego,  $[V^\perp, t]$  es un complemento de  $[V, t]$ .

Por lo tanto,  $([E], \leq)$  es un reticulado complementado. ■

Los resultados anteriores podrían haberse obtenido teniendo en cuenta que la estructura  $([E], \leq)$  y el reticulado formado por los subespacios vectoriales cerrados de  $\mathcal{H}$ , con la inclusión como relación de orden, son isomorfos. Sin embargo, las demostraciones anteriores son útiles para ilustrar la estructura de  $([E], \leq)$ .

Como se mencionó anteriormente, se necesita un reticulado complementado y distributivo para definir una probabilidad. A pesar de que  $([E], \leq)$  es un reticulado complementado, no es distributivo si  $\dim \mathcal{H} \geq 2$ .

**Proposición 7:** Si  $\dim \mathcal{H} \geq 2$ ,  $([E], \leq)$  es no distributivo.

Si  $\dim \mathcal{H} \geq 2$ , se pueden considerar dos vectores no nulos y linealmente independientes  $u$  y  $v$ . Sea  $w = u + v$ . Sean  $U$ ,  $V$  y  $W$  los subespacios vectoriales unidimensionales de  $\mathcal{H}$  generados por  $u$ ,  $v$  y  $w$ , respectivamente.  $U$ ,  $V$  y  $W$  son subespacios cerrados de  $\mathcal{H}$ , luego  $[W, t]$ ,  $[U, t]$  y  $[V, t]$  son elementos de  $[E]$ , donde  $t$  es un tiempo arbitrario.

Se obtiene  $[W, t] \wedge ([U, t] \vee [V, t]) = [W, t] \wedge [U + V, t] = [W, t]$  y también  $([W, t] \wedge [U, t]) \vee ([W, t] \wedge [V, t]) = [\{0_{\mathcal{H}}\}, t] \vee [\{0_{\mathcal{H}}\}, t] = [\{0_{\mathcal{H}}\}, t]$ .

Por lo tanto,  $[W, t] \wedge ([U, t] \vee [V, t]) \neq ([W, t] \wedge [U, t]) \vee ([W, t] \wedge [V, t])$ , luego  $([E], \leq)$  es un reticulado no distributivo. ■

Es posible obtener un subreticulado booleano de  $([E], \leq)$  a partir de un contexto ordinario de propiedades  $C_B$ , dado por la ecuación (2.1). Para un tiempo  $t_0$ , el conjunto de clases de equivalencia  $[E]_B \subseteq [E]$  dado por

$$[E]_B = \{[V, t_0] \in [E] \mid V \in C_B\},$$

tiene estructura de reticulado booleano. Como  $C_B$  es un contexto de propiedades ordinario generado por  $B$ , se considera por extensión que  $[E]_B$  es generado por  $B$  y se lo denomina *contexto generalizado*.

**Proposición 8:** *Sea un conjunto  $B$  de subespacios vectoriales cerrados, mutuamente ortogonales, que suman  $H$ , es decir,  $B = \{V_i \mid i \in \sigma, V_i \text{ es un subespacio vectorial cerrado de } H, V_i \perp V_j \text{ si } i \neq j, \sum_{i \in \sigma} V_i = H\}$ . El conjunto  $B$  genera al contexto  $C_B$ . Luego,  $[E]_B = \{[V, t_0] \in [E] \mid V \in C_B\}$  con la relación de orden  $\leq$  es un subreticulado complementado y distributivo de  $([E], \leq)$ .*

Sean  $[V, t_0]$  y  $[V', t_0] \in [E]_B$ . Luego,  $V$  y  $V'$  son elementos del subreticulado booleano  $C_B$ . Por lo tanto,  $V + V' \in C_B$  y  $V \cap V' \in C_B$ . Además,  $[V + V', t_0] = [V, t_0] \vee [V', t_0] \in [E]_B$  y  $[V \cap V', t_0] = [V, t_0] \wedge [V', t_0] \in [E]_B$ . Por lo tanto,  $([E]_B, \leq)$  es un reticulado.

$\{0_{\mathcal{H}}\}$  y  $\mathcal{H}$  pertenecen a  $C_B$ , luego  $[0_{\mathcal{H}}, t_0] \in [E]_B$  y  $[\mathcal{H}, t_0] \in [E]_B$ .

Si  $[V, t_0] \in [E]_B$ , luego  $V \in C_B$  y  $V^\perp \in C_B$ . Por lo tanto,  $[V^\perp, t_0] \in [E]_B$

Entonces,  $([E]_B, \leq)$  es un reticulado complementado.

Además, sean tres clases  $[V_1, t_0]$ ,  $[V_2, t_0]$  y  $[V_3, t_0]$  arbitrarias de  $[E]_B$ . Luego  $V_1, V_2$  y  $V_3$  pertenecen a  $C_B$ . Como  $C_B$  es un subreticulado distributivo de  $\mathcal{H}$ , se tiene que  $V_1 \cap (V_2 + V_3) = (V_1 \cap V_2) + (V_1 \cap V_3)$  y  $V_1 + (V_2 \cap V_3) = (V_1 + V_2) \cap (V_1 + V_3)$ .

Luego,  $[V_1, t_0] \wedge ([V_2, t_0] \vee [V_3, t_0]) = [V_1, t_0] \wedge [(V_2 + V_3), t_0] = [V_1 \cap (V_2 \cup V_3), t_0] = [(V_1 \cap V_2) \cup (V_1 \cap V_3), t_0] = [(V_1 \cap V_2), t_0] \vee [(V_1 \cap V_3), t_0] = ([V_1, 0] \wedge [V_2, t_0]) \vee ([V_1, 0] \wedge [V_3, t_0])$ .

Además,  $[V_1, t_0] \vee ([V_2, t_0] \wedge [V_3, t_0]) = ([V_1, t_0] \vee [V_2, t_0]) \wedge ([V_1, t_0] \vee [V_3, t_0])$ .

Por lo tanto,  $([E]_B, \leq)$  es un subreticulado complementado y distributivo de  $([E], \leq)$ . ■

Como  $([E]_B, \leq)$  es complementado y distributivo, entonces si se considera la operación unaria dada por

$$\overline{[V, t_0]} = [V^\perp, t_0],$$

se obtiene que  $([E]_B, \leq, \overline{\phantom{x}})$  es un reticulado booleano.

Este reticulado además de ser booleano es atómico y sus átomos están dados por  $[V_i, t_0]$ , con  $V_i \in B$ . Como es un reticulado atomístico, toda clase de equivalencia  $[W, t_0]$  puede escribirse como el supremo de un conjunto de átomos, es decir,

$$[W, t_0] = \sup_{\substack{V_i \in B \\ V_i \subseteq W}} \{[V_i, t_0]\} = \bigvee_{\substack{V_i \in B \\ V_i \subseteq W}} [V_i, t_0].$$

Una vez obtenido el subreticulado booleano  $[E]_B \subseteq [E]$ , se puede definir una probabilidad  $\text{Pr}_{CG} : [E]_B \rightarrow \mathbb{R}$  generalizando la regla de Born de la siguiente manera

$$\text{Pr}_{CG}[V, t_0] = \text{Tr}(\rho_{t_0} \Pi_V), \quad (3.9)$$

donde  $\rho_{t_0}$  es el estado del sistema al tiempo  $t_0$ ,  $\Pi_V$  es el proyector correspondiente a  $V \in C_B$  y el subíndice  $CG$  se ha puesto para diferenciar la probabilidad del formalismo de Contextos Generalizados de la probabilidad la teoría de Historias Consistentes.

**Proposición 9:** *Dados  $B = \{V_i \mid i \in \sigma, V_i \text{ es un subespacio vectorial cerrado de } \mathcal{H}, V_i \perp V_j \text{ si } i \neq j, \sum_{i \in \sigma} V_i = \mathcal{H}\}$  y  $[E]_B = \{[V, t_0] \in B \mid V \in C_B\}$ , para cada estado  $\rho_{t_0}$ ,  $\text{Pr}_{CG} : [E]_B \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $\text{Pr}_{CG}([V, t_0]) = \text{Tr}(\rho_{t_0} \Pi_V)$  es una probabilidad.*

Para demostrar que  $\text{Pr}_{CG}$  es una probabilidad hay que probar las siguientes condiciones:

(I) Dado  $[V, t_0] \in [E]_B$ , se considera al proyector  $\Pi_V$  asociado con el subespacio  $V$ .

Sean las bases ortonormales  $B_1 = \{|\varphi_i\rangle, i \in I\}$  y  $B_2 = \{|\varphi_j\rangle, j \in J\}$  del subespacio  $V$  y  $V^\perp$ , respectivamente. Luego,  $B_3 = B_1 \cup B_2$  es una base ortonormal de  $\mathcal{H}$ .

Como  $\Pi_V$  es el proyector ortogonal asociado con  $V$ , se tienen las siguientes relaciones:

$$\Pi_V |\varphi_i\rangle = |\varphi_i\rangle, \text{ si } |\varphi_i\rangle \in B_1,$$

$$\Pi_V |\varphi_j\rangle = 0, \text{ si } |\varphi_j\rangle \in B_2.$$

Luego  $\text{Pr}_{CG}([V, t_0]) = \text{Tr}(\rho_{t_0} \Pi_V) = \sum_{|\varphi\rangle \in B_3} \langle \varphi | \rho_{t_0} \Pi_V | \varphi \rangle = \sum_{|\varphi\rangle \in B_1} \langle \varphi | \rho_{t_0} | \varphi \rangle \geq 0$ , porque  $\rho_{t_0}$  es positivo.

(II) Sea  $\Pi_{\mathcal{H}} = I$  el proyector asociado con el subespacio  $\mathcal{H}$  y sea  $B = \{|\varphi_k\rangle, k \in K\}$  una base ortonormal de  $\mathcal{H}$ .

$$\text{Luego, } \text{Pr}_{CG}([\mathcal{H}, t_0]) = \text{Tr}(\rho_{t_0} \Pi_{\mathcal{H}}) = \text{Tr}(\rho_{t_0} I) = \text{Tr}(\rho_{t_0}) = 1.$$

(III) Sean  $[V_1, t_1], [V_2, t_2] \in [E]_B$  tales que  $[V_1, t_1] \wedge [V_2, t_2] = [\{0_{\mathcal{H}}\}, t_0]$ .

$$[V_1, t_1] = [\tilde{V}_1, t_0], \text{ con } \tilde{V}_1 = U(t_0, t_1)V_1.$$

$$[V_2, t_2] = [\tilde{V}_2, t_0], \text{ con } \tilde{V}_2 = U(t_0, t_2)V_2.$$

Sean  $\Pi_1, \Pi_2, \tilde{\Pi}_1$  y  $\tilde{\Pi}_2$  los proyectores asociados con los subespacios  $V_1, V_2, \tilde{V}_1$  y  $\tilde{V}_2$ , respectivamente. Estos proyectores están relacionados de la siguiente manera:

$$\Pi_1 = U(t_1, t_0)\tilde{\Pi}_1 U(t_0, t_1), \quad \Pi_2 = U(t_2, t_0)\tilde{\Pi}_2 U(t_0, t_2).$$

Como  $\tilde{V}_1, \tilde{V}_2 \in C_B$ , luego los proyectores de  $\tilde{V}_1 + \tilde{V}_2$  y  $\tilde{V}_1 \cap \tilde{V}_2$  están dados por

$$\tilde{\Pi}_{\tilde{V}_1 + \tilde{V}_2} = \tilde{\Pi}_1 + \tilde{\Pi}_2 - \tilde{\Pi}_1 \tilde{\Pi}_2, \quad \tilde{\Pi}_{\tilde{V}_1 \cap \tilde{V}_2} = \tilde{\Pi}_1 \tilde{\Pi}_2.$$

Además,  $[\tilde{V}_1, t_0] \wedge [\tilde{V}_2, t_0] = [\tilde{V}_1 \cap \tilde{V}_2, t_0] = [\{0_{\mathcal{H}}\}, t_0]$ , luego  $\tilde{V}_1 \cap \tilde{V}_2 = \{0_{\mathcal{H}}\}$ .

Entonces,  $\tilde{\Pi}_{\tilde{V}_1 \cap \tilde{V}_2} = \tilde{\Pi}_1 \tilde{\Pi}_2 = 0$ . Luego,  $\tilde{\Pi}_{\tilde{V}_1 + \tilde{V}_2} = \tilde{\Pi}_1 + \tilde{\Pi}_2$ .

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 \Pr_{CG}([V_1, t_1] \vee [V_2, t_2]) &= \Pr_{CG}([\tilde{V}_1, t_0] \vee [\tilde{V}_2, t_0]) = \Pr_{CG}([\tilde{V}_1 + \tilde{V}_2, t_0]) = \\
 &= Tr[\rho_{t_0}(\tilde{\Pi}_1 + \tilde{\Pi}_2)] = Tr(\rho_{t_0}\tilde{\Pi}_1) + Tr(\rho_{t_0}\tilde{\Pi}_2) = \\
 &= Tr[\rho_{t_0}U(t_0, t_1)\Pi_1U(t_1, t_0)] + Tr[\rho_{t_0}U(t_0, t_2)\Pi_2U(t_2, t_0)] = \\
 &= Tr(\rho_{t_1}\Pi_1) + Tr(\rho_{t_2}\Pi_2) = \Pr_{CG}([V_1, t_1]) + \Pr_{CG}([V_2, t_2]).
 \end{aligned}$$

Luego,  $\Pr_{CG}([V, t_0]) = Tr(\rho_{t_0}\Pi_V)$  es una probabilidad bien definida. ■

El subreticulado  $[E]_B$  es una generalización de los contextos de propiedades a un tiempo de la mecánica cuántica ordinaria, que permite representar historias cuánticas, es decir, secuencias de propiedades a distintos tiempos. A continuación se describe cómo se representan las historias cuánticas usando los contextos generalizados.

### Historias de dos tiempos:

Sean dos tiempos  $t_1 < t_2$ . En el tiempo  $t_1$  se considera al contexto generalizado  $[E]_{B_1}$ , generado por las propiedades atómicas representadas por

$$B_1 = \{V_1^{k_1} \mid k_1 \in \sigma_1, V_1^{k_1} \perp V_1^{k'_1} \text{ si } k_1 \neq k'_1, \sum_{k_1 \in \sigma_1} V_1^{k_1} = \mathcal{H}\},$$

donde los proyectores  $\Pi_1^{k_1}$ , correspondientes a las propiedades atómicas representadas por  $V_1^{k_1}$ , satisfacen las ecuaciones

$$\Pi_1^{k_1}\Pi_1^{k'_1} = \delta_{k_1 k'_1}\Pi_1^{k_1}, \quad \sum_{k_1 \in \sigma_1} \Pi_1^{k_1} = I.$$

En el tiempo  $t_2$  se considera al contexto generalizado  $[E]_{B_2}$ , generado por las propiedades atómicas representadas por

$$B_2 = \{V_2^{k_2} \mid k_2 \in \sigma_2, V_2^{k_2} \perp V_2^{k'_2} \text{ si } k_2 \neq k'_2, \sum_{k_2 \in \sigma_2} V_2^{k_2} = \mathcal{H}\},$$

donde los proyectores correspondientes  $\Pi_2^{k_2}$  satisfacen

$$\Pi_2^{k_2}\Pi_2^{k'_2} = \delta_{k_2 k'_2}\Pi_2^{k_2}, \quad \sum_{k_2 \in \sigma_2} \Pi_2^{k_2} = I.$$

Las propiedades generadas por  $B_1$  y por  $B_2$  son de la forma

$$V_1 = \sum_{k_1 \in \sigma_{V_1}} V_1^{k_1}, \quad \sigma_{V_1} \subset \sigma_1, \quad V_2 = \sum_{k_2 \in \sigma_{V_2}} V_2^{k_2}, \quad \sigma_{V_2} \subset \sigma_2,$$

con los proyectores correspondientes  $\Pi_1 = \sum_{k_1 \in \sigma_{V_1}} \Pi_1^{k_1}$  y  $\Pi_2 = \sum_{k_2 \in \sigma_{V_2}} \Pi_2^{k_2}$ .

A partir de los contextos generalizados  $[E]_{B_1}$  y  $[E]_{B_2}$ , se representan las historias cuánticas de dos tiempos. Sean las propiedades  $p_1^{k_1}$  y  $p_2^{k_2}$ , representadas por  $V_1^{k_1}$  y  $V_2^{k_2}$ , respectivamente; y sean  $V_{1,0}^{k_1}$  y  $V_{2,0}^{k_2}$  sus traslaciones temporales a un tiempo común  $t_0$ , es decir,  $V_{1,0}^{k_1} = U(t_0, t_1)V_1^{k_1}$  y  $V_{2,0}^{k_2} = U(t_0, t_2)V_2^{k_2}$ .

- Una historia atómica  $\check{p}^{\mathbf{k}} = \{(p_1^{k_1}, t_1); (p_2^{k_2}, t_2)\}$ , se representa de la siguiente manera:

$$\check{p}^{\mathbf{k}} \longleftrightarrow [V_1^{k_1}, t_1] \wedge [V_2^{k_2}, t_2] = [V_{1,0}^{k_1} \cap V_{2,0}^{k_2}, t_0].$$

- Una historia general  $\check{p} = \bigvee_{\mathbf{k} \in \Sigma_{\check{p}}} \{(p_1^{k_1}, t_1); (p_2^{k_2}, t_2)\}$ , con  $\Sigma_{\check{p}} \subseteq \sigma_1 \times \sigma_2$ , se representa de la siguiente manera:

$$\check{p} \longleftrightarrow \bigvee_{\mathbf{k} \in \Sigma_{\check{p}}} ([V_1^{k_1}, t_1] \wedge [V_2^{k_2}, t_2]) = \left[ \sum_{\mathbf{k} \in \Sigma_{\check{p}}} (V_{1,0}^{k_1} \cap V_{2,0}^{k_2}), t_0 \right].$$

Dadas dos historias  $\check{p}$  y  $\check{q}$  representadas por  $[V_{\check{p}}, t_0]$  y  $[V_{\check{q}}, t_0]$  respectivamente, la disyunción, la conjunción y la negación se representan de la siguiente manera:

- $\check{p} \vee \check{q} \longleftrightarrow [V_{\check{p}}, t_0] \vee [V_{\check{q}}, t_0] = [V_{\check{p}} + V_{\check{q}}, t_0],$
- $\check{p} \wedge \check{q} \longleftrightarrow [V_{\check{p}}, t_0] \wedge [V_{\check{q}}, t_0] = [V_{\check{p}} \cap V_{\check{q}}, t_0],$
- $\neg \check{p} \longleftrightarrow \overline{[V_{\check{p}}, t_0]} = [V_{\check{p}}^\perp, t_0].$

Sin embargo, no todo par de contextos generalizados puede formar parte de una misma descripción de un sistema cuántico. Para considerar clases de equivalencia de diferentes contextos generalizados se necesita que puedan ser incluidas en un mismo contexto generalizado. Para que esto sea posible, el formalismo de Contextos Generalizados postula que los proyectores correspondientes a las propiedades atómicas de cada contexto, trasladados a un tiempo común, conmuten entre sí, es decir,

$$[\Pi_{1,0}^{k_1}, \Pi_{2,0}^{k_2}] = 0, \quad k_1 \in \sigma_1, \quad k_2 \in \sigma_2,$$

donde

$$\Pi_{1,0}^{k_1} = U(t_0, t_1) \Pi_1^{k_1} U^{-1}(t_0, t_1) \quad \text{y} \quad \Pi_{2,0}^{k_2} = U(t_0, t_2) \Pi_2^{k_2} U^{-1}(t_0, t_2).$$

A estas condiciones se las denomina *condiciones de compatibilidad* y cuando los contextos generalizados las satisfacen se dice que son *compatibles*. Se debe notar que, a diferencia de las condiciones de consistencia de la teoría de Historias Consistentes, las condiciones de compatibilidad son independientes del estado del sistema.

Una vez que se tienen dos contextos generalizados compatibles se puede formar un nuevo contexto generalizado que incluya a todos los otros. Primero, a partir de los conjuntos de propiedades atómicas  $B_1$  y  $B_2$ , se define un nuevo conjunto de propiedades atómicas  $B$  de la siguiente manera

$$B = \{V_{1,0}^{k_1} \cap V_{2,0}^{k_2} \mid V_i^{k_i} \in B_i, \quad k_i \in \sigma_i, \quad i = 1, 2\}.$$

Luego, se define el contexto generalizado  $[E]_B$ , generado por  $B$ .

Los subespacios  $V_0^{k_1 k_2} = V_{1,0}^{k_1} \cap V_{2,0}^{k_2}$  representan a las propiedades atómicas de  $[E]_B$  y sus proyectores asociados están dados por  $\Pi_0^{k_1 k_2} = \Pi_{1,0}^{k_1} \Pi_{2,0}^{k_2}$ . Todas las clases de equivalencia de los contextos generalizados  $[E]_{B_1}$  y  $[E]_{B_2}$  forman parte del contexto generalizado  $[E]_B$  y, por lo tanto, también las operaciones entre ellas.

La probabilidad de la conjunción y la disyunción entre clases de equivalencia de  $[E]_{B_1}$  y  $[E]_{B_2}$  están dadas por

$$\begin{aligned} \Pr_{CG}([V_1^{k_1}, t_1] \wedge [V_2^{k_2}, t_2]) &= \Pr_{CG}([V_{1,0}^{k_1} \cap V_{2,0}^{k_2}, t_0]) = \text{Tr}(\rho_{t_0} \Pi_{1,0}^{k_1} \Pi_{2,0}^{k_2}), \\ \Pr_{CG}([V_1^{k_1}, t_1] \vee [V_2^{k_2}, t_2]) &= \Pr_{CG}([V_{1,0}^{k_1} + V_{2,0}^{k_2}, t_0]) = \text{Tr}(\rho_{t_0} \{\Pi_{1,0}^{k_1} + \Pi_{2,0}^{k_2} - \Pi_{1,0}^{k_1} \Pi_{2,0}^{k_2}\}). \end{aligned}$$

### Historias de $n$ tiempos

En el caso general de historias de  $n$  tiempos, con  $t_1 < \dots < t_n$ , se deben considerar para cada tiempo  $t_i$  un contexto generalizado de eventos  $[E]_{B_i}$ , generado por las propiedades atómicas

$$B_i = \{V_i^{k_i} \mid k_i \in \sigma_i, V_i^{k_i} \perp V_i^{k'_i} \text{ si } k_i \neq k'_i, \sum_{k_i} V_i^{k_i} = \mathcal{H}\},$$

donde los proyectores  $\Pi_i^{k_i}$ , correspondientes a los subespacios  $V_i^{k_i}$ , satisfacen las ecuaciones

$$\Pi_i^{k_i} \Pi_i^{k'_i} = \delta_{k_i k'_i} \Pi_i^{k_i}, \quad \sum_{k_i} \Pi_i^{k_i} = I, \quad k_i, k'_i \in \sigma_i.$$

Para considerar simultáneamente clases de equivalencia de diferentes contextos generalizados se necesita que puedan ser incluidas en un mismo contexto generalizado. Para esto el formalismo de Contextos Generalizados postula las *condiciones de compatibilidad*: Los proyectores correspondientes a las propiedades atómicas de cada contexto, trasladados a un tiempo común, deben conmutar entre sí, es decir,

$$[\Pi_{i,0}^{k_i}, \Pi_{j,0}^{k_j}] = 0, \quad k_i \in \sigma_i, \quad k_j \in \sigma_j, \quad i, j = 1, \dots, n; \quad (3.10)$$

donde

$$\Pi_{i,0}^{k_i} = U(t_0, t_i) \Pi_i^{k_i} U^{-1}(t_0, t_i) \quad \text{y} \quad \Pi_{j,0}^{k_j} = U(t_0, t_j) \Pi_j^{k_j} U^{-1}(t_0, t_j).$$

Una vez que se tienen  $n$  contextos generalizados compatibles entre sí, se puede formar un nuevo contexto generalizado que los incluya a todos. Primero, a partir de los conjuntos de propiedades atómicas  $B_i$ , se define un nuevo conjunto de propiedades atómicas  $B$  de la siguiente manera

$$B = \left\{ \bigcap_{i=1}^n V_{i,0}^{k_i} \mid V_i^{k_i} \in B_i, \quad k_i \in \sigma_i, \quad i = 1, \dots, n \right\},$$

donde  $V_{i,0}^{k_i} = U(t_0, t_i) V_i^{k_i}$ . Luego, a partir de  $B$  se define el contexto generalizado generado  $[E]_B$ .

Los subespacios  $V_0^{k_1 \dots k_n} = \bigcap_{i=1}^n V_{i,0}^{k_i}$  representan a las propiedades atómicas de  $B$  y sus proyectores asociados están dados por  $\Pi_0^{k_1 \dots k_n} = \Pi_{1,0}^{k_1} \dots \Pi_{n,0}^{k_n}$ . Todas las clases de equivalencia de los contextos generalizados  $[E]_{B_i}$  forman parte del contexto generalizado  $[E]_B$  y, por lo tanto, también las operaciones entre ellas.

A partir del contexto generalizado  $[E]_B$ , se representan las historias cuánticas de  $n$  tiempos. Sean las propiedades  $p_i^{k_i}$ , representadas por  $V_i^{k_i}$ , respectivamente, con  $1 \leq i \leq n$ .

- Una historia atómica  $\check{p}^{\mathbf{k}} = \{(p_1^{k_1}, t_1); \dots; (p_n^{k_n}, t_n)\}$ , con  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ , se representa de la siguiente manera:

$$\check{p}^{\mathbf{k}} \longleftrightarrow [V_1^{k_1}, t_1] \wedge \dots \wedge [V_n^{k_n}, t_n] = \left[ \bigcap_{i=1}^n V_{i,0}^{k_i}, t_0 \right].$$

- Una historia general  $\check{p} = \bigvee_{\mathbf{k} \in \Sigma_{\check{p}}} \{(p_1^{k_1}, t_1); \dots; (p_n^{k_n}, t_n)\}$ , con  $\Sigma_{\check{p}} \subseteq \sigma_1 \times \dots \times \sigma_n$ , se representa de la siguiente manera:

$$\check{p} \longleftrightarrow \bigvee_{\mathbf{k} \in \Sigma_{\check{p}}} ([V_1^{k_1}, t_1] \wedge \dots \wedge [V_n^{k_n}, t_n]) = \left[ \sum_{\mathbf{k} \in \Sigma_{\check{p}}} \left( \bigcap_{i=1}^n V_{i,0}^{k_i} \right), t_0 \right].$$

Las probabilidades de las historias  $\check{p}^{\mathbf{k}}$  y  $\check{p}$  están dadas por

- $\Pr_{CG}([V_1^{k_1}, t_1] \wedge \dots \wedge [V_n^{k_n}, t_n]) = \Pr_{CG}([\bigcap_{i=1}^n V_{i,0}^{k_i}, t_0]) = \text{Tr}(\rho_{t_0} \Pi_{1,0}^{k_1} \dots \Pi_{n,0}^{k_n})$ ,
- $\Pr_{CG} \left( \bigvee_{\mathbf{k} \in \Sigma_{\check{p}}} ([V_1^{k_1}, t_1] \wedge \dots \wedge [V_n^{k_n}, t_n]) \right) = \Pr_{CG} \left( \left[ \sum_{\mathbf{k} \in \Sigma_{\check{p}}} (\bigcap_{i=1}^n V_{i,0}^{k_i}), t_0 \right] \right) = \text{Tr} \left( \rho_{t_0} \sum_{\mathbf{k} \in \Sigma_{\check{p}}} \Pi_{1,0}^{k_1} \dots \Pi_{n,0}^{k_n} \right)$

con  $\sum_{\mathbf{k} \in \Sigma_{\check{p}}} \Pi_{1,0}^{k_1} \dots \Pi_{n,0}^{k_n}$  es el proyector correspondiente al subespacio  $\sum_{\mathbf{k} \in \Sigma_{\check{p}}} (\bigcap_{i=1}^n V_{i,0}^{k_i})$ .

Las operaciones lógicas de historias se representan de manera análoga al caso  $n = 2$ . Dadas dos historias  $\check{p}$  y  $\check{q}$  representadas por  $[V_{\check{p}}, t_0]$  y  $[V_{\check{q}}, t_0]$  respectivamente, la disyunción, la conjunción y la negación se representan de la siguiente manera:

- $\check{p} \vee \check{q} \longleftrightarrow [V_{\check{p}}, t_0] \vee [V_{\check{q}}, t_0] = [V_{\check{p}} + V_{\check{q}}, t_0]$ ,
- $\check{p} \wedge \check{q} \longleftrightarrow [V_{\check{p}}, t_0] \wedge [V_{\check{q}}, t_0] = [V_{\check{p}} \cap V_{\check{q}}, t_0]$ ,
- $\neg \check{p} \longleftrightarrow \overline{[V_{\check{p}}, t_0]} = [V_{\check{p}}^\perp, t_0]$ .

Hasta aquí se han resumido las ideas centrales del formalismo de Contextos Generalizados. Se ha demostrado que permite representar historias cuánticas de  $n$  tiempos y que asigna probabilidades a subconjuntos de ellas que satisfagan las condiciones de compatibilidad. Se debe resaltar que las condiciones de compatibilidad son independientes del estado del sistema, a diferencia de lo que ocurre con las condiciones de consistencia de la teoría de Historias Consistentes.

El formalismo de Contextos Generalizados está basado en la traslación temporal de propiedades, que permite transformar propiedades referidas a distintos tiempos en propiedades referidas a un mismo tiempo. Para describir historias cuánticas, primero se considera un contexto ordinario de propiedades en cada tiempo. Luego, si los proyectores que representan las propiedades atómicas de cada contexto conmutan cuando son trasladadas a un tiempo común, entonces los contextos a diferentes tiempos pueden considerarse simultáneamente y formar un contexto generalizado de propiedades. La probabilidad sobre un contexto generalizado se obtiene a partir de una generalización de la regla de Born. Las características principales de este formalismo pueden resumirse en los siguientes puntos:

- Las historias cuánticas que pueden predicarse simultáneamente de un sistema cuántico deben ser tales que involucren únicamente propiedades cuyos proyectores conmuten entre sí al ser trasladados a un tiempo común.
- La probabilidad de las historias de un sistema cuántico se obtienen a partir de la generalización de la regla de Born.
- La medición se considera un proceso físico ordinario, descrito por la ecuación de Schrödinger. No hay postulado de colapso del vector de estado.

En la próxima sección se comparan las dos teorías de historias cuánticas presentadas a lo largo de este trabajo: la teoría de Historias Consistentes y el formalismo de Contextos Generalizados. Se analizan sus diferencias y se describen las relaciones entre las condiciones de consistencia y las condiciones de compatibilidad.

### 3.4. Relaciones entre Historias Consistentes y Contextos Generalizados

En esta sección se analiza una restricción a la teoría de Historias Consistentes. Se explora cómo se modifica la teoría al imponer que las familias de historias válidas deben ser aquellas que satisfacen las condiciones de consistencia para todo estado físico. Además, se prueba que estas nuevas condiciones son equivalentes a imponer las condiciones de compatibilidad del formalismo de Contextos Generalizados. Por último, se muestra que la modificación de la teoría de Historias Consistentes, con las condiciones de consistencia impuestas para todo estado, y el formalismo de Contextos Generalizados representan las mismas historias y asignan las mismas probabilidades [20].

#### 3.4.1. Teoría de historias consistentes independientes del estado

Sea en cada tiempo  $t_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) un contexto de propiedades generado por las propiedades atómicas  $p_i^{k_i}$ , con  $k_i \in \sigma_i$ . Sean  $\Pi_i^{k_i}$  sus respectivos proyectores ortogonales, los cuales satisfacen

$$\Pi_i^{k_i} \Pi_i^{k'_i} = \delta_{k_i k'_i} \Pi_i^{k_i}, \quad \sum_{k_i} \Pi_i^{k_i} = I, \quad k_i, k'_i \in \sigma_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Se consideran las historias atómicas

$$\check{p}^{\mathbf{k}} = \{(p_1^{k_1}, t_1); \dots; (p_n^{k_n}, t_n)\}, \quad \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \Sigma,$$

con  $\Sigma = \sigma_1 \times \dots \times \sigma_n$ .

Además, se consideran las historias generales dadas por

$$\check{p} = \bigvee_{\mathbf{k} \in \Sigma_{\check{p}}} \{(p_1^{k_1}, t_1); \dots; (p_n^{k_n}, t_n)\}.$$

La teoría de Historias Consistentes representa a las historias atómicas  $\check{p}^{\mathbf{k}}$  por medio de los proyectores

$$\check{\Pi}^{\mathbf{k}} = \Pi_1^{k_1} \otimes \dots \otimes \Pi_n^{k_n}$$

y a las historias generales  $\check{p}$  a través de los proyectores

$$\check{\Pi}^{\check{p}} = \sum_{\mathbf{k} \in \Sigma_{\check{p}}} \Pi_1^{k_1} \otimes \dots \otimes \Pi_n^{k_n}.$$

Luego, se define la familia de historias, formada por todas las historias generales,

$$A = \left\{ \check{\Pi} = \sum_{\mathbf{k} \in \Sigma} \alpha_{\mathbf{k}} \check{\Pi}^{\mathbf{k}} \mid \alpha_{\mathbf{k}} = 0, 1 \right\}.$$

Por último, para obtener una familia de historias consistentes se deben satisfacer las condiciones de consistencia dadas por

$$\text{Re}[\text{Tr}(C^\dagger(\check{\Pi}^{\mathbf{k}})\rho_{t_0}C(\check{\Pi}^{\mathbf{k}'}))] = 0, \quad \text{para todo } \mathbf{k} \neq \mathbf{k}' \text{ y para un } \rho_{t_0} \text{ fijo.}$$

Se analizará cómo se modifica la teoría si se reemplazan las condiciones de consistencia por condiciones más fuertes dadas por

$$\text{Re}[\text{Tr}(C^\dagger(\check{\Pi}^{\mathbf{k}})\rho_{t_0}C(\check{\Pi}^{\mathbf{k}'}))] = 0, \quad \text{para todo } \mathbf{k} \neq \mathbf{k}' \text{ y para todo } \rho_{t_0}.$$

A estas condiciones se las denominará *condiciones de consistencia independientes del estado* y a la teoría de Historias Consistentes con la condiciones de consistencia independientes del estado del sistema se la llamará *teoría de historias consistentes independientes del estado*.

En el apéndice se demuestra que imponer las condiciones de consistencia independientes del estado a las historias atómicas del conjunto  $A$  es equivalente a exigir sobre  $\Pi_{i,0}^{k_i}$ , los proyectores de las propiedades atómicas trasladados a un tiempo común  $t_0$ , que conmuten entre sí. Estas relaciones son las mismas condiciones de compatibilidad que impone el formalismo de Contextos Generalizados.

Más precisamente se demuestran los siguientes teoremas:

**Teorema 1:**

*Si las historias atómicas del conjunto  $A$  dadas en la ecuación (3.2) satisfacen las condiciones de consistencia para todo estado  $\rho_{t_0}$ , entonces  $[\Pi_{i,0}^{k_i}, \Pi_{j,0}^{k_j}] = 0$ , para todo  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $k_i \in \sigma_i$ ,  $k_j \in \sigma_j$ .*

**Teorema 2:**

*Si  $[\Pi_{i,0}^{k_i}, \Pi_{j,0}^{k_j}] = 0$ , para todo  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $k_i \in \sigma_i$ ,  $k_j \in \sigma_j$ , entonces las historias atómicas de  $A$ , dadas en la ecuación (3.2), satisfacen las condiciones de consistencia para todo estado  $\rho_{t_0}$ .*

Es fácil ver que la probabilidad adopta una expresión más sencilla sobre el conjunto de historias consistentes independientes del estado. Usando las condiciones  $[\Pi_{i,0}^{k_i}, \Pi_{j,0}^{k_j}] = 0$

sobre las ecuaciones (3.3), (3.4) y (3.5), se obtiene la siguiente expresión para la probabilidad de una historia atómica  $\check{p}^{\mathbf{k}}$ , representada por el proyector  $\check{\Pi}^{\mathbf{k}} = \Pi_1^{k_1} \otimes \dots \otimes \Pi_n^{k_n}$ ,

$$\Pr_{HC}(\check{\Pi}^{\mathbf{k}}) = \text{Tr}(\rho_{t_0} \Pi_{1,0}^{k_1} \dots \Pi_{n,0}^{k_n}). \quad (3.11)$$

Para una historia general  $\check{p}$ , representada por el proyector  $\check{\Pi}^{\check{p}} = \sum_{\mathbf{k} \in \Sigma_{\check{p}}} \check{\Pi}^{\mathbf{k}}$ , la probabilidad está dada por

$$\Pr_{HC}(\check{\Pi}^{\check{p}}) = \sum_{\mathbf{k} \in \Sigma_{\check{p}}} \Pr(\check{\Pi}^{\mathbf{k}}) = \text{Tr} \left( \rho_{t_0} \sum_{\mathbf{k} \in \Sigma_{\check{p}}} \Pi_{1,0}^{k_1} \dots \Pi_{n,0}^{k_n} \right). \quad (3.12)$$

Se debe resaltar que si las condiciones de consistencia se imponen para todos los estados, las historias representadas por proyectores definidos sobre el espacio de Hilbert de historias de  $n$  tiempos  $\check{\mathcal{H}}$  tienen una probabilidad que puede computarse a través de la regla de Born en términos de proyectores definidos sobre  $\mathcal{H}$ . En la ecuación (3.11) el proyector  $\Pi_{n,0}^{k_n} \dots \Pi_{1,0}^{k_1}$  corresponde a la conjunción en  $\mathcal{H}$  de las propiedades atómicas  $\Pi_i^{k_i}$  trasladadas a un tiempo común  $t_0$  y los proyectores de la ecuación (3.12) corresponden a la disyunción de estas conjunciones.

### 3.4.2. Historias consistentes independientes del estado y Contextos Generalizados

En este apartado se muestra que la teoría de Historias Consistentes independiente del estado y el formalismo de Contextos Generalizados son igualmente útiles para representar historias cuánticas. Ambos formalismos pueden representar las mismas historias y asignan las mismas probabilidades.

Al igual que en el apartado anterior, se considera en cada tiempo  $t_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) un contexto de propiedades generado por las propiedades atómicas  $p_i^{k_i}$ , con  $k_i \in \sigma_i$ . Sean  $\Pi_i^{k_i}$  sus respectivos proyectores ortogonales, los cuales satisfacen

$$\Pi_i^{k_i} \Pi_i^{k'_i} = \delta_{k_i k'_i} \Pi_i^{k_i}, \quad \sum_{k_i} \Pi_i^{k_i} = I, \quad k_i, k'_i \in \sigma_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Además, se asume que los proyectores verifican las condiciones

$$[\Pi_{i,0}^{k_i}, \Pi_{j,0}^{k_j}] = 0, \quad i, j = 1, \dots, n; \quad k_i \in \sigma_i, \quad k_j \in \sigma_j, \quad (3.13)$$

donde  $\Pi_{j,0}^{k_j} = U(t_0, t_j) \Pi_j^{k_j} U(t_j, t_0)$ .

Una historia de la forma  $\check{p} = \bigvee_{\mathbf{k} \in \Sigma} \{(p_1^{k_1}, t_1); \dots; (p_n^{k_n}, t_n)\}$ , con  $\Sigma = \sigma_1 \times \dots \times \sigma_n$ , puede representarse usando el formalismo de Contextos Generalizados, ya que las ecuaciones (3.13) son las condiciones de compatibilidad del formalismo. Además, de acuerdo con el teorema 1 y el teorema 2 del apartado 3.4.1, las ecuaciones (3.13) son equivalentes a las condiciones de consistencia independientes del estado. Por lo tanto, la historia  $\check{p}$  también puede ser incluida en la teoría de Historias Consistentes (y en lo que se ha denominado *teoría de historias consistentes independientes del estado*).

De esta forma se concluye que si se imponen las condiciones de consistencia para todo estado, la teoría de Historias Consistentes y el formalismo de Contextos Generalizados pueden considerar los mismos conjuntos de historias cuánticas.

Por otro lado, en el apartado 3.3.2 se ha mostrado que el formalismo de Contextos Generalizados representa a la historia  $\check{p}$  con la siguiente clase de equivalencia

$$\check{p} \longleftrightarrow \bigvee_{\mathbf{k} \in \Sigma_{\check{p}}} ([V_1^{k_1}, t_1] \wedge \dots \wedge [V_n^{k_n}, t_n]) = \left[ \sum_{\mathbf{k} \in \Sigma_{\check{p}}} \bigcap_{i=1}^n V_{i,0}^{k_i}, t_0 \right],$$

y su probabilidad está dada por

$$\Pr_{CG} \left( \left[ \sum_{\mathbf{k} \in \Sigma_{\check{p}}} \bigcap_{i=1}^n V_{i,0}^{k_i}, t_0 \right] \right) = \text{Tr} \left( \rho_{t_0} \sum_{\mathbf{k} \in \Sigma_{\check{p}}} \Pi_{1,0}^{k_1} \dots \Pi_{n,0}^{k_n} \right). \quad (3.14)$$

En la teoría de historias consistentes independiente del estado, la historia  $\check{p}$  se representa por un proyector, definido sobre el espacio de Hilbert  $\check{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}$ , dado por

$$\check{\Pi}^{\check{p}} = \sum_{\mathbf{k} \in \Sigma_{\check{p}}} \Pi_1^{k_1} \otimes \dots \otimes \Pi_n^{k_n},$$

y su probabilidad viene dada por

$$\Pr_{HC}(\check{\Pi}) = \sum_{\mathbf{k} \in \Sigma_{\check{p}}} \Pr(\check{\Pi}^{\mathbf{k}}) = \text{Tr} \left( \rho_{t_0} \sum_{\mathbf{k} \in \Sigma_{\check{p}}} \Pi_{n,0}^{k_n} \dots \Pi_{1,0}^{k_1} \right). \quad (3.15)$$

Comparando las ecuaciones (3.14) y (3.15), se observa que si se imponen las condiciones de consistencia para todo estado, la teoría de Historias Consistentes y el formalismo de Contextos Generalizados asignan las mismas probabilidades a las historias cuánticas.

Por lo tanto, se ha demostrado que la teoría de historias consistentes independientes del estado es equivalente al formalismo de Contextos Generalizados, ya que pueden representar las mismas historias cuánticas y les asignan las mismas probabilidades.

Se debe destacar que si se compara el formalismo de Contextos Generalizados con la teoría de Historias Consistentes con la condición de consistencia usual, resulta que la segunda permite representar más historias cuánticas. Sin embargo, sus familias de historias consistentes dependen del estado del sistema y esto presenta ciertos inconvenientes. En la siguiente sección se analiza uno de ellos, a saber, la retrodicción de propiedades contrarias.

### 3.5. Retrodicción de propiedades contrarias

Como se mencionó en la sección 3.2, la teoría de Historias Consistentes impone sobre las familias de historias la condición de consistencia para poder definir probabilidades. Estas condiciones tienen la particularidad de depender del estado del sistema, situación muy diferente a lo que ocurre en el formalismo ortodoxo de la mecánica cuántica. Además, al ser poco restrictivas, las condiciones de consistencia permiten demasiadas familias de historias, algunas de las cuales son de difícil interpretación. En particular, como las predicciones y retrodicciones probabilísticas dependen de la familia de historias consistentes

elegida, se ha mostrado que esta excesiva libertad hace posible la retrodicción de propiedades contrarias [14].

Los defensores de las Historias Consistentes argumentan que esto no es un problema para la teoría, porque cada retrodicción se obtiene en una familia de historias consistentes distinta, es decir, en diferentes descripciones del sistema físico que no pueden ser consideradas simultáneamente [10, 11]. Sin embargo, para algunos autores es considerado un grave problema teórico [14, 15, 25].

En esta sección se analiza la posibilidad de retrodecir propiedades contrarias usando el formalismo de Contextos Generalizados. Primero se demuestra que no es posible realizar inferencias contrarias en el formalismo ortodoxo de la mecánica cuántica. Luego se discute brevemente la retrodicción de propiedades contrarias en la teoría de Historias Consistentes. Por último, se analiza este problema usando el formalismo de Contextos Generalizados y se concluye que no es posible la retrodicción de propiedades contrarias en dicho formalismo [21].

### 3.5.1. Propiedades contrarias en la mecánica cuántica ortodoxa

En la mecánica cuántica ortodoxa una propiedad  $p$  se representa por un proyector ortogonal  $\Pi_p$ , o alternativamente, por su correspondiente subespacio cerrado  $V_p = \Pi_p \mathcal{H}$ . Dos propiedades  $p$  y  $q$  se dicen contrarias si satisfacen  $p \leq \neg q$ , es decir, si son ortogonales (ver definición 2.3.20). Esta relación, escrita en términos de los correspondientes subespacios, se expresa de la siguiente forma

$$\Pi_p \mathcal{H} \subseteq (I - \Pi_q) \mathcal{H}. \quad (3.16)$$

Si se traduce la relación de inclusión de subespacios en términos de sus proyectores (ver referencia [24], sección 1.3), entonces la ecuación anterior se escribe de la siguiente manera

$$\Pi_p(I - \Pi_q) = (I - \Pi_q)\Pi_p = \Pi_p.$$

A partir de esta última expresión es fácil ver que  $\Pi_p \Pi_q = \Pi_q \Pi_p = 0$ , luego los proyectores  $\Pi_p$  y  $\Pi_q$  conmutan, y entonces representan propiedades compatibles. Los proyectores  $\Pi_p$ ,  $\Pi_q$  y  $\Pi_{\neg(p \vee q)} = I - \Pi_p - \Pi_q$  forman una descomposición proyectiva de la identidad, es decir, son ortogonales y suman la identidad. Por lo tanto, las propiedades  $p$ ,  $q$  y  $\neg(p \vee q)$  generan un contexto de propiedades, con probabilidades bien definidas [22].

Para cualquier estado del sistema representado por un operador de estado  $\rho$ , la probabilidad de una propiedad arbitraria  $r$  se obtiene a partir de la regla de Born, es decir,  $\Pr_\rho(r) = \text{Tr}(\rho \Pi_r)$ . En particular, para las propiedades atómicas se obtiene

$$\Pr_\rho(p) + \Pr_\rho(q) + \Pr_\rho(\neg(p \vee q)) = 1. \quad (3.17)$$

A partir de estas ecuaciones se deduce que si  $\Pr_\rho(p) = 1$ , entonces  $\Pr_\rho(q) = 0$ , y si  $\Pr_\rho(q) = 1$ , entonces  $\Pr_\rho(p) = 0$ .

Por lo tanto, se concluye que en la mecánica cuántica ortodoxa es imposible que dos propiedades contrarias  $p$  y  $q$  tengan probabilidad igual a uno para el mismo estado. Esto puede interpretarse de la siguiente manera: si ocurre la propiedad  $p$  ( $q$ ), entonces la

propiedad  $q$  ( $p$ ) no puede ocurrir. Este resultado justifica haber denominado *propiedades contrarias* a propiedades que satisfacen la relación (3.16).

Más en general, es fácil ver que dado dos propiedades contrarias  $p$  y  $q$ , no es posible obtener un estado  $\rho$  y una propiedad  $r$  tales que

$$\Pr_{\rho}(p|r) = 1, \quad \Pr_{\rho}(q|r) = 1. \quad (3.18)$$

Si se pudieran definir simultáneamente las probabilidades condicionales anteriores, entonces las propiedades  $p$ ,  $q$  y  $r$  tendrían que representarse por proyectores que conmuten. Teniendo esto en cuenta las probabilidades condicionales se podrían escribir de la siguiente forma

$$\Pr_{\rho}(p|r) = \frac{\text{Tr}(\rho\Pi_p\Pi_r)}{\text{Tr}(\rho\Pi_r)} = \text{Tr}(\rho^*\Pi_p) = \Pr_{\rho^*}(p), \quad \Pr_{\rho}(q|r) = \text{Tr}(\rho^*\Pi_q) = \Pr_{\rho^*}(q),$$

donde  $\rho^* = \frac{\Pi_r\rho\Pi_r}{\text{Tr}(\Pi_r\rho\Pi_r)}$ . Teniendo en cuenta la ecuación (3.17), con  $\rho = \rho^*$ , se concluye que no existe estado  $\rho$  y propiedad  $r$  para los cuales las ecuaciones (3.18) puedan ser ambas válidas.

### 3.5.2. Propiedades contrarias en la teoría de Historias Consistentes

Adrian Kent [14] fue el primero en señalar que en la teoría de Historias Consistentes es posible la retrodicción de propiedades contrarias utilizando distintas familias de historias consistentes. Posteriormente, J. B. Hartle [11] presentó un ejemplo de inferencia de propiedades contrarias, que es un caso especial del primer ejemplo dado por Kent [14].

Sea un sistema cuántico en un estado representado por  $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|A\rangle + |B\rangle + |C\rangle)$  al tiempo  $t_0$ , donde  $|A\rangle$ ,  $|B\rangle$  y  $|C\rangle$  son tres vectores ortonormales de un espacio de Hilbert de tres dimensiones. Por simplicidad se elige el hamiltoniano igual a cero.

En el tiempo  $t_1 > t_0$  se consideran las propiedades  $A$  y  $B$ , asociadas a los vectores ortonormales  $|A\rangle$  y  $|B\rangle$ . Sus respectivos proyectores están dados por  $\Pi_A = |A\rangle\langle A|$  y  $\Pi_B = |B\rangle\langle B|$ . Como  $|A\rangle$  y  $|B\rangle$  son ortogonales, entonces las propiedades  $A$  y  $B$  son contrarias. Al tiempo  $t_2 > t_1$  se considera la propiedad  $\Phi$ , representada por el proyector  $\Pi_{\Phi} = |\Phi\rangle\langle\Phi|$ , con  $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|A\rangle + |B\rangle - |C\rangle)$ .

Se considera la familia de historias de dos tiempos generada por las historias atómicas dadas por las propiedades  $A$  y su negación  $\neg A$  ( $\Pi_{\neg A} = I - P_A$ ) al tiempo  $t_1$ , y por las propiedades  $\Phi$  y su negación  $\neg\Phi$  ( $\Pi_{\neg\Phi} = I - P_{\Phi}$ ) al tiempo  $t_2$ . Esta familia de historias satisface las condiciones de consistencia y a partir de ella se puede obtener el siguiente resultado

$$\Pr_{\Psi}(A, t_1|\Phi, t_2) = 1, \quad \Pr_{\Psi}(\neg A, t_1|\Phi, t_2) = 0, \quad (3.19)$$

el cual puede interpretarse como que la propiedad  $\Phi$  al tiempo  $t_2$  implica a la propiedad  $A$  a un tiempo previo  $t_1 < t_2$ .

Por otro lado, usando otra familia consistente, generada por las historias dadas por las propiedades  $B$  y su negación  $\neg B$  ( $\Pi_{\neg B} = I - \Pi_B$ ) al tiempo  $t_1$ , y por las propiedades

$\Phi$  y  $\neg\Phi$  al tiempo  $t_2$ . Esta familia también satisface las condiciones de consistencia y en este caso se obtiene el siguiente resultado

$$\Pr_{\Psi}(B, t_1 | \Phi, t_2) = 1, \quad \Pr_{\Psi}(\neg B, t_1 | \Phi, t_2) = 0, \quad (3.20)$$

el cual puede interpretarse como que la propiedad  $\Phi$  al tiempo  $t_2$  implica a la propiedad  $B$  a un tiempo previo  $t_1 < t_2$ .

Las ecuaciones (3.19) y (3.20) muestran que utilizando dos familias de historias consistentes distintas se pueden retrodecir propiedades contrarias. Desde el punto de vista de la teoría de Historias Consistentes esto no representa un problema ya que las historias consideradas no pueden ser incluidas en una misma familia de historias consistentes [10, 11]. Sin embargo, algunos autores han considerado que estos resultados son una fuerte objeción a la consistencia interna de la teoría de Historias Consistentes [14, 15, 25].

En el siguiente apartado se analiza este ejemplo desde la perspectiva del formalismo de Contextos Generalizados. Además, se demuestra de manera general que en dicho formalismo no es posible la retrodicción de propiedades contrarias.

### 3.5.3. Propiedades contrarias en el formalismo de Contextos Generalizados

En este apartado se considera el ejemplo desarrollado por J. B. Hartle [11], presentado en el apartado anterior, utilizando el formalismo de Contextos Generalizados. Se demostrará que en este formalismo no es posible la retrodicción de propiedades contrarias.

Es fácil ver que los proyectores  $\Pi_A$  y  $\Pi_{\Phi}$  no conmutan y tampoco los proyectores  $\Pi_B$  y  $\Pi_{\Phi}$ . Por lo tanto, el formalismo de Contextos Generalizados no permite una descripción del sistema que incluya a las propiedades  $A$  al tiempo  $t_1$  y  $\Phi$  al tiempo  $t_2$  y tampoco una descripción que incluya a las propiedades  $B$  en  $t_1$  y  $\Phi$  en  $t_2$ . Por consiguiente, las historias del ejemplo de Hartle no son descripciones válidas en el formalismo de Contextos Generalizados y las probabilidades condicionales que aparecen en las ecuaciones (3.19) y (3.20) no están bien definidas.

Este resultado puede demostrarse para el caso general. Sea un estado  $\rho_{t_0}$  al tiempo  $t_0$ , dos propiedades contrarias  $p$  y  $q$  al tiempo  $t_1 > t_0$  y otra propiedad  $r$  al tiempo  $t_2 > t_1$ . Se probará que no es posible obtener simultáneamente  $\Pr_{\rho_{t_0}}(p, t_1 | r, t_2) = 1$  y  $\Pr_{\rho_{t_0}}(q, t_1 | r, t_2) = 1$ .

Para que las probabilidades condicionales estén bien definidas se deben satisfacer las siguientes condiciones de compatibilidad

$$[\Pi_{p,0}, \Pi_{r,0}] = 0, \quad [\Pi_{q,0}, \Pi_{r,0}] = 0, \quad (3.21)$$

donde

$$\Pi_{p,0} = U(t_0, t_1)\Pi_p U(t_1, t_0), \quad \Pi_{q,0} = U(t_0, t_1)\Pi_q U(t_1, t_0), \quad \Pi_{r,0} = U(t_0, t_2)\Pi_r U(t_2, t_0).$$

Además, como  $p$  y  $q$  son propiedades contrarias, sus respectivos proyectores conmutan y, por lo tanto,

$$[\Pi_{p,0}, \Pi_{q,0}] = 0. \quad (3.22)$$

Las relaciones de conmutación dadas en las ecuaciones (3.21) y (3.22) son las condiciones de compatibilidad necesarias para considerar un contexto generalizado de dos tiempos que incluya las propiedades contrarias  $p$  y  $q$  al tiempo  $t_1$  y la propiedad  $r$  al tiempo  $t_2$ . En este contexto las probabilidades condicionales  $\Pr_{\rho_{t_0}}(p, t_1|r, t_2)$  y  $\Pr_{\rho_{t_0}}(q, t_1|r, t_2)$  están bien definidas y se expresan de la siguiente forma

$$\Pr_{\rho_{t_0}}(p, t_1|r, t_2) = \frac{\text{Tr}(\rho_{t_0} \Pi_{p,0} \Pi_{r,0})}{\text{Tr}(\rho_{t_0} \Pi_{r,0})} = 1, \quad \Pr_{\rho_{t_0}}(q, t_1|r, t_2) = \frac{\text{Tr}(\rho_{t_0} \Pi_{q,0} \Pi_{r,0})}{\text{Tr}(\rho_{t_0} \Pi_{r,0})} = 1. \quad (3.23)$$

Teniendo en cuenta las relaciones de conmutación dadas en (3.21), las ecuaciones (3.23) se pueden escribir de la siguiente forma

$$\text{Tr}(\rho_{t_0}^* \Pi_{p,0}) = 1, \quad \text{Tr}(\rho_{t_0}^* \Pi_{q,0}) = 1, \quad \rho_{t_0}^* = \frac{\Pi_{r,0} \rho_{t_0} \Pi_{r,0}}{\text{Tr}(\Pi_{r,0} \rho_{t_0} \Pi_{r,0})}. \quad (3.24)$$

Como  $\Pi_{p,0}$  y  $\Pi_{q,0}$  representan propiedades contrarias al mismo tiempo  $t_0$  y  $\rho_{t_0}^*$  es un estado, pues satisface las condiciones de un operador densidad, entonces, siguiendo el mismo razonamiento que en el apartado 3.5.1, se concluye que no existe  $\rho_{t_0}^*$  para el cual las ecuaciones (3.24) sean ambas válidas. Por lo tanto, no es posible la retrodicción de propiedades contrarias en el formalismo de Contextos Generalizados.

## 3.6. Conclusiones parciales

En este capítulo se introdujo la noción de historia cuántica y se describieron los aspectos centrales de dos enfoques de historias cuánticas alternativos: la teoría de Historias Consistentes y el formalismo de Contextos Generalizados.

En la sección 3.1 se mencionaron las dificultades de la mecánica cuántica ortodoxa que motivaron el desarrollo de las teorías de historias cuánticas. Una de ellas es el tratamiento de la medición como un proceso físico distinto del resto de las interacciones físicas. La otra, la incapacidad de describir operaciones lógicas entre propiedades a distintos tiempos. Con vistas a superar estas dificultades se desarrollaron los diferentes enfoques de historias cuánticas.

Además, se definió la noción de evento como una propiedad a un dado tiempo y se definieron las historia de un sistema físico como secuencias de eventos a distintos tiempos u operaciones lógicas entre ellas.

En la sección 3.2 se resumieron las ideas centrales de la teoría de Historias Consistentes. Se describió cómo se representan las historias cuánticas y cómo se obtienen las familias de historias. Luego, sobre cada familia se definió una probabilidad. Sin embargo, para que la probabilidad esté bien definida y satisfaga el axioma de aditividad se requieren condiciones extras, denominadas *condiciones de consistencia*. Las familias de historias que satisfacen estas condiciones se denominan *familias de historias consistentes*.

En la sección 3.3 se describió el formalismo de Contextos Generalizados, para sistemas clásicos y cuánticos, y se mostró que era adecuado para representar historias de los sistemas físicos.

Primero se presentó el caso clásico, el cual sirvió como ejemplo para después desarrollar el caso cuántico. Los eventos se representan por pares que consisten en un conjunto del

espacio de fases y un tiempo. La traslación temporal de eventos se obtiene a partir de las ecuaciones de Hamilton. Eventos conectados por una traslación temporal no se consideran como esencialmente diferentes, sino pertenecientes a una misma clase de equivalencia, y las historias se representan por las clases de equivalencia. El conjunto de estas clases tiene estructura de reticulado booleano, lo cual que permite definir operaciones lógicas entre las clases y también permite definir una probabilidad.

En el caso cuántico se siguió un enfoque similar. Un evento se representa por un par constituido por un subespacio vectorial cerrado del espacio de Hilbert y un tiempo. La traslación temporal de eventos se obtiene a partir de la ecuación de Liouville - von Neumann. Eventos conectados por una traslación temporal no se consideran esencialmente diferentes, sino pertenecientes a una misma clase de equivalencia. Las historias se representan por las clases de equivalencia y el conjunto de estas clases tiene estructura de reticulado ortocomplementado, pero no distributivo. Para poder definir una probabilidad es necesario restringirse a un subreticulado booleano, al cual se denominó *contexto generalizado*. Luego, a partir de la regla de Born, se definió sobre cada contexto generalizado una probabilidad que cumple los axiomas de Kolmogorov.

Para representar conjunciones de historias de diferentes contextos generalizados las historias deben satisfacer las condiciones de compatibilidad, que consisten en que sus proyectores respectivos conmuten al ser trasladados a un tiempo común.

En la sección 3.4 se compararon los formalismos de Historias Consistentes y Contextos Generalizados. Se analizó una modificación de la teoría de Historias Consistentes que resulta de imponer que las familias de historias válidas deben ser aquellas que satisfacen las condiciones de consistencia para todo estado físico. Se probó que estas nuevas condiciones son equivalentes a imponer las condiciones de compatibilidad del formalismo de Contextos Generalizados. Por último, se mostró que la modificación de la teoría de Historias Consistentes, con las condiciones de consistencia impuestas para todo estado, y el formalismo de Contextos Generalizados representan las mismas historias y asignan las mismas probabilidades.

Por último, en la sección 3.5 se analizó la posibilidad de retrodecir propiedades contrarias usando el formalismo de Contextos Generalizados. Primero se demostró que no es posible realizar inferencias contrarias en el formalismo ortodoxo de la mecánica cuántica. Dadas dos propiedades contrarias  $p$  y  $q$  no existe ningún estado ni propiedad  $r$  para los cuales la probabilidad condicional de  $p$  dado  $r$  y la probabilidad condicional de  $q$  dado  $r$  puedan ser ambas iguales a uno. Luego, se mostró la posibilidad de retrodecir propiedades contrarias en la teoría de Historias Consistentes a partir de un ejemplo presentado por Hartle. Finalmente, se probó que el ejemplo presentado por Hartle utiliza historias que no son admisibles en el formalismo de Contextos Generalizados. Además, se demostró de manera general que no es posible la retrodicción de propiedades contrarias en este formalismo.

La ausencia de propiedades contrarias es una ventaja del formalismo de Contextos Generalizados. Sin embargo, como este formalismo impone más restricciones sobre los conjuntos de historias válidos que la teoría de las Historias Consistentes, se debe considerar la posibilidad de que ciertas historias con relevancia física no sean admisibles. Aún no se obtuvo un resultado definitivo al respecto, pero se ha dado el primer paso aplicando el formalismo a tres procesos físicos, a saber, el experimento de la doble rendija, el proceso

de medición y el proceso de decaimiento. En el siguiente capítulo se analizan los tres ejemplos.



# Capítulo 4

## Aplicaciones de los Contextos Generalizados

En este capítulo se aplica el formalismo de Contextos Generalizados a tres procesos físicos, a saber: el experimento de la doble rendija [22], el proceso de medición [23] y el proceso de decaimiento [19].

### 4.1. Experimento de la doble rendija

En esta sección se describe el experimento de la doble rendija usando el formalismo de Contextos Generalizados [22]. Se demuestra que si no se consideran instrumentos de medición en las rendijas, entonces la imposibilidad de afirmar por qué rendija ha pasado la partícula puede deducirse a partir de la condición de compatibilidad del formalismo de Contextos Generalizados. Además, se prueba que cuando se incluyen instrumentos de medición, la eliminación de los términos de interferencia se obtiene sin recurrir al postulado de colapso.

El experimento de la doble rendija consiste en una partícula libre detectada luego de atravesar una placa con dos rendijas. La partícula viaja de izquierda a derecha de modo que en el tiempo  $t_1$  atraviesa la doble rendija y en un tiempo posterior  $t_2$  alcanza el detector (ver figura 4.1).

Se pretende dar una descripción del proceso físico que involucra las propiedades referidas a por cuál rendija pasó la partícula en el tiempo  $t_1$  y en qué región de la zona vertical se encuentra en el tiempo  $t_2$ . Cuando no se consideran aparatos de medición, el espacio de Hilbert adecuado para describir este proceso es el espacio de Hilbert de la partícula ( $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{partícula}$ ).

Los proyectores que representan la partícula localizada en cada rendija al tiempo  $t_1$  son

$$\Pi_{t_1}^u = \int_{V^u} d^3r |\bar{r}\rangle\langle\bar{r}|, \quad \Pi_{t_1}^d = \int_{V^d} d^3r |\bar{r}\rangle\langle\bar{r}|, \quad (4.1)$$

donde  $V^u$  ( $V^d$ ) es el volumen de la rendija superior (inferior) y  $|\bar{r}\rangle$  es el autovector generalizado del operador posición. Los proyectores correspondientes a la partícula en

una pequeña región de la zona vertical a la derecha de la doble rendija son

$$\Pi_{t_2}^n = \int_{V^n} d^3r |\bar{r}\rangle\langle\bar{r}|, \quad (4.2)$$

donde  $V^n$  es el volumen de la pequeña región vertical con índice  $n$ .

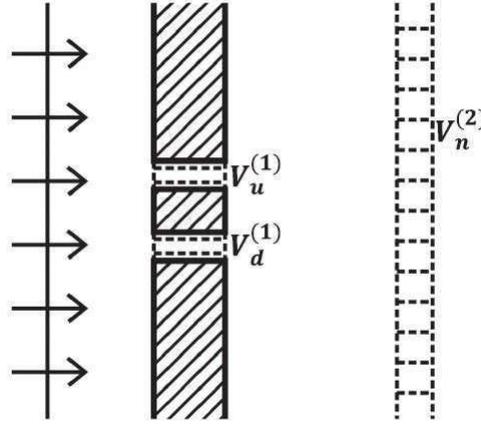


Figura 4.1: Experimento de la doble rendija.

En el apartado 4.1.1 se demuestra que las propiedades representadas por los proyectores (4.1) y (4.2), al ser trasladadas a un tiempo común  $t_1$ , están representadas por proyectores que no conmutan, es decir,

$$[\Pi_{t_1}^u; U^{-1}\Pi_{t_2}^n U] \neq 0, \quad [\Pi_{t_1}^d; U^{-1}\Pi_{t_2}^n U] \neq 0,$$

donde  $U = U(t_2, t_1) = e^{-iH_0(t_2-t_1)/\hbar}$  es la evolución temporal de la partícula libre, generada por el hamiltoniano  $H_0 = p^2/2m$ . Esto implica que apartir de las condiciones de compatibilidad del formalismo de Contextos Generalizados se deduce el hecho bien conocido de que no es posible una descripción del proceso cuántico que permita decir por cuál rendija pasó la partícula antes de alcanzar una de las regiones de la zona vertical.

En el apartado 4.1.2 se analiza una modificación del experimento de la doble rendija. Se agrega un instrumento de medición ideal  $A$  localizado en la zona de las rendijas, el cual interactúa con la partícula durante un pequeño intervalo de tiempo  $[t_1, t_1 + \Delta_1]$ , y con su variable puntero indicando  $a_u$  ( $a_d$ ) si la partícula es detectada al pasar por la rendija superior (inferior). Un segundo instrumento de medición ideal  $B$  es localizado en la zona vertical a la derecha de la doble rendija, el cual interactúa con la partícula durante un pequeño intervalo de tiempo  $[t_2, t_2 + \Delta_2]$ , y con su variable puntero indicando  $b_n$  si la partícula es detectada en la pequeña zona con índice  $n$  de la zona vertical. El espacio de Hilbert para la descripción de este proceso físico es el producto tensorial de los espacios de Hilbert de la partícula y de los dos espacios de Hilbert de los detectores, es decir,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{particle} \otimes \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . La evolución temporal se considera dominada por la interacción entre la partícula y el instrumento  $A$  en un intervalo corto de tiempo  $[t_1, t_1 + \Delta_1]$ , por la evolución libre en el intervalo  $[t_1 + \Delta_1, t_2]$  y por la interacción entre la partícula y el instrumento  $B$  en el intervalo  $[t_2, t_2 + \Delta_2]$ .

Las posibles indicaciones de la variable del puntero del instrumento  $A$  al tiempo  $t_1 + \Delta_1$  se representan por los proyectores

$$\Pi_{t_1 + \Delta_1}^{a_u} = I_{particle} \otimes |a_u\rangle\langle a_u| \otimes I_B, \quad \Pi_{t_1 + \Delta_1}^{a_d} = I_{particle} \otimes |a_d\rangle\langle a_d| \otimes I_B, \quad (4.3)$$

y las posibles indicaciones de la variable puntero del instrumento  $B$  al tiempo  $t_2 + \Delta_2$  se representan por los proyectores

$$\Pi_{t_2 + \Delta_2}^{b_n} = I_{particle} \otimes I_A \otimes |b_n\rangle\langle b_n|. \quad (4.4)$$

Se demuestra que las propiedades correspondientes a los proyectores (4.3) y (4.4), trasladadas a un tiempo común, son representadas por proyectores que conmutan. Por lo tanto, el formalismo de Contextos Generalizados admite una historia del sistema compuesto que describe a través de qué rendija se ha detectado pasar a la partícula y en qué región de la zona vertical se detecta en un tiempo posterior. Las correspondientes probabilidades condicionales dan el patrón sin interferencia esperado.

#### 4.1.1. Experimento de la doble rendija sin aparatos de medición

En este apartado se analiza el experimento de la doble rendija sin aparatos de medición. Se consideran las regiones  $V_u^{(1)}$ ,  $V_d^{(1)}$  y  $V_n^{(2)}$  de la figura 4.1 y se analiza la posibilidad de dar una descripción del sistema en el cual sea posible incluir historias del tipo “la partícula está en la región  $V_u^{(1)}$  (rendija superior) al tiempo  $t_1$  y está en la región  $V_n^{(2)}$  de la región vertical al tiempo  $t_2$ ”. Se prueba que la historia anterior involucra propiedades a dos tiempos incompatibles, es decir que sus respectivos proyectores trasladados a un tiempo común no conmutan.

Primero se definen las propiedades relevantes al tiempo  $t_1$  y  $t_2$ . Para el tiempo  $t_1$  se consideran las propiedades representadas por los proyectores

$$\Pi_u^{(1)} = \int_{V_u^{(1)}} d^3r |\bar{r}\rangle\langle \bar{r}|, \quad \Pi_d^{(1)} = \int_{V_d^{(1)}} d^3r |\bar{r}\rangle\langle \bar{r}|,$$

que corresponden a la partícula localizada en la rendija superior o inferior, respectivamente. Estas dos propiedades están representadas por proyectores ortogonales y pueden formar parte de un mismo contexto ordinario de propiedades al tiempo  $t_1$ . Para el tiempo  $t_2$  se consideran las propiedades representadas por los proyectores

$$\Pi_n^{(2)} = \int_{V_n^{(2)}} d^3r |\bar{r}\rangle\langle \bar{r}|,$$

que corresponden a la partícula localizada en las regiones  $V_n^{(2)}$ .

Luego se trasladan los proyectores a un tiempo común  $t_0$ . Como el tiempo común es arbitrario, se puede elegir  $t_0 = t_1$ . Los proyectores  $\Pi_n^{(2)}$  trasladados desde  $t_2$  a  $t_1$  están dados por

$$\Pi_n^{(1)} = U(t_1, t_2) \Pi_n^{(2)} U^{-1}(t_1, t_2).$$

Para probar que  $\Pi_u^{(1)}$  y  $\Pi_n^{(1)}$  no conmutan es suficiente verificar que no conmutan al ser aplicados a un vector particular  $|\phi_1\rangle$ , que se elige localizado en la doble rendija. Para este vector se obtiene

$$\Pi_u^{(1)} \Pi_n^{(1)} |\phi_1\rangle = \Pi_u^{(1)} U^{-1}(t_2, t_1) \Pi_n^{(2)} U(t_2, t_1) |\phi_1\rangle = \Pi_u^{(1)} U^{-1}(t_2, t_1) \Pi_n^{(2)} |\phi_2\rangle.$$

El vector  $|\phi_2\rangle$ , obtenido a partir de  $|\phi_1\rangle$  usando la ecuación de Schrödinger, tiene zonas de interferencia destructivas. La función de onda  $\langle \bar{r}|\phi_2\rangle$  se anula en ciertas regiones  $V_{n^*}^{(2)}$  y por lo tanto

$$\Pi_u^{(1)}\Pi_{n^*}^{(1)}|\phi_1\rangle = 0.$$

Ahora se considera el producto de los proyectores en diferente orden

$$\Pi_{n^*}^{(1)}\Pi_u^{(1)}|\phi_1\rangle = U^{-1}(t_2, t_1)\Pi_{n^*}^{(2)}U(t_2, t_1)\Pi_u^{(1)}|\phi_1\rangle.$$

El vector  $\Pi_u^{(1)}|\phi_1\rangle$  representa al estado en el tiempo  $t_1$  cuando únicamente la rendija superior se encuentra abierta. Su evolución temporal  $U(t_2, t_1)\Pi_u^{(1)}|\phi_1\rangle$  no tiene interferencia destructiva, no se anula al actuar con el operador  $U^{-1}(t_2, t_1)\Pi_{n^*}^{(2)}$ . Luego,  $\Pi_{n^*}^{(1)}\Pi_u^{(1)}|\phi_1\rangle$  no se anula.

Como se ha encontrado un vector  $|\phi_1\rangle$  para el cual  $\Pi_u^{(1)}\Pi_{n^*}^{(1)}|\phi_1\rangle \neq \Pi_{n^*}^{(1)}\Pi_u^{(1)}|\phi_1\rangle$ , se concluye que  $\Pi_{n^*}^{(1)}$  y  $\Pi_u^{(1)}$  no conmutan. Por lo tanto, de acuerdo con la condición de compatibilidad del formalismo de Contextos Generalizados, no es posible dar una descripción del sistema que incluya las historias adecuadas para describir por cuál rendija pasó la partícula antes de llegar a una de las regiones verticales.

### 4.1.2. Experimento de la doble rendija con aparatos de medición

En este apartado se considera una modificación del experimento de la doble rendija, en el cual se agrega un detector  $A$  localizado en la zona de las rendijas, con su variable puntero indicando  $a_u$  ( $a_d$ ) si la partícula es detectada pasando a través de la rendija superior (inferior). El detector  $A$  interactúa con la partícula en un intervalo de tiempo pequeño  $(t_1, t_1 + \Delta_1)$ . Un segundo detector  $B$  está localizado en la zona vertical a la derecha de la doble rendija con una variable puntero indicando el valor  $b_n$  si la partícula es detectada en la zona  $V_n^{(2)}$ . El detector  $B$  interactúa con la partícula durante un pequeño intervalo de tiempo  $(t_2, t_2 + \Delta_2)$ . El sistema  $S + A + B$ , compuesto por la partícula y los detectores, está inicialmente en un estado representado por el vector  $|\varphi_{t_1}\rangle|a_0\rangle|b_0\rangle \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , donde  $|a_0\rangle$  y  $|b_0\rangle$  son los estados iniciales de los instrumentos de medición.

El estado del sistema compuesto para los distintos tiempos está dado por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \Psi(t_1) &= |\varphi_{t_1}\rangle|a_0\rangle|b_0\rangle, \\ \Psi(t_1 + \Delta_1) &= (\Pi_u^{(1)}|\varphi_{t_1}\rangle)|a_u\rangle|b_0\rangle + (\Pi_d^{(1)}|\varphi_{t_1}\rangle)|a_d\rangle|b_0\rangle, \\ \Psi(t_2) &= (U(t_2, t_1 + \Delta_1)\Pi_u^{(1)}|\varphi_{t_1}\rangle)|a_u\rangle|b_0\rangle + (U(t_2, t_1 + \Delta_1)\Pi_d^{(1)}|\varphi_{t_1}\rangle)|a_d\rangle|b_0\rangle, \\ \Psi(t_2 + \Delta_2) &= \sum_n (\Pi_n^{(2)}U(t_2, t_1 + \Delta_1)\Pi_u^{(1)}|\varphi_{t_1}\rangle)|a_u\rangle|b_n\rangle + \\ &\quad + \sum_n (\Pi_n^{(2)}U(t_2, t_1 + \Delta_1)\Pi_d^{(1)}|\varphi_{t_1}\rangle)|a_d\rangle|b_n\rangle, \end{aligned}$$

donde  $U(t_2, t_1 + \Delta_1)$  es el operador de evolución temporal de la partícula libre desde  $t_1 + \Delta_1$  a  $t_2$ .

Para analizar la posibilidad de considerar historias que involucren la indicación del puntero del detector  $A$  al tiempo  $t_1 + \Delta_1$  y la indicación del puntero del detector  $B$  al tiempo  $t_2 + \Delta_2$  primero se deben definir las propiedades relevantes.

Para el tiempo  $t_1 + \Delta_1$  las propiedades relevantes están representadas por los proyectores

$$\Pi_{a_u} = I_S \otimes |a_u\rangle\langle a_u| \otimes I_B, \quad \Pi_{a_d} = I_S \otimes |a_d\rangle\langle a_d| \otimes I_B.$$

Para el tiempo  $t_2 + \Delta_2$  las propiedades relevantes corresponden a los proyectores

$$\Pi_{b_n} = I_S \otimes I_A \otimes |b_n\rangle\langle b_n|.$$

Para saber si estas propiedades pueden ser incluidas en una misma descripción del sistema, se debe verificar si los correspondientes proyectores conmutan cuando son trasladados a un tiempo común  $t_0$ . Como  $t_0$  es arbitrario, se elige  $t_0 = t_1$  como tiempo común y se obtiene

$$\begin{aligned} \Pi_{a_u}^{(1)}\Pi_{b_n}^{(1)} &= U^{-1}(t_1 + \Delta_1, t_1)\Pi_{a_u}U(t_1 + \Delta_1, t_1)U^{-1}(t_2 + \Delta_2, t_1)\Pi_{b_n}U(t_2 + \Delta_2, t_1) = \\ &= U^{-1}(t_1 + \Delta_1, t_1)\Pi_{a_u}U(t_1 + \Delta_1, t_2 + \Delta_2)\Pi_{b_n}U(t_2 + \Delta_2, t_1) = \\ &= U^{-1}(t_1 + \Delta_1, t_1)U(t_1 + \Delta_1, t_2 + \Delta_2)\Pi_{a_u}\Pi_{b_n}U(t_2 + \Delta_2, t_1) = \\ &= U^{-1}(t_2 + \Delta_2, t_1)\Pi_{a_u}\Pi_{b_n}U(t_2 + \Delta_2, t_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{b_n}^{(1)}\Pi_{a_u}^{(1)} &= U^{-1}(t_2 + \Delta_2, t_1)\Pi_{b_n}U(t_2 + \Delta_2, t_1)U^{-1}(t_1 + \Delta_1, t_1)\Pi_{a_u}U(t_1 + \Delta_1, t_1) = \\ &= U^{-1}(t_2 + \Delta_2, t_1)\Pi_{b_n}U(t_2 + \Delta_2, t_1 + \Delta_1)\Pi_{a_u}U(t_1 + \Delta_1, t_1) = \\ &= U^{-1}(t_2 + \Delta_2, t_1)\Pi_{b_n}\Pi_{a_u}U(t_2 + \Delta_2, t_1) = \\ &= U^{-1}(t_2 + \Delta_2, t_1)\Pi_{a_u}\Pi_{b_n}U(t_2 + \Delta_2, t_1). \end{aligned}$$

Luego,  $\Pi_{b_n}^{(1)}$  y  $\Pi_{a_u}^{(1)}$  conmutan. El mismo resultado se obtiene para  $\Pi_{b_n}^{(1)}$  and  $\Pi_{a_d}^{(1)}$ .

Por lo tanto, es posible considerar historias del sistema compuesto  $S + A + B$  que involucren a las indicaciones del puntero del detector  $A$  al tiempo  $t_1 + \Delta_1$  y a las indicaciones del puntero del detector  $B$  al tiempo  $t_2 + \Delta_2$ .

De acuerdo con la ecuación (3.9), la probabilidad de que la partícula sea detectada en la rendija superior por el instrumento  $A$  es

$$\begin{aligned} \Pr([\Pi_{a_u}^{(1)}\mathcal{H}, t_1]) &= \text{Tr}(\rho_{t_1}\Pi_{a_u}^{(1)}) \\ &= \langle \varphi_{t_1} | \langle a_0 | \langle b_0 | U^{-1}(t_1 + \Delta_1, t_1)\Pi_{a_u}U(t_1 + \Delta_1, t_1) | \varphi_{t_1} \rangle | a_0 \rangle | b_0 \rangle \\ &= \langle \varphi_{t_1} | \Pi_{a_u}^{(1)} | \varphi_{t_1} \rangle. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Además, la probabilidad de que la partícula sea detectada en la rendija superior por el detector  $A$  al tiempo  $t_1 + \Delta_1$  y de ser detectada en el volumen  $V_n^{(2)}$  por el detector  $B$  al tiempo  $t_2 + \Delta_2$  es

$$\begin{aligned} \Pr([\Pi_{b_n}^{(1)}\Pi_{a_u}^{(1)}\mathcal{H}, t_1]) &= \text{Tr}(\rho_{t_1}\Pi_{b_n}^{(1)}\Pi_{a_u}^{(1)}) \\ &= \langle \varphi_{t_1} | \langle a_0 | \langle b_0 | U^{-1}(t_2 + \Delta_2, t_1)\Pi_{a_u}\Pi_{b_n}U(t_2 + \Delta_2, t_1) | \varphi_{t_1} \rangle | a_0 \rangle | b_0 \rangle \\ &= \langle \varphi_{u,t_2} | \Pi_n^{(2)} | \varphi_{u,t_2} \rangle, \end{aligned} \tag{4.6}$$

donde  $|\varphi_{u,t_2}\rangle = U(t_2, t_1 + \Delta_1)\Pi_u^{(1)}|\varphi_{t_1}\rangle$ .

Teniendo en cuenta las ecuaciones (4.5) y (4.6), la probabilidad de que la partícula sea detectada en el volumen  $V_n^{(2)}$  por el detector  $B$  al tiempo  $t_2 + \Delta_2$ , condicional a haber sido detectada en la rendija superior por el instrumento  $A$  al tiempo  $t_1 + \Delta_1$ , está dada por

$$\begin{aligned} \Pr([\Pi_{b_n}^{(1)}\Pi_{a_u}^{(1)}\mathcal{H}, t_1] | [\Pi_{a_u}^{(1)}\mathcal{H}, t_1]) &= \frac{\langle \varphi_{u,t_2} | \Pi_n^{(2)} | \varphi_{u,t_2} \rangle}{\langle \varphi_{t_1} | \Pi_u^{(1)} | \varphi_{t_1} \rangle} \\ &= \langle \widetilde{\varphi}_{u,t_2} | \Pi_n^{(2)} | \widetilde{\varphi}_{u,t_2} \rangle, \end{aligned}$$

donde  $|\widetilde{\varphi}_{u,t_2}\rangle = U(t_2, t_1 + \Delta_1)|\widetilde{\varphi}_{u,t_1}\rangle$  y  $|\widetilde{\varphi}_{u,t_1}\rangle = \frac{\Pi_u^{(1)}|\varphi_{t_1}\rangle}{\|\Pi_u^{(1)}|\varphi_{t_1}\rangle\|}$ .

El estado representado por  $|\widetilde{\varphi}_{u,t_2}\rangle$  es la evolución temporal libre, desde el tiempo  $t_1 + \Delta_1$  al tiempo  $t_2$ , del estado  $|\widetilde{\varphi}_{u,t_1}\rangle$  que emerge al tiempo  $t_1 + \Delta_1$  de la rendija superior. Este es un conocido resultado que muestra un patrón sin interferencia. Usualmente se obtiene a partir del postulado de colapso, sin embargo el formalismo de Contextos Generalizados permite obtener el mismo resultado sin la necesidad de dicho postulado.

En esta sección se aplicó el formalismo de Contextos Generalizados para describir el experimento de la doble rendija. Sin instrumentos de medición se dedujo la imposibilidad de describir la trayectoria de la partícula. Luego, agregando dos instrumentos de medición, uno en la zona de las rendijas y otro en la zona vertical frente a las rendijas, y considerando al sistema compuesto por la partícula y los dos sistemas de medición, se obtuvo que las indicaciones de los instrumentos de medición son propiedades compatibles a diferentes tiempos. Se calculó la probabilidad de detectar una partícula en la zona frente a las rendijas, condicional a haber detectado la partícula atravesando una de las rendijas. Se obtuvo el patrón sin interferencia esperado sin recurrir al colapso de la función de onda.

La descripción del experimento de la doble rendija en usando los Contextos Generalizados muestra que el formalismo es adecuado para hacer frente a procesos físicos que involucran propiedades a diferentes tiempos.

## 4.2. Proceso de medición

En la mecánica cuántica ortodoxa la medición no es decripta como un proceso físico ordinario. La dinámica de los procesos físicos ordinarios está dada por la ecuación de Schrödinger y su evolución es continua y determinista. En cambio, la dinámica del proceso de medición se rige por el postulado de colapso del vector de estado y su dinámica no es continua ni determinista.

La distinción entre dos tipos de procesos físicos llevó al desarrollo de nuevos formalismos en los cuales la medición no tuviera un estatus privilegiado. Entre estos nuevos formalismos se encuentra el enfoque de historias cuánticas, en el cual no hay postulado de colapso y la medición se considera como una interacción cuántica entre el sistema medido y el instrumento de medición.

En esta sección se analiza el proceso de medición utilizando el formalismo de Contextos Generalizados [23]. Se consideran dos mediciones no ideales consecutivas del mismo

sistema y se demuestra que las indicaciones de las variables puntero de los dos aparatos, al final de cada medición, son propiedades compatibles. Inmediatamente después de la primera medición se obtiene un estado efectivo que generaliza al estado que se obtendría aplicando el postulado de colapso.

### 4.2.1. Medición cuántica

Sea un sistema cuántico  $S$  y un observable  $Q$ . Sobre el sistema se realiza una medición no ideal de  $Q$  utilizando un instrumento  $A$ . El proceso de medición se lleva a cabo durante el intervalo de tiempo  $(t_0, t_1)$  y se representa en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_A$  con una transformación unitaria  $U_{SA}$  que satisface

$$|q_j\rangle|a_0\rangle \xrightarrow{U_{SA}} |\phi_j\rangle|a_j\rangle, \quad (4.7)$$

donde los vectores  $|q_j\rangle \in \mathcal{H}_S$  forman un conjunto completo de autoestados de  $Q$ ,  $|a_0\rangle$  es el estado de referencia del instrumento de medición  $A$  y  $|a_j\rangle \in \mathcal{H}_A$  es el estado correspondiente al puntero del instrumento que se correlaciona con el estado inicial  $|q_j\rangle$  del sistema  $S$ . Como la medición no es ideal,  $|\phi_j\rangle \neq |q_j\rangle$ , es decir, el estado  $|q_j\rangle$  pasa a un estado  $|\phi_j\rangle$  luego de la medición.

La ecuación (4.7) es un modelo simplificado de una medición real, pues no tiene en cuenta los grados de libertad extra del instrumento de medición diferentes a los del puntero. Sin embargo, los resultados pueden generalizarse a procesos de medición más realistas [30].

En el artículo [30] se demuestra la compatibilidad de las propiedades correspondientes a los posibles valores del observable  $Q$  en el tiempo  $t_0$  y las propiedades correspondientes a los posibles valores de la variable puntero del instrumento  $A$  al tiempo  $t_1$ . Estas propiedades son representadas por proyectores que conmutan al ser trasladados a un tiempo común. Por lo tanto, es posible construir un contexto generalizado con las historias adecuadas para describir dichas propiedades en los tiempos correspondientes. En dicho contexto generalizado se obtiene la probabilidad condicional  $\Pr(q_j \text{ en } t_0 | a_j \text{ en } t_1) = 1$ . La interpretación de este resultado es que el valor  $a_j$  de la variable puntero después del proceso de medición *implica* que el observable  $Q$  tenía el valor  $q_j$  antes de la medición.

En el artículo [23] se analizaron dos mediciones no ideales consecutivas del mismo sistema utilizando el formalismo de Contextos Generalizados. Se demostró que después de la primera medición se obtiene un estado efectivo que generaliza el estado que se obtendría aplicando el postulado de colapso. En el siguiente apartado se presentan los resultados.

### 4.2.2. Mediciones consecutivas y colapso del vector de estado

En el apartado anterior se consideró al sistema  $S$  y se realizó una medición no ideal de un observable  $Q$ , durante en intervalo de tiempo  $(t_0, t_1)$ , utilizando un instrumento  $A$ . En este apartado se considera una segunda medición no ideal de un observable  $P$ , durante  $(t_1, t_2)$ , utilizando un instrumento  $B$ . La segunda medición se representa en el espacio de

Hilbert  $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_B$  con una transformación unitaria  $U_{SB}$  que satisface

$$|p_\mu\rangle|b_0\rangle \xrightarrow{U_{SB}} |\chi_\mu\rangle|b_\mu\rangle. \quad (4.8)$$

donde los vectores  $|p_\mu\rangle \in \mathcal{H}_S$  forman un conjunto completo de autoestados de  $P$ ,  $|b_0\rangle$  es el estado de referencia del instrumento de medición  $B$  y  $|b_\mu\rangle$  es el estado correspondiente al puntero del instrumento que se correlaciona con el estado  $|p_\mu\rangle$  del sistema  $S$ . Como la medición no es ideal,  $|\chi_\mu\rangle \neq |p_\mu\rangle$ , es decir, el estado  $|p_\mu\rangle$  pasa a un estado  $|\chi_\mu\rangle$  luego de la medición.

### Compatibilidad de las variables puntero

Se debe probar que los valores de los punteros de ambos instrumentos, al final de cada medición, tienen asociadas propiedades compatibles.

Las propiedades correspondientes a los posibles valores  $a_j$  de la variable puntero del instrumento  $A$  al tiempo  $t_1$  están representadas por los proyectores

$$\Pi_1^j = I_S \otimes |a_j\rangle\langle a_j| \otimes I_B. \quad (4.9)$$

Estos proyectores forman una descomposición proyectiva de la identidad del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ .

Las propiedades correspondientes a los posibles valores  $b_\mu$  de la variable puntero del instrumento  $B$  al tiempo  $t_2$  están representadas por los proyectores

$$\Pi_2^\mu = I_S \otimes I_A \otimes |b_\mu\rangle\langle b_\mu|. \quad (4.10)$$

Estos proyectores también forman una descomposición proyectiva de la identidad del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ .

Teniendo en cuenta que las relaciones de conmutación son invariantes ante transformaciones unitarias, cualquier tiempo de referencia puede ser elegido para verificar las condiciones de compatibilidad dadas en las ecuaciones (3.10). En el caso de las propiedades  $\Pi_1^j$  al tiempo  $t_1$  y  $\Pi_2^\mu$  al tiempo  $t_2$  resulta conveniente elegir  $t_1$  como tiempo de referencia.

Los proyectores  $\Pi_1^j$  representan propiedades ya definidas en el tiempo  $t_1$ , mientras que los proyectores trasladados temporalmente de  $\Pi_2^\mu$ , desde  $t_2$  a  $t_1$ , están dados por  $(U_{SB}^{-1} \otimes I_A)\Pi_2^\mu(U_{SB} \otimes I_A)$ . Teniendo en cuenta las ecuaciones (4.9) y (4.10) se obtienen las siguientes relaciones de conmutación

$$[(U_{SB}^{-1} \otimes I_A)\Pi_2^\mu(U_{SB} \otimes I_A), \Pi_1^j] = 0.$$

Por lo tanto, son propiedades compatibles.

Luego, las propiedades  $\Pi_1^j$  al tiempo  $t_1$  y  $\Pi_2^\mu$  al tiempo  $t_2$  generan un contexto generalizado que permite describir las mediciones consecutivas sobre el sistema  $S$ .

### Estado efectivo luego de la primera medición y estado colapsado

Al tiempo  $t_0$ , antes de realizar ambas mediciones, se considera al estado  $|\Psi_{t_0}\rangle = |\varphi_0\rangle|a_0\rangle|b_0\rangle \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , el cual corresponde al sistema  $S$  en un estado arbitrario  $|\varphi_0\rangle$  y a los instrumentos de medición en sus respectivos estados de referencia.

Previamente se probó que las historias que involucran a las propiedades representadas por  $\Pi_1^j$  al tiempo  $t_1$  y a las propiedades representadas por  $\Pi_2^\mu$  al tiempo  $t_2$  son compatibles, pues los proyectores conmutan al ser trasladados a un tiempo común. Por lo tanto, generan un contexto generalizado que permite calcular probabilidades que involucren a dichas historias y a sus operaciones lógicas.

Para el estado  $|\Psi_{t_0}\rangle$  la probabilidad de la conjunción está dada por

$$\Pr_{\Psi_{t_0}}(a_j \text{ en } t_1 \text{ y } b_\mu \text{ en } t_2) = \langle \Psi_{t_0} | \Pi_{10}^j \Pi_{20}^\mu | \Psi_{t_0} \rangle,$$

donde

$$\begin{aligned} \Pi_{10}^j &= (U_{SA}^{-1} \otimes I_B) \Pi_1^j (U_{SA} \otimes I_B), \\ \Pi_{20}^\mu &= (U_{SA}^{-1} \otimes I_B) (U_{SB}^{-1} \otimes I_A) \Pi_2^\mu (U_{SB} \otimes I_A) (U_{SA} \otimes I_B). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (4.7) y (4.8) se obtienen

$$\Pr_{\Psi_{t_0}}(a_j \text{ en } t_1 \text{ y } b_\mu \text{ en } t_2) = |\langle q_j | \varphi_0 \rangle|^2 |\langle p_\mu | \phi_j \rangle|^2$$

y

$$\Pr_{\Psi_{t_0}}(a_j \text{ en } t_1) = \langle \Psi_{t_0} | \Pi_{10}^j | \Psi_{t_0} \rangle = |\langle q_j | \varphi_0 \rangle|^2.$$

Por lo tanto, la probabilidad de obtener  $b_\mu$  en la segunda medición, condicional a obtener  $a_j$  en la primera medición, es

$$\Pr_{\Psi_{t_0}}(b_\mu \text{ en } t_2 | a_j \text{ en } t_1) = \frac{\Pr_{\Psi_{t_0}}(a_j \text{ en } t_1 \text{ y } b_\mu \text{ en } t_2)}{\Pr_{\Psi_{t_0}}(a_j \text{ en } t_1)} = |\langle p_\mu | \phi_j \rangle|^2. \quad (4.11)$$

Este resultado puede compararse con el que se obtendría al realizar una sola medición con el instrumento  $B$  sobre el sistema  $S$ , para un estado inicial en  $t_1$  dado por  $|\Phi_{t_1}\rangle = |\phi_j\rangle|b_0\rangle \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_B$ ,

$$\Pr_{\Phi_{t_1}}(b_\mu \text{ en } t_2) = \langle \Phi_{t_1} | \Pi_{21}^\mu | \Phi_{t_1} \rangle = |\langle p_\mu | \phi_j \rangle|^2. \quad (4.12)$$

con  $\Pi_{21}^\mu = U_{SB}^{-1} (I_S \otimes |b_\mu\rangle\langle b_\mu|) U_{SB}$ .

La ecuación (4.11) da la probabilidad de que el sistema  $S$ , preparado en el tiempo  $t_0$  en el estado  $|\varphi_0\rangle \in \mathcal{H}_S$ , arroje el valor  $b_\mu$  al ser medido por el instrumento  $B$  en el tiempo  $t_2$ , habiendo arrojado el valor  $a_j$  al ser medido por el instrumento  $A$  en el tiempo  $t_1$ . La ecuación (4.12) da la probabilidad de que el sistema  $S$ , preparado en el tiempo  $t_1$  en el estado  $|\phi_j\rangle \in \mathcal{H}_S$ , arroje el valor  $b_\mu$  al ser medido una única vez por el instrumento  $B$  en el tiempo  $t_2$ .

Diferentes elecciones del instrumento  $B$  arrojan diferentes vectores  $|p_\mu\rangle$ , sin embargo en todos los casos las probabilidades dadas en las ecuaciones (4.11) y (4.12) son las

mismas (es decir,  $\Pr_{\Psi_{t_0}}(b_\mu \text{ en } t_2 | a_j \text{ en } t_1) = \Pr_{\Phi_{t_1}}(b_\mu \text{ en } t_2)$ ). Por lo tanto, se concluye que la preparación del sistema  $S$  en cualquier estado  $|\varphi_0\rangle$  seguido por una medición con el instrumento  $A$ , que arroje el resultado  $a_j$ , y la preparación del sistema en el estado  $|\phi_j\rangle$  definido en (4.7) produce el mismo resultado al realizar una medición futura con cualquier instrumento  $B$ .

El estado  $|\phi_j\rangle$  puede considerarse como el *estado efectivo* del sistema  $S$  al tiempo  $t_1$ , luego de haber medido el valor  $a_j$  para la variable puntero del instrumento  $A$ . La preparación del sistema  $S$  en el estado  $|\varphi_0\rangle$  en el tiempo  $t_0$  seguida por una medición con el instrumento  $A$  que arroja el valor  $a_j$  es matemáticamente equivalente a considerar al sistema preparado en el estado  $|\phi_j\rangle$  en el tiempo  $t_1$ .

Cabe destacar que desde la perspectiva de la hipótesis de colapso el estado efectivo es el estado real del sistema después de la primera medición. Sin embargo, desde el formalismo Contextos Generalizados, no es el estado real del sistema, sino un artefacto de cómputo que suministra el mismo resultado que se obtendría si se realizase el cálculo completo.

En general, el estado efectivo que se obtiene con el formalismo de Contextos Generalizados no coincide con el estado que se obtendría si se aplica el postulado de colapso. Sin embargo, para el caso particular de una medición ideal (4.7) se reemplaza por  $|q_j\rangle|a_0\rangle \xrightarrow{U_{SA}} |q_j\rangle|a_j\rangle$  y se obtiene el estado efectivo  $|\phi_j\rangle = |q_j\rangle$ , es decir, el mismo resultado que se obtendría usando el postulado de colapso.

Es interesante notar que no fue necesario apelar a la decoherencia para deducir el estado efectivo que generaliza al postulado de colapso. La decoherencia, que involucra los numerosos grados de libertad de los instrumentos de medición, no se ha considerado, ya que dichos grados de libertad están ausentes en el modelo de medición utilizado. Este hecho apoya la posición de que, aunque la decoherencia parece esencial para explicar el límite clásico, no es necesaria para obtener el postulado de colapso del vector de estado.

### 4.3. Proceso de decaimiento

Comúnmente la probabilidad de supervivencia de un estado cuasi-estacionario se define como la probabilidad de que el sistema se encuentre en el mismo estado en un tiempo futuro. El tiempo para el cual la probabilidad de supervivencia es  $e^{-1}$  se llama vida media. Sin embargo, esta definición no considera a la probabilidad de supervivencia como una probabilidad condicional a dos tiempos.

En esta sección se analiza si la probabilidad de supervivencia se puede identificar con la probabilidad de la propiedad de no decaer en el tiempo  $t_2$ , condicionada a la misma propiedad en un tiempo anterior  $t_1$ , para un estado arbitrario preparado en el tiempo  $t_0$ . Como intervienen operaciones lógicas entre propiedades a diferentes tiempos, es necesario apelar a un formalismo de historias cuánticas. R. Omnès propuso describir el proceso de decaimiento con la teoría de historias consistentes y obtuvo que las condiciones de consistencia no se satisfacen [27].

A continuación se analiza el proceso de decaimiento según las interpretaciones ortodoxa y modales. Luego, se describe el proceso de decaimiento con el formalismo de Contextos Generalizados [19].

### 4.3.1. Proceso de decaimiento e interpretación ortodoxa

En este apartado se presentan algunas definiciones centrales para describir el proceso de decaimiento en la mecánica cuántica ortodoxa, a saber, estado cuasi-estacionario, probabilidad de supervivencia y vida media.

El proceso de decaimiento tiene un tiempo característico denominado *vida media*. Para entender la relación entre este tiempo característico y la probabilidad de supervivencia es conveniente introducir la noción de estado cuasi-estacionario [4].

Sea un sistema físico  $S$  con un hamiltoniano de espectro continuo  $H_S : \mathcal{H}_S \rightarrow \mathcal{H}_S$ . Se nota con  $|E\rangle$  al autoestado generalizado del hamiltoniano con autovalor  $E$  ( $H_S |E\rangle = E |E\rangle$ ,  $0 < E < \infty$ ,  $\int_0^\infty dE |E\rangle\langle E| = I_S$ ). Un *estado cuasi-estacionario*  $|\chi\rangle \in \mathcal{H}_S$  se define como una combinación lineal de autoestados del hamiltoniano con una pequeña dispersión  $\varepsilon$  del valor medio de la energía  $E_0$  ( $\varepsilon \ll E_0$ ),

$$|\chi\rangle = \int_0^\infty dE |E\rangle\langle E|\chi\rangle,$$

donde, por ejemplo,  $\langle E|\chi\rangle$  puede ser

$$\langle E|\chi\rangle = \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{(E - E_0)^2 + \frac{1}{4}\varepsilon^2}.$$

La dinámica del estado está dada por la ecuación de Schrödinger. Si en el tiempo  $t_1$  el estado es  $|\chi\rangle$ , en el tiempo  $t_2$  se transforma en el estado  $|\varphi(t_2)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H_S(t_2-t_1)} |\chi\rangle$ .

El postulado de colapso del vector de estado de la interpretación ortodoxa prescribe una reducción no unitaria del vector de estado en el proceso de medición. La probabilidad de medir el estado  $|\chi\rangle$  al tiempo  $t_2 > t_1$  es

$$W(t_2 - t_1) = |\langle\chi| e^{-\frac{i}{\hbar}H_S(t_2-t_1)} |\chi\rangle|^2 = \int_0^\infty dE |\langle E|\chi\rangle|^2 e^{-\frac{\varepsilon}{\hbar}E(t_2-t_1)}, \quad (4.13)$$

y se denomina *probabilidad de supervivencia* al tiempo  $t_2$  del estado cuasi-estacionario  $|\chi\rangle$  preparado en el tiempo  $t_1$ . La vida media  $T$  se define como el tiempo en el cual la probabilidad de supervivencia (4.13) disminuye en un factor  $e$  ( $W(T) = \frac{1}{e}W(0)$ ).

Si  $\langle E|\chi\rangle$  es una distribución con una pequeña dispersión  $\varepsilon$  respecto a la energía media  $E_0$  ( $\varepsilon \ll E_0$ ) y se considera un pequeño intervalo de tiempo  $(t_2 - t_1)$  (pero no tan pequeño como para tener en cuenta los efectos de Zeno o de Kalfin), la probabilidad de supervivencia se expresa de la siguiente manera

$$W(t_2 - t_1) \approx e^{-\frac{\varepsilon}{\hbar}(t_2-t_1)}. \quad (4.14)$$

La probabilidad de encontrar el estado inicial  $|\chi\rangle$  disminuye en un factor  $e$  luego de un intervalo de tiempo igual a  $\hbar/\varepsilon$ . Por lo tanto, se obtiene para la vida media la expresión aproximada  $T = \hbar/\varepsilon$ . La vida media  $T$  y la indeterminación de la energía  $\Delta E = \varepsilon$  están relacionadas a través de la relación de incerteza  $T\Delta E \approx \hbar$ .

Para un sistema preparado en el estado  $|\chi\rangle$  en el tiempo  $t_1$  la mecánica cuántica ortodoxa interpreta el valor  $W(t_2 - t_1)$  como *la probabilidad de que el sistema colapse al estado  $|\chi\rangle$  cuando es medido en un tiempo posterior  $t_2$* .

Esta interpretación enfatiza el rol del postulado de colapso del vector de estado al realizar una medición, proceso que tiene un fuerte carácter de “caja negra” [29]. En los siguientes apartados se abandona el postulado de colapso y se considera el proceso de decaimiento desde perspectivas interpretativas que se basan en la actualización de propiedades.

### 4.3.2. Proceso de decaimiento e interpretaciones modales

Las interpretaciones modales abandonan la regla de la mecánica cuántica ortodoxa por la cual un sistema tiene que estar en un autoestado de un observable para que dicho observable tenga un valor definido. Tampoco hay postulado de colapso, la evolución temporal de los estados está dada siempre por la ecuación de Schrödinger. Nuevas reglas se introducen para especificar las posibles propiedades que se pueden atribuir a un sistema en un estado dado.

En el caso del proceso de decaimiento la propiedad de *no decaimiento*  $p_\chi$  se representa por el proyector  $\Pi_\chi = |\chi\rangle\langle\chi|$ . La propiedad de *decaimiento*  $\bar{p}_\chi$  se representa por  $\Pi_{\bar{\chi}} = I_S - |\chi\rangle\langle\chi|$ . Las propiedades de no decaimiento y decaimiento son exhaustivas ( $p_\chi \vee \bar{p}_\chi = \Omega$ ) y mutuamente excluyentes ( $p_\chi \wedge \bar{p}_\chi = \phi$ ). Las propiedades  $\phi$ ,  $p_\chi$ ,  $\bar{p}_\chi$  y  $\Omega$ , representadas por los proyectores  $\Pi_\phi = |0\rangle\langle 0|$ ,  $\Pi_\chi = |\chi\rangle\langle\chi|$ ,  $\Pi_{\bar{\chi}} = I_S - |\chi\rangle\langle\chi|$  y  $\Pi_\Omega = I_S$ , forman un reticulado distributivo, es decir, un contexto de propiedades.

Si el estado de un sistema físico  $S$ , en el tiempo  $t_1$ , se representa por el vector  $|\chi\rangle$ , la probabilidad de la propiedad  $p_\chi$  en ese tiempo es igual a uno,

$$\Pr(p_\chi, t_1) = \text{Tr}(\rho(t_1)\Pi_\chi) = \text{Tr}(|\chi\rangle\langle\chi|\chi\rangle\langle\chi|) = |\langle\chi|\chi\rangle|^2 = 1.$$

Por lo tanto, se puede afirmar con seguridad que el sistema  $S$  *tiene* la propiedad  $p_\chi$  en el tiempo  $t_1$ .

En el tiempo  $t_2 > t_1$ , el estado está dado por  $|\varphi(t_2)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H_S(t_2-t_1)}|\chi\rangle$ . Luego, no hay certeza sobre si el sistema tiene, o no, la propiedad  $p_\chi$ , pues su probabilidad es menor a uno,

$$\begin{aligned} \Pr(p_\chi, t_2) &= \text{Tr}(\rho(t_2)\Pi_\chi) = \text{Tr}(|\varphi(t_2)\rangle\langle\varphi(t_2)||\chi\rangle\langle\chi|) = \\ &= |\langle\chi|\varphi(t_2)\rangle|^2 = |\langle\chi|e^{-\frac{i}{\hbar}H_S(t_2-t_1)}|\chi\rangle|^2 = W(t_2 - t_1) < 1. \end{aligned} \quad (4.15)$$

La expresión para  $W(t_2 - t_1)$  ya había sido obtenida en el apartado anterior, pero los enfoques modales le dan un interpretación diferente. Para un sistema aislado  $S$ , preparado en un estado  $|\chi\rangle$  en el tiempo  $t_1$ ,  $W(t_2 - t_1)$  es *la probabilidad de tener la propiedad  $p_\chi$  en un tiempo posterior  $t_2$* .

Se debe notar que el vector  $|\chi\rangle$  tiene diferentes roles en las ecuaciones anteriores. En el tiempo  $t_1$  representa a un estado cuasi-estacionario y en el tiempo  $t_2$  representa a la propiedad de no decaimiento.

También hay que destacar que en este enfoque el sistema se prepara en el estado  $|\chi\rangle$ , no en un estado arbitrario. Si se quiere considerar un sistema preparado en un estado arbitrario en  $t_0$  y luego la probabilidad de supervivencia entre dos tiempos  $t_1$  y  $t_2$  de un estado  $|\chi\rangle$ , entonces, como intervienen propiedades a distintos tiempos, se requiere utilizar un formalismo de historias cuánticas. En el siguiente apartado se considera el proceso de decaimiento usando el formalismo de Contextos Generalizados.

### 4.3.3. Proceso de decaimiento sin instrumentos de medición

El formalismo de Contextos Generalizados permite representar historias de un sistema cuántico. En particular, se pueden representar las historias que involucran a las propiedades  $p_\chi$  y  $\bar{p}_\chi$  en los tiempos  $t_1$  y  $t_2$ .

Parece razonable identificar la probabilidad de supervivencia  $W(t_2 - t_1)$  con una probabilidad condicional, a saber, con la probabilidad de que el sistema  $S$  tenga la propiedad  $p_\chi$  en el tiempo  $t_2$ , condicionada a haber tenido la propiedad  $p_\chi$  en un tiempo anterior  $t_1$ , es decir,

$$\Pr(p_\chi, t_2 | p_\chi, t_1) = \frac{\Pr\{(p_\chi, t_2) \wedge (p_\chi, t_1)\}}{\Pr(p_\chi, t_1)}. \quad (4.16)$$

Con esta identificación y la aproximación lineal de la ecuación (4.14) la vida media puede relacionarse con la probabilidad condicional de la siguiente manera

$$\frac{1}{T} \approx \frac{1 - \Pr(p_\chi, t_2 | p_\chi, t_1)}{(t_2 - t_1)}.$$

Sin embargo, para que la expresión (4.16) esté bien definida es necesario que las historias que involucran a las propiedades  $p_\chi$  y  $\bar{p}_\chi$  en los tiempos  $t_1$  y  $t_2$  puedan ser incluidas en un mismo contexto generalizado de historias de dos tiempos. Para que esto sea posible los proyectores que representan a las propiedades en cada tiempo deben conmutar al ser trasladados a un tiempo común [18]. Si se elige  $t_2$  como tiempo común, entonces se debe verificar que los proyectores

$$U(t_2, t_1)\Pi_\chi U^{-1}(t_2, t_1) \quad \text{y} \quad U(t_2, t_1)\Pi_{\bar{\chi}} U^{-1}(t_2, t_1)$$

conmuten con los proyectores

$$\Pi_\chi \quad \text{y} \quad \Pi_{\bar{\chi}},$$

donde  $U(t_2, t_1) = e^{-\frac{i}{\hbar}H_S(t_2-t_1)}$ .

Primero se considera la relación de conmutación

$$[U(t_2, t_1)\Pi_\chi U^{-1}(t_2, t_1); \Pi_\chi] = 0. \quad (4.17)$$

Si el intervalo temporal  $\Delta t = t_2 - t_1$  es muy pequeño, se tiene que

$$U(t_2, t_1)I - \frac{i}{\hbar}H_S\Delta t.$$

A primer orden en  $\Delta t$  la ecuación (4.17) se reduce a

$$[[H_S; \Pi_\chi]; \Pi_\chi] = 0.$$

Esta condición puede escribirse de la siguiente manera

$$H_S|\chi\rangle\langle\chi| - 2|\chi\rangle\langle\chi|H_S|\chi\rangle\langle\chi| + |\chi\rangle\langle\chi|H_S = 0.$$

Para que se verifique la ecuación anterior  $|\chi\rangle$  tiene que ser un autovector del  $H_S$ , pero en ese caso  $|\chi\rangle$  sería un estado estacionario sin decaimiento.

Por lo tanto, no es posible considerar un contexto generalizado que incluya a dichas historias y entonces no es posible hacer la identificación entre la probabilidad de supervivencia y la probabilidad condicional de la ecuación (4.16), pues esta última no está definida.

Dificultades similares fueron halladas por R. Omnès (ver referencia [27], páginas 176 a 180) en su intento de incluir las historias relevantes en una familia de historias consistentes. Omnès enfrentó la dificultad considerando tiempos y estados particulares en los cuales las condiciones de consistencia son aproximadamente válidas. En su enfoque es necesario lidiar con el concepto de lógicas aproximadas.

En el siguiente apartado se considera el mismo sistema, pero sometido a dos mediciones consecutivas. En este caso se prueba que es posible obtener un contexto generalizado para representar las historias cuánticas relevantes.

#### 4.3.4. Proceso de decaimiento con instrumentos de medición

Sea una medición ideal de las propiedades  $p_\chi$  y  $\bar{p}_\chi$  del sistema  $S$ , realizada a través de la interacción con el instrumento de medición  $A$  durante el pequeño intervalo de tiempo  $[t_1, t_1 + \Delta t]$ . Se consideran las propiedades  $p_{A_0}$ ,  $p_{A_\chi}$  y  $p_{A_{\bar{\chi}}}$  del instrumento  $A$ . Se representan por los proyectores  $\Pi_{A_0} = |A_0\rangle\langle A_0|$ ,  $\Pi_{A_\chi} = |A_\chi\rangle\langle A_\chi|$  y  $\Pi_{A_{\bar{\chi}}} = |A_{\bar{\chi}}\rangle\langle A_{\bar{\chi}}|$  del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_A$ . La propiedad  $p_{A_0}$  es la posición inicial del puntero, mientras que  $p_{A_\chi}$  y  $p_{A_{\bar{\chi}}}$  son las posiciones del puntero correlacionadas con las propiedades de no decaimiento  $p_\chi$  y decaimiento  $\bar{p}_\chi$  del sistema  $S$ .

Se asume que el hamiltoniano que genera la evolución temporal del sistema compuesto  $S + A$  es

$$H = H_S \otimes I_A + I_S \otimes H_A + H_{SA}.$$

Para hacer los cálculos más simples se asume también que  $H \approx H_{SA}$  durante el intervalo de tiempo  $[t_1, t_1 + \Delta t]$  y  $H \approx H_S \otimes I_A$  para todos los valores de tiempo fuera del intervalo  $[t_1, t_1 + \Delta t]$ .

En el pequeño intervalo de tiempo en el cual se lleva a cabo el proceso de medición, la evolución del sistema compuesto está dada por la transformación unitaria  $U(\Delta t) \cong e^{-\frac{i}{\hbar}H_{SA}\Delta t}$ , que produce la correlación

$$|\Psi(t_1)\rangle = |\varphi(t_1)\rangle|A_0\rangle \xrightarrow{U(\Delta t)} |\Psi(t_1 + \Delta t)\rangle = (\Pi_\chi|\varphi(t_1)\rangle)|A_\chi\rangle + (\Pi_{\bar{\chi}}|\varphi(t_1)\rangle)|A_{\bar{\chi}}\rangle,$$

donde  $|\Psi(t_1)\rangle$  ( $|\Psi(t_1 + \Delta t)\rangle$ ) es el estado del sistema  $S + A$  inmediatamente antes (después) del proceso de medición.

Usando la última ecuación se obtiene

$$\begin{aligned} \Pr(p_\chi, t_1) &= \text{Tr}\{|\Psi(t_1)\rangle\langle\Psi(t_1)| (\Pi_\chi \otimes I_A)\} = |\langle\chi|\varphi(t_1)\rangle|^2, \\ \Pr(p_{A_\chi}, t_1 + \Delta t) &= \text{Tr}\{|\Psi(t_1 + \Delta t)\rangle\langle\Psi(t_1 + \Delta t)| (I_S \otimes |A_\chi\rangle\langle A_\chi|)\} = |\langle\chi|\varphi(t_1)\rangle|^2, \end{aligned}$$

donde se debe notar que la probabilidad de que el sistema  $S$  tenga la propiedad  $p_\chi$  en el tiempo  $t_1$  tiene el mismo valor que la probabilidad de que el instrumento  $A$  tenga la propiedad  $A_\chi$  en el tiempo  $t_1 + \Delta t$ .

Se consideran dos mediciones consecutivas del sistema  $S$  con dos instrumentos de medición idénticos  $A$  y  $B$ . La interacción entre  $S$  y  $A$  ( $S$  y  $B$ ) ocurre en el intervalo de tiempo  $[t_1, t_1 + \Delta t]$  ( $[t_2, t_2 + \Delta t]$ ), donde  $t_1 + \Delta t < t_2$ . El sistema  $S$  está en un estado representado por el vector  $|\varphi(t_1)\rangle \in \mathcal{H}_S$  en el tiempo  $t_1$ . En el mismo tiempo los instrumentos  $A$  y  $B$  están en los estados de referencia representados por los vectores  $|A_0\rangle \in \mathcal{H}_A$  y  $|B_0\rangle \in \mathcal{H}_B$ . Por lo tanto, el estado del sistema compuesto  $S + A + B$  en el tiempo  $t_1$  está representado por el vector

$$|\Phi(t_1)\rangle = |\varphi(t_1)\rangle|A_0\rangle|B_0\rangle \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B. \quad (4.18)$$

El hamiltoniano del sistema  $S + A + B$  es

$$H = H_S \otimes I_A \otimes I_B + I_S \otimes H_A \otimes I_B + I_S \otimes I_A \otimes H_B + H_{SA} \otimes I_B + H_{SB} \otimes I_A. \quad (4.19)$$

Por simplicidad se considera que el término dominante es  $H_{SA} \otimes I_B$  ( $H_{SB} \otimes I_A$ ) para el intervalo de tiempo  $[t_1, t_1 + \Delta t]$  ( $[t_2, t_2 + \Delta t]$ ), mientras que los términos libres dominan fuera de estos dos intervalos.

Las propiedades de los instrumentos  $A$  y  $B$  están representadas por los siguientes proyectores

$$\begin{aligned} \Pi^{(A)} &= I_S \otimes \pi^{(A)} \otimes I_B, & \pi^{(A)} &: \mathcal{H}_A \longrightarrow \mathcal{H}_A, \\ \Pi^{(B)} &= I_S \otimes I_A \otimes \pi^{(B)}, & \pi^{(B)} &: \mathcal{H}_B \longrightarrow \mathcal{H}_B. \end{aligned}$$

En el formalismo de Contextos Generalizados las propiedades del instrumento  $A$  en el tiempo  $t_1 + \Delta t$  son compatibles con las propiedades del instrumento  $B$  en el tiempo  $t_2 + \Delta t$  si la traslación temporal de ambas propiedades a un tiempo común son representadas por proyectores que conmutan. Si se elige  $t_2 + \Delta t$  como tiempo común, entonces se tiene que probar la conmutación de los proyectores  $U(t_2 + \Delta t, t_1 + \Delta t)\Pi^{(A)}U^{-1}(t_2 + \Delta t, t_1 + \Delta t)$  y  $\Pi^{(B)}$ .

Teniendo en cuenta las contribuciones dominantes en cada intervalo de tiempo se obtiene

$$\begin{aligned} U(t_1 + \Delta t, t_1) &= U_{SA} \otimes I_B, \\ U(t_2, t_1 + \Delta t) &= U_S \otimes U_A \otimes U_B, \\ U(t_2 + \Delta t, t_2) &= U_{SB} \otimes I_A. \end{aligned} \quad (4.20)$$

donde

$$\begin{aligned} U_{SA} &= e^{-\frac{i}{\hbar}H_{SA}\Delta t}, & U_{SB} &= e^{-\frac{i}{\hbar}H_{SB}\Delta t}, \\ U_S &= e^{-\frac{i}{\hbar}H_S(t_2-t_1-\Delta t)}, & U_A &= e^{-\frac{i}{\hbar}H_A(t_2-t_1-\Delta t)}, & U_B &= e^{-\frac{i}{\hbar}H_B(t_2-t_1-\Delta t)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} &\Pi^{(B)}U(t_2 + \Delta t, t_1 + \Delta t)\Pi^{(A)}U^{-1}(t_2 + \Delta t, t_1 + \Delta t) \\ &= (I_S \otimes I_A \otimes \pi^{(B)})(U_{SB} \otimes I_A)(U_S \otimes U_A \otimes U_B)(I_S \otimes \pi^{(A)} \otimes I_B)(U_S^{-1} \otimes U_B^{-1})(U_{SA}^{-1} \otimes I_A) \\ &= (I_S \otimes I_A \otimes \pi^{(B)})(I_S \otimes U_A \pi^{(A)} U_A^{-1} \otimes I_B) = (I_S \otimes U_A \pi^{(A)} U_A^{-1} \otimes I_B)(I_S \otimes I_A \otimes \pi^{(B)}) \\ &= (U_{SB} \otimes I_A)(U_S \otimes U_A \otimes U_B)(I_S \otimes \pi^{(A)} \otimes I_B)(U_S^{-1} \otimes U_A^{-1} \otimes U_B^{-1})(U_{SA}^{-1} \otimes I_A)(I_S \otimes I_A \otimes \pi^{(B)}) \\ &= U(t_2 + \Delta t, t_1 + \Delta t)\Pi^{(A)}U^{-1}(t_2 + \Delta t, t_1 + \Delta t)\Pi^{(B)}. \end{aligned}$$

Esta es la prueba de la compatibilidad de las propiedades del instrumento de medición  $A$  en el tiempo  $t_1 + \Delta t$  y las propiedades del instrumento  $B$  en el tiempo  $t_2 + \Delta t$ . Por lo tanto, ambas propiedades pueden ser incluidas en el mismo contexto generalizado.

En el caso del instrumento  $A$  interesan en particular las propiedades  $p_{A_\chi}$  y  $p_{A_{\bar{\chi}}}$ , correlacionadas con las propiedades  $p_\chi$  y  $p_{\bar{\chi}}$  del sistema  $S$  en el tiempo  $t_1$ . Para el instrumento  $B$ , en el tiempo  $t_2 + \Delta t$ , las propiedades relevantes son  $p_{B_\chi}$  y  $p_{B_{\bar{\chi}}}$ , correlacionadas con las propiedades  $p_\chi$  y  $p_{\bar{\chi}}$  del sistema  $S$  en el tiempo  $t_2$ .

El formalismo de Contextos Generalizados puede aplicarse para computar la probabilidad condicional

$$\Pr\{(p_{B_\chi}, t_2 + \Delta t) | (p_{A_\chi}, t_1 + \Delta t)\} = \frac{\Pr\{(p_{B_\chi}, t_2 + \Delta t) \wedge (p_{A_\chi}, t_1 + \Delta t)\}}{\Pr(p_{A_\chi}, t_1 + \Delta t)}.$$

Si se elige trasladar temporalmente las propiedades al tiempo  $t_1$ , se obtiene

$$\begin{aligned} & \Pr\{(p_{B_\chi}, t_2 + \Delta t) \wedge (p_{A_\chi}, t_1 + \Delta t)\} = \\ & = Tr \left\{ \rho(t_1) U(t_1, t_2 + \Delta t) \Pi_\chi^{(B)} U^{-1}(t_1, t_2 + \Delta t) U(t_1, t_1 + \Delta t) \Pi_\chi^{(A)} U^{-1}(t_1, t_1 + \Delta t) \right\} \\ & = Tr \left\{ \rho(t_1) U(t_1, t_2 + \Delta t) \Pi_\chi^{(B)} U(t_2 + \Delta t, t_1 + \Delta t) \Pi_\chi^{(A)} U(t_1 + \Delta t, t_1) \right\}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \rho(t_1) &= |\varphi(t_1)\rangle\langle\varphi(t_1)| \otimes |A_0\rangle\langle A_0| \otimes |B_0\rangle\langle B_0|, \\ \Pi_\chi^{(A)} &= I_S \otimes |A_\chi\rangle\langle A_\chi| \otimes I_B, \\ \Pi_\chi^{(B)} &= I_S \otimes I_A \otimes |B_\chi\rangle\langle B_\chi|. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (4.20) y considerando en la ecuación (4.19), por simplicidad, que  $H_A = H_B = 0$ , se obtiene

$$\Pr\{(p_{B_\chi}, t_2 + \Delta t) | (p_{A_\chi}, t_1 + \Delta t)\} = |\langle\chi| e^{-\frac{i}{\hbar} H_S(t_2 - t_1)} |\chi\rangle|^2 = W(t_2 - t_1). \quad (4.21)$$

La expresión dada en la última ecuación para la probabilidad condicional es idéntica a la probabilidad de supervivencia obtenida en la ecuación (4.13) desde el punto de vista de la interpretación ortodoxa. También coincide con el resultado obtenido en la ecuación (4.15) desde el punto de vista de las interpretaciones modales. Sin embargo, la interpretación física de la ecuación (4.21) es diferente:

*Es la probabilidad de que el instrumento  $B$  tenga la propiedad  $p_{B_\chi}$  en el tiempo  $t_2 + \Delta t$ , condicionada a que el instrumento  $A$  tenga la propiedad  $p_{A_\chi}$  en el tiempo previo  $t_1 + \Delta t$ .*

## 4.4. Conclusiones parciales

En este capítulo se utilizó el formalismo de Contextos Generalizados para analizar tres situaciones de interés físico: el experimento de la doble rendija, el proceso de medición y el proceso de decaimiento.

En la sección 4.1 se aplicó el formalismo al experimento de la doble rendija. Por un lado, sin instrumentos de medición, se dedujo la imposibilidad de describir la trayectoria

de la partícula. Por otro lado, se consideraron dos instrumentos de medición, uno en la zona de las rendijas y otro en la zona vertical frente a las rendijas, y considerando al sistema compuesto por la partícula y los dos sistemas de medición se obtuvo que las indicaciones de los instrumentos de medición son propiedades compatibles a diferentes tiempos. La probabilidad condicional obtenida a través del formalismo de Contextos Generalizados, sin recurrir al postulado de colapso, resultó ser la misma que la que se obtiene usando el postulado de colapso.

En la sección 4.2 se aplicó el formalismo de Contextos Generalizados a dos mediciones no ideales consecutivas sobre el mismo sistema. Se probó que los posibles valores de las variables puntero de ambos instrumentos de medición, luego de cada medición, están asociados a propiedades compatibles. Por lo tanto, el formalismo permite computar la probabilidad de obtener un cierto valor en la segunda medición, condicional a haber medido cierto valor en la primera medición. Además, se probó que el valor de esta probabilidad condicional es el mismo que el que se obtendría realizando una sola medición sobre el sistema en un estado efectivo. El estado efectivo depende del resultado de la primera medición. Sólo en el caso de una medición ideal el estado efectivo coincide con el estado obtenido aplicando el postulado de colapso.

Es interesante notar que no fue necesario apelar a la decoherencia para deducir el estado efectivo que generaliza al postulado de colapso. La decoherencia, que involucra los numerosos grados de libertad de los instrumentos de medición, no se ha considerado ya que dichos grados de libertad están ausentes en el modelo de medición utilizado.

En la sección 4.3 se aplicó el formalismo de Contextos Generalizados para describir el proceso de decaimiento. Para un sistema preparado en un estado cuasi-estacionario, la interpretación ortodoxa identifica a la probabilidad de supervivencia con la probabilidad de encontrar al sistema colapsado en el mismo estado en el que fue preparado un tiempo antes. En esta interpretación es fundamental la noción de medición.

En las interpretaciones modales la probabilidad de supervivencia se puede pensar como la probabilidad de que el sistema tenga la propiedad de no decaimiento en un tiempo posterior al de su preparación en el estado cuasi-estacionario. Este enfoque necesita considerar un sistema preparado en un estado cuasi-estacionario en un tiempo y a las propiedades de decaimiento y no decaimiento en un tiempo posterior.

Finalmente, se analizó la posibilidad de considerar la probabilidad de supervivencia únicamente en términos de las propiedades de no decaimiento y decaimiento de un estado preparado arbitrariamente. Para esto se aplicó el formalismo de Contextos Generalizados, ya que intervienen conjunciones de propiedades a distintos tiempos. Se intentó interpretar la probabilidad de supervivencia como la probabilidad de que un sistema preparado en un estado arbitrario tenga la propiedad de no decaimiento en un dado tiempo, condicional a haber tenido la misma propiedad en un tiempo anterior.

Primero se consideró al sistema sin instrumentos de medición y se obtuvo un resultado negativo: no es posible incluir en un mismo contexto generalizado las propiedades de decaimiento y no decaimiento en dos tiempos distintos. Después, se consideró al sistema en interacción con dos instrumentos ideales de medición en tiempos distintos, que medían las propiedades de decaimiento o no decaimiento del sistema. En este caso sí fue posible construir un contexto generalizado que incluyera a las propiedades asociadas a las mediciones del primer instrumento en un dado tiempo y a las propiedades asociadas

a las mediciones del segundo instrumento en un tiempo posterior. Por lo tanto, es posible interpretar la probabilidad de supervivencia como la probabilidad de que el segundo aparato mida que el sistema no decayó en un dado tiempo, condicional a que el primer aparato haya medido que el sistema no había decaído en un tiempo anterior.

Aunque las interpretaciones de historias cuánticas no asumen la existencia de observadores externos, se mostró que en el caso del proceso de decaimiento no es posible, utilizando el formalismo de Contextos Generalizados, representar las propiedades del sistema en dos tiempos diferentes. Sin embargo, sí es posible representar las propiedades asociadas a los instrumentos de medición del sistema en tiempos distintos.

Estas tres aplicaciones del formalismo del Contextos Generalizados muestran que es adecuado para describir procesos físicos que involucran propiedades a tiempos diferentes.

# Capítulo 5

## Conclusiones

La formulación ortodoxa de la mecánica cuántica se destaca por su exitosa capacidad para predecir los resultados de las observaciones experimentales. Sin embargo, la distinción de dos tipos de evoluciones temporales, a saber, el colapso del vector de estado y la dinámica dada por la ecuación de Schrödinger, conduce a ciertas dificultades interpretativas. Además, el conjunto de propiedades de un sistema físico está constituido por propiedades a un mismo tiempo. Por lo tanto, no es posible definir operaciones entre ellas a tiempos distintos. Sin embargo, en muchos procesos físicos es necesario considerar expresiones que involucran propiedades en diferentes instantes. Con el objetivo de resolver estas dificultades se desarrollaron las teorías de historias cuánticas.

Estas teorías, por un lado, proveen una interpretación de la mecánica cuántica en la que la medición pierde su estatus privilegiado y pasa a ser descripta como una interacción física ordinaria. La dinámica de la medición es descripta por la ecuación de Schrödinger y, en consecuencia, ya no se requiere el postulado adicional de colapso del vector de estado. Por otro lado, extienden el formalismo ortodoxo de la mecánica cuántica de modo tal de poder definir operaciones lógicas entre propiedades a distintos tiempos. Para ello introducen la noción de historia que generaliza a la noción de evento.

A lo largo de este trabajo se estudió el enfoque de historias cuánticas denominado *formalismo de Contextos Generalizados*, desarrollado por Roberto Laura, Leonardo Vanni y Marcelo Losada.

En el capítulo 2 se presentaron los aspectos centrales de la mecánica cuántica. Se resumió brevemente su desarrollo histórico, se describió la formulación axiomática de von Neumann, la cual fue utilizada a lo largo de todo el trabajo, y se enunciaron sus axiomas. Luego se consideraron las propiedades de los sistemas físicos. Se mostró que en la mecánica clásica y en la mecánica cuántica el conjunto de todas las propiedades tiene estructura de reticulado ortocomplementado, lo que permite definir operaciones lógicas entre propiedades. Para describir matemáticamente esta estructura se introdujeron algunas definiciones relevantes, entre las que se destaca la noción de reticulado. Se presentó a modo de ejemplo el reticulado de propiedades clásico y se mostró que es ortocomplementado y distributivo. A continuación, se describió el reticulado de propiedades cuánticas, se mostró que también es ortocomplementado, pero no distributivo, característica fundamental para el estudio de las historias cuánticas. Para poder definir una probabilidad el reticulado tiene que ser ortocomplementado y distributivo, por lo tanto, se explicó cómo

obtener un subreticulado distributivo a partir del reticulado completo de propiedades y luego se definió una probabilidad siguiendo la regla de Born.

En el capítulo 3 se introdujeron las teorías de historias cuánticas. Se describieron los aspectos centrales de dos enfoques de historias cuánticas: la teoría de Historias Consistentes y el formalismo de Contextos Generalizados. Primero se resumieron las ideas centrales de la teoría de Historias Consistentes: cómo se representan las historias cuánticas, cuáles son las condiciones de consistencia, cómo se obtienen las familias de historias consistentes y cómo se computa la probabilidad de las historias. Luego, se describió el formalismo de Contextos Generalizados, para sistemas clásicos y cuánticos, y se mostró que era adecuado para representar las historias de los sistemas físicos. El caso clásico se presentó a modo de ejemplo para después desarrollar el caso cuántico.

En el formalismo de Contextos Generalizados un evento se representa por un par constituido por un subespacio vectorial cerrado del espacio de Hilbert y un tiempo. La traslación temporal de eventos se obtiene a partir de la ecuación de Liouville – von Neumann. Eventos conectados a través de una traslación temporal no se consideran esencialmente diferentes, sino pertenecientes a una misma clase de equivalencia. Las historias se representan por las clases de equivalencia y el conjunto de estas clases tiene estructura de reticulado ortocomplementado, pero no distributivo. Para poder definir una probabilidad es necesario restringirse a un subreticulado booleano, al cual se denominó *contexto generalizado*. Luego, a partir de la regla de Born, se definió sobre cada contexto generalizado una probabilidad que cumple los axiomas de Kolmogorov. Para representar conjunciones de historias de diferentes contextos generalizados, las historias deben satisfacer las condiciones de compatibilidad, que consisten en que sus proyectores respectivos conmuten al ser trasladados a un tiempo común.

Además, se investigaron las relaciones entre el formalismo de Contextos Generalizados y la teoría de Historias Consistentes. Se analizó una restricción de la teoría de Historias Consistentes, que resulta de imponer que las familias de historias válidas deben ser aquellas que satisfacen las condiciones de consistencia para todo estado físico. Además, se probó que estas nuevas condiciones son equivalentes a imponer las condiciones de compatibilidad del formalismo de Contextos Generalizados. Por último, se mostró que la modificación de la teoría de Historias Consistentes, con las condiciones de consistencia impuestas para todo estado, y el formalismo de Contextos Generalizados representan las mismas historias y asignan las mismas probabilidades.

En la última sección de este capítulo se analizó la posibilidad de retrodecir propiedades contrarias en ambas teorías de historias. Primero se demostró que no es posible realizar inferencias contrarias en el formalismo ortodoxo de la mecánica cuántica. Luego, se mostró la posibilidad de retrodecir propiedades contrarias en la teoría de Historias Consistentes a partir de un ejemplo presentado por Hartle. Finalmente, se probó que este ejemplo no es válido en el caso del formalismo de Contextos Generalizados y se demostró de manera general que en este formalismo no es posible la retrodicción de propiedades contrarias.

Por último, en el capítulo 4 se aplicó el formalismo de Contextos Generalizados a tres situaciones físicas: el experimento de la doble rendija, el proceso de medición y el proceso de decaimiento. En la primera sección se describió el experimento de la doble rendija. Por un lado, sin instrumentos de medición, se dedujo la imposibilidad de describir la trayectoria de la partícula. Por otro lado, se consideraron dos instrumentos de medición,

uno en la zona de las rendijas y otro en la zona vertical frente a las rendijas, y considerando al sistema compuesto por la partícula y los dos sistemas de medición se obtuvo que las indicaciones de los instrumentos de medición son propiedades compatibles a diferentes tiempos. La probabilidad condicional obtenida a través del formalismo de Contextos Generalizados, sin recurrir al postulado de colapso, resultó ser la misma que la que se obtiene usando el postulado de colapso.

En la segunda sección se estudió el proceso de medición. Se consideraron dos mediciones no ideales consecutivas sobre el mismo sistema. Se probó que los posibles valores de las variables puntero de ambos instrumentos de medición, luego de cada medición, están asociados a propiedades compatibles. Por lo tanto, el formalismo permite computar la probabilidad de obtener un cierto valor en la segunda medición, condicional a haber medido cierto valor en la primera medición. Además, se probó que el valor de esta probabilidad condicional es el mismo que el que se obtendría realizando una sola medición sobre el sistema en un estado efectivo. El estado efectivo depende del resultado de la primera medición. Sólo en el caso de una medición ideal el estado efectivo coincide con el estado obtenido aplicando el postulado de colapso. Es interesante notar que no fue necesario apelar a la decoherencia para deducir el estado efectivo que generaliza al postulado de colapso. La decoherencia, que involucra a los numerosos grados de libertad de los instrumentos de medición realistas, no se ha considerado, pues dichos grados de libertad están ausentes en el modelo de medición utilizado.

En la última sección se describió el proceso de decaimiento. Para un sistema preparado en un estado cuasi-estacionario, la interpretación ortodoxa identifica a la probabilidad de supervivencia con la probabilidad de encontrar al sistema colapsado en el mismo estado en el que fue preparado un tiempo antes. En esta interpretación es fundamental la noción de medición.

En las interpretaciones modales la probabilidad de supervivencia se puede pensar como la probabilidad de que el sistema tenga la propiedad de no decaimiento, en un tiempo posterior al de su preparación en el estado cuasi-estacionario. Este enfoque necesita considerar un sistema preparado en un estado cuasi-estacionario en un tiempo y a las propiedades de decaimiento y no decaimiento en un tiempo posterior.

Finalmente, se analizó la posibilidad de considerar la probabilidad de supervivencia únicamente en términos de las propiedades de no decaimiento y decaimiento de un estado preparado arbitrariamente. Para esto se aplicó el formalismo de Contextos Generalizados, ya que intervienen conjunciones de propiedades a distintos tiempos. Se intentó interpretar la probabilidad de supervivencia como la probabilidad de que un sistema preparado en un estado arbitrario tenga la propiedad de no decaimiento en un dado tiempo, condicional a haber tenido la misma propiedad en un tiempo anterior.

Primero se consideró al sistema sin instrumentos de medición y se obtuvo un resultado negativo: no es posible incluir en un mismo contexto generalizado las propiedades de decaimiento y no decaimiento en dos tiempos distintos. Después, se consideró al sistema en interacción con dos instrumentos ideales de medición en tiempos distintos, que medían las propiedades de decaimiento o no decaimiento del sistema. En este caso, sí fue posible construir un contexto generalizado que incluyera a las propiedades asociadas a las mediciones del primer instrumento en un dado tiempo y a las propiedades asociadas a las mediciones del segundo instrumento en un tiempo posterior. Por lo tanto, es posi-

ble interpretar la probabilidad de supervivencia como la probabilidad de que el segundo aparato mida que el sistema no decayó en un dado tiempo, condicional a que el primer aparato haya medido que el sistema no había decaído en un tiempo anterior.

El resultado de esta investigación fue un estudio integral del formalismo de Contextos Generalizados. Se probó que es una herramienta adecuada para describir procesos físicos que involucran propiedades a distintos tiempos. Además, se lo comparó con la teoría de Historias Consistentes. La independencia de las condiciones de compatibilidad respecto del estado del sistema y la imposibilidad de retrodecir propiedades contrarias son dos ventajas de este formalismo frente a la otra teoría alternativa. Sin embargo, como las restricciones que impone sobre los conjuntos de historias válidos son más fuertes que los de la teoría de Historias Consistentes, se debe investigar con mayor profundidad la posibilidad de que ciertas historias con relevancia física no sean admisibles. Aún no se obtuvo un resultado definitivo al respecto, pero las tres aplicaciones desarrolladas son un primer paso en dicha dirección.

Una continuación posible de este trabajo es aplicar el formalismo de Contextos Generalizados a nuevas situaciones físicas y poner a prueba su capacidad para describir procesos que involucran propiedades a diferentes tiempos. Otra línea alternativa de investigación es abordar con mayor detalle la comparación entre ambas teorías de historias cuánticas y analizar ventajas y desventajas de cada una. Por último, sería interesante estudiar la conexión entre las teorías de historias cuánticas y las interpretaciones modales, investigando la posibilidad de incorporar reglas de selección para obtener un conjunto de historias privilegiado.

# Capítulo 6

## Apéndice

### Lema: Operadores con valor medio nulo

Si un operador  $O : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  satisface  $\text{Tr}(\rho O) = 0$  para todo estado  $\rho$ , luego  $O = 0$ .

### Demostración:

Sea  $\{|\phi_i\rangle\}_{i \in \sigma}$  una base ortonormal del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ .

Dado  $i \in \sigma$ , se puede elegir  $\rho_i = |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$ , luego  $\text{Tr}(\rho_i O) = \langle\phi_i|O|\phi_i\rangle = 0$ .

Por lo tanto,

$$\langle\phi_i|O|\phi_i\rangle = 0, \quad \forall i \in \sigma. \quad (6.1)$$

Además, dados dos índices  $i \neq j$ , se pueden elegir los siguientes vectores normalizados

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_j\rangle + |\phi_k\rangle), \quad |\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_j\rangle + i|\phi_k\rangle).$$

Para los siguientes operadores densidad  $|\Psi\rangle\langle\Psi|$  y  $|\Phi\rangle\langle\Phi|$  se obtiene

$$\begin{aligned} \langle\Psi|O|\Psi\rangle &= \frac{1}{2}(\langle\phi_j|O|\phi_k\rangle + \langle\phi_k|O|\phi_j\rangle) = 0, \\ \langle\Phi|O|\Phi\rangle &= \frac{i}{2}(\langle\phi_j|O|\phi_k\rangle - \langle\phi_k|O|\phi_j\rangle) = 0, \end{aligned}$$

y luego

$$\langle\phi_j|O|\phi_k\rangle = 0, \quad \forall j, k \in \sigma, j \neq k. \quad (6.2)$$

A partir de las ecuaciones (6.1) y (6.2) se deduce  $O = 0$ . ■

### Teorema 1:

Si las historias atómicas del conjunto  $A$  dadas en la ecuación (3.2) satisfacen las condiciones de consistencia para todo estado  $\rho_{t_0}$ , entonces  $[\Pi_{i,0}^{k_i}, \Pi_{j,0}^{k_j}] = 0$ , para todo  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $k_i \in \sigma_i$ ,  $k_j \in \sigma_j$ .

### Demostración 1:

Si  $i = j$ , a partir de la ecuación (3.1) se obtiene que  $\Pi_j^{k_j} \Pi_j^{k'_j} = \delta_{k_j k'_j} \Pi_j^{k_j}$ , luego

$$[\Pi_j^{k_j}, \Pi_j^{k'_j}] = 0.$$

Las relaciones de conmutación son invariantes ante la traslación temporal de los proyectores, por lo tanto  $[\Pi_{j,0}^{k_j}, \Pi_{j,0}^{k'_j}] = 0$ , para todo  $j = 1, \dots, n$ ,  $k_j, k'_j \in \sigma_j$ .

Si  $i \neq j$ , se consideran las historias  $\check{\Pi}, \check{\Pi}' \in A$  dadas por

$$\check{\Pi} = I \otimes \dots \otimes I \otimes \Pi_i^{k_i} \otimes I \otimes \dots \otimes I \otimes \Pi_j^{k_j} \otimes I \otimes \dots \otimes I,$$

$$\check{\Pi}' = I \otimes \dots \otimes I \otimes (I - \Pi_i^{k_i}) \otimes I \otimes \dots \otimes I \otimes \Pi_j^{k_j} \otimes I \otimes \dots \otimes I.$$

Es fácil probar que si las historias atómicas de  $A$  satisfacen las condiciones de consistencia para todo estado  $\rho_{t_0}$ , luego todas las historias de  $A$  también satisfacen estas condiciones. Si se aplican las condiciones de consistencia dadas en las ecuaciones (3.6) a  $\check{\Pi}$  y  $\check{\Pi}'$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\operatorname{Tr}\{C^\dagger(\check{\Pi})\rho_{t_0}C(\check{\Pi}')\}] &= \\ &= \frac{1}{2}[\operatorname{Tr}\{C^\dagger(\check{\Pi})\rho_{t_0}C(\check{\Pi}')\} + \overline{\operatorname{Tr}\{C^\dagger(\check{\Pi})\rho_{t_0}C(\check{\Pi}')\}}] = \\ &= \frac{1}{2}[\operatorname{Tr}\{C^\dagger(\check{\Pi})\rho_{t_0}C(\check{\Pi}')\} + \operatorname{Tr}\{(C^\dagger(\check{\Pi})\rho_{t_0}C(\check{\Pi}'))^\dagger\}] = \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\{\rho_{t_0}(C(\check{\Pi}')C^\dagger(\check{\Pi}) + C(\check{\Pi})C^\dagger(\check{\Pi}'))\} = 0. \end{aligned}$$

Como esta ecuación es válida para todo operador de estado  $\rho_{t_0}$ , se puede aplicar el lema anterior para obtener

$$C(\check{\Pi}')C^\dagger(\check{\Pi}) + C(\check{\Pi})C^\dagger(\check{\Pi}') = 0.$$

Los operadores cadena de  $\check{\Pi}$  y  $\check{\Pi}'$  son

$$C(\check{\Pi}) = \Pi_{i,0}^{k_i}\Pi_{j,0}^{k_j}, \quad C(\check{\Pi}') = (I - \Pi_{i,0}^{k_i})\Pi_{j,0}^{k_j}.$$

Luego,

$$(I - \Pi_{i,0}^{k_i})\Pi_{j,0}^{k_j}\Pi_{i,0}^{k_i} + \Pi_{i,0}^{k_i}\Pi_{j,0}^{k_j}(I - \Pi_{i,0}^{k_i}) = 0.$$

Si se aplica el proyector  $\Pi_{i,0}^{k_i}$  a ambos miembros de la ecuación previa, se obtiene

$$\Pi_{i,0}^{k_i}\Pi_{j,0}^{k_j} = \Pi_{i,0}^{k_i}\Pi_{j,0}^{k_j}\Pi_{i,0}^{k_i},$$

y si se consideran los operadores adjuntos, se obtiene

$$\Pi_{j,0}^{k_j}\Pi_{i,0}^{k_i} = \Pi_{i,0}^{k_i}\Pi_{j,0}^{k_j}\Pi_{i,0}^{k_i}.$$

Por último, a partir de estas dos ecuaciones se concluye  $[\Pi_{i,0}^{k_i}, \Pi_{j,0}^{k_j}] = 0$ .

Por lo tanto,

$$[\Pi_{i,0}^{k_i}, \Pi_{j,0}^{k_j}] = 0, \text{ para todo } i, j = 1, \dots, n, k_i \in \sigma_i, k_j \in \sigma_j. \blacksquare$$

### Teorema 2:

Si  $[\Pi_{i,0}^{k_i}, \Pi_{j,0}^{k_j}] = 0$ , para todo  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $k_i \in \sigma_i$ ,  $k_j \in \sigma_j$ , entonces las historias atómicas de  $A$ , dadas en la ecuación (3.2), satisfacen las condiciones de consistencia para todo estado  $\rho_{t_0}$ .

**Demostración 2:**

Sea  $\rho_{t_0}$  un estado arbitrario y sean  $\check{\Pi}^{\mathbf{k}} = \Pi_1^{k_1} \otimes \dots \otimes \Pi_n^{k_n}$  y  $\check{\Pi}^{\mathbf{k}'} = \Pi_1^{k'_1} \otimes \dots \otimes \Pi_n^{k'_n}$  dos historias atómicas diferentes de  $A$ .

Los correspondientes operadores cadena de  $\check{\Pi}^{\mathbf{k}}$  y  $\check{\Pi}^{\mathbf{k}'}$  son:

$$C(\check{\Pi}^{\mathbf{k}}) = \Pi_{1,0}^{k_1} \Pi_{2,0}^{k_2} \dots \Pi_{n,0}^{k_n}, \quad C(\check{\Pi}^{\mathbf{k}'}) = \Pi_{1,0}^{k'_1} \Pi_{2,0}^{k'_2} \dots \Pi_{n,0}^{k'_n}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \text{Tr}[C^\dagger(\check{\Pi}^{\mathbf{k}})\rho_{t_0}C(\check{\Pi}^{\mathbf{k}'})] &= \text{Tr}[\rho_{t_0}C(\check{\Pi}^{\mathbf{k}'})C^\dagger(\check{\Pi}^{\mathbf{k}})] = \\ &= \text{Tr}[\rho_{t_0}\Pi_{1,0}^{k'_1}\Pi_{2,0}^{k'_2}\dots\Pi_{n,0}^{k'_n}\Pi_{n,0}^{k_n}\dots\Pi_{2,0}^{k_2}\Pi_{1,0}^{k_1}] = \text{Tr}[\rho_{t_0}\Pi_{1,0}^{k'_1}\Pi_{1,0}^{k_1}\Pi_{2,0}^{k'_2}\Pi_{2,0}^{k_2}\dots\Pi_{n,0}^{k'_n}\Pi_{n,0}^{k_n}]. \end{aligned}$$

En el último miembro de la ecuación anterior se usó que  $[\Pi_{i,0}^{k_i}, \Pi_{j,0}^{k'_j}] = 0$ , para todo  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $k_i \in \sigma_i$ ,  $k'_j \in \sigma_j$ .

Como  $\check{\Pi}^{\mathbf{k}}$  y  $\check{\Pi}^{\mathbf{k}'}$  son diferentes,  $\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}$ . Luego, existe un  $1 \leq i \leq n$  para el cual  $k_i \neq k'_i$ , entonces  $\Pi_{i,0}^{k'_i}\Pi_{i,0}^{k_i} = 0$ .

Por lo tanto,

$$\text{Tr}[C^\dagger(\check{\Pi}^{\mathbf{k}})\rho_{t_0}C(\check{\Pi}^{\mathbf{k}'})] = 0, \quad \forall \mathbf{k} \neq \mathbf{k}' \quad \forall \rho_{t_0}, \quad (6.3)$$

y

$$\text{Re}\{\text{Tr}[C^\dagger(\check{\Pi}^{\mathbf{k}})\rho_{t_0}C(\check{\Pi}^{\mathbf{k}'})]\} = 0, \quad \forall \mathbf{k} \neq \mathbf{k}' \quad \forall \rho_{t_0}.$$

Luego, todas las historias atómicas de  $A$  satisfacen la condición de consistencia para todo estado  $\rho_{t_0}$ . ■



# Bibliografía

- [1] Beltrametti, E. y Cassinelli, G., *The Logic of Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, Reading (1981)
- [2] Birkhoff, G. y von Neumann, J., *Annals of Mathematics* **37**, 823-843 (1936)
- [3] Dalla Chiara, M. L., Giuntini, R. y Greechie, R., *Reasoning in Quantum Theory: Sharp and Unsharp Quantum Logics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2004)
- [4] Davydov, A. S., *Quantum Mechanics*. Pergamon Press, Oxford (1965)
- [5] Dowker, F. y Kent, A., *J. Stat. Phys.* **82**, 1575 (1996)
- [6] Gell-Mann, M. y Hartle, J.B., en *Complexity, Entropy and the Physics of Information*, W. Zurek (ed.). Addison-Wesley, Reading (1990)
- [7] Griffiths, R. B., *J. Stat. Phys.* **36**, 219 (1984)
- [8] Griffiths, R. B., *Consistent Quantum Theory*. Cambridge University Press (2002)
- [9] Griffiths, R. B., *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* **44**, 93–114 (2013)
- [10] Griffiths, R. B. y Hartle, J. B., *Phys. Rev. Lett.* **81** 1981 (1998)
- [11] Hartle, J. B., *J. Phys. A* **40**, 3101-3121 (2007)
- [12] Hughes, R. G. H., *The Structure and Interpretation of Quantum Mechanics*. Harvard University Press, Cambridge (1989)
- [13] Jauch, J., *Foundations of Quantum Mechanics*. Addison Wesley, Reading Mass (1968)
- [14] Kent, A., *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2874–2877 (1997)
- [15] Kent, A., *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1982 (1998)
- [16] Laloë, F., *Am. J. Phys.* **69**, 655 (2001)
- [17] Laura, R., y Vanni, L., *Int. J. Theor. Phys.* **47**, 2382-2392 (2008)
- [18] Laura, R. y Vanni, L., *Found. Phys.* **39**, 160–173 (2009)

- [19] **Losada, M.** y Laura, R., *Int. J. Theor. Phys.* **52**, 1289–1299 (2013)
- [20] **Losada, M.** y Laura, R., *Annals of Physics* **344**, 263–274 (2014)
- [21] **Losada, M.** y Laura, R., *Annals of Physics* **351**, 418–425 (2014)
- [22] **Losada, M.**, Vanni, L. y Laura, R., *Phys. Rev. A* **87**, 052128 (2013)
- [23] **Losada, M.**, Vanni, L. y Laura, R., *Int. J. Theor. Phys.* **55**, 817–824 (2016)
- [24] Mittelstaedt, P., *Quantum Logic*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland (1978)
- [25] Okon, E. y Sudarsky, D., *Found. Phys.* **44**, 19–33 (2014)
- [26] Omnès, R., *J. Stat. Phys.* **53**, 893 (1988)
- [27] Omnès, R., *The interpretation of quantum mechanics*. Princeton University Press, Princeton, New jersey (1994)
- [28] Omnès, R., *Understanding Quantum Mechanics*. Princeton University Press (1999)
- [29] Schlosshauer, M. y Fine, A., en *Quantum mechanics at the crossroads*, J. Evans y A. S. Thorndike. Springer-Verlag (2007)
- [30] Vanni, L. y Laura, R., *Int. J. Theor. Phys.* **52**, 2386–2394 (2013)

# Agradecimientos

Le agradezco especialmente a mi director Roberto Laura por su excelente trato y buena disposición constante. Sus comentarios y explicaciones me ayudaron a introducirme en los fundamentos de la mecánica cuántica y a comprender las teorías de historias cuánticas. Sin su ayuda y su conocimiento este trabajo no hubiera sido posible.

También quiero darle las gracias a Leonardo Vanni por sus contribuciones, que hicieron posibles varias de las publicaciones, y a Sebastián Fortín y a Ignacio Gómez por haber compartido charlas y discusiones que facilitaron la comprensión y el entendimiento de los temas de trabajo.

Le agradezco a Olimpia Lombardi por su actitud positiva y enérgica. Sus ideas constantes contribuyeron al desarrollo de este trabajo. A su vez, sus comentarios y observaciones ayudaron a clarificar cuestiones conceptuales relativas a la investigación. También le agradezco a todos los integrantes de su grupo de trabajo por su tiempo y cooperación.

Además, quiero expresar mi especial agradecimiento a Mario Castagnino por aceptarme en su grupo y permitirme introducirme en el área de fundamentos de cuántica. Sus consejos y su colaboración fueron indispensables a lo largo de estos años.

Por último, quiero agradecer a mis padres, a mis hermanos, a mi novia, a mi familia en general y a mis amigos por su acompañamiento y su apoyo incondicional.