Conjuntos y operadores A-compactos, propiedades de aproximación e ideales de funciones entre espacios de Banach

Turco, Pablo

2014-12-17

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Conjuntos y operadores $\mathcal{A}$-compactos, propiedades de aproximación e ideales de funciones entre espacios de Banach.

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

Pablo Turco

Directora de tesis: Silvia Lassalle.
Consejera de estudios: Silvia Lassalle.

Buenos Aires, 17 de Diciembre de 2014.

Conjuntos y Operadores $\mathcal{A}$-Compactos, Propiedades de Aproximación e Ideales de Funciones entre Espacios de Banach

Resumen

El objetivo principal de esta tesis es llevar a cabo el estudio de un método general para comprender una amplia clase de propiedades de aproximación de espacios de Banach y de diferentes ideales de operadores compactos que pueden ser modelados por igual una vez que se ha elegido el sistema de conjuntos compactos. Para ello, usamos la noción de conjunto $\mathcal{A}$-compacto definido por Carl y Stephani, donde $\mathcal{A}$ es un ideal de operadores. Relacionado con los conjuntos $\mathcal{A}$-compactos surge el concepto de operadores $\mathcal{A}$-compactos (aquellos operadores que aplican conjuntos acotados en $\mathcal{A}$-compactos). En el caso de que $\mathcal{A}$ sea un ideal de operadores de Banach, introducimos una forma de medir a los conjuntos $\mathcal{A}$-compactos que nos permitirá estudiar al espacio de operadores $\mathcal{A}$-compactos como un espacio de Banach. La estrecha relación que hay entre conjuntos y operadores $\mathcal{A}$-compactos nos permitirá aplicar la teoría operadores para formular distintas propiedades de los conjuntos $\mathcal{A}$-compactos.

El sistema de conjuntos $\mathcal{A}$-compactos induce de forma natural dos clases distintas de propiedades de aproximación. La primera se obtiene de considerar que el operador identidad se aproxime uniformemente sobre conjuntos $\mathcal{A}$-compactos por operadores de rango finito. Esta propiedad la llamaremos la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme. La otra clase de propiedad de aproximación que consideramos se obtiene de considerar la medida de conjunto $\mathcal{A}$-compacto y se denomina la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación. En este contexto entra en juego la geometría del espacio de operadores $\mathcal{A}$-compactos. El enfoque que damos nos permite estudiar ambas propiedades de aproximación en *tandem*. Además, estudiamos como "pasan" estas propiedades de aproximación de los espacios duales a los espacios subyacentes.

Luego examinamos la interacción entre estas dos propiedades de aproximación y el espacio polinomios homogéneos y de funciones holomorfas entre espacios de Banach. Para ello, introduciremos las nociones de polinomios y funciones holomorfas $\mathcal{A}$-compactas. Si bien el espacio de polinomios $\mathcal{A}$-compactos tiene una estructura similar al espacio de operadores lineales $\mathcal{A}$-compactos, el espacio de funciones holomorfas $\mathcal{A}$-compactas tiene una estructura muy distinta. Para mostrar esto, expondremos ejemplos que clarifican los resultados obtenidos.

Palabras clave: Propiedad de Aproximación, Conjuntos $\mathcal{A}$-compactos, Polinomios homogéneos, Funciones Holomorfas.

$\mathcal{A}$-Compact Sets and Operators, Approximation Properties and Function Ideals between Banach Spaces

Abstract

The main objective of this thesis is to undertake the study of a general method to understand a wide class of approximation properties and different ideals of compact operators which can be equally modeled once the system of compact sets has been chosen. To this end, we use the notion of $\mathcal{A}$-compact sets introduced by Carl and Stephani, which is determined by an operator ideal $\mathcal{A}$. In relation with $\mathcal{A}$-compact sets, we have the concept of $\mathcal{A}$-compact operators (those operators which sends bounded sets into $\mathcal{A}$-compact sets). In the case that $\mathcal{A}$ is a Banach operator ideal, we introduce a measure for the $\mathcal{A}$-compact sets and we use it to study the $\mathcal{A}$-compact operatos as a Banach space. The close relationship between $\mathcal{A}$-compact sets and operators allows us to apply the operator theory to develop various properties of the $\mathcal{A}$-compact sets.

The system of $\mathcal{A}$-compact sets leads naturally two types of approximation properties. The first one is obtained by considering that the identity operator can be uniformly approximated by finite rank operators over $\mathcal{A}$-compact sets. This property is called the uniform $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-approximation property. The other type of approximation property is obtained by considering the measure of $\mathcal{A}$-compact sets and it is called the $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-approximation property. In this context, it comes into scene the geometry of the Banach space of $\mathcal{A}$-compact operators. The approach that we make allows us to study both approximation propertis in tandem. In addition, we study how these approximation properties on a dual space affect to the underlying spaces.

Then we examine the interaction between these two types of approximation properties and the spaces of homogeneous polynomials and holomorphic functions between Banach spaces. To this end, we introduce the concept of $\mathcal{A}$-compact polynomials and $\mathcal{A}$-compact holomorphic functions. While the space of $\mathcal{A}$-compact polynomials has a similar structure to the space of $\mathcal{A}$-compact operators, the space of $\mathcal{A}$-compact holomorphic function has a very diferent structure. To show this, we will present some examples that clarify our results.

Keywords: Approximation properties, $\mathcal{A}$-Compact Sets, Homogeneous Polynomials, Holomorphic Functions.

Agradecimientos

A Silvia Lassalle, por guiarme a lo largo de este camino, alentándome cuando las cosas no salían y acompañándome en todos los momentos, sobre todo en los personales.

A mis padres Beatriz y Jorge y a mi hermano Martín por su apoyo incondicional en todo momento.

A todo el grupo de análisis funcional: Nacho, Dani, Vero, Damián, Santi, Dany, Román, Mazzi, Martín y Tomás por crear un ámbito de trabajo alegre y serio. Es un placer poder formar parte de este grupo.

Al CONICET por financiar mis estudios y al IMAS y al departamento de matemática de la FCEN por darme lugar de trabajo.

A Debbie, Lili y Mona. El trabajo que hacen es increíble.

A todos mis compañeros de oficina: Christian, Vicky, Caro, Ani, Magui, Cris, Nico, Anto, Andrea y Jesús por compartir charlas y mates, siempre con la mejor onda.

A mis amigos Fito, Juan, Guille, Santi, Cris, el Perro, Félix, Nacho, Diego, Fede, al Cabezón, Hagi, al Negro, al Doc.

A lo largo de este tiempo, tuve la suerte de compartir muchas cosas con muchas personas. La lista es interminable, pero a todos aquellos con los que compartí un almuerzo, una cena, una cerveza, un café, un congreso, un viaje, a todos ellos, muchas gracias.

Y, por supuesto, a Ceci. No puedo enumerar las infinitas situaciones en las que estás conmigo. No hay nada mejor que despertar y verte a mi lado todos los días.

Para Manuel, por hacer que cada dia sea único.

Índice general

Introducción

En el estudio de propiedades de espacios de funciones, una de las principales herramientas que se utiliza es extender los resultados de espacios de funciones con una estructura simple utilizando argumentos de densidad. En el caso de operadores (lineales) entre espacios de Banach, los más *simples* son los operadores de rango finito, por ende, es razonable preguntarse cuando un operador puede representarse como límite de estos. Como el límite en norma de operadores de una sucesión de operadores de rango finito es un operador compacto (aquellos que mandan conjutos acotados en relativamente compactos), en natural preguntarse:

¿Todo operador compacto entre espacios de Banach es aproximado (en norma) por operadores de rango finito?

Esta pregunta fue considerada uno de los problemas centrales del análisis funcional y es conocida como el *problema de aproximación*. El origen del problema de aproximación se le puede adjudicar Mazur. El Problema 153 del *Scottish Book* [Mau], postulado por Mazur en 1936, trata sobre aproximación de funciones continuas de dos variables. Específicamente, dada una función continua $f(x, y)$ definida para $0 \leq x, y \leq 1$ y dado $\varepsilon > 0$, ¿Existen números $a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n; c_1, \dots, c_n$ con la propiedad que

$$|f(x, y) - \sum_{k=1}^{n} c_k f(a_k, y) f(x, b_k)| \leq \varepsilon$$

para todo $0 \leq x, y \leq 1$?

Mazur probó que de existir tal aproximación, todo operador compacto entre espacios de Banach puede ser aproximado, en norma, por operadores de rango finito (ver [Peł, Pág. 68] y [Pie2, Pág. 285]).

Casi 20 años después de la formulación del Problema 153, Grothendieck [Gro2] inicia un estudio sistemático del problema de aproximación, introduciendo la propiedad de aproximación:

Un espacio de Banach X tiene la propiedad de aproximación si
para todo espacio de Banach Y, $\mathcal{F}(Y; X)$ es $\| \cdot \|$-denso en $\mathcal{K}(Y; X)$,

donde $\mathcal{F}$ y $\mathcal{K}$ denotan a los operadores de rango finito y compactos respectivamente.

Además de mostrar que el Problema 153 de Mazur y el problema de aproximación son equivalentes [Gro2, Proposition 37], Grothendieck expone distintas equivalencias de la propiedad de aproximación, mostrando el alcance que tiene en la teoría de espacios de Banach. Una de estas reformulaciones trata sobre la aproximación los operadores: Un espacio de Banach X tiene la propiedad de aproximación si y sólo si todo operador continuo de X en si mismo puede ser uniformemente aproximado sobre conjuntos compactos, por operadores de rango finito. Esta equivalencia le permite a Grothendieck extender la propiedad de aproximación para espacios localmente convexos:

Un espacio localmente convexo E tiene la propiedad de aproximación si
$\mathcal{F}(E;E)$ *es* τ_c*-denso en* $\mathcal{L}(E;E)$,

donde τ_c es la topología de convergencia uniforme sobre conjuntos compactos y $\mathcal{L}$ denota al espacio de los operadores continuos.

Por mucho tiempo se esperó una respuesta positiva al problema de aproximación. Sin embargo, en 1972, Enflo [Enf] lo resuelve en forma negativa, mostrando la existencia de un espacio de Banach sin la propiedad de aproximación. El contraejemplo de Enflo marca un antes y después en la teoría de espacios de Banach. Según Figiel [Fig, Pág. 208]:

Enflo's result has completely changed many opinions about the approximation property. Now it seems very likely that each Banach space non-isomorphic to any Hilbert space contains a subspaces failing to have the approximation property.

Como consequencia del contraejemplo de Enflo, los espacios c_0 y ℓ_p, con $1 \leq p \leq \infty,\ p \neq 2$ contienen subespacios sin propiedad de aproximación (el caso $1 \leq p < 2$ se debe a Szankowski [Sza1]). En 1981, Szankowski [Sza2] muestra que el espacio de todos los operadores acotados de un espacio de Hilbert en si mismo tampoco tiene la propiedad de aproximación. Según Defant y Floret [DF, Pág. 59]:

That this space does not have the approximation property is scandalous! All the "usual" spaces (which means: not artificially constructed) have the approximation property.

Hoy en día, se conocen muchas variantes de la propiedad de aproximación. Muchas de estas se pueden encontrar en el trabajo de Casazza [Cas], en el libro de Pietsch [Pie2, Cáp. 5.7.4] y en el libro de Defant y Floret [DF, Sec 21.7]. Ante la presencia de espacios sin la propiedad de aproximación, resulta útil encontrar condiciones necesarias y suficiente para que un espacio tenga alguna variante de esta y así poder dar distintas descripciones del espacio en cuestión.

La propiedad de aproximación mostró valiosas aplicaciones al campo del estudio de espacios de funciones. Los primeros resultados en relación a espacios de funciones, son sin duda, los relacionados con el espacio dual. Estos fueron establecidos por Grothendieck, donde caracteriza la propiedad de aproximación del espacio dual de un espacio de Banach [Gro2, Proposition 36]:

El dual de un espacio de Banach X tiene la propiedad de aproximación si y sólo si para todo espacio de Banach Y, $\mathcal{F}(X;Y)$ es $\|\cdot\|$-denso en $\mathcal{K}(X;Y)$.

En el caso de espacio de funciones, la topología en este juega un rol importante. Si el dual de un espacio de Banach X, con su topología usual, tiene la propiedad de aproximación, entonces X la tiene. Sin embargo la recíproca no es cierta. A pesar de esto, X tiene la propiedad de aproximación si y sólo si su dual, con la topología de convergencia uniforme sobre compactos, la tiene.

Si un espacio de funciones tiene la propiedad de aproximación, entonces el correspondiente espacio de funciones a valores vectoriales puede describirse a través del espacio de funciones a valores escalares y productos tensoriales. Este es el caso de los operadores compactos y de los opradores nucleraes de X en Y que pueden describirse a través del producto tensorial inyectiva y proyectivo (respectivamente) de X' e Y ya sea si X' o Y tiene propiedad de aproximación [DF, 5.3 y 5.7]. Pero esta estructura no se restringe a espacios de operadores lineales, también se presenta en espacio de funciones holomorfas. Por ejemplo, $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n;X) = \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)\widehat{\otimes}_\varepsilon X$, donde $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ y $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n;X)$ denotan el espacio de funciones holomorfas sobre $\mathbb{C}^n$ a valores escalares y vectoriales respectivamente, donde X es un espacio de Banach y $\widehat{\otimes}_\varepsilon$ denota la completación del ε-producto. Estos resultados inspiraron a varios autores que analizaron la propiedad de aproximación y su relación con espacios de funciones holomorfas definidos sobre espacios de Banach. El trabajo fundante se debe a Aron y Schottenloher [AS] donde también estudian cómo incide la propiedad de aproximación de un espacio de Banach en el espacio de polinomios. En resumen, los resultados que obtienen toman la caracterización de la propiedad de aproximación en términos de funciones holomorfas:

Un espacio de Banach X tiene la propiedad de aproximación si y sólo si, $\mathcal{H}(X)\otimes X$ es τ_c-denso en $\mathcal{H}(X;X)$,

donde $\mathcal{H}(X)\otimes X$ denota el espacio de funciones holomorfas de rango finito de X en X.

A este trabajo lo siguieron [DM1, DM2, DM3], entre otros. La incidencia de diferentes tipos de propiedades de aproximación en el espacio de polinomios y funciones holomorfas pueden encontrarse en [AMR, BDR, Çal1, Çal2, Muj2, Muj3], entre otros.

Inspirados en el resultado de Grothendieck que caracteriza los conjuntos relativamente compactos como aquellos que estan contenidos en la cápsula absolutamente convexa de una sucesión de vectores convergentes a cero, surge la noción de conjunto relativamente p-compactos ($1 \leq p < \infty$) (de Sinha y Karn, [SK1]). Informalmente, estos conjuntos están determinados por sucesiones de vectores que cuyas normas son p-sumantes. Asociados a este concepto, surgen de forma natural los operadores p-compactos (aquellos que mandan conjuntos acotados en conjuntos relativamente p-compactos) y la p-propiedad de aproximación: Un espacio de Banach X tiene la p-propiedad de aproximación si todo operador continuo con rango en X puede ser uniformemente aproximado, sobre conjuntos p-compactos, por operadores de rango finito. O, equivalentemente, si todo operador p-compacto con rango en X puede ser aproximado en norma por operadores de rango finito. En los últimos 12 años, la p-propiedad de aproximación y el ideal de operadores p-compactos fueron estudiados intensamente por varios autores [AMR, CK, DOPS, DP1, DP2, DPS1, DPS2, Oja2, Oja3, Pie3, SK1, SK2] entre otros. Nuestro interés en el tema surge de la siguiente observación: La p-propiedad de aproximación admite un enfoque que tiene como raíz un ideal de operadores y otro enfoque que tiene como base la elección adecuada de un sistema de conjuntos compactos.

El objetivo de este trabajo desarrollar un estudio metódico que permita comprender una amplia clase de propiedades de aproximación y de diferentes ideales de operadores compactos, que pueden ser modelados de igual forma una vez que se ha elegido el sistema de conjuntos compactos. Nos interesa clarificar hasta qué punto la estrutura lineal y las propiedades del espacio subyacente se reflejan en la estructura y propiedades de los diferentes tipos de ideales de operadores, polinomios y funciones holomorfas definidas en estos espacios. Nuestra principal herramienta será la noción de $\mathcal{A}$-compacidad, introducida por Carl y Stephani [CS], donde $\mathcal{A}$ es un ideal de operadores. El sistema de conjuntos $\mathcal{A}$-compactos induce de forma natural la clase de operadores $\mathcal{A}$-compactos, que denotaremos por $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$, formada por los operadores que aplican conjuntos acotados en conjuntos relativamente $\mathcal{A}$-compactos. Este ideal es introducido y estudiado en [CS] desde un punto de vista puramente algebraico, desprovisto de una estructura isométrica.

Este trabajo esta organizado de la siguiente manera. El Capítulo 1 esta dedicado a los conjuntos y operadores $\mathcal{A}$-compactos definidos por Carl y Stephani. En el caso en que $\mathcal{A}$ es un ideal de operadores de Banach, introducimos una medida para los conjuntos $\mathcal{A}$-compactos que nos permite, como principal aplicación, dotar al espacio de operadores $\mathcal{A}$-compactos de una norma que lo hace un espacio de Banach. Damos así una estructura geométrica a $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$, hasta el momento ausente. A partir de esto, hacemos un estudio exhaustivo del ideal de operadores $\mathcal{A}$-compactos. Para ello, nos basamos en la teoría general de ideales de operadores, desarrollada por Pietsch en su monografía [Pie1], así como también en la teoría de productos tensoriales, iniciada por Schatten en 1942 y que tiene como principal referencia el célebre *Memoir* de Grothendieck[Gro1]. Utilizaremos las dos teorías en paralelo, siguiendo la línea del libro de Defant y Floret [DF]. En palabras de los autores [DF, Pág. 3]:

(...) both theories, the theory of tensor norms and of normed operators ideals (...) are more easily understood and also richer if one works with both simultaneously.

Para un ideal de operadores de Banach $\mathcal{A}$, relacionamos al ideal de operadores $\mathcal{A}$-compactos con una norma tensorial, lo cuál nos permitirá estudiar su núcleo minimal, sus cápsulas máximal, inyectiva y regular y su ideal dual. Gracias a la estrecha relación que existe entre conjuntos y operadores $\mathcal{A}$-compactos, vamos a poder *transferir* propiedades obtenidas para los operadores a los conjuntos y viceversa. En el caso particular que $\mathcal{A} = \mathcal{N}^p$, el ideal de operadores p-nucleares a derecha (ver definiciones), cubrimos el caso de conjuntos y operadores p-compactos (de Sinha y Karn), que será uno de nuestros ejemplos claves. Nuestro enfoque permitirá obtener y mejorar resultados ya conocidos sobre p-compacidad. En particular, relacionamos al ideal de operadores p-compactos con la norma tensorial $/d_p$, la norma tensorial inyectiva a izquierda de la norma tensorial d_p de de Chevet-Saphar. A partir de esto, damos condiciones para determinar coincidencias entre los ideales de operadores p-compactos y q-compactos ($p \neq q$). Más aún, mostramos que las condiciones obtenidas no se pueden mejorar.

Los conjuntos $\mathcal{A}$-compactos, inducen de forma natural dos tipos de propiedades de aproximación, que desarrollaremos en el Capítulo 2. Una de ellas surge a partir de la topología de convergencia uniforme sobre conjuntos $\mathcal{A}$-compactos. Un espacio de Banach X tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme si todo operador continuo con rango en X puede ser uniformemente aproximado, sobre conjuntos $\mathcal{A}$-compactos, por operadores de rango finito. O, equivalentemente, si todo operador $\mathcal{A}$-compacto con rango en X puede ser aproximado en norma por operadores de rango finito. Cuando $\mathcal{A}$ es un ideal de operadores de Banach, tenemos la propiedad de aproximación que surge de considerar la medida de conjuntos $\mathcal{A}$-compactos. Un espacio de Banach X tiene la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación si todo operador $\mathcal{A}$-compacto con rango en X puede ser aproximado, en la norma del ideal $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$, por operadores de rango finito. Esta propiedad de aproximación, a pesar de estar definido por el ideal de operadores $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$, también queda determinada a partir de los conjuntos $\mathcal{A}$-compactos. Mostramos esta relación a través de una topología adecuada definida en $\mathcal{L}(X;Y)$.Estudiamos ambas propiedades de aproximación en *tandem* y damos distintas descripciones de estas, relacionándolas entre ellas y dando condiciones sobre cuándo alguna propiedad de aproximación se hereda del dual. En el caso en que $\mathcal{A}$ es el ideal de operadores compactos, ambas propiedades de aproximación coinciden y resultan ser la propiedad de aproximación clásica, mientras que si $\mathcal{A} = \mathcal{N}^p$, la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{N}^p}$-uniforme es la p-propiedad de aproximación y la $\mathcal{K}_{\mathcal{N}^p}$-propiedad de aproximación es la κ_p-propiedad de aproximación de Delgado, Piñeiro y Serrano [DPS1] que, en general, difieren. En el caso de la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme, podemos establecer un resultado análogo al obtenido por Schwartz en relación al ϵ-producto de Schwartz (ver definiciones). Esto nos permitirá avanzar en el estudio de polinomios y funciones holomorfas.

Los Capítulos 3 y 4 estan dedicados a los espacios de polinómios y funciones holomorfas entre espacios de Banach. Por eso al Capítulo 3 le antecede una sección donde damos las definiciones y propiedades elementales a estos espacios. En el Capítulo 3 introducimos el espacio de polinomios y funciones holomorfas $\mathcal{A}$-compactas y damos distintas caracterizaciones de estos espacios, asi como también distintas propiedades. Aron, Maestre y Rueda [AMR] comenzaron el estudio de polinomios y funciones holomorfas p-compactas, dejando varios problemas sin resolver. Nosotros damos respuesta a varias de estas preguntas y extendemos los resultados obtenidos en el contexto de la $\mathcal{A}$-compacidad. Si bien la estructura del espacio de polinomios $\mathcal{A}$-compactos es similar a la del espacio de polinomios compactos, estudiados en [AS], las funciones holmorfas $\mathcal{A}$-compactas tienen un comportamiento distinto a las funciones holomorfas compactas. Estas diferencias quedan en evidencia a partir de los ejemplos 3.2.13 y 3.2.15. Para esto, definimos un radio de $\mathcal{A}$-convergencia que nos permite ver que el comportamiento de una función dentro y fuera de ese radio cambia notablemente.

Por último, en el Capítulo 4 aplicamos los resultados previos para estudiar la estructura del espacio de polinomios y funciones holomorfas $\mathcal{A}$-compactas en presencia de un espacio con propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme y $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación. Los resultados que conciernen a la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme se obtienen como consecuencia de los resultados obtenidos del Capítulo 2 en relación con el ϵ-producto de Schwartz y con las descripciones dadas de estos espacios. En cambio, para mostrar como incide la a $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación en el espacio de funciones holomorfas $\mathcal{A}$-compactas, definimos un tipo de holomorfía, que permite dotar al espacio de funciones holomorfas $\mathcal{A}$-compactas una topología y una estructura adecuada.

La distintas propiedad y resultados que utilizamos sobre ideales de operadores pueden encontrarse en los libros de Defant y Floret [DF], de Pietsch [Pie1] y de Diestel, Jarchow y Tonge

[DJT], mientras que para la teoría de productos tensoriales no referimos a [DF], al libro de Diestel, Fourie y Swart [DFS] y de Ryan [Rya2]. Los principales resultados sobre propiedades de aproximación pueden encontrarse en los libros de Lindenstrauss y Tzafriri [LT3] y en [DFS]. También se encuentran en [DF, Rya2] y en los trabajos de Casazza [Cas] y Oja [Oja1]. En cuanto a la teoría de funciones analíticas entre espacios de Banach, nos vamos a referir a los libros de Dineen [Din3], Mujica [Muj1] y Nachbin [Nac2].

Parte de los resultados de este trabajo se encuentran en los trabajos realizados con Silvia Lassalle, [LT1, LT2] y con Daniel Galicer y Silvia Lassalle, [GLT].

Preliminares (Parte I)

La notación que usaremos es usual. Denotaremos con X, Y, Z a los espacios de Banach y, a no ser que se mencione lo contrario, serán considerados sobre el cuerpo real o complejo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ indistintamenete. Con B_X denotaremos la bola unidad abierta de X y con X' y X'' a los espacios dual y bidual de X respectivamente. Cada elemento de $X, X', X'', \ldots$ será notado por $x, x', x'', \ldots$ respectivamente. Al espacio X se lo puede ver como un subespacio de su bidual bajo la inclusión isométrica $j_X \colon X \to X''$. También usaremos Id_X para notar el operador identidad sobre el espacio X. Para un conjunto $M \subset X$ y una topología τ de X, $\overline{M}^{\tau}$ será la clausura de M respecto de τ. Cuando no haya confusión, sólo la notaremos $\overline{M}$. Un conjunto $M \subset X$ se dice que es absolutamente convexo si para cualquier par $x, y \in M$, $\lambda_1 x + \lambda_2 y \in M$ para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ tales que $|\lambda_1| + |\lambda_2| \leq 1$. La cápsula absolutamente convexa de M se denotará con $\mathrm{co}\{M\}$ y viene dada por

$$\mathrm{co}\{M\} = \Big\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \colon x_1, \ldots x_n \in M \text{ y } \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \leq 1, n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Para $1 \leq p < \infty$, una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de X es p-sumable, si

$$\|(x_n)_n\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Al espacio de sucesiones p-sumables de X lo denotamos con $\ell_p(X)$ y resulta un espacio de Banach si se lo considera con la norma $\|\cdot\|_p$. Análogamente, $c_0(X)$ y $\ell_\infty(X)$ serán el espacio de sucesiones de X convergentes a cero y $\|\cdot\|$-acotada respectivamente. Si a estos espacios se los considera con la norma $\|(x_n)_n\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|$ resultan espacios de Banach.

El espacio de sucesiones débil p-sumantes de X esta definido de la siguiente manera:

$$\ell_p^w(X) = \Big\{ (x_n)_n \subset X \colon \sum_{n=1}^{\infty} |x'(x_n)|^p < \infty \text{ para todo } x' \in X' \Big\}.$$

La norma débil p-sumante es

$$\|(x_n)_n\|_{p^w} = \sup_{x' \in B_{X'}} \Big\{ (\sum_{n=1}^{\infty} |x'(x_n)|^p)^{\frac{1}{p}} \Big\}$$

y hace que $(\ell_p^w(X), \|\cdot\|_{p^w})$ sea un espacio de Banach.

Es claro que para cualquiera sea X, si $1 \leq p < \infty$, $\ell_p(X) \subseteq \ell_p^w(X)$. Además, la igualdad se tiene si y sólo si X es de dimensión finita. En particular, denotando con e_n al elemento $e_n = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{\text{n−ésimo lugar}}, 0 \ldots)$, tenemos que la sucesión $(e_n)_n \in \ell_{p'}^w(\ell_p)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Para una sucesión $(x_n)_n \in \ell_p(X)$, la cápsula p-convexa es el conjunto

$$p\text{-co}\{(x_n)_n\} = \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \colon (\alpha_n)_n \in B_{\ell_{p'}} \Big\} \quad \text{con } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \ (\ell_{p'} = c_0 \text{ si } p = 1)$$

Diremos que un conjunto $K \subset X$ es relativamente p-compacto en el sentido de Sinha y Karn [SK1] si existe una sucesión $(x_n)_n \in \ell_p(X)$, tal que

$$K \subset p\text{-co}\{(x_n)_n\}.$$

Al espacio de todos los operadores continuos de X en Y lo denotaremos con $\mathcal{L}(X;Y)$ que es un espacio de Banach si se lo dota con la norma usual de operadores, o norma supremo,

$$\|S\| = \sup\{\|Sx\| \colon x \in B_X\}.$$

Para un operador $T \in \mathcal{L}(X;Y)$, notamos con T' al operador traspuesto de T. El operador $T' \in \mathcal{L}(Y';X')$ viene dado por $(T'y')(x) = y'(Tx)$. También, el bitraspuesto de T, lo notamos con T'' y verifica que $T'' \circ j_X = j_Y \circ T$. Una clase particular de operadores es la de los operadores de rango finito entre X e Y, que los notamos con $\mathcal{F}(X;Y)$. No es difícil de ver que si un operador $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ es de rango finito, entonces existen $x_1, \ldots, x_n' \in X'$ e $y_1, \ldots, y_n \in Y$ tales que $Tx = \sum_{j=1}^n x_j'(x) y_j$.

El producto tensorial entre los espacios X e Y será denotado con $X \otimes Y$. Cada tensor $z \in X \otimes Y$ tiene una representación de la forma $z = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j$ para $x_1, \ldots, x_n \in X$ e $y_1, \ldots, y_n \in Y$. Si X_1, X_2, Y_1, e Y_2 son espacios de Banach y $T_1 \in \mathcal{L}(X_1;Y_1)$ y $T_2 \in \mathcal{L}(X_2;Y_2)$, el operador $T_1 \otimes T_2 \colon X_1 \otimes Y_1 \to X_2 \otimes Y_2$ viene dado por

$$T_1 \otimes T_2(x_1 \otimes x_2) = T_1 x_1 \otimes T_2 x_2$$

y se extiende por linealidad.

Existe una relación biunívoca entre $\mathcal{F}(X;Y)$ y $X' \otimes Y$ dada por

$$\begin{array}{rcl} X' \otimes Y & \longrightarrow & \mathcal{F}(X;Y) \\ \displaystyle\sum_{j=1}^n x_j' \otimes y_j & \longmapsto & T \colon T(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^n x_j'(x) y_j. \end{array}$$

Por este motivo, usaremos la notación tensorial para los operadores de rango finito entre X e Y. Es decir si $T \in \mathcal{F}(X;Y)$, entonces $T = \sum_{j=1}^{n} x'_j \otimes y_j$ con $x'_1, \dots, x'_n \in X'$ e $y_1, \dots, y_n \in Y$.

A lo largo este trabajo iremos dando las definiciones que usaremos en los momentos pertinentes. Sin embargo, como usaremos distintos tipos de ideales de operadores de Banach, normas tensoriales, propiedades de aproximación y espacios localmente convexos, es conveniente dar algunas definiciones básicas de estos, mostrar algunos ejemplos e ir fijando la notación. Las definiciones y resultados sobre ideales de operadores pueden encontrarse en los libros de Defant y Floret [DF], de Pietsch [Pie1] y de Diestel, Jarchow y Tonge [DJT], mientras que para la teoría de productos tensoriales nos referimos a [DF], al libro de Diestel, Fourie y Swart [DFS] y de Ryan [Rya2]. Los resultados sobre espacios localmente convexos se encuentran en los libros de Dunford y Schwartz [DS], Köthe [Köt1, Köt2], Robertson y Robertson [RR] y Schaefer [Sch1]. Los resultados básicos sobre la propiedad de aproximación se pueden encontrarse en los libros de Lindenstrauss y Tzafriri [LT3] y en [DFS] y en el resumen de Casazza [Cas]. También se encuentran en [DF, Rya2].

Ideales de operadores

Si bien varios autores trabajaron con distintos ideales de operadores, como son los operadores compactos, aproximables y débiles compactos entre otros, no fue hasta que en 1968 Albretch Pietsch notó la importancia de esta estructura. Él y su escuela fueron los que comenzaron a estudiar ideales de operadores en forma abstracta, teoría que quedó plasmada en la principal obra del tema, [Pie1] escrita por Pietsch en 1978.

Un ideal de operadores $\mathcal{A}$ es una clase de operadores que satisface las propiedades:

(1) Para todo par de espacios X e Y, $\mathcal{A}(X;Y)$ es un subespacio de $\mathcal{L}(X;Y)$ que contiene a los operadores de rango finito.

(2) Si $T \in \mathcal{A}(X;Y)$, $R \in \mathcal{L}(X_0;Y)$ y $S \in \mathcal{L}(Y;Y_0)$, entonces la composición $S \circ T \circ R \in \mathcal{A}(X_0;Y_0)$; cualesquiera sean X_0, Y_0 espacios de Banach.

Es claro la clase mas chica de ideales de operadores es la de los operadores de rango finito, mientras que la mayor es la de los operadores continuos. Un ideal de operadores $\mathcal{A}$ es un ideal de operadores de Banach si existe una función $\| \cdot \|_{\mathcal{A}} \colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que

(1) Para todo par X e Y, $(\mathcal{A}(X;Y), \| \cdot \|_{\mathcal{A}})$ es un espacio de Banach.

(2) En $\mathcal{L}(\mathbb{K};\mathbb{K})$, $\|id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{A}} = 1$

(3) Si $T \in \mathcal{A}(X;Y)$, $R \in \mathcal{L}(X_0;Y)$ y $S \in \mathcal{L}(Y;Y_0)$, entonces $\|S \circ T \circ R\|_{\mathcal{A}} \leq \|S\|\|T\|_{\mathcal{A}}\|R\|$.

Para simplificar, un ideal de operadores lo llamaremos simplemente *ideal* y a un ideal de operadores de Banach lo llamaremos *ideal de Banach*. Para dos ideales de Banach $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, decimos que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ si para todo par de espacios de Banach X e Y, $\mathcal{A}(X;Y) \subset \mathcal{B}(X;Y)$ y $\|T\|_{\mathcal{B}} \leq \|T\|_{\mathcal{A}}$ para todo operador $T \in \mathcal{A}(X;Y)$. En particular, $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}$ y $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ para todo ideal de Banach $\mathcal{A}$.

Usaremos frecuentemente el ideal de operadores aproximables, $\overline{\mathcal{F}}$, formado por aquellos operadores que son aproximados, en norma supremo, por operadores de rango finito. En otras palabras, $\overline{\mathcal{F}}(X;Y) = \overline{\mathcal{F}(X;Y)}^{\|\cdot\|}$. También el ideal de operadores compactos (resp. débiles compactos) formado por aquellos operadores que aplican conjuntos acotados en relativamente compactos (resp. en relativamente débiles compactos) y los notaremos con $\mathcal{K}$ (resp. $\mathcal{W}$). Los ideales $\overline{\mathcal{F}}$, $\mathcal{K}$ y $\mathcal{W}$ son ideales de Banach si se los considera con la norma de operadores.

Para $1 \leq p < \infty$ y $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$, un operador $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ se dice p-nuclear si existen sucesiones $(x'_n)_n \in \ell_p(X')$ e $(y_n)_n \in \ell^w_{p'}(Y)$ ($(y_n)_n \in c_0(Y)$ si $p = 1$) tales que

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} x'_n \otimes y_n.$$

El conjunto de los operadores p-nucleares, que se denota con $\mathcal{N}_p$, es un ideal de de Banach si se lo dota con la norma

$$\|T\|_{\mathcal{N}_p} = \text{ínf}\{\|(x'_n)_n\|_p \|(y_n)_n\|_{p^w}\},$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las posibles representaciones de T. Análogamente, el ideal de Banach de los operadores p-nucleares a derecha, denotado con $\mathcal{N}^p$, esta formado por los operadores $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ tales que

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} x'_n \otimes y_n,$$

para alguna sucesión $(x'_n)_n \in \ell^w_{p'}(X')$ ($(x'_n)_n \in c_0(X')$ si $p = 1$) e $(y_n)_n \in \ell_p(Y)$. El ideal $\mathcal{N}^p$ es de Banach con la norma p-nuclear a derecha que viene dada por

$$\|T\|_{\mathcal{N}^p} = \text{ínf}\{\|(x'_n)_n\|_{p'^w} \|(y_n)_n\|_p\},$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las posibles representaciones de T. En particular, cuando $p = 1$, $\mathcal{N}^1 = \mathcal{N}_1$, obteniendo el ideal de Banach de operadores nucleares $\mathcal{N}$.

Un operador $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ es p-sumante ($1 \leq p < \infty$) si aplica sucesiones débiles p-sumantes de X en sucesiones p-sumantes de Y. El conjunto de los operadores p-sumantes será notado con

Π_p y es un ideal de Banach con la norma

$$\|T\|_{\Pi_p} = \text{ínf}\{C > 0\colon \|(Tx_n)_n\|_p \leq C\|(x_n)_n\|_{p^w}\}.$$

Un operador $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ es p-integral ($1 \leq p < \infty$) si existen un conjunto compacto K, una medida de Borel finita μ sobre K y operadores $R \in \mathcal{L}(X;C(K))$ y $S \in \mathcal{L}(L_p(\mu);Y'')$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "R"'] & Y \arrow[r, "j_Y"] & Y'' \\ C(K) \arrow[rr, "I"] & & L_p(\mu), \arrow[u, "S"'] \end{tikzcd}$$

donde $C(K)$ y $L_p(\mu)$ son las funciones sobre K continuas y p-integrales respectivamente e $I\colon C(K) \to L_P(\mu)$ es la inclusión. Con I_p denotaremos al ideal de los operadores p-integrales. La norma p-integal viene dada por

$$\|T\|_{I_p} = \text{ínf}\{\|R\|\|I\|\|S\|\colon T = S \circ I \circ R\}$$

donde ei ínfimo se toma sobre todas las factorizaciones posibles de T. El ideal I_p con esta norma es un ideal de Banach.

El ideal de Banach de operadores p-compactos fue introducido por Sinha y Karn en [SK1] y lo denotamos con $\mathcal{K}_p$. Consiste en todos los operadores que aplican conjuntos acotados en conjuntos relativamente p-compactos. Equivalentemente, un operador $T \in \mathcal{K}_p(X;Y)$ si existe una sucesión $(y_n)_n \in \ell_p(Y)$ tal que

$$T(B_X) \subset p\text{-co}\{(y_n)_n\}.$$

Según [DPS2, Proposition 3.15], la norma p-compacta viene dada por

$$\|T\|_{\mathcal{K}_p} = \text{ínf}\{\|(y_n)_n\|_p\colon T(B_X) \subset p\text{-co}\{(y_n)_n\}.$$

Por último, el ideal de Banach de los operadores cuasi p-nucleares, $\mathcal{QN}_p$ fue introducido por Persson y Pietsch en [PP]. Un operador $T \in \mathcal{QN}_p(X;Y)$ si existe una sucesión $(x'_n)_n \in \ell_p(X')$ tal que

$$\|Tx\| \leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x'_n(x)|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \quad \text{para todo } x \in X,$$

y la norma cuasi p-nuclear viene dada por $\|T\|_{\mathcal{QN}_p} = \text{ínf}\{\|(x'_n)_n\|_p\}$, donde el ínfimo se toma sobre todas las sucesiones que cumplen la desigualdad anterior.

Dados $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ ideales de Banach, el ideal de composición $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ esta dado por

$$\mathcal{A} \circ \mathcal{B}(X;Y) = \{T = R \circ S \colon S \in \mathcal{B}(X;Z), R \in \mathcal{A}(Z;Y) \text{ para algún espacio de Banach Z}\}.$$

En general, la función $\|\cdot\|_{\mathcal{A}\circ\mathcal{B}} \colon \mathcal{A} \circ \mathcal{B} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definida por

$$\|T\|_{\mathcal{A}\circ\mathcal{B}} = \inf\{\|R\|_{\mathcal{A}}\|S\|_{\mathcal{B}} \colon T = R \circ S\}$$

no es una norma (ver [DF, 9.10]). Sin embargo, si $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ o $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ coincide con la norma usual de operadores, entonces $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ es un ideal de Banach.

Normas tensoriales

Así como identificamos $X' \otimes Y$ y $\mathcal{F}(X;Y)$, podemos identificar a $X \otimes Y$ con un subespacio de los operadores de rango finito entre X' e Y bajo la relación

$$\begin{array}{ccc} X \otimes Y & \longrightarrow & \mathcal{F}(X';Y) \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j & \longmapsto & T \colon Tx' = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x'(x_j) y_j. \end{array}$$

Por lo tanto, una forma natural de inducir una norma en $X \otimes Y$ es considerando la norma usual de operadores de esta asociación. Esta norma tensorial se denomina norma tensorial inyectiva y se denota con ε. Explícitamente, para un tensor $u = \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j \in X \otimes Y$, la norma tensorial inyectiva viene dada por

$$\varepsilon(u; X, Y) = \sup\Big\{\|\sum_{j=1}^{n} x'(x_j) y_j\| \colon x' \in B_{X'}\Big\}.$$

Por otro lado, para un tensor $u = \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j$ en $X \otimes Y$ (visto como un operador de rango finito) se obtiene, directamente de la desigualdad triangular, la desigualdad

$$\varepsilon(u; X, Y) \leq \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|\|y_j\|.$$

Como este mismo argumento se puede utilizar para cualquier representación de u, se sigue que

$$\varepsilon(u; X, Y) \leq \inf\Big\{\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|\|y_j\|\Big\},$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las representaciones posibles de u. Así, obtenemos la norma tensorial proyectiva, que se denota con π . Es decir, para $u \in X \otimes Y$,

$$\pi(u; X, Y) = \inf\Big\{\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|\|y_j\| \colon u = \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j\Big\}.$$

En general, una norma tensorial α asigna a cada par de espacios de Banach X e Y, una norma en $X \otimes Y$, $\alpha(\cdot; X, Y)$. Si a $X \otimes Y$ lo consideramos con la norma α, lo denotamos con $X \otimes_\alpha Y$ y con $X \widehat{\otimes}_\alpha Y$ a su completación. Todas las normas tensoriales que vamos a considerar en este trabajo cumplen con las condiciones

(1) $\varepsilon \leq \alpha \leq \pi$. Es decir, para todo par de espacios X e Y y para todo tensor $u \in X \otimes Y$,

$$\varepsilon(u; X, Y) \leq \alpha(u; X, Y) \leq \pi(u; X, Y),$$

(2) Si $T_1 \in \mathcal{L}(X_1; Y_1)$ y $T_2 \in \mathcal{L}(X_2; Y_2)$, el operador

$$T_1 \otimes T_2 \colon X_1 \otimes_\alpha Y_1 \to X_2 \otimes_\alpha Y_2$$

es continuo y

$$\|T_1 \otimes T_2\| \leq \|T_1\| \|T_2\|,$$

cualesquiera sean X_1, X_2, Y_1, Y_2 espacios de Banach.

Una norma tensorial que cumple (1) y (2) se la denomina *norma razonabale*. Todas las normas utilizadas a lo largo del trabajo serán finitamente generadas. Esto significa que para todo tensor $u \in X \otimes Y$,

$$\alpha(u; X, Y) = \text{ínf}\{\alpha(u; V, W) \colon u \in V \otimes W \text{ con } V \subset X,\ W \subset Y,\ \dim V, W < \infty\}.$$

Notemos que esta propiedad nos permite definir las normas tensoriales sobre espacios de dimensión finita.

Dada una norma tensorial α, la norma tensorial traspuesta de α, α^t se define de la siguiente manera: Si $u \in X \otimes Y$ está dado por $u = \sum_{j=1}^n x_k \otimes y_k$

$$\alpha^t(u; X, Y) = \alpha(u^t; Y, X) = \alpha(\sum_{j=1}^n y_k \otimes x_k; Y, X).$$

Además de las normas tensoriales proyectiva e inyectia, utilizaremos las normas tensoriales de Chevet-Saphar que se definen de la siguiente manera: Para $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ($p' = 1$ si $p = \infty$) y para un tensor $u \in X \otimes Y$,

$$d_p(u; X, Y) = \text{ínf}\{\|(x_n)_n\|_{p'^w} \|(y_n)_n\|_p\} \quad (\text{si } p = 1, \|\cdot\|_{1'^w} = \|\cdot\|_\infty)$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las representaciones de u. Análogamente, intercambiando los roles de las normas tenemos

$$g_p(u; X, Y) = \text{ínf}\{\|(x_n)_n\|_p \|(y_n)_n\|_{p'^w}\} \quad (\text{si } p = 1, \|\cdot\|_{1'^w} = \|\cdot\|_\infty)$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las representaciones de u.

De las definiciones, se tienen las siguientes propiedades

(a) Para todo $1 \leq p \leq \infty$, $g_p = d_p^t$ y $d_p = g_p^t$.

(b) $d_1 = g_1 = \pi$.

(c) Para $1 \leq p < q \leq \infty$, $\pi \leq g_p \leq g_q < \varepsilon$ y $\pi \leq d_p \leq d_q < \varepsilon$.

Existe una descripción de los elementos de los productos tensoriales completos $X\widehat{\otimes}_{d_p}Y$ y $X\widehat{\otimes}_{g_p}Y$. La demostración de esta caracterización se puede encontrar en [DF, Proposition 12.6] o [Rya2, Lemma 6.9 y Proposition 6.10].

Proposición. *Sean X e Y espacios de Banach y $1 \leq p < \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ entonces*

(a) *Para $(x_n)_n \in \ell_p(X)$ e $(y_n)_n \in \ell_{p'}^w(Y)$ ($c_0(Y)$ si $p = 1$), el elemento*

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n \in X\widehat{\otimes}_{g_p}Y.$$

(b) *Si $u \in X\widehat{\otimes}_{g_p}Y$, entonces dado $\varepsilon > 0$ existen sucesiones $(x_n)_n \in \ell_p(X)$ e $(y_n)_n \in \ell_{p'}^w(Y)$ ($c_0(Y)$ si $p = 1$) tales que*

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n \in X\widehat{\otimes}_{g_p}Y \quad \text{y} \quad g_p(u; X, Y) \leq \|(x_n)_n\|_p \|(y_n)_n\|_{p'^w} \leq g_p(u; X, Y) + \varepsilon.$$

Proposición. *Sean X e Y espacios de Banach y $1 \leq p < \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ entonces*

(a) *Para $(y_n)_n \in \ell_p(Y)$ y $(x_n)_n \in \ell_{p'}^w(X)$ ($c_0(X)$ si $p = 1$), el elemento*

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n \in X\widehat{\otimes}_{d_p}Y.$$

(b) *Si $u \in X\widehat{\otimes}_{d_p}Y$, entonces dado $\varepsilon > 0$ existen sucesiones $(y_n)_n \in \ell_p(Y)$ y $(x_n)_n \in \ell_{p'}^w(X)$ ($c_0(X)$ si $p = 1$) tales que*

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n \in X\widehat{\otimes}_{d_p}Y \quad \text{y} \quad d_p(u; X, Y) \leq \|(x_n)_n\|_{p'^w} \|(y_n)_n\|_p \leq d_p(u; X, Y) + \varepsilon.$$

Espacios localmente convexos

Los espacios vectoriales topológicos localmente convexos o espacios localmente convexos son espacios vectoriales dotados de una topología que respeta la estructura lineal de los espacios, generalizando la noción de espacios normados. En este trabajo, aparecen al estudiar propiedades de aproximación donde la convergencia de operadores es puntual, sobre conjuntos compactos, sobre conjuntos p-compactos, etc. También es la estructura topológica natural que tienen los espacios de funciones holomorfas (que en general no son espacios de Banach).

La topología de un espacio locamente convexo puede definirse a través de una familia de seminormas como sigue. Dado un espacio vectorial V y una familia de seminormas $\mathfrak{Q}$ existe una topología τ tal que (V, τ) es un espacio localmente convexo y todas las seminormas de $\mathfrak{Q}$ son continuas. Una base de entornos de la topología más gruesa que cumple esto viene dada por los conjuntos de la forma

$$\{x \in V\colon \sup_{1\leq i\leq n} q_i(x) \leq \varepsilon\} \quad \text{ó} \quad \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in V : q_i(x) \leq \varepsilon\},$$

donde $q_1, \ldots, q_n \in \mathfrak{Q}$ y $\varepsilon > 0$. Vamos a decir que esta topología de V esta determinada por la familia $\mathfrak{Q}$. La topología determinada por la familia de seminormas $\mathfrak{Q}$ es Hausdorff si para todo $x \in V$ existe una seminorma $q \in \mathfrak{Q}$ tal que $q(x) > 0$. Una red $(x_\alpha)_\alpha$ es un espacio localmente convexo cuya topología esta determinada por la familia de seminormas $\mathfrak{Q}$ converge a un elemento x si y sólo si $q(x_\alpha)$ converge a $q(x)$ para toda seminorma $q \in \mathfrak{Q}$.

Aunque en general los espacios localmente convexos no son necesariamente normables, la existencia de una base localmente convexa para el vector cero es lo suficientemente fuerte para sustentar el teorema de Hahn-Banach, produciendo así una teoría lo suficientemente rica de funcionales lineales continuas.

En particular, un espacio de Banach X considerado con la topología débil es un espacio localmente convexo determinado por la familia de seminormas

$$q_{x'}(x) = |x'(x)| \qquad \text{donde } x' \in X'.$$

Dados dos espacios localmente convexos E y F cuyas topologías estan determinadas por las familias de seminormas $\mathfrak{Q}_E$ y $\mathfrak{Q}_F$, un operador $T \in \mathcal{L}(E; F)$ se dice continuo si para cada seminorma $q \in \mathfrak{Q}_E$ existe una seminorma $p \in \mathfrak{Q}_F$ tal que

$$p(Tx) \leq q(x),$$

para todo $x \in E$. Análogamente, un operador $T \in \mathcal{L}(E;F)$ es continuo si para cada entorno $V = \{y \in F \colon p(y) \leq 1\}$ de F, existe un entorno $U = \{x \in E \colon q(x) \leq 1\}$ de E, tal que

$$T(U) \subset V.$$

Dados dos espacios localmente convexos E y F, podemos dotar al espacio de operadores lineales y continuos entre E y F, $\mathcal{L}(E;F)$ de una topología a partir de una familia de conjuntos de E. En efecto, dada una familia de conjuntos $\mathfrak{U}$ de E, se define la topología de convergencia uniforme sobre los conjuntos de $\mathfrak{U}$ como la topología generada por las seminormas

$$p(T) = \sup_{x \in U} q(Tx)$$

donde $U \in \mathfrak{U}$ y q es una seminorma continua de F. En particular, cuando $F = \mathbb{K}$, variando la elección de $\mathfrak{U}$ obtenemos distintas topologías sobre el espacio E' generadas por las seminormas

$$p(x') = \sup_{x \in U} |x'(x)|.$$

Por ejemplo, si $\mathfrak{U}$ es la familia de conjuntos compacto de E, obtenemos la topología de convergencia de uniforme sobre conjuntos compactos, que denotaremos τ_c y, en el caso que $F = \mathbb{K}$, simplemente notamos E'_c. Por otro lado, si $\mathfrak{U}$ es la familia de conjuntos finitos de E, en $\mathcal{L}(E;F)$ obtenemos la topología de convergencia puntual. En el caso que tomamos $E = X$ un espacio de Banach y $F = \mathbb{K}$, obtenemos en X' la topología débil* que esta determinada por las familia de seminormas

$$q_x(x') = |x'(x)| \qquad \text{donde } x \in X.$$

En particular, si consideramos la una familia de conjuntos $\mathfrak{U}$ de E, en E', la topología de convergencia uniforme sobre los conjuntos $\mathfrak{U}$ tiene una base de entornos de la forma

$$U^\circ = \{x' \in E' \colon |x'(x)| \leq 1 \text{ para todo } x \in U\} \quad \text{con U} \in \mathfrak{U}.$$

Dado U en E, llamamos polar de U al conjunto U° en E'. A toda topología de un espacio localmente convexo E se la puede ver como una topolgía de convergencia uniforme [RR, Pág. 48]. Dado un entorno U de E, absolutamente convexo de E, entonces $U^{\circ\circ} = U$ [RR, Pág 36.] y, por lo tanto, la topología en E es la topología de convergencia uniforme sobre los conjuntos U°.

Propiedad de aproximación

En el estudio de funciones, representarlas a las funciones como límites de una sucesión de funciones con propiedades conocidas. Como, en el caso de operadores lineales entre espacios de

Banach, la clase *más sencilla* son los operadores de rango finito, es conveniente saber cuando un operador es límite de operadores de rango finito. En particular, como el límite en norma de una sucesión de operadores de rango finito es un operador compacto, es natural preguntarse cuando los operadores compactos son aproximables. En otras palabras, ¿bajo que condiciones vale la igualdad

$$\overline{\mathcal{F}}(X;Y) = \mathcal{K}(X;Y)?$$

El primer estudio sistemático de este problema, conocido como el problema de aproximación, fue realizado por Grothendieck en su célebre *Resumé* [Gro2]. En este trabajo, se establece las siguientes equivalencias (ver [Gro2, Proposition 35] o [LT3, Theorem 1.e.4]).

Proposición (A). *Sea X un espacio de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) *Para todo espacio de Banach Y, $\mathcal{F}(Y;X)$ es $\|\cdot\|$-denso en $\mathcal{K}(Y;X)$.*

(ii) $Id_X \in \overline{\mathcal{F}(X;X)}^{\tau_c}$.

(iii) $\mathcal{F}(X;X)$ *es τ_c-denso en $\mathcal{L}(X;X)$.*

(iv) *Para todo espacio de Banach Y, $\mathcal{F}(X;Y)$ es τ_c-denso en $\mathcal{L}(X;Y)$.*

(v) *Para todo espacio de Banach Y, $\mathcal{F}(Y;X)$ es τ_c-denso en $\mathcal{L}(Y;X)$.*

(vi) *Para todo par de sucesiones $(x_n)_n \in X$ y $(x'_n)_n \in X'$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \|x'_n\|\|x_n\| < \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} x'_n(x)x_n = 0$ para todo $x \in X$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x'_n(x_n) = 0$.*

Un espacio de Banach X que cumpla con alguna de estas propiedades se dice que tiene la *propiedad de aproximación*. En particular, la equivalencia (vi) es conocida como *condición de traza* sobre los operadores nucleares. De hecho, (vi) implica que, si X tiene propiedad de aproximación, entonces sobre los operadores nucleares de X en X esta bien definido el operador de traza ver [Pie2, 5.7.4].

A contiuación citamos algunos de los ejemplos clasicos espacios con propiedad de aproximación, ver por ejemplo [Rya2, Cáp. 4].

Ejemplo. *Los siguientes espacios tienen propiedad de aproximación.*

(a) *c_0 y ℓ_p, para $1 \leq p \leq \infty$.*

(b) *Para $1 \leq p \leq \infty$, $L_p(\mu)$ con μ una medida de Borel regular.*

(c) *$C(K)$, el espacio de funciones continuas de un compacto K en el cuerpo.*

(d) *Los espacios duales $C(K)'$ y $L_\infty(\mu)'$.*

En vista de las equivalencias (i), (iv) y (v) de la Proposición (A), es razonable preguntarse en que situación los roles de X e Y pueden intercambiarse en (i). La respuesta viene dada en el siguiente resultado de Grothendieck [Gro2, Proposition 36].

Proposición (B). *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

(i) *X' tiene la propiedad de aproximación.*

(ii) *Para todo espacio de Banach Y, $\mathcal{F}(X;Y)$ es $\|\cdot\|$-denso en $\mathcal{K}(X;Y)$.*

La relación entre las Proposiciones (A) y (B) queda clarificada con el siguiente resultado [Gro2, Proposition 36].

Proposición. *Sea X un espacio de Banach. Si X' tiene la propiedad de aproximación, entonces X la tiene.*

Sin embargo, existen espacios de Banach con la propiedad de aproximación tal que su dual no la tiene, ver por ejemplo [DF, Pág. 65] o [Rya2, Pág 74] y, por lo tanto, los roles de X e Y en el ítem (i) de la Proposición (A) no son intercambiables.

La propiedad de aproximación también permite afrontar el estudio de la teoría de operadores entre espacios de Banach utilizando la teoría de productos tensoriales. Como dijimos existe una relación biunívoca entre $\mathcal{F}(X;Y)$ y $X' \otimes Y$ dada por

$$\begin{array}{rccl} i\colon & X' \otimes Y & \longrightarrow & \mathcal{F}(X;Y) \\ & \sum_{j=1}^n x_j' \otimes y_j & \longmapsto & T\colon Tx = \sum_{j=1}^n x_j'(x) y_j. \end{array}$$

Luego, por un lado, directamente de la definición de la norma tensorial inyectiva se tiene, para todo par de espacios de Banach X e Y, que

$$i\colon X' \widehat{\otimes}_\varepsilon Y \to \overline{\mathcal{F}}(X;Y),$$

donde el operador ι es extendido por densidad, es un isomorfismo isométrico. Por lo tanto, de la Propiedad (A) y (B) se deduce el siguiente resultado, ver también [DF, Proposition 5.3].

Proposición. *Si X' o Y tienen propiedad de aproximación, entonces*

$$X' \widehat{\otimes}_\varepsilon Y \quad \text{es isométricamene isomorfo a} \quad \mathcal{K}(X;Y).$$

Por otro lado, gracias a las descripciones de la norma tensorial proyectiva y los operadores nucleares, el mismo operador ι induce la aplicación

$$\begin{array}{rccl} i\colon & X'\widehat{\otimes}_\pi Y & \longrightarrow & \mathcal{N}(X;Y) \\ & \sum_{n=1}^\infty x'_n \otimes y_n & \longmapsto & T\colon Tx = \sum_{n=1}^\infty x'_n(x) y_n. \end{array}$$

Esta aplicación, en general, resulta ser una suryección [Rya2, Pág. 40], sin embargo de la condición de traza se tiene el siguiente resultado, [DF, Theorem 5.6], [Rya2, Corollary 4.8].

Proposición. *Si X' o Y tienen la propiedad de aproximación, entonces*

$$\ker\{i\colon X'\widehat{\otimes}_\pi Y \to \mathcal{N}(X;Y)\} = 0.$$

En particular,

$$X'\widehat{\otimes}_\pi Y \quad \text{es isométricamente isomorfo a} \quad \mathcal{N}(X;Y).$$

Para finalizar, vamos a considerar una propiedad más fuerte que la propiedad de aproximación, la cual se obtiene de imponer una cota a la norma de los operadores de rango finito que aproximen a la identidad. Para $\lambda \geq 1$, un espacio de Banach X tiene la λ-propiedad de aproximación acotada si

$$\{T \in \mathcal{F}(X;X)\colon \|T\| \leq \lambda\} \quad \text{es } \tau_c - \text{denso en} \quad \mathcal{L}(X;X).$$

En general, decimos que un espacio tiene la propiedad de aproximación acotada si tiene la λ-propiedad de aproximación acotada para algún $\lambda \geq 1$ y la 1-propiedad de aproximación acotada suele llamarse la propiedad de aproximación métrica. Es claro que la propiedad de aproximación acotada implica la propiedad de aproximación. La recíproca no es cierta y el contraejemplo se debe a Figiel y Johnson [FJ].

Para más información sobre la propiedad de aproximación referimos al lector los libros de Defant y Floret [DF], Diestel, Fourie y Swart [DFS], Lindenstrauss y Tzafriri [LT3] y Ryan [Rya2]. También pueden encontrarse un vasto material en el resumen de Casazza [Cas].

Capítulo 1

Conjuntos y operadores $\mathcal{A}$-compactos

1.1. Conjuntos $\mathcal{A}$-compactos y su tamaño

Una de las herramientas principales utilizadas para nuestro estudio de propiedades de aproximación es la caracterización de un conjunto compactos en términos de una sucesión convergente a cero. Este resultado se debe a Grothendieck y puede encontrarse, por ejemplo, en [LT3, Proposition 1.e.2] o en [DF, Corollary 3.4 (2)].

Proposición 1.1.1 (Grothendieck)**.** *Sea X un espacio de Banach. Un conjunto $K \subset X$ es relativamente compacto si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_n \in c_0(X)$ tal que $K \subset \mathrm{co}\{(x_n)_n\}$. Más aún, se tiene la siguiente igualdad,*

$$\sup_{x \in K} \|x\| = \text{ínf}\{\|(x_n)_n\|_\infty \colon K \subset \mathrm{co}\{(x_n)_n\}\}.$$

De la proposición anterior se desprende el siguiente resultado que caracteriza a los conjuntos compactos en función de operadores aproximables. Si bien es un resultado básico, no lo hemos encontrado en la literatura usual y tiene la estructura de los resultados que aparecen en adelante.

Proposición 1.1.2. *Sea X un espacio de Banach. Un conjunto $K \subset X$ es relativamente compacto si y sólo si existen un operador $T \in \overline{\mathcal{F}}(\ell_1; X)$ y un conjunto compacto $L \subset B_{\ell_1}$ tales que $K \subset T(L)$. Más aún, se tiene la igualdad,*

$$\sup_{x \in K} \|x\| = \text{ínf}\{\|T\| \colon T \in \overline{\mathcal{F}}(\ell_1; X),\ T(L) \text{ con } L \subset B_{\ell_1} \text{ compacto}\}.$$

Demostración: Es claro que si $K \subset T(L)$ con $T \in \overline{\mathcal{F}}(\ell_1; X)$ y $L \subset B_{\ell_1}$ compacto, entonces K es relativamente compacto y $\sup_{x\in K} \|x\| \leq \sup_{z \in B_{\ell_1}} \|Tz\| = \|T\|$. Para la otra implicación, fijemos $\varepsilon > 0$ y un conjunto relativamente compacto $K \subset X$. Por la proposición anterior, existe una sucesión $(x_n)_n \in c_0(X)$ tal que $K \subset \mathrm{co}\{(x_n)_n\}$ y $\|(x_n)_n\|_\infty \leq \sup_{x\in K} \|x\| + \varepsilon$. Tomemos una sucesión $(\beta_n)_n \in B_{c_0}$ tal que, la sucesión dada por $\tilde{x}_n = \frac{x_n}{\beta_n}$, $n \in \mathbb{N}$, cumple que $(\tilde{x}_n)_n \in c_0(X)$ y $\|(\tilde{x}_n)_n\|_\infty \leq \|(x_n)_n\|_\infty + \varepsilon$. Sea $T\colon \ell_1 \to X$ el operador tal que $Te_n = \tilde{x}_n$, extendido por linealidad y densidad a ℓ_1. Debido a que $T(B_{\ell_1}) = \mathrm{co}\{(\tilde{x}_n)_n\}$, T es un operador compacto que, como $\ell_1' = \ell_\infty$ tiene propiedad de aproximación (ver pág. 11), resulta que T es aproximable (ver pág. 12, Proposición (B)). Además, notando con L al conjunto $L = \mathrm{co}\{(\beta_n e_n)_n\} \subset B_{\ell_1}$, por la proposición anterior, tenemos que L es relativamente compacto, obteniendo que $K \subset T(L)$ y que

$$\|T\| = \|(\tilde{y}_n)_n\|_\infty \leq \|(y_n)_n\|_\infty + \varepsilon \leq \sup_{x\in K} \|x\| + 2\varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, obtenemos el resultado. □

En 1984, Carl y Stephani, basándose en la caracterización de Grothendieck de los conjuntos relativamente compactos definen, para un ideal $\mathcal{A}$, los conjuntos relativamente $\mathcal{A}$-compactos y las sucesiones $\mathcal{A}$-nulas de la siguiente manera.

Definición 1.1.3. *Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal. Un conjunto $K \subset X$ es relativamente $\mathcal{A}$-compacto si existen un espacio de Banach Y, un operador $T \in \mathcal{A}(Y;X)$ y un conjunto $L \subset Y$ compacto tales que $K \subset T(L)$. Un conjunto es $\mathcal{A}$-compacto si es relativamente $\mathcal{A}$-compacto y cerrado.*

Definición 1.1.4. *Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal. Una sucesión $(x_n)_n$ es $\mathcal{A}$-nula si existen un espacio de Banach Y y un operador $T \in \mathcal{A}(Y;X)$ con la siguiente propiedad: Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in \varepsilon T(B_Y)$ para todo $n \geq n_\varepsilon$.*

El conjunto de las sucesiones $\mathcal{A}$-nulas de un espacio de Banach X es un espacio vectorial que denotaremos con $c_{0,\mathcal{A}}(X)$. Existe una caracterización útil de las sucesiones $\mathcal{A}$-nulas que se puede encontrar en [CS, Lemma 1.2].

Lema 1.1.5. *Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal. Una sucesión $(x_n)_n \subset X$ es $\mathcal{A}$-nula si existen un espacio de Banach Y, un operador $T \in \mathcal{A}(Y;X)$ y una sucesión $(y_n)_n \in c_0(Y)$ tales que $x_n = Ty_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

La siguiente caracterización sobre $\mathcal{A}$-compacidad es un compilado de resultados obtenidos en [CS, Section 1].

Teorema 1.1.6. *Sean X un espacio de Banach, $K \subset X$ un conjunto y $\mathcal{A}$ un ideal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) *K es relativamente $\mathcal{A}$-compacto.*

(ii) *Existen un espacio de Banach Y y un operador $T \in \mathcal{A}(Y;X)$ tales que para todo $\varepsilon > 0$ existen finitos $z_i^\varepsilon \in X$, $1 \leq i \leq k_\varepsilon$ que realizan un cubrimiento de K:*

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{k_\varepsilon} \{z_i^{(\varepsilon)} + \varepsilon T(B_Y)\}.$$

(iii) *Existe una sucesión $\mathcal{A}$-nula $(x_n)_n \subset X$ tal que $K \subset \operatorname{co}\{(x_n)_n\}$.*

Ejemplos 1.1.7. Los conjuntos compactos coinciden con los conjuntos $\overline{\mathcal{F}}$-compactos y, para $1 \leq p < \infty$, los conjuntos p-compactos coinciden con los conjuntos $\mathcal{N}^p$-compactos.

Demostración: Que los conjuntos compactos coinciden con los conjuntos $\overline{\mathcal{F}}$-compactos se debe a la Proposición 1.1.2. Para $1 \leq p < \infty$, de la definición de operador p-nuclear a derecha se deduce que todo conjunto $\mathcal{N}^p$-compacto es p-compacto. Ahora, sea K un conjunto p-compacto de X y sea $(x_n)_n \in \ell_p(X)$ una sucesión tal que $K \subset \{\sum_{n=1}^\infty \alpha_n x_n \colon (\alpha_n)_n \in B_{\ell_{p'}}\}$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ($\ell_{p'} = c_0$ si $p = 1$). Sea $(\beta_n)_n \in B_{c_0}$ una sucesión tal que, si $\tilde{x}_n = \frac{x_n}{\beta_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $(\tilde{x}_n)_n \in \ell_p(X)$. Consideremos $(e_n')_n$ la sucesión de funcionales sobre $\ell_{p'}$ que manda una sucesión a su n-ésima coordenada. Definamos el operador $T \colon \ell_{p'} \to X$ dado por $T = \sum_{n=1}^\infty e_n' \otimes \tilde{x}_n$. Denotando con M al conjunto de $\ell_{p'}$, $M = \{(\alpha_n\beta_n)_n \colon (\alpha_n)_n \in B_{\ell_{p'}}\}$, tenemos que $K \subset T(M)$. Como el operador T es p-nuclear a derecha y $M \subset B_{\ell_{p'}}$ es relativamente compacto, se tiene que todo conjunto p-compacto es $\mathcal{N}^p$-compacto. $\square$

Toda norma α definida sobre el ideal $\mathcal{A}$ nos permite definir una forma de medir el tamaño de los conjuntos $\mathcal{A}$-compactos.

Definición 1.1.8. *Sean X un espacio de Banach, $\mathcal{A}$ un ideal, α una norma sobre $\mathcal{A}$ y $K \subset X$ un conjunto relativamente $\mathcal{A}$-compacto. El tamaño α-$\mathcal{A}$-compacto de K en X es*

$$m_{\mathcal{A},\alpha}(K;X) = \inf\{\alpha(T) \colon K \subset T(M),\ T \in \mathcal{A}(Y;X) \text{ y } M \subset B_Y \text{ compacto}\},$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los espacios de Banach Y, todos los operadores $T \in \mathcal{A}(Y;X)$ y todos los conjuntos compactos $M \subset B_Y$ tales que vale la inclusión $K \subset T(M)$.

Si $K \subset X$ no es relativamente $\mathcal{A}$-compacto, $m_{\mathcal{A},\alpha}(K;E) = \infty$.

Para simplificar la notación, si $(\mathcal{A}, \|.\|_{\mathcal{A}})$ es un ideal de Banach, usaremos la notación $m_{\mathcal{A}}$ en lugar de $m_{\mathcal{A},\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}$ y la llamaremos medida $\mathcal{A}$-compacta. La siguiente proposición muestra las propiedades más relevantes de los conjuntos $\mathcal{A}$-compactos y de su medida.

Proposición 1.1.9. *Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal de Banach.*

(a) *Si $K_1, K_2 \subset X$ son conjuntos relativamente $\mathcal{A}$-compactos y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces $K_1 + \lambda K_2$ es relativamente $\mathcal{A}$-compacto y $m_{\mathcal{A}}(K_1 + \lambda K_2; X) \leq m_{\mathcal{A}}(K_1; X) + |\lambda| m_{\mathcal{A}}(K_2; X)$.*

(b) *Si $K \subset X$ es relativamente $\mathcal{A}$-compacto y L es un subconjunto de K, entonces L es relativamente $\mathcal{A}$-compacto y $m_{\mathcal{A}}(L; X) \leq m_{\mathcal{A}}(K; X)$.*

(c) *El conjunto $K \subset X$ es relativamente $\mathcal{A}$-compacto si y sólo si, $\overline{\mathrm{co}\{K\}}$ es $\mathcal{A}$-compacto. Además, se cumple que $m_{\mathcal{A}}(K; X) = m_{\mathcal{A}}(\overline{\mathrm{co}\{K\}}; X)$.*

(d) *Sean $x \in X$ y $K = \{\lambda x \colon |\lambda| \leq 1\}$. Entonces $m_{\mathcal{A}}(K; X) = \|x\|$.*

(e) *Para todo conjunto $K \subset X$ relativamente $\mathcal{A}$-compacto se tiene que $\sup_{x \in K} \|x\| \leq m_{\mathcal{A}}(K; X)$.*

(f) *Sea $\mathcal{B}$ es un ideal de Banach y $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Si $K \subset X$ es relativamente $\mathcal{B}$-compacto, entonces es relativamente $\mathcal{A}$-compacto y $m_{\mathcal{A}}(K; X) \leq m_{\mathcal{B}}(K; X)$.*

(g) *Si $K \subset X$ es relativamente $\mathcal{A}$-compacto y $T \in \mathcal{L}(X; Y)$, entonces $T(K) \subset Y$ es relativamente $\mathcal{A}$-compacto y $m_{\mathcal{A}}(T(K); Y) \leq \|T\| m_{\mathcal{A}}(K; X)$.*

Demostración: Sólo mostraremos el ítem (a), los demás se deducen directamente de las definiciones. Sean $\varepsilon > 0$, $\lambda \in \mathbb{K}$ y K_1 y K_2 conjuntos relativamente $\mathcal{A}$-compactos de X. Existen Y_1 e Y_2 espacios de Banach, conjuntos compactos $L_1 \subset B_{Y_1}$, $L_2 \subset B_{Y_2}$ y operadores $T_1 \in \mathcal{A}(Y_1; X)$ y $T_2 \in \mathcal{A}(Y_2; X)$ tales que $K_i \subset T_i(L_i)$ y $\|T_i\|_{\mathcal{A}} \leq m_{\mathcal{A}}(K_i; X) + \varepsilon$, para $i = 1, 2$. Consideremos el espacio $Y = Y_1 \times Y_2$ que, con la norma $\|(y_1, y_2)\| = \max\{\|y_1\|, \|y_2\|\}$ resulta un espacio de Banach. Si $P_i \colon Y \to Y_i$ es la proyección canónica ($i = 1, 2$), definimos el operador $T = T_1 \circ P_1 + \lambda T_2 \circ P_2$. Luego $T \in \mathcal{A}(Y; X)$ y, tomando al conjunto compacto $L = L_1 \times L_2 \subset B_Y$, tenemos que $K_1 + \lambda K_2 \subset T(L)$. Luego $K_1 + \lambda K_2$ es relativamente $\mathcal{A}$-compacto y

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{A}}(K_1 + \lambda K_2; X) &\leq \|T\|_{\mathcal{A}} \leq \|T_1\|_{\mathcal{A}} + |\lambda| \|T_2\|_{\mathcal{A}} \\ &\leq m_{\mathcal{A}}(K_1; X) + |\lambda| m_{\mathcal{A}}(K_2; X) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, la demostración concluye. □

El siguiente corolario es una versión $\mathcal{A}$-*compacta* de la caracterización de Grothendieck de los conjuntos compactos en términos de las sucesiones convergentes a cero. Nos permitirá medir a los conjuntos relativamente $\mathcal{A}$-compactos sólo utilizando las sucesiones $\mathcal{A}$-nulas. Para simplificar, en adelante notaremos con $m_{\mathcal{A}}((x_n)_n; X)$ la medida $\mathcal{A}$-compacta del conjunto formado la sucesión $\mathcal{A}$-nula $(x_n)_n$ en lugar de $m_{\mathcal{A}}(\{(x_n)_n\}; X)$. En particular, por el ítem (c) de la Proposición 1.1.9 tenemos la igualdad

$$m_{\mathcal{A}}((x_n)_n; X) = m_{\mathcal{A}}(\mathrm{co}\{(x_n)_n\}; X).$$

Corolario 1.1.10. *Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal de Banach. Un conjunto $K \subset X$ es relativamente $\mathcal{A}$-compacto si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_n \subset X$ $\mathcal{A}$-nula tal que $K \subset \mathrm{co}\{(x_n)_n\}$. Más aún, se tiene la igualdad,*

$$m_{\mathcal{A}}(K;X) = \text{ínf}\left\{ m_{\mathcal{A}}((x_n)_n;X) \colon K \subset \mathrm{co}\{(x_n)_n\} \right\}.$$

Demostración: Sea $K \subset X$ un conjunto relativamente $\mathcal{A}$-compacto. Por el Teorema 1.1.6 existe una sucesión $(x_n)_n \in c_{0,\mathcal{A}}(X)$ tal que $K \subset \mathrm{co}\{(x_n)_n\}$ y, por el ítem (b) de la Proposición 1.1.9, tenemos que $m_{\mathcal{A}}(K;X) \leq m_{\mathcal{A}}((x_n)_n;X)$. Para obtener la igualdad, fijemos $\varepsilon > 0$ y tomemos un espacio de Banach Y, un conjunto compacto $L \subset B_Y$ y un operador $T \in \mathcal{A}(Y;X)$ tal que $K \subset T(L)$ y $\|T\|_{\mathcal{A}} \leq (1+\varepsilon) m_{\mathcal{A}}(K;X)$. Como L es compacto y $\sup_{y \in L} \|y\| \leq 1$, por la Proposición 1.1.1 existe una sucesión $(y_n)_n \in c_0(Y)$ tal que $L \subset \mathrm{co}\{(y_n)_n\}$ y $\|(y_n)_n\|_\infty \leq 1+\varepsilon$. Luego, $(Ty_n)_n \in c_{0,\mathcal{A}}(X)$, $K \subset \mathrm{co}\{(Ty_n)_n\}$ y, como $M = \frac{1}{1+\varepsilon}\mathrm{co}\{(y_n)_n\} \subset B_X$ es un conjunto compacto, por la Proposición 1.1.9, tenemos que

$$m_{\mathcal{A}}((Ty_n)_n;X) = (1+\varepsilon) m_{\mathcal{A}}(T(M);X) \leq (1+\varepsilon)\|T\|_{\mathcal{A}} \leq (1+\varepsilon)^2 m_{\mathcal{A}}(K;X).$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se tiene la igualdad deseada. $\square$

Observación 1.1.11. Sea X un espacio de Banach.

(a) Si $K \subset X$ es un conjunto relativamente compacto, por la Proposición 1.1.2 tenemos que

$$\sup\{\|x\| \colon x \in K\} = m_{\overline{\mathcal{F}}}(K;X) = \text{ínf}\left\{ \|(x_n)_n\|_\infty \colon K \subset \mathrm{co}\{(x_n)_n\} \right\}.$$

(b) Para $1 \leq p < \infty$, si $K \subset X$ es un conjunto p-compacto, el argumento hecho en el Ejemplo 1.1.7 permite deducir que

$$m_{\mathcal{N}^p}(K;X) = \text{ínf}\left\{ \|(x_n)\|_p \colon K \subset p\text{-co}\{(x_n)_n\} \right\}.$$

El próximo resultado muestra que las definiciones de conjuntos relativamente $\mathcal{A}$-compactos y de la medida $m_{\mathcal{A}}$ pueden ser reformuladas considerando sólo operadores en $\mathcal{A}(\ell_1;X)$ como, vimos que vale para los conjuntos relativamente compactos en la Proposición 1.1.2.

Proposición 1.1.12. *Sean X un espacio de Banach, $K \subset X$ un conjunto y $\mathcal{A}$ un ideal de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) *K es relativamente $\mathcal{A}$-compacto.*

(ii) *Existen un espacio de Banach Y, operadores $T \in \mathcal{A}(Y;X)$ y $S \in \overline{\mathcal{F}}(\ell_1;Y)$ y un conjunto relativamente compacto $M \subset B_{\ell_1}$ tales que $K \subset T \circ S(M)$. Más aún,*

$$m_{\mathcal{A}}(K;X) = \text{ínf}\{\|T\|_{\mathcal{A}}\|S\|\}$$

donde el ínfimo es tomado sobre todos los espacio de Banach Y, operadores T y S y conjuntos M como antes.

(iii) *Existen un operador $T \in \mathcal{A}(\ell_1;X)$ y un conjunto relativamente compacto $M \subset B_{\ell_1}$ tales que $K \subset T(M)$. Además,*

$$m_{\mathcal{A}}(K;X) = \text{ínf}\{\|T\|_{\mathcal{A}}\},$$

donde el ínfimo es tomado sobre todos los operadores $T \in \mathcal{A}(\ell_1;X)$ y todos los conjuntos $M \subset B_{\ell_1}$ como antes.

Demostración: Supongamos que $K \subset X$ es relativamente $\mathcal{A}$-compacto. Dado $\varepsilon > 0$, existen un espacio de Banach Y, un conjunto compacto $L \subset B_Y$ y un operador $T \in \mathcal{A}(Y;X)$ tales que $K \subset T(L)$ y $\|T\|_{\mathcal{A}} \leq (1+\varepsilon)m_{\mathcal{A}}(K;X)$. Como $L \subset B_X$ es compacto, por la Proposición 1.1.2 existen un operador aproximable $S\colon \ell_1 \to X$ y un conjunto compacto $M \subset B_{\ell_1}$ tales que $L \subset S(M)$ y $\|S\| \leq 1+\varepsilon$. Luego, $K \subset T(L) \subset T \circ S(M)$ y

$$m_{\mathcal{A}}(K;X) \leq \|T \circ S\|_{\mathcal{A}} \leq \|T\|_{\mathcal{A}}\|S\| \leq (1+\varepsilon)\|T\|_{\mathcal{A}} \leq (1+\varepsilon)^2 m_{\mathcal{A}}(K;X).$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitraio, obtenemos que (i) implica (ii). Que (ii) implica (iii) y que (iii) implica (i) es claro. $\square$

Corolario 1.1.13. *Sean X un espacio de Banach, $\mathcal{A}$ un ideal de Banach y $K \subset X$ un conjunto. Entonces K es relativamente $\mathcal{A}$-compacto si y sólo si K es relativamente $\mathcal{A} \circ \overline{\mathcal{F}}$-compacto y $m_{\mathcal{A}}(K;X) = m_{\mathcal{A}\circ\overline{\mathcal{F}}}(K;X)$.*

Demostración: Como $\mathcal{A} \circ \overline{\mathcal{F}} \subset \mathcal{A}$, por el ítem (f) de la Proposición 1.1.9, todo conjunto relativamente $\mathcal{A} \circ \overline{\mathcal{F}}$-compacto es relativamente $\mathcal{A}$-compacto y $m_{\mathcal{A}}(K;X) \leq m_{\mathcal{A}\circ\overline{\mathcal{F}}}(K;X)$. La otra implicación esta dada por el ítem (ii) de la proposición anterior que, al combinarlo con el ítem (iii) de la misma, da como resultado que $m_{\mathcal{A}}(K;X) = m_{\mathcal{A}\circ\overline{\mathcal{F}}}(K;X)$. $\square$

Recientemente, Delgado y Piñeiro [DP1] definieron las sucesiones *p-nulas* con $p \geq 1$ de la siguiente forma: Una sucesión $(x_n)_n$ en un espacio de Banach X es p-nula si dado $\varepsilon > 0$, existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y una sucesión $(z_k)_k \in \varepsilon B_{\ell_p(X)}$ tales que $x_n \in p\text{-co}\{(z_k)_k\}$ para todo $n \geq n_0$. Usando la medida de los conjuntos p-compactos, podemos redefinir la sucesiones p-nulas de la siguiente manera. Una sucesión $(x_n)_n$ en un espacio de Banach X es p-nula si

$$\lim_{m\to\infty} m_{\mathcal{N}^p}((x_n)_{n>m}; X) = 0.$$

En [DP1, Theorem 2.5], los autores caracterizan a los conjuntos p-compactos como aquellos que están contenidos en la cápsula convexa de una sucesión p-nula. Luego, bajo ciertas hipótesis sobre el espacio de Banach X, prueban que una sucesión es p-nula si y sólo si es una sucesión convergente a cero y forma un conjunto p-compacto, [DP1, Proposition 2.6]. Además, preguntan si el resultado es cierto para cualquier espacio de Banach. Oja [Oja3, Theorem 4.3] da una respuesta afirmativa a esta pregunta. Para ello, describe el espacio de sucesiones p-nulas como un espacio de un producto tensorial donde utiliza la norma tensorial de Chevet-Saphar. Nosotros mostramos que el resultado se puede obtener como consecuencia inmediata del siguiente resultado elemental de la teoría de $\mathcal{A}$-compacidad.

Proposición 1.1.14. *Sean X un espacio de Banach, $\mathcal{A}$ un ideal de Banach y $(x_n)_n \subset X$ una sucesión. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) *La sucesión $(x_n)_n$ es $\mathcal{A}$-nula.*

(ii) $\lim_{m\to\infty} m_{\mathcal{A}}((x_n)_{n>m}; X) = 0$.

(iii) *La sucesión $(x_n)_n$ pertenece a $c_0(X)$ y es relativamente $\mathcal{A}$-compacta.*

Más aún, dado $\varepsilon > 0$, existen un espacio de Banach Y, una sucesión $(y_n)_n \in B_{c_0(Y)}$ y un operador $T \in \mathcal{A}(Y; X)$ tales que $\|T\|_{\mathcal{A}} \leq m_{\mathcal{A}}((x_n)_n; X) + \varepsilon$, y $x_n = T(y_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Tomemos una sucesión $(x_n)_n$ $\mathcal{A}$-nula. Por el Lema 1.1.5, existen un espacio de Banach Y, un operador $T \in \mathcal{A}(Y; X)$ y una sucesión $(y_n)_n \in c_0(Y)$ tales que $x_n = Ty_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Fijado $\varepsilon > 0$, sea $\delta = \varepsilon\|T\|_{\mathcal{A}}^{-1}$ y $m \in \mathbb{N}$ tal que $\|y_n\| < \delta$ para todo $n > m$. Denotando con L al conjunto de Y dado por $L = \delta^{-1}\{y_n : n > m\}$, obtenemos que $L \subset B_Y$ es relativamente compacto y que $\{(x_n)_{n>m}\} \subset \delta T(L)$. Luego $m_{\mathcal{A}}((x_n)_{n>m}; X) \leq \delta\|T\|_{\mathcal{A}} = \varepsilon$ y así se tiene que (i) implica (ii). Que (ii) implica (iii) es trivial.

Finalmente, supongamos que vale (iii) y consideremos la sucesión $(x_n)_n \in c_0(X)$ tal que el conjunto $\{(x_n)_n\}$ es $\mathcal{A}$-compacto. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta > 0$ tal que $m_{\mathcal{A}}((x_n)_n; X)(2\delta+\delta^2) < \varepsilon$. Luego existen un espacio de Banach Y, un operador $T \in \mathcal{A}(Y; X)$ y un conjunto compacto $L \subset B_Y$ tales que $(x_n)_n \subset T(L)$ y $\|T\|_{\mathcal{A}} \leq (1+\delta)m_{\mathcal{A}}((x_n)_n; X)$. Consideremos el operador cociente $q\colon Y \to Y/\ker(T)$ y el operador inyectivo $\widetilde{T}$ tal que $T = \widetilde{T}\circ q$. Luego $(x_n)_n \subset \widetilde{T}(q(L))$ y como $(x_n)_n \in c_0(X)$, $\widetilde{T}$ es inyectivo y $q(L)$ es compacto, existe una sucesion $(z_n)_n \in c_0(Y/\ker(T))$ tal que $(z_n)_n \subset q(L)$ y $\widetilde{T} z_n = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Al ser q un operador cociente, existe una sucesión $(y_n)_n \subset Y$ con $qy_n = z_n$ y $\|y_n\| \leq \|z_n\| + \delta$ para todo $n \in N$. Por lo tanto, tenemos que $(1+\delta)T((1+\delta)^{-1}y_n) = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $((1+\delta)^{-1}y_n)_n \in B_{c_0(Y)}$ y

$$\|(1+\delta)T\|_{\mathcal{A}} \leq (1+\delta)^2 m_{\mathcal{A}}((x_n)_n; X) \leq m_{\mathcal{A}}((x_n)_n; X) + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitario, se tiene (i). $\square$

1.2. Operadores $\mathcal{A}$-compactos

La noción de conjunto relativamente $\mathcal{A}$-compacto induce, de forma natural, la noción de operadores $\mathcal{A}$-compactos. Un operador es $\mathcal{A}$-compacto si aplica conjutos acotados en conjuntos relativamente $\mathcal{A}$-compactos. La clase de estos operadores, que denotaremos $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$, fueron introducidos en [CS]. Utilizando el tamaño de los conjuntos $\mathcal{A}$-compactos, podemos dotar al ideal $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$ de una norma $\|\cdot\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}$ que lo hace un espacio de Banach.

Definición 1.2.1. *Sean X e Y espacios de Banach y $T \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(X;Y)$. Definimos la norma $\mathcal{A}$-compacta de T por*

$$\|T\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} = m_{\mathcal{A}}(T(B_X); Y).$$

Una de las herramientas más importantes usadas para el estudio de operadores compactos y su relación con la propiedad de aproximación es la factorización de Davis, Figiel, Johnson y Pełczyński [DFJP, Lemma 1], en su versión isométrica de Lima, Nygaard y Oja [LNO, Lemmas 1.1, 1.2]. En lo que sigue, presentaremos una *versión $\mathcal{A}$-compacta* de esta factorización, basándonos en [Rya2, Lemma 4.11]. Empecemos fijando notación. Sea X un espacio de Banach, para una sucesión $(x_n)_n \in c_{0,\mathcal{A}}(X)$, el conjunto $K = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \colon (\alpha_n)_n \in \overline{B}_{\ell_1} \right\}$ es absolutamente convexo $\mathcal{A}$-compacto. El espacio $X_K = \bigcup_{n=1}^{\infty} nK$, que es un subsepacio de X, tiene una norma dada por la funcional de Minkowski de K. Esta es

$$|||x||| = \text{ínf}\{\lambda > 0 \colon x \in \lambda K\}.$$

Es claro que $\overline{B}_{X_K} = K$. Por lo tanto la inclusión $\iota \colon X_K \to X$ es un operador $\mathcal{A}$-compacto y $\|\iota\| \leq 1$. Por [Rya2, Lemma 4.1], X_K es un espacio de Banach. Más aún, con esta notación tenemos

Lema 1.2.2. *El espacio $(X_K, |||\cdot|||)$ es un espacio de Banach separable y reflexivo.*

Demostración: Consideremos el conjunto $\widetilde{K} = \{\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_n \colon (\beta_n)_n \in D\}$, donde D son las sucesiones en $\overline{B}_{\ell_1}$ con coeficientes en $\mathbb{Q}$ en el caso real o en $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ en el caso complejo. Es claro que $\widetilde{K} \subset \overline{B}_{X_K}$ y que es numerable. Si $x \in \overline{B}_{X_K}$, entonces existe una sucesión $(\alpha_n)_n \in \overline{B}_{\ell_1}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos la sucesión $(\beta_n)_n \in D$ tal que $\|(\alpha_n - \beta_n)_n\|_1 \leq \varepsilon$ y definamos $\widetilde{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_n$. Entonces $\widetilde{x} \in \widetilde{K}$ y $x - \widetilde{x} \in \varepsilon K$, por lo tanto tenemos que $|||x - \widetilde{x}||| \leq \varepsilon$, por lo que B_{X_K} es separable, concluyendo que X_K también lo es.

Para ver que X_K es reflexivo, vamos a mostrar que $\overline{B}_{X_K''} = j_{X_K}(\overline{B}_{X_K})$. Para ello, notemos que por el teorema de Goldstine, $\overline{B}_{X_K''} = \overline{j_{X_K}(B_{X_K})}^{w^*}$. Luego, si $\iota \colon X_K \to X$ es como arriba, como $\iota'' \circ j_{X_K} = j_X \circ \iota$, tenemos

$$\iota''(\overline{B}_{X_K''}) = \iota''(\overline{j_{X_K}(B_{X_K})}^{w^*}) = \overline{j_X \circ \iota(B_{X_K})}^{w^*} = j_X(K) = j_X \circ \iota(\overline{B}_{X_K}) = \iota'' \circ j_{X_K}(\overline{B}_{X_K}),$$

donde la segunda igualdad se debe a que ι'' es débil*-débil* por ser el traspuesto de un operador. Como ι'' es inyectivo ya que ι lo es, $\overline{B}_{X_K''} = j_{X_K}(\overline{B}_{X_K})$ y por lo tanto X_K es reflexivo. $\square$

Lema 1.2.3. *Sean X un espacio de Banach, $\mathcal{A}$ un ideal de Banach y $K \subset X$ un conjunto relativamente $\mathcal{A}$-compacto. Dado $\varepsilon > 0$ existen un espacio de Banach separable y reflexivo Y, un conjunto compacto $L \subset B_Y$ y un operador inyectivo $S \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Y;X)$ tales que $K \subset S(L)$ y $m_{\mathcal{A}}(K;X) \leq \|S\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} \leq m_{\mathcal{A}}(K;X) + \varepsilon$.*

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos $\delta > 0$ a determinar. Por el Corolario 1.1.10, existe una sucesión $(x_n)_n \subset X$ $\mathcal{A}$-nula tal que $K \subset \text{co}\{(x_n)_n\}$ y $m_{\mathcal{A}}((x_n)_n;X) \leq (1+\delta) m_{\mathcal{A}}(K;X)$. Gracias a la Proposición 1.1.14, existen un espacio de Banach Z, una sucesión $(z_n)_n \in B_{c_0(Z)}$ y un operador $R \in \mathcal{A}(Z;X)$ tales que $Rz_n = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\|R\|_{\mathcal{A}} \leq (1+\delta)^2 m_{\mathcal{A}}(K;X)$. Sea $(\beta_n)_n \in B_{c_0}$ una sucesión tal que $(\frac{z_n}{\beta_n})_n \in (1+\delta) B_{c_0(Z)}$ y definamos $\tilde{x}_n = R(\frac{z_n}{\beta_n})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego tenemos que $(\tilde{x}_n)_n \in c_{0,\mathcal{A}}(X)$ y $m_{\mathcal{A}}((\tilde{x}_n)_n;X) \leq \|R\|_{\mathcal{A}}(1+\delta)$. Denotando con $L \subset X$ al conjunto $\mathcal{A}$-compacto $L = \overline{\text{co}\{(\tilde{x}_n)_n\}}$ consideremos el espacio de Banach separable y reflexivo X_L obtenido en el lema anterior. Por [Rya2, Lemma 4.11], $K \subset B_L$ es compacto y, siendo $\iota \colon X_L \to X$ la inclusión, tenemos que $\iota(K) = K \subset \iota(\overline{B}_{X_L}) = L$. Por lo tanto, $\iota \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(X_L;X)$ y

$$m_{\mathcal{A}}(K;X) \leq \|\iota\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} = m_{\mathcal{A}}(L;X) \leq \|R\|_{\mathcal{A}}(1+\delta) \leq m_{\mathcal{A}}(K;X)(1+\delta)^3.$$

Tomando $\delta > 0$ tal que $m_{\mathcal{A}}(K;X)(1+\delta)^3 < m_{\mathcal{A}}(K;X) + \varepsilon$, tenemos el resultado. $\square$

Corolario 1.2.4. *Sean X un espacio de Banach, $\mathcal{A}$ un ideal de Banach y $K \subset X$ un conjunto. Entonces K es relativamente $\mathcal{A}$-compacto si y sólo si es relativamente $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-compacto y $m_{\mathcal{A}}(K;X) = m_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(K;X)$.*

Demostración: Una aplicación directa del lema anterior muestra que todo conjunto relativamente $\mathcal{A}$-compacto es relativamente $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-compacto y la igualdad de las medidas. Ahora, si $K \subset X$ es relativamente $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-compacto, entonces $K \subset S(L)$ para algún operador $S \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Y; X)$ y un conjunto compacto $L \subset B_Y$. Luego, $K \subset S(B_Y)$ y, por lo tanto, K es relativamente $\mathcal{A}$-compacto con $m_{\mathcal{A}}(K; X) \leq m_{\mathcal{A}}(S(B_{\ell_1}); X) = \|T\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}$. Así, $m_{\mathcal{A}}(K; X) \leq m_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(K; X)$. $\square$

Con los Lemas 1.2.2 y 1.2.3, obtenemos una factorización de los operadores $\mathcal{A}$-compactos.

Proposición 1.2.5. *Sean X e Y espacios de Banach, $\mathcal{A}$ un ideal de Banach y $T \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(X; Y)$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existen un espacio de Banach separable y reflexivo Z, un operador compacto $R \in \mathcal{K}(X; Z)$ con $\|R\| \leq 1$ y un operador $S \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Z; Y)$ inyectivo con $\|S\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} \leq \|T\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} + \varepsilon$, tales que $T = S \circ R$. En particular, se tiene*

$$\mathcal{K}_{\mathcal{A}} = \mathcal{K}_{\mathcal{A}} \circ \mathcal{K} \quad \text{isométricamente.}$$

Demostración: Sea $T \in \mathcal{K}_{A}(X; Y)$, $\varepsilon > 0$ y denotemos con $K = T(B_X)$. Como K es relativamente $\mathcal{A}$-compacto, por el Lema 1.2.3, existen un espacio de Banach separable y reflexivo Z, un conjunto compacto $L \subset B_Z$ y un operador $S \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Z; Y)$ inyectivo tales que $K \subset S(L)$ y $\|S\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} \leq \|T\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} + \varepsilon$. Sea $R\colon X \to Z$ el operador definido por $Rx = z$ si $Sz = Tx$. La buena definición y linealidad del operador R se deben a que S es lineal e inyectivo. Más aún, $R(B_X) = L$, lo que muestra que $R \in \mathcal{K}(X; Z)$ y $\|R\| \leq 1$. Finalmente, de las definiciones se tiene que $T = S \circ R$ y la proposición queda demostrada. $\square$

Antes de ahondar en el estudio de los operadores $\mathcal{A}$-compactos, mostramos el siguiente resultado que pone en evidencia la estrecha relación que hay entre sucesiones $\mathcal{A}$-nulas, conjutos y operadores $\mathcal{A}$-compactos.

Proposición 1.2.6. *Sean X un espacio de Banach, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos ideales de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) *$\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Y; X) \subset \mathcal{K}_{\mathcal{B}}(Y; X)$ para todo espacio de Banach Y.*

(ii) *$\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\ell_1; X) \subset \mathcal{K}_{\mathcal{B}}(\ell_1; X)$.*

(iii) *Todo conjunto $K \subset X$ $\mathcal{A}$-compacto es $\mathcal{B}$-compactos y $m_{\mathcal{B}}(K; X) \leq m_{\mathcal{A}}(K; X)$.*

(iv) *Toda sucesión $(x_n)_n \subset X$ $\mathcal{A}$-nula es $\mathcal{B}$-nula y $m_{\mathcal{B}}((x_n)_n; X) \leq m_{\mathcal{A}}((x_n)_n; X)$.*

Demostración: Es claro que (i) implica (ii). Supongamos que vale (ii) y tomemos $K \subset X$ un conjunto $\mathcal{A}$-compacto. Dado $\varepsilon > 0$, por el Corolario 1.1.10, existe una sucesión $(x_n)_n$ $\mathcal{A}$-nula tal que $K \subset \mathrm{co}\{(x_n)_n\}$ y $m_{\mathcal{A}}((x_n)_n; X) \leq m_{\mathcal{A}}(K; X) + \varepsilon$. Si definimos el operador $T: \ell_1 \to X$ tal que $T(e_n) = x_n$ y se lo extiende por linealidad y por densidad a ℓ_1, T es $\mathcal{A}$-compacto y $\|T\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} = m_{\mathcal{A}}((x_n)_n; X)$. Como estamos suponiendo que (ii) es verdadero, T es $\mathcal{B}$-compacto y $\|T\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{B}}} \leq \|T\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}$, obteniendo así que K es $\mathcal{B}$-compacto y $m_{\mathcal{B}}(K; X) \leq \|T\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{B}}} \leq m_{\mathcal{A}}(K; X) + \varepsilon$. Como ε es arbitraio, se sigue (iii). Que (iii) implica (iv) se obtiene mediante una aplicación directa de la Proposición 1.1.14 (la equivalencia entre (i) y (iii)). Finalmente, si $T \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Y; X)$, $T(B_Y)$ es $\mathcal{A}$-compacto y por el Corolario 1.1.10, existe una sucesión $(x_n)_n$ $\mathcal{A}$-nula tal que $T(B_Y) \subset \mathrm{co}\{(x_n)_n\}$. Por (iv), $(x_n)_n$ es $\mathcal{B}$-nula y $m_{\mathcal{B}}((x_n)_n; X) \leq m_{\mathcal{A}}((x_n)_n; X)$, por lo tanto $T \in \mathcal{K}_{\mathcal{B}}(Y; X)$. Además, por el ítem (c) de la Proposición 1.1.9, $\|T\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{B}}} \leq m_{\mathcal{A}}((x_n)_n; X)$. Como esto último vale para cualquier sucesión elegida, obtenemos (i) y la demostración concluye. $\square$

Ahora estudiaremos las distintas propiedades del ideal $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$. Para ello nos enfocaremos en los ideales de Banach obtenidos por los *procedimientos*

$$\mathcal{A} \to \mathcal{A}^d, \quad \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{min}, \quad \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{max}, \quad \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{sur}, \quad \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{inj}, \quad \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{reg}, \tag{1.1}$$

y en la norma tensorial asociada a $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$. Las distintas propiedades de $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$ repercuten en el sistema de conjuntos $\mathcal{A}$-compactos y en las sucesiones $\mathcal{A}$-nulas, las cuáles vamos a ir remarcando oportunamente. Vamos a ejemplificar nuestros resultados con el ideal de operadores p-compactos. Vamos a dar las definiciones de los procedimiento de (1.1) a medida que las necesitamos. Empecemos por recordar que el ideal dual de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^d$, viene dado por

$$\mathcal{A}^d(X; Y) = \{T \in \mathcal{L}(X; Y) : T' \in \mathcal{A}(Y', X')\}.$$

Si $\mathcal{A}$ es un ideal de Banach, en A^d se define la norma

$$\|T\|_{\mathcal{A}^d} = \|T'\|_{\mathcal{A}}$$

que hace de $\mathcal{A}^d$ un espacio de Banach.

El núcleo minimal de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^{min}$ es el ideal de composición

$$\mathcal{A}^{min} = \overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{A} \circ \overline{\mathcal{F}}$$

y se lo considera con su norma natural

$$\|T\|_{\mathcal{A}^{min}} = \text{ínf}\left\{\|S\|\|T_0\|_{\mathcal{A}}\|R\| : S, R \in \overline{\mathcal{F}} \text{ y } T_0 \in \mathcal{A} \text{ con } T = S \circ T_0 \circ R\right\}.$$

Un ideal se dice minimal si $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{min}$ isométricamente.

Ejemplos.

(a) El ideal $\overline{\mathcal{F}}$ es minimal [DF, 22.1].

(b) Para $1 \leq p < \infty$, los ideales $\mathcal{N}_p$ y $\mathcal{N}^p$ son minimales [Pie1, 18.1.4].

Varios de los resultados obtenidos son para ideales accesibles a derecha que, por [DF, Proposition 25.2 (2)] podemos considerarlos como aquellos que satisfacen la igualdad

$$\mathcal{A}^{min} = \mathcal{A} \circ \overline{\mathcal{F}} \quad \text{isométricamente.}$$

Análogamente, un ideal es accesible a izquierda si se satisface la igualdad

$$\mathcal{A}^{min} = \overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{A} \quad \text{isométricamente.}$$

Un ideal de Banach se dice accesible si es accesible a izquierda y a derecha. También usaremos la noción de ideal de Banach totalmente accesible. Un ideal de Banach $\mathcal{A}$ es totalmente accesible si para todo operador de rango finito $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ y $\varepsilon > 0$ existen $V \subset Y$ un subespacio de dimensión finita, $W \subset X$ un subespacio de co-dimensión finita y un operador $S \in \mathcal{L}(X/W;Y)$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "q_X"'] & Y \\ X/W \arrow[r, "S"'] & V \arrow[u, hook, "\iota_V"'] \end{tikzcd}$$

y $\|S\|_{\mathcal{A}} \leq (1+\varepsilon)\|T\|_{\mathcal{A}}$, donde $q_X \colon X \to X/W$ e $\iota_V \colon V \to Y$ son la proyección canónica y la inclusión, respectivamente. Si $\mathcal{A}$ es totalmente accesible entonces es accesible [DF, 21.2].

Ejemplos. Sea $1 \leq p < \infty$

(a) El ideal Π_p es totalmente accesible y el ideal I_p es accesible [DF, Theorem 21.5].

(b) Como $\overline{\mathcal{F}} \circ \overline{\mathcal{F}} = \overline{\mathcal{F}}$ isométricamente [DF, Remark 22.1], cualquier ideal minimal es accesible [DF, Corollary 25.3].

(c) Los ideales $\mathcal{N}^p$ y $\mathcal{N}_p$ son accesibles (por ser minimales), pero no son totalmente accesibles [DF, 25.3 y Ex. 25.4].

(d) Para todo ideal de Banach $\mathcal{A}$, el ideal de composición $\mathcal{A}\circ\overline{\mathcal{F}}$ es accesible a izquierda, mientras que $\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{A}$ es un ideal accesible a derecha.

1.2.1. Operadores $\mathcal{A}$-compactos y la cápsula suryectiva

Si $\mathcal{A}$ es un ideal de Banach, un operador $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ pertenece a la cápsula suryectiva de $\mathcal{A}(X;Y)$, $\mathcal{A}^{sur}(X;Y)$, si y sólo si la composición $T \circ q_X$ pertenece a $\mathcal{A}(\ell_1(B_X);X)$ donde $q_X \colon \ell_1(B_X) \twoheadrightarrow X$ es la suryección canónica [DF, Pag. 489]. La norma de $\mathcal{A}^{sur}$ viene dada por $\|T\|_{\mathcal{A}^{sur}} = \|T \circ q_X\|_{\mathcal{A}}$. Equivalentemente, $T \in \mathcal{A}^{sur}(X;Y)$ si y sólo si existen un espacio de Banach Z y un operador $S \in \mathcal{A}(Z,Y)$ tales que $T(B_X) \subset S(B_Z)$. Además,

$$\|T\|_{\mathcal{A}^{sur}} = \text{ínf}\Big\{\|S\|_{\mathcal{A}} \colon S \in \mathcal{A}(Z;X) \text{ y } T(B_X) \subset S(B_Z)\Big\}.$$

En particular, por [DF, Corollary 9.8] se tiene que para todo conjunto Γ y para todo espacio de Banach Y,

$$\mathcal{A}^{sur}(\ell_1(\Gamma);Y) = \mathcal{A}(\ell_1(\Gamma);Y) \quad \text{isométricamente.}$$

Por otro lado, un operador $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ pertenece a la cápsula inyectiva de $\mathcal{A}(X;Y)$, $\mathcal{A}^{inj}(X;Y)$, si y sólo si $\iota_Y \circ T \in \mathcal{A}(X;\ell_\infty(Y))$, donde $\iota_Y \colon Y \hookrightarrow \ell_\infty(B_{Y'})$ la inyección canónica [DF, Pag. 489]. La norma de $\mathcal{A}^{inj}$ viene dada por $\|T\|_{\mathcal{A}^{inj}} = \|\iota_Y \circ T\|_{\mathcal{A}}$. El ideal $\mathcal{A}$ es suryectivo si $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{sur}$ isométricamente y es inyectivo si $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{inj}$ isométricamente. Todo ideal inyectivo es accesible a derecha, mientras que todo ideal suryectivo es accesible a izquierda [DF, 21.2].

Ejemplos.

(a) Para $1 \leq p < \infty$ el ideal Π_p es inyectivo [DF, Remark 11.1]. También es inyectivo el ideal de operadores cuasi p-nucleares $\mathcal{QN}_p$ [PP, Satz 38].

(b) De las definiciones se deduce que os ideales $\mathcal{K}$ y $\mathcal{W}$ son suryectivos.

Carl y Stephani describen el ideal de operadores $\mathcal{A}$-compactos en términos de $\mathcal{A}^{sur}$ via las identidades $\mathcal{K}_{\mathcal{A}} = (\mathcal{A} \circ \mathcal{K})^{sur} = \mathcal{A}^{sur} \circ \mathcal{K}$ [CS, Theorem 2.1]. La estructura geométrica que damos con $\|\cdot\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}$ hace que estas igualdades sean isomterías. Más aún, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.2.7. *Sea $\mathcal{A}$ un ideal de Banach. Entonces,*

(a) $\mathcal{K}_{\mathcal{A}} = \mathcal{K}_{\mathcal{A}^{sur}} = \mathcal{K}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} = \mathcal{K}_{\mathcal{A} \circ \overline{\mathcal{F}}}$ *isométricamente.*

(b) $\mathcal{K}_{\mathcal{A}} = (\mathcal{A} \circ \overline{\mathcal{F}})^{sur} = \mathcal{A}^{sur} \circ \mathcal{K}$ *isométricamente.*

Demostración: De los Corolarios 1.1.13 y 1.2.4 obtenemos que los conjunto $\mathcal{A}$-compactos, $\mathcal{A} \circ \overline{\mathcal{F}}$-compactos y $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-compactos y sus medidas coinciden. Luego, por la Proposición 1.2.6

tenemos que $\mathcal{K}_{\mathcal{A}} = \mathcal{K}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} = \mathcal{K}_{\mathcal{A}\circ\overline{\mathcal{F}}}$ isométricamente. Además, como $\mathcal{A}(\ell_1, X) = \mathcal{A}^{sur}(\ell_1, X)$, por la Proposición 1.1.12, tenemos que $\mathcal{K}_{\mathcal{A}} = \mathcal{K}_{\mathcal{A}^{sur}}$ isométricamente.

Si un operador $T \in (\mathcal{A}\circ\overline{\mathcal{F}})^{sur}(X;Y)$ entonces, para $\varepsilon > 0$, existen un espacio de Banach Z y un operador $R \in \mathcal{A}\circ\overline{\mathcal{F}}$ tales que $T(B_X) \subset R(B_Z)$ y $\|R\|_{\mathcal{A}\circ\overline{\mathcal{F}}} \leq \|T\|_{(\mathcal{A}\circ\overline{\mathcal{F}})^{sur}} + \varepsilon$. Además, existen un espacio de Banach $\tilde{Z}$ y operadores $S_1 \in \overline{\mathcal{F}}(Z;\tilde{Z})$ y $S_2 \in \mathcal{A}(\tilde{Z};Y)$ tales que $R = S_2 \circ S_1$, con $\|S_1\| = 1$ y $\|S_2\|_{\mathcal{A}} \leq \|R\|_{\mathcal{A}\circ\overline{\mathcal{F}}} + \varepsilon$. Luego, tenemos que el conjunto $L = S_1(B_Z) \subset B_{\tilde{Z}}$ es compacto y, por lo tanto, $T(B_X) \subset S_2(L)$. Esto implica que $T \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(X;Y)$ y

$$\|T\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} \leq \|S_2\|_{\mathcal{A}} \leq \|R\|_{\mathcal{A}\circ\overline{\mathcal{F}}} + \varepsilon \leq \|T\|_{(\mathcal{A}\circ\overline{\mathcal{F}})^{sur}} + 2\varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, obtenemos que $(\mathcal{A}\circ\overline{\mathcal{F}})^{sur} \subset \mathcal{K}_{\mathcal{A}}$. La otra inclusión se obtiene ya que todo conjunto $\mathcal{A}$-compacto es $\mathcal{A}\circ\overline{\mathcal{F}}$-compacto.

Finalmente, por un lado es claro que $\mathcal{A}^{sur}\circ\mathcal{K}(X;Y) \subset \mathcal{K}_{\mathcal{A}^{sur}} = \mathcal{K}_{\mathcal{A}}$. Para la otra inclusión, por la Proposición 1.2.5, $\mathcal{K}_{\mathcal{A}} = \mathcal{K}_{\mathcal{A}}\circ\mathcal{K}$. Luego, como $\mathcal{A}\circ\overline{\mathcal{F}} \subset \mathcal{A}$, tenemos que

$$\mathcal{K}_{\mathcal{A}} = \mathcal{K}_{\mathcal{A}}\circ\mathcal{K} = (\mathcal{A}\circ\overline{\mathcal{F}})^{sur}\circ\mathcal{K} \subset \mathcal{A}^{sur}\circ\mathcal{K},$$

completando la demostración. □

Observación 1.2.8. De la proposición anterior tenemos que, para todo ideal de Banach $\mathcal{A}$, $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$ es un ideal de Banach suryectivo.

Como consecuencia inmediata tenemos los siguientes corolarios.

Corolario 1.2.9. *Si $\mathcal{A}$ es un ideal de Banach entonces, para todo espacio de Banach X se tiene*

$$c_{0,\mathcal{A}}(X) = c_{0,\mathcal{A}^{sur}}(X) = c_{0,\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(X) = c_{0,\mathcal{A}\circ\overline{\mathcal{F}}}(X)$$

Demostración: El resultado se sigue de combinar la Proposición 1.2.6 y el ítem (a) de la proposición anterior. □

Corolario 1.2.10. *Sea $\mathcal{A}$ un ideal de Banach accesible a derecha. Entonces*

$$\mathcal{K}_{\mathcal{A}} = \mathcal{K}_{\mathcal{A}^{min}} = (\mathcal{A}^{min})^{sur} \quad \text{isométricamente.}$$

Corolario 1.2.11. *Si $\mathcal{A}$ es un ideal de Banach accesible a derecha entonces, para todo espacio de Banach X, $c_{0,\mathcal{A}}(X) = c_{0,\mathcal{A}^{min}}(X)$.*

Proposición 1.2.12. *Si $\mathcal{A}$ es un ideal de Banach accesible a derecha, entonces $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$ es totalmente accesible. En particular,*

$$\mathcal{K}_{\mathcal{A}} = (\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{min})^{sur} \quad \text{isométricamente.}$$

Demostración: Por la Proposición 1.2.7, $\mathcal{K}_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}^{sur} \circ \mathcal{K}$. Como $\mathcal{A}$ es accesible a derecha, por [DF, Ex 21.1], $\mathcal{A}^{sur}$ es totalmente accesible. Además, como $\mathcal{K}$ es un ideal inyectivo y suryectivo, entonces $\mathcal{K}$ es inyectivo y accesible a izquierda [DF, 21.2]. Luego, por [DF, Proposition 21.4], $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$ es totalmente accesible.

Por último, como $\mathcal{K}_{\mathcal{A}} = \mathcal{K}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}$ y $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$ es totamente accesible, el Corolario 1.2.10 implica que $\mathcal{K}_{\mathcal{A}} = (\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{min})^{sur}$, de donde se sigue el resultado. $\square$

Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son dos ideales de Banach tales que $\mathcal{A}^{sur} = \mathcal{B}^{sur}$, la Proposición 1.2.7 muestra que $\mathcal{K}_{\mathcal{A}} = \mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ y, por la Proposición 1.2.6, los conjuntos $\mathcal{A}$-compactos y $\mathcal{B}$-compactos coinciden. Por otro lado, si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son dos ideales de Banach accesibles a derecha y $\mathcal{A}^{min} = \mathcal{B}^{min}$, por el Corolario 1.2.10, también obtenemos que $\mathcal{K}_{\mathcal{A}} = \mathcal{K}_{\mathcal{B}}$. A continuación, mostramos consecuencias de los resultados anteriores en relación a los conjuntos p-compactos.

Ejemplos 1.2.13. Sea $1 \leq p \leq \infty$, valen las siguientes identidades.

(a) $\mathcal{K}_p = \mathcal{K}_{\mathcal{N}^p} = (\mathcal{N}^p)^{sur}$ isométricamente.

(b) $\mathcal{K}_p$ es totalmente accesible.

(c) $\mathcal{K}_p = (\mathcal{K}_p^{min})^{sur}$ isométricamente.

Demostración: Del Ejemplo 1.1.7, tenemos que todo conjunto p-compacto es $\mathcal{N}^p$-compacto, por lo tanto $\mathcal{K}_p = \mathcal{K}_{\mathcal{N}^p}$. Como $\mathcal{N}^p$ es un ideal minimal, entonces es accesible [DF, Corollary 25.3]. Aplicando el Corolario 1.2.10 concluimos que $\mathcal{K}_p = (\mathcal{N}^p)^{sur}$, y obtenemos el ítem (a). Además, por la Proposición 1.2.12, se tiene que $\mathcal{K}_p$ es totalmente accesible y, aplicando otra vez el Corolario 1.2.10 obtenemos el ítem (c). $\square$

Combinando la Proposición 1.2.6 con los ejemplos anteriores, obtenemos distintas descripciones de las sucesiones p-nulas.

Corolario 1.2.14. *Sea $1 \leq p < \infty$. Entonces $c_{0,\mathcal{N}^p} = c_{0,\mathcal{K}_p} = c_{0,\mathcal{K}_p^{min}}$.*

1.2.2. Operadores $\mathcal{A}$-compactos y su cápsula maximal

Ahora estudiaremos la cápsula maximal de $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$ en el caso que $\mathcal{A}$ es un ideal de Banach accesible a derecha. Un operador $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ pertenece a la cápsula maximal de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^{max}$ si, para cualquier par de espacios de Banach $Z, \tilde{Z}$ y para cualquier par de operadores aproximables $S \in \overline{\mathcal{F}}(Z;X)$, $R \in \overline{\mathcal{F}}(Y;\tilde{Z})$, la composición $R \circ T \circ S \in \mathcal{A}(Z;\tilde{Z})$. La norma de este ideal de Banach viene dada por

$$\|T\|_{\mathcal{A}^{max}} = \sup\{\|R \circ T \circ S\|_{\mathcal{A}}\},$$

donde el supremo se toma sobre todos los operadores aproximables R y S de norma menor o igual que 1. Un ideal se dice maximal si $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{max}$, isométricamente.

Ejemplos. Para $1 \leq p < \infty$, los ideales Π_p e I_p son maximales [DF, 17.4].

Proposición 1.2.15. *Sea $\mathcal{A}$ un ideal de Banach accesible a derecha. Entonces*

$$\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{max} = (\mathcal{A}^{max})^{sur} \quad \text{isométricamente.}$$

En particular, si $\mathcal{A}$ es maximal y accesible a derecha, entonces $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{max} = \mathcal{A}^{sur}$.

Demostración: Por [Pie1, Proposition 8.7.14] y [Pie1, Proposition 8.7.15] tenemos que, para cualquier ideal de Banach $\mathcal{B}$, $(\mathcal{B}^{max})^{sur} = (\mathcal{B}^{sur})^{max}$ y $(\mathcal{B}^{min})^{max} = \mathcal{B}^{max}$ isométricamente. Luego, por el Corolario 1.2.10 tenemos que

$$\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{max} = (\mathcal{A}^{min\ sur})^{max} = (\mathcal{A}^{min\ max})^{sur} = (\mathcal{A}^{max})^{sur} \quad \text{isométricamente.} \qquad \square$$

Corolario 1.2.16. *Si $\mathcal{A}$ es accesible a derecha y maximal entonces*

$$\mathcal{K}_{\mathcal{A}} = \mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{max} \circ \mathcal{K} \quad \text{isométricamente.}$$

Demostración: De la Proposición 1.2.7 tenemos que $\mathcal{K}_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}^{sur} \circ \mathcal{K}$. Luego, el resultado se sigue de la proposición anterior. $\square$

En [Pie3, Theorem 13] se caracteriza al ideal $\mathcal{K}_p^{max}$ a partir de la imágen de los operadores en el ideal. Nosotros generalizamos ese resultado para $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$ cuando $\mathcal{A}$ es un ideal maximal accesible a derecha. Para ello, recordemos que si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son dos ideales de Banach, entonces el ideal cociente $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}^{-1}$ viene dado por

$$\mathcal{A} \circ \mathcal{B}^{-1}(X;Y) = \{T \in \mathcal{L}(X;Y) \colon T \circ S \in \mathcal{A}(Z;Y) \ \forall\ S \in \mathcal{B}(Z;X)\}.$$

Este ideal es de Banach si se lo considera con la norma $\|T\|_{\mathcal{A}\circ\mathcal{B}^{-1}} = \sup\limits_{S\in\mathcal{A}, \|S\|_{\mathcal{A}}\leq 1} \|TS\|_{\mathcal{A}}$.

Proposición 1.2.17. *Sea $\mathcal{A}$ un ideal de Banach maximal accesible a derecha. Entonces*

(a) $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{max} = \mathcal{K}_{\mathcal{A}} \circ \overline{\mathcal{F}}^{-1}$ *isométricamente.*

(b) $T \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{max}$ *si y sólo si aplica conjuntos relativamente compactos en conjuntos relativamente $\mathcal{A}$-compactos.*

Demostración: Tomemos X e Y espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{max}(X;Y)$. Si tomamos un operador aproximable (y por lo tanto compacto) $R \in \overline{\mathcal{F}}(Z;X)$ para algún espacio de Banach Z con $\|R\| = 1$, por el corolario anterior, $T \circ R \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Z;Y)$ y $\|T \circ R\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} \leq \|T\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{max}}$, luego $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{max} \subset \mathcal{K}_{\mathcal{A}} \circ \mathcal{K}^{-1}$. Para mostrar la otra inclusión, sea $T \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}} \circ \overline{\mathcal{F}}^{-1}(X;Y)$. Luego, para todo operador aproximable $R \in \overline{\mathcal{F}}(Z;Y)$, $T \circ R \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Z;Y)$ y, como $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$ es un ideal de Banach, para cualquier $S \in \overline{\mathcal{F}}(Y;\tilde{Z})$, tenemos que $S \circ T \circ R \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Z;\tilde{Z})$. Es decir, componiendo al operador T a derecha e izquierda por operadores aproximables, nos queda que la composición es un operador $\mathcal{A}$-compacto. Esto, por definición dice que $T \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{max}$. En particular, si dado $\varepsilon > 0$, a los operadores R y S los tomamos de norma 1 tales que satisfagan $\|T\|_{\mathcal{A}^{max}} \leq \|S \circ T \circ R\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} + \varepsilon$, tenemos que $\|T\|_{\mathcal{A}^{max}} \leq \|T \circ R\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} + \varepsilon \leq \|T\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}} \circ K^{-1}} + \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se sigue la isometría.

Para ver (b), por un lado si $T \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{max}(X;Y)$ y $K \subset X$ un conjunto relativamente compacto, por la Proposición 1.1.2, existe un operador $R \in \overline{\mathcal{F}}(\ell_1;X)$ tal que $K \subset R(B_{\ell_1})$. Por el ítem (a), $T \circ R \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\ell_1;Y)$ y como $T(K) \subset T \circ R(B_{\ell_1})$, $T(K)$ es relativamente $\mathcal{A}$-compacto. Por otro lado, sea $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ tal que T aplica conjuntos relativamente compactos en conjuntos relativamente $\mathcal{A}$-compactos. Si tomamos un operador $R \in \overline{\mathcal{F}}(Z;X)$ para algún espacio de Banach Z, como $R(B_Z)$ es relativamente compacto, $T \circ R(B_Z)$ es relativamente $\mathcal{A}$-compacto. Luego, para todo operador aproximable R, $T \circ R$ es $\mathcal{A}$-compacto y, por el ítem (a), $T \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{max}(X;Y)$. □

1.2.3. La norma tensorial asociada a $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$

Dado un ideal de Banach $\mathcal{A}$ y una norma tensorial α, decimos que α esta asociado al ideal $\mathcal{A}$ si para todo espacio V y W de dimensión finita

$$\mathcal{A}(W;V) = W' \otimes_{\alpha} V \quad \text{isométricamente.}$$

A la norma tensorial asociada al ideal $\mathcal{A}$ la notamos $\alpha_{\mathcal{A}}$.

Observación 1.2.18. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son ideales de Banach

(a) Se tiene que $\mathcal{A}^{max} = \mathcal{B}^{max}$ si y sólo si tienen la misma norma tensorial asociada [DF, Remark 17.7].

(b) Se tiene que $\mathcal{A}^{min} = \mathcal{B}^{min}$ si y sólo si tienen la misma norma tensorial asociada, ver [DF, Proposition 22.1] y [DF, Corollary 22.4 (2)].

Observación 1.2.19. Directamente de las definiciones tenemos las siguientes igualdades

(a) $\varepsilon = \alpha_{\overline{\mathcal{F}}} = \alpha_{\mathcal{K}} = \alpha_{\mathcal{L}}$.

(b) Para $1 \leq p < \infty$, $d_p = \alpha_{\mathcal{N}^p}$.

(c) Para $1 \leq p < \infty$, $g_p = \alpha_{\mathcal{N}_p}$.

Es claro que para espacios de dimensión finita V y W el dual algebraico de $V \otimes W$ es $V' \otimes W'$, donde la dualidad viene dada por

$$(\sum_{i=1}^{m} x_i' \otimes y_i')(\sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i'(x_j) y_i'(y_j).$$

Esta dualidad nos permite definir, para una norma tensorial α, su norma dual α' como

$$\alpha'(z; V, W) = \sup\{|\langle u, z\rangle| \colon \alpha(u; V', W') \leq 1\}$$

para espacios de dimensión finita V y W. Una vez hecho esto, α' se extiende a espacios de Banach para que cumpla con la condición de ser *finitamente generada*. Es decir, si X e Y son espacios de Banach y $z = \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j$, la norma tensorial dual de α, que seguiremos notando con α', esta definida por

$$\alpha'(z; X, Y) = \inf\{\alpha'(z; V, W) \colon z \in V \otimes W \ \ \dim V < \infty \ \ \dim W < \infty\}.$$

Siguiendo la notación del libro de Defant y Floret, la norma tensorial adjunta de α, denotada con α^*, viene dada por la igualdad $\alpha^* = (\alpha')^t = (\alpha^t)'$.

Por [DF, 17.1] y [DF, 17.2], hay una correspondencia uno a uno entre normas tensoriales e ideales de Banach maximales. Por este motivo, vamos a dar distintas propiedades de la normas tensoriales a partir de su ideal maximal asociado. Una norma tensorial es accesible a derecha (resp. accesible a izquierda, totalmente accesible) si su ideal maximal asociado lo es, [DF, Proposition 21.3]. También, siguiendo [DF, Theorem 20.11] decimos que una norma tensorial es inyectiva a izquierda si su ideal maximal asociado es suryectivo. Equivalentemente, una norma tensorial α es inyectiva a izquierda si respeta subespacios a izquierda, esto es si para todo espacio de Banach X, Y y Z, tal que $X \subset Z$, se tiene

$$X \otimes_\alpha Y \subset Z \otimes_\alpha Y,$$

donde $\alpha(u; X, Y) = \alpha(u; Z, Y)$ para todo tensor $u \in X \otimes Y$. Una norma tensorial α es inyectiva a derecha si α^t es inyectiva a izquierda.

Por [DF, Theorem 20.7], para una norma tensorial α, exitse una única norma tensorial inyectiva a derecha, denotada con $\alpha\backslash$ que cumple la desigualdad $\beta \leq \alpha\backslash \leq \alpha$ para toda norma tensorial inyectiva a derecha β tal que $\beta \leq \alpha$. La norma tensorial $\alpha\backslash$ se denomina la norma tensorial inyectiva a derecha asociada a α. La norma tensorial inyectiva a izquierda se denota con $/\alpha$ y se define de la siguiente forma,

$$/\alpha = ((\alpha^t)\backslash)^t.$$

Ahora mostraremos cuál es la norma tensorial asociada al ideal $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$. Para ello necesitaremos un resultado previo.

Lema 1.2.20. *Sean $\mathcal{A}$ un ideal y $\alpha_{\mathcal{A}}$ su norma tensorial asociada. Entonces*

(a) *Si $\mathcal{A}$ es suryectivo, entonces $\alpha_{\mathcal{A}}$ es inyectiva a izquierda.*

(b) *Si $\mathcal{A}$ es inyectivo, entonces $\alpha_{\mathcal{A}}$ inyectiva a derecha.*

Demostración: Sólo mostraremos (a). La demostración de (b) es similar. Supongamos que $\mathcal{A}$ es suryectivo. Gracias a [DF, Proposition 20.3 (1)], para probar (a) sólo necesitamos ver que $\alpha_{\mathcal{A}}$ es inyectiva a izquierda sobre espacios de dimensión finita.

Fijemos U, V, W espacios de dimensión finita tal que $V \subset W$ y notemos con $i\colon V \hookrightarrow W$ la inclusión. Se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} V \otimes_{\alpha_{\mathcal{A}}} U \arrow[r, "i\otimes id_N"] \arrow[d, equal] & W \otimes_{\alpha_{\mathcal{A}}} U \arrow[d, equal] \\ \mathcal{A}(V'; U) \arrow[r, "\phi"'] & \mathcal{A}(W'; U) \end{tikzcd}$$

donde ϕ viene dada por $T \mapsto Ti'$. Como i es una isometría, i' es una suryección y, como $\mathcal{A}$ es suryectivo, resulta que ϕ es una isometría, por lo tanto $V \otimes_{\alpha_{\mathcal{A}}} U \subset W \otimes_{\alpha_{\mathcal{A}}} U$. Como $\alpha_{\mathcal{A}}$ respeta subespacios de dimensión finita a izquierda, $\alpha_{\mathcal{A}}$ resulta ser inyectiva a izquierda sobre espacios de dimensión finita, como queríamos ver. $\square$

Proposición 1.2.21. *Sea $\mathcal{A}$ un ideal de Banach asociado a la norma tensorial $\alpha_{\mathcal{A}}$. Entonces $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$ esta asociado a la norma tensorial $/\alpha_{\mathcal{A}}$.*

Demostración: Primero notemos que como $\mathcal{A}^{min} = (\mathcal{A} \circ \overline{\mathcal{F}})^{min}$, por la Observación 1.2.18, el ideal de Banach $\mathcal{A} \circ \overline{\mathcal{F}}$ esta asociado a la norma tensorial $\alpha_{\mathcal{A}}$. Si β es la norma tensorial asociada a $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$, como $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$ es suryectivo, por el Lema 1.2.20 resulta que β inyectiva a izquierda. Para ver que $/\alpha = \beta$ basta con mostrar que $\ell_\infty^n \otimes_{\alpha_\mathcal{A}} W = \ell_\infty^n \otimes_\beta W$ para todo espacio de dimensión finita W, donde ℓ_1^n y ℓ_∞^n son espacios de dimensión n con la norma $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$, respectivamente [DF, Proposition 20.9]. Por otra parte, por [DF, Corollary 9.8] se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A} \circ \overline{\mathcal{F}}(\ell_1^n; W) = \mathcal{K}_\mathcal{A}(\ell_1^n; W)$. Finalmente, para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo espacio de dimensión finita W se tienen las isometrías

$$\ell_\infty^n \otimes_{\alpha_\mathcal{A}} W = \mathcal{A} \circ \overline{\mathcal{F}}(\ell_1^n; W) = \mathcal{K}_\mathcal{A}(\ell_1^n; W) = \ell_\infty^n \otimes_\beta W,$$

como se quería mostrar. $\square$

Ejemplo 1.2.22. Sea $1 \leq p < \infty$. Entonces $\mathcal{K}_p$ esta relacionado con la norma tensorial $/d_p$.

Demostración: Por el Ejemplo 1.2.13, ítem (d), $\mathcal{K}_p = \mathcal{K}_{\mathcal{N}^p}$. Cómo el ideal de los operadores p-nucleares a derecha esta asociado a la norma tensorial d_p, por la Proposición 1.2.21 se tiene que $\mathcal{K}_p$ esta asociado a $/d_p$. $\square$

Por el ejemplo anterior y la Observación 1.2.18 podemos caracterizar el ideal maximal del ideal de operadores p-compactos. Este resultado fue obtenido en forma independiente por Pietsch [Pie3, Theorem 11].

Proposición 1.2.23. *Para $1 \leq p < \infty$, se tiene la igualdad isométrica $\mathcal{K}_p^{max} = \Pi_p^d$.*

Demostración: Primero notemos que, para $1 \leq p < \infty$, el ideal de Banach de los operadores p-sumantes es un ideal de Banach maximal y esta asociado a la norma tensorial $g_{p'}^*$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ y $p' = \infty$ si $p = 1$, [DF, Pag. 210]. Por [DF, Corollary 17.8 (3)], Π_p^d es un ideal de Banach maximal y esta asociado a la norma tensorial

$$(g_{p'}^*)^t = g_{p'}'. \tag{1.2}$$

Por [DF, Proposition 20.14], tenemos la igualdad $g_{p'}^* = g_p\backslash$. Como $g_p = d_p^t$, utilizando la definición de norma tensorial inyectiva a izquierda, tenemos que

$$g_{p'}^* = g_p\backslash = d_p^t\backslash = (/d_p)^t. \tag{1.3}$$

Uniendo las ecuaciones (1.2) y (1.3) y teniendo en cuenta que $\alpha^{tt} = \alpha$ para cualquier norma tensorial, llegamos a que $/d_p = g_{p'}'$, concluyendo que Π_p^d esta asociado a $/d_p$. Finalmente, por la Observación 1.2.18, obtenemos que $\mathcal{K}_p^{max} = \Pi_p^d$. $\square$

Utilizando el ideal Π_p^d, obetenemos otras descripciones del ideal $\mathcal{K}_p$.

Ejemplos 1.2.24. Sea $1 \leq p < \infty$, las siguientes igualdades valen.

(a) $\mathcal{K}_p = \mathcal{K}_{\Pi_p^d}$ isométricamente.

(b) $(\mathcal{K}_p^d)^{max} = \Pi_p$ isométricamente.

(c) $\mathcal{K}_p = \Pi_p^d \circ \mathcal{K}$ isométricamente.

(d) Para todo par de espacios de Banach X e Y, $T \in \Pi_p^d(X;Y)$ si y sólo si T aplica conjuntos compactos en p-compactos.

Demostración: Primero notemos que por [DF, Corollary 21.3] y [DF, 21.5], Π_p^d es totalmente accesible. Luego, por el Corolario 1.2.10, $\mathcal{K}_{\Pi_p^d} = ((\Pi_p^d)^{min})^{sur}$. De la Observación 1.2.18 y de la proposición anterior, obtenemos que $(\Pi_p^d)^{min} = \mathcal{K}_p^{min}$ y vale la igualdad isométrica $\mathcal{K}_{\Pi_p^d} = (\mathcal{K}_p^{min})^{sur}$. En el Ejemplo 1.2.13, ítem (c) vimos que $\mathcal{K}_p = (\mathcal{K}_p^{min})^{sur}$, por lo que tenemos el ítem (a).

Para cualquier ideal de Banach $\mathcal{A}$, por [Pie1, Proposition 8.7.12], $(\mathcal{A}^d)^{max} = (\mathcal{A}^{max})^d$. Luego, el ítem (b) se obtiene de la proposición anterior. Para probar (c), notar que Π_p^d es maximal y suryectivo, luego del Ejemplo 1.2.13 item (b) y de la Proposición 1.2.15 se tiene el resultado. El ítem (c) y (d) se obtienen de aplicar el Corolario 1.2.16 y la Proposición 1.2.17 respectivamente. $\square$

El ítem (b) también lo obtuvo Pietsch en [Pie3, Theorem 12] mientras que el ítem (c) fué obtenido por Ain, Lillemets y Oja [ALO, Corollary 4.9] en forma independiente.

En particular, combinando el ítem (b) y la Proposición 1.2.14, damos otra caracterización de las sucesiones p-nulas.

Proposición 1.2.25. *Sea $1 \leq p < \infty$. Entonces $c_{0,\mathcal{N}^p} = c_{0,\Pi_p^d}$.*

Al conocer la norma tensorial asociada a $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$ podemos caracterizar su ideal minimal, en términos de un producto tensorial, como muestra la siguiente proposición.

Proposición 1.2.26. *Sean X e Y espacios de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal maximal accesible a derecha. Entonces*

$$Y' \widehat{\otimes}_{/\alpha_{\mathcal{A}}} X = \mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{min}(Y;X) \quad \text{isométricamente.}$$

Más aún, si X o Y' tienen la propiedad de aproximación, entonces

$$Y' \widehat{\otimes}_{/\alpha_{\mathcal{A}}} X = \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Y;X) \quad \text{isométricamente.}$$

Demostración: Como $\alpha_{\mathcal{A}}$ es accesible a derecha (ya que su ideal maximal asociado lo es), por [DF, Proposition 21.1 (2)], $/\alpha_{\mathcal{A}}$ es totalmente accesible. Una aplicación directa de [DF, Corolario 22.2.1] muestra que $Y'\widehat{\otimes}_{/\alpha_{\mathcal{A}}}X = \mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{min}(Y;X)$.

Por otra parte, de la Proposición 1.2.12 tenemos que $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Y;X) = ((\mathcal{A}^{min})^{sur})(Y;X)$ y, por lo tanto, $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Y;X)^{min} = ((\mathcal{A}^{min})^{sur})^{min}(Y;X)$. Si X tiene propiedad de aproximación, una aplicación de [DF, Proposition 25.11] muestra que $(\mathcal{A}^{min})^{sur}(Y;X) = ((\mathcal{A}^{min})^{sur})^{min}(Y;X)$. El mismo argumento sirve si Y' tiene la propiedad de aproximación, ya que $\mathcal{A}$ es accesible a derecha. $\square$

De la proposición anterior y del Ejemplo 1.2.22 se desprende el siguiente resultado.

Ejemplo 1.2.27. Para $1 \leq p < \infty$, tenemos la igualdad

$$Y'\widehat{\otimes}_{/d_p}X = \mathcal{K}_p^{min}(Y;X) \quad \text{isométricamente.}$$

Más aún, si X o Y' tienen la propiedad de aproximación, entonces

$$Y'\widehat{\otimes}_{/d_p}X = \mathcal{K}_p(Y;X) \quad \text{isométricamente.}$$

Para cualquier ideal de Banach $\mathcal{A}$, siempre se tienen las inclusiones $\mathcal{A}^{min} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{A}^{max}$. El siguiente resultado muestra que, si $\mathcal{A}$ un ideal maximal accesible a derecha, las normas $\|\cdot\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{min}}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{max}}$ coinciden.

Proposición 1.2.28. *Sea $\mathcal{A}$ un ideal maximal accesible a derecha. Valen las siguientes inclusiones isométricas*

$$\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{min} \overset{1}{\hookrightarrow} \mathcal{K}_{\mathcal{A}} \overset{1}{\hookrightarrow} \mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{max}.$$

En otras palabras, si $T \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{min}(X;Y)$, entonces

$$\|T\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{min}} = \|T\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} = \|T\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{max}}.$$

Demostración: Sean X e Y espacios de Banach. Tenemos que

$$\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{min}(X;Y) \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(X;Y) \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} \mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{max}(X;Y),$$

es decir $\|T\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{max}} \leq \|T\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} \leq \|T\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{min}}$ para todo operador $T \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{min}(X;Y)$. Como $\mathcal{A}$ es maximal y accesible a derecha, tenemos que $\mathcal{A}^{sur}$ es totalmente accesible [DF, Ex 21.1]. Luego, por la Proposición 1.2.15, $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{max}$ es totalmente accesible. Aplicando [DF, Corollary 22.5], tenemos que $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{min}(X;Y) \overset{1}{\hookrightarrow} \mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{max}(X;Y)$; lo cuál implica que todas las inclusiones son isometrías. $\square$

Ejemplo 1.2.29. Valen las siguientes inclusiones isométricas

$$\mathcal{K}_p^{min} \overset{1}{\hookrightarrow} \mathcal{K}_p \overset{1}{\hookrightarrow} \mathcal{K}_p^{max} \overset{1}{=} \Pi_p^d.$$

En particular, $\mathcal{K}_p^{min}$ es un ideal de Banach totalmente accesible ya que Π_p^d lo es.

Para finalizar esta sección, daremos una descripción de las sucesiones $\mathcal{A}$-nulas. Antes de ello, recordemos que para todo espacio de Banach X, $c_0(X) = c_0 \widehat{\otimes}_\epsilon X$ [DF, Proposition 8.2]. En esta situación, a $c_0(X)$ se lo considera con su norma usual. Para presentar un resultado análogo a este con las sucesiones $\mathcal{A}$-nulas, vamos a introducir una norma en este espacio.

Definición 1.2.30. *Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal de Banach. En $c_{0,\mathcal{A}}(X)$ se define la norma*

$$\|(x_n)_n\|_{c_{0,\mathcal{A}}(X)} = m_{\mathcal{A}}((x_n)_n; X).$$

Observación 1.2.31. En virtud de la Proposición 1.1.14, si denotamos con $c_{00}(X)$ al espacio de las sucesiones de X con finitas coordenadas distintas a cero, tenemos que

$$c_{0,\mathcal{A}}(X) = \overline{c_{00}(X)}^{\|\cdot\|_{c_{0,\mathcal{A}}(X)}},$$

con lo cuál $(c_{0,\mathcal{A}}(X), \|\cdot\|_{c_{0,\mathcal{A}}(X)})$ es un espacio de Banach.

Proposición 1.2.32. *Sean $\mathcal{A}$ un ideal de Banach accesible a derecha y $\alpha_{\mathcal{A}}$ su norma tensorial asociada. Entonces*

$$c_0 \widehat{\otimes}_{\alpha_{\mathcal{A}}} X = c_{0,\mathcal{A}}(X) \quad \text{isométricamente,}$$

donde la identificación de $c_{0,\mathcal{A}}(X)$ a $c_0 \widehat{\otimes}_{\alpha_{\mathcal{A}}} X$ viene dada por el operador $(x_n)_n \mapsto \sum_{n=1}^\infty e_n \otimes x_n$.

Demostración: Sea $\Phi \colon c_{00}(X) \to c_0 \otimes X$ el operador dado por $(x_j)_{j=1}^n \mapsto \sum_{j=1}^n e_j \otimes x_j$. Como $\mathcal{A}$ es accesible a derecha, por el Corolario 1.2.10 tenemos que $\mathcal{K}_{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}^{min})^{sur}$ y aplicando [DF, Corollary 9.8] obtenemos la igualdad $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\ell_1; X) = \mathcal{A}^{min}(\ell_1; X)$. Como $\ell_\infty = \ell_1'$ tiene propiedad de aproximación, por [DF, Corollary 22.2] obtenemos que

$$\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\ell_1; X) = \mathcal{A}^{min}(\ell_1; X) = \ell_\infty \widehat{\otimes}_{\alpha_{\mathcal{A}}} X.$$

Como $c_0'' = \ell_\infty$, $c_0 \otimes_{\alpha_{\mathcal{A}}} X$ es un subespacio de $\ell_\infty \otimes_{\alpha_{\mathcal{A}}} X$ [DF, Lemma 13.3]. Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned}
\alpha_{\mathcal{A}}(\textstyle\sum_{j=1}^n e_j \otimes x_j; c_0, X) &= \alpha_{\mathcal{A}}(\textstyle\sum_{j=1}^n e_j \otimes x_j; \ell_\infty, X) \\
&= \|\sum_{j=1}^n e_j' \otimes x_j\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\ell_1; X)} \\
&= m_{\mathcal{A}}((\textstyle\sum_{j=1}^n e_j' \otimes x_j)(B_{\ell_1}); X) \\
&= m_{\mathcal{A}}((x_j)_{j=1}^n; X) \\
&= \|(x_j)_{j=1}^n\|_{c_{0,\mathcal{A}}(X)},
\end{aligned}$$

donde se identifica al elemento $e_j \in c_0$ con la funcional e_j' sobre ℓ_1.

Luego, el operador Φ resulta ser una isometría y, por lo tanto, podemos extenderlo y definir al operador $\Psi\colon c_{0,\mathcal{A}}(X) \to c_0\widehat{\otimes}_{\alpha_\mathcal{A}} X$ como $\Psi((x_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \otimes x_n$, que también es una isometría. Resta ver Ψ es suryectivo. Sea $z \in c_0\widehat{\otimes}_{\alpha_\mathcal{A}} X$ y tomemos una sucesión $(z_k)_k \subset c_0 \otimes_{\alpha_\mathcal{A}} X$ tal que $\lim_{k\to\infty} \alpha_\mathcal{A}(z_k - z; c_0, X)$. Luego, cada z_k es de la forma, $z_k = \sum_{j=1}^{n_k} \beta_j^k \otimes x_j^k$, donde $\beta_j^k \in c_0$ y $\beta_j^k = \displaystyle\sum_{l=1}^{\infty} \beta_j^k{}_l e_l$. Tenemos la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} z_k = \sum_{j=1}^{n_k} \beta_j^k \otimes x_j^k &= \sum_{j=1}^{n_k} (\sum_{l=1}^{\infty} \beta_j^k{}_l e_l) \otimes x_j^k \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_k} \beta_j^k{}_l e_l \otimes x_j^k \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} e_l \otimes (\sum_{j=1}^{n_k} \beta_j^k{}_l x_j^k). \end{aligned}$$

Para cada k y l fijos, denotemos con y_l^k al elemento de X definido por $y_l^k = \sum_{j=1}^{n_k} \beta_j^k{}_l x_j^k$ y con y^k a la sucesión $(y_l^k)_l$. Como para cada $k \in \mathbb{N}$ fijo

$$\begin{aligned} \mathrm{co}\{y^k\} = & \Big\{ \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_l y_l^k \colon (\gamma_l)_l \in B_{\ell_1} \Big\} \\ = & \Big\{ \sum_{j=1}^{n_k} (\sum_{l=1}^{\infty} \gamma_l \beta_j^k{}_l)\ x_j^k \colon (\gamma_l)_l \in B_{\ell_1} \Big\} \\ \subset & \sup_{j=1,\dots,n_k} \Big\{ \|\beta_j^k\|_\infty \Big\}\ \mathrm{co}\Big\{ (x_j^k)_{j=1}^{n_k} \Big\}, \end{aligned}$$

se tiene que $y^k \in c_{0\mathcal{A}}(X)$, $z_k = \Psi(y^k)$ y que $\alpha_\mathcal{A}(z_k; c_0, X) = \|y^k\|_{c_{0\mathcal{A}}}$. Luego, $(y^k)_k$ es una sucesión de Cauchy en $c_{0\mathcal{A}}(X)$ y por lo tanto exite $y \in c_{0\mathcal{A}}(X)$ tal que $y^k \to y$. Luego $\Psi(y) = z$ con lo que completamos la demostración. □

Corolario 1.2.33. *Sean $\mathcal{A}$ un ideal de Banach accesible a derecha y $\alpha_\mathcal{A}$ su norma tensorial asociada. Entonces*

$$c_{0,\mathcal{A}}(X)' = \mathcal{A}'(c_0; X') \quad \text{isométricamente},$$

donde $\mathcal{A}'$ es el ideal de Banach maximal asociado a la norma tensorial $\alpha_\mathcal{A}'$.

Más aún, si $(x_n)_n \in c_{0,\mathcal{A}}(X)$ y $\phi \in c_{0,\mathcal{A}}(X)'$, entonces existe $S \in \mathcal{A}'(c_0; X')$ tal que

$$\phi((x_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} S(e_n)(x_n).$$

Demostración: Por el Teorema de Representacón para ideales Maximales (ver [DF, Theorem 17.5]) se tiene que, $(c_0\widehat{\otimes}_{\alpha_\mathcal{A}} X)' = \mathcal{A}'(c_0; X')$. Aplicando la proposición anterior, se tiene el resultado. □

Si en la Proposición 1.2.32 consideramos $\mathcal{A} = \mathcal{N}^p$, recuperamos el resultado de Oja [Oja3, Theorem 4.1] para sucesiones p-nulas.

Teorema 1.2.34. *Sean X un espacio de Banach y $1 \leq p \leq \infty$. Entonces*

$$c_0 \widehat{\otimes}_{d_p} X = c_{0,\mathcal{N}^p}(X) \quad \text{isométricamente.}$$

Demostración: Como las sucesiones p-nulas son las sucesiones $\mathcal{N}^p$-nulas (Corolario 1.2.14) y, como vimos en la Observación 1.2.19, $\mathcal{N}^p$ esta asociado a la norma tensorial d_p, una aplicación directa de la Proposición 1.2.32 muestra el resultado. □

1.2.4. Operadores $\mathcal{A}$-compactos y la cápsula inyectiva

Recordemos que la definicón de un ideal inyectivo fue dada en la Sección 1.2.1. En lo que sigue, veremos que ideales inyectivos $\mathcal{A}$ producen ideales $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$ inyectivos. Antes, necesitamos el siguiente lema.

Lema 1.2.35. *Sea $\mathcal{A}$ un ideal de Banach, entonces*

$$(\mathcal{A}^{inj\ min})^{sur} = (\mathcal{A}^{min\ inj})^{sur} \quad \text{isométricamente.}$$

Demostración: Sean X e Y espacios de Banach. Un operador T pertenece a $(\mathcal{A}^{inj\ min})^{sur}(X;Y)$ si y sólo si $q_X \circ T \in \mathcal{A}^{inj\ min}(\ell_1(B_X);Y)$, donde $q_X : \ell_1(B_X) \twoheadrightarrow X$ es la suryección canónica. Como $(\ell_1(B_X))'$ tiene la propiedad de aproximación, por [DF, Proposition 25.11.2] tenemos la igualdad $\mathcal{A}^{inj\ min}(\ell_1(B_X);Y) = \mathcal{A}^{min\ inj}(\ell_1(B_X);Y)$ isométricamente. En consequencia, obtenemos que $q_X \circ T \in \mathcal{A}^{min\ inj}(\ell_1(B_X);Y)$, lo cuál es equivalentemente a que $T \in (\mathcal{A}^{min\ inj})^{sur}(X;Y)$, con lo que concluye la prueba del lema. □

Proposición 1.2.36. *Sea $\mathcal{A}$ un ideal de Banach inyectivo. Entonces $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$ es inyectivo. Es decir,*

$$\mathcal{K}_{\mathcal{A}} = \mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{inj} \quad \text{isométricamente.}$$

Demostración: Como $\mathcal{A}$ es inyectivo, es accesible a derecha. Aplicando el Corolario 1.2.10, [Pie1, Proposition 8.5.12] y el Lema 1.2.35 tenemos que

$$\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{inj} = (\mathcal{A}^{min\ sur})^{inj} = (\mathcal{A}^{min\ inj})^{sur} = (\mathcal{A}^{inj\ min})^{sur} = (\mathcal{A}^{min})^{sur} = \mathcal{K}_{\mathcal{A}}.$$

donde todas las igualdades son isométricas. □

Notemos que si Y es un espacio de Banach que contiene a X como subespacio cerrado, entonces si un conjunto $K \subset X$ es relativamente $\mathcal{A}$-compacto como subconjunto de X,

K es relativamente $\mathcal{A}$-compacto como subconjunto de Y. Además se cumple la desigualdad $m_{\mathcal{A}}(K;Y) \leq m_{\mathcal{A}}(K;X)$. Sin embargo, el tamaño $m_{\mathcal{A}}$ y la $\mathcal{A}$-compacidad de un conjunto depende del espacio en donde se lo considere, como se ve en los siguientes resultados.

Corolario 1.2.37. *Sean X un espacio de Banach, $K \subset X$ un conjunto y $\mathcal{A}$ un ideal de Banach tales que $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$ es inyectivo. Entonces, K es relativamente $\mathcal{A}$-compacto en X si y sólo si K es relativamente $\mathcal{A}$-compacto en Y, para todo espacio de Banach Y que contiene a X. Más aún, $m_{\mathcal{A}}(K;X) = m_{\mathcal{A}}(K;Y)$.*

Demostración: Supongamos que $K \subset X \subset Y$ es relativamente $\mathcal{A}$-compacto en Y y denotemos con $i\colon X \to Y$ la inclusión. Podemos suponer que K es absolutamente convexo $\mathcal{A}$-compacto. En particular, K es un conjunto compacto en X y por [Rya2, Lemma 4.11 (a)], existen un espacio de Banach Z y un operador $T \in \mathcal{K}(Z;X)$ tales que $K = T(B_Z)$. Luego, tenemos que $i \circ T \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Z;Y)$ y, como $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$ es inyectivo, por [DF, Párrafo 9.7], tenemos que $T \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Z;X)$ y $\|T\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} = \|i \circ T\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}$. Por lo tanto, $K = T(B_Z)$ es $\mathcal{A}$-compacto en X y $m_{\mathcal{A}}(K;X) \leq m_{\mathcal{A}}(K;Y)$, con lo que se tiene el resultado. $\square$

En la Proposición 1.2.36, la hipótesis de la inyectividad del ideal $\mathcal{A}$ es necesaria, como se puede ver en la siguiente proposición.

Proposición 1.2.38. *El ideal de Banach $\mathcal{K}_p$ no es inyectivo cualquiera sea $1 \leq p < \infty$.*

Demostración: Supongamos que $\mathcal{K}_p$ es inyectivo. Como $\mathcal{K}_p$ esta asociado a la norma tensorial $/d_p$ (Ejemplo 1.2.22), por el Lema 1.2.20 resulta que $/d_p$ es una norma tensorial inyectiva a derecha. Luego su traspuesta $(/d_p)^t = g^*_{p'}$ es inyectiva a izquierda. Como el ideal maximal de los operadores p-sumantes, Π_p, esta asociado a la norma tensorial $g^*_{p'}$, por [DF, Theorem 20.11] resulta que Π_p es un ideal suryectivo, lo cuál no puede ocurrir. En efecto, por el teorema de Grothendieck, [DF, Theorem 23.10], $id\colon \ell_2 \to \ell_2$ pertenece a la cápsula suryectiva de Π_p, Π_p^{sur}, para todo p pero no es p-sumante. $\square$

Como consequencia se tiene que la p-compacidad y el tamaño de un conjunto depende del espacio en el que esta incluído.

Corolario 1.2.39. *Dado $1 \leq p < \infty$, existen un espacio de Banach X, un subespacio cerrado $Y \subset X$ y un conjunto $K \subset Y$ tales que K es p-compacto en X pero K no es p-compacto en Y.*

Demostración: Como $\mathcal{K}_p$ no es inyectivo, existen espacios de Banach X, Y y Z tales que Y es un subespacio de X, y un operador $T \in \mathcal{L}(Z;Y)$, tal que si $i\colon Y \to X$ es la inclusión, $i \circ T$

es p-compacto pero T no lo es. Tomando $K = T(B_Z)$ se ve que $m_{\mathcal{N}^p}(K;X) < \infty$ mientras que $m_{\mathcal{N}^p}(K;Y) = \infty$. □

1.2.5. Operadores $\mathcal{A}$-compactos y la cápsula regular

En la sección anterior vimos que la $\mathcal{A}$-compacidad de un conjunto depende del espacio en donde es considerado. Sin embargo, la $\mathcal{A}$-compacidad de un conjunto no depende en el siguiente caso: si el conjunto es visto en un espacio o en su bidual. Para mostrar esto, estudiaremos la cápsula regular de $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$. Dado un ideal de Banach $\mathcal{A}$ la cápsula regular de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^{reg}$, son todos los operadores $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ tales que

$$j_Y \circ T \in \mathcal{A}(X;Y'').$$

La norma para los operadores de $\mathcal{A}^{reg}$ viene dada por $\|T\|_{\mathcal{A}^{reg}} = \|j_Y \circ T\|_{\mathcal{A}}$ y hace que $\mathcal{A}^{reg}$ sea un ideal de Banach. Un ideal de Banach $\mathcal{A}$ es regular si $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{reg}$ isométircamente.

Ejemplos.

(a) De las definiciones se deduce que todo ideal de Banach inyectivo es regular.

(b) Todo ideal maximal es regular [DF, Corollary 17.8 (2)].

(c) Los ideales $\mathcal{K}$ y $\mathcal{W}$ son regulares.

El siguiente resultado muestra que tanto $\mathcal{A}$ como su cápsula regular $\mathcal{A}^{reg}$ producen los mismos operadores compactos. Antes, recordemos que un conjunto $L \in \ell_1$ es relativamente compacto si y sólo si dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|x - \pi_n x\| \leq \varepsilon$ para todo $x \in L$, donde $\pi_n \colon \ell_1 \to \ell_1$ es la proyección en las primeras n coordenadas.

Proposición 1.2.40. *Sea $\mathcal{A}$ un ideal. Entonces*

$$\mathcal{K}_{\mathcal{A}} = \mathcal{K}_{\mathcal{A}^{reg}} \quad \text{isométricamente.}$$

Demostración: Como $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^{reg}$, por la Proposición 1.1.9 tenemos que $\mathcal{K}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{K}_{\mathcal{A}^{reg}}$. Luego, gracias a la Proposición 1.2.6, sólo resta mostrar que los conjutos relativamente $\mathcal{A}^{reg}$-compactos son relativamente $\mathcal{A}$-compactos. Sean X un espacio de Banach y K un conjunto $\mathcal{A}^{reg}$-compacto de X. Dado $\varepsilon > 0$, por la Proposición 1.1.12, existen un operador $T \in \mathcal{A}^{reg}(\ell_1;X)$ y un conjunto compacto $M \subset B_{\ell_1}$ tales que $K \subset T(M)$ y $\|T\|_{\mathcal{A}^{reg}} \leq (1+\varepsilon) m_{\mathcal{A}^{reg}}(K;X)$. Por [Rya2, Lemma 4.11], existen un conjunto $L \subset B_{\ell_1}$ compacto, un espacio de Banach Y y un operador compacto e inyectivo $S \in \mathcal{K}(Y;\ell_1)$ tales que $M \subset L = S(B_Y)$ y $S^{-1}(M)$ es compacto. Como $L \subset \ell_1$ es relativamente compacto, existe una sucesión $(\gamma_n)_n \in B_{c_0}$ tal que

$$L \subset \{x \in \ell_1 \colon \|x - \pi_n x\| \leq \gamma_n, n \geq 1\}.$$

Consideremos la sucesión de operadores $(T \circ \pi_n \circ S)_n \subset \mathcal{F}(Y;X)$. Es claro que $(T \circ \pi_n \circ S)_n$ converge en $\|\cdot\|$ a $T \circ S$, por lo que si mostramos que la sucesión $(T \circ \pi_n \circ S)_n$ es $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ de Cauchy, obtenemos que $T \circ S \in \mathcal{A}(Y,X)$ y, como $K \subset T \circ S(B_Y) = T(L)$, resulta que K es relativamente $\mathcal{A}$-compacto.

Notemos con W_n a los subespacios de X'', $W_n = J_X \circ T \circ \pi_n \circ S(Y)$, $n \in \mathbb{N}$. Como son de dimensión finita, por el principio de reflexividad local (ver, por ejemplo, [Rya2, Theorem 5.54]), existen operadores $R_n \in \mathcal{L}(W_n;X)$ tales que $\|R_n\| \leq 1+\varepsilon$ y cumplen la igualdad

$$R_n \circ J_X \circ T \circ \pi_n \circ Sy = T \circ \pi_n \circ Sy$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $y \in Y$.

En particular, como $W_n \subset W_m$ para todo $m \geq n$, se tiene que

$$R_m \circ J_X \circ T \circ \pi_n \circ Sy = T \circ \pi_n \circ Sy.$$

Luego, para $m \geq n$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|T \circ \pi_n \circ S - T \circ \pi_m \circ S\|_{\mathcal{A}} &= \|R_m \circ J_X \circ T \circ \pi_n \circ S - R_m \circ J_X \circ T \circ \pi_m \circ S\|_{\mathcal{A}} \\
&\leq (1+\varepsilon)\|J_X \circ T \circ \pi_n \circ S - J_X \circ T \circ \pi_m \circ S\|_{\mathcal{A}} \\
&= (1+\varepsilon)\|T \circ \pi_n \circ S - T \circ \pi_m \circ S\|_{\mathcal{A}^{reg}} \\
&\leq (1+\varepsilon)\|T\|_{\mathcal{A}^{reg}}\|\pi_n \circ S - \pi_m \circ S\| \\
&\leq (1+\varepsilon)\|T\|_{\mathcal{A}^{reg}} \sup_{j=n,n+1,\ldots,m} |\gamma_j|
\end{aligned}$$

Como la sucesión $(\gamma_n)_n$ converge a cero, se tiene que $(T \circ \pi_n \circ S)_n$ es una sucesión $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ de Cauchy y por lo dicho anteriormente, el conjuto K es relativamente $\mathcal{A}$-compacto. La isometría se obtiene de las desigualdades

$$m_{\mathcal{A}}(K;X) \leq \|T\|_{\mathcal{A}^{reg}} \leq (1+\varepsilon) m_{\mathcal{A}^{reg}}(K;X). \qquad \square$$

Una aplicación directa de esta proposición muestra que el ideal $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$ es regular.

Teorema 1.2.41. *Sea $\mathcal{A}$ un ideal de Banach. Entonces*

$$\mathcal{K}_{\mathcal{A}} = \mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{reg} \quad \text{isométricamente.}$$

Demostración: Como el ideal de Banach de operadores compactos es regular [Pie1, Proposition 4.5.8], aplicando [Oer, Corollary 2.1] tenemos que $(\mathcal{A}\circ\mathcal{K})^{reg} = \mathcal{A}^{reg}\circ\mathcal{K}$. Por lo tanto, como

$$\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{reg} = (\mathcal{A}^{sur}\circ\mathcal{K})^{reg} = (\mathcal{A}^{sur})^{reg}\circ\mathcal{K} \quad \text{isométricamente.} \tag{1.4}$$

Notemos que para todo ideal $\mathcal{A}$ vale $(\mathcal{A}^{sur})^{reg} = (\mathcal{A}^{reg})^{sur}$ y que, por la Proposición 1.2.7, $(\mathcal{A}^{reg})^{sur}\circ\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\mathcal{A}^{reg}}$. Luego, de (1.4) se sigue que $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{reg} = \mathcal{K}_{\mathcal{A}^{reg}}$, donde ambas igualdades son isométricas. Por la proposición anterior, obtenmos que $\mathcal{K}_{\mathcal{A}} = \mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{reg}$ isométricamente, como queríamos. $\square$

Como consecuencia de la proposición anterior, la $\mathcal{A}$-compacidad de un conjunto no varía si se lo ve en un espacio o en su bidual. Como su demostración es análoga a la de la Proposición 1.2.36, la omitiremos.

Corolario 1.2.42. *Sean X un espacio de Banach, K un subconjunto de X y $\mathcal{A}$ un ideal de Banach. Entonces K es relativamente $\mathcal{A}$-compacto en X si y sólo si $K \subset X''$ es relativamente $\mathcal{A}$-compacto. Más aún, $m_{\mathcal{A}}(K;X) = m_{\mathcal{A}}(K;X'')$.*

Como consequencia de la regularidad de $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$, al aplicarle dos veces el procedimiento dual se vuelve a obtener $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$, como ocurre con el ideal de Banach $\overline{\mathcal{F}}$ [DF, Ex. 9.2] y todo ideal maximal [DF, Corollary 17.8 (4)].

Corolario 1.2.43. *Sea $\mathcal{A}$ un ideal de Banach. Entonces*

$$\mathcal{K}_{\mathcal{A}} = \mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{dd}, \quad \text{isométricamente.}$$

Demostración: Gracias al Teorema 1.2.41, para obtener el resultado basta con mostrar que $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{reg} = \mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{dd}$ isométricamente.

Primero, notemos que para cualquier ideal de Banach $\mathcal{A}$, siempre vale que $\mathcal{A}^{dd}\subset\mathcal{A}^{reg}$, con $\|\cdot\|_{\mathcal{A}^{reg}} \le \|\cdot\|_{\mathcal{A}^{dd}}$. En efecto, para cualquier par de espacios de Banach X e Y, si $T\in\mathcal{A}^{dd}(X;Y)$ entonces $T''\in\mathcal{A}(X'';Y'')$ y por lo tanto, $T''\circ j_X \in \mathcal{A}(X;Y'')$. Como $j_Y\circ T = T''\circ j_X$, tenemos que $j_Y\circ T\in\mathcal{A}(X;Y'')$ y, por lo tanto, $T\in\mathcal{A}^{reg}(X;Y)$. Además,

$$\|T\|_{\mathcal{A}^{reg}} = \|j_Y\circ T\|_{\mathcal{A}} = \|T''\circ j_X\|_{\mathcal{A}} \le \|T''\|_{\mathcal{A}} = \|T\|_{\mathcal{A}^{dd}}.$$

Ahora, tomemos un operador $T\in\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{reg}(X;Y)$ que, en particular es un operador compacto. Luego se tiene la igualdad

$$T''(B_{X''}) \subset \overline{J_Y\circ T(B_X)}^{w^*} = \overline{J_Y\circ T(B_X)}.$$

Por lo tanto, como el conjunto $\overline{J_Y \circ T(B_X)}$ es $\mathcal{A}$-compacto, $T'' \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(X''; Y'')$. Más aún,

$$\|T\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{dd}} = \|T''\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} \leq m_{\mathcal{A}}(\overline{J_Y \circ T(B_X)}; Y'') = \|J_Y \circ T\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} = \|T\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{reg}},$$

con lo que tenemos la isometría. □

En [DPS2, Corollary 3.4], Delgado, Piñeiro y Serrano muestran por un lado que un operador T es cuasi p-nuclear si y sólo si T' es p-compacto y $\|T'\|_{\mathcal{K}_p} = \|T\|_{\mathcal{QN}_p}$. Por otro lado, T es p-compacto si y sólo si T' es cuasi p-nuclear y $\|T'\|_{\mathcal{K}_p} \leq \|T\|_{\mathcal{QN}_p}$ [DPS2, Proposition 3.8]. Una apliación del Corolario 1.2.43 mejora este último resultado.

Teorema 1.2.44. *Para $1 \leq p < \infty$, valen las igualdades*

$$\mathcal{K}_p^d = \mathcal{QN}_p \quad \text{y} \quad \mathcal{QN}_p^d = \mathcal{K}_p \quad \text{isométricamente.}$$

Demostración: Por lo dicho, ya sabemos que $\mathcal{K}_p^d = \mathcal{QN}_p$ y, por el corolario anterior tenemos que $\mathcal{K}_p = \mathcal{K}_p^{dd}$, donde ambas igualdades son isométricas. Luego, $\mathcal{K}_p = \mathcal{K}_p^{dd} = (\mathcal{K}_p^d)^d = \mathcal{QN}_p^d$ isométricamente. □

1.2.6. El ideal dual de los operadores $\mathcal{A}$-compactos

En virtud del Teorema 1.2.44, para cualquier par de espacios de Banach X e Y y para $1 \leq p < \infty$ un operador $T \in \mathcal{K}_p^d(X; Y)$ si y sólo si existe una sucesión $(x'_n)_n \in \ell_p(X')$ tal que

$$\|Tx\| \leq (\sum_{n=1}^{\infty} |x'_n(x)|^p)^{\frac{1}{p}} \quad \text{para todo } x \in X.$$

Ahora vamos generalizar este resultado para el ideal $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^d$, donde $\mathcal{A}$ es un ideal de Banach cualquiera. Para ello, empecemos con el siguiente lema, que esta inspirado en [DPS2, Proposition 3.2].

Lema 1.2.45. *Sean X e Y espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(X; Y)$ y $(x'_n)_n \in c_0(X')$. Son equivalentes:*

(i) $\|Tx\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |x'_n(x)|$ *para todo $x \in X$.*

(ii) $T'(B_{Y'}) \subseteq \overline{\text{co}\{(x'_n)_n\}}$.

Demostración: Primero notemos que como el conjunto $\text{co}\{(x'_n)_n\} \subset X'$ es relativamente compacto, entonces su clausura en $\| \cdot \|$ y en la topología débil$*$ coinciden. Supongamos que (i) no implica (ii). Luego, existe $y' \in Y'$ tal que $T'y' \notin \overline{\text{co}\{(x'_n)_n\}}$. Como el conjunto $\overline{\text{co}\{(x'_n)_n\}}$ es absolutamente convexo, por el teorema de Hahn-Banach podemos separar estrictamente a $T'y'$ de $\overline{\mathrm{co}\{(x_n')_n\}}$ por un hiperplano de la topología débil$*$. En otras palabras, existe $x \in X$ tal que $(T'y')(x) > 1$ y $|x'(x)| \leq 1$ para todo $x' \in \overline{\mathrm{co}\{(x_n')_n\}}$. Entonces, por un lado tenemos la desigualdad

$$1 < |(T'y')(x)| = |y'(Tx)| \leq \|Tx\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n'(x)|.$$

Por otro lado, como $x' \in \overline{\mathrm{co}\{(x_n')_n\}}$ entonces $x' = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n'$, para alguna sucesión $(\alpha_n)_n \in \overline{B}_{\ell_1}$ y, como $|x'(x)| \leq 1$ para todo $x' \in \overline{\mathrm{co}\{(x_n')_n\}}$, tenemos que $|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n'(x)| \leq 1$ para toda sucesión $(\alpha_n)_n \in \overline{B}_{\ell_1}$, concluyendo que $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n'(x)| \leq 1$, lo cuál es una contradicción.

Ahora supongamos que vale (ii) y sea $x \in X$. Para $\varepsilon > 0$ fijo, existe $y' \in B_{Y'}$ tal que $\|Tx\| \leq |y'(Tx)| + \varepsilon$. Como $T'(B_{Y'}) \subseteq \overline{\mathrm{co}\{(x_n')_n\}}$, existe una sucesión $(\alpha_n)_n \in \overline{B}_{\ell_1}$ que cumple la igualdad $T'y' = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n'$. Por lo tanto, tenemos que

$$\|Tx\| \leq |T'y'(x)| + \varepsilon \leq |\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n'(x)| + \varepsilon \leq \sup_{(\alpha_n)_n \in \overline{B}_{\ell_1}} |\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n'(x)| + \varepsilon = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n'(x)| + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, obtenemos (i) y concluye la demostración. □

Proposición 1.2.46. *Sean X e Y espacios de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal de Banach. Entonces $T \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}^d(X;Y)$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n')_n \in c_{0;\mathcal{A}}(X')$ tal que*

$$\|Tx\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n'(x)| \quad \text{para todo} \quad x \in X.$$

Más aún, $\|T\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^d} = \inf\left\{ m_{\mathcal{A}}((x_n')_n; X') \right\}$ donde el ínfimo se toma sobre todas las sucesiones $\mathcal{A}$-nulas $(x_n')_n$ que cumplen la desigualdad anterior.

Demostración: Sea $T \in \mathcal{L}(X;Y)$. Entonces $T \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}^d(X;Y)$ si y sólo si $T' \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Y';X')$ o, equivalentemente, si y sólo si existe una sucesión $(x_n')_n \in c_{0,\mathcal{A}}(X')$ tal que $T'(B_{Y'}) \subset \mathrm{co}\{(x_n)_n\}$. Además, por el Corolario 1.1.10,

$$\|T\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^d} = \|T'\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} = \inf\left\{ m_{\mathcal{A}}((x_n')_n; X') \right\},$$

donde el ínfimo se toma sobre las sucesiones $\mathcal{A}$-nulas $(x_n')_n$ tales que $T'(B_{Y'}) \subset \mathrm{co}\{(x_n)_n\}$. Aplicando el lema anterior, obtenemos el resultado. □

Gracias a esta última proposición, obtenemos una factorización del ideal $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^d$. Esta se puede comparar con la factorización obtenida para el ideal $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$ en la Proposición 1.2.5.

Proposición 1.2.47. *Sean X e Y espacios de Banach, $\mathcal{A}$ un ideal de Banach y $T \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}^d(X;Y)$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existen un espacio de Banach separable y reflexivo Z, un operador compacto $R \in \mathcal{K}(Z;Y)$ con $\|R\| \leq 1$ y un operador $S \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}^d(X;Z)$ con $\|S\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^d} \leq \|T\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^d} + \varepsilon$ tales que $T = R \circ S$. En particular, se tiene*

$$\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^d = \mathcal{K} \circ \mathcal{K}_{\mathcal{A}}^d \quad \text{isométricamente.}$$

Demostración: Sean $T \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}^d(X;Y)$ y $\varepsilon > 0$. Por la Proposición 1.2.46, existe una sucesión $(x'_n)_n \in c_{0;\mathcal{A}}(X')$ tal que $\|Tx\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x'_n(x)|$ para todo $x \in X$ y $m_{\mathcal{A}}((x'_n)_n; X') \leq (1+\varepsilon)\|T\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^d}$. Tomemos una sucesión $(\beta_n)_n \in B_{c_0}$ tal que, si $\tilde{x}'_n = \frac{x'_n}{\beta_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $(\tilde{x}'_n)_n \in c_{0,\mathcal{A}}(X')$ y $m_{\mathcal{A}}((\tilde{x}'_n)_n; X') \leq (1+\varepsilon) m_{\mathcal{A}}((x'_n)_n; X')$. En particular, como las sucesiones $(\tilde{x}'_n)_n$ y $(x'_n)_n$ son convergentes a cero, los conjuntos U y V dados por

$$U = \{(\tilde{x}'_n(x))_n \colon x \in X\} \quad \text{y} \quad V = \{(x'_n(x))_n \colon x \in X\}$$

son subespacios de c_0 y, por lo tanto, sus clausuras $\overline{U}$ y $\overline{V}$ son espacios de Banach. Definamos el operador $\widetilde{S} \in \mathcal{L}(X;\overline{U})$ dado por $\widetilde{S}(x) = (\tilde{x}'_n(x))_n$. Como $\|\widetilde{S}x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\tilde{x}'_n(x)|$, aplicando la Proposición 1.2.46 tenemos que $\widetilde{S} \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}^d(X;\overline{U})$ y $\|\widetilde{S}\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^d} \leq m_{\mathcal{A}}((\tilde{x}'_n)_n; X') \leq (1+\varepsilon)^2 \|T\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^d}$. Ahora, consideremos el operador $\widetilde{R} \colon V \to Y$ dado por $\widetilde{R}(x'_n(x))_n = Tx$ y veamos que esta bien definido. Si para $x, \tilde{x} \in X$ tenemos que $(x'_n(x))_n = (x'_n(\tilde{x})_n)$, luego

$$\|T(x - \tilde{x})\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x'_n(x - \tilde{x})| = 0,$$

con lo que concluimos que $\widetilde{R}$ esta bien definido. Es claro que es lineal y que $\|\widetilde{R}\| \leq 1$. Por lo tanto, podemos extender el operador a $\overline{V}$ de forma lineal y continua. Seguiremos llamando $\widetilde{R}$ a dicha extensión. Ahora, sea $D \colon \overline{U} \to \overline{V}$ el operador definido por $D(\alpha)_n = (\beta_n \alpha_n)_n$. Como $D(B_{\overline{U}})$ resulta ser un conjunto relativamente compacto en c_0, entonces D pertenece a $\mathcal{K}(\overline{U};\overline{V})$. Más aún, $\|D\| = \|(\beta_n)_n\|_\infty = 1$. Directamente de las definiciones se deduce que $T = \widetilde{R} \circ D \circ \widetilde{S}$, y tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\widetilde{S}"'] & Y \\ \overline{U} \arrow[r, "D"] & \overline{V}. \arrow[u, "\widetilde{R}"'] \end{tikzcd}$$

Así tenemos una primera factorización. Para obtener otra vía un espacio separable y reflexivo, vamos a factorizar al operador compacto D. En efecto, por la Proposición 1.2.5 existen un espacio de Banach separable y reflexivo Z y operadores compactos $D_1 \in \mathcal{K}(\overline{U};Z)$ y $D_2 \in \mathcal{K}(Z;\overline{V})$ con

$\|D_1\| \leq 1+\varepsilon$ y $\|D_2\| \leq 1$ tales que $D = D_2 \circ D_1$. Por lo tanto, si $S = D_1 \circ \widetilde{S}$ y $R = \widetilde{R} \circ D_2$, tenemos que $T = R \circ S$, donde $S \in \mathcal{K}^d_{\mathcal{A}}(X;Z)$ con $\|S\|_{\mathcal{K}^d_{\mathcal{A}}} \leq \|D_1\| \|\widetilde{S}\|_{\mathcal{K}^d_{\mathcal{A}}} \leq (1+\varepsilon)^2 \|T\|_{\mathcal{K}^d_{\mathcal{A}}}$ y $R \in \mathcal{K}(Z;Y)$ con $\|R\| \leq \|D_2\| \|\widetilde{R}\| \leq 1$. Al ser $\varepsilon > 0$ arbitrario, probamos el resultado. □

1.3. Sobre la igualdad $\mathcal{K}_p = \mathcal{K}_q$

En esta sección nos enfocaremos en el ideal de operadores p-compactos. En la Proposición 1.2.5 mostramos que todo operador $\mathcal{A}$-compacto se factoriza vía un espacio separable y reflexivo. Para $1 \leq p < \infty$, los operadores p-compactos se factorizan a través de un cociente de $\ell_{p'}$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. La siguiente proposición extiende lo hecho en [SK1, Theorem 3.2] y [CK, Theorem 3.1].

Proposición 1.3.1. *Sean X e Y espacios de Banach, $1 \leq p < \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Entonces, un operador $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ es p-compacto si y sólo si existen un subespacio cerrado de $M \subset \ell_1$, un subespacio cerrado $N \subset \ell_{p'}$ ($N \subset c_0$ si $p = 1$), operadores compactos $R \in \mathcal{K}(X;\ell_{p'}/N)$ y $S \in \mathcal{K}(\ell_1/M;Y)$ y un operador p-compacto $T_0 \in \mathcal{K}_p(\ell_{p'}/N;\ell_1/M)$ tales que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "R"'] & Y \\ \ell_{p'}/N \arrow[r, "T_0"'] & \ell_1/M. \arrow[u, "S"'] \end{tikzcd}$$

Más aún, $\|T\|_{\mathcal{K}_p} = \inf\{\|S\| \|T_0\|_{\mathcal{K}_p} \|R\|\}$ donde el ínifimo se toma entre todas las factorizaciones mencionadas arriba.

Demostración: Es claro que si un operador se factoriza tal como dice en el enunciado, entonces es p-compacto. Ahora tomemos un operador $T \in \mathcal{K}_p(X;Y)$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe una sucesión $(y_n)_n \in \ell_p(Y)$ tal que $T(B_X) \subset p\text{-co}\{(y_n)_n\}$, con $\|(y_n)_n\|_p \leq \|T\|_{\mathcal{K}_p}(1+\varepsilon)$. Sea $(\beta_n)_n \in B_{c_0}$ una sucesión tal que, si $\tilde{y}_n = \frac{y_n}{\beta_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $(\tilde{y}_n)_n \in \ell_p(Y)$ y $\|(\tilde{y}_n)_n\|_p \leq \|(y_n)_n\|_p(1+\varepsilon)$. Luego, $T(B_X) \subset \{\sum_{n=1}^\infty \alpha_n \tilde{y}_n \colon (\alpha_n)_n \in L\}$ donde L es un conjunto compacto en $B_{\ell_{p'}}$. Utilizando la factorización dada en [SK1, Theorem 3.2], tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "R"'] & Y & \ell_{p'} \arrow[l, "\theta_{\tilde{y}}"'] \arrow[dl, "q"] \\ & \ell_{p'}/\ker\theta_{\tilde{y}} \arrow[u, "\tilde{\theta}_{\tilde{y}}"] & \end{tikzcd}$$

donde q el la proyección al cociente, $\theta_{\tilde{y}}$ y R estan dados por

$$\theta_{\tilde{y}}(\alpha_n)_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tilde{y}_n \quad \text{y} \quad Rx = [(\alpha_n)_n],$$

en donde $(\alpha_n)_n \in L$ una sucesión que satisface $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tilde{y}_n$. Como $R(B_E) = q(L)$, entonces R es compacto y $T = \tilde{\theta}_{\tilde{y}} \circ R$.

Además, por [SK1, Theorem 3.2], $\tilde{\theta}_{\tilde{y}}$ es p-compacto. Como $\|R\| \leq 1$, luego

$$\|T\|_{\mathcal{K}_p} \leq \|\tilde{\theta}_{\tilde{y}}\|_{\mathcal{K}_p} \leq \|(\tilde{y}_n)_n\|_p \leq \|T\|_{\mathcal{K}_p}(1+\varepsilon)^2.$$

Aplicando [CK, Theorem 3.1], podemos factorizar al operador $\tilde{\theta}_{\tilde{y}}$ via un operador p-compacto T_0 y un operador compacto S de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd} \ell_{p'}/\ker\theta_z \arrow[rr, "\tilde{\theta}_{\tilde{y}}"] \arrow[dr, "T_0"'] & & Y \\ & \ell_1/M \arrow[ur, "S"'] & \end{tikzcd}$$

donde M es un subespacio cerrado de ℓ_1. Más aún, se puede tomar la factorización de forma tal $\|\tilde{\theta}_{\tilde{y}}\|_{\mathcal{K}_p} \leq \|S\|\|T_0\|_{\mathcal{K}_p} \leq (1+\varepsilon)\|\tilde{\theta}_{\tilde{y}}\|_{\mathcal{K}_p}$. Así, obtenemos la factorización deseada y

$$\|T\|_{\mathcal{K}_p} \leq \|S\|\|T_0\|_{\mathcal{K}_p}\|R\| \leq (1+\varepsilon)^3\|T\|_{\mathcal{K}_p}.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, tenemos el resultado. $\square$

Corolario 1.3.2. *Sean X e Y espacios de Banach y $1 \leq p < \infty$. Entonces un operador $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ es p-compacto si y sólo si existen espacios de Banach X_0 e Y_0 separables y reflexivos, operadores compactos $R \in \mathcal{K}(X;X_0)$, $S \in \mathcal{K}(Y_0;Y)$ y un operador p-compacto $T_0 \in \mathcal{K}_p(X_0,Y_0)$ tales que*

$$T = S \circ T_0 \circ R.$$

Más aún, $\|T\|_{\mathcal{K}_p} = \text{ínf}\{\|S\|\|T_0\|_{\mathcal{K}_p}\|R\|\}$ donde el ínifimo se toma entre todas las factorizaciones mencionadas arriba.

Demostración: Sea $T \in \mathcal{K}_p(X;Y)$ y tomemos $\varepsilon > 0$. Podemos suponer que $\|T\|_{\mathcal{K}_p} = 1$. Por la proposición anterior, existen espacios de Banach Z_1 y Z_2, operadores compactos $\tilde{R} \in \mathcal{K}(X;Z_1)$, $\tilde{S} \in \mathcal{K}(Z_2;Y)$ con $\|\tilde{R}\| = \|\tilde{S}\| = 1$ y un operador p-compacto $T_0 \in \mathcal{K}_p(Z_1,Z_2)$ con $\|T_1\|_{\mathcal{K}_p} \leq 1+\varepsilon$ tales que $T = \tilde{S} \circ T_1 \circ \tilde{R}$. Por la Proposicón 1.2.3, existen espacios de Banach X_0 e Y_0 separables y reflexivos y operadores $R \in \mathcal{K}(X;X_0)$, $\tilde{R}_1 \in \mathcal{K}(X_0;Z_1)$, $\tilde{S}_1 \in \mathcal{K}(Z_2;Y_0)$ y $S \in \mathcal{K}(Y_0;Y)$, todos con norma menor a $1+\varepsilon$ tales que $\tilde{R} = R \circ \tilde{R}_2$ y $\tilde{S} = \tilde{S}_1 \circ S$. Finalmente, llamando $T_0 = \tilde{S}_1 \circ T_1 \circ \tilde{R}_1$, tenemos que T_0 es p-compacto, $T = S \circ T_0 \circ R$ y

$$\|T\|_{\mathcal{K}_p} \leq (1+\varepsilon)^2 \|T_0\|_{\mathcal{K}_p} \leq (1+\varepsilon)^5,$$

lo que prueba el resultado. $\square$

Finalmente, vamos a comparar operadores p-compactos y q-compactos cuando $p \neq q$ para algunas clases de espacios de Banach, en el sentido de los resultados conocidos para los operadores p-sumantes. Aquí aparecen espacios clásicos en la teoría de espacios Banach, como son los espacios con cotipo finito o cuando son $\mathcal{L}_{q,\lambda}$-*spaces* para algún q. La definición de un $\mathcal{L}_{q,\lambda}$-*space*, así como también sus propiedades, se pueden encontrar en [DF, 23.3], [DJT, Pag. 60] o [TJ, Pag. 5] y la definición de cotipo en [DF, Pag. 85], [DJT, Pag. 217] o [TJ, Pag. 15]. Por ejemplo, para $1 \leq p \leq \infty$, $L_p[0,1]$ (el espacio de funciones de $[0,1]$ p-integrables) es un $\mathcal{L}_{q,\lambda}$-*space* y para $1 \leq q < \infty$, ℓ_q tiene cotipo $\max\{q,2\}$ [DJT, 11.5].

Los resultados que obtenemos valen para el ideal $\mathcal{K}_p^{min}(X;Y)$ pero bajo ciertas hipótesis sobre los espacios X e Y, pueden formularse en terminos de $\mathcal{K}_p(X;Y)$, como por ejemplo en presencia de propiedad de aproximación, ver Corolario 1.2.26. Antes necesitaremos el siguiente resultado general. Como es de costumbre, para $s = \infty$, vamos a considerar $\mathcal{L}(X;Y)$ en lugar de $\Pi_s(X;Y)$ y $\overline{\mathcal{F}(Y;X)}$ en lugar de $\mathcal{K}_s^{min}(Y;X)$.

Teorema 1.3.3. *Sean X e Y espacios de Banach tales que $\Pi_r(Y';X') = \Pi_s(Y';X')$ para algún $1 \leq r < s \leq \infty$. Entonces, $\mathcal{K}_s^{min}(X;Y) = \mathcal{K}_r^{min}(X;Y)$.*

Más aún, si $\|\cdot\|_{\Pi_r} \leq A\|\cdot\|_{\Pi_s}$ en $\Pi_s(Y';X')$ entonces tenemos que $\|\cdot\|_{\mathcal{K}_r} \leq A\|\cdot\|_{\mathcal{K}_s}$ en $\mathcal{K}_s^{min}(X;Y)$.

Demostración: Supongamos que $\Pi_r(Y';X') = \Pi_s(Y';X')$. Como Π_r es un ideal de Banach maximal y su norma tensorial asociada, $g^*_{r'}$ es totalmente accesible [DF, Corollary 21.1.], aplicando el *Embedding Theorem* [DF, 17.6], obtenemos que $Y''\widehat{\otimes}_{g^*_{r'}}X' \overset{1}{\hookrightarrow} \Pi_r(Y';X')$. Aplicando el *Embedding Lemma* [DF, 13.3] se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X'\widehat{\otimes}_{/d_s}Y = Y\widehat{\otimes}_{g^*_{s'}}X' \arrow[r, hook, "1"] \arrow[d, dashed, "\leq A"] & Y''\widehat{\otimes}_{g^*_{s'}}X' \arrow[r, hook, "1"] & \Pi_s(Y';X') \arrow[d, hook, "\leq A"] \\
X'\widehat{\otimes}_{/d_r}Y = Y\widehat{\otimes}_{g^*_{r'}}X' \arrow[r, hook, "1"] & Y''\widehat{\otimes}_{g^*_{r'}}X' \arrow[r, hook, "1"] & \Pi_r(Y';X')
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $/d_s \leq /d_r \leq A\ /d_s$ en $X' \otimes Y$. Ahora, por el Corolario 1.2.26 implica que $\mathcal{K}_s^{min}(X;Y) = \mathcal{K}_r^{min}(X;Y)$ y que $\|T\|_{\mathcal{K}_r} \leq A\|T\|_{\mathcal{K}_s}$ para todo $T \in \mathcal{K}_s^{min}(X;Y)$. $\square$

Para mostrar las distintas desigualdades entre las normas $\|\cdot\|_{\mathcal{K}_r}$ y $\|\cdot\|$ o $\|\cdot\|_{\mathcal{K}_r}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{K}_s}$, usaremos las constantes que se obtienen en [TJ] al comparar operadores sumantes. Algunas de ellas involucran la constante de Grothendieck K_G, la constante B_r obtenida de la desigualdad de Khintchine y $C_q(X)$, la constante del cotipo q de X. Una demostración de la desigualdad de Khintchine se puede encontrar en [DF, Pag. 96], [DJT, 1.10] o [TJ, Theorem 6.1]. Con esta notación, tenemos los siguientes resultados.

Corolario 1.3.4. *Sean X e Y espacios de Banach tales que X es un $\mathcal{L}_{2,\lambda'}$-space e Y es un $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}$-space. Entonces, $\overline{\mathcal{F}(X;Y)} = \mathcal{K}_1^{min}(X;Y)$ y $\|T\|_{\mathcal{K}_1} \leq K_G\lambda\lambda'\|T\|$ para todo $T \in \overline{\mathcal{F}(X;Y)}$.*

Demostración: Combinando [DF, 23.2 Corollary 1] y el párrafo [DF, 23.3], tenemos que X es un $\mathcal{L}_{2,\lambda'}$-*space* si y sólo si X' es un $\mathcal{L}_{2,\lambda'}$-*space* e Y es un $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}$-*space* si y sólo si Y' es un $\mathcal{L}_{1,\lambda}$-*space*. Entonces, por [DF, Theorem 23.10] o [TJ, Theorem 10.11], tenemos que $\Pi_1(Y';X') = \mathcal{L}(Y';X')$ y que $\|\cdot\|_{\Pi_1} \leq K_G\lambda\lambda'\|\cdot\|$. Aplicando el Teorema 1.3.3 se obtiene el resultado. □

Corolario 1.3.5. *Sean X e Y espacios de Banach tales que Y es un $\mathcal{L}_{1,\lambda}$-space. Entonces,*

(a) *Si X' tiene cotipo 2, $\overline{\mathcal{F}(X;Y)} = \mathcal{K}_2^{min}(X;Y) = \mathcal{K}_r^{min}(X;Y)$, para todo $2 \leq r$. Además,*

$$\|T\|_{\mathcal{K}_r} \leq \lambda \left[c\, C_2(X')^2 \left(1 + \log C_2(X')\right)\right]^{1/r} \|T\|,$$

para todo $T \in \mathcal{K}_r^{min}(X;Y)$.

(b) *Para $2 < q < \infty$, si X' tiene cotipo q, entonces $\overline{\mathcal{F}(X;Y)} = \mathcal{K}_r^{min}(X;Y)$ para todo $q < r < \infty$. Además,*

$$\|T\|_{\mathcal{K}_r} \leq \lambda\ c\ q^{-1}(1/q - 1/r)^{-1/r'} C_q(X')\|T\|,$$

para todo $T \in \mathcal{K}_r^{min}(X;Y)$.

En cada caso, $c > 0$ es una constante universal, es decir, no depende de X, Y, q ni r.

Demostración: Recordemos que Y' es un $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}$-*space* si y sólo si Y es un $\mathcal{L}_{1,\lambda}$-*space* [DF, Corollary 23.2 (1)]. Para ver el ítem (a), notemos que combinando [TJ, Theorem 10.14] y [TJ, Proposition 10.16] tenemos que $\mathcal{L}(C(K);X') = \Pi_2(C(K);X')$ y

$$\|\cdot\|_{\Pi_r} \leq \lambda \left[c\, C_2(X')^2 \left(1 + \log C_2(X')\right)\right]^{1/r} \|\cdot\|,$$

donde $C(K)$ son las funciones continuas de un espacio compacto y Hausdorff K en el cuerpo. Aplicando [TJ, 10.6], este último resultado se puede extender reemplazando a $C(K)$ por cualquier $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}$-*space*, en particular para Y'. Así, aplicando el Teorema 1.3.3 se obtiene el ítem (a). Para probar el ítem (b) basta usar el Teorema 1.3.3 y [TJ, Theorem 21.4 (ii)]. □

Corolario 1.3.6. *Sean X e Y espacios de Banach. Entonces,*

(a) *Si X' tiene cotipo 2, entonces $\mathcal{K}_r^{min}(X;Y) = \mathcal{K}_2(X;Y)$, para todo $2 \leq r < \infty$. Además,*

$$\|T\|_{\mathcal{K}_2} \leq B_r C_2(X') \|T\|_{\mathcal{K}_r},$$

para todo $T \in \mathcal{K}_r^{min}(X;Y)$.

(b) *Si Y' tiene cotipo 2, entonces $\mathcal{K}_2^{min}(X;Y) = \mathcal{K}_1^{min}(X;Y)$, para todo X. Además,*

$$\|T\|_{\mathcal{K}_1} \leq c\, C_2(Y')(1 + \log C_2(Y'))^{1/2} \|T\|_{\mathcal{K}_2},$$

para todo $T \in \mathcal{K}_2^{min}(X;Y)$.

En particular, para todo $1 \leq r \leq 2$, $\mathcal{K}_r^{min}(X;Y) = \mathcal{K}_1^{min}(X;Y)$, para todo X.

(c) *Para $2 < q < \infty$, si Y' tiene cotipo q, entonces $\mathcal{K}_r^{min}(X;Y) = \mathcal{K}_1^{min}(X;Y)$, para todo $1 \leq r < q'$ y para todo X. Además,*

$$\|T\|_{\mathcal{K}_1} \leq c\, q^{-1}(1/q - 1/r')^{-1/r} C_q(Y') \|T\|_{\mathcal{K}_r},$$

para todo $T \in \mathcal{K}_r^{min}(X;Y)$.

En cada afirmación, $c > 0$ es una constante universal.

Demostración: El ítem (a) se deduce de [TJ, Theorem 10.15] y del Teorema 1.3.3. Para el ítem (b) basta combinar [TJ, Corollary 10.18 (a)] y el Teorema 1.3.3. Por último, usando el Teorema 1.3.3 con [TJ, Corollary 21.5 (i)] obtenemos (c). □

Observación 1.3.7. Del corolario anterior se deduce que si X' e Y' tienen cotipo 2, entonces $\mathcal{K}_r^{min}(X;Y) = \mathcal{K}_1^{min}(X;Y)$, para todo $1 \leq r < \infty$. En particular, como todo espacio ℓ_p para $1 \leq p \leq 2$ tiene cotipo 2 (ver [DJT, Pag. 219]) y la propiedad de aproximación, tenemos que

$$\mathcal{K}_r(\ell_{p'}; \ell_{p'}) = \mathcal{K}_1(\ell_{p'}; \ell_{p'}) \quad \text{para todo } 1 \leq r < \infty.$$

Finalizamos esta sección mostrando que los valores de r obtenidos en los 2 corolarios anteriores son óptimos. Para ello, usaremos la noción de *limit order* de un ideal [Pie1, Chapter 14], que resulta de gran utilidad cuando se quiere comparar distintos ideales. Recordemos que, para un ideal de Banach $\mathcal{A}$, el *limit order* $\lambda(\mathcal{A}, u, v)$ se define como el ínfimo de $\lambda \geq 0$ tales que el operador diagonal D_λ pertenece a $\mathcal{A}(\ell_u; \ell_v)$, donde $D_\lambda \colon (a_n) \mapsto (n^{-\lambda} a_n)$ y $1 \leq u, v \leq \infty$.

Lema 1.3.8. *Sean $1 \leq u, v, p \leq \infty$ y u', v', p' sus respectivos conjugados. Entonces,*

$$\lambda(\mathcal{K}_p, u, v) = \lambda(\Pi_p, v', u').$$

Demostración: Denotemos por $id_{u,v}$ el operador identidad de ℓ_u^n a ℓ_v^n, para $n \in \mathbb{N}$ fijo. Por la Proposición 1.2.29, tenemos que

$$\|id_{u,v}\|_{\mathcal{K}_p(\ell_u^n;\ell_v^n)} = \|id_{u,v}\|_{\Pi_p^d(\ell_u^n;\ell_v^n)} = \|id_{v',u'}\|_{\Pi_p(\ell_{v'}^n;\ell_{u'}^n)}.$$

Luego, aplicando [Pie1, Theorem 14.4.3] se tiene el resultado. □

Como en las Proposiciones 22.4.9, 22.4.12 y 22.4.13 de [Pie1] computan los *limits order* de $\lambda(\Pi_r, v', u')$, aplicando el lema anterior obtenemos los valores de $\lambda(\mathcal{K}_r, u, v)$. Por comodidad, estos valores se encuentran en el apéndice ubicado al final de este capítulo. Antes de mostrar que los Corolarios 1.3.5 y 1.3.6 no se pueden mejorar, recordemos que cada $\mathcal{L}_{q,\lambda}$-*space* $(1 \leq q < \infty)$ tiene cotipo $\max\{q, 2\}$, [DJT, Corollary 11.7], y que $L_p[0,1]$ y ℓ_p son $\mathcal{L}_{p,1}$-*space* $(1 \leq p \leq \infty)$. Teniendo en cuenta esto, tenemos

Resultado. *Las condiciones sobre r en los Corolarios 1.3.5 y Corolario 1.3.6 son óptimos.*

1) Dado $1 \leq r < 2$, mostraremos que existe X tal que X' tiene cotipo 2 y $\mathcal{K}_r(X; \ell_1) \neq \mathcal{K}_2(X; \ell_1)$. Notemos que (ver el Apéndice (a) y (b))

$$\lambda(\mathcal{K}_r, u, 1) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{u} & \text{si} \quad r' \leq u \leq \infty, \\ \frac{1}{r} & \text{si} \quad 1 \leq u \leq r'. \end{cases}$$

Como $r' > 2$, elegimos u tal que $2 < u < r'$ y $X = \ell_u$. Entonces X' tiene cotipo 2 y $\lambda(\mathcal{K}_r, u, 1) = \frac{1}{r} \neq \frac{1}{u'} = \lambda(\mathcal{K}_2, u, 1)$. Luego, $\mathcal{K}_r(\ell_u; \ell_1) \neq \mathcal{K}_2(\ell_u; \ell_1)$ y por lo tanto r no se puede incluir en el Corolario 1.3.5 (a), para cualquier $1 \leq r < 2$.

Ahora, fijamos q tal que $2 < q$ y $X = \ell_{q'}$. Entonces X' tiene cotipo q y dado $r < q$, vemos que $\lambda(\mathcal{K}_r, q', 1) = \frac{1}{r}$. Por otro lado, $\lambda(\mathcal{K}_s, q', 1) = \frac{1}{q}$ para todo $q < s$. Esto muestra que $\mathcal{K}_r(\ell_{q'}; \ell_1) \neq \mathcal{K}_s(\ell_{q'}; \ell_1)$ para todo $r < q < s$.

Además, si $r < \tilde{r} \leq q$, entonces $\lambda(\mathcal{K}_{\tilde{r}}, q', 1) \neq \lambda(\mathcal{K}_r, q', 1)$. Por lo tanto, las inclusiones $\mathcal{K}_{\tilde{r}}(\ell_{q'}, \ell_1) \subset \mathcal{K}_r(\ell_{q'}, \ell_1)$ son estrictas para cualquier $r < \tilde{r} \leq q$.

Para el caso $r = q$, $2 < q < \infty$, tomemos $X = L_{q'}[0,1] = L_{q'}$ e $Y = L_1[0,1] = L_1$. Supongamos que $\overline{\mathcal{F}(L_{q'}; L_1)} = \mathcal{K}_q(L_{q'}; L_1)$. Por el Corolario 1.2.26, debido a que L_1 tiene propiedad de aproximación, tenemos que $L_q \widehat{\otimes}_{/d_q} L_1 = L_q \widehat{\otimes}_\varepsilon L_1$ y, por lo tanto, $L_1 \widehat{\otimes}_{(/d_q)^t} L_q = L_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon L_q$.

Como $(/d_q)^t = (d_{q'})'$ (ver la demostración de la Proposición 1.2.23) y $\pi' = \varepsilon$ [DF, 15.3], entonces $L_1 \widehat{\otimes}_{d'_{q'}} L_q = L_1 \widehat{\otimes}_{\pi'} L_q$ y, por lo tanto tenemos que $(L_1 \widehat{\otimes}_{d'_{q'}} L_q)' = (L_1 \widehat{\otimes}_{\pi'} L_q)'$. Como L_∞ y $L_{q'}$ tienen propiedad de aproximación métrica, por [DF, 17.7] y [DF, 12.4], se tiene el isomorfismo $L_\infty \widehat{\otimes}_{d_{q'}} L_{q'} = L_\infty \widehat{\otimes}_\pi L_{q'}$. Por lo tanto $(L_\infty \widehat{\otimes}_{d_{q'}} L_{q'})' = (L_\infty \widehat{\otimes}_\pi L_{q'})'$, en otras palabras, $\Pi_q(L_\infty, L_q) = \mathcal{L}(L_\infty, L_q)$ [Rya2, Section 6.3]). Esta igualdad contradice [Kwa, Theorem 7].

2) Por un lado, tenemos que para todo $1 \le p < \infty$, existe un operador compacto $\mathcal{L}(\ell_p; \ell_p)$ (y como ℓ_p tiene propiedad de aproximación, el operador es aproximable), que no es p-compacto [AMR, Example 3.1]. Luego, $\overline{\mathcal{F}(\ell_p; \ell_p)} \neq \mathcal{K}_p(\ell_p; \ell_p)$.

   Por otro lado, por el Corolario 1.3.6 (a), para $p \ge 2$ y para todo $2 \le r < \infty$, tenemos que $\mathcal{K}_r^{min}(\ell_p; \ell_p) = \mathcal{K}_p^{min}(\ell_p; \ell_p) = \mathcal{K}_p(\ell_p; \ell_p) = \mathcal{K}_2(\ell_p; \ell_p)$. Entonces, $r = \infty$ no puede ser incluido en el enunciado de este corolario.

   Además, para $r < 2$, podemos elegir p y q tales que $2 \le p \le r'$ y $1 \le q \le r$. Si $X = \ell_p$ e $Y = \ell_q$, por los *limit orders* (ver Apéndice) obtenemos que $\lambda(\mathcal{K}_r, p, q) = \frac{1}{r}$ y $\lambda(\mathcal{K}_2, p, q) = \frac{1}{2}$, y concluimos que la inclusión $\mathcal{K}_r(\ell_p; \ell_q) \subset \mathcal{K}_2(\ell_p; \ell_q)$ es estricta.

3) Para analizar las condiciones del Corolario 1.3.6 (b) no se puede mejorar, tomemos p y q tales que $2 \le q < r$ y $1 \le p \le r'$. Llamemos $X = \ell_p$ e $Y = \ell_{q'}$, con los *limit orders* obtenemos que $\lambda(\mathcal{K}_2, p, q') = \frac{1}{2}$ y $\lambda(\mathcal{K}_r, p, q') = \frac{1}{r}$ (ver Apéndice (b)). Luego, $\mathcal{K}_2(\ell_p; \ell_{q'}) \neq \mathcal{K}_r(\ell_p; \ell_{q'})$.

   Además, como $\lambda(\mathcal{K}_r, p, q') = \frac{1}{r}$ se tiene que para todo r y $\tilde{r}$ tales que $2 \le r < \tilde{r}$, la inclución $\mathcal{K}_{\tilde{r}}(\ell_p; \ell_{q'}) \subset \mathcal{K}_r(\ell_p; \ell_{q'})$ es estricta, para valores de p y q adecuados.

4) Ahora nos enfocamos en el ítem (c) del Corolario 1.3.6. Fijemos $2 < q$ y sean $X = \ell_1$ e $Y = \ell_{q'}$. Afirmamos que $\mathcal{K}_r(\ell_1, \ell_{q'}) \neq \mathcal{K}_1(\ell_1, \ell_{q'})$ para todo $q' < r$. En efecto, el resultado se obtiene de los *limit orders*: $\lambda(\mathcal{K}_1, 1, q') = \frac{1}{q'}$ y $\lambda(\mathcal{K}_r, 1, q') = \frac{1}{r}$. Esto muestra además que $\mathcal{K}_{\tilde{r}}(\ell_1; \ell_{q'})$ esta estrictamente contenido en $\mathcal{K}_r(\ell_1; \ell_{q'})$ para todo $q' \le r < \tilde{r}$.

   Para el caso restante, $r = q'$, tomemos los espacios $X = L_1[0,1] = L_1$ e $Y = L_{q'}[0,1] = L_{q'}$ y supongamos que $\mathcal{K}_{q'}(L_1; L_{q'}) = \mathcal{K}_1(L_1; L_{q'})$, $2 < q < \infty$. Por el Corolario 1.2.26 tenemos que $L_\infty \widehat{\otimes}_{g'_q} L_{q'} = L_\infty \widehat{\otimes}_{g'_\infty} L_{q'}$. Luego, los espacios tensoriales tienen duales isomorfos y por [DF, 17.7] y [DF, 13.3] se obtiene que $L_1 \widehat{\otimes}_{g_q} L_q = L_1 \widehat{\otimes}_{g_\infty} L_q$ son isomorfos. Como $g_\infty = \backslash\varepsilon$ y $g_q = \backslash g^*_{q'}$ [DF, Proposition 20.14], aplicando [DF, Corolario 20.6.1], concluimos que $L_1 \widehat{\otimes}_{g^*_{q'}} L_q = L_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon L_q$. Como $\varepsilon^t = \varepsilon$ y $(g^*_{q'})^t = g'_{q'} = /d_q$, obtenemos que $L_q \widehat{\otimes}_{/d_q} L_1 = L_q \widehat{\otimes}_\varepsilon L_1$

y, de la misma forma que hicimos en 1), concluimos que $\Pi_q(L_\infty, L_q) = \mathcal{L}(L_\infty, L_q)$, lo cuál no es verdadero.

Apéndice

(a) Para $1 \le r \le 2$,

$$\lambda(\mathcal{K}_r, u, v) = \begin{cases} \frac{1}{r} & \text{si} \quad 1 \le v \le r, \quad 1 \le u \le r', \\ 1 - \frac{1}{u} & \text{si} \quad 1 \le v \le r, \quad r' \le u \le \infty, \\ \frac{1}{v} & \text{si} \quad r \le v \le 2, \quad 1 \le u \le v', \\ 1 - \frac{1}{u} & \text{si} \quad r \le v \le 2, \quad v' \le u \le \infty, \\ \frac{1}{v} & \text{si} \quad 2 \le v \le \infty, \quad 1 \le u \le 2, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{u} + \frac{1}{v} & \text{si} \quad 2 \le v \le \infty, \quad 2 \le u \le \infty. \end{cases}$$

(b) Para $2 < r < \infty$,

$$\lambda(\mathcal{K}_r, u, v) = \begin{cases} \frac{1}{r} & \text{si} \quad 1 \le v \le r, \quad 1 \le u \le r', \\ 1 - \frac{1}{u} & \text{si} \quad 1 \le v \le 2, \quad r' \le u \le \infty, \\ \rho & \text{si} \quad 2 \le v \le r, \quad r' \le u \le 2, \\ \frac{1}{v} & \text{si} \quad r \le v \le \infty, \quad 1 \le u \le 2, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{u} + \frac{1}{v} & \text{si} \quad 2 \le v \le \infty, \quad 2 \le u \le \infty, \end{cases}$$

donde $\rho = \dfrac{1}{r} + \dfrac{(\frac{1}{v} - \frac{1}{r})(\frac{1}{r'} - \frac{1}{u})}{\frac{1}{2} - \frac{1}{r}}$.

Capítulo 2

Propiedades de aproximación

La propiedad de aproximación juega un rol fundamental en la teoría de estructuras de espacios de Banach. El primer estudio sistemático sobre esta propiedad se le puede adjudicar a Grothendieck y su trabajo de 1955 [Gro2]. La pregunta si todo espacio de Banach posee la propiedad de aproximación estuvo abierta por mucho tiempo. No fue hasta 1972, que Per Enflo muestra el primer ejemplo de un espacio de Banach sin la propiedad de aproximación [Enf], marcando un *antes y después* en la teoría de operadores y de espacios de Banach. Desde entonces, varios autores estudiaron distintos *tipos de propiedades de aproximación* y sus incidencias en la teoría de espacios de Banach y de operadores entre espacios de Banach. Algunos de estos distintos *tipos de propiedades de aproximación* se pueden encontrar en [Cas] y [Pie2, Pag. 280] entre otros.

En este capítulo vamos a desarrollar un método general para estudiar distintos tipos de propiedades de aproximación a partir de un ideal o ideal de Banach y haremos hincapié cuando el ideal considerado es el de los operadores $\mathcal{A}$-compactos. Empecemos con las definiciones y algunas observaciones.

Definición 2.0.1. *Sea $\mathcal{A}$ un ideal. Un espacio de Banach X tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{A}$-uniforme si para todo espacio de Banach Y, $\mathcal{F}(Y;X)$ es $\|\cdot\|$-denso en $\mathcal{A}(Y;X)$.*

Definición 2.0.2. *Sea $\mathcal{A}$ un ideal de Banach. Un espacio de Banach X tiene la $\mathcal{A}$-propiedad de aproximación si para todo espacio de Banach Y, $\mathcal{F}(Y;X)$ es $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$-denso en $\mathcal{A}(Y;X)$.*

Las siguientes observaciones se deducen directamente de las definiciones, por lo que sólo las mencionaremos.

Observación 2.0.3.

(a) Si $\mathcal{A} = \mathcal{K}$, entonces la propiedad de aproximación $\mathcal{K}$-uniforme y la $\mathcal{K}$-propiedad de aproximación coinciden con la propiedad de aproximación clásica.

(b) Si $\mathcal{A}$ es un ideal de Banach, como $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{\mathcal{A}}$, si un espacio de Banach tiene la $\mathcal{A}$-propiedad de aproximación, entonces tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{A}$-uniforme.

(c) Si $\mathcal{A}$ es un ideal de Banach minimal, por [DF, Proposition 22.1], para todo operador $T \in \mathcal{A}$ existe una sucesión $(T_n)_n$ de operadores de rango finito tal que $\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\|_{\mathcal{A}} = 0$. Por lo tanto, todo espacio de Banach tiene la $\mathcal{A}$-propiedad de aproximación (y, por lo tanto, la propiedad de aproximación $\mathcal{A}$-uniforme).

(d) Si $\mathcal{A}$ es un ideal de Banach y X tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{A}$-uniforme, entonces para todo espacio de Banach Y, $\mathcal{A}(Y;X) \subset \overline{\mathcal{F}}(Y;X)$.

(e) Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ ideales tales que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Entonces si un espacio de Banach X tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{B}$-uniforme, entonces tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{A}$-uniforme.

2.1. La $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación

La Proposición (A) de la Página 11 muestra la estrecha relación que hay entre la propiedad de aproximación y la topología de convergencia uniforme sobre conjuntos compactos. Para un ideal de Banach $\mathcal{A}$, también es posible dar una reformulación de la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación en términos de una topología en $\mathcal{L}(X;Y)$. Utilizaremos la medida $\mathcal{A}$-compacta $m_{\mathcal{A}}$ definida en la sección anterior para dar una familia de seminormas que determine dicha topología.

Definición 2.1.1. *Sea $\mathcal{A}$ un ideal de Banach. Para cualquier par de espacios de Banach X e Y, la topología en $\mathcal{L}(X;Y)$ de convergencia fuerte y uniforme sobre conjuntos $\mathcal{A}$-compactos es la topología dada por la familia de seminormas*

$$q_K(T) = m_{\mathcal{A}}(T(K);Y),$$

donde K varía sobre todos los conjuntos absolutamente convexos $\mathcal{A}$-compactos de X. A esta topología la denotaremos $\tau_{s\mathcal{A}}$.

Observación 2.1.2.

(a) Como todo conjunto absolutamente convexo $\mathcal{A}$-compacto está incluído en la cápsula convexa de una sucesión $\mathcal{A}$-nula, en $\mathcal{L}(X;Y)$ la topología convergencia fuerte y uniforme sobre conjuntos $\mathcal{A}$-compactos coincide con la topología dada por la familia de seminormas

$$q_{(x_n)_n}(T) = m_{\mathcal{A}}(T(\text{co}\{(x_n)_n\});Y) = m_{\mathcal{A}}((Tx_n)_n;Y),$$

donde $(x_n)_n$ varía sobre todas las sucesiones $\mathcal{A}$-nulas de X.

(b) En el caso que $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{F}}$ o $\mathcal{K}$, por la Observación 1.1.11, la topología $\tau_{s\mathcal{A}}$ es la topología de convergencia uniforme sobre conjuntos compactos.

Proposición 2.1.3. *Sea X un espacio de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal de Banach. Son equivalentes:*

(i) *X tiene la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación.*

(ii) $Id_X \in \overline{\mathcal{F}(X;X)}^{\tau_{s\mathcal{A}}}$.

(iii) *$\mathcal{F}(X;X)$ es $\tau_{s\mathcal{A}}$-denso en $\mathcal{L}(X;X)$.*

(iv) *Para todo espacio de Banach Y, $\mathcal{F}(X;Y)$ es $\tau_{s\mathcal{A}}$-denso en $\mathcal{L}(X;Y)$.*

(v) *Para todo espacio de Banach Y, $\mathcal{F}(Y;X)$ es $\tau_{s\mathcal{A}}$-denso en $\mathcal{L}(Y;X)$.*

(vi) *Para todo espacio de Banach Y, $\mathcal{F} \circ \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Y;X)$ es $\|.\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}$-denso en $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Y;X)$.*

Demostración: Es claro que (iv) y (v) implican (iii), que (iii) implica (ii) y que (vi) implica (i). Veamos ahora que (ii) implica (iv). Sean $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ y $\varepsilon > 0$ y tomemos una seminorma $\tau_{s\mathcal{A}}$-continua q_K determinada por el conjunto absolutamente convexo $\mathcal{A}$-compacto $K \subset X$. Luego, existe un operador $S \in \mathcal{F}(X;X)$ tal que $m_{\mathcal{A}}((S - Id_X)(K);X) \leq \frac{\varepsilon}{\|T\|}$. Por lo tanto, $T \circ S \in \mathcal{F}(X;Y)$ y, por la Proposición 1.1.9, tenemos

$$q_K(T\circ S-T) = m_{\mathcal{A}}((T\circ S-T)(K);Y) = m_{\mathcal{A}}((T\circ(S-Id_X))(K);Y) \leq \|T\| m_{\mathcal{A}}((S-Id_X)(K);X) \leq \varepsilon,$$

obteniendo (iv). Para ver que (ii) implica (v), consideremos un conjunto absolutamente convexo $\mathcal{A}$-compacto $K \subset Y$ y la seminorma $\tau_{s\mathcal{A}}$-continua q_K. Para $T \in \mathcal{L}(Y;X)$, por la Proposición 1.1.9, tenemos que $T(K)$ es $\mathcal{A}$-compacto en X y, fijando $\varepsilon > 0$, por (ii) existe un operador $S \in \mathcal{F}(X;X)$ tal que

$$q_{T(K)}(S - Id_X) = m_{\mathcal{A}}((S - Id_X)(T(K));X) \leq \varepsilon.$$

Como $m_{\mathcal{A}}((S-Id_X)(T(K));X) = m_{\mathcal{A}}((S\circ T-T)(K);Y)$, tenemos que $q_K(S\circ T-T)\leq\varepsilon$ y como $S\circ T$ es un operador de rango finito obtenemos (v). Supongamos ahora que vale (ii) y tomemos $\varepsilon>0$ y un operador $T\in\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Y;X)$. Como $T(B_Y)$ es un conjunto relativamente $\mathcal{A}$-compacto de X, existe un operador $S\in\mathcal{F}(X;X)$ tal que $m_{\mathcal{A}}((S-Id_X)(T(B_Y));X)\leq\varepsilon$. Notemos que

$$m_{\mathcal{A}}((S-Id_X)(T(B_Y));X) = m_{\mathcal{A}}((S\circ T-T)(B_Y);X) = \|S\circ T-T\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}.$$

Así obtenemos que $\mathcal{F}\circ\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Y;X)$ es $\|\cdot\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}$-denso en $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Y;X)$, es decir (vi). Para finalizar, mostraremos que (i) implica (ii). Tomemos un conjunto absolutamente convexo $\mathcal{A}$-compacto $K\subset X$ y $\varepsilon>0$. Por el Lema 1.2.3, existen un espacio de Banach Y, un conjunto compacto $L\subset B_Y$ y un operador $T\in\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Y;X)$ tales que $K\subset T(L)$. Como $T\in\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Y;X)$, existe un operador de rango finito $S\in\mathcal{F}(Y;X)$ tal que $\|S-T\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}\leq\varepsilon/2$. Supongamos que

$$S=\sum_{j=1}^m y'_j\otimes x_j \quad \text{con} \quad y'_j\in Y', x_j\in X \quad \text{para} \quad j=1,\ldots,m.$$

Al ser T inyectivo, el conjunto $T'(X')$ es denso en la topología de convergencia uniforme sobre compactos en Y' (ver la demostración de [Rya2, Proposition 4.12]). Por lo tanto, existen $x'_1,\ldots,x'_m\in X'$ tales que

$$\sup_{j=1,\ldots,m}|(T'x'_j-y'_j)(y)|\leq\frac{\varepsilon}{2m\|x_j\|}$$

para todo $y\in L$. Definamos el operador $\widetilde{S}\in\mathcal{F}(X;X)$ como $\widetilde{S}=\sum_{j=1}^m x'_j\otimes x_j$. Así, aplicando la Proposición 1.1.9, tenemos que

$$\begin{aligned} q_K(\widetilde{S}-Id_X) &= m_{\mathcal{A}}((\widetilde{S}-Id_X)(K);X)\\ &\leq m_{\mathcal{A}}((\widetilde{S}-Id_X)(T(L));X)\\ &= m_{\mathcal{A}}((\widetilde{S}\circ T-T)(L);X)\\ &\leq m_{\mathcal{A}}((\widetilde{S}\circ T-S)(L);X)+m_{\mathcal{A}}((S-T)(L);X). \end{aligned}$$

Notemos que $m_{\mathcal{A}}((S-T)(L);X)\leq m_{\mathcal{A}}((S-T)(B_Y);X)=\|S-T\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}\leq\varepsilon/2$, con lo que si mostramos que $m_{\mathcal{A}}((\widetilde{S}\circ T-S)(L);X)\leq\varepsilon/2$, finalizaremos la demostración. Esto último vale ya que, por la Proposición 1.1.9

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{A}}((\widetilde{S}\circ T-S)(L);X) &= m_{\mathcal{A}}((\sum_{j=1}^m(T'x'_j-y'_j)\otimes x_j)(L);X)\\ &\leq\sum_{j=1}^m m_{\mathcal{A}}(((T'x'_j-y'_j)\otimes x_j)(L);X)\\ &\leq\sum_{j=1}^m\sup_{y\in L}|(T'x'_j-y'_j)(y)|\ \|x_j\|\\ &\leq\varepsilon/2. \end{aligned}$$

□

Observación. En el caso que $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{F}}$ ó $\mathcal{A} = \mathcal{K}$, como $\mathcal{K}_{\overline{\mathcal{F}}} = \mathcal{K}_{\mathcal{K}} = \mathcal{K}$, la proposición anterior recobra las equivalencias (i) a (v) de la Proposición (A) de la pág 11.

Para $1 \leq p < \infty$, si consideramos el ideal de operadores p-compactos, la $\mathcal{K}_p$-propiedad de aproximación coincide con la κ_p-propiedad de aproximación definida por Delgado, Piñeiro y Serrano en [DPS1]. Esta propiedad encaja en el marco que estamos considerando ya que, por el Ejemplo 1.2.13, $\mathcal{K}_p = \mathcal{K}_{\mathcal{N}^p}$. En ese mismo trabajo, los autores muestran que todo espacio de Banach posee la $\mathcal{K}_{\mathcal{N}^2}$-propiedad de aproximación [DPS1, Corollary 3.6], mientras que para todo $1 \leq p < \infty, p \neq 2$, existe un espacio de Banach sin la $\mathcal{K}_{\mathcal{N}^p}$-propiedad de aproximación [DPS1, Theorem 2.4]. Con estos ejemplos concluimos el ítem (e) de la Observación 2.0.3 no puede generalizarse para la $\mathcal{A}$-propiedad de aproximación. En otras palabras, dados dos ideales de Banach $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ tales que $\mathcal{K}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{K}_{\mathcal{B}}$, en general no es cierto que la $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$-propiedad de aproximación implique la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación. Más aún, no sabemos si la propiedad de aproximación clásica implica o no la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación para cualquier ideal de Banach $\mathcal{A}$. Sin embargo, al consider la propiedad de aproximación acotada obtenemos un resultado positivo. Recordemos que un espacio de Banach X tiene la propiedad de aproximación acotada si $Id_X \in \overline{\mathcal{F}(X;X) \cap \lambda B_{\mathcal{L}(X;X)}}^{\tau_c}$, para algún $\lambda \geq 1$.

Proposición 2.1.4. *Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal de Banach. Si X tiene la, propiedad de aproximación acotada, entonces X tiene la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación.*

Demostración: Por la Proposición 2.1.3, para obtener el resultado basta con mostrar que $Id_X \in \overline{\mathcal{F}(X;X)}^{\tau_{s\mathcal{A}}}$. Tomemos una seminorma $\tau_{s\mathcal{A}}$-continua q_K determinada por el conjunto absolutamente convexo $\mathcal{A}$-compacto $K \subset X$. Por la Proposición 1.1.12, existen un operador $T \in \mathcal{A}(\ell_1; E)$ y un conjunto compacto $M \subset B_{\ell_1}$ tales que $K \subset T(M)$. Por [Rya2, Lemma 4.11] exite un espacio de Banach Y, un operador compacto e inyectivo $S \in \mathcal{K}(Y; \ell_1)$ y un conjunto compacto $L \subset \ell_1$ tales que

$$M \subset L = S(B_Y) \quad \text{y} \quad S^{-1}(M) \text{ es compacto.}$$

Así obtenemos que

$$K \subset T(M) \subset T(L) = T \circ S(B_Y).$$

Como vimos en la Proposición 1.2.40, al ser L un conjunto compacto de ℓ_1 existe una sucesión $(\gamma_n)_n \in B_{c_0}$ tal que

$$L \subset \{x \in \ell_1 \colon \|x - \pi_n x\| \leq \gamma_n, n \geq 1\},$$

donde π_n es la proyección a las primeras n-ésimas coordenadas.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos los subespacios de dimensión finita $W_n = T \circ \pi_n \circ S(Y)$. Como X tiene la propiedad de aproximación acotada, por [DF, Proposition 16.9], para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un operador de rango finito $R_n \in \mathcal{F}(X; X)$ tal que $\|R_n\| \leq \lambda$ para algún $\lambda \geq 1$ y

$$R_n \circ T \circ \pi_n \circ S = T \circ \pi_n \circ S.$$

Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{A}}((R_n - Id_X)(K); X) &\leq m_{\mathcal{A}}((R_n - Id_X)(T \circ S(B_Y)); X) \\ &\leq \|(R_n - Id_X) \circ T \circ S\|_{\mathcal{A}} \\ &\leq \|R_n \circ T \circ S - R_n \circ T \circ \pi_n \circ S\|_{\mathcal{A}} + \|T \circ \pi_n \circ S - T \circ S\|_{\mathcal{A}} \\ &\leq \|R_n\| \|T\|_{\mathcal{A}} \|S - \pi_n \circ S\| + \|T\|_{\mathcal{A}} \|\pi_n \circ S - S\| \\ &\leq (\|R_n\| + 1) \|T\|_{\mathcal{A}} \|S - \pi_n \circ S\| \\ &\leq (\lambda + 1) \|T\|_{\mathcal{A}} |\gamma_n|, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se obtiene ya que, como $S(B_Y) = L$, $\|S - \pi_n \circ S\| = \sup_{x \in L} \|x - \pi_n x\|$. Como $(\gamma_n)_n$ converge a cero, se sigue el resultado. □

Si el ideal de Banach $\mathcal{A}$ es accesible a derecha, entonces la propiedad de aproximación clásica implica la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación. Para ver esto, vamos necesitar de la siguiente proposición, que es una caracterización de la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación en términos del núcleo minimal de $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$.

Proposición 2.1.5. *Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal de Banach accesible a derecha. Entonces, X tiene la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación si y sólo si $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Y; X) = \mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{min}(Y; X)$ para todo espacio de Banach Y.*

Demostración: Como $\mathcal{A}$ es accesible a derecha, por la Proposición 1.2.28, las normas $\|\cdot\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{min}}$ coinciden sobre los operadores de rango finito. Por lo tanto, para todo par de espacios de Banach X e Y tenemos las siguientes igualdades

$$\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{min}(Y; X) = \overline{\mathcal{F}(Y; X)}^{\|\cdot\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{min}}} = \overline{\mathcal{F}(Y; X)}^{\|\cdot\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}}.$$

Como X tiene la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación, entonces $\overline{\mathcal{F}(Y; X)}^{\|\cdot\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}} = \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Y; X)$. De la igualdad anterior se sigue el resultado. □

Proposición 2.1.6. *Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal de Banach accesible a derecha. Si X tiene la propiedad de aproximación, entonces X tiene la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación.*

Demostración: Como X tiene la propiedad de aproximación, por [DF, Proposition 25.11] tenemos que

$$(\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{min})^{sur}(Y;X) = (\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{sur})^{min}(Y;X) = \mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{min}(Y;X),$$

para todo espacio de Banach Y, donde la última igualdad se tiene porque $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$ es un ideal suryectivo (ver Observación 1.2.8). Como $\mathcal{A}$ es accesible a derecha, por la Proposición 1.2.12 $\mathcal{K}_{\mathcal{A}} = (\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{min})^{sur}$. Luego $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Y,X) = \mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{min}(Y;X)$, aplicando la Proposición 2.1.5, concluimos la demostración. □

Como $\mathcal{K}_p = \mathcal{K}_{\mathcal{N}^p}$ y $\mathcal{N}^p$ es un ideal de Banach a accesible, aplicando los dos resultados anteriores tenemos

Ejemplos 2.1.7. Sean X un espacio de Banach y $1 \leq p < \infty$. Entonces

(a) X tiene la $\mathcal{K}_p$-propiedad de aproximación si y sólo si $\mathcal{K}_p(Y;X) = \mathcal{K}_p^{min}(Y;X)$ para todo espacio de Banach Y. En particular, para $1 \leq p < \infty, p \neq 2$, $\mathcal{K}_p$ no es un ideal minimal, mientras que $\mathcal{K}_2$ es un ideal minimal.

(b) Si X tiene la propiedad de aproximación, entonces tiene la $\mathcal{K}_p$-propiedad de aproximación.

En la Proposición 1.2.5 vimos que todo operador $\mathcal{A}$-compacto se factoriza a través de un espacio de Banach separable y reflexivo. Gracias a esto, podemos reformular la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación de la siguiente manera.

Proposición 2.1.8. *Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal de Banach. Son equivalentes:*

(i) *X tiene la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación.*

(ii) *Para todo espacio de Banach separable y reflexivo Y, $\mathcal{F}(Y;X)$ es $\|\cdot\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}$-denso en $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Y;X)$.*

Demostración: Sólo hay que mostrar que (ii) implica (i). Sea Y un espacio de Banach y tomemos un operador $T \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Y;X)$. Por la Proposición 1.2.5, existen un espacio de Banach separable y reflexivo Z y operadores $R \in \mathcal{K}(Y;Z)$ y $S \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Z;X)$ tales que $T = S \circ R$. Por hipótesis, existe una sucesión de operadores de rango finito $(S_n)_n \in \mathcal{F}(Z;X)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|S_n - S\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} = 0$. Por lo tanto, si consideramos la sucesión $(S_n \circ R)_n \subset \mathcal{F}(Y;X)$, tenemos que

$$\|T - S_n \circ R\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} = \|S \circ R - S_n \circ R\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} \leq \|S - S_n\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} \|R\|,$$

Así, $\lim_{n\to\infty} \|T - S_n \circ R\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} = 0$ y la demostración concluye. □

Como consecuencia de la Proposición 2.1.3, si X o Y tiene la $\mathcal{K}_\mathcal{A}$-propiedad de aproximación, entonces $\mathcal{F}(X;Y)$ es $\tau_{s\mathcal{A}}$-denso en $\mathcal{L}(X;Y)$. Por lo tanto, es natural preguntarse que ocurre si se invierten los roles de X e Y en la definición de la $\mathcal{K}_\mathcal{A}$-propiedad de aproximación. Es bien sabido que X' tiene propiedad de aproximación si y sólo si pata todo espacio de Banach Y, $\mathcal{F}(X;Y)$ es $\|\cdot\|$-denso en $\mathcal{K}(X;Y)$ (ver, [Rya2, Proposition 4.12] o Proposición (B) de la pág. 12). Como existen espacios de Banach con propiedad de aproximación tales que su dual no la tiene (ver, por ejemplo, [LT3, Theorem 1.e.7 (b)]), el rol que juega la propiedad de aproximación de un espacio de Banach X en $\mathcal{K}(X;Y)$ no es el mismo que en $\mathcal{K}(Y;X)$. En el marco de la $\mathcal{K}_\mathcal{A}$-propiedad de aproximación ocurre lo mismo. Para ver esto, primero necesitaremos el siguiente lema. Recordemos que al espacio $X\otimes Y$ se lo puede considerar como un subespacio de $\mathcal{F}(X';Y)$.

Lema 2.1.9. *Sean X e Y espacios de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal de Banach. Entonces el conjunto $X\otimes Y$ es $\tau_{s\mathcal{A}}$-denso en $\mathcal{F}(X';Y)$.*

Demostración: Tomemos un operador $T\in\mathcal{F}(X';Y)$, dado por $T=\sum_{j=1}^n x_j''\otimes y_j$ para algunos $x_1'',\dots,x_n''\in X''$ e $y_1,\dots,y_n\in Y$, y sean $\varepsilon>0$ y q_K una seminorma $\tau_{s\mathcal{A}}$-continua determinada por el conjunto absolutamente convexo $\mathcal{A}$-compacto $K\subset X'$. Por el teorema de Goldstine, $j_X(\overline{B_X})$ es débil*-denso en $\overline{B_{X''}}$. Como las topologías débil* y de convergencia uniforme sobre compactos coinciden sobre conjuntos acotados en norma, entonces existen $x_1,\dots,x_n\in X$ tales que, para todo $j=1,\dots,n$,

$$\sup_{x'\in K}|x'(x_j)-x_j''(x')|<\frac{\varepsilon}{\sum_{j=1}^n\|y_j\|}.$$

Sea $R=\sum_{j=1}^n x_j\otimes y_j$ un elemento en $X\otimes Y$. Luego, por la Proposición 1.1.9, tenemos que

$$\begin{aligned}q_K(T-R)&=m_\mathcal{A}((R-T)(K);Y)\\&\le\sum_{j=1}^n m_\mathcal{A}((x_j''-x_j)(K)y_j;Y)\\&=\sum_{j=1}^n\|y_j\|\sup_{x'\in K}|x_j''(x')-x_j(x')|\le\varepsilon,\end{aligned}$$

obteniendo el resultado. □

Proposición 2.1.10. *Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal de Banach. Son equivalentes:*

(i) *X' tiene la $\mathcal{K}_\mathcal{A}$-propiedad de aproximación.*

(ii) *Para todo espacio de Banach Y, $\mathcal{K}_\mathcal{A}^d\circ\mathcal{F}(X;Y)$ es $\|\cdot\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}^d}$-denso en $\mathcal{K}_\mathcal{A}^d(X;Y)$.*

(iii) *Para todo espacio de Banach* Y, $\mathcal{F}(X;Y)$ *es* $\|\cdot\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^d}$*-denso en* $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^d(X;Y)$.

Demostración: Supongamos que vale (i) y tomemos un operador $T \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}^d(X;Y)$ y $\varepsilon > 0$. Como $T' \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Y';X')$, luego $T'(B_{Y'}) \subset X'$ es un conjunto $\mathcal{A}$-compacto y como X' tiene la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación, combinando la Proposición 2.1.3 y el Lema 2.1.9, existen $x_1,\ldots,x_n \in X$ y $x'_1,\ldots,x'_n \in X'$ tales que, si $R \in X \otimes X'$ viene dado por $R = \sum_{j=1}^n x_j \otimes x'_j$, entonces $m_{\mathcal{A}}((R - Id_{X'})(T'(B_{Y'}));X') \leq \varepsilon$. Finalmente, considerando el operador $S \in \mathcal{F}(X;X)$ dado por $S = \sum_{j=1}^n x'_j \otimes x_j$, tenemos que $S' = R$ y, por lo tanto,

$$\|T \circ S - T\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^d} = \|R \circ T' - T'\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} = m_{\mathcal{A}}((R - Id_{X'})T'(B_{Y'});X') \leq \varepsilon,$$

obteniendo (ii). Que (ii) implica (iii) es claro. Ahora supongamos que vale (iii) y tomemos un operador $T \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Y;X')$. Por el Corolario 1.2.43, $\mathcal{K}_{\mathcal{A}} = \mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{dd}$ y por lo tanto $T' \circ j_X \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}^d(X;Y')$. Fijado $\varepsilon > 0$, existe $S \in \mathcal{F}(X;Y')$ tal que $\|S - T' \circ j_X\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^d} \leq \varepsilon$. Luego, como $j'_X \circ T'' \circ j_Y = T$, tenemos que

$$\|S' \circ j_Y - T\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} \leq \|S' - j'_X \circ T''\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} = \|S' - (T' \circ j_X)'\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} = \|S - T' \circ j_X\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^d} \leq \varepsilon,$$

obteniendo (i) y concluyendo la demostración. □

Como mencionamos anteriormente, que X' tenga la propiedad de aproximación incide directamente en la estructura de los operadores compactos con dominio en X. En vista de la proposición anterior, la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación de X' afecta al ideal de Banach $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^d(X;Y)$ y no al ideal de operadores $\mathcal{A}$-compactos con dominio en X. Si nos enfocamos en el ideal $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(X;Y)$ se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.1.11. *Sean* X *un espacio de Banach y* $\mathcal{A}$ *un ideal de Banach. Consideremos las siguientes afirmaciones.*

(i) X' *tiene la* $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^d$*-propiedad de aproximación .*

(ii) *Para todo espacio de Banach* Y, $\mathcal{F}(X;Y)$ *es* $\|\cdot\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}$*-denso en* $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(X;Y)$.

Entonces (ii) *implica* (i).

Demostración: Sean $T \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}^d(Y;X')$ y $\varepsilon > 0$ y veamos que existe un operador $R \in \mathcal{F}(Y;X')$ tal que $\|T - S\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^d} \leq \varepsilon$. Como $T' \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(X'';Y')$, se sigue que $T' \circ j_X \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(X;Y')$ y, por lo tanto, exite $R \in \mathcal{F}(X;Y')$ tal que $\|T' \circ J_X - R\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} \leq \varepsilon$. Si $S = R' \circ j_Y$, tenemos que $S \in \mathcal{F}(Y;X')$ y, como $T = j'_X \circ T'' \circ j_Y$, obtenemos que

$$\begin{aligned}\|T - S\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^d} &\leq \|j'_X \circ T'' - R'\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^d}\\ &= \|(T' \circ j_X)' - R'\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^d}\\ &= \|R - T' \circ j_X\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{dd}}\\ &= \|R - T' \circ j_X\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} \leq \varepsilon,\end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue del Corolario 1.2.43 pues $\mathcal{K}_{\mathcal{A}} = \mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{dd}$ isométricamente. □

No sabemos si en la proposición anterior vale en general que (i) implica (ii). Sin embargo, en el marco de la p-compacidad, obtenemos una respuesta afirmativa.

Proposición 2.1.12. *Sean X un espacio de Banach y $1 \leq p < \infty$. Son equivalentes:*

(i) *X' tiene la $\mathcal{QN}_p$-propiedad de aproximación.*

(ii) *Para todo espacio de Banach separable y reflexivo Y, $\mathcal{F}(X;Y)$ es $\|\cdot\|_{\mathcal{K}_p}$-denso en $\mathcal{K}_p(X;Y)$.*

(iii) *Para todo espacio de Banach Y, $\mathcal{F}(X;Y)$ es $\|\cdot\|_{\mathcal{K}_p}$-denso en $\mathcal{K}_p(X;Y)$.*

Demostración: Por el Teorema 1.2.44, $\mathcal{K}_p^d = \mathcal{QN}_p$. Luego una aplicación de la proposición anterior muestra que (iii) implica (i). Para ver que (i) implica (ii), tomemos un espacio de Banach separable y reflexivo Y, un operador $T \in \mathcal{K}_p(X;Y)$ y $\varepsilon > 0$. Por el Teorema 1.2.44 tenemos que $T' \in \mathcal{QN}_p(Y';X')$, luego por (i) existe un operador $S \in \mathcal{F}(Y';X')$ tal que $\|S - T'\|_{\mathcal{QN}_p} \leq \varepsilon$. Como Y es reflexivo, entonces $\mathcal{F}(Y';X') = Y \otimes X'$ y, por lo tanto, $S' \circ j_X \in \mathcal{F}(X;Y)$. Si $R = S' \circ j_X$, tenemos que $R' = S$ y,

$$\|R - T\|_{\mathcal{K}_p} = \|R - T\|_{\mathcal{K}_p^{dd}} = \|T' - R'\|_{\mathcal{QN}_p} \leq \varepsilon,$$

obteniendo (ii). Por último, supongamos que vale (ii) y tomemos un espacio de Banach Y y un operador p-compacto $T \in \mathcal{K}_p(X;Y)$. Por el Corolario 1.3.2, existen un espacio de Banach Z separable y reflexivo y operadores $T_1 \in \mathcal{K}_p(X;Z)$ y $R \in \mathcal{K}(Z;Y)$ tales que $T = R \circ T_1$. Por hipótesis, existe un operador de rango finito $\widetilde{S} \in \mathcal{F}(X;Z)$ tal que $\|\widetilde{S} - T_1\|_{\mathcal{K}_p} \leq \frac{\varepsilon}{\|R\|}$. Si notamos con S al operador $S = R \circ \widetilde{S}$, tenemos que $S \in \mathcal{F}(X;Y)$ y

$$\|T - S\|_{\mathcal{K}_p} = \|R \circ T_1 - R \circ S\|_{\mathcal{K}_p} \leq \|R\|\|T_1 - \widetilde{S}\|_{\mathcal{K}_p} \leq \varepsilon,$$

concluyendo la demostración. □

2.1.1. Sobre el espacio dual $(\mathcal{L}(X;Y),\tau_{s\mathcal{A}})'$ y la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación

En esta sección caracterizaremos el dual de $(\mathcal{L}(X;Y),\tau_{s\mathcal{A}})$ en el caso de que $\mathcal{A}$ sea un ideal accesible a derecha. Como consecuencia, vamos a poder dar condiciones de traza de la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación y establecer como influye la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación de X'' o X' en X.

Teorema 2.1.13. *Sea $\mathcal{A}$ un ideal de Banach accesible a derecha. Entonces $\phi \in (\mathcal{L}(X;Y),\tau_{s\mathcal{A}})'$ si y sólo si existen una sucesión $(x_n)_n \in c_{0,\mathcal{A}}(X)$ y un operador $R \in \mathcal{A}'(c_0;Y')$ tales que*

$$\phi(T) = \sum_{n=1}^{\infty}(Re_n)(Tx_n).$$

Demostración: Veamos primero que una funcional ϕ con la descripción del enunciado es $\tau_{s\mathcal{A}}$-continua. Tomemos una sucesión $(x_n)_n \in c_{0,\mathcal{A}}(X)$ y un operador $R \in \mathcal{A}'(c_0;Y')$. Como $\mathcal{A}$ es accesible a derecha, por el Corolario 1.2.33 tenemos que $c_{0,\mathcal{A}}(Y)' = \mathcal{A}'(c_0;Y')$. Por lo tanto, al operador R lo podemos relacionar con una funcional ψ, donde la relacion viene dada por

$$\psi((y_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(Re_n)(y_n) \qquad (y_n)_n \in c_{0,\mathcal{A}}(Y).$$

Luego, como para todo operador $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ la sucesión $(Tx_n)_n \in c_{0,\mathcal{A}}(Y)$, tenemos que existe una constante $C > 0$ tal que

$$|\sum_{n=1}^{\infty}(Re_n)(Tx_n)| \leq C\|(Tx_n)\|_{c_{0,\mathcal{A}}(Y)} = C m_{\mathcal{A}}((Tx_n)_n;Y),$$

y, como por el ítem (a) de la Observación 2.1.2, la seminorma $q_{(x_n)_n}$ definida por

$$q_{(x_n)_n}(T) = m_{\mathcal{A}}((Tx_n)_n;Y)$$

es $\tau_{s\mathcal{A}}$-continua, tenemos que ϕ es $\tau_{s\mathcal{A}}$-continua.

Para ver que toda funcional tiene dicha descripción, tomemos $\phi \in (\mathcal{L}(X;Y),\tau_{s\mathcal{A}})'$. Luego, existe una sucesion $(x_n)_n \in c_{0,\mathcal{A}}(X)$ tal que $|\phi(T)| \leq m_{\mathcal{A}}((Tx_n)_n;Y)$. Sea

$$\Psi\colon \mathcal{L}(X;Y) \to c_{0,\mathcal{A}}(Y)$$

el operador definido por $\Psi(T) = (Tx_n)_n$. Es claro que Ψ es un operador lineal y continuo. Sea $M = \overline{\Psi(\mathcal{L}(X;Y))}$, que es un subespacio de $c_{0,\mathcal{A}}(Y)$, y definamos la funciona lineal Φ sobre M como $\Phi(Tx_n)_n = \phi(T)$ que extendemos por densidad. La buena definición de Φ se debe a que, si T y $S \in \mathcal{L}(X;Y)$ son operadores tales que $Tx_n = Sx_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$|\phi(T-S)| \leq m_{\mathcal{A}}(((T-S)x_n)_n; Y) = 0$ y, por lo tanto, $\phi(T) = \phi(S)$. Por el teorema de Hahn-Banach podemos extender Φ a una funcional continua sobre $c_{0,\mathcal{A}}(Y)$, que seguiremos notando con Φ. Finalmente, por el Corolario 1.2.33, existe un operador $R \in \mathcal{A}'(c_0; Y)$ tal que

$$\phi(T) = \Phi(Tx_n)_n = \sum_{n=1}^{\infty} (Re_n)(Tx_n),$$

como queríamos mostrar. □

Gracias al teorema anterior, vamos dar una condición de traza de la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación similar al del ítem (vi) de la Proposición (A) de los Preliminares.

Proposición 2.1.14. *Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal de Banach accesible a derecha. Entonces X tiene la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_n \in c_{0,\mathcal{A}}(X)$ y para todo operador $S \in \mathcal{A}'(c_0; X')$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty}(Se_n)(x)x_n = 0$ para todo $x \in X$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(Se_n)(x_n) = 0$.*

Demostración: Por el ítem (ii) de la Proposición 2.1.3 X tiene la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación si y sólo si $Id_X \in \overline{\mathcal{F}(X;X)}^{\tau_{s\mathcal{A}}}$. Como $(\mathcal{L}(X;Y), \tau_{s\mathcal{A}})$ es un espacio localmente convexo y $\mathcal{F}(X;X)$ es un subespacio de $\mathcal{L}(X;X)$, por el teorema de Hahn-Banach, $Id_X \in \overline{\mathcal{F}(X;X)}^{\tau_{s\mathcal{A}}}$ si y sólo si para toda $\phi \in (\mathcal{L}(X;Y), \tau_{s\mathcal{A}})'$ que se anule sobre $\mathcal{F}(X;X)$, se tiene que $\phi(Id_X) = 0$. Como ϕ es lineal, que ϕ se anule sobre $\mathcal{F}(X;X)$ es equivalente a que sea nula sobre todos los operadores de rango 1. Por lo tanto, tenemos que X tiene la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación si y sólo si para toda $\phi \in (\mathcal{L}(X;Y), \tau_{s\mathcal{A}})'$ tal que $\phi(x' \otimes x) = 0$ para todo $x' \in X$ y $x \in X$, se tiene que $\phi(Id_X) = 0$. Aplicando el Teorema 2.1.13, llegamos a que X tiene la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_n \in c_{0,\mathcal{A}}(X)$ y todo operador $S \in \mathcal{A}'(c_0; X')$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty}(Se_n)(x)x'(x_n) = 0$ para todo $x \in X$ y $x' \in X$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(Se_n)(x_n) = 0$. Para obtener el resultado basta notar que $\sum_{n=1}^{\infty}(Se_n)(x)x'(x_n) = 0$ para todo $x \in X$ y $x' \in X$ si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty}(Se_n)(x)x_n = 0$ para todo $x \in X$. □

En el contexto de la $\mathcal{K}_p$-propiedad de aproximación, el resultado anterior fue obtenido por Delgado, Piñeiro y Serrano [DPS1, Theorem 3.1].

Observación. Combinando la proposición anterior y la Proposición 2.1.3, extendemos la Proposición (A) de la pág. 11 al caso de la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación en el caso de que $\mathcal{A}$ sea un ideal de Banach accesible a derecha.

Como consecuencia de la condición de traza, la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación de un espacio se hereda a sus subespacios complementados.

Proposición 2.1.15. *Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal de Banach accesible a derecha. Si X tiene la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación, entonces todo subespacio complementado de X tiene la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación.*

Demostración: Sean Y un subespacio complementado de X y $P\colon X \to Y$ un proyector. Tomemos una sucesión $(y_n)_n \in c_{0,\mathcal{A}}(Y)$ un operador $S \in \mathcal{A}'(c_0; Y')$ tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(Se_n)(y)y_n = 0$$

para todo $y \in Y$. Por la proposición anterior, si mostramos que $\sum_{n=1}^{\infty}(Se_n)(y_n) = 0$, obtendremos el resultado.

Como $(y_n)_n \in c_{0,\mathcal{A}}(Y)$ e Y es un subespacio de X, entonces $(y_n)_n$ es $\mathcal{A}$-nula en X y, si consideramos el operador composición $P' \circ S \in \mathcal{A}'(c_0; X')$, tenemos que para todo $x \in X$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(P' \circ Se_n)(x)y_n = \sum_{n=1}^{\infty}(Se_n)(Px)y_n = 0.$$

Como X tiene la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación, por la Proposición 2.1.14, obtenemos que

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty}(P' \circ Se_n)(y_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(Se_n)(Py_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(Se_n)(y_n),$$

como queríamos ver. $\square$

Delgado, Piñeiro y Serrano muestran que si X'' tiene la $\mathcal{K}_p$-propieda de aproximación, entonces X la tiene [DPS1, Corollary 3.5]. Nosotros, al tener caracterizadas las funcionales del espacio dual $(\mathcal{L}(X;Y), \tau_{s\mathcal{A}})'$, podemos generalizar este resultado.

Proposición 2.1.16. *Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal accesible a derecha. Si X'' tiene la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación, entonces X tiene la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación.*

Demostración: Tomemos una sucesión $(x_n)_n \in c_{0,\mathcal{A}}(X)$ y un operador $S \in \mathcal{A}'(c_0; X')$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty}(Se_n)(x)x_n = 0$ para todo $x \in X$. En virtud de la Proposición 2.1.14, para ver que X tiene la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación, basta con ver que $\sum_{n=1}^{\infty}(Se_n)(x_n) = 0$. Como $\sum_{n=1}^{\infty}(Se_n)(x)x_n = 0$ para todo $x \in X$, luego $\sum_{n=1}^{\infty}(Se_n)(x)x'(x_n) = 0$ para todo $x \in X$ y para todo $x' \in X'$. Por lo tanto, se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} x'(x_n)Se_n = 0$ para todo $x' \in X'$. De la misma forma, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x''(Se_n)x_n = \sum_{n=1}^{\infty}(j_{X'} \circ Se_n)(x'')(j_X x_n) = 0$$

para todo $x'' \in X''$. Como la sucesión $(j_X x_n)_n \in c_{0,\mathcal{A}}(X'')$ y $j_{X'} \circ S \in \mathcal{A}'(c_0; X''')$, debido a que X'' tiene la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación, por la Proposición 2.1.14, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (j_{X'} \circ Se_n)(j_X x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (Se_n)(x_n) = 0,$$

como queríamos ver. □

En general, no sabemos si la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación del dual de un espacio de Banach implica *algún* tipo de propiedad de aproximación en el espacio. Sin embargo, la $\mathcal{K}_p$-propiedad de aproximación de X' implica la $\mathcal{K}_{\mathcal{N}_{p'}}$-propiedad de aproximación $(1 < p < \infty)$. Los siguientes resultados estan destinados a mostrar esto último. Empecemos por caracterizar el dual de $(\mathcal{L}(X;Y), \tau_{s\mathcal{N}^p})$.

Proposición 2.1.17. *Sean X e Y espacios de Banach, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Entonces una funcional ϕ pertenece a $(\mathcal{L}(X;Y), \tau_{s\mathcal{N}^p})'$ si y sólo si existen $(x_n)_n \in c_{0,\mathcal{K}_p}(X)$ y $S \in \mathcal{N}_{p'}(c_0; Y')$ tales que*

$$\phi(T) = \sum_{n=1}^{\infty} (Se_n)(Tx_n),$$

para todo $T \in \mathcal{L}(X;Y)$.

Demostración: Recordemos que por el Ejemplo 1.2.22 y lo hecho en la Proposición 1.2.23, el ideal de los operadores p-compactos esta asociado con la norma tensorial $g'_{p'}$. Por lo tanto, como $g''_p = g_p$ [DF, Propositoin 15.3], resulta que $\mathcal{K}'_p$ es el ideal de Banach maximal con norma tensorial asociada $g_{p'}$. Luego, por [DF, 17.5], $\mathcal{K}'_p = \mathcal{I}_{p'}$, el ideal de los operadores p'-integrales. Por lo tanto, del Teorema 2.1.13, tenemos que una funcional $\phi \in (\mathcal{L}(X;Y), \tau_{s\mathcal{N}^p})'$ si y sólo si existen una sucesión $(x_n)_n \in c_{0,\mathcal{N}^p}(X)$ y un operador $S \in \mathcal{I}_{p'}(c_0; Y')$ tales que

$$\phi(T) = \sum_{n=1}^{\infty} (Se_n)(Tx_n).$$

Tomemos una sucesión $(\beta_n)_n \in c_0$ tal que la sucesión $\tilde{x}_n = \frac{x_n}{\beta_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, verifica $(\tilde{x}_n)_n \in c_{0,\mathcal{N}^p}(X)$ y, definamos el operador diagonal $D\colon c_0 \to c_0$ dado por $D(e_n) = \beta_n e_n$. Luego, tenemos que

$$\phi(T) = \sum_{n=1}^{\infty} (Se_n)(Tx_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (Se_n)(T\beta_n \tilde{x}_n) \sum_{n=1}^{\infty} (S\beta_n e_n)(T\tilde{x}_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (S \circ D_n e_n)(T\tilde{x}_n).$$

Notemos que el operador D es aproximable. Finalmente, como $\mathcal{I}_{p'}$ es un ideal accesible (ya que $g_{p'}$ es una norma tensorial accesible [DF, Theorem 21.5]), $S \circ D \in \mathcal{I}_{p'}^{min}(c_0; Y') = \mathcal{N}_{p'}(c_0; Y')$ [DF, Example 22.3], obteniendo el resultado. □

De la misma forma que procedimos en la Proposición 2.1.14, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.1.18. *Sean X un espacio de Banach y $1 < p < \infty$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Entonces X tiene la $\mathcal{K}_p$-propiedad de aproximación si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_n \in c_{0,\mathcal{K}_p}(X)$ y para todo operador $S \in \mathcal{N}_{p'}(c_0; X')$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty}(Se_n)(x)x_n = 0$ para todo $x \in X$, se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty}(Se_n)(x_n) = 0$.*

En la Proposición 1.1.12, vimos que en la definición de un conjunto $\mathcal{A}$-compacto, podíamos considerar sólo operadoradores con dominio en ℓ_1. En el caso de los operadores $\mathcal{N}_p$-compactos, también podemos considerar sólo los operadores con dominio en c_0.

Lema 2.1.19. *Sean X un espacio de Banach y $1 < p < \infty$. Un conjunto $K \subset X$ es relativamente $\mathcal{N}_p$-compacto si y sólo si existen un operador $T \in \mathcal{N}_p(c_0; X)$ y un conjunto compacto $L \subset c_0$ tales que $K \subset T(L)$. En consecuencia, una sucesión $(x_n)_n \subset X$ es $\mathcal{N}_p$-nula si y sólo si existen un operador $T \in \mathcal{N}_p(c_0; X)$ y una sucesión $(z_n)_n \in c_0(c_0)$ tales que $x_n = Tz_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración: Es claro que si $K \subset T(L)$ con $T \in \mathcal{N}_p(c_0; X)$ y $L \subset c_0$ compacto, entonces K es relativamente $\mathcal{N}_p$-compacto. Para la otra implicación, tomemos un espacio de Banach Z, operador p-nuclear $T \in \mathcal{N}_p(Z; X)$ y un conjunto compacto $M \subset Z$ tal que $K \subset T(M)$. Por [DJT, Proposition 5.23], existen operadores $S \in \mathcal{L}(Z; c_0)$, $R \in \mathcal{L}(\ell_p; X)$ y un operador p-nuclear $T_0 \in \mathcal{N}_p(c_0; \ell_p)$ tales que $T = R \circ T_0 \circ S$. Por lo tanto, el conjunto $L = S(M) \subset c_0$ es compacto, el operador $\tilde{T} = R \circ T_0 \in \mathcal{N}_p(c_0; X)$ y $K \subset T(M) = \tilde{T}(L)$, como queríamos ver.

En consecuencia, si $(x_n)_n \in c_{0,\mathcal{N}_p}(X)$, por lo recién visto, existen un operador $T \in \mathcal{N}_p(c_0; X)$ y un conjunto compacto $L \subset c_0$ tales que $(x_n)_n \subset T(L)$. Procediendo de la misma forma que hicimos en la demostración de (iii) implica (i) de la Proposición 1.1.14, obtenemos el resultado.

□

Proposición 2.1.20. *Sean X un espacio de Banach y tomemos $1 < p < \infty$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Si X' tiene la $\mathcal{K}_p$-propiedad de aproximación, entonces X tiene la $\mathcal{K}_{\mathcal{N}_{p'}}$-propiedad de aproximación.*

Demostración: Primero, notemos que como el ideal $\mathcal{N}_{p'}$ esta asociado a la norma tensorial $g_{p'}$, entonces $\mathcal{N}_{p'}'$ es el ideal maximal asociado a $g_{p'}'$ que, por lo visto en la Proposición 1.2.23, resulta ser el ideal Π_p^d. Ahora tomemos una sucesión $(x_n)_n \subset X$ $\mathcal{N}_{p'}$-nula y un operador $S \in \Pi_p^d(c_0; X')$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty}(Se_n)(x)x_n = 0$ para todo $x \in X$. Por la Proposición 2.1.14, si vemos que $\sum_{n=1}^{\infty}(Se_n)(x_n) = 0$, entonces X tiene la $\mathcal{K}_{\mathcal{N}_{p'}}$-propiedad de aproximación. Por el Lema 2.1.19, existen un operador $R \in \mathcal{N}_p(c_0; X)$ y una sucesión $(z_n)_n \in c_0(c_0)$ tales que $x_n = Rz_n$ para todo

$n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ notemos $z_n = \sum_{j=1}^{\infty} z_n^j e_j$, donde $(z_n^j)_j \in c_0$. Luego tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}(Se_n)(x)x_n = & \sum_{n=1}^{\infty}(Se_n)(x)Rz_n \\ = & \sum_{n=1}^{\infty}(Se_n)(x)R(\sum_{j=1}^{\infty} z_n^j e_j) \\ = & \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(Sz_n^j e_n)(x)Re_j \\ = & \sum_{j=1}^{\infty} S(\sum_{n=1}^{\infty} z_n^j e_n)(x)Re_j. \end{aligned}$$

Definamos para cada $j \in \mathbb{N}$ $w_j = \sum_{n=1}^{\infty} z_n^j e_n$. Es claro que $w_j \in c_0$ para cada $j \in \mathbb{N}$ y que la sucesión $(w_j)_j \in c_0(c_0)$. Por lo tanto, como $S \in \Pi_p^d(c_0; X')$, por la Proposición 1.2.25 y el Corolario 1.2.14 la sucesión $(Sw_j)_j \in c_{0,\mathcal{K}_p}(X')$. Por lo tanto, como $\sum_{j=1}^{\infty}(Sw_j)(x)Re_j = 0$ para todo $x \in X$, procediendo como en la Proposición 2.1.16, tenemos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} x'(Re_j)Sw_j = \sum_{j=1}^{\infty}(j_X \circ Re_j)(x')Sw_j = 0$$

para todo $x' \in X'$. Como X' tiene la $\mathcal{K}_p$-propiedad de aproximación, por el Corolario 2.1.18 tenemos que

$$\sum_{j=1}^{\infty}(Sw_j)(Re_j) = 0.$$

Finalmente, como

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty}(Sw_j)(Re_j) = & \sum_{j=1}^{\infty}(S(\sum_{n=1}^{\infty} z_n^j e_n))(Re_j) \\ = & \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(Se_n)(Rz_n^j e_j) \\ = & \sum_{n=1}^{\infty}(Se_n)(R(\sum_{j=1}^{\infty} z_n^j e_j)) \\ = & \sum_{n=1}^{\infty}(Se_n)(Rz_n) \\ = & \sum_{n=1}^{\infty}(Se_n)(x_n), \end{aligned}$$

tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty}(Se_n)(x_n) = 0$ como queríamos ver. □

2.2. La propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme

Ahora nos enfocaremos en la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme. Esta propiedad de aproximación mira al ideal $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(X;Y)$ como un subespacio de $\mathcal{L}(X;Y)$, donde la densidad se *mide* con la estructura geométrica que induce $\mathcal{L}$, y por eso $\mathcal{A}$ no necesita ser un ideal de Banach.

Vamos a empezar por dar una reformulación de esta propiedad en términos de la topología en $\mathcal{L}(X;Y)$ de convergencia uniforme sobre conjuntos $\mathcal{A}$-compactos. Esta topología, que la denotaremos $\tau_{\mathcal{A}}$, viene dada por la familia de seminormas

$$q_K(T) = \sup_{x \in K} \|Tx\|,$$

donde K varía sobre todos los conjuntos absolutamente convexos $\mathcal{A}$-compactos de X. Más aún, podemos considerar sólo los conjuntos de la forma $K = \overline{\text{co}\{(x_n)_n\}}$ donde $(x_n)_n \in c_{0,\mathcal{A}}(X)$. Antes de empezar, notemos que gracias a la Observación 1.1.11, las seminoras continuas de la topología $\tau_{\mathcal{A}}$ pueden expresarse de la forma

$$q_{(x_n)_n}(T) = m_{\overline{\mathcal{F}}}(T(\text{co}\{(x_n)_n\}); Y) = m_{\overline{\mathcal{F}}}((Tx_n)_n; Y),$$

donde $(x_n)_n$ varía sobre todas las sucesiones $\mathcal{A}$-nulas de X. También, para un operador compacto $T \in \mathcal{K}(X;Y)$, tenemos que

$$\|T\| = m_{\overline{\mathcal{F}}}(T(B_X); Y).$$

Proposición 2.2.1. *Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal. Son equivalentes:*

(i) *X tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme.*

(ii) $Id_X \in \overline{\mathcal{F}(X;X)}^{\tau_{\mathcal{A}}}$.

(iii) *$\mathcal{F}(X;X)$ es $\tau_{\mathcal{A}}$-denso en $\mathcal{L}(X;X)$.*

(iv) *Para todo espacio de Banach Y, $\mathcal{F}(X;Y)$ es $\tau_{\mathcal{A}}$-denso en $\mathcal{L}(X;Y)$.*

(v) *Para todo espacio de Banach Y, $\mathcal{F}(Y;X)$ es $\tau_{\mathcal{A}}$-denso en $\mathcal{L}(Y;X)$.*

(vi) *Para todo espacio de Banach Y, $\mathcal{F} \circ \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Y;X)$ es $\|.\|$-denso en $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Y;X)$.*

Sinha y Karn [SK1] definen la p-propiedad de aproximación ($1 \leq p < \infty$) de la siguiente manera: Un espacio de Banach X tiene la p-propiedad de aproximación si $Id_X \in \overline{\mathcal{F}(X;X)}^{\tau_p}$, donde τ_p es la topología de convergencia uniforme sobre conjuntos p-compactos. Esta propiedad coincide con la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{N}^p}$-uniforme.

Observación 2.2.2.

(a) Si $1 \leq p \leq 2$, todo espacio de Banach tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{N}^p}$-uniforme, [SK1, Theorem 6.4].

(b) Para todo $p > 2$, existe un espacio de Banach sin la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{N}^p}$-uniforme, [SK1, Theorem 6.7].

En la Proposición 1.2.5 se factoriza todo operador $\mathcal{A}$-compacto a través de un espacio de Banach separable y reflexivo. Gracias a esto, podemos reformular la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme de la siguiente manera. Vamos a omitir la demostración ya que es análoga a la de la Proposición 2.1.8.

Proposición 2.2.3. *Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal. Son equivalentes:*

(i) *X tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme.*

(ii) *Para todo espacio de Banach separable y reflexivo Y, $\mathcal{F}(Y;X)$ es $\|\cdot\|$-denso en $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Y;X)$.*

Al igual que pasa con la propiedad de aproximación y la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación, el rol que juega el espacio X con la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme en el espacio $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Y;X)$ no es el mismo que en $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(X;Y)$. Esto queda de manifiesto en las siguientes 2 proposiciones. Vamos a omitir la demostración de ambas ya que son análogas a las hechas en las Proposiciones 2.1.10 y 2.1.11.

Proposición 2.2.4. *Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal. Son equivalentes:*

(i) *X' tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme.*

(ii) *Para todo espacio de Banach Y, $\mathcal{F}(X;Y)$ es $\|\cdot\|$-denso en $\mathcal{K}^d_{\mathcal{A}}(X;Y)$.*

Proposición 2.2.5. *Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal. Consideremos las siguientes afirmaciones.*

(i) *X' tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{K}^d_{\mathcal{A}}$-uniforme.*

(ii) *Para todo espacio de Banach Y, $\mathcal{F}(X;Y)$ es $\|\cdot\|$-denso en $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(X;Y)$.*

Entonces (ii) *implica* (i).

No sabemos si en general vale que (i) implica (ii) de la proposición anterior. Sin embargo, en el marco de la p-compacidad, obtenemos una respuesta afirmativa. La demostración de la siguiente proposición es análoga a la hecha en la Proposición 2.1.12 también la omitiremos.

Proposición 2.2.6. *Sean X un espacio de Banach y $1 \leq p < \infty$. Son equivalentes:*

(i) *X' tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{QN}_p$-uniforme.*

(ii) *Para todo espacio de Banach separable y reflexivo* Y, $\mathcal{F}(X;Y)$ *es* $\|\cdot\|$*-denso en* $\mathcal{K}_p(X;Y)$.

(iii) *Para todo espacio de Banach* Y, $\mathcal{F}(X;Y)$ *es* $\|\cdot\|$*-denso en* $\mathcal{K}_p(X;Y)$.

2.2.1. Sobre el espacio dual $(\mathcal{L}(X;Y),\tau_{\mathcal{A}})'$ y la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme

El ítem (vi) de la Proposición (A) de la página 11, da una condición de traza sobre la propiedad de aproximación. Este resultado se tiene gracias a la caracterización del dual de $(\mathcal{L}(X;Y);\tau_c)$, dada por Grothendieck [Gro2]. El resultado clásico establece que el espacio dual de $(\mathcal{L}(X;Y),\tau_c)$ consiste en todas las funcionales ϕ de la forma

$$\phi(T)=\sum_{n=1}^{\infty} y_n'(Tx_n),$$

donde $(y_n')_n \subset Y' \in c_0(Y')$ y $(x_n)_n \in \ell_1(X)$ [LT3, Proposition 1.e.3]. Siguiendo la demostración de [LT3, Proposition 1.e.3], se puede caracterizar el espacio dual de $(\mathcal{L}(X;Y),\tau_{\mathcal{A}})$, donde $\tau_{\mathcal{A}}$ es la topología de convergencia uniforme sobre $\mathcal{A}$-compactos. En [DP2] los autores muestran el resultado que obtuvimos en forma independiente.

Proposición 2.2.7. *Sean* X *e* Y *espacios de Banach y* $\mathcal{A}$ *un ideal. Una funcional* ϕ *sobre* $\mathcal{L}(X;Y)$ *es* $\tau_{\mathcal{A}}$*-continua si y sólo si*

$$\phi(T)=\sum_{n=1}^{\infty} y_n'(Tx_n),$$

donde $(y_n')_n \subset Y' \in \ell_1(Y')$ *y* $(x_n)_n \in c_{0,\mathcal{A}}(X)$.

Demostración: Primero notemos que por [LT3, Proposition 1.e.3], una funcional ϕ sobre $\mathcal{L}(X;Y)$ dada por

$$\phi(T)=\sum_{n=1}^{\infty} y_n'(Tx_n),$$

para $T\in\mathcal{L}(X;Y)$, con $(y_n')_n \subset Y' \in \ell_1(Y')$ y $(x_n)_n \in c_{0,\mathcal{A}}(X)$ esta bien definida y resulta ser τ_c-continua. Para ver que es $\tau_{\mathcal{A}}$-continua basta notar que, como el conjunto

$$K=\overline{\mathrm{co}\{(x_n)_n\}}\subset X$$

es $\mathcal{A}$-compacto y, para todo $n\in\mathbb{N}$ vale que $\|Tx_n\|\le \sup_{x\in K}\|Tx\|$. Entonces tenemos

$$|\phi(T)|\le \sum_{n=1}^{\infty}\|y_n'\|\|Tx_n\|\le \|(y_n)_n\|_1 \sup_{x\in K}\|Tx\|,$$

y, por lo tanto, ϕ resulta $\tau_{\mathcal{A}}$-continua.

Ahora consideremos ϕ una funcional $\tau_{\mathcal{A}}$-continua. Luego, existe una sucesión $(x_n)_n \in c_{0,\mathcal{A}}(X)$ tal que, con $K = \overline{\text{co}\{(x_n)_n\}}$, $|\phi(T)| \leq \sup_{x\in K} \|Tx\|$. Consideremos la aplicación

$$\Psi\colon (\mathcal{L}(X;Y), \tau_{\mathcal{A}}) \to c_0(Y)$$

dada por $\Psi T = (Tx_n)_n$. Es claro que Ψ esta bien definida y es lineal. Más aún, tenemos que $\|\Psi T\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|Tx_n\| = \sup_{x\in K} \|Tx\|$, con lo cuál Ψ resulta continua. Sea $L \subset c_0(Y)$ el subespacio $L = \overline{\Psi(\mathcal{L}(X;Y))}$ y definamos una funcional $\Phi\colon L \to \mathbb{K}$ dada por

$$\Phi((y_n)_n) = \phi(T) \quad \text{si} \quad (y_n)_n = (Tx_n)_n$$

y la extendemos por densidad. Para ver la buena definición de Φ, consideremos 2 operadores T y $S \in \mathcal{L}(X;Y)$ tales que $Tx_n = Sx_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego $|\phi(T-S)| \leq \sup_{x\in K} \|(T-S)x\| = 0$ y, por lo tanto, $\phi(T) = \phi(S)$ con lo que concuimos que Φ esta bien definida.

Por el teorema de Hahn-Banach, Φ se puede extender a todo $c_0(Y)$ y, como $c_0(Y)' = \ell_1(Y')$, existe una sucesión $(y_n')_n \in \ell_1(Y')$ tal que

$$\phi(T) = \Phi(Tx_n)_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n'(Tx_n),$$

y así obtenemos el resultado. $\square$

Gracias a la proposición anterior, podemos dar una condición de traza de la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme. Vamos a omitir la demostración de la siguiente proposición ya que es similar a la hecha en la Proposición 2.1.14.

Proposición 2.2.8. *Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal. Entonces X tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme si y sólo si para todo par de sucesiónes $(x_n)_n \in c_{0,\mathcal{A}}(X)$ y $(x_n')_n \in \ell_1(X')$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n'(x)x_n = 0$ para todo $x \in X$, se tiene $\sum_{n=1}^{\infty} x_n'(x_n) = 0$.*

De forma análoga a la Proposición 2.1.15, tenemos:

Proposición 2.2.9. *Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal. Si X tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme, entonces todo subespacio complementado de X tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme.*

De la misma forma que en la Proposición 2.1.16, tenemos:

Corolario 2.2.10. *Sea X un espacio de Banach. Si X'' tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme, entonces X tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme.*

En general, no sabemos si la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme se hereda de un espacio dual. En otras palabras, si X' tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme, ¿$X$ la tiene? Sin embargo, podemos establecer una condición para que esto ocurra. Para ello, primero notemos que gracias a [LT3, Proposition 1.e.3] y a la descripción del tensor proyectivo (ver página 8) existe una relación biunívoca entre las funcionales sobre $(\mathcal{L}(X;Y),\tau_c)$ e $Y'\widehat{\otimes}_\pi X$ dada por

$$\begin{array}{rcl} Y'\widehat{\otimes}_\pi X & \longrightarrow & (\mathcal{L}(X;Y),\tau_c) \\ u=\displaystyle\sum_{n=1}^\infty y'_n\otimes x_n & \longmapsto & \phi\colon \phi(T)=\displaystyle\sum_{n=1}^\infty y'_n(Tx_n). \end{array}$$

Esta relación, junto a la Proposición 2.2.7 nos sugiere considerar los siguientes subespacios del tensor proyectivo

$$\begin{array}{ll} S_{\mathcal{A}}(X;Y) & =\{u=\sum_{n=1}^\infty x_n\otimes y_n\colon\ (x_n)_n\in\ell_1(X),\ (y_n)_n\in c_{0,\mathcal{A}}(Y)\}, \\ S^{\mathcal{A}}(X;Y) & =\{u=\sum_{n=1}^\infty x_n\otimes y_n\colon (x_n)_n\in c_{0,\mathcal{A}}(X),\ (y_n)_n\in\ell_1(Y)\}. \end{array}$$

Definición 2.2.11. *Sea $\mathcal{A}$ un ideal. Un tensor en $S_{\mathcal{A}}$ se dirá $\mathcal{A}$-representable y un tensor en $S^{\mathcal{A}}$ se dirá $\mathcal{A}$-representable a derecha. De la misma forma, si X e Y son espacios de Banach, una funcional ϕ sobre $\mathcal{L}(X;Y)$ se dice $\mathcal{A}$-representable (resp. $\mathcal{A}$-representable a derecha) si*

$$\phi(T)=\sum_{n=1}^\infty y'_n(Tx_n),$$

donde ϕ esta asociada al tensor $u=\sum_{n=1}^\infty y'_n\otimes x_n\in S_{\mathcal{A}}(Y';X)$ (resp. $u\in S^{\mathcal{A}}(Y';X)$).

Observación 2.2.12. Recordemos que $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ es isométricamente isomorfo a $Y\widehat{\otimes}_\pi X$ vía el operador de transposición $u\mapsto u^t$. Bajo el mismo isomorfismo, se tiene que $S_{\mathcal{A}}(Y;X)\overset{t}{\mapsto} S^{\mathcal{A}}(X;Y)$.

Con estas definiciones, se tiene

Proposición 2.2.13. *Sea X un espacio de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal tal que $S_{\mathcal{A}}(X',X)\subset S^{\mathcal{A}}(X',X)$. Si X' tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme, entonces X tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme.*

Demostración: Sean $(x_n)_n\in c_{0,\mathcal{A}}(X)$ y $(x'_n)_n\in\ell_1(X')$ tales que $\sum_{n=1}^\infty x'_n(x)x_n=0$ para todo $x\in X$. Si vemos que $\sum_{n=1}^\infty x'_n(x_n)=0$, por la Proposición 2.2.8, tendremos que X tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme. Consideramos la funcional sobre $\mathcal{L}(X;X)$

$$\phi(T)=\sum_{n=1}^\infty x'_n(Tx_n),$$

que, por la Proposición 2.2.7, resulta ser $\tau_{\mathcal{A}}$-continua y además cumple que

$$\phi(x' \otimes x) = \sum_{n=1}^{\infty} x'_n(x)x'(x_n) = x'(\sum_{n=1}^{\infty} x'_n(x)x_n) = 0.$$

Por lo tanto, ϕ se anula sobre todos los operadores de rango 1 y al ser lineal, se anula sobre todos los operadores de rango finito. Como $S_{\mathcal{A}}(X', X) \subset S^{\mathcal{A}}(X', X)$, entonces existen sucesiones $(\tilde{x}_n)_n \in \ell_1(X)$ y $(\tilde{x}'_n)_n \in c_{0,A}(X')$ tales que $\phi(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{x}'_n(T\tilde{x}_n)$. Por lo tanto, la funcional ψ sobre $\mathcal{L}(X'; X')$ definida por $\psi(R) = \sum_{n=1}^{\infty} j_X(x_n)(R\tilde{x}'_n)$, es $\tau_{\mathcal{A}}$-continua y cumple la igualdad

$$\phi(T) = \psi(T')$$

para todo $T \in \mathcal{L}(X; X)$. Por lo tanto, $\psi(x \otimes x') = 0$ para todo $x \in X$, $x' \in X'$. Una aplicación del Lema 2.1.9 muestra que el conjunto $X \otimes X'$ es $\tau_{s\mathcal{A}}$-denso en $\mathcal{F}(X'; X')$ y, por lo tanto, es $\tau_{\mathcal{A}}$-denso. Entonces, como X' tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme, por el ítem (ii) de la Proposición 2.2.1 resulta que $\psi(Id_{X'}) = 0$. Finalmente, como

$$\psi(Id_{X'}) = \psi(Id'_X) = \phi(Id_X) = \sum_{n=1}^{\infty} x'_n(x_n),$$

de donde $\sum_{n=1}^{\infty} x'_n(x_n) = 0$, como queríamos. □

Es claro que si $\mathcal{A} = \mathcal{K}$ entonces $S_{\mathcal{K}}(X; Y) = S^{\mathcal{K}}(X; Y) = X\widehat{\otimes}_\pi Y$. La igualdad también se tiene cuando consideramos el ideal $\mathcal{N}^p$. Para probar el siguiente resultado, tomamos ideas de la demostración de [CK, Theorem 2.7].

Proposición 2.2.14. *Sean X e Y espacios de Banach, entonces $S_{\mathcal{N}^p}(Y, X) = S^{\mathcal{N}^p}(Y, X)$ para todo $1 \leq p < \infty$.*

Demostración: Fijemos $1 \leq p < \infty$. Sólo mostraremos la inclusión $S^{\mathcal{N}^p}(Y, X) \subset S_{\mathcal{N}^p}(Y, X)$, la otra inclusión es análoga. Si $u \in S^{\mathcal{N}^p}(Y, X)$ entonces existen sucesiones $(y_n)_n \in c_{0,\mathcal{N}^p}(Y)$ y $(x_n)_n \in \ell_1(X)$ tales que $u = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \otimes x_n$. Como $(y_n)_n \in c_{0,\mathcal{N}^p}(Y)$, por el Lema 1.1.5, existen un espacio de Banach Z, una sucesión $(z_n)_n \in c_0(Z)$ y un operador $T \in \mathcal{N}^p(Z; Y)$ tales que $y_n = Tz_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $T = \sum_{j=1}^{\infty} z'_j \otimes \tilde{y}_j$ con $(z'_j)_j \in \ell^w_{p'}(Z')$ e $(\tilde{y}_j)_j \in \ell_p(Y)$. Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} u = & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} z'_j(z_n)\tilde{y}_j \right) \otimes x_n \\ = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} z'_j(z_n) \left(\tilde{y}_j \otimes x_n\right) \\ = & \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{y}_j \otimes \left(\sum_{n=1}^{\infty} z'_j(z_n)x_n \right). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$, sea $\lambda_j \in \ell_{p'}$ definida por $\lambda_j = \sum_{n=1}^{\infty} z_j'(z_n)\|x_n\|^{1/p'} e_n$. De la ecuación (2.1), tenemos que

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \|(\lambda_j)_j\|_{\ell_{p'}} \tilde{y}_j \otimes \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_j'(z_n)}{\|(\lambda_j)_j\|_{\ell_{p'}}} x_n \right). \tag{2.2}$$

Definamos el operador $R\colon \ell_{p'} \to X$ tal que $R = \sum_{n=1}^{\infty} e_n' \otimes x_n \|x_n\|^{\frac{1}{p}-1}$. Es claro que $R \in \mathcal{N}^p(\ell_{p'}; X)$ y que

$$R(\frac{\lambda_j}{\|(\lambda_j)_j\|_{\ell_{p'}}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_j'(z_n)}{\|(\lambda_j)_j\|_{\ell_{p'}}} x_n.$$

Por lo tanto, aplicando esta última igualdad a la ecuación (2.2), tenemos que

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \|(\lambda_j)_j\|_{\ell_{p'}} \tilde{y}_j \otimes R(\frac{\lambda_j}{\|(\lambda_j)_j\|_{\ell_{p'}}}). \tag{2.3}$$

Finalmente, como la sucesión $(\|(\lambda_j)_j\|_{\ell_{p'}} \tilde{y}_j)_j \in \ell_1(Y)$, existe una sucesión $(\beta_n)_n \in B_{c_0}$ tal que, si $\tilde{\tilde{y}}_j = \beta_j^{-1} \|(\lambda_j)_j\|_{\ell_{p'}} \tilde{y}_j)_j$, entonces $(\tilde{\tilde{y}}_j)_j \in \ell_1(Y)$. Así, tenemos que

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\tilde{y}}_j \otimes R(\beta_j \frac{\lambda_j}{\|(\lambda_j)_j\|_{\ell_{p'}}})$$

y como $(R(\beta_j \frac{\lambda_j}{\|(\lambda_j)_j\|_{\ell_{p'}}}))_j$ es una sucesión $\mathcal{N}^p$-nula, se sigue que $u \in S_{\mathcal{N}^p}(Y, X)$ y finaliza la demostración. □

De estas dos últimas proposiciones, recuperamos el siguiente teorema obtenido por Choi y Kim en [CK, Theorem 2.7] en el contexto de la p-compacidad. Antes recordemos que por el Corolario 1.2.14 las sucesión $\mathcal{K}_p$-nulas y $\mathcal{N}^p$-nulas coinciden.

Teorema 2.2.15. *Sean X un espacio de Banach y $1 \leq p < \infty$. Si X' tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_p$-uniforme, entonces X la tiene.*

Sea $i\colon X' \widehat{\otimes}_\pi Y \to \mathcal{N}(X; Y)$ el operador canónico dado por $i(u)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n'(x) x_n$, si $u = \sum_{n=1}^{\infty} x_n' \otimes x_n$. Este operador es, en general, una suryección. Un resultado clásico de la teoría establece que X tiene la propiedad de aproximación si y sólo si i es inyectivo. En el marco de la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme se puede establencer un resultado análogo, caracterizando esta propiedad a partir del núcleo del operador canónico. La siguiente resultado se puede comparar con [Rya2, Proposition 4.6].

Proposición 2.2.16. *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

(i) *X tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme.*

(ii) *Si* $u = \sum_{n=1}^{\infty} x'_n \otimes x_n \in S_{\mathcal{A}}(X'; X)$ *(o* $u \in S^{\mathcal{A}}(X; X')$*) y* $\sum_{n=1}^{\infty} x'_n(x)x_n = 0$ *para todo* $x \in X$*, entonces* $u = 0$*.*

(iii) *Para todo espacio de Banach* Y*, si* $u = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \otimes x_n \in S_{\mathcal{A}}(Y; X)$ *(o* $u \in S^{\mathcal{A}}(X; Y)$*) y* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n x'(x_n) = 0$ *para todo* $x' \in X'$*, entonces* $u = 0$*.*

(iv) *Para todo espacio de Banach* Y*, si* $u = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \otimes x_n \in S_{\mathcal{A}}(Y; X)$ *(o* $u \in S^{\mathcal{A}}(X; Y)$*) y* $\sum_{n=1}^{\infty} y'(y_n)x_n = 0$ *para todo* $y' \in Y'$*, entonces* $u = 0$*.*

Demostración: Empecemos por ver que (i) implica (iv). Tomemos un tensor $u \in S_{\mathcal{A}}(Y; X)$ tal que u tiene una representación

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \otimes x_n$$

con $(x_n)_n \in c_{0,\mathcal{A}}(X)$ e $(y_n)_n \in \ell_1(Y)$ y supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} y'(y_n)x_n = 0$ para todo $y' \in Y'$. Definamos la funcional ϕ sobre $\mathcal{L}(X; Y')$ dada por

$$\phi(T) = \sum_{n=1}^{\infty} j_Y y_n(Tx_n).$$

Por la Proposición 2.2.7, ϕ es $\tau_{\mathcal{A}}$-continua y, si $R\colon X \to Y'$ es el operador de rango 1 dado por $R = x' \otimes y'$ para algun $x' \in X'$ e $y' \in Y'$, tenemos que

$$\phi(R) = \sum_{n=1}^{\infty} y'(y_n)x'(x_n) = x'(\sum_{n=1}^{\infty} y'(y_n)x_n) = 0.$$

Luego, ϕ se anula sobre todos los operadores de rango finito. Por otro lado, como X tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme y $\{(x_n)_n\}$ es un conjunto $\mathcal{A}$-compacto, dado $\varepsilon > 0$ y $T \in \mathcal{L}(X; Y')$, existe un operador de rango finito $S \in \mathcal{F}(X; Y')$ tal que $\|Tx_n - Sx_n\| \leq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, tenemos que

$$|\phi(T)| \leq |\phi(T - S)| + |\phi(S)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|Tx_n - Sx_n\| \|y_n\| \leq \varepsilon \|(y_n)\|_{\ell_1(Y)}.$$

Como ε es arbitrario, tenemos que $\phi(T) = 0$ para todo $T \in \mathcal{L}(X; Y')$. Como $\mathcal{L}(X; Y') = (X \widehat{\otimes}_\pi Y)'$ [Rya2, Theorem 2.9], $u \in S_{\mathcal{A}}(Y; X) \subset Y \widehat{\otimes}_\pi X$ es un elemento que se anula sobre toda funcional de $Y \widehat{\otimes}_\pi X$. Se concluye que $u = 0$, obteniendo (iv).

Ahora supongamos que vale (iv) y tomemos un tensor $u = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \otimes x_n \in S_{\mathcal{A}}(Y; X)$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} y_n x'(x_n) = 0$ para todo $x' \in X'$. Entonces, para todo $y' \in Y'$ tenemos que

$$0 = y'(\sum_{n=1}^{\infty} y_n x'(x_n)) = x'(\sum_{n=1}^{\infty} y'(y_n)x_n).$$

Por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} y'(y_n)x_n$ para todo $y' \in Y'$ y, por (iv) tenemos que $u = 0$, obteniendo (iii). Que (iii) implica (ii) es claro. Por último, veamos que (ii) implica (i). Para ello, como $\mathcal{F}(X;X)$ es un subespacio de $\mathcal{L}(X;X)$ y $\tau_{\mathcal{A}}$ es una topología localmente convexa, para ver que $\mathcal{F}(X;X)$ es $\tau_{\mathcal{A}}$-denso en $\mathcal{L}(X;X)$, basta ver que si ϕ es una funcional $\tau_{\mathcal{A}}$-continua y ϕ se anula sobre $\mathcal{F}(X;X)$ (o, equivalentemente sobre los operadores de rango 1), entonces $\phi = 0$. Como ϕ es $\tau_{\mathcal{A}}$-continua, por la Proposición 2.2.7, existen sucesiones $(x_n)_n \in c_{0,\mathcal{A}}(X)$ e $(x'_n)_n \in \ell_1(X')$ tales que

$$\phi(T) = \sum_{n=1}^{\infty} x'_n(Tx_n).$$

Consideremos el tensor $\mathcal{A}$-representable $u = \sum_{n=1}^{\infty} x'_n \otimes x_n \in S_{\mathcal{A}}(X';X)$. Así, tenemos que $\phi(x' \otimes x) = 0$ si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} x'_n(x)x'(x_n) = 0$ si y sólo si $x'(\sum_{n=1}^{\infty} x'_n(x) \otimes x_n) = 0$ para todo $x \in X$, $x' \in X'$. Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} x'_n(x)x_n = 0$ para todo $x \in X$ y por (ii), $u = 0$. Como $\mathcal{L}(X';X') = (X'\widehat{\otimes}_\pi X)'$, para todo $T \in \mathcal{L}(X;X)$ tenemos

$$\phi(T) = \sum_{n=1}^{\infty} x'_n(Tx_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (j_X x_n)(T'x'_n) = 0,$$

obteniendo el resultado. $\square$

2.2.2. La propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme en términos del ϵ-producto de Schwartz

Para finalizar el capítulo, extenderemos una herramienta clásica que nos será útil en el Capítulo 4, cuando estudiemos cómo incide la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme en el espacio de funciones holomorfas entre espacios de Banach.

Grothendieck estudia de la propiedad de aproximación no sólo en espacios de Banach, sino también en espacios localmente convexos [Gro1]. En este contexto, diremos que un espacio localmente convexo E tiene la propiedad de aproximación si los operadores de rango finito de E en E son densos en $\mathcal{L}(E;E)$ en la topología de convergencia uniforme sobre conjuntos absolutamente convexos compactos. Equivalentemente, E tiene la propiedad de aproximación si dados $\varepsilon > 0$, una seminorma continua de E, q y un conjunto absolutamente convexo compacto $K \subset E$, existe un operador de rango finito $S \in \mathcal{F}(E;E)$ tal que

$$\sup_{x \in K} q(Sx - Id_E x) \leq \varepsilon.$$

Observación. Notemos que la definición de propiedad de aproximación que utilizamos requiere la topología de convergencia uniforme sobre conjuntos absolutamente convexos compactos.

Esta definición fue introducida por Schwartz [Sch2] y difiere ligeramente de la utilizada por Grothendieck, la cuál utilza la convergencia uniforme sobre conjuntos compactos. Sin embargo, ambas definiciones coinciden cuando los espacios localmente convexos son cuasi-completos (aquellos espacios en el que todo conjunto cerrado y acotado es completo). Más información sobre esto se puede encontrar en el libro de Köthe, [Köt2, Cáp. 43].

Una de las herramientas fundamentales para el estudio de la propiedad de aproximación en espacios localmente convexos es el ϵ-producto de Schwartz [Sch3]. Este se puede ver como una extensión del producto tensorial inyectivo para espacios localmente convexos. Para un espacio localmente convexo E, con E'_c denotaremos al espacio dual de E dotado de la topogía de convergencia uniforme sobre conjuntos absolutamente convexos compactos. Dados dos espacios localmente convexos E y F, el ϵ-producto de Schwartz entre E y F es

$$\mathcal{L}_\epsilon(E'_c; F),$$

el espacio de todos los operadores lineales y continuos de E'_c en F dotado de la convergencia uniforme sobre conjuntos equicontinuos de E'. Por [RR, Pág. 48], esta topología es equivalente a la topología de convergencia uniforme sobre todos los conjuntos U°, donde U es un entorno de E.

La relación entre la propiedad de aproximación y el ϵ-producto se debe a Schwartz [Sch2, Exposé 14]. Como es usual, $E \otimes F$ es considerado un subespacio de $\mathcal{F}(E'; F)$.

Proposición 2.2.17. *Un espacio localmente convexo E tiene la propiedad de aproximación si y sólo si $E \otimes F$ es denso en $\mathcal{L}_\epsilon(E'_c; F)$ para todo espacio localmente convexo Y.*

En lo que sigue, vamos a extender este último resultado en el marco de la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_\mathcal{A}$-uniforme de espacios de Banach. Para un espacio de Banach X, denotaremos con $X'_\mathcal{A}$ al espacio dual de X dotado de la topología de convergencia uniforme sobre conjuntos absolutamente convexos $\mathcal{A}$-compactos. Una base de entornos de $X'_\mathcal{A}$ esta formada por los conjuntos polares de K, K°, con $K \subset X$ un conjunto absolutamente convexo $\mathcal{A}$-compacto. Siguiendo la notación de Schwartz, para un espacio localmente convexo F,

$$\mathcal{L}_\epsilon(X'_\mathcal{A}; F)$$

denotará al espacio de todos los operadores lineales de $X'_\mathcal{A}$ a F dotado de la topología de convergencia uniforme sobre los conjuntos equicontinuos de X'. Al ser X un espacio de Banach, esta topología es equivalente a la topología de convergencia uniforme sobre $B_X^\circ = B_{X'}$. Luego, la topología en $\mathcal{L}_\epsilon(X'_{\mathcal{A}}; F)$ esta generada por las seminormas

$$p(T) = \sup_{x' \in B_{X'}} q(Tx'),$$

donde q es una norma semicontinua en F. Es claro que cuando $\mathcal{A} = \mathcal{K}$ recobramos el ϵ-producto de Schwartz original, por este motivo, el siguiente teorema generaliza la Proposición 2.2.17.

Teorema 2.2.18. *Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal. Son equivalentes:*

(i) *X tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme .*

(ii) *$X \otimes F$ es denso en $\mathcal{L}_\epsilon(X'_{\mathcal{A}}; F)$ para todo espacio localmente convexo F.*

(iii) *$X \otimes X'$ es denso en $\mathcal{L}_\epsilon(X'_{\mathcal{A}}; X'_{\mathcal{A}})$.*

Demostración: Supongamos que vale (i) y fijemos un espacio localmente convexo F, tomemos un operador $T \in \mathcal{L}_\epsilon(X'_{\mathcal{A}}; F)$, $\varepsilon > 0$ y p la seminorma continua definida por

$$p(T) = \sup_{x' \in B_{X'}} q(Tx'),$$

donde q es una seminorma continua de F. Queremos ver que existen elementos $x_1, \dots, x_n \in X$ e $y_1, \dots, y_n \in F$ tales que, si $R = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j$ entonces $p(T - R) < \varepsilon$.

Como T es un operador continuo, existe un conjunto absolutamente convexo $\mathcal{A}$-compacto $K \subset X$ tal que $\sup_{x' \in K^\circ} q(Tx') \leq 1$. Si $U = \{y \in F\colon q(y) \leq 1\}$, entonces U es un entorno absolutamente convexo cerrado de F y

$$T'(U^\circ) \subset K^{\circ\circ} = K,$$

ya que K es absolutamente convexo compacto [RR, Pág. 55]. Como X tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme, existen $x_1, \dots, x_n \in X$, $x'_1, \dots, x'_n \in X'$ tales que si

$$S = \sum_{j=1}^n x'_j \otimes x_j,$$

entonces $\|Sx - x\| < \varepsilon$ para todo $x \in K$. En particular, $\|Sx - x\| < \varepsilon$ para todo $x \in T'(U^\circ)$.

Luego, para todo $x' \in B_{X'}$ e $y' \in U^\circ$ se tiene que $|x'(S \circ T'y' - T'y')| < \varepsilon$. Por lo tanto, como

$$\begin{aligned} |x'(S \circ T'y' - T'y')| = & \ |x'(\sum_{j=1}^{n} x'_j(T'y')x_j) - x'(T'y')| \\ = & \ |\sum_{j=1}^{n} x'_j(T'y')x'(x_j) - x'(T'y')| \\ = & \ |\sum_{j=1}^{n}(Tx'_j)(y')x'(x_j) - (Tx')(y')| \\ = & \ |y'(\sum_{j=1}^{n}(Tx'_j)x'(x_j) - Tx')| \\ = & \ |y'\big((\sum_{j=1}^{n} x_j \otimes Tx'_j)x' - Tx'\big)|, \end{aligned}$$

denotando con $R = \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes T(x'_j)$, $R \in X \otimes F$ vale que

$$|y'(Rx' - Tx')| < \varepsilon,$$

para todo $y' \in U^\circ$ $x' \in B_{X'}$. Como U es absolutamente convexo cerrado, por [RR, Pág. 36], tenemos que $q(Rx' - Tx') < \varepsilon$ para todo $x' \in B_{X'}$, concluyendo que $p(R - T) < \varepsilon$, como queríamos ver.

Que (ii) implica (iii) es claro. Para finalizar, mostraremos que (iii) implica (i). Tomemos un conjunto absolutamente convexo $\mathcal{A}$-compacto $K \subset X$ y $\varepsilon > 0$. Como $Id_{X'} \in \mathcal{L}_\epsilon(X'_\mathcal{A}; X'_\mathcal{A})$, tomando la seminorma continua en $\mathcal{L}_\epsilon(X'_\mathcal{A}; X'_\mathcal{A})$ dada por $p(T) = \sup_{x' \in B_{X'}} q(T)$, donde q es la funcional de Minkowski de K°, existe un operador $S \in X \otimes X'$ tal que $p(S - Id_{X'}) < \varepsilon$. Entonces, procediendo de la misma forma que en (i) implica (ii), tenemos que

$$|x'(S'x - x)| < \varepsilon,$$

para todo $x' \in B_{X'}$ y $x \in K$. Luego, $\|S'(x) - x\| < \varepsilon$ para todo $x \in K$ y, como $S' \in \mathcal{F}(X; X)$, por el ítem (ii) de la Proposición 2.2.1, X tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_\mathcal{A}$-uniforme.

□

Como mencionamos anteriormente, existen espacios de Banach con la propiedad de aproximación tales que su dual no la tiene. Sin embargo, X tiene la propiedad de aproximación si y sólo si X'_c tiene la propiedad de apoximación [Sch2, Exposé 14]. Aron, Maestre y Rueda mustran un resultado análogo para la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_p$-uniforme en términos del espacio $X'_{\mathcal{K}_p}$ [AMR, Theorem 4.6]. A continuación, presentamos la generalización de dicho resultado. Antes, necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.2.19. *Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal. Entonces*

$$(X'_{\mathcal{A}})' = X.$$

Es decir, el dual de X' considerado con la topología de convergencia uniforme sobre $\mathcal{A}$-compactos es X.

Demostración: Recordemos que si X es un espacio de Banach, entonces tenemos las igualdades

$$(X'_c)' = X \quad \text{y} \quad (X', \text{débil}^*)' = X.$$

Por lo tanto, para todo ideal $\mathcal{A}$, el operador

$$Id_X \colon X'_c \to X'_{\mathcal{A}} \to (X', \text{débil}^*)$$

es continuo y concluimos que $(X'_{\mathcal{A}})' = X$. $\square$

Proposición 2.2.20. *Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal. Entonces, X tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme si y sólo si $X'_{\mathcal{A}}$ tiene la propiedad de aproximación.*

Demostración: El espacio localmente convexo $X'_{\mathcal{A}}$ tiene la propiedad de aproximación si y sólo si dados $\varepsilon > 0$, $K \subset X$ un conjunto $\mathcal{A}$-compacto y un conjunto absolutamente convexo compacto $M \subset X'_{\mathcal{A}}$, existe un operador $S \in \mathcal{F}(X; X)$ tal que

$$|(S' - Id_{X'})(x')(x)| \leq \varepsilon \quad \text{para todo } x' \in M,\ x \in K. \tag{2.4}$$

Como el operador identidad $Id_X \colon X'_c \to X'_{\mathcal{A}} \to (X', \text{débil}^*)$ es continuo, los conjuntos relativamente compactos de $X'_{\mathcal{A}}$ coinciden con los conjuntos $\|.\|$-acotados. Luego, $X'_{\mathcal{A}}$ tiene la propiedad de aproximación si y sólo si en (2.4) M es reemplazado por $B_{X'}$, lo cuál es equivalente a que X tenga la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme. $\square$

Preliminares (Parte II)

Como los siguientes capítulos están dedicados a funciones no lineales entre espacios de Banach, más precisamente a polinomios y funciones holomorfas, es conveniente introducir la notación y algunos resultados básicos que utilizaremos sobre estos temas. Para tener un panorama más amplio, referimos al lector a los libros de Dineen [Din2] y [Din3] y Mujica [Muj1]. En lo que sigue, todos los espacios de Banach y espacios localmente convexos que consideraremos serán complejos.

Con $X \overset{1}{\cong} Y$ queremos decir que los espacios de Banach X e Y son isométricamente isomorfos. Usaremos la misma notación para espacios localmente convexos topológicamente isomorfos. Dos espacios localemente convexos E y F son topológicamente isomorfos si existe un isomorfismo $T\colon E \to F$ tal que T y T^{-1} son continuos.

Aplicaciones n-lineales y polinomios

El espacio de aplicaciones n-lineales y continuas de X en Y será notado con $\mathcal{L}(^nX;Y)$. Una aplicación n-lineal Φ es simétrica si cumple

$$\Phi(x_1,\dots,x_n) = \Phi(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})$$

para toda permutación de n elementos $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Al espacio de las aplicaciones n-lineales, continuas y simétricas de X en Y lo denotaremos con $\mathcal{L}^s(^nX;Y)$. Cuando $Y = \mathbb{C}$, estos espacios serán notados simplemente con $\mathcal{L}(^nX)$ y $\mathcal{L}^s(^nX)$. Si $\Phi \in \mathcal{L}(^nX,Y)$ y $x, x_1,\dots,x_k \in X$, denotamos

$$\Phi(x,\dots,x) = \Phi x^n \quad \text{y} \quad \Phi(x_1,\overset{n_1}{\dots},x_1,\dots,x_k,\overset{n_k}{\dots},x_k) = \Phi(x_1^{n_1},\dots,x_k^{n_k}),$$

donde $n_1,\dots,n_k \in \mathbb{N}_0,\ n_1+\cdots+n_k = n$.

Si X e Y son espacios de Banach y $n \in \mathbb{N}$, una función $P\colon X \to Y$ se dice polinomio homogéneo de grado n (o n-homogéneo) si existe una aplicación n-lineal y continua $\Phi \in \mathcal{L}(^nX;Y)$ tal que

$$Px = \Phi x^n.$$

En este caso diremos que la aplicación Φ está asociada al polinomio P. Al conjunto de los polinomios n-homogéneos continuos de X en Y lo notamos $\mathcal{P}(^nX;Y)$. En el caso en que $Y=\mathbb{C}$, entonces notamos $\mathcal{P}(^nX)$ en lugar de $\mathcal{P}(^nX;\mathbb{C})$. Como es usual, para $n=0$, $\mathcal{P}(^0X;Y)=Y$ y cuando $n=1$, $\mathcal{P}(^1X;Y)=\mathcal{L}(X;Y)$. Una función P de X en Y es un polinomio continuo si existen $P_1,\dots,P_n$, $\mathcal{P}_j\in\mathcal{P}(^jX;Y)$ para $j=1,\dots,n$, tales que $P=\sum_{j=1}^n P_j$. Al espacio de polinomios de X en Y lo denotaremos con $\mathcal{P}(X;Y)$.

Observación. Si $P\in\mathcal{P}(^nX;Y)$, entonces existe una única aplicación n-lineal simétrica asociada al polinomio P. En efecto, si $\widetilde{\Phi}\in\mathcal{L}(^nX;Y)$ esta asociada a P, entonces la aplicación n-lineal Φ obtenida por la *simetrización de* $\widetilde{\Phi}$ (ver [Muj1, Proposition 1.6])

$$\Phi(x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\widetilde{\Phi}(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})$$

es simétrica y cumple que $Px=\Phi x^n=\widetilde{\Phi}x^n$. La unicidad de la aplicación multilineal simétrica asociada a P se deduce de la *Fórmula de Polarización* (ver [Muj1, Theorem 1.10]). En efecto, la aplicación

$$\Phi(x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{n!2^n}\sum_{\epsilon_j=\pm1}\epsilon_1\dots\epsilon_n P(\epsilon_1x_1+\dots+\epsilon_nx_n)$$

es la aplicación n-lineal, continua y simétrica asociada a P y la denotamos $\overset{\vee}{P}$.

La norma usual en el espacio de polinomios n-homogéneos de X en Y viene dada por

$$\|P\|=\sup_{x\in B_X}\|Px\|,$$

mientras que la norma usual en el espacio de operadores multilineales viene dada por

$$\|\Phi\|=\sup\{\|\Phi(x_1,\dots,x_n)\|\colon x_j\in B_X, j=1,\dots,n\}.$$

Un polinomio P es continuo si y sólo si $\|P\|<\infty$ y el espacio $\mathcal{P}(^nX;Y)$ con esta norma resulta un espacio de Banach. De la misma forma, un operador n-lineal Φ es continuo si y sólo si $\|\Phi\|<\infty$ y los espacios $\mathcal{L}(^nX;Y)$ y $\mathcal{L}^s(^nX;Y)$ con esta norma resultan espacios de Banach. Notemos que para $P\in\mathcal{P}(X;Y)$ y $\Phi\in\mathcal{L}(^nX;Y)$ se tiene que

$$\|Px\|\le\|P\|\|x\|^n \quad \text{y} \quad \|\Phi(x_1,\dots,x_n)\|\le\|\Phi\|\|x_1\|\dots\|x_n\|,$$

para todo $x,x_1,\dots,x_n\in X$.

Por [Muj1, Theorem 2.2] podemos comparar la norma de un polinomio con la de su aplicación n-lineal simétrica asociada. Es efecto, si $P\in\mathcal{P}(^nX;Y)$ entonces

$$\|P\|\le\|\overset{\vee}{P}\|\le\frac{n^n}{n!}\|P\|.$$

Siguiendo la notación de [CDM], para un polinomio n-homogéneo $P \in \mathcal{P}(^nX;Y)$ y un elemento $x_0 \in X$, si $j < n$ denotamos con $P_{x_0^j}$ al polinomio $n-j$-homogéneo dado por

$$P_{x_0^j}x = \overset{\vee}{P}(x_0^j, x^{n-j}).$$

En particular, si $j_1 + j_2 < n$, se tiene $(P_{x_0^{j_1}})_{x_0^{j_2}} = P_{x_0^{j_1+j_2}}$.

Linealización de polinomios

Una de las herramientas que vamos a utilizar es la linealización de polinomios. Para un espacio de Banach X y $n \in \mathbb{N}$, vamos considerar el n-ésimo producto tensorial de X, $\bigotimes^n X$. Cada elemento de $\bigotimes^n X$ tiene una representación de la forma

$$u = \sum_{j=1}^{m} x_j^1 \otimes x_j^2 \otimes \ldots x_j^n,$$

donde cada $x_j^i \in X$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. Así, como los polinomios entre espacios de Banach están relacionados con la aplicaciones simétricas, vamos a considerar al subespacio de $\bigotimes^n X$ generado por la *diagonal*. Para cada $x \in X$, consideramos el tensor $\otimes^n x = x \otimes x \ldots \otimes x$. Luego, el n-ésimo producto tensorial simétrico de X es el espacio

$$\bigotimes_s^n X = \{u \in \bigotimes^n X \colon u = \sum_{j=1}^{n} \otimes^n x_j \quad \text{con } x_j \in X\}.$$

A este espacio se lo puede dotar con la norma proyectiva simétrica

$$\pi_{n,s}(u) = \inf\{\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^n \colon u = \sum_{j=1}^{n} \otimes^n x_j\}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las representaciones simétricas de u. Como es usual denotamos con $\widehat{\bigotimes}^n_{\pi_s} X$ a la completación del producto tensorial n-simétrico con la norma proyectiva simétrica.

Si $\Delta_n \colon X \to \bigotimes_s^n X$ la aplicación dada por $\Delta_n x = \otimes^n x$ obtenemos la linealización de polinomios (ver [Din3, Pág. 20]).

Proposición (Linealización). *Sean X e Y espacios de Banach. Una función $P \colon X \to Y$ es un polinomio n-homogéneo si y sólo si existe un (único) operador $L_P \in \mathcal{L}(\widehat{\bigotimes}^n_{\pi_s} X; Y)$ tal que $P = L_P \circ \Delta_n$. Más aún se tienen las siguientes inclusiones*

$$P(B_X) \subset L_P(B_{\widehat{\bigotimes}^n_{\pi_s} X}) \subset \text{co}\{P(B_X)\}.$$

Como consecuencia, tenemos

Proposición. *Sean X e Y espacios de Banach, entonces*

$$\mathcal{L}(\widehat{\bigotimes}^n_{\pi_s} X; Y) \overset{1}{\cong} \mathcal{P}(^n X; Y),$$

bajo el isomorfismo $T \mapsto T \circ \Delta_n$. En particular, para $Y = \mathbb{C}$, se tiene

$$(\widehat{\bigotimes}^n_{\pi_s} X)' \overset{1}{\cong} \mathcal{P}(^n X).$$

Extensión canónica de polinomios

Hay una forma natural de extender una funcional sobre un espacio de Banach a su bidual, que es por *débil*-continuidad*. Es decir, si $x' \in X'$ y $x'' \in X''$, luego para cualquier red $(x_\alpha)_\alpha$ que tienda débil* a x'' (la existencia de dicha red se debe al Teorema de Goldstine), se tiene que

$$x''(x') = w^* - \lim_\alpha x'(x_\alpha).$$

Esta forma de extender funcionales de X a X'' también se puede llevar a cabo para aplicaciones multilineales, realizado por Arens [Are], y para polinomios homogéneos, realizado por Aron y Berner [AB]. A ambas extensiones las denominaremos extensiones canónicas y se definen de la siguiente manera. Para una aplicación $T \in \mathcal{L}(^n X)$ y $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \in X$, podemos definir una funcional $x'_n \in X'$ como

$$x'_n(x) = T(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x).$$

Por lo tanto, a esta funcional la podemos extender por *débil*-continuidad* a X''. Quedando asi la aplicación $T_n \colon X \times X \times \ldots \times X \times X'' \to \mathbb{C}$, dada por

$$T_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x'') = w^* - \lim_\alpha T(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_\alpha)$$

donde $(x_\alpha)_\alpha$ es alguna red que tiende débil* a x''. De la misma forma, para $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2} \in X$ y $x''_n \in X''$, podemos definir la funcional $x'_{n-1} \in X'$ dada por

$$x'_{n-1}(x) = T_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x, x''_n),$$

y extenderla, obteniendo la aplicación $T_{n,n-1} \colon X \times X \times \ldots \times X \times X'' \times X'' \to \mathbb{C}$ dada por

$$T_{n,n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x'', x''_n) = w^* - \lim_\alpha T_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_\alpha, x''_n),$$

donde $(x_\alpha)_\alpha$ es alguna red que tiende débil* a x''. Siguiendo de esta manera, la extensión canónica de una aplicación $T \in \mathcal{L}(^n X)$, que denotamos con $\overline{T}$ es

$$\overline{T} = T_{n,n-1,\ldots,2,1}.$$

Por lo general, si la aplicación $T \in \mathcal{L}^s({}^nX)$ es simétrica, su extensión canónica $\overline{T} \in \mathcal{L}({}^nX'')$ puede no serlo [Are, Cap. 5]. Más aún, la extensión depende del orden en que se la extiende (nosotros extendimos desde la última variable a la primera). Sin embargo, la extensión canónica tiene las siguientes propiedades

- Si $T \in \mathcal{L}^s({}^nX)$, $x \in X$ y $x_1'', x_2'', \ldots, x_{n-1}'' \in X''$, entonces

$$\overline{T}(j_X x, x_1'', \ldots, x_{n-1}'') = \overline{T}(x_1'', j_X x, \ldots, x_{n-1}'') = \ldots = \overline{T}(x_1'', \ldots, x_{n-1}'', j_X x).$$

- $\overline{T}$ es débil*-débil* continua en la primer variable (que es la última que extendimos).

- Si para $k = 1, \ldots, n$, $(x_{\alpha_k})_{\alpha_k}$ son redes en X que convergen débil* a $x_k'' \in X''$, entonces

$$\overline{T}(x_1'', \ldots, x_n'') = w^* - \lim_{\alpha_1} w^* - \lim_{\alpha_2} \ldots w^* - \lim_{\alpha_n} T(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_n}).$$

Como la extensión de una aplicación multilineal restrigida a la diagonal es única (es decir, no depende del orden en que se extendió), la extensión canónica de un polinomio n-homogéneo se define a partir de su aplicación n-lineal simétria asociada. En efecto, si $P \in \mathcal{P}({}^nX)$, la extensión canónica de P, $\overline{P} \in \mathcal{P}({}^nX'')$ viene dada por

$$\overline{P}x'' = \overline{\overset{\vee}{P}}(x'', x'', \ldots, x'').$$

Más aún, Davie y Gamelin probaron que $\|P\| = \|\overline{P}\|$ [DG, Theorem 3]. En cuanto a polinomios n-homogéneos a valores vectoriales, tomemos $P \in \mathcal{P}({}^nX; Y)$ y, para cada $y' \in Y'$, tenemos que $y' \circ P \in \mathcal{P}({}^nX)$. Luego, la extensión canónica de $P \in \mathcal{P}({}^nX; Y)$ es $\overline{P} \in \mathcal{P}({}^nX''; Y'')$ que viene dada por

$$(\overline{P}x'')(y') = \overline{y' \circ P}x''$$

para cada $y' \in Y'$.

Ideal de polinomios

La definición de ideal de polinomios surge de extender aquella de ideal de operadores. Un ideal de polinomios $\mathcal{Q}$ es una clase de polinomios que satisface las propiedades:

(1) Para todo par de espacios de Banach X e Y y para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}({}^nX; Y)$ es un subespacio de $\mathcal{P}({}^nX; Y)$ que contiene a los polinomios de rango finito.

(2) Si $P \in \mathcal{Q}({}^nX; Y)$, $R \in \mathcal{L}(X_0; Y)$ y $S \in \mathcal{L}(Y; Y_0)$, entonces la composición $S \circ P \circ R \in \mathcal{Q}({}^nX_0; Y_0)$, cualesquiera sean X_0, Y_0 espacios de Banach.

Diremos que un ideal de polinomios $\mathcal{Q}$ es un ideal de polinomios de Banach si existe una función $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}} \colon \mathcal{Q} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que

(1) Para todo par de espacios de Banach X e Y, $(\mathcal{Q}(^nX;Y); \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ es un espacio de Banach.

(2) En $\mathcal{P}(^n\mathbb{K};\mathbb{K})$, el polinomio que aplica $z \to z^n$ cumple que $\|z \to z^n\|_{\mathcal{Q}} = 1$.

(3) Si $P \in \mathcal{Q}(^nX;Y)$, $R \in \mathcal{L}(X_0;Y)$ y $S \in \mathcal{L}(Y;Y_0)$, entonces $\|S \circ P \circ R\|_{\mathcal{Q}} \leq \|S\|\|P\|_{\mathcal{Q}}\|R\|^n$.

Gracias a la linealización de polinomios, se pueden obtener distintos ideales (de Banach) de polinomios a partir de los ideales (de Banach) de operadores de la siguiente manera: Si $\mathcal{A}$ es un ideal, el conjunto

$$\mathcal{P}_{\mathcal{A}}(^nX;Y) = \{P \in \mathcal{P}(^nX;Y) \colon L_P \in \mathcal{A}(\widehat{\bigotimes}^n_{\pi_s} X;Y)\}$$

es un ideal de polinomios. Si $\mathcal{A}$ es un ideal de Banach, entonces $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ es un ideal de Banach con la norma dada por

$$\|P\|_{\mathcal{A}} = \|L_P\|_{\mathcal{A}}.$$

Este tipo de ideales de polinomios fueron estudiados por Botelho, Pellegrino y Rueda en [BPR]. No todos los ideales de polinomios son de esta forma, como por ejemplo el ideal de polinomios de tipo finito a valores vectoriales, que es el conjunto de la forma

$$\mathcal{P}_{\mathrm{Fin}}(^nX;Y) = \{P \in \mathcal{P}(^nX;Y) \colon P = \sum_{j=1}^{m} (x'_j)^n \otimes y_j \quad \text{con } x'_j \in X',\ y_j \in Y, j = 1, \dots, m\}.$$

Funciones holomorfas

Los primeros estudios de funciones holomorfas involucrando espacios de dimensión infinita se remonta a Hilbert en 1909, seguido de los trabajos de Fréchet y Gâteaux. Todas las funciones holomorfas que consideremos serán enteras, es decir, con dominio en todo el espacio. Los resultados básicos la teoría de este tema pueden encontrarse en los libros de Dineen [Din3] y Mujica [Muj1] entre otros.

Definición. *Sean X e Y espacios de Banach. Una función $f \colon X \to Y$ se dice holomorfa si para cada $x_0 \in X$ existen $r > 0$ y una sucesión de polinomios n-homogéneos $P_n \in \mathcal{P}(^nX;Y)$ tales que*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x - x_0)$$

donde la convergencia es uniforme para todo $x \in rB_X + x_0$. Denotaremos con $\mathcal{H}(X;Y)$ al espacio de todas las funciones holomorfas de X en Y. En particular, cuando $Y = \mathbb{C}$, utilizaremos la notación $\mathcal{H}(X)$ en lugar de $\mathcal{H}(X;\mathbb{C})$.

En virtud de [Muj1, Proposition 4.4], la sucesión de polinomios de una funcioń holomorfa f en el punto x_0 es única. Al n-ésimo polinomio de la función f en el punto x_0 lo denotaremos con $P^n f(x_0)$. Para una función holomorfa $f \in \mathcal{H}(X;Y)$, la serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n f(x_0)(x - x_0)$$

se denomina la serie de Taylor de f en x_0.

Como primer ejemplo de función holomorfa tenemos a los polinomios n-homogéneos. Este ejemplo se encuentra en [Muj1, Example 5.3].

Ejemplo (A). *Todo polinomio n-homogéneo es una función holormfa.*

Demostración: Sean X e Y espacios de Banach, $n \in \mathbb{N}$ y consideremos $P \in \mathcal{P}(^n X;Y)$. Si $x_0 \in x$, usando la fórmula binomial de Newton, tenemos que

$$Px = P(x_0 + x - x_0) = \overset{\vee}{P}(x_0 + x - x_0)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \overset{\vee}{P}(x_0^{n-j}, (x - x_0)^j).$$

Por lo tanto, P es holmorfa y los polinomios del desarrollo de Taylor de P en x_0 son

$$\begin{aligned} P^j P(x_0) &= \binom{n}{j} P_{x_0^{n-j}} \quad \text{si} \quad j \leq n \\ P^j P(x_0)x &= \quad 0 \qquad\quad \text{si} \quad j > n \end{aligned}$$

□

En particular, el ejemplo anterior muestra que los polinomios n-homogéneos forman un subespacio del espacio de funciones holomorfas. Más aún, es un subespacio complementado. En efecto, para $x_0 \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, el operador $D^n_{x_0} \colon \mathcal{H}(X;Y) \to \mathcal{P}(^n X;Y)$ dado por

$$D^n_{x_0}(f) = P^n f(x_0)$$

está bien definido por la unicidad del desarrollo de Taylor de una función holomorfa f y, si $P \in \mathcal{P}(^n X;Y)$, entonces

$$D^n_{x_0}(P) = P,$$

con lo que $D^n_{x_0}$ es un proyector.

El siguiente ejemplo de función holomorfa se encuentra en [Muj1, Example 5.4] y nos será útil para construir ejemplos al final del Capítulo 3.

Ejemplo (B). *Sean X e Y espacios de Banach y $(P_n)_n \in \mathcal{P}(^n X;Y)$ una sucesión de polinomios n-homogéneos tal que* $\limsup_{n\to\infty} \|P_n\|^{1/n} = 0$. *Entonces la función*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x$$

es una función holmorfa de X en Y. Más aún, para $x_0 \in X$ y $j \in \mathbb{N}$ se tiene

$$P^j f(x_0) = \sum_{n=j}^{\infty} \binom{n}{j} (P_n)_{x_0^{n-j}}. \tag{2.5}$$

Demostración: Primero veamos que los polinomios en (2.5) están bien definidos. Consideremos, para $j \in \mathbb{N}$ y $x_0 \in X$ fijos, la aplicación multilienal simétrica $\Phi_j \in \mathcal{L}^s({}^jX; Y)$ dada por

$$\Phi_j(x_1, \ldots, x_j) = \sum_{n=j}^{\infty} \binom{n}{j} \overset{\vee}{P}_n(x_0^{n-j}, x_1, \ldots, x_j).$$

La buena definición de Φ_j se debe a que, si $r = \text{máx}\{\|x_1\|, \ldots, \|x_j\|\}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\|\sum_{j=0}^{\infty} \Phi_j(x_1, \ldots, x_j)\| &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \|\Phi_j(x_1, \ldots, x_j)\| \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=j}^{\infty} \binom{n}{j} \|\overset{\vee}{P}_n\| \|x_0\|^{n-j} r^j \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{n} \|\overset{\vee}{P}_n\| \|x_0\|^{n-j} r^j \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \|\overset{\vee}{P}_n\| (\|x_0\| + r)^n \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \|P_n\| \frac{n^n}{n!} (\|x_0\| + r)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{n(\|x_0\| + r)}{n!^{1/n}} \|P_n\|^{1/n} \Big)^n < \infty
\end{aligned}$$

donde la última serie converge ya que $\limsup_{n\to\infty} \|P_n\|^{1/n} = 0$. En particular, Φ_j está bien definida y por lo tanto los polinomios en (2.5) están bien definidos pues su aplicación n-lineal asociada es Φ_j. Por último, si $x \in X$, como

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \overset{\vee}{P}_n(x_0^{n-j}, (x - x_0)^j) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=j}^{\infty} \binom{n}{j} \overset{\vee}{P}_n(x_0^{n-j}, (x - x_0)^j) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_j(x - x_0)^j
\end{aligned}$$

y como la última expresión converge para $x \in rB_X + x_0$ para algún $r > 0$, obtenemos el resultado.

$\square$

Topología de Nachbin

Una de las topologías que utilizaremos en el espacio $\mathcal{H}(X;Y)$ es la topología de Nachbin. Para dar una descripición de esta topología primero necesitamos la noción de seminorma portada. Para dos espacios de Banach X e Y, una seminorma p definida en $\mathcal{H}(X;Y)$ se dice *portada* por un conjunto compacto $K \subset X$ (o K-*portada*) si para todo conjunto abierto V de X tal que $K \subset V$, existe una constante $c(V) > 0$ tal que

$$p(f) \leq c(V) \sup_{x \in V} \|f(x)\|.$$

La topología de Nachbin en $\mathcal{H}(X;Y)$ será notada con τ_ω y es la topología generada por todas las seminormas portadas por todos los conjuntos compactos de X. Para dar una descripción de esta topología en términos de seminormas, notaremos con

$$\|f\|_V = \sup_{x \in V} \|f(x)\|$$

donde f es una función con dominio en X y $V \subset X$. La topología τ_ω en $\mathcal{H}(X;Y)$ viene generada por las seminormas

$$q(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \|P^n f(0)\|_{K+\alpha_n B_X}$$

donde K varía sobre todos los conjuntos absolutamente convexos compactos de X y $(\alpha_n)_n \in c_0^+$, el espacio de sucesiones de números positivos tendiendo a cero [Din3, Proposition 3.47]. En particular, si K es un conjunto compacto de X, la seminorma

$$p(f) = \|f(x)\|_K$$

es una seminorma K-portada y, denotando con τ_c a la topología de convergencia uniforme sobre compactos, tenemos que

$$Id_{\mathcal{H}(X;Y)} \colon (\mathcal{H}(X;Y), \tau_\omega) \to (\mathcal{H}(X;Y), \tau_c)$$

es continua para todo espacio de Banach X e Y. Sin embargo, por lo general ambas topologías difieren. En efecto, si X es un espacio de Banach y $(\alpha_n)_n \in c_0^+$, la seminorma de la forma

$$q(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \|P^n f(0)\|_{\alpha_n B_X}, \quad f \in \mathcal{H}(X),$$

es τ_ω continua y no τ_c continua [Din2, Example 2.48].

Capítulo 3

Polinomios y funciones holomorfas $\mathcal{A}$-compactas

Este capítulo está dedicado al estudio de polinomios y funciones holomorfas entre espacios de Banach cuyas imágenes son conjuntos $\mathcal{A}$-compactos. El estudio de polinomios y funciones holomorfas determinadas por sus imágenes tiene precedentes. El primer trabajo se le puede adjudicar a Aron y Schottenloher [AS], en el cual introducen el concepto de polinomios y funciones holomorfas compactas. A este trabajo le siguió el de Ryan [Rya1], donde estudió polinomios y funciones holomorfas débiles compactas. En 2010, Aron, Maestre y Rueda comienzan con el estudio de funciones holomorfas p-compactas y polinomios p-compactos. En paralelo a nuestro trabajo, aparecen los trabajos de Aron y Rueda [AR2] y [AR3].

3.1. Polinomios $\mathcal{A}$-compactos

Definición 3.1.1. *Sean X e Y espacios de Banach, $x \in X$, $\mathcal{A}$ un ideal y $P \in \mathcal{P}(^n X; Y)$. Diremos que P es $\mathcal{A}$-compacto en x si existe $\varepsilon > 0$ tal que $P(x + \varepsilon B_X)$ es relativamente $\mathcal{A}$-compacto en Y. El polinomio P se dice $\mathcal{A}$-compacto si lo es para todo $x \in X$. Al espacio de polinomios n-homogéneo $\mathcal{A}$-compactos lo denotamos con $\mathcal{P}_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}(^n X; Y)$.*

Para $n = 1$, $\mathcal{P}_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}(^1 X; Y) = \mathcal{K}_\mathcal{A}(X; Y)$ y, gracias a la linealidad, un operador T es $\mathcal{A}$-compacto si y sólo existe $x \in X$ tal que T es $\mathcal{A}$-compacto en x. Esto mismo ocurre con los polinomois n-homogéneos para $n \geq 2$, a pesar de que no son funciones lineales. Para esto, necesitaremos un par de lemas.

Lema 3.1.2. *Sean X e Y espacios de Banach, $\mathcal{A}$ un ideal y $P \in \mathcal{P}(^n X; Y)$. Entonces, P es $\mathcal{A}$-compacto si y sólo si P es $\mathcal{A}$-compacto en 0.*

Demostración: Si P es $\mathcal{A}$-compacto, en particular, lo es en 0. Ahora, sean $P \in \mathcal{P}(^nX;Y)$ un polinomio $\mathcal{A}$-compacto en 0 y $\varepsilon > 0$ tales que $P(\varepsilon B_X)$ es relativamente $\mathcal{A}$-compacto en Y. Como para cualquier $r > 0$ se tiene la igualdad

$$P(rB_X) = (\frac{r}{\varepsilon})^n P(\varepsilon B_X),$$

por la Proposición 1.1.9, el conjunto $P(rB_X)$ es relativamente $\mathcal{A}$-compacto para todo $r > 0$. Ahora, tomemos $x \in X$ y $\delta > 0$ y notemos que $x + \delta B_X \subset (\|x\| + 2\delta)B_X$. Por lo tanto, $P(x + \delta B_X) \subset P((\|x\| + 2\delta)B_X)$ y así resulta que $P(x + \delta B_X)$ es relativamente $\mathcal{A}$-compacto. Luego P es $\mathcal{A}$-compacto en x y, al ser $x \in X$ arbitrario, tenemos el resultado. □

Lema 3.1.3. *Sean X e Y espacios de Banach, $x_0 \in X$, $\mathcal{A}$ un ideal y $P \in \mathcal{P}(^nX;Y)$. Si P es $\mathcal{A}$-compacto en x_0, entonces para todo $j \leq n$, el polinomio $n-j$-homogéneo $P_{x_0^j}$ es $\mathcal{A}$-compacto.*

Demostración: Por [CDM, Corollary 1.8 (b)], si $x \in X$ y ξ es una raíz n-ésima de la unidad tal que $\xi^j \neq 1$ para todo $j < n$, se tiene que

$$P_{x_0}x = \overset{\vee}{P}(x_0, x^{n-j}) = \frac{1}{n^2}\frac{1}{(n-1)^{n-1}}\sum_{j=0}^{n-1}\xi^j P(x_0 + (n-1)\xi^j x). \tag{3.1}$$

Por lo tanto, si P es $\mathcal{A}$-compacto en x_0, existe $\varepsilon > 0$ tal que $P(x_0 + \varepsilon B_X)$ es relativamente $\mathcal{A}$-compacto en Y. Entonces, tomando $\delta < \frac{\varepsilon}{n-1}$, tenemos que

$$(n-1)\xi^j \delta B_X \subset \varepsilon B_X$$

y aplicando la ecuación (3.1), llegamos a que

$$P_{x_0}(\delta B_X) \subset \frac{1}{n^2}\frac{1}{(n-1)^{n-1}}\sum_{j=0}^{n-1} P(x_0 + \varepsilon B_X).$$

Como consecuencia de la Proposición 1.1.9, el conjunto $P_{x_0}(\delta B_X)$ es relativamente $\mathcal{A}$-compacto en Y y, por lo tanto, P_{x_0} es $\mathcal{A}$-compacto en 0. Por el lema anterior, P_{x_0} es $\mathcal{A}$-compacto y, en particular, es $\mathcal{A}$-compacto en x_0. Utilizando el mismo razonamiento, obtenemos que $(P_{x_0})_{x_0} = P_{x_0^2}$ es un polinomio $(n-2)$-homogéno $\mathcal{A}$-compacto. Utilizando un argumento inductivo, se sigue el resultado. □

Proposición 3.1.4. *Sean X e Y espacios de Banach, $\mathcal{A}$ un ideal y $P \in \mathcal{P}(^nX;Y)$. Son equivalentes:*

(i) *P es $\mathcal{A}$-compacto.*

(ii) *Existe* $x_0 \in X$ *tal que* P *es* $\mathcal{A}$*-compacto en* x_0.

(iii) P *es* $\mathcal{A}$*-compacto en* 0.

Demostración: Que (i) es equivalente a (iii) viene dado por el Lema 3.1.2. Es claro que (i) implica (ii). Finalmente, para ver que (ii) implica (iii), tomemos $x_0 \in X$ tal que P es $\mathcal{A}$-compacto en x_0. Luego, fijando $x \in X$, por la fórmula del binomio de Newton tenemos que

$$Px = P(x_0 + x - x_0) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j \overset{\vee}{P}(x_0^j, (x+x_0)^j) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j P_{x_0^j}(x + x_0),$$

y, por lo tanto,

$$P(B_X) \subset \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j P_{x_0^j}(x_0 + B_X).$$

Como, por el Lema 3.1.3, cada polinomio $P_{x_0^j}$ es $\mathcal{A}$-compacto, tenemos que $P_{x_0^j}(x_0 + B_X)$ es un conjunto relativamente $\mathcal{A}$-compacto en Y. Aplicando la Proposición 1.1.9, obtenemos que P es $\mathcal{A}$-compacto en 0. $\square$

Observación. El resultado anterior extiende a [AMR, Proposition 3.3], donde se prueban las equivalencias en el contexto de la p-compacidad.

De la misma forma que para operadores lineales, en el caso que $\mathcal{A}$ es un ideal de Banach, se puede definir una norma sobre $\mathcal{P}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(^nX;Y)$ midiendo el tamaño de la $\mathcal{A}$-compacidad de la imágen del polinomio. En efecto, la norma $\mathcal{A}$-compacta de un polinomio viene dada por

$$\|P\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} = \mathfrak{m}_{\mathcal{A}}(P(B_X); Y).$$

Utilizando la linealización de polinomios, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.1.5. *Sean* X *e* Y *espacios de Banach,* $\mathcal{A}$ *un ideal y* $P \in \mathcal{P}(^nX;Y)$. *Entonces* P *es* $\mathcal{A}$*-compacto si y sólo si su linealización* L_P *es* $\mathcal{A}$*-compacto. Más aún, si* $\mathcal{A}$ *es un ideal de Banach, entonces* $\|P\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} = \|L_P\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}$.

Demostración: De la linealización de poliomios (página 85), tenemos las inclusiones

$$P(B_X) \subset L_P(B_{\widehat{\bigotimes}^n_{\pi_s} X}) \subset \mathrm{co}\{P(B_X)\},$$

y, por la Proposición 1.1.9, tenemos el resultado. En el caso de que $\mathcal{A}$ es un ideal de Banach, la igualdad de las normas también se deduce de la Proposición 1.1.9, ya que como la medida de $\mathfrak{m}_{\mathcal{A}}$ de un conjunto y de su cápsula convexa coinciden, se tiene

$$\mathfrak{m}_{\mathcal{A}}(P(B_X);Y) \leq \mathfrak{m}_{\mathcal{A}}(L_P(B_{\widehat{\bigotimes}^n_{\pi_s} X});Y) \leq \mathfrak{m}_{\mathcal{A}}(\mathrm{co}\{P(B_X)\};Y) = \mathfrak{m}_{\mathcal{A}}(P(B_X);Y).$$

$\square$

Observación. En virtud de [BPR, Proposition 3.7], cuando $\mathcal{A}$ es un ideal de Banach, el espacio de los polinomios $\mathcal{A}$-compactos con la norma $\mathcal{A}$-compacta resulta ser un ideal de polinomios de Banach.

Como la relación entre los polinomios y su linealización es biunívoca, obtenemos el siguiente corolario que utilizaremos en el siguiente capítulo.

Corolario 3.1.6. *Sean X e Y espaciose Banach y $\mathcal{A}$ un ideal. Entonces*

$$(\mathcal{P}_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}(^nX;Y), \|\cdot\|) \overset{1}{\cong} (\mathcal{K}_\mathcal{A}(\widehat{\otimes^n_{\pi_s}}X;Y), \|\cdot\|)$$

vía el isomorfismo $P \mapsto L_P$. Más aún, si $\mathcal{A}$ es un ideal de Banach, entonces

$$(\mathcal{P}_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}(^nX;Y), \|\cdot\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}) \overset{1}{\cong} (\mathcal{K}_\mathcal{A}(\widehat{\otimes^n_{\pi_s}}X;Y), \|\cdot\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}})$$

bajo el mismo isomorfismo.

Ejemplos. Si $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{F}}$ obtenemos los polinomios compactos estudiados por Aron y Schottenloher [AS], mientras que si $\mathcal{A} = \mathcal{N}^p$ obtenemos los polinomios p-compactos introducidos por Aron, Maestre y Rueda [AMR].

En [AR2], se obtiene de forma independiente y en el contexto de la p-compacidad, la Proposición 3.1.5 y una versión no isométrica del corolario anterior.

Gracias a la proposición anterior, podemos ver que la estructura del espacio de los polinomios $\mathcal{A}$-compactos, posee cierta similitud con la estructura del espacio de los operadores $\mathcal{A}$-compactos. Por ende, es natural preguntarse cuáles de las propiedades de los operadores $\mathcal{A}$-compactos pueden *transferirse* a los polinomios $\mathcal{A}$-compactos. Recordemos que, por el Corolario 1.2.43, un operador $T \in \mathcal{K}_\mathcal{A}(X;Y)$ si y sólo si $T'' \in \mathcal{K}_\mathcal{A}(X'';Y'')$. Un resultado análogo a este se obtienen para polinomios cuando consideramos la extensión canónica de polinomios homogéneos al bidual. Antes, necesitamos el siguiente lema.

Lema 3.1.7. *Sean X, Y y Z espacios de Banach, $P \in \mathcal{P}(^nX;Y)$ y $T \in \mathcal{L}(Y;Z)$. Entonces la composición $T \circ P \in \mathcal{P}(^nX;Z)$ y*

$$\overline{T \circ P} = T'' \circ \overline{P}.$$

Demostración: Directamente de la definición, tenemos que para todo $x'' \in X''$ y $z' \in Z'$,

$$(\overline{T \circ P}x'')(z') = \overline{z' \circ T \circ P}x'' = \overline{(T'z') \circ P}x'' = (\overline{P}x'')(T'y') = (T'' \circ \overline{P}x'')(y').$$

Por lo tanto$(\overline{T \circ P}x'')(z') = (T'' \circ \overline{P}x'')(z')$ para todo $x'' \in X''$ y $z' \in Z'$, obteniendo el resultado. $\square$

Proposición 3.1.8. *Sean X e Y espacios de Banach, $\mathcal{A}$ un ideal de Banach y $P \in \mathcal{P}(^nX;Y)$. Entonces P es $\mathcal{A}$-compacto si y sólo si $\overline{P}$ es $\mathcal{A}$-compacto y $\|P\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}} = \|\overline{P}\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}$.*

Demostración: Supongamos que $\overline{P}$ es $\mathcal{A}$-compacto. Como $j_Y(P(B_X)) \subset \overline{P}(B_{X''})$, tenemos que el conjunto $j_Y(P(B_X))$ es relativamente $\mathcal{A}$-compacto en Y'' y que $m_\mathcal{A}(P(B_X);Y'') \leq \|\overline{P}\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}$. Gracias al Corolario 1.2.42, $P(B_X)$ es relativamente $\mathcal{A}$-compacto en Y, obteniendo que el polinomio P es $\mathcal{A}$-compacto y que $\|P\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}} \leq \|\overline{P}\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}$. Ahora supongamos que P es $\mathcal{A}$-compacto. Por el Lema 3.1.5, podemos factorizar a P como $P = L_P \circ \Delta_n$, con Δ_n un polinomio n-homogéneo de norma 1 y L_P un operador $\mathcal{A}$-compacto. Por el lema anterior, tenemos que $\overline{P} = L_P''\overline{\Delta}_n$ y, como la extensión canónica preserva la norma [DG, Theorem 3], $\|\overline{\Delta}_n\| = 1$ obteniendo que

$$\overline{P}(B_{X''}) = L_P''\overline{\Delta}_n(B_{X''}) \subset L_P''(B_{(\widehat{\otimes}^n_{\pi_s}X)''}).$$

Como, por el Corolario 1.2.43, L_p'' es $\mathcal{A}$-compacto, se tiene que $\overline{P}$ es $\mathcal{A}$-compacto y

$$\|\overline{P}\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}} \leq \|L_P''\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}} = \|L_P\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}} = \|P\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}},$$

y se sigue el resultado. □

Por el Corolario 1.2.43, tenemos que $\mathcal{K}_\mathcal{A} = \mathcal{K}_\mathcal{A}^{dd}$ isométricamente. Lo cuál es equivalente a lo siguiente: un operador T es $\mathcal{A}$-compacto si y sólo si su adjunto T' pertenece al ideal $\mathcal{K}_\mathcal{A}^d$. Este resultado tiene su análogo en el espacio de polinomios n-homogéneos. Para ello, recordemos que dado un polinomio n-homogenéneo $P\colon X \to Y$, su adjunto es un operador $P'\colon Y' \to \mathcal{P}(^nX)$ que viene dado por

$$(P'y')(x) = y'(Px).$$

Proposición 3.1.9. *Sean X e Y espacios de Banach, $\mathcal{A}$ un ideal de Banach y $P \in \mathcal{P}(^nX;Y)$. Entonces $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}(^nX;Y)$ si y sólo si $P' \in \mathcal{K}_\mathcal{A}^d(Y';\mathcal{P}(^nX))$. Más aún, se tiene la igualdad*

$$\|P\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}} = \|P'\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}^d}.$$

Demostración: Supongamos que $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}(^nX;Y)$ y consideremos su linealización L_P que, por la Proposición 3.1.5, es un operador $\mathcal{A}$-compacto con $\|L_P\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}} = \|P\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}$. Como $P = L_P \circ \Delta_n$, tenemos que $P' = \Delta_n' \circ L_P'$ y, como $L_P' \in \mathcal{K}_\mathcal{A}^d(Y';(\widehat{\otimes}^n_{\pi_s}X)')$, tenemos que $P' \in \mathcal{K}_\mathcal{A}^d(Y';\mathcal{P}(^nX))$ y

$$\|P'\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}^d} = \|\Delta_n' \circ L_P'\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}^d} \leq \|L_P'\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}^d} = \|L_P\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}} = \|P\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}.$$

Ahora, tomemos un polinomio $P \in \mathcal{P}(^nX;Y)$ y supongamos que $P' \in \mathcal{K}_\mathcal{A}^d(Y';\mathcal{P}(^nX))$. Como $\mathcal{P}(^nX)$ es isométricamente isomorfo a $(\widehat{\otimes}^n_{\pi_s}X)'$ vía el isomorfismo

$$\Delta_n' \colon (\widehat{\otimes}_{\pi_s}^n X)' \to \mathcal{P}(^n X) \quad \text{dado por} \quad \Delta_n'(\phi)(x) = \phi(\Delta_n x) = \phi(\otimes^n x),$$

en particular tenemos que Δ_n' es un operador inversible. Luego,

$$L_P' = (\Delta_n')^{-1} \circ \Delta_n' \circ L_P' = (\Delta_n')^{-1} \circ P',$$

y, por lo tanto, $L_P' \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}^d(Y'; (\widehat{\otimes}_{\pi_s}^n X)')$ con $\|L_P'\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^d} \leq \|P'\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^d}$. Por el Corolario 1.2.43, tenemos que $L_P \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\widehat{\otimes}_{\pi_s}^n X; Y)$ y $\|L_P'\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^d} = \|L_P\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}$. Finalmente, aplicando la Proposición 3.1.5, concluimos que $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(^n X; Y)$ y que $\|P\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} \leq \|P'\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^d}$. $\square$

Recientemente, Botelho, Çalışkan y Moraes [BÇM] introdujeron una nueva clase de ideales de polinomios de la siguiente manera: dado un ideal de operadores $\mathcal{A}$, el ideal polinomial dual de $\mathcal{A}$ es

$$\mathcal{A}^{\mathcal{P}-d}(^n X; Y) = \{P \in \mathcal{P}(^n X; Y) \colon P' \in \mathcal{A}(Y'; \mathcal{P}(^n X))\}.$$

Si $\mathcal{A}$ es un ideal de Banach, entoces $\mathcal{A}^{\mathcal{P}-d}$ es un ideal de polinomios de Banach con la norma

$$\|P\|_{\mathcal{A}^{\mathcal{P}-d}} = \|P'\|_{\mathcal{A}}.$$

Con estas definiciones, de la Proposición 3.1.9 tenemos

Proposición 3.1.10. *Sea $\mathcal{A}$ un ideal de Banach. Entonces*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} = (\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^d)^{\mathcal{P}-d} \quad \text{isométricamente.}$$

En el caso particular de los polinomios p-compactos, del Teorema 1.2.44 obtenemos

Proposición 3.1.11. *Sea $1 \leq p < \infty$. Entonces*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{K}_p} = \mathcal{QN}_p^{\mathcal{P}-d} \quad \text{isométricamente.}$$

Para finalizar esta sección, vamos a caracterizar los polinomios homogéneos $\mathcal{A}$-compactos en términos de la continuidad de su operador adjunto bajo distintas topologías del dominio y rango. Para simplificar la notación, con $\mathcal{P}_c(^n X)$ denotamos el espacio de polinomios $\mathcal{P}(^n X)$ considerado con la topología de convergencia uniforme sobre conjuntos compactos de X. Cuando los conjuntos compactos son reemplazados por los conjuntos $\mathcal{A}$-compactos, usamos la notación $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}(^n X)$.

Lema 3.1.12. *Sean X un espacio de Banach, $\mathcal{A}$ un ideal, $n \in \mathbb{N}$ y L un subconjunto de $\mathcal{P}(^n X)$. Son equivalentes:*

(i) *L es compacto en $\mathcal{P}_c(^nX)$.*

(ii) *L es compacto en $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}(^nX)$.*

(iii) $\sup_{P\in L}\|P\|<\infty$.

Demostración: Por el teorema de Ascoli, el conjunto $L\subset\mathcal{P}_c(^nX)$ es compacto si y sólo si $\sup_{P\in L}\|P\|$ es finito, con lo cual tenemos que (i) es equivalente a (iii). Como el operador identidad

$$Id\colon \mathcal{P}_c(^nX)\to\mathcal{P}_{\mathcal{A}}(^nX)$$

es continuo, tenemos que (i) implica (ii). Finalmente, si $L\subset\mathcal{P}_{\mathcal{A}}(^nX)$ es un conjunto compacto, en particular L es puntualmente acotado y, por el Principio de Acotación Uniforme (que también vale en el contexto polinomial [Muj1, Theorem 2.6]), obtenemos que $\sup_{P\in L}\|P\|<\infty$. □

Recordemos que un operador lineal entre dos espacios localmente convexos es compacto si aplica algún entorno en un conjunto compacto.

Proposición 3.1.13. *Sean X e Y espacios de Banach, $\mathcal{A}$ un ideal y $P\in\mathcal{P}(^nX;Y)$. Son equivalentes:*

(i) *$P\in\mathcal{P}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(^nX;Y)$.*

(ii) *$P'\colon Y'_{\mathcal{A}}\to\mathcal{P}(^nX)$ es continuo.*

(iii) *$P'\colon Y'_{\mathcal{A}}\to\mathcal{P}_c(^nX)$ es compacto.*

(iv) *$P'\colon Y'_{\mathcal{A}}\to\mathcal{P}_{\mathcal{B}}(^nX)$ es compacto para todo ideal de Banach $\mathcal{B}$.*

(v) *$P'\colon Y'_{\mathcal{A}}\to\mathcal{P}_{\mathcal{B}}(^nX)$ es compacto para algún ideal de Banach $\mathcal{B}$.*

Demostración: Supongamos que vale (i). Como el conjunto $K=\overline{P(B_X)}$ es $\mathcal{A}$-compacto en Y, su conjunto polar K° es un entorno en $Y'_{\mathcal{A}}$. Luego, para $y'\in K^\circ$ tenemos que

$$\|P'y'\|=\sup_{x\in B_X}|(P'y')(x)|=\sup_{x\in B_X}|y'(Px)|\le 1,$$

obteniendo que $P'\colon Y'_{\mathcal{A}}\to\mathcal{P}(^nX)$ es continuo.

Supongamos ahora que vale (ii). Como el operador $P'\colon Y'_{\mathcal{A}}\to\mathcal{P}(^nX)$ es continuo, entonces existe un conjunto $\mathcal{A}$-compacto $K\subset Y$ tal que $P'(K^\circ)$ es un conjunto acotado en $\mathcal{P}(^nX)$. Aplicando el lema anterior, $P'(K^\circ)$ resulta ser compacto en $\mathcal{P}_c(^nX)$ y, por ende, el operador $P'\colon Y'_{\mathcal{A}}\to\mathcal{P}_c(^nX)$ es compacto.

Como para todo ideal de Banach $\mathcal{B}$, el operador identidad $\mathcal{P}_c(^nX) \hookrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{B}}(^nX)$ es continuo, tenemos que (iii) implica (iv). Es claro que (iv) implica (v). Para terminar, supongamos que vale (v). Entonces, existe un conjunto absolutamente convexo $\mathcal{A}$-compacto $K \subset Y$ tal que $P'(K^\circ)$ es un conjunto compacto en $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}(^nX)$. Luego, existe $c > 0$ tal que $\sup_{y' \in K^\circ} \|P'y'\| \leq c$. Notemos que para cualquier $x \in c^{-\frac{1}{m}} B_X$ e $y' \in K^\circ$ tenemos que $|P'(y')(x)| = |y'(Px)| \leq 1$. Por lo tanto, $P(c^{-\frac{1}{m}} B_X) \subset K^{\circ\circ} = K$, obteniendo que P es $\mathcal{A}$-compacto. $\square$

Observación 3.1.14. (a) En [AMR], los autores pregunta cuál es la relación entre un polinomio p-compacto y su operador adjunto [AMR, Problem 5.8]. Con la Proposición 3.1.13 damos una respuesta a esta pregunta.

(b) En el caso $n = 1$, la Proposición 3.1.13 caracteriza a los operadores $\mathcal{A}$-compactos en términos de su operador traspuesto.

(c) En el caso $\mathcal{A} = \mathcal{K}$ el resultado anterior recupera el obtenido por Aron y Schottenloher para el caso de polinomios compactos [AS, Proposition 3.2].

3.2. Funciones holomorfas $\mathcal{A}$-compactas

Definición 3.2.1. *Sean X e Y espacios de Banach, $x \in X$, $\mathcal{A}$ un ideal y $f \in \mathcal{H}(X;Y)$ una función holomorfa. Diremos que f es $\mathcal{A}$-compacta en x si existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x + \varepsilon B_X)$ es relativamente $\mathcal{A}$-compacto en Y. La función f se dice $\mathcal{A}$-compacta si es $\mathcal{A}$-compacta para todo $x \in X$. El espacio de funciones holomorfas $\mathcal{A}$-compactas es denotado con $\mathcal{H}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(X;Y)$.*

Ejemplos. En el caso de $\mathcal{A} = \mathcal{K}_p$, $1 \leq p < \infty$ obtenemos funciones holomorfas p-compactas [AMR], mientras que si $\mathcal{A} = \mathcal{K}$, obtenemos funciones holomorfas compactas [AS].

Aron y Schottenloher mostraron que una función holomorfa es compacta en un punto si y sólo si la función es compacta y, además, es equivalente a que todo polinomio del desarrollo de Taylor de la función (en cualquier punto) sea compacto [AS, Proposition 3.4]. Un resultado similar para funciones débiles compactas fue obtenido por Ryan [Rya1, Theorem 3.2].

Proposición 3.2.2 (Aron-Schottenloher)**.** *Sean X e Y espacios de Banach y $f \in \mathcal{H}(X;Y)$. Son equivalentes:*

(i) *f es compacta.*

(ii) *Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in X$, $P^n f(x)$ es compacto.*

(iii) *Para todo* $n \in \mathbb{N}$, $P^n f(0)$ *es compacto.*

(iv) f *es compacta en* 0.

Aron, Maestre y Rueda obtuvieron resultados parciales de la Proposición 3.2.2 en el contexto de la p-compacidad. En lo que queda de esta sección vamos mostrar hasta qué punto se pueden extender estos resultados en relación de la $\mathcal{A}$-compacidad y responder las preguntas que planteadas en [AMR]. En definitiva, vamos a establecer resultados similares a [AS, Proposition 3.4] mostrando su alcance e ilustraremos con ejemplos que los resultados obtenidos no se pueden mejorar. Para ello, definimos el radio de $\mathcal{A}$-convergencia de una función f en un punto $x \in X$.

Definición 3.2.3. *Sean* X *e* Y *espacios de Banach,* $\mathcal{A}$ *un ideal de Banach,* $f \in \mathcal{H}(X;Y)$ *y* $x_0 \in X$. *Decimos que*

$$r_{\mathcal{A}}(f, x_0) = 1/\limsup \|P^n f(x_0)\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}^{1/n}$$

es el radio de convergencia $\mathcal{A}$*-compacta de* f *en* x_0.
Si $\limsup \|P^n f(x_0)\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}^{1/n} = 0$*, el radio de convergencia* $\mathcal{A}$*-compacta es infinito. También, si para algún* n*,* $P^n f(x_0)$ *no es* $\mathcal{A}$*-compacto, entonces* $r_{\mathcal{A}}(f, x_0) = 0$.

Recientemente, Aron y Rueda [AR1] definieron, en el contexto de ideales de funciones holomorfas un radio de $\mathcal{I}$-acotación que, en el caso de funciones $\mathcal{A}$-compactas, coincide con nuestra definición.

El primer resultado que relaciona la $\mathcal{A}$-compacidad de una función holomorfa con la de sus polinomios del desarrollo de Taylor surge del siguiente lema que se puede ver en la demostración de [AS, Proposition 3.4] (ver también [AMR, Proposition 3.5] o [Rya1, Lemma 3.1]). Nosotros lo enunciaremos y demostraremos en un contexto más general, tal cual lo utilizaremos en la Capítulo 4.

Lema 3.2.4. *Sean* X *e* Y *espacios de Banach,* $V \subset X$ *un conjunto abierto y absolutamente convexo,* $x_0 \in X$ *y* $f \in \mathcal{H}(X;Y)$. *Entonces, para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene*

$$P^n f(x_0)(V) \subset \overline{\mathrm{co}\{f(x_0 + V)\}}$$

Demostración: Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que la inclusión no vale. Luego, existe $x \in V$ tal que $P^n f(x_0)x \notin \overline{\mathrm{co}\{f(x_0 + V)\}}$ y, como $\overline{\mathrm{co}\{f(x_0 + V)\}}$ es un conjunto absolutamente convexo cerrado, por el teorema de Hahn-Banach existe una funcional $y' \in Y'$ tal que $|y'(P^n f(x_0)x)| > 1$

e $|y'(y)| \leq 1$ para todo $y \in \overline{\text{co}\{f(x_0+V)\}}$. Consideremos la función $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$g(\lambda) = y' \circ f(x_0 + \lambda x).$$

Por [Muj1, Lemma 5.6 (c)], $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y su desarrollo de Taylor alrededor de 0 viene dado por

$$g(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} y'(P^n f(x_0)x)\lambda^n.$$

Aplicando la fórmula integral de Cauchy a la función g (ver, por ejemplo [Muj1, Theorem 7.3]), obtenemos que

$$y'(P^n f(x_0)x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1} \frac{y'(f(x_0+\xi x))}{\xi^{n+1}} d\xi. \tag{3.2}$$

Como V es absolutamente convexo y $x \in V$, $\xi x \in V$ para todo $|\xi| = 1$. Por lo tanto, de (3.2) tenemos que

$$|y'(P^n f(x_0)x)| \leq \sup_{|\xi|=1} |y'(f(x_0+\xi x))| \leq \sup_{x\in V} |y'(f(x_0+x))|,$$

lo cuál es una contradicción. El resultado se sigue por reducción al absurdo. □

Observación 3.2.5. De la última desigualdad obtenemos que para toda $f \in \mathcal{H}(X;Y)$, x y $x_0 \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ se cumple la desigualdad

$$\|P_n f(x_0)x\| \leq \sup_{|\xi|=1} \|f(x_0+\xi x)\|$$

Combinando el lema anterior, el Lema 3.1.2 y la Proposición 1.1.9 se deduce que si una funcón $f \in \mathcal{H}(X;Y)$ es $\mathcal{A}$-compacta en x_0, entonces todo polinomio del desarrollo de Taylor de la función en x_0 es $\mathcal{A}$-compacto. Más aún, si $V \subset X$ es abierto y absolutamente convexo entonces

$$m_{\mathcal{A}}(P_n f(x_0)(V);Y) \leq m_{\mathcal{A}}(f(x_0+V);Y),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Para poder relacionar la $\mathcal{A}$-compacidad de los polinomios del desarrollo de Taylor de una función con la $\mathcal{A}$-compacidad de la misma, utilizaremos el siguiente simple, pero útil lema.

Lema 3.2.6. *Sean X un espacio de Banach, $\mathcal{A}$ un ideal de Banach y $K_1, K_2, \dots$ conjuntos relativamente $\mathcal{A}$-compactos en X tales que $\sum_{n=1}^{\infty} m_{\mathcal{A}}(K_n;X) < \infty$. Entonces, el conjunto*

$$K = \{x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \colon x_n \in K_n\}$$

es relativamente $\mathcal{A}$-compacto y $m_{\mathcal{A}}(K;X) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m_{\mathcal{A}}(K_n;X)$.

Demostración: Fijado $\varepsilon > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existen un espacio de Banach Y_n, un conjunto compacto $M_n \subset B_{Y_n}$ y un operador $T_n \in \mathcal{A}(Y_n; X)$ tales que $K_n \subset T_n(M_n)$ y ademas $\|T_n\|_{\mathcal{A}} \leq (1+\varepsilon) m_{\mathcal{A}}(K_n; X)$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} m_{\mathcal{A}}(K_n; X) < \infty$, existe una sucesión $(\beta_n)_n \in B_{c_0}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} m_{\mathcal{A}}(K_n; X) \leq (1+\varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} m_{\mathcal{A}}(K_n; X)$. Consideremos el espacio de Banach $Y = \prod_{n=1}^{\infty} Y_n$ dotado con la norma $\|y\|_Y = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|y_n\|_{Y_n}$ si $y = (y_n)_n$. Definamos el operador $T\colon Y \to X$ dado por $T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} T_n \circ \pi_n$, donde $\pi_n\colon Y \to Y_n$ es la n-ésima proyección, de norma $\|\pi_n\| = 1$. Como

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \|\frac{1}{\beta_n} T_n \circ \pi_n\|_{\mathcal{A}} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} \|T_n\|_{\mathcal{A}} \\ &\leq (1+\varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} m_{\mathcal{A}}(K_n; X) \\ &\leq (1+\varepsilon)^2 \sum_{n=1}^{\infty} m_{\mathcal{A}}(K_n; X) < \infty,\end{aligned}$$

el operador T esta bien definido, $T \in \mathcal{A}(Y; X)$ y $\|T\|_{\mathcal{A}} \leq (1+\varepsilon)^2 \sum_{n=1}^{\infty} m_{\mathcal{A}}(K_n; X)$. Finalmente, consideremos el conjunto compacto $M \subset B_Y$ dado por $M = \prod_{n=1}^{\infty} \beta_n M_n$. Luego $K \subset T(M)$, con lo que K resulta un conjunto relativamente $\mathcal{A}$-compacto. Más aún, como

$$m_{\mathcal{A}}(K; X) \leq \|T\|_{\mathcal{A}} \leq (1+\varepsilon)^2 \sum_{n=1}^{\infty} m_{\mathcal{A}}(K_n; X)$$

y $\varepsilon > 0$ es arbitrario, obtenemos la desigualdad de los tamaños. □

Ahora podemos caracterizar las funciones holomorfas $\mathcal{A}$-compactas en un x_0 en términos de los polinómios de Taylor de su desarrollo en x_0 y el radio de convergencia $\mathcal{A}$-compacta en x_0.

Proposición 3.2.7. *Sean X e Y espacios de Banach, $\mathcal{A}$ un ideal de Banach, $x_0 \in X$ y $f \in \mathcal{H}(X; Y)$. Son equivalentes:*

(i) *La función f es $\mathcal{A}$-compacta en x_0.*

(ii) *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $P^n f(x_0) \in \mathcal{P}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(^n X; Y)$ y $0 < r_{\mathcal{A}}(f, x_0)$.*

Demostración: Para ver que (i) implica (ii) tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $f(x_0 + \varepsilon B_X)$ es relativamente $\mathcal{A}$-compacto y con la serie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n f(x_0)(x - x_0)$ uniformemente convergente para todo $x \in x_0 + \varepsilon B_X$. Por el Lema 3.2.4, $P^n f(x_0)(\varepsilon B_X) \subset \overline{\mathrm{co}\{f(x_0 + \varepsilon B_X)\}}$ y por lo tanto el polinomio $P^n f(x_0)$ es $\mathcal{A}$-compacto para todo $n \in \mathbb{N}$. Más aún, por la Proposición 1.1.9 se tiene

$$\begin{aligned}\|P^n f(x_0)\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} &= m_{\mathcal{A}}(P^n f(x_0)(B_X); Y) = \frac{1}{\varepsilon^n} m_{\mathcal{A}}(P^n f(x_0)(\varepsilon B_X); Y)) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^n} m_{\mathcal{A}}(\overline{\mathrm{co}\{f(x_0 + \varepsilon B_X)\}}; Y),\end{aligned}$$

por lo que se obtiene que $\limsup \|P^n f(x_0)\|^{1/n} \leq \frac{1}{\varepsilon}$ y, por lo tanto $0 < \varepsilon < r_{\mathcal{A}}(f, x_0)$, como queríamos mostrar.

Para la otra implicación, tomemos $0 < \varepsilon < r_{\mathcal{A}}(f, x_0)$ tal que, para todo $x \in x_0 + \varepsilon B_X$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P^n f(x_0)(x - x_0)$, con convergencia uniforme. Luego, tenemos que

$$f(x_0 + \varepsilon B_X) \subset \{\sum_{n=1}^{\infty} x_n \colon x_n \in P^n f(x_0)(\varepsilon B_X)\}.$$

Si mostramos que $\sum_{n=1}^{\infty} m_{\mathcal{A}}(P_n f(x_0)(\varepsilon B_X); Y) < \infty$, una aplicación del Lema 3.2.6 nos dará el resultado. En efecto, esta última suma converge ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_{\mathcal{A}}(P^n f(x_0)(\varepsilon B_X); Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n m_{\mathcal{A}}(P^n f(x_0)(B_X); Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \|P_n f(x_0)\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}},$$

y $\varepsilon < r_{\mathcal{A}}(f, x_0) = 1/\limsup \|P_n f(x_0)\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}^{1/n}$. □

En consecuencia tenemos,

Corolario 3.2.8. *Sean X e Y espacios de Banach, $\mathcal{A}$ un ideal de Banach, $f \in \mathcal{H}(X; Y)$ y $x_0 \in X$. Si f es $\mathcal{A}$-compacta en x_0 entonces, para todo $0 < \varepsilon < r_{\mathcal{A}}(f, x_0)$,*

$$m_{\mathcal{A}}(f(x_0 + \varepsilon B_X); Y) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m_{\mathcal{A}}(P^n f(x_0)(\varepsilon B_X); Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \|P^n f(x_0)\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}.$$

Corolario 3.2.9. *Sean X e Y espacios de Banach, $\mathcal{A}$ un ideal de Banach y $f \in \mathcal{H}(X; Y)$. Son equivalentes:*

(i) *f es $\mathcal{A}$-compacta.*

(ii) *Para todo $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, $P^n f(x)$ es $\mathcal{A}$-compacto y $r_{\mathcal{A}}(f, x) > 0$.*

Así como el radio de $\mathcal{A}$-compacidad juega un rol importante en la relación existente entre $\mathcal{A}$-compacidad de una función holomorfa en un punto y la $\mathcal{A}$-compacidad de los polinomios del desarrollo de Taylor de la función en ese punto, también es fundamental cuando se relaciona la $\mathcal{A}$-compacidad de una función f en un punto o en otro, como se ve en la siguiente proposición.

Proposición 3.2.10. *Sean X e Y espacios de Banach, $\mathcal{A}$ un ideal de Banach, $f \in \mathcal{H}(X; Y)$ y $x_0 \in X$. Si f es $\mathcal{A}$-compacta en x_0, entonces f es $\mathcal{A}$-compacta para todo $x \in x_0 + r(f, x_0) B_X$. Como consecuencia, si f es $\mathcal{A}$-compacta en x_0 y $r_{\mathcal{A}}(f, x_0) = \infty$, entonces f es $\mathcal{A}$-compacta.*

Demostración: Primero supongamos f es $\mathcal{A}$-compacta en 0. Si $r = r_p(f, 0) > 0$, tomemos $x \in X$ tal que $\|x\| < r$. Por [Nac2, Proposition 1, p.26], existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n f(0)(y)$, donde la convergencia es uniforme para todo $y \in x + \varepsilon B_X$. Podemos asumir que $\|x\| + \varepsilon < r$. Procediendo al igual que hicimos en la demostración de la Proposición 3.2.7, tenemos que

$$f(x + \varepsilon B_X) \subset \Big\{ \sum_{n=0}^{\infty} x_n \colon x_n \in P^n f(0)(x + \varepsilon B_X) \Big\}.$$

Por lo tanto, si mostramos que $\sum_{n=0}^{\infty} m_{\mathcal{A}}(P^n f(0)(x + \varepsilon B_X); Y) < \infty$, el resultado se obtiene de aplicar el Lema 3.2.6. En efecto, como

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} m_{\mathcal{A}}(P^n f(0)(x + \varepsilon B_X); Y) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\|x\| + \varepsilon)^n m_{\mathcal{A}}\Big(P^n f(0)(\tfrac{1}{\|x\|+\varepsilon}(x + \varepsilon B_X))\Big) \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} (\|x\| + \varepsilon)^n m_{\mathcal{A}}\big(P^n f(0)(B_X)\big) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big((\|x\| + \varepsilon)\|P^n f(0)\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}^{1/n}\Big)^n, \end{aligned}$$

y $(\|x\| + \varepsilon)r^{-1} < 1$, la serie converge y la afirmación queda demostrada.

Si f es $\mathcal{A}$-compacta en x_0, luego consideremos las funciones $g(x) = x + x_0$ y $h(x) = x - x_0$. Luego, $f \circ g$ es $\mathcal{A}$-compacta en 0 y $r_{\mathcal{A}}(f, x_0) = r_{\mathcal{A}}(f \circ g, 0)$. Por lo anterior, $f \circ g$ es $\mathcal{A}$-compacta para todo $x \in r_{\mathcal{A}}(f, x_0)B_X$ y, por lo tanto, $f = f \circ g \circ h$ es $\mathcal{A}$-compacta para todo $x \in x_0 + r_{\mathcal{A}}(f, x_0)B_X$.

□

La proposición anterior muestra que si una función $f \in \mathcal{H}(X; Y)$ es $\mathcal{A}$-compacta en x_0, entonces resulta ser $\mathcal{A}$-compacta para todo $x \in x_0 + r_{\mathcal{A}}(f, x_0)B_X$. Es natural preguntarse que ocurre fuera de ese entorno de x_0. Primero notemos que para todo espacio de Banach X e Y y para todo ideal de Banach $\mathcal{A}$, existe una función holomorfa $\mathcal{A}$-compacta, $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(X; Y)$, tal que su radio de convergencia $\mathcal{A}$-compacto en 0 es finito. Por lo tanto, la función f es $\mathcal{A}$-compacta también en cualquier punto fuera de la bola $r_{\mathcal{A}}(f, 0)B_X$. Para construir dicha función, basta con considerar la sucesión $(x'_m)_m \subset X'$ con $\|x'_m\| = 1$ $\forall m \in \mathbb{N}$ y convergente a 0 puntualmente, cuya existencia se debe al teorema de Josefson-Nissenzweig [Jos, Nis]. Luego, $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} x'_m(x)^m \in \mathcal{H}(X)$ y, por lo tanto, es $\mathcal{A}$-compacta. Además, $r_{\mathcal{A}}(f, 0) = 1$ ya que $\|(x'_m)^m\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} = \|x'_m\| = 1$. Este ejemplo se puede modificar para obtener una función holomorfa a valores vectoriales con la misma propiedad.

Sin embargo, bajo ciertas hipótesis, también existen funciones que son $\mathcal{A}$-compactas en un punto y no son $\mathcal{A}$-compactas. Más aún, existen funciones holomorfas tales que todos los polinomios del desarrollo de Taylor en cualquier punto son $\mathcal{A}$-compactos, pero la función no es $\mathcal{A}$-compacta en ningún punto. Vamos a finalizar este capítulo exhibiendo estos ejemplos. Antes, necesitaremos los siguientes dos lemas sobre conjuntos $\mathcal{A}$-compactos y su medida.

Lema 3.2.11. *Sean X un espacio de Banach, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos ideales de Banach y $K \subset X$ un conjunto relativamente $\mathcal{B}$-compacto y no relativamente $\mathcal{A}$-compacto. Entonces, existen una sucesión $(x_n)_n \subset X$ $\mathcal{B}$-nula y una sucesión creciente $1 = n_0 < n_1 < n_2 \dots$ tales que, si*

$$L_m = \{x_{n_m}, x_{n_m+1}, \dots, x_{n_{m+1}-1}\},$$

(a) $\lim_{m\to\infty} m_{\mathcal{B}}(L_m; X) = 0$.

(b) $\lim_{m\to\infty} m_{\mathcal{A}}(L_m; X) = \infty$.

En particular, se tiene que el conjunto $\operatorname{co}\{(x_n)_n\}$ *es relativamente $\mathcal{B}$-compacto y no relativamente $\mathcal{A}$-compacto.*

Demostración: Sea $K \subset X$ un conjunto relativamente $\mathcal{B}$-compacto y no $\mathcal{A}$-compacto y tomemos una sucesión $\mathcal{B}$-nula $(x_n)_n$ tal que $K \subset \operatorname{co}\{(x_n)_n\}$. Sea $(\gamma_n)_n \in B_{c_0}$ tal que, si $\tilde{x}_n = \frac{x_n}{\gamma_n}$, vale que $(\tilde{x}_n)_n \in c_{0,\mathcal{B}}(X)$. Notemos que, por la Proposición 1.1.14, para cualquier sucesión creciente $1 = n_0 < n_1 < n_2 \dots$, se cumple que, si

$$L_m = \{\tilde{x}_{n_m}, \tilde{x}_{n_m+1}, \dots, \tilde{x}_{n_{m+1}-1}\},$$

entonces $\lim_{m\to\infty} m_{\mathcal{B}}(L_m; X) = 0$. Por lo tanto, el resultado se sigue si existe alguna sucesión creciente $1 = n_0 < n_1 < n_2 \dots$ tal que $\lim_{m\to\infty} m_{\mathcal{A}}(L_m; X) = \infty$. Supongamos que no existe tal sucesión. Por lo tanto, para cualquier elección $\tilde{x}_{m_1}, \tilde{x}_{m_2} \dots, x_{m_k}$ existe una constante $C > 0$ tal que

$$m_{\mathcal{A}}(\tilde{x}_{m_1}, \tilde{x}_{m_2} \dots, x_{m_k}; X) \le C.$$

Consideremos los operadores R y T, donde $R\colon \ell_1 \to \ell_1$ está definido por

$$R(e_n) = \gamma_n^{1/2} e_n$$

y $T\colon \ell_1 \to X$ viene dado, sobre los vectores elementales, por

$$T(e_n) = \tilde{x}_n.$$

Como $T(B_{\ell_1}) \subset \operatorname{co}\{(\tilde{x}_n)_n\}$, es claro que $T \in \mathcal{K}_{\mathcal{B}}(\ell_1; X)$. Además $R \in \overline{\mathcal{F}}(\ell_1, \ell_1)$ y

$$K \subset T \circ R \circ R(B_{\ell_1}).$$

Sea $S_j\colon \ell_1 \to X$ el operador dado por $S_j = T \circ \pi_j \circ R \circ R$, donde $\pi_j\colon \ell_1 \to \ell_1$ es la proyección a las primeras j-ésimas coordenadas. Es claro que para todo $j \in \mathbb{N}$, los operadores $S_j \in \mathcal{F}(\ell_1; X)$. Como

$$\|S_j - T \circ R \circ R\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{B}}} = \|T \circ (Id_{\ell_1} - \pi_j) \circ R \circ R\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{B}}} \le \|T\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{B}}} \|(Id_{\ell_1} - \pi_j) \circ R \circ R\| \le \|T\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{B}}} \sup_{n>j} |\gamma_n|$$

y $(\gamma_n)_n \in c_0$, la sucesión $(S_j)_j$ converge en el ideal $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}(\ell_1, X)$ (y por lo tanto converge en $\|\cdot\|$) a $T \circ R \circ R$. Si mostramos que la sucesión de operadores $(S_j)_j$ es $\|\cdot\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}$-de Cauchy, llegaremos a una contradicción ya que esto implicaría que $T \circ R \circ R \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\ell_1; X)$ y, como $K \subset T \circ R \circ R(B_{\ell_1})$, tendríamos que K es relativamente $\mathcal{A}$-compacto y, por lo tanto, el resultado se sigue por reducción al absurdo. Ahora, si $j < k$, tenemos que

$$S_k - S_j = T \circ (\pi_k - \pi_j) \circ R \circ R = T \circ (\pi_k - \pi_j) \circ R \circ R \circ (\pi_k - \pi_j)$$

Luego,

$$\|S_k - S_j\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} \leq \|T \circ (\pi_k - \pi_j) \circ R\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} \|R \circ (\pi_k - \pi_j)\|. \tag{3.3}$$

Como, por la Proposición 1.1.9, tenemos que

$$\begin{aligned} \|T \circ (\pi_k - \pi_j) \circ R\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} &= m_{\mathcal{A}}((T \circ (\pi_k - \pi_j) \circ R)(B_{\ell_1}); X) \\ &= m_{\mathcal{A}}(\gamma_j^{\frac{1}{2}} \tilde{x}_j, \gamma_{j+1}^{\frac{1}{2}} \tilde{x}_{j+1}, \dots, \gamma_k^{\frac{1}{2}} \tilde{x}_k; X) \\ &\leq m_{\mathcal{A}}(\tilde{x}_j, \tilde{x}_{j+1}, \dots, \tilde{x}_k; X) \\ &\leq C \end{aligned}$$

de (3.3) llegamos a que

$$\|S_k - S_j\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} \leq C \|R \circ (\pi_k - \pi_j)\| = C \sup_{n=j\dots k} |\gamma_n|^{1/2}.$$

Como $(\gamma_n)_n \in B_{c_0}$, la sucesión $(S_j)_j$ es $\|\cdot\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}$-de Cauchy, como se quería mostrar. □

Lema 3.2.12. *Sean X un espacio de Banach, $\mathcal{A}$ un ideal de Banach y $x_1, \dots, x_n \in X$. Sea $m \in \mathbb{N}$ y consideremos el conjunto*

$$L = \{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^m x_j \colon (\alpha_j)_j \in B_{\ell_1}\}.$$

Entonces L es relativamente $\mathcal{A}$-compacto y $m_{\mathcal{A}}(L; X) = m_{\mathcal{A}}(\{x_1, \dots, x_n\}; X)$.

Demostración: Primero notemos que como el conjunto L es acotado y esta incluido en un subespacio de dimensión finita, entonces es relativamente $\mathcal{A}$-compacto. Además, como vale la inclusión $\{x_1, \dots, x_n\} \subset L$, de la Proposición 1.1.9 tenemos que $m_{\mathcal{A}}(\{x_1, \dots, x_n\}; X) \leq m_{\mathcal{A}}(L; X)$.

Por otro lado, si $(\alpha_n)_n \in \ell_1$, entonces para todo $m \geq 1$ tenemos que $(\alpha_n^m)_n \in \ell_1$ con $\|(\alpha_n^m)_n\|_{\ell_1} \leq \|(\alpha_n)_n\|_{\ell_1}$. Luego, se tiene que $L \subset \mathrm{co}\{x_1, \dots, x_n\}$ y el resultado se sigue de aplicar nuevamente la Proposición 1.1.9. □

Notemos que si todos los polinomios del desarrollo de Taylor de una función $f \in \mathcal{H}(X; Y)$ en un punto son $\mathcal{A}$-compactos, en particular los polinomios son compactos y por la Proposición 3.2.2, la función resulta compacta. El siguiente ejemplo muestra que la situación difiere en el contexto de la $\mathcal{A}$ compacidad. Para eso usamos las ideas de [Din1, Example 10].

Ejemplo 3.2.13. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ ideales de Banach y X un espacio de Banach tales que existe un conjunto relativamente $\mathcal{B}$-compacto y no relativamente $\mathcal{A}$-compacto. Entonces existe una función holomorfa $\mathcal{B}$-compacta $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{K}_{\mathcal{B}}}(\ell_1; X)$ tal que para todo $y \in \ell_1$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, $P^n f(y)$ es $\mathcal{A}$-compacto, pero f no es $\mathcal{A}$-compacta para ningún $y \in \ell_1$.

Demostración: Por el Lema 3.2.11, podemos tomar una sucesión $(x_n)_n \in c_{0,\mathcal{B}}(X)$ y una sucesión creciente $1 = n_0 < n_1 < n_2 \ldots$ tales que, si $L_m = \{x_{n_m}, x_{n_m+1}, \ldots, x_{n_{m+1}-1}\}$, entonces $\lim_{m\to\infty}(m_{\mathcal{B}}(L_m; X)) = 0$ y $\lim_{m\to\infty}(m_{\mathcal{A}}(L_m; X)) = \infty$. Más aún, tomando una subsucesión si es necesario, podemos suponer que

$$\lim_{m\to\infty}(m_{\mathcal{B}}(L_m; X))^{1/m} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{m\to\infty}(m_{\mathcal{A}}(L_m; X))^{1/m} = \infty.$$

Para cada $m \geq 1$, consideremos el polinomio $P_m \in \mathcal{P}(^m\ell_1; X)$, dado por

$$P_m z = \sum_{j=n_m}^{n_{m+1}-1} e'_j(z)^m x_j.$$

Luego,

$$\|P_m\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{B}}} = m_{\mathcal{B}}(\{\sum_{j=n_m}^{n_{m+1}-1} e'_j(z)^m x_j \colon z \in B_{\ell_1}\}; X) = m_{\mathcal{B}}(L_m; X),$$

donde la última igualdad se obtiene por el Lema 3.2.12. Como $\|P_m\| \leq \|P_m\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{B}}}$ y, por lo tanto

$$\limsup \|P_m\|^{1/m} \leq \limsup \|P_m\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{B}}}^{1/m} \leq \limsup (m_{\mathcal{B}}(L_m; X))^{1/m} = 0,$$

al igual que en el Ejemplo B de la página 89, podemos definir una función holomorfa f como la serie $\sum_{m=1}^{\infty} P_m$, y por la Proposición 3.2.10, $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{K}_{\mathcal{B}}}(\ell_1; X)$. Notemos que cada polinomio P_m es $\mathcal{A}$-compacto ya que es de tipo finito, pero como

$$\limsup \|P_m\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}^{1/m} = \lim_{m\to\infty}(m_{\mathcal{A}}(L_m; X))^{1/m} = \infty,$$

tenemos que $r_{\mathcal{A}}(f, 0) = 0$ y, por la Proposición 3.2.7, f no es $\mathcal{A}$-compacta en 0.

Ahora tomemos cualquier elemento $y \in \ell_1$ distinto de 0 y fijemos $n_0 \in \mathbb{N}$. Como la aplicación multilineal simétrica asociada a P_m viene dada por

$$\overset{\vee}{P}(z_1, \ldots, z_m) = \sum_{j=n_m}^{n_{m+1}-1} e'_j(z_1) e'_j(z_2) \ldots e'_j(z_m) x_j,$$

para todo $z \in B_{\ell_1}$ tenemos que

$$\begin{aligned} P^{n_0} f(y) z &= \sum_{m=n_0}^{\infty} \binom{m}{n_0} \overset{\vee}{P}_m(y^{m-n_0}, z^{n_0}) \\ &= \sum_{m=n_0}^{\infty} \binom{m}{n_0} \sum_{j=n_m}^{n_{m+1}-1} e'_j(y)^{m-n_0} e'_j(z)^{n_0} x_j. \end{aligned}$$

Afirmamos que $P^{n_0}f(y)$ es $\mathcal{A}$-compacto. En efecto, por la Proposición 1.1.9, tenemos que

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{A}}(P^{n_0}f(y)(B_{\ell_1});X) &\leq \sum_{m=n_0}^{\infty}\binom{m}{n_0}\sum_{j=n_m}^{n_{m+1}-1}|e_j'(y)|^{m-n_0}\|x_j\| \\ &\leq C\sum_{m=n_0}^{\infty}\binom{m}{n_0}\Big(\sum_{j=n_m}^{n_{m+1}-1}|e_j'(y)|\Big)^{m-n_0}. \end{aligned}$$

donde $C=\sup_{j\in\mathbb{N}}\|x_j\|$. Si notamos con $b_m=\sum_{j=n_m}^{n_{m+1}-1}|e_j'(y)|$, como $y\in\ell_1$, tenemos que $b_m\to 0$ a medida que $m\to\infty$. Aplicando el criterio de D'Alambert, resulta que $\sum_{m=n_0}^{\infty}\binom{m}{n_0}b_m^{m-n_0}$ converge, por lo que obtenemos que $P^{n_0}f(y)$ es $\mathcal{A}$-compacto.

Para ver que f no es $\mathcal{A}$-compacta en y, notemos que fijado n_0, basta con elegir $j\in\mathbb{N}$ que cumpla que $n_{n_0}\leq j<n_{n_0+1}$, para obtener que $P^{n_0}f(y)e_j=x_j$. Por lo tanto, tenemos que $L_{n_0}\subset P^{n_0}f(y)(B_{\ell_1})$ y procediendo como en la primera parte del ejemplo, llegamos a que $\limsup\|P^nf(y)\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}^{1/n}=\infty$, concluyendo que f no es $\mathcal{A}$-compacta en y. □

Observación 3.2.14.

(a) El ejemplo anterior muestra que (ii) implica (i) de [AS, Proposition 3.4] no se puede extender a funciones $\mathcal{A}$-compactas.

(b) En [AMR, Example 3.1] se muestra, para $1\leq p<\infty$, la existencia de un conjunto compacto en ℓ_p que no es p-compacto. Esto, junto al ejemplo anterior, muestra la existencia de una función $f\in\mathcal{H}(\ell_1;\ell_p)$ tal que todos los polinomios del desarrollo de Taylor de f en cualquier punto son p-compactos, pero la función no es p-compacta para ningún punto de ℓ_1. Esto responde en forma negativa a [AMR, Problem 5.2].

El siguiente ejemplo muestra la existencia de una función entera $\mathcal{A}$-compacta en 0, pero no $\mathcal{A}$-compacta en un punto fuera del radio de $\mathcal{A}$-convergencia. Además, el Ejemplo 3.2.15 muestra que la Proposición 3.2.10 no se puede mejorar. Nuestra construcción se basa en la de Dineen [Din1, Example 11].

Ejemplos 3.2.15. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ ideales de Banach y X un espacio de Banach tales que existe un conjunto relativamente $\mathcal{B}$-compacto y no relativamente $\mathcal{A}$-compacto. Entonces existe una función holomorfa $\mathcal{B}$-compacta $f\in\mathcal{H}_{\mathcal{K}_{\mathcal{B}}}(\ell_1;X)$ tal que f es $\mathcal{A}$-compacta en 0, $r_{\mathcal{A}}(f,0)=1$, pero f no es $\mathcal{A}$-compacta en e_1.

Demostración: Al igual que en el ejemplo anterior, por el Lema 3.2.11, podemos conseguir una sucesión $(x_n)_n\in c_{0,\mathcal{B}}(X)$ tal que $(x_n)_n\notin c_{0,\mathcal{A}}$ y una sucesión creciente $1=n_0<n_1<n_2\ldots$ tal

que, si

$$L_m = \{x_{n_m}, x_{n_m+1}, \dots, x_{n_{m+1}-1}\},$$

entonces $\lim_{m\to\infty}(m_{\mathcal{B}}(L_m;X))^{1/m} = 0$ y $\lim_{m\to\infty}(m_{\mathcal{A}}(L_m;X))^{1/m} = \infty$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n_m \leq n \leq x_{n_{m+1}-1}$ consideramos

$$\tilde{x}_n = \frac{x_n}{m_{\mathcal{A}}(L_m;X)}$$

y el conjunto

$$\tilde{L}_m = \{\tilde{x}_{n_m}, \tilde{x}_{n_m+1}, \dots, \tilde{x}_{n_{m+1}-1}\},$$

por la Proposición 1.1.9 obtenemos que

$$\lim_{m\to\infty}(m_{\mathcal{B}}(\tilde{L}_m;X))^{1/m} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{m\to\infty}(m_{\mathcal{A}}(\tilde{L}_m;X))^{1/m} = 1.$$

Fijado $m \geq 2$, definimos el polinomio m-homogéneo $P_m \in \mathcal{P}(^m\ell_1;X)$ dado por

$$P_m z = e_1'(z)^{m-2} \sum_{j=n_m}^{n_{m+1}-1} e_j'(z)^2 \tilde{x}_j.$$

Como

$$P_m(B_{\ell_1}) \subset \{\sum_{j=n_m}^{n_{m+1}-1} e_j'(z)^2 \tilde{x}_j \colon z \in B_{\ell_1}\},$$

gracias al Lema 3.2.12 tenemos que $\|P_m\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{B}}} \leq m_{\mathcal{B}}(\tilde{L}_m;X)$ y como hicimos en el Ejemplo B de la página 89, podemos definir la función $f \in \mathcal{H}(\ell_1, X)$ como $f(x) = \sum_{m\geq 2} P_m(x)$, que por la Proposición 3.2.10, resulta $\mathcal{B}$-compacta.

Notemos que para todo $m \geq 2$, los polinomios P_m son $\mathcal{A}$-compactos ya que son de rango finito. Más aún, de la misma forma que antes, tenemos que $\limsup \|P_m\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}^{1/m} \leq 1$ y, por la Proposición 3.2.10, f es $\mathcal{A}$-compacta en 0. Para mostrar que $r_{\mathcal{A}}(f,0) = 1$, fijemos $m \geq 2$ y $\varepsilon > 0$. Tomemos $z_j \in B_{\ell_1}$ tal que

$$e_1'(z_j) = 1 - \varepsilon, \quad e_j'(z_j) = \varepsilon \quad \text{y} \quad e_k'(z_j) = 0$$

para $n_m \leq j < n_{m+1}$, $k \neq j$. Luego $P_m(z_j) = (1-\varepsilon)^{m-2}\varepsilon^2 \tilde{x}_j$ y por lo tanto,

$$(1-\varepsilon)^{m-2}\varepsilon^2 \tilde{L}_m \subset P_m(B_{\ell_1}).$$

Finalmente, por la Proposición 1.1.9, obtenemos que $(1-\varepsilon)^{m-2}\varepsilon^2 m_{\mathcal{A}}(\tilde{L}_m;X) \leq \|P_m\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}$, concluyendo que

$$(1-\varepsilon) \leq \limsup \|P_m\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}^{1/m}.$$

Como ε es arbitrario, tenemos que $r_{\mathcal{A}}(f,0)=1$.

Para probar que f no es $\mathcal{A}$-compacta en e_1, por la Proposición 3.2.7, basta probar que el polinomio 2-homogéneo $P^2f(e_1)\colon \ell_1\to\ell_p$ no es $\mathcal{A}$-compacto. Por un lado, tenemos que

$$P^2f(e_1)z=\sum_{m=2}^{\infty}\binom{m}{2}\overset{\vee}{P}_m(e_1^{m-2},z^2). \tag{3.4}$$

Por otro lado, si consideramos la aplicación m-lineal $A_m\in\mathcal{L}(^m\ell_1;X)$ dada por

$$A_m(z_1,\ldots,z_m)=e_1'(z_1)\cdots e_1'(z_{m-2})\sum_{j=n_m}^{n_{m+1}-1}e_j'(z_{m-1})e_j'(z_m)\tilde{x}_j,$$

tenemos que $P_m(z)=A_m(z,\ldots,z)$ y, si denotamos con A_m^σ a la aplicación m-lineal dada por

$$A_m^\sigma(z_1,\ldots,z_m)=A_m(z_{\sigma(1)},\ldots,z_{\sigma(m)}),$$

donde $\sigma\in\mathcal{S}_m$ es una permutación de m-elementos, gracias a la simetrización de aplicaciones m-lineales, tenemos que

$$\overset{\vee}{P}_m(e_1^{m-2},z^2)=\frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m}A_m^\sigma(e_1^{m-2},z^2).$$

Como $A_m(z_1,\ldots,z_{m-2},e_1,z_{m-1})=A_m(z_1,\ldots,z_{m-1},e_1)=0$ para todo $z_1,\ldots,z_{m-1}\in\ell_1$, y $A_m(e_1^{m-2},z^2)=\sum_{j=n_m}^{n_{m+1}-1}e_j'(z)^2\tilde{x}_j$, obtenemos que

$$\overset{\vee}{P}_m(e_1^{m-2},z^2)=\frac{1}{m!}2(m-2)!\sum_{j=n_m}^{n_{m+1}-1}e_j'(z)^2\tilde{x}_j. \tag{3.5}$$

Combinando (3.4) y (3.5) tenemos que

$$P^2f(e_1)z=\sum_{m\geq 2}\sum_{j=n_m}^{n_{m+1}-1}e_j'(z)^2\tilde{x}_j.$$

Finalmente, como para todo $j\in\mathbb{N}$, $P^2f(e_1)e_j=\tilde{x}_j$, resulta que la sucesión $(\tilde{x}_n)_n\subset P(B_{\ell_1})$ y, como la sucesión no es $\mathcal{A}$-nula, $P_2f(e_1)$ no es $\mathcal{A}$-compacto, concluyendo el ejemplo. $\square$

Observación 3.2.16. Por [AMR, Example 3.1] y el ejemplo anterior, para $1\leq p<\infty$, existe una función $f\in\mathcal{H}(\ell_1;\ell_p)$ p-compacta en en el origen, pero que no es p-compacta, dando una respuesta negativa a [AMR, Problem 5.1].

Capítulo 4

Funciones $\mathcal{A}$-compactas y Propiedades de Aproximación

El estudio la propiedad de aproximación en espacio de polinomios y funciones holomorfas se inicia con el trabajo de Aron y Schottenloher [AS]. Desde ahí, varios autores estudiaron problema similares en diferentes contextos (ver por ejemplo [BDR, Çal1, DM1, DM2, DM3] entre otros). La p-propiedad de aproximación es considerada en este tipo de estudio en el trabajo de Aron, Maestre y Rueda [AMR].

Este capítulo esta dedicado a examinar polinomios y funciones holomorfas $\mathcal{A}$-compactas en espacios con $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación y propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme.

4.1. Propiedades de Aproximación y Polinomios $\mathcal{A}$-compactos

La incidencia entre la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme y la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación en el espacio de los polinomios n-homogéneos se deduce directamente de la linealización de los polinomios. Previo a esto, notemos que de la misma forma que ocurre con los operadores de rango finito, un polinomio n-homogéneo $P \in \mathcal{P}(^nX;Y)$ tiene rango finito si y sólo si existen polinomios $P_1, \ldots, P_m \in \mathcal{P}(^nX)$ y elementos $y_1, \ldots, y_m \in Y$ tales que $P(x) = \sum_{j=1}^m P_j(x)y_j$. Por esto, al espacio de polinomios n-homogéneos de rango finito de X en Y lo denotaremos con $\mathcal{P}(^nX) \otimes Y$. De la linealización de polinomios (página 85), se tiene que $\mathcal{F}(\widehat{\otimes_{\pi_s}^n} X;Y)$ es isomorfo $\mathcal{P}(^nX) \otimes Y$ vía el isomorfismo $S \mapsto S \circ \Delta_n$. Además, bajo el mismo isomorfismo, por el Corolario 3.1.6 tenemos que $\mathcal{P}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(^nX;Y)$ es isomorfo a $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\widehat{\otimes_{\pi_s}^n} X;Y)$.

Observación 4.1.1. Recordemos que para un ideal $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{A}}(^nX;Y) = \{P \in \mathcal{P}(^nX;Y) \colon L_P \in \mathcal{A}(\widehat{\bigotimes}^n_{\pi_s} X;Y)\}$$

es un ideal de polinomios y, si $\mathcal{A}$ es un ideal de Banach, entonces $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ es un ideal de Banach con la norma dada por

$$\|P\|_{\mathcal{A}} = \|L_P\|_{\mathcal{A}}.$$

Por lo tanto, tenemos que para cualquier ideal $\mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(^nX;Y), \|\cdot\|) &\overset{1}{\cong} (\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\widehat{\bigotimes}^n_{\pi_s} X;Y), \|\cdot\|) \\ (\mathcal{P}_{\mathcal{K}^d_{\mathcal{A}}}(^nX;Y), \|\cdot\|) &\overset{1}{\cong} \mathcal{K}^d_{\mathcal{A}}(\widehat{\bigotimes}^n_{\pi_s} X;Y), \|\cdot\|) \\ (\mathcal{P}(^nX)\otimes Y, \|\cdot\|) &\overset{1}{\cong} (\mathcal{F}(\widehat{\bigotimes}^n_{\pi_s} X;Y), \|\cdot\|) \end{aligned} \tag{4.1}$$

y, si $\mathcal{A}$ es un ideal de Banach,

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(^nX;Y), \|\cdot\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}) &\overset{1}{\cong} (\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\widehat{\bigotimes}^n_{\pi_s} X;Y), \|\cdot\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}) \\ (\mathcal{P}(^nX)\otimes Y, \|\cdot\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}) &\overset{1}{\cong} (\mathcal{F}(\widehat{\bigotimes}^n_{\pi_s} X;Y), \|\cdot\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}) \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_{\mathcal{K}^d_{\mathcal{A}}}(^nX;Y), \|\cdot\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{K}^d_{\mathcal{A}}}}) &\overset{1}{\cong} \mathcal{K}^d_{\mathcal{A}}(\widehat{\bigotimes}^n_{\pi_s} X;Y), \|\cdot\|_{\mathcal{K}^d_{\mathcal{A}}}) \\ (\mathcal{P}(^nX)\otimes Y, \|\cdot\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{K}^d_{\mathcal{A}}}}) &\overset{1}{\cong} (\mathcal{F}(\widehat{\bigotimes}^n_{\pi_s} X;Y), \|\cdot\|_{\mathcal{K}^d_{\mathcal{A}}}). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Estas identificaciones nos permite *transferir* los resultados obtenidos en el Capítulo 2 en cuanto a la incidencia de la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme y la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación en el espacio de operadores lineales al espacio de polinomios. En efecto,

Proposición 4.1.2. *Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal. Son equivalentes:*

(i) *X tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme.*

(ii) *Para todo espacio de Banach Y, $\mathcal{P}(^nY)\otimes X$ es $\|.\|$-denso en $\mathcal{P}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(^nY;X)$ para todo $n\in\mathbb{N}$.*

(iii) *Para todo espacio de Banach separable y reflexivo Y y para todo $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(^nY)\otimes X$ es $\|.\|$-denso en $\mathcal{P}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(^nY;X)$.*

Demostración: Supongamos que vale (i). Tomemos un polinomio $P\in\mathcal{P}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(^nY;X)$ y sea $\varepsilon>0$. Por el Corolario 3.1.6 tenemos que su linealización $L_P\in\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\widehat{\otimes^n_{\pi_s}}Y,X)$ y, como X tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme, existe $S\in\mathcal{F}(\widehat{\otimes^n_{\pi_s}}Y;X)$ tal que $\|S-L_P\|\le\varepsilon$. Supongamos que $S=\sum_{j=1}^m \phi_j\otimes x_j$, donde $\phi_1,\dots,\phi_m\in(\widehat{\otimes^n_{\pi_s}}Y)'$ y $x_1,\dots,x_m\in X$. Denotando con $P_j\in\mathcal{P}(^nY)$ a los polinomios $P_j=\phi_j\circ\Delta_n$ ponemos $Q=\sum_{j=1}^m P_j\otimes x_j$. Luego tenemos que $Q\in\mathcal{P}(^nY)\otimes X$ y

$$\|P-Q\| = \|(L_P-S)\circ\Delta_n\| \le \|(L_P-S)\| \le \varepsilon,$$

obteniendo (ii). Que (ii) implica (iii) es claro. Si vale (iii), en particular vale para $n = 1$. El resultado se sigue de aplicar la Proposición 2.2.3. $\square$

De la misma forma que ocurre para operadores lineales, el rol que juega el espacio X con al propiedad de aproxiamción $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme en el espacio $\mathcal{P}(^n X;Y)$ no es el mismo que en $\mathcal{P}(^n Y;X)$. Utilizando la linealización de polinomios y que $(\widehat{\bigotimes}^n_{\pi_s} X)' \overset{1}{\cong} \mathcal{P}(^n X)$, gracias a las relaciones (4.1) de la Observación 4.1.1, podemos extender las Proposiciones 2.2.4, 2.2.5 y 2.2.6 al contexto de polinomios.

Proposición 4.1.3. *Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal. Son equivalentes:*

(i) $\mathcal{P}(^n X)$ *tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme.*

(ii) *Para todo espacio de Banach Y, $\mathcal{P}(^n X) \otimes Y$ es $\|\cdot\|$-denso en $\mathcal{P}_{\mathcal{K}^d_{\mathcal{A}}}(X;Y)$.*

Demostración: Que $\mathcal{P}(^n X)$ o, equivalentemente, $(\widehat{\bigotimes}^n_{\pi_s} X)'$ tenga la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme es equivalente, por la Proposición 2.2.4, a que $\mathcal{F}(\widehat{\bigotimes}^n_{\pi_s} X;Y)$ sea $\|\cdot\|$-denso en $\mathcal{K}^d_{\mathcal{A}}(\widehat{\bigotimes}^n_{\pi_s} X, Y)$. Esto útlimo, gracias a las relaciones (4.1) de la Observación 4.1.1, es equivalente a que $\mathcal{P}(^n X) \otimes Y$ sea $\|\cdot\|$-denso en $\mathcal{P}_{\mathcal{K}^d_{\mathcal{A}}}(X;Y)$ $\square$

Proposición 4.1.4. *Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal. Consideremos las siguientes afirmaciones.*

(i) $\mathcal{P}(^n X)$ *tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{K}^d_{\mathcal{A}}$-uniforme.*

(ii) *Para todo espacio de Banach Y, $\mathcal{P}(^n X) \otimes Y$ es $\|\cdot\|$-denso en $\mathcal{P}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(^n X;Y)$.*

Entonces (ii) *implica* (i).

Demostración: Supongamos que $\mathcal{P}(^n X) \otimes Y$ es $\|\cdot\|$-denso en $\mathcal{P}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(^n X;Y)$ para todo espacio de Banach Y. Luego, por la relación (4.1) de la Observación 4.1.1, $\mathcal{F}(\widehat{\bigotimes}^n_{\pi_s} X;Y)$ es $\|\cdot\|$-denso en $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\widehat{\bigotimes}^n_{\pi_s} X;Y)$ para todo espacio de Banach Y. Por la Proposición 2.2.5, $(\widehat{\bigotimes}^n_{\pi_s} X)' = \mathcal{P}(^n X)$ tiene la la propiedad de aproximación $\mathcal{K}^d_{\mathcal{A}}$-uniforme. $\square$

En el marco de la p-compacidad, vale la equivalencia en la proposición anterior.

Proposición 4.1.5. *Sean X un espacio de Banach y $1 \leq p < \infty$. Son equivalentes:*

(i) $\mathcal{P}(^n X)$ *tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{QN}_p$-uniforme.*

(ii) *Para todo espacio de Banach Y, $\mathcal{P}(^n X) \otimes Y$ es $\|\cdot\|$-denso en $\mathcal{P}_{\mathcal{K}_p}(X;Y)$.*

Demostración: Si $\mathcal{P}(^nX) = (\widehat{\bigotimes}^n_{\pi_s} X)'$ tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{QN}_p$-uniforme, por la Proposición 2.1.12, $\mathcal{F}(\widehat{\bigotimes}^n_{\pi_s} X; Y)$ es $\|\cdot\|$-denso en $\mathcal{K}_p(\widehat{\bigotimes}^n_{\pi_s} X; Y)$ para todo espacio de Banach Y. Lo cual, por la relación (4.1) de la Observación 4.1.1, es equivalente a que $\mathcal{P}(^nX) \otimes Y$ es $\|\cdot\|$-denso en $\mathcal{P}_{\mathcal{K}_p}(X; Y)$. $\square$

Análogamente, gracias a las relaciones (4.2) y (4.3) de la Observación 4.1.1, podemos extender los resultados de las Proposiciones 2.1.10, 2.1.11 y 2.1.12 a espacios de polinomios. Como las demostraciones son similares a las anteriores, las omitiremos.

Proposición 4.1.6. *Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal de Banach. Son equivalentes:*

(i) *X tiene la $\mathcal{K}_\mathcal{A}$-propiedad de aproximación.*

(ii) *Para todo espacio de Banach Y, $\mathcal{P}(^nY) \otimes X$ es $\|.\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}$-denso en $\mathcal{P}_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}(^nY; X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

(iii) *Para todo espacio de Banach separable y reflexivo Y, $\mathcal{P}(^nY) \otimes X$ es $\|.\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}$-denso en $\mathcal{P}_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}(^nY; X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Proposición 4.1.7. *Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal de Banach. Son equivalentes:*

(i) *$\mathcal{P}(^nX)$ tiene la $\mathcal{K}_\mathcal{A}$-propiedad de aproximación.*

(ii) *Para todo espacio de Banach Y, $P(^nX) \otimes Y$ es $\|\cdot\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{K}^d_\mathcal{A}}}$-denso en $\mathcal{P}_{\mathcal{K}^d_\mathcal{A}}(X; Y)$.*

Proposición 4.1.8. *Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal de Banach. Consideremos las siguientes afirmaciones.*

(i) *$\mathcal{P}(^nX)$ tiene la $\mathcal{K}^d_\mathcal{A}$-propiedad de aproximación.*

(ii) *Para todo espacio de Banach Y, $\mathcal{P}(^nX) \otimes Y$ es $\|\cdot\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}$-denso en $\mathcal{P}_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}(^nX; Y)$.*

Entonces (ii) *implica* (i)*.*

Proposición 4.1.9. *Sean X un espacio de Banach y $1 \leq p < \infty$. Son equivalentes:*

(i) *$\mathcal{P}(^nX)$ tiene la $\mathcal{QN}_p$-propiedad de aproximación.*

(ii) *Para todo espacio de Banach Y, $\mathcal{P}(^nX) \otimes Y$ es $\|\cdot\|_{\mathcal{K}_p}$-denso en $\mathcal{P}_{\mathcal{K}_p}(X; Y)$.*

4.2. Propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme y funciones holomorfas

Ahora centramos nuestro estudio en las funciones holomorfas $\mathcal{A}$-compactas. Análogamente a la definición de traspuesto de un polinomio, se tiene el traspuesto de una función holomorfa [AS]. Dada $f \in \mathcal{H}(X;Y)$, el traspuesto de f, $f'\colon Y' \to \mathcal{H}(X)$ es el operador dado por $f'(y')(x) = y'(fx)$. Con esto, se logra una descripción del espacio de funciones holomorfas compactas dotado de la topología de Nachbin τ_w, via el ϵ-producto de Schwartz [AS, Theorem 4.1]. En efecto,

$$(\mathcal{H}_{\mathcal{K}}(X;Y), \tau_\omega) \overset{1}{\cong} \mathcal{L}_\epsilon(Y'_c; (\mathcal{H}(X), \tau_\omega)) \tag{4.4}$$

donde el isomorfismo viene dado por el operador transposición $f \mapsto f'$. Esta identificación permite mostrar, en presencia de propiedad de aproximación, resultados de densidad similares a los obtenidos en el caso lineal. En el Capítulo 2, mostramos como se relaciona la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme con una variante del ϵ-producto de Schwartz (ver Teorema 2.2.18). Por lo tanto, de conseguir un resultado similar a (4.4) para funciones $\mathcal{A}$-compactas, obtendríamos como afecta la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme a la estructura de las funciones holomorfas $\mathcal{A}$-compactas. La siguiente proposición clarifica la relación entre las funciones holomorfas $\mathcal{A}$-compacta y la variante del ϵ-producto de Schwartz definida en la Sección 2.2.2. Este resultado responde parcialmente la pregunta planteada en [AMR, Problem 5.6] en el contexto de la p-compacidad. Antes, para un ideal $\mathcal{A}$, denotaremos con $\mathcal{H}^{\mathcal{P}}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(X;Y)$ al espacio de todas las funciones holomorfas de X en Y tales que todos los polinomios del desarrollo de Taylor en todo $x \in X$ son $\mathcal{A}$-compactos. Es decir,

$$\mathcal{H}^{\mathcal{P}}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(X;Y) = \big\{ f \in \mathcal{H}(X;Y)\colon P^n f(x) \in \mathcal{P}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(^n X;Y),\ \forall x \in X,\ \forall n \in \mathbb{N} \big\}.$$

En el caso que $\mathcal{K}_{\mathcal{A}} = \mathcal{K}$, tenemos que $\mathcal{H}_{\mathcal{K}}(X;Y) = \mathcal{H}^{\mathcal{P}}_{\mathcal{K}}(X;Y)$ para todo espacio de Banach X e Y [AS, Proposition 3.4]. Sin embargo, en virtud del Ejemplo 3.2.13, el espacio de funciones holomorfas $\mathcal{A}$-compactas puede no coincidir con este espacio. Más aún, por la Observación 3.2.14 en el caso de la p-compacidad ($1 \le p < \infty$) tenemos que

$$\mathcal{H}_{\mathcal{K}_p}(\ell_1, \ell_p) \subsetneq \mathcal{H}^{\mathcal{P}}_{\mathcal{K}_p}(\ell_1, \ell_p).$$

Empecemos con el siguiente lema.

Lema 4.2.1. *Sean X e Y espacios de Banach, $\mathcal{A}$ un ideal de Banach, $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(X;Y)$ y $K \subset X$ un conjunto compacto. Entonces, existe $V \subset X$ un conjunto abierto tal que $K \subset V$ y $f(V)$ es relativamente $\mathcal{A}$-compacto en Y.*

Demostración: Como f es $\mathcal{A}$-compacta, para cada $x \in K$, existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $f(x+\varepsilon_x B_X)$ es relativamente $\mathcal{A}$-compacto en Y. Al ser K un conjunto compacto, existen $x_1, \ldots, x_n \in K$ tales que $K \subset V = \bigcup_{j=1}^n x_j + \varepsilon_{x_j} B_X$. Luego, tenemos que $f(V) = \bigcup_{j=1}^n f(x_j + \varepsilon_{x_j} B_X)$ y, por lo tanto $F(V)$ es $\mathcal{A}$-compacto. □

Proposición 4.2.2. *Sean X e Y espacios de Banach. Entonces,*

(a) $(\mathcal{H}_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}(X;Y), \tau_\omega)$ *es topológicamente isomorfo a un subespacio de* $\mathcal{L}_\epsilon(Y'_\mathcal{A}; (\mathcal{H}(X), \tau_\omega))$.

(b) $\mathcal{L}_\epsilon(Y'_\mathcal{A}; (\mathcal{H}(X), \tau_\omega))$ *es topológicamente isomorfo a un subespacio de* $(\mathcal{H}^{\mathcal{P}}_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}(X;Y), \tau_\omega)$.

En ambos casos, el isomorfismo viene dado por el operador $f \mapsto f'$.

Demostración: Primero notemos que toda función $\mathcal{A}$-compacta es compacta. Por lo tanto, $\mathcal{H}_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}(X;Y)$ es un subespacio de $\mathcal{H}_\mathcal{K}(X;Y)$. Por [AS, Theorem 4.1], $(\mathcal{H}_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}(X;Y), \tau_\omega)$ es topológicamente isomorfo a un subespacio de $\mathcal{L}_\epsilon(Y'_c; \mathcal{H}(X), \tau_\omega)$. Por otro lado, como la identidad

$$Id\colon Y'_c \to Y'_\mathcal{A}$$

es continua, $\mathcal{L}_\epsilon(Y'_\mathcal{A}; (\mathcal{H}(X), \tau_\omega))$ es un subespacio de $\mathcal{L}_\epsilon(Y'_c; \mathcal{H}(X), \tau_\omega)$. Por ende, para probar (a) basta mostrar que si $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}(X;Y)$, se tiene $f' \in \mathcal{L}(Y'_\mathcal{A}; \mathcal{H}(X), (\tau_\omega))$. Para ello, fijemos $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}(X;Y)$ y consideremos q una seminorma τ_ω-continuua en $\mathcal{H}(X)$ y veamos que existe un entorno W de $Y'_\mathcal{A}$ tal que $\sup_{y' \in W} q(f'(y')) < \infty$. Por [Din3, Proposition 3.47], podemos considerar a la seminorma q de la forma

$$q(g) = \sum_{n=0}^{\infty} \|P^n g(0)\|_{K + a_n B_X},$$

para $g \in \mathcal{H}(X)$, donde $K \subset X$ es un conjunto absolutamente convexo compacto y $(a_n)_n \in c_0^+$, el espacio de sucesiones de números positivos tendiendo a cero. Por el lema anterior, existe un conjunto abierto $V \subset X$ tal que $2K \subset V$ y $f(V)$ es un conjunto relativamente $\mathcal{A}$-compacto en Y. Como $2K$ es compacto y V es abierto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$2K + 2a_n B_X \subset V,$$

para todo $n \geq n_0$ y, como $2K$ es absolutamente convexo, existe $c > 0$ tal que

$$c(2K + 2a_n B_X) \subset 2K + 2a_{n_0} B_X \subset V,$$

para todo $n < n_0$. Como $f(V)$ es relativamente $\mathcal{A}$-compacto, luego su conjunto polar, $f(V)^\circ$, es un entorno de $Y'_\mathcal{A}$. Ahora, si $y' \in Y'$, entonces $f'(y') = y' \circ f \in \mathcal{H}(X)$ y $P^n(y' \circ f)(0) = y' \circ P_n f(0)$, por lo tanto, para $y' \in f(V)^\circ$, tenemos

$$\begin{aligned} q(f'(y')) &= \sum_{n=0}^{\infty} \|P^n\left(y' \circ f\right)(0)\|_{K+a_n B_X} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{2^n} \|P^n\left(y' \circ f\right)(0)\|_{2K+2a_n B_X} \\ &= \sum_{n<n_0} \tfrac{1}{2^n} \|P^n\left(y' \circ f\right)(0)\|_{2K+2a_n B_X} + \sum_{n\geq n_0} \tfrac{1}{2^n} \|P^n\left(y' \circ f\right)(0)\|_{2K+2a_n B_X} \\ &\leq \sum_{n<n_0} \tfrac{1}{(2c)^n} \|P^n\left(y' \circ f\right)(0)\|_{c(2K+2a_n B_X)} + \sum_{n\geq n_0} \tfrac{1}{2^n} \|P^n\left(y' \circ f\right)(0)\|_{2K+2a_n B_X} \end{aligned} \tag{4.5}$$

Como los conjuntos $c(2K+2a_nB_X)$ para $n<n_0$ y $2K+2a_nB_X$ para $n\geq n_0$ son abiertos de X, por un lado, aplicando el Lema 3.2.4, tenemos que

$$P^n\left(y' \circ f\right)(0)(c(2K+2a_nB_X)) \subset \overline{\mathrm{co}\{y' \circ f(c(2K+2a_nB_X))\}} \quad \text{si} \quad n<n_0$$

y, por lo tanto,

$$\|P^n\left(y' \circ f\right)(0)\|_{c(2K+2a_nB_X)} \leq \|y' \circ f\|_{c(2K+2a_nB_X)} \quad \text{si} \quad n<n_0.$$

Por otra parte, como

$$P^n\left(y' \circ f\right)(0)(2K+2a_nB_X) \subset \overline{\mathrm{co}\{y' \circ f(2K+2a_nB_X)\}} \quad \text{si} \quad n\geq n_0$$

tenemos que

$$\|P^n\left(y' \circ f\right)(0)\|_{2K+2a_nB_X} \leq \|y' \circ f\|_{2K+2a_nB_X} \leq 1 \quad \text{si} \quad n\geq n_0,$$

donde la última desigualdad se debe a que $2K+2a_nB_X \subset V$ y, como $y' \in f(V)^\circ$, $|y'(fx)| \leq 1$ para todo $x \in 2K+2a_nB_X$. Luego,

$$\begin{aligned} &\sum_{n<n_0} \tfrac{1}{(2c)^n} \|P^n\left(y' \circ f\right)(0)\|_{c(2K+2a_n B_X)} + \sum_{n\geq n_0} \tfrac{1}{2^n} \|P^n\left(y' \circ f\right)(0)\|_{2K+2a_n B_X} \\ &\leq \sum_{n<n_0} \tfrac{1}{(2c)^n} \|y' \circ f\|_{c(2K+2a_m B_X)} + \sum_{n\geq n_0} \tfrac{1}{2^n} \|y' \circ f\|_{2K+2a_m B_X} \\ &\leq \sum_{n<n_0} \tfrac{1}{(2c)^n} \|y' \circ f\|_V + \sum_{n\geq n_0} \tfrac{1}{2^n} \|y' \circ f\|_V \\ &\leq \sum_{n<n_0} \tfrac{1}{(2c)^n} + \sum_{n\geq n_0} \tfrac{1}{2^n} < \infty. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Combinando las inecuaciones (4.5) y (4.6), vemos que $\sup_{y'\in f(V)^\circ} q(f'(y')) < \infty$, concluyendo que $f' \in \mathcal{L}(Y'_{\mathcal{A}}; (\mathcal{H}(X), \tau_\omega)$.

Para probar (b), usando un argumento similar al anterior, basta mostrar que a cada operador en $\mathcal{L}(Y'_{\mathcal{A}}; (\mathcal{H}(X), \tau_\omega))$ le corresponde una función en $\mathcal{H}^{\mathcal{P}}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}$. Consideremos el operador

$T \in \mathcal{L}(Y'_{\mathcal{A}}; (\mathcal{H}(X), \tau_\omega))$ el cual, en particular, es un operador en $\mathcal{L}(Y'_c; (\mathcal{H}(X), \tau_\omega))$. Aplicando [AS, Theorem 4.1], existe $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{K}}(X; Y)$ tal que $T = f'$. En particular, como vale la igualdad $\mathcal{H}_{\mathcal{K}}(X; Y) = \mathcal{H}^{\mathcal{P}}_{\mathcal{K}}(X; Y)$, por la Proposición 3.1.13, para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$, el polinomio n-ésimo del desarrollo de Taylor de f en x cumple que $P^n f(x)' \colon Y'_c \to (\mathcal{P}(^n X), \|.\|)$ es continuo. Si mostramos que $P^n f(x)' \colon Y'_{\mathcal{A}} \to (\mathcal{P}(^n X), \|.\|)$ es continuo, aplicando la Proposición 3.1.13 obtenemos $P^n f(x)$ es un polinomio $\mathcal{A}$-compacto, de donde se sigue el resultado.

Para comenzar, veamos que la proyección $D^n_x \colon (\mathcal{H}(X), \tau_\omega) \to (\mathcal{P}(^n X), \|.\|)$ definida por $D^n_x(g) = P^n g(x)$ es continua. En efecto, consideremos la seminorma q en $\mathcal{H}(X)$ dada por $q(g) = \|P^n g(x)\|$. Si V es un conjunto abierto que contiene a x, tomando $\varepsilon > 0$ tal que $x + \varepsilon B_X \subset V$ y aplicando el Lema 3.2.4, tenemos que

$$q(g) = \|P^n g(x)\| = \frac{1}{\varepsilon^n}\|P^n g(x)\|_{\varepsilon B_X} \leq \frac{1}{\varepsilon^n}\|g\|_{x+\varepsilon B_X} \leq \frac{1}{\varepsilon^n}\|g\|_V,$$

lo cuál, implica que q esta portada por el compacto $\{x\}$ y, por ende, es τ_ω-continua. Por lo tanto,

$$\|D^m_x(g)\| = \|P^n g(x)\| = q(g),$$

obteniendo la afirmación.

Ahora, consideremos el operador de composición $D^n_x \circ f' \colon Y'_{\mathcal{A}} \to (\mathcal{P}(^n X), \| \cdot \|)$, que resulta ser continuo. Si $y' \in Y'$, entonces

$$(D^n_x \circ f')y' = D^n_x(f'y') = P^n(y' \circ f)(x) = y' \circ P^n f(x) = P^n f(x)'(y').$$

Concluimos que el operador $P^n f(x)' \colon Y'_{\mathcal{A}} \to (\mathcal{P}(^n X), \|.\|)$ es continuo para todo $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ y, por la Proposición 3.1.9, $f \in \mathcal{H}^{\mathcal{P}}_{\mathcal{K}}(X; Y)$. $\square$

En general, no sabemos si vale $(\mathcal{H}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(X; Y), \tau_\omega) \overset{1}{\cong} \mathcal{L}_\epsilon(Y'_{\mathcal{A}}; (\mathcal{H}(X), \tau_\omega))$. Sin embargo, tenemos el siguiente resultado

Lema 4.2.3. *Sean X e Y espacios de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal de Banach. Entonces, $\mathcal{H}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(X; Y)$ es τ_ω-denso en $\mathcal{H}^{\mathcal{P}}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(X; Y)$.*

Demostración: Fijemos $f \in \mathcal{H}^{\mathcal{P}}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(X; Y)$ y sean $\varepsilon > 0$ y q una seminorma τ_ω-continua en $\mathcal{H}(X; Y)$ de la forma

$$q(g) = \sum_{n=0}^{\infty} \|P_n g(0)\|_{K + a_n B_X},$$

donde $K \subset X$ es un conjunto absolutamente convexo compacto y $(a_n)_n \in c_0^+$. Consideremos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n \geq n_0} \|P^n f(0)\|_{K + a_n B_X} < \varepsilon$ y definamos $f_0 = \sum_{n < n_0} P^n f(0)$, que resulta ser

$\mathcal{A}$-compacta ya que es una suma finita de polinomios $\mathcal{A}$-compactos. El lema se sigue notando que

$$q(f - f_0) = \sum_{n \geq m_0} \|P^n f(0)\|_{K + a_n B_X} < \varepsilon.$$

□

El siguiente teorema muestra la incidencia de la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme en el espacio de funciones holomorfas. Antes, recordemos que una función holomorfa f de X en Y tiene rango finito si y sólo si existen $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{H}(X)$ e $y_1, \ldots, y_n \in Y$ tales que $f(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x) y_j$. Por esto, al espacio de funciones holomorfas de X en Y de rango finito lo denotamos con $\mathcal{H}(X) \otimes Y$.

Teorema 4.2.4. *Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal de Banach. Son equivalentes:*

(i) *X tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme.*

(ii) *Para todo espacio de Banach Y, $\mathcal{H}(Y) \otimes X$ es τ_ω-denso en $\mathcal{H}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(Y; X)$.*

(iii) *Para todo espacio de Banach Y, $\mathcal{H}(Y) \otimes X$ es τ_ω-denso en $\mathcal{H}^{\mathcal{P}}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(Y; X)$.*

Demostración: Si X tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme, por el Teorema 2.2.18 $X \otimes G$ es denso en $\mathcal{L}_\epsilon(X'_{\mathcal{A}}; G)$ para todo espacio localmente convexo G. En particular si consideramos $G = (\mathcal{H}(Y), \tau_\omega)$, tenemos que $X \otimes \mathcal{H}(Y)$ es denso en $\mathcal{L}_\epsilon(X'_{\mathcal{A}}; (\mathcal{H}(Y), \tau_\omega))$. Como el espacio de funciones holmorfas de Y en X de rango finito, $\mathcal{H}(Y) \otimes X$, es isomorfo al espacio de operadores de rango finito de X en $\mathcal{H}(Y)$, $X \otimes \mathcal{H}(Y)$, bajo el isomorfismo $f \mapsto f'$, aplicando la Proposición 4.2.2 (a), obtenemos que (i) implica (ii). Por el Lema 4.2.3, tenemos que (ii) implica (iii).

Para ver que (iii) implica (i), tomemos un operador $T \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Y; X)$, $\varepsilon > 0$ y consideremos q la seminorma τ_ω continua de $\mathcal{H}(X; Y)$ dada por $q(f) = \|P^1 f(0)\|$. Como $T \in \mathcal{H}^{\mathcal{P}}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(X; Y)$, entonces existe $g \in \mathcal{H}(Y) \otimes X$ tal que $q(T - g) \leq \varepsilon$. Si $g(y) = \sum_{j=1}^n f_j(y) x_j$, donde $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{H}(Y)$, entonces $P^1 g(0) = \sum_{j=1}^n P^1 f_j(0)(y) x_j$, donde $P^1 f_j(0) \in X'$ para $j = 1, \ldots, n$. Por lo tanto, tenemos que $P^1 g(0) \in \mathcal{F}(Y; X)$. Como

$$q(T - g) = \|T - P^1 g(0)\| \leq \varepsilon,$$

obtenemos que $\mathcal{F}(Y; X)$ es $\|.\|$-denso en $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Y; X)$. Luego, X tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme. □

Según la Proposición 2.1.3, la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme y la topología de convergencia uniforme sobre $\mathcal{A}$-compactos estan estrechamente relacionadas. Esta propiedad no sólo incide en la densidad de operadores de rango finito bajo esta topología en el espacio de los operadores continuos, sino también, gracias a la Proposición 2.2.20 en la estructura del espacio dual. En otras palabras, un espacio de Banach X tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme si y sólo si $X'_{\mathcal{A}}$ tiene la propiedad de aproximación. Los siguientes resultados muestran como dicha propiedad afecta también a los espacios de polinomios y funciones holomorfas consideradas con la topología de convergencia uniforme sobre conjuntos $\mathcal{A}$-compactos. Para ver esto, necesitamos primero del siguiente resultado que relaciona al espacio de funciones holomorfas con la topología de convergencia uniforme sobre conjuntos $\mathcal{A}$-compactos y el ϵ-producto de Schwartz. El siguiente resultado extiende al realizado por Aron, Maestre y Rueda en [AMR, Theorem 4.3]. Como la demostración es la misma, la omitiremos.

Teorema 4.2.5. *Sean X e Y espacios de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal de Banach. Entonces*

$$(\mathcal{H}(X;Y),\tau_{\mathcal{A}}) \overset{1}{\cong} \mathcal{L}_{\epsilon}(Y'_c,(\mathcal{H}(X),\tau_{\mathcal{A}}))$$

bajo el isomorfismo $f \mapsto f'$.

Como consecuencia del teorema anterior y la relación del ϵ-producto de Schwartz con la propiedad de aproximación, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.2.6. *Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal. Son equivalentes:*

(i) *$(\mathcal{H}(X),\tau_{\mathcal{A}})$ tiene la propiedad de aproximación.*

(ii) *$\mathcal{H}(X)\otimes Y$ es $\tau_{\mathcal{A}}$-denso en $\mathcal{H}(X;Y)$ para todo espacio de Banach Y.*

Demostración: Por [BM, Satz 2] (ver también [Sch2, Exposé 14, Theorem 2]) $(\mathcal{H}(X),\tau_{\mathcal{A}})$ tiene la propiedad de aproximación si y sólo si $Y\otimes\mathcal{H}(X)$ es denso en $\mathcal{L}_{\epsilon}(Y'_c,(\mathcal{H}(X),\tau_{\mathcal{A}})$ para todo espacio de Banach Y. Aplicando el teorema anterior, tenemos el resultado. □

Para finalizar vamos a extender la Proposición 2.2.20, mostrando como incide la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme de un espacio de Banach en la estructura de los espacios $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}(^nX)$ y $(\mathcal{H}(X),\tau_{\mathcal{A}})$. Aunque la demostración es análoga a la de [AMR, Theorem 4.6], la incluimos por completitud.

Teorema 4.2.7. *Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal. Son equivalentes:*

(i) *X tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme.*

(ii) $X'_{\mathcal{A}}$ *tiene la propiedad de aproximación.*

(iii) $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}(^nX)$ *tiene propiedad de aproximación para algún* $n \in \mathbb{N}$.

(iv) $(\mathcal{H}(X), \tau_{\mathcal{A}})$ *tiene propiedad de aproximación.*

Demostración: Primero notemos que $(\mathcal{P}(^nX), \tau_{\mathcal{A}})$ es complementado en $(\mathcal{H}(X), \tau_{\mathcal{A}})$ y que $X'_{\mathcal{A}}$ es complementado en $(\mathcal{P}(^nX), \tau_{\mathcal{A}})$. En efecto, el operador $D_0^n \colon (\mathcal{H}(X), \tau_{\mathcal{A}}) \to (\mathcal{P}(^nX), \tau_{\mathcal{A}})$ dado por $D_0^n(f) = P^n(0)$ es un proyector y, para ver que es continuo, tomemos un conjunto absoultamente convexo y $\mathcal{A}$-compacto $K \subset X$ y, por la Observación 3.2.5 tenemos que para todo $x \in K$

$$\|P^n f(0)x\| \leq \sup_{|\xi|=1} \|f(\xi x)\| \leq \|f\|_K,$$

y, por lo tanto,

$$\|P^n f(0)\|_K \leq \|f\|_K,$$

con lo cuál D_0^n es continuo. Análogamente, se obtiene que $X'_{\mathcal{A}}$ es complementado en $\mathcal{P}(^nX; Y)$. Así, tenemos que (iv) implica (iii) implica (ii). La Proposición 2.2.20 muestra que (ii) es equivalente a (i). Por último, supongamos que X tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme y tomemos una función $f \in \mathcal{H}(X; Y)$, $K \subset X$ un conjunto $\mathcal{A}$-compacto y $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in K$ e $y \in X$ con $\|x - y\| < \delta$, entonces $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$. Como X tiene la propiedad de aproximación $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-uniforme, existe un operador $T \in \mathcal{F}(X; X)$ tal que $\|T(x) - x\| \leq \delta$ para todo $x \in K$. Por lo tanto, $\|f(T(x)) - f(x)\| \leq \varepsilon$ para todo $x \in K$. Si tomamos el espacio $X_0 = T(X)$, como X_0 es de dimensión finita,

$$(\mathcal{H}(X_0; Y), \tau_c) = \overline{\mathcal{H}(X_0) \otimes Y} = \overline{\{f \in \mathcal{H}(X_0; Y) \colon f = \sum_{j=1}^n y_j f_j, \ y_j \in Y, f_j \in \mathcal{H}(X_0)\}}.$$

Por lo tanto, existe $g \in \mathcal{H}(X_0) \otimes Y$ tal que $f|_{X_0}(z) - g(z)\| \leq \varepsilon$, para todo $z \in T(K)$ y, por lo tanto, $f \circ T$ se puede aproximar por $g \circ T$ uniformemente sobre K. Por lo tanto, para todo espacio de Banach Y, $\mathcal{H}(X) \otimes Y$ es $\tau_{\mathcal{A}}$-denso en $\mathcal{H}(X; Y)$ y por el Corolario 4.2.6 se tiene el resultado. □

4.3. Tipos de Holomorfía

Para estudiar la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación y los operadores continuos, introdujimos la topología $\tau_{s\mathcal{A}}$, donde no sólo entran en juego los conjuntos $\mathcal{A}$-compactos, sino también la medida $m_{\mathcal{A}}$. En el caso del espacio de funciones holomorfas, necesitamos una noción similar que está relacionada con el concepto de *tipos de holomorfía*, introducido por Nachbin en [Nac1] y [Nac2].

Definición 4.3.1. *Un tipo de holomorfía θ entre los espacios de Banach X e Y es una sucesión de espacios de Banach $(\mathcal{P}_\theta({}^nX;Y), \|\cdot\|_\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que*

1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_\theta({}^nX;Y)$ es un subespacio de $\mathcal{P}({}^nX;Y)$.*

2. *$\mathcal{P}_\theta({}^0X;Y) = \mathcal{P}({}^0X;Y) = Y$.*

3. *Existe una constante $c \geq 1$ tal que, para todo $x \in X$, $n, m \in N$, $m \leq n$ y $P \in \mathcal{P}_\theta({}^nX;Y)$*

$$D_x^m P \in \mathcal{P}_\theta({}^mX;Y) \quad \text{y} \quad \|D_x^m P\|_\theta \leq c^n \|P\|_\theta \|x\|^{n-m},$$

   donde $D_x^m P = P^m P(x)$ es el polinomio m-homogéneo del desarrollo de Taylor de P en x.

Para todo espacio de Banach X e Y, la sucesión $(P({}^nX;Y), \|\cdot\|)_n$ es un tipo de holomorfía y se denomina *tipo de holomorfía usual.* La sucesión $(\mathcal{P}_\mathcal{K}({}^nX;Y), \|\cdot\|)_n$ también es un tipo de holomorfía. Una demostración de este resultado conocido es similar a la que damos a continuación.

Proposición 4.3.2. *Sea $\mathcal{A}$ un ideal de Banach. Para todo par de espacios de Banach X e Y, la sucesión $(\mathcal{P}_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}({}^nX;Y), \|\cdot\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}})_n$ es un tipo de holomorfía.*

Demostración: Como $\mathcal{P}_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}({}^nX;Y)$ es un subespacio de $\mathcal{P}({}^nX;Y)$ y $\mathcal{P}_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}({}^0X;Y) = Y$, las dos primeras condiciones de la definición de tipo de holomorfía se cumplen. Por lo tanto, sólo tenemos que comprobar que la sucesión $(\mathcal{P}_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}({}^nX;Y), \|\cdot\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}})_n$ satisface la tercera condición. Notemos que por el Ejemplo A de la página 89, tenemos para todo polinomio $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}({}^nX;Y)$, $m \leq n$ y $x_0 \in X$ que,

$$P^m P(x_0) = \binom{n}{m} P_{x_0^{n-m}}$$

y, por el Lema 3.1.3, $P^m P(x_0)$ es un polinomio $\mathcal{A}$-compacto. Por último, para ver que se satisface la estructura de un tipo de holomorfía, mostraremos que para $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}({}^nX;Y)$, $m = 1, \ldots, n$ y $x_0 \in X$ se cumple

$$\|P^m P(x_0)\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}} \leq (2e)^n \|P\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}} \|x_0\|^{m-j}. \tag{4.7}$$

Es claro que la desiguladad anterior vale para $x_0 = 0$. Fijemos $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. Si vemos que $\|P_{x_0}\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}} \leq e\|x_0\|\|P\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}$ la demostración se concluye usando un razonamiento inductivo. En efecto, supongamos que para cualquier polinomio homogéneo $\mathcal{A}$-compacto Q, de grado menor a n, vale la desigualdad $\|Q_{x_0}\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}} \leq e\|x_0\|\|Q\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}$. Entonces, como $P_{x_0^{n-m}} = (P_{x_0^{n-m-1}})_{x_0}$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|P^m P(x_0)\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}} &= \tbinom{n}{n-m}\|P_{x_0^{n-m}}\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}} = \tbinom{n}{n-m}\|(P_{x_0^{n-m-1}})_{x_0}\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}} \\
&\leq \tbinom{n}{n-m} e\|x_0\|\|P_{x_0^{n-m-1}}\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}} \\
&\leq \tbinom{n}{n-m} e^2\|x_0\|^2\|P_{x_0^{n-m-2}}\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}} \\
&\quad\vdots \\
&\leq \tbinom{n}{n-m} e^{n-m}\|x_0\|^{n-m}\|P\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}} \\
&\leq 2^n e^n \|x_0\|^{n-m}\|P\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}.
\end{aligned}$$

Ahora, sea $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}(^nX;Y)$. Luego

$$\|P_{x_0}\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}} = m_\mathcal{A}(\overset{\vee}{P}(x_0, B_X^{n-1});Y) = \|x_0\| m_\mathcal{A}(\overset{\vee}{P}(\tfrac{x_0}{\|x_0\|}, B_X^{n-1});Y). \tag{4.8}$$

Si ξ una raíz n-ésima de la unidad tal que $\xi^j \neq 1$ para todo $j < n$, por [CDM, Corollary 1.8 (b)] y la Proposición 1.1.9 tenemos que

$$\|x_0\| m_\mathcal{A}(\overset{\vee}{P}(\frac{x_0}{\|x_0\|}, B_X^{n-1});Y) \leq \frac{\|x_0\|}{n^2(n-1)^{n-1}} \sum_{j=1}^{n-1} m_\mathcal{A}(P((n-1)\xi^j B_X + \tfrac{x_0}{\|x_0\|});Y).$$

Como para todo $j < n$, $\sup\{\|x\| \colon\ x \in (n-1)\xi^j B_X + \frac{x_0}{\|x_0\|}\} = n$ vale

$$(n-1)\xi^j B_X + \frac{x_0}{\|x_0\|} \subset nB_X,$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\|x_0\|}{n^2(n-1)^{n-1}} \sum_{j=1}^{n-1} m_\mathcal{A}(P((n-1)\xi^j B_X + \tfrac{x_0}{\|x_0\|});Y) &\leq \tfrac{\|x_0\|}{n^2(n-1)^{n-1}} \sum_{j=1}^{n-1} n^n m_\mathcal{A}(P(B_X);Y) \\
&\leq \|x_0\|(\tfrac{n}{n-1})^{n-1}\|P\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}} \leq e\|x_0\|\|P\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Combinando (4.8) y (4.9) obtenemos que $\|P_a\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}} \leq e\|a\|\|P\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}$, como queríamos. □

Observación. Al tipo de holomorfía dado por la sucesión de polinomios $\mathcal{A}$-compactos la denominaremos tipo de holomorfía $\mathcal{K}_\mathcal{A}$.

La definición de tipo de holomorfía induce, de forma natural, distintos espacios de funciones holomorfas.

Definición 4.3.3. *Sean X e Y espacios de Banach y $x \in X$ y θ un tipo de holomorfía. Una función $f \in \mathcal{H}(X;Y)$ es de tipo θ en x si para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$P^n f(x) \in \mathcal{P}_\theta(^nX;Y) \quad \text{y} \quad \|P^n f(x)\|_\theta \leq c_1 c_2^n$$

para algunas constantes positivas c_1 y c_2. Una función es de tipo θ si lo es para todo $x \in X$. Al espacio de funciones holomorfas de X en Y de tipo θ se lo denota $\mathcal{H}_\theta(X;Y)$.

Proposición 4.3.4. *Sean X e Y espacios de Banach, $x \in X$, $\mathcal{A}$ un ideal de Banach y f una función en $\mathcal{H}(X;Y)$. Entonces, f es $\mathcal{A}$-compacta en x si y sólo si f es de tipo $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$ en x. Como consecuencia, $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(X;Y)$ si y sólo si f es de tipo de holomorfía $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$.*

Demostración: Sea $x \in X$ y tomemos una función $f \in \mathcal{H}(X;Y)$ $\mathcal{A}$-compacta en x. Veamos que f es de tipo de holomorfía $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$ en x. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $f(x+\varepsilon B_X)$ es un conjunto $\mathcal{A}$-compacto en Y que, por la Proposición 3.2.7, para todo $n \in \mathbb{N}$, $P^n f(x)$ es $\mathcal{A}$-compacto y, como por el Lema 3.2.4 $P^n f(x)(\varepsilon B_X) \subset \overline{\mathrm{co}\{f(x+\varepsilon B_X)\}}$, aplicando la Proposición 1.1.9 tenemos que

$$\|P^n f(x)\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} = \varepsilon^n m_{\mathcal{A}}(P^n f(x)(\varepsilon B_X);Y) \leq \varepsilon^n m_{\mathcal{A}}(f(x+\varepsilon B_X);Y).$$

Como $m_{\mathcal{A}}(f(x+\varepsilon B_X);Y) < \infty$, resulta que f es de tipo de holomorfía $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$ en x.

Recíprocamente, si f es de tipo $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$ en x, para todo $n \in \mathbb{N}$, $P^n f(x) \in \mathcal{P}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}$ y $\|P^n f(x)\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} \leq c_1 c_2^n$, donde $c_1 > 0$ y $c_2 > 0$. Como

$$\limsup \|P^n f(x)\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}^{1/n} \leq c_2,$$

tenemos que el radio de $\mathcal{A}$-compacidad de f en x es positivo. Una aplicación de la Proposición 3.2.7 muestra que f es $\mathcal{A}$-compacta en x, concluyendo la demostración. □

Siguiendo [Nac1], [Nac2] o [Nac3] por ejemplo, existe una forma natural de dotar al espacio de funciones holomorfas de tipo θ de una topología. Esta topología puede describirse por varias familias de seminormas, dependiendo del tipo de holomorfía θ. En el caso particular del tipo de holomorfía usual, esta topología es la topología de Nachbin, τ_ω. Aunque en esta teoría, la usaremos para dotar al espacio de funciones holomorfas $\mathcal{A}$-compactas de una topología, denotada $\tau_{\omega,m_{\mathcal{A}}}$. La familia de seminormas usuales de $\tau_{\omega,m_{\mathcal{A}}}$ corresponde a la familia dada en el Teorema 4.3.6, ítem (b). Como nuestro objetivo es caracterizar la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación de un espacio de Banach X en forma análoga a [AS, Theorem 4.1], daremos distintas descripciones de $\tau_{\omega,m_{\mathcal{A}}}$.

Proposición 4.3.5. *Sean X e Y espacios de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal de Banach. Entonces, $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(X;Y)$ si y sólo si para todo $n \in \mathbb{N}$, $P^n f(0) \in \mathcal{P}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(^n X;Y)$ y, para todo conjunto absolutamente convexo compacto $K \subset X$, existe $\varepsilon > 0$ tal que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_{\mathcal{A}}(P^n f(0)(K+\varepsilon B_X);Y) < \infty.$$

Demostración: Sean $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(X;Y)$ y $K \subset X$ un conjunto absolutamente convexo compacto. Como f es $\mathcal{A}$-compacta y el conjunto $2K$ es compacto, por el Lema 4.2.1, existe un conjunto abierto $V \supset 2K$ tal que $f(V)$ es $\mathcal{A}$-compacto en Y. Al ser $2K$ compacto y V abierto, podemos tomar $d = \text{dist}(2K, \mathcal{C}V) > 0$, donde $\mathcal{C}V$ es el complemento de V. Consideremos el conjunto $W = 2K + dB_X$, que es absolutamente convexo abierto y cumple que $2K \subset W \subset V$, por lo que $f(W)$ es un conjunto $\mathcal{A}$-compacto. Combinando las Proposiciones 1.1.9 y 3.2.4 tenemos que $m_{\mathcal{A}}(P^n f(0)(W); Y) \leq m_{\mathcal{A}}(f(W); Y)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} m_{\mathcal{A}}(P^n f(0)(K + \tfrac{d}{2}B_X); Y) = & \sum_{n=0}^{\infty} (\tfrac{1}{2})^n m_{\mathcal{A}}(P^n f(0)(W); Y) \\ \leq & \sum_{n=0}^{\infty} (\tfrac{1}{2})^n m_{\mathcal{A}}(f(W); Y) \\ \leq & \; 2m_{\mathcal{A}}(f(W); Y) < \infty, \end{aligned} \tag{4.10}$$

lo que prueba la primera implicación.

Recíprocamente, sea $f \in \mathcal{H}(X; Y)$ satisfaciendo la condición del enunciado. Vamos a mostrar que f es $\mathcal{A}$-compacta en x para cualquier $x \in X$ fijo. Consideremos el conjunto absolutamente convexo compacto K dado por $K = \{\lambda x \colon |\lambda| \leq 1\}$. Luego, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_{\mathcal{A}}(P^n f(0)(K + \varepsilon_1 B_X); Y) < \infty.$$

Como f es entera, por [Nac2, Proposition 1, p.26], existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n f(0)(y),$$

donde la convergencia es uniforme para todo $y \in x + \varepsilon_2 B_X$. Así, tomando $\varepsilon = \text{mín}\{\varepsilon_1; \varepsilon_2\}$, tenemos que

$$f(x + \varepsilon B_X) \subset \{\sum_{n=0}^{\infty} x_n \colon x_n \in P^n f(0)(x + \varepsilon B_X)\}.$$

Además, como

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_{\mathcal{A}}(P^n f(0)(x + \varepsilon B_X); Y) \leq \sum_{n=0}^{\infty} m_{\mathcal{A}}(P^n f(0)(K + \varepsilon_1 B_X); Y) < \infty,$$

por el Lema 3.2.6, el conjunto $\{\sum_{n=0}^{\infty} x_n \colon x_n \in P^n f(0)(x + \varepsilon B_X)\}$ es relativamente $\mathcal{A}$-compacto. Por lo tanto f es $\mathcal{A}$-compacta en x, finalizando la demostración. $\square$

La siguiente caracterización de la topología $\tau_{\omega, m_{\mathcal{A}}}$ en el espacio $\mathcal{H}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}$, asociada al tipo de holomorfía $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$ se sigue de [Din1, Proposition 4] y [Nac2].

Teorema 4.3.6. *Sean X e Y espacios de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal de Banach. Cualquiera de las siguientes familias de seminormas genera la misma topología en $\mathcal{H}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(X; Y)$,*

(a) *Las seminormas q que satisacen que existe un conjunto $K \subset X$ absolutamente convexo compacto tal que, abierto $V \supset K$ existe $C_V > 0$ con*

$$q(f) \leq C_V \mathfrak{m}_{\mathcal{A}}(f(V);Y) \quad \forall f \in \mathcal{H}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(X;Y).$$

En este caso, decimos que la seminorma q está AC-$\mathfrak{m}_{\mathcal{A}}$-portada por conjuntos absolutamente convexos compactos.

(b) *Las seminormas q que satisacen que existe un conjunto absolutamente convexo compacto $K \subset X$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$ existe $C(\varepsilon) > 0$ con*

$$q(f) \leq C(\varepsilon) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \sup_{x \in K} \|P^n f(x)\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} \quad \forall f \in \mathcal{H}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(X;Y).$$

(c) *Las seminormas q que satisacen que existe un conjunto absolutamente convexo compacto $K \subset X$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$ existe $C(\varepsilon) > 0$ con*

$$q(f) \leq C(\varepsilon) \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}_{\mathcal{A}}(P^n f(0)(K + \varepsilon B_X);Y) \quad \forall f \in \mathcal{H}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(X;Y).$$

(d) *Las seminormas q de la forma*

$$q(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}_{\mathcal{A}}(P^n f(0)(K + a_n B_X);Y),$$

donde $K \subset X$ varía entre los conjuntos absolutamente convexos compactos y $(a_n)_n \in c_0^+$.

Demostración: Primero notemos que si f es $\mathcal{A}$-compacta y K es un conjunto absolutamente convexo compacto, por el Lema 4.2.1, existe un conjunto abierto $V \supset K$ tal que $f(V)$ es $\mathcal{A}$-compacto. Por lo tanto, las seminormas en (a) están bien definidas sobre $\mathcal{H}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(X;Y)$. Además, por la Proposición 4.3.5, las seminormas en (c) y en (d) están bien definidas sobre $\mathcal{H}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(X;Y)$.

Veamos que las seminormas en (a) y (b) coinciden. Sean q una seminorma y K un conjunto absolutamente convexo compacto satisfciendo la condición (c). Sea $V \supset K$ un conjunto abierto y, como V es abierto y K compacto, podemos considerar el número positivo $d = \mathrm{dist}(K, \mathcal{C}V) > 0$. Al ser $K + dB_X$ absolutamente convexo y $K + dB_X \subset V$, por el Lema 3.2.4, junto con la Proposición 1.1.9, tenemos que

$$\mathfrak{m}_{\mathcal{A}}(P^n f(x)(dB_X);Y) \leq \mathfrak{m}_{\mathcal{A}}(f(x + dB_X);Y) \leq \mathfrak{m}_{\mathcal{A}}(f(V);Y),$$

para todo $x \in K$ y $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(X;Y)$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$d^n \sup_{x \in K} \|P^n f(x)\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} \leq \mathfrak{m}_{\mathcal{A}}(f(V)).$$

Por lo tanto,

$$q(f) \leq C(\tfrac{d}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} (\tfrac{d}{2})^n \sup_{x\in K} \|P^n f(x)\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}} \leq 2C(\tfrac{d}{2}) m_\mathcal{A}(f(V);Y),$$

lo que muestra que q es AC-$m_\mathcal{A}$-portada por K.

Para la otra implicación, tomemos una seminorma q AC-$m_\mathcal{A}$-portada por un conjunto absoultamente convexo compacto $K \subset X$. Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos $x_1, \ldots, x_m$ en K tales que $K \subset V$ donde $V = \bigcup_{j=1}^m x_j + \varepsilon B_X$. De la misma forma que en la Proposición 4.3.5, existe un conjunto W absolutamente convexo abierto tal que $K \subset W \subset V$. Sin pérdida de generalidad, podemos tomar $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}(X;Y)$ tal que $\varepsilon < r_\mathcal{A}(f,x)$ para todo $x \in K$ ya que, si $\varepsilon \geq r_\mathcal{A}(f,x)$, entonces $\sum_{m\geq 0} \varepsilon^m \sup_{x\in K} \|P_m f(x)\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}} = \infty$. Por el Corolario 3.2.8, se tiene que

$$m_\mathcal{A}(f(x_j + \varepsilon B_X);Y) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \|P^n f(x_j)\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \sup_{x\in K} \|P^n f(x)\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}. \tag{4.11}$$

Por otro lado, como q es AC-$m_\mathcal{A}$-portada por K, aplicando la Proposición 1.1.9 tenemos que

$$q(f) \leq C_W m_\mathcal{A}(f(W);Y) \leq C_W m_\mathcal{A}(f(V);Y) \leq \sum_{j=1}^{m} m_\mathcal{A}(f(x_j + \varepsilon B_X);Y). \tag{4.12}$$

Así, de las inecuaciones (4.11) y (4.12), obtenemos

$$\begin{aligned} q(f) &\leq C_W \sum_{j=1}^{n} m_\mathcal{A}(f(x_j + \varepsilon B_X);Y) \\ &\leq C_W \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \sup_{x\in K} \|P_m f(x)\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}} \\ &= nC_W \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \sup_{x\in K} \|P_m f(x)\|_{\mathcal{K}_\mathcal{A}}. \end{aligned}$$

Luego q pertenece a la familias de seminormas dadas en (b).

De [Din1, Proposition 4], tenemos que las seminormas de (c) y (d) generan la misma topología. Veamos que las seminormas en (c) y (b) son equivalentes. De la misma forma que hicimos para obtener la inecuación (4.10), tenemos que las seminormas en (c) son AC-$m_\mathcal{A}$-portadas por conjuntos absolutamente convexos compactos.

Para finzalizar la demostración, consideremos una seminorma q AC-$m_\mathcal{A}$-portada por un conjunto $K \subset X$ absolutamente convexo compacto y veamos que q está acotada superiormente por una seminorma de la familia dada en (d). Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea W_m un conjunto absolutamente convexo abierto definido por

$$W_m = K + \Big(\frac{1}{2}\Big)^m B_X.$$

Como q es AC-$m_{\mathcal{A}}$-portada por K, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe una constante $C_m = C_{W_m}$ tal que $q(f) \leq C_m m_{\mathcal{A}}(f(W_m); Y)$, para toda función $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(X; Y)$.

Para $m = 1$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n > n_1$, $C_1^{1/n} < 2$. Tomemos $V_1 = 2W_1$. Si $n > n_1$ y $Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(^nX; Y)$,

$$q(Q) \leq C_1 m_{\mathcal{A}}(Q(W_1); Y) = m_{\mathcal{A}}(Q(C_1^{1/n} W_1); Y) \leq m_{\mathcal{A}}(Q(V_1); Y).$$

Para $m = 2$, existe $n_2 > n_1$ tal que $C_2^{1/n} \leq 2$, para todo $n > n_2$. Tomemos $V_2 = 2W_2$ y, como antes, se tiene que para todo $Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(^nX; Y)$, con $n > n_2$,

$$q(Q) \leq C_2 m_{\mathcal{A}}(Q(W_2); Y) = m_{\mathcal{A}}(Q(C_2^{1/n} W_2); Y) \leq m_{\mathcal{A}}(Q(V_2); Y).$$

Repitiendo este procedimiento, obtenemos una sucesión de conjuntos absolutamente convexos abiertos V_j que satisfacen

$$\begin{aligned} q(f) &= q(\textstyle\sum_{n\geq 0} P^n f(0)) \\ &\leq \sum_{n\geq 0} q(P^n f(0)) \\ &= \sum_{n<n_1} q(P^n f(0)) + \sum_{j\geq 1} \sum_{n_j \leq n < n_{j+1}} q(P^n f(0)) \\ &\leq C_{V_1} \sum_{n<n_1} m_{\mathcal{A}}(P^n f(0)(V_1); Y) + \sum_{j\geq 1} \sum_{n_j \leq n < n_{j+1}} m_{\mathcal{A}}(P^n f(0)(V_j); Y) \\ &\leq C \left(\sum_{n<n_1} m_{\mathcal{A}}(P^n f(0)(V_1); Y) + \sum_{j\geq 1} \sum_{n_j \leq n < n_{j+1}} m_{\mathcal{A}}(P^n f(0)(V_j); Y) \right) \end{aligned}$$

donde $C = \text{mín}\{1, C_{V_1}\}$. El resultado se obtiene ya que $V_j = 2K + (\frac{1}{2})^{j-1} B_X$ y, por lo tanto, la seminorma q esta acotada superiormente por una seminorma de la familia definida en (d), concluyendo la demostración. $\square$

Observación. La topología en $\mathcal{H}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}$ generada por cualquiera de las familias de seminormas anteriores la denotamos $\tau_{\omega, m_{\mathcal{A}}}$.

4.4. Funciones holomorfas y la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación

Para finalizar, veremos como afecta la presencia de la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación de un espacio de Banach X en el espacio de polinomios y funciones holomorfas $\mathcal{A}$-compactas con valores en X. El siguiente resultado es el análogo al obtenido por Aron y Schottenloher en [AS, Theorem 4.1] para funciones compactas y en cierta forma, es el análogo holomorfo a la definición de $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación.

Teorema 4.4.1. *Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{A}$ un ideal de Banach. Son equivalentes:*

(i) *X tiene la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación.*

(ii) *Para todo espacio de Banach Y, $\mathcal{H}(Y) \otimes X$ es $\tau_{\omega,m_{\mathcal{A}}}$-denso en $\mathcal{H}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(Y;X)$.*

Demostración: Tomemos un espacio de Banach X con la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación, $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(X;Y)$, q una seminorma $\tau_{\omega,m_{\mathcal{A}}}$ continua y $\varepsilon > 0$. Por el Teorema 4.3.6, podemos considerar la seminorma de la forma

$$q(f) = \sum_{n=0}^{\infty} m_{\mathcal{A}}(P^n f(0)(K + a_n B_X); Y),$$

donde $K \subset Y$ es un conjunto absolutamente convexo compacto y $(a_n)_n \in c_0^+$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n>n_0} m_{\mathcal{A}}(P^n f(0)(K + a_n B_X); Y) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

y sea $C > 0$ tal que $\frac{1}{C}(K + a_n B_Y) \subset B_Y$, para todo $n \leq n_0$. Como X tiene la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación, por la Proposición 4.1.6, dado $\delta > 0$ (a determinar), para todo $n \leq n_0$, existen polinomios $Q_n \in \mathcal{P}(^nY) \otimes X$ tales que $\|P^n f(0) - Q_n\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} \leq \delta$. Definamos a la funcion holomorfa $g = \sum_{n=0}^{n_0} Q_n$. Claramente, $g \in \mathcal{H}(Y) \otimes X$ y además,

$$\begin{aligned} q(f-g) &= \sum_{n=0}^{n_0} m_{\mathcal{A}}((P^n f(0) - Q_n)(K + a_n B_Y); X) + \sum_{n>n_0} m_{\mathcal{A}}(P^n f(0)(K + a_n B_Y); X) \\ &\leq \sum_{n=0}^{n_0} C^n \|P^n f(0) - Q_n\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} + \tfrac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Luego, $q(f-g) < \varepsilon$ eligiendo δ de forma adecuada, con lo que obtenemos (ii).

Por último, supongamos que vale (i) y tomemos $T \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Y;X)$, $\varepsilon > 0$ y la seminorma en $\mathcal{H}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(Y;X)$ definida por $q(f) = \|P^1 f(0)\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}$. Por el Teorema 4.3.6, ítem (b), la seminorma q es $\tau_{\omega,m_{\mathcal{A}}}$ continua y, por lo tanto como $T \in \mathcal{H}_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(X;Y)$, existen $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{H}(Y)$ y $x_1, \ldots, x_n \in X$ si $g(y) = \sum_{j=1}^n f_j(y) x_j$, entonces $q(T-g) < \varepsilon$. De la misma forma que hicimos en (iii) implica (i) del Teorema 4.2.4, el operdado $P^1 g(0) = \sum_{j=1}^n P^1 f_j(0) \otimes x_j \in \mathcal{F}(Y;X)$ y como

$$q(T-g) = \|T - P^1 g(0)\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}} \leq \varepsilon,$$

concluimos que $\mathcal{F}(Y;X)$ es $\|\cdot\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}$-denso en $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(Y,X)$ y, por lo tanto, X tiene la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$-propiedad de aproximación. □

Bibliografía

[AB] R. Aron y P. Berner. A Hahn-Banach extension theorem for analytic mappings. *Bull. Soc. Math. France*, 106(1):3–24, 1978.

[ALO] K. Ain, R. Lillemets, y E. Oja. Compact operators which are defined by ℓ_p-spaces. *Quaest. Math.*, 35(2):145–159, 2012.

[AMR] R. Aron, M. Maestre, y P. Rueda. p-compact holomorphic mappings. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM*, 104(2):353–364, 2010.

[AR1] R. Aron y P. Rueda. I- bounded holomorphic functions. Preprint.

[AR2] R. Aron y P. Rueda. p-compact homogeneous polynomials from an ideal point of view. In *Function spaces in modern analysis*, volume 547 of *Contemp. Math.*, pages 61–71. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.

[AR3] R. Aron y P. Rueda. Ideals of homogeneous polynomials. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 48(4):957–969, 2012.

[Are] R. Arens. The adjoint of a bilinear operation. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2:839–848, 1951.

[AS] R. Aron y M. Schottenloher. Compact holomorphic mappings on Banach spaces and the approximation property. *J. Functional Analysis*, 21(1):7–30, 1976.

[BÇM] G. Botelho, E. Çalışkan, y G. Moraes. The polynomial dual of an operator ideal. *Monatsh. Math.*, 173(2):161–174, 2014.

[BDR] C. Boyd, S. Dineen, y P. Rueda. Weakly uniformly continuous holomorphic functions and the approximation property. *Indag. Math. (N.S.)*, 12(2):147–156, 2001.

[BM] K. Bierstedt y R. Meise. Bemerkungen über die Approximations-eigenschaft lokalkonvexer Funktionenräume. *Math. Ann.*, 209:99–107, 1974.

[BPR] G. Botelho, D. Pellegrino, y P. Rueda. On composition ideals of multilinear mappings and homogeneous polynomials. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 43(4):1139–1155, 2007.

[Çal1] E. Çalışkan. The bounded approximation property for spaces of holomorphic mappings on infinite dimensional spaces. *Math. Nachr.*, 279(7):705–715, 2006.

[Çal2] E. Çalişkan. Ideals of homogeneous polynomials and weakly compact approximation property in Banach spaces. *Czechoslovak Math. J.*, 57(132)(2):763–776, 2007.

[Cas] P. Casazza. Approximation properties. In *Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. I*, pages 271–316. North-Holland, Amsterdam, 2001.

[CDM] D. Carando, V. Dimant, y S. Muro. Coherent sequences of polynomial ideals on Banach spaces. *Math. Nachr.*, 282(8):1111–1133, 2009.

[CK] Y. S. Choi y J. M. Kim. The dual space of $(\mathcal{L}(X,Y),\tau_p)$ and the p-approximation property. *J. Funct. Anal.*, 259(9):2437–2454, 2010.

[CS] B. Carl y I. Stephani. On A-compact operators, generalized entropy numbers and entropy ideals. *Math. Nachr.*, 119:77–95, 1984.

[DF] A. Defant y K. Floret. *Tensor norms and operator ideals*, volume 176 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1993.

[DFJP] W. Davis, T. Figiel, W. Johnson, y A. Pełczyński. Factoring weakly compact operators. *J. Functional Analysis*, 17:311–327, 1974.

[DFS] J. Diestel, J. Fourie, y J. Swart. *The metric theory of tensor products.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2008. Grothendieck's résumé revisited.

[DG] A. Davie y T. Gamelin. A theorem on polynomial-star approximation. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 106(2):351–356, 1989.

[Din1] S. Dineen. Holomorphy types on a Banach space. *Studia Math.*, 39:241–288. (errata insert), 1971.

[Din2] S. Dineen. *Complex analysis in locally convex spaces*, volume 57 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1981. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 83.

[Din3] S. Dineen. *Complex analysis on infinite-dimensional spaces.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag London, Ltd., London, 1999.

[DJT] J. Diestel, H. Jarchow, y A. Tonge. *Absolutely summing operators*, volume 43 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[DM1] S. Dineen y J. Mujica. The approximation property for spaces of holomorphic functions on infinite dimensional spaces. I. *J. Approx. Theory*, 126(2):141–156, 2004.

[DM2] S. Dineen y J. Mujica. The approximation property for spaces of holomorphic functions on infinite dimensional spaces. II. *J. Funct. Anal.*, 259(2):545–560, 2010.

[DM3] S. Dineen y J. Mujica. The approximation property for spaces of holomorphic functions on infinite dimensional spaces. III. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM*, 106(2):457–469, 2012.

[DOPS] J. Delgado, E. Oja, C. Piñeiro, y E. Serrano. The p-approximation property in terms of density of finite rank operators. *J. Math. Anal. Appl.*, 354(1):159–164, 2009.

[DP1] J. Delgado y C. Piñeiro. p-convergent sequences and Banach spaces in which p-compact sets are q-compact. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 139(3):957–967, 2011.

[DP2] J. Delgado y C. Piñeiro. An approximation property with respect to an operator ideal. *Studia Math.*, 214(1):67–75, 2013.

[DPS1] J. Delgado, C. Piñeiro, y E. Serrano. Density of finite rank operators in the Banach space of p-compact operators. *J. Math. Anal. Appl.*, 370(2):498–505, 2010.

[DPS2] J. Delgado, C. Piñeiro, y E. Serrano. Operators whose adjoints are quasi p-nuclear. *Studia Math.*, 197(3):291–304, 2010.

[DS] N. Dunford y J. Schwartz. *Linear operators. Part I.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988. General theory, With the assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle, Reprint of the 1958 original, A Wiley-Interscience Publication.

[Enf] P. Enflo. A counterexample to the approximation problem in Banach spaces. *Acta Math.*, 130:309–317, 1973.

[Fig] T. Figiel. Factorization of compact operators and applications to the approximation problem. *Studia Math.*, 45:191–210. (errata insert), 1973.

[FJ] T. Figiel y W. Johnson. The approximation property does not imply the bounded approximation property. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 41(1):197–200, 1973.

[GLT] D. Galicer, S. Lassalle, y P. Turco. The ideal of p-compact operators: a tensor product approach. *Studia Math.*, 211(3):269–286, 2012.

[Gro1] A. Grothendieck. Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques. *Bol. Soc. Mat. São Paulo*, 8:1–79, 1953.

[Gro2] A. Grothendieck. Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 1955(16):140, 1955.

[Jos] B. Josefson. Weak sequential convergence in the dual of a Banach space does not imply norm convergence. *Ark. Mat.*, 13:79–89, 1975.

[Köt1] G. Köthe. *Topological vector spaces. I.* Translated from the German by D. J. H. Garling. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 159. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.

[Köt2] G. Köthe. *Topological vector spaces. II*, volume 237 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Science]*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1979.

[Kwa] S. Kwapień. On a theorem of L. Schwartz and its applications to absolutely summing operators. *Studia Math.*, 38:193–201. (errata insert), 1970.

[LNO] Å. Lima, O. Nygaard, y E. Oja. Isometric factorization of weakly compact operators and the approximation property. *Israel J. Math.*, 119:325–348, 2000.

[LT1] S. Lassalle y P. Turco. On p-compact mappings and the p-approximation property. *J. Math. Anal. Appl.*, 389(2):1204–1221, 2012.

[LT2] S. Lassalle y P. Turco. The Banach ideal of $\mathcal{A}$-compact operators and related approximation properties. *J. Funct. Anal.*, 265(10):2452–2464, 2013.

[LT3] J. Lindenstrauss y L. Tzafriri. *Classical Banach spaces. I.* Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977. Sequence spaces, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Vol. 92.

[Mau] R. Mauldin, editor. *The Scottish Book.* Birkhäuser, Boston, Mass., 1981. Mathematics from the Scottish Café, Including selected papers presented at the Scottish Book Conference held at North Texas State University, Denton, Tex., May 1979.

[Muj1] J. Mujica. *Complex analysis in Banach spaces*, volume 120 of *North-Holland Mathematics Studies.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1986. Holomorphic functions and domains of holomorphy in finite and infinite dimensions, Notas de Matemática [Mathematical Notes], 107.

[Muj2] J. Mujica. Linearization of bounded holomorphic mappings on Banach spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 324(2):867–887, 1991.

[Muj3] J. Mujica. Linearization of holomorphic mappings of bounded type. In *Progress in functional analysis (Peñíscola, 1990)*, volume 170 of *North-Holland Math. Stud.*, pages 149–162. North-Holland, Amsterdam, 1992.

[Nac1] L. Nachbin. On the topology of the space of all holomorphic functions on a given open subset. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 70=Indag. Math.*, 29:366–368, 1967.

[Nac2] L. Nachbin. *Topology on spaces of holomorphic mappings.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 47. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.

[Nac3] L. Nachbin. Concerning holomorphy types for Banach spaces. *Studia Math.*, 38:407–412. (errata insert), 1970.

[Nis] A. Nissenzweig. W^* sequential convergence. *Israel J. Math.*, 22(3-4):266–272, 1975.

[Oer] F. Oertel. Compositions of operator ideals and their regular hulls. *Acta Univ. Carolin. Math. Phys.*, 36(2):69–72, 1995. 23rd Winter School on Abstract Analysis (Lhota nad Rohanovem, 1995; Poděbrady, 1995).

[Oja1] E. Oja. On bounded approximation properties of Banach spaces. In *Banach algebras 2009*, volume 91 of *Banach Center Publ.*, pages 219–231. Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2010.

[Oja2] E. Oja. Inner and outer inequalities with applications to approximation properties. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 363(11):5827–5846, 2011.

[Oja3] E. Oja. Grothendieck's nuclear operator theorem revisited with an application to p-null sequences. *J. Funct. Anal.*, 263(9):2876–2892, 2012.

[Peł] A. Pełczyński. On some problems of Banach. *Uspehi Mat. Nauk*, 28(6(174)):67–75, 1973. Translated G.G. Gould.

[Pie1] A. Pietsch. *Operator ideals*, volume 20 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1980. Translated from German by the author.

[Pie2] A. Pietsch. *History of Banach spaces and linear operators*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007.

[Pie3] A. Pietsch. The ideal of p-compact operators and its maximal hull. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 142(2):519–530, 2014.

[PP] A. Persson y A. Pietsch. p-nukleare une p-integrale Abbildungen in Banachräumen. *Studia Math.*, 33:19–62, 1969.

[RR] A. Robertson y W. Robertson. *Topological vector spaces*. Cambridge University Press, London-New York, second edition, 1973. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 53.

[Rya1] R. Ryan. Weakly compact holomorphic mappings on Banach spaces. *Pacific J. Math.*, 131(1):179–190, 1988.

[Rya2] R. Ryan. *Introduction to tensor products of Banach spaces*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2002.

[Sch1] H. Schaefer. *Topological vector spaces*. The Macmillan Co., New York; Collier-Macmillan Ltd., London, 1966.

[Sch2] L. Schwartz. Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques. *Exp. 14, Séminaire 1953/54*.

[Sch3] L. Schwartz. Théorie des distributions à valeurs vectorielles. I. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 7:1–141, 1957.

[SK1] D. Sinha y A. Karn. Compact operators whose adjoints factor through subspaces of l_p. *Studia Math.*, 150(1):17–33, 2002.

[SK2] D. Sinha y A. Karn. Compact operators which factor through subspaces of l_p. *Math. Nachr.*, 281(3):412–423, 2008.

[Sza1] A. Szankowski. Subspaces without the approximation property. *Israel J. Math.*, 30(1-2):123–129, 1978.

[Sza2] A. Szankowski. $B(\mathcal{H})$ does not have the approximation property. *Acta Math.*, 147(1-2):89–108, 1981.

[TJ] N. Tomczak-Jaegermann. *Banach-Mazur distances and finite-dimensional operator ideals*, volume 38 of *Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics.* Longman Scientific & Technical, Harlow; copublished in the United States with John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

Índice alfabético