

Tesis Doctoral

Aspectos fuera del equilibrio en la física del efecto Casimir

Rubio López, Adrián Ezequiel

2015-03-18

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Rubio López, Adrián Ezequiel. (2015-03-18). Aspectos fuera del equilibrio en la física del efecto Casimir. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

Cita tipo Chicago:

Rubio López, Adrián Ezequiel. "Aspectos fuera del equilibrio en la física del efecto Casimir". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2015-03-18.



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

Aspectos fuera del equilibrio en la física del efecto Casimir

Tesis presentada para optar al título de
Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Físicas

por *Adrián Ezequiel Rubio López*

Director de Tesis: Dr. Fernando C. Lombardo

Consejera de Estudios: Dra. Cristina Caputo

Lugar de Trabajo: Departamento de Física - Instituto de Física de Buenos Aires,
DF-IFIBA, Universidad de Buenos Aires

Buenos Aires, Febrero 2015

Fecha de defensa: 18 de marzo de 2015

Resumen

El objetivo principal de esta Tesis está centrado en el estudio de las fluctuaciones cuánticas de vacío y en particular del efecto Casimir para situaciones fuera del equilibrio. Para ello, en el presente trabajo se combinan, básicamente, dos métodos funcionales de gran poder: por una parte, se utiliza el formalismo de integrales de camino temporal cerrado (ó CTP de sus siglas en inglés) para el estudio de la evolución temporal de valores medios cuánticos; mientras que por otro lado, se incorpora el formalismo de la funcional de influencia de Feynman y Vernon como herramienta fundamental para el tratamiento de la dinámica de sistemas cuánticos abiertos.

En una primera parte, se analizó una de las posibles formas de abordar el efecto Casimir en medios disipativos en un régimen estacionario y de equilibrio térmico, mediante un formalismo de cuantización canónica en el estado estacionario. En este punto, discutimos los posibles modelos físicos de permitividad de los medios materiales, conectando natural y necesariamente la teoría del movimiento Browniano cuántico al problema de la fuerza de Casimir con medios materiales reales.

Luego, y como modelo más cercano al que representa el interés de la tesis, planteamos un problema de condiciones iniciales para un campo escalar en interacción con grados de libertad que representan a las principales propiedades de la materia. En este modelo, obtuvimos el régimen estacionario como el límite de tiempos largos, lo que nos llevó a una formulación conceptualmente correcta para la cuantización canónica en el límite estacionario.

Posteriormente, extendimos el enfoque al caso del campo electromagnético. Logramos resolver las dificultades propias que impone un campo de gauge de tipo vectorial al momento de cuantizar, y ganamos generalidad en los modelos de medios materiales al poder representar materiales anisótropos (birrefringencia).

Finalmente, a partir del formalismo desarrollado y de los modelos planteados, estudiamos el caso del efecto Casimir en su situación más realista: consideramos un campo electromagnético en interacción con materia en un contexto fuera del equilibrio. Abordamos el problema de dos placas paralelas semi-infinitas (problema de Lifshitz) de forma completa, estudiando al mismo tiempo varios de sus aspectos termodinámicos. Obtuvimos fórmulas analíticas exactas, demostrando que el estado estacionario de dicho escenario presenta dos contribuciones para la presión, una asociada a las condiciones iniciales del campo y la otra asociada a los baños térmicos que actúan de entorno sobre el material de las placas. Al mismo tiempo, la transferencia de calor (estudiada a través del vector de Poynting) presenta sólo una de las contribuciones, la asociada a los baños térmicos.

Palabras claves: teoría de campos fuera del equilibrio - efecto Casimir - cuantización - sistemas cuánticos abiertos

Physical Aspects of the Non Equilibrium Casimir Effect

Abstract

The main objective of this thesis is focused on the study of quantum vacuum fluctuations, particularly the Casimir effect for non-equilibrium situations. Therefore, in this work we basically combine two functional methods of great power: on one hand, the closed time path formalism (CTP) to study the time evolution of the quantum expectation values; and, on the other hand, the Feynman-Vernon influence functional formalism as a fundamental tool for the treatment of open quantum systems dynamics.

Firstly, we have analyzed one of the possible approaches to the Casimir effect in dissipative media at a steady situation of thermal equilibrium by using a canonical quantization formalism at steady states. At this point, we discussed the possible physical models of permittivity of the material, connecting naturally and necessarily the quantum Brownian motion theory to the problem of the Casimir force with real material boundaries.

Then, as a closer model to represent the interest of the thesis, we propose an initial conditions problem for a scalar field interacting with degrees of freedom representing the main properties of matter. In this model, we obtained the steady state as the limit of long times, which led to a conceptually correct formulation for the canonical quantization in the stationary limit.

Subsequently, we extended the approach to the case of the electromagnetic field. We were able to deal with the difficulties that impose a gauge vector-field at the moment of quantization, and we gain generality in the models represented with achieving the possibility of considering anisotropic material (birefringence).

Finally, from the formalism developed and the proposed models, we studied the case of the Casimir effect in the most realistic situation: we considered an electromagnetic field interacting with matter in a nonequilibrium context. We address the problem of two semi-infinite parallel plates (Lifshitz problem) completely, also studying its thermodynamic aspects. We obtained exact analytical formulas, showing that the steady state of this scenario presents two contributions to the pressure, one associated to the initial conditions of the field and the other one associated with the thermal baths acting as environment over the material of the plates. At the same time, heat transfer (studied through the Poynting vector) has only one contribution, the one associated to the thermal baths.

Keywords: non equilibrium quantum field theory - Casimir effect - quantization - open quantum systems

A papá y mamá

Agradecimientos

En estos cinco años que pasaron hasta este momento y hasta llegar a concretar este trabajo, sinceramente muchas personas han contribuido de una u otra manera a que yo esté ahora cerrando esta etapa. Ya sea por contribuir al trabajo o simplemente por compartir un momento, enumerar la cantidad de personas a las que le estoy agradecido por algo de estos años sería interminable. Creo (y espero) que, de todos modos, les haya podido comunicar mi gratitud por todo eso a cada uno de ellos, personalmente, como en general es mi deseo y forma. Si no lo hice, muchas gracias, imagino que cada uno lo sabe. No obstante, algunos muy importantes intentaré mencionar, a veces con agradecimiento y otras veces también con expresiones de deseo, corriendo el riesgo de olvidar alguno.

Quiero agradecerle a Fernando Lombardo, por haberme acompañado estos años en todo lo que me propuse hacer en diferentes aspectos y por intentar muchas veces que yo sea mejor de lo que era. Sinceramente me sentí muy cómodo siempre con él trabajando y espero que nuestra relación siga creciendo bajo los valores de la confianza y la honestidad.

A mi papá Norberto y mi mamá Graciela, que nunca me negaron a hacer esto, si no que por el contrario siempre bancaron con su esfuerzo para que yo pudiera dedicarme lo que fuese necesario. Que siempre esperaron lo mejor de mí haciendome saber que yo podía hacer y lograr lo que me propusiera. A ellos claramente debo este momento, el estar acá y el ser como soy, con mis defectos y virtudes, y sin ellos no lo hubiese logrado. Los amo.

A mi hermano Mariano que también amo, a pesar de las idas y vueltas que tenemos. Espero poder seguir creciendo mucho como hermanos, y que nos apoyemos incondicionalmente para mejorarnos mutuamente y darnos manos en lo que cada uno sabe hacer mejor.

A María Celeste Artale, por acompañarme estos años, por ayudarme a crecer, por ser la persona con la cual tengo mi proyecto de vida, porque tiene eso que me falta y me complementa. Espero poder seguir creciendo con ella sanamente.

A mi perro Tomás, que siempre es y será ejemplo de voluntad, entrega, buen humor y compañía. Un ser incondicional e inigualable que siempre me va a acompañar.

A Andrés Goya, por ser uno de los grandes amigos que la vida me pudo dar, del que aprendo en numerosos aspectos de la vida. Porque es otro incondicional y él sabe que yo también soy con él.

A Augusto Roncaglia, una persona mágica, porque aparece cuando más se le hace falta sin saberlo, porque da la ayuda justa sin pedir nada a cambio, porque le debo varias ya y espero poder devolverle alguna.

A mis compañeros de oficina, a Leo Amarilla y a Pablo Poggi, y en especial a Mariana Zeller con la que compartimos toda esta carrera, porque la compañía de todos ellos es de lo más variada, porque se puede compartir lo que sea y porque se les puede tener confianza. Haber tenido excelentes personas de compañeros no es poco y sinceramente ayuda muchísimo en todos los aspectos.

A Cristina Caputo, por ser mi consejera de estudios pero ser más que eso durante gran parte del tiempo. Espero poder seguir creciendo con ella en plena confianza y soporte mutuo.

A Oscar Jamardo, porque siempre es un ejemplo y un guía. Porque en pocos momentos concentra contenidos importantes.

Por último, quiero agradecer a Mauro Esteban Lioy, a Edmundo Lavia y a Alejandro Sztrajman, que siempre estuvieron cerca, dando la mano que pudiesen en diferentes formas y aspectos, siempre sin duda alguna. Su compañía y apoyo espero poder retribuírselas de alguna manera algún día.

Indice

| | |
|----------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1. Introducción | 15 |
| 2. Efecto Casimir en Conductores Ideales | 23 |
| 2.1. Cuantización del Campo Escalar con Contornos | 23 |
| 2.2. Fuerza de Casimir | 26 |
| 3. Efecto Casimir en Medios Disipativos | 31 |
| 3.1. Antecedentes Preliminares y Motivación | 31 |
| 3.2. El Modelo y la Separación de Contribuciones | 33 |
| 3.2.1. La Densidad Lagrangiana | 33 |
| 3.2.2. Ecuaciones de Heisenberg y Contribuciones | 35 |
| 3.3. Contribuciones de Vacío y Langevin | 39 |
| 3.4. Fuerza de Casimir y sus Diferentes Contribuciones | 41 |
| 3.4.1. El Tensor de Energía-Momento y la Fuerza de Casimir Total | 41 |
| 3.4.2. Contribución de Vacío a la Fuerza de Casimir | 42 |
| 3.4.3. Contribución de Langevin a la Fuerza de Casimir | 43 |
| 3.4.4. Fuerza de Casimir Total | 44 |
| 3.4.5. Limites y Convergencia | 45 |
| 3.5. Permitividad Generalizada y Causalidad | 47 |
| 4. Formalismo de Integrales de Camino Temporal Cerrado | 51 |
| 4.1. Breve Resumen y Motivación | 51 |
| 4.2. Mecánica Cuántica e Integrales de Caminos | 53 |
| 4.3. Integrales de Camino Temporal Cerrado | 55 |
| 4.4. La Funcional de Influencia | 59 |
| 4.4.1. Acoplamientos Lineales | 61 |

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 5. CTP para el Campo Escalar en Medios Reales | 65 |
| 5.1. Acoplamiento Bilineal | 66 |
| 5.2. Funcionales de Influencia y Generatriz | 67 |
| 5.2.1. Funcional de Influencia del Campo | 69 |
| 5.2.2. Funcional Generatriz CTP | 71 |
| 5.2.2.1. Contribución del Estado Inicial del Campo | 72 |
| 5.2.2.2. Límite de Alta Temperatura | 73 |
| 5.3. Acoplamiento Tipo Corriente | 76 |
| 5.4. El Tensor de Energía-Momento y la Correlación del Campo | 79 |
| 5.5. Descripción Fuera del Equilibrio para Diferentes Configuraciones del Sistema Compuesto | 81 |
| 5.5.1. Campo $0 + 1$ | 81 |
| 5.5.2. Campo en Material Homogéneo e Infinito | 86 |
| 5.5.3. Límite de Permitividad Dieléctrica Constante | 89 |
| 5.5.4. Campo con Contornos Materiales Reales | 92 |
| 5.5.4.1. La Función de Green Retardada | 93 |
| 5.5.4.2. Régimen de Tiempos Largos | 95 |
| 6. Electrodinámica Cuántica de Medios Inhomogéneos y Anisótropos | 101 |
| 6.1. Integración CTP de la Interacción Materia - Campo EM | 102 |
| 6.2. Funcional Generatriz CTP para el Campo EM | 110 |
| 6.3. Energía, Vector de Poynting y Tensor de Maxwell | 117 |
| 6.4. Electrodinámica Abierta en el Gauge Temporal | 121 |
| 6.4.1. Ecuación para el Campo EM en el Gauge Temporal | 121 |
| 6.4.2. Estado Estacionario del Campo EM en Material Infinito Isótropo y Homogéneo | 126 |
| 7. Problema de Lifshitz | 131 |
| 7.1. Presiones Transitoria y Estacionaria | 133 |
| 7.2. Contribuciones a la Presión | 136 |
| 7.2.1. Contribución de Condiciones Iniciales | 137 |
| 7.2.2. Contribución del Material | 139 |
| 7.3. El Tensor de Green Retardado | 144 |
| 7.4. Estado Estacionario del Problema de Lifshitz | 149 |
| 7.4.1. Límite de Tiempos Largos de la Contribución de los Grados de Libertad de Polarización | 151 |

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 7.4.2. Límite de Tiempos Largos de la Contribución de los Baños | 155 |
| 7.4.3. Límite de Tiempos Largos de la Contribución de Condiciones Iniciales | 159 |
| 7.4.4. Presión Total de Casimir Fuera del Equilibrio | 163 |
| 8. Conclusiones | 167 |
| A. Condiciones de Contorno y Soluciones para la Contribución de Vacío | 173 |
| B. Condiciones de Contorno y Soluciones para la Contribución de Langevin | 175 |
| C. Funcional de Wigner para el Campo Escalar | 179 |
| D. Transformada de Laplace de la Función de Green Retardada para una Placa Delta de Dirac | 183 |
| E. Cálculo de la Contribución Propia del Campo para una Placa Delta de Dirac | 187 |
| E.1. Integraciones Espaciales | 187 |
| E.2. Sumas Dobles Sobre Polos | 190 |

Capítulo 1

Introducción

En los últimos tiempos, la Física se ha desarrollado de forma notable en numerosas direcciones, diferenciando los aspectos de la Naturaleza en estudio, y delimitando los distintos campos de investigación que se observan en la actualidad. De hecho, los paradigmas científicos han cambiado a una velocidad vertiginosa, logrando conectar conocimientos que, al parecer, se encontraban completamente desconectados. Es así como se pasó de las teorías de Newton a la Relatividad Especial de Einstein y la Mecánica Cuántica, aumentando, en gran parte, el grado de abstracción y dando lugar a una nueva intuición física para entender la Naturaleza. Claramente, luego de considerarse afianzadas en la comunidad científica, se buscó combinar estas dos teorías en una única teoría. De esta forma es que se arribó a la Teoría Cuántica de Campos (QFT, de sus siglas en inglés), que sienta las bases para el tratamiento sistemático de multiplicidad de problemas que, siendo abordados de otra manera, no pueden ser explicados satisfactoriamente.

Dentro de dicha teoría, el área que usualmente ha sido dada en llamarse Física de Casimir (ó Casimir Physics en inglés)[1, 2, 3, 4, 5, 6], se relaciona al estudio de las fluctuaciones cuánticas de vacío en diferentes contextos. En el marco de la Mecánica Cuántica, la noción de vacío cambia respecto de la visión clásica que define al vacío como una porción del espacio sin contenido alguno, y está más bien relacionada a una región del espacio donde tenemos la menor energía posible. Por lo tanto, dentro de un contexto cuántico lo que llamamos vacío del sistema está asociado a un estado cuántico definido, en consonancia con este nuevo punto de vista. Es así como, a partir de esta sutil definición, es que podemos esperar a priori que las diferentes magnitudes físicas de interés en este estado dependan fuertemente del contexto en el cual se plantea un problema dado.

De esta forma, podemos imaginar fácilmente que, lo que llamamos vacío para un campo cuántico, puede depender fuertemente de si dicho campo está libre o en interacción

[7], sobre un espacio-tiempo curvo o no [8], o en presencia de contornos o no [6]. Y de hecho, estos son los casos.

Por ejemplo, con respecto al primer par de situaciones, no sólo para campos sino también para cualquier sistema cuántico en general, podemos ver que el estado de más baja energía (o estado fundamental) no es el mismo si el sistema tiene una dinámica libre (es decir, sin interacciones) o si se encuentra interactuando con otro sistema o inclusive con autointeracciones. Esto se relaciona con que, a grandes rasgos, podemos imaginar que en el caso general la base de estados más apropiada para la descripción cuántica no es la misma haciendo que, en los casos donde existe un estado fundamental, claramente pueda no ser el mismo en ambos casos. Numerosos ejemplos concretos de esto pueden verse tanto en la física atómica como en la molecular [9], como así también en la materia condensada [10], donde los electrones, ya sea en sus orbitales (atómicos o moleculares) o en la red del material (como electrones de conducción), son considerados sistemas cuánticos que pueden, dependiendo de los aspectos en estudio y su modelado, presentar en su dinámica interacciones entre sí (como la interacción coulombiana) o incluso entre las diferentes propiedades de un mismo electrón (interacción spin-órbita).

Con respecto al segundo par de situaciones, la noción de vacío es más compleja y diversa en este caso, si bien guarda alguna relación con los otros dos pares de situaciones. Para el caso de un espacio curvo, la noción de vacío se halla inherentemente conectada a la definición de partícula. En un esquema de cuantización de un campo cuántico en un espacio-tiempo curvo general, no existe una forma unívoca de definir un estado de vacío ya que esto está íntimamente relacionado a medir partículas. Este aparentemente hecho trivial, en realidad, depende fuertemente del proceso de medición y, en particular, del estado de movimiento del dispositivo de medición en cuestión. Esto hace que cuantizar, claramente dependa del sistema de coordenadas y, por ejemplo, ya en el caso de un espacio-tiempo plano (sin curvatura), un observador acelerado mediría partículas correspondientes a un espectro térmico donde la temperatura se relaciona a la aceleración del observador [11]. Esto es el llamado efecto Unruh [6, 12]. En un contexto general donde el espacio-tiempo sea realmente curvo, la definición de vacío también dependerá tanto del estado de movimiento del dispositivo en cuestión como de la geometría del espacio-tiempo y, por lo tanto, claramente no será unívoca.

El último par de situaciones, se refiere a la noción de vacío como dependiente de la presencia de contornos en el espacio. Estos pueden estar estáticos ó en movimiento, dando este último caso lugar a los fenómenos denominados como efecto Casimir dinámico [13] o fricción cuántica [14]. En este trabajo nos referiremos a los problemas con contornos

estáticos. En esta temática, dos trabajos fundacionales sentaron las bases de los conceptos teóricos elementales que definen la física de estas situaciones. El primero de ellos, escrito por el propio Casimir en 1948 [15], demuestra la existencia de una fuerza atractiva entre planos paralelos conductores perfectos, que se escribe en términos de las fluctuaciones del campo cuántico en cuestión en su estado de vacío. En el caso que el material de las placas sea ideal (conductor perfecto), el problema corresponde al de un campo cuántico confinado en una región del espacio sujeto a condiciones de contorno en los extremos de dicha región. Dicho contexto provoca que la energía del campo en dicha porción del espacio y la correspondiente a la misma porción pero en ausencia de contornos sean distintas, lo que resulta en la existencia de la fuerza de Casimir. Esto se interpreta como que el vacío en la situación con contornos es diferente al de la situación sin contornos. Cabe remarcar que, desde este marco, no queda claro cómo sería la situación para el caso donde el material que forma las placas no es ideal, sino más bien un material imperfecto y real. Dicha situación corresponde al segundo de los trabajos fundacionales, escrito por Lifshitz casi diez años más tarde que el primero [16]. En dicho trabajo, Lifshitz calcula la fuerza entre dos semiespacios paralelos separados por una distancia dada. En este caso, el campo cuántico no se encuentra confinado a una región, sino más bien que se encuentra en todo el espacio debido al carácter no ideal de los materiales de las placas que permiten la propagación del campo dentro de ellas. Más aún, el hecho de que el campo en el interior de las placas sea diferente al del caso libre, resulta en que sus fluctuaciones cuánticas en el estado de vacío en la región entre placas cambian respecto del caso sin contornos.

Sin embargo, para el planteo de este problema, a diferencia de lo que puede hacerse para el caso de conductores perfectos, Lifshitz se basó para el cálculo cuántico en un formalismo general de electrodinámica estocástica clásica estudiado por Rytov [17]. Si bien la fórmula general obtenida por Lifshitz a partir de este formalismo macroscópico es válida para la situación de equilibrio en cuestión, como se ha señalado en numerosos trabajos, la conexión entre este enfoque y uno basado en un modelo completamente cuántico no es del todo clara. Es más, algunas dudas se han planteado en torno a la aplicabilidad del resultado de Lifshitz a materiales con pérdidas [18, 19, 20]. Al mismo tiempo, si bien Lifshitz no se limitó a estudiar únicamente las fluctuaciones del campo en el estado de vacío, sino que también extendió su formalismo a situaciones de equilibrio térmico para luego, unos años más tarde, lograr un marco de QFT en el equilibrio [21] (ver también para enfoques a problemas relacionados al respecto Refs.[22, 23, 24, 25, 26, 27]), cabe remarcar que situaciones fuera del equilibrio aún carecen de una discusión satisfactoria y un marco teórico bien definido. La extensión inmediata del formalismo

de Lifshitz para este tipo de situaciones, que se basan en la teoría de fuentes, puede encontrarse en Ref.[28]. Sin embargo, dicha extensión no queda claro que sirva para todas las configuraciones posibles de materia y contornos. De más está decir que esto resulta de vital importancia al momento de comparar los resultados teóricos con los experimentos.

No obstante, un planteo sobre un modelo completamente cuántico requiere de un enfoque microscópico para los materiales, obteniendo sus propiedades de dispersión, disipación y absorción a partir de un conjunto de grados de libertad microscópicos en interacción con el campo. La inclusión de estos grados de libertad cuánticos en el problema dificulta la cuantización. Si bien la cuantización canónica del campo pudo lograrse en el caso de material en todo el espacio en una situación de equilibrio [29], no existe un procedimiento claro y definitivo para los problemas en el estacionario que incluyen contornos de material real. De hecho, todos los procedimientos de cuantización se plantean una vez alcanzada la situación estacionaria, la cual no se deduce de ninguna dinámica transitoria (ver por ejemplo Refs.[30, 31, 32, 33, 34]).

Es así que el objetivo principal del presente trabajo es dar respuesta a esto y lograr deducir las reglas básicas para la cuantización de la situación estacionaria (de equilibrio o no) en los diferentes contextos de interés de la física de Casimir. Para esto, recurriremos a técnicas combinadas para la resolución de problemas transitorios de sistemas compuestos que nos permitan obtener los estados estacionarios como el límite de tiempos largos de dichos problemas.

En el capítulo 2, introducimos la teoría básica en torno al efecto Casimir con conductores perfectos. Aquí, prestamos especial atención a los aspectos formales y limitaciones del procedimiento de cuantización canónica de un campo escalar en dichos escenarios. Luego mostramos cómo se obtiene el conocido resultado de Casimir para la fuerza entre planos en el caso unidimensional (es decir, $1 + 1$ dimensiones, una espacial y una temporal).

En el capítulo 3 (correspondiente a los resultados obtenidos en Ref.[35]), incrementamos el nivel de realismo en el estudio de la física de Casimir al considerar contornos formados de materiales modelados por grados de libertad internos. Calculamos la fuerza de Casimir entre dos placas paralelas de espesor finito en una situación estacionaria de equilibrio térmico, para un caso $1 + 1$ también, de forma tal de poder comparar con la situación del capítulo previo. Para ello, implementamos un formalismo de cuantización canónica en el estacionario dentro del marco de la teoría de sistemas cuánticos abiertos. Las placas, consideradas un medio disipativo, son modeladas mediante un conjunto continuo de osciladores armónicos que, al mismo tiempo, están acoplados a entornos externos

en equilibrio térmico. En este punto, mostramos que la interacción de Casimir presenta dos contribuciones: una asociada al campo de vacío, que es la que también da la fuerza en el caso ideal o sin disipación; y otra llamada contribución de Langevin asociada al ruido inducido por la interacción entre los grados de libertad de las placas y los entornos térmicos. Para finalizar el capítulo, se estudiaron propiedades generales del modelo de material empleado relacionadas a los requisitos matemáticos a fin de garantizar la propiedad de causalidad y la consistencia física del modelo, íntimamente conectadas a la verificación de las relaciones de Kramers-Kronig.

El capítulo 4 lo dedicamos a presentar los conceptos básicos del formalismo de integrales de caminos que emplearemos en el resto del trabajo para resolver las evoluciones temporales de las funciones de correlación cuánticas de interés físico [36]. Es aquí donde, por un lado, introducimos los conceptos y metodologías fundamentales del formalismo de integrales de camino temporal cerrado (CTP) para el estudio de valores de expectación cuánticos. Por otro lado, con el objetivo también de estudiar la dinámica de sistemas abiertos, mostramos cómo, desde el formalismo de funcionales de influencia de Feynman y Vernon, el marco de la teoría de sistemas cuánticos abiertos es incluido.

En el capítulo 5 (correspondiente a Ref.[37]) aplicamos el formalismo CTP, dentro del marco de sistemas cuánticos abiertos, para estudiar la evolución temporal de los valores de expectación del tensor de energía-momento para un campo escalar en presencia de materiales reales. Analizamos las fluctuaciones cuánticas (de Casimir) en un escenario fuera del equilibrio, cuando el campo escalar interactúa con grados de libertad de polarización de la materia presente, que son descritos como partículas Brownianas cuánticas (osciladores armónicos acoplados a un baño) en cada punto del espacio. Además, realizamos un análisis generalizado para dos tipos de acoplamiento entre el campo y los grados de libertad de polarización. Por un lado, consideramos un acoplamiento bilineal, y por otro lado, un acoplamiento tipo corriente en analogía al caso del campo electromagnético (EM) interactuando con materia. Establecido el modelo, calculamos la funcional generatriz CTP para el campo, luego de calcular las correspondientes funcionales de influencia en cada integración. Consideramos para ello y por simplicidad el límite de alta temperatura del campo, manteniendo temperaturas arbitrarias de cada uno de los elementos de volumen del material. También, logramos una forma cerrada para el propagador de Hadamard, el cual es el que nos permite estudiar la evolución dinámica de los valores de expectación de las componentes del tensor de energía-momento a partir de un tiempo inicial, cuando las interacciones comienzan. En este punto, mostramos que dos contribuciones siempre tienen lugar en la evolución transitoria: una asociada al material y otra

asociada únicamente al campo. De esta forma, pudimos estudiar los aspectos transitorios generales y deducir el límite de tiempos largos en varios casos de interés. Probamos que para un campo en $n + 1$ dimensiones, el material siempre contribuye a menos que sea no disipativo. Por el contrario, primero, probamos que la contribución propia del campo se anula a tiempos largos a menos que el material sea no disipativo. Luego, para el caso del contorno disipativo tipo delta de Dirac en $1 + 1$ dimensiones, mostramos que dicha contribución tampoco se anula en el régimen estacionario, resultando exactamente en la forma empleada sin demostración formal en el capítulo 3 para la llamada contribución de vacío. Es así como en este capítulo vemos que a tiempos largos, más allá de la dimensionalidad pero dependiendo de la configuración, el régimen estacionario puede venir definido por más de una contribución. A fin de definir reglas para un esquema de cuantización en el estacionario, comprender esto resulta de vital importancia.

Siguiendo esta línea de razonamiento, el capítulo 6 (que corresponde a Ref.[38]), lo dedicamos a extender el formalismo CTP para el caso del campo EM, el cual no resulta trivial debido tanto a la naturaleza vectorial del campo como a la invariancia de gauge de la teoría electromagnética. Por ende, en este capítulo, calculamos la funcional generatriz CTP para el campo EM interactuando con materia que posee tanto propiedades de inhomogeneidad (al igual que en el caso escalar) como de anisotropía (propias de este caso y que no se podían incluir en el caso escalar). Para esto, primero calculamos una expresión general para la acción de influencia del campo EM a partir de su interacción con un entorno compuesto, consistente en grados de libertad de polarización tridimensional en cada punto del espacio, a temperaturas arbitrarias, conectados a baños térmicos. Entonces, evaluamos la funcional generatriz para el campo EM en el gauge temporal mediante la implementación del procedimiento de Faddeev-Popov. Luego, mediante la técnica de división de puntos, calculamos formas cerradas para la energía, el vector de Poynting y el tensor de Maxwell en términos del propagador de Hadamard. Mostramos que todas las cantidades tienen la misma estructura que en el caso escalar, estando conformadas por contribuciones tanto de las condiciones iniciales del campo como también de los grados de libertad de materia. A lo largo del capítulo también, discutimos y mostramos cómo la invariancia de gauge debe ser tratada en el formalismo cuando un campo EM está interactuando con materia anisótropa e inhomogénea. Para finalizar, estudiamos la electrodinámica en el gauge temporal, obteniendo la ecuación de campo más una condición residual. Luego, mostramos cómo este procedimiento en su límite de tiempos largos reproduce los resultados conocidos para el caso de un campo EM en presencia de material en todo el espacio, permitiéndonos discutir en forma preliminar algunas implicancias ge-

nerales de nuestros resultados en relación al caso escalar analizado previamente y la física de Casimir en situaciones fuera del equilibrio.

Una vez desarrollado el formalismo CTP para el campo EM, en el capítulo 7 (correspondiente a Ref.[39]) lo utilizamos directamente para estudiar el problema de Lifshitz mencionado anteriormente en un escenario fuera del equilibrio. Comenzamos mostrando nuevamente las diferentes contribuciones a la presión de Casimir, con el agregado que esta vez damos una forma cerrada en términos de la doble transformada de Laplace del propagador de Hadamard. Vamos un paso más allá y calculamos por separado cada una de estas contribuciones en los espacios complejos de las variables de Laplace, logrando expresiones cerradas para los casos generales (anisotropía e inhomogeneidad) a todo tiempo, las que se simplifican particularizando para el problema de Lifshitz. Luego, continuamos mediante el cálculo del tensor de Green retardado para este problema, dando detalle de sus propiedades analíticas. Para finalizar, deducimos y calculamos el límite de tiempos largos de cada una de las contribuciones, como así también de la presión de Casimir, logrando concluir una imagen general de todos los problemas estudiados.

Por último, en el capítulo 8, resumimos nuestras conclusiones, mientras que en los apéndices se concentran algunos cálculos complementarios a los mostrados durante el trabajo.

En todo el trabajo se utilizará un sistema de unidades donde $\hbar = c = k_B = 1$.

Capítulo 2

Efecto Casimir en Conductores Ideales

En este capítulo se resume parte de los principales resultados del efecto Casimir vinculados a la problemática que abordará la presente Tesis. En este sentido, este capítulo está dedicado a mostrar cómo se obtiene el conocido resultado de la fuerza de Casimir para el caso de contornos ideales a través del procedimiento de cuantización canónica del campo. La finalidad es dar una breve introducción a los conceptos y procedimientos básicos empleados para estas situaciones, haciendo hincapié en el proceso de cuantización utilizado.

2.1. Cuantización del Campo Escalar con Contornos

En esta sección se resume el proceso de cuantización de un campo escalar, en principio, masivo [7] empleado para el planteo del cálculo de la fuerza de Casimir.

En este contexto, se trabajará en el interior de una cavidad tridimensional de paredes perfectamente conductoras.

Por un lado, debe tenerse presente primero la solución clásica del problema. La ecuación de movimiento para dicho campo dentro de la cavidad corresponde a la ecuación de Klein - Gordon:

$$(\square + m^2)\phi = 0. \tag{2.1}$$

Considerando una cavidad de volumen rectangular y dimensiones L_x, L_y, L_z ; con el origen de coordenadas en uno de sus vértices y de paredes perfectamente conductoras,

las condiciones de contorno sobre el campo son:

$$\phi(0, y, z, t) = \phi(x, 0, z, t) = \phi(x, y, 0, t) = 0, \quad (2.2)$$

$$\phi(L_x, y, z, t) = \phi(x, L_y, z, t) = \phi(x, y, L_z, t) = 0, \quad (2.3)$$

es decir, condiciones de contorno tipo Dirichlet.

Un conjunto ortonormal y completo de soluciones de la ecuación de movimiento (2.1) que satisfacen las condiciones de contorno (2.2) y (2.3) está dado por [6]:

$$u_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{n}}}} \sqrt{\frac{2^3}{L_x L_y L_z}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{L_y} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{L_z} z\right) e^{-i\omega_{\mathbf{n}} t}, \quad (2.4)$$

donde

$$\omega_{\mathbf{n}} = \sqrt{\left(\frac{\pi n_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{\pi n_y}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{\pi n_z}{L_z}\right)^2 + m^2}, \quad (2.5)$$

con n_x, n_y, n_z enteros positivos.

La ortonormalidad y completitud de las soluciones $u_{\mathbf{n}}$ está dada en relación al producto interno de Klein - Gordon, definido como:

$$(\psi, \xi) = -i \int_{cavidad} d^3x (\psi \dot{\xi}^* - \dot{\psi} \xi^*), \quad (2.6)$$

el cual tiene la propiedad de ser independiente del tiempo.

Ahora, para poder llevar a cabo la cuantización canónica de una teoría, debe ser posible expresar la misma mediante un principio variacional. En el caso del campo escalar masivo, esto se logra a partir de la densidad lagrangiana de campo libre:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2, \quad (2.7)$$

la cual define un momento canónicamente conjugado dado por:

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}. \quad (2.8)$$

De esta manera, la densidad hamiltoniana asociada resulta:

$$\mathcal{H} = \Pi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\Pi^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2). \quad (2.9)$$

Para concretar la cuantización, la prescripción canónica para cuantizar la teoría implica reemplazar el campo clásico ϕ y su momento conjugado Π por operadores en un espacio de Hilbert, los cuales deben satisfacer las relaciones de conmutación fundamentales a tiempos iguales:

$$[\widehat{\phi}(\mathbf{x}, t); \widehat{\phi}(\mathbf{x}', t)] = [\widehat{\Pi}(\mathbf{x}, t); \widehat{\Pi}(\mathbf{x}', t)] = 0, \quad (2.10)$$

$$[\widehat{\phi}(\mathbf{x}, t); \widehat{\Pi}(\mathbf{x}', t)] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (2.11)$$

De esta manera, en este caso, tenemos que los cuantos del campo satisfacen la estadística de Bose - Einstein.

Teniendo en cuenta la ecuación (2.9), el operador hamiltoniano se escribe:

$$\widehat{H} = \frac{1}{2} \int d^3x \left(\widehat{\Pi}^2 + (\nabla \widehat{\phi})^2 + m^2 \widehat{\phi}^2 \right). \quad (2.12)$$

Por lo tanto, la ecuación de Heisenberg para el operador de campo $\widehat{\phi}$ resulta idéntica a la ecuación para el campo clásico (2.1).

Desarrollando el operador de campo en la base completa de soluciones (2.4):

$$\widehat{\phi}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n_x, n_y, n_z} \left(\widehat{a}_{\mathbf{n}} u_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) + \widehat{a}_{\mathbf{n}}^\dagger u_{\mathbf{n}}^*(\mathbf{x}, t) \right), \quad (2.13)$$

las relaciones de conmutación (2.10) y (2.11) para los campos se traducen en las típicas relaciones para los operadores de aniquilación y creación ($\widehat{a}_{\mathbf{n}}$ y $\widehat{a}_{\mathbf{n}}^\dagger$):

$$[\widehat{a}_{\mathbf{n}}; \widehat{a}_{\mathbf{n}'}] = [\widehat{a}_{\mathbf{n}}^\dagger; \widehat{a}_{\mathbf{n}'}^\dagger] = 0 \quad , \quad [\widehat{a}_{\mathbf{n}}; \widehat{a}_{\mathbf{n}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{nn}'}. \quad (2.14)$$

Estas relaciones son las que permiten construir un espacio de Fock de estados estacionarios del sistema, a partir de la acción de $\widehat{a}_{\mathbf{n}}$ y $\widehat{a}_{\mathbf{n}}^\dagger$ sobre el estado fundamental del mismo, de manera análoga a lo que ocurre para oscilador armónico cuántico. Esto quiere decir que cada modo del campo funciona como un oscilador armónico. Por ende, el estado fundamental o estado de vacío y los excitados se definen respectivamente como:

$$\widehat{a}_{\mathbf{n}}|0\rangle = 0 \quad , \quad |k_{\mathbf{n}_1}, k_{\mathbf{n}_2}, \dots\rangle = \prod_{\mathbf{n}_i} \frac{(\widehat{a}_{\mathbf{n}_i}^\dagger)^{n_i}}{\sqrt{k_{\mathbf{n}_i}!}} |0\rangle, \quad (2.15)$$

ya que la acción de los operadores de aniquilación y creación sobre los elementos del espacio está dada por:

$$\hat{a}_{\mathbf{n}}|\dots k_{\mathbf{n}}\dots\rangle = \sqrt{k_{\mathbf{n}}}\dots(k_{\mathbf{n}} - 1)\dots \quad , \quad \hat{a}_{\mathbf{n}}^{\dagger}|\dots k_{\mathbf{n}}\dots\rangle = \sqrt{k_{\mathbf{n}} + 1}\dots(k_{\mathbf{n}} + 1)\dots. \quad (2.16)$$

De esta forma, el estado general en (2.15) corresponde a un estado físico con $k_{\mathbf{n}_i}$ bosones de energías $\omega_{\mathbf{n}_i}$ respectivamente.

Ahora, considerando el desarrollo del campo en modos (2.13), el hamiltoniano en términos del operador de campo (2.12), junto con las relaciones de conmutación (2.14), el hamiltoniano puede reescribirse en términos de los operadores de creación y aniquilación:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{n}} \omega_{\mathbf{n}} \left(\hat{a}_{\mathbf{n}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{n}} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.17)$$

De aquí es claro que su valor de expectación respecto del estado vacío (2.15), resulta en una energía de punto cero divergente:

$$E_0 = \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \sum_{\mathbf{n}} \frac{\omega_{\mathbf{n}}}{2}. \quad (2.18)$$

Por ende, para que la teoría cuántica esté bien definida, se requieren, además, métodos capaces de eliminar este tipo de divergencias. Esto se encuentra relacionado a la noción de que el estado fundamental de un sistema no interactuante debe tener energía nula. Es decir, en el espacio plano y libre de contornos esta energía carece de sentido. No ocurre lo mismo en el caso de espacios curvos o planos con contornos. Por lo tanto, como los observables físicos involucran diferencias de energía, en general, se regularizan las cantidades en cuestión redefiniendo la escala de energía, mediante la sustracción de la mencionada energía de punto cero ó mediante la introducción del orden normal de Wick (por el cual, los operadores de creación deben ubicarse a la izquierda de los de aniquilación) como parte de la prescripción de trabajo en la teoría.

Ambos procedimientos son equivalentes para eliminar la energía de vacío divergente, sin embargo, en la próxima sección se analizará un método de regularización que no siempre lleva a un valor nulo para dicha energía y que puede ser verificado experimentalmente en lo que se ha dado en llamar *efecto Casimir*.

2.2. Fuerza de Casimir

En 1948, Casimir demostró que la mencionada energía de punto cero no es únicamente un problema de la teoría de campos como parecía, sino que trae consigo implicancias teóricas que pueden ser verificadas experimentalmente. Más específicamente, lo que él

mostró es que dos placas paralelas perfectamente conductoras descargadas y en vacío sienten una fuerza atractiva [15].

Esto se debe a que dado que los campos físicos, en general, no se encuentran libres sino que están en presencia de contornos (o satisfacen ciertas condiciones de contorno), los espectros de energía resultan ser distintos con respecto al caso libre, y esto modifica su energía de punto cero. El cambio dependerá en general de la distancia entre las placas haciendo que energéticamente sea más favorable que las placas estén más cerca. Por lo tanto, resulta razonable definir la energía del estado de vacío físico como una diferencia entre energías de punto cero. Es decir, dado un contorno $\partial\Gamma$, se define formalmente la energía de Casimir como:

$$E_C[\partial\Gamma] = E_0[\partial\Gamma] - E_0[0], \quad (2.19)$$

donde $E_0[\partial\Gamma]$ y $E_0[0]$ corresponden a las energías de punto cero del campo en presencia del contorno $\partial\Gamma$ y en el caso libre respectivamente.

Cabe remarcar que esta prescripción generaliza la comentada en la sección anterior para asignar una energía nula al estado fundamental de un sistema no interactuante. Sin embargo, en general, esta definición debe acompañarse de un método de regularización que permita definir correctamente las magnitudes (en principio divergentes) que están siendo restadas.

Como la finalidad de este capítulo es introducir los conceptos básicos de la fuerza de Casimir, haciendo hincapié en el procedimiento de cuantización, se comentará brevemente el resultado para el caso de un campo escalar no masivo en $1 + 1$ dimensiones (una dimensión temporal y otra espacial) con contornos perfectamente conductores [40], es decir, confinado en un intervalo $0 < x < a$ con condiciones de contorno tipo Dirichlet.

Todos los resultados exhibidos en la sección anterior pueden aplicarse a este caso reemplazando $m = 0$ e ignorando las dimensiones no consideradas. Para esto último, se debe reemplazar \mathbf{x} por x , \mathbf{n} por n en todas las expresiones, y hacer L_y y L_z tender a infinito en la ecuación (2.5), obteniendo los resultados del caso 1+1. Para los modos dados en la expresión (2.4), sólo debe considerarse la dependencia en x , ajustando correctamente el factor de normalización al reemplazar 2^3 por 2. Las condiciones de contorno (2.2) y (2.3), por lo tanto, vienen dadas al reemplazar L_x por a e ignorar las dimensiones y y z .

Como se busca comparar la energía de vacío con contornos ($0 < x < a$) y la misma en el caso libre ($-\infty < x < +\infty$), éstas se calculan a partir del operador densidad de energía, que viene dado por la componente 00 del tensor de energía - momento definido como:

$$\widehat{T}_{00}(x, t) = \frac{1}{2} \left((\partial_0 \widehat{\phi})^2 + (\partial_x \widehat{\phi})^2 \right). \quad (2.20)$$

Teniendo en cuenta el desarrollo en modos del campo (2.13) y las relaciones (2.14), el valor de expectación de (2.20) para el estado de vacío (2.15) resulta:

$$e_0[a] = \langle 0 | \widehat{T}_{00}(x, t) | 0 \rangle = \frac{1}{2a} \sum_{n=0}^{+\infty} \omega_n, \quad (2.21)$$

que corresponde a la densidad de energía de vacío y es independiente de la posición. La energía total de vacío entonces es la integral de esta cantidad sobre todo el intervalo que resulta en la multiplicación de (2.21) por la longitud del intervalo a . Dicho resultado es una cantidad divergente. Una manera de regularizarla es introduciendo una función de amortiguamiento exponencial $e^{-\Lambda \omega_n}$ en la suma, forzando la convergencia de la expresión. Luego de los cálculos, la regularización debe ser removida mediante el límite $\Lambda \rightarrow 0$. De esta forma, considerando el límite de Λ pequeño, en total puede escribirse:

$$E_0[a; \Lambda] = \frac{a}{2\pi\Lambda^2} - \frac{\pi}{24a} + \mathcal{O}(\Lambda^2), \quad (2.22)$$

discriminando las partes singular y finita de la expresión.

Para comparar este resultado con el correspondiente para el caso libre debe tenerse en cuenta que, en lugar de los modos (2.4), se tienen soluciones de ondas planas de frecuencias tanto positivas como negativas, siendo las primeras:

$$u_k(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_k}} e^{-i(\omega_k t - kx)}, \quad (2.23)$$

con $\omega_k = |k|$, donde $-\infty < k < +\infty$.

La suma en el operador de campo (2.13) es ahora una integral de medida $dk/2\pi$ y las relaciones de conmutación para los operadores de creación y aniquilación contienen funciones delta de Dirac $\delta(k - k')$ en lugar de los símbolos de Kronecker. En este caso también puede definirse un estado de vacío en analogía con (2.15).

Realizando cálculos idénticos al caso anterior, se obtiene que la densidad de energía de vacío en el caso libre es divergente y está dada por:

$$e_0^{Libre} = \langle 0_{Libre} | \widehat{T}_{00}^{Libre}(x, t) | 0_{Libre} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \omega_k dk. \quad (2.24)$$

La energía entonces que habría en el intervalo $(0; a)$ en ausencia de contornos viene dada por la integración de esta última expresión en todo el intervalo, la cual resulta

ser una cantidad divergente. Por ende, apelando nuevamente a una función de amortiguamiento exponencial a fin de forzar la convergencia, esta vez dentro de la integral, obtenemos:

$$E_0^{Libre}[a; \Lambda] = \frac{a}{2\pi} \int_0^{+\infty} k e^{-\Lambda k} dk = \frac{a}{2\pi\Lambda^2}, \quad (2.25)$$

que resulta ser la parte singular de (2.22), de forma tal que la energía de Casimir finalmente se escribe:

$$E_C[a] = \lim_{\Lambda \rightarrow 0} (E_0[a; \Lambda] - E_0^{Libre}[a; \Lambda]) = -\frac{\pi}{24a}. \quad (2.26)$$

Cabe destacar que esta expresión decrece monótonamente a medida que los contornos se acercan. Esto quiere decir que energéticamente los planos conductores se ven favorecidos a acercarse, siendo tal interacción la denominada *fuera de Casimir*:

$$F_C[a] = -\frac{\partial E_C[a]}{\partial a} = -\frac{\pi}{24a^2}. \quad (2.27)$$

Es claro que este resultado se ha obtenido como si las placas conductoras fuesen de espesor infinito (es decir, ocupando cada una las regiones $x < 0$ y $x > a$). Sin embargo, el mismo puede obtenerse suponiendo las placas de espesor finito (para el caso electromagnético, véase [6]). La diferencia es que, en este caso, deben considerarse tanto las diferencias de energías de punto cero entre las placas, como así también las diferencias fuera de ellas. Asimismo, sobre todo para el caso de placas de espesor finito, también puede obtenerse el resultado alternativamente a través de la diferencia entre las presiones de radiación de vacío en el interior y exterior de la configuración [6]. Esto puede interpretarse como que las reflexiones del campo (de vacío) en las superficies externas de la configuración de placas actúan acercándolas, mientras que las reflexiones en su interior las empujan hacia afuera. En este caso, debido a las condiciones de contorno, sólo ciertas frecuencias están permitidas en el interior de la cavidad, de manera que las reflexiones afuera generan mayor presión que los reflexiones interiores, generando un efecto neto de atracción entre las placas.

En el caso unidimensional, la presión de radiación (componente xx del tensor de energía - momento) coincide con la densidad de energía (componente 00), de manera que la fuerza sobre una de las placas viene dada por:

$$F_{Casimir} = \langle \widehat{T}_{00}^{ext} \rangle - \langle \widehat{T}_{00}^{int} \rangle. \quad (2.28)$$

De hecho, esta última forma de cálculo será la más utilizada a lo largo de este trabajo, por resultar válida también en situaciones con temperatura.

Como último comentario, cabe remarcar que todo este enfoque presentado se extiende sin mayores problemas al campo EM eligiendo, por ejemplo, el gauge de Coulomb [6]. El caso de placas paralelas conductoras ideales con cantidad de dimensiones espaciales mayor a uno no presenta aspectos muy diferentes respecto al ejemplo presentado en el presente capítulo, por lo que la simplicidad permite hacer hincapié en los aspectos físicos fundamentales y los procedimientos teóricos. De todas formas, más adelante en esta Tesis el caso electromagnético será estudiado por separado debido a que cuando los materiales no son ideales, las propiedades de anisotropía se combinan con la naturaleza vectorial del campo EM.

Como último comentario, más allá del tipo de campo considerado, es claro que el efecto Casimir se presenta como íntimamente ligado a la naturaleza cuántica del campo, que es descrito por la dinámica de la ecuación de ondas y el estado cuántico considerado.

En el próximo capítulo se incrementará el grado de dificultad como así también de realismo en el problema de Casimir y comentaremos los cálculos de la fuerza de Casimir para el caso de placas de material disipativo.

Capítulo 3

Efecto Casimir en Medios Disipativos

Este capítulo lo dedicamos a presentar los resultados de la fuerza de Casimir para una situación más realista. Una vez introducidos los resultados del efecto Casimir para conductores ideales, comentado el enfoque utilizado para ellos y motivados por las limitaciones de estos cálculos para representar situaciones más realistas de cuerpos de material real (no ideal), donde la disipación y la absorción juegan un rol fundamental, mostraremos una de las posibles maneras de obtener la fuerza de Casimir en dichos contextos. Para esta parte también empleamos un método de cuantización canónica, sólo que ahora el campo se presenta dentro de un marco de sistemas cuánticos abiertos, es decir, el campo es un sistema en interacción con otros grados de libertad cuánticos que modelan la materia. En esta misma línea, así como se calcula la fuerza, también se presenta un análisis detallado de las relaciones de Kramers-Kronig en este tipo de modelos sumando elementos para los capítulos siguientes.

3.1. Antecedentes Preliminares y Motivación

Dada la precisión alcanzada recientemente en la medición de las fuerzas de Casimir [1, 5], la implementación de modelos realistas para la descripción de los cuerpos materiales es un paso ineludible para la mejora de los cálculos de la energía de Casimir, necesaria para su comparación con los datos experimentales. Más aún, desde un punto de vista conceptual, los cálculos teóricos para placas con propiedades electromagnéticas arbitrarias, incluyendo la absorción, es un problema aún sin resolver completamente [18, 19, 20]. Dado que los efectos disipativos significan la posibilidad de intercambios de energía entre

las diferentes partes del sistema total (que esta vez está constituido por el campo y el material), la teoría de los sistemas cuánticos abiertos [41] se presenta como el enfoque natural para dilucidar el rol que juega la disipación en la física del efecto Casimir. De hecho, en este marco, la disipación y el ruido se introducen en la teoría efectiva del grado de libertad relevante (en este caso, el campo) luego de integrar los grados de libertad de los materiales, formados por grados de libertad de polarización en interacción con otros grados de libertad que conforman entornos.

En general, los materiales dieléctricos son no-lineales, inhomogéneos, dispersivos y disipativos. Estos aspectos complican la cuantización del campo cuando se quiere tomar en cuenta todo de manera simultánea. Claramente, existen diversos enfoques a este problema. Por un lado, puede emplearse una descripción fenomenológica basada en las propiedades electromagnéticas macroscópicas de los materiales. La cuantización puede llevarse a cabo tomando como punto de partida las ecuaciones de Maxwell para medios materiales, balanceándolas mediante la inclusión de términos de ruidos a fin de tener en cuenta la absorción [42]. En este caso, un esquema de cuantización canónica no es posible a menos que se acople el campo a un reservorio (véase [19]), y se siga con el camino usual para incluir la disipación en sistemas cuánticos simples. Otra posibilidad es la de construir un modelo de primeros principios donde los materiales son descritos mediante grados de libertad microscópicos acoplados al campo, representando la polarización del material en cada punto. En estos modelos, las pérdidas son incorporadas al considerar baños térmicos actuando sobre cada grado de libertad microscópico, permitiendo la absorción de energía. Existe una vasta bibliografía respecto de la cuantización de campos en dieléctricos. En cuanto a los modelos microscópicos, la cuantización canónica del campo EM en un medio dispersivo y absorbente fue llevada a cabo por Huttner y Barnett (HB) [29]. En su modelo, el campo EM es acoplado a la materia (el campo de polarización), y ésta a su vez se acopla a reservorios que describen las pérdidas en el modelo. En este contexto de teoría de sistemas cuánticos abiertos, uno puede pensar al modelo HB como un sistema compuesto donde los grados de libertad relevantes se separan en dos subsistemas (el campo EM y la materia), y a su vez los grados de libertad de materia se hallan en contacto con un entorno (los reservorios térmicos). El acople indirecto entre el campo EM y los reservorios es el responsable de las pérdidas. Como comentaremos más adelante, esto será nuestro punto de partida para computar la fuerza de Casimir en contextos con materiales reales.

En cuanto a la fuerza de Casimir, la célebre fórmula de Lifshitz [16] describe las fuerzas entre dieléctricos en términos de sus propiedades electromagnéticas macroscópicas.

La deducción original de esta fórmula general se basa en un enfoque macroscópico, partiendo de las ecuaciones de Maxwell estocásticas y la verificación por parte de los campos estocásticos de ciertas propiedades termodinámicas. Como ha sido señalado en numerosos trabajos, la conexión entre este enfoque y uno basado en un modelo cuantizado completamente no está totalmente clara. Más aún, algunas dudas han sido planteadas en torno a la aplicabilidad de la fórmula de Lifshitz para dieléctricos con pérdidas [18, 19, 20].

El primer cálculo de la fuerza de Casimir entre dos placas de material real usando un enfoque microscópico es, según nuestro conocimiento, debido a Kupiszewska [32], quien modeló los grados de libertad del dieléctrico (átomos) como un conjunto continuo de osciladores armónicos acoplados a entornos a temperatura nula ($T = 0$), sobre los cuales los átomos podían disipar energía.

En este capítulo seguiremos un plan similar al de la Ref.[32], generalizándolo al considerar un sistema cuántico abierto general bien definido. Cabe remarcar que, en todos los casos, los planteos encontrados en torno a la fuerza de Casimir son en base a propuestas de cuantización en el régimen estacionario (o inclusive de equilibrio) del sistema compuesto de campo más materia. Si bien en ciertos contextos, las argumentaciones basadas en propiedades termodinámicas resultan contundentes, no hay que dejar de lado que el sistema en estudio sigue siendo un sistema de varias partes en interacción. Esto hace que en principio, la cuantización en el estacionario sea parte de las hipótesis y no resulta derivada de alguna otra parte. Como veremos más adelante, en un escenario fuera del equilibrio, esto se torna más dramático y una correcta deducción del régimen estacionario es necesaria. De todos modos, la finalidad de este capítulo es presentar una manera de obtener la fuerza de Casimir a partir de un modelo microscópico para el material.

3.2. El Modelo y la Separación de Contribuciones

3.2.1. La Densidad Lagrangiana

Con el objetivo de incluir efectos de disipación y ruido en los cálculos de la fuerza de Casimir, implementaremos la teoría de sistemas cuánticos abiertos, basándonos en el ejemplo paradigmático del movimiento Browniano cuántico (QBM de sus siglas en inglés) [41].

El modelo consiste de un sistema compuesto de dos partes: un campo escalar no masivo y las placas dieléctricas que, al mismo tiempo, son descritas a través de sus grados de libertad internos, consistente en un continuo de osciladores armónicos. Ambos subsistemas conforman un sistema compuesto que está acoplado a un segundo conjunto

de osciladores armónicos en cada punto, que juegan el rol de un entorno externo ó baño térmico. Por simplicidad, seguiremos trabajando en $1 + 1$ dimensiones. Sin embargo, pretendemos que nuestro modelo del campo escalar no masivo sea modelo de juguete del campo EM en interacción con materia ordinaria representada por el continuo de osciladores armónicos.

Por lo tanto, debido a que queremos que nuestro modelo se aproxime lo más posible a la interacción entre el campo EM y la materia, el acoplamiento entre el campo escalar y el continuo de osciladores de las placas será uno tipo corriente, donde el campo se acopla a la velocidad de los átomos (más adelante, para el caso fuera del equilibrio, veremos cómo esta discusión se vuelve más sutil y delicada). La constante de acoplamiento en este caso es la carga eléctrica e . También suponemos que no hay un acoplamiento directo entre el campo y el baño térmico.

De esta forma, la densidad lagrangiana viene dada como:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_{\phi-S} + \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_{S-B} \\
 &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + 4\pi\eta \left(\frac{1}{2} m \dot{r}_x^2(t) - \frac{1}{2} m \omega_0^2 r_x^2(t) \right) + 4\pi\eta e \phi(x, t) \dot{r}_x(t) \\
 &+ 4\pi\eta \sum_n \left(\frac{1}{2} m_n \dot{q}_{n,x}^2(t) - \frac{1}{2} m_n \omega_n^2 q_{n,x}^2(t) \right) - 4\pi\eta \sum_n \lambda_n q_{n,x}(t) r_x(t), \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

donde está claro que tanto r como q_n llevan una etiqueta espacial debido a que en cada punto del espacio uno de los átomos del continuo interactúa con un dado baño en el mismo punto. En este modelo, hemos denotado por η a la densidad de átomos en cada placa. Las constantes λ_n son los acoplamientos entre los átomos y los osciladores de cada baño. Cabe aclarar que está implícito que (3.1) representa la densidad lagrangiana dentro de las placas, mientras que fuera de ellas la densidad está dada por la del campo libre. La configuración considerada en este caso es de dos placas de espesor d separadas de una distancia a . Por comodidad, será útil considerar cinco regiones: región I con $x < -\frac{a}{2} - d$, región II con $-\frac{a}{2} - d < x < -\frac{a}{2}$, región III con $-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}$, región IV con $\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} + d$ y región V con $\frac{a}{2} + d < x$.

La cuantización de la teoría es inmediata. Cabe remarcar que el espacio de Hilbert H del modelo, donde la cuantización se lleva a cabo, no es solamente el espacio de Hilbert del campo H_ϕ (como se considera en otros trabajos donde el campo es el único grado de libertad relevante), sino que además incluye los espacios de Hilbert de los átomos H_S y de los osciladores de los baños H_B , de tal manera que $H = H_\phi \otimes H_S \otimes H_B$. Consideraremos que, como muchas veces se hace en el contexto del QBM, tomando $t = 0$ como el tiempo

inicial en este caso, para $t < 0$ las tres partes del sistema total se hayan descorrelacionadas y sin interacción entre ellas. De esta manera, las condiciones iniciales para los operadores $\hat{\phi}$, \hat{r} están dadas en términos de operadores actuando en la respectiva parte del espacio de Hilbert H . Las interacciones serán las que hagan que los operadores inicialmente en cada parte, se vuelvan operadores actuantes en el espacio de Hilbert total. Por otro lado, dada la descorrelación inicial, la matriz densidad inicial del sistema total es de la forma:

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_\phi(0) \otimes \hat{\rho}_S(0) \otimes \hat{\rho}_B. \quad (3.2)$$

Para esta parte, como estamos interesados en una cuantización en el estado estacionario del sistema total interactuante, asumiremos que los estados iniciales son, en particular, de equilibrio a temperatura $T = 1/\beta$ para cada una de las partes. Cada una de las matrices densidad entonces es una de tipo térmico.

Vale aclarar que estos últimos puntos son hipótesis no triviales ya que la no correlación y no interacción de las partes en los tiempos previos al inicial introduce la posibilidad de elegir arbitrariamente estos estados iniciales. Sin embargo, dado que en este enfoque no se deduce el estacionario del problema sino más bien se propone, esta hipótesis nos ayudará a fin de dar con resultados conocidos. El hecho de que las ecuaciones de Heisenberg sean ecuaciones a condición inicial hace que los métodos de cuantización en el estacionario requieran cierto grado de arbitrariedad en sus hipótesis a fin de reproducir resultados conocidos. Toda esta problemática, sin embargo, será estudiada y resuelta en cierta medida en los capítulos siguientes.

3.2.2. Ecuaciones de Heisenberg y Contribuciones

A partir de la densidad lagrangiana (3.1), pueden derivarse las ecuaciones de movimiento que, en este caso, también coinciden con las ecuaciones de Heisenberg para los diferentes operadores:

$$\hat{p}_{n,x} = m_n \hat{q}_{n,x} \quad , \quad \dot{\hat{p}}_{n,x} = -m_n \omega_n^2 \hat{q}_{n,x} + \lambda_n \hat{r}_x, \quad (3.3)$$

$$\hat{p}_x = m \dot{\hat{r}}_x + e \hat{\phi} \quad , \quad \dot{\hat{p}}_x = -m \omega_0^2 \hat{r}_x + \sum_n \lambda_n \hat{q}_{n,x}, \quad (3.4)$$

$$\square \hat{\phi} = 4\pi \eta e \dot{\hat{r}}_x, \quad (3.5)$$

donde los operadores \hat{p} y \hat{p}_n son los operadores momento canónicamente conjugados asociados a los operadores \hat{r} y \hat{q}_n respectivamente.

Sustituyendo la primera de las ecuaciones de (3.3) dentro de la segunda, puede obtenerse una ecuación para los operadores \hat{q}_n donde \hat{r} aparece como fuente. Una vez obtenida la solución general de dicha ecuación inhomogénea, puede reemplazarse en la segunda de (3.4), obteniendo una ecuación efectiva de tipo Langevin para los grados de libertad de las placas:

$$\dot{\hat{p}}_x = -m\omega_0^2\hat{r}_x - m\frac{d}{dt}\int_0^t d\tau\gamma(t-\tau)\hat{r}_x(\tau) + \hat{F}_x(t), \quad (3.6)$$

donde el núcleo de amortiguamiento γ y el operador de fuerza estocástica \hat{F} son los mismos que los definidos en la teoría del QBM (véase [41] para una completa y general descripción), y vienen dados por:

$$\gamma(t) = \frac{2}{m}\int_0^{+\infty} d\omega\frac{J(\omega)}{\omega}\cos(\omega t), \quad (3.7)$$

$$\hat{F}(t) = \sum_n \frac{\lambda_n}{\sqrt{2m_n\omega_n}} \left(e^{-i\omega_n t}\hat{b}_n + e^{i\omega_n t}\hat{b}_n^\dagger \right). \quad (3.8)$$

Cabe remarcar que \hat{b}_n y \hat{b}_n^\dagger son los operadores de aniquilación y creación asociados a \hat{q}_n respectivamente, mientras que $J(\omega)$ es la densidad espectral que caracteriza los entornos. Esta función da el número de osciladores en cada frecuencia dados ciertos valores de las constantes de acoplamiento λ_n :

$$J(\omega) = \sum_n \frac{\lambda_n^2}{2m_n\omega_n} \delta(\omega - \omega_n). \quad (3.9)$$

Usualmente se introduce una distribución continua de modos del baño, reemplazando la densidad espectral por una función suave de la frecuencia ω . Diferentes funciones describirán diferentes tipos de entornos. Asimismo, físicamente, el baño térmico tiene un número finito de osciladores en un cierto rango de frecuencias. Por ende, una función de corte debe introducirse, la cual impone una escala característica de frecuencias Λ . De esta forma, la densidad espectral toma la forma:

$$J(\omega) = \frac{2}{\pi}m\gamma_0\omega\left(\frac{\omega}{\Lambda}\right)^{\alpha-1}f\left(\frac{\omega}{\Lambda}\right), \quad (3.10)$$

donde γ_0 es la constante de relajación del entorno, mientras que f en este caso representa la función de corte en frecuencias. Los valores de α clasifican los diferentes tipos de entorno: $\alpha = 1$ corresponde a un entorno óhmico [donde el término disipativo de la ecuación de movimiento (3.6) es proporcional a la velocidad de la partícula Browniana], mientras que $\alpha < 1$ y $\alpha > 1$ describen entornos subóhmicos y supraóhmicos respectivamente [41].

Por otro lado, en el equilibrio, el operador de fuerza estocástica (3.8) y el núcleo de amortiguamiento (3.7) no son independientes. Las propiedades estadísticas del operador de fuerza estocástica vienen dadas por los núcleos de disipación y ruido, definidos como:

$$D(t-t') \equiv i \left\langle \left[\widehat{F}(t); \widehat{F}(t') \right] \right\rangle = i \left[\widehat{F}(t); \widehat{F}(t') \right] = -2 \int_0^{+\infty} d\omega J(\omega) \sin[\omega(t-t')], \quad (3.11)$$

$$D_1(t-t') \equiv \left\langle \left\{ \widehat{F}(t); \widehat{F}(t') \right\} \right\rangle = 2 \int_0^{+\infty} d\omega J(\omega) \coth\left(\frac{\omega}{2T}\right) \cos[\omega(t-t')], \quad (3.12)$$

los cuales son la generalización de las relaciones utilizadas en Ref.[32] desde la teoría de sistemas cuánticos abiertos para entornos generales y temperatura arbitraria. Es claro que, de las definiciones, D_1 es el único que involucra la temperatura del entorno como parámetro. Considerando (3.7) y (3.11) es simple mostrar que:

$$\frac{d}{dt}\gamma(t-\tau) = -\frac{1}{m}D(t-\tau), \quad (3.13)$$

lo que relaciona al núcleo de amortiguamiento con las propiedades estadísticas del operador de fuerza estocástica.

Volviendo a las ecuaciones de movimiento, considerando la primera de las ecuaciones en (3.4) y (3.6), puede obtenerse una ecuación para \widehat{r} teniendo a $\widehat{\phi}$ como fuente. Dicha solución generaliza la cruda aproximación empleada en Ref.[32], y viene dada por:

$$\widehat{r}_x(t) = G_1(t)\widehat{r}_x(0) + G_2(t)\dot{\widehat{r}}_x(0) + \frac{1}{m} \int_0^t d\tau G_2(t-\tau) \left(\widehat{F}_x(\tau) - e\widehat{\phi}(x,\tau) \right), \quad (3.14)$$

donde $G_{1,2}$ son las funciones de Green asociadas a la ecuación del QBM, que satisfacen:

$$G_1(0) = 1 \quad , \quad \dot{G}_1(0) = 0 \quad , \quad G_2(0) = 0 \quad , \quad \dot{G}_2(0) = 1, \quad (3.15)$$

para las cuales sus transformadas de Laplace vienen dadas por:

$$\widetilde{G}_n(s) = \frac{s^{2-n}}{s^2 + \omega_0^2 + s\widetilde{\gamma}(s)}, \quad (3.16)$$

donde $n = 1, 2$ y $\widetilde{\gamma}$ es la transformada de Laplace del núcleo de amortiguamiento. Es claro que, dadas estas condiciones, se puede probar que $G_1(t) = \dot{G}_2(t)$, mientras que $G_2(t)$ corresponde a la función de Green retardada para la ecuación de QBM.

Reemplazando esta solución en (3.5), se obtiene la ecuación para el operador de campo:

$$\square \hat{\phi} + \frac{4\pi\eta e^2}{m} \int_0^t G_1(t-\tau) \dot{\hat{\phi}}(x, \tau) d\tau = 4\pi\eta e \left(\dot{G}_1(t) \hat{r}_x(0) + G_1(t) \dot{\hat{r}}_x(0) + \frac{1}{m} \int_0^t G_1(t-\tau) \hat{F}_x(\tau) d\tau \right), \quad (3.17)$$

la cual está sujeta a condiciones iniciales de campo libre, que se escriben:

$$\hat{\phi}(x, 0) = \int dk \left(\frac{1}{\omega_k} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\hat{a}_k e^{ikx} + \hat{a}_k^\dagger e^{-ikx} \right), \quad (3.18)$$

$$\dot{\hat{\phi}}(x, 0) = \int dk \left(\frac{1}{\omega_k} \right)^{\frac{1}{2}} \left(-i\omega_k \hat{a}_k e^{ikx} + i\omega_k \hat{a}_k^\dagger e^{-ikx} \right), \quad (3.19)$$

donde \hat{a}_k y \hat{a}_k^\dagger son los operadores de aniquilación y creación del campo libre, siendo $\omega_k = |k|$. Cabe mencionar que las condiciones de contorno consideradas para este campo son las de continuidad del campo y la derivada espacial en los puntos de interfase.

Como mencionamos en el capítulo anterior, calculamos la fuerza a partir de la componente 00 del tensor de energía-impulso (2.20) y la fuerza de la diferencia de presiones de radiación en el exterior y el interior según (2.28). Luego, para resolver la ecuación puede transformarse Laplace la ecuación de campo (3.17) y utilizar las funciones de Green y las condiciones iniciales. Como se está interesado en el comportamiento de tiempos largos de todo el problema (es decir, su régimen estacionario), los términos que involucran los operadores de los grados de libertad de las placas \hat{r} y \hat{p} al tiempo inicial pueden despreciarse. Esta aproximación se sostiene en el hecho de que cuando $t \gg 1/\gamma_0$, esto implica que los átomos han relajado en su dinámica, produciendo ninguna contribución al campo. De esta forma, se obtiene:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{\phi}(x, s) - s^2 \left(1 + \frac{4\pi\eta e^2}{m} \tilde{G}_2(s) \right) \hat{\phi}(x, s) = -s \hat{\phi}(x, 0) - \dot{\hat{\phi}}(x, 0) - \frac{4\pi\eta e}{m} \tilde{G}_1(s) \hat{F}_x(s), \quad (3.20)$$

mientras que la solución y su transformada de Laplace se relacionan a través de la transformada de Mellin [43]:

$$\hat{\phi}(x, t) = \int_{\Gamma-i\infty}^{\Gamma+i\infty} \frac{ds}{2\pi i} \hat{\phi}(x, s) e^{st}, \quad (3.21)$$

donde Γ es un número real mayor al parámetro de orden de la transformada y tal que los polos de la transformada quedan a la izquierda de la recta vertical definida por Γ en el plano complejo s .

De (3.20) es importante notar que el operador de campo solución de dicha ecuación, debido a la ausencia de los operadores asociados a los grados de libertad de las placas, actuará en H_S como el operador identidad. Al mismo tiempo, si proponemos una solución de la forma $\widehat{\phi}(x, t) = \widehat{\phi}_V(x, t) + \widehat{\phi}_L(x, t)$, donde el primero de los términos toma como fuente las condiciones iniciales de campo libre (que llamaremos contribución de vacío) mientras que el segundo toma el operador de fuerza estocástica (que llamaremos contribución de Langevin), puede verse que esto no resulta ser una mera separación. De hecho, la separación resulta ser en los espacios de Hilbert, siendo que $\widehat{\phi}_V$ será un operador actuando en H_ϕ para todo tiempo, mientras que $\widehat{\phi}_L$ lo hará en H_B . Es decir, debido a la aproximación empleada, se produce una separación de contribuciones en el operador de operador de campo total dada por:

$$\widehat{\phi}(x, t) = \widehat{\phi}_V(x, t) \otimes \mathbb{I}_S \otimes \mathbb{I}_B + \mathbb{I}_\phi \otimes \mathbb{I}_S \otimes \widehat{\phi}_L(x, t). \quad (3.22)$$

Puede concluirse que los átomos actúan como un puente entre el campo y los baños térmicos pero sin realizar contribución alguna al campo. El problema entonces, en el estacionario, se separa en dos partes para el enfoque y aproximaciones consideradas.

3.3. Contribuciones de Vacío y Langevin

Para empezar, observemos que la ecuación (3.20) describe, en principio, la dinámica de las contribuciones del campo. Sin embargo, haber despreciado la contribución de las condiciones iniciales de los grados de libertad de las placas hace que la solución buscada intente ser la solución de tiempos largos, es decir, en el régimen estacionario. En este punto, para calcular cada una de las contribuciones en el régimen estacionario, es necesario obtener las soluciones partiendo de una propuesta o ansatz de cómo será la solución una vez establecido el límite de tiempos largos. Para la contribución de vacío entonces, asumimos que la solución a tiempos largos tendrá la forma de un campo con modos modificados:

$$\widehat{\phi}_V(x, t) = \left[\int_0^{+\infty} + \int_{-\infty}^0 \right] \frac{dk}{2\pi} \left(\frac{\pi}{\omega_k} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\widehat{a}_k e^{-i\omega_k t} f_k(x) + \widehat{a}_k^\dagger e^{i\omega_k t} f_k^*(x) \right), \quad (3.23)$$

donde la primera de las integrales involucra los modos que viajan de izquierda a derecha, mientras que la segunda involucra a los modos que van de derecha a izquierda.

Sobre esta propuesta, cabe remarcar dos puntos importantes. En primer lugar, dado que las condiciones iniciales son fuentes de esta contribución, la solución en el estacionario está escrita en la misma base de operadores de creación y aniquilación (\hat{a}_k^\dagger y \hat{a}_k). Esto significa que el espacio de estados puede ser descrito de la misma forma, pero ahora los modos se han modificado únicamente en su dependencia espacial pasando de ser simples exponenciales a las funciones f_k . De todos modos, para esta contribución, podemos decir que luego de la interacción con el material, esta parte del espacio de estados puede ser descrita en el límite de tiempos largos por los mismos operadores que al tiempo inicial.

Asimismo y en segundo lugar, a fin de que el operador de campo sea solución de la ecuación de movimiento, los modos deben satisfacer:

$$\frac{d^2}{dx^2}f_k(x) + \omega_k^2 n^2(\omega_k)f_k(x) = 0, \quad (3.24)$$

donde el índice de refracción $n(\omega_k)$ viene dado por:

$$n^2(\omega_k) = 1 + \frac{4\pi\eta e^2}{m} \tilde{G}_2(-i\omega_k) = 1 + \frac{\omega_P^2}{\omega_0^2 - \omega_k^2 - i\omega_k \tilde{\gamma}(-i\omega_k)}, \quad (3.25)$$

donde $\omega_P^2 = \frac{4\pi\eta e^2}{m}$ es la frecuencia de plasma.

Nuevamente, cabe remarcar dos puntos en torno a lo analizado. Por un lado, (3.24) resulta ser de la misma forma que la ecuación de modos para el problema análogo pero de material dieléctrico sin disipación (véase [44], aunque más adelante en esta Tesis se mostrará dicho límite de manera general), con la diferencia que en este caso el índice de refracción es dependiente de la frecuencia. Por otro lado, la definición del índice de refracción pone en evidencia el hecho que para obtener (3.24) a partir de (3.20), al emplear el ansatz (3.23), es necesario tomar la variable de Laplace s igual a $\pm i\omega_k$ para cada integral en k en la expresión general (3.21). Esto, si bien es arbitrario por ahora y carente de demostración, nos lleva a considerar dependencias temporales ondulatorias, como es físicamente esperable para el régimen estacionario. De todos modos, más adelante en esta Tesis demostraremos formalmente cómo es que esto es cierto para la mayoría de las configuraciones estacionarias.

Las soluciones de (3.24) para los modos, luego de imponer las condiciones de contorno, pueden ser obtenidas fácilmente y están resumidas en el Apéndice A.

Por otro lado, para obtener la contribución de Langevin, el ansatz para el límite de tiempos largos a considerar será simplemente de la forma:

$$\widehat{\phi}_L(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \widehat{\phi}_L(x, k) e^{-ikt}. \quad (3.26)$$

Este ansatz, al compararlo con la expresión general en términos de la transformada de Laplace (3.21), a diferencia del considerado para la contribución de vacío, toma $s = -ik$. Esto es posible hacerlo ya que, en el régimen estacionario, los polos de la contribución no se ubicarán sobre el eje imaginario en el plano complejo s , de manera que Γ puede tomarse igual a 0 por ejemplo. En otras palabras, dado que los términos de la contribución considerados siempre son estacionarios, entonces la transformada de Laplace evaluada en $s = -ik$ coincide directamente con la transformada de Fourier.

Nuevamente, al igual que ocurre para el ansatz de la contribución de vacío, más adelante en esta Tesis, esto será demostrado formalmente.

Sin embargo, en este enfoque, lo importante de las soluciones es que, dada la dinámica esperada para esta contribución del campo que se genera a partir de la aparición de las placas al tiempo inicial, son soluciones tipo radiativas (ondas salientes de las placas) en lugar de tipo scattering como teníamos para la contribución de vacío.

Las soluciones explícitas para esta contribución son presentadas en el Apéndice B.

Luego de analizado el método de cuantización y la separación de contribuciones en el régimen estacionario, resumiremos el cálculo de la fuerza haciendo hincapié en los principales aspectos relacionados a los siguientes capítulos de esta Tesis.

3.4. Fuerza de Casimir y sus Diferentes Contribuciones

3.4.1. El Tensor de Energía-Momento y la Fuerza de Casimir Total

Una vez determinadas las contribuciones al campo, la fuerza de Casimir entre las placas puede calcularse mediante (2.28). Para ello, deben calcularse los valores de expectación de la componente 00 del tensor de energía-momento dado por (2.20).

Considerando la separación de contribuciones (3.22), fácilmente puede escribirse:

$$\begin{aligned} \widehat{T}_{00}(x, t) &= \frac{1}{2} \left((\partial_0(\widehat{\phi}_V + \widehat{\phi}_L))^2 + (\partial_x(\widehat{\phi}_V + \widehat{\phi}_L))^2 \right) = \widehat{T}_{00}^V \otimes \mathbb{I}_S \otimes \mathbb{I}_B + \mathbb{I}_\phi \otimes \mathbb{I}_S \otimes \widehat{T}_{00}^L \\ &\quad + \left(\partial_x \widehat{\phi}_V \right) \otimes \mathbb{I}_S \otimes \left(\partial_x \widehat{\phi}_L \right) + \left(\partial_t \widehat{\phi}_V \right) \otimes \mathbb{I}_S \otimes \left(\partial_t \widehat{\phi}_L \right), \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde es claro que los términos cruzados actúan en dos partes del espacio de Hilbert total.

Como estamos considerando estados iniciales térmicos para cada parte del sistema total según (3.2) y cada contribución al campo en el estacionario es lineal en los operadores de aniquilación y creación de cada parte, el valor de expectación de la componente 00 del tensor de energía-momento corresponde a la densidad de energía libre de Helmholtz, donde los únicos términos que contribuyen son los cuadráticos en los operadores de creación y aniquilación de una misma parte (los valores de expectación de magnitudes lineales en dichos operadores son nulos). De esta forma, es claro que se puede escribir:

$$\mathfrak{f} = \langle \widehat{T}_{00} \rangle = Tr_{\phi} \left(\widehat{\rho}_{\phi} \widehat{T}_{00}^V \right) + Tr_B \left(\widehat{\rho}_B \widehat{T}_{00}^L \right) = \mathfrak{f}_V + \mathfrak{f}_L, \quad (3.28)$$

de manera que la energía libre hereda la separación de contribuciones del campo. Claramente, la fuerza de Casimir también, pudiendo escribirla como:

$$F_C = \mathfrak{f}_I - \mathfrak{f}_{III} = (\mathfrak{f}_I^V + \mathfrak{f}_I^L) - (\mathfrak{f}_{III}^V + \mathfrak{f}_{III}^L) = F_C^V + F_C^L. \quad (3.29)$$

La fuerza de Casimir total presenta dos contribuciones, una asociada íntegramente a la contribución de vacío y la otra asociada a la de Langevin.

3.4.2. Contribución de Vacío a la Fuerza de Casimir

Para la contribución de vacío, \widehat{T}_{00}^V es cuadrática en los operadores de aniquilación y creación del campo libre. Por lo tanto, para el cálculo se requieren los valores de expectación de los productos cuadráticos de estos operadores. Éstos están dados por las conocidas expresiones:

$$\langle \widehat{a}_k \widehat{a}_{k'} \rangle = \langle \widehat{a}_k^{\dagger} \widehat{a}_{k'}^{\dagger} \rangle = 0, \quad (3.30)$$

$$\langle \widehat{a}_k \widehat{a}_{k'}^{\dagger} \rangle = \delta(k - k')(1 + N(\omega_k)), \quad (3.31)$$

$$\langle \widehat{a}_k^{\dagger} \widehat{a}_{k'} \rangle = \delta(k - k')N(\omega_k), \quad (3.32)$$

donde $N(\omega_k) = \frac{1}{e^{\beta\omega_k} - 1}$ corresponde al número de ocupación en un estado térmico.

Considerando el ansatz (3.23), fácilmente puede obtenerse que para la región l , la densidad de energía libre de Helmholtz viene dada por:

$$\mathfrak{f}_l^V(x) = Tr_{\phi} \left(\widehat{\rho}_{\phi} \widehat{T}_{xx}^{V,l} \right) = \frac{1}{4} \left[\int_0^{+\infty} + \int_{-\infty}^0 \right] \frac{dk}{2\pi} \coth \left(\frac{\beta\omega_k}{2} \right) \left(\omega_k |f_k^l(x)|^2 + \frac{1}{\omega_k} \left| \frac{df_k^l}{dx} \right|^2 \right), \quad (3.33)$$

la cual resulta idéntica a la expresión obtenida para el caso de un material no disipativo (véase Ref.[44]), salvo por la aparición del factor térmico $\coth(\beta\omega_k/2)$ relacionado a la temperatura del campo.

Utilizando las soluciones para los modos f_k^l que se encuentran en el Apéndice A, la contribución de vacío a la fuerza de Casimir se escribe:

$$F_C^V = \mathfrak{f}_I^V - \mathfrak{f}_{III}^V = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} k \coth\left(\frac{\beta\omega_k}{2}\right) [1 + |R_k|^2 + |T_k|^2 - 2(|C_k|^2 + |D_k|^2)], \quad (3.34)$$

donde los coeficientes R_k , T_k , C_k , y D_k son los dados en el mismo Apéndice.

Cabe remarcar la aparición del factor térmico global en la última expresión, el que viene del estado térmico inicial del campo a temperatura T , basado en la hipótesis de equilibrio térmico.

3.4.3. Contribución de Langevin a la Fuerza de Casimir

De forma análoga a lo realizado para la contribución de vacío, la contribución de Langevin a la fuerza puede ser evaluada a partir de los valores de expectación del producto de las transformadas de operadores de fuerza estocástica en frecuencias diferentes (ya sea de transformadas de Laplace evaluadas en $s = -ik$ o transformadas de Fourier en k).

Para todo operador hermítico dependiente del tiempo, el valor de expectación a tiempos diferentes corresponde a la función de correlación del operador. Ésta a su vez coincide con un medio del valor de expectación del anticonmutador a tiempos diferentes. Por ende, transformado Fourier en ambos tiempos, puede calcularse el valor de expectación del producto de las transformadas de Fourier del operador de fuerza estocástica a frecuencias diferentes.

Para el caso de equilibrio térmico, el valor de expectación del anticonmutador del operador de fuerza a tiempos diferentes es proporcionado por la teoría del QBM. Fácilmente se puede mostrar que coincide con el núcleo de ruido $D_1(t - t')$, ver (3.12). Por ende, se tiene:

$$\langle \{ \widehat{F}(k); \widehat{F}(k') \} \rangle = J(\omega_k) \coth\left(\frac{\beta\omega_k}{2}\right) \delta(k + k'). \quad (3.35)$$

Considerando que en nuestro caso, el operador de fuerza estocástica depende de la posición, suponiendo que no hay correlación espacial entre los distintos puntos del continuo:

$$\langle \widehat{F}_x(k) \widehat{F}_{x'}(k') \rangle = \delta(x - x') \frac{J(\omega_k)}{2\eta} \coth\left(\frac{\beta\omega_k}{2}\right) \delta(k + k'). \quad (3.36)$$

A partir de las soluciones dadas en el Apéndice B, las energías libres del Helmholtz en las regiones I y III pueden calcularse directamente. De esta forma, finalmente se obtiene para la contribución de Langevin a la fuerza de Casimir:

$$\begin{aligned} F_C^L &= \mathfrak{f}_I^L - \mathfrak{f}_{III}^L = \int_0^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{k}{2} \frac{|n+1|^2}{|n|^2} \frac{8|t|^2 \text{Re}[n]}{|1 - r^2 e^{i2ka}|^2} \coth\left(\frac{\beta k}{2}\right) \left(1 - e^{-2k \text{Im}[n]d}\right) \\ &\times \left(|t|^2 + |r_n + r e^{i2ka}|^2 e^{-2k \text{Im}[n]d} + |1 + r r_n e^{i2ka}|^2 + |t|^2 |r_n|^2 e^{-2k \text{Im}[n]d} \right. \\ &\quad \left. - 2(1 + |r|^2) \left(1 + |r_n|^2 e^{-2k \text{Im}[n]d}\right) \right). \end{aligned} \quad (3.37)$$

De este resultado, caben remarcar dos cuestiones. Por un lado, el factor global térmico en la expresión, que coincide con el que aparece en la contribución de vacío (3.34). Sin embargo, esta coincidencia se debe a la hipótesis de equilibrio térmico considerada como parte del enfoque al comienzo. En este sentido, resulta interesante saber cómo será la cuestión para una situación estacionaria pero fuera del equilibrio. Eso será uno de los objetivos principales de esta Tesis más adelante. Por otro lado, la aparición del factor $1 - e^{-2k \text{Im}[n]d}$ sugiere inmediatamente que, en una situación donde los medios no sean disipativos y, consecuentemente, la parte imaginaria del índice de refracción sea nula, este factor se anula, dando una contribución de Langevin a la fuerza de Casimir también nula, como es de esperar físicamente.

3.4.4. Fuerza de Casimir Total

Una vez calculadas ambas contribuciones, la fuerza de Casimir total puede calcularse de manera compacta. Debido a la hipótesis de equilibrio térmico, las contribuciones (3.34) y (3.37) pueden sumarse fácilmente. De hecho, sumando las energías libres en cada región, obtenemos por un lado:

$$\mathfrak{f}_I = \mathfrak{f}_I^V + \mathfrak{f}_I^L = \int_0^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} k \coth\left(\frac{\beta k}{2}\right), \quad (3.38)$$

lo que es esperable debido a la invariancia translacional fuera de las placas. Por otra parte, para la región III:

$$\mathfrak{f}_{III} = \mathfrak{f}_{III}^V + \mathfrak{f}_{III}^L = \int_0^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} k \coth\left(\frac{\beta k}{2}\right) \frac{(1 - |r|^4)}{|1 - r^2 e^{i2ka}|^2}. \quad (3.39)$$

De esta forma, la fuerza total puede escribirse finalmente como:

$$\begin{aligned}
 F_C[a] = \mathfrak{f}_I - \mathfrak{f}_{III} &= \int_0^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} k \coth\left(\frac{\beta k}{2}\right) \left(1 - \frac{1 - |r|^4}{|1 - r^2 e^{i2ka}|^2}\right) \\
 &= -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[\int_0^{+\infty} dk k \coth\left(\frac{\beta k}{2}\right) \frac{r^2 e^{i2ka}}{1 - r^2 e^{i2ka}} \right]. \quad (3.40)
 \end{aligned}$$

Cabe remarcar que esta expresión es válida para cualquier tipo de entorno, el cual se caracteriza mediante la función $\tilde{\gamma}(ik)$ resultante de las interacciones microscópicas, así como también vale a cualquier temperatura, la cual fue introducida en el formalismo de manera natural gracias a la teoría de sistemas cuánticos abiertos.

3.4.5. Límites y Convergencia

Por último, es importante comentar que esta fórmula tan simple posee las propiedades físicas esperadas, así como reproduce los resultados conocidos.

Como primer punto a destacar, cabe mencionar que (3.40) como integral no requiere de la regularization adicional para obtener un valor finito de la fuerza de Casimir. A diferencia de lo que ocurría para el caso de contornos ideales donde, para obtener un resultado finito, era necesaria una función de corte para las altas frecuencias, basada en que los materiales reales son transparentes en dichas frecuencias. Dicho comportamiento ya está incluido en el modelo gracias a los entornos, que producen disipación y ruido resultando en un índice de refracción complejo.

Fácilmente puede verse que para grandes valores de k , el integrando de (3.40) se comporta como $O(k^{-3})$. De esta forma, la convergencia está asegurada cuando $k \rightarrow +\infty$ independientemente del tipo de entornos considerado o de la temperatura.

Por otro lado, el resultado también reproduce ciertos casos límites. Por ejemplo, el caso de medio no disipativo puede ser obtenido fácilmente evaluando la constante de relajación igual a cero ($\gamma_0 = 0$) en todas las expresiones. Esto, de hecho, como ya hemos mencionado, resulta en que $1 - e^{-z_2} \rightarrow 0$, dando $F_C^L \equiv 0$, es decir, anula la contribución de Langevin a la fuerza de Casimir, como es físicamente esperado. Al mismo tiempo, la contribución de vacío permanece teniendo ahora un índice de refracción real para el material y reproduciendo por sí sola el resultado en tal caso hallado en Ref.[44]. De todos modos, más adelante en esta Tesis veremos que, para este límite, poner $\gamma_0 = 0$ no es suficiente, dado que un índice de refracción real debe ser independiente de la frecuencia a fin de satisfacer las relaciones de Kramers-Kronig y ser así un consistente modelo físico causal.

Otro caso límite de importancia que se ve contenido en el resultado (3.40) es la conocida fórmula de Lifshitz. En su trabajo original [16], Lifshitz consideró dos semiespacios de material dieléctrico separados de una distancia dada. De esta forma, el caso límite a considerar sobre el resultado obtenido debería ser el de espesor de placa infinito, es decir, $d \rightarrow +\infty$. En este caso se ve que r debe ser reemplazado por r_n . Si, además, consideramos temperatura nula ($T = 0$), $\coth\left(\frac{\beta k}{2}\right) \rightarrow 1$ y las densidades de energías libres en cada región coinciden con las densidades de energía, entonces obtenemos para $d \rightarrow +\infty$:

$$e_I^V \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \omega_k (1 + |r_n|^2) \quad , \quad e_{III}^V \rightarrow 0, \quad (3.41)$$

$$e_I^L \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \omega_k (1 - |r_n|^2) \quad , \quad e_{III}^L \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \omega_k \frac{2(1 - |r_n|^4)}{|1 - r_n^2 e^{2ika}|^2}, \quad (3.42)$$

donde cabe remarcar que en este caso se tiene $F_C^V \equiv e_I^V$ y, al mismo tiempo, $e_I^V + e_I^L = \int_0^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} 2\omega_k$, es decir, la energía de campo libre. Es claro que mientras en la región III (entre medio de las placas), la densidad energía se desvanece, las densidades de la región I cancelan entre sí los términos que contienen r_n , mientras que suman los otros para dar la expresión correcta de la fuerza total según la prescripción de Casimir. En el caso de Lifshitz, la contribución de vacío parece no aportar. Esto sigue siendo válido para temperatura arbitraria y, más adelante en esta Tesis, veremos que esto merece otra interpretación dentro de un contexto más general.

Luego de la rotación a frecuencia imaginaria, la fuerza de Casimir total a temperatura nula se escribe:

$$F_C[a] = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} ds s \frac{r_n^2(is) e^{-2sa}}{1 - r_n^2(is) e^{-2sa}}, \quad (3.43)$$

que resulta ser la fórmula de Lifshitz para el caso de un campo escalar en $1 + 1$.

En el caso de temperatura arbitraria ($T \neq 0$), el factor térmico $\coth\left(\frac{\beta k}{2}\right)$ presenta polos sobre el eje imaginario en las frecuencias de Matsubara $2\pi i/\beta j = i\xi_j, j = 0, 1, 2, \dots$. Entonces, el contorno de integración complejo puede rotarse al eje imaginario al igual que antes pero debe deformarse a fin de esquivar los polos. Este procedimiento es conocido, de forma tal que la integral en frecuencias se convierte en una suma de Matsubara:

$$F_C[a] = 2T \sum_{j \geq 1} \xi_j \frac{r_n^2(i\xi_j) e^{-2\xi_j a}}{1 - r_n^2(i\xi_j) e^{-2\xi_j a}}, \quad (3.44)$$

la cual es la expresión estándar de la fórmula de Lifshitz a temperatura arbitraria.

Como ya hemos mencionado anteriormente, este resultado es válido para cualquier tipo de entorno, que se introduce a través de la función $\tilde{\gamma}(-ik)$. Sin embargo, a fin de obtener un modelo físico consistente, esta función presenta ciertas restricciones. La próxima sección analiza cómo el modelo propuesto es físicamente consistente.

3.5. Permitividad Generalizada y Causalidad

Con el objetivo de verificar cómo nuestro modelo es físicamente consistente, analizaremos las propiedades del índice de refracción (3.25). Considerando que la permitividad dieléctrica del material de las placas se define como $\epsilon(\omega) = n^2(\omega)$, entonces para nuestro modelo tenemos:

$$\epsilon(\omega) - 1 = \frac{\omega_{\text{P}}^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\tilde{\gamma}(-i\omega)}. \quad (3.45)$$

Según Ref.[45], para un modelo dado la susceptibilidad $\chi(\tau)$ se define como:

$$\chi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\epsilon(\omega) - 1)e^{-i\omega\tau} d\omega = \frac{\omega_{\text{P}}^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\tilde{\gamma}(-i\omega)} d\omega, \quad (3.46)$$

donde, en principio, esta integral puede ser evaluada mediante integración compleja. Inversamente, la permitividad también puede ser expresada en términos de la susceptibilidad como:

$$\epsilon(\omega) = 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\tau)e^{i\omega\tau} d\tau, \quad (3.47)$$

la cual puede verse como una representación de $\epsilon(\omega)$ en el plano complejo ω . La permitividad entonces está bien definida cuando $\chi(\tau)$ es finita para todo τ y se tiene que $\chi(\tau) \rightarrow 0$ para $\tau \rightarrow \pm\infty$. Sus propiedades pueden ser estudiadas directamente de esta expresión.

Es claro que todas las propiedades de la permitividad y también de la susceptibilidad son fuertemente dependientes de la transformada de Laplace del núcleo de amortiguamiento $\tilde{\gamma}(ik)$, el cual a su vez depende de la densidad espectral del entorno. Por ende, transformando Laplace (3.7), se obtiene:

$$\tilde{\gamma}(s) = \frac{2}{m} \int_0^{+\infty} d\omega \frac{J(\omega)}{\omega} \frac{s}{(s^2 + \omega^2)}. \quad (3.48)$$

Como ya hemos mencionado, una densidad espectral física debe incorporar una función de corte. Podríamos, en principio, emplear una función de corte abrupto o, alternativamente, elegir una función de corte continua que se aproxime a cero rápidamente para frecuencias mayores a la de corte Λ , asegurando la convergencia de la integral.

La primera opción, aunque más simple, resulta en una transformada $\tilde{\gamma}(ik)$ mal definida en el plano complejo. La segunda alternativa resuelve este problema y permite el empleo del teorema de residuos para evaluar la integral. Reemplazando la densidad espectral general (3.10) en (3.48), se obtiene:

$$\tilde{\gamma}(s) = \frac{4\gamma_0 s}{\pi\Lambda^{\alpha-1}} \int_0^{+\infty} d\omega \frac{\omega^{\alpha-1}}{(s^2 + \omega^2)} f\left(\frac{\omega}{\Lambda}\right). \quad (3.49)$$

Con el objetivo de aplicar el teorema de residuos, el integrando debe ser holomorfo en el semi-plano complejo superior, salvo en un número finito de puntos que no se encuentran sobre el eje real. Por ende, diferentes resultados se obtienen al considerar funciones de corte con o sin polos en el semi-plano superior. Para un entorno óhmico ($\alpha = 1$), sin función de corte, es fácil probar que $\tilde{\gamma}(s) = 2\gamma_0$.

Para el caso de funciones de corte sin polos (por ejemplo, una gaussiana), se tiene:

$$\tilde{\gamma}_{\text{NP}}(-ik) = \frac{\pi}{mk} J(k) \equiv \tilde{\gamma}_1(k), \quad (3.50)$$

donde el subíndice NP denota el hecho de que la función de corte no tiene polos. La función resultante es real y par en la variable k .

Por otro lado, las funciones de corte usualmente consideradas en la Literatura tienen polos en $\pm i\Lambda$ (por ejemplo, si se elige una lorentziana). En estos casos, para ω^α impares (con $\alpha < 4$ a fin de mantener la convergencia en (3.49)), tenemos:

$$\tilde{\gamma}_{\text{P}}(-ik) = \frac{\pi}{mk} J_\Lambda(k) + i(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}} \frac{\pi}{mk} \left(-\frac{k}{\Lambda}\right)^{\alpha-1} J_{-k}(\Lambda), \quad (3.51)$$

donde los subíndices en J denotan la ubicación del polo. Aunque el resultado es una función compleja, la segunda igualdad en (3.50) continúa siendo válida.

Teniendo en cuenta las propiedades mencionadas para el núcleo de amortiguamiento, volvamos al análisis de las propiedades de la permitividad y susceptibilidad. Como ejemplo particular, en el modelo de Drude se tiene $\tilde{\gamma}(-i\omega) \equiv \gamma_0$. Por lo tanto, el denominador de (3.46) tiene dos polos, ambos sobre el semi-plano complejo ω inferior. Así, como es esperado físicamente, la susceptibilidad tendrá un comportamiento causal, ya que resulta nula para $\tau < 0$. La analiticidad de la permitividad $\epsilon(\omega)$ en el semi-plano complejo ω

superior habilita el uso del teorema de Cauchy, lo que resulta en las conocidas relaciones de Kramers-Kronig para la parte real e imaginaria de la permitividad.

En nuestro caso más general, las propiedades físicas de $\epsilon(\omega)$ están determinadas por la transformada $\tilde{\gamma}(-i\omega)$. Esta función está dada por la teoría de sistemas cuánticos abiertos a través de (3.50) y (3.51), dependiendo de la función de corte elegida.

Consideremos primero, por simplicidad, el caso donde la función de corte no tiene polos y viene dada por (3.50). Para una dada densidad espectral, el denominador en (3.46) se escribe:

$$D_{\text{NP}}^{(\alpha)}(\omega) = \omega_0^2 - \omega^2 - i2\gamma_0\omega \left(\frac{\omega}{\Lambda}\right)^{\alpha-1} f\left(\frac{\omega}{\Lambda}\right). \quad (3.52)$$

Entonces si elegimos un entorno óhmico ($\alpha = 1$) sin función de corte (lo que es equivalente a tomar $f \equiv 1$), reobtenemos el modelo de Drude (si además $\omega_0 = 0$) o el modelo de una resonancia (cuando $\omega_0 \neq 0$) [45]. En principio, podríamos considerar otros valores de α , manteniendo $f \equiv 1$. En estos casos, ω^α debería ser una función impar. Tomando, por ejemplo, $\alpha = 3$ resulta en configuraciones de polos mal definidas físicamente, ya que uno de ellos se ubica en el semi-plano superior, rompiendo la analiticidad del integrando de (3.46), obteniendo una susceptibilidad no causal y, por ende, no física.

Por lo tanto, vemos que para entornos supraóhmicos la introducción de una función de corte es inevitable. Como ya comentamos, podemos utilizar una función de corte analítica (como una gaussiana) ó una lorentziana. La primera alternativa lleva a un denominador $D_{\text{NP}}^{(\alpha)}$ cuyos ceros no pueden obtenerse analíticamente. La segunda de las opciones, válida para $\alpha < 4$ a la vez que ω^α sea una función impar, resulta en el denominador:

$$D_{\text{P}}^{(\alpha)}(\omega) = \frac{(\Lambda^2 + \omega^2)(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\gamma_0\Lambda^{3-\alpha}\omega^2 \left((-1)^{\frac{\alpha-1}{2}} \Lambda^{\alpha-2} - i\omega^{\alpha-2} \right)}{(\Lambda^2 + \omega^2)}, \quad (3.53)$$

la cual para $\alpha = 3$ da:

$$D_{\text{P}}^{(3)}(\omega) = \frac{\Lambda\omega_0^2 - i\omega_0^2\omega - (2\gamma_0 + \Lambda)\omega^2 + i\omega^3}{\Lambda - i\omega}, \quad (3.54)$$

siendo el numerador de esta última expresión un polinomio de tercer grado.

Denotando los ceros de $D_{\text{P}}^{(3)}$ como $\omega_i = \omega_0 x_i$ (con $i = 1, 2, 3$), puede verse que las tres raíces se ubican en el semi-plano inferior, lo que garantiza la propiedad de causalidad. También puede verificarse fácilmente que una de ellas es imaginaria pura ($x_1 = -x_1^* = -i|x_1|$), mientras que las otras dos tienen la misma parte imaginaria (negativa) pero partes reales opuestas, es decir, cumplen $x_3 = -x_2^*$. La susceptibilidad por ende resulta:

$$\chi_P^{(3)}(\tau) = - \left(\frac{\omega_P}{\omega_0} \right)^2 \left[\frac{(\Lambda - \omega_0|x_1|)e^{-\omega_0|x_1|\tau}}{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2^*)} + 2\text{Re} \left(\frac{(\Lambda - i\omega_0x_2)e^{-i\omega_0x_2\tau}}{(x_2 - x_1)(x_2 + x_2^*)} \right) \right] \theta(\tau), \quad (3.55)$$

donde es claro que es una función real y causal y que, debido a la negatividad de la parte imaginaria de las raíces x_i , se tiene que $\chi_P^{(3)}(\tau) \rightarrow 0$ para $\tau \rightarrow +\infty$ como es esperado en general (véase [45]). Al mismo tiempo, tenemos que $\chi_P^{(3)}(0) = 0$ pero $\chi_P^{(3)'}(0) \neq 0$ y entonces la expresión asintótica encontrada en Ref.[45] sigue siendo válida, como así también las relaciones de Kramers-Kronig.

Cabe remarcar que el entorno óhmico ($\alpha = 1$) también puede ser estudiado incluyendo una función de corte, obteniendo resultados similares.

En conclusión, hemos mostrado que nuestro modelo es físicamente consistente y generaliza resultados previos para la permitividad de un medio absorbente, incluyendo como caso particular el modelo de Drude. Los modelos de tipo plasma no contienen disipación y pueden ser obtenidos tomando $\gamma_0 = 0$, lo que corresponde a un desacople entre el sistema y el baño. Sin embargo, cabe remarcar, que las permitividades dependientes de la frecuencia y reales no verifican las relaciones de Kramers-Kronig.

Más adelante en esta Tesis, veremos que desde un enfoque más general para los modelos propuestos, $\epsilon(\omega) - 1$ es siempre proporcional a la transformada de una función de Green retardada, cuestión que garantiza y facilita el estudio de la analiticidad de la permitividad y las relaciones de Kramers-Kronig. Si bien en el presente caso, esto también puede argumentarse, el objetivo de esta sección es más bien el de mostrar que ello siempre puede lograrse mediante una función de corte adecuada, lo que nos permite usar directamente el argumento teórico de ubicación de los polos sin necesidad de calcularlos explícitamente.

Como último comentario, una vez estudiado el resultado de Casimir para una situación de equilibrio con materiales reales, cabe la pregunta en torno a cómo definir un enfoque fuera del equilibrio. En el siguiente capítulo presentaremos el formalismo que será la piedra angular para lograr definir el buscado enfoque.

Capítulo 4

Formalismo de Integrales de Camino Temporal Cerrado

Este capítulo está dedicado a presentar el formalismo de integrales de camino temporal cerrado (CTP de sus siglas en inglés). A diferencia de otros formalismos de integrales de caminos, éste permite el estudio de la evolución de los valores de expectación de las magnitudes físicas de interés. Al mismo tiempo, el enfoque de sistemas cuánticos abiertos puede ser incluido en el formalismo mediante el concepto de funcional (y acción) de influencia de Feynman y Vernon. La combinación de ambos formalismos definen las herramientas para abordar el problema del efecto Casimir fuera del equilibrio en los siguientes capítulos.

4.1. Breve Resumen y Motivación

En los capítulos anteriores presentamos el problema del efecto Casimir en dos situaciones diferentes con grado de realidad y dificultad también distintos. También presentamos su abordaje a través de procedimientos de cuantización canónica en el estacionario.

El primero de los casos, el más simple de todos, introdujo el problema de Casimir en presencia de contornos ideales, es decir, de materiales conductores ideales. En términos prácticos concretos, se presentó al campo confinado en una región con condiciones de contorno tipo Dirichlet sobre los bordes. En dicha situación, el procedimiento de cuantización canónica es directo y sin complicaciones, llevando fácilmente al conocido resultado de Casimir. Dada la definición del problema, donde al campo se lo estudia confinado desde siempre, el método de cuantización no distingue estado estacionario, ya que no hay más dinámica que la de un campo libre limitado por contornos ideales.

En el segundo de los casos, el problema de Casimir fue planteado en un contexto de contornos de material real (no ideal). Para ello, se recurrió a la teoría de sistemas cuánticos abiertos y se modelaron los materiales de placas a través de grados de libertad cuánticos (con su propio entorno) en interacción con el campo. Esto es radicalmente distinto al primero de los casos, donde el campo no interactuaba con otros grados de libertad, sólo se encontraba confinado mientras que en este caso, la interacción es necesaria para modelar los cuerpos de material real. De esta forma, el material posee una dinámica propia e interactúa con el campo desde un momento dado definido como inicial. Sin embargo, se pretendía la fuerza de Casimir en un estado estacionario, por lo tanto, un método de cuantización en el estacionario era requerido. En el capítulo pasado, se dio respuesta a esto mediante un formalismo basado en las ecuaciones de Heisenberg para los operadores y ansatz físicos para las diferentes contribuciones que se esperaban en el régimen estacionario.

Sin embargo, en la Literatura se observan variados enfoques de cuantización en el estacionario que dependen del problema que se quiere abordar. Es decir, a excepción del caso de conductores ideales (donde el problema es estacionario a todo tiempo ya que carece de una dinámica particular), no hay un procedimiento bien definido o correctamente deducido que nos diga cómo encarar los diferentes escenarios en el límite de tiempos largos de un sistema en los cuales la fuerza de Casimir tiene un papel importante y, de hecho, esta variedad de estrategias parece estar relacionada a que hasta el momento no hay manera concreta bien establecida de deducir el estacionario de estos problemas. Dar luz sobre esta cuestión es uno de los objetivos más importantes de este trabajo.

Para esto, es que necesitamos de un método que permita resolver las evoluciones de las magnitudes de interés a todo tiempo y que, tomando su límite de tiempos largos, nos permita obtener el estado estacionario del problema y allí poder encontrar la forma de definir los principios para un procedimiento de cuantización en el estacionario.

Una manera de avanzar en esta dirección es teniendo en cuenta, al igual en el capítulo anterior, que la cuantización sí puede concretarse a partir de estudiar la dinámica de un problema cuantizado en el tiempo inicial a través del procedimiento de cuantización canónica y deduciendo las ecuaciones de Heisenberg para los operadores. Entonces, resolviendo estas últimas en forma completa (en lugar de empleando el ansatz) y luego tomando el límite de tiempos largos, deberíamos poder dar respuesta al problema.

Otra forma, es la de cuantizar a través de integrales funcionales. En este caso, a diferencia de los métodos funcionales que se encuentran en general en la Literatura para el estudio de problemas de scattering caracterizados por una amplitud de transición entre

estados conocidos de entrada y de salida, necesitamos de un formalismo funcional que nos permita estudiar los valores de expectación de una variable física respecto de un dado estado de entrada. Dicho formalismo se denomina de Camino Temporal Cerrado o Schwinger-Keldysh (ya que se basa en los trabajos originales Schwinger [46] y Keldysh [47]). Lo poderoso y general de este enfoque, más su relativa simpleza al momento de potenciales expansiones perturbativas, lo vuelve el método ideal para intentar dar respuesta a la cuestión de la determinación del estado estacionario. De hecho, este mismo método permite el estudio de la evolución de sistemas cuánticos abiertos mediante la introducción del concepto de funcional (o acción) de influencia de Feynman y Vernon, a fin de tener en cuenta el accionar de una de las partes del sistema total sobre la parte de interés.

Los principios básicos (y mucho más) pueden encontrarse en Ref.[36]. El presente capítulo se dedica a comentarlos y resumirlos a fin de dar las herramientas fundamentales que se emplearán en los capítulos siguientes.

4.2. Mecánica Cuántica e Integrales de Caminos

Considérese un sistema cuántico de un único grado de libertad x .

Los estados $|\alpha\rangle$ del sistema son vectores de un espacio de Hilbert \mathbb{H} , mientras que los observables son representados por operadores lineales hermíticos en dicho espacio.

Existen distintos esquemas para estudiar la dinámica, definidas consistentemente con el hecho de que los valores de expectación de los observables coincidan en todas ellas. Una de ellas es la de Schrödinger, donde se considera a los observables como independientes del tiempo, mientras que la evolución temporal se dá a través de la evolución de los estados según la ecuación de Schrödinger:

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\alpha\rangle = \hat{H}|\alpha\rangle, \quad (4.1)$$

donde \hat{H} es el operador hamiltoniano que se asocia al observable energía. Considerando que la evolución del estado puede pensarse a partir de un operador de evolución temporal \hat{U} , solución de la ecuación, se escribe:

$$|\alpha(t)\rangle = \hat{U}(t; t_0)|\alpha(t_0)\rangle, \quad (4.2)$$

con

$$\hat{U} = T \left[e^{-i \int_{t_0}^t dt' \hat{H}(t')} \right]. \quad (4.3)$$

donde T implica orden temporal.

En el caso de hamiltonianos independientes del tiempo, es claro que $\widehat{U} = e^{-i\widehat{H}(t-t_0)}$.

Otro esquema posible es la de Heisenberg, donde los estados no evolucionan, mientras que los observables sí lo hacen según la regla:

$$\widehat{A}(t) = \widehat{U}^\dagger(t)\widehat{A}\widehat{U}(t). \quad (4.4)$$

La evolución de los operadores se resume en la ecuación de Heisenberg:

$$\frac{d\widehat{A}}{dt} = i [\widehat{H}; \widehat{A}]. \quad (4.5)$$

Cabe destacar, sin embargo, que esta descripción de los estados de un sistema a través de kets no es completa ya que hay estados que no pueden representarse de esta forma en el espacio de Hilbert. Esto se debe a que el estado del sistema puede pertenecer a una cierta clase de estados $|\alpha_i\rangle$ a los que únicamente puede asociarseles probabilidades de ocurrencia ρ_i . Estas situaciones son descritas por matrices densidad $\rho = \sum_i \rho_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$, siendo $|\alpha_i\rangle$ ortonormales. Por conservación de la probabilidad siempre se tiene $Tr(\rho) = 1$. Kets en el espacio de Hilbert corresponden a matrices densidad que satisfacen $Tr(\rho^2) = 1$, mientras que en el caso general se tiene $Tr(\rho^2) \leq 1$.

En el esquema de Schrödinger, ρ es independiente del tiempo y su evolución viene dada por la ecuación de Liouville - von Neumann:

$$\frac{d\rho}{dt} = -i [\widehat{H}; \rho], \quad (4.6)$$

que no es la ecuación de Heisenberg para ρ .

Suponiendo que la variable X es continua e ilimitada, y los estados $|x\rangle$ donde esta variable está bien definida forman una base, los operadores de traslación Π_a están dados por $\langle x|\Pi_a|\alpha\rangle = \langle x+a|\alpha\rangle$, los cuales son unitarios y tienen asociados un generador hermítico \widehat{P} tal que $\Pi_a = e^{ia\widehat{P}}$. La acción del generador viene descrita por:

$$\langle x|\widehat{P}|\alpha\rangle = -i\frac{\partial}{\partial x}\langle x|\alpha\rangle. \quad (4.7)$$

teniendo \widehat{P} autoestados $|p\rangle$ de la forma:

$$\langle x|p\rangle = \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (4.8)$$

A partir de esto, puede mostrarse que los observables momento \widehat{P} y posición \widehat{X} tienen relaciones de conmutación del tipo $[\widehat{P}, \widehat{X}] = -i \mathbb{I}$.

Ahora, consideremos un hamiltoniano de la forma $\widehat{H} = K(\widehat{P}) + V(\widehat{X})$, $K(\widehat{P}) = \widehat{P}^2/2M$. Dado que tK y tV no conmutan, el operador de evolución no puede escribirse como un producto de exponenciales de \widehat{P} y \widehat{X} . Sin embargo, como el conmutador es de orden t^2 , cuando t es pequeño, la factorización es una buena aproximación, teniendo:

$$e^{-it\widehat{H}} = [e^{-i\tau K} e^{-i\tau V}]^{N+1}, (N+1)\tau = t, N \rightarrow \infty. \quad (4.9)$$

De esta forma, el operador de evolución puede escribirse en forma de integral de caminos según:

$$\begin{aligned} \langle x_{N+1} | \widehat{U}(t) | x_0 \rangle &= \langle x_{N+1} | [e^{-i\tau K} e^{-i\tau V}]^{N+1} | x_0 \rangle \\ &= \int \left[\prod_{i=1}^N dx_i \right] \left(\prod_{j=0}^N \langle x_{j+1} | e^{-i\tau K} | x_j \rangle e^{-i\tau V(x_j)} \right) \\ &= \int \left[\prod_{i=1}^N dx_i \right] \left[\prod_{i=1}^{N+1} \frac{dp_i}{2\pi} \right] \left(\prod_{j=0}^N e^{ip_{j+1}(x_{j+1}-x_j)} e^{-\frac{i\tau p_{j+1}^2}{2M}} e^{-i\tau V(x_j)} \right) \\ &= \int \left[\prod_{i=1}^N \sqrt{\frac{-iM}{2\pi\tau}} dx_i \right] \left(\prod_{j=0}^N e^{\frac{iM(x_{j+1}-x_j)^2}{2\tau}} e^{-i\tau V(x_j)} \right), \end{aligned} \quad (4.10)$$

de forma tal que cuando $N \rightarrow \infty$, se escribe:

$$\langle x_t | \widehat{U}(t) | x_0 \rangle = \int_{x(t)=x_t, x(0)=x_0} Dx e^{iS}. \quad (4.11)$$

Hasta aquí, mostramos cómo las integrales de caminos se introducen en el desarrollo de la mecánica cuántica. En la próxima sección comentaremos cómo estas integrales permiten el estudio de la evolución de la matriz densidad y el cálculo de ciertos valores de expectación de interés.

4.3. Integrales de Camino Temporal Cerrado

Ahora volvamos a considerar un sistema cerrado de grado de libertad x , descrito por una acción S . Recordando que los estados evolucionan de acuerdo a (4.2) y haciendo uso de los elementos de matriz (4.11) para el operador de evolución, obtenemos para la función de onda ϕ en la representación de coordenadas:

$$\phi(x, t) = \int dx(0) \widehat{U}(x, x(0), t) \phi(x(0), 0) = \int_{x(t)=x} Dx e^{iS} \phi(x(0), 0). \quad (4.12)$$

Por linealidad, la matriz densidad claramente evoluciona según:

$$\begin{aligned}\rho(x, x', t) &= \langle x | \widehat{U}(t) \rho \widehat{U}^\dagger(t) | x' \rangle \\ &= \int_{x(t)=x, x'(t)=x'} Dx Dx' e^{i(S[x]-S[x'])} \rho(x(0), x'(0), 0).\end{aligned}\quad (4.13)$$

Cabe remarcar que la expresión como integral de caminos para la matriz densidad involucra dos historias, en lugar de una única como en el caso de la función de onda (4.12). Esto es el punto de partida para el llamado formalismo de camino temporal cerrado. Para investigar más a fondo el significado de este tipo de doble integral de caminos, consideremos la siguiente expresión:

$$G^{11}(\tau, \tau') = \int_{x(t)=x'(\tau)} Dx Dx' e^{i(S[x]-S[x'])} \rho(x(0), x'(0), 0) x(\tau) x(\tau').\quad (4.14)$$

El límite superior es libre, mientras que sea el mismo para ambas historias. Se describirá entonces a esta integral sobre una *única* historia como definida en un *camino temporal cerrado* (CTP). Este camino temporal tiene una primera rama que va desde 0 hasta t , donde la historia toma los valores $x(t)$, y una segunda rama desde t hasta 0, donde la historia toma los valores $x'(t)$. La condición de contorno CTP ($x(t) = x'(t)$) implica que la historia es continua como una función en el camino temporal.

Para entender por qué se describe a la segunda rama como yendo hacia atrás en el tiempo, obsérvese $G^{11}(\tau, \tau')$ en el lenguaje canónico. Para esto, asumamos $\tau > \tau'$, y hagamos explícitos los valores de las historias en estos dos tiempos, de manera de escribir:

$$\begin{aligned}G^{11}(\tau, \tau') &= \int dx(0) dx'(0) dx(\tau') dx(\tau) dx(t) \rho(x(0), x'(0), 0) \left[\int_{0 \leq t \leq \tau'} Dx e^{iS[x]} \right] \\ &\times x(\tau') \left[\int_{\tau' \leq t \leq \tau} Dx e^{iS[x]} \right] x(\tau) \left[\int_{\tau \leq t \leq t} Dx e^{iS[x]} \right] \left[\int_{x'(t)=x(t)} Dx e^{-iS[x']} \right].\end{aligned}\quad (4.15)$$

Identificando cada corchete como un elemento de matriz para algún operador de evolución, se obtiene en el esquema de Schrödinger:

$$\begin{aligned}G^{11}(\tau, \tau') &= \int dx(0) dx'(0) dx(\tau') dx(\tau) dx(t) \langle x(t) | \widehat{U}(t, \tau) | x(\tau) \rangle x(\tau) \\ &\times \langle x(\tau) | \widehat{U}(\tau, \tau') | x(\tau') \rangle x(\tau') \langle x(\tau') | \widehat{U}(\tau', 0) | x(0) \rangle \langle x(0) | \rho | x'(0) \rangle \\ &\times \langle x'(0) | \widehat{U}(0, t) | x(t) \rangle \\ &= Tr \left(\widehat{U}(t, \tau) \widehat{X} \widehat{U}(\tau, \tau') \widehat{X} \widehat{U}(\tau', 0) \rho(0) \widehat{U}(0, t) \right),\end{aligned}\quad (4.16)$$

o, equivalentemente, en el esquema de Heisenberg:

$$G^{11}(\tau, \tau') = Tr \left(\widehat{X}(\tau) \widehat{X}(\tau') \rho \right) \equiv \langle \widehat{X}(\tau) \widehat{X}(\tau') \rangle. \quad (4.17)$$

Cabe aclarar que, si no se ha especificado la relación entre τ y τ' , entonces la integral de caminos automáticamente ubicará el tiempo más largo a la izquierda. Esto expresa el llamado *ordenamiento temporal* entre dos operadores de Heisenberg, de manera que se puede generalizar el resultado a $G^{11}(\tau, \tau') \equiv \langle T \left[\widehat{X}(\tau) \widehat{X}(\tau') \right] \rangle$, donde T implica orden temporal.

Considerando ahora la expresión:

$$G^{12}(\tau, \tau') = \int_{x(t)=x'(t)} Dx Dx' e^{i(S[x]-S[x'])} \rho(x(0), x'(0), 0) x(\tau) x'(\tau'), \quad (4.18)$$

las correspondientes expresiones canónicas en los esquemas de Schrödinger y Heisenberg respectivamente son:

$$G^{12}(\tau, \tau') = Tr \left(\widehat{U}(0, \tau') \widehat{X} \widehat{U}(\tau', t) \widehat{U}(t, \tau) \widehat{X} \widehat{U}(\tau, 0) \rho(0) \right) = \langle \widehat{X}(\tau') \widehat{X}(\tau) \rangle. \quad (4.19)$$

En este caso, el operador de Heisenberg primado se ubica a la izquierda, dado que su tiempo es mayor. Esto debe pensarse como un ordenamiento de caminos en lugar de como un ordenamiento temporal. Finalmente, de la misma manera:

$$\begin{aligned} G^{22}(\tau, \tau') &= \int_{x(t)=x'(t)} Dx Dx' e^{i(S[x]-S[x'])} \rho(x(0), x'(0), 0) \{x'(\tau) x'(\tau')\} \\ &\equiv \langle \widetilde{T} \left[\widehat{X}(\tau) \widehat{X}(\tau') \right] \rangle, \end{aligned} \quad (4.20)$$

donde \widetilde{T} implica el *anti-ordenamiento temporal*, es decir, el tiempo más largo a la derecha. Esto justifica el hecho de poder identificar a la segunda de las ramas como yendo hacia atrás con respecto a la primera.

Por otro lado, existe una manera formal alternativa de obtener estas cantidades simplemente considerando cierto tipo de funcionales y haciendo derivadas funcionales.

Consideremos para ello la acción CTP modificada basada en la acción S en presencia de dos fuentes externas distintas $J(t)$ y $J'(t)$. Está claro que en este caso se tiene análogamente:

$$S_{\text{CTP}}[x, J; x', J'] = S[x] - S[x'] + \int_0^t d\lambda J(\lambda) x(\lambda) - \int_0^t d\lambda J'(\lambda) x'(\lambda). \quad (4.21)$$

Entonces, se construye lo que se denomina *Funcional Generatriz*, que es una funcional de las fuentes externas J y J' y que en su representación de integrales de caminos se escribe:

$$Z[J, J'] = \int_{x(t)=x'(t)} Dx Dx' e^{iS_{\text{CTP}}[x, J; x', J']} \rho(x(0), x'(0), 0). \quad (4.22)$$

Teniendo en cuenta esta definición, las funciones de 2 puntos de las ecs. (4.14), (4.18) y (4.20), pueden escribirse en términos de esta funcional como:

$$G_{11}(\tau, \tau') = \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(\tau)} \right) \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(\tau')} \right) Z[J, J'] \Big|_{J=J'=0}, \quad (4.23)$$

$$G_{12}(\tau, \tau') = \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(\tau)} \right) \left(-\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J'(\tau')} \right) Z[J, J'] \Big|_{J=J'=0}, \quad (4.24)$$

$$G_{22}(\tau, \tau') = \left(-\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J'(\tau)} \right) \left(-\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J'(\tau')} \right) Z[J, J'] \Big|_{J=J'=0}, \quad (4.25)$$

donde es claro que la derivación respecto de J' difiere de la de J en un signo debido a la diferencia de signo que aparece en la evolución hacia atrás respecto de la primera.

Cabe remarcar que la acción efectiva CTP se presenta a primera vista como una acción con dos grados de libertad CTP en interacción, uno sin primar y otro primado que parecen independientes salvo por la condición de contorno que los relaciona. La cuestión es si, a partir de esta acción, puede obtenerse alguna de las ecuaciones de movimiento relevantes del problema. Resulta que si uno varía la acción con respecto a uno de dichos grados de libertad, se obtienen las ecuaciones para sus valores medios como si fuesen grados de libertad independientes. Para obtener entonces las ecuaciones de movimiento asociadas al valor medio del grado de libertad real (no CTP), la prescripción indica que a la ecuación de movimiento obtenida para alguno de los grados de libertad CTP, es necesario imponerle la condición adicional de $x = x'$ y $J = J' = 0$ [48]:

$$\left. \frac{\delta S_{\text{CTP}}[x; x']}{\delta x} \right|_{x=x'} = 0. \quad (4.26)$$

Cabe destacar que esta ecuación, sin embargo, corresponde a la de los valores medios de los grados de libertad y no siempre corresponde a la ecuación de Heisenberg para el operador asociado a dicho grado. Muchas veces, cuando se consideran sistemas cuánticos abiertos (como se verá más adelante), esta ecuación corresponde a un promedio sobre todas las posibles realizaciones del ruido, es decir, incluye disipación pero no ruido. Por ende, para evitar esto y obtener una ecuación tipo Langevin que explícitamente presente

el ruido, se reescribe la parte imaginaria de la acción efectiva de manera que, a través de una identidad funcional, se incorpore una fuente de ruido estocástico en la acción obteniendo de esa forma una ecuación de movimiento sin haber promediado en el ruido [49].

De esta manera, la mecánica cuántica incorpora a las integrales de caminos para estudiar la evolución de sistemas cerrados. Sin embargo, la motivación inicial era estudiar sistemas en contacto con otros sistemas o entornos (sistemas abiertos) y estudiar de qué manera los primeros se ven afectados por los últimos. La próxima sección muestra cómo dichos problemas pueden ser abordados a través de un formalismo de integrales de caminos.

4.4. La Funcional de Influencia

El sistema a estudiar está compuesto por : un sistema S representado por un grado de libertad x que interactúa con un entorno E descrito por grados de libertad $q = \{q_n\}$. La acción clásica toma entonces la forma $S[x, q] = S_S[x] + S_E[q] + S_{\text{int}}[x, q]$. De la misma forma, el hamiltoniano es $\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_E + \hat{H}_{\text{int}}$, donde:

$$\hat{H}_S = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + V(\hat{x}) \quad ; \quad \hat{H}_{\text{int}} = V_{\text{int}}(\hat{x}, \hat{q}). \quad (4.27)$$

El estado cuántico del sistema total viene dado por la matriz densidad $\rho(xq, x'q', t)$ que depende tanto de las variables del sistema como de las variables del entorno. Su evolución es unitaria bajo \hat{H} desde una matriz densidad inicial $\rho(0)$ a $t = 0$ hasta $\rho(t) = e^{-it\hat{H}}\rho(0) e^{it\hat{H}}$ a un tiempo finito t . Explícitamente, empleando completitud, en la representación de integral de caminos se escribe:

$$\begin{aligned} \rho(xq, x'q', t) &= \langle xq, t | \rho | x'q', t \rangle \\ &= \int dx_i dq_i \int dx'_i dq'_i \langle xq, t | x_i q_i, 0 \rangle \langle x_i q_i, 0 | \rho | x'_i q'_i, 0 \rangle \langle x'_i q'_i, 0 | x'q', t \rangle \\ &= \int dx_i dq_i \int dx'_i dq'_i \int_{x_i}^x Dx \int_{q_i}^q Dq e^{iS[x, q]} \rho(x_i q_i, x'_i q'_i, 0) \\ &\quad \times \int_{x'_i}^{x'} Dx' \int_{q'_i}^q Dq' e^{-iS[x', q']} \\ &\equiv \int dx_i dq_i \int dx'_i dq'_i J(xq, x'q', t | x_i q_i, x'_i q'_i, 0) \rho(x_i q_i, x'_i q'_i, 0), \quad (4.28) \end{aligned}$$

donde J se presenta como un operador de evolución para el sistema más el entorno.

Como se está interesado en el comportamiento del sistema más que en el del entorno, no resulta necesario seguir los detalles de la dinámica del entorno. En particular, lo que se busca calcular son valores medios de observables del sistema únicamente, es decir, valores de expectación de operadores que, en el espacio de Hilbert total, se escriben $\widehat{A} \otimes \mathbb{I}$, donde \widehat{A} es un operador en el espacio de Hilbert del sistema y \mathbb{I} es el operador identidad en el espacio de Hilbert del entorno. Dichos valores de expectación también, pueden ser calculados a través de la matriz densidad *reducida* ρ_r . Ésta se obtiene a partir de la matriz densidad total realizando una traza parcial sobre los grados de libertad del entorno, escribiéndose $\rho_r = Tr_q(\rho)$. Explícitamente:

$$\rho_r(x, x', t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dq \rho(x, q, x', q, t). \quad (4.29)$$

Asumamos además que, a $t = 0$, el sistema y el entorno se hallan descorrelacionados, de manera que se puede escribir:

$$\rho(x_i q_i, x'_i q_i, 0) = \rho_S(x_i, x'_i, 0) \rho_E(q_i, q'_i, 0). \quad (4.30)$$

De esta forma, se están poniendo en interacción el sistema y el entorno con todo el cuidado necesario para evitar las complicaciones asociadas con el repentino encendido de la interacción. Teniendo en cuenta esto, la matriz densidad reducida puede reescribirse:

$$\rho_r(x, x', t) = \int dx_i dx'_i J_r(x, x', t | x_i, x'_i, 0) \rho_S(x_i, x'_i, 0), \quad (4.31)$$

donde el operador de evolución para la matriz densidad reducida viene dado por:

$$J_r(x, x', t | x_i, x'_i, 0) \equiv \int_{x_i}^x Dx \int_{x'_i}^{x'} Dx' e^{i(S[x] - S[x'])} F[x, x'], \quad (4.32)$$

mientras que $F[x, x']$ es la llamada *funcional de Influencia de Feynman y Vernon*:

$$\begin{aligned} F[x, x'] &\equiv e^{iS_{\text{IF}}[x, x', t]} \\ &= \int dq dq_i dq'_i \rho_E(q_i, q'_i, 0) \int_{q_i}^q Dq e^{i(S_E[q] + S_{\text{int}}[x, q])} \int_{q'_i}^q Dq' e^{-i(S_E[q'] + S_{\text{int}}[x', q'])}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

donde S_{IF} se denomina acción de influencia. La ecuación (4.31) tiene la forma de ser la evolución de la matriz densidad para un sistema cerrado; sin embargo, contiene un término no local S_{IF} , que induce una interacción entre las dos historias en el CTP. Toda la influencia del entorno sobre el sistema se encuentra en dicha acción de influencia S_{IF} .

También se puede escribir la funcional de influencia en una forma que sea independiente de la base. Teniendo en cuenta a los operadores de evolución $\widehat{U}(t), \widehat{U}'(t)$ para $S_E[q] + S_{\text{int}}[x, q]$ y $S_E[q] + S_{\text{int}}[x', q]$, respectivamente, las integrales de caminos pueden expresarse:

$$F[x, x'] = \int dq dq_i dq'_i \rho_E(q_i, q'_i, 0) \langle q | \widehat{U}(t) | q_i \rangle \langle q'_i | \widehat{U}'^\dagger(t) | q \rangle. \quad (4.34)$$

Por lo tanto, integrando en q y q_i , reescribiendo como una traza, se obtiene:

$$F[x, x'] = \text{Tr} \left(\widehat{U}(t) \rho_E(0) \widehat{U}'^\dagger(t) \right). \quad (4.35)$$

Hasta el momento, se estudiaron formalismos de integrales de caminos de manera general incorporando el tratamiento de sistemas cuánticos abiertos. Estos métodos combinados permiten el estudio de la evolución de diferentes sistemas fuera del equilibrio. De hecho, este tipo de formalismos permiten la obtención y estudio de diferentes ecuaciones de tipo Langevin, que incorporan el ruido y la disipación en la dinámica de los sistemas. Numerosas áreas de la física moderna hacen uso de estas técnicas, como por ejemplo la cosmología, para el estudio de la creación de partículas en los inicios del Universo; en Teoría Cuántica de Campos (QFT) y materia condensada, ya que el modelado de interacciones en sistemas compuestos lleva a considerar ruido y disipación como partes del problema.

En la siguiente sección, se considerará el caso de acoplamientos lineales a modo de ejemplo, estudio que resultará útil más adelante en el trabajo.

4.4.1. Acoplamientos Lineales

Para seguir adelante, es importante comentar los resultados generales que se obtienen para el caso de acoplamientos lineales. Consideremos entonces que la acción del entorno es cuadrática en las variable q . Por simplicidad en la notación de las expresiones que siguen se considerará al entorno como un único grado de libertad, pero está claro que si el entorno está formado por muchos grados de libertad idénticos en su dinámica salvo por algún parámetro (como puede ser la frecuencia de oscilación natural), debe sumarse las expresiones sobre todos los grados existentes pesando con las diferentes constantes de acoplamiento. En la versión continua esto lleva a la integración sobre todas las frecuencias de los osciladores del entorno pesado a través de la *densidad espectral*. Consideremos también que la matriz densidad inicial de dicho entorno es de tipo gaussiana, mientras que el término de interacción es bilineal de la forma $S_{\text{int}} = \int dt x^a(t) Q_a[q(t)]$ (en esta

sección la notación de índices repetidos es de suma sobre los índices CTP), donde las Q 's son combinaciones lineales de las q 's. Con estas suposiciones, la acción de influencia debe ser cuadrática en x y x' , ya que en este caso la funcional de influencia (4.34) puede interpretarse como la transformada de Fourier funcional de una complicada funcional gaussiana de las historias $Q(t)$ y $Q'(t)$, la que tiene como resultado otra gaussiana. De esta forma, se escribe $S_{\text{IF}} = (1/2) \int dt dt' x^a(t) \mathbb{M}_{ab}(t, t') x^b(t)$, donde:

$$\mathbb{M}_{ab}(t, t') = -i\hbar \frac{\delta^2}{\delta x^a(t) \delta x^b(t')} e^{iS_{\text{IF}}[x^a, T]} \Big|_{x^a=0}, \quad (4.36)$$

siendo T en este caso el tiempo final.

Una variación directa de (4.34) resulta en:

$$\frac{\delta^2 e^{iS_{\text{IF}}[x^a, T]} \Big|_{x^a=0}}{\delta x^a(t) \delta x^b(t')} = - \int_{q^1(T)=q^2(T)} Dq^a e^{iS_{\text{E}}[q^a]} Q_a(t) Q_b(t') \rho_{\text{E}}(q^1(0), q^2(0), 0), \quad (4.37)$$

de manera que se tiene:

$$\mathbb{M}_{ab}(t, t') = i \begin{pmatrix} \langle T[\widehat{Q}(t)\widehat{Q}(t')] \rangle & -\langle \widehat{Q}(t')\widehat{Q}(t) \rangle \\ -\langle \widehat{Q}(t)\widehat{Q}(t') \rangle & \langle \widetilde{T}[\widehat{Q}(t)\widehat{Q}(t')] \rangle \end{pmatrix},$$

donde los valores de expectación se toman sin considerar la interacción con el sistema.

La acción de influencia en términos de las variables del sistema entonces se escribe:

$$S_{\text{IF}} = \frac{i}{2} \int dt dt' \left[\langle T[\widehat{Q}(t)\widehat{Q}(t')] \rangle x(t)x(t') - \langle \widehat{Q}(t')\widehat{Q}(t) \rangle x(t)x'(t') \right. \\ \left. - \langle \widehat{Q}(t)\widehat{Q}(t') \rangle x'(t)x(t') + \langle \widetilde{T}[\widehat{Q}(t)\widehat{Q}(t')] \rangle x'(t)x'(t') \right], \quad (4.38)$$

la que, empleando las relaciones entre las funciones de Green CTP, puede reescribirse en términos de las suma y resta de las variables $(x + x'$ y $x - x')$ según:

$$S_{\text{IF}} = \int dt dt' \left[(x - x')(t) D(t, t') (x + x')(t') + \frac{i}{2} (x - x')(t) N(t, t') (x - x')(t') \right], \quad (4.39)$$

donde se identifican los llamados núcleos de disipación D y ruido N :

$$D(t, t') = \frac{i}{2} \langle [\widehat{Q}(t), \widehat{Q}(t')] \rangle \theta(t - t'), \quad (4.40)$$

$$N(t, t') = \frac{1}{2} \langle \{ \widehat{Q}(t), \widehat{Q}(t') \} \rangle. \quad (4.41)$$

Los corchetes y las llaves implican el conmutador y anticonmutador respectivamente. Obsérvese que el núcleo de disipación resulta ser causal, y también que, como los operadores \hat{Q} 's son hermíticos, ambos núcleos son reales.

En el próximo capítulo, se implementará todo este conjunto de herramientas a nuestro problema de interés en QFT.

Capítulo 5

CTP para el Campo Escalar en Medios Reales

Una vez introducidos los conceptos básicos del formalismo CTP de integrales funcionales, en este capítulo comenzamos a aplicarlo al problema de Casimir. Como ya hemos mencionado, el estudio de las fuerzas de Casimir en el marco de los sistemas cuánticos abiertos es la posibilidad de analizar la física fuera del equilibrio de las interacciones entre objetos a diferentes temperaturas [28], las transferencia de calor entre ellos [50] y la inclusión de evoluciones temporales hasta alcanzar el régimen estacionario. Asimismo, la conocida fórmula de Lifshitz [16] que describe las fuerzas entre dieléctricos en una situación estacionaria en términos de sus propiedades electromagnéticas macroscópicas, no ha sido derivada desde un marco cuántico de primeros principios. La deducción original se basa en las ecuaciones de Maxwell estocásticas y el empleo de propiedades termodinámicas asociadas a los campos estocásticos. De todos modos, como se ha señalado en numerosos papers, la conexión entre este enfoque y uno netamente cuántico no está totalmente entendida. Es más, ciertas dudas han aparecido en relación a la aplicabilidad de la fórmula de Lifshitz al caso de dieléctricos con pérdidas [18, 19, 20].

Con este objetivo, en el capítulo anterior, presentamos el formalismo CTP o de Schwinger-Keldysh, el cual es de particular utilidad en la teoría cuántica de campos fuera del equilibrio (ver [51, 52, 53]). En este esquema, mostramos que los sistemas cuánticos abiertos son incluidos mediante el concepto de acción de influencia, resultante de la traza parcial sobre los grados de libertad del entorno.

En este capítulo mostraremos cómo en el caso más simple, de un campo escalar en interacción con materia, el formalismo puede ser utilizado para el estudio de un problema de Casimir tanto del régimen transitorio como de la situación estacionaria a partir del

límite de tiempos largos de la anterior.

5.1. Acoplamiento Bilineal

En el Capítulo 3, presentamos un esquema de cuantización en el régimen estacionario basado en los trabajos previos [32, 35], donde el problema de Casimir con materiales reales era abordado desde un marco de sistemas cuánticos abiertos. En el presente capítulo, trabajaremos con dos modelos análogos al de HB, asumiendo en ambos casos que los dieléctricos se hallan representados por continuos de partículas Brownianas cuánticas, sujetas a fluctuaciones (ruido) y disipación debido a su acoplamiento a entornos térmicos.

La diferencia entre los dos modelos se basa en los acoplamientos con el campo. El primero de ellos, que llamaremos modelo bilineal, consiste en un acoplamiento directo entre el campo y el grado de libertad de polarización del dieléctrico en cada punto del espacio. Al segundo lo llamamos modelo tipo corriente y consiste en un acoplamiento entre la derivada temporal del campo y el grado de libertad de polarización. Comenzaremos con el primero de ellos dado que permite un desarrollo más directo de los cálculos, mientras que el segundo, más cercano a la realidad de la interacción entre el campo EM y la materia, será abordado una vez realizadas las integraciones para el modelo bilineal aprovechándolas para continuar los cálculos en forma general y unificada para ambos modelos a la vez.

Por lo tanto, consideremos un sistema compuesto de dos partes: el campo, el cual consideraremos un campo escalar real no masivo, y el material real, a su vez modelado por un continuo de partículas Brownianas localizadas en ciertas regiones del espacio. Con esto, estamos tomando la polarización como el grado de libertad relevante en cada punto del espacio ocupado por el material. Los mismos se hallan acoplados al campo en cada punto. El sistema compuesto (campos más grados de libertad de polarización) están, a la vez, acoplados a entornos externos constituidos por osciladores armónicos que interactúan sólo con los grados de libertad de polarización y toman el rol de baños térmicos.

Luego, la acción total del sistema completo viene dada por:

$$S[\phi, r, q_n] = S_0[\phi] + S_0[r] + \sum_n S_0[q_n] + S_{\text{int}}[\phi, r] + \sum_n S_{\text{int}}[r, q_n], \quad (5.1)$$

donde cada término se escribe:

$$S_0[\phi] = \int d\mathbf{x} \int_{t_0}^{t_f} d\tau \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi, \quad (5.2)$$

$$S_0[r] = \int d\mathbf{x} \int_{t_0}^{t_f} d\tau 4\pi\eta_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}) \frac{m_{\mathbf{x}}}{2} (\dot{r}_{\mathbf{x}}^2(\tau) - \omega_{\mathbf{x}}^2 r_{\mathbf{x}}^2(\tau)), \quad (5.3)$$

$$S_0[q_n] = \int d\mathbf{x} \int_{t_0}^{t_f} d\tau 4\pi\eta_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}) \frac{m_{n,\mathbf{x}}}{2} (\dot{q}_{n,\mathbf{x}}^2(\tau) - \omega_{n,\mathbf{x}}^2 q_{n,\mathbf{x}}^2(\tau)), \quad (5.4)$$

$$S_{\text{int}}[\phi, r] = \int d\mathbf{x} \int_{t_0}^{t_f} d\tau 4\pi\eta_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}) \lambda_{0,\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}, \tau) r_{\mathbf{x}}(\tau), \quad (5.5)$$

$$S_{\text{int}}[r, q_n] = \int d\mathbf{x} \int_{t_0}^{t_f} d\tau 4\pi\eta_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}) \frac{\lambda_{n,\mathbf{x}}}{\sqrt{2m_{n,\mathbf{x}} \omega_{n,\mathbf{x}}}} r_{\mathbf{x}}(\tau) q_{n,\mathbf{x}}(\tau), \quad (5.6)$$

donde esta vez los subíndices están también sobre todas las propiedades que caracterizan al material (y sus grados de libertad). Es decir, cada grado de libertad de polarización puede tener sus propiedades particulares (masa $m_{\mathbf{x}}$, frecuencia $\omega_{\mathbf{x}}$ y acoplamiento $\lambda_{0,\mathbf{x}}$), permitiendo al material ser inhomogéneo (estando caracterizado por las densidades $\eta_{\mathbf{x}}$). Las mismas libertades se le dan a cada baño térmico en interacción con cada grado de libertad de polarización en cada punto del espacio.

Por otro lado, la distribución de materia $g(\mathbf{x})$ define las regiones ocupadas por material, teniendo $g = 1$ para ellas y $g = 0$ fuera de ellas.

Cabe remarcar que, en este caso, el campo escalar parece ser análogo a una de las componentes del campo EM en interacción; sin embargo, en este modelo estamos considerando por simplicidad un acoplamiento bilineal entre el campo y el grado de libertad de polarización, lo que imposibilita tal correspondencia.

Por último y al igual que en capítulos pasados, estamos asumiendo que el sistema total está inicialmente descorrelacionado y, por ende, su matriz densidad inicial se escribe como un producto de la correspondiente para cada parte en cada punto, las que suponemos inicialmente en equilibrio térmico a una temperatura arbitraria propia $(\beta_\phi, \beta_{r_{\mathbf{x}}}, \beta_{B_{\mathbf{x}}})$, permitiendo al material ser térmicamente inhomogéneo.

$$\hat{\rho}(t_0) = \hat{\rho}_\phi(t_0) \otimes \hat{\rho}_{r_{\mathbf{x}}}(t_0) \otimes \hat{\rho}_{\{q_{n,\mathbf{x}}\}}(t_0). \quad (5.7)$$

5.2. Funcionales de Influencia y Generatriz

Como primer objetivo de esta parte, queremos calcular el valor de expectación de las funciones de correlación cuánticas para el campo. A partir del formalismo CTP podemos escribir la funcional generatriz del campo luego de haber sido integrados los grados de libertad de polarización, tomando la generalización del proceso que se encuentra en las

Refs.[36, 54] (más adelante en esta Tesis daremos una rigurosa demostración para un caso más complicado como es el del campo EM en interacción con materia):

$$Z[J, J'] = \int d\phi_f \int d\phi_0 d\phi'_0 \int_{\phi(\mathbf{x}, t_0)=\phi_0(\mathbf{x})}^{\phi(\mathbf{x}, t_f)=\phi_f(\mathbf{x})} \mathcal{D}\phi \int_{\phi'(\mathbf{x}, t_0)=\phi'_0(\mathbf{x})}^{\phi'(\mathbf{x}, t_f)=\phi_f(\mathbf{x})} \mathcal{D}\phi' \rho_\phi(\phi_0, \phi'_0, t_0) \times e^{i(S_0[\phi]-S_0[\phi'])} \mathcal{F}[\phi, \phi'] e^{i \int d\mathbf{x} \int_{t_0}^{t_f} d\tau (J(\mathbf{x}, \tau) \phi(\mathbf{x}, \tau) - J'(\mathbf{x}, \tau) \phi'(\mathbf{x}, \tau))}, \quad (5.8)$$

donde la funcional del campo \mathcal{F} es la funcional de influencia relacionada a la acción de influencia del campo $S_{\text{IF}}[\phi, \phi']$ generada por los grados de libertad del material más sus respectivos baños. Cabe destacar que, respecto del capítulo anterior, estamos teniendo una notación más explícita a fin de no perder de vista las dependencias espaciales y los límites de las integraciones funcionales.

Como el material está siendo modelado como un continuo de osciladores no interactuantes entre sí pero sí con su propio baño en el mismo punto espacial, la funcional de influencia se escribe como factorizada espacialmente, teniendo:

$$\mathcal{F}[\phi, \phi'] = e^{iS_{\text{IF}}[\phi, \phi']} = \prod_{\mathbf{x}} \int dr_{f, \mathbf{x}} \int dr_{0, \mathbf{x}} dr'_{0, \mathbf{x}} \int_{r_{\mathbf{x}}(t_0)=r_{0, \mathbf{x}}}^{r_{\mathbf{x}}(t_f)=r_{f, \mathbf{x}}} \mathcal{D}r_{\mathbf{x}} \int_{r'_{\mathbf{x}}(t_0)=r'_{0, \mathbf{x}}}^{r'_{\mathbf{x}}(t_f)=r_{f, \mathbf{x}}} \mathcal{D}r'_{\mathbf{x}} (5.9) \times \rho_{r_{\mathbf{x}}}(r_{0, \mathbf{x}}, r'_{0, \mathbf{x}}, t_0) e^{i4\pi\eta_{\mathbf{x}}g(\mathbf{x})(S_0[r_{\mathbf{x}}]-S_0[r'_{\mathbf{x}}]+S_{\text{QBM}}[r_{\mathbf{x}}, r'_{\mathbf{x}}])} e^{i4\pi\eta_{\mathbf{x}}g(\mathbf{x})(S_{\text{int}}[\phi, r_{\mathbf{x}}]-S_{\text{int}}[\phi', r'_{\mathbf{x}}])}.$$

donde:

$$S_{\text{QBM}}[r_{\mathbf{x}}, r'_{\mathbf{x}}] = \int_{t_0}^{t_f} d\tau \int_{t_0}^{t_f} d\tau' \Delta r_{\mathbf{x}}(\tau) \left(-2 D_{\text{QBM}, \mathbf{x}}(\tau - \tau') \Sigma r_{\mathbf{x}}(\tau') + \frac{i}{2} N_{\text{QBM}, \mathbf{x}}(\tau - \tau') \Delta r_{\mathbf{x}}(\tau') \right), \quad (5.10)$$

es la conocida acción de influencia de la teoría del QBM [55, 56], que representa la influencia del baño en \mathbf{x} (dado un conjunto $\{q_{n, \mathbf{x}}\}$) sobre el grado de libertad de polarización $r_{\mathbf{x}}$ en el mismo punto del espacio. Cabe señalar que en esta expresión, los campos ϕ y ϕ' aparecen como fuentes externas adicionales, así como J y J' lo son para el campo. También cabe remarcar que en esta expresión tomamos $\Delta r_{\mathbf{x}} = r'_{\mathbf{x}} - r_{\mathbf{x}}$ y $\Sigma r_{\mathbf{x}} = (r_{\mathbf{x}} + r'_{\mathbf{x}})/2$ y que la acción de influencia del QBM es claramente el resultado análogo a la expresión CTP para la funcional de influencia del campo (5.9), donde la traza es sobre los grados de libertad del baño $\{q_{n, \mathbf{x}}\}$ considerados en un estado térmico.

Los núcleos $N_{\text{QBM}, \mathbf{x}}$ y $D_{\text{QBM}, \mathbf{x}}$ en S_{QBM} no son más que los núcleos de ruido y disipación del QBM respectivamente [36, 56]. Es claro que la expresión de la acción

de influencia es general y aplica a todo tipo de baños como los del Capítulo 3 [41, 56], caracterizados por una temperatura particular. De la misma forma, es claro que el núcleo de ruido $N_{\text{QBM},\mathbf{x}}$ corresponde a la suma de los propagadores de Hadamard de cada oscilador del baño en el punto \mathbf{x} , mientras que el núcleo de disipación $D_{\text{QBM},\mathbf{x}}$ corresponde a la suma de los retardados en el mismo punto, los cuales poseen un comportamiento causal ($D_{\text{QBM},\mathbf{x}}(\tau, \tau') \propto \Theta(\tau - \tau')$).

5.2.1. Funcional de Influencia del Campo

Para comenzar, el primer paso es calcular la funcional de influencia para el campo (5.9). Para esto, es necesario evaluar cada uno de los factores de la productoria. El resultado de cada una de esas integrales CTP puede encontrarse en [54]. La implementación de tal resultado es inmediata debido a que los grados de libertad de polarización no interactúan entre sí y son un continuo, al mismo tiempo que hay que tener en cuenta que la distribución de materia satisface $g^2(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$. De este modo, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\phi, \phi'] &= \prod_{\mathbf{x}} \left\langle e^{-i4\pi\eta_{\mathbf{x}}g(\mathbf{x}) \lambda_{0,\mathbf{x}} \int_{t_0}^{t_f} d\tau \Delta\phi(\mathbf{x},\tau) \mathcal{R}_{0,\mathbf{x}}(\tau)} \right\rangle_{r_{0,\mathbf{x}}, p_{0,\mathbf{x}}} \\ &\times e^{-\frac{1}{2} 4\pi\eta_{\mathbf{x}}g(\mathbf{x}) \int_{t_0}^{t_f} d\tau \int_{t_0}^{t_f} d\tau' \Delta\phi(\mathbf{x},\tau) \mathcal{N}_{B,\mathbf{x}}(\tau,\tau') \Delta\phi(\mathbf{x},\tau')} \\ &\times e^{-i4\pi\eta_{\mathbf{x}}g(\mathbf{x}) \int_{t_0}^{t_f} d\tau \int_{t_0}^{t_f} d\tau' \Delta\phi(\mathbf{x},\tau) 2 \mathcal{D}_{\mathbf{x}}(\tau,\tau') \Sigma\phi(\mathbf{x},\tau')}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

donde $\Delta\phi = \phi' - \phi$, $\Sigma\phi = (\phi + \phi')/2$ y $\mathcal{D}_{\mathbf{x}}(\tau, \tau') \equiv \mathcal{D}_{\mathbf{x}}(\tau - \tau') = \frac{\lambda_{0,\mathbf{x}}^2}{2} G_{\text{Ret},\mathbf{x}}(\tau - \tau')$ es el núcleo de disipación actuante sobre el campo, siendo $G_{\text{Ret},\mathbf{x}}$ la función de Green retardada y $\mathcal{R}_{0,\mathbf{x}}$ la solución con condiciones iniciales $\{r_{0,\mathbf{x}}, p_{0,\mathbf{x}}\}$ asociada a la ecuación de movimiento semiclásica, que resulta ser, ni más ni menos, que la ecuación de movimiento homogénea:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta S_{\text{CTP}}[r_{\mathbf{x}}, r'_{\mathbf{x}}]}{\delta r_{\mathbf{x}}} \right|_{r_{\mathbf{x}}=r'_{\mathbf{x}}} &= \left. \frac{\delta S_{\text{CTP}}[\Delta r_{\mathbf{x}}, \Sigma r_{\mathbf{x}}]}{\delta \Delta r_{\mathbf{x}}} \right|_{\Delta r_{\mathbf{x}}=0} = 0, \\ \ddot{r}_{\mathbf{x}} + \omega_{\mathbf{x}}^2 r_{\mathbf{x}} - \frac{2}{m_{\mathbf{x}}} \int_{t_0}^t d\tau D_{\text{QBM},\mathbf{x}}(t - \tau) r_{\mathbf{x}}(\tau) &= 0, \end{aligned} \quad (5.12)$$

donde $S_{\text{CTP}}[r_{\mathbf{x}}, r'_{\mathbf{x}}] = S_0[r_{\mathbf{x}}] - S_0[r'_{\mathbf{x}}] + S_{\text{QBM}}[r_{\mathbf{x}}, r'_{\mathbf{x}}]$, mientras que:

$$\mathcal{R}_{0,\mathbf{x}}(\tau) = r_{0,\mathbf{x}} \dot{G}_{\text{Ret},\mathbf{x}}(\tau - t_0) + \frac{p_{0,\mathbf{x}}}{m_{\mathbf{x}}} G_{\text{Ret},\mathbf{x}}(\tau - t_0). \quad (5.13)$$

Por otro lado, el núcleo $\mathcal{N}_{B,\mathbf{x}}$ es la parte del núcleo de ruido asociada a los baños que actúa sobre el campo (hay otra parte asociada al primer factor del miembro derecho de (5.11)), y está dado por:

$$\mathcal{N}_{B,\mathbf{x}}(\tau, \tau') = \lambda_{0,\mathbf{x}}^2 \int_{t_0}^{\tau} ds \int_{t_0}^{\tau'} ds' G_{\text{Ret},\mathbf{x}}(\tau - s) N_{\text{QBM},\mathbf{x}}(s - s') G_{\text{Ret},\mathbf{x}}(\tau' - s'). \quad (5.14)$$

Finalmente, el primer factor del miembro derecho de (5.11) se escribe (ver Ref.[54]):

$$\begin{aligned} & \left\langle e^{-i4\pi\eta_{\mathbf{x}}g(\mathbf{x}) \lambda_{0,\mathbf{x}} \int_{t_0}^{\tau} d\tau \Delta\phi(\mathbf{x},\tau) \mathcal{R}_{0,\mathbf{x}}(\tau)} \right\rangle_{r_{0,\mathbf{x}},p_{0,\mathbf{x}}} = \\ & = \int dr_{0,\mathbf{x}} \int dp_{0,\mathbf{x}} W_{r_{\mathbf{x}}}(r_{0,\mathbf{x}}, p_{0,\mathbf{x}}, t_0) e^{-i4\pi\eta_{\mathbf{x}}g(\mathbf{x}) \lambda_{0,\mathbf{x}} \int_{t_0}^{\tau} d\tau \Delta\phi(\mathbf{x},\tau) \mathcal{R}_{0,\mathbf{x}}(\tau)}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

donde $W_{r_{\mathbf{x}}}(r_{0,\mathbf{x}}, p_{0,\mathbf{x}}, t_0)$ es la funcional de Wigner asociada a la matriz densidad de los grados de libertad de polarización $\widehat{\rho}_{r_{\mathbf{x}}}(t_0)$. Esta funcional puede ser escrita generalizando la expresión encontrada en Ref.[54]:

$$W_{r_{\mathbf{x}}}(r_{0,\mathbf{x}}, p_{0,\mathbf{x}}, t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Gamma e^{i4\pi\eta_{\mathbf{x}}g(\mathbf{x}) p_{0,\mathbf{x}}\Gamma} \rho_{r_{\mathbf{x}}}\left(r_{0,\mathbf{x}} - \frac{\Gamma}{2}, r_{0,\mathbf{x}} + \frac{\Gamma}{2}, t_0\right). \quad (5.16)$$

Considerando estados térmicos iniciales para cada parte del sistema compuesto total, tomamos las matrices densidad para los grados de libertad de polarización como funciones gaussianas. De este modo, (5.16) resulta una integral gaussiana debido a que la función de Wigner es una gaussiana en $r_{0,\mathbf{x}}$ y $p_{0,\mathbf{x}}$. De esta forma, considerando (5.13), fácilmente podemos calcular el primer factor del miembro derecho de (5.11) como:

$$\begin{aligned} & \left\langle e^{-i4\pi\eta_{\mathbf{x}}g(\mathbf{x}) \lambda_{0,\mathbf{x}} \int_{t_0}^{\tau} d\tau \Delta\phi(\mathbf{x},\tau) \mathcal{R}_{0,\mathbf{x}}(\tau)} \right\rangle_{r_{0,\mathbf{x}},p_{0,\mathbf{x}}} = \frac{1}{4\pi\eta_{\mathbf{x}}g(\mathbf{x}) 2 \sinh\left(\frac{\beta_{r_{\mathbf{x}}}\omega_{\mathbf{x}}}{2}\right)} \\ & \times e^{-\frac{1}{2} 4\pi\eta_{\mathbf{x}}g(\mathbf{x}) \int_{t_0}^{\tau} d\tau \int_{t_0}^{\tau'} d\tau' \Delta\phi(\mathbf{x},\tau) \mathcal{N}_{r,\mathbf{x}}(\tau,\tau') \Delta\phi(\mathbf{x},\tau')}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

con:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{r,\mathbf{x}}(\tau, \tau') & = \frac{\lambda_{0,\mathbf{x}}^2}{2m_{\mathbf{x}}\omega_{\mathbf{x}}} \coth\left(\frac{\beta_{r_{\mathbf{x}}}\omega_{\mathbf{x}}}{2}\right) \left[\dot{G}_{\text{Ret},\mathbf{x}}(\tau - t_0) \dot{G}_{\text{Ret},\mathbf{x}}(\tau' - t_0) \right. \\ & \left. + \omega_{\mathbf{x}}^2 G_{\text{Ret},\mathbf{x}}(\tau - t_0) G_{\text{Ret},\mathbf{x}}(\tau' - t_0) \right], \end{aligned} \quad (5.18)$$

que corresponde a la otra parte mencionada del núcleo de ruido que actúa sobre el campo. Éste se asocia a la influencia generada por los grados de libertad de polarización y lleva consigo un factor térmico global con la temperatura de los grados de libertad de polarización en cada punto $\beta_{r_{\mathbf{x}}}$.

Por lo tanto, luego de normalizar $Z[J, J']$, (5.11) finalmente se escribe:

$$\mathcal{F}[\phi, \phi'] = e^{iS_{\text{IF}}[\phi, \phi']}, \quad (5.19)$$

con:

$$\begin{aligned} S_{\text{IF}}[\phi, \phi'] &= \int d\mathbf{x} \int_{t_0}^{t_f} d\tau \int_{t_0}^{t_f} d\tau' 4\pi\eta_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}) \Delta\phi(\mathbf{x}, \tau) \left[-2 \mathcal{D}_{\mathbf{x}}(\tau - \tau') \Sigma\phi(\mathbf{x}, \tau') \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{2} \mathcal{N}_{\mathbf{x}}(\tau, \tau') \Delta\phi(\mathbf{x}, \tau') \right] \\ &= \int d^4x \int d^4x' \Delta\phi(x) \left[-2 \mathcal{D}(x, x') \Sigma\phi(x') + \frac{i}{2} \mathcal{N}(x, x') \Delta\phi(x') \right], \end{aligned} \quad (5.20)$$

donde en la última igualdad $\mathcal{D}(x, x') \equiv 4\pi\eta_{\mathbf{x}}g(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathcal{D}_{\mathbf{x}}(\tau - \tau')$ y $\mathcal{N}(x, x') \equiv 4\pi\eta_{\mathbf{x}}g(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathcal{N}_{\mathbf{x}}(\tau, \tau')$ (con $\mathcal{N}_{\mathbf{x}}(\tau, \tau') = \mathcal{N}_{r, \mathbf{x}}(\tau, \tau') + \mathcal{N}_{B, \mathbf{x}}(\tau, \tau')$) para los núcleos de disipación y ruido respectivamente.

Como es esperado para acoplamientos lineales, la acción de influencia para el campo tiene la misma forma que S_{QBM} (obtenida luego de la integración sobre los baños) pero para un campo 3+1 en todo el espacio. Esto no es únicamente válido para acoplamientos bilineales entre grados de libertad. Como veremos más adelante, esto también vale para acoplamientos entre grados de libertad y momentos canónicamente conjugados, con la salvedad de que los respectivos núcleos cambian.

5.2.2. Funcional Generatriz CTP

Hasta aquí hemos logrado un resultado exacto para la funcional de influencia y, consecuentemente, para la acción de influencia. Volviendo entonces a (5.8), podemos notar que la integral CTP resultante es de la forma de (5.11), sólo que reemplazando el grado de libertad por un campo escalar. En este caso, la generalización del resultado que se encuentra en Ref.[54] para campos escalares es inmediata (no así para campos de gauge, cuestión que será abordada en los capítulos siguientes de esta Tesis), pudiendo escribir:

$$\begin{aligned}
 Z[J, J'] &= \left\langle e^{-i \int d^4x J_\Delta(x) \Phi_0(x)} \right\rangle_{\phi_0(\mathbf{x}), \Pi_0(\mathbf{x})} e^{-i \int d^4x \int d^4y J_\Delta(x) \mathcal{G}_{\text{Ret}}(x, y) J_\Sigma(y)} \\
 &\times e^{-\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4x' \int d^4y' \int d^4y J_\Delta(x) \mathcal{G}_{\text{Ret}}(x, x') \mathcal{N}(x', y') \mathcal{G}_{\text{Ret}}(y, y') J_\Delta(y)}, \quad (5.21)
 \end{aligned}$$

donde $\phi_0(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}, t_0)$ y $\Pi_0(\mathbf{x}) = \dot{\phi}(\mathbf{x}, t_0)$ son las condiciones iniciales para el campo, mientras que $J_\Delta = J' - J$ y $J_\Sigma = (J + J')/2$.

Análogamente a la integración realizada en la última sección, \mathcal{G}_{Ret} es la función de Green retardada, esta vez asociada a la ecuación de campo semiclásica resultante de la ecuación de movimiento homogénea para la acción efectiva CTP del campo $S_{\text{CTP}}[\phi, \phi'] = S_0[\phi] - S_0[\phi'] + S_{IF}[\phi, \phi']$:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\delta S_{\text{CTP}}[\phi, \phi']}{\delta \phi} \right|_{\phi=\phi'} &= \left. \frac{\delta S_{\text{CTP}}[\Delta\phi, \Sigma\phi]}{\delta \Delta\phi} \right|_{\Delta\phi=0} = 0, \\
 \partial_\mu \partial^\mu \phi - 2 \int d^4x' \mathcal{D}(x, x') \phi(x') &= 0. \quad (5.22)
 \end{aligned}$$

Del mismo modo, $\Phi_0(x)$ es la solución de esta última ecuación que satisface las condiciones iniciales $\{\phi_0(\mathbf{x}), \Pi_0(\mathbf{x})\}$, es decir:

$$\Phi_0(x) = \int d\mathbf{x}' \dot{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t - t_0) \phi_0(\mathbf{x}') + \int d\mathbf{x}' \mathcal{G}_{\text{Ret}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t - t_0) \Pi_0(\mathbf{x}'). \quad (5.23)$$

Ahora, para calcular el primer factor que involucra el promedio sobre las condiciones iniciales, usamos que:

$$\begin{aligned}
 \left\langle e^{-i \int d^4x J_\Delta(x) \Phi_0(x)} \right\rangle_{\phi_0(\mathbf{x}), \Pi_0(\mathbf{x})} &= \int \mathcal{D}\phi_0(\mathbf{x}') \int \mathcal{D}\Pi_0(\mathbf{x}') W_\phi[\phi_0(\mathbf{x}'), \Pi_0(\mathbf{x}'), t_0] \\
 &\times e^{-i \int d\mathbf{x}' \int d^4x J_\Delta(x) [\dot{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tau - t_0) \phi_0(\mathbf{x}') + \mathcal{G}_{\text{Ret}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tau - t_0) \Pi_0(\mathbf{x}')]}, \quad (5.24)
 \end{aligned}$$

donde $W_\phi[\phi_0(\mathbf{x}'), \Pi_0(\mathbf{x}'), t_0]$ juega el mismo rol que la funcional de Wigner estudiada en Ref.[58].

5.2.2.1. Contribución del Estado Inicial del Campo

Una vez calculada la funcional de Wigner para el campo en un estado térmico, podemos volver a (5.24) para finalmente obtener el primer factor en el miembro derecho de (5.21). El cálculo de la funcional está descrito en el Apéndice C, estando el resultado final expresado en Eq.(C.11).

Para valores arbitrarios de la temperatura del campo, el factor, que en principio consta de integrales funcionales sobre el campo $\phi_0(\mathbf{x})$ y su momento asociado $\Pi_0(\mathbf{x})$, se divide en cada una de las integraciones, ya que el exponente también puede ser separado en cada variable. Por ende:

$$\begin{aligned} \left\langle e^{-i \int d^4x J_{\Delta}(x)\Phi_0(x)} \right\rangle_{\phi_0(\mathbf{x}), \Pi_0(\mathbf{x})} &= \\ &= \int \mathcal{D}\phi_0(\mathbf{x}) e^{-\frac{\beta_{\phi}}{2} \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \Delta_{\beta_{\phi}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \nabla\phi_0(\mathbf{x}) \cdot \nabla\phi_0(\mathbf{x}')} e^{\beta_{\phi} \int d\mathbf{x} \mathcal{J}_{\phi}(\mathbf{x})\phi_0(\mathbf{x})} \\ &\times \int \mathcal{D}\Pi_0(\mathbf{x}) e^{-\frac{\beta_{\phi}}{2} \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \Delta_{\beta_{\phi}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\Pi_0(\mathbf{x})\Pi_0(\mathbf{x}')} e^{\beta_{\phi} \int d\mathbf{x} \mathcal{J}_{\Pi}(\mathbf{x})\Pi_0(\mathbf{x})}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

donde:

$$\mathcal{J}_{\phi}(\mathbf{x}) \equiv -\frac{i}{\beta_{\phi}} \int d^4x' J_{\Delta}(x') \dot{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t' - t_0), \quad (5.26)$$

$$\mathcal{J}_{\Pi}(\mathbf{x}) \equiv -\frac{i}{\beta_{\phi}} \int d^4x' J_{\Delta}(x') \mathcal{G}_{\text{Ret}}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t' - t_0). \quad (5.27)$$

Ambas integrales funcionales definen la contribución del primer factor a la funcional generatriz (5.21). De hecho, definen la contribución del estado inicial del campo a la evolución dinámica, la relajación y la situación estacionaria del sistema.

5.2.2.2. Límite de Alta Temperatura

Para continuar el cálculo, exploramos el límite de alta temperatura del campo, que es más simple al momento de resolver las integrales funcionales (5.26) (más adelante en esta Tesis, para un caso más general que involucra el campo EM, mostraremos cómo el cálculo puede ser realizado a temperatura arbitraria). La aproximación de alta temperatura está dada por introducir $\frac{\beta_{\phi}|\mathbf{p}|}{2} \ll 1$ en la función de peso térmico expresada en el espacio de momentos (Eq.(C.10)). Luego, $\tanh\left(\frac{\beta_{\phi}|\mathbf{p}|}{2}\right) \approx \frac{\beta_{\phi}|\mathbf{p}|}{2}$, y la función de peso térmico en el espacio de momentos es aproximadamente igual a 1. Por ende, en el espacio coordinado:

$$\Delta_{\beta_{\phi}}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') \approx \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'')} \equiv \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}''). \quad (5.28)$$

En esta aproximación, (5.26) se simplifica porque una de las integrales en los exponentes puede ser evaluada inmediatamente. En este límite

$$\begin{aligned}
 \int \mathcal{D}\Pi_0(\mathbf{x}) e^{-\frac{\beta_\phi}{2} \int d\mathbf{x} \Pi_0(\mathbf{x}) \Pi_0(\mathbf{x})} e^{\beta_\phi \int d\mathbf{x} \mathcal{J}_\Pi(\mathbf{x}) \Pi_0(\mathbf{x})} &= \\
 = e^{-\frac{1}{2\beta_\phi} \int d^4y \int d^4y' J_\Delta(y) [\int d\mathbf{x} \mathcal{G}_{\text{Ret}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \tau - t_0) \mathcal{G}_{\text{Ret}}(\mathbf{y}', \mathbf{x}, \tau' - t_0)] J_\Delta(y')} &, \quad (5.29)
 \end{aligned}$$

donde $y = (\tau, \mathbf{y})$, $y' = (\tau', \mathbf{y}')$ y estamos descartando toda constante de normalización que eventualmente se irá, al final, al normalizar la funcional generatriz.

En este punto, es interesante remarcar que la aproximación de alta temperatura parece borrar todas las diferencias entre los resultados obtenidos para un mismo problema pero con diferente número de dimensiones espaciales. Esto puede asumirse basado en el hecho de que la función de peso térmico, en este límite, resulta ser una de delta de Dirac en todas las coordenadas, independientemente de la dimensionalidad espacial, y entonces todas las posibles diferencias debido a las diferentes formas funcionales de la función de peso térmico para un dado número de dimensiones parecen desaparecer. Sin embargo, la dimensionalidad se introduce nuevamente para hacer diferencia cuando la integral funcional sobre $\phi_0(\mathbf{x})$ tiene que resolverse. Esa integral funcional es gaussiana también. Luego, podemos integrar por partes el exponente involucrando los gradientes y descartar los términos que se desvanecen debido al decaimiento asintótico del campo en infinito ($\phi_0(x_i = \pm\infty) \rightarrow 0$). Por lo tanto, la integral funcional sobre $\phi_0(\mathbf{x})$, en el límite de alta temperatura, es una simple integral funcional gaussiana, de manera que finalmente se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \int \mathcal{D}\phi_0(\mathbf{x}) e^{\beta_\phi \int d\mathbf{x} [-\frac{1}{2} \nabla\phi_0(\mathbf{x}) \cdot \nabla\phi_0(\mathbf{x}) + \mathcal{J}_\phi(\mathbf{x})\phi_0(\mathbf{x})]} &\propto e^{\frac{\beta_\phi^2}{2} \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \mathcal{J}_\phi(\mathbf{x}') K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \mathcal{J}_\phi(\mathbf{x})} = \\
 = e^{-\frac{1}{2} \int d^4y \int d^4y' J_\Delta(y) [\int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \dot{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \tau - t_0) K(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \dot{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}(\mathbf{y}', \mathbf{x}', \tau' - t_0)] J_\Delta(y')} &, \quad (5.30)
 \end{aligned}$$

donde $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = (-\beta_\phi \nabla^2)^{-1}$ es la inversa del laplaciano, es decir, es la función de Green definida como:

$$-\beta_\phi \nabla^2 K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (5.31)$$

Es claro que este núcleo tiene que depender de la diferencia $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$.

Como la ecuación es análoga a la correspondiente para la función de Green de una carga puntual en el espacio libre (aunque el factor térmico aparece como una permitividad constante), esta ecuación puede resolverse transformando Fourier:

$$K(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \overline{K}(\mathbf{p}), \quad (5.32)$$

donde:

$$\overline{K}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\beta_\phi |\mathbf{p}|^2}. \quad (5.33)$$

Cabe remarcar que el núcleo $K(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ depende fuertemente de la dimensionalidad del problema, de manera que el número de dimensiones en el problema puede modificar el resultado final.

Finalmente, el primer factor de la funcional generatriz para el límite de alta temperatura se escribe:

$$\left\langle e^{-i \int d^4x J_\Delta(x) \Phi_0(x)} \right\rangle_{\phi_0(\mathbf{x}), \Pi_0(\mathbf{x})} = e^{-\frac{1}{2} \int d^4y \int d^4y' J_\Delta(y) [\mathcal{A}(y, y') + \mathcal{B}(y, y')] J_\Delta(y')}, \quad (5.34)$$

donde los núcleos vienen dados por:

$$\mathcal{A}(y, y') \equiv \frac{1}{\beta_\phi} \int d\mathbf{x} \mathcal{G}_{\text{Ret}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \tau - t_0) \mathcal{G}_{\text{Ret}}(\mathbf{y}', \mathbf{x}, \tau' - t_0), \quad (5.35)$$

$$\mathcal{B}(y, y') \equiv \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \dot{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \tau - t_0) K(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \dot{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}(\mathbf{y}', \mathbf{x}', \tau' - t_0). \quad (5.36)$$

Es claro que los núcleos son simétricos, es decir, $\mathcal{A}(y, y') = \mathcal{A}(y', y)$ y $\mathcal{B}(y, y') = \mathcal{B}(y', y)$ y cada uno de ellos depende linealmente con la temperatura inicial del campo, como es esperado para una aproximación de alta temperatura. La presencia de estos núcleos es uno de los resultados de esta Tesis. Más adelante mostraremos el papel que juegan en la densidad de energía de Casimir y su contribución a ella en el régimen de tiempos largos.

Podemos finalmente escribir la funcional generatriz normalizada para el campo en el límite de alta temperatura al reemplazar (5.34) en (5.21):

$$\begin{aligned} Z[J, J'] &= e^{-\frac{1}{2} \int d^4y \int d^4y' J_\Delta(y) [\mathcal{A}(y, y') + \mathcal{B}(y, y') + \int d^4x \int d^4x' \mathcal{G}_{\text{Ret}}(y, x) \mathcal{N}(x, x') \mathcal{G}_{\text{Ret}}(y', x')] J_\Delta(y')} \\ &\times e^{-i \int d^4y \int d^4y' J_\Delta(y) \mathcal{G}_{\text{Ret}}(y, y') J_\Sigma(y')}, \end{aligned} \quad (5.37)$$

donde cabe señalar que el primer factor en el miembro derecho está acompañado por dos J_Δ , mientras que el segundo está acompañado de una J_Δ y una J_Σ . La diferencia hace que el primero contribuya a la energía mientras que el segundo no.

Finalmente, hemos calculado la funcional generatriz del campo en un escenario dinámico completo para el límite de alta temperatura del campo. Esto lo realizamos permitiendo a los grados de libertad de polarización y sus baños, tener sus propias propiedades

y temperaturas localmente. Sin embargo, el modelo contiene una interacción bilineal entre el campo y la materia. En la próxima sección, mostraremos cómo, a partir de este resultado, obtener el mismo para el caso de un modelo más realista, es decir, para el otro de los modelos, la interacción tipo corriente.

5.3. Acoplamiento Tipo Corriente

Hasta aquí, hemos calculado la funcional generatriz para un campo escalar no masivo en interacción con materia representada como partículas Brownianas. Es claro que en el cálculo realizado en las secciones anteriores, el campo y los grados de libertad de polarización estaban acoplados linealmente, es decir, el acoplamiento era directamente entre los grados de libertad cuánticos. Por lo tanto, el modelo no es una versión escalar para una de las componentes del campo EM, ya que la interacción no es una tipo corriente.

Entonces, comenzamos reemplazando la acción de interacción $S_{\text{int}}[\phi, r]$ entre el campo y la materia dada en (5.5) por un término de interacción tipo corriente:

$$\tilde{S}_{\text{int}}[\phi, r] = \int d\mathbf{x} \int_{t_0}^{t_f} d\tau 4\pi\eta_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}) \lambda_{0,\mathbf{x}} \dot{\phi}(\mathbf{x}, \tau) r_{\mathbf{x}}(\tau) \equiv S_{\text{int}}[\dot{\phi}, r], \quad (5.38)$$

donde $\lambda_{0,\mathbf{x}}$ efectivamente toma el papel de la carga eléctrica del modelo electromagnético. Cabe señalar, también, que escribimos la derivada temporal actuando sobre el campo, en lugar de actuando sobre el grado de libertad de polarización. Ambas elecciones llevan a las mismas ecuaciones de movimiento para el sistema compuesto, de manera que son físicamente equivalentes. De hecho, los cálculos para obtener la acción de influencia del campo son formalmente los mismos y podemos, en principio, obtenerlos simplemente reemplazando ϕ por $\dot{\phi}$. Por ende, la acción de influencia para el campo, en este caso, se escribe:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\text{IF}}[\phi, \phi'] &\equiv S_{\text{IF}}[\dot{\phi}, \dot{\phi}'] & (5.39) \\ &= \int d\mathbf{x} \int_{t_0}^{t_f} d\tau \int_{t_0}^{t_f} d\tau' 4\pi\eta_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}) \Delta\dot{\phi}(\mathbf{x}, \tau) \left[-2 \mathcal{D}_{\mathbf{x}}(\tau - \tau') \Sigma\dot{\phi}(\mathbf{x}, \tau') \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{2} \mathcal{N}_{\mathbf{x}}(\tau, \tau') \Delta\dot{\phi}(\mathbf{x}, \tau') \right] \\ &= \int d^4x \int d^4x' \Delta\dot{\phi}(x) \left[-2 \mathcal{D}(x, x') \Sigma\dot{\phi}(x') + \frac{i}{2} \mathcal{N}(x, x') \Delta\dot{\phi}(x') \right]. \end{aligned}$$

Ahora, para continuar el cálculo como en la última sección, y para identificar los núcleos de ruido y disipación correspondientes a este modelo, integramos por partes en

ambas variables temporales para obtener una acción de influencia que dependa de la suma y diferencia de los campos, en lugar de las de su derivada. De esta forma, como en Ref.[59], obtenemos:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\text{IF}}[\phi, \phi'] = & \int d\mathbf{x} \int_{t_0}^{t_f} d\tau \int_{t_0}^{t_f} d\tau' 4\pi\eta_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}) \Delta\phi(\mathbf{x}, \tau) \left[-2\partial_{\tau\tau'}^2 \mathcal{D}_{\mathbf{x}}(\tau - \tau') \Sigma\phi(\mathbf{x}, \tau') \right. \\ & \left. + \frac{i}{2} \partial_{\tau\tau'}^2 \mathcal{N}_{\mathbf{x}}(\tau, \tau') \Delta\phi(\mathbf{x}, \tau') \right]. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Como el núcleo de disipación \mathcal{D} involucra el producto de dos distribuciones (ya que $\mathcal{D}(\tau - \tau')$ contiene $\Theta(\tau - \tau')$ multiplicada por una función acompañante que depende de la diferencia de los tiempos), el núcleo no está bien definido [59]. Derivando dos veces el núcleo, primero respecto de τ' y luego respecto de τ , resulta en:

$$\partial_{\tau\tau'}^2 \mathcal{D}_{\mathbf{x}}(\tau - \tau') = -\delta(\tau - \tau') \dot{\mathcal{D}}_{\mathbf{x}}(\tau - \tau') - \ddot{\mathcal{D}}_{\mathbf{x}}(\tau - \tau'), \quad (5.41)$$

donde los puntos sobre los núcleos representan la derivada temporal únicamente sobre la función acompañante, evitando diferenciar sobre la función de Heaviside contenida en el núcleo. Cabe señalar que en el primero de los términos, la función delta de Dirac viene de la derivación de la función de Heaviside, pero la notación hace que la función de Heaviside contenida en $\dot{\mathcal{D}}_{\mathbf{x}}$ sea superflua y poco significativa. También es claro que hemos explotado el hecho de que el núcleo de disipación \mathcal{D} depende de la diferencia de los tiempos $\tau - \tau'$, lo que da $\partial_{\tau'} \mathcal{D} = -\partial_{\tau} \mathcal{D} = -\dot{\mathcal{D}}$. Por otra parte, esto es innecesario para el núcleo de ruido $\mathcal{N}_{\mathbf{x}}$.

Introduciendo (5.41) dentro de la acción de influencia (5.40), de considerar que de su definición $\dot{\mathcal{D}}_{\mathbf{x}}(0^+) = \lambda_{0,\mathbf{x}}^2/2$ para el primer término de (5.41), claramente obtenemos:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\text{IF}}[\phi, \phi'] = & \int d\mathbf{x} \int_{t_0}^{t_f} d\tau \int_{t_0}^{t_f} d\tau' 4\pi\eta_{\mathbf{x}} \lambda_{0,\mathbf{x}}^2 g(\mathbf{x}) \Delta\phi(\mathbf{x}, \tau) \Sigma\phi(\mathbf{x}, \tau) \\ & + \int d\mathbf{x} \int_{t_0}^{t_f} d\tau \int_{t_0}^{t_f} d\tau' 4\pi\eta_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}) \Delta\phi(\mathbf{x}, \tau) \left[2 \ddot{\mathcal{D}}_{\mathbf{x}}(\tau - \tau') \Sigma\phi(\mathbf{x}, \tau') \right. \\ & \left. + \frac{i}{2} \partial_{\tau\tau'}^2 \mathcal{N}_{\mathbf{x}}(\tau, \tau') \Delta\phi(\mathbf{x}, \tau') \right] \end{aligned} \quad (5.42)$$

donde el primer término es una renormalización (finita e independiente de la posición) de la masa del campo escalar, la cual mostraremos más adelante que no tiene injerencia en la determinación de la función de Green. Estos términos de renormalización de masa también aparecen en la teoría del QBM, pero en general son términos divergentes

debido al hecho de que el baño es un conjunto infinito de osciladores armónicos, cada uno contribuyendo a la renormalización de la masa. En nuestro caso, el campo está acoplado en cada punto del espacio \mathbf{x} a un único oscilador armónico representado por el grado de libertad de polarización ubicado también en \mathbf{x} , de forma tal que el término de renormalización es único y, por ende, finito.

Cabe señalar que del segundo término, llamamos núcleo de disipación tipo corriente y de ruido tipo corriente a las derivadas de los núcleos de disipación y ruido del modelo bilineal, es decir, el núcleo de disipación tipo corriente es $-\ddot{\mathcal{D}}_{\mathbf{x}}$ mientras que el núcleo de ruido tipo corriente viene dado por $\partial_{\tau\tau}^2 \mathcal{N}_{\mathbf{x}}$. De aquí en más, a fin de evitar confusiones, usaremos la terminación 'tipo corriente' para referirnos a los núcleos del modelo tipo corriente, guardando los términos núcleos de disipación y ruido solamente para $\mathcal{D}_{\mathbf{x}}$ y $\mathcal{N}_{\mathbf{x}}$ respectivamente.

Considerando todo, y teniendo escrita la acción de influencia (5.42) formalmente como un término de renormalización de masa más otro no local (idéntico a (5.21) pero con núcleos diferentes), podemos volver y retomar el procedimiento realizado para el acoplamiento bilineal.

A pesar del término de renormalización de la masa, la integral funcional CTP sobre las variables de campo puede ser calculada como para el otro modelo. Por lo tanto, la funcional generatriz resulta formalmente idéntica a (5.37). Sin embargo, en el presente caso, los núcleos tipo corriente son diferentes, de manera que el de ruido contribuirá a definir la contribución debido a las fluctuaciones de materia, mientras que el de disipación contribuirá a la definición de la función de Green retardada al introducirse en la ecuación de movimiento semiclásica del campo obtenida a partir de la acción efectiva CTP para el modelo tipo corriente. Esta ecuación puede ser fácilmente derivada como (5.22), obteniendo:

$$\partial_{\mu}\partial^{\mu}\phi + 4\pi\eta_{\mathbf{x}}\lambda_{0,\mathbf{x}}^2 g(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}, t) + 8\pi\eta_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}) \int_{t_0}^t d\tau \ddot{\mathcal{D}}_{\mathbf{x}}(t - \tau) \phi(\mathbf{x}, \tau) = 0, \quad (5.43)$$

donde el campo escalar posee una masa dependiente de la posición, positiva y bien definida $2\sqrt{\pi\eta_{\mathbf{x}}} |\lambda_{0,\mathbf{x}}|$ en cada punto \mathbf{x} donde haya material (donde $g(\mathbf{x}) = 1$), mientras que es no masivo en las regiones libres. Por último, cabe señalar que esta última ecuación concuerda (integración por partes de por medio) con la obtenida en un esquema de cuantización canónica en el capítulo 3 [véase (3.17)] y, de hecho, es su generalización.

5.4. El Tensor de Energía-Momento y la Correlación del Campo

Hasta aquí, obtuvimos la funcional generatriz CTP del campo para ambos modelos de acoplamiento luego de trazar sobre todos los grados de libertad del material (polarización más baños térmicos). Por ende, nos interesa evaluar los valores de expectación del operador tensor de energía-momento simétrico $\langle \widehat{T}_{\mu\nu} \rangle$, que nos da la densidad de energía y la presión de radiación asociada al campo y está definido como [7, 57]:

$$\widehat{T}_{\mu\nu}(x_1) \equiv -\eta_{\mu\nu} \frac{1}{2} \partial_\gamma \widehat{\phi}(x_1) \partial^\gamma \widehat{\phi}(x_1) + \partial_\mu \widehat{\phi}(x_1) \partial_\nu \widehat{\phi}(x_1), \quad (5.44)$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minskowski ($\eta_{00} = -\eta_{ii} = 1$ para los elementos no nulos).

Mediante la técnica de división de puntos o point-splitting, haciendo uso de la función de correlación del campo, podemos escribir:

$$\langle \widehat{T}_{\mu\nu}(x_1) \rangle = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \left(-\eta_{\mu\nu} \frac{1}{2} \partial_{\gamma_1} \partial^{\gamma_2} + \partial_{\mu_1} \partial_{\nu_2} \right) \langle \widehat{\phi}(x_1) \widehat{\phi}(x_2) \rangle, \quad (5.45)$$

donde la notación significa $\partial_{\gamma_1} \partial^{\gamma_2} \equiv \partial_{t_1} \partial_{t_2} - \nabla_1 \cdot \nabla_2$ y análogamente para $\partial_{\mu_1} \partial_{\nu_2}$.

Por lo tanto, necesitamos de la función de correlación del campo para conocer los valores de expectación de cada una de las componentes del tensor de energía-momento. De hecho, necesitamos que la correlación sea finita, de manera que debemos introducir una expresión regularizada de ella. A partir de la funcional generatriz (5.37), esto es inmediato según lo estudiado en el capítulo 4. Evaluaremos entonces la correlación del campo en dos puntos diferentes x_1 y x_2 según la generalización inmediata de (4.24) (sin relación específica entre los puntos ya que están en ramas CTP diferentes):

$$\langle \widehat{\phi}(x_1) \widehat{\phi}(x_2) \rangle = \frac{\delta^2 Z}{\delta J'(x_1) \delta J(x_2)} \Big|_{J=J'=0}. \quad (5.46)$$

Como la funcional generatriz tiene una forma simple (5.37), podemos fácilmente evaluar sus derivadas funcionales, aprovechando las propiedades de simetría de los núcleos, obteniendo:

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\phi}(x_1) \widehat{\phi}(x_2) \rangle &= \mathcal{A}(x_1, x_2) + \mathcal{B}(x_1, x_2) + \int d^4 x \int d^4 x' \mathcal{G}_{\text{Ret}}(x_1, x) \mathcal{N}(x, x') \mathcal{G}_{\text{Ret}}(x_2, x') \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathcal{G}_{\text{Jordan}}(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (5.47)$$

donde $\mathcal{G}_{\text{Jordan}}(x_1, x_2) \equiv i(\mathcal{G}_{\text{Ret}}(x_2, x_1) - \mathcal{G}_{\text{Ret}}(x_1, x_2))$ es el propagador de Jordan [36]. Es claro que los núcleos son (5.21), (5.35) y (5.36) para el caso del modelo bilineal, siendo

la función de Green retardada definida por la ecuación de movimiento semiclásica (5.22). Por otra parte, para obtener el resultado para el caso del modelo tipo corriente hay que tener en cuenta que la función de Green retardada está definida por la correspondiente ecuación de movimiento semiclásica para el campo en este modelo, dada en (5.43), pero sin cambiar la expresión formal de los núcleos \mathcal{A} y \mathcal{B} . Para finalizar, hay que reemplazar el núcleo de ruido \mathcal{N} de (5.47) por el núcleo de ruido tipo corriente $\partial_{\tau\tau'}^2 \mathcal{N}$ asociado a la acción de influencia para este modelo (5.42). Considerando todo, podemos lograr una notación compacta al incluir un parámetro α abarcando ambos modelos, pudiendo escribir el núcleo de ruido generalizado como $\partial_{\tau\tau'}^{2\alpha} \mathcal{N}$, con $\alpha = 0, 1$ para el modelo bilineal y tipo corriente respectivamente.

Cabe destacar que la función de correlación (5.47) corresponde a la función de Whightman para el campo en este sistema abierto. De hecho, considerando que \mathcal{G}_{Ret} es real, como está escrita la correlación es claro que es una cantidad compleja, y que su parte imaginaria está dada por $\mathcal{G}_{\text{Jordan}}$; mientras que la parte real está conformada por los otros tres términos. Si correspondemos la función de Whightman con las típicas relaciones entre los propagadores, el propagador de Hadamard resulta dado por:

$$\mathcal{G}_{\text{H}}(x_1, x_2) \equiv 2 \left[\mathcal{A}(x_1, x_2) + \mathcal{B}(x_1, x_2) + \int d^4x \int d^4x' \mathcal{G}_{\text{Ret}}(x_1, x) \partial_{\tau\tau'}^{2\alpha} (\mathcal{N}(x, x')) \times \mathcal{G}_{\text{Ret}}(x_2, x') \right]. \quad (5.48)$$

Por otro lado, recordemos que queremos calcular los valores de expectación del tensor de energía-momento, de forma tal que el resultado debe ser real. Esto parece no ser el caso dado que la función de correlación es compleja y su parte imaginaria está dada por $\mathcal{G}_{\text{Jordan}}$. Sin embargo, para calcular los valores de expectación, necesitamos derivar de forma simétrica en ambas coordenadas $x_{1,2}$ para luego calcular el límite de coincidencia $x_2 \rightarrow x_1$. Debido a la definición del propagador de Jordan, esta operación (derivar simétricamente más el límite de coincidencia) hace que su contribución se desvanezca. Por ende, los valores de expectación resultan ser efectivamente números reales, como esperamos.

Finalmente, el valor de expectación del tensor de energía-momento se escribe:

$$\langle \widehat{T}_{\mu\nu}(x_1) \rangle = \frac{1}{2} \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \left(-\eta_{\mu\nu} \frac{1}{2} \partial_{\gamma_1} \partial^{\gamma_2} + \partial_{\mu_1} \partial_{\nu_2} \right) \mathcal{G}_{\text{H}}(x_1, x_2), \quad (5.49)$$

donde el propagador de Hadamard debe ser un propagador bien definido (no divergente).

Es importante notar que toda la dinámica fuera del equilibrio, tanto la evolución temporal como el no equilibrio termodinámico, está contenida en este resultado.

Debido a la estructura del núcleo de ruido $\partial_{\tau\tau}^{2\alpha}\mathcal{N}$ para cada modelo, el término asociado concentra la influencia generada por el material (grados de libertad de polarización más baños térmicos), desde el tiempo inicial cuando la interacción con el campo comienza, describiendo el proceso de relajación del material que forma los contornos. Ambas partes, grados de libertad de polarización y baños térmicos, pueden tener diferentes temperaturas iniciales, estableciendo el no equilibrio térmico. De hecho, cada elemento de volumen en el material puede tener sus propiedades específicas.

Por otra parte, hay dos términos proporcionales a la temperatura inicial del campo, dados por los núcleos \mathcal{A} y \mathcal{B} (y sus respectivas derivadas en la contribución de los valores de expectación). Esos términos concentran la evolución dinámica y modificación del campo en presencia de los contornos materiales. Por ende, esos términos deben estar íntegramente relacionados y, a su vez, generalizando los modos modificados que eran necesarios en un esquema de cuantización canónica en el estacionario para la contribución de vacío (3.23) del capítulo 3 (ver también Refs.[32, 35]).

En la siguiente sección mostraremos cómo estos resultados generales se aplican a diversas situaciones particulares para reproducir los resultados conocidos y entender mejor la física de estos sistemas compuestos.

5.5. Descripción Fuera del Equilibrio para Diferentes Configuraciones del Sistema Compuesto

5.5.1. Campo 0 + 1

Como primer ejemplo, consideramos el caso de un campo escalar 0 + 1, es decir, tomamos el campo ϕ como un oscilador armónico cuántico de masa unitaria. Por lo tanto, para adaptar nuestros resultados a esta situación, se necesitan algunos cambios. En este caso la noción de espacio está borrada, y el concepto de elemento de volumen no tiene sentido, de manera que el sistema compuesto es un oscilador armónico acoplado a otro (el grado de libertad de polarización), el cual al mismo tiempo se halla acoplado a un conjunto de osciladores armónicos (baño térmico).

La etiqueta espacial \mathbf{x} es innecesaria y el grado de libertad cuántico estará caracterizado por una frecuencia Ω (que juega el rol de la derivada espacial en el caso de un campo $n + 1$, con $n > 0$). La acción inicial para este campo (5.2) la reemplazamos por la expresión:

$$S_0[\phi] = \int d\mathbf{x} \int_{t_0}^{t_f} d\tau \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \longrightarrow \int_{t_0}^{t_f} d\tau \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 - \Omega^2 \phi^2(\tau) \right]. \quad (5.50)$$

Las ecuaciones (5.3) - (5.6) también podemos adaptarlas fácilmente descartando las integrales espaciales, las etiquetas, la densidad η (junto con el factor 4π) y la distribución de materia g en todas las acciones. Todas las integraciones y trazas pueden ser realizadas de la misma forma hasta la integración funcional sobre el campo. La acción de influencia (5.21) sigue siendo válida. De esta forma, la funcional generatriz de (5.8) a (5.21) es formalmente la misma. Sin embargo, en este caso, el cálculo del primer factor, que involucra el estado inicial del campo $0 + 1$, $\phi(t)$, implica una función de Wigner que no es una funcional, de manera que el factor resulta del mismo cálculo formal hecho para el grado de libertad de polarización r en (5.18), pero los núcleos obtenidos claramente son diferentes. Por lo tanto, para ambos modelos ($\alpha = 0, 1$) tenemos:

$$\begin{aligned} Z[J, J'] &= e^{-\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} d\tau \int_{t_0}^{t_f} ds J_\Delta(\tau) [\mathcal{A}(\tau, s) + \mathcal{B}(\tau, s)] J_\Delta(s)} e^{-i \int_{t_0}^{t_f} d\tau \int_{t_0}^{t_f} ds J_\Delta(\tau) \mathcal{G}_{\text{Ret}}^\Omega(\tau, s) J_\Sigma(s)} \\ &\times e^{-\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} d\tau \int_{t_0}^{t_f} d\tau' \int_{t_0}^{t_f} ds' \int_{t_0}^{t_f} ds J_\Delta(\tau) \mathcal{G}_{\text{Ret}}^\Omega(\tau, \tau') \partial_{\tau' s'}^{2\alpha} [\mathcal{N}(\tau', s')] \mathcal{G}_{\text{Ret}}^\Omega(s, s') J_\Delta(s)}, \end{aligned} \quad (5.51)$$

donde la suma de los núcleos \mathcal{A} y \mathcal{B} resultan de la integración ordinaria sobre los valores iniciales del campo $\phi_0 \equiv \phi(t_0)$, $\Pi_0 \equiv \Pi(t_0)$ y es de la forma de (5.18) (de hecho, el límite de alta temperatura de esta expresión tiene exactamente la forma de (5.18) luego de descartar los aspectos espaciales):

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\tau, s) + \mathcal{B}(\tau, s) &\equiv \frac{1}{2\Omega} \coth\left(\frac{\beta_\phi \Omega}{2}\right) \left[\Omega^2 \mathcal{G}_{\text{Ret}}^\Omega(\tau - t_0) \mathcal{G}_{\text{Ret}}^\Omega(s - t_0) \right. \\ &\quad \left. + \dot{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}^\Omega(\tau - t_0) \dot{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}^\Omega(s - t_0) \right], \end{aligned} \quad (5.52)$$

donde $\mathcal{G}_{\text{Ret}}^\Omega$ es la función de Green retardada (que es una función de la diferencia de tiempo, es decir $\mathcal{G}_{\text{Ret}}^\Omega(t, s) \equiv \mathcal{G}_{\text{Ret}}^\Omega(t - s)$, como podemos inferir de la ecuación de movimiento), asociada a las ecuaciones (5.22) y (5.43), las que podemos escribir en simultáneo como:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + (\Omega^2 + \alpha \lambda_0^2) \phi(t) - (-1)^\alpha 2 \int_{t_0}^t d\tau \partial_{tt}^{2\alpha} [\mathcal{D}(t - \tau)] \phi(\tau) = 0, \quad (5.53)$$

donde en este caso, el término finito de masa se presenta como un término de renormalización de la frecuencia, y $\partial_{tt}^{2\alpha} [\mathcal{D}(t - \tau)]$ es el núcleo de disipación generalizado.

Por lo tanto, la contraparte 0 + 1 del propagador de Hadamard (5.48) se escribe:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_H^\Omega(t_1, t_2) \equiv & \frac{1}{\Omega} \coth\left(\frac{\beta_\phi \Omega}{2}\right) \left[\Omega^2 \mathcal{G}_{\text{Ret}}^\Omega(t_1 - t_0) \mathcal{G}_{\text{Ret}}^\Omega(t_2 - t_0) \right. \\ & \left. + \dot{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}^\Omega(t_1 - t_0) \dot{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}^\Omega(t_2 - t_0) \right] \\ & + 2 \int_{t_0}^{t_f} d\tau \int_{t_0}^{t_f} d\tau' \mathcal{G}_{\text{Ret}}^\Omega(t_1 - \tau) \partial_{\tau\tau'}^{2\alpha} [\mathcal{N}(\tau, \tau')] \mathcal{G}_{\text{Ret}}^\Omega(t_2 - \tau'), \end{aligned} \quad (5.54)$$

donde el núcleo de ruido se separa en dos contribuciones $\mathcal{N}(\tau, \tau') = \mathcal{N}_B(\tau, \tau') + \mathcal{N}_r(\tau, \tau')$, dadas en (5.14) y (5.18), y caracterizadas por su propia temperatura $\beta_{r,B}$ respectivamente. De hecho, podemos corresponder las temperaturas de cada término con la contribución de esa parte del sistema total. Es decir, los términos con la temperatura del campo β_ϕ están asociados a la propia contribución del sistema abierto, mientras que cada parte del núcleo de ruido \mathcal{N} se corresponden al grado de libertad de polarización (denotado en que contiene la temperatura β_r) y al baño (denotado en que contiene la temperatura β_B).

Es claro ahora que el tensor de energía-momento corresponde a la energía del campo 0+1, donde la evolución del valor de expectación puede ser fácilmente escrita en términos del propagador de Hadamard, como ocurre en (5.49):

$$\langle E(t_1) \rangle \equiv \frac{1}{2} \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \left(\frac{\partial}{\partial t_1} \frac{\partial}{\partial t_2} + \Omega^2 \right) \mathcal{G}_H^\Omega(t_1, t_2). \quad (5.55)$$

Finalmente, hemos escrito el valor medio de la energía como una función del tiempo, desde las condiciones iniciales del sistema compuesto. Es claro que la dinámica depende de las funciones de Green retardadas $\mathcal{G}_{\text{Ret}}^\Omega, G_{\text{Ret}}$ [donde G_{Ret} está contenida en el núcleo de ruido de cada modelo según (5.14) and (5.18)] de cada parte del sistema y del núcleo de ruido del QBM, N_{QBM} (que depende del tipo de baño que consideremos).

Por lo tanto, su comportamiento transitorio del valor de expectación de la energía y su relajación hasta estado estacionario, dependerá de las fluctuaciones de cada parte del entorno total, a través de sus núcleos de ruido; y cómo el sistema evoluciona hacia la situación estacionaria dependerá también de su propia función de Green, $\mathcal{G}_{\text{Ret}}^\Omega$, como está claro de (5.54).

Luego, para el límite de tiempos largos ($t_0 \rightarrow -\infty$), necesitamos saber cómo es el comportamiento de tiempos largos de cada función de Green $\mathcal{G}_{\text{Ret}}^\Omega, G_{\text{Ret}}$. Debemos enfocarnos en las funciones de Green específicas que tiene nuestro sistema, las cuales vienen determinadas por cada ecuación de movimiento que obtuvimos en cada paso del trazado.

La función de Green retardada para el grado de libertad de polarización r está determinada por la ecuación de movimiento (5.12). La ecuación asociada para la función de Green G_{Ret} podemos resolverla transformando Laplace la ecuación sujeta a las condiciones iniciales $G_{\text{Ret}}(0) = 0, \dot{G}_{\text{Ret}}(0) = 1$ (es decir, en el lenguaje del capítulo 3, G_{Ret} corresponde a la función G_2 como se mencionó en su momento). Así, probamos directamente que, para cualquier tipo de baño, la transformada de Laplace de la función de Green puede escribirse según (3.16) con $n = 2$ ó bien a partir de (5.12), lo que resulta en:

$$\tilde{G}_{\text{Ret}}(z) = \frac{1}{\left(z^2 + \omega^2 - 2 \tilde{D}_{\text{QBM}}(z)\right)}, \quad (5.56)$$

donde \tilde{D}_{QBM} es la transformada de Laplace del núcleo de disipación del QBM contenido en S_{QBM} (ver también [55, 56]).

Las propiedades analíticas de la transformada \tilde{G}_{Ret} y la ubicación de sus polos define la evolución temporal y el comportamiento asintótico de la función de Green G_{Ret} . De lo que concluimos en la última sección del capítulo 3, sabemos que para mantener la propiedad de causalidad de estas funciones, del teorema de Cauchy se desprende que los polos de \tilde{G}_{Ret} se hallan en el semiplano izquierdo del plano complejo z , es decir, las partes reales de los polos son negativas o cero. Asumiendo que $\omega \neq 0$ y que el baño modelado incluye una función de corte en frecuencias, según la discusión dada en la sección 3.5 (o Ref.[35]), los polos son simples y tienen parte real negativa. Mediante la fórmula de Mellin (3.21) y el teorema de residuos, podemos antitransformar [43] para obtener, formalmente, que la función de Green se escribe:

$$G_{\text{Ret}}(t) = \Theta(t) \sum_j \text{Res} \left[\tilde{G}_{\text{Ret}}(z), z_j \right] e^{z_j t}. \quad (5.57)$$

Como $\text{Re}[z_j] < 0$, es claro que en el límite de tiempos largos (cuando $t_0 \rightarrow -\infty$), tenemos $G_{\text{Ret}}(t - t_0) \rightarrow 0$ y lo mismo para sus derivadas temporales. Cabe remarcar que en las derivadas estamos omitiendo derivar sobre la función de Heaviside ya que, en este punto, genera funciones delta de Dirac relacionadas al inicio abrupto de la interacción, términos que descartamos por no tener realidad física alguna (más adelante comentaremos más al respecto).

En definitiva, este comportamiento asintótico define la contribución de tiempos largos del grado de libertad de polarización a la densidad de energía de la situación estacionaria. Como la función de Green va a cero, tenemos también que la parte del núcleo de ruido directamente asociada al grado de libertad de polarización \mathcal{N}_r , va a cero. Esto significa

que el grado de libertad de polarización en el estado térmico no contribuye a la energía en la situación estacionaria para ninguno de los modelos de acoplamiento. Aunque la dependencia en la temperatura β_r es borrada en el régimen de tiempos largos debido al decaimiento asintótico de la función de Green retardada, ésta última vuelve a aparecer en la contribución del baño \mathcal{N}_B , el cual está caracterizado, por supuesto, por la temperatura del baño β_B .

Considerando todo, en el límite de tiempos largos ($t_0 \rightarrow -\infty$) tenemos que para la contribución del núcleo de ruido generalizado (grado de libertad de polarización más baño) resulta:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_f} d\tau \int_{t_0}^{t_f} d\tau' \mathcal{G}_{\text{Ret}}^\Omega(t_1 - \tau) \partial_{\tau\tau'}^{2\alpha} [\mathcal{N}(\tau, \tau')] \mathcal{G}_{\text{Ret}}^\Omega(t_2 - \tau') \longrightarrow \\ & \longrightarrow \int_{-\infty}^{t_f} d\tau \int_{-\infty}^{t_f} d\tau' \mathcal{G}_{\text{Ret}}^\Omega(t_1 - \tau) \partial_{\tau\tau'}^{2\alpha} [\mathcal{N}_B(\tau, \tau')] \mathcal{G}_{\text{Ret}}^\Omega(t_2 - \tau'), \end{aligned} \quad (5.58)$$

donde el núcleo de ruido del QBM no depende de t_0 lo que hace que la contribución del baño no se desvanezca en el estacionario.

Finalmente, tenemos que analizar el comportamiento de la contribución asociada al propio campo como sistema. Hay que analizar la función de Green retardada $\mathcal{G}_{\text{Ret}}^\Omega$. Procedemos al igual que hicimos para el grado de libertad de polarización, considerando las mismas condiciones iniciales que para G_{Ret} ($\mathcal{G}_{\text{Ret}}^\Omega(0) = 0, \dot{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}^\Omega(0) = -1$). A partir de la ecuación de movimiento para la función de Green $\mathcal{G}_{\text{Ret}}^\Omega$, asociada al campo en cada modelo según (5.53), podemos obtener fácilmente una expresión para la transformada de Laplace análoga a la del grado de libertad de polarización:

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}^\Omega(z) = \frac{-1}{\left(z^2 + \Omega^2 - \lambda_0^2 (-z^2)^\alpha \tilde{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}^\Omega(z)\right)}, \quad (5.59)$$

donde cabe señalar que esta expresión compacta se debe a que el término de renormalización de la frecuencia se cancela con un término proveniente de la derivada del núcleo de disipación \mathcal{D} al momento inicial.

Las propiedades analíticas de esta transformada de Laplace definen el comportamiento asintótico de la propia contribución del campo. Para $\lambda_0, \Omega, \omega \neq 0$ y baño óhmico, es fácil mostrar que la transformada de Laplace para ambos tipos de acoplamiento tiene cuatro polos simples con parte real negativa, verificando el requerimiento para respetar causalidad. Asumimos que en el caso general resulta con las mismas características, siendo los polos simples y teniendo parte real negativa. En el dominio temporal, podemos escribir:

$$\mathcal{G}_{\text{Ret}}^{\Omega}(t) = \Theta(t) \sum_l \text{Res} \left[\tilde{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}^{\Omega}(z), z_l \right] e^{z_l t}. \quad (5.60)$$

Por lo tanto, como $\text{Re}[z_l] < 0$, claramente tenemos que en el límite de tiempos largos ($t_0 \rightarrow -\infty$) $\mathcal{G}_{\text{Ret}}^{\Omega}(t - t_0) \rightarrow 0$ y de manera análoga para sus derivadas.

Entonces, el límite de tiempos largos del propagador de Hadamard $\mathcal{G}_{\text{H}}^{\Omega}$ viene dado únicamente por la contribución de tiempos largos del baño:

$$\mathcal{G}_{\text{H}}^{\Omega}(t_1, t_2) \longrightarrow 2 \int_{-\infty}^{t_f} d\tau \int_{-\infty}^{t_f} d\tau' \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{\Omega}(t_1 - \tau) \mathcal{N}_B(\tau, \tau') \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{\Omega}(t_2 - \tau'), \quad (5.61)$$

correspondiendo a la situación estacionaria de las fluctuaciones del baño a temperatura β_B .

Finalmente, resumiendo esta sección, para un campo en $0 + 1$ dimensiones con cualquiera de los dos tipos de acoplamiento, la densidad de energía en la situación estacionaria tiene sólo la contribución del baño, mientras que las contribuciones del grado de libertad de polarización y el propio campo van a cero debido a la evolución temporal.

Ahora, veamos cómo los cálculos aplican en el caso de un campo $n + 1$ interactuando con un material homogéneo en todo el espacio.

5.5.2. Campo en Material Homogéneo e Infinito

Consideremos ahora un campo escalar $n + 1$ (with $n \neq 0$) sin contornos, es decir, el caso de un material homogéneo que aparece en todo el espacio a cierto tiempo inicial t_0 . En esta situación, $g(\mathbf{x}) \equiv 1$ para todo \mathbf{x} y descartamos las etiquetas espaciales debido a la homogeneidad del material. Luego, (5.22) y (5.43) pueden ser escritas simultáneamente como:

$$\partial_{\mu} \partial^{\mu} \phi + 4\pi\eta\lambda_0^2 \alpha \phi - (-1)^{\alpha} 8\pi\eta \int_{t_0}^t d\tau \partial_{tt}^{2\alpha} [\mathcal{D}(t - \tau)] \phi(\mathbf{x}, \tau) = 0, \quad (5.62)$$

la cual es, básicamente, una ecuación de ondas en un medio disipativo.

La ecuación asociada a la función de Green retardada \mathcal{G}_{Ret} es inmediata y está sujeta a las típicas condiciones iniciales:

$$\mathcal{G}_{\text{Ret}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', 0) = 0 \quad , \quad \dot{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', 0) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (5.63)$$

Debido a la invariancia traslacional del problema, $\mathcal{G}_{\text{Ret}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \mathcal{G}_{\text{Ret}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t)$, de manera tal que su transformada de Fourier satisface:

$$\partial_{tt}^2 \bar{\mathcal{G}}_{\text{Ret}} + (k^2 + 4\pi\eta\lambda_0^2\alpha)\bar{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}(\mathbf{k}, t) - (-1)^\alpha 8\pi\eta \int_0^t d\tau \partial_{tt}^{2\alpha} [\mathcal{D}(t - \tau)] \bar{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}(\mathbf{k}, \tau) = 0, \quad (5.64)$$

donde, como en la última sección, $\mathcal{D}(t - \tau) = \lambda_0^2 G_{\text{Ret}}(t - \tau)$, $k \equiv |\mathbf{k}|$ y las condiciones iniciales resultan:

$$\bar{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}(\mathbf{k}, 0) = 0 \quad , \quad \dot{\bar{\mathcal{G}}}_{\text{Ret}}(\mathbf{k}, 0) = -1. \quad (5.65)$$

Es claro que (5.64) y (5.65) son equivalentes a la ecuación de campo y condiciones iniciales para la función de Green retardada para un campo en $0 + 1$ dimensiones. Es decir, cada modo del campo se comporta como un campo $0 + 1$ de frecuencia natural k , de manera que sus dinámicas son las mismas. Por ende, la transformada de Fourier de la función de Green retardada está estrechamente relacionada a la función de Green retardada del apartado pasado. De hecho, tenemos:

$$\bar{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}(\mathbf{k}, t) \equiv \bar{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}^k(t), \quad (5.66)$$

donde $\mathcal{G}_{\text{Ret}}^k$ es la función retardada de un campo $0 + 1$ de frecuencia k .

Entonces, escribimos:

$$\mathcal{G}_{\text{Ret}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \mathcal{G}_{\text{Ret}}^k(t). \quad (5.67)$$

A fin de estudiar el comportamiento de las contribuciones al valor de expectación del tensor de energía-momento $\langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle$ según (5.49), consideremos primero la contribución de los grados de libertad de polarización y los baños térmicos en cada punto del espacio \mathbf{x} en el último término de (5.48). Como estamos considerando un material homogéneo, con todos los grados de libertad de polarización teniendo la misma temperatura β_r y la misma para los baños en cada punto β_B (es claro que de todos modos, el no equilibrio térmico puede seguir existiendo si $\beta_r \neq \beta_B$ ya que cada parte puede tener su propia temperatura), de forma tal que en este caso $\mathcal{N}(x, x') = 4\pi\eta \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathcal{N}(\tau, \tau')$.

Si usamos la representación de Fourier de \mathcal{G}_{Ret} para escribir el último término de (5.48), llegamos a que:

$$\begin{aligned} & \int d^4x \int d^4x' \mathcal{G}_{\text{Ret}}(x_1, x) \partial_{\tau\tau'}^{2\alpha} [\mathcal{N}(x, x')] \mathcal{G}_{\text{Ret}}(x_2, x') = \\ & = 4\pi\eta \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)} \int_{t_0}^{t_f} d\tau \int_{t_0}^{t_f} d\tau' \bar{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}^k(t_1 - \tau) \partial_{\tau\tau'}^{2\alpha} [\mathcal{N}(\tau, \tau')] \bar{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}^k(t_2 - \tau'), \end{aligned} \quad (5.68)$$

donde cabe remarcar que ambas integrales sobre τ y τ' junto con el integrando son exactamente 1/2 del último término en (5.54), que es la contribución de los grados de libertad de polarización y el baño en el apartado pasado. Esto es esperable ya que, como inferimos de la ecuación de movimiento para la transformada de Fourier de la función de Green, cada modo \mathbf{k} del campo se corresponde con un campo 0+1 de frecuencia $k = |\mathbf{k}|$.

Por lo tanto, tenemos para cada modo del campo la misma evolución temporal que para un campo 0 + 1 de frecuencia k en cualquiera de los modelos de acoplamiento. Considerando el análisis del apartado anterior sobre G_{Ret} , podemos fácilmente concluir que en régimen de tiempos largos ($t_0 \rightarrow -\infty$) de esta contribución, tenemos:

$$\begin{aligned} & \int d^4x \int d^4x' \mathcal{G}_{\text{Ret}}(x_1, x) \partial_{\tau\tau'}^{2\alpha} [\mathcal{N}(x, x')] \mathcal{G}_{\text{Ret}}(x_2, x') \longrightarrow \\ & \longrightarrow 4\pi\eta \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} \int_{-\infty}^{t_f} d\tau \int_{-\infty}^{t_f} d\tau' \bar{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}^k(t_1 - \tau) \partial_{\tau\tau'}^{2\alpha} [\mathcal{N}_{\text{B}}(\tau, \tau')] \\ & \qquad \qquad \qquad \times \bar{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}^k(t_2 - \tau'), \end{aligned} \quad (5.69)$$

donde, como antes, tenemos que los grados de libertad de polarización no contribuyen a la situación estacionaria de un campo $n + 1$ en un material homogéneo.

Por otro lado, para la contribución propia del campo, contenida en los núcleos \mathcal{A} y \mathcal{B} dados en (5.35) y (5.36) respectivamente, podemos nuevamente explotar la representación de Fourier:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x_1, x_2) + \mathcal{B}(x_1, x_2) &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} \left[\frac{1}{\beta_\phi} \bar{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}^k(t_1 - t_0) \bar{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}^k(t_2 - t_0) \right. \\ & \quad \left. + \bar{K}(k) \dot{\bar{\mathcal{G}}}_{\text{Ret}}^k(t_1 - t_0) \dot{\bar{\mathcal{G}}}_{\text{Ret}}^k(t_2 - t_0) \right]. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Considerando el análisis realizado en el apartado anterior para la función de Green retardada $\mathcal{G}_{\text{Ret}}^\Omega$, tenemos entonces que en el límite de tiempos largos la transformada de Fourier de la función de Green retardada se desvanece, es decir, $\bar{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}^k(t - t_0) \rightarrow 0$, lo que hace que la contribución propia del campo también se desvanezca en la situación estacionaria.

Considerando todo, como en el caso del campo 0 + 1, tenemos que el régimen de tiempos largos está definido por la contribución del baño al propagador de Hadamard, teniendo para ambos modelos que:

$$\mathcal{G}_H(x_1, x_2) \rightarrow 8\pi\eta \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)} \int_{-\infty}^{t_f} d\tau \int_{-\infty}^{t_f} d\tau' \bar{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}^k(t_1 - \tau) \partial_{\tau\tau'}^{2\alpha} [\mathcal{N}_B(\tau, \tau')] \times \\ \times \bar{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}^k(t_2 - \tau'). \quad (5.71)$$

Finalmente, la densidad de energía en el estado estacionario también dependerá de las fluctuaciones del baño en el régimen de tiempos largos para cualquier modelo de acoplamiento. Esta conclusión no es necesariamente cierta si el material no es homogéneo o si hay gradientes de temperatura, ya sea entre los grados de libertad de polarización o entre los baños. De hecho, en el próximo apartado analizaremos que la conclusión puede ser diferente si, por un lado, consideramos medios no disipativos (con permitividad dieléctrica constante) o, por otro lado, hay regiones donde el campo fluctúa libremente, es decir, regiones donde no hay material ($g(\mathbf{x}) = 0$) y el campo está sujeto a la presencia de contornos.

5.5.3. Límite de Permitividad Dieléctrica Constante

En las secciones anteriores analizamos dos situaciones (un campo en 0+1 y uno en $n+1$ dimensiones en presencia de un material infinito) donde mostramos que, más allá de la evolución temporal transitoria del sistema, el régimen estacionario está descrito solamente por las fluctuaciones de los baños térmicos que están en contacto con los grados de libertad de polarización del material. Podemos leer este resultado de la dependencia final en la temperatura del baño β_B del propagador de Hadamard. Por otra parte, mostramos que los núcleos \mathcal{A} y \mathcal{B} , asociados a la contribución propia del campo, y la contribución de los grados de libertad de polarización no están presentes en la situación estacionaria (debido a la dinámica disipativa del campo en todo punto del espacio y la de los grados de libertad de polarización al ser partículas Brownianas).

Es claro que estas conclusiones, físicamente hablando, las debemos a la dinámica disipativa del campo en contacto con reservorios que conforman el material real, y que genera el amortiguamiento y la absorción dominando el estado estacionario a través de sus fluctuaciones.

Asumamos ahora que el material es dieléctrico sin disipación, es decir, un material de permitividad dieléctrica constante que no presenta absorción y tampoco es dispersivo ya que la permitividad en el espacio complejo de frecuencias es real y no es una función suave sobre el eje imaginario. Cabe señalar que esto verifica las relaciones de Kramers-Kronig. De hecho, estas relaciones no se satisfacen para una permitividad real para todo

valor real de frecuencia. Por ende, nuestros cálculos deben incluir este escenario como caso límite.

Como primer paso, si apagamos la disipación proporcionada por los baños en cada punto del material, tenemos que fijar $D_{\text{QBM}} \equiv 0$. Según la relación de fluctuación-disipación para el baño, esto hace que tengamos $N_{\text{QBM}} \equiv 0$. Por lo tanto, esto directamente implica que el núcleo de ruido generalizado se anule, es decir, $\mathcal{N}_{\text{B},\mathbf{x}} \equiv 0$. De esta forma, estamos borrando la contribución del baño del resultado.

Sin embargo, esto no es suficiente porque deja al material formado por osciladores armónicos sin amortiguamiento, es decir, que no relajan a una situación estacionaria. Podemos ver esto desde la transformada de Laplace de la función de Green retardada de los grados de libertad de polarización que, según (5.56), resulta $\tilde{G}_{\text{Ret},\mathbf{x}}(z) = 1/(z^2 + \omega_{\mathbf{x}}^2)$. Esta función presenta polos imaginarios puros ubicados en $z = \pm i\omega_{\mathbf{x}}$, con lo cual la función de Green retardada en el dominio del tiempo estará conformada por funciones sinusoidales. Esto hace que, en principio, la contribución asociada a los grados de libertad de polarización no se desvanezca, es decir, $\mathcal{N}_{r,\mathbf{x}}$ no es necesariamente nulo.

No obstante, como el núcleo de disipación viene dado por $\mathcal{D}_{\mathbf{x}} = \frac{\lambda_{0,\mathbf{x}}^2}{2} G_{\text{Ret},\mathbf{x}}$, el núcleo generalizado $\partial_{tt}^{2\alpha} [\mathcal{D}_{\mathbf{x}}(t - \tau)]$ que actúa sobre el campo y forma la permitividad (a través de su transformada de Laplace), dará una permitividad real y dispersiva para frecuencias imaginarias puras. Por ende, las relaciones de Kramers-Kronig no se satisfacen. En otras palabras, anular la disipación del baño no es suficiente para obtener el límite de permitividad dieléctrica constante y, de hecho, resulta no ser un modelo físico consistente.

Para tener una idea sobre cómo este límite puede ser tomado, podemos hacer uso de la ecuación de movimiento para el campo en presencia de contornos materiales de forma arbitraria, que para ambos modelos de acoplamiento simultáneamente se escribe:

$$\partial_{\mu} \partial^{\mu} \phi + 4\pi\eta_{\mathbf{x}} \lambda_{0,\mathbf{x}}^2 g(\mathbf{x}) \alpha \phi - (-1)^{\alpha} 8\pi\eta_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}) \int_{t_0}^t d\tau \partial_{tt}^{2\alpha} [\mathcal{D}_{\mathbf{x}}(t - \tau)] \phi(\mathbf{x}, \tau) = 0. \quad (5.72)$$

Transformando Laplace la ecuación asociada para la función de Green e imponiendo las mismas condiciones iniciales (5.63), fácilmente obtenemos:

$$\nabla^2 \tilde{\mathcal{G}}_{\text{Ret}} - z^2 \left[1 - (-1)^{\alpha} 4\pi\eta_{\mathbf{x}} \lambda_{0,\mathbf{x}}^2 g(\mathbf{x}) \frac{z^{2(\alpha-1)}}{(z^2 + \omega_{\mathbf{x}}^2)} \right] \tilde{\mathcal{G}}_{\text{Ret}} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (5.73)$$

Si, por otro lado, consideramos la ecuación de movimiento para la función de Green retardada correspondiente al caso de un campo con las mismas condiciones iniciales y

con una permitividad dieléctrica constante desde el comienzo en cada punto y definiendo los contornos, obtenemos:

$$\nabla^2 \tilde{\mathcal{G}}_{\text{Ret}} - z^2 \epsilon(\mathbf{x}) \tilde{\mathcal{G}}_{\text{Ret}} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (5.74)$$

que resulta análogo a lo que se obtiene a través de un esquema de cuantización canónica en el estacionario para un campo en presencia de contornos de permitividad dieléctrica constante [44].

Comparando las últimas dos ecuaciones, es claro que en nuestro caso debemos hacer que la permitividad (dada por la expresión entre corchetes en (5.73)) no dependa de z , es decir, que resulte una constante. Entonces, podemos intentarlo al reemplazarla por su orden cero en $z = 0$. Por un lado, vemos que esto no es posible de hacer para el modelo bilineal ($\alpha = 0$) ya que diverge en $z = 0$. Por otro lado, para el modelo tipo corriente ($\alpha = 1$) resulta finito, permitiéndonos encontrar un reemplazo factible, obteniendo:

$$\nabla^2 \tilde{\mathcal{G}}_{\text{Ret}} - z^2 \left[1 + \frac{4\pi\eta_{\mathbf{x}}\lambda_{0,\mathbf{x}}^2}{\omega_{\mathbf{x}}^2} g(\mathbf{x}) \right] \tilde{\mathcal{G}}_{\text{Ret}} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (5.75)$$

donde es claro que la permitividad resultante es $\epsilon(\mathbf{x}) \equiv 1 + \frac{4\pi\eta_{\mathbf{x}}\lambda_{0,\mathbf{x}}^2}{\omega_{\mathbf{x}}^2} g(\mathbf{x})$, lo que satisface correctamente las relaciones de Kramers-Kronig y resulta constante en el tiempo.

De hecho, con este reemplazo desde el comienzo estamos removiendo toda la dinámica de los grados de libertad de polarización y estableciendo el régimen estacionario mediante la evaluación en $z = 0$, teniendo entonces que $G_{\text{Ret}} \equiv 0$. Considerando todo, esto nos da que los términos correspondientes a la contribución del material se desvanecen ya que $\mathcal{N} \equiv 0$. Cabe destacar que esto coincide con lo que obtuvimos como caso límite para la fuerza de Casimir entre dos placas en $1 + 1$ en la sección 3.4.5, donde la llamada contribución de Langevin se hacía cero a disipación nula (la de los grados de libertad de las placas era eliminada desde el comienzo de antemano).

Por lo tanto, el propagador de Hadamard (5.48) depende de los núcleos \mathcal{A} y \mathcal{B} , que en este caso no se desvanecen. De hecho, mientras exista fuerza de Casimir entre contornos de permitividad dieléctrica constante debido a la modificación de los modos de vacío, estos núcleos no desaparecerán en la situación estacionaria. Esto coincide completamente con numerosos resultados que pueden ser encontrados para contornos de material no disipativo, obtenidos a partir de esquemas de cuantización canónica en el estacionario (ver por ejemplo Ref. [44]), donde la cuantización se lleva a cabo sólo considerando un espacio de Hilbert asociado al campo (como en el capítulo 2), y desarrollando el método canónico

de operadores de Heisenberg en términos de operadores de creación y aniquilación de modos del campo. De esta forma, en el límite de tiempos largos ($t_0 \rightarrow -\infty$) podemos escribir:

$$\mathcal{G}_H(x_1, x_2) \longrightarrow 2\left(\mathcal{A}(x_1, x_2) + \mathcal{B}(x_1, x_2)\right). \quad (5.76)$$

Cabe señalar que, como se desprende de los esquemas de cuantización en el estacionario, el estado del campo debemos tomarlo como uno tipo térmico, siendo esto un requerimiento adicional de consistencia, que resulta en el factor global térmico correcto para la correlación y las funciones de Green en el estacionario. Sin embargo, nuestro enfoque naturalmente da la dependencia térmica correcta al menos para un estado de alta temperatura del campo, lo que coincide con el límite de alta temperatura en los esquemas de cuantización canónica o formalismo funcional in-out [35].

Finalmente, mostramos un primer ejemplo simple donde los núcleos \mathcal{A} y \mathcal{B} no desaparecen en la situación estacionaria y, de hecho, en este caso son los que definen el régimen de tiempos largos. Sin embargo, esto no es totalmente nuevo ya que claramente sabemos de la existencia de la fuerza de Casimir entre contornos de permitividad constante debido a los modos modificados de vacío, como mencionamos anteriormente. De cualquier forma, probamos que nuestro enfoque reproduce correctamente la situación en ese caso límite. En el próximo apartado, estudiaremos otra situación donde estos términos también son relevantes para el análisis del régimen de tiempos largos.

5.5.4. Campo con Contornos Materiales Reales

En esta sección, estudiaremos una situación particular de presencia de contornos. Hasta el momento, vimos que para el caso de un campo en $n+1$ dimensiones (con $n \geq 0$) interactuando con un material homogéneo, el régimen de tiempos largos está definido por la contribución del baño, mientras que las contribuciones del grado de libertad de polarización y la propia del campo se desvanecen en la situación estacionaria.

Sin embargo, aunque estuvimos tentados de asumir que este resultado era general y siempre válido, presentamos un caso límite donde lo contrario era cierto y la anulación de la disipación hacía que los núcleos \mathcal{A} y \mathcal{B} sean los responsables del régimen de tiempos largos de la fuerza de Casimir entre contornos de material no disipativo.

Como señalamos anteriormente, este no es el único caso donde dichos núcleos contribuyen a la situación estacionaria. Si el material es inhomogéneo o existen regiones sin material (es decir, regiones de vacío que definen los contornos materiales) lo mismo puede

ser cierto. Por lo tanto, este apartado lo dedicamos a dar un simple ejemplo de presencia de contornos y el análisis de la situación estacionaria.

5.5.4.1. La Función de Green Retardada

Volviendo a la ecuación de campo para contornos en general (5.72) para cualquiera de los modelos de acoplamiento, nuevamente podemos transformar Laplace la ecuación asociada a la función de Green retardada (sujeta a las condiciones iniciales (5.63)), para obtener:

$$\nabla^2 \tilde{\mathcal{G}}_{\text{Ret}} - z^2 \left[1 - (-1)^\alpha 4\pi\eta_{\mathbf{x}} \lambda_{0,\mathbf{x}}^2 g(\mathbf{x}) z^{2(\alpha-1)} \tilde{G}_{\text{Ret},\mathbf{x}}(z) \right] \tilde{\mathcal{G}}_{\text{Ret}} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (5.77)$$

donde $\tilde{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}$ resulta ser la inversa del operador diferencial $\nabla^2 - z^2 \left[1 - (-1)^\alpha 4\pi\eta_{\mathbf{x}} \lambda_{0,\mathbf{x}}^2 g(\mathbf{x}) z^{2(\alpha-1)} \tilde{G}_{\text{Ret},\mathbf{x}}(z) \right]$, es decir, es directamente la función de Green (o propagador de Feynman) asociada a dicho operador.

En el Apéndice D, mostramos el cálculo, a partir de esta última ecuación, de la correspondiente transformada de Laplace de la función de Green retardada para el caso de una placa delta de Dirac para ambos modelos de acoplamiento ($g(\mathbf{x}) \equiv \delta(x_\perp)$).

Por simplicidad en los cálculos de esta sección, continuamos con la versión unidimensional del problema, es decir, el caso de un campo en 1 + 1 dimensiones donde la única dimensión de interés es la asociada a la coordenada perpendicular x_\perp , que ahora llamaremos x . Por lo tanto, para obtener los resultados de este caso, tenemos que descartar todo lo relacionado a las dimensiones paralelas. Podemos hacer esto evaluando $k_\parallel = 0$ en todos los resultados. Esto simplifica todas las expresiones y la transformada de Laplace de la función de Green retardada (D.9) se escribe:

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}(x, x', z) = -\frac{1}{2z} \begin{cases} e^{zx'} (e^{-zx} + r e^{zx}); & x' < x < 0 \\ (e^{-zx'} + r e^{zx'}) e^{zx}; & x < x' < 0 \\ t e^{z(x-x')}; & x < 0 < x' \end{cases} \quad (5.78)$$

donde los coeficientes de reflexión y transmisión ahora vienen dados por:

$$r = -(-1)^\alpha 2\pi\eta\lambda_0^2 z^{2\alpha-1} \tilde{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}(z) t \quad , \quad t = \frac{1}{\left(1 + (-1)^\alpha 2\pi\eta\lambda_0^2 z^{2\alpha-1} \tilde{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}(z) \right)}. \quad (5.79)$$

Aquí, podemos antitransformar, mediante la fórmula de Mellin (3.21) y el teorema de residuos [43], asumiendo que los polos de la transformada de Laplace de la función

de Green retardada tienen partes reales no positivas. Es importante remarcar que, siguiendo la discusión dada en la sección 3.5 (Ref.[35]), para ambos modelos, esto siempre se garantiza mediante la introducción de una función de corte apropiada en la transformada de Laplace del núcleo de disipación \tilde{D}_{QBM} (de hecho, cualquier densidad espectral que caracteriza el entorno tiene una función de corte física). Es más, asumiendo que la disipación (representada por D_{QBM}), la frecuencia ω y la constante de acoplamiento λ_0 no son cero, el único polo con parte real nula es el ubicado en $z = 0$, que aparece (para cada acoplamiento) en diferentes términos de la transformada de Laplace de la función de Green retardada, resultando en diferentes comportamientos para la función en el dominio temporal. Esto puede verse trabajando la última expresión del coeficiente de reflexión r en cada modelo. Sin embargo, este polo no cambia las conclusiones del presente apartado, de manera que continuaremos el análisis sin perder generalidad.

Por ende, la función de Green puede ser formalmente escrita como:

$$\mathcal{G}_{\text{Ret}} = -\frac{1}{2} \begin{cases} \Theta(x' - x + t) + \Theta(x + x' + t) \left[\alpha - 1 + \sum R_j e^{z_j(x+x'+t)} \right]; & x' < x < 0 \\ \Theta(x - x' + t) + \Theta(x + x' + t) \left[\alpha - 1 + \sum R_j e^{z_j(x+x'+t)} \right]; & x < x' < 0 \\ \Theta(x - x' + t) \left[\alpha + \sum R_j e^{z_j(x-x'+t)} \right]; & x < 0 < x' \end{cases} \quad (5.80)$$

donde las sumas son sobre los polos z_j que son los polos de r con parte real negativa, es decir, el polo en $z = 0$ es explícitamente calculado en cada modelo. Para los otros polos, tenemos $R_j \equiv \text{Res} \left[\frac{r}{z}, z_j \right] = \text{Res} \left[\frac{t}{z}, z_j \right]$. Dado que la función de Green retardada debe ser real, sus polos vienen en pares (es decir, si z_j es un polo, entonces su conjugado z_j^* es un polo también) a menos que z_j sea real.

Esta expresión, sin embargo, puede ser trabajada reordenando los términos y combinando sus funciones de Heaviside para obtener una forma cerrada más adecuada para la función de Green retardada en cada modelo para un punto campo $x < 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\text{Ret}}(x, x', t) &= \mathcal{G}_{\text{Ret}}^0(x, x', t) + \frac{(1 - \alpha)}{2} \Theta(-x) \Theta(x + x' + t) \Theta(x - x' + t) \quad (5.81) \\ &\quad - \frac{\Theta(-x)}{2} \sum_{z_j} R_j e^{z_j(x+t)} \left[e^{z_j x'} \Theta(-x') \Theta(x + x' + t) + e^{-z_j x'} \Theta(x') \Theta(x - x' + t) \right], \end{aligned}$$

donde $\mathcal{G}_{\text{Ret}}^0(x, x', t) \equiv -\frac{\Theta(-x)}{2} \Theta(x' - x + t) \Theta(x - x' + t)$ es la función de Green retardada del caso libre para un punto campo $x < 0$.

Cabe señalar que, por un lado, el segundo término es un término extra sólo para modelo bilineal debido a la presencia de la placa pero independiente de las propiedades del

material. Por otro lado, el tercero de los términos está directa y enteramente relacionado a la presencia de la placa y contiene toda la información sobre la contribución del material a la evolución transitoria (es decir, relajación) y la nueva situación estacionaria a la que el campo llega. Es claro que depende implícitamente del modelo de acoplamiento ya que los polos z_j dependen de ello.

A partir de (5.81) puede probarse fácilmente, mirando cuidadosamente los productos de las distribuciones, que la derivada temporal de la función de Green retardada tiene una forma simple dada por:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}(x, x', t) = & \dot{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}^0(x, x', t) - \frac{\Theta(-x)}{2} \sum_{z_j} z_j R_j e^{z_j(x+t)} \left[e^{z_j x'} \Theta(-x') \Theta(x + x' + t) \right. \\ & \left. + e^{-z_j x'} \Theta(x') \Theta(x - x' + t) \right], \end{aligned} \quad (5.82)$$

donde en esta expresión la única diferencia entre los modelos de acoplamiento está en los polos z_j .

5.5.4.2. Régimen de Tiempos Largos

Una vez calculada la función de Green retardada para el presente problema, podemos estudiar algunos aspectos dinámicos y características de la situación estacionaria.

Como obtuvimos en otros apartados de la sección, estamos interesados en el propagador de Hadamard (5.48), que podemos utilizar para calcular el valor de expectación de las componentes del tensor de energía-momento según (5.49). Dicho propagador tiene varias contribuciones que pueden separarse en dos, una que viene del campo generado por todos los componentes del material (grados de libertad de polarización y baños) que se hayan representados por el núcleo de ruido \mathcal{N} , y otro que viene del campo generado por las fluctuaciones de vacío sujetas a las nuevas condiciones de contorno (impuestas por el material), que están representadas por los núcleos \mathcal{A} y \mathcal{B} y que implican la modificación de los modos del campo a través de la evolución transitoria desde las condiciones iniciales de campo libre hasta el nuevo campo estacionario.

Comencemos estudiando la contribución del material. Como probamos en el apartado 5.5.2, cuando el material es modelado por partículas Brownianas en interacción con el campo para ambos modelos, la contribución del material a la situación estacionaria sólo tiene contribuciones provenientes de los baños, mientras que las partículas sólo actúan como un puente entre el campo y los baños, pero sin tener contribución al régimen de tiempos largos debido a la dinámica disipativa del QBM. Esto está básicamente contenido

en el hecho de que en el límite de tiempos largos ($t_0 \rightarrow -\infty$), tenemos $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}_B$. En el presente caso, aunque hay regiones sin material, el resultado sigue siendo válido. Es claro que en este caso, la función de Green viene dada por (5.81) pero la expresión formal es la misma. De hecho, cabe señalar también que la distribución de materia g define el rango de integración, habiendo ninguna contribución de los puntos externos al material.

Por otro lado, tenemos la contribución al campo generada por las fluctuaciones de vacío representadas por \mathcal{A} y \mathcal{B} . En este punto, estamos tentados a asumir que, al igual de lo que ocurre en el apartado 5.5.2, estas contribuciones desaparecen en la situación estacionaria dando únicamente un comportamiento transitorio. Sin embargo, como señalamos anteriormente, esto puede no ser cierto cuando existen regiones de vacío donde el campo fluctúa libremente.

Por lo tanto, considerando el núcleo \mathcal{A} en (5.35) y la expresión para la función de Green retardada dada en (5.81), es claro que el producto $\mathcal{G}_{\text{Ret}}(x_1, x, t_1 - t_0) \mathcal{G}_{\text{Ret}}(x_2, x, t_2 - t_0)$ tiene como mucho nueve términos (dependiendo del modelo de acoplamiento considerado) debido a todas las posibles combinaciones de los tres términos de la función de Green, y que luego deben ser integrados en x . Usando la simetría del núcleo, el número de integrales a calcular es como máximo seis. La complicación del cálculo completo es debida al hecho de que cada integral involucra productos de distribuciones teniendo la variable de integración y ambos puntos campo (x_1, t_1) y (x_2, t_2) , lo que hace que los resultados dependan de múltiples relaciones entre las coordenadas de los puntos.

Por otro lado, el cálculo completo del núcleo \mathcal{B} es tan complicado como el anterior. En el caso unidimensional, es fácil calcular el núcleo K de (5.32) mediante el teorema de residuos, obteniendo $K(x - x') = -\frac{|x-x'|}{2\beta_\phi}$, el cual puede ser escrito como dos términos. Entonces, el núcleo \mathcal{B} implica una doble integración (sobre x y x') del triple producto $\dot{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}(x_1, x, t_1 - t_0) K(x - x') \dot{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}(x_2, x', t_2 - t_0)$. A partir de (5.82), es claro que la derivada de la función de Green retardada tiene dos términos, de manera que para obtener \mathcal{B} el número de integrales a realizar en principio es ocho. Debido a la simetría del núcleo, el número final de integrales dobles se reduce a seis, como para el otro de los núcleos.

Como estamos interesados en las características generales de la evolución temporal transitoria y la situación estacionaria, no haremos un cálculo completo de estos términos, pero mostraremos que existen términos estacionarios asociados a la contribución de estos núcleos.

Notemos que los términos en los núcleos \mathcal{A} y \mathcal{B} asociados a los productos de funciones de Green retardadas de campo libre $\mathcal{G}_{\text{Ret}}^0$ y sus derivadas (es decir, los términos $\mathcal{G}_{\text{Ret}}^0(x_1, x, t_1 - t_0) \mathcal{G}_{\text{Ret}}^0(x_2, x, t_2 - t_0)$ en \mathcal{A} y $\dot{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}^0(x_1, x, t_1 - t_0) K(x - x') \dot{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}^0(x_2, x', t_2 - t_0)$)

en \mathcal{B}) son los que serán eliminados por la eventual prescripción de Casimir, de manera que no tenemos que calcularlos.

Debemos notar también que los términos cruzados (es decir, términos que combinan diferentes términos de la función de Green) serán transitorios ya que esas integraciones generarán términos constantes que desaparecerán entre las derivadas y el límite necesarios para calcular los valores de expectación del tensor de energía-momento, o términos que decaen exponencialmente en el límite de tiempos largos, o términos divergentes que deben ser sustraídos a fin de definir correctamente un propagador de Hadamard no divergente. Como ahora estamos interesados en la situación estacionaria, no es necesario que los calculemos.

Independientemente de qué modelo de acoplamiento estamos considerando, para estudiar el régimen de tiempos largos, los productos que involucran dos sumas sobre polos son los que darán contribuciones estacionarias. Partiendo de las expresiones generales para los núcleos, agrupamos términos y realizamos las integraciones espaciales, que se muestran en los cálculos complementarios del Apéndice E.1. Allí, demostramos que la contribución propia del campo al propagador de Hadamard podemos escribirla:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(x_1, x_2, t_1, t_2) + \mathcal{B}(x_1, x_2, t_1, t_2) &= (\text{Campo Libre}) + (\text{Cruzados}) + (\text{Transitorios}) \\
 &+ \frac{\Theta(-x_1) \Theta(-x_2)}{2\beta_\phi} \sum_{j,l} \left(1 - \frac{z_j}{z_l}\right) \frac{R_j R_l}{(z_j + z_l)} \left[e^{z_j(x_1+t_1-t_0)} e^{z_l(x_2+t_2-t_0)} \right. \\
 &\times \left(\Theta(x_1 - x_2 + t_1 - t_2) \Theta(x_2 + t_2 - t_0) + \Theta(x_2 - x_1 + t_2 - t_1) \Theta(x_1 + t_1 - t_0) \right) \\
 &- \Theta(x_1 - x_2 + t_1 - t_2) \Theta(x_2 + t_2 - t_0) e^{z_j(x_1-x_2+t_1-t_2)} \\
 &\left. - \Theta(x_2 - x_1 + t_2 - t_1) \Theta(x_1 + t_1 - t_0) e^{z_l(x_2-x_1+t_2-t_1)} \right]. \tag{5.83}
 \end{aligned}$$

Los últimos dos términos entre corchetes presentan exponenciales cuyos exponentes no dependen del tiempo inicial t_0 . Por lo tanto, esos términos no se desvanecerán en el límite de tiempos largos ($t_0 \rightarrow -\infty$). Esto muestra que parte de la contribución propia del campo tiene no sólo términos transitorios sino que también presenta términos estacionarios que contribuyen al régimen de tiempos largos. De hecho, estos términos del propagador de Hadamard son los que resultan en términos constantes en el valor de expectación de las componentes del tensor de energía-momento (5.49) luego de las derivaciones y el cálculo del límite de coincidencia.

Es más, podemos trabajar estos términos y escribirlos de una forma más familiar conectada a lo que vimos en el capítulo 3. Notemos que en el primero de los términos (asociado a $e^{z_j(x_1-x_2+t_1-t_2)}$) la suma sobre l podemos trabajarla mediante el teorema

de residuos, mientras que en el segundo término (asociado a $e^{z_1(x_2-x_1+t_2-t_1)}$) podemos trabajar la suma sobre j . Esto es lo que mostramos en los cálculos complementarios del Apéndice E.2.

Por lo tanto, considerando los términos no divergentes de (E.10) y (E.11), podemos escribir la contribución propia del campo como:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x_1, x_2, t_1, t_2) + \mathcal{B}(x_1, x_2, t_1, t_2) &= (\text{Campo Libre}) + (\text{Cruzados}) + (\text{Transitorios}) \\ &- \frac{\Theta(-x_1) \Theta(-x_2)}{\beta_\phi} \sum_j R_j \frac{r(-z_j)}{z_j} [\Theta(x_1 - x_2 + t_1 - t_2) \Theta(x_2 + t_2 - t_0) \\ &\times e^{z_j(x_1-x_2+t_1-t_2)} + \Theta(x_2 - x_1 + t_2 - t_1) \Theta(x_1 + t_1 - t_0) e^{-z_j(x_1-x_2+t_1-t_2)}]. \end{aligned} \quad (5.84)$$

En este punto, podemos explotar una vez más el teorema de residuos para obtener una forma cerrada final para estos términos. Es fácil mostrar que la primera suma sobre j (al igual que hicimos para las otras sumas y teniendo en cuenta los requisitos de convergencia) puede ser escrita como una integral en el plano complejo sobre una curva $\mathcal{C}^+ = \mathcal{C}_L^+ \cup \mathcal{R}^+$ donde \mathcal{C}_L^+ es un semicírculo infinito que encierra la mitad izquierda del plano complejo y \mathcal{R}^+ es un camino recto sobre el eje imaginario de abajo hacia arriba. Por lo tanto, como la función del integrando $\frac{r(z) r(-z)}{(-z^2)} e^{z(x_1-x_2+t_1-t_2)}$ se desvanece para $|z| \rightarrow \infty$ con $Re(z) < 0$, la integral sobre \mathcal{C}_L^+ es nula y la integral es directamente sobre el eje imaginario, que puede ser parametrizado como $z = -i\Omega$, obteniendo finalmente:

$$\begin{aligned} - \sum_j R_j \frac{r(-z_j)}{z_j} e^{z_j(x_1-x_2+t_1-t_2)} &= \int_{\mathcal{C}^+} \frac{dz}{2\pi i} \frac{r(z) r(-z)}{(-z^2)} e^{z(x_1-x_2+t_1-t_2)} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{|r(-i\Omega)|^2}{(\Omega^2)} e^{-i\Omega(x_1-x_2+t_1-t_2)}, \end{aligned} \quad (5.85)$$

donde utilizamos que $r(i\Omega) = r^*(-i\Omega)$ para Ω real.

Finalmente, escribimos la contribución propia del campo como:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x_1, x_2, t_1, t_2) + \mathcal{B}(x_1, x_2, t_1, t_2) &= (\text{Campo Libre}) + (\text{Cruzados}) + (\text{Transitorios}) \\ &+ \frac{\Theta(-x_1) \Theta(-x_2)}{\beta_\phi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{|r(-i\Omega)|^2}{\Omega^2} [\Theta(x_1 - x_2 + t_1 - t_2) \Theta(x_2 + t_2 - t_0) \\ &\times e^{-i\Omega(x_1-x_2+t_1-t_2)} + \Theta(x_2 - x_1 + t_2 - t_1) \Theta(x_1 + t_1 - t_0) e^{i\Omega(x_1-x_2+t_1-t_2)}], \end{aligned} \quad (5.86)$$

donde cabe remarcar el hecho de que tiene exactamente la misma forma que las contribuciones obtenidas a partir del ansatz (3.23) y sus modos modificados para la llamada

contribución de vacío del capítulo 3 (ó Refs. [32, 35]) dentro de un esquema de cuantización canónica en el estacionario para el caso de la fuerza de Casimir entre dos placas. En otras palabras, si hubiésemos utilizado el ansatz y el método del capítulo 3 para el presente problema de una placa delta de Dirac, hubiésemos obtenido que la contribución de vacío a la correlación del campo estaría dada por (5.86). Entonces, la contribución de vacío del capítulo 3 se corresponde con la contribución propia del campo de este capítulo.

Considerando todo, mostramos que el límite de tiempos largos de una delta de Dirac de material real presenta contribuciones tanto del baño como del propio campo. Como venimos sugiriendo, el resultado claramente puede ser extendido a otras configuraciones en una dimensión $(1 + 1)$ pero los cálculos son más complicados. La conclusión entonces parece ser general, es decir, mostramos que una situación incluyendo contornos o, análogamente, incluyendo regiones de vacío, no sólo presentará en el régimen de tiempos largos la contribución de los baños sino que también la del propio campo modificado. Por lo tanto, esta situación presenta un nuevo tipo de escenario, donde el régimen de tiempos largos es estacionario pero tiene contribuciones de dos partes del sistema compuesto. Cabe destacar que el comportamiento y la situación estacionaria en el caso con regiones de vacío es radicalmente diferente del caso de material en todo el espacio. Sin embargo, la contribución del material, considerada por su lado, se comporta de la misma forma, es decir, la contribución asociada a los grados de libertad de polarización es transitoria y se desvanece en el estacionario, mientras que la de los baños sobrevive y forma parte del régimen de tiempos largos. La gran diferencia al incluir contornos es que no es la única que sobrevive. Esto se debe al hecho de que mientras el campo tiende a desaparecer dentro del material debido a la disipación, afuera fluctúa libremente sin atenuarse. Esto hace que las fluctuaciones de afuera se propaguen hacia adentro del material hasta que finalmente se alcanza la situación estacionaria como régimen de tiempos largos, cuando el material ha relajado y las dinámicas son reducidas a las estacionarias, permitiendo describir la contribución del propio campo de forma efectiva mediante los modos modificados de vacío que aparecen en el ansatz (3.23) del capítulo 3 (y empleado en las Refs.[32, 35]).

Por lo tanto, podemos concluir que todo procedimiento de cuantización en el régimen de tiempos largos, al menos para este modelo en $1 + 1$, debe considerar la contribución propia del campo para obtener los resultados correctos.

Si bien no presentamos los cálculos para el caso de $n + 1$ dimensiones en este escenario incluyendo regiones de vacío, de comparar los coeficientes de reflexión y transmisión (D.8) y (5.79), y la transformada de Laplace de la función de Green retardada (D.9) y

(5.78) para ambos casos, podemos notar que para problemas de dimensionalidad mayor tenemos ramas cortadas (branch cuts en inglés) $\sqrt{z^2 + k_{\parallel}}$ involucrando las coordenadas paralelas del momento k_{\parallel} en lugar de una simple z . Por lo tanto, las propiedades analíticas de la transformada de Laplace son distintas y el comportamiento temporal de la función de Green retardada cambiará críticamente. Si bien basados en estas diferencias, podría esperarse que la contribución propia del campo se anulara en el caso de mayor dimensionalidad, la continuidad entre el presente caso de material real y el resultado obtenido para el caso $n + 1$ (con $n \geq 1$) de permitividad dieléctrica constante para contornos arbitrarios del apartado 5.5.3 nos sugiere que esto no ocurre, y que el resultado de este apartado es general incluso para el caso de mayor dimensionalidad.

Como comentario final, cabe señalar que dos cuestiones aún quedan pendientes. Una de ellas continúa en la línea de lo que estamos comentando y tiene que ver con el hecho de que, estrictamente hablando, lo que mostramos prueba que para situaciones que incluyen regiones de vacío (o regiones donde el campo fluctúa libremente), la contribución propia del campo debe considerarse. Sin embargo, aún no aclara si es necesario que la región donde el campo no disipa sea de extensión infinita (como ocurre en el caso de la delta de Dirac para la coordenada perpendicular donde no hay invariancia de traslación). Este punto tan sutil no ha sido abordado en el presente capítulo; sin embargo, más adelante en esta Tesis volveremos a esto en un caso más complejo aún, cerrando completamente el cuadro de la física de estos sistemas fuera del equilibrio. La otra cuestión tiene que ver con el hecho de que todo lo realizado en este capítulo es para el campo escalar. Sin embargo, una situación realista en general involucraría el campo EM, que presenta diferencias y complicaciones en la cuantización debido a su naturaleza vectorial y simetría de gauge, lo que es particularmente difícil de tratar en los métodos funcionales. La extensión al campo EM será parte del objetivo del próximo capítulo.

Capítulo 6

Electrodinámica Cuántica de Medios Inhomogéneos y Anisótropos

Luego de mostrar cómo implementar el formalismo CTP en el caso de un campo escalar en interacción con modelos de material real, este capítulo lo dedicamos a extender el método al caso del campo EM A^μ . Si bien esto parece trivial a primera vista, tanto la naturaleza vectorial del campo EM como la libertad de gauge de la teoría electromagnética vuelven el proceso de cuantización (ya sea canónica [7] o por integrales funcionales [57]) mucho más complicado.

Por un lado, la naturaleza vectorial del campo repercute en cuanto a su interacción con los materiales, ya que enriquece su física al permitir el modelado de materiales con propiedades direccionales, es decir, con el campo EM cobra sentido físico el concepto de materiales anisótropos, cuestión difícil de lograr en el caso escalar.

Por otro lado, la libertad de gauge es un reflejo de una simetría interna de la teoría electromagnética. El electromagnetismo descrito por las ecuaciones de Maxwell describe el campo A^μ (de cuatro componentes) de tal forma que una transformación de gauge $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda$ (siendo Λ una función arbitraria) deja invariantes las ecuaciones de movimiento. Es decir, las ecuaciones poseen simetría de gauge. Esto hace que las acciones empleadas para obtener el electromagnetismo y sus interacciones a partir de un principio variacional deban ser también invariantes frente a una transformación de gauge. Más aún, la simetría de gauge en realidad nos está diciendo que el campo A^μ posee dos componentes independientes o, de otra manera, puede ser descrito en algún gauge por dos de sus cuatro componentes. Este hecho es lo que dificulta la cuantización basada en el campo A^μ ya que un planteo por integrales funcionales sobre las componentes (al estilo de lo que se hace en el caso escalar) resulta en integraciones redundantes debido

a la simetría de gauge. Sin embargo, esto puede solucionarse en el caso del formalismo in-out mediante la implementación del método de Faddeev-Popov.

Ahora, para el formalismo CTP que utilizamos en el capítulo anterior la solución no es tan inmediata. La clave para el desarrollo del caso escalar se encontraba en que, para calcular las integrales funcionales sobre los grados de libertad del material primero y sobre el campo después, extendimos directamente el resultado hallado en Ref.[54] para cierto tipo de integrales CTP, aprovechando el tipo de interacción entre el campo escalar y la materia modelada. Sin embargo, tanto el resultado de la integración CTP sobre los grados de libertad del material interactuando con un campo EM, como el resultado de la integración CTP sobre el campo EM luego, no se encuentran en la literatura. Por lo tanto, el objetivo de este capítulo es lograr extender dichos resultados en un contexto de interacción campo-materia completamente realista.

6.1. Integración CTP de la Interacción Materia - Campo EM

El primer objetivo del capítulo es el cálculo de la funcional generatriz a partir de las integraciones sucesivas de, primero, los grados de libertad del material y luego del campo EM, siguiendo el espíritu del capítulo anterior. Por lo tanto, el primer paso en esta dirección es calcular la acción de influencia para el campo.

Al igual que antes, describimos la materia ordinaria polarizable a través de grados de libertad cuánticos (no relativistas) asociados esta vez al vector de polarización \mathbf{P} de cada elemento de volumen del cuerpo polarizable. Cada uno de estos está sujeto a un baño independiente que genera una acción de influencia como en la teoría del QBM [41], es decir, como la de un oscilador armónico cuántico interactuando linealmente con un baño térmico que consiste en un conjunto de osciladores armónicos cuánticos.

Por otro lado, el campo EM lo describimos como un campo vectorial de gauge A^μ no masivo. El término de interacción podemos tomarlo como un acoplamiento entre el campo y la corriente generada en la materia polarizable o, equivalentemente, como una interacción dipolar entre los dipolos de polarización y el campo eléctrico. En otras palabras, la interacción podemos considerarla de dos maneras, dependiendo de qué grado de libertad está derivado. Sin embargo, como tenemos grados de libertad de materia no relativistas acoplados al campo de gauge, el cual es, desde el comienzo, un sistema relativista, la derivación no es solamente una derivada temporal, como pasa para el campo escalar del capítulo anterior (o en Ref.[37]).

Por lo tanto, los términos de acoplamiento pueden ser proporcionales a $\int d^4x P^j(x) E^j(x)$, acoplando el vector de polarización al momento canónico del campo (o sea, el campo eléctrico) en una interacción tipo dipolar; o, análogamente, $\int d^4x J_\mu(x) A^\mu(x)$, acoplando el cuadvectores corriente de la materia polarizable (no relativista) al campo EM (relativista). De ahora en más, nuestra notación de suma será la de Einstein para los subíndices y supraíndices griegos (un subíndice suma con un supraíndice), pero los índices latinos suman sin necesidad de ser opuestos (el carácter covariante o contravariante de las coordenadas espaciales será ajustado al introducir un signo menos cuando se pase de un subíndice a un supraíndice o viceversa).

Como el campo eléctrico viene definido por $E^j = -\partial_j A^0 - \dot{\partial}_0 A^j$, es claro que el término de interacción es invariante de gauge, mientras que de la segunda forma es claro que el término es un escalar de Lorentz. Con el objetivo de mantener la invariancia de gauge y considerando que la corriente J_μ debe ser una corriente conservada (su cuadri-divergencia debe anularse), podemos escribir el cuadvectores corriente como $J_\mu = (\nabla \cdot \mathbf{P}, -\dot{\mathbf{P}})$.

Luego de la integración sobre \mathbf{P} , eventualmente querremos integrar sobre el campo EM. Por ende, consideraremos la segunda de las formas para el término de interacción $\int d^4x J_\mu(x) A^\mu(x) = \int d^4x (\partial_j P^j A^0 - \dot{P}^j A^j)$ y dejamos una discusión más extensa para la próxima sección. Sin embargo, como primero vamos a integrar en \mathbf{P} , integramos por partes en las coordenadas espaciales correspondientes a cada derivada del término que involucra la divergencia. Por lo tanto, considerando que los caminos de los campos se desvanecen en infinito para toda dirección, el término de interacción lo escribimos proporcional a $-\int d^4x (\partial_j A^0 P^j + \dot{P}^j A^j)$.

Considerando todo, el modelo para el sistema total viene descrito por la acción inicial total:

$$S[A^\mu, \mathbf{P}_\mathbf{x}, \mathbf{q}_{n,\mathbf{x}}] = S_0[A^\mu] + S_0[\mathbf{P}_\mathbf{x}] + \sum_n S_0[\mathbf{q}_{n,\mathbf{x}}] + S_{\text{Curr}}[A^\mu, \mathbf{P}_\mathbf{x}] + \sum_n S_{\text{int}}[\mathbf{P}_\mathbf{x}, \mathbf{q}_{n,\mathbf{x}}], \quad (6.1)$$

donde $S_0[A^\mu]$, $S_0[\mathbf{P}_\mathbf{x}]$, $S_0[\mathbf{q}_{n,\mathbf{x}}]$ son las acciones libres para el campo EM, el vector de polarización y los grados de libertad de los baños térmicos que afectan los vectores de polarización en cada punto del espacio. Las etiquetas espaciales denotan el hecho de que las propiedades cambian con la posición mientras que el grado de libertad no presenta derivación espacial en su dinámica, es decir, dichos los grados de libertad son conjuntos continuos de campos en 0+1 dimensiones. Las dos últimas acciones son las de interacción entre el campo EM y los vectores de polarización (como discutimos recientemente) y entre estos mismos vectores y los baños térmicos en cada punto (que son acoplamientos lineales como en el QBM y los capítulos pasados).

Por lo tanto, el primer paso sería la integración CTP sobre los baños térmicos ($\{\mathbf{q}_{n,\mathbf{x}}\}$). Sin embargo, de la teoría del QBM, sabemos que esto ya está hecho ya que, como mencionamos anteriormente, resulta en que los vectores de polarización bajo la influencia de los baños térmicos se comportan en forma efectiva como partículas Brownianas. Entonces, para cada componente j en cada punto del espacio, el vector de polarización tendrá una evolución unitaria modificada por la acción de influencia del QBM:

$$S_{\text{IF}}[\mathbf{P}, \mathbf{P}'] = \int d\mathbf{x} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^{t_f} dt' \Delta P_{\mathbf{x}}^j(t) \left[-2 D_{\mathbf{x}}(t, t') \Sigma P_{\mathbf{x}}^j(t') + \frac{i}{2} N_{\mathbf{x}}(t, t') \Delta P_{\mathbf{x}}^j(t') \right], \quad (6.2)$$

donde $D_{\mathbf{x}}$ y $N_{\mathbf{x}}$ son los núcleos de disipación y ruido del QBM respectivamente (a diferencia de lo notado en el capítulo anterior, omitiremos QBM como subíndice de estos núcleos), mientras que $\Sigma P = (P + P')/2$ y $\Delta P = P' - P$ son las llamadas variables suma y diferencia.

Ahora, estamos interesados en calcular la integral funcional CTP asociada al cálculo de la acción de influencia que actúa sobre el campo EM debido a la interacción con materia. Por ende, considerando una constante de acoplamiento λ_0 entre el campo y los grados de libertad de polarización, la integral que define la acción de influencia $S_{\text{IF}}[A^\mu, A'^\mu]$ se escribe:

$$e^{iS_{\text{IF}}[A^\mu, A'^\mu]} = \int d\mathbf{P}_f \int d\mathbf{P}_i d\mathbf{P}'_i \int_{\mathbf{P}(t_i)=\mathbf{P}_i}^{\mathbf{P}(t_f)=\mathbf{P}_f} \mathcal{D}\mathbf{P} \int_{\mathbf{P}'(t_i)=\mathbf{P}'_i}^{\mathbf{P}'(t_f)=\mathbf{P}'_f} \mathcal{D}\mathbf{P}' \rho_{\mathbf{P}}(\mathbf{P}_i, \mathbf{P}'_i, t_i) \times e^{i\lambda_0 \int d\mathbf{x} g(\mathbf{x})(\nabla A^0 \cdot \mathbf{P} + \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{P}} - \nabla A'^0 \cdot \mathbf{P}' - \mathbf{A}' \cdot \dot{\mathbf{P}}')} e^{i(S_0[\mathbf{P}] - S_0[\mathbf{P}'] + S_{\text{IF}}[\mathbf{P}, \mathbf{P}'])}, \quad (6.3)$$

donde $A \cdot B \equiv \int_{t_i}^{t_f} dt A(t) B(t)$ y, por simplicidad, los productos entre vectores y matrices los omitiremos en la forma vectorial, y entonces por ejemplo $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \int_{t_i}^{t_f} dt A^j(t) B^j(t)$ y consiguientemente. Como en capítulos pasados, la distribución de materia g (que toma valores binarios (1 ó 0) si hay ó no materia en cada punto \mathbf{x}) la introducimos para denotar el hecho de que este cálculo toma lugar en todo punto del espacio que contiene material polarizable. Por lo tanto, la acción de influencia que actúa sobre el campo EM viene definida por la distribución de materia g que, al igual que antes, define en qué puntos la acción de influencia no es nula.

Como estamos tratando con un problema tridimensional, los vectores de polarización \mathbf{P} descritos como osciladores armónicos tridimensionales pueden descomponerse en sus componentes cartesianas, cada una sufriendo la acción de diferentes baños. Por ende, trivialmente tenemos que $S_0[\mathbf{P}] = \sum_{j=1}^3 S_0[P^j]$ y $S_{\text{IF}}[\mathbf{P}, \mathbf{P}'] = \sum_{j=1}^3 S_{\text{IF}}[P^j, P'^j]$.

Considerando, además, un estado inicial separable para el vector de polarización, la matriz densidad inicial es un producto de matrices densidad para cada componente del vector de polarización, es decir, $\rho_{\mathbf{P}}(\mathbf{P}_i, \mathbf{P}'_i, t_i) = \prod_{j=1}^3 \rho_{P^j}(P_i^j, P_i'^j, t_i)$. Entonces, si notamos finalmente que el término de interacción también se separa en cada componente, la integral CTP podemos escribirla como el producto de tres integrales para cada componente o dirección. Podemos dar un paso más aprovechando el hecho de que el material lo concebimos como un continuo de grados de libertad independientes (no hay interacciones entre ellos), dando lugar a la división de la grilla espacial en elementos de volumen $\Delta \mathbf{x}$ y escribiendo las integrales para cada componente como un producto sobre los puntos del espacio ($\prod_{\mathbf{x}}$) de una integral CTP genérica con etiqueta espacial \mathbf{x} .

Una vez discutido esto, escribimos las acciones en términos de las variables suma y diferencia. Con este propósito, consideramos que en cada punto del espacio, para la interacción tenemos:

$$\partial_j A^0 \cdot P^j - \partial_j A'^0 \cdot P'^j = -\partial_j \Sigma A^0 \cdot \Delta P^j - \partial_j \Delta A^0 \cdot \Sigma P^j, \quad (6.4)$$

$$A^j \cdot \dot{P}^j - A'^j \cdot \dot{P}'^j = -\Sigma A^j \Delta P^j \Big|_{t_i}^{t_f} - \Delta A^j \Sigma P^j \Big|_{t_i}^{t_f} + \Sigma \dot{A}^j \cdot \Delta P^j + \Delta \dot{A}^j \cdot \Sigma P^j, \quad (6.5)$$

y para las acciones libres podemos escribir:

$$S_0[P^j] - S_0[P'^j] = - \int d\mathbf{x} M_{\mathbf{x}} \Sigma \dot{P}_{\mathbf{x}}^j \Delta P_{\mathbf{x}}^j \Big|_{t_i}^{t_f} + \int d\mathbf{x} \int_{t_i}^{t_f} dt M_{\mathbf{x}} \Delta P_{\mathbf{x}}^j \left(\frac{d^2}{dt^2} + \Omega_{\mathbf{x}}^2 \right) \Sigma P_{\mathbf{x}}^j, \quad (6.6)$$

donde dejamos que cada grado de libertad, en cada punto \mathbf{x} , tenga sus propiedades particulares (masa y frecuencia natural).

Las integraciones funcionales sobre ΔP^j son gaussianas en cada punto del espacio, y podemos realizarlas directamente considerando los núcleos de ruido en cada dirección y punto, y definiendo las fuentes lineales como $R^j(t) = \Delta \mathbf{x} \int_{t_i}^{t_f} dt' \tilde{L}(t, t') \Sigma P^j(t') + \Delta \mathbf{x} \lambda_{0, \mathbf{x}} \left(\Sigma \dot{A}^j(t) - \partial_j \Sigma A^0(t) \right)$, con el núcleo $\tilde{L}(t, t') \equiv M_{\mathbf{x}} \left(\frac{d^2}{dt'^2} + \Omega_{\mathbf{x}}^2 \right) \delta(t-t') + D_{\mathbf{x}}(t, t')$.

En este punto, la restante integración funcional es sobre ΣP^j en cada punto del espacio. Sin embargo, podemos escribir cualquier camino ΣP^j en términos de una solución homogénea $P_0^j(t)$ satisfaciendo las condiciones iniciales y una solución particular $P_{\xi}^j(t)$ que describe el apartamiento de los caminos respecto del homogéneo, es decir, escribimos $\Sigma P^j(t) = P_0^j(t) + P_{\xi}^j(t)$. Considerando eso y que de las acciones iniciales, el momento canónico asociado a P^j está dado por $M \dot{P}^j + \lambda_0 A^j$, las soluciones pueden ser escritas como:

$$P_0^j(t) = M_{\mathbf{x}} \Sigma P_i^j \dot{G}_{\text{Ret},\mathbf{x}}(t - t_i) + \left(\Pi_i^j - \lambda_{0,\mathbf{x}} \Sigma A_i^j \right) G_{\text{Ret},\mathbf{x}}(t - t_i), \quad (6.7)$$

$$P_\xi^j(t) = \int_{t_i}^t ds G_{\text{Ret},\mathbf{x}}(t - s) \xi^j(s). \quad (6.8)$$

donde $\Pi_i^j = M \Sigma \dot{P}_i^j + \lambda_0 \Sigma A_i^j$, siendo $G_{\text{Ret},\mathbf{x}}(t - t')$ la función de Green retardada para el operador lineal integro-diferencial asociado al núcleo \tilde{L} del grado de libertad en \mathbf{x} .

Por lo tanto, podemos reemplazar la integración funcional sobre ΣP^j con límites de integración, por la integración funcional sobre ξ sin ellos, más una integración ordinaria sobre todos los posibles valores del momento canónico inicial Π_i^j .

Entonces, luego de efectuar los reemplazos resulta que la integración funcional sobre ξ es inmediata y, omitiendo por simplicidad las etiquetas espaciales, obtenemos para cada integral en cada punto del espacio:

$$\begin{aligned} e^{iS_{\text{IF}}[A^\mu, A'^\mu]} &= \prod_j \prod_{\mathbf{x}} \int d\Sigma P_i^j d\Sigma P_f^j \int d\Delta P_f^j \delta(\Delta P_f^j) d\Pi_i^j e^{i\Delta \mathbf{x} \lambda_0 (\Delta \dot{A}^j - \partial_j \Delta A^0) \cdot P_0^j} \\ &\times W_{P_j} \left(\Sigma P_i^j, \Pi_i^j, t_i \right) e^{i\Delta \mathbf{x} \lambda_0 \Delta A_i^j \Sigma P_i^j} e^{-i\Delta \mathbf{x} (M \Sigma \dot{P}_f^j + \lambda_0 \Sigma A_f^j) \Delta P_f^j} \\ &\times e^{-\Delta \mathbf{x} \frac{\lambda_0^2}{2} (\Delta \dot{A}^j - \partial_j \Delta A^0) \cdot G_{\text{Ret}} \cdot N \cdot [(\Delta \dot{A}^j - \partial_j \Delta A^0) \cdot G_{\text{Ret}}]^T} \\ &\times \delta \left(\Sigma P^j(t_f) - \Sigma P_f^j \right) e^{i\Delta \mathbf{x} \lambda_0^2 (\Delta \dot{A}^j - \partial_j \Delta A^0) \cdot G_{\text{Ret}} \cdot (\partial_j \Sigma A^0 - \Sigma \dot{A}^j)}, \quad (6.9) \end{aligned}$$

donde introdujimos una función delta para tener en cuenta la restricción sobre los extremos finales, y la función de Wigner para la componente j del vector de polarización en el punto \mathbf{x} definidas como en (5.16) (Refs.[54, 37]) según:

$$W_x(X, p, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta e^{i\Delta \mathbf{x} \cdot p \Delta} \rho_x \left(X - \frac{\Delta}{2}, X + \frac{\Delta}{2}, t \right), \quad (6.10)$$

donde en la exponencial, a diferencia de (5.16), no necesitamos la densidad ya que como está definido aquí el grado de libertad, dicha magnitud está incluida.

Ahora, por un lado, notemos que la solución homogénea podemos escribirla como $P_0^j(t) = P_0^{S,j}(t) - \lambda_{0,\mathbf{x}} \Sigma A_i^j G_{\text{Ret},\mathbf{x}}(t - t_i)$, donde $P_0^{S,j}$ es la solución homogénea para el acoplamiento bilineal (donde el momento canónico se haya relacionado únicamente a la derivada temporal del grado de libertad, como en el capítulo 5). Por otro lado, podemos tomar el exponente del último factor e integrar por partes en la segunda variable de tiempo, obteniendo:

$$G_{\text{Ret},\mathbf{x}} \cdot \Sigma \dot{A}^j = \int_{t_i}^{t_f} dt' G_{\text{Ret},\mathbf{x}}(t-t') \Sigma \dot{A}^j(t') = -G_{\text{Ret},\mathbf{x}}(t-t_i) \Sigma A_i^j - \partial_{t'} G_{\text{Ret},\mathbf{x}} \cdot \Sigma A^j, \quad (6.11)$$

donde utilizamos que $G_{\text{Ret},\mathbf{x}}(t-t_f) = 0$ ya que su comportamiento causal involucra una función de Heaviside en el argumento.

Considerando todo y reemplazándolo en la integral CTP, encontramos que un factor constituido por el segundo término de la última expresión de P_0^j en (6.7) se cancela con el primer término del miembro derecho de la última ecuación.

Como último paso para cancelar factores involucrando condiciones iniciales, debemos considerar el primer término en el exponente del primer factor de (6.9). Nuevamente, integrando por partes y usando la condición CTP (de unión de ramas en el punto final) para el campo EM, tenemos:

$$\Delta \dot{A}^j \cdot P_0^{S,j} = -\Delta A_i^j \Sigma P_i^j - \Delta A^j \cdot \dot{P}_0^{S,j}. \quad (6.12)$$

Entonces, el primer término de esta expresión se cancela con otro que contiene condiciones iniciales.

Finalmente, integrar sobre ΔP_f^j resulta inmediato al usar la función delta. Luego, también es fácil evaluar la integral sobre ΣP_f^j usando la otra función delta. Considerando que el resultado es para la componente j del vector de polarización en el punto \mathbf{x} , entonces obtenemos el producto sobre todas posiciones donde hay material. Agrupando cada factor y tomando el límite continuo para el grilla espacial, los exponentes vuelven a ser integrales limitadas por la distribución de materia $g(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} e^{iS_{\text{IF}}[A^\mu, A'^\mu]} &= \prod_j \left\langle e^{-i \int d\mathbf{x} g(\mathbf{x}) \lambda_{0,\mathbf{x}} (\Delta A^j \cdot \dot{P}_0^{S,j} + \partial_j \Delta A^0 \cdot P_0^{S,j})} \right\rangle_{\Sigma P_i^j, \Pi_i^j} \quad (6.13) \\ &\times e^{-\frac{1}{2} \int d\mathbf{x} g(\mathbf{x}) (\Delta \dot{A}^j - \partial_j \Delta A^0) \cdot \lambda_{0,\mathbf{x}}^2 G_{\text{Ret},\mathbf{x}} \cdot N_{\mathbf{x}} \cdot [(\Delta \dot{A}^j - \partial_j \Delta A^0) \cdot G_{\text{Ret},\mathbf{x}}]^T} \\ &\times e^{i \int d\mathbf{x} g(\mathbf{x}) \lambda_{0,\mathbf{x}}^2 (\Delta \dot{A}^j - \partial_j \Delta A^0) \cdot (\partial_{t'} G_{\text{Ret},\mathbf{x}} \cdot \Sigma A^j + G_{\text{Ret},\mathbf{x}} \cdot \partial_j \Sigma A^0),} \end{aligned}$$

donde $\langle \dots \rangle_{\Sigma P_i^j, \Pi_i^j} = \prod_{\mathbf{x}} \int d\Sigma P_{i,\mathbf{x}}^j \int d\Pi_{i,\mathbf{x}}^j \dots W_{Pj} \left(\Sigma P_{i,\mathbf{x}}^j, \Pi_{i,\mathbf{x}}^j, t_i \right)$ y dejamos que cada propiedad del material (carga, núcleo de ruido y función de Green) dependa de la posición mediante la introducción de un índice \mathbf{x} como etiqueta, permitiendo así que el material sea inhomogéneo.

Ahora, tengamos en cuenta que esta última expresión es para la componente j del vector de polarización. La expresión final para la acción de influencia del campo (6.3)

resulta del producto de esta expresión para cada componente. En este punto, como anticipamos anteriormente, podemos dotar al material de otra propiedad, que es la de la anisotropía (material birrefringente). Cada dirección j del vector de polarización puede corresponderse con cada uno de los tres ejes principales del elipsoide de Fresnel en cada punto del material (damos una discusión más extensa de esto en la sección 6.4.1). Por lo tanto, cada componente tiene diferentes propiedades (excepto por la carga), y mediante la introducción de funciones delta en el espacio para los últimos dos factores, podemos escribir en forma más compacta:

$$e^{iS_{\text{IF}}[A^\mu, A'^\mu]} = \left\langle e^{-i \int d\mathbf{x} g(\mathbf{x}) \lambda_{0,\mathbf{x}} \left(\Delta \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{P}}_0^{S,[j]} + \nabla \Delta A^0 \cdot \mathbf{P}_0^{S,[j]} \right)} \right\rangle_{\Sigma \mathbf{P}_i, \mathbf{\Pi}_i} \quad (6.14)$$

$$\times e^{-\frac{1}{2} (\Delta \dot{\mathbf{A}} - \nabla \Delta A^0) * \mathbb{N}_B * (\Delta \dot{\mathbf{A}} - \nabla \Delta A^0)} e^{i2 (\Delta \dot{\mathbf{A}} - \nabla \Delta A^0) * (\partial_{t'} \mathbb{D} * \Sigma \mathbf{A} + \mathbb{D} * \nabla \Sigma A^0)},$$

donde el producto $A * B \equiv \int d^4x A(\mathbf{x}, t) B(\mathbf{x}, t)$, mientras que:

$$(\mathbb{D})_{jk}(x, x') = \delta_{jk} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') g(\mathbf{x}) \frac{\lambda_{0,\mathbf{x}}^2}{2} G_{\text{Ret},\mathbf{x}}^{[j]}(t - t'), \quad (6.15)$$

$$(\mathbb{N}_B)_{jk}(x, x') = \delta_{jk} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') g(\mathbf{x}) \lambda_{0,\mathbf{x}}^2 G_{\text{Ret},\mathbf{x}}^{[j]} \cdot N_{\mathbf{x}}^{[j]} \cdot \left[G_{\text{Ret},\mathbf{x}}^{[j]} \right]^T, \quad (6.16)$$

son el núcleo-matriz de disipación asociado a un modelo bilineal (en el sentido del capítulo 5) de la interacción campo EM-materia y el núcleo-matriz de ruido únicamente asociado a los baños (como ocurría en el capítulo pasado). Los supraíndices $[j]$ denotan la dependencia con la dirección (material anisótropo).

Para dar una expresión cerrada de la acción de influencia, para empezar tenemos que mover las derivadas (tanto temporales como espaciales) sobre las componentes del campo a los núcleo-matrices bilineales con la finalidad de definir correctamente los núcleo-matrices tipo corriente (en el sentido del capítulo pasado) que actúan sobre el campo EM. Esto realmente es muy fácil gracias al comportamiento causal de la función de Green, la condición CTP sobre las componentes del campo EM y la convergencia de cada camino del campo EM cuando cualquiera de las coordenadas espaciales va a infinito. Entonces, integrando por partes, podemos escribir una forma covariante para los dos últimos factores:

$$e^{iS_{\text{IF}}[A^\mu, A'^\mu]} = \left\langle e^{-i \int d\mathbf{x} g(\mathbf{x}) \lambda_{0,\mathbf{x}} \left(\Delta \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{P}}_0^{S,[j]} + \nabla \Delta A^0 \cdot \mathbf{P}_0^{S,[j]} \right)} \right\rangle_{\Sigma \mathbf{P}_i, \mathbf{\Pi}_i} e^{-\frac{1}{2} \Delta A^\mu * N_{\mu\nu}^B * \Delta A^\nu}$$

$$\times e^{-i2 \Delta A^\mu * D_{\mu\nu} * \Sigma A^\nu}, \quad (6.17)$$

con el núcleo (covariante) de disipación EM, $D_{\mu\nu}$ y el núcleo (también covariante) de ruido EM, $N_{\mu\nu}^B$ asociado a la contribución de los baños dados por:

$$D_{\mu\nu}(x, x') = \Gamma_{\mu\nu}{}^{jk} \mathbb{D}_{jk}, \quad (6.18)$$

$$N_{\mu\nu}^B(x, x') = \Gamma_{\mu\nu}{}^{jk} \mathbb{N}_{jk}^B, \quad (6.19)$$

donde el operador $\Gamma_{\mu\nu}{}^{jk} \equiv \delta_\mu{}^0 \delta_\nu{}^0 \partial_{jk'}^2 - \delta_\mu{}^0 \delta_\nu{}^k \partial_{jt'}^2 - \delta_\mu{}^j \delta_\nu{}^0 \partial_{tk'}^2 + \delta_\mu{}^j \delta_\nu{}^k \partial_{tt'}^2$ con la prima denotando derivación en las respectivas coordenadas del punto x' y la delta covariante la introducimos según la notación de Einstein, a diferencia de todas las deltas en notación matricial empleadas hasta el momento con subíndices y supraíndices espaciales.

Por otro lado, al igual que lo que ocurría para el caso escalar en el capítulo 5, es claro que el primer factor del miembro derecho de (6.17) está enteramente relacionado al estado inicial de los grados de libertad de polarización. Sin embargo, con el objetivo de obtener una expresión para la funcional de influencia del campo, tenemos que calcular el factor para el estado inicial elegido. Esto podemos hacerlo fácilmente en caso de que el estado inicial sea uno térmico para cada dirección de polarización en cada elemento de volumen. Por lo tanto, considerando valores de temperatura $\beta_{P_{\mathbf{x}}^j}$ para cada dirección en cada punto, las integrales sobre ΣP_i^j y Π_i^j (en cada punto del espacio) son gaussianas, obteniendo luego de descartar el factor de normalización:

$$\left\langle e^{-i \int d\mathbf{x} g(\mathbf{x}) \lambda_{0,\mathbf{x}} (\Delta \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{P}}_0^{S,[j]} + \nabla \Delta A^0 \cdot \mathbf{P}_0^{S,[j]})} \right\rangle_{\Sigma P_i, \Pi_i} = e^{-\frac{1}{2} \Delta A^\mu * N_{\mu\nu}^P * \Delta A^\nu}, \quad (6.20)$$

donde el núcleo de ruido EM asociado a los grados de libertad de polarización está dado por:

$$N_{\mu\nu}^P(x, x') = \Gamma_{\mu\nu}{}^{jk} \mathbb{N}_{jk}^P, \quad (6.21)$$

con:

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_{jk}^P(x, x') &= \delta_{jk} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \frac{g(\mathbf{x}) \lambda_{0,\mathbf{x}}^2 M_{\mathbf{x}}^{[j]}}{2\Omega_{\mathbf{x}}^{[j]}} \coth \left(\frac{\beta_{P_{\mathbf{x}}^j} \Omega_{\mathbf{x}}^{[j]}}{2} \right) \left[\dot{G}_{\text{Ret},\mathbf{x}}^{[j]}(t - t_i) \dot{G}_{\text{Ret},\mathbf{x}}^{[j]}(t' - t_i) \right. \\ &\quad \left. + \Omega_{\mathbf{x}}^{[j]2} G_{\text{Ret},\mathbf{x}}^{[j]}(t - t_i) G_{\text{Ret},\mathbf{x}}^{[j]}(t' - t_i) \right]. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Por lo tanto, la acción de influencia del campo EM:

$$S_{\text{IF}}[A^\mu, A'^\mu] = \int d^4x \int d^4x' \Delta A^\mu(x) \left[-2 D_{\mu\nu}(x, x') \Sigma A^\nu(x') + \frac{i}{2} N_{\mu\nu}(x, x') \Delta A^\nu(x') \right], \quad (6.23)$$

con $N_{\mu\nu} \equiv N_{\mu\nu}^P + N_{\mu\nu}^B$, que satisface $N_{\mu\nu}(x, x') = N_{\nu\mu}(x', x)$.

Primero, cabe señalar que tiene la forma de (6.2). Esto en principio no es sorprendente, sin embargo la presente acción de influencia para el campo EM es el resultado de dos integraciones CTP ya que el sistema es uno compuesto de tres partes, y el hecho de que tenga esta forma cerrada es un mérito de la elección de un estado térmico inicial para los grados de libertad de polarización. Para un estado inicial no térmico, esta forma no puede lograrse. Más aún, mientras que los núcleos en la teoría del QBM dependen de la diferencia de los argumentos, los presentes núcleos EM no.

Cabe destacar también que esta última expresión es análoga a la encontrada para el caso del campo escalar para cada modelo de interacción en (5.21) y (5.39) respectivamente. Sin embargo, como en este caso estamos tratando con un campo de gauge abeliano (ver Ref.[57]), todos los núcleos contienen el operador diferencial $\Gamma_{\mu\nu}{}^{jk}$, el cual básicamente garantiza que la acción de influencia sea invariante de gauge. De hecho, podemos ver fácilmente que $\partial^\mu \Gamma_{\mu\nu}{}^{jk} = \partial'^\nu \Gamma_{\mu\nu}{}^{jk} \equiv 0$, lo que hace que la cuadri-divergencia de todos los núcleos se anule, es decir, $\partial^\mu D_{\mu\nu} = \partial^\mu N_{\mu\nu} = \partial'^\nu D_{\mu\nu} = \partial'^\nu N_{\mu\nu} = 0$. Ésta es la propiedad necesaria para asegurar la invariancia de gauge, de manera que es el requisito físico para toda acción de influencia del campo EM de la forma de (6.23) para ser invariante de gauge. En otras palabras, cualquier acción de influencia cuadrática debe tener núcleos EM de disipación y ruido con cuadri-divergencias nulas en ambos índices.

No obstante, esto es verdaderamente un requisito matemático esperado que viene del hecho físico de que los núcleos son básicamente funciones de correlación del cuadvivector corriente J_μ (definido en el término de interacción), la cual es una corriente conservada gracias a la invariancia de gauge de la teoría electromagnética. Si rompemos la invariancia de gauge, la corriente no es conservada necesariamente como pasa para el campo de Proca (ver Ref.[7]), de manera que todas propiedades que obtuvimos son claramente esperadas como requisitos a satisfacer por una teoría electromagnética físicamente consistente.

6.2. Funcional Generatriz CTP para el Campo EM

En esta sección calcularemos la funcional generatriz CTP para un campo de gauge. Claramente, el resultado obtenido en la última sección para la funcional de influencia del campo EM será nuestro punto de partida. En este caso, a diferencia del capítulo pasado,

estamos tratando con un campo de gauge abeliano de espín 1 $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$ (siendo A^0 y \mathbf{A} los potenciales eléctrico y vector respectivamente) bajo la influencia de grados de libertad de materia, modelados a través de los núcleos de disipación y ruido EM en la acción de influencia obtenidos en la última sección. Aunque usaremos el resultado principal (6.23), resumiremos brevemente algunos puntos de la discusión previa en torno a los términos de interacción.

La simetría de gauge de la teoría electromagnética exige que los términos de interacción deben ser invariantes de gauge. Por ende, los modelos de acoplamiento bilineales (como el que consideramos en el capítulo pasado) se ven excluidos desde el comienzo debido a que un término de interacción del estilo en las acciones iniciales no es invariante de gauge.

Sin embargo, el acoplamiento tipo corriente presenta una sutil variación conceptual. Este tipo de acoplamiento no puede ser en la derivada temporal del campo, como pasa para el campo escalar en el capítulo 5 ya que eso también rompe la simetría de gauge. Entonces, el término de interacción debe ser dado en términos de los campos eléctrico y magnético a fin de mantener la invariancia de gauge de toda la teoría. La regla general que está detrás de todas estas elecciones (tanto en este caso como en el escalar) es que la interacción para un acoplamiento tipo corriente debe ser en el momento canónicamente conjugado. En la teoría clásica del campo EM libre, el momento canónico se define como $\Pi^\mu \equiv F^{0\mu} = \delta_i^\mu E^i$ (donde $F^{\nu\mu}$ es el tensor de campo EM).

Desde un punto de vista conceptual, es bien sabido que $\Pi^0 \equiv 0$ y, consecuentemente, el momento canónico de la componente temporal de A^μ no está bien definido, implicando que un procedimiento de cuantización no será inmediato (a diferencia del caso escalar). Sin embargo, no necesitamos todavía concentrarnos en eso, aunque ya veremos cómo tratamos ese problema con nuestro enfoque.

Considerando la linealidad de los términos de interacción, podemos escribir directamente la funcional generatriz CTP del campo de gauge como integral CTP-Feynman:

$$\begin{aligned}
 Z_{\text{CTP}}[J_\mu, J'_\mu] &= \int dA_f^\mu \int dA_i^\mu dA_i^{\prime\mu} \int_{A^\mu(t_i)=A_i^\mu}^{A^\mu(t_f)=A_f^\mu} \mathcal{D}A^\mu \int_{A^{\prime\mu}(t_i)=A_i^{\prime\mu}}^{A^{\prime\mu}(t_f)=A_f^{\prime\mu}} \mathcal{D}A^{\prime\mu} e^{i(J_\mu * A^\mu - J'_\mu * A^{\prime\mu})} \\
 &\times e^{i(S_0[A^\mu] - S_0[A^{\prime\mu}])} e^{iS_{\text{IF}}[A^\mu, A^{\prime\mu}]} \rho_{\text{EM}}(A_i^\mu, A_i^{\prime\mu}, t_i). \quad (6.24)
 \end{aligned}$$

Decimos integral CTP-Feynman ya que las integraciones funcionales son en los campos únicamente. Asumimos, gracias a la simpleza de las interacciones, que las integraciones en los momentos, en este caso, no son necesarias (ver por ejemplo Refs.[57, 61] para el caso análogo en el formalismo in-out usual).

Cabe recordar que la invariancia frente a transformaciones de gauge (donde una solución se conecta a infinitas otras de la misma clase de gauge que contienen y representan la misma física) hace que este tipo de integrales involucren integraciones redundantes sobre caminos contenidos en la misma clase de gauge. Por lo tanto, para extraer estas sumas redundantes podemos comenzar implementando el procedimiento de Faddeev-Popov (ver Refs.[57, 61]). Dependiendo de la elección de gauge representada por la condición de gauge $F[A^\mu] = 0$ (que tomaremos lineal), el procedimiento introduce deltas de fijado de gauge (una por cada campo) y determinantes que luego resultan en los términos de fantasmas en el lagrangiano que, en nuestro caso, pueden ser descartados ya que los fantasmas no acoplan al campo EM para cualquier condición de gauge lineal debido a la naturaleza abeliana del campo.

Ahora, las deltas funcionales podemos reescribirlas como términos de fijado de gauge en la exponencial que contiene las acciones libres del campo. Para esto, continuando con el procedimiento típico de Faddeev-Popov, cambiamos la condición de gauge en ambas deltas funcionales a $F[A^\mu] = C(x)$ y $F[A'^\mu] = C'(x)$ respectivamente, donde C y C' son funciones arbitrarias de las coordenadas (los determinantes relacionados a los fantasmas no cambian de todos modos). Como la funcional generatriz es independiente de C y C' , podemos multiplicarla por una distribución tipo CTP $e^{-\frac{i}{2\alpha}(C*C-C'*C')}$ (con un único parámetro de fijado de gauge α para ambos campos) e integrar sobre las funciones arbitrarias. Como queremos mantener la igualdad con (6.24), debemos considerar el gauge de Landau para una dada elección de la condición de gauge, donde $\alpha \rightarrow 0$, y efectivamente reobtenemos las deltas funcionales a partir de las exponenciales de fijado de gauge [8]. Así, tenemos:

$$\begin{aligned}
 Z_{\text{CTP}}[J_\mu, J'_\mu] &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int dA_{\alpha,f}^\mu \int dA_{\alpha,i}^\mu dA'_{\alpha,i}{}^\mu \int_{A^\mu(t_i)=A_{\alpha,i}^\mu}^{A^\mu(t_f)=A_{\alpha,f}^\mu} \mathcal{D}A^\mu \int_{A'^\mu(t_i)=A'_{\alpha,i}{}^\mu}^{A'^\mu(t_f)=A'_{\alpha,f}{}^\mu} \mathcal{D}A'^\mu \\
 &\times e^{i(J_\mu * A^\mu - J'_\mu * A'^\mu)} e^{i(\tilde{S}_0[A^\mu] - \tilde{S}_0[A'^\mu] + S_{\text{IF}}[A^\mu, A'^\mu])} \rho_{\text{EM}}(A_{\alpha,i}^\mu, A'_{\alpha,i}{}^\mu, t_i), \quad (6.25)
 \end{aligned}$$

con $\tilde{S}_0[A^\mu] = S_0[A^\mu] - \frac{1}{2\alpha} F[A^\mu] * F[A^\mu]$ siendo la nueva acción para el campo EM, incluyendo el típico término de fijado de gauge, que rompe la invariancia de gauge para todo α , pero nos permite tratar las componentes del campo como variables independientes. Es claro que resulta crucial que el parámetro de fijado de gauge sea único, lo cual es ciertamente muy natural ya que ambos campos en el formalismo CTP son necesarios para describir un único campo cuántico, de manera que la acción efectiva debe depender de un único parámetro. Por otro lado, podemos decir también que α debe ser único ya que la integral CTP siempre podemos escribirla en términos de un único campo CTP al

parametrizar las ambas ramas del contorno CTP. Por lo tanto, aplicando el método de Faddeev-Popov en este punto, es claro que α debe ser el mismo para ambas ramas.

Cabe señalar que incluimos apropiadamente subíndices α para tener en cuenta que cuando tomamos el gauge de Landau (mediante el límite $\alpha \rightarrow 0$), las configuraciones inicial y final del campo deben satisfacer la condición de gauge, ya que en este límite, el resultado debe ser el mismo que el que hubiesemos obtenido evaluando las deltas en las condiciones de gauge desde el comienzo. En realidad, tenemos que tener cuidado con esto sólo para los puntos inicial y final, y no introdujimos subíndices en las integraciones funcionales ya que, como veremos más abajo, el resultado correcto está naturalmente garantizado al tomar el límite en la función de Green asociada a la acción efectiva CTP incluyendo los términos de fijado de gauge. El límite $\alpha \rightarrow 0$ ó gauge de Landau impone la condición de gauge nula (selecciona la función arbitraria C igual a 0), es decir, tomar el límite implica que, para cada punto, el campo satisface la condición de gauge nula.

Ahora, cambiamos variables a $\Delta A^\mu = A'^\mu - A^\mu$ y $\Sigma A^\mu = (A^\mu + A'^\mu)/2$, lo que nos permite tratar cada componente como una variable independiente gracias a los términos de fijado de gauge que rompen dicha invariancia. Para continuar el cálculo, tenemos que integrar por partes las acciones libres, incluyendo los términos de fijado de gauge. Para esto, tenemos que elegir una condición de gauge.

En este punto, como estamos considerando condiciones lineales, el hecho que la condición de gauge en realidad contenga o no derivadas del campo, genera diferencias cruciales. Si tomamos el gauge temporal o axial, la condición de gauge podemos escribirla en general para ambos casos como $F[A^\mu] = t_\mu A^\mu$, dejando que t_μ sea un cuadrivector temporal o espacial en cada caso. Por ahora, mantenemos la generalidad en este cuadrivector sin elegir alguna de las condiciones en específico. De esta forma, no necesitamos integrar por partes ya que directamente tenemos:

$$-\frac{1}{2\alpha} \left(F[A^\mu] * F[A^\mu] - F[A'^\mu] * F[A'^\mu] \right) = \frac{1}{\alpha} F[\Delta A^\mu] * F[\Sigma A^\mu] = \frac{1}{\alpha} \Delta A^\nu * t_\nu t_\mu \Sigma A^\nu. \quad (6.26)$$

Para las acciones libres, tenemos:

$$\tilde{S}_0[A^\mu] - \tilde{S}_0[A'^\mu] = \int d\mathbf{x} \Delta A^\mu \eta_{\mu\nu} \Sigma F^{0\nu} \Big|_{t_i}^{t_f} - \int d^4x \Delta A^\mu \left[\eta_{\mu\nu} \partial_\sigma \partial^\sigma - \partial_\mu \partial_\nu - \frac{1}{\alpha} t_\mu t_\nu \right] \Sigma A^\nu. \quad (6.27)$$

Finalmente, considerando que $J_\mu * A^\mu - J'_\mu * A'^\mu = -\Sigma J_\mu * \Delta A^\mu - \Delta J_\mu * \Sigma A^\mu$, la integración funcional sobre ΔA^μ la realizamos fácilmente tomando $R_\mu = \int d^4x' \mathcal{L}_{\mu\nu}(x, x')$

$\Sigma A^\nu(x') - \Sigma J_\mu(x) = \mathcal{L}_{\mu\nu} * \Sigma A^\nu - \Sigma J_\mu$, análogamente a lo que hicimos en la pasada sección, con el operador $\mathcal{L}_{\mu\nu}(x, x') \equiv (-\eta_{\mu\nu} \square' + \partial'_\mu \partial'_\nu + \frac{1}{\alpha} t_\mu t_\nu) \delta(x - x') - 2D_{\mu\nu}(x, x')$. De esta forma, definiendo la funcional de Wigner para el campo EM como la extensión natural de (6.10) (ver Ref.[58] para el ejemplo escalar), obtenemos:

$$Z_{\text{CTP}}[\Sigma J_\mu, \Delta J_\mu] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int d\Sigma A_{\alpha,i}^\mu d\Sigma A_{\alpha,f}^\mu \int d\Delta A_{\alpha,f}^\mu \delta(\Delta A_{\alpha,f}^\mu) \int_{\Sigma A_{\alpha,i}^\mu}^{\Sigma A_{\alpha,f}^\mu} \mathcal{D}\Sigma A^\mu \quad (6.28)$$

$$\times e^{-i\Delta J_\mu * \Sigma A^\mu} e^{i \int d\mathbf{x} \Delta A_{\alpha,f}^\mu \eta_{\mu\nu} \Sigma F_{\alpha,f}^{0\nu}} W_{\text{EM}} \left[\Sigma A_{\alpha,i}^\mu, -\eta_{\mu\nu} \Sigma F_{\alpha,i}^{0\nu}, t_i \right] e^{-\frac{1}{2} R_\mu * (N^{-1})^{\mu\nu} * R_\nu},$$

donde cabe señalar que la funcional de Wigner para el caso EM resulta ser un objeto dependiente del gauge.

El próximo paso, al igual que en la sección anterior, es escribir los caminos ΣA^μ en términos de sus condiciones iniciales y la función de Green retardada asociada al operador $\mathcal{L}_{\mu\nu}$. La ecuación de movimiento para el campo EM asociada a la acción efectiva CTP viene dada por:

$$\left(\eta_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu - \frac{1}{\alpha} t_\mu t_\nu \right) A^\nu(x) + 2 \int d^4 x' D_{\mu\nu}(x, x') A^\nu(x') = 0, \quad (6.29)$$

de manera que la función de Green retardada (o mejor dicho, el tensor de Green retardado) para $t > t'$ viene definida por:

$$\left(\eta_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu - \frac{1}{\alpha} t_\mu t_\nu \right) \mathcal{G}_{\text{Ret},\alpha}^{\nu\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t-t') + 2 \int d^4 x'' D_{\mu\nu}(x, x'') \mathcal{G}_{\text{Ret},\alpha}^{\nu\lambda}(\mathbf{x}'', \mathbf{x}', t''-t') = 0, \quad (6.30)$$

sujeta a las condiciones iniciales $\mathcal{G}_{\text{Ret},\alpha}^{\nu\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', 0) = 0$ y $\dot{\mathcal{G}}_{\text{Ret},\alpha}^{\nu\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', 0) = \eta^{\nu\lambda} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$.

Cabe remarcar el hecho de que el tensor de Green retardado depende tanto del parámetro de gauge α como de la diferencia de los tiempos.

Por ende, las soluciones para cada componente de ΣA^μ , separadas en las soluciones homogénea $A_{0,\alpha}^\mu$ y particular $A_{\xi,\alpha}^\mu$, podemos escribirlas como:

$$\begin{aligned} \Sigma A^\mu(x) &= A_{0,\alpha}^\mu(x) + A_{\xi,\alpha}^\mu(x) \quad (6.31) \\ &= \int d\mathbf{x}' \dot{\mathcal{G}}_{\text{Ret},\alpha}^{\mu\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t - t_i) \eta_{\nu\sigma} \Sigma A_{\alpha,i}^\sigma(\mathbf{x}') \\ &+ \int d\mathbf{x}' \mathcal{G}_{\text{Ret},\alpha}^{\mu\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t - t_i) \eta_{\nu\sigma} \Sigma \dot{A}_{\alpha,i}^\sigma(\mathbf{x}') + \int d^4 x' \mathcal{G}_{\text{Ret},\alpha}^{\mu\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t - t') \xi_\nu(x'), \end{aligned}$$

donde claramente notamos que ambas condiciones iniciales dependen del parámetro de gauge, mientras que la cuadri-función ξ_ν no, ya que representa el corrimiento de los caminos respecto de los homogéneos y, por lo tanto, cada componente se trata por separado y sin dependencia en α .

Sin embargo, el paso a realizar es muy sutil ya que consiste en el reemplazo de la integración funcional sobre los posibles caminos por dos integraciones ordinarias sobre las configuraciones de campo y momento iniciales (involucrando a la solución homogénea), y una integración funcional sobre ξ^μ , que involucra la solución particular.

En el presente caso, este reemplazo no es tan fácil ya que los momentos canónicos no son proporcionales a las derivadas temporales de las componentes del campo, como ocurría tanto en la sección pasada como en el capítulo anterior. Más aún, la elección de la condición de gauge es un punto crucial para la realización de los reemplazos. Como mencionamos al comienzo de esta sección, es bien sabido que el momento canónico de la componente temporal A^0 no está bien definido ya que $\Pi^0 \equiv 0$. Esto está íntimamente relacionado a lo problemático de la teoría electromagnética para ser cuantizada, dado que el procedimiento de cuantización canónica no puede desarrollarse en forma directa (ver por ejemplo Refs.[7, 61]). Lo mismo ocurre para una cuantización por integrales de camino (no CTP), aunque el método de Faddeev-Popov muestra ser eficiente en ese contexto ofreciendo ninguna restricción sobre los valores del parámetro de gauge α [57].

En este punto, mostramos que el método de Faddeev-Popov permite el tratamiento de esta situación también, pero restringiendo la teoría con el término de fijado gauge al gauge de Landau. Ahora veremos que tomando este límite cuidadosamente, estamos imponiendo consistentemente la condición de gauge en el formalismo CTP, salvando de problemas formales a este enfoque.

Eligiendo el gauge temporal, el cuadvectores t_μ lo tomamos como uno tipo tiempo, siendo nuestra elección particular la más simple, $t_\mu = (1, 0, 0, 0)$. La condición de gauge resulta $F[A^\mu] = A^0$. Notemos que de todas las posibles elecciones de las funciones C , que serán iguales a la condición de gauge, el gauge de Landau implica la condición $C = 0$. En otras palabras, el campo satisface el gauge de Landau para la condición de gauge temporal (nula). Esto significa que las soluciones y tensores de Green obtenidos para un valor arbitrario del parámetro de gauge α deben tomarse satisfaciendo el gauge de Landau. En este límite, como podemos ver de la ecuación para el tensor de Green (6.30), $\mathcal{G}_{Ret, \alpha \rightarrow 0}^{0\nu}$ resulta idénticamente nulo.

Por otra parte, como mencionamos antes, en la teoría electromagnética usual sabemos que los momentos canónicos están dados por $\Pi^\mu \equiv F^{0\mu} = \delta_j^\mu E^j$. En el gauge temporal

en particular, el campo eléctrico está dado por $E^j = -\partial_0 A^j$, de manera que los momentos canónicos se escriben $\Pi^\mu = -\delta^\mu_j \dot{A}^j$. Pero en nuestra teoría con términos de fijado de gauge (sin imponer condición de gauge alguna), el momento canónico viene dado como siempre por $\Pi^\mu = \delta^\mu_j \left(\partial^j A^0 - \dot{A}^j \right)$. Esto hace que la derivada temporal inicial de cada componente del campo podamos escribirla como $\Sigma \dot{A}_i^\sigma = \delta^\sigma_0 \Sigma \dot{A}_i^0 + \delta^\sigma_j \left(\partial^j \Sigma A_i^0 - \Sigma \Pi_i^j \right)$, donde la componente temporal de la derivada es la única que no puede reescribirse en términos del momento canónico y derivadas espaciales de dicha componente. Por lo tanto, reemplazando esto en la solución homogénea $A_{0,\alpha}^\mu$, la reescribimos en términos de los momentos canónicos y, luego de integrar por partes los términos asociados a $\partial^j \Sigma A_i^0$ (y descartar los términos de borde por convergencia), dicha solución resulta:

$$\begin{aligned}
 A_{0,\alpha}^\mu(x) &= \int d\mathbf{x}' \left(\dot{\mathcal{G}}_{\text{Ret},\alpha}^{\mu 0}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t - t_i) - \partial'_j \mathcal{G}_{\text{Ret},\alpha}^{\mu j}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t - t_i) \right) \Sigma A_{\alpha,i}^0(\mathbf{x}') \\
 &+ \int d\mathbf{x}' \mathcal{G}_{\text{Ret},\alpha}^{\mu 0}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t - t_i) \Sigma \dot{A}_{\alpha,i}^0(\mathbf{x}') \\
 &- \int d\mathbf{x}' \dot{\mathcal{G}}_{\text{Ret},\alpha}^{\mu j}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t - t_i) \Sigma A_{\alpha,i}^j(\mathbf{x}') - \int d\mathbf{x}' \mathcal{G}_{\text{Ret},\alpha}^{\mu j}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t - t_i) \Sigma \Pi_{j,\alpha,i}(\mathbf{x}').
 \end{aligned} \tag{6.32}$$

Entonces, los reemplazos en las integraciones podemos realizarlos eficientemente para luego integrar fácilmente en $\Delta A_{\alpha,f}^\mu$, seguido de $\Sigma A_{\alpha,f}^\mu$ gracias a las deltas, y luego funcionalmente en ξ_μ , obteniendo:

$$\begin{aligned}
 Z_{\text{CTP}}[\Sigma J_\mu, \Delta J_\mu] &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int d\Sigma A_{\alpha,i}^\mu \int d\Sigma \Pi_{j,\alpha,i} e^{-i\Delta J_\mu * A_{0,\alpha}^\mu} W_{\text{EM}} \left[\Sigma A_{\alpha,i}^\mu, -\Sigma \Pi_{j,\alpha,i}, t_i \right] \\
 &\times e^{-\frac{1}{2} \Delta J_\mu * \mathcal{G}_{\text{Ret},\alpha}^{\mu\nu} * N_{\nu\beta} * \left(\mathcal{G}_{\text{Ret},\alpha}^{\sigma\beta} \right)^T * \Delta J_\sigma} e^{-i\Delta J_\mu * \mathcal{G}_{\text{Ret},\alpha}^{\mu\nu} * \Sigma J_\nu}.
 \end{aligned} \tag{6.33}$$

Finalmente, tomamos el gauge de Landau ($\alpha \rightarrow 0$), que resulta en $\mathcal{G}_{\text{Ret},\alpha}^{\mu\nu} \rightarrow \delta^\mu_j \delta^\nu_k \mathcal{G}_{\text{Ret,LG}}^{jk}$ sobre el tensor de Green retardado así como también restringe las integraciones ya que $\Sigma A_{\alpha,i}^\mu \rightarrow \Sigma \mathbf{A}_i$ and $\Sigma \dot{A}_{\alpha,i}^\mu \rightarrow \Sigma \mathbf{\Pi}_i = -\Sigma \dot{\mathbf{A}}_i$. No obstante, cabe remarcar que este punto implica la imposición (indirecta) del gauge temporal sobre el campo a todo tiempo. Es más, si consideramos que el campo es libre para los tiempos anteriores al inicial, imponer $A^0 = 0$ en las ecuaciones de campo, se traduce en tres ecuaciones para el potencial vector \mathbf{A}_i más una condición residual (resultante de la ecuación para A^0) dada por $\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_i = 0$. Esto define completamente al campo, sus componentes y momentos para tiempos anteriores al inicial, e implica que el campo tiene dos componentes independientes. Por lo tanto, tomando el límite $\alpha \rightarrow 0$ debe incluir, particularmente, que las condiciones iniciales verifican $A_i^0 = 0$ y $\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_i = 0$ (siendo las componentes del campo transversales a

la dirección de propagación de cada modo del campo). Entonces, naturalmente podemos escribir:

$$\begin{aligned}
 Z_{\text{CTP}}[\Sigma\mathbf{J}, \Delta\mathbf{J}] &= \int d\Sigma\mathbf{A}_i \int d\Sigma\mathbf{\Pi}_i e^{-i\Delta\mathbf{J}\cdot\mathbf{A}_0} W_{\text{EM}}[\Sigma\mathbf{A}_i, \Sigma\mathbf{\Pi}_i, t_i] \\
 &\times e^{-\frac{1}{2}\Delta\mathbf{J}\cdot\overleftrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{Ret,LG}}(\partial_{tt'}^2\mathbb{N})\cdot\overleftrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{Ret,LG}}^T\Delta\mathbf{J}} e^{-i\Delta\mathbf{J}\cdot\overleftrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{Ret,LG}}\Sigma\mathbf{J}} \\
 &= \left\langle e^{-i\Delta\mathbf{J}\cdot\mathbf{A}_0} \right\rangle_{\Sigma\mathbf{A}_i, \Sigma\mathbf{\Pi}_i} e^{-\frac{1}{2}\Delta\mathbf{J}\cdot\overleftrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{Ret,LG}}(\partial_{tt'}^2\mathbb{N})\cdot\overleftrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{Ret,LG}}^T\Delta\mathbf{J}} \\
 &\times e^{-i\Delta\mathbf{J}\cdot\overleftrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{Ret,LG}}\Sigma\mathbf{J}},
 \end{aligned} \tag{6.34}$$

donde $\Sigma\mathbf{A}_i$ y $\Sigma\mathbf{\Pi}_i$ son tomados como condiciones iniciales de campo libre en el gauge temporal (y consecuentemente perpendiculares a los vectores de onda de cada modo), teniendo:

$$A_0^j(x) = - \int d\mathbf{x}' \dot{\mathcal{G}}_{\text{Ret,LG}}^{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t - t_i) \Sigma A_i^k(\mathbf{x}') + \int d\mathbf{x}' \mathcal{G}_{\text{Ret,LG}}^{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t - t_i) \Sigma \Pi_i^k(\mathbf{x}'), \tag{6.35}$$

la cual es la solución homogénea para la ecuación de campo luego de imponer el gauge temporal.

Cabe señalar que esto es la extensión natural (y esperada) del resultado obtenido para el campo escalar en el capítulo anterior. No es una obviedad ni una casualidad si no que es un mérito del procedimiento adoptado y el gauge elegido. No obstante, la naturaleza del campo EM como campo de gauge hace que tengamos que elegir una condición de gauge con el objetivo de desarrollar los cálculos. Habiendo elegido el gauge temporal, vemos que el primer factor de (6.34), involucrando las condiciones iniciales, impone el cálculo mediante la introducción de las condiciones iniciales en el gauge elegido.

6.3. Energía, Vector de Poynting y Tensor de Maxwell

Al igual que en el capítulo anterior, una vez que calculamos la funcional generatriz CTP para el campo EM, procedemos a calcular la correlación del campo como derivadas funcionales de la funcional generatriz. Inicialmente, introducimos cuadvectores como fuentes clásicas CTP J_μ, J'_μ . En el gauge temporal la funcional generatriz depende funcionalmente de las coordenadas espaciales de los cuadvectores fuentes J_μ, J'_μ , es decir, la funcional generatriz depende de \mathbf{J}, \mathbf{J}' . Por lo tanto, las funciones de correlación que involucran la coordenada temporal del campo, que se construyen a partir de las derivadas funcionales de la funcional generatriz con respecto a la coordenada temporal de

los cuadvectores fuentes J_μ, J'_μ , resultan nulas. Esto es claramente esperado ya que hemos elegido el gauge temporal, donde $A^0 \equiv 0$. De esta forma, la correlación de campo podemos escribirla:

$$\langle \widehat{A}^\mu(x_1) \widehat{A}^\nu(x_2) \rangle = \delta^\mu_j \delta^\nu_k \langle \widehat{A}^j(x_1) \widehat{A}^k(x_2) \rangle = \delta^\mu_j \delta^\nu_k \frac{\delta^2 Z_{CTP}}{\delta J'^j(x_1) \delta J^k(x_2)} \Big|_{\mathbf{J}=\mathbf{J}'=0}. \quad (6.36)$$

Como en el capítulo pasado, dado que la funcional generatriz tiene la forma simple (6.34), independientemente del estado inicial del campo, podemos calcular fácilmente las derivadas funcionales. Aprovechando las propiedades de simetría del núcleo de ruido, obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle \widehat{A}^j(x_1) \widehat{A}^k(x_2) \rangle &= \langle A_0^j(x_1) A_0^k(x_2) \rangle_{\Sigma \mathbf{A}_i, \Sigma \Pi_i} \\ &+ \left[\overleftrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{Ret,LG}} * \partial_{t't'}^2 \mathbb{N} * \left(\overleftrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{Ret,LG}} \right)^T \right]^{jk}(x_1, x_2) \\ &+ \frac{1}{2} \mathcal{G}_{\text{Jordan,LG}}^{jk}(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (6.37)$$

donde $\mathcal{G}_{\text{Jordan,LG}}^{jk}(x_1, x_2) \equiv i \left(\mathcal{G}_{\text{Ret,LG}}^{kj}(x_2, x_1) - \mathcal{G}_{\text{Ret,LG}}^{jk}(x_1, x_2) \right)$ es el propagador de Jordan (ver Ref.[36]) y A_0^j es la solución homogénea (6.35).

Como en el capítulo pasado, esta función de correlación corresponde a la función de Whightman para el campo como sistema abierto y es la generalización electromagnética de los resultados de Ref.[54] para un grado de libertad cuántico y el capítulo 5 para un campo escalar. De hecho, dado que el tensor de Green retardado $\mathcal{G}_{\text{Ret,LG}}^{jk}$ es real, la correlación es una cantidad compleja cuya parte imaginaria es $\mathcal{G}_{\text{Jordan,LG}}^{jk}$, mientras que la parte real se forma de los otros dos términos. Usando las típicas relaciones entre propagadores, el propagador de Hadamard podemos escribirlo:

$$\mathcal{G}_{\text{H,LG}}^{jk}(x_1, x_2) \equiv \langle A_0^j(x_1) A_0^k(x_2) \rangle_{\Sigma \mathbf{A}_i, \Sigma \Pi_i} + \left[\overleftrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{Ret,LG}} * (\partial_{t't'}^2 \mathbb{N}) * \left(\overleftrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{Ret,LG}} \right)^T \right]^{jk}(x_1, x_2), \quad (6.38)$$

donde, a diferencia del capítulo pasado, esta expresión es válida para todo estado inicial del campo (no sólo para un estado térmico), y es claro que este propagador depende del gauge elegido. De manera análoga al caso escalar, el propagador de Hadamard tiene dos contribuciones separadas. Una asociada a los grados de libertad del material representados en el núcleo de ruido \mathbb{N} , el cual se divide en dos contribuciones debido a la naturaleza compuesta del material (grados de libertad de polarización más baño en cada punto del

espacio). La otra contribución está enteramente relacionada a la dinámica efectiva del campo y su estado inicial (que a diferencia del capítulo anterior, es arbitrario).

Con la correlación del campo, podemos calcular las cantidades físicas de interés. Comenzamos dando una expresión formal para el vector Poynting ya que su definición carece de ambigüedad [45, 62]. Considerando que el material real en cuestión es no magnético, podemos definir el vector de Poynting como:

$$\widehat{S}^j(x_1) = \frac{1}{4\pi} \epsilon^{jkl} \widehat{E}^k(x_1) \widehat{B}^l(x_1), \quad (6.39)$$

donde ϵ^{jkl} es el símbolo de Levi-Civita y cabe señalar que el vector de Poynting es una cantidad invariante de gauge, debido a que los campos eléctrico y magnético lo son.

Al igual que en el capítulo 5 (ver también Ref.[8]), y empleando la técnica de división de puntos, el valor de expectación del vector de Poynting lo escribimos:

$$\begin{aligned} \langle \widehat{S}^j(x_1) \rangle &= -\frac{1}{4\pi} \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \epsilon^{jkl} \epsilon^{lmn} \partial_{t_1} \partial_{m_2} \langle \widehat{A}^k(x_1) \widehat{A}^n(x_2) \rangle \\ &= \frac{1}{4\pi} \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \partial_{t_1} \left(\partial_{k_2} \delta_{jn} - \partial_{j_2} \delta_{kn} \right) \langle \widehat{A}^k(x_1) \widehat{A}^n(x_2) \rangle, \end{aligned} \quad (6.40)$$

donde ∂_{t_1} denota la derivada temporal en el punto x_1 y análogamente para las otras derivadas.

Es importante tener en cuenta que para usar la técnica de división de puntos, la función de correlación debe ser una cantidad regularizada a fin de obtener resultados finitos. Es más, todos los valores de expectación de interés esperamos que sean cantidades reales, como particularmente esperamos del vector de Poynting. Sin embargo, como en el capítulo anterior, a pesar de que esto no parece ser el caso ya que la correlación es compleja, el límite de coincidencia combinado con la definición simétrica del propagador de Jordan, hace que la contribución imaginaria desaparezca al final del cálculo. Entonces, el valor de expectación del vector de Poynting puede escribirse en términos del propagador (regularizado) de Hadamard (6.38):

$$\langle \widehat{S}^j(x_1) \rangle = \frac{1}{4\pi} \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \partial_{t_1} \left(\partial_{k_2} \delta_{jn} - \partial_{j_2} \delta_{kn} \right) \mathcal{G}_{\text{H,LG}}^{kn}(x_1, x_2). \quad (6.41)$$

Esta última ecuación nos da la evolución temporal completa del vector de Poynting, el cual hereda las dos contribuciones del propagador de Hadamard.

Una vez que logramos una expresión para el vector de Poynting en términos del propagador de Hadamard, haremos lo mismo con la energía electromagnética y el tensor

de Maxwell (o de esfuerzos). Sin embargo, esto no es tan directo ya que para el campo EM, estas cantidades no tienen una única definición en materiales reales. Esto se relaciona a la libertad sobre las definiciones de las contribuciones mecánicas y electromagnéticas cuando la materia está acoplada al campo EM (ver por ejemplo la discusión para la teoría clásica dada en Ref.[45] para un medio lineal isotrópico, y el enfoque general en Ref.[62]) debido a la no coincidencia entre los campos de desplazamiento y eléctrico dentro del material macroscópico.

Sin embargo, dado que la densidad de energía y el tensor de Maxwell están definidos localmente en cada punto del espacio, podemos evitar esta discusión calculándolos en regiones de vacío, independientemente de si hay cuerpos materiales en otros puntos del espacio, es decir, si hay o no contornos materiales. Como en esas regiones no hay distinción entre los campos eléctrico y de desplazamiento, las definiciones de la densidad de energía y el tensor de Maxwell son únicas. Por lo tanto, las definiciones cuánticas de ambas cantidades vienen dadas por (ver [45, 62]):

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\text{EM}}(x_1) = \frac{1}{8\pi} \left(\widehat{\mathbf{E}}^2(x_1) + \widehat{\mathbf{B}}^2(x_1) \right), \quad (6.42)$$

$$\widehat{T}_{\text{Maxwell}}^{jk}(x_1) = \frac{1}{4\pi} \left[\widehat{E}^j(x_1) \widehat{E}^k(x_1) + \widehat{B}^j(x_1) \widehat{B}^k(x_1) - \frac{1}{2} \delta_{jk} \left(\widehat{\mathbf{E}}^2(x_1) + \widehat{\mathbf{B}}^2(x_1) \right) \right]. \quad (6.43)$$

Ahora, aplicando nuevamente la técnica de división de puntos, fácilmente obtenemos que los valores de expectación para ambas cantidades son:

$$\langle \widehat{\mathcal{H}}_{\text{EM}}(x_1) \rangle = \frac{1}{8\pi} \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \left[(\partial_{t_1} \partial_{t_2} + \partial_{k_1} \partial_{k_2}) \delta_{lm} - \partial_{m_1} \partial_{l_2} \right] \mathcal{G}_{\text{H,LG}}^{lm}(x_1, x_2), \quad (6.44)$$

$$\begin{aligned} \langle \widehat{T}_{\text{Maxwell}}^{jk}(x_1) \rangle = \frac{1}{4\pi} \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \left[\partial_{t_1} \partial_{t_2} \delta_{jm} \delta_{ks} + \epsilon^{jlm} \epsilon^{krs} \partial_{t_1} \partial_{r_2} - \frac{1}{2} \delta_{jk} \left[(\partial_{t_1} \partial_{t_2} \right. \right. \\ \left. \left. + \partial_{q_1} \partial_{q_2}) \delta_{ms} - \partial_{s_1} \partial_{m_2} \right] \right] \mathcal{G}_{\text{H,LG}}^{ms}(x_1, x_2), \quad (6.45) \end{aligned}$$

donde es claro que ambas cantidades también heredan la separación en dos contribuciones del propagador de Hadamard.

Cabe remarcar que esta expresión es la cantidad clave para estudiar la fuerza de Casimir entre cuerpos separados por regiones de vacío en una situación completamente

fuera del equilibrio para un campo EM, generalizando los resultados para el campo escalar del capítulo anterior.

Como comentario final, notemos que, en una formulación covariante, estas tres cantidades (vector de Poynting, densidad de energía y tensor de Maxwell) son parte del tensor (covariante) de energía-momento para el campo EM [62]. Sin embargo, restringimos nuestros cálculos para regiones sin material, evitando la discusión sobre la definición de cada cantidad dentro del material. El punto crucial aquí es que, independientemente de la definición considerada, podemos siempre escribir el valor de expectación en términos del propagador de Hadamard al hacer uso de la técnica de división de puntos. Por lo tanto, todas las cantidades tendrán la estructura de contribuciones del propagador de Hadamard (6.38). En una situación fuera del equilibrio, la dinámica transitoria del campo EM tiene contribuciones de cada parte del sistema compuesto. Por otro lado, el régimen de tiempos largos ($t_0 \rightarrow -\infty$) esperamos que esté definida como mucho por las contribuciones de los baños y el estado inicial, teniendo diferentes situaciones estacionarias dependiendo del estado inicial elegido, como ocurría para el campo escalar en el capítulo 5.

En la próxima sección, estudiaremos más en detalle la teoría electromagnética en gauge temporal y daremos una implementación concreta de todos los resultados generales obtenidos.

6.4. Electrodinámica Abierta en el Gauge Temporal

Hasta aquí, desarrollamos completamente el formalismo CTP para el campo EM interactuando con un material lineal, anisótropo y homogéneo en un contexto general. En la última sección, escribimos todas las cantidades físicas en términos del propagador de Hadamard.

En esta sección, estudiaremos un ejemplo simple para obtener una aplicación directa del formalismo desarrollado. Comenzaremos examinando las ecuaciones de movimiento electromagnéticas, para luego concentrarnos en los aspectos dinámicos del campo EM en un material infinito, homogéneo e isótropo.

6.4.1. Ecuación para el Campo EM en el Gauge Temporal

De la discusión dada en al final de la sección 6.2, sabemos que el tensor de Green retardado viene definido por las ecuaciones de movimiento (6.29) luego de imponer el gauge temporal ($A^0 \equiv 0$). Es importante que notemos que estas ecuaciones incluyen

el término de fijado de gauge para el gauge temporal, correspondiente al término que contiene el parámetro de fijado de gauge α . La única que contiene este término es la ecuación para la coordenada temporal ($\mu = 0$):

$$\square A^0 - \partial_0 \partial_\nu A^\nu - \frac{1}{\alpha} A^0 + 2 \int d^4 x' D_{0\nu}(x, x') A^\nu(x') = 0. \quad (6.46)$$

Ahora, tomando el gauge de Landau, cuando $\alpha \rightarrow 0$, esto implica naturalmente que $A^0 \equiv 0$ de manera de tener términos divergentes. Entonces, el gauge temporal (nulo) es introducido naturalmente por la elección del gauge de Landau. La ecuación en este caso resulta:

$$-\partial_0 \partial_m A^m + 2 \int d^4 x' D_{0m}(x, x') A^m(x') = 0. \quad (6.47)$$

La ecuación dinámica para al componente temporal A^0 en la condición de gauge nula resulta en condición residual para las componentes restantes A^m . A partir de la definición del núcleo de disipación EM (6.18), D_{0m} puede ser calculado fácilmente y la condición la escribimos:

$$\partial_m \left[\partial_0 A^m(\mathbf{x}, t) - \lambda_{0,\mathbf{x}}^2 g(\mathbf{x}) \int_{t_i}^t dt' \dot{G}_{\text{Ret},\mathbf{x}}^{[m]}(t-t') A^m(\mathbf{x}, t') \right] = 0, \quad (6.48)$$

donde consideramos que $G_{\text{Ret},\mathbf{x}}^{[m]}(t-t')$ es una función de $t-t'$ más una distribución $\Theta(t-t')$, a fin de escribir su derivada, y que $G_{\text{Ret},\mathbf{x}}^{[m]}(0) = 0$.

Escribiendo el primer término como una integral:

$$\partial_0 A^m(\mathbf{x}, t) = - \int_{t_i}^t dt' \partial_{t'} \left(\delta(t'-t) \right) A^m(\mathbf{x}, t'), \quad (6.49)$$

entonces, como para toda función f tenemos que $\partial_t f(t-t') = -\partial_{t'} f(t-t')$ y dado que la derivada de una función delta de Dirac es una función par, la condición podemos escribirla en general en su forma vectorial como:

$$\nabla \cdot \left[\int_{t_i}^t dt' \partial_t \left(\overleftrightarrow{\varepsilon}(t-t', \mathbf{x}) \right) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t') \right] = 0, \quad (6.50)$$

donde el tensor de permitividad para un material inhomogéneo y anisótropo se define como:

$$\left(\overleftrightarrow{\varepsilon}(t-t', \mathbf{x}) \right)_{mr} \equiv \delta_{mr} \left(\delta(t-t') + \lambda_{0,\mathbf{x}}^2 g(\mathbf{x}) G_{\text{Ret},\mathbf{x}}^{[m]}(t-t') \right). \quad (6.51)$$

Cabe señalar que como en esta base el tensor es diagonal, esto nos dice que está siendo expresado en la base de los ejes principales de Fresnel. De hecho, podemos inferir que para todo punto del espacio teniendo material, estamos usando la misma base de Fresnel. Esto es porque, desde el comienzo, consideramos las mismas tres direcciones de oscilación para cada grado de libertad de polarización. Particularmente, esto lo estamos considerando también para cuerpos disjuntos, aunque en general está claro que es posible tener cuerpos con bases de Fresnel diferentes. Estos casos podemos considerarlos introduciendo cambios de base que relacionen las diferentes bases de Fresnel. Sin embargo, con el objetivo de mantener la simplicidad en las expresiones, estas complicaciones las omitiremos.

Por otra parte, continuando, la condición residual (6.50) es, para el caso de un material inhomogéneo y anisótropo, muy cercana a otras condiciones consideradas en la literatura. Por ejemplo, por un lado, es cercana a la considerada en Ref.[63] (para materiales isótropos disipativos) como una condición complementaria al gauge temporal, pero para el caso de materiales anisótropos.

Por otro lado, la condición en este caso es también cercana a la condición de gauge de Coulomb generalizada utilizada en Ref.[64]. Para el caso de medios isotrópicos no disipativos ni dispersivos, es decir, para una permitividad constante, podemos obtener una condición cercana. Primero, considerando isotropía se impone el hecho de que los supraíndices $[m]$ son omitidos. Ahora, para un tipo de baño arbitrario, la teoría del QBM aplicada al material claramente nos da una expresión análoga a (5.56) pero dependiente de la posición:

$$G_{\text{Ret},\mathbf{x}}(s) = \frac{1}{\left(s^2 + \Omega_{\mathbf{x}}^2 - 2 D_{\mathbf{x}}(s)\right)}. \quad (6.52)$$

Entonces, al igual que hicimos en la sección 5.5.3, el caso de permitividad dieléctrica constante lo obtenemos poniendo $s = 0$ en la transformada de Laplace:

$$G_{\text{Ret},\mathbf{x}}(s) \rightarrow G_{\text{Ret},\mathbf{x}}(0) = \frac{1}{\Omega_{\mathbf{x}}^2} \equiv G_{\text{Ret},\mathbf{x}}^{ND}. \quad (6.53)$$

Según la transformada de Mellin (3.21), la función de Green retardada asociada resulta:

$$G_{\text{Ret},\mathbf{x}}^{ND}(t - t') = \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{ds}{2\pi i} e^{s(t-t')} G_{\text{Ret},\mathbf{x}}^{ND} = \frac{1}{\Omega_{\mathbf{x}}^2} \delta(t - t'). \quad (6.54)$$

Considerando todo, la condición residual (6.50) la escribimos:

$$\nabla \cdot [\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)] = 0, \quad (6.55)$$

donde la (función) permitividad resulta $\varepsilon(\mathbf{x}) = 1 + \frac{\lambda_{0,\mathbf{x}}^2}{\Omega_{\mathbf{x}}^2} g(\mathbf{x})$, que claramente está garantizada al tomar la condición de gauge de Coulomb generalizado de Ref.[64] ($\nabla \cdot [\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)] = 0$) para el caso de materiales inhomogéneos, ya que en el gauge temporal $\mathbf{E} = -\partial_0 \mathbf{A}$. Es claro que en este caso, sin disipación, la función permitividad en el plano complejo s es real dentro del material. Por lo tanto, el índice de refracción $n_{\mathbf{x}} = \sqrt{\varepsilon(\mathbf{x})}$ es real en cada punto. Debido a la isotropía, la representación pictórica según el elipsoide de Fresnel en cada punto es trivial y corresponde a una esfera dado que todos los ejes de los elipsoides son iguales.

Sin embargo, si no asumimos isotropía, podemos obtener de todos modos una condición similar para materiales anisótropos. Es inmediato que para este caso, hubiésemos obtenido la misma condición (6.55) pero reemplazando la función permitividad $\varepsilon(\mathbf{x})$ por el tensor de permitividad $\overleftrightarrow{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbb{I} \left(1 + \frac{\lambda_{0,\mathbf{x}}^2}{\Omega_{\mathbf{x}}^2} g(\mathbf{x}) \right)$ (dependiente del punto del espacio). Como en el último caso, dado que el material es no disipativo, el tensor de permitividad dentro del material en el plano complejo s es real. Por lo tanto, los índices de refracción en cada dirección son $n_{\mathbf{x}}^{[j]} = \sqrt{\varepsilon^{[jj]}(\mathbf{x})}$, donde no hay suma implícita en $[jj]$. Entonces, en cada punto, podemos definir el elipsoide de Fresnel de manera pictórica.

Podemos concluir que, para el gauge temporal, la ecuación de movimiento para $\mu = 0$ se reduce a la condición residual dada, para el caso general, por (6.50). Por otro lado, si tomamos las ecuaciones de movimiento restantes ($\mu = m$), imponiendo el gauge temporal, claramente tenemos:

$$-\square A^m - \partial_m \partial_l A^l + 2 \int d^4 x' D_{ml}(x, x') A^l(x') = 0. \quad (6.56)$$

En este caso, considerando las componentes del núcleo de disipación EM en (6.18), es inmediato que las ecuaciones se escriben:

$$-\square A^m - \partial_m \partial_l A^l + \lambda_{0,\mathbf{x}}^2 g(\mathbf{x}) \int_{t_i}^t dt' \partial_{tt'}^2 \left(G_{\text{Ret},\mathbf{x}}^{[m]}(t - t') \right) A^m(\mathbf{x}, t') = 0. \quad (6.57)$$

Teniendo en cuenta la doble derivada de un producto de una función y una distribución, sumado a las condiciones iniciales para $G_{\text{Ret},\mathbf{x}}^{[m]}$, finalmente obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \lambda_{0,\mathbf{x}}^2 g(\mathbf{x}) \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \lambda_{0,\mathbf{x}}^2 g(\mathbf{x}) \int_{t_i}^t dt' \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_{\text{Ret},\mathbf{x}}(t - t') \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t') = 0, \quad (6.58)$$

donde $\left(\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_{\text{Ret},\mathbf{x}} \right)_{mk} = \delta_{mk} G_{\text{Ret},\mathbf{x}}^{[m]}$. Nuevamente, como hicimos anteriormente en este capítulo, del hecho de que pudimos escribir este tensor en forma diagonal y asociado a

las funciones de Green retardadas, es claro que la base que elegimos es la de los ejes principales de Fresnel (en general, el tensor sería no diagonal). Cabe señalar también que la aparición del tercer término de la última ecuación, constituye el análogo del término de renormalización de la masa (dependiente de la posición) para el campo EM que también encontramos en el caso escalar del capítulo 5.

De hecho, (6.58), en cierto sentido, podemos considerarlo como la generalización electromagnética (o vectorial) de la ecuación de movimiento para el campo escalar del capítulo pasado, incluyendo todas las propiedades relacionadas tanto a la disipación e inhomogeneidad como la anisotropía, la cual es una propiedad enteramente relacionada a la naturaleza vectorial del campo EM. Sin embargo, las ecuaciones no son formalmente las mismas, ya que en el caso escalar el segundo de los términos en (6.58) es un laplaciano, mientras que en este caso hay un término más relacionado a la divergencia del campo \mathbf{A} .

En Ref.[65], un modelo similar para la interacción entre la materia y el campo EM fue considerado. Por simplicidad, un problema unidimensional fue tomado con un campo EM en el gauge de Coulomb desde el comienzo. La ecuación de campo fue deducida a partir de resolver las ecuaciones de movimiento de Heisenberg para los grados de libertad de materia y un laplaciano fue obtenido en lugar del segundo término del miembro izquierdo de (6.58) debido a la condición de gauge de Coulomb. Esto es comentado al comienzo con el objetivo de explicar el contexto en el cual está inspirado este modelo simplificado, aunque ningún tratamiento formal acerca de la invariancia de gauge es llevado a cabo. De esta forma, la ecuación de campo tiene obviamente la misma forma que la que obtuvimos para el campo escalar en el capítulo 5. Sin embargo, el punto crucial aquí es que el gauge de Coulomb, a diferencia de lo que pasa para el caso del campo libre, no implica que $A^0 = 0$. De hecho, en este gauge, las cuatro componentes del campo EM continúan aún acopladas debido al término que involucra el núcleo de disipación EM, y la componente temporal A^0 no puede ser descartada como en Ref.[65]. Por otro lado, tomando el gauge temporal, (6.50) resulta ser la condición residual que debe satisfacerse, que no coincide necesariamente con la condición de Coulomb para este caso donde hay variaciones en el material (ver la próxima sección para el caso homogéneo) y entonces, la ecuación de movimiento (6.58) difiere de la considerada en Ref.[65]. Considerando todo, podemos decir que el modelo simplificado de Ref.[65] muestra no representar a una de las componentes del campo EM en el contexto comentado (con variaciones espaciales de las propiedades del material) y es más cercana al modelo de campo escalar que estudiamos en el capítulo pasado, con el que coincide completamente en el caso unidimensional.

No obstante, el gauge temporal muestra ser adecuado para la interacción con la

materia ya que desacopla las componentes del campo EM. De hecho, en el presente modelo, un campo EM realista (con propiedades vectoriales y de gauge) interactuando con materia debe satisfacer tanto (6.58) como la condición residual dada por (6.50).

Dada la ecuación de movimiento, el tensor de Green retardado en el gauge temporal $\overleftrightarrow{\mathcal{G}}_{Ret}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$ podemos definirlo según:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \overleftrightarrow{\mathcal{G}}_{Ret}}{\partial t^2} + \nabla \times (\nabla \times \overleftrightarrow{\mathcal{G}}_{Ret}) + \lambda_{0,\mathbf{x}}^2 g(\mathbf{x}) \overleftrightarrow{\mathcal{G}}_{Ret}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t - t') \\ + \lambda_{0,\mathbf{x}}^2 g(\mathbf{x}) \int_{t_i}^t dt'' \overleftrightarrow{\mathcal{G}}_{Ret,\mathbf{x}}(t - t'') \cdot \overleftrightarrow{\mathcal{G}}_{Ret}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t'' - t') = 0, \end{aligned} \quad (6.59)$$

donde omitimos los subíndices *LG* denotando el gauge de Landau (y lo haremos de aquí en adelante) ya que son innecesarios debido a que el gauge temporal ya fue introducido. El mismo tensor de Green se haya sujeto, en este gauge, a condiciones iniciales:

$$\mathcal{G}_{Ret}^{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', 0) = 0 \quad , \quad \dot{\mathcal{G}}_{Ret}^{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', 0) = -\delta^{jk} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (6.60)$$

Una vez estudiadas las ecuaciones de movimiento del campo EM en el gauge temporal, podemos efectuar una inmediata aplicación al estudio del problema de estado estacionario del campo EM en un material infinito, isótropo y homogéneo.

6.4.2. Estado Estacionario del Campo EM en Material Infinito Isótropo y Homogéneo

Habiendo analizado la dinámica del campo EM en el gauge temporal, podemos directamente estudiar la situación del estado estacionario del campo EM en material infinito, homogéneo e isótropo. En este caso, como anticipamos en el último apartado, algunas simplificaciones adicionales pueden efectuarse en los resultados recientemente obtenidos. Por un lado, homogeneidad e isotropía implica que todas las etiquetas \mathbf{x} y $[j]$ sean descartadas. Más aún, dado que el material es infinito, $g \equiv 1$ para todo punto. La ecuación de movimiento para el campo EM (6.58) y la condición residual (6.50) las escribimos:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \lambda_0^2 \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \lambda_0^2 \int_{t_i}^t dt' \ddot{G}_{Ret}(t - t') \mathbf{A}(\mathbf{x}, t') = 0, \quad (6.61)$$

$$\nabla \cdot \left[\int_{t_i}^t dt' \partial_t \varepsilon(t - t') \mathbf{A}(\mathbf{x}, t') \right] = 0, \quad (6.62)$$

donde el tensor de permitividad es proporcional a la identidad de forma tal que la condición residual se simplifica.

Es más, dado que la permitividad ahora es independiente de la posición, entonces la última condición la garantizamos teniendo $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

Por lo tanto, para el caso de un material infinito, homogéneo e isótropo, la condición de gauge de Coulomb es el requisito natural que obtenemos de la condición residual para todo tiempo en todo punto del espacio. Esto implica que la ecuación de movimiento del campo EM (6.61) también se simplifica un poco más y se reduce a:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} + \lambda_0^2 \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \lambda_0^2 \int_{t_i}^t dt' \ddot{G}_{\text{Ret}}(t - t') \mathbf{A}(\mathbf{x}, t') = 0, \quad (6.63)$$

donde el segundo término (discutido en la última sección donde relacionamos a Ref.[65]) resulta en el laplaciano.

Como siempre, ahora podemos definir directamente el tensor de Green retardado $\overleftrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$ para este caso como:

$$\frac{\partial^2 \overleftrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}}{\partial t^2} - \nabla^2 \overleftrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{Ret}} + \lambda_0^2 \overleftrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t - t') + \lambda_0^2 \int_{t_i}^t dt'' \ddot{G}_{\text{Ret}}(t - t'') \overleftrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t'' - t') = 0. \quad (6.64)$$

Sin embargo, podemos tomar un poco más de ventaja de la invariancia traslacional provista por la uniformidad del material al ser infinito, homogéneo e isótropo. Podemos transformar Fourier en las variables espaciales y escribir la ecuación de movimiento para la transformada de Fourier del campo EM $\mathbf{A}(\mathbf{k}, t)$:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + (k^2 + \lambda_0^2) \mathbf{A}(\mathbf{k}, t) + \lambda_0^2 \int_{t_i}^t dt' \ddot{G}_{\text{Ret}}(t - t') \mathbf{A}(\mathbf{k}, t') = 0, \quad (6.65)$$

donde $k = |\mathbf{k}|$, mientras que la condición de Coulomb se reduce a $\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k}, t) = 0$ (ondas transversales). Es claro entonces que dos de las componentes de la transformada de Fourier del campo son independientes. Entonces, eligiendo dos de ellas y sus ecuaciones de movimiento asociadas, la tercera de las ecuaciones para la componente restante se satisface automáticamente.

Más allá de la elección, el punto clave es que cada componente satisface una ecuación homogénea de QBM para un oscilador Browniano de frecuencia $\sqrt{k^2 + \lambda_0^2}$ y núcleo de amortiguamiento $\lambda_0^2 \ddot{G}_{\text{Ret}}(t - t')$ (ver por ejemplo el capítulo 3 y las Refs.[41, 36, 35]).

Es más, debido a la invariancia traslacional, el tensor de Green retardado dependerá de $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ y por lo tanto su transformada de Fourier la definiremos fácilmente por la ecuación:

$$\frac{\partial^2 \overleftrightarrow{\mathcal{G}}_{Ret}}{\partial t^2} + (k^2 + \lambda_0^2) \overleftrightarrow{\mathcal{G}}_{Ret}(\mathbf{k}, t-t') + \lambda_0^2 \int_{t_i}^t dt'' \ddot{G}_{Ret}(t-t'') \overleftrightarrow{\mathcal{G}}_{Ret}(\mathbf{k}, t''-t') = 0, \quad (6.66)$$

sujeta esta vez a las condiciones iniciales (6.60) transformadas Fourier:

$$\mathcal{G}_{Ret}^{jl}(\mathbf{k}, 0) = 0 \quad , \quad \dot{\mathcal{G}}_{Ret}^{jl}(\mathbf{k}, 0) = -\delta^{jl}. \quad (6.67)$$

Considerando todo, podemos mostrar fácilmente, transformando Laplace esta última ecuación, que el tensor de Green retardado es diagonal y cada componente no nula corresponde a una función de Green retardada del QBM con el respectivo núcleo de amortiguamiento. Con respecto al núcleo de amortiguamiento, la propiedad de causalidad (tal cual discutimos en la sección 3.5) implica que los polos de la transformada de Laplace de estas funciones de Green se ubican en el semiplano izquierdo del plano complejo y entonces, sus dinámicas harán que se desvanezcan en el límite de tiempos largos. Por ende, $\mathcal{G}_{Ret}^{jl}(\mathbf{k}, t-t_i)$ es un tensor que va a cero cuando $t_i \rightarrow -\infty$.

Con todo este análisis del tensor de Green retardado, podemos estudiar la evolución temporal del propagador de Hadamard (6.38) (es claro que para estudiar la energía, el vector de Poynting o el tensor de Maxwell en este caso, deberíamos considerar sus expresiones dentro del material, cuestión que fue evitada específicamente en la sección 6.3 debido a la arbitrariedad en sus definiciones en esas regiones). Para el primero de los términos del propagador de Hadamard, introduciendo la transformada de Fourier del tensor de Green retardado dentro de las soluciones homogéneas, podemos escribir fácilmente:

$$\left\langle A_0^j(x_1) A_0^m(x_2) \right\rangle_{\Sigma \mathbf{A}_i, \Sigma \Pi_i} = \int \frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_2)} \left\langle A_0^j(\mathbf{k}_1, t_1) A_0^m(\mathbf{k}_2, t_2) \right\rangle_{\Sigma \mathbf{A}_i, \Sigma \Pi_i}, \quad (6.68)$$

donde $A_0^j(\mathbf{k}, t)$ por construcción directa está dado por:

$$A_0^j(\mathbf{k}, t) = -\dot{\mathcal{G}}_{Ret}^{jl}(\mathbf{k}, t-t_i) \int d\mathbf{x}' e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} \Sigma A_i^l(\mathbf{x}') + \mathcal{G}_{Ret}^{jl}(\mathbf{k}, t-t_i) \int d\mathbf{x}' e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} \Sigma \Pi_i^l(\mathbf{x}'), \quad (6.69)$$

donde explícitamente escribimos las integrales sobre \mathbf{x}' ya que $\langle \dots \rangle_{\Sigma \mathbf{A}_i, \Sigma \Pi_i}$ implica integraciones funcionales sobre $\Sigma \mathbf{A}_i(\mathbf{x}), \Sigma \Pi_i(\mathbf{x})$.

El punto clave aquí es que, más allá del estado inicial elegido para el campo EM, en el límite de tiempos largos ($t_i \rightarrow -\infty$) tenemos que $\mathcal{G}_{Ret}^{jl}(\mathbf{k}, t-t_i) \rightarrow 0$ y por lo tanto

$\left\langle A_0^j(x_1) A_0^m(x_2) \right\rangle_{\Sigma \mathbf{A}_i, \Sigma \mathbf{\Pi}_i} \longrightarrow 0$. En otras palabras, el término asociado a las condiciones iniciales no contribuye al régimen estacionario.

Por otra parte, el segundo término de (6.38), asociado a la contribución del material presenta un comportamiento más simple independiente de las propiedades del tensor de Green retardado. En este caso, el tiempo inicial t_i no aparece en los tensores de Green retardados contenidos en el término, pero sí lo hace en una de las partes del núcleo de ruido EM, dado en este gauge por $\partial_{tt'}^2 \mathbb{N}$. Como tenemos $\mathbb{N} = \mathbb{N}^B + \mathbb{N}^P$, donde cada término está dado por (6.16) y (6.22) respectivamente, el primero no contiene t_i mientras que el segundo sí. De hecho, de su definición podemos ver fácilmente que sólo \mathbb{N}^P va a cero en el límite de tiempos largos ($t_i \rightarrow -\infty$). Entonces, en dicho límite $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^B$, con lo que demostramos que el propagador de Hadamard en el régimen estacionario se reduce a la contribución de los baños:

$$\mathcal{G}_H^{jk}(x_1, x_2) \longrightarrow \left[\overleftrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{Ret}} * (\partial_{tt'}^2 \mathbb{N}^B) * \left(\overleftrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{Ret}} \right)^T \right]^{jk}(x_1, x_2), \quad (6.70)$$

que es el resultado análogo al obtenido para el caso escalar en el apartado 5.5.2, y que también coincide con el resultado del enfoque funcional en el estacionario utilizado en Ref.[66].

Este resultado es, de hecho, físicamente esperado debido a la dinámica disipativa del campo EM en todo punto del espacio. También, podemos mostrar fácilmente (como ocurre para el caso escalar en el capítulo 5) que si el material es no disipativo, toda la dinámica del material es borrada poniendo $\mathbb{N} \equiv 0$ y el propagador de Hadamard está definido únicamente por el término de condiciones iniciales, que en este caso no tiende a cero. Es más, como es mencionado en Ref.[66] y es mostrado para el caso unidimensional del caso escalar en el apartado 5.5.4, cierta precaución debe guardarse en torno a los escenarios que presenten regiones de vacío (o al menos, regiones donde el campo no disipe), donde puede ocurrir que más de una de las contribuciones al propagador de Hadamard definan el estado estacionario. Esto será el objetivo del próximo capítulo, que involucrará la implementación de todo este enfoque al problema de Lifshitz, permitiendo un estudio más detallado cuándo aparecen otras contribuciones en el estacionario.

Capítulo 7

Problema de Lifshitz

Hasta aquí, desarrollamos un formalismo para lograr deducir los estacionarios de la interacción materia-campo (ya sea escalar o EM). Mediante una cuantización por integrales de camino para estudiar evoluciones temporales de valores de expectación, pudimos dar expresiones generales a todo tiempo para las cantidades físicas de relevancia. También encontramos que dichas cantidades presentan diferentes contribuciones relacionadas a cada parte del sistema total (campo, grados de libertad de polarización y baños), que todas toman parte en el régimen transitorio, pero que sólo algunas de ellas, dependiendo de la distribución del material en cuestión, contribuyen al límite de tiempos largos (o régimen estacionario).

En cuanto al campo escalar, los problemas analizados fueron el caso de dimensionalidad $0 + 1$, el material infinito, homogéneo e isótropo en $n + 1$ dimensiones, el material sin disipación en $n + 1$ y un contorno delta de Dirac de material en $1 + 1$. Por otro lado, para el campo EM analizamos los casos de material infinito, homogéneo e isótropo en $3 + 1$ dimensiones, comentando el caso sin disipación.

Para los casos escalar $0 + 1$, y material infinito, homogéneo e isótropo, demostramos que el régimen de tiempos largos está definido por la contribución correspondiente a los baños únicamente, siendo que la dinámica disipativa de las otras partes genera la desaparición de sus contribuciones a tiempos largos. Por otro lado, en el caso de contornos sin disipación para ambos campos, el régimen estacionario está determinado por la contribución propia del campo, debido a que tener un material no disipativo suprime la dinámica de los grados de libertad internos del material, eliminando su contribución desde el comienzo.

Por último, el caso del contorno delta de Dirac de material en $1 + 1$ para el campo escalar mostró ser un caso interesante y diferente del resto, dado que logramos demostrar

que su régimen de tiempos largos está determinado por dos de las tres contribuciones del sistema total. Tanto la contribución de los baños como la propia del campo sobreviven en los tiempos largos. De hecho, también demostramos que la contribución propia del campo tiene exactamente la forma que se obtiene al implementar un procedimiento de cuantización canónica en el estacionario como el del capítulo 3, el cual basa su desarrollo en la propuesta de ansatz para el límite de tiempos largos. Es decir, demostramos que dicho ansatz estacionario en realidad es el resultado de la dinámica transitoria de este tipo de modelos para escenarios que presenten regiones donde el campo no disipa.

No obstante, el punto que aún no queda claro es si cualquier tipo de distribución de materia que presente regiones donde el campo no disipe, resulta en que su estacionario está definido por las contribuciones de los baños y la propia del campo. En el caso de la delta de Dirac, la contribución propia del campo a tiempos largos la atribuimos a que la libre fluctuación del campo en las regiones donde no disipa genera modos modificados que se propagan dentro del material y que logran un estacionario. Sin embargo, esto no queda claro que pase para todas las distribuciones de materia. Es decir, si tan sólo una región donde el campo no disipe es suficiente para que la contribución propia del campo sobreviva. De hecho, en Ref.[28], se analiza el problema de Lifshitz de dos semiespacios de material separados por una distancia finita, implementando un formalismo de cuantización en el estacionario basado en la teoría de fuentes (ver Ref.[6]), donde la fuerza resulta de la interacción de dipolos fluctuantes de los grados de libertad microscópicos de los materiales, omitiendo alguna contribución del campo de vacío. Este formalismo para el problema de Lifshitz coincide en el equilibrio térmico con la interpretación en términos de fuerza resultante de las fluctuaciones de vacío. Es por ello que en Ref.[28] lo extienden a situaciones fuera del equilibrio térmico pero estacionarias. Sin embargo, por cómo están dadas las bases del formalismo, a pesar de la existencia de una región donde el campo no disipa, la fuerza está siempre dada sólo por la contribución que en nuestro modelo asociamos a los baños ó entornos. Dado que el formalismo de Ref.[28] no deduce el estacionario a partir de un transitorio, pareciera haber cierta contradicción entre nuestro enfoque y el de dicho trabajo en cuanto a qué contribuciones son las que determinan el estacionario de un sistema compuesto de campo y materia.

Este capítulo entonces lo dedicamos al análisis del problema de Lifshitz desde el formalismo desarrollado a lo largo de esta Tesis, que nos permite deducir estacionarios a partir de resolver el transitorio. De esta forma, completaremos el cuadro de la física compleja que encierran estos sistemas.

7.1. Presiones Transitoria y Estacionaria

En el capítulo pasado desarrollamos el formalismo CTP para el campo EM en interacción con materia. Con ello, pudimos escribir todos los valores de expectación cuánticos para las cantidades de relevancia física en términos del propagador de Hadamard (6.38). En este capítulo queremos abordar el problema de Lifshitz, dos semiespacios planos de material real separados por una distancia finita. Para ello, tenemos que calcular la presión en un punto cualquiera del espacio vacío entre ambos semiespacios. Dicha presión, coincide con el valor de expectación del elemento diagonal del tensor de energía-momento correspondiente a la dirección perpendicular a las superficies de los semiespacios. Si bien esta cantidad podemos escribirla a partir de la expresión general (6.45), donde expresamos dicha magnitud en términos de un límite de coincidencia de un operador diferencial aplicado sobre el propagador de Hadamard, podemos lograr también una expresión más simple y adecuada para el tratamiento matemático que sigue (como así también para comparar con trabajos previos).

Considerando la simetría de la configuración, la fuerza entre los cuerpos viene dada sólo por la presión en la dirección perpendicular a las superficies, es decir, a lo largo de la dirección paralela a la distancia de separación l , que llamaremos eje z . Por lo tanto, para el problema de Lifshitz, la presión viene dada por la componente zz del tensor de Maxwell que, para un punto campo x_1 dentro del espacio entre placas, podemos escribir como en Ref.[28]:

$$\widehat{T}^{zz}(x_1) = -\frac{\Lambda^{ij}}{8\pi} \left[\widehat{E}^i(x_1) \widehat{E}^j(x_1) + \widehat{B}^i(x_1) \widehat{B}^j(x_1) \right], \quad (7.1)$$

donde, en el gauge temporal, el campo eléctrico viene dado por $E^i = -\partial_0 A^i$, mientras que el campo magnético es $B^i = (\nabla \times \mathbf{A})^i$, y Λ^{ij} es la matriz diagonal $\Lambda^{11} = \Lambda^{22} = 1 = -\Lambda^{33}$.

Como siempre, a través de la técnica de división de puntos como en el capítulo anterior (ver también Ref.[38]) y las típicas relaciones entre los diferentes propagadores (ver Ref.[36]), el valor de expectación de la componente zz , correspondiente a la presión de Casimir, podemos escribirlo fácilmente en términos del propagador de Hadamard de la manera alternativa:

$$P_{\text{Cas}}(x_1) \equiv \left\langle \widehat{T}^{zz}(x_1) \right\rangle = -\frac{\Lambda^{ij}}{8\pi} \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \left[\delta^{is} \delta^{jm} \partial_{t_1} \partial_{t_2} + \epsilon^{irs} \epsilon^{jlm} \partial_{r_1} \partial_{l_2} \right] \mathcal{G}_{\text{H}}^{sm}(x_1, x_2), \quad (7.2)$$

donde el propagador de Hadarmard está regularizado previamente.

Cabe señalar que, a diferencia de lo que encontramos en Ref.[28] que se propone como correspondiente a una situación estacionaria, la última expresión en realidad es la presión de Casimir que aparece al tiempo inicial t_i debido al comienzo de la interacción entre las diferentes partes del sistema total. Por lo tanto, comprende toda la dinámica transitoria de la presión en su camino hasta alcanzar su valor final en la situación estacionaria. Considerando todo, la presión puede depender del tiempo y también del espacio durante la etapa transitoria, hasta alcanzar la situación estacionaria, donde su valor resulta ser tanto independiente del tiempo como del espacio:

$$P_{\text{Cas}}(x_1) \rightarrow P_{\text{Cas}}^\infty. \quad (7.3)$$

Por otra parte, al mismo tiempo, dada la separación de contribuciones del propagador de Hadamard (6.38) y también que $\mathbb{N} = \mathbb{N}^P + \mathbb{N}^B$ (dependientes de cada una de sus propias temperaturas), es claro que la presión total podemos escribirla en términos de tres contribuciones:

$$P_{\text{Cas}}(x_1) = P_{\text{IC}}(x_1) + P_{\text{DOFs}}(x_1, \beta_{\text{P}_x}) + P_{\text{B}}(x_1, \beta_{\text{B},x}). \quad (7.4)$$

Entonces, cada parte del sistema total contribuirá a la presión de Casimir para un dado tiempo y punto del espacio. Sin embargo, qué contribuciones sobreviven en la situación estacionaria al tomar el límite de tiempos largos ($t_i \rightarrow -\infty$) será tema de las próximas secciones.

Como estamos tratando con un problema de condiciones iniciales, cada variable temporal está definida en el intervalo $[t_i, +\infty)$. Por lo tanto, podemos transformar Laplace en cada variable temporal t_1, t_2 dentro del límite de coincidencia en (7.2). Introduciendo la fórmula de Mellin (3.21) para cada variable, el segundo de los términos en (7.2) podemos escribirlo fácilmente en términos de la doble transformada de Laplace del propagador de Hadamard ya que las derivadas son en las coordenadas espaciales:

$$\begin{aligned} \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \epsilon^{irs} \epsilon^{jlm} \partial_{r_1} \partial_{l_2} \mathcal{G}_{\text{H}}^{sm}(x_1, x_2) &= \int_{\alpha_1 - i\infty}^{\alpha_1 + i\infty} \frac{ds_1}{2\pi i} \int_{\alpha_2 - i\infty}^{\alpha_2 + i\infty} \frac{ds_2}{2\pi i} e^{(s_1 + s_2)(t_1 - t_i)} \\ &\times \lim_{\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_1} \left[\epsilon^{irs} \epsilon^{jlm} \partial_{r_1} \partial_{l_2} \mathcal{G}_{\text{H}}^{sm}(\mathbf{x}_1, s_1; \mathbf{x}_2, s_2) \right], \end{aligned} \quad (7.5)$$

donde en el miembro izquierdo, el límite de coincidencia fue tomado para las variables temporales y donde $\alpha_{1,2}$ definen rectas verticales en los planos complejos $s_{1,2}$ de forma tal que todos los polos de los integrandos tomados como funciones de s_1 y s_2 se ubican a la izquierda de estas líneas.

Por otra parte, el primer término en (7.2) no es tan simple debido a la presencia de las derivadas temporales. Escribiendo (consecutivamente en cada variable temporal) para el primer término en (7.2) en términos de transformadas de Laplace, es claro que:

$$\begin{aligned}
 \partial_{t_1} \partial_{t_2} \mathcal{G}_H^{sm}(x_1, x_2) &= \int_{\alpha_1 - i\infty}^{\alpha_1 + i\infty} \frac{ds_1}{2\pi i} e^{s_1(t_1 - t_i)} \mathfrak{L}_1 \left[\partial_{t_1} \partial_{t_2} \mathcal{G}_H^{sm}(x_1, x_2) \right] \\
 &= \int_{\alpha_1 - i\infty}^{\alpha_1 + i\infty} \frac{ds_1}{2\pi i} e^{s_1(t_1 - t_i)} \left[s_1 \partial_{t_2} \mathcal{G}_H^{sm}(\mathbf{x}_1, s_1; x_2) - \partial_{t_2} \mathcal{G}_H^{sm}(\mathbf{x}_1, t_i; x_2) \right] \\
 &= \int_{\alpha_1 - i\infty}^{\alpha_1 + i\infty} \frac{ds_1}{2\pi i} \int_{\alpha_2 - i\infty}^{\alpha_2 + i\infty} \frac{ds_2}{2\pi i} e^{s_1(t_1 - t_i)} e^{s_2(t_2 - t_i)} \left[s_1 \mathfrak{L}_2 \left(\partial_{t_2} \mathcal{G}_H^{sm}(\mathbf{x}_1, s_1; x_2) \right) \right. \\
 &\quad \left. - \mathfrak{L}_2 \left(\partial_{t_2} \mathcal{G}_H^{sm}(\mathbf{x}_1, t_i; x_2) \right) \right] \tag{7.6} \\
 &= \int_{\alpha_1 - i\infty}^{\alpha_1 + i\infty} \frac{ds_1}{2\pi i} \int_{\alpha_2 - i\infty}^{\alpha_2 + i\infty} \frac{ds_2}{2\pi i} e^{s_1(t_1 - t_i)} e^{s_2(t_2 - t_i)} \left[s_1 s_2 \mathcal{G}_H^{sm}(\mathbf{x}_1, s_1; \mathbf{x}_2, s_2) \right. \\
 &\quad \left. - s_1 \mathcal{G}_H^{sm}(\mathbf{x}_1, s_1; \mathbf{x}_2, t_i) - s_2 \mathcal{G}_H^{sm}(\mathbf{x}_1, t_i; \mathbf{x}_2, s_2) + \mathcal{G}_H^{sm}(\mathbf{x}_1, t_i; \mathbf{x}_2, t_i) \right].
 \end{aligned}$$

Cabe señalar que en la última de las igualdades, el segundo término entre corchetes no depende de s_2 . Por lo tanto, para ese término, la integral sobre s_2 tiene un integrando $e^{s_2(t_2 - t_i)}$, el cual es analítico en todo el plano complejo s_2 , de manera que la integral sobre cualquier curva se anula para $t_2 > t_i$. Lo mismo ocurre para el tercer y último término entre corchetes. Considerando todo, probamos que el primer término de (7.2) podemos escribirlo:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \delta^{is} \delta^{jm} \partial_{t_1} \partial_{t_2} \mathcal{G}_H^{sm}(x_1, x_2) &= \int_{\alpha_1 - i\infty}^{\alpha_1 + i\infty} \frac{ds_1}{2\pi i} \int_{\alpha_2 - i\infty}^{\alpha_2 + i\infty} \frac{ds_2}{2\pi i} e^{(s_1 + s_2)(t_1 - t_i)} s_1 s_2 \delta^{is} \delta^{jm} \\
 &\quad \times \lim_{\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_1} \mathcal{G}_H^{sm}(\mathbf{x}_1, s_1; \mathbf{x}_2, s_2). \tag{7.7}
 \end{aligned}$$

Finalmente, la presión de Casimir podemos reescribirla como:

$$\begin{aligned}
 P_{\text{Cas}}(x_1) &= -\frac{1}{8\pi} \int_{\alpha_1 - i\infty}^{\alpha_1 + i\infty} \frac{ds_1}{2\pi i} \int_{\alpha_2 - i\infty}^{\alpha_2 + i\infty} \frac{ds_2}{2\pi i} e^{(s_1 + s_2)(t_1 - t_i)} \\
 &\quad \times \lim_{\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_1} \left[\Theta^{sm}(s_1, s_2) \mathcal{G}_H^{sm}(\mathbf{x}_1, s_1; \mathbf{x}_2, s_2) \right], \tag{7.8}
 \end{aligned}$$

donde el operador $\Theta^{sm}(s_1, s_2) \equiv \Lambda^{ij} (s_1 s_2 \delta^{is} \delta^{jm} + \epsilon^{irs} \epsilon^{jlm} \partial_{r_1} \partial_{l_2})$.

Vale la pena remarcar el hecho de que esta expresión para la presión de Casimir parece formalmente la misma que encontrada en Ref.[28], aunque hay sutiles diferencias relacionadas al planteo de ese problema y el nuestro. En primer lugar, nuestra expresión

contiene el tiempo inicial t_i donde las interacciones comienzan, mientras que en el otro caso, estando deducido de un formalismo estacionario, no aparece. En segundo lugar y relacionado a esto, (7.8) no es una expresión estacionaria (como pasa en Ref.[28]), sino que también comprende toda la información sobre la evolución transitoria de la componente zz y describe cómo se va construyendo la presión de Casimir en el régimen de tiempos largos. De hecho, en Ref.[28], la presión es calculada a partir de la correlación para el campo eléctrico, que resulta proporcional a una delta de Dirac en la diferencia de las frecuencias, cuestión garantizada por el formalismo estacionario basado en el teorema de fluctuación-disipación como los principios de la electrodinámica estocástica (SED, de sus siglas en inglés). Así, la doble integración es automáticamente reducida a una a partir de la correlación de las fuentes. Aquí, calculamos la presión a partir del propagador de Hadamard, que se relaciona a la correlación cuántica del campo EM y, como veremos más adelante, durante la evolución transitoria no es necesariamente proporcional a una función delta de Dirac. Finalmente, todos estos puntos se reflejan también en la definición del operador Θ . En Ref.[28], sólo depende de una variable de frecuencia que aparece como un denominador debido al hecho de que la presión se calcula a partir de la correlación del campo eléctrico. Por otro lado, nuestro operador análogo es un operador que depende de dos variables de Laplace que aparecen como factores multiplicativos ya que estamos calculando la evolución temporal completa de la presión a partir de la correlación del campo EM.

En las próximas secciones, calcularemos todas las contribuciones a la presión y estudiaremos su evolución temporal hacia la situación estacionaria, partiendo de la expresión (7.8).

7.2. Contribuciones a la Presión

Una vez lograda una expresión formal para la presión de Casimir (7.8) en términos de la doble transformada de Laplace del propagador de Hadamard, a partir de (6.38) es claro que tiene dos contribuciones separadas, una asociada a las condiciones iniciales del campo EM (el primer término) y la otra asociada al material (el segundo término). De hecho, los núcleos de ruido también se separan en dos partes ($\mathbb{N} = \mathbb{N}^P + \mathbb{N}^B$), una asociada a los grados de libertad de polarización (\mathbb{N}^P) y la otra asociada a los baños (\mathbb{N}^B). Entonces, la doble transformada de Laplace del propagador de Hadamard la escribimos:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_H^{jk}(\mathbf{x}_1, s_1; \mathbf{x}_2, s_2) &\equiv \left\langle A_0^j(\mathbf{x}_1, s_1) A_0^k(\mathbf{x}_2, s_2) \right\rangle_{\Sigma \mathbf{A}_i, \Sigma \Pi_i} \\ &+ \mathfrak{L}_{1,2} \left[\left(\mathcal{G}_{\text{Ret}} * (\partial_{tt'}^2 \mathbb{N}) * (\mathcal{G}_{\text{Ret}})^T \right)^{jk} (x_1, x_2) \right] (\mathbf{x}_1, s_1; \mathbf{x}_2, s_2). \end{aligned} \quad (7.9)$$

A continuación, analizaremos cada contribución por separado.

7.2.1. Contribución de Condiciones Iniciales

Dado que la solución homogénea viene dada por (6.35) y las condiciones iniciales para el tensor de Green retardado están dadas por (6.60), la transformada de Laplace de la solución homogénea resulta:

$$A_0^j(\mathbf{x}, s) = \int d\mathbf{x}' \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{jl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', s) \left(\Sigma \Pi_i^l(\mathbf{x}') - s \Sigma A_i^l(\mathbf{x}') \right), \quad (7.10)$$

donde $\mathcal{G}_{\text{Ret}}^{jl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', s)$ es la transformada de Laplace del tensor de Green retardado (al igual que en el final del capítulo pasado, omitimos cualquier subíndice en alusión innecesaria ahora a la condición de gauge).

Por ende, escribimos el primer término de la doble transformada de Laplace del propagador de Hadamard (7.10) como:

$$\begin{aligned} \left\langle A_0^j(\mathbf{x}_1, s_1) A_0^k(\mathbf{x}_2, s_2) \right\rangle_{\Sigma \mathbf{A}_i, \Sigma \Pi_i} &= \int d\mathbf{x}' \int d\mathbf{x}'' \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{jl}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}', s_1) \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{km}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}'', s_2) \\ &\times \left\langle \left(\Sigma \Pi_i^l(\mathbf{x}') - s_1 \Sigma A_i^l(\mathbf{x}') \right) \left(\Sigma \Pi_i^m(\mathbf{x}'') - s_2 \Sigma A_i^m(\mathbf{x}'') \right) \right\rangle_{\Sigma \mathbf{A}_i, \Sigma \Pi_i}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Es claro que el cálculo de los promedios sobre las configuraciones iniciales introduce el estado inicial del campo EM a través de su funcional de Wigner. Por lo tanto, esta contribución depende claramente del estado inicial elegido para el campo EM. Sin embargo, en lugar de proceder directamente al cálculo de los promedios, es más conveniente calcularlos como valores de expectación cuánticos. Como al tiempo inicial t_i , el campo es libre, por ende los valores de expectación cuánticos usando el formalismo operatorial y estos promedios usando la solución homogénea están relacionados. De hecho, como un caso particular de la teoría desarrollada en el capítulo pasado, es fácil mostrar que una teoría libre (sin interacciones) verifica:

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\Sigma \Pi_i^l(\mathbf{x}') - s_1 \Sigma A_i^l(\mathbf{x}') \right) \left(\Sigma \Pi_i^m(\mathbf{x}'') - s_2 \Sigma A_i^m(\mathbf{x}'') \right) \right\rangle_{\Sigma \mathbf{A}_i, \Sigma \Pi_i} &\equiv \\ &\equiv \frac{1}{2} \left\langle \left\{ \widehat{\Pi}_i^l(\mathbf{x}') - s_1 \widehat{A}_i^l(\mathbf{x}'); \widehat{\Pi}_i^m(\mathbf{x}'') - s_2 \widehat{A}_i^m(\mathbf{x}'') \right\} \right\rangle, \end{aligned} \quad (7.12)$$

donde el miembro derecho corresponde al valor de expectación cuántico del anticonmutador armado con operadores cuánticos de campo EM libre en el gauge temporal y al tiempo inicial. Cabe señalar que, en el caso del campo EM libre, el gauge temporal implica el gauge de Coulomb ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$) como condición residual sobre las componentes restantes. Por lo tanto, los operadores de campo EM podemos escribirlos como operadores en el gauge de Coulomb:

$$\widehat{A}_i^j(\mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}(2\pi)^3}} \sum_{\lambda=TE, TM} \varepsilon^j(\mathbf{k}, \lambda) \left[\widehat{a}_{\mathbf{k}, \lambda} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} t_i - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + \widehat{a}_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger e^{i(\omega_{\mathbf{k}} t_i - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right], \quad (7.13)$$

$$\widehat{\Pi}_i^j(\mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}(2\pi)^3}} \sum_{\lambda=TE, TM} i\omega_{\mathbf{k}} \varepsilon^j(\mathbf{k}, \lambda) \left[\widehat{a}_{\mathbf{k}, \lambda} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} t_i - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} - \widehat{a}_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger e^{i(\omega_{\mathbf{k}} t_i - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right], \quad (7.14)$$

donde $\widehat{a}_{\mathbf{k}, \lambda}, \widehat{a}_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger$ son los operadores de aniquilación y creación del campo EM libre, $\varepsilon^j(\mathbf{k}, \lambda)$ es la componente j de los vectores de polarización y $\omega_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|$.

Considerando las relaciones de completitud de los vectores de polarización:

$$\sum_{\lambda=TE, TM} \varepsilon^l(\mathbf{k}, \lambda) \varepsilon^m(\mathbf{k}, \lambda) = \delta^{lm} - \frac{k^l k^m}{\omega_{\mathbf{k}}^2}, \quad (7.15)$$

y un estado térmico inicial para el campo EM, los valores de expectación de productos de operadores de aniquilación y creación vienen dados por:

$$\langle \widehat{a}_{\mathbf{k}, \lambda} \widehat{a}_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') (1 + N(\omega_{\mathbf{k}})) \quad , \quad \langle \widehat{a}_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger \widehat{a}_{\mathbf{k}', \lambda'} \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') N(\omega_{\mathbf{k}}), \quad (7.16)$$

$$\langle \widehat{a}_{\mathbf{k}, \lambda} \widehat{a}_{\mathbf{k}', \lambda'} \rangle = \langle \widehat{a}_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger \widehat{a}_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger \rangle = 0, \quad (7.17)$$

donde $N(\omega_{\mathbf{k}}) = \frac{1}{(e^{\beta_{EM}\omega_{\mathbf{k}}} - 1)}$ es el número de ocupación de fotones para el estado inicial de temperatura β_{EM} . Entonces, luego de un cambio de variables, (7.13) podemos escribirla como:

$$\begin{aligned} & \left\langle \left(\sum \Pi_i^l(\mathbf{x}') - s_1 \sum A_i^l(\mathbf{x}') \right) \left(\sum \Pi_i^m(\mathbf{x}'') - s_2 \sum A_i^m(\mathbf{x}'') \right) \right\rangle_{\Sigma \mathbf{A}_i, \Sigma \Pi_i} = \quad (7.18) \\ & = \int \frac{d\mathbf{k}}{2\omega_{\mathbf{k}}(2\pi)^3} \left(\delta^{lm} - \frac{k^l k^m}{\omega_{\mathbf{k}}^2} \right) \coth \left(\frac{\beta_{EM}}{2} \omega_{\mathbf{k}} \right) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}'')} (s_1 s_2 + \omega_{\mathbf{k}}^2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, para el promedio (7.11) sobre las condiciones iniciales tenemos:

$$\begin{aligned} \left\langle A_0^j(\mathbf{x}_1, s_1) A_0^k(\mathbf{x}_2, s_2) \right\rangle_{\Sigma \mathbf{A}_i, \Sigma \mathbf{I}_i} &= \int \frac{d\mathbf{k}}{2\omega_{\mathbf{k}}(2\pi)^3} \left(\delta^{lm} - \frac{k^l k^m}{\omega_{\mathbf{k}}^2} \right) \coth \left(\frac{\beta_{\text{EM}}}{2} \omega_{\mathbf{k}} \right) \\ &\times (s_1 s_2 + \omega_{\mathbf{k}}^2) \left(\int d\mathbf{x}' \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{jl}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}', s_1) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} \right) \left(\int d\mathbf{x}'' \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{km}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}'', s_2) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}''} \right). \end{aligned} \quad (7.19)$$

Teniendo esta expresión, es fácil obtener una expresión para la contribución de las condiciones iniciales a la presión de Casimir. Reemplazando $\mathcal{G}_{\text{H}}^{sm}$ en (7.8) por la contribución de condiciones iniciales $\left\langle A_0^j(\mathbf{x}_1, s_1) A_0^k(\mathbf{x}_2, s_2) \right\rangle_{\Sigma \mathbf{A}_i, \Sigma \mathbf{I}_i}$, tenemos directamente:

$$\begin{aligned} P_{\text{IC}}(x_1, \beta_{\text{EM}}) &= -\frac{1}{8\pi} \int \frac{d\mathbf{k}}{2\omega_{\mathbf{k}}(2\pi)^3} \left(\delta^{lm} - \frac{k^l k^m}{\omega_{\mathbf{k}}^2} \right) \coth \left(\frac{\beta_{\text{EM}}}{2} \omega_{\mathbf{k}} \right) \int_{\alpha_1 - i\infty}^{\alpha_1 + i\infty} \frac{ds_1}{2\pi i} \\ &\times \int_{\alpha_2 - i\infty}^{\alpha_2 + i\infty} \frac{ds_2}{2\pi i} e^{(s_1 + s_2)(t_1 - t_i)} (s_1 s_2 + \omega_{\mathbf{k}}^2) \lim_{\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_1} \left[\Theta^{jk}(s_1, s_2) \right. \\ &\left. \times \left(\int d\mathbf{x}' \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{jl}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}', s_1) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} \right) \left(\int d\mathbf{x}'' \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{km}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}'', s_2) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}''} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Cabe señalar que esta expresión es bien general. De hecho, comprende la evolución temporal completa de la contribución de condiciones iniciales a la presión de Casimir a todo momento para todo punto del espacio en la región de vacío, debido a la aparición de los contornos al tiempo inicial t_i y comienza a relajarse. Es físicamente esperado que la contribución dependa no sólo del tiempo sino también del espacio hasta alcanzar la situación estacionaria. La información específica sobre la evolución temporal del problema está contenida en las propiedades analíticas del integrando como función de s_1 y s_2 , es decir, en los polos y cortes presentes, como veremos en las próximas secciones.

Es más, cabe señalar que esta expresión es válida para cualquier geometría de los contornos incluyendo como mínimo una región de vacío (donde calculamos la presión). La información sobre los contornos aparece contenida en las transformadas del tensor de Green retardado, las que deben calcularse para una situación específica a fin de obtener un resultado completo. En las próximas secciones, mostraremos cómo hacer este trabajo para el problema de Lifshitz deduciendo el límite de tiempos largos de esta contribución.

7.2.2. Contribución del Material

Por otro lado, consideremos el segundo término del miembro derecho de (7.10), correspondiente a la contribución del material. Debido a que $\mathbb{N} = \mathbb{N}^P + \mathbb{N}^B$, la contribución

se separa en dos contribuciones al igual que siempre, una asociada a los grados de libertad de polarización y la otra asociada a los baños. Sin embargo, el primer paso en transformar Laplace la contribución es el mismo. Como la contribución la escribimos $\mathfrak{L}_{1,2} \left[\left(\mathcal{G}_{\text{Ret}} * (\partial_{tt'}^2 \mathbb{N}) * (\mathcal{G}_{\text{Ret}})^T \right)^{jk} (x_1, x_2) \right] (\mathbf{x}_1, s_1; \mathbf{x}_2, s_2)$ y el tensor de Green retardado depende de la diferencia de los tiempos (es decir, $\mathcal{G}_{\text{Ret}}^{ij}(x, x') = \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t - t')$), entonces los productos $*$ involucran convoluciones en las variables de tiempo entre el núcleo de ruido $\partial_{tt'}^2 \mathbb{N}$ y uno de los tensores de Green retardados. Transformar Laplace por ende es inmediato:

$$\begin{aligned} & \mathfrak{L}_{1,2} \left[\left(\mathcal{G}_{\text{Ret}} * (\partial_{tt'}^2 \mathbb{N}) * (\mathcal{G}_{\text{Ret}})^T \right)^{jk} \right] (\mathbf{x}_1, s_1; \mathbf{x}_2, s_2) = \\ & = \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{jl}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}, s_1) \mathfrak{L}_{1,2} \left[\partial_{tt'}^2 \mathbb{N}_{lm} \right] (\mathbf{x}, s_1; \mathbf{x}', s_2) \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{km}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}', s_2). \end{aligned} \quad (7.21)$$

Podemos realizar algunas simplificaciones considerando que, a partir de (6.16) y (6.22), los núcleos de ruido satisfacen $\partial_{tt'}^2 \mathbb{N}_{lm}(x, x') = \delta_{lm} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') g(\mathbf{x}) \partial_{tt'}^2 \mathbb{N}_{\mathbf{x}}^{[l]}(t, t')$, por ende al emplear las deltas:

$$\begin{aligned} & \mathfrak{L}_{1,2} \left[\left(\mathcal{G}_{\text{Ret}} * (\partial_{tt'}^2 \mathbb{N}) * (\mathcal{G}_{\text{Ret}})^T \right)^{jk} \right] (\mathbf{x}_1, s_1; \mathbf{x}_2, s_2) = \\ & = \int d\mathbf{x} g(\mathbf{x}) \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{jl}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}, s_1) \mathfrak{L}_{1,2} \left[\partial_{tt'}^2 \mathbb{N}_{\mathbf{x}}^{[l]} \right] (s_1, s_2) \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{kl}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}, s_2), \end{aligned} \quad (7.22)$$

donde la presencia de g denota el hecho de que esta contribución proviene de las regiones con material exclusivamente.

Considerando que $\mathbb{N} = \mathbb{N}^P + \mathbb{N}^B$ y sus definiciones (6.16) y (6.22), transformar Laplace el núcleo de ruido EM en ambas variables, teniendo en cuenta que $\mathbb{N}_{\mathbf{x},B}^{[l]}(t_i, t_i) = 0 = \mathbb{N}_{\mathbf{x},B}^{[l]}(s_1, t_i) = \mathbb{N}_{\mathbf{x},B}^{[l]}(t_i, s_2)$ debido a la causalidad de $G_{\text{Ret},\mathbf{x}}^{[l]}$, resulta en:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{1,2} \left[\partial_{tt'}^2 \mathbb{N}_{\mathbf{x}}^{[l]} \right] (s_1, s_2) & = s_1 s_2 \mathbb{N}_{\mathbf{x},P}^{[l]}(s_1, s_2) - s_1 \mathbb{N}_{\mathbf{x},P}^{[l]}(s_1, t_i) - s_2 \mathbb{N}_{\mathbf{x},P}^{[l]}(t_i, s_2) \\ & \quad + \mathbb{N}_{\mathbf{x},P}^{[l]}(t_i, t_i) + s_1 s_2 \mathbb{N}_{\mathbf{x},B}^{[l]}(s_1, s_2), \end{aligned} \quad (7.23)$$

donde cada transformada de Laplace viene dada por:

$$\mathbb{N}_{\mathbf{x},P}^{[l]}(s_1, s_2) = \frac{\lambda_{0,\mathbf{x}}^2 M_{\mathbf{x}}^{[j]}}{2\Omega_{\mathbf{x}}^{[j]}} \coth \left(\frac{\beta_{P_{\mathbf{x}}}^j \Omega_{\mathbf{x}}^{[j]}}{2} \right) \left(s_1 s_2 + \Omega_{\mathbf{x}}^{[l]2} \right) G_{\text{Ret},\mathbf{x}}^{[l]}(s_1) G_{\text{Ret},\mathbf{x}}^{[l]}(s_2), \quad (7.24)$$

$$\mathbb{N}_{\mathbf{x},\text{P}}^{[l]}(s_n, t_i) = \mathbb{N}_{\mathbf{x},\text{P}}^{[l]}(t_i, s_n) = \frac{\lambda_{0,\mathbf{x}}^2 M_{\mathbf{x}}^{[l]}}{2\Omega_{\mathbf{x}}^{[l]}} \coth\left(\frac{\beta_{P_{\mathbf{x}}^l} \Omega_{\mathbf{x}}^{[l]}}{2}\right) s_n G_{\text{Ret},\mathbf{x}}^{[l]}(s_n), \quad (7.25)$$

$$\mathbb{N}_{\mathbf{x},\text{P}}^{[l]}(t_i, t_i) = \frac{\lambda_{0,\mathbf{x}}^2 M_{\mathbf{x}}^{[l]}}{2\Omega_{\mathbf{x}}^{[l]}} \coth\left(\frac{\beta_{P_{\mathbf{x}}^l} \Omega_{\mathbf{x}}^{[l]}}{2}\right), \quad (7.26)$$

$$\mathbb{N}_{\mathbf{x},\text{B}}^{[l]}(s_1, s_2) = \lambda_{0,\mathbf{x}}^2 G_{\text{Ret},\mathbf{x}}^{[l]}(s_1) N_{\mathbf{x}}^{[l]}(s_1, s_2) G_{\text{Ret},\mathbf{x}}^{[l]}(s_2). \quad (7.27)$$

Cabe señalar que el último término en el miembro derecho de (7.23) es el único asociado a los baños. Es más, es importante notar que el segundo y el tercer término sólo dependen de una de las variables de Laplace, mientras que el cuarto es independiente de ellas.

Como ya hicimos en el capítulo 5, es claro que aquí también con el objetivo de continuar explícitamente el cálculo, tenemos que definir qué tipo de baños estamos considerando en cada dirección en cada punto del espacio del problema en cuestión. Sin embargo, sin perder generalidad en el cálculo, podemos dar un paso más. A partir de la teoría de QBM, es claro que para cualquier tipo de baño, el núcleo de ruido del QBM depende de las diferencias de tiempo, es decir, en el dominio temporal tenemos que $N_{\mathbf{x}}^{[l]}(t, t') = N_{\mathbf{x}}^{[l]}(t - t')$. Por lo tanto, aunque cada variable temporal está definida en el intervalo $[t_i, +\infty)$, su diferencia resulta definida en $(-\infty, +\infty)$. Suponiendo que el núcleo verifica los requisitos de convergencia (esto podemos lograrlo fácilmente al introducir una función de corte dentro del núcleo de ruido QBM), podemos escribirlo en términos de su transformada de Fourier:

$$N_{\mathbf{x}}^{[l]}(t - t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \overline{N}_{\mathbf{x}}^{[l]}(\omega), \quad (7.28)$$

donde cabe señalar que $\overline{N}_{\mathbf{x}}^{[l]}(\omega)$ contiene las dependencias en las temperaturas de los baños $\beta_{\text{B},\mathbf{x}}$.

Tomando esta forma general para los núcleos de ruido QBM, sus transformadas de Laplace son inmediatas dando para (7.27):

$$\mathbb{N}_{\mathbf{x},\text{B}}^{[l]}(s_1, s_2) = \lambda_{0,\mathbf{x}}^2 G_{\text{Ret},\mathbf{x}}^{[l]}(s_1) G_{\text{Ret},\mathbf{x}}^{[l]}(s_2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\overline{N}_{\mathbf{x}}^{[l]}(\omega)}{(s_1 + i\omega)(s_2 - i\omega)}. \quad (7.29)$$

Una vez calculado cada término de (7.23), podemos insertarla en (7.23) y, mediante (7.8), dar expresiones para cada contribución de la presión de Casimir (7.4). Por lo tanto, podemos escribir:

$$\begin{aligned}
 P_{\text{DOFs}}(x_1, \beta_{P_{\mathbf{x}}^l}) &= -\frac{1}{8\pi} \int_{\alpha_1-i\infty}^{\alpha_1+i\infty} \frac{ds_1}{2\pi i} \int_{\alpha_2-i\infty}^{\alpha_2+i\infty} \frac{ds_2}{2\pi i} e^{(s_1+s_2)(t_1-t_i)} \lim_{\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_1} \left[\Theta^{jk}(s_1, s_2) \right. \\
 &\times \int d\mathbf{x} g(\mathbf{x}) \coth\left(\frac{\beta_{P_{\mathbf{x}}^l} \Omega_{\mathbf{x}}^{[l]}}{2}\right) \frac{\lambda_{0,\mathbf{x}}^2 M_{\mathbf{x}}^{[l]}}{2\Omega_{\mathbf{x}}^{[l]}} \left[(s_1^2 G_{\text{Ret},\mathbf{x}}^{[l]}(s_1) - 1) \right. \\
 &\times (s_2^2 G_{\text{Ret},\mathbf{x}}^{[l]}(s_2) - 1) + \Omega_{\mathbf{x}}^{[l]2} s_1 s_2 G_{\text{Ret},\mathbf{x}}^{[l]}(s_1) G_{\text{Ret},\mathbf{x}}^{[l]}(s_2) \left. \right] \\
 &\left. \times \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{jl}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}, s_1) \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{kl}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}, s_2) \right], \tag{7.30}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{\text{B}}(x_1, \beta_{\text{B},\mathbf{x}}) &= -\frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{\alpha_1-i\infty}^{\alpha_1+i\infty} \frac{ds_1}{2\pi i} \int_{\alpha_2-i\infty}^{\alpha_2+i\infty} \frac{ds_2}{2\pi i} \frac{s_1 s_2 e^{(s_1+s_2)(t_1-t_i)}}{(s_1+i\omega)(s_2-i\omega)} \\
 &\times \lim_{\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_1} \left[\Theta^{jk}(s_1, s_2) \int d\mathbf{x} g(\mathbf{x}) \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{jl}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}, s_1) \lambda_{0,\mathbf{x}}^2 G_{\text{Ret},\mathbf{x}}^{[l]}(s_1) \right. \\
 &\left. \times G_{\text{Ret},\mathbf{x}}^{[l]}(s_2) \overline{N}_{\mathbf{x}}^{[l]}(\omega) \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{kl}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}, s_2) \right], \tag{7.31}
 \end{aligned}$$

donde esta última expresión presenta una integral más sobre las frecuencias de Fourier.

Cabe señalar que estas últimas expresiones se mantienen en el más general de los casos, correspondiente al de un material inhomogéneo y también anisótropo teniendo una temperatura inicial en cada punto. Sin embargo, podemos hacer una gran simplificación en estas expresiones considerando la interacción entre n cuerpos diferentes de volumen y de materiales homogéneos e isótropos con una única temperatura cada uno. En este caso, todos los subíndices espaciales \mathbf{x} (denotando inhomogeneidad) y los supraíndices $[l]$ (denotando anisotropía) tienen que ser reemplazados por un índice n denotando el cuerpo correspondiente. Por ende, la integral sobre el espacio se separa en una suma de integrales sobre cada volumen V_n . Por lo tanto, ambas expresiones las escribimos:

$$\begin{aligned}
 P_{\text{DOFs}}(x_1, \beta_{P_n}) &= -\frac{1}{8\pi} \sum_n \frac{\lambda_{0,n}^2 M_n}{2\Omega_n} \coth\left(\frac{\beta_{P_n} \Omega_n}{2}\right) \int_{\alpha_1-i\infty}^{\alpha_1+i\infty} \frac{ds_1}{2\pi i} \int_{\alpha_2-i\infty}^{\alpha_2+i\infty} \frac{ds_2}{2\pi i} \\
 &\times e^{(s_1+s_2)(t_1-t_i)} \left[(s_1^2 G_{\text{Ret},n}(s_1) - 1) (s_2^2 G_{\text{Ret},n}(s_2) - 1) \right. \\
 &\quad \left. + \Omega_n^2 s_1 s_2 G_{\text{Ret},n}(s_1) G_{\text{Ret},n}(s_2) \right] \tag{7.32} \\
 &\times \lim_{\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_1} \left[\Theta^{jk}(s_1, s_2) \int_{V_n} d\mathbf{x} \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{jl}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}, s_1) \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{kl}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}, s_2) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_B(x_1, \beta_{B,n}) &= -\frac{1}{8\pi} \sum_n \lambda_{0,n}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \overline{N}_n(\omega) \int_{\alpha_1-i\infty}^{\alpha_1+i\infty} \frac{ds_1}{2\pi i} \int_{\alpha_2-i\infty}^{\alpha_2+i\infty} \frac{ds_2}{2\pi i} \\
 &\times \frac{s_1 s_2 e^{(s_1+s_2)(t_1-t_i)}}{(s_1+i\omega)(s_2-i\omega)} G_{\text{Ret},n}(s_1) G_{\text{Ret},n}(s_2) \lim_{\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_1} \left[\Theta^{jk}(s_1, s_2) \int_{V_n} d\mathbf{x} \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{jl}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}, s_1) \right. \\
 &\times \left. \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{kl}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}, s_2) \right]. \tag{7.33}
 \end{aligned}$$

En este caso, las cantidades $\lim_{\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_1} \left[\Theta^{jk}(s_1, s_2) \int_{V_n} d\mathbf{x} \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{jl}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}, s_1) \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{kl}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}, s_2) \right]$ aparecen como comunes a ambas contribuciones. Sin embargo, las integrales tipo Mellin son las que definen la evolución temporal y el estado estacionario de estas contribuciones, las cuales son muy distintas debido a las propiedades analíticas de cada integrando (sus polos y cortes).

Más aún, como mencionamos anteriormente, es importante tener presente que en estas expresiones, está implícito que en todo punto de los cuerpos materiales, la base de ejes principales de Fresnel de los cuerpos es la misma. Cada punto define un elipsoide de Fresnel teniendo sus ejes a lo largo de las direcciones en la que cada componente de los vectores de polarización fluctúan. Esto es, en principio, una limitación al modelo, aunque podemos arreglarlo fácilmente al considerar diferentes bases para cada cuerpo (o inclusive para cada punto del espacio) relacionadas mediante típicos cambios de base, como mencionamos en el capítulo pasado. Con el objetivo de simplificar los cálculos pero sin perder las propiedades de anisotropía, consideraremos una única base para todos los puntos de material. Cabe remarcar que esta limitación desaparece al considerar materiales isotrópos, como en el problema de Lifshitz que analizamos en este capítulo.

No obstante, es importante tener cuidado en que la representación mediante elipsoides es válida para índices de refracción reales. En nuestro caso, como veremos, debido a la disipación presente en el problema, los tres índices de refracción en cada dirección son complejos, aunque de todos modos el elipsoide de Fresnel resulta ser útil como herramienta práctica de visualización.

Como comentarios finales, por un lado, cabe señalar que considerar este caso no simplifica formalmente la contribución de condiciones iniciales (7.21) ya que los modos iniciales del campo y las integrales espaciales son sobre todo el espacio ($g(\mathbf{x})$ no aparece en estas integrales). Por otro lado, es importante tener en cuenta que todas las expresiones dentro del límite de coincidencia deben estar regularizadas previamente para calcular este límite. Para el problema de Lifshitz, esto lo haremos luego de integrar en el espacio.

7.3. El Tensor de Green Retardado

Habiendo calculado en (7.21), (7.32) y (7.33) expresiones generales para cada contribución a la presión de Casimir en una región de vacío generada por diferentes cuerpos de materiales isótropos y homogéneos a diferentes temperaturas, podemos estudiar el conocido problema de Lifshitz consistente en dos semiespacios al permitir que n sea L ó R para las placas izquierda y derecha respectivamente.

Es claro de estas expresiones que la evolución temporal y el estado estacionario de cada contribución está gobernada por las propiedades analíticas de los integrandos como funciones de las variables de Laplace s_1, s_2 . Por lo tanto, para un dado problema es fundamental que conozcamos las propiedades analíticas de ambas transformadas de Laplace, tanto de la función de Green del QBM $G_{\text{Ret},n}(s)$ como del tensor de Green retardado $\mathcal{G}_{\text{Ret}}^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', s)$.

Como los grados de libertad de polarización los consideramos partículas Brownianas cuánticas, más allá del tipo de entorno considerado, la transformada de Laplace de la función de Green retardada viene dada por una expresión análoga a (6.52):

$$G_{\text{Ret},n}(s) = \frac{1}{\left(s^2 + \Omega_n^2 - 2 D_n(s)\right)}, \quad (7.34)$$

donde análogamente al capítulo anterior, $D_n(s)$ es la transformada de Laplace del núcleo de disipación del QBM para la placa n .

Es claro que, dada una densidad espectral para los baños, la ubicación de los polos define la evolución temporal y el comportamiento asintótico de la función de Green retardada. No obstante, causalidad implica, a través del teorema de Cauchy, que los polos de $G_{\text{Ret},n}$ se ubican en el semiplano izquierdo del plano complejo s . De hecho, dado que $\Omega_n \neq 0$ y que los baños incluyen funciones de corte en frecuencias, las partes reales de los polos son negativas (al igual que en la sección 3.5).

Por otra parte, el tensor de Green retardado se define por las ecuaciones de movimiento obtenidas a partir de la acción CTP para el campo EM (6.29) luego de imponer el gauge temporal ($A^0 \equiv 0$).

Como mostramos en el capítulo pasado, al tomar el gauge de Landau, donde $\alpha \rightarrow 0$, naturalmente tenemos que $A^0 \equiv 0$ de manera de no tener términos divergentes. Trabajando la ecuación para la componente temporal, luego de imponer la condición de gauge, la condición residual sobre las restantes componentes del campo EM viene dada por (6.50), donde el tensor de permitividad está dado por (6.51).

Como probamos en el capítulo pasado, para el caso general, las ecuaciones de mo-

vimiento para las componentes espaciales del campo EM en el gauge temporal vienen dadas por (6.58). A ésta se le suma la condición residual (6.50) resultante de imponer el gauge temporal en la ecuación de movimiento de la componente temporal.

Es así como mostramos que el gauge temporal es adecuado para la interacción con materia ya que desacopla las componentes del campo EM.

Dada la ecuación de movimiento, el tensor de Green retardado $\overleftrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$ se define según (6.59), sujeta a las condiciones iniciales (6.60).

Transformando Laplace dicha ecuación, obtenemos fácilmente:

$$\nabla \times \left(\nabla \times \overleftrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{Ret}} \right) + s^2 \overleftrightarrow{\varepsilon}'(s, \mathbf{x}) \cdot \overleftrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', s) = - \mathbb{I} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (7.35)$$

donde aparece la transformada de Laplace del tensor de permitividad (6.51):

$$\overleftrightarrow{\varepsilon}'(s, \mathbf{x}) = \mathbb{I} + \lambda_{0,\mathbf{x}}^2 g(\mathbf{x}) \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_{\text{Ret},\mathbf{x}}(s). \quad (7.36)$$

Es claro que al incluir la disipación, en el dominio temporal no podemos definir índices de refracción. Sin embargo, como la transformada de Laplace del tensor de permitividad resulta ser diagonal en la base elegida (correspondiente a los ejes principales de Fresnel como mencionamos en el capítulo pasado), los índices de refracción sí podemos definirlos en el dominio de las variables de Laplace. En cada dirección j , podemos definir los índices de refracción complejos $n_{\mathbf{x}}^{[j]2} = 1 + \lambda_{0,\mathbf{x}}^2 g(\mathbf{x}) G_{\text{Ret},\mathbf{x}}^{[j]}(s)$, de tal manera que la representación en términos del elipsoide de Fresnel resulta útil como forma pictórica para considerar la anisotropía del material (birrefringencia).

Como anticipamos anteriormente, es importante notar que el término de renormalización de masa se cancela con otro proveniente de la convolución, y por ende dicho término no participa de la definición del tensor de Green retardado, aunque es claramente necesario para cancelar el otro término resultante de la convolución que involucra la condición inicial de las funciones de Green.

A partir de (7.35), cabe señalar que la transformada de Laplace del tensor de Green retardado resulta ser el tensor de Green de Feynman asociado al operador diferencial $\nabla \times \nabla \times + s^2 \overleftrightarrow{\varepsilon}'(s, \mathbf{x})$, y por lo tanto satisface $\mathcal{G}_{\text{Ret}}^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', s) = \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{ji}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, s)$. Cabe remarcar también que como el tensor de Green retardado es real en el dominio temporal, es necesario que entonces se satisfaga que $\mathcal{G}_{\text{Ret}}^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', s) = \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{*ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', s^*)$.

En el caso general con inhomogeneidad y anisotropía, resolviendo (7.35) para un dado tensor de permitividad definiendo los contornos de los cuerpos materiales, podemos obtener la transformada de Laplace del tensor de Green retardado y calcular la presión

de Casimir mediante (7.21), (7.30) y (7.31). No obstante, la solución en estos casos es muy complicada de obtener.

Por el contrario, el problema de Lifshitz, consistente en dos semiespacios plano-paralelos de materiales diferentes pero isótropos y homogéneos que se encuentran separados de una distancia l en la dirección z (cuyo origen se ubica en el medio del espacio entre ellos), si bien es un caso más simple es al mismo tiempo resoluble analíticamente y de interés principalmente teórico desde el trabajo fundacional del propio Lifshitz [16]. En este caso, cada contribución de la presión de Casimir tenemos que evaluarla a partir de (7.21), (7.32) y (7.33), donde las últimas dos son versiones simplificadas del caso general inhomogéneo y anisótropo, aunque la expresión formal para la primera resulta sin cambios. En estos casos, como mencionamos anteriormente, el elipsoide de Fresnel resulta una esfera y el tensor de permitividad puede ser descrito por el producto entre una función y la matriz identidad, lo que permite describir los cuerpos materiales por la misma y única base arbitraria que se elija. Por lo tanto, como anticipamos antes, omitimos los supraíndices $[j]$ y reemplazamos los subíndices \mathbf{x} por L, R relacionados a cada cuerpo. Considerando todo, (7.35) se simplifica a:

$$\left(\nabla \times \nabla \times + s^2 \varepsilon(s, z)\right) \overleftrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', s) = -\mathbb{I} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (7.37)$$

donde el índice de refracción sólo depende de z y está dado por $n^2(s, z) = \varepsilon(s, z) = 1 + \lambda_{0,L}^2 \Theta\left(-\frac{l}{2} - z\right) G_{\text{Ret}}^L(s) + \lambda_{0,R}^2 \Theta\left(z - \frac{l}{2}\right) G_{\text{Ret}}^R(s)$.

Cabe señalar que esta ecuación y la resuelta en Ref.[28] son básicamente la misma (ver también Ref.[25]). Sin embargo, entre ellas hay dos diferencias claras: por un lado, la ecuación es formalmente la misma reemplazando la variable de Fourier en las soluciones dadas en Ref.[28] por is ; por otro lado, luego de este reemplazo, el miembro derecho de la ecuación que define el tensor de Green en Ref.[28] es el miembro derecho de (7.37) multiplicado por $4\pi s^2$, factor que compensa la diferencia en las definiciones del operador Θ^{sm} en la expresión para la presión (7.8), como fue comentado al final de la sección 7.1. Como la variable de Laplace aparece como un parámetro en la ecuación, podemos fácilmente obtener la transformada de Laplace del tensor de Green retardado dividiendo el tensor dado en Ref.[28] por $4\pi s^2$. Por último, debido a la invariancia traslacional en las coordenadas paralelas, la solución viene dada en términos de la transformada de Fourier en dichas coordenadas:

$$\mathcal{G}_{\text{Ret}}^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', s) = \int \frac{d\mathbf{Q}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{x}'_{\parallel})} \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{ij}(z, z', \mathbf{Q}, s), \quad (7.38)$$

donde $\mathbf{Q} = (Q_x, Q_y, 0)$, siendo \check{x}, \check{y} las direcciones paralelas.

Entonces, para un punto campo dentro del espacio vacío ($-\frac{l}{2} < z < \frac{l}{2}$), la transformada del tensor de Green retardado depende del valor del punto fuente z' . Para $z' < -\frac{l}{2}$, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{ij}(z, z', \mathbf{Q}, s) &= -\frac{1}{2q_z^{(1)}} \sum_{\mu=\text{TE, TM}} \frac{t_1^\mu}{D_\mu} \left[e_{\mu,i}(+) e^{-q_z(z-\frac{l}{2})} + e_{\mu,i}(-) r_2^\mu e^{q_z(z-\frac{l}{2})} e^{-2q_z l} \right] \\ &\times e_{\mu,j}^{(1)}(+) e^{q_z^{(1)}(z'-\frac{l}{2})}, \end{aligned} \quad (7.39)$$

y para $z' > \frac{l}{2}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{ij}(z, z', \mathbf{Q}, s) &= -\frac{1}{2q_z^{(2)}} \sum_{\mu=\text{TE, TM}} \frac{t_2^\mu}{D_\mu} \left[e_{\mu,i}(-) e^{q_z(z-\frac{l}{2})} + e_{\mu,i}(+) r_1^\mu e^{-q_z(z-\frac{l}{2})} \right] \\ &\times e_{\mu,j}^{(2)}(-) e^{-q_z l} e^{-q_z^{(2)}(z'-\frac{3}{2}l)}, \end{aligned} \quad (7.40)$$

mientras que para un punto fuente dentro del espacio vacío $-\frac{l}{2} < z' < \frac{l}{2}$ el tensor se divide en contribuciones de volumen (bulk, en inglés) y dispersada (scattered en inglés), es decir, ($\mathcal{G}_{\text{Ret}}^{ij} = \mathcal{G}_{\text{Ret,Bu}}^{ij} + \mathcal{G}_{\text{Ret,Sc}}^{ij}$):

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\text{Ret,Bu}}^{ij}(z, z', \mathbf{Q}, s) &= -\frac{\delta_{iz} \delta_{jz}}{s^2} \delta(z - z') \\ &- \frac{1}{2q_z} \sum_{\mu=\text{TE, TM}} \left[e_{\mu,i}(+) e_{\mu,j}(+) e^{-q_z(z-z')} \Theta(z - z') + e_{\mu,i}(-) e_{\mu,j}(-) \right. \\ &\times \left. e^{q_z(z-z')} \Theta(z' - z) \right], \end{aligned} \quad (7.41)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\text{Ret,Sc}}^{ij}(z, z', \mathbf{Q}, s) &= \frac{-1}{2q_z} \sum_{\mu=\text{TE, TM}} \frac{1}{D_\mu} \left[e_{\mu,i}(+) e_{\mu,j}(+) r_1^\mu r_2^\mu e^{-q_z(z-z'+2l)} + e_{\mu,i}(+) e_{\mu,j}(-) \right. \\ &\times \left. r_1^\mu e^{-q_z(z+z'-l)} + e_{\mu,i}(-) e_{\mu,j}(+) r_2^\mu e^{q_z(z+z'-3l)} + e_{\mu,i}(-) e_{\mu,j}(-) \right. \\ &\times \left. r_1^\mu r_2^\mu e^{q_z(z-z'-2l)} \right]. \end{aligned} \quad (7.42)$$

Aquí, estamos considerando la notación dada en Ref.[28] pero adaptada a nuestro caso. Por lo tanto, el vector de onda (complejo) en el medio n viene dado por:

$$\mathbf{q}^{(n)}(\pm) = \mathbf{Q} \pm i q_z^{(n)} \hat{\mathbf{z}}, \quad (7.43)$$

con $n = L, R$ correspondiendo a cada placa (a la vez que omitimos índices para la región de vacío) y donde el signo $+$ ($-$) corresponde a una onda viajando hacia arriba (hacia

abajo). El vector \mathbf{Q} es un vector real y aparece como la proyección del vector de onda $\mathbf{q}^{(n)}(\pm)$ sobre la interfase, mientras que la componente z viene dada por:

$$q_z^{(n)} = \sqrt{\varepsilon_n(s) s^2 + Q^2}. \quad (7.44)$$

Teniendo que el vector de onda $\mathbf{q}^{(n)}(\pm)$ se encuentra en el plano de incidencia (definido por $\check{\mathbf{Q}}$ y $\check{\mathbf{z}}$), podemos introducir los vectores transverso eléctrico (TE) y magnético (TM):

$$\mathbf{e}_{\text{TE}}^{(n)}(\pm) = \check{\mathbf{Q}} \times \check{\mathbf{z}}, \quad (7.45)$$

$$\mathbf{e}_{\text{TM}}^{(n)}(\pm) = \mathbf{e}_{\text{TE}}^{(n)}(\pm) \times \check{\mathbf{q}}^{(n)}(\pm) = \frac{Q \check{\mathbf{z}} \mp i q_z^{(n)} \check{\mathbf{Q}}}{\sqrt{\varepsilon_n(s)} i s}. \quad (7.46)$$

Los coeficientes de Fresnel de reflexión (r) y transmisión (t) para cada superficie y componentes vienen dados por:

$$r_n^{\text{TE}} = \frac{q_z - q_z^{(n)}}{q_z + q_z^{(n)}} \quad , \quad r_n^{\text{TM}} = \frac{\varepsilon_n q_z - q_z^{(n)}}{\varepsilon_n q_z + q_z^{(n)}}, \quad (7.47)$$

$$t_n^{\text{TE}} = \frac{2 q_z^{(n)}}{q_z + q_z^{(n)}} \quad , \quad t_n^{\text{TM}} = \frac{2 \sqrt{\varepsilon_n(s)} q_z^{(n)}}{\varepsilon_n q_z + q_z^{(n)}}, \quad (7.48)$$

mientras que las múltiples reflexiones (que no entran en la parte de volumen) son descritas por el denominador:

$$D_\mu = 1 - r_1^\mu r_2^\mu e^{-2q_z l}. \quad (7.49)$$

Más allá de las aparentemente complicadas expresiones de la transformada de Laplace del tensor de Green retardado, sus propiedades analíticas podemos analizarlas relativamente fácil. Cada expresión presenta numerosos polos y cortes. Los polos básicamente son las raíces de D_μ y uno ubicado en el origen $s = 0$.

Por un lado, los polos provenientes de D_μ deberíamos calcularlos a fin de calcular completamente la evolución temporal del sistema. Sin embargo, la propiedad de causalidad del tensor (al igual que en la sección 3.5) implica que todos los polos se ubican en el semiplano izquierdo del plano complejo s de manera de dar una contribución convergente en la evolución. Puede pasarnos que algunos polos tengan parte real nula, es decir, sea un polo imaginario puro. Por lo tanto, estos polos contribuirían al comportamiento de tiempos largos del tensor de Green retardado (y por ende a la presión), aunque si ponemos $s = i \text{Im}(s)$ (con $\text{Im}(s) \neq 0$) es fácil mostrar que no hay polos de este tipo.

No obstante, por un lado, el polo en el origen aparece explícitamente en el primer término de (7.41), pero también lo hace en el otro término y en (7.39), (7.40) y (7.42), para los términos con $\mu = \text{TM}$ únicamente, ya que en cualquier región los vectores de polarización TM proporcionan el polo a través de sus denominadores, como es claro a partir de (7.46).

Además de los polos, las transformadas de Laplace en cada región presentan numerosos cortes, que aportan a la evolución temporal transitoria del tensor de Green retardado. En nuestro caso, es claro que los cortes vienen dados por las raíces cuadradas $\sqrt{s^2 + k_{\parallel}^2}$ y $\sqrt{\varepsilon_n(s) s^2 + k_{\parallel}^2}$. El corte $\sqrt{\varepsilon_n(s)}$ que aparece en las expresiones del coeficiente de transmisión para los términos TM en (7.48) no debe ser considerado ya que se cancela con la raíz cuadrada $\sqrt{\varepsilon_n(s)}$ contenida en el denominador de los vectores de polarización $\mathbf{e}_{\text{TM}}^{(n)}(\pm)$ en (7.46) que entra en el mismo término de las transformadas.

Considerando todo, las propiedades analíticas de la transformada de Laplace del tensor de Green retardado son muy simple, más allá de las complicadas expresiones. Estas propiedades son importantes al momento de computar la evolución temporal completa del problema y determinar el límite de tiempos largos de las diferentes cantidades físicas de interés. Tener estas propiedades en mente será el punto crucial de las próximas secciones y el análisis de la situación estacionaria.

7.4. Estado Estacionario del Problema de Lifshitz

Una vez conocidas las transformadas de Laplace-Fourier del tensor de Green retardado (7.39)-(7.42) para un punto campo dentro del espacio vacío del problema de Lifshitz, podemos calcular la correspondiente presión de Casimir en el estado estacionario a partir de las expresiones generales para cada contribución y las propiedades analíticas del tensor.

Para las tres contribuciones (7.21), (7.32) y (7.33), es claro que con el objetivo de resolver completamente sus evoluciones temporales, debemos antitransformar Laplace mediante el teorema de residuos (para los polos) y calculando integrales asociadas a los cortes presentes en la transformada.

Sin embargo, a fin de determinar el límite de tiempos largos de las contribuciones, el trabajo es bastante más simple y se relaciona a una cuestión sutil en torno a los regímenes de tiempos largos y las situaciones estacionarias. Es claro que el carácter estacionario de las cantidades físicas como la presión o la energía está relacionado con hecho de que no dependen del tiempo en el régimen de tiempos largos. En otras palabras, usualmente para los sistemas de interés, debido a razones (o intuiciones) físicas, se espera

(o se asume) que el sistema completo estará en una situación estacionaria en el límite de tiempos largos. En muchos casos, esto nos permite encarar y estudiar directamente el régimen estacionario, prescindiendo de su rigurosa (e innecesaria en muchos casos) derivación a partir de un problema dinámico completo. En el presente caso, estamos en la situación inversa. Resolvimos el problema dinámico completo en términos de una doble antitransformada de Laplace, la cual debemos calcular mediante el teorema de residuos cerrando el contorno complejo hacia la izquierda, cuestión que no podemos lograr debido a la imposibilidad técnica de calcular de manera analítica todos los polos de los integrandos en el plano complejo (sólo conocemos algunas propiedades relacionadas a la causalidad del tensor de Green retardado).

No obstante, obtener el límite de tiempos largos de cantidades en términos de doble antitransformadas de Laplace, dependientes de $e^{(s_1+s_2)(t_1-t_i)}$, es relativamente más sencillo.

Como la evolución temporal depende de la configuración de polos y cortes que el integrando presenta, tenemos que distinguir qué propiedades analíticas contribuyen al estado estacionario de las cantidades. Como puede encontrarse en Ref.[45], podemos mostrar que los típicos cortes que aparecen en la transformada de Laplace del tensor de Green retardado no contribuyen al régimen de tiempos largos. Entonces, la situación estacionaria debe estar definida por algunos de los polos, que siempre resultan en comportamientos temporales exponenciales dependiendo del valor del polo en cuestión. Si, por ejemplo, un dado polo tiene parte real distinta de cero, por la propiedad de causalidad (ver sección 3.5) tenemos, de hecho, que su valor es negativo. Por lo tanto, el comportamiento resultante asociado a ese polo será de decaimiento exponencial en el tiempo. Por otra parte, si un dado polo tiene parte real nula (es decir, es imaginario puro), el comportamiento resultante será oscilatorio en el tiempo con una frecuencia relacionada a la parte imaginaria del polo. Como último caso, si el polo se encuentra en 0, el comportamiento resultante en el tiempo será de una constante.

No obstante, en nuestro caso de una doble antitransformada para cada contribución, este último caso del polo en 0 no es la única forma de obtener un comportamiento constante en el tiempo para las cantidades que nos interesan. La presencia de $e^{(s_1+s_2)(t_1-t_i)}$ en el integrando de dos variables hace que los polos asociados a la variable s_1 se combinen con los polos asociados a la variable s_2 a fin de determinar la evolución temporal de la cantidad. En otras palabras, si resolvemos ambas integrales de Laplace, cada término de la evolución temporal completa será la combinación de dos polos, uno asociado a la antitransformada de Laplace sobre s_1 (llamémosle por ejemplo $s_1 \in \mathbb{C}$) y otro asociado a

s_2 (\mathfrak{s}_2). Entonces, si los polos son tales que $\mathfrak{s}_1 = -\mathfrak{s}_2$, no tendremos exponencial asociada a ese término en la evolución temporal, obteniendo una constante (independiente del tiempo). En particular, es claro que el caso en que ambos polos sean iguales a 0 satisface dicha condición, resultando en un término independiente del tiempo. Sin embargo, si tomamos un polo con parte real negativa (por ejemplo \mathfrak{s}_1 tal que $\text{Re}[\mathfrak{s}_1] < 0$) la condición exige que para obtener un término independiente del tiempo, este polo debe combinarse con otro polo \mathfrak{s}_2 en la variable de Laplace s_2 tal que $\mathfrak{s}_2 = -\mathfrak{s}_1$, lo que implica $\text{Re}[\mathfrak{s}_2] > 0$, lo que está garantizado que no ocurre debido a la propiedad de causalidad. Por lo tanto, para todas estas cantidades físicas que construimos a partir de cantidades causales, todos los polos con parte real negativa no pueden ser combinados para obtener un término independiente del tiempo.

Como último caso, podemos considerar el caso donde los polos tiene parte real nula. En estos casos, considerando un polo $i\mathfrak{s}_1$ tal que $\mathfrak{s}_1 \in \mathbb{R}$, podemos satisfacer la condición requerida con un polo $i\mathfrak{s}_2 = -i\mathfrak{s}_1$ de tal forma que ambas evoluciones oscilatorias se cancelan entre sí en la exponencial dando un término independiente del tiempo.

Cabe señalar que, siguiendo el hilo del razonamiento, los términos independientes del tiempo serán así desde el comienzo. La situación estacionaria surge cuando los términos transitorios se desvanecen, es decir, cuando todos los términos dependientes del tiempo resultantes de la combinación de polos que no se cancelan y de los cortes van a cero. Así, el tiempo de relajación del sistema viene dado por el último término transitorio en desvanecerse. Es más, dicho tiempo será igual a la parte real no nula más grande (es decir, menos negativa) entre todas las posibles combinaciones de polos y los posibles puntos de ramificación (en inglés, branch points, que corresponden a los extremos donde nacen los cortes) en cada una de las contribuciones.

En conclusión, el trabajo en cada contribución a fin de determinar sus estados estacionarios girará en torno al estudio de las combinaciones de los polos en ambas variables s_1 y s_2 .

7.4.1. Límite de Tiempos Largos de la Contribución de los Grados de Libertad de Polarización

Podemos comenzar por considerar una de las partes de la contribución del material a la presión de Casimir para el problema de Lifshitz, que es la asociada a los grados de libertad de polarización (7.32) donde, como anticipamos anteriormente, en este caso $n = L, R$. Por otra parte, la cantidad $\lim_{\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_1} \left[\Theta^{jk}(s_1, s_2) \int_{V_n} d\mathbf{x} \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{jb}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}, s_1) \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{kb}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}, s_2) \right]$, que está presente tanto en esta contribución como en la de los baños, podemos simpli-

ficarla para este caso ya que en la última sección dimos la transformada de Laplace del tensor de Green retardado para el problema de Lifshitz y sus propiedades analíticas.

Tomando en cuenta que para este problema las coordenadas paralelas pueden ser transformadas Fourier como en (7.38), las integraciones sobre las coordenadas paralelas \mathbf{x}_{\parallel} podemos resolverlas fácilmente, obteniendo:

$$\begin{aligned} & \int_{V_n} d\mathbf{x} \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{jb}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}, s_1) \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{kb}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}, s_2) = \\ & = \int \frac{d\mathbf{Q}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{Q}\cdot(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} \int_{V_n} dz \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{jb}(z_1, z, \mathbf{Q}, s_1) \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{kb}(z_2, z, -\mathbf{Q}, s_2), \end{aligned} \quad (7.50)$$

donde en el miembro derecho la integración sobre V_n implica la integración sobre cada semiespacio. Entonces, podemos escribir $\int_{V_n} dz = (-1)^n \int_{(-1)^n \frac{l}{2}}^{(-1)^n \infty} dz$ donde asociamos $n = L$ ($n = R$) en el miembro izquierdo con $n = 1$ ($n = 2$) en el miembro derecho de esta igualdad.

Considerando (7.39) and (7.40), es claro que la restante integración sobre z es sobre funciones exponenciales en el segundo argumento, que son fácilmente resolubles, de manera que obtenemos:

$$\begin{aligned} & \int_{V_n} d\mathbf{x} \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{jb}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}, s_1) \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{kb}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}, s_2) = \\ & = \int \frac{d\mathbf{Q}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{Q}\cdot(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} \frac{\mathcal{G}_{\text{Ret}}^{jb}(z_1, (-1)^n l/2, \mathbf{Q}, s_1) \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{kb}(z_2, (-1)^n l/2, -\mathbf{Q}, s_2)}{\left(q_z^{(n)}(s_1, Q) + q_z^{(n)}(s_2, Q)\right)}. \end{aligned} \quad (7.51)$$

Por lo tanto, a partir de (7.32), finalmente obtenemos para la evolución temporal completa de la contribución a la presión de Casimir:

$$\begin{aligned} P_{\text{DOFs}}(x_1, \beta_{P_n}, l) & = -\frac{1}{8\pi} \sum_{n=L,R} \frac{\lambda_{0,n}^2 M_n}{2\Omega_n} \coth\left(\frac{\beta_{P_n} \Omega_n}{2}\right) \int \frac{d\mathbf{Q}}{(2\pi)^2} \int_{\alpha_1 - i\infty}^{\alpha_1 + i\infty} \frac{ds_1}{2\pi i} \\ & \times \int_{\alpha_2 - i\infty}^{\alpha_2 + i\infty} \frac{ds_2}{2\pi i} \left[(s_1^2 G_{\text{Ret},n}(s_1) - 1) (s_2^2 G_{\text{Ret},n}(s_2) - 1) \right. \\ & \left. + \Omega_n^2 s_1 s_2 G_{\text{Ret},n}(s_1) G_{\text{Ret},n}(s_2) \right] \frac{e^{(s_1 + s_2)(t_1 - t_i)}}{\left(q_z^{(n)}(s_1, Q) + q_z^{(n)}(s_2, Q)\right)} \\ & \times \lim_{\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_1} \left[\Theta^{jk}(s_1, s_2) e^{i\mathbf{Q}\cdot(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{jb}(z_1, (-1)^n l/2, \mathbf{Q}, s_1) \right. \\ & \left. \times \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{kb}(z_2, (-1)^n l/2, -\mathbf{Q}, s_2) \right], \end{aligned} \quad (7.52)$$

donde dejamos claro el hecho de que la contribución a la presión depende de la separación entre placas l .

Ahora, con el objetivo de determinar el comportamiento de tiempos largos de esta expresión, tenemos que analizar las propiedades analíticas del integrando en términos de las variables s_1 y s_2 simultáneamente. Para un dado n , es claro que todos los términos no contribuirán necesariamente. Teniendo en cuenta las propiedades analíticas de las funciones de Green retardadas $G_{\text{Ret},n}$ y el tensor de Green retardado $\overleftrightarrow{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}$ (que se separa en términos TE y TM) comentadas en la última sección, por inspección vemos que los únicos polos de todo el integrando de dos variables de Laplace que resultan en un término independiente del tiempo son los que se ubican en el origen para ambas variables. En otras palabras y más específicamente, los términos con los polos ubicados en el origen de ambas variables de Laplace ($s_1 = 0 = s_2$) que se asocian productos TM \times TM resultantes de $\mathcal{G}_{\text{Ret}}^{jb}(z_1, (-1)^{nl}/2, \mathbf{Q}, s_1)$ $\mathcal{G}_{\text{Ret}}^{kb}(z_2, (-1)^{nl}/2, -\mathbf{Q}, s_2)$ son los que aportan al estacionario. Sin embargo, esto no es tan directo ya que estos productos están multiplicados tanto por $[(s_1^2 G_{\text{Ret},n}(s_1) - 1)(s_2^2 G_{\text{Ret},n}(s_2) - 1) + \Omega_n^2 s_1 s_2 G_{\text{Ret},n}(s_1) G_{\text{Ret},n}(s_2)]$ como por $\Theta^{jk}(s_1, s_2)$ que contienen factores lineales s_1 y s_2 que pueden eventualmente evitar que $s_1 = 0$ ó $s_2 = 0$ sean efectivamente polos en un dado término. En definitiva, dependiendo de qué combinaciones consideremos, tendremos polos de primer ó segundo orden.

Como mencionamos anteriormente, los polos en el origen están relacionados a los términos asociados a los vectores de polarización TM (7.46). Por lo tanto, a partir de (7.39) and (7.40), podemos ver que el término TM \times TM del producto $\mathcal{G}_{\text{Ret}}^{jb}(z_1, (-1)^{nl}/2, \mathbf{Q}, s_1)$ $\mathcal{G}_{\text{Ret}}^{kb}(z_2, (-1)^{nl}/2, -\mathbf{Q}, s_2)$ contiene $1/s_1^2$ y $1/s_2^2$ como factores.

Por ejemplo, los términos asociados a combinaciones que llevan $s_1^2 G_{\text{Ret},n}(s_1)$ (o $s_2^2 G_{\text{Ret},n}(s_2)$) cancelan los denominadores $1/s_1^2$ (o $1/s_2^2$) y por lo tanto esos términos no tendrán polo en $s_1 = 0$ ($s_2 = 0$). Dichos términos sólo contribuyen al transitorio.

Por otra parte, el término resultante de combinar los términos de $[(s_1^2 G_{\text{Ret},n}(s_1) - 1)(s_2^2 G_{\text{Ret},n}(s_2) - 1) + \Omega_n^2 s_1 s_2 G_{\text{Ret},n}(s_1) G_{\text{Ret},n}(s_2)]$ que contienen (-1) dará polos de primer orden para ambas variables de Laplace a través de su combinación con el primer término de $\Theta^{jk}(s_1, s_2)$ (asociado a la contribución del campo eléctrico), y polos de segundo orden para ambas variables en la combinación con el segundo término de $\Theta^{jk}(s_1, s_2)$ (asociado a la contribución del campo magnético).

Finalmente, el término $\Omega_n^2 s_1 s_2 G_{\text{Ret},n}(s_1) G_{\text{Ret},n}(s_2)$ sólo presentará polos de primer orden cuando se combina con el segundo término de $\Theta^{jk}(s_1, s_2)$ (la combinación con el primero no da polos en el origen).

De esta forma, la contribución a la presión (7.52) podemos escribirla de manera

resumida agrupando los términos según el orden de sus polos en 0 en ambas variables:

$$\begin{aligned}
 P_{\text{DOFs}}(x_1, \beta_{P_n}, l) &= (\text{Términos con polos de segundo orden en } 0) \\
 &+ (\text{Términos con polos de primer orden en } 0) \\
 &+ (\text{Términos sin polos en } 0).
 \end{aligned} \tag{7.53}$$

En primer lugar, es claro que el último de los términos no tendrá ninguna contribución al estacionario y que son términos participantes únicamente de la evolución transitoria.

En segundo lugar, es fácil mostrar analíticamente que los polos de segundo orden en 0 resultan en términos divergentes o términos nulos en el límite de tiempos largos. Esto se debe a que en el cálculo de los residuos de los polos de segundo orden, es necesario derivar el integrando respecto de la variable de Laplace en cuestión (ya sea s_1 o s_2 según el caso). Cabe señalar aquí que los residuos en cada término de estos pueden analizarse de forma separada en cada variable y los integrandos tienen la forma $e^{s(t_1-t_i)}$ por una función que depende de $\sqrt{s^2 + Q^2}$ y $\sqrt{\varepsilon_n(s) s^2 + Q^2}$. Por ende, cuando se deriva por la regla del producto, la derivada de la exponencial resulta en $(t_1 - t_i)e^{s(t_1-t_i)}$ por la misma función que luego de evaluar en $s = 0$, resultando en el mencionado término divergente en el límite de tiempos largos ($t_i \rightarrow -\infty$). Estos términos entonces son descartados con el objetivo de tener una contribución finita. Por otro lado, cuando se deriva la función de $\sqrt{s^2 + Q^2}$ y $\sqrt{\varepsilon_n(s) s^2 + Q^2}$, dejando la exponencial sin derivar, la regla de la cadena hace que los términos que aparecen estén multiplicados o por $s/\sqrt{s^2 + Q^2}$ o por $[\varepsilon'_n(s) s + 2\varepsilon_n(s)]s/2\sqrt{\varepsilon_n(s) s^2 + Q^2}$, que al evaluarse en $s = 0$, resultan nulos.

En definitiva, los términos con polos de segundo orden en 0 tampoco contribuyen al estacionario.

Por último restan los términos con polos de primer orden en 0. Estos términos en principio deben ser considerados según el cálculo matemático riguroso, sin embargo, en el espacio de coordenadas espaciales y temporales, están asociados a derivar respecto del tiempo alguna de las funciones de Heaviside $\Theta(t - t_i)$ que se encuentran dentro de la definición de las funciones de Green retardadas o el mismo tensor de Green retardado debido a su carácter causal. Matemáticamente, derivar una función de Heaviside, resulta en una función delta de Dirac y esto hace que lo restante en la expresión se evalúe en el argumento de la delta. Sin embargo, esto se debe que el comienzo de la interacción es súbito. Físicamente, esto es una aproximación a que el inicio de la interacción ocurre en un muy corto tiempo. Si en cambio, uno reemplazase la función de Heaviside por una función suave que va de 0 a casi 1 en un tiempo finito y que se acerca asintóticamente a

dicho valor, no tendríamos la evaluación de lo restante en la expresión en el argumento, lo que mantendría el comportamiento convergente de toda la expresión para tiempos largos. En otras palabras, los polos de primer orden en 0 son resultado de derivadas funciones de Heaviside que representan el encendido súbito de la interacción y que, por lo tanto, no son físicos. Por lo tanto, no tendrán contribución en los tiempos largos. Esto coincide con cómo tomamos el límite para esta contribución tanto en el capítulo 5 como en el último, donde las mismas contribuciones en el espacio coordinado las descartamos por los mismos motivos.

Finalmente, probamos que para la contribución a la presión de los grados de libertad de polarización, tenemos que en el límite de tiempos largos ($t_i \rightarrow -\infty$):

$$P_{\text{DOFs}}(x_1, \beta_{P_n}, l) \longrightarrow P_{\text{DOFs}}^{\infty}(\beta_{P_n}, l) = 0. \quad (7.54)$$

7.4.2. Límite de Tiempos Largos de la Contribución de los Baños

Una vez que mostramos que la contribución de los grados de libertad de polarización a la presión en el estado estacionario es nula, analizamos la correspondiente a los baños.

Retomamos la expresión general (7.33) para la contribución de los baños a la presión en un escenario de cuerpos isótropos y homogéneos, considerando para el problema de Lifshitz, al igual que en la sección pasada, $n = L, R$.

Como pasa para la contribución de los grados de libertad de polarización, la presión en este caso también contiene la expresión $\int_{V_n} d\mathbf{x} \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{jb}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}, s_1) \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{kb}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}, s_2)$. Entonces, para el caso de dos semiespacios paralelos, podemos usar (7.52) para simplificar la expresión de manera que la presión resulta:

$$\begin{aligned} P_{\text{B}}(x_1, \beta_{\text{B},n}, l) &= -\frac{1}{8\pi} \sum_{n=L,R} \lambda_{0,n}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \bar{N}_n(\omega) \int \frac{d\mathbf{Q}}{(2\pi)^2} \int_{\alpha_1-i\infty}^{\alpha_1+i\infty} \frac{ds_1}{2\pi i} \int_{\alpha_2-i\infty}^{\alpha_2+i\infty} \frac{ds_2}{2\pi i} \\ &\times \frac{s_1 s_2 e^{(s_1+s_2)(t_1-t_i)}}{(s_1+i\omega)(s_2-i\omega)} \frac{G_{\text{Ret},n}(s_1) G_{\text{Ret},n}(s_2)}{\left(q_z^{(n)}(s_1, Q) + q_z^{(n)}(s_2, Q)\right)} \\ &\times \lim_{\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_1} \left[\Theta^{jk}(s_1, s_2) e^{i\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{jb}(z_1, (-1)^n l/2, \mathbf{Q}, s_1) \right. \\ &\times \left. \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{kb}(z_2, (-1)^n l/2, -\mathbf{Q}, s_2) \right]. \end{aligned} \quad (7.55)$$

A pesar de los cortes, como siempre, con el objetivo de determinar el comportamiento de tiempos largos de esta contribución, tenemos que considerar nuevamente las combinaciones de los polos en las variables de Laplace s_1 y s_2 de tal forma de obtener un término

independiente del tiempo (anulando el exponente de $e^{(s_1+s_2)(t_1-t_i)}$ en el cálculo de los residuos para cada variable).

Como primer paso, como en la contribución de la sección pasada, tenemos que analizar los polos en $s_1 = 0 = s_2$ provenientes de los términos $\text{TM} \times \text{TM}$. Sin embargo, debido a la presencia del factor $s_1 s_2$ en el integrando, el único término de $\Theta^{jk}(s_1, s_2)$ que puede tener una contribución mediante este polo es el segundo $\Lambda^{pm} \epsilon^{prj} \epsilon^{mlk} \partial_{r_1} \partial_{l_2}$ (asociado al campo magnético), dando polos de primer orden para ambas variables de Laplace. Por otro lado, el primer término de $\Theta^{jk}(s_1, s_2)$ (asociado al campo eléctrico) contiene un factor adicional $s_1 s_2$ que finalmente cancela los denominadores de los términos $\text{TM} \times \text{TM}$ que proveen los polos en $s_1 = 0 = s_2$, dando ningún polo para dicho término.

No obstante, el cálculo del polo implica la suma sobre los índices. Si hacemos en forma explícita todas las sumas de índices y las derivadas junto con el límite de coincidencia, podemos ver que en realidad el numerador también se hace nulo para $s_1 = 0 = s_2$. De manera que cuando se anula el denominador, también parece hacerlo el numerador. Esto claramente es un límite indeterminado, pero al aplicar la regla de L'Hopital para su resolución, vemos que el límite da un valor finito. Esto significa que lo que suponíamos que era un polo en $s_1 = 0 = s_2$, en realidad no lo era ya que no diverge el integrando en esos puntos. Por lo tanto, $s_1 = 0 = s_2$ no son polos para estos términos. De forma tal que no contribuyen al estado estacionario de la presión generada por los baños.

Por otra parte, además de los puntos $s_1 = 0 = s_2$, por inspección es claro que esta contribución también presenta otra combinación de polos en s_1 y s_2 tal que resulta en un término independiente del tiempo. Debido al hecho de que el núcleo de ruido QBM depende de la diferencia de los tiempos y por lo tanto podemos escribirlo en términos de su transformada de Fourier, los denominadores $(s_1 + i\omega)$ y $(s_2 - i\omega)$ aparecen en esta contribución denotando la dinámica no amortiguada (o no disipativa) de los baños. Por lo tanto, el polo en $s_1 = -i\omega$ combinado con el polo en $s_2 = i\omega$ resultan en un término independiente del tiempo.

Considerando todo, la contribución de tiempos largos de los baños a la presión de Casimir podemos escribirla como:

$$\begin{aligned}
 P_B^\infty(\beta_{B,n}, l) &= \frac{-1}{8\pi} \sum_{n=L,R} \lambda_{0,n}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \omega^2 \overline{N}_n(\omega) \int \frac{d\mathbf{Q}}{(2\pi)^2} \frac{G_{\text{Ret},n}(-i\omega) G_{\text{Ret},n}(i\omega)}{\left(q_z^{(n)}(-i\omega, Q) + q_z^{(n)}(i\omega, Q)\right)} \\
 &\times \lim_{\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_1} \left[\Theta^{jk}(-i\omega, i\omega) e^{i\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{jb}(z_1, (-1)^n l/2, \mathbf{Q}, -i\omega) \right. \\
 &\left. \times \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{kb}(z_2, (-1)^n l/2, -\mathbf{Q}, i\omega) \right]. \tag{7.56}
 \end{aligned}$$

Esto resulta ser la contribución de los baños a la presión de Casimir en un contexto general fuera del equilibrio. No obstante, podemos establecer una conexión importante con trabajos previos al emplear sobre el resultado relaciones de fluctuación-disipación. Es decir, planteando dicha relación entre los núcleos de disipación y ruido del QBM (D_n y N_n respectivamente), es decir, los núcleos generados por los baños en cada punto del espacio que actúan sobre los grados de libertad de polarización. Por lo tanto, podemos escribir, para las transformadas de Fourier de los núcleos, la relación de fluctuación-disipación:

$$\bar{N}_n(\omega) = \coth\left(\frac{\beta_{B,n}}{2}\omega\right) \text{Im}[\bar{D}_n(\omega)], \quad (7.57)$$

donde $\bar{D}_n(\omega)$ es la transformada de Fourier del núcleo de disipación del QBM.

A partir de la definición del tensor de permitividad (6.51), podemos probar que, para el presente caso, la transformada de Fourier de la función permitividad está dada por $\bar{\varepsilon}_n(\omega) = 1 + \lambda_{0,n}^2 \bar{G}_{\text{Ret},n}(\omega)$, teniendo que $\bar{G}_{\text{Ret},n}(-\omega) = \bar{G}_{\text{Ret},n}^*(\omega)$ para garantizar la realidad de la función de Green del QBM. Por otra parte, dado que la transformada de Laplace de dicha función (6.52) se supone, por causalidad a partir de la sección 3.5, que tiene polos con partes reales negativas, entonces se verifica que $G_{\text{Ret},n}(-i\omega) = \bar{G}_{\text{Ret},n}(\omega)$ y lo mismo pasa para los núcleos de disipación del QBM $D_n(-i\omega) = \bar{D}_n(\omega)$ (de hecho, la conexión entre estas transformadas de Laplace y Fourier aplica a todas las funciones causales que tome el valor cero para el valor nulo de su variable). Por lo tanto, podemos fácilmente escribir:

$$\begin{aligned} \text{Im}[\bar{\varepsilon}_n(\omega)] &= \text{Im}[\bar{D}_n(\omega)] |\bar{G}_{\text{Ret},n}(\omega)|^2 \\ &= \text{Im}[\bar{D}_n(\omega)] G_{\text{Ret},n}(-i\omega) G_{\text{Ret},n}(i\omega). \end{aligned} \quad (7.58)$$

Entonces, introduciendo (7.57) en (7.56) y usando (7.58), obtenemos:

$$\begin{aligned} P_B^\infty(\beta_{B,n}, l) &= \frac{-1}{8\pi} \sum_{n=L,R} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{Q}}{(2\pi)^2} \frac{\omega^2 \coth\left(\frac{\beta_{B,n}}{2}\omega\right) \text{Im}[\bar{\varepsilon}_n(\omega)]}{\left(q_z^{(n)}(-i\omega, \mathbf{Q}) + q_z^{(n)}(i\omega, \mathbf{Q})\right)} \\ &\times \lim_{\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_1} \left[\Theta^{jk}(-i\omega, i\omega) e^{i\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{jb}(z_1, (-1)^n l/2, \mathbf{Q}, -i\omega) \right. \\ &\times \left. \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{kb}(z_2, (-1)^n l/2, -\mathbf{Q}, i\omega) \right]. \end{aligned} \quad (7.59)$$

En este punto, podemos usar (7.52) nuevamente para volver a la integral espacial teniendo $s_1 = -i\omega$ y $s_2 = i\omega$. Entonces, podemos, primero, emplear la propiedad de

realidad del tensor de Green retardado en el dominio temporal para el último de los factores $\mathcal{G}_{\text{Ret}}^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', i\omega) = \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{*ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', -i\omega)$, para luego continuar con la aplicación de la propiedad relacionada a que la transformada de Laplace de dicho tensor es un propagador de Feynman $\mathcal{G}_{\text{Ret}}^{*ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', -i\omega) = \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{*ji}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, -i\omega)$. Finalmente, para ambas transformadas de Laplace del tensor de Green retardado podemos usar la conexión entre dichas transformadas y las de Fourier garantizada por el comportamiento causal, de manera de que podemos escribir:

$$P_{\text{B}}^{\infty}(\beta_{\text{B},n}, l) = -\frac{1}{8\pi} \sum_{n=L,R} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \omega^2 \coth\left(\frac{\beta_{\text{B},n}}{2} \omega\right) \text{Im}[\bar{\epsilon}_n(\omega)] \quad (7.60)$$

$$\times \lim_{\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_1} \left[\Theta^{jk}(\omega) \int_{V_n} d\mathbf{x} \bar{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}^{jb}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}, \omega) \bar{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}^{*bk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \omega) \right],$$

el cual resulta ser exactamente el resultado obtenido en Ref.[28] como la presión total para el problema de Casimir, y donde hemos puesto $\Theta^{jk}(\omega) \equiv \Theta^{jk}(-i\omega, i\omega)$ a partir de su definición.

De esta forma, probamos que la contribución de los baños en el régimen de tiempos largos da exactamente el resultado hallado en Ref.[28] para una situación estacionaria del problema de Lifshitz. Sin embargo, por medio de nuestro procedimiento, podemos ir un paso más allá y extender el resultado al caso de materiales anisótropos e inhomogéneos ya que ambos polos imaginarios puros siempre están presentes, como podemos ver de la expresión general (7.31). La principal dificultad en la mayoría de estos casos, como mencionamos al comienzo de esta sección, sigue siendo el hecho de calcular la transformada de Laplace del tensor de Green retardado para un dado problema. De todos modos, de forma general podemos escribir:

$$P_{\text{B}}^{\infty}(\beta_{\text{B},\mathbf{x}}) = \frac{-1}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \omega^2 \lim_{\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_1} \left[\Theta^{jk}(\omega) \int d\mathbf{x} g(\mathbf{x}) \bar{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}^{jl}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}, \omega) \coth\left(\frac{\beta_{\text{B},\mathbf{x}}}{2} \omega\right) \right. \quad (7.61)$$

$$\left. \times \text{Im}[\bar{\epsilon}_{\mathbf{x}}^{[ll]}(\omega)] \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{*lk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \omega) \right],$$

el cual es la generalización del resultado estacionario de Ref.[28] al caso de materiales anisótropos e inhomogéneos.

Una vez calculada completamente la contribución del material al estado estacionario de la presión de Casimir, nos resta analizar la contribución de las condiciones iniciales al régimen de tiempos largos.

7.4.3. Límite de Tiempos Largos de la Contribución de Condiciones Iniciales

Luego de determinar la contribución del material (consistente de dos partes) a la presión de Casimir, la contribución restante es la asociada a las condiciones iniciales del campo EM, es decir, a su dinámica efectiva y estado inicial.

Volviendo a (7.21), como ya mencionamos, cabe señalar que a diferencia de las otras contribuciones, ésta no se simplifica formalmente si consideramos cuerpos isótropos y homogéneos. De hecho, no depende directamente de las propiedades de los materiales y los contornos como ocurre en el caso de la contribución del material que sí lo hace debido a la presencia de los núcleos del material. La dependencia en los contornos y los materiales está codificada en el tensor de Green retardado pero no hay ninguna dependencia explícita adicional.

No obstante, para el caso particular del problema de Lifshitz, sí podemos transformar Fourier en las coordenadas paralelas a través de (7.38) para luego integrar fácilmente en ellas, de manera de que obtenemos:

$$\begin{aligned}
 P_{IC}(x_1, \beta_{EM}, l) = & -\frac{1}{8\pi} \int \frac{d\mathbf{k}}{2\omega_{\mathbf{k}}(2\pi)^3} \left(\delta^{bm} - \frac{k^b k^m}{\omega_{\mathbf{k}}^2} \right) \coth \left(\frac{\beta_{EM}}{2} \omega_{\mathbf{k}} \right) \int_{\alpha_1 - i\infty}^{\alpha_1 + i\infty} \frac{ds_1}{2\pi i} \\
 & \times \int_{\alpha_2 - i\infty}^{\alpha_2 + i\infty} \frac{ds_2}{2\pi i} e^{(s_1 + s_2)(t_1 - t_i)} (s_1 s_2 + \omega_{\mathbf{k}}^2) \lim_{\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_1} \left[\Theta^{jk}(s_1, s_2) e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot (\mathbf{x}_{1\parallel} - \mathbf{x}_{2\parallel})} \right. \\
 & \left. \times \int dz' \mathcal{G}_{Ret}^{jb}(z_1, z', \mathbf{k}_{\parallel}, s_1) e^{ik_z z'} \int dz'' \mathcal{G}_{Ret}^{km}(z_2, z'', -\mathbf{k}_{\parallel}, s_2) e^{-ik_z z''} \right], \quad (7.62)
 \end{aligned}$$

que es una simplificación que claramente puede llevarse a cabo siempre que haya contornos con superficies paralelas.

Es claro que escribir la contribución implica calcular las integrales sobre z' y z'' , las cuales son sobre todo el eje $(-\infty, +\infty)$. Entonces, como el tensor de Green retardado viene dado por (7.39)-(7.42) para cada región, la integración se separa en cuatro integrales. Por ejemplo, para la primera de las integrales tenemos:

$$\begin{aligned}
 & \int dz' \mathcal{G}_{Ret}^{jb}(z_1, z', \mathbf{k}_{\parallel}, s_1) e^{ik_z z'} = \int_{-\infty}^{-l/2} dz' \mathcal{G}_{Ret}^{jb}(z_1, z', \mathbf{k}_{\parallel}, s_1) e^{ik_z z'} \\
 & + \int_{-l/2}^{l/2} dz' \mathcal{G}_{Ret,Bu}^{jb}(z_1, z', \mathbf{k}_{\parallel}, s_1) e^{ik_z z'} + \int_{-l/2}^{l/2} dz' \mathcal{G}_{Ret,Sc}^{jb}(z_1, z', \mathbf{k}_{\parallel}, s_1) e^{ik_z z'} \\
 & + \int_{l/2}^{+\infty} dz' \mathcal{G}_{Ret}^{jb}(z_1, z', \mathbf{k}_{\parallel}, s_1) e^{ik_z z'}, \quad (7.63)
 \end{aligned}$$

donde el primero y último término son las integraciones teniendo el punto fuente en la placa, mientras que las otras dos son integraciones con puntos fuente dentro del espacio vacío.

Como la transformada del tensor de Green retardado está dada en términos de exponenciales, la integración es inmediata, y su resultado podemos escribirlo de manera compacta como:

$$\begin{aligned}
 & \int dz' \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{jb}(z_1, z', \mathbf{k}_{\parallel}, s_1) e^{ik_z z'} = -\frac{\delta_{j3} \delta_{b3}}{s_1^2} e^{ik_z z_1} \\
 & + \sum_{n=1}^2 \sum_{\mu=\text{TE, TM}} \left\{ \frac{(-1)}{2q_z (q_z + (-1)^{n-1} ik_z)} \left[e_{\mu,j} ((-1)^{n-1}) e_{\mu,b} ((-1)^{n-1}) e^{(-1)^n q_z z_1} \right. \right. \\
 & \quad \times \left(e^{((-1)^{n-1} q_z + ik_z) z_1} - e^{(-q_z + (-1)^n ik_z) \frac{l}{2}} \right) + \frac{1}{D_{\mu}} e_{\mu,b} ((-1)^{n-1}) r_{3-n}^{\mu} \\
 & \quad \times \left(e_{\mu,j} ((-1)^{n-1}) r_n^{\mu} e^{q_z ((-1)^n z_1 - 2l)} + e_{\mu,j} ((-1)^n) e^{q_z ((-1)^{n-1} z_1 - l + (-1)^n 2l)} \right) \\
 & \quad \left. \times \left(e^{(q_z + (-1)^{n-1} ik_z) \frac{l}{2}} - e^{-(q_z + (-1)^{n-1} ik_z) \frac{l}{2}} \right) \right] \\
 & - \frac{e^{((-1)^n ik_z - [(-1)^n + 1] q_z) \frac{l}{2}}}{2q_z^{(n)} \left(q_z^{(n)} + (-1)^{n-1} ik_z \right)} \frac{t_n^{\mu}}{D_{\mu}} e^{(-1)^n q_z^{(n)} l} e_{\mu,b}^{(n)} ((-1)^{n-1}) \left(e_{\mu,j} ((-1)^{n-1}) \right. \\
 & \quad \left. \times e^{(-1)^n q_z (z_1 - \frac{l}{2})} + e_{\mu,j} ((-1)^n) r_{3-n}^{\mu} e^{(-1)^{n-1} q_z (z_1 - \frac{l}{2})} e^{((-1)^n - 1) q_z l} \right) \Big\}, \quad (7.64)
 \end{aligned}$$

donde la primera línea del miembro derecho más el primer término entre corchetes [] acompañando el denominador $q_z (q_z + (-1)^{n-1} ik_z)$ corresponden a la integración de $\mathcal{G}_{\text{Ret, Bu}}^{jb}$, mientras que el segundo es la integración de $\mathcal{G}_{\text{Ret, Sc}}^{jb}$ y finalmente los términos que acompañan el denominador $q_z^{(n)} (q_z^{(n)} + (-1)^{n-1} ik_z)$ corresponden a las integraciones de $\mathcal{G}_{\text{Ret}}^{jb}$ en las regiones de las placas, teniendo $n = 1$ ($n = 2$) para la placa izquierda (derecha).

Es claro que para obtener el resultado de la otra integral $\int dz'' \mathcal{G}_{\text{Ret}}^{km}(z_2, z'', -\mathbf{k}_{\parallel}, s_2) e^{-ik_z z''}$, tenemos que hacer los reemplazos $z_1 \rightarrow z_2$, $s_1 \rightarrow s_2$, $j \rightarrow k$, $b \rightarrow m$, $\mathbf{k}_{\parallel} \rightarrow -\mathbf{k}_{\parallel}$ y $k_z \rightarrow -k_z$ en (7.64).

Por lo tanto, estudiar la estructura analítica (polos y cortes) de los resultados de ambas integrales nos da la evolución transitoria y también el régimen estacionario de la contribución de condiciones iniciales a la presión de Casimir. No obstante, los cortes presentes en los integrandos pueden agruparse de a pares y las regiones donde los integrandos en cada variable son multivaluados pueden reducirse a segmentos verticales en el plano

complejo descritos por valores de parte real negativos o cero. De (7.64) podemos ver que el segmento de parte real nula corresponde a la recta $s = i \operatorname{Im}(s)$ con $\operatorname{Im}(s) \in (-k_{\parallel}, k_{\parallel})$, aunque no aportan al estacionario, pero como veremos más abajo es importante saber que siempre es un región acotada.

Luego, como para las contribuciones del material, el punto clave para determinar el régimen de tiempos largos de la presente contribución es combinar los polos en ambas variables de tal modo que $e^{(s_1+s_2)(t_1-t_i)}$ no de dependencia temporal. Por lo tanto, debemos tomar polos tal que uno sea el negativo del otro.

A primera vista, como ocurre para las otras contribuciones debido a la estructura analítica del tensor de Green retardado, el polo en el origen para ambas variables claramente satisface el requisito para obtener un término estacionario.

Ahora, para ver qué términos presentan este polo en el origen para ambas variables, tenemos que considerar en este caso las combinaciones de los términos $\Theta^{jk}(s_1, s_2)$ y $(s_1 s_2 + \omega_{\mathbf{k}}^2)$. Como pasaba anteriormente, los términos TM \times TM en el producto de las integrales espaciales en (7.62) son los que aportan los denominadores con la raíces en los orígenes de cada variable de Laplace. Las posibles combinaciones entre $\Theta^{jk}(s_1, s_2)$ y $(s_1 s_2 + \omega_{\mathbf{k}}^2)$, entonces, dan términos sin polos en el origen, y términos con polos de primero y segundo orden para ambas variables en el origen.

Como pasaba para las contribuciones del material, los términos sin polos claramente no contribuyen al cálculo de los residuos, mientras que los términos con polos de segundo orden en el origen resultan divergentes en el límite de tiempos largos (que son descartados) o nulos (que no contribuyen) al derivar para el cálculo del residuo.

Por otra parte, como también pasaba en los apartados pasados, los polos de primer orden corresponden, en el dominio temporal, a derivar funciones de Heaviside que resultan en funciones delta de Dirac. Esto se asocia al encendido abrupto de la interacción y entonces, estos términos no dan resultados físicos si no más bien son producto de la matemática utilizada para describir el inicio de la interacción. Por lo tanto, los polos de primer orden tampoco contribuyen.

Es decir, el polo en el origen para ambas variables no aporta a la contribución de condiciones iniciales.

No obstante, en este caso, este polo no será el único, ya que la integración espacial sobre z proporciona dos polos adicionales que no aparecen en la contribución del material y que son aquellos que se encuentran directamente relacionados a los modos modificados de los capítulos 3 y 5 pero en su versión electromagnética y en $3+1$ dimensiones. En nuestro caso, a partir de (7.64) es claro que la integración sobre z resulta en denominadores adi-

cionales $q_z + (-1)^{n-1}ik_z$ y $q_z^{(n)} + (-1)^{n-1}ik_z$ dependiendo si la integración la realizamos dentro del espacio vacío o en las regiones ocupadas por las placas respectivamente.

De hecho, para los términos asociados a integraciones sobre las regiones ocupadas por las placas materiales, si miramos las raíces proporcionadas por $q_z^{(n)} + (-1)^{n-1}ik_z$ como denominador, la presencia de $\varepsilon_n(s)$ dentro de $q_z^{(n)}$ hace que las raíces obtenidas tengan parte real negativa, en acuerdo con la propiedad de causalidad y el hecho de que el campo disipa en el material en dichas regiones. Esto hace que, en el caso que estas raíces además sean polos del integrando (cuestión que puede no pasarnos como veremos más abajo), al calcular sus residuos asociados, la evolución temporal será de exponencial decreciente, de manera que en el límite de tiempos largos, la contribución de estos polos se desvanece.

Por otra parte, inmediatamente podemos ver que para los términos asociados a integraciones sobre el espacio vacío, si miramos las raíces proporcionadas por $q_z + (-1)^{n-1}ik_z$ como denominador, obtenemos que $s = \pm i\omega_{\mathbf{k}}$ son raíces para $n = 1$ y $k_z < 0$ ó para $n = 2$ y $k_z > 0$, teniendo parte real nulas debido a la propagación libre del campo en esa región. Esto muestra que $s = \pm i\omega_{\mathbf{k}}$ son polos en el general de los casos ya que la región multivaluada del integrando, como dijimos antes, es el segmento $s = i \text{Im}(s)$ con $\text{Im}(s) \in (-k_{\parallel}, k_{\parallel})$, y estos polos siempre caen fuera de ese intervalo ya que siempre ocurre que $\omega_{\mathbf{k}} > k_{\parallel}$ para todo \mathbf{k} . Estos polos son los que se asocian a los modos modificados del campo en este caso EM, así como pasaba para el campo escalar en el capítulo 3 a partir de un formalismo de cuantización canónica en el estacionario y el empleo de un ansatz para esta contribución, y como probamos en el capítulo 5 a través del formalismo CTP.

No obstante, hasta aquí lo que realmente mostramos es que $s = \pm i\omega_{\mathbf{k}}$ son ceros del denominador de ciertos términos, y también comentamos que en el caso general definen la contribución de condiciones iniciales en el estacionario. Ahora, en el presente caso del problema de Lifshitz, la forma particular del tensor de Green retardado hace que $s = \pm i\omega_{\mathbf{k}}$ también sean raíces del denominador en los mismos casos comentados (para $n = 1$ y $k_z < 0$ o para $n = 2$ y $k_z > 0$). Por lo tanto, los límites de los integrandos en cada variable cuando la variable tiende a $\pm i\omega_{\mathbf{k}}$ son indeterminaciones cero sobre cero. Aplicando la regla de L'Hopital en el caso complejo para eliminar dichas indeterminaciones, vemos que el resultado del límite es en cuestión finito. Esto significa que, para el problema de Lifshitz, aunque $s = \pm i\omega_{\mathbf{k}}$ son raíces del denominador, no son polos ya que la función no diverge en el límite. Por lo tanto, no hay residuos asociados en este caso y no existe contribución ni en el estacionario ni tampoco en el transitorio para $s = \pm i\omega_{\mathbf{k}}$.

En definitiva, considerando todo el análisis comentado, lo que estamos probando es que para el problema de Lifshitz, la contribución de condiciones iniciales a la presión de

Casimir es nula en el estacionario ($t_i \rightarrow +\infty$):

$$P_{IC}(x_1, \beta_{EM}, l) \longrightarrow P_{IC}^{\infty}(\beta_{EM}, l) = 0. \quad (7.65)$$

7.4.4. Presión Total de Casimir Fuera del Equilibrio

Finalmente, luego del cálculo de todas las contribuciones (7.54), (7.60) y (7.65), podemos escribir la presión de Casimir en el estacionario ($t_i \rightarrow -\infty$) como:

$$P_{Cas}(x_1) \longrightarrow P_{Cas}^{\infty} = P_B^{\infty}(\beta_{B,n}, l), \quad (7.66)$$

es decir, la contribución del baño en el estacionario define la presión total de Casimir del sistema compuesto.

Cabe señalar que lo que estamos demostrando finalmente como resultado es que, habiendo resuelto el problema de Lifshitz desde un problema definido a condiciones iniciales y logrado expresiones para las tres contribuciones a la presión total a todo tiempo (una asociada a cada parte del sistema total), el estado estacionario (calculado a partir del límite de tiempos largos $t_i \rightarrow -\infty$) sólo viene definido por la contribución del baño, que es la única considerada en Ref.[28] mediante el enfoque a partir de ecuaciones de Maxwell macroscópicas y la teoría de fuentes. De hecho, este tipo de enfoque es análogo a un enfoque de electrodinámica estocástica (SED, ver Ref.[6]), donde se consideran fuentes fluctuantes del campo EM y se resuelven las ecuaciones de Maxwell asumiendo el estacionario y sin considerar de ningún modo las condiciones iniciales. Esto es claro a partir del formalismo planteado ya que asume que las condiciones iniciales del problema, cualesquiera hayan sido, desaparecen debido a la dinámica disipativa del campo EM. En este caso, mostramos que a partir de un formalismo cuántico de primeros principios y a condiciones iniciales, el resultado en Ref.[28] se corresponde con el régimen estacionario y las condiciones iniciales no aportan, tal como ocurría tanto para el campo escalar en el capítulo 5 para los casos $0+1$ y $n+1$ con material homogéneo en todo el espacio, como para el campo EM en el capítulo 6 en el caso $3+1$ con material isótropo y homogéneo en todo el espacio, todos estudiados a partir del formalismo funcional CTP.

Sin embargo, si bien esto, a primera vista, luce absolutamente natural, cabe remarcar que parece no corresponderse con los resultados obtenidos tanto en el capítulo 3 para el caso escalar $1+1$ de dos placas de espesor finito mediante un formalismo de cuantización canónica en el estacionario, como en el capítulo 5 también para el caso escalar $1+1$ pero para un contorno material delta de Dirac y analizado a partir del formalismo funcional CTP. En ambos casos, demostramos que tanto la contribución de los baños como la de

condiciones iniciales aportan a la situación estacionaria y, de hecho, ésta última verifica el ansatz de modos modificados del campo (3.23). Esto, anteriormente lo atribuimos al hecho de la existencia de regiones en el problema donde el campo no disipa y entonces fluctúa libremente. Esta fluctuación libre en las regiones sin disipación hace que ondas que se generan en dichas regiones y se propagan en las regiones materiales alcanzando un estacionario en el límite de tiempos largos definan los modos modificados del campo.

Siguiendo este razonamiento, para el problema de Lifshitz este debería ser el caso, debido a la existencia del espacio vacío entre las placas, y entonces deberíamos tener una contribución de condiciones iniciales. Sin embargo, si recordamos el comportamiento de las contribuciones para el límite de espesor infinito en la configuración de placas de espesor finito $1 + 1$ para el campo escalar del capítulo 3, dadas en (3.41) y (3.42), vemos que las densidades de energía de las dos contribuciones que tenemos en la región fuera de las placas (que en el límite de espesor infinito desaparece), suman a la de campo libre. Por otro lado, para las densidades de cada contribución en la región entre las placas, tenemos que la asociada a las condiciones iniciales (que en ese momento llamamos de vacío) se anula, mientras que la asociada a los baños (que en ese momento llamamos de Langevin) es la que da la fuerza, en este caso, del problema de Lifshitz en $1 + 1$ y equilibrio termodinámico.

Por lo tanto, en el caso de este apartado, que corresponde al problema de Lifshitz en $3 + 1$ fuera del equilibrio, probamos que ocurre exactamente lo mismo. La contribución de condiciones iniciales se anula y la que da la fuerza es la de los baños únicamente. Con lo cual, los resultados que aparentemente no se correspondían en realidad sí lo hacen.

Mirado desde este punto y retrospectivamente, el cuadro completo de situaciones se logra en forma acabada. Si bien inicialmente asociamos la aparición de una contribución de condiciones iniciales a tiempos largos a la existencia de regiones donde el campo en cuestión no disipa, ahora podemos concluir que dicha aparición realmente se relaciona a la existencia de regiones de extensión infinita donde el campo no disipa. Es decir, físicamente la situación se aclara al tomar cuenta que en los casos que existe una región extensión infinita donde el campo disipa, las fluctuaciones libres en las regiones donde no disipa se ven amortiguadas a tal punto de desvanecerse y anular la contribución de condiciones iniciales, como pasa en el problema de Lifshitz. De forma inversa, en los casos donde no haya regiones infinitas donde el campo disipa y las regiones de libre fluctuación sean infinitas, podemos interpretar que la libre fluctuación del campo se ve atenuada en las regiones finitas donde disipa pero no lo desvanece completamente y, por lo tanto, se forman los modos modificados. Como comentamos para este caso a modo

de anticipo, pero ocurre realmente tanto para la delta de Dirac como para las placas de espesor finito $1 + 1$, estos modos se asocian a polos $\pm i\omega_{\mathbf{k}}$ resultantes de las integraciones espaciales sobre z , para el caso de que las coordenadas cartesianas sean las apropiadas para describir el problema. En el problema de Lifshitz como dijimos, no obstante, $\pm i\omega_{\mathbf{k}}$ no son polos debido a que la forma particular del tensor de Green retardado hace que el numerador también se anule para dichos valores, evitando los polos.

Capítulo 8

Conclusiones

La motivación principal de la presente Tesis fue avanzar en la discusión sobre la cuantización de teorías de campos en presencia de contornos, cuestión de suma importancia en los problemas de la Física de Casimir. Como dijimos al inicio de este trabajo, existe aún una discusión abierta en torno a cómo definir un procedimiento de cuantización en el estado estacionario que permita plantear consistentemente los diferentes escenarios en los que el efecto Casimir tiene lugar. Lograr esto y definir así un método válido en un contexto general y realista, que incorpore las distintas propiedades de los materiales de una manera concreta y natural, es un tema aún en discusión. La inclusión de las propiedades de disipación y ruido (junto con dispersión) así como la temperatura en situaciones estacionarias pero fuera del equilibrio es un desafío pendiente a fin de obtener resultados para comparar con los experimentos.

En el presente trabajo presentamos una forma de abordar esta discusión y dar una respuesta concreta, implementando el formalismo CTP para resolver la dinámica completa del campo en interacción con materiales modelados microscópicamente. De esta forma, fuimos capaces de deducir los estados estacionarios de diversas situaciones, entendiendo cómo los estados estacionarios resultan de la evolución dinámica transitoria. Esto, primero, nos permitió comprender la física encerrada en estos sistemas, para luego ganar intuición y poder predictivo sobre potenciales situaciones de interés.

Para ello, en los primeros capítulos mostramos los resultados básicos del efecto Casimir en $1 + 1$ dimensiones, tanto para conductores ideales como para materiales reales modelados microscópicamente como partículas Brownianas. En ambos casos, hicimos hincapié en el procedimiento de cuantización en el estado estacionario. Para el caso de conductores ideales, mostramos que la cuantización es inmediata debido al hecho de que los contornos carecen de dinámica interna ya que se introducen simplemente como con-

diciones de Dirichlet para el campo. De hecho, aquí no hay separación entre régimen transitorio y estacionario debido a que éste siempre es un problema estacionario y el cálculo de la fuerza es muy simple. Muy por el contrario, para el caso de materiales reales disipativos, el modelado microscópico de los contornos mediante grados de libertad de polarización introduce una dinámica transitoria en el planteo del problema. Sin embargo, el cálculo de la fuerza de Casimir siempre se realiza en el estado estacionario, de forma tal que a dicho modelo lo cuantizamos implementando en el procedimiento algunas aproximaciones y ansatz para las contribuciones de cada parte del sistema total, pudiendo calcular la fuerza de Casimir entre placas de espesor finito como también de espesor infinito (problema de Lifshitz) en el equilibrio. También realizamos un análisis del modelo físico implementado a partir de las relaciones de Kramers-Kronig, mostrando cómo nuestros modelos (dependientes de la densidad espectral elegida para el entorno y su función de corte) resultan ser modelos físicamente consistentes garantizando la propiedad de causalidad. Sin embargo, esto fue asumido sin demostración alguna y el rol de la llamada contribución de vacío no estaba claro. Es más, su extensión directa a situaciones fuera del equilibrio era dudosa.

Por todo esto, nos propusimos dar respuesta a estas cuestiones a partir de deducir los estados estacionarios (ya sean en equilibrio o no) de la dinámica completa de un sistema consistente en un campo cuántico (inicialmente libre) que comienza su interacción a un tiempo inicial dado con grados de libertad del material de los contornos o cuerpos materiales. Es así cómo, en el capítulo 4, introdujimos el formalismo CTP que permite el estudio de la evolución de valores de expectación cuánticos. Mediante la introducción del concepto de acción de influencia de Feynman y Vernon, tratamos este campo dentro del marco de sistemas cuánticos abiertos.

En el capítulo 5, implementamos completamente el formalismo CTP al caso de un campo escalar. Logramos calcular la funcional generatriz del campo a partir de las sucesivas integraciones funcionales, primero sobre los grados de libertad del material en un estado térmico arbitrario y luego sobre el campo en su límite de alta temperatura. Logramos así una expresión formal para el propagador de Hadamard en términos de la función de Green retardada para el campo, y el núcleo de ruido generado por el material, para dos tipos de modelos de acoplamiento entre el campo y el material (bilineal o tipo corriente). En este punto, mostramos que el propagador de Hadamard presenta a todo tiempo contribuciones de cada parte del sistema compuesto, es decir, una asociada a los baños, otra asociada a los grados de libertad de polarización de las placas y otra íntegramente relacionada al estado inicial del campo con su dinámica efectiva durante la

interacción. Con dicho propagador, mediante la técnica de división de puntos, logramos escribir expresiones generales para todas las componentes del tensor de energía-impulso del campo, el cual hereda la estructura de contribuciones del propagador. Finalmente en este capítulo, analizamos diferentes escenarios fuera del equilibrio para distintas configuraciones del sistema compuesto. Para el campo escalar en $0 + 1$ dimensiones recalculamos la funcional generatriz prescindiendo del límite de alta temperatura del campo. En este caso, a partir de las propiedades analíticas de las diferentes funciones de Green, probamos que el estado estacionario está definido únicamente por la contribución del baño sea cual fuere el modelo de acoplamiento. Luego, para el caso de un campo en $n + 1$ dimensiones interactuando con un material homogéneo en todo el espacio, probamos que cada modo del campo tiene la misma dinámica que la del campo escalar en $0 + 1$ dimensiones, de forma tal que el estado estacionario también está definido solamente por la contribución del baño para ambos modelos de acoplamiento. El tercer caso analizado correspondió a un campo escalar en $n + 1$ dimensiones con contornos arbitrarios pero en el límite de material no disipativo. En ese caso, mostramos que dicho límite corresponde a borrar la dinámica asociada al material (lo que implica anular el núcleo de ruido del material) y que sólo es posible para el modelo de acoplamiento tipo corriente. De esta forma es que el estado estacionario para dicho modelo de acoplamiento solamente resulta determinado por la contribución asociada al propio campo y su estado inicial, lo cual es físicamente esperable ya que la fuerza de Casimir existe entre contornos de material no disipativo. Finalmente, estudiamos el caso de un contorno de material real. En este caso, elegimos hacerlo para un campo escalar en $1 + 1$ dimensiones tomando el contorno delta de Dirac (representando una única placa de espesor infinitesimal). Calculamos la función de Green retardada del campo en el espacio coordinado en términos de los polos directamente relacionados a los modelos de material y acoplamiento elegidos. En este caso, probamos que el estado estacionario está definido tanto por la contribución del baño (que toma la forma usual) como por la del propio campo, que demostramos que es de la misma forma que el ansatz considerado en el capítulo 3. Esto lo atribuimos a la existencia en el problema de regiones donde el campo no disipa.

A fin de incrementar el grado de realismo, en el capítulo 6 extendimos el formalismo CTP al caso de un campo EM. Para ello, fue necesario mostrar cómo realizar las integraciones funcionales, primero sobre los grados de libertad del material y luego sobre un campo vectorial de gauge. La primera de ellas nos permitió discutir el acoplamiento tipo corriente para el caso de un campo vectorial incorporando la anisotropía a las posibles propiedades del material, y cómo la invariancia de gauge está contenida en la acción efec-

tiva CTP para el campo EM. A continuación, mostramos cómo implementar el método de Faddeev-Popov para la integración CTP sobre el campo, obteniendo una expresión para la funcional generatriz en el gauge temporal. Con ésta obtuvimos la expresión para el propagador de Hadamard del campo EM en el gauge temporal, el cual también presentaba una estructura de tres contribuciones tal como en el caso escalar. Asimismo, obtuvimos expresiones generales para la densidad de energía, el vector de Poynting y las componentes del tensor de Maxwell para regiones de vacío en términos del propagador de Hadamard. Finalmente, por un lado, estudiamos las ecuaciones de movimiento resultantes en el gauge temporal, probando que la ecuación para las componentes espaciales del campo viene acompañada de una condición residual que generaliza las implementadas en trabajos previos. Por otro lado, resolvimos estas ecuaciones para el caso de un campo EM en $3 + 1$ dimensiones en presencia de un material isótropo y homogéneo en todo el espacio. En este caso, al igual que en el caso escalar, probamos que el estado estacionario está definido solamente por la contribución del baño.

Sin embargo, hasta aquí, no quedaba claro si la mera existencia de regiones donde el campo no disipa es suficiente para que la contribución asociada al estado inicial del campo contribuya al estado estacionario del problema en cuestión, o si es que esto depende de cómo es la región donde el campo no disipa. Para esto, el último capítulo lo dedicamos a estudiar el problema de Lifshitz para el campo EM. En este caso, a partir de las propiedades analíticas del tensor de Green retardado y las funciones de Green del material, probamos que nuevamente el estado estacionario viene determinado por la contribución del baño únicamente y que, de hecho, reproduce exactamente la obtenida en otros trabajos a partir de un enfoque basado en la teoría de fuentes. No obstante, aunque probamos que en este caso la contribución asociada al estado inicial del campo se anula en el límite de tiempos largos, notamos que esto está enteramente relacionado a que en este problema la región donde el campo no disipa es de extensión finita en una de sus coordenadas, mientras que las regiones donde disipa son infinitas en esa misma coordenada. Eso hace que, físicamente, la disipación en éstas últimas gane por sobre la región donde no disipa. Si fuese a la inversa, y la región de extensión finita fuese donde el campo disipa, mientras que las regiones donde el campo no disipa fuesen infinitas, entonces la contribución asociada al estado inicial del campo no se anularía en el límite de tiempos largos.

Esto nos permitió completar el cuadro general de la dinámica de estos sistemas y, como dijimos al comienzo de este capítulo, nos permite saber qué contribuciones son necesarias de considerar en la cuantización de cada escenario en el estado estacionario.

De esta forma, logramos definir reglas de cuantización en el estacionario para cualquier tipo de situaciones con contornos reales, en el equilibrio o fuera de él.

Apéndice A

Condiciones de Contorno y Soluciones para la Contribución de Vacío

En el presente Apéndice, presentamos las soluciones explícitas de (3.24). Teniendo en cuenta de que la configuración analizada es de dos placas centradas de espesor d separadas por una distancia a , el problema puede ser separado en cinco regiones: región I con $x < -\frac{a}{2} - d$, región II con $-\frac{a}{2} - d < x < -\frac{a}{2}$, región III con $-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}$, región IV con $\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} + d$ y región V con $\frac{a}{2} + d < x$. En cada región, las soluciones vienen dadas por las soluciones de tipo scattering de ondas incidiendo desde cada lado de la configuración, obteniendo para $k > 0$ (ondas incidentes desde la izquierda):

$$f_k^I(x) = e^{ikx} + R_k e^{-ikx}, \quad (\text{A.1})$$

$$f_k^{II}(x) = A_k e^{iknx} + B_k e^{-iknx}, \quad (\text{A.2})$$

$$f_k^{III}(x) = C_k e^{ikx} + D_k e^{-ikx}, \quad (\text{A.3})$$

$$f_k^{IV}(x) = E_k e^{iknx} + F_k e^{-iknx}, \quad (\text{A.4})$$

$$f_k^V(x) = T_k e^{ikx}. \quad (\text{A.5})$$

Los coeficientes pueden obtenerse imponiendo las condiciones de contorno de continuidad para los modos y sus derivadas en los puntos de interfaz, resultando:

$$R_k = e^{-ika} \left(r + \frac{t^2 r e^{i2ka}}{(1 - r^2 e^{i2ka})} \right), \quad (\text{A.6})$$

$$A_k = e^{-ik\frac{a}{2}} e^{ikn\frac{a}{2}} \frac{t(1 + r_n r e^{i2ka})}{t_n(1 - r^2 e^{i2ka})}, \quad (\text{A.7})$$

$$B_k = e^{-ik\frac{a}{2}} e^{ikn\frac{a}{2}} \frac{t(r_n + r e^{i2ka})}{t_n(1 - r^2 e^{i2ka})}, \quad (\text{A.8})$$

$$C_k = \frac{t}{(1 - r^2 e^{i2ka})}, \quad (\text{A.9})$$

$$D_k = \frac{tr e^{ika}}{(1 - r^2 e^{i2ka})}, \quad (\text{A.10})$$

$$E_k = \frac{t^2}{t_n(1 - r^2 e^{i2ka})} e^{ik\frac{a}{2}} e^{ikd} e^{-ikn\frac{a}{2}} e^{-iknd}, \quad (\text{A.11})$$

$$F_k = \frac{t^2 r_n}{t_n(1 - r^2 e^{i2ka})} e^{ik\frac{a}{2}} e^{ikd} e^{ikn\frac{a}{2}} e^{iknd}, \quad (\text{A.12})$$

$$T_k = \frac{t^2}{(1 - r^2 e^{i2ka})}, \quad (\text{A.13})$$

mientras que para $k < 0$ (ondas incidentes desde la derecha) el orden de las soluciones debe ser revertido y el índice de refracción y los coeficientes conjugados. Los coeficientes $r = \frac{r_n(e^{i2knd} - 1)}{(1 - r_n^2 e^{i2knd})}$ y $t = \frac{4n}{(n+1)^2} \frac{e^{iknd} e^{-ikd}}{(1 - r_n^2 e^{i2knd})}$ corresponden a los coeficientes de reflexión y transmisión para una única placa centrada de espesor d , mientras que $r_n = \frac{n-1}{n+1}$ y $t_n = \frac{2n}{n+1}$ son los correspondientes a una interfaz. Claramente los coeficientes R_k y T_k pueden interpretarse como los coeficientes de reflexión y transmisión para toda la configuración de dos placas centradas de espesor d separadas por una distancia a . Sin embargo, debido a que el material es absorbente, cabe remarcar el hecho de que $|r|^2 + |t|^2 \neq 1$ y $|R_k|^2 + |T_k|^2 \neq 1$, a diferencia de lo que ocurre para materiales no disipativos.

Apéndice B

Condiciones de Contorno y Soluciones para la Contribución de Langevin

En este Apéndice presentamos las soluciones correspondientes a la contribución de Langevin del operador de campo $\widehat{\phi}_L$. Estas resultan de (3.20) tomando como fuente al operador de fuerza estocástica. Por ende, considerando lo comentado en cuanto al tipo de soluciones buscadas, para las regiones I, III y V mencionadas en el Apéndice A, la ecuación a resolver es:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \widehat{\phi}_L(x, k) + k^2 \widehat{\phi}_L(x, k) = 0, \quad (\text{B.1})$$

que resulta ser una ecuación de ondas homogénea, mientras que para las regiones donde hay material (regiones II y IV), la ecuación a resolver es:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \widehat{\phi}_L(x, k) + k^2 n^2(k) \widehat{\phi}_L(x, k) = -\frac{4\pi\eta e}{m} \frac{ik}{(k_0^2 - k^2 - ik\widetilde{\gamma}(-ik))} \widehat{F}_x(k), \quad (\text{B.2})$$

la cual resulta ser una ecuación de ondas inhomogénea, es decir, en presencia de fuentes.

Debido a esto, las soluciones en las regiones II y IV presentan dos partes, ya que además de la soluciones homogéneas, es necesario agregar las soluciones particulares. En total, en cada región, teniendo en cuenta de que se buscan soluciones de tipo radiativas, las soluciones se escriben en términos del operador de fuerza estocástica, teniendo:

$$\widehat{\phi}_L^I(x, k) = \widehat{W}_1(k) e^{-ikx}, \quad (\text{B.3})$$

$$\widehat{\phi}_L^{II}(x, k) = \widehat{U}_1(k)e^{iknx} + \widehat{U}_2(k)e^{-iknx} + \widehat{A}_1(x, k)e^{iknx} + \widehat{A}_2(x, k)e^{-iknx}, \quad (\text{B.4})$$

$$\widehat{\phi}_L^{III}(x, k) = \widehat{W}_2(k)e^{ikx} + \widehat{W}_3(k)e^{-ikx}, \quad (\text{B.5})$$

$$\widehat{\phi}_L^{IV}(x, k) = \widehat{V}_1(k)e^{iknx} + \widehat{V}_2(k)e^{-iknx} + \widehat{B}_1(x, k)e^{iknx} + \widehat{B}_2(x, k)e^{-iknx}, \quad (\text{B.6})$$

$$\widehat{\phi}_L^V(x, k) = \widehat{W}_4(k)e^{ikx}, \quad (\text{B.7})$$

donde cada uno de los coeficientes se escribe:

$$\widehat{A}_1(x, k) = \frac{1}{2n} \int_{-d-\frac{\alpha}{2}}^x \widehat{G}(x', k)e^{-iknx'} dx', \quad (\text{B.8})$$

$$\widehat{A}_2(x, k) = -\frac{1}{2n} \int_{-d-\frac{\alpha}{2}}^x \widehat{G}(x', k)e^{iknx'} dx', \quad (\text{B.9})$$

$$\widehat{B}_1(x, k) = \frac{1}{2n} \int_{\frac{\alpha}{2}}^x \widehat{G}(x', k)e^{-iknx'} dx', \quad (\text{B.10})$$

$$\widehat{B}_2(x, k) = -\frac{1}{2n} \int_{\frac{\alpha}{2}}^x \widehat{G}(x', k)e^{-iknx'} dx', \quad (\text{B.11})$$

donde, por simplicidad, escribimos $\widehat{G}(x, k) = \frac{4\pi\eta e}{m} \frac{\widehat{F}_x(k)}{(k_0^2 - k^2 - ik\gamma(-ik))}$.

Los operadores-coeficientes $\widehat{W}_l(k)$, $\widehat{U}_l(k)$ y $\widehat{V}_l(k)$ se obtienen de imponer las condiciones de contorno apropiadas al problema, resultando en:

$$\begin{aligned} \widehat{W}_1(k) &= \mathfrak{W}(k)e^{iknd}e^{-ik(a+d)} \left(\widehat{K} \left(1 + rr_n e^{i2ka} \right) + \widehat{L} \left(r_n + r e^{i2ka} \right) + \widehat{M} t e^{ikd} e^{ik(a-nd)} \right. \\ &\quad \left. + \widehat{N} t r_n e^{ikd} e^{ik(a+nd)} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

$$\widehat{W}_2(k) = \mathfrak{W}(k) \left(\widehat{K} r_n e^{i2knd} + \widehat{L} + \widehat{M} r e^{ika} + \widehat{N} r r_n e^{ik(a+2nd)} \right), \quad (\text{B.13})$$

$$\widehat{W}_3(k) = \mathfrak{W}(k) \left(\widehat{K} r r_n e^{ik(a+2nd)} + \widehat{L} r e^{ika} + \widehat{M} + \widehat{N} r_n e^{i2knd} \right), \quad (\text{B.14})$$

$$\widehat{U}_1 = \frac{r_n}{t_n} e^{ik(n+1)(\frac{\alpha}{2}+d)} \widehat{W}_1, \quad (\text{B.15})$$

$$\widehat{U}_2 = \frac{1}{t_n} e^{ik(1-n)(\frac{\alpha}{2}+d)} \widehat{W}_1, \quad (\text{B.16})$$

$$\widehat{V}_1 = \frac{1}{t_n} e^{ik(1-n)\frac{\alpha}{2}} (\widehat{W}_2 + r_n e^{-ika} \widehat{W}_3), \quad (\text{B.17})$$

$$\widehat{V}_2 = \frac{1}{t_n} e^{ik(n-1)\frac{\alpha}{2}} (r_n e^{ika} \widehat{W}_2 + \widehat{W}_3), \quad (\text{B.18})$$

$$\widehat{W}_4 = e^{ik(n-1)d}(\widehat{W}_2 + r_n e^{-ika} \widehat{W}_3 + \frac{e^{-ik\frac{a}{2}}}{(n+1)} \widehat{N}), \quad (\text{B.19})$$

donde:

$$\widehat{K} = e^{ikn\frac{a}{2}} \int_{-d-\frac{a}{2}}^{-\frac{a}{2}} \widehat{G}(x, k) e^{iknx} dx, \quad (\text{B.20})$$

$$\widehat{L} = e^{-ikn\frac{a}{2}} \int_{-d-\frac{a}{2}}^{-\frac{a}{2}} \widehat{G}(x, k) e^{-iknx} dx, \quad (\text{B.21})$$

$$\widehat{M} = e^{-ikn\frac{a}{2}} \int_{\frac{a}{2}}^{d+\frac{a}{2}} \widehat{G}(x, k) e^{iknx} dx, \quad (\text{B.22})$$

$$\widehat{N} = e^{ikn\frac{a}{2}} \int_{\frac{a}{2}}^{d+\frac{a}{2}} \widehat{G}(x, k) e^{-iknx} dx, \quad (\text{B.23})$$

$$\mathfrak{W}(k) = \frac{we^{ik\frac{a}{2}}}{2n(1-r^2e^{i2ka})}, \quad \text{con} \quad w = \frac{2n}{(n+1)(1-r_n^2e^{i2knd})}. \quad (\text{B.24})$$

Cabe remarcar que dado que el operador de fuerza estocástica (3.8) depende linealmente de los operadores de aniquilación y creación del baño, lo que estamos haciendo con estas soluciones es escribir la contribución al campo $\widehat{\phi}_L$ en términos de dichos operadores también.

Apéndice C

Funcional de Wigner para el Campo Escalar

Este apéndice lo dedicamos al cálculo de la funcional de Wigner para el campo escalar en un estado térmico arbitrario.

De acuerdo a Ref.[58], la funcional de Wigner para el campo puede ser definida como:

$$W_\phi[\phi_0(\mathbf{x}), \Pi_0(\mathbf{x}), t_0] = \int \mathcal{D}\varphi(\mathbf{x}) e^{-i \int d\mathbf{x} \Pi_0(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})} \left\langle \phi_0(\mathbf{x}) + \frac{\varphi(\mathbf{x})}{2} \left| \hat{\rho}_\phi(t_0) \right| \phi_0(\mathbf{x}) - \frac{\varphi(\mathbf{x})}{2} \right\rangle. \quad (\text{C.1})$$

Cabe señalar que a veces parece más fácil calcular la funcional de Wigner en el espacio de momentos. Sin embargo, no es tan fácil. A pesar de que el campo $\phi(\mathbf{x})$ es real, su transformada de Fourier $\phi(\mathbf{p})$ es compleja pero sus partes real e imaginaria no son independientes, ya que para tener un campo real, debe ocurrir que $\phi(-\mathbf{p}) = \phi^*(\mathbf{p})$. Como en Ref.[58], para la transformada de Fourier, trataremos las partes real e imaginaria de $\phi(\mathbf{p})$ como variables independientes, pero considerando $p_i \in (0, +\infty)$ para cada componente de momento en lugar de $p_i \in (-\infty, +\infty)$. De esta forma, la funcional de Wigner en el espacio de momentos se define como:

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_\phi[\phi_0(\mathbf{p}), \Pi_0(\mathbf{p}), t_0] &= \int \mathcal{D}\varphi(\mathbf{p}) \left\langle \phi_0(\mathbf{p}) + \frac{1}{2} \varphi(\mathbf{p}) \left| \hat{\rho}_\phi(t_0) \right| \phi_0(\mathbf{p}) - \frac{1}{2} \varphi(\mathbf{p}) \right\rangle \\ &\times e^{-i \int_0^{+\infty} d\mathbf{p} [\Pi_0^*(\mathbf{p}) \varphi(\mathbf{p}) + \Pi_0(\mathbf{p}) \varphi^*(\mathbf{p})]}, \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

donde las integraciones funcionales son sobre las componentes real e imaginaria de $\phi(\mathbf{p})$ [58]. El pasaje de (C.1) a (C.2) implica un jacobiano no trivial $\det \left[\frac{\delta\varphi(\mathbf{x})}{\delta\varphi(\mathbf{p})} \right]$, el cual

no depende de los campos ya que la transformación de Fourier es un mapeo lineal y, consecuentemente, aparece meramente como un nuevo factor de normalización de la funcional de Wigner.

Ahora, consideramos que el campo escalar está inicialmente en un equilibrio termodinámico. Por ende, su operador matriz densidad $\widehat{\rho}_\phi(t_0)$ viene dado por:

$$\widehat{\rho}_\phi(t_0) = \frac{1}{Z} e^{-\beta_\phi \widehat{H}_0}, \quad (\text{C.3})$$

donde Z es la función de partición asociada al hamiltoniano del campo inicial \widehat{H}_0 , el cual puede ser escrito como:

$$\widehat{H}_0 = \int_0^{+\infty} d\mathbf{p} \left(\widehat{\Pi}^\dagger(\mathbf{p}) \widehat{\Pi}(\mathbf{p}) + p^2 \widehat{\Phi}^\dagger(\mathbf{p}) \widehat{\Phi}(\mathbf{p}) \right). \quad (\text{C.4})$$

que puede identificarse con el hamiltoniano de una suma de hamiltonianos de dos osciladores armónicos para cada componente a un dado \mathbf{p} . Por ende, tomando \mathbf{p} como una etiqueta para cada par de osciladores, podemos introducir un conjunto completo de autoestados de energía de osciladores (isótropos) bidimensionales $|n_1, n_2\rangle$, escribiendo Eq.(C.2) como:

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_\phi[\phi_0(\mathbf{p}), \Pi_0(\mathbf{p}), t_0] &= \sum_{n_1, n_2} \int \mathcal{D}\varphi(\mathbf{p}) e^{-\int_0^{+\infty} d\mathbf{p} [i(\Pi_0^*(\mathbf{p}) \varphi(\mathbf{p}) + \Pi_0(\mathbf{p}) \varphi^*(\mathbf{p})) + \beta_\phi |\mathbf{p}|]} \\ &\times \left\langle \phi_0(\mathbf{p}) + \frac{1}{2}\varphi(\mathbf{p}) \middle| n_1, n_2 \right\rangle \left\langle n_2, n_1 \middle| \phi_0(\mathbf{p}) - \frac{1}{2}\varphi(\mathbf{p}) \right\rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Las autofunciones para osciladores armónicos (isótropos) bidimensionales vienen dados por:

$$\left\langle \Phi_R, \Phi_I \middle| n_1, n_2 \right\rangle = \left(\frac{\alpha^2}{\pi 2^{n_1} n_1! 2^{n_2} n_2!} \right)^{1/2} H_{n_1}(\alpha \Phi_R) H_{n_2}(\alpha \Phi_I) e^{-\frac{\alpha^2}{2}(\Phi_R^2 + \Phi_I^2)}, \quad (\text{C.6})$$

donde $\Phi_{R,I}$ es la parte real ó imaginaria del campo respectivamente, y H_n son los polinomios de Hermite, siendo $\alpha \equiv \left(\frac{|\mathbf{p}|}{2}\right)^{1/2}$.

Reemplazando esto en la última expresión de la funcional de Wigner en el espacio de momentos y usando la siguiente identidad para los polinomios de Hermite:

$$\sum_n \frac{a^n}{n!} H_n(x) H_n(y) = \frac{1}{\sqrt{1-4a^2}} e^{\frac{4axy-4a^2(x^2+y^2)}{1-4a^2}}, \quad (\text{C.7})$$

la cual vale para $a < 1/2$, condición satisfecha en nuestro caso ya que $a = e^{-\beta\phi|\mathbf{p}|}/2$; encontrando que:

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}_\phi[\phi_0(\mathbf{p}), \Pi_0(\mathbf{p}), t_0] &= \int \mathcal{D}\varphi(\mathbf{p}) e^{-i \int_0^{+\infty} d\mathbf{p} (\Pi_0^*(\mathbf{p}) \varphi(\mathbf{p}) + \Pi_0(\mathbf{p}) \varphi^*(\mathbf{p}) - i \frac{\alpha^2}{4} \varphi^*(\mathbf{p}) \varphi(\mathbf{p}))} \\
&\times e^{\int_0^{+\infty} d\mathbf{p} (\alpha^2 \phi_0^*(\mathbf{p}) \phi_0(\mathbf{p}) + \beta\phi|\mathbf{p}|)} \\
&\times \prod_{\mathbf{p}} \frac{\alpha^2}{\pi (1 - e^{-2\beta\phi|\mathbf{p}|})} e^{\frac{\alpha^2 e^{-\beta\phi|\mathbf{p}|}}{2(1 - e^{-2\beta\phi|\mathbf{p}|})}} \left[4(1 - e^{-\beta\phi|\mathbf{p}|}) \phi_0^*(\mathbf{p}) \phi_0(\mathbf{p}) - (1 + e^{-\beta\phi|\mathbf{p}|}) \varphi^*(\mathbf{p}) \varphi(\mathbf{p}) \right] \\
&= C e^{\int_0^{+\infty} d\mathbf{p} \alpha^2 \tanh\left(\frac{\beta\phi|\mathbf{p}|}{2}\right) \phi_0^*(\mathbf{p}) \phi_0(\mathbf{p})} \int \mathcal{D}\varphi(\mathbf{p}) e^{\int_0^{+\infty} d\mathbf{p} \frac{\alpha^2}{4} \coth\left(\frac{\beta\phi|\mathbf{p}|}{2}\right) \varphi^*(\mathbf{p}) \varphi(\mathbf{p})} \\
&\times e^{-i \int_0^{+\infty} d\mathbf{p} (\Pi_0^*(\mathbf{p}) \varphi(\mathbf{p}) + \Pi_0(\mathbf{p}) \varphi^*(\mathbf{p}))}. \tag{C.8}
\end{aligned}$$

donde en el coeficiente C hemos incluido todos los términos que no son funcionales de los campos y su momento.

Integrando trivial sobre las componentes real e imaginaria de $\varphi(\mathbf{p})$, llegamos a la generalización tridimensional de la funcional de Wigner en el espacio de momentos de la Ref.[58] para el caso unidimensional:

$$\widetilde{W}_\phi[\phi_0(\mathbf{p}), \Pi_0(\mathbf{p}), t_0] = C e^{-\frac{\beta\phi}{2} \int d\mathbf{p} \widetilde{\Delta}_{\beta\phi}(|\mathbf{p}|) [\Pi_0^*(\mathbf{p}) \Pi_0(\mathbf{p}) + |\mathbf{p}|^2 \phi_0^*(\mathbf{p}) \phi_0(\mathbf{p})]}, \tag{C.9}$$

donde la función de peso térmico viene dada por:

$$\widetilde{\Delta}_{\beta\phi}(|\mathbf{p}|) = \frac{2}{\beta\phi|\mathbf{p}|} \tanh\left(\frac{\beta\phi|\mathbf{p}|}{2}\right). \tag{C.10}$$

Esto es una función par del módulo del momento, de manera que en (C.9) las integrales sobre las componentes del momento son extendidas a todos los valores reales.

Finalmente, sabiendo la funcional de Wigner en el espacio de momentos, podemos fácilmente calcular la funcional de Wigner en el espacio de coordenadas escribiendo todas las funciones del momento como transformadas de Fourier de la función en el espacio coordinado. De esta forma, podemos escribir una extensión del resultado hallado en Ref.[58]:

$$W_\phi[\phi_0(\mathbf{x}), \Pi_0(\mathbf{x}), t_0] = C' e^{-\beta \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}, \tag{C.11}$$

donde C' es la constante de normalización en el espacio de coordenadas y el integrando \mathcal{H} viene dado por:

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv \frac{1}{2} \Delta_{\beta_\phi}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') [\Pi_0(\mathbf{x}) \Pi_0(\mathbf{x}') + \nabla\phi_0(\mathbf{x}) \cdot \nabla\phi_0(\mathbf{x}')], \quad (\text{C.12})$$

donde la función de peso térmico en el espacio de coordenadas se escribe:

$$\Delta_{\beta_\phi}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \tilde{\Delta}_{\beta_\phi}(|\mathbf{p}|). \quad (\text{C.13})$$

Cabe señalar que, debido a la simetría de intercambio del integrando, la función de peso térmico en el espacio de coordenadas debe ser simétrica, es decir, $\Delta_{\beta_\phi}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) = \Delta_{\beta_\phi}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$.

Es remarcable que aunque la expresión de la función de peso térmico en el espacio de momentos no cambia formalmente con el número de dimensiones, estamos viendo, por otro lado, que la función de peso térmico en el espacio de coordenadas sí lo hace.

Apéndice D

Transformada de Laplace de la Función de Green Retardada para una Placa Delta de Dirac

En este apéndice mostramos el cálculo completo de la transformada de Laplace de la función de Green retardada para el caso de un contorno delta de Dirac, es decir, mostramos cómo se obtiene el resultado (5.78).

Para ello, partimos de (5.77). Como mencionamos en la sección 5.5.4, como contorno consideremos el caso de una única placa homogénea delta de Dirac ubicada en $x_{\perp} = 0$ ($x_{\perp}, \mathbf{x}_{\parallel}$ son las coordenadas ortogonal y paralela al plato de un punto del espacio \mathbf{x}), la cual podemos describir por la distribución de materia $g(\mathbf{x}) \equiv \delta(x_{\perp})$. De esta forma, (5.77) resulta:

$$\nabla^2 \tilde{\mathcal{G}}_{\text{Ret}} - z^2 \left[1 - (-1)^{\alpha} 4\pi\eta\lambda_0^2 \delta(x_{\perp}) z^{2(\alpha-1)} \tilde{G}_{\text{Ret}}(z) \right] \tilde{\mathcal{G}}_{\text{Ret}} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (\text{D.1})$$

Es claro que la última ecuación presenta invariancia traslacional en las coordenadas paralelas \mathbf{x}_{\parallel} , de manera que la función de Green depende de $\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{x}'_{\parallel}$. Por ende, transformando Fourier en dichas coordenadas:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}}{\partial x_{\perp}^2} - (z^2 + k_{\parallel}^2) \tilde{\mathcal{G}}_{\text{Ret}} + (-1)^{\alpha} 4\pi\eta\lambda_0^2 \delta(x_{\perp}) z^{2\alpha} \tilde{G}_{\text{Ret}}(z) \tilde{\mathcal{G}}_{\text{Ret}} = \delta(x_{\perp} - x'_{\perp}). \quad (\text{D.2})$$

donde $k_{\parallel} = |\mathbf{k}_{\parallel}|$ y $\tilde{\mathcal{G}}_{\text{Ret}} \equiv \tilde{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}(x_{\perp}, x'_{\perp}, k_{\parallel}, z)$.

Cabe señalar que la última ecuación resulta ser una ecuación de Sturm-Liouville para la función de Green, de forma tal que puede calcularse por la técnica descrita en Ref.[60], donde es construída según:

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}(x_{\perp}, x'_{\perp}, k_{\parallel}, z) = \frac{\Phi^{(L)}(x_{<}) \Phi^{(R)}(x_{>})}{W(x'_{\perp})}, \quad (\text{D.3})$$

donde $x_{<}$ ($x_{>}$) es la menor (mayor) entre x_{\perp} y x'_{\perp} , $W(x) = \Phi^{(L)}(x) \frac{d\Phi^{(R)}}{dx} - \frac{d\Phi^{(L)}}{dx} \Phi^{(R)}(x)$ es el wronskiano (el cual tiene que ser una función constante) de las soluciones $\{\Phi^{(L)}, \Phi^{(R)}\}$, que son dos soluciones homogéneas que satisfacen la ecuación dada por:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_{\perp}^2} - (z^2 + k_{\parallel}^2) \Phi + (-1)^{\alpha} 4\pi\eta\lambda_0^2 \delta(x_{\perp}) z^{2\alpha} \tilde{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}(z) \Phi = 0. \quad (\text{D.4})$$

y las condiciones de contorno en uno de los extremos del rango de valores, es decir, Φ^L (Φ^R) satisface la condición de contorno en el extremo izquierdo (derecho) del intervalo de valores. En nuestro caso, esa condición de contorno corresponde a tener ondas salientes en la respectiva región que incluye el extremo.

La presencia de la función delta de Dirac en uno de los términos de la ecuación hace que, por un lado, separemos el problema en dos regiones, cada una con coordenada x_{\perp} positiva y negativa respectivamente. Por otro lado, resulta en una condición de contorno de salto de la derivada, que podemos obtener de la misma ecuación de movimiento integrando sobre un intervalo que contenga el cero del argumento de la delta, cuya longitud luego se lleva a cero, obteniendo claramente que:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x_{\perp}} \right|_{x_{\perp}=0^+} - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x_{\perp}} \right|_{x_{\perp}=0^-} = (-1)^{\alpha} 4\pi\eta\lambda_0^2 z^{2\alpha} \tilde{\mathcal{G}}_{\text{Ret}}(z) \Phi(0), \quad (\text{D.5})$$

lo que complementa la condición de contorno de continuidad de la solución.

Por lo tanto, en cada región, las soluciones son ondas planas que, luego de imponer las condiciones de contorno, forman las soluciones buscadas según:

$$\Phi^{(L)}(x_{\perp}) = \begin{cases} t e^{\sqrt{z^2+k_{\parallel}^2} x_{\perp}}; & x_{\perp} < 0 \\ e^{\sqrt{z^2+k_{\parallel}^2} x_{\perp}} + r e^{-\sqrt{z^2+k_{\parallel}^2} x_{\perp}}; & 0 < x_{\perp} \end{cases} \quad (\text{D.6})$$

$$\Phi^{(R)}(x_{\perp}) = \begin{cases} e^{-\sqrt{z^2+k_{\parallel}^2} x_{\perp}} + r e^{\sqrt{z^2+k_{\parallel}^2} x_{\perp}}; & x_{\perp} < 0 \\ t e^{-\sqrt{z^2+k_{\parallel}^2} x_{\perp}}; & 0 < x_{\perp} \end{cases} \quad (\text{D.7})$$

donde r y t son los coeficientes de reflexión y transmisión de una única placa de este tipo respectivamente, y vienen dados por:

$$r = -(-1)^\alpha 2\pi\eta\lambda_0^2 \frac{z^{2\alpha}}{\sqrt{z^2 + k_\parallel^2}} \tilde{G}_{\text{Ret}}(z) t \quad , \quad t = \frac{1}{\left(1 + (-1)^\alpha 2\pi\eta\lambda_0^2 \frac{z^{2\alpha}}{\sqrt{z^2 + k_\parallel^2}} \tilde{G}_{\text{Ret}}(z)\right)}, \quad (\text{D.8})$$

donde es claro que $t = 1 + r$. Cabe señalar que seguimos usando r y t para los coeficientes de una única placa pero es importante tener en cuenta que no coinciden con los considerados en el capítulo 2, correspondientes a una única placa de espesor d .

Luego, la transformada de Laplace-Fourier de la función de Green retardada para un punto campo $x_\perp < 0$ resulta:

$$\tilde{G}_{\text{Ret}} = -\frac{1}{2\sqrt{z^2 + k_\parallel^2}} \begin{cases} e^{\sqrt{z^2 + k_\parallel^2} x'_\perp} \left(e^{-\sqrt{z^2 + k_\parallel^2} x_\perp} + r e^{\sqrt{z^2 + k_\parallel^2} x_\perp} \right); & x'_\perp < x_\perp < 0 \\ \left(e^{-\sqrt{z^2 + k_\parallel^2} x'_\perp} + r e^{\sqrt{z^2 + k_\parallel^2} x'_\perp} \right) e^{\sqrt{z^2 + k_\parallel^2} x_\perp}; & x_\perp < x'_\perp < 0 \\ t e^{\sqrt{z^2 + k_\parallel^2} (x_\perp - x'_\perp)}; & x_\perp < 0 < x'_\perp. \end{cases} \quad (\text{D.9})$$

La versión unidimensional del problema, es decir, el caso donde la única dimensión de interés es la asociada a la coordenada perpendicular x_\perp , que ahora llamaremos x . Por lo tanto, para obtener los resultados de este caso, tenemos que descartar todo lo relacionado a las dimensiones paralelas. Podemos hacer esto evaluando $k_\parallel = 0$ en todos los resultados. Esto simplifica todas las expresiones y la transformada de Laplace de la función de Green retardada (D.9) se escribe:

$$\tilde{G}_{\text{Ret}}(x, x', z) = -\frac{1}{2z} \begin{cases} e^{zx'} (e^{-zx} + r e^{zx}); & x' < x < 0 \\ \left(e^{-zx'} + r e^{zx'} \right) e^{zx}; & x < x' < 0 \\ t e^{z(x-x')}; & x < 0 < x' \end{cases} \quad (\text{D.10})$$

donde los coeficientes de reflexión y transmisión ahora vienen dados por:

$$r = -(-1)^\alpha 2\pi\eta\lambda_0^2 z^{2\alpha-1} \tilde{G}_{\text{Ret}}(z) t \quad , \quad t = \frac{1}{\left(1 + (-1)^\alpha 2\pi\eta\lambda_0^2 z^{2\alpha-1} \tilde{G}_{\text{Ret}}(z)\right)}. \quad (\text{D.11})$$

De esta forma, demostramos finalmente el resultado (5.78).

Apéndice E

Cálculo de la Contribución Propia del Campo para una Placa Delta de Dirac

Este Apéndice lo dedicamos a los cálculos complementarios del apartado 5.5.4.2 sobre los núcleos de la contribución propia del campo. Primero, mostramos los resultados de las integraciones espaciales para cada uno de los núcleos y luego utilizamos el teorema de residuos para simplificar las expresiones.

E.1. Integraciones Espaciales

En esta sección, mostramos cómo a partir de las expresiones generales para los núcleos \mathcal{A} y \mathcal{B} en el caso unidimensional llegamos, luego de las integraciones espaciales, al resultado (5.83).

Independientemente de qué modelo de acoplamiento estamos considerando, para estudiar el régimen de tiempos largos, los productos que involucran dos sumas sobre polos son los que darán contribuciones estacionarias. Como primer caso, consideremos el correspondiente término del núcleo \mathcal{A} para puntos campo $x_{1,2} < 0$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(x_1, x_2, t_1, t_2) &= (\text{Campo Libre}) + (\text{Cruzados}) + \frac{\Theta(-x_1) \Theta(-x_2)}{4\beta_\phi} \sum_{j,l} R_j R_l \\
 &\times e^{z_j(x_1+t_1-t_0)} e^{z_l(x_2+t_2-t_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[e^{z_j x} \Theta(-x) \Theta(x_1+x+t_1-t_0) \right. \\
 &+ e^{-z_j x} \Theta(x) \Theta(x_1-x+t_1-t_0) \left. \right] \left[e^{z_l x} \Theta(-x) \Theta(x_2+x+t_2-t_0) \right. \\
 &+ e^{-z_l x} \Theta(x) \Theta(x_2-x+t_2-t_0) \left. \right]. \tag{E.1}
 \end{aligned}$$

Considerando que $\Theta(x) \Theta(-x) \equiv 0$ y $\Theta(\pm x) \Theta(\pm x) \equiv \Theta(\pm x)$, hay integrales que desaparecen en la expresión. Entonces, haciendo una sustitución $x \rightarrow -x$ en uno de los dos términos, todas las integrales resultan ser la misma, de manera que obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(x_1, x_2, t_1, t_2) &= (\text{Campo Libre}) + (\text{Cruzados}) + \frac{\Theta(-x_1)\Theta(-x_2)}{2\beta_\phi} \\
 &\times \sum_{j,l} R_j R_l e^{z_j(x_1+t_1-t_0)} e^{z_l(x_2+t_2-t_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{(z_j+z_l)x} \Theta(-x) \\
 &\times \Theta(x_1+x+t_1-t_0) \Theta(x_2+x+t_2-t_0). \tag{E.2}
 \end{aligned}$$

Considerando que $\Theta(x_1+x+t_1-t_0) \Theta(x_2+x+t_2-t_0) = \Theta(x_1-x_2+t_1-t_2) \Theta(x_2+x+t_2-t_0) + \Theta(x_2-x_1+t_2-t_1) \Theta(x_1+x+t_1-t_0)$, podemos calcular fácilmente la última integral:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(x_1, x_2, t_1, t_2) &= (\text{Campo Libre}) + (\text{Cruzados}) + \frac{\Theta(-x_1) \Theta(-x_2)}{2\beta_\phi} \\
 &\times \sum_{j,l} \frac{R_j R_l}{(z_j + z_l)} \left[e^{z_j(x_1+t_1-t_0)} e^{z_l(x_2+t_2-t_0)} \left(\Theta(x_1-x_2+t_1-t_2) \Theta(x_2+t_2-t_0) \right. \right. \\
 &+ \left. \left. \Theta(x_2-x_1+t_2-t_1) \Theta(x_1+t_1-t_0) \right) - \Theta(x_1-x_2+t_1-t_2) \Theta(x_2+t_2-t_0) \right. \\
 &\times \left. e^{z_j(x_1-x_2+t_1-t_2)} - \Theta(x_2-x_1+t_2-t_1) \Theta(x_1+t_1-t_0) e^{z_l(x_2-x_1+t_2-t_1)} \right]. \tag{E.3}
 \end{aligned}$$

Por otra parte, el núcleo \mathcal{B} presenta una estructura más complicada ya que involucra dos integraciones (una sobre x y otra sobre x') y un núcleo adicional $K(x-x')$ que acopla las integraciones impidiendo su cálculo por separado. Siguiendo la metodología empleada recientemente, nos concentramos en los términos que involucran dos sumas sobre polos. Por ende, el núcleo \mathcal{B} se escribe:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}(x_1, x_2, t_1, t_2) &= (\text{Campo Libre}) + (\text{Cruzados}) - \frac{\Theta(-x_1) \Theta(-x_2)}{8\beta_\phi} \quad (\text{E.4}) \\
 &\times \sum_{j,l} z_j z_l R_j R_l e^{z_j(x_1+t_1-t_0)} e^{z_l(x_2+t_2-t_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dx' |x-x'| \\
 &\times \left[e^{z_l x'} \Theta(-x') \Theta(x_2+x'+t_2-t_0) + e^{-z_l x'} \Theta(x') \Theta(x_2-x'+t_2-t_0) \right] \\
 &\times \left[e^{z_j x} \Theta(-x) \Theta(x_1+x+t_1-t_0) + e^{-z_j x} \Theta(x) \Theta(x_1-x+t_1-t_0) \right].
 \end{aligned}$$

La integración sobre x' pueden realizarse escribiendo $|x-x'| = \Theta(x-x')(x-x') + \Theta(x'-x)(x'-x)$. Trabajando la integral, obtenemos que el resultado puede ser separado nuevamente en términos que contribuyen al transitorio y desaparecen en el régimen de tiempos largos, y términos que dan un resultados estacionarios. De hecho, podemos escribir la integral como:

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^{+\infty} dx' |x-x'| \left[e^{z_l x'} \Theta(-x') \Theta(x_2+x'+t_2-t_0) + e^{-z_l x'} \Theta(x') \Theta(x_2-x'+t_2-t_0) \right] \\
 &= \frac{2}{z_l^2} \left[\Theta(-x) \Theta(x_2+x+t_2-t_0) e^{z_l x} + \Theta(x) \Theta(x_2-x+t_2-t_0) e^{-z_l x} \right] \\
 &\quad + (\text{Transitorios}). \quad (\text{E.5})
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el núcleo \mathcal{B} lo escribimos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}(x_1, x_2, t_1, t_2) &= (\text{Campo Libre}) + (\text{Cruzados}) + (\text{Transitorios}) \quad (\text{E.6}) \\
 &- \frac{\Theta(-x_1) \Theta(-x_2)}{4\beta_\phi} \sum_{j,l} \frac{z_j}{z_l} R_j R_l e^{z_j(x_1+t_1-t_0)} e^{z_l(x_2+t_2-t_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \\
 &\times \left[e^{z_j x} \Theta(-x) \Theta(x_1+x+t_1-t_0) + e^{-z_j x} \Theta(x) \Theta(x_1-x+t_1-t_0) \right] \\
 &\times \left[\Theta(-x) \Theta(x_2+x+t_2-t_0) e^{z_l x} + \Theta(x) \Theta(x_2-x+t_2-t_0) e^{-z_l x} \right],
 \end{aligned}$$

donde cabe señalar que la integral resultante es la misma que la que obtuvimos para el núcleo \mathcal{A} en (E.1).

Por ende, el resultado es el mismo y el núcleo lo podemos escribir como:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}(x_1, x_2, t_1, t_2) &= (\text{Campo Libre}) + (\text{Cruzados}) + (\text{Transitorios}) \\
 &= -\frac{\Theta(-x_1) \Theta(-x_2)}{2\beta_\phi} \sum_{j,l} \frac{z_j}{z_l} \frac{R_j R_l}{(z_j + z_l)} \left[\left(\Theta(x_1 - x_2 + t_1 - t_2) \Theta(x_2 + t_2 - t_0) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \Theta(x_2 - x_1 + t_2 - t_1) \Theta(x_1 + t_1 - t_0) \right) e^{z_j(x_1+t_1-t_0)} e^{z_l(x_2+t_2-t_0)} \right. \\
 &\quad \left. - \Theta(x_1 - x_2 + t_1 - t_2) \Theta(x_2 + t_2 - t_0) e^{z_j(x_1-x_2+t_1-t_2)} \right. \\
 &\quad \left. - \Theta(x_2 - x_1 + t_2 - t_1) \Theta(x_1 + t_1 - t_0) e^{z_l(x_2-x_1+t_2-t_1)} \right]. \tag{E.7}
 \end{aligned}$$

Esta última ecuación junto con (E.3) resultan finalmente en el resultado (5.83).

E.2. Sumas Dobles Sobre Polos

En esta sección mostramos cómo las sumas dobles sobre polos en los últimos dos términos de (5.83) pueden llevarse a una única suma, dando como resultado la expresión (5.84).

Entonces, tomamos como punto de partida los dos últimos términos de (5.83). Tomemos primero la suma sobre j para el último de ellos. Considerando que todos los polos son simples y que $R_j \equiv \text{Res} \left[\frac{r}{z}, z_j \right]$, escribimos:

$$\sum_j \frac{(z_l - z_j)}{(z_j + z_l)} R_j = \sum_j \text{Res} \left[\frac{(z_l - z) r}{(z + z_l) z}, z_j \right]. \tag{E.8}$$

A partir de (5.79) y dado que $\text{Re}(z_l) < 0$ para todos los polos z_l (de manera que $z_l + z_j \neq 0$), podemos mostrar que la función compleja $\frac{(z_l - z) r}{(z + z_l) z}$ va a 0 cuando $|z| \rightarrow +\infty$ (independientemente de la dirección en el plano complejo), y su conjunto de polos está dado por todos los polos z_j , el polo $-z_l$ (que depende del término de la suma sobre l que estemos considerando) y el polo en 0 sólo en caso del modelo bilineal. Por lo tanto, a través del teorema de residuos, para un círculo C_R^+ de radio R en el plano complejo conteniendo todos los polos, cuando $R \rightarrow +\infty$, tenemos:

$$0 = \int_{C_\infty} \frac{dz}{2\pi i} \frac{(z_l - z) r}{(z + z_l) z} = \sum_j \text{Res} \left[\frac{(z_l - z) r}{(z + z_l) z}, z_j \right] - 2 r(-z_l) + \alpha - 1, \tag{E.9}$$

donde los últimos dos términos son los resultados de calcular explícitamente los polos en $-z_l$ y en 0.

Por ende, todo el término asociado a $e^{z_l(x_2-x_1+t_2-t_1)}$ lo escribimos:

$$\sum_{j,l} \left(1 - \frac{z_j}{z_l}\right) \frac{R_j R_l e^{z_l(x_2-x_1+t_2-t_1)}}{(z_j+z_l)} = \sum_l \frac{R_l}{z_l} \left(2r(-z_l) + 1 - \alpha\right) e^{z_l(x_2-x_1+t_2-t_1)}. \quad (\text{E.10})$$

Podemos hacer lo propio con el otro término (asociado a $e^{z_j(x_1-x_2+t_1-t_2)}$), al empezar con la suma sobre l . El cálculo es igual pero sobre la función compleja $\frac{(z-z_j)r}{(z+z_j)z^2}$ y con la excepción de que el polo en $z=0$ es simple para el modelo tipo corriente, mientras que es doble para el bilineal. Luego, finalmente tenemos:

$$\sum_{j,l} \left(1 - \frac{z_j}{z_l}\right) \frac{R_j R_l}{(z_j+z_l)} e^{z_j(x_1-x_2+t_1-t_2)} = \sum_j R_j \left(\frac{2r(-z_j)}{z_j} + \frac{2\pi\eta\lambda_0^2\alpha}{\omega^2} + \frac{(1-\alpha)\omega^2}{2\pi\eta\lambda_0^2} \right) \times e^{z_j(x_1-x_2+t_1-t_2)} \quad (\text{E.11})$$

donde la diferencia en unidades entre los dos últimos términos entre paréntesis se debe al hecho de que la constante de acoplamiento λ_0 cambia sus unidades dependiendo del modelo de acoplamiento.

Los últimos términos en (E.10) y (E.11) involucran diferencias entre ambos modelos de acoplamiento. Puede mostrarse que dichos términos son divergentes en el límite de coincidencia, de manera que los descartamos a fin de lograr una expresión regularizada.

De esta manera, considerando todo, llegamos finalmente a (5.84).

Bibliografía

- [1] K. A. Milton, *The Casimir Effect: Physical Manifestations of the Zero-Point Energy* (World Scientific, Singapore, 2001).
- [2] S. Reynaud, A. Lambrecht, C. Genet and M. T. Jaekel, C. R. Acad. Sci. Paris **IV-2**, 1287 (2001).
- [3] K. A. Milton, J. Phys. A: Math. Gen. **37**, R209 (2004).
- [4] S. K. Lamoreaux, Rep. Prog. Phys. **68**, 201 (2005).
- [5] M. Bordag, G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen, and V. M. Mostepanenko, *Advances in the Casimir Effect*, Oxford University Press, Oxford, 2009.
- [6] P. W. Milonni, *The Quantum Vacuum: An Introduction to Quantum Electrodynamics*, Academic Press, San Diego, 1994.
- [7] W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization* (Springer-Verlag, Berlin, 1996).
- [8] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, 2nd Edition (Cambridge University Press, New York, USA, 1994).
- [9] P. W. Atkins and R. S. Friedman, *Molecular Quantum Mechanics*, 3rd Edition (Oxford University Press, New York, USA, 2005).
- [10] H. Bruus and K. Flensberg, *Many-Body Quantum Theory in Condensed Matter Physics: An Introduction*, Oxford University Press, New York, USA (2004).
- [11] S. A. Fulling, Phys. Rev. D **7**, 10, 2850 (1973).
- [12] W. G. Unruh, Phys. Rev. D **14**, 870-892 (1976).
- [13] C. D. Fosco, F. C. Lombardo and F. D. Mazzitelli, Phys. Rev. D **84**, 025011 (2011).

- [14] M. B. Farías, C. D. Fosco, F. C. Lombardo, F. D. Mazzitelli and A. E. Rubio López, submitted to Phys. Rev. D (Dec 2014).
- [15] H. B. G. Casimir, Proc. K. Ned. Akad. Wet. **51**, 793 (1948).
- [16] E. M. Lifshitz, Sov. Phys. JETP **2**, 73 (1956).
- [17] S. M. Rytov, *Theory of Electrical Fluctuations and Thermal Radiation*, Publishing House, Academic of Sciences, USSR, 1953.
- [18] G. Barton, New J. Phys. **12**, 113045 (2010).
- [19] T. G. Philbin, New J. Phys. **12**, 123008 (2010).
- [20] F. S. S. Rosa, D. A. R. Dalvit and P. W. Milonni, Phys. Rev. A **81**, 033812 (2010).
- [21] I. E. Dzyaloshinskii, E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, 646; Adv. Phys. **10** 165 (1961).
- [22] R. Esquivel-Sirvent, C. Villarreal, W.L. Moschán and G.H. Coccoletzi, Phys. Status Solidi B **230**, 409 (2002).
- [23] M. T. Jaekel and S. Reynaud, J. Phys. I **1**, 1395 (1991).
- [24] A. Lambrecht, M. T. Jaekel and S. Reynaud, Phys. Lett. A **224**, 188 (1997).
- [25] M. S. Tomas, Phys. Rev. A **66**, 05103 (2002).
- [26] C. Ccappa Ttira, C. D. Fosco and F. D. Mazzitelli, arXiv:1107.2357 , submitted to J. Phys. A.
- [27] C. D. Fosco, F. C. Lombardo and F. D. Mazzitelli, Phys. Lett. B **669**, 371 (2008) [arXiv:0807.3539 [hep-th]].
- [28] M. Antezza, L. P. Pitaevskii, S. Stringari and V. B. Svetovoy, Phys. Rev. A **77**, 022901 (2008).
- [29] B. Huttner and S. M. Barnett, Phys. Rev. A **46**, 4306 (1992).
- [30] F. S. S. Rosa, D. A. R. Dalvit and P. W. Milonni, arXiv:0912.0279v1 and in *Doing Physics. A Festschrift for Thomas Erber*, ed. by P. W. Johnson, Illinois Institute of Technology Press, Chicago, IL., 2010.
- [31] F. S. S. Rosa, D. A. R. Dalvit, and P. W. Milonni, Phys. Rev. A **84**, 053813 (2011).

-
- [32] D. Kupiszewska, Phys. Rev. A **46**, 2286 (1992)
- [33] R. Matloob, A. Keshavarz, and D. Sedighi, Phys. Rev. A **60**, 3410 (1999).
- [34] T. Gruner and D. G. Welsch, Phys. Rev. A **53**, 1818 (1996).
- [35] F. C. Lombardo, F. D. Mazzitelli, A. E. Rubio Lopez, Phys. Rev. A **84**, 052517 (2011).
- [36] E. A. Calzetta and B. L. Hu, *Nonequilibrium Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 2008).
- [37] A. E. Rubio Lopez and F. C. Lombardo, Phys. Rev. D **89**, 105026 (2014).
- [38] A. E. Rubio Lopez and F. C. Lombardo, accepted Euro Phys. Jour. C (Feb 2015).
- [39] F. C. Lombardo, F. D. Mazzitelli, A. E. Rubio López and G. J. Turiaci, in preparation.
- [40] M. Bordag, U. Mohideen and V. M. Mostepanenko, Phys. Rep. **353**, 1 (2001).
- [41] H. P. Breuer and F. Petruccione, *The theory of open quantum systems*, Oxford University Press, Clarendon Press, Oxford, UK (2006).
- [42] S. Y. Buhmann and D. G. Welsch, Progress in Quantum Electronics **31**, 51 (2007).
- [43] J. L. Schiff, *The Laplace Transform: Theory and Applications* (Springer-Verlag, New York, USA, 1999).
- [44] D. Kupiszewska and J. Mostowski, Phys. Rev. A **41**, 4636 (1990).
- [45] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley, New York, 2nd Edition (1975).
- [46] J. S. Schwinger, *J. Math. Phys.* **2**, 407 (1961).
- [47] L. V. Keldysh, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 47 (1964) 1515 [Sov. Phys. JETP 20 (1965) 1018].
- [48] F. C. Lombardo, *Transición Cuántico - Clásica en Teoría de Campos*, tesis doctoral, 1998.
- [49] R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, Emended Edition, McGraw - Hill, New York, 2010.

- [50] G. Bimonte, Phys. Rev. A **80**, 042102 (2009).
- [51] K. c. Chou, Z. b. Su, B. l. Hao and L. Yu, Phys. Rept. **118**, 1 (1985).
- [52] R. D. Jordan, Phys. Rev. D **33**, 444 (1986).
- [53] S. Weinberg, Phys. Rev. D **72**, 043514 (2005).
- [54] E. A. Calzetta, A. Roura and E. Verdaguer, Physica **319A**, 188-212 (2003).
- [55] A. O. Caldeira and A. J. Leggett, Physica **121A**, 587-616 (1983).
- [56] B. L. Hu, J. P. Paz and Y. Zhang, Phys. Rev. D **45**, 2843 (1992).
- [57] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer* (Westview Press, 1990).
- [58] S. Mrówczyński and B. Müller, Phys. Rev. D **50**, 12, 7542-7552 (1994).
- [59] D. Arteaga Barriel, *Particle Propagation in Non-trivial Backgrounds: A Quantum Field Theory Approach*, Phd. Thesis, arXiv:0707.3899 (2007).
- [60] R. E. Collins, *Field Theory of Guided Waves*, 2nd Edition (IEEE Press, New York, USA, 1990).
- [61] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, 2nd Edition (Cambridge University Press, United Kingdom, 1996).
- [62] W. Pauli, *Theory of Relativity*, Pergamon Press, Bristol (1958).
- [63] R. O. Behunin and B. L. Hu, Phys. Rev. A **84**, 012902 (2011).
- [64] C. Eberlein and D. Robaschik, Phys. Rev. D **73**, 025009 (2006).
- [65] L. Knöll and U. Leonhardt, Jour. Mod. Opt. **39**:6, 1253-1264 (1992).
- [66] A. Bechler, Jour. Mod. Opt. **46**:5, 901-921 (1999).