Biblioteca Digital F C E N - U B A

BIBLIOTECA CENTRAL LUIS F LELOIR BIBLIOTECA CENTRAL LELOIR FACULTAD DE CIEN<u>CIAS EXACTAS Y NATURALES UBA</u>

Tesis Doctoral

Comportamiento singular de las amplitudes de scattering en el límite colineal

Sborlini, Germán Fabricio Roberto

2014-09-03

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Sborlini, Germán Fabricio Roberto. (2014-09-03). Comportamiento singular de las amplitudes de scattering en el límite colineal. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

Cita tipo Chicago:

Sborlini, Germán Fabricio Roberto. "Comportamiento singular de las amplitudes de scattering en el límite colineal". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2014-09-03.

EXACTAS Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA Universidad de Buenos Aires

Dirección: Biblioteca Central Dr. Luis F. Leloir, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA - Tel. (++54 +11) 4789-9293 Contacto: digital@bl.fcen.uba.ar



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES Facultad de Ciencias Exactas y Naturales Departamento de Física

Comportamiento singular de las amplitudes de scattering en el límite colineal

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Físicas

Germán Fabricio Roberto Sborlini

Director de tesis: Dr. Daniel de Florian

Consejero de Estudios: Dr. Rodolfo Sassot

Lugar de Trabajo: Depto. de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA

Agosto de 2014

Comportamiento singular de las amplitudes de scattering en el límite colineal

GFR Sborlini Departamento de Física, FCEN, UBA Agosto, 2014

ABSTRACT

Singular behaviour of scattering amplitudes in the collinear limit

Modern particle accelerators allow to obtain highly-accurate experimental results. As the summit example, we can consider the LHC, which recently allowed to discover a new particle whose properties are compatible with Higgs boson. In order to better understand the origin of this particle as well as many other phenomena in high-energy physics, a huge effort is being done to improve experimental measures. For this reason, theoretical predictions have to be done with a compatible accuracy level, since that is relevant to perform a comparison among available models and experimental data.

Working from the theoretical point of view, the main motivation of this thesis is the study of methods to perform accurate computations in the context of perturbation theory applied to the standard model. In particular, we restrict ourselves to the analysis of the collinear limit of scattering amplitudes in gauge theories, up to *next-to-leading order* (NLO). The factorization theorems assert that, in some general kinematic configurations, it is possible to obtain a universal description of the divergent behaviour of scattering amplitudes in the collinear limit. This behaviour is controlled by the so-called *splitting functions* or *splitting amplitudes*, which are the main objects studied in this work.

When higher-order corrections are considered, it is mandatory to take into account contributions that involve virtual states or *loops*, which are associated with Feynman integrals. So, in the first part of this work, this objects were studied and we explored some computational techniques. After describing standard procedures, we centered the discussion in the study of integration by parts identities (IBP) and the differential equations method. These techniques allow to rewrite Feynman integrals in terms of a coupled system of first-order differential equations. Under certain circumstances, it is easy to work out boundary conditions and to solve the system, which constitutes a powerful tool for treating this problem. On the other hand, we also studied tensor integrals and reduction techniques in order to express them using only scalar integrals.

The following step was studying the collinear limit of scattering amplitudes through the computation of NLO splitting functions. Due to the existence of singularities when treating these limits, it is mandatory to complement the theory with a regularization method. Moreover, the

particular implementation of a regularization technique defines a scheme. Using dimensional regularization (DREG), we started with the analysis of the scheme dependence in the computation of splitting functions in the double-collinear limit. This led us to deepen into the definitions and conventions of DREG, besides of introducing some artificial particles (i.e. scalar gluons) with the objetive of connecting different schemes through physical arguments.

After investigating the double-collinear limit, we treated the computation of NLO corrections to splitting functions when three particles become collinear. These results are crucial to carry on the computation of hadronic cross sections at higher orders. In fact, many computational techniques and simulators take advantage of collinear factorization properties to obtain approximations of some experimentally relevant observables. In particular, in this work we limited ourselves to calculate splitting functions for processes involving at least one photon. Applying tensorial reduction techniques analyzed in the first part, we were able to calculate polarized Altarelli-Parisi kernels, which are essential to give a complete description of the collinear limit of processes with intermediate vector particles.

All the results provided in this thesis have practical applications in the context of hadron colliders phenomenology, since they point to improve theoretical accuracy. The knowledge of higher-order splitting functions is crucial in order to move forward on the description of multi-particle processes at *next-to-next-to-next-to-leading order* (NNNLO) or even higher accuracy.

Keywords: perturbative QCD, NLO computations, Feynman integrals, IR divergencies, collinear limits.

RESUMEN

Actualmente los grandes aceleradores de partículas permiten obtener resultados experimentales muy certeros. Como máximo ejemplo tenemos el LHC, que recientemente descubrió una nueva partícula con propiedades compatibles con las correspondientes al bosón de Higgs. Para poder comprender mejor la naturaleza de dicha partícula, así como también otros fenómenos en el área de física de altas energías, se está realizando un gran esfuerzo para mejorar las mediciones experimentales. Es por ello que las predicciones teóricas deben tener una precisión acorde, de forma tal de poder realizar una comparación relevante entre los modelos disponibles y los datos experimentales.

Trabajando desde la perspectiva teórica, la principal motivación de esta tesis fue el estudio de métodos que permitan efectuar cálculos precisos en el contexto de teoría de perturbaciones aplicada al modelo estándar. En particular, nos restringimos al análisis de los límites colineales de amplitudes de scattering en teorías de gauge a *next-to-leading order* (NLO). Los teoremas de factorización establecen que, en ciertas configuraciones cinemáticas generales, es posible caracterizar de forma universal el comportamiento divergente de las amplitudes de scattering en el límite colineal. Este comportamiento es regido por las llamadas *splitting functions* o *splitting amplitudes*, que son los objetos de estudio centrales en este trabajo.

Cuando se consideran correcciones a órdenes superiores es necesario tener en cuenta las contribuciones que involucran estados virtuales o *loops*, las cuales se asocian a integrales de Feynman. Por lo tanto, en la primer parte del trabajo, se estudiaron estos objetos y se exploraron algunos métodos de cálculo. Tras comentar los procedimientos estándar, nos centramos en el estudio de las identidades de integración por partes (IBP, por sus siglas en inglés) y en el método de ecuaciones diferenciales. Esta técnica permite reescribir las integrales de Feynman en términos de ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden. Bajo ciertas circunstancias, es sencillo determinar las condiciones de contorno y resolver el sistema, lo que nos provee de un poderosa herramienta para tratar este problema. Por otro lado, también se analizaron las integrales tensoriales y técnicas de reducción que permiten expresarlas utilizando únicamente integrales escalares.

El próximo paso consistió en estudiar los límites colineales de amplitudes de scattering mediante el cálculo de las funciones de splitting a NLO. Debido a que hay ciertas singularidades al momento de considerar estos límites, es necesario complementar la teoría con un método de regularización. A su vez, la implementación concreta de un método de regularización permite definir un esquema de regularización. Usando regularización dimensional (DREG), empezamos analizando como se manifiesta la dependencia con el esquema elegido al momento de calcular las funciones de splitting en el límite doble colineal. Ello nos llevó a adentrarnos en las definiciones y convenciones de DREG, así como también a introducir partículas artificiales (esto es, los gluones escalares) para conectar los diversos esquemas usando argumentos físicos.

Tras investigar el límite doble colineal, procedimos al cálculo de las funciones de splitting a NLO para el caso en el cual tres partículas se vuelven colineales. Se trata de resultados que son cruciales para llevar a cabo cálculos de secciones eficaces hadrónicas a órdenes superiores. De hecho, muchos métodos de cálculo y simuladores aprovechan las propiedades del límite colineal para dar resultados aproximados de observables de interés experimental. En concreto, en este trabajo nos limitaremos a presentar las funciones de splitting para procesos que involucren al menos la presencia de un fotón. Apelando a las técnicas de reducción tensorial estudiadas en la primer parte, se pudieron calcular los núcleos de Altarelli-Parisi polarizados, los cuales son esenciales para caracterizar el límite colineal cuando el estado intermedio es una partícula vectorial.

Todos los resultados provistos en este trabajo revisten interés práctico en el contexto de la fenomenología de colisionadores hadrónicos, puesto que apuntan al fin último de mejorar la precisión de los cálculos teóricos. El conocimiento de las funciones de splitting colineal de orden superior es crucial para avanzar en la descripción de procesos multipartícula con niveles de precisión *next-to-next-to-next-to-leading order* (NNNLO) o incluso superior.

Palabras clave: cromodinámica cuántica perturbativa, cálculos de orden superior, integrales de Feynman, divergencias infrarrojas, límites colineales.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero agradecer profundamente a todos mis amigos por haberme acompañado durante estos años: a los que están conmigo desde la escuela, a los que se sumaron en la licenciatura, a los que conocí durante el doctorado y, también, a quienes fueron apareciendo con el correr de los años. Es muy difícil escribir la lista de todos los que ingresan en estas categorías, razón por lo cual me restringiré a un agradecimiento general: *muchas gracias!*. En caso contrario, lamentaría profundamente cualquier omisión, causada por alguna que otra laguna mental que pueda tener lugar durante el lapso de tiempo dedicado a escribir estas palabras.

Pasando a cuestiones más puntuales, quiero agradecer profundamente a mis colegas del Grupo de Altas Energías (HEP-PH); Cinthia, Estefanía, Javier, Juan, Leandro, Manuel, Nerina, Pía, Roger, Romina y Yamila. Las horas de oficina compartidas fueron muy placenteras y creo que pudimos intercambiar mucho conocimiento (además de diversión, aunque creo que ustedes aportaron a eso más que yo...). También quiero mencionar a Adrián, Andrés, Emiliano, Leonardo y Víctor, quienes a pesar de estar en otras ramas, dieron lugar a numerosas y muy fructíferas charlas sobre el estado de la física actual (junto con otros tópicos no-científicos). Respecto a Roger, un agradecimiento extra por haber leído varios capítulos de la tesis, e incluso los *papers* correspondientes. Además, quiero mencionar a Chris Wever y Damiano Tommasini, dos colegas que conocí en reuniones organizadas por la red *LHCPhenoNet*, y con quienes compartí muy buenas charlas de física.

Aquí me detengo para hacer un comentario sobre una persona crucial: Daniel. Desde el comienzo del trabajo de licenciatura, Daniel me guió en el mundo de la física de verdad. Porque una cosa es lo que está en los libros, lo que se ve en las materias de la carrera, los problemas *tipo...* y otra cosa completamente diferente es la investigación. Encontrarse con un problema cuya solución no está en la parte de atrás de ningún libro. Incluso plantear un problema. En esa transición Daniel fue una pieza clave, por haberme enseñado pacientemente como afrontarla. A mi entender, un maestro no solamente es quien transfiere conocimiento sino aquel que inculca los hábitos necesarios para generarlo. Y eso es lo que significa Daniel para mí. Así que, nuevamente, muchas gracias Daniel por haberme dado la oportunidad de trabajar con vos.

Por otro lado, Daniel fue quien me permitió ponerme en contacto con otra persona crucial en

el desarrollo de este trabajo: Germán Rodrigo. Agradezco profundamente la paciencia y buena predisposición de Germán para discutir todo tipo de detalles técnicos detrás de los cálculos que aparecen en esta tesis. También, por supuesto, a mis colegas del IFIC-Valencia, por el buen ambiente de trabajo que contribuyen a crear día a día.

Para finalizar esta sección y pasar al trabajo concreto, quiero agradecer mucho a mi familia. Ellos me apoyaron desde muy pequeño, y son quienes permitieron que hoy esté escribiendo esto. Mi madre, Isabel, fue quien primero comenzó a incentivar mi gusto por la ciencia. Desde los libros de biología y química cuando era pequeño, hasta el apoyo moral necesario para continuar estudiando aún cuando estaba físicamente agotado. Mención especial también para mi hermana, Antonela, por haber leído la tesis en busca de errores de escritura.

En resumen, estoy enormemente agradecido a todos aquellos que estuvieron presentes (de una u otra forma) en la construcción de este trabajo.

Buenos Aires, Agosto de 2014

Índice general

1	Intro	oducción al modelo teórico	13					
	1.	Descripción lagrangiana de QCD	13					
	2.	Cuantización de la teoría y reglas de Feynman	17					
		2.1. Elección de gauge	22					
	3.	Amplitudes de scattering	24					
		3.1. Secciones eficaces	26					
2	Nociones actuales de QCD							
	1.	Motivaciones técnicas	29					
	2.	Descomposición de color	30					
	3.	Formalismo de helicidad	37					
		3.1. Amplitudes MHV	42					
	4.	Ejemplo de aplicación: $0 \to 5g$	43					
	5.	Espacio de color+espín	44					
3	Divergencias en correcciones radiativas							
	1.	Tipos de divergencias	47					
	2.	Métodos de regularización	49					
		2.1. Regularización dimensional	51					
	3.	Divergencias UV: renormalización	55					
	4.	Divergencias IR en QCD: introducción	58					
		4.1. Teoremas de Kinoshita	58					
		4.2. Observables en QCD y funciones de medida	61					

4	Esquemas de regularización						
	1.	Definio	ción de esquemas				
		1.1.	Álgebra de Dirac y fermiones				
		1.2.	Vectores de gauge				
		1.3.	Definición de esquemas				
	2.	Reglas	de Feynman en DREG				
		2.1.	Propagadores escalares y reglas efectivas				
5	Integrales de Feynman						
	1.	Definio	ciones previas				
		1.1.	Identidades de integración por partes (IBP)				
		1.2.	Otras identidades útiles				
		1.3.	Reducción por IBPs: algoritmo de Laporta				
	2.	Métod	os de cálculo				
		2.1.	Representación α y parámetros de Feynman				
		2.2.	Reducción de Passarino-Veltman				
		2.3.	Método de ecuaciones diferenciales				
	3.	Integra	ales en LCG				
6	Lími	ite colin	neal de amplitudes de scattering				
	1.	Motiva	ación histórica $\ldots \ldots \ldots$				
		1.1.	Scattering elástico y DIS				
		1.2.	Modelo de partones <i>naive</i>				
		1.3.	Modelo de partones mejorado: ruptura de $scaling$ y ecuaciones DGLAP $$. 117				
		1.4.	Sobre factorización y <i>LCG</i>				
	2.	Propie	dades de factorización				
		2.1.	Parametrización de momentos				
		2.2.	Factorización en el espacio de color				
		2.3.	Funciones de splitting y núcleos de Altarelli-Parisi				

	3.	Propie	edades de las funciones de splitting a órdenes superiores			
		3.1.	Estructura de polos IR: la fórmula de Catani			
		3.2.	Correcciones al partón inicial			
	4.	Valide	z de la factorización colineal			
7	Lími	ite dobl	le colineal: dependencia en esquema			
	1.	Motiva	ación			
		1.1.	Implementación de los cálculos			
	2.	Caso o	le estudio: $q \rightarrow gq$ a NLO			
		2.1.	Matriz de splitting genérica			
		2.2.	Dependencia de esquema y estudio de divergencias			
		2.3.	Correcciones al núcleo de Altarelli-Parisi			
	3.	Depen	dencia del esquema en splittings			
8	Lími	ite dobl	le colineal: resultados			
	1.	Introd	ucción: historia y estado actual			
	2.	Funcio	ones de splitting doble en QCD: resultados <i>color-stripped</i>			
	3.	3. Funciones de splitting doble en QCD: resultados generales				
		3.1.	$g \to q\bar{q} \dots \dots$			
		3.2.	$g \rightarrow gg$			
		3.3.	Consistencia y supersimetría			
		3.4.	Sobre las propiedades de <i>crossing</i>			
	4.	Funcio	ones de splitting con fotones a NLO			
		4.1.	$q \to q\gamma$			
		4.2.	$\gamma \to q\bar{q} \dots \dots$			
9	Lími	ite tripl	le colineal con fotones I $\ldots \ldots 191$			
	1.	Introd	ucción general			
	2.	Detall	es del cálculo			
	3.	Proces	sos iniciados por partones de QCD			

	3.1.	$q \rightarrow q\gamma\gamma$
	3.2.	$q \rightarrow qg\gamma$
	3.3.	$g \rightarrow q\bar{q}\gamma$: caso no polarizado
4.	Proce	sos iniciados por fotones
	4.1.	$\gamma \to q\bar{q}\gamma$
	4.2.	$\gamma \to q\bar{q}g$
5.	Come	ntarios sobre la estructura de los resultados
	5.1.	Sobre las relaciones de <i>crossing</i>
10Lím	nite trip	le colineal con fotones II
1.	Gener	alidades y técnicas de cálculo
	1.1.	Reducción tensorial combinada
	1.2.	Presentación de resultados
2.	Proce	sos iniciados por fotones
	2.1.	$\gamma \to q\bar{q}\gamma$
	2.2.	$\gamma \to q\bar{q}g$
	2.3.	Comentarios sobre la estructura de los resultados
3.	$g \to q$	$\bar{q}\gamma$: caso polarizado
	3.1.	Verificación de los resultados
	3.2.	Verificación de integrales involucradas
11Cor	nclusion	es y perspectivas
A Inte	egrales o	de Feynman utilizadas
1.	Caso	doble colineal
2.	Caso	triple colineal: integrales maestras
Bibliog	rafía .	

1. INTRODUCCIÓN AL MODELO TEÓRICO

En este capítulo se describen generalidades del formalismo teórico que se utiliza actualmente para explicar la física de partículas elementales. Tras motivar la importancia del modelo de QCD con fotones y describir su lagrangiano, se muestra una forma de cuantizar una teoría de gauge general. Con el formalismo de integrales de camino, se derivan las reglas de Feynman y se explica el fijado de gauge, haciendo hincapié en los llamados *gauges físicos*. Finalmente se muestra como calcular secciones eficaces de scattering partiendo de las funciones de Green de *n*-puntos y usando la fórmula de Lehmann-Symanzik-Zimmermann (LSZ).

1. Descripción lagrangiana de QCD

Actualmente, la física de partículas elementales estándar se entiende en términos de las teorías de campos cuánticos (QFT). En particular un cierto grupo de estas teorías, conocidas como teorías de calibre o gauge, explica las interacciones fundamentales entre partículas suponiendo la existencia de simetrías asociadas a cargas conservadas. Debido a que expone de forma explícita dichas simetrías, el formalismo lagrangiano es uno de los más adecuados para analizar estos modelos.

Comencemos motivando la definición física de una teoría de gauge con un ejemplo básico. Considérese un campo de Dirac $\Psi(x)$ de masa M cuya densidad lagrangiana asociada es

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\Psi} (i \partial_{\mu} \gamma^{\mu} - M) \Psi , \qquad (1.1.1)$$

con γ^{μ} matrices de Dirac, las cuales satisfacen la relación de anticonmutación

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{I}, \qquad (1.1.2)$$

en donde η es la métrica de Minkowski 4-dimensional y I es la matriz identidad en el espacio de matrices de Dirac. Esta relación define el álgebra de Dirac, que es un tipo particular de álgebra de Clifford en la cual se está usando el producto interno inducido por la métrica lorentziana del espacio-tiempo. Es importante remarcar que este modelo puede ser extendido a otros espacios. En particular, en el Capítulo 4, discutiremos el tratamiento del álgebra de Dirac en espacios planos de dimensión D.

Volviendo al tópico central, puede apreciarse que \mathcal{L}_{Dirac} es invariante frente a transformaciones de Lorentz y cambios de fase globales en Ψ . Sin embargo, si se propone una transformación de fase local dada por

$$\Psi(x) \to \Psi'(x') = e^{i\alpha(x)}\Psi(x), \qquad (1.1.3)$$

$$\bar{\Psi}(x) \to \bar{\Psi}'(x') = e^{-i\alpha(x)}\bar{\Psi}(x), \qquad (1.1.4)$$

siendo $\alpha(x)$ una función que toma valores reales, deja de ser cierto que $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$. Pero es sencillo apreciar que puede restaurarse la invariancia frente a este tipo de transformaciones modificando la derivada según

$$\partial_{\mu} \to \mathcal{D}_{\mu} = \partial_{\mu} + \imath e B_{\mu} , \qquad (1.1.5)$$

con B_{μ} campo que transforma de acuerdo a la regla

$$B_{\mu} \to B'_{\ \mu} = B_{\mu} - (1/e)\partial_{\mu}(\alpha(x)).$$
 (1.1.6)

Siguiendo el *principio de Landau*¹, el lagrangiano puede escribirse como

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\Psi}(i\partial_{\mu}\gamma^{\mu} - M)\Psi - eB_{\mu}\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \qquad (1.1.7)$$

siendo $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}B_{\nu} - \partial_{\nu}B_{\mu}$. Este es el lagrangiano de la electrodinámica cuántica (QED), que es una teoría de gauge U(1), pues el grupo de simetría solo posee un generador. El campo B_{μ} representa a los mediadores de fuerza de esta teoría, los fotones, y el último término de \mathcal{L}_{QED} describe las interacciones entre estos campos².

La cromodinámica cuántica (QCD) es otra teoría de gauge, notablemente más compleja que QED, que busca describir las interacciones de color. Estas son las que permiten explicar el espectro hadrónico y las interacciones nucleares. A diferencia de QED, el grupo de simetría de QCD es SU(3), lo que la convierte en una teoría no Abeliana. Debido a que el grupo SU(3) tiene

¹ Este principio es una herramienta básica en la construcción de teorías y se relaciona con una formulación general de las mismas. La idea es que, una vez fijadas las simetrías del problema que quiere describirse, deben incluirse en el lagrangiano todos los términos que sean compatibles con ellas. Esto se debe a que se considera a la operación de simetría como elemento principal en la definición de la teoría. En consecuencia, si se eliminan términos compatibles con la simetría es necesario modificar la definición de la teoría original agregando más información.

 $^{^{2}}$ La noción de teoría de gauge puede ser formulada también utilizando conceptos de geometría diferencial. En ese caso, el campo de gauge pasa a ser una conexión en un fibrado vectorial. Dicho enfoque permite entender de forma rigurosa los requisitos de simetría impuestos al lagrangiano. Sin embargo, para los fines que queremos alcanzar en este trabajo, no es necesario recurrir a ese nivel de formalismo.

8 generadores que no conmutan, resulta que la transformación de gauge más general que puede escribirse es

$$\Psi(x) \quad \to \quad \Psi'(x') = e^{i\alpha_a(x)} \boldsymbol{T}^a \Psi(x) \,, \tag{1.1.8}$$

$$\bar{\Psi}(x) \rightarrow \bar{\Psi}'(x') = \bar{\Psi}(x)e^{-i\alpha_a(x)}\mathcal{I}^a, \qquad (1.1.9)$$

en donde \mathbf{T}^a son los generadores y α_a son coeficientes (elementos en algún cuerpo, como por ejemplo los números reales). Obsérvese que en este caso, Ψ debe ser un objeto que pertenezca a la *representación fundamental* de SU(3). Trabajando en la representación más sencilla, en la cual los 8 generadores son las matrices 3×3 de Gell-Mann, resulta que Ψ es un vector de 3 filas y $\overline{\Psi}$ es uno de 3 columnas (*representación antifundamental*). Además, los generadores satisfacen $[\mathbf{T}^a, \mathbf{T}^b] = i f^{abc} \mathbf{T}^c$ con f^{abc} constantes de estructura del grupo. Estas relaciones son las que definen el álgebra de color, que discutiremos con más detalle en el Capítulo 2.

Continuando con las diferencias respecto de QED, el cambio en el grupo de simetría implica la necesidad de modificar el lagrangiano para preservar la invariancia de gauge. En primer lugar, la derivada covariante debe ser

$$\partial_{\mu} \to \mathcal{D}_{\mu} = \partial_{\mu} + \imath g_{\mathrm{S}} A^{a}_{\mu} T^{a} , \qquad (1.1.10)$$

con A^a_{μ} campos de gauge y $g_{\rm S}$ acoplamiento fuerte (o *coupling* asociado a QCD). En el contexto de un modelo fenomenológico, cada uno de estos 8 campos representa un mediador de fuerza y se asocian con unas partículas conocidas como gluones. Por otra parte, estos campos de gauge se modifican al aplicar las transformaciones definidas en (1.1.8) y (1.1.9) según

$$A^{a}_{\mu} \to A'^{a}_{\ \mu} = A^{a}_{\mu} + f^{abc} \alpha_{b}(x) A^{c}_{\mu} - (1/g_{\rm S}) \partial_{\mu}(\alpha_{a}(x)) , \qquad (1.1.11)$$

suponiendo que los parámetros de la transformación son infinitesimalmente pequeños, de manera que se pueda considerar $e^{i\alpha_a} T^a \approx 1 + i\alpha_a(x) T^a$.

En segundo lugar, el término de autointeracción de los campos es

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -(1/4)G_a^{\mu\nu}G_{\mu\nu}^a, \qquad (1.1.12)$$

 con

$$G^{a}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A^{a}_{\nu} - \partial_{\nu}A^{a}_{\mu} + \imath g_{\rm S}f^{abc}A^{b}_{\mu}A^{c}_{\nu} , \qquad (1.1.13)$$

que es el análogo a $F_{\mu\nu}$ en QED³. Aquí se puede apreciar la presencia de un término extra, que surge debido a que los generadores no conmutan y cumplen el álgebra asociada al grupo SU(3).

³ En términos geométricos, $G^a_{\mu\nu}$ es una derivada de Lie sobre la variedad asociada al grupo SU(3), lo que convierte al tensor de campo en una 2-forma. De hecho, en una teoría de gauge puro, las ecuaciones de movimiento coinciden con el requisito de que la derivada exterior del tensor de campo sea nula. Así, es fácil trazar un paralelismo entre estas teorías y la relatividad general, en la cual el aspecto geométrico de la formulación es mucho más manifiesto.

Cabe señalar que una teoría en la cual el lagrangiano es \mathcal{L}_{gauge} se conoce como teoría de gauge puro y tiene muchas propiedades adicionales que permiten simplificar los cálculos.

Por otra parte, entendiendo a QCD dentro del modelo estándar (SM), debe tenerse en cuenta que existen 6 sabores de quarks (up, down, strange, charm, bottom y top) cada uno de los cuales puede tener 3 colores (rojo, verde y azul). Además, debido a que el grupo de simetría de SM es $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \otimes SU(3)_C$, los términos de masa como aparecen en el lagrangiano de QED son dependientes del gauge. De esta manera no pueden estar en el lagrangiano total de SM y, en particular, su presencia queda vedada del lagrangiano de QCD. También debe tenerse en cuenta que los quarks interaccionan débilmente, con lo cual se organizan en multipletes de SU(2), y con el bosón de Higgs para obtener su masa. Sin embargo, en este trabajo no se tendrán en cuenta este tipo de interacciones. La razón fundamental es que, a las energías que se exploran en los experimentos actuales, QCD constituye la fuente más importante de correcciones a los resultados teóricos. Siendo un poco más precisos respecto al significado de la frase anterior, podemos afirmar que $g_{\rm S}$ es al menos un orden de magnitud mayor al resto de los acoplamientos cuando la escala de energía de los procesos es del orden de 1 TeV. En consecuencia, para aumentar la precisión teórica es crucial comprender los efectos asociados a QCD en el régimen de altas energías.

De esta manera, siguiendo los lineamientos expuestos en los párrafos anteriores, se tiene que el lagrangiano de QCD pura⁴ con fermiones no masivos es

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{j} \left(\bar{\Psi}_{j} \gamma^{\mu} (i \partial_{\mu} - g_{\mathrm{S}} A^{a}_{\mu} \mathbf{T}^{a}) \Psi_{j} \right) - \frac{1}{4} G^{a}_{\mu\nu} G^{\mu\nu}_{a}, \qquad (1.1.14)$$

en donde j es un índice que designa a los distintos sabores de quarks. En esta ecuación, se omitieron los índices de color y de Dirac para simplificar la notación. Si se agrega a (1.1.14) la interacción electromagnética, teniendo en cuenta que el quark de sabor j tiene una carga eléctrica $e_j e$, se llega a

$$\mathcal{L} = \sum_{j} \left(\bar{\Psi}_{j} \gamma^{\mu} (i \partial_{\mu} - g_{\rm S} A^{a}_{\mu} T^{a} - e_{j} e B_{\mu}) \Psi_{j} \right) - \frac{1}{4} G^{a}_{\mu\nu} G^{\mu\nu}_{a} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} , \qquad (1.1.15)$$

que es el lagrangiano que permitirá caracterizar los procesos estudiados en este trabajo. Observemos que, si bien los fotones se acoplan a los quarks, el acoplamiento electromagnético difiere del de QCD. Además los fotones no interaccionan directamente con los gluones (pues no existe tal acoplamiento a nivel lagrangiano), aunque si lo hacen a través del acople de los quarks con los gluones. El hecho de que la interacción gluon-fotón esté mediada por quarks hace que se encuentre suprimida en comparación con las restantes posibles en QCD.

 $^{^{4}}$ En este texto utilizamos el término QCD pura para designar al modelo que solo tiene en cuenta a los quarks y gluones, junto con sus interacciones.

Antes de ahondar en la discusión de este modelo es necesario hacer algunos comentarios importantes. En primer lugar, el estudio de fenómenos que involucran fotones es sumamente relevante desde el punto de vista experimental, puesto que estas partículas proveen señales que son más fáciles de interpretar en los detectores. El hecho de que los experimentos actuales se lleven a cabo en colisionadores hadrónicos implica la presencia de una gran cantidad de partículas fuertemente interactuantes en el estado final. Sin embargo, como la interacción fotón-gluón está suprimida, los fotones pueden atravesar la materia hadrónica sin alteraciones importantes. De esta forma resulta más sencillo reconstruir su trayectoria y reducir el error en la medición de sus propiedades.

Por otra parte, como el fotón no está cargado ante el grupo SU(3), su presencia en un proceso de scattering en QCD implica una simplificación en las estructuras de color involucradas. Más aún, es posible utilizar la forma del lagrangiano (1.1.15) para obtener identidades útiles en teorías de gauge no Abelianas. Volveremos a este punto en el Capítulo 2.

2. Cuantización de la teoría y reglas de Feynman

En QFT existen diversos procedimientos para cuantizar una teoría partiendo de un lagrangiano clásico. En el caso de las teorías de gauge, y en vistas de una posterior aplicación de técnicas de cálculo perturbativo, el formalismo de integrales de camino resulta muy útil. Para ello es necesario construir la funcional generatriz de la teoría.

Comenzando con la densidad lagrangiana \mathcal{L} dada en (1.1.15) se tiene que

$$Z\left[\chi_{j}, \bar{\chi}_{j}, J^{\mu}, J^{\mu}_{a}, \eta^{a}, \bar{\eta}^{a}\right] = N \int DB \int D\bar{c} Dc \int DA^{a} \int D\bar{\Psi} D\Psi \exp\left[-\frac{\imath}{2\alpha_{1}} \int d^{4}x G_{1}^{2} \left[B_{\mu}\right]\right]$$
$$\exp\left[\imath \int d^{4}x \left(\bar{c}^{a} \eta^{a} + \bar{\eta}^{a} c^{a} + A^{a}_{\mu} J^{\mu}_{a} + B_{\mu} J^{\mu} + \bar{\chi}_{j} \Psi_{j} + \bar{\Psi}_{j} \chi_{j}\right)\right]$$
$$\exp\left[-\frac{\imath}{2\alpha_{2}} \int d^{4}x G_{2}^{2} \left[A^{a}_{\mu}\right]\right] \exp\left[\imath \int d^{4}x \left(\bar{c}^{a} M_{Gab} c^{b} + \mathcal{L}\right)\right], (1.2.1)$$

es la funcional generatriz asociada, en la cual fue necesario agregar corrientes para tener en cuenta la presencia de los *ghosts* de Faddeev-Popov, representados por los campos fermiónicos $c \ y \ \bar{c}$. La matriz M_G se relaciona con la función de selección de gauge de acuerdo con

$$M_G(x,y)_{ab} = \frac{dG\left[A^a_\mu(\Lambda)(x)\right]}{d\Lambda_b(y)}, \qquad (1.2.2)$$

$$\det\left(M_G(x,y)_{ab}\right) = \int D\bar{c}Dc \exp\left[i\int d^4x \int d^4y \bar{c}(x)M_G(x,y)c(y)\right], \qquad (1.2.3)$$

lo que justifica la presencia de los ghosts, pues se utilizan para escribir el determinante de M_G en términos de una exponencial. En general, dado que M_G involucra a los campos de gauge, los ghosts interaccionan con los gluones y su término cinético corresponde al de un campo escalar no masivo. Además, nótese que la teoría resultante tiene un lagrangiano efectivo que incluye términos de fijado de gauge. El procedimiento de fijado de gauge es necesario para eliminar la redundancia en las integrales funcionales, puesto que se está sumando sobre muchas configuraciones de campos que son equivalentes. De esta forma, al aplicar el método de Fadeev-Popov, la integración se efectúa sobre un conjunto de representantes de los campos de gauge, esto es aquellos que satisfacen las relaciones

$$G_1^2[B_\mu] = 0, \qquad (1.2.4)$$

$$G_2^2 \left[A_{\mu}^a \right] = 0, \qquad (1.2.5)$$

con G_i funciones suaves. Este truco permite reabsorber el volumen del grupo de gauge en la normalización de la funcional generatriz⁵.

Una vez obtenida la funcional generatriz de la teoría, sabemos que es posible relacionarla con la función de Green de *n*-puntos en el espacio de coordenadas. Por definición, dados campos fermiónicos $\bar{\Psi}_j$, Ψ_j y de gauge A^a_{μ} asociados a corrientes χ_j , $\bar{\chi}_j$ y J^{μ}_a , la función de Green de *n*-puntos viene dada por

$$G^{n}(x_{1},\ldots,x_{n}) = \left\langle 0 \left| T\left(\hat{\Psi}_{j}(x_{1})\ldots\hat{\bar{\Psi}}_{k}(x_{r_{1}})\ldots\hat{A}_{\mu}^{a}(x_{r_{2}})\ldots\right) \right| 0 \right\rangle, \qquad (1.2.6)$$

siendo $|0\rangle$ el estado de vacío de la teoría y T el operador de ordenamiento temporal. Por otro lado, se puede demostrar que vale

$$\left\langle 0 \left| T \left(\hat{\Psi}_j(x_1) \dots \hat{\Psi}_k(x_{r_1}) \dots \hat{A}^a_\mu(x_{r_2}) \dots \right) \right| 0 \right\rangle = \frac{-id}{d\bar{\chi}_j(x_1)} \dots \frac{-id}{d\chi_j(x_{r_1})} \dots \frac{-id}{dJ^{\mu}_a(x_{r_2})} \dots \\ Z \left[\chi_j, \bar{\chi}_j, J^{\mu}_a \right]_{\chi=0,\bar{\chi}=0,J=0},$$
(1.2.7)

o sea que la función de Green en el espacio de coordenadas está relacionada con las derivadas funcionales de la generatriz Z respecto de las corrientes. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que los únicos elementos fácilmente calculables de forma exacta en la teoría son los propagadores libres, que son las soluciones fundamentales de las ecuaciones de Euler-Lagrange para los campos libres. Por ende, si se quiere calcular una función de Green para el lagrangiano (1.1.15) es necesario realizar un desarrollo perturbativo. La idea fundamental de ese procedimiento es suponer

⁵ Usando un lenguaje más estricto, el procedimiento de Fadeev-Popov muestra como efectuar la integración sobre el espacio cociente de campos de gauge. La relación que define dicho cociente es $A \equiv B$ si y solo si existe Ttransformación de gauge tal que A = T[B]. Alternativamente, los elementos del espacio cociente quedan definidos como soluciones de las ecuaciones (1.2.4) y (1.2.5).

que el acoplamiento $g_{\rm S}$ es *pequeño*, de forma tal de poder expandir en serie alrededor de $g_{\rm S} = 0$. Estrictamente hablando hay muchas sutilezas matemáticas entorno a este punto, principalmente relacionadas con la noción de convergencia y con el parámetro de expansión. Respecto al primer ítem, puede mostrarse que la expansión presenta convergencia asintótica debido a que el acoplamiento no es una constante numérica, sino que tiene una dependencia funcional que proviene del truncamiento del desarrollo perturbativo. Acerca de la elección del parámetro de expansión en teorías con varios acoplamientos independientes (como es el caso de QCD con fotones), en este trabajo nos restringimos a considerar correcciones de QCD, por lo cual el parámetro natural de expansión será $g_{\rm S}$.

Para formalizar la idea del desarrollo perturbativo, se comienza escribiendo el lagrangiano como $\mathcal{L}_{Eff} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{Int}$, es decir una parte libre y otra de interacción. Esta última se cancela en el límite en el cual los acoplamientos de la teoría tienden a cero. Supongamos además que $G[A_{\mu}] = d^{\mu}A_{\mu}$, con lo cual la parte asociada a los campos libres puede expresarse como

$$\mathcal{L}_{0} = -\frac{1}{4}G_{a}^{\mu\nu}G_{\mu\nu}^{a} - \frac{G_{2}^{2}\left[A_{\mu}^{a}\right]}{2\alpha_{2}} - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{G_{1}^{2}\left[B_{\mu}\right]}{2\alpha_{1}} + \bar{c}^{a}\partial_{\mu}\partial^{\mu}\delta_{ab}c^{b} + i\bar{\Psi}_{j}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi_{j}, \qquad (1.2.8)$$

con $G^a_{\mu\nu}$ y $F_{\mu\nu}$ tensores de campo para los gluones y fotones, respectivamente. Por otro lado, el término de interacción es

$$\mathcal{L}_{Int} = -g_{\rm S} \bar{\Psi}_j \gamma^{\mu} A^a_{\mu} \mathbf{T}^a \Psi_j - e_j e \bar{\Psi}_j \gamma^{\mu} B_{\mu} \Psi_j - g_{\rm S} f_{abc} \bar{c}^a \partial_{\mu} A^{\mu}_c c^b$$
$$-\frac{i}{2} g_{\rm S} f^{abc} A^b_{\mu} A^c_{\nu} \left(\partial^{\mu} A^{\nu}_a - \partial^{\nu} A^{\mu}_a \right) + \frac{g_{\rm S}^2}{4} f^{abc} f_{ade} A^b_{\mu} A^c_{\nu} A^{\mu}_d A^{\nu}_e , \qquad (1.2.9)$$

en donde j se encuentra sumado sobre los diversos sabores de quarks. El próximo paso es emplear la identidad

$$F\left[\frac{d}{\imath d\eta}\right] \int DA \exp\left[\imath \int d^4 x A(x)\eta(x)\right] = \int DA \ F\left[A\right] \exp\left[\imath \int d^4 x A(x)\eta(x)\right], \qquad (1.2.10)$$

que permite reemplazar cada campo en \mathcal{L}_{Int} por la derivada funcional respecto a la corriente asociada. De esta forma, escribiendo las funcionales exponenciales como series de potencias, corrigiendo los signos debido a la conmutación de campos de Grassman y considerando que las constantes de acople *e* y $g_{\rm S}$ son pequeñas, se llega a un desarrollo perturbativo para la funcional generatriz dado por

$$Z\left[\chi_{j}, \bar{\chi}_{j}, J^{\mu}, J^{\mu}_{a}, \eta^{a}, \bar{\eta}^{a}\right] = \sum_{p_{1}=0}^{\infty} \frac{\left(-\imath g_{S}\right)^{p_{1}}}{p_{1}!} \int dz_{1} \left[\frac{-\imath d}{dJ^{\mu}_{a}(z_{1})} \frac{\imath d}{d\chi_{k}(z_{1})} \gamma^{\mu} T^{a} \frac{-\imath d}{d\bar{\chi}_{k}(z_{1})}\right] \dots$$

$$\times \sum_{p_{2}=0}^{\infty} \frac{(-\imath g_{\rm S})^{p_{2}}}{p_{2}!} \int dz'_{1} \left[f_{abc} \left(\partial_{\mu} \frac{-\imath d}{dJ_{c}^{\mu}(z'_{1})} \right) \frac{\imath d}{d\eta^{a}(z'_{1})} \frac{-\imath d}{d\bar{\eta}^{b}(z'_{1})} \right] \cdots$$

$$\times \sum_{p_{3}=0}^{\infty} \frac{(-\imath g_{\rm S})^{p_{3}}}{p_{3}!} \int dz''_{1} \frac{f_{abc}}{2} \frac{-\imath d}{dJ_{b}^{\mu}(z''_{1})} \frac{-\imath d}{dJ_{c}^{\nu}(z''_{1})}$$

$$\times \left(\imath \partial^{\mu} \frac{-\imath d}{dJ_{\nu}^{a}(z''_{1})} - \imath \partial^{\nu} \frac{-\imath d}{dJ_{\mu}^{a}(z''_{1})} \right) \cdots$$

$$\times \sum_{p_{4}=0}^{\infty} \frac{(\imath g_{\rm S}^{2})^{p_{4}}}{p_{4}!} \int dy_{1} \left[\frac{f^{abc} f_{ade}}{4} \frac{-\imath d}{dJ_{b}^{\mu}(y_{1})} \frac{-\imath d}{dJ_{c}^{\nu}(y_{1})} \frac{-\imath d}{dJ_{\mu}^{d}(y_{1})} \frac{-\imath d}{dJ_{\nu}^{c}(y_{1})} \right] \cdots$$

$$\times \sum_{j} \sum_{p_{5}=0}^{\infty} \frac{(-\imath e_{j} e)^{p_{5}}}{p_{5}!} \int dx_{1} \left[\frac{-\imath d}{dJ^{\mu}(x_{1})} \frac{\imath d}{d\chi_{j}(x_{1})} \gamma^{\mu} \frac{-\imath d}{d\bar{\chi}_{j}(x_{1})} \right] \cdots$$

$$Z_{0} \left[\chi_{j}, \bar{\chi}_{j}, J^{\mu}, J_{a}^{\mu}, \eta^{a}, \bar{\eta}^{a} \right], \qquad (1.2.11)$$

en donde la funcional generatriz de la teoría libre es

$$Z_{0}[\chi_{j}, \bar{\chi}_{j}, J^{\mu}, J^{\mu}_{a}, \eta^{a}, \bar{\eta}^{a}] = N \int DB D\bar{c} Dc DA^{a} D\bar{\Psi} D\Psi \exp\left[i \int d^{4}x \mathcal{L}_{0}\right]$$
$$\exp\left[i \int d^{4}x \left(A^{a}_{\mu}J^{\mu}_{a} + B_{\mu}J^{\mu} + \bar{\chi}_{j}\Psi_{j}\right)\right]$$
$$\exp\left[i \int d^{4}x \left(\bar{\Psi}_{j}\chi_{j} + \bar{c}^{a}\eta^{a} + \bar{\eta}^{a}c^{a}\right)\right].$$
(1.2.12)

Con todo esto, recurriendo a las expresiones (1.2.7) y (1.2.9), también se tiene un desarrollo perturbativo para la función de Green de *n*-puntos en el espacio de coordenadas. Obsérvese que la función de Green finalmente puede ser expresada como sumas de productos de propagadores para los diversos campos, integrados sobre los puntos intermedios, con un factor de peso que depende de los vértices de interacción que se están incluyendo. Cada término no trivial, con asociaciones de derivadas no equivalentes, constituye un diagrama de Feynman distinto, el cual debe ir acompañado por un factor de conteo que tiene en cuenta la multiplicidad.

El siguiente paso consiste en hallar un desarrollo perturbativo para la función de Green de *n*-puntos en el espacio de momentos, las cuales pueden obtenerse partiendo de las derivadas funcionales de la generatriz Z y realizando una transformada de Fourier en las variables espaciales. Debido a que la teoría debe respetar el grupo de isometrías de \mathbb{R}^4 , la invariancia traslacional es conservada y ello implica la conservación de momentos. En consecuencia, los vértices irán acompañados por un factor $2\pi^4 \delta^{(4)} (\sum_i p_i)$ (siendo p_i los momentos ingresantes en el vértice). De este modo, se obtienen las reglas de Feynman para la teoría cuyo lagrangiano clásico es (1.1.15), las cuales se encuentran resumidas en las figuras 1.1 (propagadores en un gauge covariante) y



Fig. 1.1: Propagadores en el espacio de momentos para los campos intervinientes en el modelo de QCD con fotones, utilizando un gauge covariante genérico.

1.2 (vértices, sin el factor mencionado en este párrafo), junto con su representación pictórica habitual.

Una vez introducidos formalmente los diagramas de Feynman es posible clasificarlos de acuerdo a su topología. Trabajando en el espacio de momentos, cada línea del diagrama se asocia unívocamente a un momento. Las líneas externas (esto es, aquellas que tienen un extremo libre) se asocian con los momentos externos, que son las variables físicas de las cuales puede depender la función de Green bajo consideración. Por otro lado, las líneas internas (es decir, las que tienen ambos extremos conectados a un vértice) transportan momentos internos. Diremos que un diagrama tiene nivel árbol o *tree level* si todos los momentos internos quedan unívocamente definidos por los momentos externos. Por el contrario, un diagrama con *l* lazos o *loops* implica la presencia de *l* momentos internos libres (esto es, que no están definidos aún fijando los momentos externos). Debido a que estos momentos se asocian con partículas virtuales no observables, es necesario integrarlos. Así, por cada loop se introduce una integral $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$. A su vez, cada integral va acompañada por un factor -1 si se trata de un loop de fermiones o 1 si se trata de un loop de bosones o de *ghosts*. También si un loop contiene *m* bosones idénticos en su interior es necesario introducir un factor de simetría $(m!)^{-1}$.

Como comentario final, debe tenerse en cuenta que las reglas de Feynman encontradas son válidas en un espacio-tiempo 4-dimensional. Al trabajar en un espacio D dimensional se deben efectuar algunas correcciones. Las mismas se relacionan con un cambio en la métrica y la necesidad de incluir factores adecuados para mantener las constantes de acoplamiento sin dimensiones⁶.

 $^{^{6}}$ La adimensionalidad de las constantes de acoplamiento de una teoría se relaciona con la posibilidad de renormalizarlas y absorber las divergencias ultravioletas. Mencionaremos brevemente este punto en el Capítulo 3.



Fig. 1.2: Vértices de interacción para la teoría QCD con acoples electromagnéticos. No se incluye el factor de conservación de momento. Estas reglas permiten reconstruir la función de Green de n-puntos en el espacio de momentos. Los índices i y j denotan los colores de los quarks (i, j corren de 1 a 3), no sus sabores. Apréciese que la teoría empleada no contiene vértices que mezclen sabores de quarks. Se utiliza la convención de momentos salientes y S representa el simetrizador.

2.1. Elección de gauge

Las teorías que estamos considerando son invariantes ante transformaciones de gauge. Sin embargo, al momento de efectuar cálculos concretos generalmente es necesario elegir algún gauge en particular. Dependiendo de la elección realizada, el contenido de partículas, el tipo de diagramas de Feynman posibles y la forma de escribir los propagadores de los campos de gauge puede ser diferente (1; 2; 3).

Para ver los cambios introducimos por el gauge elegido, consideremos el lagrangiano de gluones libres con el término de fijado de gauge y ghosts, esto es

$$\mathcal{L}_{QCD+GF+ghost} = -\frac{1}{4} G^{\mu\nu}_{a} G^{a}_{\mu\nu} - \frac{G^{2}_{2} \left[A^{a}_{\mu}\right]}{2\alpha_{2}} + \bar{c}^{a} \partial_{\mu} \partial^{\mu} \delta_{ab} c^{b}, \qquad (1.2.13)$$

y también

$$\mathcal{L}_{Int} = \bar{c}^a \left(M_{Gab} - \partial_\mu \partial^\mu \delta_{ab} \right) c^b, \qquad (1.2.14)$$

que es el término de interacción gluon-ghost. Como mencionamos previamente, el propagador de un campo se obtiene resolviendo las correspondientes ecuaciones de movimiento con una fuente puntual, por lo que éste incluye una dependencia explícita en la función $G_2 \left[A^a_{\mu} \right]$ introducida en el procedimiento de Fadeev-Popov. Por otro lado, si miramos el término de interacción nos damos cuenta que las restricciones que impongamos sobre A^a_{μ} repercuten en el acoplamiento gluon-ghost. Debido a que los ghosts son objetos introducidos artificialmente en la teoría, no tienen existencia física. En consecuencia, si se desacoplan de los gluones pueden ser eliminados de la teoría ya que no interactuarán con ninguna entidad observable del modelo.

En consecuencia, elegir la funcional G_2 corresponde a seleccionar un gauge específico. Hay dos elecciones que se suelen utilizar frecuentemente en QCD:

• el gauge covariante

$$G_2\left[A^a_\mu\right] = \partial^\mu A^a_\mu, \qquad (1.2.15)$$

que se uso para particularizar la funcional generatriz en la discusión previa;

y los gauges axiales o físicos,

$$G_2 \left[A^a_\mu \right] = n^\mu A^a_\mu \,, \tag{1.2.16}$$

en donde n es un vector arbitrario.

Cada elección tiene sus ventajas y desventajas. Para empezar, el propagador en un gauge covariante viene dado por

$$D_{G}^{\text{covariante}}(k)_{\mu\nu} = \frac{\imath}{k^{2} + \imath\epsilon} \left(-\eta_{\mu\nu} + (1-\xi)\frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^{2}} \right), \qquad (1.2.17)$$

en donde ξ es un parámetro arbitrario; el caso $\xi = 1$ se conoce como gauge de Feynman. Por otro lado, para un gauge físico se tiene

$$D_G^{\text{axial}}(k)_{\mu\nu} = \frac{i}{k^2 + i\epsilon} \left(-\eta_{\mu\nu} + \frac{k_{\mu}n_{\nu} + n_{\mu}k_{\nu}}{n \cdot k} - \frac{n^2 + \xi k^2}{(n \cdot k)^2} k_{\mu}k_{\nu} \right), \qquad (1.2.18)$$

que es una expresión más complicada que la definida en (1.2.17). La principal desventaja de (1.2.18) radica en la presencia de denominadores de la forma $n \cdot k$ que pueden introducir divergencias espurias en los cálculos. Es importante señalar la presencia del término $+i\epsilon$ en el denominador, que define una prescripción (en este caso, si $\epsilon > 0$ se conoce como descripción de Feynman) y permite resolver unívocamente la ecuación de movimiento para calcular D_G . Volveremos a este tema cuando hablemos de integrales de Feynman, y en particular cuando tengamos que lidiar con las correspondientes expresiones en gauges físicos. Por otro lado, analizando el término de interacción se encuentra que

$$\mathcal{L}_{Int}^{\text{covariante}} = \partial^{\mu} \bar{c}^{a} \partial_{\mu} c^{b} \,\delta_{ab} - g_{S} f_{abc} \partial^{\mu} \bar{c}^{a} A^{b}_{\mu} c^{c}, \qquad (1.2.19)$$

en un gauge covariante, mientras que en los gauges físicos se tiene

$$\mathcal{L}_{Int}^{\text{axial}} = -\bar{c}^a n^\mu \partial_\mu c^b, \qquad (1.2.20)$$

en donde se puede apreciar el desacople gluon-ghost. La forma clásica de interpretar estos resultados es que en los gauges covariantes los ghosts se acoplan a grados de libertad no-físicos de los gluones, mientras que en los gauges axiales solo sobreviven las polarizaciones físicas de los bosones vectoriales.

Para finalizar esta sección es importante mencionar un tipo de gauge físico que tendrá especial relevancia en este trabajo. Estableciendo $\xi = 0$ y $n^2 = 0$ (el vector introducido es tipo luz o *light-like*) se tiene el denominado *light-cone gauge* o LCG. Como veremos en el Capítulo 6, las propiedades de factorización se pueden escribir de forma más simple en el LCG.

3. Amplitudes de scattering

En la sección anterior se motivó el cálculo perturbativo de la función de Green de *n*-puntos en el espacio de momentos para la teoría QCD con acople electromagnético y fermiones no masivos. Sin embargo, las funciones de Green, por sí mismas, no son observables físicos. La cantidad que suele medirse en los colisionadores de partículas es la sección eficaz de dispersión o *scattering* (u otras directamente vinculadas con ella). Para poder relacionar la sección eficaz con las funciones de Green, es útil comenzar con una descripción de la matriz S.

Considérese un estado inicial $|P_{i_1}, \ldots, P_{i_N}, -T\rangle$, en el marco de una teoría libre en el instante -T. Dicho estado describe un conjunto de partículas con impulsos bien definidos (o sea, es autoestado del operador momento). Entre los instantes -t y t (con $t \leq T$) se activa una interacción, que hace evolucionar al estado mediante un operador U. Aplicando este operador U al estado $|P_{i_1}, \ldots, P_{i_N}, -T\rangle$, se puede calcular el estado evolucionado al instante T.

Recordando las nociones clásicas de los procesos de scattering, se busca cuantificar la probabilidad de que partículas con momento P_{i_1}, \ldots, P_{i_N} en -T tengan momento P_{f_1}, \ldots, P_{f_M} en T. Por ende, al pasar a QFT, esto se traduce en calcular la probabilidad de transición entre los estados $|P_{i_1}, \ldots, P_{i_N}, T\rangle$ y $|P_{f_1}, \ldots, P_{f_M}, T\rangle$. A partir de aquí, usando el operador evolución U se define la matriz S (*S-matrix* o matriz de scattering) como

$$S_{FI} = \langle P_{f_1}, \dots, P_{f_M}, T | P_{i_1}, \dots, P_{i_N}, T \rangle$$

= $\langle P_{f_1}, \dots, P_{f_M}, T | U(-T, T) | P_{i_1}, \dots, P_{i_N}, -T \rangle$, (1.3.1)



Fig. 1.3: Reglas de Feynman para los factores que deben agregarse en las patas externas al calcular la matriz S, en reemplazo de los propagadores asociados. Estas reglas se complementan con las exhibidas en las figuras 1.1 y 1.2, para los propagadores y los vértices de interacción, respectivamente. Los índices griegos son de Lorentz, i corre sobre los colores de los quarks y a sobre los distintos gluones. s indica el spin y λ indica la polarización de los bosones de gauge.

en el límite $t \to \infty$, con F y I designando las configuraciones de momentos iniciales y finales, respectivamente. De este modo, la matriz S cuantifica la superposición entre el estado inicial disponible y un estado final buscado. Además, suele definirse una matriz adicional, \mathcal{T} , que se obtiene a partir de la matriz de scattering restando la identidad. O sea $S_{FI} = \text{Id} + \mathcal{T}_{FI}$. Conceptualmente, la matriz \mathcal{T} corresponde a la amplitud de probabilidad de efectuar una transición entre estados con configuraciones de momentos estrictamente distintas. La conservación de la probabilidad se traduce en la unitariedad de la matriz S, lo que lleva a la condición

$$SS^{\dagger} = \mathrm{Id} \iff 2\mathrm{Im}\left(\mathcal{T}\right) = \mathcal{T}\mathcal{T}^{\dagger},$$
(1.3.2)

que es la base del teorema óptico (ver Capítulo 7 de Ref. (1)).

El próximo paso es vincular la matriz S (o, equivalentemente, la matriz \mathcal{T}) con la función de Green en el espacio de momentos. Para esto se emplea la fórmula de reducción LSZ (4). Dicha fórmula (cuya demostración para casos sencillos puede encontrarse en la mayoría de los libros de QFT, por ejemplo en Ref. (1)) establece que la matriz S para el scattering de N partículas en Mpuede obtenerse a partir de la función de Green conexa y amputada de N+M-puntos en el espacio de momentos. De esta manera, al trabajar en el régimen perturbativo de la teoría, se hereda una descomposición en diagramas de Feynman conexos y amputados para la matriz de scattering. Por ende, existen también reglas de Feynman para la matriz S, las cuales contienen a las asociadas a la función de Green de n-puntos en el espacio de momentos y se adicionan reglas para identificar las partículas de los estados inicial y final. Estos factores adicionales aparecen al amputar los diagramas y se exhiben, para el modelo descripto por la densidad lagrangiana (1.1.15), en la figura 1.3.

Nótese que cuando aparecen fermiones en las patas externas deben sustituirse los propagadores por espinores; al aparecer gluones o fotones los propagadores se reemplazan por los correspondientes vectores de polarización. Para el caso de partículas escalares, como el bosón de Higgs, no deben agregarse factores adicionales.

Por otro lado, varias teorías de campos cuánticos, incluida QCD con acoples electromagnéticos, respetan la invariancia de Poincaré 4-dimensional. Esto se traduce en la aparición de una delta de Dirac en la matriz S que fuerza la conservación del impulso en las patas externas. Por convención suele definirse un nuevo elemento de matriz, \mathcal{A} , como

$$\mathcal{T}_{FI}(P_{i_1},\ldots,P_{i_n};P_{f_1},\ldots,P_{f_m}) = \imath(2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_{j=1}^n P_{i_j} - \sum_{j=1}^m P_{f_j}\right) \\ \mathcal{A}_{FI}(P_{i_1},\ldots,P_{i_n};P_{f_1},\ldots,P_{f_m}) , \qquad (1.3.3)$$

de forma tal de separar la conservación de momentos del resto del proceso de interacción. La cantidad \mathcal{A} se conoce como amplitud de scattering y es uno de los objetos fundamentales para efectuar cálculos en QFT. Estrechamente relacionada con \mathcal{A} , es posible definir lo que se conoce como amplitud de scattering amputada, \mathcal{A}_{amp} , que se calcula utilizando las mismas reglas de Feynman pero no se colocan factores adicionales acompañando a las patas externas de los diagramas. En este trabajo utilizaremos fuertemente estos objetos, en particular, las amplitudes con la pata inicial amputada (ver Capítulo 6 para más detalles).

3.1. Secciones eficaces

Hasta el momento, todas las definiciones efectuadas corresponden a objetos de interés teórico. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que detrás de estos formalismos matemáticos se encuentra un modelo físico para explicar el comportamiento de los constituyentes fundamentales de la materia. Por ende es necesario contrastar la teoría con la realidad, definiendo cantidades que puedan ser medidas experimentalmente. Dado que la principal fuente de datos experimentales proviene de colisionadores de partículas, resulta de gran utilidad calcular secciones eficaces de scattering.

El concepto de sección eficaz aparece en varias áreas de la física, y se relaciona con la capacidad de obtener información acerca de un objeto a través de patrones de dispersión. Centrándonos en el contexto de física de partículas, es posible efectuar colisiones contra un blanco fijo o bien entre ellas. La relación entre el número de partículas dispersadas e incidentes permite definir la sección eficaz del proceso en cuestión.

Teniendo la definición de \mathcal{T} , a través de la matriz \mathcal{A} , es posible obtener una expresión para la sección eficaz de scattering. Por empezar la probabilidad de transición por unidad de tiempo en términos de la matriz \mathcal{T} se puede escribir

$$\dot{P} = \frac{|\mathcal{T}_{FI}|^2}{NT},$$
 (1.3.4)

en donde N es un factor de normalización dado por

$$N = \langle P_{i_1}, \dots, P_{i_n} | P_{i_1}, \dots, P_{i_n} \rangle \langle P_{f_1}, \dots, P_{f_m} | P_{f_1}, \dots, P_{f_m} \rangle .$$
(1.3.5)

Por convención, en este trabajo se adoptará la normalización $\langle p \mid q \rangle = 2E(2\pi)^3 \delta^{(3)} (\vec{p} - \vec{q})$ para estados de una partícula. De esta manera, suponiendo que la región espacial considerada tiene un volumen V finito, vale $\delta^{(4)}(0) = \frac{VT}{(2\pi)^4}$ y con ello la ecuación (1.3.4) toma la forma, para el caso de colisiones $2 \rightarrow n$

$$\dot{P} = \frac{(2\pi)^4 |\mathcal{A}_{FI}|^2}{4E_A E_B V} \delta^{(4)} \left(P_A + P_B - \sum_{j=1}^n P_j \right) \prod_{i=1}^n \frac{1}{2E_i V}, \qquad (1.3.6)$$

en donde P_A y P_B son los cuadrimomentos de las partículas entrantes y P_i (con i = 1, ..., n) los momentos asociados a las partículas presentes en el estado final. Adviértase que (1.3.6) muestra que, con esta definición, la probabilidad de transición por unidad de tiempo es constante (vista como función de T).

El próximo paso es normalizar \dot{P} y sumar sobre los estados finales deseados. Es así que se define la sección eficaz de scattering como

$$\Delta \sigma = \sum_{P_j \in \Omega} \frac{\dot{P}}{\phi}, \qquad (1.3.7)$$

siendo ϕ el flujo de partículas incidentes y Ω una región en el espacio de momentos del estado final. Para el caso de colisiones binarias, suele elegirse $\phi = V^{-1} |\vec{v}_A - \vec{v}_B|$. Luego, considerando el límite $V \to \infty$ se puede definir la sección eficaz diferencial de scattering como

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 |\mathcal{A}_{FI}|^2}{4E_A E_B |\vec{v}_A - \vec{v}_B|} \delta^{(4)} \left(P_A + P_B - \sum_{j=1}^n P_j \right) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 \vec{p}_i}{2E_i (2\pi)^3}, \quad (1.3.8)$$

en donde la productoria que involucra los diferenciales de los momentos de las partículas se conoce como diferencial de espacio de fase. La energía E_i de las partículas presentes en el estado final se relaciona con sus momentos $\vec{p_i}$ a través de la relación de dispersión correspondiente. En el caso de partículas no masivas, vale $|\vec{p_i}| = E_i$. Por otro lado, es posible reescribir el espacio de fases utilizando notación estrictamente covariante. Para ser más estrictos, el espacio de fases asociado a n partículas se puede escribir como

$$dPS^{2 \to n} = \prod_{i=1}^{n} \frac{d^{3}\vec{p_{i}}}{2E_{i}(2\pi)^{3}} = \prod_{i=1}^{n} \frac{d^{4}P_{i}}{(2\pi)^{4}} \delta_{+} \left(P_{i}^{2}\right) , \qquad (1.3.9)$$

en donde utilizamos la distribución δ_+ (P_i^2) para exigir que solo se consideren aquellos estados con $P_i^2 = 0$ (partículas no masivas) y $E_i > 0$ (energía positiva). Más adelante veremos que existe una

relación muy estrecha entre integrales de espacio de fases e integrales de loop (también llamadas integrales de Feynman).

Cabe señalar que es posible simplificar la expresión (1.3.8), integrando sobre las variables que quedan definidas por la conservación del impulso y eligiendo un sistema de referencia adecuado. Por ejemplo, para colisiones $2 \rightarrow 2$ trabajando en el sistema centro de masa (CM) se tiene

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\mathcal{M}_{FI}}{64\pi^2 E_{CM}^2} \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|}, \qquad (1.3.10)$$

en donde se utiliza $\mathcal{M}_{FI} = |\mathcal{A}_{FI}|^2$ para identificar al elemento de matriz al cuadrado, Ω mide el ángulo sólido desde una de las partículas incidentes y $|\vec{p}_i|$, $|\vec{p}_f|$ designan el módulo del vector momento de las partículas iniciales y finales, respectivamente. Nótese que si las partículas involucradas tienen igual masa, la expresión se torna aún más compacta pues $|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f|$.

2. NOCIONES ACTUALES DE QCD

En este capítulo se describen técnicas modernas para el cálculo de amplitudes de scattering en QCD. La primera de ellas, conocida como método de descomposición de color, permite identificar estructuras a nivel amplitud y reducir notablemente el número de diagramas de Feynman involucrados en los cálculos. Por otro lado, el método de helicidad explota las propiedades de los vectores de gauge y de los espinores para simplificar las contribuciones a una dada amplitud de scattering. Para concluir, se describe el espacio de color+espín y se definen los cargas de color.

1. Motivaciones técnicas

El modelo estándar fue planteado hace más de cuatro décadas. Desde entonces, se han realizado una gran cantidad de cálculos de secciones eficaces de scattering y otros observables relevantes experimentalmente. Gran parte del trabajo teórico fue desarrollado en el contexto de teoría de perturbaciones, usando la expansión en diagramas de Feynman como una de las principales herramientas. Sin embargo este enfoque comenzó a resultar poco eficiente conforme los procesos estudiados involucraban más partículas y requerían mayor precisión.

Hace poco más de una década, no había demasiados observables de QCD calculados con precisión de *next-to-next-to-leading order* (NNLO o tercer orden en teoría de perturbaciones) y la gran mayoría de ellos eran totalmente inclusivos (esto es, el cálculo de la sección eficaz completa integrando sobre todo el espacio de fases de las partículas salientes). Asimismo, los cálculos con precisión NLO (segundo orden en teoría de perturbaciones o *next-to-leading order*) solo estaban disponibles para procesos con cuatro o menos partículas en estado final.

Sin embargo, para llevar a cabo el proceso de contrastación teórica del modelo estándar o buscar nueva física, es necesario utilizar observables cada vez más complejos (esto es, con más partículas en estado final) y ser capaz de calcularlos con mayor precisión (es decir, a órdenes superiores en teoría de perturbaciones). De hecho, se sabe que las correcciones de QCD a procesos generados en colisionadores hadrónicos son tan grandes que los cálculos efectuados a primer orden solo pueden considerarse como estimaciones cualitativas. Para tornar la situación aún más compleja, existe una estrecha relación entre aumento de precisión e incremento del número de partículas en los procesos. Esto se debe a que muchos métodos de cálculo a nivel hadrónico (por ejemplo, el método de sustracción (7; 8)) requieren emplear elementos de matriz con partículas extra para combinarlos con las correcciones que involucran loops y obtener un resultado finito mensurable experimentalmente.

En consecuencia, desde el punto de vista teórico, aumentar la precisión exige considerar más partículas en estado final y lidiar con más loops. Pero en el enfoque de diagramas de Feynman clásico estos requisitos se traducen en una proliferación exponencial de diagramas, los cuales a su vez son cada vez más difíciles de resolver.

Para resolver diagramas que involucran muchos loops se han desarrollado técnicas que permiten atacar el problema desde dos enfoques distintos. Por un lado, como veremos en el Capítulo 5, en los últimos años se realizó un gran progreso en técnicas de cálculo de integrales de Feynman. Por otro lado, los métodos de unitariedad explotaron ciertas propiedades de los elementos de matriz para reducir las expresiones involucradas. Estos métodos fueron muy utilizados a 1-loop (ver (9)) y en la actualidad se está trabajando para extenderlo a 2-loops (ver (10)).

Aún a tree-level es posible encontrar serias dificultades cuando el número de partículas en estado final aumenta. Por esta razón, el enfoque de diagramas de Feynman debe ser complementado con técnicas que permitan efectuar los cálculos de forma más eficiente. Siguiendo esta perspectiva, en las siguientes secciones explicaremos el formalismo de descomposición de color y el método de helicidad. La combinación de ambas estrategias es crucial para avanzar en la barrera multi-partícula y multi-loop.

2. Descomposición de color

Antes de adentrarnos en la descripción del formalismo de descomposición de color, realicemos una breve digresión informal sobre el rol del grupo en una teoría de gauge¹. Un grupo G es un conjunto de elementos, dotado de una aplicación binaria $\mu : G \times G \to G$ que posee elemento identidad y cuyos elementos son todos inversibles. El elemento inverso se suele denotar a^{-1} (aunque formalmente corresponde escribir $b = a^{-1}$ tal que $\mu(a, b) = \text{Id} = \mu(b, a)$). Cuando la operación es conmutativa, se habla de grupos Abelianos; en caso contrario se dice que son no Abelianos. Los generadores del grupo son elementos del mismo que permiten obtener cualquier otro elemento usando la operación μ . Por ejemplo, ($\mathbb{Z}_n, +$) es un grupo cíclico generado por 1 mientras que ($SU(N_C)$,.) es un grupo no Abeliano infinito formado por matrices de tamaño $N_C \times N_C$ unitarias con determinante 1, que es infinitamente generado.

¹ Para el lector interesado, puede encontrarse una discusión más detallada en Ref. (11) y las referencias allí indicadas.

Dado un grupo es posible construir un grupo de Lie, que es el que define una teoría de gauge. Un grupo de Lie es una variedad diferencial definida por un grupo G y operaciones $\mu : G \times G \to G$ (producto) e $i : G \to G$ (inversa), que son diferenciables. Por otro lado, el álgebra de Lie \mathfrak{g} se obtiene como el álgebra de grupo de G sobre un cuerpo K (en nuestro caso de interés, el cuerpo podrá ser \mathbb{R} o bien, más en general, \mathbb{C}). Un elemento del álgebra se expresa como $\sum \lambda_g g$ con $g \in G$ y $\lambda_g \in K$. Debido a que tiene estructura de espacio vectorial, el álgebra de Lie admite generadores \mathbf{T}^a . Más aún, apelando al mapeo exponencial, es posible relacionar un grupo de Lie con su correspondiente álgebra: es decir, todo elemento de G se puede obtener a través de la exponenciación de un elemento del álgebra de grupo. El álgebra es isomorfa al espacio tangente del elemento identidad del grupo y los generadores \mathbf{T}^a corresponden a una base de $T_{\mathrm{Id}}G$. Por ende, los elementos del álgebra se pueden tratar como campos y se compatibilizan las nociones de derivadas de Lie (sobre campos) con corchetes de Lie (sobre elementos del álgebra). Lo importante aquí es observar que \mathfrak{g} queda definida por

$$\left[\boldsymbol{T}^{a}, \boldsymbol{T}^{b}\right] = i f_{abc} \sqrt{2} \, \boldsymbol{T}^{c} \,, \qquad (2.2.1)$$

en donde f_{abc} son las constantes de estructura. Desde el punto de vista algebraico, los elementos que satisfacen (2.2.1) son generadores de una representación del álgebra \mathfrak{g} . Así, se puede definir una representación fundamental y una representación adjunta, en la cual los elementos T^a se identifican con aplicaciones lineales.

Por otro lado es importante señalar que los generadores de un álgebra de Lie verifican

$$\left[\left[\boldsymbol{T}^{a}, \boldsymbol{T}^{b} \right], \boldsymbol{T}^{c} \right] + \left[\left[\boldsymbol{T}^{c}, \boldsymbol{T}^{a} \right], \boldsymbol{T}^{b} \right] + \left[\left[\boldsymbol{T}^{b}, \boldsymbol{T}^{c} \right], \boldsymbol{T}^{a} \right] = 0, \qquad (2.2.2)$$

que se conoce como identidad de Jacobi. Consecuencia del carácter antisimétrico de los corchetes de Lie, esta identidad es relevante para llevar a cabo demostraciones de otras propiedades que resultan útiles en los cálculos físicos. También tienen importancia física los invariantes de Casimir, que son elementos pertenecientes al centro del álgebra (esto es, que conmutan con todos los otros elementos) y, en particular, los correspondientes invariantes inducidos sobre las posibles representaciones.

Volviendo a la discusión física, vamos a centrarnos en una teoría de gauge asociada al grupo $SU(N_C)$, en donde N_C es el correspondiente número de colores del modelo. En QCD (o QCD con acoples electromagnéticos) debemos especificar $N_C = 3$, aunque es posible llevar a cabo la discusión de forma completamente genérica. Así, en el resto de esta sección, el término gluón se usará para designar a un vector de gauge de $SU(N_C)$ que pertenece a la representación adjunta de dicho grupo, por lo que lleva etiquetas con índices de color $a = 1 \dots N_C^2 - 1$. Por su parte, los quarks y antiquarks son elementos de la representaciones fundamental y antifundamental, respectivamente, llevando etiquetas de color $i, \bar{j} = 1 \dots N_C$. Los generadores de la representación fundamental

 $SU(N_C)$ son matrices $N_C \times N_C$ hermíticas y sin traza, $\mathbf{T}^a = (T^a)_i^{\bar{j}}$, cuya normalización se fija de acuerdo a la relación

$$\operatorname{Tr}(T^a T^b) = T_F \,\delta^{ab}\,,\tag{2.2.3}$$

considerando, usualmente, $T_F = 1$. Cabe señalar que la normalización de los generadores puede elegirse arbitrariamente. Los resultados físicos son independientes de esta elección, aunque pueden ocurrir cambios en pasos intermedios de los cálculos. En particular, esta convención resulta útil para evitar que aparezcan factores $\sqrt{2}$ en la definición de las amplitudes primitivas, aunque será necesario compensarlos en la definición de las reglas de Feynman sin color.

En la literatura, las matrices T^a para el caso $N_C = 2$ se llaman matrices de Pauli, mientras que para el caso $N_C = 3$ son conocidas como matrices de Gell-Mann. Por otro lado, la representación adjunta puede obtenerse a partir de las constantes de estructura, definiendo sus generadores como

$$\boldsymbol{T}^{a}(A) = \imath f_{abc} \,, \tag{2.2.4}$$

dado que satisfacen la relación (2.2.1). Respecto de la normalización, se fija de acuerdo a

$$\operatorname{Tr}(\boldsymbol{T}^{a}(A)\boldsymbol{T}^{b}(A)) = T_{A}\,\delta^{ab}\,,\qquad(2.2.5)$$

 $\operatorname{con} T_A = N_C.$

Teniendo los generadores de forma explícita es posible verificar que

$$\boldsymbol{T}^{a}.\boldsymbol{T}^{a} = C_{F} \mathrm{Id}_{C}, \qquad (2.2.6)$$

$$\boldsymbol{T}^{a}(A).\boldsymbol{T}^{a}(A) = C_{A}\mathrm{Id}(A), \qquad (2.2.7)$$

en donde C_A y C_F son los invariantes de Casimir asociados a la representaciones adjunta y fundamental, respectivamente. Id_C se usa para denotar el elemento identidad en la representación fundamental, mientras que Id(A) es la identidad en la adjunta. Además, se puede demostrar que

$$C_A = T_A = N_C,$$
 (2.2.8)

$$C_F = \frac{N_C^2 - 1}{2N_C}, \qquad (2.2.9)$$

usando para ello una de las identidades de Fierz,

$$(T^{a})_{i}^{\bar{j}}(T^{a})_{i'}^{\bar{j'}} = \delta_{i}^{\bar{j'}}\delta_{i'}^{\bar{j}} - \frac{1}{N_C}\delta_{i}^{\bar{j}}\delta_{i'}^{\bar{j'}}, \qquad (2.2.10)$$

que resulta muy útil para reinterpretar las interacciones en teorías $SU(N_C)$ en términos de flujo de color, como se esquematiza en la figura 2.1. También es posible pensar en esta identidad como



Fig. 2.1: Interpretación pictórica de las identidades (2.2.10) y (2.2.11). Si los índices de la representación fundamental (antifundamental) se identifican con líneas entrantes (salientes), luego los gluones corresponden a líneas dobles. El flujo disconexo de color está suprimido por un factor $1/N_C$, de acuerdo a la identidad de Fierz. El vértice triple puede pensarse como la resta de dos lazos de color que fluyen con sentidos opuestos.

una consecuencia directa de que los generadores de $SU(N_C)$ tengan traza nula, siendo el término proporcional a $1/N_C$ el responsable de implementar dicha condición.

El formalismo de descomposición de color consiste en expresar la estructura de color que acompaña a cualquier diagrama utilizando únicamente matrices T^a (esto es, generadores de la representación fundamental). Para ello apréciese que

$$f_{abc} = -\frac{i}{T_F} \left[\operatorname{Tr} \left(\boldsymbol{T}^a \boldsymbol{T}^b \boldsymbol{T}^c \right) - \operatorname{Tr} \left(\boldsymbol{T}^a \boldsymbol{T}^c \boldsymbol{T}^b \right) \right], \qquad (2.2.11)$$

en donde se utilizaron (2.2.1) y (2.2.5). Teniendo en mente las reglas de Feynman expresadas en el Capítulo 1 (ver figura 1.2) notemos que todos los vértices de interacción pueden ser escritos en términos T^a (o bien, T^a). Para la interacción quark-gluón es trivialmente válido. Si definimos la función

$$V_{3g}\left(p_{1}^{\mu}, p_{2}^{\nu}, p_{3}^{\rho}\right) = \left(p_{1} - p_{2}\right)^{\rho} \eta^{\mu\nu} + \left(p_{2} - p_{3}\right)^{\mu} \eta^{\nu\rho} + \left(p_{3} - p_{1}\right)^{\mu} \eta^{\rho\mu}, \qquad (2.2.12)$$

luego el vértice de tres gluones se puede escribir como

$$i g_{\rm S} \left[\operatorname{Tr} \left(\boldsymbol{T}^a \boldsymbol{T}^b \boldsymbol{T}^c \right) - \operatorname{Tr} \left(\boldsymbol{T}^a \boldsymbol{T}^c \boldsymbol{T}^b \right) \right] V_{3g} \left(p_1^{\mu}, p_2^{\nu}, p_3^{\rho} \right) .$$
(2.2.13)

La posibilidad restante, el vértice de cuatro gluones, involucra términos multiplicados por el factor $f_{abe}f_{cde}$, que puede ser reescrito como

$$f_{abe}f_{cde} = -\frac{1}{2} \left[\operatorname{Tr} \left(\boldsymbol{T}^{a} \boldsymbol{T}^{b} \boldsymbol{T}^{c} \boldsymbol{T}^{d} \right) - \operatorname{Tr} \left(\boldsymbol{T}^{a} \boldsymbol{T}^{b} \boldsymbol{T}^{d} \boldsymbol{T}^{c} \right) \right]$$

$$- \operatorname{Tr} \left(\boldsymbol{T}^{a} \boldsymbol{T}^{c} \boldsymbol{T}^{d} \boldsymbol{T}^{b} \right) + \operatorname{Tr} \left(\boldsymbol{T}^{a} \boldsymbol{T}^{d} \boldsymbol{T}^{c} \boldsymbol{T}^{b} \right)], \qquad (2.2.14)$$

en donde usamos las relaciones (2.2.10) y (2.2.11). Nótese que las contribuciones proporcionales a $1/N_C$ introducidas por la identidad de Fierz no aportan al resultado final, con lo cual siempre se obtiene una única traza con todas las posibles permutaciones de elementos en su interior.

Consecuencia de las relaciones mostradas, todos los diagramas podrán escribirse de forma genérica como combinaciones lineales de estructuras de color (productos o trazas de matrices T^a) por factores cinemáticos. Por ejemplo, generalizando la identidad dada en (2.2.14), es posible demostrar que la amplitud de scattering de n gluones a nivel árbol se puede escribir como

$$\mathcal{A}_{n}^{(0)}(\{p_{i},h_{i},a_{i}\}) = g_{\mathrm{S}}^{n-2} \sum_{\sigma \in S_{n}/\mathbb{Z}_{n}} \operatorname{Tr}\left(\boldsymbol{T}^{a_{\sigma(1)}} \dots \boldsymbol{T}^{a_{\sigma(n)}}\right) A_{n}^{(0)}\left(\sigma(1^{h_{1}}),\dots,\sigma(n^{h_{n}})\right), (2.2.15)$$

en donde $\{p_i, h_i, a_i\}$ son los momentos, helicidades y colores de los gluones, S_n/\mathbb{Z}_n es el grupo de permutaciones no-cíclicas de *n* elementos (es decir, identificando las que dejan invariante la traza de *n* matrices) y las cantidades $A^{(0)}$ se conocen como amplitudes parciales. Las amplitudes parciales solo contienen información cinemática y dependen del ordenamiento de las partículas en cuestión. Más aún, se dice que las amplitudes parciales son *color-ordered*, pues solo reciben contribuciones de ciertas estructuras de color. De esta forma, el cálculo de las mismas es más sencillo que el de las amplitudes completas. Estos objetos poseen algunas propiedades interesantes:

- 1. son invariantes frente a reordenamiento cíclico;
- 2. cumplen la identidad de reversión, esto es,

$$A_n^{(0)}\left(1^{h_1},\ldots,n^{h_n}\right) = (-1)^n A_n^{(0)}\left(n^{h_n},\ldots,1^{h_1}\right); \qquad (2.2.16)$$

3. las singularidades solo pueden ocurrir cuando dos partículas adyacentes se vuelven paralelas o cuando alguna es emitida con energía nula.

Además es posible usar operaciones de paridad y conjugación de carga para calcular otras amplitudes parciales, lo cual indica que muchas de ellas no son independientes. En particular, existe una relación no-trivial que permite agregar nuevas restricciones a estos objetos. Dicha relación se conoce como identidad de desacople U(1) y se puede derivar extendiendo el grupo de gauge a $U(N_C)$. Como $U(N_C) \equiv SU(N_C) \times U(1)$, será necesario agregar un nuevo generador proporcional a la identidad. En términos físicos, esta extensión sería compatible con agregar un fotón B de QCD a la teoría. Nótese que esto no es lo mismo que trabajar en QCD+QED (modelo definido en el Capítulo 1), pues dicha teoría posee constantes de acoplamiento distintas para gluones y fotones. Sin embargo, como la identidad commuta con cualquier generador de $SU(N_C)$, $f_{Idbc} = 0$
para todos b, c, lo cual implica que no existen vértices de interacción que mezclen gluones y fotones. Consecuencia de esto, resulta que $\mathcal{A}_{ng+A} = 0$. Pero, es interesante notar que, desde el punto de vista puramente cinemático, no hay diferencias entre fotones y gluones. De esta forma, las amplitudes primitivas no distinguen entre estas dos partículas. Así, se obtiene que

$$0 = A_n^{(0)} (1, 2, ..., n - 1, n) + A_n^{(0)} (2, 1, ..., n - 1, n) + ...$$
(2.2.17)
+ $A_n^{(0)} (2, 3, ..., 1, n) ,$

relación que puede demostrarse fácilmente con las ideas discutidas en este párrafo. Cabe señalar que también se puede probar esta expresión usando técnicas supersimétricas, por lo cual suele ser conocida como identidad de Ward supersimétrica.

Usando amplitudes primitivas se pueden escribir todas las amplitudes a nivel árbol de QCD, factorizando en todos los casos las estructuras de color. Para algunos procesos, como el scattering de gluones, es posible obtener fórmulas válidas para cualquier número de partículas. La presencia de quarks complica las expresiones, pues en ese caso quedan índices libres. De este modo es posible tener contribuciones que involucren trazas y productos de matrices T^a , también con índices libres. Para procesos con un par $q\bar{q}$ y n-2 gluones se tiene,

$$\mathcal{A}_{n}^{(0)}\left(\{p_{i},h_{i},a_{i}\}\right) = g_{\mathrm{S}}^{n-2} \sum_{\sigma \in S_{n-2}} \left(\boldsymbol{T}^{a_{\sigma(3)}} \dots \boldsymbol{T}^{a_{\sigma(n)}}\right)_{i_{1}}^{\bar{j}_{1}} \times A_{n}^{(0)}\left(1_{\bar{q}}^{h_{1}},2_{q}^{h_{2}},\sigma(3^{h_{3}}),\dots,\sigma(n^{h_{n}})\right), \qquad (2.2.18)$$

en donde se indican explícitamente los fermiones colocando un subíndice. Para procesos con más pares $q\bar{q}$ aparecen más cadenas de productos de matrices, y el número de estructuras crece notablemente.

Por otra parte, este formalismo es adecuado para tratar amplitudes con loops. Por supuesto, incrementar el número de loops o incluir líneas fermiónicas dificulta la obtención de fórmulas generales. Para el scattering de n gluones a 1-loop se puede escribir

$$\mathcal{A}_{n}^{(1)}(\{p_{i},h_{i},a_{i}\}) = g_{\mathrm{S}}^{n} \left[\sum_{\sigma \in S_{n}/\mathbb{Z}_{n}} N_{C} \operatorname{Tr}(\boldsymbol{T}^{a_{\sigma(1)}},\ldots,\boldsymbol{T}^{a_{\sigma(n)}}) A_{n;1}^{(1)}(\sigma(1^{1_{n}}),\ldots,\sigma(n^{h_{n}})) + \sum_{c=2}^{[n/2]+1} \sum_{\sigma \in S_{n}/S_{n;c}} \operatorname{Tr}(\boldsymbol{T}^{a_{\sigma(1)}},\ldots,\boldsymbol{T}^{a_{\sigma(c-1)}}) \operatorname{Tr}(\boldsymbol{T}^{a_{\sigma(c)}},\ldots,\boldsymbol{T}^{a_{\sigma(n)}}) \times A_{n;c}^{(1)}(\sigma(1^{1_{n}}),\ldots,\sigma(n^{h_{n}})) \right], \qquad (2.2.19)$$

en donde $A_{n;c}^{(1)}$ son amplitudes parciales a 1-loop, $S_{n;c}$ es el conjunto de las permutaciones de n elementos exceptuando aquellas que dejan invariantes ambas trazas separadamente y [x] es el



Fig. 2.2: Reglas de Feynman color stripped, para la obtención de amplitudes primitivas en el formalismo de descomposición de color. Se muestran las reglas para: a)- vértice $q\bar{q}g$, b)- vértice $\bar{q}qg$, c)tres gluones, y d)- cuatro gluones. Se utiliza siempre la convención de momentos salientes y el ordenamiento en el etiquetado sigue el sentido horario.

mayor entero menor o igual a x. Las amplitudes parciales $A_{n;c}^{(1)}$ pueden ser expresadas en términos de las amplitudes primitivas, $A_{n;1}^{(1)}$, las cuales tienen la ventaja de ser *color-ordered*.

Con respecto a la aplicación de estas técnicas a cálculos de secciones eficaces, recordemos que es necesario obtener el elemento de matriz al cuadrado, sumando sobre los colores entrantes y salientes puesto que el color no es físicamente observable. Al momento de llevar a cabo dichas sumas será muy útil emplear la identidad de Fierz para combinar productos de matrices T^a . Más aún, el empleo de estas técnicas permite obtener, de forma completamente natural, un ordenamiento en potencias de $1/N_C$. Como en QCD es $N_C = 3$, dos órdenes de diferencia en tal expansión involucran una supresión del orden del 10 % en las correspondientes contribuciones. Por ende, al tratar procesos muy complicados (sobre todo con varios loops o muchas partículas), es frecuente truncar el desarrollo y retener contribuciones dominantes en N_C . Es más, al considerar el límite $N_C \to \infty$, solo contribuye la potencia más alta en N_C y el manejo de la estructura de color se torna notablemente más sencillo.

Por último, podemos introducir las denominadas reglas de Feynman sin color o *color stripped*, las cuales se obtienen a partir de las reglas convencionales para $SU(N_C)$ pero seleccionando solamente aquellos términos que tienen un ordenamiento específico de las partículas de acuerdo a su estructura de color y dejando únicamente la contribución cinemática². En el caso de la interacción quark-gluón, solo se factoriza la matriz T^a . Sin embargo, dado que importa el ordenamiento de las partículas, tendremos que distinguir dos casos. Como se muestra en la figura 2.2, para el ordenamiento $q\bar{q}g$ (en sentido horario) el vértice quedará $-\frac{i}{\sqrt{2}}\gamma^{\mu}$. En cambio, se tiene $\frac{i}{\sqrt{2}}\gamma^{\mu}$ para $\bar{q}qg$. Para el triple vértice, fijamos el ordenamiento de las patas externas en sentido horario y tomamos la estructura proporcional a Tr $(\mathbf{T}^a \mathbf{T}^b \mathbf{T}^c)$, lo que lleva a que se pueda escribir

$$\frac{i}{\sqrt{2}} V_{3g} \left(p_1^{\mu}, p_2^{\nu}, p_3^{\rho} \right) , \qquad (2.2.20)$$

apelando a la función V_{3g} definida anteriormente. Finalmente, aplicando reiteradamente la fórmula dada en (2.2.14) y seleccionando la estructura proporcional a Tr $(\mathbf{T}^{a}\mathbf{T}^{b}\mathbf{T}^{c}\mathbf{T}^{d})$, se tiene que

$$\frac{i}{2} \left(2\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} - \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho} \right) , \qquad (2.2.21)$$

es el vértice correspondiente a la interacción de cuatro gluones. Con estas reglas es posible escribir cualquier amplitud parcial a nivel árbol; las mismas se encuentran resumidas en la figura 2.2. Por construcción, la validez de estas reglas se restringe al caso en el cual el ordenamiento de las partículas está fijo (lo que se conoce como amplitudes *color-ordered*). En amplitudes que involucran loops, las amplitudes parciales podrían no ser color-ordered, por lo cual habrá que descomponerlas en amplitudes primitivas y calcular estas últimas usando las reglas de Feynman sin color.

3. Formalismo de helicidad

La idea del formalismo de helicidad consiste en trabajar a nivel amplitud y tratar de forma separada cada configuración de helicidades: el resultado total se obtendrá sumando los cuadrados de cada amplitud separadamente. Entonces, comencemos discutiendo un poco sobre espinores y su utilidad para escribir amplitudes de scattering.

Las teorías de gauge usualmente consideradas respetan la invariancia de Poincarè del espaciotiempo 4-dimensional. Desde el punto de vista geométrico, podemos pensar que el espacio-tiempo corresponde a la variedad pseudo-Riemanniana (\mathbb{R}^4, η) con η la métrica de Minkowski habitual³. El correspondiente grupo de isometrías es el grupo de Poincarè, que tiene como subgrupos las

² Si bien el formalismo no lo exige, es útil factorizar también la constante de acoplamiento $g_{\rm S}$. Esta es la convención seguida usualmente en la literatura (ver Ref. (12), por ejemplo) y presenta la ventaja de permitir expresar las amplitudes parciales usando únicamente información cinemática.

³ Respecto de la signatura, en este trabajo utilizamos (+, -, -, -) para dimensión 4. La extensión a D dimensiones se llevará a cabo agregando más direcciones espaciales.

translaciones espacio-temporales y a las transformaciones de Lorentz. Las transformaciones de Lorentz se asocian al grupo O(1,3). En particular, la componente conexa que contiene a la identidad se denomina $SO^+(1,3)$ y se asocia a las transformaciones de Lorentz restringidas (esto es, las que preservan la orientación temporal y espacial). Más aún, $SO^+(1,3)$ es localmente isomorfo a $SL(2) \times SL(2)^4$. En consecuencia resulta de interés estudiar las posibles representaciones de $SL(2) \times SL(2)$, puesto que permitirán obtener los bloques fundamentales para armar objetos invariantes en la teoría de gauge.

Las representaciones de dimensión finita de $SL(2) \times SL(2)$ se clasifican como (p,q) con p,qnúmeros semienteros. Las representaciones fundamentales son (1/2,0) y (0,1/2) y describen los espinores de helicidad positiva y negativa, respectivamente. Siguiendo la notación presentada en Ref. (13), los espinores de helicidad positiva se escribirán λ_a , mientras que los de helicidad negativa $\tilde{\lambda}_{\dot{a}}$. Los índices a = 1, 2 se contraen con el tensor de Levi-Civita de 2-dimensiones, ϵ_{ab} o su inverso ϵ^{ab} , los cuales verifican que $\epsilon^{ab}\epsilon_{bc} = \delta^a_c$. Análogamente, para la representación (0, 1/2)se tienen las mismas propiedades pero usando índices \dot{a} . Si se contraen los espinores utilizando ϵ se tienen los invariantes de Lorentz

$$\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \epsilon^{ab} (\lambda_1)_a (\lambda_2)_b, \qquad (2.3.1)$$

$$\left[\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2\right] = \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} (\tilde{\lambda}_1)_{\dot{a}} (\tilde{\lambda}_2)_{\dot{b}}, \qquad (2.3.2)$$

que resultan antisimétricos frente al intercambio 1 \leftrightarrow 2. Por otra parte, los vectores pertenecen a la representación (1/2, 1/2), lo cual sugiere la posibilidad de reconstruirlos usando espinores de ambas helicidades. Sean p_{μ} un vector y los objetos

$$\sigma^{\mu}_{a\dot{a}} = (\mathbb{I}, \vec{\sigma})_{a\dot{a}} \tag{2.3.3}$$

$$\bar{\sigma}^{\mu}_{a\dot{a}} = (-\mathbb{I}, \vec{\sigma})_{a\dot{a}} \tag{2.3.4}$$

formados a partir de las matrices σ de Pauli. Definamos

$$p_{a\dot{a}} = \sigma^{\mu}_{a\dot{a}} p^{\nu} \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} p_0 & p_0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ -p_0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & p_0 \end{pmatrix}, \qquad (2.3.5)$$

con η la métrica de Minkowski 4-dimensional. Nótese que Det $(p_{a\dot{a}}) = p^2$ y que $p_{a\dot{a}}$ puede pensarse como una matriz de 2 × 2 expandida de forma genérica de acuerdo a

$$p_{a\dot{a}} = \lambda_a \tilde{\lambda}_{\dot{a}} + \mu_a \tilde{\mu}_{\dot{a}} \,, \tag{2.3.6}$$

⁴ En realidad, $SL(2, \mathbb{C})$ es el revestimiento universal de $SO^+(1,3)$. Por tener fibra 2, puede armarse el isomorfismo local con el producto directo $SL(2) \times SL(2)$. Esta construcción es muy relevante pues está relacionada con la teoría de espinores. De hecho, $SL(2, \mathbb{C})$ es un grupo de espín, y estos grupos se construyen a partir del centro de un álgebra de Clifford (como, por ejemplo, el álgebra de Dirac).

ya que los espinores λ , $\tilde{\lambda}, \mu$, $\tilde{\mu}$ admiten ser expresados como vectores de dos componentes. Cuando $p^2 = 0$, el determinante del biespinor $p_{a\dot{a}}$ se anula y vale que $p_{a\dot{a}} = \lambda_a \tilde{\lambda}_{\dot{a}}^5$. Más aún, si se quiere que $p_{a\dot{a}}$ sea real puede elegirse $\tilde{\lambda} = \pm \bar{\lambda}$, en donde el signo elegido determina el signo de p_0 .

Con todo esto, el mapeo dado en (2.3.5) permite construir de forma unívoca un vector tipo luz (o nulo) a partir de dos espinores λ y $\overline{\lambda}$. Sin embargo, el mapeo inverso no es posible pues $u\lambda y u^{-1}\widetilde{\lambda}$ se asocian al mismo vector p (real y tipo luz) para cualquier $u \in \mathbb{S}^1$. De todos modos, notemos que fijado p construimos $p_{a\dot{a}}$ y si $p^2 = 0$ entonces vale

$$p_{a\dot{a}}\lambda^a = 0 = p_{a\dot{a}}\tilde{\lambda}^{\dot{a}} \,, \tag{2.3.7}$$

que son las ecuaciones de Dirac quirales (en términos de espinores). Lo que es importante apreciar es que dado un vector nulo p existen espinores que nos permiten armar $p_{a\dot{a}}$. Esta observación motiva la introducción de la notación alternativa

$$\left|p^{+}\right\rangle \equiv \lambda^{a}(p), \qquad (2.3.8)$$

$$|p^{-}\rangle \equiv \tilde{\lambda}^{\dot{a}}(p),$$
 (2.3.9)

para espinores $\lambda(p), \tilde{\lambda}(p)$ asociados a p. Por otro lado, usando la tradicional notación de Dirac, podemos escribir los correspondientes elementos duales como

$$\langle p^- | \equiv \lambda_a(p), \qquad (2.3.10)$$

$$\langle p^+ | \equiv \tilde{\lambda}_{\dot{a}}(p), \qquad (2.3.11)$$

y así reinterpretar los productos escalares

$$\langle \lambda(p)\lambda(k)\rangle = \langle p^- | k^+ \rangle = \langle pk \rangle , \qquad (2.3.12)$$

$$\left[\tilde{\lambda}(p)\tilde{\lambda}(k)\right] = \left[p^+ \mid k^-\right] = \left[pk\right], \qquad (2.3.13)$$

que es la notación estándar usada en la literatura.

Por la forma en que fueron definidos $\langle ij \rangle$ y [ij], resultan antisimétricos y, usando alguna representación particular para los espinores, pueden escribirse de forma explícita en términos de invariantes cinemáticos. Algunas propiedades útiles son:

- $\langle ij \rangle [ji] = s_{ij}$ en donde $s_{ij} = (p_i + p_j)^2$;
- la identidad de Gordon

$$\langle i^{\pm} | \gamma^{\mu} | j^{\pm} \rangle = 2p_i^{\mu};$$
 (2.3.14)

⁵ Esta propiedad es consecuencia de que el producto exterior de dos vectores de dimensión n siempre origina una matriz $n \times n$ de rango 1.

 la posibilidad de escribir los operaciones de proyección sobre espacios de quiralidad definida, esto es,

$$|i^{\pm}\rangle\langle i^{\pm}| = \frac{1}{2} (\mathbb{I} \pm \gamma_5) \not\!\!p_i, \qquad (2.3.15)$$

en donde $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3;$

la identidad de Fierz

$$\langle i^+ | \gamma^\mu | j^+ \rangle \langle k^+ | \gamma_\mu | l^+ \rangle = 2 [ik] \langle lj \rangle , \qquad (2.3.16)$$

la cual resulta muy útil para unificar cadenas de espinores;

• la invariancia frente a conjugación de carga

$$\langle i^{+} | \gamma^{\mu} | j^{+} \rangle = \langle j^{-} | \gamma^{\mu} | i^{-} \rangle; \qquad (2.3.17)$$

• y la identidad de Schouten

$$\langle ij \rangle \langle kl \rangle = \langle ik \rangle \langle jl \rangle + \langle il \rangle \langle kj \rangle , \qquad (2.3.18)$$

que también se aplica a corchetes y es consecuencia de la total antisimetría de estos objetos. Esta última relación es el análogo a la identidad de Jacobi, pero aplicada a productos de espinores.

También puede demostrarse que, ante la aplicación del operador de paridad, vale la transformación $\langle ij \rangle \rightarrow -[ij]$. En particular, esto es muy útil para expresar amplitudes de helicidad conectadas por paridad.

El mapeo vector-espinor también puede utilizarse para escribir vectores de polarización asociados a bosones de gauge no masivos, en particular aquellos correspondientes a polarizaciones físicas. Sabemos que los vectores de gauge no masivos en 4 dimensiones tienen 2 grados de libertad, correspondientes a las polarizaciones + y -. Los vectores de polarización asociados deben satisfacer las condiciones físicas

$$\epsilon^{\pm}(p) \cdot p = 0,$$
 (2.3.19)

$$\epsilon^{\pm}(p) \cdot n = 0,$$
 (2.3.20)

en donde n es un vector nulo arbitrario tal que $n \cdot p \neq 0$. Este vector es el que se utiliza en un gauge axial (en el LCG, por ejemplo) para definir una dirección privilegiada en el espacio-tiempo

y eliminar los grados de libertad espurios. Por otro lado, sabemos que la conjugación compleja invierte la helicidad de los bosones vectoriales, o sea $(\epsilon^{\pm})^* = \epsilon^{\mp}$. En consecuencia, se verifica que

$$\epsilon^{+}(p) \cdot \epsilon^{+}(p) = 0 = \epsilon^{+}(p) \cdot (\epsilon^{-}(p))^{*},$$
 (2.3.21)

$$\epsilon^{+}(p) \cdot \epsilon^{-}(p) = -1 = \epsilon^{+}(p) \cdot (\epsilon^{+}(p))^{*},$$
 (2.3.22)

en donde la última ecuación se relaciona con el fijado de la normalización. Entonces, eligiendo como vector de referencia a n, puede definirse

$$\epsilon^{\pm}_{\mu}(p,n) = \pm \frac{\langle p^{\pm} | \gamma_{\mu} | n^{\pm} \rangle}{\sqrt{2} \langle n^{\mp} | p^{\pm} \rangle}, \qquad (2.3.23)$$

y corroborarse que esta expresión es compatible con todos los requisitos mencionados anteriormente. Es importante apreciar que el vector de referencia n puede ser elegido de forma independiente para cada vector de polarización presente en el proceso. Por otra parte, expresar los vectores de polarización físicos usando (2.3.23) pone explícitamente de manifiesto otras propiedades relevantes:

 Ante un cambio en el vector de referencia n (equivalente a cambiar el gauge, manteniéndose en el conjunto de LCG),

$$\epsilon^{\pm}_{\mu}(p,n) \to \epsilon^{\pm}_{\mu}(p,n') = \epsilon^{\pm}_{\mu}(p,n) + f(n,n',p) p_{\mu},$$
 (2.3.24)

en donde f(n, n', p) es una función escalar que depende de ángulos/corchetes. Combinada con las identidades de Ward, este resultado garantiza la invariancia de gauge de las amplitudes de scattering físicas.

• Se verifica la relación de completitud

$$\sum_{h=\pm} \epsilon^{h}_{\mu}(p,n) \left(\epsilon^{h}_{\nu}(p,n)\right)^{*} = -\eta_{\mu\nu} + \frac{n_{\mu}p_{\nu} + p_{\mu}n_{\nu}}{n \cdot p}, \qquad (2.3.25)$$

que se asemeja al tensor de polarización en LCG.

Vale que

$$\epsilon^{\pm}(p_i, p_j) \left| j^{\pm} \right\rangle = 0 = \langle j^{\mp} \right| \epsilon^{\pm}(p_i, p_j), \qquad (2.3.26)$$

que puede demostrarse fácilmente empleando las identidades anteriormente exhibidas para los productos espinoriales.

Como comentario final, es de vital importancia recordar que todas las propiedades y definiciones realizadas en esta sección son válidas trabajando sobre un espacio-tiempo de 4 dimensiones y métrica de Minkowski. Cambiar el número de dimensiones o deformar el espacio-tiempo (por cambios en la métrica) induce cambios en el grupo de isometrías, y varias de las identidades aquí mencionadas dejarían de ser válidas. Un caso particular, que analizaremos en más detalle en los Capítulos 4 y 7, es el de la identidad de Fierz para cadenas de espinores.

3.1. Amplitudes MHV

En el contexto de amplitudes primitivas es posible utilizar la notación e identidades del método de helicidad para calcular soluciones generales. Partiendo de las reglas de Feynman color-stripped, se pueden escribir los diagramas de Feynman y luego fijar las helicidades de las partículas intervinientes. La presencia de gluones externos simplifica mucho los cálculos a nivel árbol, pues es posible cancelar un gran número de diagramas eligiendo los vectores de referencia de forma adecuada. De hecho, se puede probar que

$$A_n^{(0)}\left(1^+,\ldots,n^+\right) = 0, \qquad (2.3.27)$$

eligiendo un vector nulo de referencia genérico. Seleccionando $n_1 = p_2$ y $n_i = p_1$ para las partículas restantes, se puede ver que

$$A_n^{(0)}\left(1^-, 2^+, 3^+, \dots, n^+\right) = 0, \qquad (2.3.28)$$

con lo cual existe una gran cantidad de amplitudes primitivas que son nulas apelando a argumentos de helicidad. Más aún, es posible generalizar trivialmente el resultado de (2.3.27) si se introduce un par quark-antiquark.

Las primeras configuraciones de helicidad que dan resultados no trivialmente nulos permiten definir las amplitudes de máxima violación de helicidad o MHV (maximally helicity violating). Para el caso del scattering de n gluones, la correspondiente amplitud MHV a nivel árbol es

$$A_n^{(0)}\left(1^-, 2^-, 3^+, \dots, n^+\right) = \frac{i \langle 12 \rangle^4}{\prod_{i=1,\dots,n} \langle i, i+1 \rangle}, \qquad (2.3.29)$$

que se conoce como fórmula de Parke-Taylor (ver Refs. (14) y (15)). Es sencillo probar este resultado utilizando el método BCFW (Brito-Cachazo-Feng-Witten, expuesto en Refs. (16) y (17)). Es más, usando dicho método se puede demostrar una generalización para el caso de amplitudes con un par quark-antiquark. Concretamente, se obtiene

$$A_n^{(0)}\left(1_{\bar{q}}^-, 2_q^+, 3^-, 4^+, \dots, n^+\right) = \frac{i\langle 13 \rangle^3 \langle 23 \rangle}{\prod_{i=1,\dots,n} \langle i, i+1 \rangle}, \qquad (2.3.30)$$

en donde q y \bar{q} son las etiquetas que indican al quark y antiquark, respectivamente. Es interesante señalar que las ecuaciones (2.3.29) y (2.3.30) pueden ser empleadas para definir las subamplitudes básicas de tres partículas, que son elementos clave en el método de recursión BCFW. Por otro lado, aplicando el operador de paridad (que revierte la helicidad de todas las partículas) se obtienen las amplitudes $\overline{\text{MHV}}$.



Fig. 2.3: Diagramas de Feynman asociados al proceso $0 \rightarrow 5g$ que contribuyen a la amplitud primitiva $A_5^{(0)}(1,2,3,4,5)$. Consideramos todos los momentos salientes, y ordenamos las partículas (con sus correspondientes índices de color, vectores de polarización y momentos) en sentido horario. Apréciese la importante reducción de diagramas respecto del enfoque habitual.

4. Ejemplo de aplicación: $0 \rightarrow 5g$

Consideremos la teoría de QCD con acoples electromagnéticos. Supongamos que queremos calcular algún proceso de scattering a nivel árbol, como por ejemplo $0 \rightarrow 5g^6$. El primer paso consiste en dibujar todos los posibles diagramas de Feynman no equivalentes y utilizar las reglas correspondientes para escribir las contribuciones al elemento de matriz. En este caso tenemos 25 posibles diagramas, pero utilizando el formalismo de descomposición de color podemos reducir notablemente el trabajo. De hecho, sabemos que es suficiente con calcular una amplitud primitiva: el resto de los términos se recuperarán usando (2.2.15). Entonces de los 25 diagramas originales, solo tendremos que utilizar 10, que son los únicos que contribuirán al termino que acompaña a la estructura de color $\text{Tr}(T^1T^2T^3T^4T^5)$. Más aún, mirando la figura 2.3 nos damos cuenta de que solo hay dos topologías involucradas y los diagramas requeridos son generados realizando permutaciones cíclicas en las patas externas.

Por otra parte, podemos utilizar el formalismo de helicidad. Obviando los índices de las partículas cuando corresponden al ordenamiento estándar, sabemos que

$$A_5^{(0)}(+,+,+,+,+) = 0 = A_5^{(0)}(+,+,+,+,-), \qquad (2.4.1)$$

⁶ Estrictamente hablando, este proceso por si solo carece de significado físico, puesto que el confinamiento de QCD hace que los gluones no puedan existir en estado libre y, por ende, que puedan ser medidos experimentalmente. El ente físico que puede ser medido en los detectores es lo que se conoce como *jet*. Un jet es literalmente un haz de partículas que satisface ciertos requisitos (los cuales pueden variar de acuerdo con el experimento), y que está compuesto principalmente por mesones y hadrones. Desde el punto de vista teórico, y en el contexto del llamado modelo de partones, un jet es originado por un quark o gluón. De esta forma, no tiene sentido físico pensar en gluones como partículas observables directamente. Por tal motivo, en esta sección nos restringiremos a los aspectos computacionales solamente.

y la primer combinación no-nula es

$$A_5^{(0)}(-,-,+,+,+) = \frac{i\langle 12\rangle^4}{\langle 12\rangle \langle 23\rangle \langle 34\rangle \langle 45\rangle \langle 51\rangle}, \qquad (2.4.2)$$

por tratarse de una amplitud MHV. De esta manera, por la propiedad cíclica de las amplitudes primitivas y la aplicación de paridad, solo falta calcular $A_5^{(0)}(-, +, -, +, +)$. Sin embargo, de acuerdo a la identidad de desacople, esta amplitud viene dada por

$$\begin{aligned} A_{5}^{(0)}(-,+,-,+,+) &= -A_{5}^{(0)}(1^{-},3^{-},2^{+},4^{+},5^{+}) - A_{5}^{(0)}(1^{-},3^{-},4^{+},2^{+},5^{+}) \\ &- A_{5}^{(0)}(1^{-},3^{-},4^{+},5^{+},2^{+}) \\ &= \frac{-i\langle 13\rangle^{3}}{\langle 23\rangle\langle 34\rangle\langle 45\rangle\langle 51\rangle} \left(\frac{\langle 43\rangle}{\langle 24\rangle} + \frac{\langle 23\rangle\langle 45\rangle}{\langle 42\rangle\langle 25\rangle} + \frac{\langle 23\rangle\langle 51\rangle}{\langle 52\rangle\langle 21\rangle}\right), \quad (2.4.3) \end{aligned}$$

con lo cual no es necesario efectuar cálculos explícitos con diagramas y reglas de Feynman. Si aplicamos la identidad de Schouten repetidamente, junto con la antisimetría de los ángulos, llegamos a

$$A_5^{(0)}(-,+,-,+,+) = \frac{i\langle 13\rangle^4}{\langle 12\rangle \langle 23\rangle \langle 34\rangle \langle 45\rangle \langle 51\rangle}, \qquad (2.4.4)$$

lo cual era completamente esperable por tratarse de una amplitud MHV. Este ejemplo muestra el poder de las técnicas basadas en descomposición de color, junto con el método de helicidad. En particular, la estrategia resulta muy útil en procesos que solo involucran gluones.

5. Espacio de color+espín

En el contexto de QCD (o QCD con acoples electromagnéticos), el color y el espín son los números cuánticos relevantes para describir los posibles estados de la teoría y sus interacciones. Por ende, debemos establecer algunas convenciones para poder expresar amplitudes de scattering exponiendo de forma explícita tal información.

En este trabajo los elementos de matriz son considerados como vectores en un espacio de color+espín, siguiendo los lineamientos introducidos en Refs. (7; 18). Es importante señalar que aquí no se pretende caracterizar de forma global la estructura de las amplitudes de scattering, sino solamente establecer una notación adecuada para analizar sus propiedades de transformación bajo la acción de operadores de color y de espín. En tal caso, el elemento de matriz asociado a un proceso de n partículas puede ser escrito de forma general como

$$\mathcal{A}_{a_1, a_2, \dots, a_n}^{c_1, c_2, \dots, c_n; s_1, s_2, \dots, s_n} \left(p_1, p_2, \dots, p_n \right) , \qquad (2.5.1)$$

en donde $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ y $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ son índices de color, espín y sabor, respectivamente. Cuando la partícula *i* es un quark (antiquark), $c_i \in \{1, \ldots, N_C\}$ corresponde a un índice de la representación fundamental (antifundamental). En cambio, si *i* corresponde a un gluón, $c_i \in \{1, \ldots, N_C^2 - 1\}$ está asociado a la representación adjunta. Los momentos de las partículas intervinientes son denotados como $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Para expandir el espacio de color+espín (*ket*'s) es necesario introducir una base ortonormal, dada por

$$\{|c_1, c_2, \dots, c_n\rangle \otimes |s_1, s_2, \dots, s_n\rangle\}, \qquad (2.5.2)$$

que junto a su base dual (esto es, la base del espacio dual o bra's en el lenguaje de Dirac) posibilita escribir las amplitudes de scattering como

$$\mathcal{A}_{a_1,\dots,a_n}^{c_1,\dots,c_n;s_1,\dots,s_n}\left(p_1,\dots,p_n\right) = \left(\langle c_1,\dots,c_n | \otimes \langle s_1,\dots,s_n | \right) | \mathcal{A}_{a_1,\dots,a_n}\left(p_1,\dots,p_n\right) \rangle , \qquad (2.5.3)$$

en donde $|\mathcal{A}_{a_1,\ldots,a_n}(p_1, p_2, \ldots, p_n)\rangle$ es un vector en el espacio de color+espín. Es importante remarcar que todas las amplitudes de dispersión consideradas tienen sus momentos externos onshell. Más aún, restringiéndonos al caso de QCD con acoples electromagnéticos, asumimos que todas las partículas externas son no masivas, con lo cual $p_i^2 = 0$.

Por otra parte es útil introducir una notación especial para los operadores de color asociados a las interacciones de QCD. En particular, nos interesa caracterizar los procesos de emisión de gluones. Para ello, empecemos considerando el espacio de una partícula. Tomando un gluón con índice de color a y usando las reglas de Feynman para QCD obtenidas en el Capítulo 1 se tienen dos situaciones posibles:

- el gluón es emitido por un quark con color entrante j' y saliente j, y la interacción es proporcional a T_{ji}^a ;
- o bien, es emitido por otro gluón con color entrante c y saliente b, siendo la interacción proporcional a $i f_{cab}$,

con $a, b, c \in \{1, \ldots, N_C^2 - 1\}$ (adjunta) y $j', j \in \{1, \ldots, N_C^2 - 1\}$ (fundamental). Esto motiva la definición de las cargas de color T_i como el operador asociado a la emisión de un gluón por parte de una partícula *i*. Con ello, $T_i \equiv T_i^a$ es un vector respecto al índice *a* y una matriz respecto a *i*. Explícitamente,

- $\langle j | \mathbf{T}_i | j' \rangle \equiv T^a_{jj'}$ cuando *i* es un quark saliente;
- $\langle j | \mathbf{T}_i | j' \rangle \equiv -T^a_{j'j}$ cuando *i* es un antiquark saliente;
- y, $\langle b | \boldsymbol{T}_i | c \rangle \equiv i f_{abc}$ cuando *i* es gluón.

Debido a que la simetría de crossing implica que un quark (antiquark) saliente corresponde a un antiquark (quark) entrante, la extensión para contemplar emisión de radiación de gluones desde patas entrantes es directa. Además, las cargas de color se pueden definir como operadores en el espacio de n partículas efectuando la extensión por la identidad.

Para concluir esta discusión, debemos mencionar que los procesos de scattering físico en QCD conservan color. En consecuencia las amplitudes son singletes bajo SU(3), lo que implica

$$\sum_{i} \boldsymbol{T}_{i} \left| \mathcal{A}_{a_{1},\ldots,a_{n}} \left(p_{1},\ldots,p_{n} \right) \right\rangle = 0, \qquad (2.5.4)$$

con i corriendo sobre todas las partículas del proceso. Además resulta útil introducir la notación

$$\boldsymbol{T}_i \cdot \boldsymbol{T}_j \equiv \sum_a \, \boldsymbol{T}_i^a \boldsymbol{T}_j^a \,, \tag{2.5.5}$$

que simboliza el flujo de color entre una partícula i de estado inicial y otra j en estado final, mediado por el intercambio de gluones. Este tipo de productos aparece al considerar interferencias entre amplitudes de scattering, lo que justifica que se realice la suma sobre el color del gluón mediador. Además, la definición (2.5.5) es conmutativa y esto permite simplificar el manejo algebraico de estas expresiones.

3. DIVERGENCIAS EN CORRECCIONES RADIATIVAS

Generalmente, los cálculos a órdenes superiores en el contexto de teorías de gauge conllevan la presencia de objetos mal definidos, con potenciales singularidades. En este capítulo describimos los distintos tipos de divergencias físicas que pueden aparecer tanto en las amplitudes como en las secciones eficaces de scattering. Comentaremos algunos métodos para regularizar las expresiones involucradas, haciendo especial hincapié en regularización dimensional. Para concluir, nos centramos en las divergencias infrarrojas en QCD y describimos algunos resultados que garantizan la posibilidad de computar observables finitos en dicha teoría.

1. Tipos de divergencias

La realización de cálculos en el contexto de teoría de perturbaciones aplicada a QFT involucra, en pasos intermedios, el tratamiento de expresiones con problemas de definición. Estos problemas se traducen en la posibilidad de hallar singularidades que admiten una interpretación física, y que pueden ser de dos tipos diferentes: ultravioletas (UV) o infrarrojas (IR). También existen otros problemas de definición, asociados a singularidades espurias o no físicas, las cuales se relacionan con las técnicas aplicadas a ciertos cálculos particulares. Por ejemplo, al utilizar gauges axiales se introducen factores adicionales con singularidades asociadas al vector de cuantización n. Mencionaremos con un poco más de detalle este punto al discutir las integrales de Feynman en LCG, en el Capítulo 5.



Fig. 3.1: Diagrama responsable de la corrección a la autoenergía de un quark a 1-loop en QCD. Se indica de forma explícita la convención de momentos y etiquetado de índices de color.

Las divergencias ultravioletas se asocian con el límite de altas energías de las teorías consi-

deradas. En particular, aparecen al computar diagramas con loops ya que los mismos involucran sumas sobre estados virtuales de energía arbitrariamente elevada. Pensando en el espacio de momentos, sabemos que explorar dichas regiones corresponde a analizar el comportamiento puntual de las teorías. Y, por la forma en que están definidas las QFT habituales, el límite de coincidencia (esto es, interacción en un punto del espacio tiempo) es siempre singular. Para ejemplificar la situación, usemos las reglas de Feynman de QCD (expuestas en el Capítulo 1) para escribir las correcciones a 1-loop del propagador fermiónico mostradas en la figura 3.1^1 . Suponiendo un quark no masivo con cuadrimomento p, la amplitud asociada es

$$\mathcal{A} = g_{\rm S}^2 C_F \bar{u}(p) \gamma^{\mu} \left(-i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} d_{\mu\nu}(q) \frac{\not q - \not p}{q^2 (q-p)^2} \right) \gamma^{\nu} u(p) , \qquad (3.1.1)$$

en donde podemos utilizar un gauge covariante sin necesidad de incluir ghosts ya que los mismos no se acoplan a los quarks. En consecuencia, efectuamos el reemplazo $d_{\mu\nu} = -\eta_{\mu\nu}$, usamos algunas propiedades básicas del álgebra de Dirac y obtenemos

$$\mathcal{A} = g_{\rm S}^2 C_F(D_{\rm Dirac} - 2) \left(-i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{q^{\mu}}{q^2 (q-p)^2} \right) \bar{u}(p) \gamma_{\nu} u(p) , \qquad (3.1.2)$$

con el momento q, asociado al loop, careciendo de restricciones cinemáticas y D_{Dirac} dimensión del álgebra de Dirac. Si se realiza un cambio de variables en la integral y se pasa a coordenadas polares, se puede apreciar que el integrando se comporta como $|q|^D$, con D = 1 grado de divergencia superficial del diagrama considerado. En consecuencia, el objeto bajo consideración está mal definido debido a problemas en la región de alta energía: esto es lo que se conoce como divergencia UV.

En las teorías de campos de interés físico² es posible implementar un procedimiento sistemático, conocido como renormalización, que permite absorber las divergencias UV en la normalización de los campos y parámetros de la teoría. En las siguientes secciones describiremos brevemente este procedimiento, haciendo hincapié en la definición de las ecuaciones de grupo de renormalización y la evolución del acoplamiento de la teoría.

Por otra parte existen las denominadas divergencias infrarrojas (IR), que ocurren cuando el proceso estudiado involucra partículas o estados virtuales de muy baja energía o degenerados. Por ejemplo, si consideramos el proceso de scattering $0 \rightarrow ggggg$ (descripto en la última sección

 $^{^1}$ Volveremos a analizar este proceso en el Capítulo 6, llevando a cabo el cálculo de forma más detallada.

 $^{^{2}}$ Actualmente hay un creciente interés por las denominadas *teorías efectivas*, que suelen incluir términos en el lagrangiano que involucran operadores no renormalizables. En consecuencia, los modelos inducidos carecen de sentido en el límite UV. De todas formas, el uso de dichas teorías puede considerarse aceptable para modelar algunos fenómenos particulares y utilizar los resultados obtenidos como punto de partida de una teoría válida a altas energías.

del Capítulo 2), vemos que el elemento de matriz se torna divergente si alguna de las partículas tiene momento nulo o si hay partículas que sean paralelas. Para ser más explícitos, al elevar al cuadrado (2.4.2) se obtiene

$$\frac{s_{12}^3}{s_{23}s_{34}s_{45}s_{51}},\tag{3.1.3}$$

que es uno de los posibles términos que contribuyen al elemento de matriz. Si el gluón 3 se emite con energía nula, entonces

$$s_{3j} = (p_3 + p_j)^2 \to p_j^2 = 0,$$
 (3.1.4)

ya que $p_j^2 = 0$ por tratarse de partículas no masivas on-shell. Esta situación se conoce como divergencia *soft*. También podría ocurrir que $s_{3j} \to 0$ debido a que las partículas 3 y j son emitidas en la misma dirección. Por estar trabajando con partículas no masivas, la relación de dispersión implica $p_j^{\mu} = (|\vec{p}|, \vec{p}) \operatorname{con} \vec{p}$ un vector en \mathbb{R}^3 que describe la dirección de propagación. Entonces, si 3 y j son paralelas existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $p_j^{\mu} = \lambda p_3^{\mu}$. En consecuencia,

$$s_{3j} = (1+\lambda)^2 p_3^2 = 0, \qquad (3.1.5)$$

lo cual origina una divergencia en (3.1.3): esto es lo que se conoce como singularidad colineal. Notemos que tanto las divergencias colineales como las soft se producen cuando la partícula emitida no tiene masa. Cualquier teoría con bosones no masivos tiene divergencias soft, aunque es necesario que existan autointeracciones entre ellos o acoples con otras partículas sin masa para que puedan originarse singularidades colineales.

Es importante apreciar que las divergencias infrarrojas se producen debido a que alguna escala de energía involucrada en el problema se vuelve muy pequeña. Sin embargo, más allá de constituir un problema, en configuraciones cinemáticas asociadas a divergencias IR existen ciertas propiedades que permiten simplificar notablemente los cálculos. Tal comportamiento es el tema de estudio central de este trabajo, y lo discutiremos extensivamente a partir del Capítulo 6.

2. Métodos de regularización

La noción de regularización se asocia a dotar de significado a alguna expresión definida formalmente. En el contexto de QFT, la aplicación de las reglas de Feynman provee un proceso algorítmico para generar diagramas y asignarles una escritura simbólica. La existencia de un algoritmo constituye una noción de definición: siguiendo una serie de pasos lógicos se obtiene un conjunto de grafos y a cada uno se le asigna una expresión simbólica. Como vimos en el Capítulo 1, las amplitudes de scattering pueden interpretarse en términos probabilísticos y usarse para calcular cantidades físicas. En consecuencia, podemos expresar una amplitud \mathcal{A} utilizando funciones que dependen de parámetros del problema considerado. De esta forma, se intenta dar una representación en términos de funciones a una expansión diagramática, lo cual dota de significado a los diagramas de Feynman. Con ello, suele pensarse en las amplitudes de scattering como diagramas de Feynman. Sin embargo, la presencia de singularidades UV e IR hace que esta identificación *naive* resulte insuficiente. Es tales circunstancias debe complementarse la definición de las reglas de Feynman con un procedimiento para dar algún sentido a las expresiones singulares. Dicho procedimiento es lo que se conoce como método de regularización.

Actualmente, existen diversas estrategias para llevar a cabo la regularización de teorías de campos. El procedimiento de regularización depende, en general, del tipo de divergencia que se quiera tratar. En el caso de las divergencias UV, puede utilizarse el método del *cut-off*. El mismo consiste en imponer un límite de integración en el loop y restringir la cinemática de los estados virtuales en su interior. Para ello se introduce una escala arbitraria Λ y se limita el volumen de integración a la región $\{q^0 \leq \Lambda\}$.

Una alternativa al método del *cut-off* es la regularización de Pauli-Villars. Este tratamiento se basa en suponer la existencia de partículas muy masivas (con masas del orden de una energía Λ muy superior a cualquier escala presente en el proceso físico estudiado), lo que conduce a modificaciones en la forma de escribir los propagadores. De este modo, se logra disminuir el grado superficial de divergencia de los diagramas y se obtiene un resultado finito, dependiente de Λ .

En los dos métodos anteriores, las singularidades UV quedan expuestas en contribuciones que divergen en el límite $\Lambda \to \infty$. Por lo tanto, en etapas intermedias de los cálculos, debe preservarse Λ finito. Si la cantidad que se está computando tiene sentido físico, toda dependencia en Λ debe cancelarse en el resultado final. En caso contrario, el problema no estaría en la teoría sino en el objeto que se está computando³.

Procedimientos análogos pueden ser implementados para solucionar las divergencias IR. Debido a que las mismas solo pueden estar presentes en teorías con partículas no masivas, una forma natural de llevar a cabo la regularización es introducir una masa m_g muy pequeña para los gluones (comparada con el resto de las escalas involucradas en el problema). Así, todas las divergencias IR aparecerán asociadas a contribuciones singulares en el límite $m_g \rightarrow 0$. Al igual

³ Al llegar a este punto de la discusión es donde se pone de manifiesto que la necesidad de utilizar métodos de regularización es inducida por la forma en que llevamos a cabo los cálculos. En otras palabras, si la cantidad que estamos computando es finita (por ejemplo, un número concreto) sería esperable que existiera una forma algorítmica de llegar a ese resultado sin tener que lidiar con singularidades. El enfoque de diagramas de Feynman posee muchas ventajas interpretativas, pero aquí vemos de forma explícita que al dividir el problema original en partes más pequeñas, existe el riesgo de forzar la introducción de elementos adicionales a la definición de la teoría.

que en el caso UV, si las cantidades computadas están bien definidas, toda dependencia singular en m_g debe cancelarse en el resultado final. De forma genérica, esta observación constituye una manera de clasificar como *observables bien definidos* a aquellos cuyas contribuciones finitas no dependen del regulador.

En el contexto de teorías de gauge, los métodos de regularización aquí descriptos pueden no resultar completamente adecuados. Esto se debe a que violan simetrías fundamentales de la teoría, pudiendo originar complicaciones de cálculo adicionales. Por ejemplo, es sabido que la aplicación del método de *cut-off* a ciertos procesos de QED conduce a la violación de la identidad de Ward-Takahashi⁴. Además, los métodos mencionados tratan de forma separada las singularidades UV y las IR, forzando la introducción de varios reguladores en los cálculos intermedios.

A continuación describimos en detalle la regularización dimensional, que provee una alternativa superadora a los procedimientos descriptos anteriormente.

2.1. Regularización dimensional

El método de regularización dimensional (DREG) es uno de los más utilizados en la comunidad de física de altas energías. Fue introducido en la década de 1970, de forma independiente por Giambiagi y Bollini (19), t'Hooft y Veltman (20), Cicuta y Montaldi (21), y Ashmore (22). La idea principal detrás del mismo es cambiar el espacio sobre el cual se lleva a cabo la integración, ya sea a nivel loop o espacio de fases. Más aún, el tratamiento de ambas situaciones es completamente análogo, exceptuando ciertas sutilezas relacionadas con la definición de los esquemas de regularización (ver Capítulo 4).

Antes de entrar en los detalles técnicos propios del método, consideremos un ejemplo matemático básico. Sea \mathbb{R}^d y la función $f(\vec{x}) = |\vec{x}|^{-1}$, que claramente no es integrable globalmente aunque si puede ser integrada sobre subespacios compactos de $(\mathbb{R}^d)^*$. Supongamos que queremos dar sentido al objeto

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\vec{x} f(\vec{x}) , \qquad (3.2.1)$$

entonces, podemos asumir *formalmente* que se trata de una integral ordinaria y efectuar un cambio de variables a coordenadas polares. De esta forma se tiene

$$I_d = C_d \int_0^\infty dr r^{d-2} \,, \tag{3.2.2}$$

en donde C_d es el volumen de la esfera unitaria en d dimensiones. Aquí podemos apreciar que el integrando tiene un polo en r = 0 (para d < 2) y que no es integrable en infinito si $d \ge 1$. Por

⁴ Ver, por ejemplo, (1), Capítulo 7.

lo tanto, modificando el valor de d se puede obtener una integral bien definida: esta es la idea central de DREG. Siguiendo con el razonamiento, se considera como definición de (3.2.1) a (3.2.2) permitiendo $d \in \mathbb{C}$, y se separa el problema en dos regiones: $\bar{B}(0, R) \in \mathbb{R}$ y su complemento. En otras palabras, asumimos bien definida I_d y escribimos

$$I_{d} = C_{d} \int_{0}^{R} dr r^{d-2} + C_{d} \int_{R}^{\infty} dr r^{d-2},$$

= $I_{d}^{1} + I_{d}^{2},$ (3.2.3)

tratando independientemente cada integral. Cabe señalar que, hasta este punto, todas las operaciones son formales, es decir que no tienen sentido matemático estricto. Sin embargo, como estamos usando d arbitrario, podemos asumir que $\operatorname{Re}(d) > 1$ para I_d^1 y que $\operatorname{Re}(d) < 1$ para I_d^2 . De esta forma, $I_d^1 \in I_d^2$ pasan a ser integrales matemáticamente definidas, dadas por

$$I_d^1 = C_d \frac{R^{d-1}}{d-1}, \qquad (3.2.4)$$

$$I_d^2 = -C_d \frac{R^{d-1}}{d-1}, \qquad (3.2.5)$$

que tienen igual forma pero involucran distintos valores de d. El último paso es efectuar $I_d^1 + I_d^2$ y asumir d en ambas contribuciones, lo cual conduce a la definición

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\vec{x} f\left(\vec{x}\right) \equiv 0, \qquad (3.2.6)$$

que se sigue como consecuencia de las identificaciones dadas en (3.2.3), (3.2.4) y (3.2.5).

A pesar de conducir a un resultado trivial, el anterior ejemplo es muy útil para interpretar regularización dimensional. Como puede apreciarse, tras introducir coordenadas polares, d se utilizó como un parámetro regulador. Sin embargo, originalmente d era la dimensión del espacio en el cual estaba definida la función f. Por ende, si se planea aplicar este método a teorías físicas definidas sobre un espacio-tiempo $D_{\rm ST}$ -dimensional, será necesario efectuar modificaciones adicionales para lograr consistencia en los diversos pasos intermedios. Esto se relaciona con la definición de los esquemas de regularización, que son el tópico principal del Capítulo 4.

Tras haber motivado el método de DREG, pasemos a realizar una descripción rigurosa de sus propiedades. En primer lugar, la noción de integral en un espacio *d*-dimensional, con $d \in \mathbb{C}$, puede introducirse a través de un operador $\mathcal{O}_d[F]$ que suele notarse

$$\mathcal{O}_d[F] = \int d^d \mathbf{x} F(\mathbf{x}), \qquad (3.2.7)$$

con \mathbf{x} vector en un espacio *d*-dimensional. Este operador debe satisfacer tres postulados básicos (23):

1. linealidad, o sea para cualquier par de funciones integrables G y F, y números complejos a y b

$$\int d^d \mathbf{x} \, \left(aF(\mathbf{x}) + bG(\mathbf{x}) \right) = a \int d^d \mathbf{x} \, F(\mathbf{x}) + b \int d^d \mathbf{x} \, G(\mathbf{x}) \,, \tag{3.2.8}$$

2. escaleo, esto es

$$\int d^d \mathbf{x} F(s\mathbf{x}) = s^{-d} \int d^d \mathbf{x} F(\mathbf{x}), \qquad (3.2.9)$$

debe valer para cualquier función F y cualquier escalar complejo s,

3. invariancia frente a translaciones,

$$\int d^d \mathbf{x} F(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \int d^d \mathbf{x} F(\mathbf{x}). \qquad (3.2.10)$$

Cabe señalar que es importante que la integral en *d*-dimensiones satisfaga los tres postulados mencionados para poder ser aplicada al cálculo de diagramas de Feynman. Por otro lado, puede demostrarse la existencia de tal operador y su unicidad, a menos de un factor de normalización global.

Por el contexto en el cual será aplicado el método, se puede asumir que las funciones que serán integradas son invariantes ante rotaciones y que dependen de un número finito de vectores, $p y q_1$ hasta q_N . Luego, se define explícitamente

$$\int d^d \mathbf{p} F(\mathbf{p}) = \int dp^1 \cdots dp^J \int d^{d-J} \mathbf{p}_T F(\mathbf{p}), \qquad (3.2.11)$$

como la integral d-dimensional de una función escalar F. Aquí, se está separando en una integral ordinaria en J-dimensiones sobre el espacio paralelo (esto es, el espacio en el cuál se encuentran los vectores q_i) y otra sobre el espacio transverso d - J-dimensional. Para considerar funciones tensoriales, basta aplicar esta definición a cada componente. Respecto de la integral en el espacio transverso, apréciese que no depende de la dirección y, con ello

$$\int d^{d-J} \mathbf{p}_T F(\mathbf{p}) = C_{d-J} \int_0^\infty dp_T \, p_T^{d-J-1} F(\mathbf{p}) \,, \qquad (3.2.12)$$

siendo

$$C_{d-J} = \frac{2\pi^{(d-J)/2}}{\Gamma((d-J)/2)}, \qquad (3.2.13)$$

el volumen de una hiperesfera en d-J-dimensiones. Esto puede obtenerse integrando una gaussiana en un espacio de $d \in \mathbb{N}$ dimensiones, continuando analíticamente el resultado para contemplar $d \in \mathbb{C}$ y luego reemplazando $d \to d - J$.

A partir de la definición dada en (3.2.11), es posible verificar que el operador \mathcal{O}_d satisface varias propiedades adicionales. Algunas de ellas son:

1. dados α , β y M complejos

$$\int d^{d}\mathbf{p} \frac{\left(\mathbf{p}^{2}\right)^{\alpha}}{\left(\mathbf{p}^{2}+M^{2}\right)^{\beta}} = \pi^{d/2} M^{d+2\alpha-2\beta} \frac{\Gamma\left(\alpha+d/2\right)\Gamma\left(\beta-\alpha-d/2\right)}{\Gamma\left(d/2\right)\Gamma\left(\beta\right)}.$$
 (3.2.14)

Esta propiedad tiene consecuencias muy importantes para la realización de cálculos concretos en el contexto de DREG. En particular, vemos que si M = 0 (esto es, la integral no involucra escalas externas), la regularización conduce a un resultado trivialmente nulo.

2. si F depende de la variable q

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \int d^d \mathbf{p} F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int d^d \mathbf{p} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} F(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \qquad (3.2.15)$$

que es equivalente a establecer que, en el contexto de DREG, integrales y derivadas conmutan. Este es el sustento matemático del método de integración por partes, que será comentado en el Capítulo 5.

3. si existe (y está matemáticamente definida) la integral $\int d^n x F(x) \, \mathrm{con} \, n$ natural, entonces

$$\int d^d \mathbf{x} F(\mathbf{x}) \quad \to \quad \int d^n x F(x) \,, \tag{3.2.16}$$

o sea, que para d natural el operador definido coincide con la integral habitual. Nótese que para que valga la propiedad debe ser posible extender el dominio de definición de F a d-dimensiones. Ello se logra agregando un espacio d-n-dimensional transverso y exigiendo que $F(\mathbf{x}) \to F(x)$ en el límite $d \to n$.

4. las integrales sobre distintas variables en el espacio d-dimensional conmutan, esto es

$$\int d^d \mathbf{x} \int d^d \mathbf{y} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int d^d \mathbf{y} \int d^d \mathbf{x} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \qquad (3.2.17)$$

Por otro lado, puede demostrarse que es posible extender la definición de forma consistente en el caso $d \rightarrow 0$. Para ver más propiedades de este operador, consultar Ref. (23).

Como comentario final, es importante señalar que el valor de d empleado en DREG es completamente arbitrario. Sin embargo, por cuestiones de convención, es muy frecuente adoptar la elección $d = 4 - 2\epsilon$, con $\epsilon \in \mathbb{C}$. El principal motivo es que muchas de las expresiones calculadas tienen problemas de definición en d = 4, que, además, es la dimensionalidad del espacio-tiempo físico usual. De esta manera, la aplicación de DREG exhibe las divergencias UV e IR en forma de polos en ϵ .

3. Divergencias UV: renormalización

La idea central de la renormalización es absorber las divergencias UV dentro del lagrangiano de la teoría. Para ello, se realiza una distinción entre cantidades *desnudas* y finitas, siendo las primeras infinitas. De esta forma es posible pensar que los parámetros que aparecen en el lagrangiano de una teoría son cantidades finitas que admiten ser expresadas en términos de las *desnudas*.

A modo de motivación introductoria, analicemos el procedimiento de renormalización aplicado a QED. Trabajando en $4 - 2\epsilon$ -dimensiones con el método de regularización dimensional, se puede definir el lagrangiano desnudo como

$$\mathcal{L}_{0} = \bar{\Psi}_{0} \left(i \partial_{\mu} \gamma^{\mu} - e_{0} \mu^{2\epsilon} A_{\mu_{0}} \gamma^{\mu} - m_{0} \right) \Psi_{0} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu_{0}} F^{\mu\nu}{}_{0} - \frac{1}{2} \left(\partial_{\mu} A_{\mu_{0}} \right)^{2}, \qquad (3.3.1)$$

en donde Ψ_0 , e_0 , $(A_{\mu})_0$ y m_0 son las cantidades desnudas, y μ es una escala de energía arbitraria que se introduce para mantener la constante de acoplamiento adimensional. Cabe señalar que esto es crucial para que la teoría pueda renormalizarse. Si no fuera así, el grado superficial de divergencia empeoraría conforme más vértices de interacción se agreguen a cada diagrama, lo cual provocaría que toda la expansión perturbativa esté mal definida.

El próximo paso es introducir contratérminos adecuados, para lo cual se define

$$\mathcal{L}_{Cnt} = \bar{\Psi} \left(\imath K_2 \partial_\mu \gamma^\mu - e K_1 \mu^{2\epsilon} A_\mu \gamma^\mu - m K_m \right) \Psi - \frac{1}{4} K_3 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} K_\alpha \left(\partial_\mu A_{\mu 0} \right)^2, \quad (3.3.2)$$

de forma tal que se cumpla $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{Cnt}$ para recuperar el modelo originalmente propuesto. Así, es posible vincular las cantidades *desnudas* con las físicas a través de factores K, que deben ser divergentes. Explícitamente se tiene que

$$A_0^{\mu} = \sqrt{1 + K_3} A^{\mu}, \qquad (3.3.3)$$

$$\Psi_0 = \sqrt{1 + K_2} \Psi, \qquad (3.3.4)$$

$$m_0 = \frac{1+K_m}{\left(1+K_2\right)^2}m, \qquad (3.3.5)$$

$$e_0 = \frac{1+K_1}{\left(1+K_2\right)^2 \left(1+K_3\right)} \mu^{\epsilon} e, \qquad (3.3.6)$$

siendo la última expresión la que permite analizar el comportamiento de la constante de acoplamiento en función de la escala de energía del proceso. Debe tenerse en cuenta que las identidades de Ward-Takahashi conducen a ciertas relaciones entre estos factores. Así se tiene que

$$K_1 = K_2,$$
 (3.3.7)

$$K_3 = -K_\alpha, \qquad (3.3.8)$$

con lo cual solo es necesario calcular K_1 , K_m y K_3 . Además es posible obtener sus valores computando los diagramas que contienen correcciones al vértice de interacción (aporta a K_1), aquellos con correcciones al propagador fermiónico (aporta a K_m) y los que modifican el propagador fotónico (aporta a K_3). La aplicación de esta estrategia a una teoría constituye un programa de renormalización, puesto que los contratérminos se obtienen tras computar todas las correcciones anteriores, a un orden perturbativo fijo. Respecto de las relaciones entre los factores de renormalización, cabe señalar que las mismas adoptan una forma más complicada en el caso de teorías no Abelianas (en particular, en QCD).

Sin embargo, las funciones K no están unívocamente definidas. En principio, deben incluir los términos divergentes en el límite $\epsilon \to 0$. Pero también es posible agregar otros términos finitos. La elección de los mismos define un esquema de renormalización y, en principio, los resultados físicos finales deben ser independientes de dicha elección. Sin embargo, esto es estrictamente cierto en el caso de cálculos que incluyan todos los términos de la serie perturbativa. Por otro lado, los diversos esquemas pueden ser conectados a través de una renormalización finita.

El esquema más sencillo se conoce como MS (*minimal subtraction*). Introducido independientemente por t'Hooft (24) y Weinberg (25) en 1973, en MS solo se extraen de la función de Green los términos que contienen polos en ϵ . Si bien las constantes de renormalización toman formas sencillas en este caso, no ocurre lo mismo con las funciones de Green (ver Ref. (26)). Una variación de este esquema, conocida como $\overline{\text{MS}}$ (modified minimal subtraction, introducido en Ref. (27)), acompaña los polos en ϵ con la constante de Euler-Mascheroni, $\gamma_E = 0,57721566$, y log(4 π). De hecho, se define

$$\frac{1}{\overline{\epsilon}} = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \log(4\pi) , \qquad (3.3.9)$$

y se extra
en todos los polos en $\bar{\epsilon}.$ Más aún, nótese que

$$\frac{(4\pi)^{\epsilon}}{\Gamma(1-\epsilon)} = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon), \qquad (3.3.10)$$

vale al orden más bajo en un desarrollo alrededor de $\epsilon = 0$. Este factor aparece reiteradamente en el desarrollo de cálculos a NLO ya que proviene de haber efectuado la integración sobre el espacio de fases de una partícula en $4 - 2\epsilon$ -dimensiones.

Finalmente, es posible deducir como se comportan las constantes de acoplamiento físicas de la teoría en función de la escala μ . Nótese que e_0 no depende de μ , con lo cual su derivada respecto a μ es nula. Por otra parte, de acuerdo a la relación dada en (3.3.6), es posible vincular e_0 con e. Suponiendo que e depende de μ y que existe $Z(\mu)$ tal que $e_0 = Z(\mu)e$ se tiene

$$0 = \frac{de_0}{d\mu} \iff e(\mu)\frac{dZ}{d\mu} + \frac{de}{d\mu}Z(\mu) = 0, \qquad (3.3.11)$$

que define una de las ecuaciones del grupo de renormalización. Apréciese que estas ecuaciones dependen del esquema en el cual se está trabajando. De forma genérica, puede introducirse una función β que dependa de la carga física *e* de forma tal que

$$\frac{de}{d\left(\log\left(\mu\right)\right)} = \beta(e), \qquad (3.3.12)$$

dicte la evolución de e al variar la escala de energía μ . La función β admite un desarrollo en potencias de e y puede obtenerse cada término de su desarrollo perturbativo calculando las correcciones con loops a los vértices y propagadores de la teoría. Trabajando a primer orden en ambas constantes de acoplamiento, se tiene

$$\frac{de}{d(\log(\mu))} = \frac{e^3}{12\pi^2} + \mathcal{O}(e^4) , \qquad (3.3.13)$$

$$\frac{dg_{\rm S}}{d\left(\log\left(\mu\right)\right)} = -\frac{g_{\rm S}^3}{12\pi^2} \left(11 - \frac{2}{3}N_f\right) + \mathcal{O}\left(g_{\rm S}^4\right) \,, \tag{3.3.14}$$

las cuales son las ecuaciones de evolución a 1-loop para las constantes de acoplamiento en QED y QCD, respectivamente. Puede apreciarse que, con $N_f = 6$ (cantidad aceptada actualmente de sabores de quarks en el modelo estándar), β es negativa para QCD mientras que para QED es positiva. Este resultado fue obtenido de forma independiente por Gross y Wilczek (28), y Politzer (29), en 1973. Nótese que el signo negativo en la función β para QCD implica las propiedades de confinamiento y libertad asintótica características de esta teoría.

Por otro lado, obsérvese que, a primer orden, estas ecuaciones reproducen la evolución de las constantes de acoplamiento en el modelo de quarks no masivos con interacciones de color y electromagnéticas. Más aún, es posible resolver (3.3.13) y (3.3.14) para obtener

$$\alpha_{s}(\mu) = \frac{\alpha_{s}(\mu_{0})}{1 + \alpha_{s}(\mu_{0})\frac{33 - 2N_{f}}{12\pi}\log\left(\frac{\mu^{2}}{\mu_{0}^{2}}\right)},$$
(3.3.15)

$$\alpha(\mu) = \frac{\alpha(\mu_0)}{1 - \frac{\alpha(\mu_0)}{3\pi} \log\left(\frac{\mu^2}{\mu_0^2}\right)},$$
(3.3.16)

en donde vale $\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}$, $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$, μ_0 es una escala de energía de referencia y μ es la escala de energía propia del proceso estudiado. Estas expresiones muestran explícitamente la dependencia de las constantes de acoplamiento respecto de la escala de energía μ_R , y justifica el hecho de que se las denomine *running couplings*.

4. Divergencias IR en QCD: introducción

La absorción de divergencias UV puede llevarse a cabo, de forma completamente sistemática, orden a orden en teoría de perturbaciones. Sin embargo, las divergencias IR requieren un tratamiento distinto. A diferencia del caso UV, no es posible absorberlas a través de la introducción de contratérminos a nivel lagrangiano. Sin embargo, existen procedimientos bien definidos que permiten calcular observables físicos finitos en teorías con singularidades IR.

En esta sección comenzaremos describiendo el ejemplo clásico de las correcciones NLO al decaimiento de un fotón virtual en un par quark-antiquark. Luego, describiremos los teoremas de Kinoshita que garantizan la posibilidad de cancelar las divergencias IR. Finalmente, haremos una breve discusión sobre observables *infrared safe* (esto es, carentes de singularidades IR) y su implementación en cálculos concretos a través de las funciones de medida.

4.1. Teoremas de Kinoshita

Considérese un proceso en el cual un par de leptones colisiona para originar jets de partículas en el estado final. Supongamos que queremos calcular las correspondientes correcciones NLO en QCD. Debido a que los gluones y quarks no interaccionan directamente con leptones, sino que lo hacen a través de fotones, podemos considerar simplemente el proceso $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$. ⁵ En otras palabras, suponemos un fotón *off-shell* decayendo en un par quark-antiquark. Debido a que el orden más bajo es proporcional a α , las correcciones NLO en QCD son de orden $\alpha \alpha_s$. Explícitamente, el proceso $1 \rightarrow 2$ queda

$$\mathcal{A}_{1\to 2} = |A_0|^2 + 2\text{Re}\left(A_V A_0^* + B_V A_0^* + C_V A_0^*\right) + \mathcal{O}\left(\alpha \alpha_s^2\right) , \qquad (3.4.1)$$

descartando los términos $|A_V|^2$, $|B_V|^2$ y $|C_V|^2$ por ser de orden $\alpha \alpha_s^2$. Los diagramas que aportan a estos términos se muestran en la figura 3.2. Trabajando con DREG en $d = 4 - 2\epsilon$ dimensiones se encuentra que la contribución correspondiente a la sección eficaz viene dada por

$$\sigma^{\text{Virtual}} = \frac{2\alpha_s}{3\pi}\sigma_0 \left[-\frac{8}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} \left(-4\log\left(\frac{Q^2}{4\pi\mu^2}\right) - 4\gamma_E + 6 \right) - \log^2\left(\frac{Q^2}{4\pi\mu^2}\right) - (2\gamma_E - 3)\log\left(\frac{Q^2}{4\pi\mu^2}\right) - \gamma_E^2 + 3\gamma_E + \frac{7\pi^2}{6} - 8 \right], \qquad (3.4.2)$$

en donde σ_0 representa la sección eficaz a LO, μ es una escala arbitraria de energía (introducida para mantener adimensional la constante de acoplamiento) y Q es la virtualidad del fotón. En este caso particular, no hay divergencias UV pues el proceso a nivel árbol es $\mathcal{O}(g_{\rm S}^0)$. Notemos que

 $^{^{5}}$ Ver (3), para más detalles acerca de los cálculos relacionados.



este resultado aún contiene polos en ϵ , divergentes en el límite $\epsilon \to 0$. Por lo tanto, es necesario agregar contribuciones adicionales para poder obtener un resultado finito.

Fig. 3.2: Diagramas que contribuyen al proceso $\gamma^* \to q\bar{q}$ a NLO. Se muestran los diagramas: (a) *leading* order, (b) con correcciones por emisión de un gluón real y (c) con correcciones a 1-loop.

Los polos que aparecen en (3.4.2) corresponden a divergencias IR presentes en las integrales de loop. Al principio de este capítulo describimos las divergencias IR tomando como ejemplo ciertas configuraciones cinemáticas asociadas con partículas externas. Sin embargo, podemos interpretar al loop como una partícula virtual y analizar las mismas situaciones cinemáticas que originan las divergencias IR para partículas externas. En otras palabras, podría ocurrir que la partícula virtual sea soft ($q_0 = 0$) o colineal con alguna partícula externa (en cuyo caso vale $q^2 = 0$ y algún otro propagador se vuelve nulo).

Si queremos obtener un resultado finito para la corrección a $\gamma^* \to q\bar{q}$, tenemos que eliminar los polos en ϵ . Para esto, hay que tener en cuenta que estamos calculando una sección eficaz de scattering. Pensando en términos experimentales, ello corresponde a contar eventos en los cuales se observan dos jets con un cierto impulso. Sin embargo, podría ocurrir que observar dos jets se corresponda con un proceso en el cual se emiten tres partículas. De hecho, como los detectores tienen resolución angular finita, dos partículas muy próximas entre sí son consideradas como una única partícula. Asimismo, existe una limitación en la detección de estados con energía muy baja. Esto es lo que se conoce como *configuraciones degeneradas*. Por lo tanto, al calcular la sección eficaz física debemos tener en cuenta la contribución del proceso $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g$ e integrar sobre el espacio de fases del gluón adicional. De esta forma, observando la figura 3.2 tenemos

$$\mathcal{A}_{1\to3} = |A_R|^2 + A_R B_R^* + A_R^* B_R + |B_R|^2 + \mathcal{O}\left(\alpha \alpha_s^2\right) , \qquad (3.4.3)$$

que es lo que origina las denominadas correcciones reales. Usando DREG para integrar sobre el espacio de fases de la partícula extra, se encuentra que el aporte correspondiente a la sección eficaz es

$$\sigma^{\text{Real}} = \frac{2\alpha_s}{3\pi}\sigma_0 \left[\frac{8}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} \left(4\log\left(\frac{Q^2}{4\pi\mu^2}\right) + 4\gamma_E - 6 \right) + \log^2\left(\frac{Q^2}{4\pi\mu^2}\right) + (2\gamma_E - 3)\log\left(\frac{Q^2}{4\pi\mu^2}\right) + \gamma_E^2 - 3\gamma_E - \frac{7\pi^2}{6} + \frac{57}{6} \right], \quad (3.4.4)$$

en donde aparecen polos que cancelan exactamente aquellos presentes en (3.4.2). Sumando ambas contribuciones se tiene

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + \mathcal{O}\left(\alpha_s^2\right) \right) , \qquad (3.4.5)$$

que presenta una corrección NLO claramente finita.

Como se puede apreciar, utilizando DREG para regularizar la teoría a NLO, aparecen polos simples y dobles en $\epsilon = 0$. Estos polos contienen información acerca del tipo de proceso que los está originando. Los términos proporcionales a $1/\epsilon^2$ se asocian a divergencias soft/colineales simultáneamente, mientras que los polos simples surgen cuando se manifiestan de forma separada. Cabe señalar que las divergencias UV aparecen como polos simples a este orden perturbativo. Sin embargo, aquí estamos suponiendo que las mismas fueron absorbidas previamente mediante el uso de contratérminos para calcular las correcciones virtuales al proceso.

Las cancelaciones exhibidas en el ejemplo anterior motivan un procedimiento para obtener resultados carentes de singularidades IR. En el caso de QED, el teorema de Bloch-Nordsieck (30) muestra que si se suman las divergencias originadas por emisión de fotones soft reales más los diagramas con loops asociados se obtiene un resultado final finito, a todo orden en teoría de perturbaciones. Adviértase que, en QED, las divergencias colineales solo son posibles si los fermiones son no masivos. Esta situación cambia notablemente en QCD: la presencia de vértices no Abelianos de tres y cuatro gluones permite que ocurran estas singularidades aún cuando los fermiones sean masivos. Una complicación adicional de las teorías no Abelianas es la necesidad de incluir las correspondientes contribuciones con ghosts. Así, también es necesario tener en cuenta la emisión de ghosts soft o colineales en este tipo de teorías. Una alternativa para evitar lidiar estos estados es utilizar gauges físicos. De esta forma, tanto los gluones externos como los virtuales deben tener polarizaciones físicas.

Finalmente, debe mencionarse que existe un marco teórico que permite justificar la posibilidad de obtener secciones eficaces libres de singularidades IR, a cualquier orden en teoría de perturbaciones. Para ello, considérense los siguientes teoremas (26; 31; 32)

- Teorema de Kinoshita-Poggio-Quinn: Las funciones de Green propias 1PI (irreducibles) que contienen momentos externos Euclídeos no excepcionales están libres de divergencias infrarrojas, en teorías de campos no masivas renormalizables.
- Teorema de Kinoshita-Lee-Nauenberg: En una teoría con campos no masivos, las amplitudes de transición están libres de singularidades IR si se lleva a cabo una suma sobre todos los estados iniciales y finales degenerados.

De esta manera, por el segundo teorema, se entiende por qué deben considerarse los procesos reales (o sea, aquellos que contienen más partículas en el estado final) al momento de calcular correcciones radiativas.

4.2. Observables en QCD y funciones de medida

La cancelación de divergencias IR es posible solamente cuando se están computando ciertos observables. Esto es muy fácil de apreciar utilizando el ejemplo de las correcciones NLO a $\gamma^* \to q\bar{q}$. Aunque no entramos en detalles específicos relacionados con la definición de un jet, se puede apreciar que dichos objetos deben ser lo suficientemente inclusivos como para permitir que los procesos de emisión real sean incluidos en configuraciones soft y colineales. En otras palabras, si en vez de $\gamma^* \to j + j$ (j denota genéricamente un jet), hubiéramos considerado estrictamente $\gamma^* \to q\bar{q}$ como observable físico, en el resultado final a NLO habrían quedado polos en ϵ sin cancelar. De este modo, la definición de un jet como un único partón da lugar a un observable con singularidades IR.

La forma en que usualmente se definen observables es a través de la introducción de una función de medida S. La función de medida $S_n(p_1^{\mu}, \ldots, p_n^{\mu})$ impone restricciones sobre el espacio de fases de *n* partículas, permitiendo seleccionar solo aquellos eventos que satisfacen ciertos

requisitos. En términos generales, dado un proceso con n partículas en el estado final puede pensarse como

$$\int_{\Omega} dPS^n = \int dPS^n \, \mathcal{S}_n \left(p_1^{\mu}, \dots, p_n^{\mu} \right) \,, \tag{3.4.6}$$

es decir que \mathcal{S} cumple el rol de función característica del conjunto de eventos que quieren observarse.

Debido a que los cálculos de secciones eficaces suelen efectuarse empleando métodos de integración tipo Monte Carlo, el uso de funciones de medida facilita la implementación numérica de los mismos. Esto se debe a que la selección de observables e imposición de cortes experimentales puede realizarse modificando rutinas aisladas dentro del código general. Sin embargo, para obtener un resultado numéricamente confiable es necesario que S sea una función suave respecto de los momentos de las partículas intervinientes.

Por otro lado, es crucial que S defina eventos libres de singularidades infrarrojas o *infrared* safe. Esto quiere decir que el resultado final obtenido, asociado a una cantidad física mensurable, debe ser el mismo independientemente de que ocurran procesos de emisión de partículas soft o colineales entre si. Puesto que los observables considerados están diseñados para analizar física de alta energía (o distancias cortas), la función de medida tiene que ser insensible a los detalles de la hadronización u otros procesos de baja energía.

Considérese un proceso cuyo orden dominante involucra n partículas en el estado final. Las correcciones reales a NLO agregan una partícula adicional⁶. Con ello, es posible definir dos funciones de medida: $S_n(p_1^{\mu}, \ldots, p_n^{\mu})$ para la contribución LO y $S_{n+1}(p_1^{\mu}, \ldots, p_{n+1}^{\mu})$ para la contribución NLO real. De acuerdo a lo mencionado al comienzo del capítulo, las divergencias IR son originadas por configuraciones con partículas soft o paralelas entre sí. Entonces, hay tres situaciones que conducen a la aparición de divergencias IR en la contribución real a NLO:

- 1. la partícula i del estado final se vuelve soft, o se
a $p_i^0 \rightarrow 0;$
- 2. las partículas $i \neq j$ del estado final se vuelven colineales, esto es

$$p_i^{\mu} = \lambda \xi^{\mu} , p_i^{\mu} = (1 - \lambda) \xi^{\mu} ,$$
 (3.4.7)

con $\lambda \in [0, 1]$ y ξ^{μ} momento total de las partículas involucradas;

⁶ Al considerar correcciones de orden superior en QCD deben tenerse en cuenta todos los posibles procesos de emisión real compatibles con el orden perturbativo analizado. Por ejemplo, a NLO solo contribuyen procesos con emisión de una partícula real. A NNLO, se pueden tener dos emisiones reales, una emisión real junto con un loop o procesos virtuales a 2-loops (sin partículas adicionales en estado final).

3. la partícula i del estado final se vuelve colineal con la partícula a del estado inicial, o sea

$$p_i^{\mu} = \lambda p_a^{\mu} \,, \tag{3.4.8}$$

 $\operatorname{con} \lambda \in [0, 1].$

Luego, para que los observables sean *infrared safe* debe ocurrir que

1. si la partícula i del estado final se vuelve soft,

$$S_{n+1}\left(p_1^{\mu}, \dots, p_i^{\mu}, \dots, p_{n+1}^{\mu}\right) = S_n\left(p_1^{\mu}, \dots, p_{n+1}^{\mu}\right), \qquad (3.4.9)$$

esto es, se elimina su presencia del estado final;

2. si las partículas $i \neq j$ del estado final se vuelven colineales,

$$S_{n+1}\left(p_{1}^{\mu},\ldots,\lambda\xi^{\mu},\ldots,(1-\lambda)\xi^{\mu},\ldots,p_{n+1}^{\mu}\right) = S_{n}\left(p_{1}^{\mu},\ldots,\xi^{\mu},\ldots,p_{n+1}^{\mu}\right), (3.4.10)$$

o sea, se reemplazan las partículas $i \ge j$ por una que tenga el momento total llevado por ambas;

3. y, si la partícula i del estado final se vuelve colineal con la partícula a del estado inicial

$$\mathcal{S}_{n+1}\left(p_1^{\mu}, \dots, \lambda p_a^{\mu}, \dots, p_{n+1}^{\mu}\right) = \mathcal{S}_n\left(p_1^{\mu}, \dots, p_{n+1}^{\mu}\right), \qquad (3.4.11)$$

es decir, se elimina su presencia del estado final.

Cabe señalar que de esta forma se asegura la cancelación de divergencias entre las contribuciones reales y virtuales. Además, el comportamiento impuesto a S es consistente con las limitaciones experimentales. Dado que los detectores solo pueden contar partículas con energía superior a cierto valor E^{\min} y pueden diferenciarlas únicamente cuando la separación angular entre ellas es mayor que $\Delta \phi^{\min}$, es razonable que estados de n + 1 partículas en las situaciones expuestas sean considerados como procesos de n partículas en el estado final. Por otra parte, estas propiedades pueden utilizarse para definir funciones de medida válidas para llevar a cabo cálculos a NNLO u órdenes superiores.

4. ESQUEMAS DE REGULARIZACIÓN

Tras profundizar en el entendimiento de DREG, en este capítulo discutimos la noción de esquema de regularización, explicando el origen de cada configuración. Para ello se introducen parámetros que permiten controlar la dimensión del álgebra de Dirac y del espacio-tiempo, así como también el número de grados de libertad de las diferentes partículas involucradas. Al final, comentamos la relación entre los diversos esquemas y formas de conectar cálculos efectuados con diferentes convenciones, utilizando reglas de Feynman efectivas.

1. Definición de esquemas

Partamos de una teoría cuántica de campos genérica en 4-dimensiones espacio-temporales. Debido a que en este trabajo trataremos correcciones a 1-loop en QCD, en el resto de esta discusión nos restringiremos a ese orden perturbativo. Entonces, sabemos que es posible escribir cualquier amplitud de scattering a 1-loop como

$$\mathcal{A}^{(1)} = \sum_{k} A_{k}^{\mu_{1}\dots\mu_{n_{k}}} \int \frac{d^{4}q}{(2\pi)^{4}} \frac{q_{\mu_{1}}\dots q_{\mu_{n_{k}}}}{D_{\sigma(k,1)}^{\alpha(k,1)}\dots D_{\sigma(k,n_{k}')}^{\alpha(k,n_{k}')}}, \qquad (4.1.1)$$

en donde q es el momento del loop y A_k son coeficientes que dependen de los momentos externos, la configuración de color y el tipo de partículas que participan en el proceso, tanto aquellas que son observables físicamente (externas) como las que circulan dentro del loop (virtuales). Trabajando con el integrando, toda la estructura tensorial asociada al proceso se encuentra codificada en estos coeficientes.

Por su parte, las cantidades D_i son los denominadores introducidos por los distintos tipos de propagadores presentes en la teoría y en el proceso. Se sabe que a 1-loop es posible encontrar un conjunto de denominadores que permite escribir cualquier producto escalar que involucre al momento q como combinación lineal única de los mismos. Al momento de expresar explícitamente las diversas contribuciones a $\mathcal{A}^{(1)}$, pueden tener lugar contracciones entre momentos externos y q. En consecuencia, los factores D_i pueden aparecer en el numerador de una integral de Feynman. Así, la notación utilizada tiene por objetivo enfatizar no solo la posible presencia de D_i en el numerador, sino también expresar términos que solo requieran un subconjunto de dicha base de denominadores.

La presencia de divergencias en (4.1.1) fuerza el empleo de un método de regularización. Por las razones mencionadas en el Capítulo 3, el método de regularización dimensional es una de las opciones más utilizadas para explicitar singularidades en el contexto de teorías de gauge. Entonces, debemos efectuar la transformación

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \to \int \frac{d^{D_{\rm ST}}q}{(2\pi)^{D_{\rm ST}}} \equiv i \int_q , \qquad (4.1.2)$$

en donde se introdujo el parámetro $D_{\rm ST}$ para denotar la dimensión del espacio asociado al momento de loop. Es importante considerar $D_{\rm ST} \neq 4$ para evitar las divergencias, aunque el método no fuerza ninguna elección en particular. Por cuestiones de convención, nos restringiremos a $D_{\rm ST} = 4 - 2\epsilon \operatorname{con} \epsilon$ un número complejo arbitrario.

El próximo paso es utilizar alguna técnica de reducción tensorial para obtener expresiones que solo dependan de integrales escalares, es decir

$$\int_{q} \frac{q^{\mu_{1}}q^{\mu_{2}}\dots q^{\mu_{m}}}{D_{1}^{\alpha_{1}}D_{2}^{\alpha_{2}}\dots D_{n}^{\alpha_{n}}} = \sum_{A} F_{A}^{\mu_{1}\dots\mu_{m}}(\{p_{i}\},\{\alpha_{i}\},\eta^{D_{\rm ST}})I_{A}^{\rm scalar}(\{p_{i}\cdot p_{j}\},D_{\rm ST}), \quad (4.1.3)$$

en donde $\{p_i\}$ denota el conjunto de posibles vectores físicos externos, los cuales están definidos en la teoría 4-dimensional. Notemos que los coeficientes que acompañan a las diversas integrales escalares dependen de $D_{\rm ST}$ y, en particular, involucran a $\eta^{D_{\rm ST}}$. Esto se debe a que cuando realizamos la reducción tensorial, se propone una estructura para la integral y si el rango es superior a 2, hay contribuciones que necesariamente requieren utilizar la métrica del espacio-tiempo. Debido a que en estos pasos intermedios hay divergencias que deben ser regularizadas, no podemos tomar el límite $\epsilon \to 0$ mientras se están computando las integrales. Por lo tanto, no es consistente realizar el reemplazo $\eta^{D_{\rm ST}} \to \eta^4$ en las integrales tensoriales hasta finalizar el cálculo completo.

Por otro lado, exceptuando las contribuciones que provienen de las integrales tensoriales, DREG tampoco impone ningún tratamiento específico para el resto de los objetos que participan en el cálculo de los coeficientes A_k . Para ser más explícitos, los coeficientes dependen de la dimensión del álgebra de Dirac, del número de polarizaciones fermiónicas y bosónicas, y de la forma en que se tratan los vectores externos. En consecuencia, podemos elegir de forma arbitraria el tratamiento de dichas cantidades, lo cual constituye la definición de un *esquema de regularización*. En el contexto de QCD no masiva o de QCD con fotones, podemos introducir los siguientes parámetros:

• n_g : número de polarizaciones de los gluones externos,

- h_g : número de polarizaciones de los gluones internos,
- n_q : número de polarizaciones de los quarks externos,
- h_q : número de polarizaciones de los quarks internos, y
- D_{Dirac} : dimensión del álgebra de Dirac.

Llegado este punto, es necesario remarcar una sutileza relacionada con los momentos externos. En el contexto de correcciones virtuales, DREG demanda la extensión del momento de loop a $D_{\rm ST}$ dimensiones para lograr la regularización de las integrales. Sin embargo, tal requisito no es impuesto sobre los momentos externos, que naturalmente son 4-dimensionales puesto que están asociados a partículas observables físicamente. La situación cambia completamente al considerar DREG aplicada a correcciones reales e integrales de espacio de fases, como fue mencionado en el cálculo de $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$ a NLO. En tal caso se requiere integrar sobre todo el espacio de fases de la partícula adicional, con lo cual es imprescindible regularizar las regiones singulares. De esta manera, aplicar DREG a integrales de espacio de fases impone la necesidad de continuar a $D_{\rm ST}$ dimensiones el momento de partículas externas a nivel amplitud. A pesar de esto, para mantener la generalidad de la discusión, se permitirá aquí que la dimensionalidad de los momentos externos sea considerada como un parámetro libre.

Siguiendo con el análisis de los esquemas en DREG, es posible estudiar como relacionar los parámetros introducidos con la forma en que se llevan a cabo los cálculos. Aquí es necesario retornar a la discusión presentada en el Capítulo 3 e interpretar el regulador d como la dimensión de un espacio sobre el cuál está definida la teoría física. En consecuencia, suponemos que los objetos definidos en el contexto de DREG pertenecen a un *espacio-tiempo D*_{ST}-dimensional. Más aún, se considera que este espacio admite ser expresado en términos del producto directo del espacio-tiempo usual 4-dimensional y un espacio transverso $D_{\rm ST}$ – 4-dimensional. Consecuentemente, si se define una métrica sobre tal espacio, $\eta_{\mu\nu}^{D_{\rm ST}}$, resulta posible emplear la descomposición

$$\eta_{\mu\nu}^{D_{\rm ST}} = \eta_{\mu\nu}^4 \oplus \eta_{\mu\nu}^{D_{\rm ST}-4} \,, \tag{4.1.4}$$

con $\eta_{\mu\nu}^4$ la métrica de Minkowski usual del espacio-tiempo 4-dimensional plano. En particular, vale que $\eta_{\mu\nu}^{D_{\rm ST}} (\eta^{D_{\rm ST}-4})^{\mu\nu} = D_{\rm ST} - 4$, independientemente de la representación concreta que se le asigne a la métrica transversa $\eta_{\mu\nu}^{D_{\rm ST}-4} = \eta_{\mu\nu}^{\epsilon}$.

1.1. Algebra de Dirac y fermiones

Por otro lado, en el espacio D_{ST} -dimensional se pueden definir vectores y espinores¹. Comencemos escribiendo la dimensión del álgebra de Dirac como

$$D_{\text{Dirac}} = 4 - 2\delta\epsilon, \qquad (4.1.5)$$

en donde δ es un parámetro que nos permite elegir trabajar con un álgebra 4 ($\delta = 0$) o D_{ST} dimensional ($\delta = 1$). Los espinores se definen partiendo de una representación R de dicha álgebra. Esto es, consideramos un conjunto de objetos $\{\gamma^{\mu_k}\}_{k\in\Omega} \in R$ que verifican

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2(\eta^{D_{\text{Dirac}}})^{\mu\nu} \mathbb{I}, \qquad (4.1.6)$$

en donde I corresponde al elemento identidad del espacio en el cual la representación R está definida. Además, los objetos γ deben ser hermíticos. En el caso $D_{\text{Dirac}} = 4$ puede utilizarse el espacio de las matrices de Dirac usuales: la extensión para $D_{\text{Dirac}} \in \mathbb{N}$ es directa. De hecho, se puede mostrar que cuando $D_{\text{Dirac}} = 2\omega$ con $\omega \in \mathbb{N}$ existe una representación con matrices de tamaño 2^{ω} . Para el caso $D_{\text{Dirac}} = 2\omega + 1$, es suficiente con agregar la matriz $\gamma_{2\omega}$ dada por

$$\gamma_{2\omega} = \imath \gamma^0 \dots \gamma^{2\omega-1}, \qquad (4.1.7)$$

que es la generalización de γ_5 . Nótese que este último resultado justifica la necesidad de recurrir a técnicas de *orbifolding* para introducir proyectores de quiralidad en espacios de dimensión impar, situación comúnmente encontrada en modelos de extra-dimensiones.

En cambio, al considerar $D_{\text{Dirac}} = 4 - 2\epsilon$ (con ϵ genérico) es necesario llevar a cabo un proceso distinto para construir una representación R, debido a que esta resulta de dimensión infinita. En Ref. (23) se exhibe una construcción recursiva explícita que emplea matrices de tamaño 2^{ω} (con $2\omega = D_{\text{Dirac}}$). De esta forma se prueba la existencia de una extensión del álgebra para el caso D_{Dirac} genérico.

Para poder llevar adelante el tratamiento algebraico de los elementos de R tiene que extenderse el operador traza Tr : $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sobre dicha representación. En abstracto, dados elementos $A, B \in R$ y escalares $a, b \in \mathbb{C}$, el operador Tr debe verificar

¹ En el contexto de variedades diferenciales, los campos de vectores se definen como secciones del fibrado tangente y los espinores surgen naturalmente a partir de las representaciones de álgebras de Clifford inducidas por la métrica en el espacio tangente. Por ende, existe una conexión entre la dimensión del álgebra de Dirac D_{Dirac} y la dimensión del espacio de partida D_{ST} . Estrictamente, si $D_{\text{ST}} \in \mathbb{N}$, luego ambas dimensiones son iguales. Sin embargo, en el contexto de DREG es admisible tratar D_{Dirac} como un parámetro libre, puesto que la teoría física original está definida sobre un espacio 4-dimensional. Por ende, en el límite $\epsilon \to 0$ cualquier definición razonable de un esquema de regularización debe conducir a $D_{\text{Dirac}} = D_{\text{ST}} = 4$.

- 1. $\operatorname{Tr}(aA + bB) = a\operatorname{Tr}(A) + b\operatorname{Tr}(B)$ (linealidad),
- 2. Tr(AB) = Tr(BA) (propiedad cíclica).

Utilizando la existencia de la representación matricial es posible probar la existencia del operador Tr. Sin embargo, su definición no es unívoca puesto que existe la libertad de establecer el valor de Tr(I). La elección más general es

$$\operatorname{Tr}\left(\mathbb{I}\right) = f(D_{\operatorname{Dirac}}), \qquad (4.1.8)$$

puesto que D_{Dirac} es el único parámetro natural asociado al problema. A pesar de que no hay restricciones sobre la función f, usualmente se elige $f(D_{\text{Dirac}}) = D_{\text{Dirac}}$. Como veremos explícitamente en los cálculos de los próximos capítulos, la dependencia en f se factoriza siempre que se tengan cadenas cerradas de espinores (loops fermiónicos).

Utilizando las propiedades del operador traza y (4.1.6) se pueden demostrar varias identidades útiles para el manejo del álgebra de Dirac con D_{Dirac} arbitrario. En particular, vale que

$$\gamma^{\mu}\gamma_{\mu} = D_{\text{Dirac}}\mathbb{I}, \qquad (4.1.9)$$

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma_{\mu} = (2 - D_{\text{Dirac}})\gamma^{\nu}, \qquad (4.1.10)$$

$$\operatorname{Tr}(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}) = f(D_{\mathrm{Dirac}})(\eta^{D_{\mathrm{Dirac}}})^{\mu\nu}, \qquad (4.1.11)$$

$$\operatorname{Tr}\left(\gamma^{\mu}\right) = 0, \qquad (4.1.12)$$

pudiéndose apreciar que siempre se recuperan los resultados 4-dimensionales habituales al considerar el límite $D_{\text{Dirac}} \rightarrow 4$. De hecho, puede probarse fácilmente que la traza de un número impar de matrices gamma es siempre nula.

Finalmente, dado que los fermiones son descriptos a través de espinores, es posible establecer una relación entre el número de polarizaciones de un fermión no masivo y $Tr(\mathbb{I})$. Siguiendo las convenciones elegidas en Ref. (33), se define

$$\operatorname{Tr}^{\operatorname{Ext}}(\mathbb{I}) = 2n_q, \qquad (4.1.13)$$

$$\operatorname{Tr}^{\operatorname{Int}}(\mathbb{I}) = 2h_q, \qquad (4.1.14)$$

en donde Tr^{Ext} y Tr^{Int} denotan la traza efectuada sobre cadenas espinoriales con fermiones externos e internos (loops en correcciones virtuales), respectivamente. La razón para considerar una distinción explícita es que esto permite tratar de forma separada partículas externas e internas, con el fin de realizar un análisis exhaustivo de la dependencia de los resultados respecto del esquema empleado. Además, se introducen los parámetros β y β_R que verifican

$$n_q = 2 - 2\beta_{\rm R}\epsilon \rightarrow {\rm Tr}^{\rm Ext}(\mathbb{I}) = 4 - 4\beta_{\rm R}\epsilon, \qquad (4.1.15)$$

$$h_q = 2 - 2\beta\epsilon \rightarrow \operatorname{Tr}^{\operatorname{Int}}(\mathbb{I}) = 4 - 4\beta\epsilon, \qquad (4.1.16)$$

y cuya función radica en controlar el número de polarizaciones fermiónicas mientras se realizan los cálculos.

1.2. Vectores de gauge

Ahora pasemos a analizar el parámetro h_g , que está relacionado con el propagador gluónico. Si trabajamos en LCG, es posible escribir la suma sobre polarizaciones gluónicas internas de acuerdo a

$$d_{\mu\nu}(p,n) = -\left(\eta_{\mu\nu}^4 + \alpha_R \eta_{\mu\nu}^{D_{\text{Dirac}}-4}\right) + \frac{p_\mu n_\nu + n_\mu p_\nu}{p \cdot n} , \qquad (4.1.17)$$

en donde *n* es el vector de cuantización, que verifica $n^2 = 0$ (por ser un vector nulo o tipo luz) y $n \cdot p \neq 0$. Para tener en cuenta el número de polarizaciones de los gluones internos se introduce el parámetro α_R . En particular, se sabe que

$$h_g = d_{\mu\nu}(p, n) (\eta^{D_{\rm ST}})^{\mu\nu}, \qquad (4.1.18)$$

en donde la contracción tiene que ser efectuada con la métrica $D_{\rm ST}$ -dimensional. Esto se debe a que siempre estamos asumiendo que el espacio 4-dimensional usual es un subespacio de su extensión $D_{\rm ST}$ -dimensional². Empleando (4.1.17), se aprecia que si $\alpha_R = 0$ entonces $h_g = 2$ independientemente del valor de $D_{\rm Dirac}$. Es interesante destacar que esta conclusión depende fuertemente de que *n* sea la extensión nula $D_{\rm ST}$ -dimensional de un vector 4-dimensional y que el tensor métrico sea diagonal también en $D_{\rm ST}$ -dimensiones. Por otro lado, es posible apreciar que si se elige $\delta = 0$ (lo cual corresponde a tomar $D_{\rm Dirac} = 4$), entonces se elimina la dependencia respecto de α_R en (4.1.17).

Cabe destacar que expresamos $d_{\mu\nu}(p, n)$ en términos de $\eta^{D_{\text{Dirac}}}$ por cuestiones relacionadas con la implementación de los cálculos (ver Capítulo 7). De todas formas, esta elección solo modifica la forma en que se eligen los parámetros para definir esquemas específicos. En consecuencia, el estudio de las diversas configuraciones se podría haber llevado a cabo de forma similar si $\eta^{D_{\text{Dirac}}} \to \eta^{D_{\text{ST}}}$.

² Dicha observación tiene sentido en el contexto de DREG puesto que podemos evitar valores de $D_{ST} \in \mathbb{N}$ menores a 4. Además, un espacio con $D_{ST} \in \mathbb{C}$ suele interpretarse en términos de un espacio de dimensión infinita. Para más detalles, se sugiere seguir los comentarios presentes en Ref. (23).
Por otra parte, es posible controlar el número de polarizaciones de los gluones externos definiendo

$$d_{\mu\nu}^{\text{Ext}}(p,Q) = \sum_{\text{phys.pol.}} \epsilon_{\mu}^{*}(p)\epsilon_{\nu}(p) = -\left(\eta_{\mu\nu}^{4} + \alpha\eta_{\mu\nu}^{D_{\text{ST}}-4}\right) + \frac{p_{\mu}Q_{\nu} + Q_{\mu}p_{\nu}}{p \cdot Q}, \quad (4.1.19)$$

en donde Q es un vector tipo luz arbitrario que verifica $Q^2 = 0$ y $Q \cdot p \neq 0$. Cuando llevemos a cabo los cálculos de forma explícita, utilizaremos la elección Q = n con el objetivo de simplificar los pasos intermedios. Por otro lado, si apelamos a (4.1.19) y contraemos el tensor de polarización con la métrica espacio-temporal, encontramos que

$$n_g = d_{\mu\nu}^{\rm Ext}(p,n)(\eta^{D_{\rm ST}})^{\mu\nu} = 2 - 2\alpha\epsilon, \qquad (4.1.20)$$

con lo cual el número de polarizaciones externas que da expresado de forma explícita en términos del parámetro $\alpha.$

Para concluir esta discusión sobre los tensores de polarización gluónicos, analicemos algunas de sus propiedades. Debido a que se está trabajando en un gauge axial, estos objetos deben verificar

• ortogonalidad respecto al vector de cuantización o de referencia

$$d_{\mu\nu}(p,n)n^{\mu} = 0 = d_{\mu\nu}^{\text{Ext}}(p,n)n^{\mu}, \qquad (4.1.21)$$

• ortogonalidad respecto al momento externo

$$d_{\mu\nu}^{\rm Ext}(p,n)p^{\mu} = 0, \qquad (4.1.22)$$

• $d_{\mu\nu}(p,n)p^{\mu} \propto p^2$.

Estos requisitos están directamente relacionados con restricciones físicas. La primer condición se debe a la elección de gauge, ya que n es el vector de referencia para llevar a cabo el fijado de un gauge físico y eliminar las polarizaciones espurias (ver Capítulo 1). El segundo requerimiento se vincula con el hecho de que los gluones externos son partículas no masivas y que se encuentran en su capa de masa (o sea, que cumplen la relación de dispersión). Explícitamente, se trata de una consecuencia directa de $\epsilon(p) \cdot p = 0$. El último requisito permite recuperar la ortogonalidad con el momento transportado cuando se efectúa un corte en el loop. Esta condición es sumamente importante en el contexto de los métodos de unitariedad, puesto que permite establecer que los gluones internos (virtuales) se comportan del mismo modo que las partículas externas cuando vale $q^2 = 0$. Cabe señalar que este enfoque provee una interpretación alternativa de la cancelación de divergencias IR, y además justifica la necesidad de contar con esquemas de regularización que traten del mismo modo a las partículas internas y externas.

Continuando con el análisis de las propiedades de $d_{\mu\nu}$ y $d_{\mu\nu}^{\text{Ext}}$, podemos emplear las ecuaciones (4.1.17) y (4.1.19) para mostrar que se verifica

$$d_{\mu\nu}(p,n)n^{\mu} = -n_{\nu} + \frac{(p \cdot n) n_{\nu} + n^2 p_{\nu}}{p \cdot n} = 0 = d_{\mu\nu}^{\text{Ext}}(p,n)n^{\mu}, \qquad (4.1.23)$$

en donde se uso fuertemente que n es un cuadrivector nulo y que $n^{\mu}\eta^{D_{\text{Dirac}}-4}_{\mu\nu} = 0$. Un resultado similar se obtiene cuando se consideran a los momentos externos como la extensión nula de cuadrivectores tipo luz, o sea que cumplen $p = p^{(4)} \oplus \vec{0}$. En tal caso, se obtiene

$$d_{\mu\nu}^{\rm Ext} p^{\mu} = -p_{\nu} + \frac{p^2 n_{\nu} + (p \cdot n) p_{\nu}}{p \cdot n} = 0, \qquad (4.1.24)$$

lo que demuestra que todos los requisitos exigidos anteriormente son cumplidos por el tensor de polarización de los gluones externos, al estar estos asociados a partículas observables.

Sin embargo, DREG fuerza a que los momentos internos sean expresados de la forma $p = p^{(4)} \oplus p^{(D_{\rm ST}-4)}$, en donde la componente en el espacio transverso es completamente arbitraria. Por lo tanto, cuando se efectúa la contracción del momento con el tensor de polarización se obtiene

$$d_{\mu\nu}(p,n)p^{\mu} = -\left(p_{\nu}^{(4)} + \delta\alpha_{R}p_{\nu}^{(D_{\rm ST}-4)}\right) + \frac{p^{2}n_{\nu} + (p \cdot n)p_{\nu}}{p \cdot n}$$
$$= p^{2}\frac{n_{\nu}}{p \cdot n} + (1 - \delta\alpha_{R})p_{\nu}^{(D_{\rm ST}-4)}, \qquad (4.1.25)$$

lo cual indica la posibilidad de que, para ciertas combinaciones de parámetros, los propagadores no cumplan todos los requisitos de consistencia física. En este trabajo exploramos estas circunstancias en el contexto del cálculo de amplitudes de splitting a NLO, donde mostramos de forma explícita que la violación de estas imposiciones puede alterar la estructura de polos IR de los resultados (ver Capítulo 7).

Finalmente, un breve comentario sobre los momentos externos en el cálculo de correcciones reales. Al aplicar DREG para regularizar las divergencias IR de partículas externas, el momento de las mismas es extendido a $D_{\rm ST}$ dimensiones y adquiere una componente no trivial en la dirección transversa. Por ende, volviendo a la segunda condición del listado previo, tenemos que

$$d_{\mu\nu}^{\text{Ext}}(p,n)p^{\mu} = -\left(p_{\nu}^{(4)} + \alpha p_{\nu}^{(D_{\text{ST}}-4)}\right) + \frac{p^{2} n_{\nu} + (p \cdot n) p_{\nu}}{p \cdot n}$$
$$= p^{2} \frac{n_{\nu}}{p \cdot n} + (1 - \alpha) p_{\nu}^{(D_{\text{ST}}-4)}, \qquad (4.1.26)$$

en donde empleamos (4.1.19). Sin embargo, las partículas externas están on-shell, lo que implica que cumplen la relación de dispersión. De acuerdo a la forma en que se realiza la extensión de esta relación a $D_{\rm ST}$ dimensiones, tener partículas reales on-shell podría significar $(p^{(4)})^2 = 0$ o bien $p^2 = p^{\mu} p^{\nu} \eta^{D_{\rm ST}}_{\mu\nu} = 0$. Notemos que no es admisible imponer ambos requisitos simultáneamente, puesto que

$$0 = p^{2} = (p^{(4)})^{2} + (p^{(D_{\rm ST}-4)})^{2} = (p^{(D_{\rm ST}-4)})^{2}.$$
(4.1.27)

Dado que la restricción de la métrica diagonal $D_{\rm ST}$ -dimensional al espacio transverso es riemanniana, se tiene un producto interno definido positivo y con ello

$$(p^{(D_{\rm ST}-4)})^2 = 0 \implies p^{(D_{\rm ST}-4)}_{\mu} = 0,$$
 (4.1.28)

lo cual impide el uso de DREG al forzar que los momentos externos sean estrictamente 4dimensionales. En consecuencia, es posible reescribir (4.1.26) como

$$d_{\mu\nu}^{\rm Ext}(p,n)p^{\mu} = \xi \left(p^{(D_{\rm ST}-4)}\right)^2 \frac{n_{\nu}}{p \cdot n} + (1-\alpha)p_{\nu}^{(D_{\rm ST}-4)}, \qquad (4.1.29)$$

en donde se introdujo el parámetro ξ que permite elegir entre la condición de capa de masa en 4 ($\xi = 1$) o D_{ST} ($\xi = 0$) dimensiones. De esta manera, se puede apreciar que una elección patológica de parámetros podría conducir a resultados inconsistentes a nivel de secciones eficaces (elementos de matriz al cuadrado).

1.3. Definición de esquemas

Tras haber introducido un conjunto de parámetros que podemos modificar en el contexto de DREG, es necesario explicar como recuperar algunos de los esquemas más frecuentemente utilizados en la comunidad de física de altas energías. Comencemos analizando el esquema de regularización dimensional convencional o CDR (por sus siglas en inglés) (19; 20; 34). En el mismo, las partículas externas e internas son tratadas de la misma forma. Explícitamente, todos los momentos son extendidos a $D_{\rm ST}$ dimensiones, los gluones tienen 2 – 2 ϵ polarizaciones y los fermiones no masivos tienen 2 grados de libertad. En otras palabras, en CDR se utiliza $n_g = h_g = 2 - 2\epsilon$ y $h_q = n_q = 2$, con $D_{\rm Dirac} = 4 - 2\epsilon$. De acuerdo a los parámetros antes definidos, utilizar este esquema es equivalente a establecer $\alpha = 1$, $\alpha_R = 1$ y $\delta = 1$. Además debe fijarse $\beta = 0 = \beta_R$, que es una elección que se adopta en todos los esquemas tradicionales.

Por otro lado, se tiene el esquema de t'Hooft-Veltman (HV), que fue introducido en Ref. (20) y se considera como la formulación original del método. En el mismo, los momentos de las partículas internas son continuados a $D_{\rm ST}$ dimensiones, pero los externos se mantienen en 4 dimensiones. Como se señala en Ref. (35), cuando los estados externos dan lugar a una configuración cinemática con divergencias IR es necesario llevar a cabo la regularización extendiendo los momentos a $D_{\rm ST}$ dimensiones. Esto lleva a introducir una diferenciación entre estados externos observables (es decir, aquellos asociados a cantidades mensurables experimentalmente) y no observables (como los que aparecen al considerar correcciones por emisión real). La continuación de los momentos externos solo se lleva a cabo en este último caso. Más allá de estas cuestiones, HV se distingue de CDR por la forma en que se tratan los grados de libertad bosónicos. A pesar de que todos los fermiones no masivos cuentan con 2 polarizaciones, solo los gluones internos poseen $2-2\epsilon$ grados de libertad ya que los externos tienen 2 polarizaciones físicas. Explícitamente, en HV se utiliza $n_g = 2 = n_q = h_q$ y $h_g = 2 - 2\epsilon$. Con los parámetros introducidos en este trabajo, emplear HV es equivalente a elegir $\delta = 1 = \alpha_R$, $\alpha = 0$ y $\alpha_R = 1$.

A veces es preferible tratar a todas las partículas como objetos 4-dimensionales, a pesar de que los momentos internos sean extendidos a un espacio $D_{\rm ST}$ -dimensional. En el esquema de helicidades 4-dimensionales (FDH) (36; 37), los fermiones no masivos y los gluones tienen solamente 2 grados de libertad físicos, tanto si se trata de estados externos como internos. Esto quiere decir que FDH se define estableciendo $n_g = h_g = 2$, $n_q = h_q = 2$ y $D_{\rm Dirac} = 4$, o $\delta = 0 = \alpha = \alpha_R$ con nuestra convención de parámetros. Los momentos externos son mantenidos en 4 dimensiones, exceptuando procesos en los cuales existan singularidades IR. La principal ventaja de este esquema radica en la posibilidad de utilizar las técnicas de helicidad (ver Capítulo 2) para obtener resultados compactos. Siendo más específicos, fijar 2 grados de libertad físicos para los gluones permite que los mismos sean representados con vectores de polarización ϵ_{μ} en 4 dimensiones. Además, este esquema puede ser aplicado en el contexto de los métodos de unitariedad para reconstruir amplitudes a 1-loop.

Finalmente, existe otra elección posible conocida como reducción dimensional (DRED) (37; 38). Al igual que en FDH, todas las partículas no masivas tienen 2 grados de libertad físicos $(n_g = h_g = 2, n_q = h_q = 2 \text{ y } D_{\text{Dirac}} = 4)$. Sin embargo, en este caso todos los momentos intervinientes son continuados a D_{ST} dimensiones. Este hecho fuerza la introducción de nuevos estados, conocidos como gluones escalares, para poder mantener la consistencia teórica. De hecho, este esquema deriva de haber efectuado la reducción dimensional de un lagrangiano en D_{ST} dimensiones, compactificando las direcciones adicionales y manteniendo un espacio-tiempo 4dimensional.

Más allá de las sutilezas relacionadas con los momentos externos, tanto DRED como FDH poseen la ventaja de involucrar el mismo número de grados de libertad fermiónicos y bosónicos (exceptuando a los gluones escalares). De esta manera, permiten ser aplicados a teorías supersimétricas sin alterar sus propiedades (como, por ejemplo, las identidades de Ward supersimétricas). Una discusión muy detallada acerca de la implementación de ambos esquemas puede ser encontrada en Ref. (36). En la misma, el autor agrupa DRED y FDH en la categoría de esquemas de reducción dimensional y señala que los mismos no son equivalentes, pudiendo conducir a

Esquema	n_g	h_g	δ	α_R	α	β_R	β
TSC	$2-2\epsilon$	$2-2\epsilon$	1	1	1	1	1
CDR	$2-2\epsilon$	$2-2\epsilon$	1	1	1	0	0
HV	2	$2-2\epsilon$	1	1	0	0	0
FDH	2	2	0	1	0	0	0
HSA	$2-2\epsilon$	2	1	0	1	0	0
HSB	2	2	1	0	0	0	0

Tab. 4.1: Tabla con las configuraciones de parámetros empleadas en este trabajo. Con la excepción del esquema TSC, en los casos restantes se establece el número de polarizaciones fermiónicas, tanto internas como externas, igual a 2 (esto es $\beta = 0 = \beta_R$).

resultados distintos.

Por otra parte, es necesario remarcar que CDR, HV y DRED respetan la unitariedad de la matriz de scattering, al menos hasta N³LO en el contexto de QCD (35). Más aún, como es de esperar, los resultados obtenidos son equivalentes. Esto conduce a que los observables físicos sean independientes de la elección de esquema. Sin embargo, FDH viola unitariedad cuando es aplicado a teorías no supersimétricas más allá de NLO. El principal inconveniente radica en la presencia de un número desigual de grados de libertad. En concreto, el problema es originado porque el momento de los gluones internos es continuado a $D_{\rm ST}$ dimensiones pero solo se consideran 2 grados de libertad físicos. Los grados de libertad transversos o evanescentes relacionados con los gluones escalares que se introducen en DRED resultan cruciales para lograr la consistencia. Cabe señalar que CDR y HV carecen de este inconveniente pues imponen un tratamiento consistente de los grados de libertad de las estados internos que se están regularizando.

Más allá de estos esquemas conocidos, si se cambian los parámetros α_R , α , δ y el valor de Tr(I) es posible construir nuevas configuraciones. Algunas variaciones de CDR, HV y FDH/DRED con Tr(I) = 4 - 4 ϵ fueron estudiadas en Ref. (33) en el contexto de funciones de splitting a LO. En particular, los autores analizaron las consecuencias de elegir esos modelos alternativos (toy models) cuando se lleva a cabo un cálculo NLO completo, en el contexto del método de sustracción. Más aún, definieron un nuevo esquema (al que aquí llamamos TSC) en el cual $n_g = n_q = 2 - 2\epsilon = h_q = h_g$ y se extienden todos los momentos a $D_{\rm ST}$ dimensiones. En este trabajo, decidimos explorar esas configuraciones pero aplicadas al estudio de amplitudes y funciones de splitting a NLO en QCD (39). De hecho, como se muestra en el Capítulo 8, TSC preserva las relación de Ward supersimétrica a 1-loop en el contexto de una teoría de Yang-Mills con $\mathcal{N} = 1$. Así, resulta que esta configuración de parámetros es equivalente a una extensión del esquema CDR compatible con supersimetría. Por otra parte, además de permitir diferentes valores de h_q y n_q , en el trabajo también discutimos acerca de los denominados esquemas híbridos. Debido a que llevamos a cabo todos los cálculos manteniendo todos parámetros libres (esto es, sin establecer valores específicos en los pasos intermedios), pudimos explorar las consecuencias de realizar diversas elecciones no convencionales. En particular, fijando $D_{\text{Dirac}} = 4 - 2\epsilon$ ($\delta = 1$) y $h_g = 2$ ($\alpha_R = 0$) podemos elegir el número de polarizaciones de los gluones externos. En consecuencia, definimos el esquema HSA cuando $n_g = 2 - 2\epsilon$ ($\alpha = 1$) y HSB para $n_g = 2$ ($\alpha = 0$). En el Capítulo 7 estudiamos exhaustivamente la consistencia de los mismos, tomando como caso de aplicación la amplitud de splitting $q \rightarrow gq$ a NLO. Allí mostramos que el empleo de estos esquemas conduce a incompatibilidades en la estructura de las divergencias IR. Las razones que conducen al mencionado conflicto son similares a las que originan la inconsistencia de FDH en cálculos a órdenes superiores.

Para concluir y facilitar la interpretación de los resultados, un resumen de todos los esquemas considerados se muestra en la table 4.1.

2. Reglas de Feynman en DREG

Es interesante estudiar la aparición de nuevos objetos escalares cuando se aplican ciertos esquemas de DREG en un espacio D-dimensional. Esto se debe a que es posible descomponer vectores en D dimensiones como vectores 4-dimensionales junto a D-4 partículas escalares (38), como suele efectuarse en el contexto de reducción dimensional. En otras palabras, una teoría originalmente formulada en 4 dimensiones puede ser extendida a D dimensiones y, tras compactificar las direcciones adicionales, volver a 4 dimensiones. La extensión y posterior reducción en la dimensionalidad de los objetos intervinientes (campos) es la que conduce a la aparición de los grados de libertad adicionales, interpretados como partículas. Por supuesto, introducir nuevas partículas nos fuerza a obtener nuevas reglas de Feynman para escribir los diagramas que las involucren.

Antes de abordar el problema concreto de los gluones escalares en DREG, notemos que la situación que estamos analizando aquí es distinta a la que usualmente se encuentra en teorías de extra-dimensiones. En las mismas, se pasa de una teoría originalmente definida en 4 a su extensión a $D \in \mathbb{N}$ dimensiones, con lo cual el nuevo espacio sigue admitiendo una interpretación en términos de variedades diferenciales. En consecuencia, el proceso de compactificar D - 4 dimensiones puede llevarse a cabo simplemente identificando cada nueva dirección con un círculo³.

 $^{^{3}}$ Es posible compactificar un espacio de varias formas distintas y no existe una manera genérica de efectuar el procedimiento. La elección aquí expuesta es una de las más empleadas en el contexto de teorías de extradimensiones. Sin embargo, desde el punto de vista matemático, podría emplearse la compactificación tipo Alexandroff (compactificación en un punto) o construcciones más abstractas, como la compactificación de Stone-Čech.

Al disponer de direcciones compactas, es posible efectuar una descomposición en modos normales e identificar las excitaciones de los campos proyectados sobre las dimensiones adicionales en términos de partículas, que son los conocidos como modos de Kaluza-Klein.

Sin embargo, en DREG, D no es necesariamente un número natural. Por ende, el enfoque de reducción dimensional tradicional no puede ser utilizado de la misma manera. La estrategia que se sigue aquí consistirá en efectuar una descomposición forzada de todos los objetos de la teoría en términos de contribuciones 4 y D-4-dimensionales. Entonces, partamos del lagrangiano usual de QCD no masiva en 4-dimensiones definido en (1.1.14). Sabiendo que los términos cinéticos se asocian con los propagadores, comencemos expandiendo los términos de interacción, que pueden escribirse como

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^{\text{Int}} = \mathcal{L}_{\text{QCD}}^{\bar{\text{f}}\text{gf}} + \mathcal{L}_{\text{QCD}}^{3\text{g}} + \mathcal{L}_{\text{QCD}}^{4\text{g}}, \qquad (4.2.1)$$

en donde

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^{\bar{\text{fgf}}} = -\sum_{f} g_{\text{S}} \mu^{\epsilon} \boldsymbol{T}_{ij}^{a} \bar{\Psi}_{f}^{i} \gamma^{\mu} \Psi_{f}^{j} A_{\mu}^{a}, \qquad (4.2.2)$$

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^{3\text{g}} = \frac{g_{\text{S}}\mu^{\epsilon}f_{abc}}{2} \left(\partial_{\mu}A^{a}_{\nu} - \partial_{\nu}A^{a}_{\mu}\right)A^{b\,\mu}A^{c\,\nu}, \qquad (4.2.3)$$

$$\mathcal{L}_{\rm QCD}^{\rm 4g} = -\frac{g_{\rm S}^2 \mu^{2\epsilon}}{4} f_{abc} f_{ade} A^b_{\mu} A^c_{\nu} A^{d\mu} A^{e\nu} , \qquad (4.2.4)$$

son las contribuciones relacionadas con el vértice fermión-gluón, y las interacciones de tres y cuatro gluones, respectivamente. Notemos que aquí se incluye la escala μ para mantener el acoplamiento sin dimensiones y hemos especificado $D = 4 - 2\epsilon$ como la dimensión del espacio sobre el cual se extiende la teoría.

Ahora consideremos que la métrica del espacio-tiempo, η^D , es diagonal y que puede ser expresada en términos de un producto directo. Luego podemos efectuar la descomposición

$$A^{a}_{\mu} = \hat{A}^{a}_{\mu} + \tilde{A}^{a}_{\mu}, \qquad (4.2.5)$$

$$\gamma^{\mu} = \hat{\gamma}^{\mu} + \tilde{\gamma}^{\mu} , \qquad (4.2.6)$$

en donde \hat{A} , $\hat{\gamma}$ son cantidades asociadas al espacio 4-dimensional, mientras que \tilde{A} , $\tilde{\gamma}$ se asocian a las componentes en el espacio transverso D - 4-dimensional. También se tiene que

$$\{\tilde{\gamma}^{\mu}, \hat{\gamma}^{\nu}\} = 0,$$
 (4.2.7)

$$\eta^{D}_{\mu\nu}\tilde{A}^{\mu}\hat{A}^{\nu} = 0, \qquad (4.2.8)$$

El método elegido depende de las propiedades que quieran preservarse del espacio original.

debido a la ortogonalidad de los subespacios 4 y D – 4-dimensional. Nótese que esto es lo que permite efectuar una extensión diagonal de la métrica al espacio de D dimensiones. Además, las descomposiciones efectuadas hasta este punto son completamente generales (esto es, valen para cualquier D, aún cuando no sea un número natural).

Sin embargo, existe una sutileza relacionada con las simetrías asociadas a la teoría extendida. Sabemos que la teoría original en 4 dimensiones respeta la invariancia de Poincarè. Sin embargo, al pasar a un espacio D-dimensional no está establecido de forma unívoca el grupo de simetrías espacio-temporales. El único requisito que debe verificarse es que se recupere la invariancia 4-dimensional en el límite $D \rightarrow 4$. En consecuencia, hay dos elecciones naturales. Por un lado, podemos retener solamente las simetrías 4-dimensionales, en cuyo caso se tiene que \tilde{A} se comporta como un 4-vector mientras que \hat{A} no transforma ante el grupo de Poincarè 4-dimensional. Es este hecho el que motiva la denominación de gluón escalar para el campo \hat{A} . Cabe señalar que esta elección es la que se emplea en el contexto de las teorías de extra-dimensiones usuales, en particular para justificar el empleo de reducción dimensional. Pero, por otro lado, se podría extender el grupo de simetría a D dimensiones. Más allá de las dificultades técnicas para definir rigurosamente la noción de invariancia de Poincarè \tilde{A} , aunque A transforme como un vector con D componentes.

Antes de continuar con la discusión central, es útil realizar una reinterpretación del significado de las dimensiones transversas y las polarizaciones adicionales de los gluones. Cuando se retiene solamente la invariancia de Poincaré 4-dimensional, tenemos gluones representados por 4-vectores y un conjunto de D - 4 grados de libertad que transforman como escalares. En consecuencia, podemos pensar que los grados de libertad adicionales se convierten en distintos *sabores* de partículas escalares. Esto es algo completamente análogo a la aparición de modos de Kaluza-Kelin en teorías de extra-dimensiones, con la diferencia de que aquí no podemos efectuar la compactificación de las direcciones transversas.

Volviendo al análisis de los gluones escalares, usando las expresiones para los términos de interacción en el lagrangiano (1.1.14) se obtiene

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^{\bar{\text{fgf}}} = -\mu^{\epsilon} g_{\text{S}} \boldsymbol{T}_{ij}^{a} \sum_{f} \left(\bar{\Psi}_{f}^{i} \hat{\gamma}^{\mu} \Psi_{f}^{j} \hat{A}_{\mu}^{a} + \bar{\Psi}_{f}^{i} \tilde{\gamma}^{\mu} \Psi_{f}^{j} \tilde{A}_{\mu}^{a} \right), \qquad (4.2.9)$$

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^{3\text{g}} = \mu^{\epsilon} g_{\text{S}} f_{abc} \left[(\partial_{\mu} \hat{A}_{\nu}^{a}) \hat{A}^{b\mu} \hat{A}^{c\nu} + (\partial_{\mu} \hat{A}_{\nu}^{a}) \tilde{A}^{b\mu} \hat{A}^{c\nu} + (\partial_{\mu} \tilde{A}_{\nu}^{a}) \hat{A}^{b\mu} \hat{A}^{c\nu} + (\partial_{\mu} \tilde{A}_{\nu}^{a}) \hat{A}^{b\mu} \tilde{A}^{c\nu} + (\partial_{\mu} \tilde{A}_{\nu}^{a}) \hat{A}^{b\mu} \tilde{A}^{c\nu} \right], \qquad (4.2.10)$$

$$\mathcal{L}_{\rm QCD}^{\rm 4g} = -\frac{\mu^{2\epsilon} g_{\rm S}^2}{4} f_{abc} f_{ade} \left[\hat{A}^b_{\mu} \hat{A}^c_{\nu} \hat{A}^{d\,\mu} \hat{A}^{e\,\nu} + 2 \hat{A}^b_{\mu} \tilde{A}^c_{\nu} \hat{A}^{d\,\mu} \tilde{A}^{e\,\nu} + \tilde{A}^b_{\mu} \tilde{A}^c_{\nu} \tilde{A}^{d\,\mu} \tilde{A}^{e\,\nu} \right] , \quad (4.2.11)$$

en donde debe tenerse en cuenta que algunos de los índices se relacionan con el espacio físico 4-dimensional, mientras que otros etiquetan componentes en las direcciones transversas. En la figura 4.1 se muestran los posibles vértices de interacción que involucran gluones escalares. Puede apreciarse que hay seis tipos distintos de interacciones: fermión-escalar $(f\bar{f}s)$, gluón-gluón-escalar (ggs), gluón-escalar-escalar (gss), triple vértice escalar (sss), gluón-gluón-escalar (ggss)y vértice cuádruple de escalares (ssss).



Fig. 4.1: Vértices de interacción disponibles que involucran gluones escalares. Tras expandir el lagrangiano de QCD en D dimensiones se encuentran las siguientes posibilidades: A fermión-escalarfermión, B gluón-escalar-gluón, C triple vértice escalar, D escalar-gluón-escalar, E dos escalares y dos gluones, y F vértice cuádruple escalar. Apréciese que se está empleando la convención de momentos salientes para todas las partículas intervinientes.

Luego de identificar los términos en el lagrangiano que originan las posibles interacciones de los gluones escalares, estamos en condiciones de deducir las correspondientes reglas de Feynman. Utilizando la función $V_{3g}(p_1^{\mu}, p_2^{\nu}, p_3^{\sigma})$ definida en (2.2.12) e introduciendo

$$V_{4g}(p_{1}^{\mu}, p_{2}^{\nu}, p_{3}^{\sigma}, p_{4}^{\sigma}, a, b, c, d) = f_{abe}f_{cde}\left(\eta_{\mu\rho}^{D_{\rm ST}}\eta_{\nu\sigma}^{D_{\rm ST}} - \eta_{\mu\sigma}^{D_{\rm ST}}\eta_{\nu\rho}^{D_{\rm ST}}\right) + f_{ace}f_{bde}\left(\eta_{\mu\nu}^{D_{\rm ST}}\eta_{\rho\sigma}^{D_{\rm ST}} - \eta_{\mu\sigma}^{D_{\rm ST}}\eta_{\nu\rho}^{D_{\rm ST}}\right) + f_{ade}f_{cbe}\left(\eta_{\mu\nu}^{D_{\rm ST}}\eta_{\rho\sigma}^{D_{\rm ST}} - \eta_{\mu\rho}^{D_{\rm ST}}\eta_{\nu\sigma}^{D_{\rm ST}}\right), \qquad (4.2.12)$$

las reglas de Feynman usuales para QCD 4-dimensional se expresan como:

• vértice fermión-gluón-fermión $-ig_{\rm S}T^a\hat{\gamma}^{\mu}$,

- vértice de tres gluones $g_{\rm S} f_{abc} V_{3g}(p_1^{\mu_1}, p_2^{\nu_1}, p_3^{\sigma_1}) \eta_{\mu_1\mu}^4 \eta_{\nu_1\nu}^4 \eta_{\sigma_1\sigma}^4$
- y cuádruple vértice de gluones $-ig_{\rm S}^2 V_{4g}(p_1^{\mu_1}, p_2^{\nu_1}, p_3^{\rho_1}, p_4^{\sigma_1}, a, b, c, d)\eta_{\mu_1\mu}^4\eta_{\nu_1\nu}^4\eta_{\sigma_1\sigma}^4,$

en donde se está llevando a cabo de forma explícita la proyección de los índices de Lorentz sobre el espacio 4-dimensional a través de la contracción con η^4 . Notemos que estas reglas habían sido presentadas en el Capítulo 1 (ver figura 1.2), aunque aquí las reescribimos para efectuar una distinción explícita entre las contribuciones 4 dimensionales y aquellas que provienen del espacio transverso. A partir de las mismas, es posible conseguir el siguiente conjunto de reglas para interacciones que involucran gluones escalares:

- $f\bar{f}s: -\imath g_{\rm S}^{\rm scalar}\mu^{\epsilon} T^a \tilde{\gamma}^{\mu},$
- $ggs: g_{\rm S}^{\rm scalar} \mu^{\epsilon} f_{abc} V_{3g}(p_1^{\mu_1}, p_2^{\nu_1}, p_3^{\sigma_1}) \eta^{\epsilon}_{\mu_1\mu} \eta^4_{\nu_1\nu} \eta^4_{\sigma_1\sigma}$
- $gss: g_{\rm S}^{\rm scalar} \mu^{\epsilon} f_{abc} V_{3g}(p_1^{\mu_1}, p_2^{\nu_1}, p_3^{\sigma_1}) \eta_{\mu_1\mu}^4 \eta_{\nu_1\nu}^{\epsilon} \eta_{\sigma_1\sigma}^{\epsilon},$
- sss: $g_{\mathrm{S}}^{\mathrm{scalar}} \mu^{\epsilon} f_{abc} V_{3g}(p_1^{\mu_1}, p_2^{\nu_1}, p_3^{\sigma_1}) \eta^{\epsilon}_{\mu_1\mu} \eta^{\epsilon}_{\nu_1\nu} \eta^{\epsilon}_{\sigma_1\sigma}$
- $= ggss: -2i(g_{\rm S}^{\rm scalar})^2 \mu^{2\epsilon} V_{4g}(p_1^{\mu_1}, p_2^{\nu_1}, p_3^{\rho_1}, p_4^{\sigma_1}, a, b, c, d) \eta^{\epsilon}_{\mu_1\mu} \eta^{\epsilon}_{\nu_1\nu} \eta^4_{\rho_1\rho} \eta^4_{\sigma_1\sigma},$

• y sss
$$-\imath (g_{\mathrm{S}}^{\mathrm{scalar}})^2 \mu^{2\epsilon} V_{4g}(p_1^{\mu_1}, p_2^{\nu_1}, p_3^{\rho_1}, p_4^{\sigma_1}, a, b, c, d) \eta^{\epsilon}_{\mu_1\mu} \eta^{\epsilon}_{\nu_1\nu} \eta^{\epsilon}_{\rho_1\rho} \eta^{\epsilon}_{\sigma_1\sigma},$$

en donde fueron empleadas las etiquetas introducidas en la figura 4.1 y las convenciones mostradas en 1.2. El factor 2 adicional presente en el vértice ggss proviene de la expansión del lagrangiano dada en (4.2.11).

Como observación final, nótese que cuando se consideran interacciones en las que intervienen los gluones escalares es necesario efectuar el reemplazo $g_{\rm S} \rightarrow g_{\rm S}^{\rm scalar}$. La razón del mismo yace en que estas partículas tienen que ser consideradas como nuevos objetos en el modelo, los cuales presentan un comportamiento independiente de los gluones vectoriales. Por ende, siguiendo el principio de Landau, es necesario escribir el lagrangiano más general posible, que sea compatible con las simetrías del problema. Pero cuando se impone solamente la invariancia frente al grupo de Poincaré 4-dimensional, existe la libertad de tratar los acoplamientos vectoriales y escalares de forma independiente, lo cual justifica el reemplazo efectuado. Cabe señalar que, a pesar de que $g_{\rm S} = g_{\rm S}^{\rm scalar}$ al orden más bajo en $g_{\rm S}$, estos acoplamientos evolucionan de forma distinta (esto es, sus ecuaciones de grupo de renormalización no son iguales). Ello implica que pueden diferir al considerar la teoría a órdenes superiores, como se discute detalladamente en Refs. (40; 41).

2.1. Propagadores escalares y reglas efectivas

Como se puede apreciar de lo discutido antes, emplear gluones escalares en los cálculos implica tener en cuenta ciertos detalles técnicos. Por ello, para poder escribir amplitudes de scattering que incluyan estas partículas es necesario utilizar reglas de Feynman efectivas.

Comencemos analizando los propagadores. Como vimos en el Capítulo 1, el propagador gluónico en LCG se escribe

$$D_G(p,\mu,\nu) = i \frac{d_{\mu\nu}(p,n)}{p^2} , \qquad (4.2.13)$$

con $d_{\mu\nu}(p,n)$ dado por (4.1.17). Es importante señalar que aquí estamos omitiendo la prescripción involucrada para definir los propagadores, en particular en LCG (ver Capítulo 5), aunque asumimos que siempre está presente. Por otro lado, como se mostró previamente, el número de polarizaciones gluónicas puede modificarse cambiando el valor de los parámetros α_R y δ . Si trabajamos en un espacio-tiempo $D_{\rm ST}$ -dimensional, los gluones pueden ser tratados como $D_{\rm ST}$ vectores estableciendo $\eta = \eta^{D_{\rm ST}}$ en la definición del tensor de polarización (o, en términos de la parametrización empleada, fijando $\alpha_R = 1$ y $\delta = 1$), en cuyo caso vale que

$$h_g = d_{\mu\nu}(p, n) (\eta^{D_{\rm ST}})^{\mu\nu} = D_{\rm ST} - 2. \qquad (4.2.14)$$

También es posible descomponer el campo de gluones en términos de un vector 4-dimensional junto con $D_{\rm ST} - 4$ escalares, eligiendo $\eta = \eta^4$ en D_G y usando el propagador

$$D_S(p,\mu,\nu) = -\imath \frac{\eta_{\mu\nu}^{\epsilon}}{p^2}, \qquad (4.2.15)$$

para los gluones escalares. Realizando un conteo de grados de libertad bosónicos, se encuentra en este caso que los gluones vectoriales aportan

$$d^4_{\mu\nu}(p,n)(\eta^{D_{\rm ST}})^{\mu\nu} = 2 \tag{4.2.16}$$

polarizaciones físicas mientras que los gluones escalares contribuyen con

$$\eta_{\mu\nu}^{\epsilon} (\eta^{D_{\rm ST}})^{\mu\nu} = D_{\rm ST} - 4 \tag{4.2.17}$$

grados de libertad. Es por esta razón que las partículas escalares tienen que ser incluidas cuando se fuerza a que el número de polarizaciones internas sea $2-2\epsilon$ mientras se trabaja con un álgebra de Dirac 4-dimensional. En otras palabras, los resultados en el esquema HV se podrían recuperar agregando la correspondiente contribución de los gluones escalares al cálculo efectuado en FDH.

Es importante destacar que el mismo análisis puede efectuarse cuando se consideran gluones externos. Trabajando sobre la teoría en D_{ST} dimensiones, podemos descomponerlos en 4-vectores

más un conjunto de $D_{\rm ST} - 4$ partículas escalares. Apréciese que esto implica que los gluones escalares pueden intervenir como patas externas de diagramas de scattering para compensar el número total de grados de libertad gluónicos al trabajar con $D_{\rm Dirac} = 4$. Explícitamente, si tomamos el tensor de polarización para gluones externos y tenemos en cuenta la presencia de partículas escalares, es posible escribir

$$\sum_{\text{pol},\in D_{ST}} \epsilon^*_{\mu}(p) \epsilon_{\nu}(p) = \left(-\eta^4_{\mu\nu} + \frac{p^{\mu}Q^{\nu} + Q^{\mu}p^{\nu}}{p \cdot Q}\right) + \left(-\eta^{\epsilon}_{\mu\nu}\right)$$
(4.2.18)

$$= \sum_{\text{pol.}\in4D} \epsilon^*_{\mu}(p)\epsilon_{\nu}(p) + \hat{\epsilon}^*_{\hat{\mu}}(p)\hat{\epsilon}_{\hat{\nu}}(p), \qquad (4.2.19)$$

en donde estamos empleando la extensión diagonal de la métrica espacio-temporal e interpretamos $\{\hat{\mu}, \hat{\nu}\} \in (D_{\text{ST}} - 4)$ como un número complejo.

Cabe señalar que la descomposición vector-escalar es realizada con el objetivo de poder usar ciertas propiedades del álgebra de Dirac que solo son válidas cuando $D_{\text{Dirac}} \in \mathbb{N}$ (o, incluso, solamente cuando $D_{\text{Dirac}} = 4$). Más aún, puede decirse que nos permite dejar de lado las componentes transversas ϵ -dimensionales que son artificialmente introducidas por el método de regularización. Pero, cuando elegimos retener solamente la invariancia de Poincaré en 4 dimensiones, debemos usar $D_{\text{Dirac}} = 4$ y considerar a los fermiones como entidades 4-dimensionales. Esto permite simplificar significativamente el tratamiento de cadenas de espinores, las cuales suelen aparecer de forma explícita en cálculos a nivel amplitud de scattering.

Tomando como punto de partida las definiciones de V_{3g} y V_{4g} , junto con las reglas de Feynman para los vértices de gluones escalares inducidas a nivel lagrangiano, es posible obtener algunas nuevas reglas efectivas para trabajar de forma simplificada con estas partículas. Para obtenerlas, debemos modificar las expresiones anteriores utilizando fuertemente el hecho de que $\eta^{D_{\text{ST}}}$ es diagonal, lo cual equivale a decir que la métrica no mezcla contribuciones del espacio físico con aquellas presentes en el espacio transverso. Comenzando con las interacciones de tres partículas, se tiene:

- $g_{\rm S}^{\rm scalar} \mu^{\epsilon} f_{abc} \eta^4_{\nu\sigma} (p_3 p_2)_{\hat{\mu}}$ para el vértice ggs;
- $g_{\rm S}^{\rm scalar} \mu^{\epsilon} f_{abc} \eta^{\epsilon}_{\hat{\nu}\hat{\sigma}} (p_2 p_3)_{\mu}$ para la interacción gss;
- y $g_{\rm S}^{\rm scalar} \mu^{\epsilon} f_{abc} V_{3g}(p_1^{\hat{\mu}}, p_2^{\hat{\nu}}, p_3^{\hat{\rho}})$ para sss.

Nótese que estas reglas concuerdan con la forma usual de las reglas de Feynman para interacciones vector-escalar. Además, aquí puede interpretarse $\eta_{\rho\sigma}^{\epsilon}$ como una función delta de Kronecker cuyo valor es 1 si las partículas escalares tienen el mismo índice y 0 en caso contrario. Siguiendo las

mismas ideas, es posible simplificar las interacciones cuádruples y obtener las siguientes reglas efectivas:

en donde, nuevamente, se puede apreciar el acuerdo entre estas expresiones y las reglas de Feynman para partículas escalares.

Para concluir este capítulo, hagamos un breve comentario acerca de la interacción fermiónescalar. Este es el único vértice que involucra la presencia de matrices $\hat{\gamma}$. Debido a que al trabajar con gluones escalares se establece $D_{\text{Dirac}} = 4$ y los fermiones son objetos pertenecientes a un espacio 4-dimensional, estas matrices de Dirac *extra-dimensionales* actúan de forma trivial sobre los espinores. En consecuencia, no es necesario incluirlas dentro de las cadenas espinoriales, lo cual conduce a la existencia de interacciones que violan la conservación de helicidad. Mas aún, si se tienen dos matrices $\hat{\gamma}$ dentro de una cadena espinorial, usando el hecho de que $\{\hat{\gamma}^{\mu}, \tilde{\gamma}^{\nu}\} = 0$ junto con $\{\hat{\gamma}_{\mu}, \hat{\gamma}_{\nu}\} = 2\eta_{\mu\nu}^{\epsilon} \mathbb{I}$, es posible eliminar los indices que corren sobre las componentes del espacio transverso. En el Capítulo 7, al analizar las distintas contribuciones a la amplitud de splitting $q \to gq$ a NLO, mostraremos de forma explícita la validez de estas afirmaciones y su utilidad para simplificar notablemente los cálculos.

5. INTEGRALES DE FEYNMAN

Las integrales de Feynman son objetos que naturalmente aparecen en cálculos perturbativos. En este capítulo, nos centramos en las propiedades de las mismas en el contexto de DREG. Discutimos los métodos usuales de cálculo (parametrizaciones de Schwinger-Feynman y la reducción de Passarino-Veltman). Además, se describe el método de integración por partes (IBP), que constituye una herramienta muy poderosa para simplificar cómputos multi-partícula. En la parte final del capítulo se describen las integrales de Feynman en el contexto del light-cone gauge (LCG).

1. Definiciones previas

Comencemos con una teoría de campos regularizada con DREG en $D_{\rm ST} = 4 - 2\epsilon$ dimensiones. Siguiendo el procedimiento de cuantización esbozado en el Capítulo 1 y su posterior expansión perturbativa, vemos que los órdenes superiores involucran sumas sobre estados intermedios virtuales. Expresados con diagramas de Feynman, tales términos corresponden a grafos con lazos cerrados o, equivalentemente, momentos libres. Estas contribuciones se conocen como *loops* (o *diagramas con loops*). Trabajando en el espacio de momentos, la presencia de un estado virtual implica una suma sobre todas las posibles configuraciones cinemáticas. Debido a que existe un continuo de momentos, cada loop se asocia a una integral sobre el momento libre correspondiente. De tal forma, una amplitud de scattering con *l*-loops se puede escribir genéricamente como

$$\mathcal{A}^{(l)} = -i \int \prod_{j=1}^{l} \sum_{n} \frac{d^{D_{\rm ST}} q_j}{(2\pi)^{D_{\rm ST}}} \frac{A_n(p_i, q_i, D_{\rm ST})}{\prod D_k(q_i, p_i, m_i)}, \qquad (5.1.1)$$

en donde q_i representan los momentos libres, p_i refiere a momentos externos y $D(q_i, p_i, m_i)$ denota de forma genérica algún conjunto de denominadores presentes en los propagadores, los cuales dependen de combinaciones de q_i , p_j y, en general, las masas m_i de los estados intermedios. Nótese que la normalización $(2\pi)^{D_{\text{ST}}}$ se utiliza para enfatizar que estamos trabajando en DREG; la dependencia en el esquema elegido se encuentra codificada en los numeradores A de (5.1.1). En este trabajo nos centramos en el estudio de correcciones a 1-loop, con lo cual restringimos el ulterior análisis del caso l = 1. De todas las posibles integrales de Feynman, comenzamos analizando las denominadas integrales escalares. Estos objetos se comportan como escalares ante transformaciones de Lorentz en 4 o $D_{\rm ST}$ dimensiones. Es posible demostrar que las integrales tensoriales siempre pueden reducirse a combinaciones lineales de vectores y tensores métricos, por lo que el principal problema de cálculo consiste en obtener analíticamente las integrales escalares. Trataremos este tópico en la siguiente sección.

Siguiendo los comentarios efectuados en párrafos previos, resulta útil introducir notación adecuada para estudiar integrales escalares a 1-loop. Consideremos entonces un proceso de scattering $0 \rightarrow n+1$ a 1-loop en QCD (o QCD+QED) no masiva. Los momentos externos vienen designados por p_i^{μ} (con i = 1, ..., n + 1) y la conservación del impulso implica la presencia de n momentos independientes¹. Por otro lado, es posible contraer el momento del loop, q, con los vectores externos. En consecuencia, todos las posibles cantidades escalares involucradas en el proceso son:

- n(n-1)/2 productos escalares en los que solo intervienen momentos externos, $s_{ij} = 2 p_i \cdot p_j$;
- y n + 1 cantidades que contienen al momento del loop, esto es, $q^2 = q \cdot q$, y $q \cdot p_i$;

en donde se está imponiendo la restricción $p_i^2 = 0 \quad \forall i = 1, ..., n + 1$ (partones no masivos en su capa de masa). Con el objetivo de unificar la notación, definimos $p_0 = q$; de este modo se puede escribir $q^2 = s_{00}/2$ y $s_{0j} = 2 q \cdot p_j$.

Por otra parte, en los diagramas con loops existe una relación entre la cantidad de líneas internas, I, y el número de partículas externas n + 1: para 1-loop es trivial notar que I = n + 1.² Cada línea interna es descrita utilizando un propagador, que involucra una expresión genérica de la forma D_i^{-1} . En consecuencia, fijado un diagrama arbitrario, hay n+1 propagadores distintos. A su vez, como estos propagadores son funciones que dependen del momento que fluye por la línea asociada, como máximo habrá n + 1 propagadores que dependen del momento q. Al utilizar un gauge covariante en QCD no masiva (o QCD+QED), D_i es siempre cuadrático en q.³ Más aún,

¹ Existe una sutileza en esta afirmación, pues los momentos físicos en un espacio 4-dimensional son vectores en \mathbb{R}^4 . Más aún, por estar trabajando con partículas no masivas, los correspondientes momentos son vectores nulos y siempre pueden escribirse en la forma $\lambda(1, \hat{r}), \hat{r} \in \mathbb{S}^2$. En consecuencia, no es posible tener más de 4 vectores que sean linealmente independientes. Así, la noción de *momentos independientes* a la que hacemos referencia en el texto corresponde a que están asociados a partículas distintas, arbitrarias.

² Cabe señalar que podría ocurrir que haya más productos escalares que denominadores irreducibles para un dado proceso. La condición para que ello ocurra es $l \ge \max(2, 5-2n)$, con lo cual para $l \ge 2$ la afirmación planteada en el texto no puede aplicarse.

³ En otros modelos, como soft collinear efective theory (SCET) o QCD no relativista (NRQCD), los propagadores tienen una forma funcional diferente. En particular, al trabajar en el LCG aparece un denominador lineal, $n \cdot q$, que tiene efectos importantes pero no afecta el desarrollo de la discusión aquí llevada a cabo.

a 1-loop resulta posible escribir cualquier producto escalar que involucre al vector q utilizando una base completa de denominadores irreducibles D_i extraída de un diagrama maximal (esto es, uno en el cual todas las líneas internas formen parte del loop). Para apreciar esto, notemos que vale la descomposición

$$D_i = \sum_{j=0}^n A_{ij} s_{0j} + m_i^2, \qquad (5.1.2)$$

en donde m_i^2 es una contribución que no depende de q y A_{ij} es una matriz real de dimensión $(n+1) \times (n+1)$. En consecuencia podemos invertir la relación, obteniendo

$$s_{0j} = \sum_{i=0}^{n} A^{-1}{}_{ij} \left(D_i - m_i^2 \right) , \qquad (5.1.3)$$

lo que nos muestra que todos los productos escalares se pueden escribir introduciendo una base de denominadores irreducibles. Este hecho es muy importante para caracterizar la forma de las integrales de Feynman que pueden contribuir a una dada amplitud de scattering a 1-loop. Volviendo a (5.1.1), vemos que los numeradores A se reducen a polinomios en D_i . Consecuentemente, al ser expandidos se producen cancelaciones con los propagadores dependientes de q y $\mathcal{A}^{(1)}$ resulta una combinación lineal de integrales de la forma

$$I(a_1, \dots, a_n) = \int_q \frac{1}{D_1^{a_1} \dots D_n^{a_n}}, \qquad (5.1.4)$$

con $a_i \in \mathbb{Z}$. La notación está orientada a enfatizar la posibilidad de que los numeradores incluyan una dependencia no trivial en el momento de integración (cuando $a_i < 0$).

Por otra parte, el número de partículas externas involucradas en una integral permite introducir una nomenclatura específica que describe la topología de sus correspondientes representaciones gráficas. De este modo, trabajando a 1-loop, tenemos los *tadpoles* (n = 0), burbujas (n = 1), triángulos (n = 2), *boxes* o cajas (n = 3), pentágonos (n = 4) y así siguiendo. En la figura 5.1 se ilustran los grafos asociados a distintos tipos de integrales. Para 2 o más loops, la descripción de los diagramas es menos trivial puesto que es necesario indicar como se conectan las líneas internas.

En el resto de este capítulo trataremos los objetos $I(a_1, \ldots, a_n)$, describiendo sus características relevantes para simplificar las expresiones finales. La discusión aquí expuesta es meramente introductoria, y está basada principalmente en Refs. (42; 43).

1.1. Identidades de integración por partes (IBP)

En el contexto de análisis matemático, las conocidas como identidades de integración por partes o *IBPs* se basan en el teorema fundamental del cálculo y la acción del operador diferenciación



Fig. 5.1: Esquemas de las diversas topologías correspondientes a integrales de 1-loop. Debido a que en este trabajo se analizan procesos con hasta n + 1 = 4 partículas externas, solo graficamos: (a) tadpoles, (b) burbujas, (c) triángulos, y (d) boxes.

d sobre funciones suaves integrables. En el área de física de altas energías, el concepto asociado es diferente. Originalmente introducidas por Chetyrkin y Tkachov en Ref. (44), las IBPs se relacionan con integrales sobre una variedad sin borde de derivadas totales. En concreto, utilizando la notación establecida antes, dada una función f que depende solamente de variables escalares se propone

$$\int \frac{d_{\rm ST}^D q}{(2\pi)^{D_{\rm ST}}} \frac{d}{dq^{\mu}} \left(p_j^{\mu} f(s_{ik}) \right) = 0 \text{ para todo } j \in \{0, \dots, n\} , \qquad (5.1.5)$$

en donde se asume que la aplicación de DREG hace que f sea integrable y que $f \rightarrow 0$ cuando evalúa sobre una hiperesfera de radio $R \rightarrow \infty$. Si bien estas son las ecuaciones que se emplean para implementar los algoritmos de reducción y simplificación, resulta interesante buscar una derivación alternativa de las mismas. La motivación de esto yace en la posibilidad de obtener más información relativa a las estructuras matemáticas que se encuentran vinculadas a las integrales de Feynman.

Para comenzar, definamos el operador \mathcal{I} actuando en el espacio de funciones Γ (integrables en el contexto de DREG) como

$$\mathcal{I}[f] = \int_{q} f(q) \in \mathbb{C} , \qquad (5.1.6)$$

en donde la integración se efectúa sobre todo el espacio asociado a q. Apelando a una generalización del teorema de cambio de variables, sabemos que cualquier integral es invariante frente a reparametrizaciones del momento de loop. Sin embargo, realizar un cambio en q induce un cambio en el integrando. Por otra parte, \mathcal{I} es \mathbb{C} -lineal y podemos caracterizar su núcleo $\operatorname{Nu}(\mathcal{I}) \subset \Gamma$. En tal contexto, resulta interesante estudiar el espacio de transformaciones afines del momento q y su acción sobre el integrando f. Concretamente, un reemplazo de la forma

$$q \to q' = Aq + B_j p_j \,, \tag{5.1.7}$$

con $A \neq 0$ y p_j momentos externos, no modifica el valor de I de acuerdo a (5.1.4). Debido a la invariancia translacional (consecuencia de estar integrando sobre todo el espacio), la componente inhomogénea de q' puede ser reabsorbida simplemente mediante un *shift* del momento cuando A = 1. En términos de la acción sobre el integrando, ello es equivalente al cambio $f(q) \rightarrow \tilde{f}(q) = f(q + B_j p_j)$. Sin embargo, cuando $|A| \neq 1$, el jacobiano de la transformación no es igual a la identidad y

$$f(q) \to \tilde{f}(q) = \mathcal{J} \cdot f(Aq + B_j p_j), \qquad (5.1.8)$$

es la forma en que se modifica el argumento de \mathcal{I} . La situación se torna más relevante al considerar solamente transformaciones infinitesimales del momento q. En tal caso, es posible encontrar una estructura algebraica detrás de la invariancia frente a reparametrizaciones, que permite derivar las IBPs (45). Para esto, se propone la expansión

$$q \to q' = q + \alpha p_j \,, \tag{5.1.9}$$

en donde α es un parámetro pequeño. Cabe señalar que el caso $p_0 = q$ permite tener en cuenta homotecias infinitesimalmente apartadas de la identidad. Entonces, realizando el desarrollo de Taylor a primer orden para la función f se obtiene

$$f(q) \to \mathcal{J} \cdot (f(q) + \alpha \, p_j \cdot df(q)) ,$$
 (5.1.10)

con $\mathcal{J} = (1 + \alpha D_{\mathrm{ST}} \delta_{0j})$. Expandiendo a primer orden en α y aplicando el operador \mathcal{I} , tenemos

$$\mathcal{I}\left[D_{\mathrm{ST}}\delta_{0j}f + p_j \cdot df\right] = 0, \qquad (5.1.11)$$

en donde usamos que α es arbitrario. De esta forma, se encuentran n+1 ecuaciones algebraicas que imponen restricciones al integrando. Esto es equivalente a decir que, apelando a estas identidades, es posible establecer relaciones puramente algebraicas entre diversas integrales de Feynman.

Más aún, como se desarrolla en Ref. (45), existe una estructura de álgebra de Lie asociada con las identidades mostradas en Eq. (5.1.11). Los generadores de la misma pueden expresarse como

$$O_j = D_{\rm ST} \delta_{j0} + p_j^{\mu} \cdot \frac{d}{dq^{\mu}},$$
 (5.1.12)

que satisfacen las relaciones

$$[O_j, O_{j'}] = \delta_{0j'} O_j - \delta_{0j} O_{j'}, \qquad (5.1.13)$$

$$\mathcal{I}[O_j(f)] = 0.$$
 (5.1.14)

Nótese que O_j admite ser representado como un operador diferencial actuando a nivel integrando, hecho que justifica la comparación de estas identidades con las clásicas IBPs. Por otra parte, es posible relacionar $\frac{d}{dq}$ con derivar respecto a los productos escalares s_{ij} . Usando la notación introducida en la primera parte de este capítulo,

$$\frac{ds_{ij}}{dq_{\mu}} = 2\delta_{i0}p_j^{\mu} + 2\delta_{j0}p_i^{\mu}, \qquad (5.1.15)$$

y con ello

$$p_j^{\mu} \frac{ds_{0i}}{dq^{\mu}} = (1 + \delta_{i0}) s_{ij} = M_{ij} , \qquad (5.1.16)$$

que define una matriz de tamaño n+1, denotada M. Entonces se puede escribir de forma general

$$O_j = D_{\rm ST} \delta_{j0} + \sum_{i=0}^n M_{ji} \frac{d}{ds_{0i}}, \qquad (5.1.17)$$

con lo cual el operador O actúa naturalmente sobre las variables escalares. Pero, (5.1.2) permite conectar s_{0i} con una base de denominadores irreducibles D_a y, en consecuencia, O también puede escribirse empleando derivadas respecto a D_a . Para el caso particular de integrales con líneas internas no masivas,

$$\frac{d}{ds_{0i}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{dD_k}{ds_{0i}} \frac{d}{dD_k} = \sum_{k=0}^{n} A_{ki} \frac{d}{dD_k}, \qquad (5.1.18)$$

lo que conduce a

$$O_j = D_{\rm ST} \delta_{j0} + \sum_{k=0}^n (A \cdot M)_{kj} \frac{d}{dD_k}, \qquad (5.1.19)$$

que para j > 0 involucra contribuciones únicamente proporcionales a derivadas de los denominadores irreducibles. Debido a que las integrales escalares se escriben de forma genérica indicando la potencia a_i de cada elemento de la base $\{D_i\}_{i=1,...,n}$, la acción de $\frac{d}{dD_i}$ y la multiplicación por D_i producen modificaciones en a_i . Concretamente, como se cumple que

$$\frac{d}{dD_j}D_i^{-a_i} = -a_i\delta_{ij}D_i^{-(a_i+1)}, \qquad (5.1.20)$$

si definimos el operador número \mathbf{n}_i a través de

$$\mathbf{n}_{i}I(a_{1},\ldots,a_{n}) = a_{i}I(a_{1},\ldots,a_{n})$$
$$= D_{i}\left(-\frac{d}{dD_{i}}\right)I(a_{1},\ldots,a_{n}), \qquad (5.1.21)$$

es posible introducir

$$\mathbf{b}^{+}I(a_{1},\ldots,a_{b},\ldots,a_{n}) = I(a_{1},\ldots,a_{b}+1,\ldots,a_{n}), \qquad (5.1.22)$$

$$\mathbf{b}^{-}I(a_{1},\ldots,a_{b},\ldots,a_{n}) = I(a_{1},\ldots,a_{b}-1,\ldots,a_{n}), \qquad (5.1.23)$$

que actúan como operadores de subida y bajada sobre el espacio de los índices a_i . Dejando de lado la normalización, es sencillo apreciar la existencia del mapeo $\mathbf{a}^+ \to -\frac{d}{dD_a}$ y $\mathbf{a}^- \to D_a$, junto con

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}^{\pm}, \mathbf{n}_j \end{bmatrix} = \pm \delta_{bj} \mathbf{b}^{\pm}, \qquad (5.1.24)$$

lo que equivale a la no conmutatividad de estos objetos con \mathbf{n}_a . Estas observaciones son de vital importancia para expresar los generadores del álgebra utilizando solamente estos operadores.

En resumen, las identidades IBP son una consecuencia de la estructura de álgebra de Lie subyacente a las integrales de Feynman, la cual posibilita la escritura de ecuaciones puramente algebraicas en términos de operadores en el espacio de los índices a_i .

1.2. Otras identidades útiles

Además de las IBPs, existen otras identidades verificadas por las integrales de Feynman escalares. Una transformación de Lorentz aplicada sobre los momentos externos p_i (con i > 0) no cambia el valor de la integral $I(a_1, \ldots, a_n)$, aunque modifica la forma explícita del integrando. Si consideramos una transformación infinitesimal Λ , los momentos externos cambiarán de acuerdo a

$$p_i^{\mu} \rightarrow \Lambda p_i^{\mu} = p_i^{\mu} + \delta p_i^{\mu} = p_i^{\mu} + \delta \epsilon_{\nu}^{\mu} p_i^{\nu}, \qquad (5.1.25)$$

siendo $\delta \epsilon^{\mu}_{\nu}$ un tensor antisimétrico que genera la transformación y δp^{μ}_{i} una variación infinitesimal. Debido a que $I(a_{1}, \ldots, a_{n}) = I$ depende de los momentos p_{i} , podemos efectuar una expansión a primer orden respecto de las variaciones δp^{μ}_{i} , obteniendo

$$\Lambda I = I + \delta p_1 \cdot \frac{d}{dp_1} I + \ldots + \delta p_n \cdot \frac{d}{dp_n} I = I, \qquad (5.1.26)$$

en donde estamos usando que $\Lambda I \equiv I$ por tratarse de una integral escalar. Sacando factor común y reemplazando los generadores se tiene

$$\delta \epsilon^{\mu}_{\nu} \left(p_1 \cdot \frac{d}{dp_1} + \ldots + p_n \cdot \frac{d}{dp_n} \right) I \left(a_1, \ldots, a_n \right) = 0.$$
 (5.1.27)

Debido a que $\delta \epsilon$ es arbitrario, la ecuación anterior debe cumplirse para cualquier posible elección. Ello implica

$$\left(p_1^{\mu}\frac{d}{dp_1^{\nu}} - p_1^{\nu}\frac{d}{dp_1^{\mu}} + \ldots + p_n^{\mu}\frac{d}{dp_n^{\nu}} - p_n^{\nu}\frac{d}{dp_n^{\mu}}\right)I(a_1,\ldots,a_n) = 0, \qquad (5.1.28)$$

en donde se está teniendo en cuenta la antisimetría de los generadores de Λ . De esta forma, si $A(p_i, p_j)_{\mu\nu}$ representa un producto antisimetrizado de momentos externos, luego podemos contraerlo con Eq. (5.1.28) para obtener un conjunto de ecuaciones que debe cumplir la integral de Feynman I. Más aún, como solo se utilizan momentos externos, estas identidades se trasladan al integrando f, y así se imponen restricciones antes de efectuar la integración. Nótese que, al trabajar en 4 dimensiones, un tensor antisimétrico tiene 6 componentes independientes, razón por la cual se podrán hallar 6 ecuaciones independientes, como máximo. Es posible demostrar que las identidades derivadas a partir de Eq. (5.1.28) son combinaciones lineales de IBPs (43).

Por último, en el caso de integrales que solamente involucren propagadores cuadráticos, *I* tiene un comportamiento bien definido ante un reescaleo de las magnitudes dimensionales del problema. Específicamente, si efectuamos una dilatación simultánea de todos los momentos externos involucrados de acuerdo a

$$p_i^{\mu} \to \lambda p_i^{\mu} \,, \tag{5.1.29}$$

con $\lambda \neq 0$, entonces $D_i \rightarrow \lambda^2 D_i$ al considerar $q \rightarrow \lambda q$. Adaptando la notación expuesta en Eq. (5.1.4) para mostrar de forma explícita la dependencia en los momentos, se tiene que

$$I(a_i, \lambda p_i) = \lambda^{D_{\mathrm{ST}} - 2\sum a_i} I(a_i, p_i) . \qquad (5.1.30)$$

Derivando respecto a λ mediante la regla de la cadena, se llega a

$$\frac{d}{d\lambda}I(a_i,\lambda p_i) = \sum_{j=1}^n p_j \cdot \frac{d}{dp_j}I(a_i,\lambda p_i) , \qquad (5.1.31)$$

pero, usando Eq. (5.1.30) y estableciendo $\lambda = 1$, obtenemos

$$\left(D_{\rm ST} - 2\sum_{j=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot \frac{d}{dp_j}\right) I(a_i, p_i) = 0, \qquad (5.1.32)$$

que se conoce como identidad de homogeneidad o reescaleo (*scaling*, en inglés). Es importante señalar que Eq. (5.1.32) puede extenderse directamente al caso multiloop y también cuando los propagadores involucrados corresponden a partículas masivas. Esto se debe a que la identidad es consecuencia de la naturaleza cuadrática de todos los propagadores involucrados.

Al igual que en el tratamiento de las identidades de Lorentz, las identidades de *scaling* se trasladan al integrando, asumiendo que el mismo tiene grado de homogeneidad $-2\sum a_i$. En tal

caso, la ecuación Eq. (5.1.32) puede expresarse como

$$\left(q \cdot \frac{d}{dq} + D_{\rm ST}\right) f = \frac{d}{dq} \cdot q f, \qquad (5.1.33)$$

que resulta ser una combinación lineal de IBPs. De esta manera, la estructura descripta en la sección anterior es suficiente para caracterizar todas las identidades algebraicas de las integrales de Feynman, al menos a nivel integrando.

1.3. Reducción por IBPs: algoritmo de Laporta

La ventaja de contar con las identidades descriptas en las secciones previas consiste en establecer relaciones entre integrales de Feynman con distintos valores de a_i . Esto constituye un problema computacionalmente interesante, pues cuando se estudian amplitudes de scattering virtuales es frecuente encontrar una estructura no trivial en los numeradores que origina integrales con valores de $a_i \neq 1, 0$. Por ende, disponer de identidades algebraicas entre estos objetos permite efectuar una descripción simplificada de la amplitud completa mediante la introducción de un conjunto reducido de integrales maestras o master integrals (MI). A continuación describimos el conocido como algoritmo de Laporta (46), que permite sistematizar el proceso de reducción de integrales.

Como primer paso, es necesario fijar una base de denominadores irreducibles $\{D_i\}_{i=1,...,n}$. Luego consideremos una integral genérica $I(a_1,...,a_n)$, con a_i índices arbitrarios. Como discutimos anteriormente, estos objetos satisfacen identidades algebraicas, que pueden expresarse empleando los operadores O_j que definen las IBPs. A su vez, O_j siempre puede escribirse empleando únicamente operadores de subida/bajada (\mathbf{a}^{\pm}) , la identidad y operadores número, \mathbf{n}_i . En consecuencia, Eq. (5.1.14) origina ecuaciones de la forma

$$\sum_{k} C_k(s_{ij}, D_{\rm ST}) I\left(a_1^k, \dots, a_n^k\right) = 0, \qquad (5.1.34)$$

en donde C_k son funciones que solamente dependen de los momentos externos y la dimensión del espacio-tiempo, y a^k denota un conjunto de índices asociado a la base de denominadores. Más aún, $|a_i^k - a_i| \leq 1$ puesto que la expansión de los operadores O_j es lineal⁴. Con esto, aplicando distintos O_j y variando el conjunto de índices, se encuentran diferentes ecuaciones que establecen vínculos puramente algebraicos entre distintas I.

La idea del algoritmo de Laporta es utilizar las IBPs para generar un sistema de ecuaciones sobredeterminado, que permita expresar integrales en términos de algún conjunto elegido. Es

⁴ Puede encontrarse la representación explícita de estos objetos en Ref. (43).

importante destacar este último punto por dos motivos. En primer lugar porque la sola aplicación de identidades algebraicas no suele ser suficiente para determinar funcionalmente una integral de Feynman genérica. De hecho, las IBPs originan un sistema homogéneo y solamente pueden expresarse integrales como combinaciones lineales de otras. Por otro lado, la definición del conjunto de MIs requiere la introducción de un ordenamiento en los índices $\{a_i^k\}_{i=1,...,n}$. Por lo general el ordenamiento tiene relación con la complejidad de las integrales; concretamente, suelen despejarse primero aquellas integrales con mayor cantidad de denominadores. Cabe destacar que, además, elegir un ordenamiento adecuado permite que la implementación del algoritmo sea computacionalmente más eficiente.⁵

El procedimiento discutido anteriormente se encuentra implementado en varias rutinas computacionales, como por ejemplo en el paquete para MATHEMATICA llamado FIRE (47; 48).

2. Métodos de cálculo

Antes de adentrarnos en el método de ecuaciones diferenciales, es útil efectuar un breve repaso de algunas técnicas tradicionales para el cómputo de integrales de Feynman. En particular, la parametrización de Feynman-Schwinger resulta adecuada para definir formalmente estos objetos en el contexto de una teoría regularizada mediante DREG. Por otro lado, también discutimos la reducción de integrales tensoriales empleando el método de Passarino-Veltman, que resulta importante para obtener expresiones que únicamente involucran integrales escalares.

2.1. Representación α y parámetros de Feynman

La idea central de la parametrización *alfa* o de Schwinger consiste en escribir los propagadores utilizando una representación integral. Dejando de lado las estructuras que pueden aparecer en los numeradores, cualquier propagador puede expresarse de forma general como

$$\operatorname{Prop}(q) = \frac{1}{A(q)^b}, \qquad (5.2.1)$$

con A un denominador irreducible de alguna base. Tomemos el resultado conocido

$$\frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^\infty d\alpha \, \alpha^{b-1} \exp\left(-A\alpha\right) = \frac{1}{A^b},\tag{5.2.2}$$

para $\operatorname{Re}(b)$, $\operatorname{Re}(A) > 0$. Ahora, consideremos

$$A(q) = q^2 - m^2 + i0, \qquad (5.2.3)$$

⁵ Para más detalles acerca del algoritmo de reducción y su implementación, consultar la Sección 2 de Ref. (46).

que corresponde al denominador presente en el propagador de una partícula de masa m y momento q. Debido a que los estados virtuales se encuentran fuera de su capa de masa, q^2 es un número real arbitrario y podría verificarse que $\operatorname{Re}(A) < 0$. Esto imposibilita utilizar exactamente la representación propuesta en Eq. (5.2.2), pues la integral no converge en la situación analizada. Sin embargo, podemos explotar la prescripción +i0 para trabajar en una región convergente, mediante el cambio $a \to -ia$. De esta forma, el argumento de la exponencial en Eq. (5.2.2) es siempre negativo y la integral converge en el sentido usual⁶. Con esto, la fórmula a utilizar será

$$\frac{1}{a^b} = \frac{(-i)^b}{\Gamma(b)} \int_0^\infty d\alpha \, \alpha^{b-1} \exp\left(ia\alpha\right) \,, \tag{5.2.4}$$

para reemplazar denominadores en términos de exponenciales en el interior de una integral de Feynman. La ventaja del procedimiento es que la función exponencial permite agrupar productos de denominadores en forma de sumas en su argumento. De esta forma, por cada propagador presente en la integral original se introduce un parámetro α_l : una integral con *L*-denominadores irreducibles queda expresada genéricamente como

$$\int_{q} \frac{1}{A_{l}^{a_{l}}} = \frac{(-i)^{\sum a_{l}}}{\prod \Gamma(a_{l})} \int_{\mathbb{R}^{L}_{+}} d\alpha_{1} \dots d\alpha_{L} \int_{q} \prod_{l} \alpha_{l}^{a_{l}-1} \exp\left(i \sum A_{l} \alpha_{l}\right), \qquad (5.2.5)$$

lo que es equivalente a una integral sobre $\mathbb{R}^L_+ \times Q$, con Q el espacio en el cual vive el momento del loop (que, en $D_{\text{ST}} \in \mathbb{N}$ es simplemente $Q = \mathbb{R}^{D_{\text{ST}}})^7$.

Por otra parte, es posible extender la definición de una integral gaussiana al contexto de DREG. Específicamente, consideremos la integral

$$\int d^d q \exp\left(i(\alpha q^2 - 2q \cdot k)\right) = \exp\left(i(2-d)\frac{\pi}{4}\right)\pi^{d/2}\alpha^{-d/2}\exp\left(-i\frac{k^2}{\alpha}\right), \qquad (5.2.6)$$

con α un escalar y k un vector. Esta expresión está bien definida al trabajar con $d \in \mathbb{N}$ ya que pueden aplicarse el teorema de Fubini y una expansión del exponente para descomponer (5.2.6) en términos de un producto de integrales gaussianas en una variable. La idea para extender la definición a $d \in \mathbb{C}$ consiste en tomar el lado derecho de Eq. (5.2.6) y prolongar d al espacio complejo. De este modo, se tiene una definición formal de la integral de una gaussiana en DREG. Esta identidad es muy importante para dotar de sentido matemático a una integral de Feynman

 $^{^{6}}$ La transformación propuesta es equivalente a efectuar una rotación de Wick. El problema de la falta de convergencia surge a raíz de que $q^2 = \eta_{\mu\nu}q^{\mu}q^{\nu}$ no sea definido positivo por estar trabajando en una variedad pseudo-Riemanniana. Cuando se efectúa una prolongación al espacio Euclídeo, mediante la transformación $p^0 \rightarrow ip^0$, se verifica $q_E^2 \geq 0$. En términos de los polos de los propagadores, la extensión al espacio complejo de la variable temporal permite evitarlos y apelar al teorema de residuos para calcular la integral asociada.

⁷ Aquí estamos empleando la notación $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Nótese que las integrales corresponden a formas diferenciales sobre variedades con esquinas.

en el contexto de DREG con $d = D_{ST}$ genérico, puesto que al combinarse con la parametrización α permite efectuar una reducción a integrales complejas ordinarias sobre regiones de un hipercubo.

Tomando la representación α como punto de partida, pueden definirse los parámetros de Feynman efectuando el cambio de variables

$$\alpha_l = \xi_l \xi_T , \qquad (5.2.7)$$

con las restricciones

$$\sum \xi_l = 1, \qquad (5.2.8)$$

$$\xi_T = \sum \alpha_l > 0. \tag{5.2.9}$$

Es un punto crucial exigir que $\xi_l \in I = [0, 1]$, puesto que la combinación con el requisito (5.2.8) permite expresar cualquier producto de denominadores en términos de integrales iteradas. Más aún, dichas integrales poseen una estructura algebraica subyacente que puede ser explotada para simplificar las expresiones obtenidas. Concretamente, esa estructura corresponde a un álgebra de *shuffle* (49; 50) que permite la introducción de unos objetos conocidos como *symbols* (51). Los symbols son muy útiles para identificar propiedades de los elementos de matriz, así como también posibilitan la obtención de identidades no triviales entre funciones transcendentales.

Volviendo a los parámetros de Feynman, tras aplicar el cambio de variables sugerido en Eq. (5.2.7) e integrar sobre ξ_T , la expresión Eq. (5.2.5) se transforma en

$$\prod_{l=1}^{L} \frac{1}{D_{l}^{a_{l}}} = \frac{\Gamma\left(\sum a_{l}\right)}{\prod \Gamma\left(a_{l}\right)} \int_{I^{L}} d\xi_{1} \dots d\xi_{L} \prod_{l} \xi_{l}^{a_{l}-1} \frac{1}{\left(\sum D_{l}\xi_{l}\right)^{\sum a_{l}}} \delta\left(\sum \xi_{l}-1\right), \quad (5.2.10)$$

donde L denota el número de propagadores presentes en la integral considerada. Esta es la fórmula general asociada a la parametrización de Feynman, y resulta aplicable a cualquier tipo de integral, independientemente de la naturaleza de los propagadores D_i involucrados. Nótese que el denominador del integrando queda expresado en términos de una combinación lineal de denominadores irreducibles, con lo cual puede reescribirse como

$$\left(\sum D_l \xi_l\right)^{\sum a_l} = A_{\Delta}^{\sum a_l} \left((q-k)^2 - m_{\Delta}^2 + i0 \right)^{\sum a_l} , \qquad (5.2.11)$$

en donde estamos asumiendo que D_l es a lo sumo cuadrático en el momento q y que todos los propagadores hacen uso de la prescripción +i0. En la ecuación anterior, las cantidades A_{Δ} , m_{Δ} y k dependen de los parámetros ξ_l . Cabe destacar que k es irrelevante debido a que la integración sobre q es invariante ante translaciones; sin embargo, la presencia de k en Eq. (5.2.11) es necesaria para garantizar la igualdad estricta a nivel integrando. Por otra parte, como este resultado es completamente general vemos que la caracterización de integrales a 1-loop puede efectuarse dejando de lado la dependencia del integrando en q. En otra palabras, basta calcular la integral

$$f(a, m_{\Delta}, D_{\rm ST}) = \int_{q} \frac{1}{(q^2 - m_{\Delta}^2 + i0)^a},$$
 (5.2.12)

con m y a genéricos. Nótese que f corresponde a una integral tipo tadpole con una partícula de masa m_{Δ} cuando a = 1. Por lo explicado en el Capítulo 4, la aplicación de DREG hace que este tipo de expresiones se anule cuando adolecen de escalas características. Es decir, los argumentos dimensionales fuerzan la dependencia

$$f(a, m_{\Delta}, \epsilon) = S_{\Gamma}(a) \left(m_{\Delta}^2 - i0\right)^{2-\epsilon-a}, \qquad (5.2.13)$$

donde fijamos $D_{ST} = 4 - 2\epsilon$ y la función $S_{\Gamma}(a)$ puede determinarse mediante el cálculo explícito. De hecho, aplicando una rotación de Wick en Eq. (5.2.12) para evitar los polos del integrando y usando el teorema de residuos puede computarse de forma exacta f, lo que conduce a

$$S_{\Gamma}(a) = (-1)^{a} \frac{\Gamma(a-2+\epsilon)}{(4\pi)^{2-\epsilon} \Gamma(a)}.$$
 (5.2.14)

Cabe destacar que, por cuestiones de normalización, es usual definir

$$c_{\Gamma} = \frac{\Gamma(1+\epsilon)\Gamma^2(1-\epsilon)}{(4\pi)^{2-\epsilon}\Gamma(1-2\epsilon)}, \qquad (5.2.15)$$

que corresponde al factor de volumen $D_{\rm ST}$ -dimensional para integrales de 1-loop. De este modo, todas las integrales escalares pueden expresarse en términos de c_{Γ} , al menos realizando una expansión en ϵ y reteniendo los términos finitos.

Para finalizar esta sección, notemos que combinando las ecuaciones (5.2.10) y (5.2.11) podemos escribir

$$I(a_{i}) = \frac{\Gamma(\sum a_{l})}{\prod \Gamma(a_{l})} \int_{I^{L}} d\xi_{1} \dots d\xi_{L} S_{\Gamma}\left(\sum \xi_{l}\right) \delta\left(\sum \xi_{l}-1\right)$$
$$\times \prod_{l} \xi_{l}^{a_{l}-1} \frac{\left(m_{\Delta}^{2}-i0\right)^{2-\epsilon-\sum a_{l}}}{A_{\Delta}^{\sum a_{l}}}, \qquad (5.2.16)$$

que constituye una definición matemática de la noción de integral de Feynman en el contexto de DREG. De hecho, esta expresión involucra únicamente integrales iteradas de una función compleja.

2.2. Reducción de Passarino-Veltman

Además de encontrar integrales escalares, el cálculo de ciertos objetos físicos requiere conocer expresiones de la forma

$$I_{\mu_1\dots\mu_k}(a_1,\dots,a_n) = \int_q \frac{q_{\mu_1}\dots q_{\mu_k}}{D_1^{a_1}\dots D_n^{a_n}}, \qquad (5.2.17)$$

denominadas integrales tensoriales de rango k. Como se anticipó al comienzo del capítulo, estos objetos pueden ser reducidos a integrales escalares apelando a algoritmos puramente algebraicos. En ese contexto, el método de Passarino-Veltman consiste en expandir $I_{\mu_1...\mu_k}$ sobre una base de estructuras tensoriales de rango k, formadas empleando solamente combinaciones de vectores físicos p_i junto con la métrica espacio-temporal $\eta_{\mu\nu}^{D_{\rm ST}}$ para el caso $k \geq 2$. Este procedimiento es completamente razonable, pues una integral solo puede depender de las variables externas.

De forma general, expresando los elementos de la base como

$$\mathcal{B} = \{f^{i}_{\mu_{1}...\mu_{k}}\}_{i=1,...,\Delta}, \qquad (5.2.18)$$

es posible efectuar la expansión

$$I_{\mu_1\dots\mu_k}(a_1,\dots,a_n) = \sum_{i=1}^{\Delta} b_i f^i_{\mu_1\dots\mu_k}, \qquad (5.2.19)$$

en donde b_i son coeficientes escalares. Entonces, contrayendo con f^j se obtiene el vector

$$B_{j} = (f^{j})^{\mu_{1}...\mu_{k}} I_{\mu_{1}...\mu_{k}} (a_{1},...,a_{n}) = \sum_{i=1}^{\Delta} b_{i} M_{ij}, \qquad (5.2.20)$$

con la matriz $M_{ij} = (f^j \cdot f^i)$. Cabe destacar que esta matriz es invertible solamente si los vectores p_i son linealmente independientes, o bien si se trabaja en $D_{\rm ST} = 4 - 2\epsilon$ dimensiones. Concretamente, en el Capítulo 10 se calcula M para procesos con 4 partículas en un espacio de tensores de rango 2, y allí se puede observar que el determinante resulta proporcional a ϵ .

Volviendo al cálculo de Eq. (5.2.17), podemos invertir el sistema y despejar los coeficientes b_i . Explícitamente, vale que

$$b_i = \sum_{j=1}^{\Delta} M_{ij}^{-1} B_j = \sum_{j=1}^{\Delta} I_{\mu_1 \dots \mu_k} \left(a_1, \dots, a_n \right) \left(f^j \right)^{\mu_1 \dots \mu_k} M_{ij}^{-1}, \qquad (5.2.21)$$

en donde vemos que el lado derecho de esta igualdad involucra únicamente integrales escalares. Por lo tanto, llegado este punto, es posible utilizar las identidades IBPs para efectuar simplificaciones, lo que posibilita expresar los coeficientes b_i como combinaciones lineales de MIs.

Es interesante señalar que existe una expresión general para expresar $I_{\mu_1...\mu_k}$ en términos de integrales escalares. La misma se conoce como fórmula de Davydychev (52), y se escribe

$$I_{\mu_{1}...\mu_{k}}(a_{1},...,a_{n};d) = \sum_{r,\kappa_{1},...,\kappa_{n}\in\Upsilon} \frac{(-1)^{r}}{2^{r}} \{ [\eta]^{r} [p_{1}]^{\kappa_{1}} \dots [p_{n}]^{\kappa_{n}} \}_{\mu_{1}...\mu_{k}}$$
$$\times \left(\prod_{i=1}^{n} (a_{i})_{\kappa_{i}} \right) I(a_{1}+\kappa_{1},...,a_{n}+\kappa_{n};d+2(k-r)) , \quad (5.2.22)$$

en donde $\{[\eta]^r [p_1]^{\kappa_1} \dots [p_n]^{\kappa_n}\}_{\mu_1 \dots \mu_k}$ es un producto simetrizado del tensor de rango k formado por r copias de la métrica y κ_i repeticiones del momento p_i . Además, Υ designa el conjunto de índices $\{k_i, r\}$ tales que

$$2r + \sum_{i} \kappa_i = k \,, \tag{5.2.23}$$

en donde r aparece multiplicado por dos ya que la métrica aporta siempre dos índices de Lorentz. Cabe destacar que para obtener esta expresión es necesario combinar las IBPs con identidades de cambio de dimensión o *dimensional shift*. Respecto a este último punto, a partir de Eq. (5.2.16) puede apreciarse que efectuar un cambio en $D_{\rm ST}$ se relaciona con llevar a cabo una translación en los índices a_i .

2.3. Método de ecuaciones diferenciales

Las identidades IBPs no solamente son importantes para establecer relaciones algebraicas entre integrales de Feynman, sino que también dan lugar a un método para calcularlas analíticamente. El método de las ecuaciones diferenciales (53; 54) consiste en derivar respecto de los momentos externos a nivel integrando y luego armar un sistema de ecuaciones diferenciales en las variables escalares, apelando a fórmulas similares a las expuestas en Eq. (5.1.16).

Consideremos un conjunto de denominadores irreducibles $\{D_i\}_{i=0,\dots,n}$, y supongamos que pueden escribirse como

$$D_0 = q^2, (5.2.24)$$

$$D_i = (q - k_i)^2, (5.2.25)$$

con k_i una combinación lineal de momentos externos. Notemos que elegimos estos vectores de forma tal que sean independientes; esto es, que cualquier momento externo pueda escribirse como una combinación lineal única de k_i . Sea la integral $I \equiv I(1, ..., 1)$ y consideremos la derivada respecto a k_j . Como solamente D_j depende de k_j , vale

$$\frac{\partial}{\partial k_j^{\mu}} \frac{1}{D_j} = \frac{2(q-k_j)_{\mu}}{D_j^2}, \qquad (5.2.26)$$

con lo cual, tras contraer con otro vector k_i se obtiene

$$\left(k_i \cdot \frac{\partial}{\partial k_j}\right) I = \int_q \frac{2(q-k_j) \cdot k_i}{D_0 \dots D_j^2 \dots D_n}.$$
(5.2.27)

Es importante apreciar que el numerador puede expresarse en términos de los denominadores irreducibles y productos escalares de momentos externos. Concretamente, se tiene que

$$2(q - k_j) \cdot k_i = -D_i + D_0 + (k_i - k_j)^2 - k_j^2, \qquad (5.2.28)$$

y con ello se obtiene

$$\left(k_{i} \cdot \frac{\partial}{\partial k_{j}}\right) I = -\int_{q} \frac{1}{D_{0} \dots D_{i}^{0} \dots D_{j}^{2} \dots D_{n}} + \int_{q} \frac{1}{D_{1} \dots D_{j}^{2} \dots D_{n}}$$

$$+ \int_{q} \frac{(k_{i} - k_{j})^{2} - k_{j}^{2}}{D_{0} \dots D_{j}^{2} \dots D_{n}}$$

$$= \left(\mathbf{i}^{-}\mathbf{j}^{+} - \mathbf{0}^{-}\mathbf{j}^{+} + (k_{i} - k_{j})^{2} - k_{j}^{2}\right) I,$$
(5.2.29)

en donde utilizamos la notación de operadores para reducir las expresiones y marcar el punto de contacto con las IBPs. Nótese que cuando i = j, el primer término de Eq. (5.2.30) resulta proporcional a la integral original. Esto es algo importante ya que condiciona la forma final de las ecuaciones diferenciales que se pueden obtener.

Apréciese que es posible construir, en principio, n^2 ecuaciones diferenciales distintas. Sin embargo, la existencia de las IBPs junto con las simetrías propias de cada problema hacen que solo algunas de todas las ecuaciones obtenidas sean independientes. Entonces, el próximo paso consiste en armar un conjunto de operadores Δ_k utilizando combinaciones lineales de $\left(k_i \cdot \frac{\partial}{\partial k_j}\right)$ que originen ecuaciones independientes. Más aún, como estamos tratando integrales escalares, sabemos que las mismas solo pueden depender de productos escalares s_{kl} formados a partir de la contracción de momentos externos. Por ende, habrá tantos operadores Δ_k como productos s_{kl} independientes. Utilizando un razonamiento análogo al empleado en Eq. (5.1.18) para relacionar derivadas en los momentos con aquellas respecto a denominadores irreducibles, es posible escribir

$$\Delta_r = \sum_{\rho} \lambda_{\rho}^r \left(k_{\sigma^{\rho,r}(1)} \cdot \frac{\partial}{\partial k_{\sigma^{\rho,r}(2)}} \right) = \sum_l N_{lr} \frac{d}{dy_l}, \qquad (5.2.31)$$

en donde ρ es una etiqueta para las posibles colecciones de dos índices $\sigma = (i, j)$ y y_l designa a los productos escalares s_{kl} independientes elegidos.

Continuando con la descripción del método, invirtiendo Eq. (5.2.31) y usando Eq. (5.2.30), se llega al sistema de ecuaciones diferenciales definido por

$$\frac{d}{dy_l}I = \sum_r \sum_{\rho} \left(\mathbf{a}_{\sigma^{\rho,r}(1)}^- \mathbf{a}_{\sigma^{\rho,r}(2)}^+ - \mathbf{0}^- \mathbf{a}_{\sigma^{\rho,r}(2)}^+ + \left(k_{\sigma^{\rho,r}(1)} - k_{\sigma^{\rho,r}(2)} \right)^2 - k_{\sigma^{\rho,r}(2)}^2 \right) \times (N^{-1})_{rl} \lambda_{\rho}^r I,$$
(5.2.32)

en donde es posible apreciar la presencia de contribuciones que son proporcionales a I, mientras que otros términos involucran variantes con índices a_i cambiados (a lo sumo en una unidad). En términos generales, esta fórmula admite ser expresada como

$$\frac{d}{dy_l}I = f_l(y_k)I + g_l(y_k) , \qquad (5.2.33)$$

en donde la forma explícita de las funciones f_l y g_l , que solo dependen de las variables y_k y de la dimensión espacio-temporal, puede obtenerse descomponiendo Eq. (5.2.31). Usualmente, aplicando las identidades IBP, la función g_l se reduce a combinaciones lineales de integrales con una complejidad inferior a la de I. Por ejemplo, si I corresponde a un box, luego g_l admite ser escrita empleando triángulos, boxes y tadpoles solamente. Con ello, este procedimiento involucra una construcción recursiva del sistema de ecuaciones.

El último punto a tener en cuenta para calcular analíticamente I consiste en obtener una condición de contorno (CC) adecuada. Para ello es necesario conocer el valor de I en alguna configuración cinemática que sea fácilmente calculable empleando otros métodos. Además, la CC elegida debe pertenecer al rango de validez del sistema definido en Eq. (5.2.33). Este es un detalle de crucial importancia, ya que las funciones f_l y g_l son racionales y poseen polos: por ende la CC debe excluir esos puntos divergentes. Por otro lado, como $I = I(y_1, \ldots, y_p)$ (p es la cantidad de variables escalares independientes en el problema estudiado), el sistema permite ser resuelto de forma iterativa. Específicamente, en el espacio p-dimensional donde se encuentra el dominio de I, se fija un punto p_0 y se obtiene $I_0 = I(p_0)$. Utilizando alguna de las ecuaciones presentes en (5.2.33), se resuelve en la variable y_l y el resultado se toma como CC de la siguiente ecuación. De esta forma, el método de ecuaciones diferenciales permite obtener I a través de una sucesiva evolución en las diversas variables cinemáticas.

Como comentario final, es útil destacar que el método también puede ser aplicado a integrales con denominadores lineales, como los presentes en LCG.

3. Integrales en LCG

Hasta el momento, los métodos discutidos se centraron en integrales de Feynman genéricas. Sin embargo, en este trabajo fue necesario emplear una elección de gauge particular que fuerza la aparición de denominadores lineales en los propagadores. Definido en el Capítulo 1, el light-cone gauge (LCG) tiene asociado el propagador

$$D_{G}^{\text{LCG}}(q)_{\mu\nu} = \frac{i}{q^{2} + i0} \left(-\eta_{\mu\nu} + \frac{q_{\mu}n_{\nu} + n_{\mu}q_{\nu}}{n \cdot q} \right), \qquad (5.3.1)$$

que introduce un vector adicional en el problema, junto con el denominador irreducible $D_{m+1} = n \cdot q$. De esta forma, un proceso de m + 1 partículas a 1-loop involucra m + 2 denominadores irreducibles e incluye m nuevos productos escalares de la forma $n \cdot p_i$. En otras palabras, realizar cálculos en LCG presenta un grado de dificultad equivalente a un proceso con una partícula extra, cuyo momento es n.

La presencia de un denominador lineal introduce la necesidad de regularizar nuevas divergencias. Notemos que un propagador cuadrático de la forma $D_i = (q - p)^2$ presenta divergencias cuando:

- 1. $(q-p)_{\mu} = 0$ (coincidencia vectorial);
- 2. o bien, $q^2 2p \cdot q = -p^2$, lo que equivale a decir que $(q p)^{\mu}$ es un vector tipo luz.

La primera región se asocia a divergencias soft, mientras que la segunda incluye las configuraciones colineales. Además, en el primer caso la región singular es un punto pero la segunda se encuentra extendida sobre toda una hipersuperficie: un cono de luz centrado en el vector p. Sin embargo, en ambas situaciones, la utilización de la prescripción de Feynman +i0 es suficiente para permitir desplazar los polos del eje real y llevar a cabo las integrales, aplicando una rotación de Wick. De hecho, las raíces de $D_i = q^2 - m^2 + i0$ son

$$q_0^{\pm} = \pm \sqrt{\bar{q}^2 + m^2 - i0},$$
 (5.3.2)

con lo cual una solución se encuentra debajo del eje real y la otra por encima. Con ello, la transformación $q_0 \rightarrow -iq_0$ implica una deformación del contorno de integración que en ningún momento cruza los polos.

Sin embargo, cuando se tiene un denominador de la forma $n \cdot q$ con $n^2 = 0$, las divergencias solo se manifiestan si $q^2 = 0$ y $q \parallel n$. En otras palabras, el lugar geométrico corresponde en este caso a una recta que contiene a n. Explícitamente, trabajando en un espacio 4-dimensional

$$n \cdot q = n_0 q_0 (1 - \cos(\theta)),$$
 (5.3.3)

siendo θ el ángulo formado en \mathbb{R}^3 por las componentes espaciales de $n \ge q$. Entonces, usando la prescripción de valor principal (PV) con $i\mu$, esto es

$$\frac{1}{n \cdot q} \rightarrow \frac{1}{2} \lim_{\mu \to 0} \left[\frac{1}{n \cdot q + \imath \mu} + \frac{1}{n \cdot q - \imath \mu} \right], \qquad (5.3.4)$$

se encuentra que las raíces son

$$q_0^{\pm} = \frac{\vec{q} \cdot \vec{n} \pm \imath \mu}{n_0} \,. \tag{5.3.5}$$

El problema radica en que los puntos q_0^{\pm} yacen en una línea paralela al eje imaginario, lo que imposibilita efectuar la rotación de Wick y pasar al espacio Euclídeo. De esta forma, es necesario apelar a un método de integración distinto o bien cambiar la prescripción. Cabe señalar que este problema es originado por utilizar un vector de cuantización tipo luz (55). En un gauge axial genérico, con $n^2 \neq 0$, el término adicional presente en la definición de $D_G^{\text{axial}}(q)$ (dada en (1.2.18)) evita la presencia de tales singularidades. De hecho, como se explica en Ref. (55), la posibilidad de cancelar las divergencias espurias en LCG mediante términos de sustracción local es equivalente a la cancelación global de términos dependientes de $n^2 \neq 0$ en el cómputo de cantidades que sean invariantes de gauge.

Para solucionar estos inconvenientes, podemos utilizar la conocida como prescripción de Mandelstam-Leibbrandt (56; 57). La misma consiste en efectuar el reemplazo

$$\frac{1}{n \cdot q} \to \frac{n_0 q_0 + \vec{n} \cdot \vec{q}}{n_0^2 q_0^2 - (\vec{n} \cdot \vec{q})^2 + \iota \mu}, \qquad (5.3.6)$$

y luego considerar el límite $\mu \to 0$. De esta forma, se introduce una dependencia cuadrática en q_0 en el denominador y los polos se separan del eje real permitiendo efectuar una rotación de Wick. Sin embargo, las expresiones involucradas en los pasos intermedios de los cálculos se tornan más complicadas. Por otra parte, también existen técnicas para realizar cómputos en LCG sin necesidad de incluir prescripción alguna (58).

Para finalizar la discusión es útil señalar que los métodos descriptos en la sección anterior pueden ser utilizados también para calcular integrales en LCG. Las parametrizaciones de Schwinger-Feynman o el método de ecuaciones diferenciales permiten realizar un manejo de las expresiones que no involucra efectuar una integración explícita en el momento de loop. De todos modos, es posible obtener resultados formalmente válidos para las integrales con la prescripción +i0, aunque debe tenerse precaución al computar cantidades físicas.

6. LÍMITE COLINEAL DE AMPLITUDES DE SCATTERING

Tras realizar una motivación histórica, en este capítulo describimos las propiedades de factorización colineal e introducimos las amplitudes de splitting. Comenzando con una discusión breve sobre procesos de scattering inelástico profundo (DIS), se explica la evolución del modelo de partones y el enfoque probabilístico de la violación de *scaling*. Se definen las funciones de Altarelli-Parisi en términos de las amplitudes y matrices de splitting, además de discutir la factorización a órdenes superiores en teoría de perturbaciones. Finalmente, describimos la fórmula de Catani para la estructura infrarroja a 1-loop y discutimos sus implicaciones sobre la validez del teorema de factorización colineal.

1. Motivación histórica

El estudio de las teorías de gauge se remonta a la década de 1930, con el desarrollo de la electrodinámica cuántica (QED). En etapas tempranas de su formulación, estas teorías fueron consideradas con poco entusiasmo por la comunidad. Uno de sus principales inconvenientes era la presencia de divergencias (tanto UV como IR), aunque las técnicas de renormalización y la definición de observables *IR-safe* permitieron resolver los problemas computacionales en el contexto de teoría de perturbaciones. Sin embargo, las interpretaciones no resultaban completamente naturales y se buscaron mejores alternativas en otros modelos. Fue recién en la década de 1960 cuando se comenzó a prestar más interés al comportamiento de las teorías de gauge no-Abelianas, y en particular a QCD.

En aquel momento, uno de los principales objetivos teóricos radicaba en el estudio de procesos de DIS. Una gran cantidad de partículas estaba siendo producida en los aceleradores y todas parecían ser igualmente fundamentales. Progresivamente, los resultados experimentales comenzaron a señalar la existencia de una subestructura hadrónica, aunque se desconocía con certeza cual era el modelo subyacente. A diferencia de lo ocurrido a principios de 1900 con la estructura atómica, en los experimentos no podían generarse los constituyentes de los hadrones de forma aislada. Parecía ser que los mismos solo existían formando estados ligados, confinados en el interior de los mismos. En tal contexto, las propiedades de confinamiento y libertad asintótica de QCD, junto con sus simetrías, convirtieron a esta teoría en uno de los candidatos más firmes a explicar las interacciones fuertes. Sin embargo, las dificultades técnicas para obtener resultados concretos eran notables debido a las interacciones no-Abelianas y la falta de soluciones exactas para describir los estados ligados.

Con el objetivo de llevar a cabo una descripción ordenada, se organiza esta sección de la forma siguiente. En primer lugar, describimos brevemente los procesos de scattering, tanto para el caso elástico como inelástico. Después de establecer las variables cinemáticas adecuadas, se introducen las funciones de estructura F_i . A través del modelo de partones se explica como conectar estas funciones F_i con las funciones de distribución de partones (PDFs) y se comentan las relaciones de *scaling*. Luego, se procede a la introducción del modelo de partones mejorado, basando la discusión en la Ref. (59). Allí se definen las funciones de Altarelli-Parisi, explicando sus propiedades y su conexión con las PDFs. Por último, se destacan algunas cuestiones técnicas relacionada con la factorización colineal y se motiva la importancia de usar LCG para exhibir de forma manifiesta tales propiedades.

1.1. Scattering elástico y DIS

Considérese el proceso $eH \to X$, en donde X representa un estado final arbitrario. Debido a que el proyectil es un electrón, la interacción dominante será de origen electromagnético. Más aún, pensando en términos diagramáticos, el proceso estará mediado por un fotón virtual al orden más bajo en teoría de perturbaciones. Por conveniencia, suele definirse la virtualidad del proceso como

$$Q^2 = -q^2, (6.1.1)$$

 $\operatorname{con} q$ el momento del fotón intercambiado.

Cuando la virtualidad es baja, el proceso puede modelarse usando scattering elástico. En este caso, el estado final contiene las mismas partículas que se encontraban inicialmente, con lo cual la reacción es $eH \rightarrow eH$. El proceso se encuentra esquematizado en la figura 6.1, en donde k, p son los impulsos del estado inicial y k', p' los del estado final, para el electrón y el hadrón, respectivamente. La situación planteada es similar a una colisión de partículas puntuales, con la diferencia de que el hadrón no es una partícula elemental. Debido a que se desconoce la función de onda del hadrón H en términos de campos elementales, se puede definir el elemento de matriz \mathcal{A} como

$$\mathcal{A} = -i \int d^4 x \, j_\mu(x) \left(\frac{1}{Q^2}\right) J^\mu(x) \,, \qquad (6.1.2)$$

en donde j_{μ} es la corriente electromagnética y J^{μ} la hadrónica. La corriente electromagnética se


Fig. 6.1: Esquema de un proceso de scattering elástico. Se considera la reacción $e(k) + H(p) \rightarrow e(k') + H(p')$, con H blanco fijo en el sistema de laboratorio. El cuadrimomento del fotón virtual intercambiado es q = k - k'.

escribe

$$j_{\mu}(x) = -e\bar{u}(k')\gamma_{\mu}u(k) \exp[i(k'-k)\cdot x], \qquad (6.1.3)$$

en donde se utilizan las reglas de Feynman para QED. La extensión al caso hadrónico se efectúa armando una combinación de cuadrivectores dada por

$$J^{\mu}(x) = e\bar{u}(p') \left\{ \tilde{F}_{1}(Q)\gamma^{\mu} + \frac{\kappa}{2M}\tilde{F}_{2}(Q)\,\imath\sigma^{\mu\nu}q_{\nu} \right\} u(p) \,\exp\left[\imath(p'-p)\cdot x\right] \,, \tag{6.1.4}$$

en donde $\tilde{F}_1(Q)$ y $\tilde{F}_2(Q)$ se conocen como factores de forma del hadrón, κ es el momento magnético anómalo, $\sigma^{\mu\nu} = i/2 [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]$ y M es la masa del hadrón. La forma propuesta para la corriente hadrónica se basa en la inclusión de todos los términos permitidos por la invariancia de Lorentz y cuya única dependencia funcional se asocia a la cantidad escalar Q. No se consideran factores proporcionales a γ^5 pues la interacción electromagnética conserva paridad. En el contexto de la teoría de scattering, el enfoque de corrientes interactuantes es lo suficientemente general como para tratar situaciones en las cuales se desconoce la naturaleza exacta de uno de los objetos involucrados.

Como explicamos en el Capítulo 1, el conocimiento de $|\mathcal{A}|^2$ permite computar la sección eficaz de scattering. Debido a que $d\sigma \sim |\mathcal{A}|^2$, se pueden definir los tensores $L_{\mu\nu}$ y $H_{\mu\nu}$ de forma tal que $d\sigma \sim L_{\mu\nu}H^{\mu\nu}$. En concreto, usando (1.3.8) junto con (6.1.2) para expandir \mathcal{A} , se llega a

$$H_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi M} \left(\frac{1}{2} \sum_{s,s'}\right) \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2p'_0} \langle p, s | J^{\dagger}_{\mu} | p', s' \rangle \langle p', s' | J_{\nu} | p, s \rangle , \qquad (6.1.5)$$

que es lo que se conoce como tensor hadrónico. Cabe señalar que se está considerando el caso no polarizado, pues se suma y promedia sobre los espines de todas las partículas. La expresión se generaliza al caso polarizado quitando los factores de promedio y eliminando la suma sobre espines del estado inicial. Así, el scattering elástico que involucra hadrones puede modelarse codificando la información en $H_{\mu\nu}$.

Al aumentar la virtualidad del fotón, el proceso se aparta cada vez más del caso puntual. En cierto rango de energías, el fotón virtual excita modos internos del hadrón. Esto puede provocar un incremento abrupto de la sección eficaz ya que es posible encontrar resonancias. Si se continúa incrementando la energía del proceso, el poder resolvente del fotón intercambiado aumenta y las interacciones con los constituyentes del hadrón se tornan más relevantes. Esto puede hacer que el hadrón se desintegre, originando haces de muchos otros estados ligados. Es decir, en este caso se tendría un proceso de la forma $eH \rightarrow X$, donde X designa el conjunto de fragmentos obtenidos en el estado final. Esto es lo que se conoce como scattering inelástico profundo (DIS, por sus siglas en inglés). La figura (6.2) muestra un esquema de la reacción, indicando los momentos de las partículas intervinientes: k y k' para el electrón en el estado inicial y final, respectivamente, y p para el hadrón en el estado inicial. La caracterización del momento de los fragmentos en estado final se logra a través de la introducción de la variable

$$W = \left(\sum_{n=1}^{N} p_i\right)^2,\tag{6.1.6}$$

en donde se está efectuando una suma sobre todas las partículas producidas. W se conoce como la masa invariante del estado final, pues se trata de una cantidad escalar que caracteriza dicho estado en cualquier sistema de referencia considerado. Se puede apreciar que $W^2 = (p+q)^2$ como consecuencia de la conservación de momento.

La descripción realizada para el caso elástico no puede aplicarse directamente a esta situación. La razón principal de este impedimento es que, al definir J^{μ} , se consideró explícitamente al hadrón como un estado de una sola partícula. Por lo mencionado antes, el estado final en DIS está compuesto por múltiples partículas. De todos modos es posible adaptar el formalismo y lograr una descripción de DIS en términos de funciones de estructura. Modificando (1.3.8) para tener en cuenta el estado final X, se tiene

$$d\sigma = \frac{1}{4EM |v|} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E'} \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E'_{0i}}\right) |\mathcal{A}_i|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p + q - \sum_{i=1}^n p_i\right), \quad (6.1.7)$$

en donde

$$\mathcal{A}_{i} = \frac{e^{2}}{q^{2}} \bar{u}(k',\lambda')\gamma^{\mu}u(k,\lambda)\left\langle i\big|J_{\mu}^{em}(0)\big|p,\sigma\right\rangle, \qquad (6.1.8)$$



Fig. 6.2: Esquema de un proceso DIS típico. Se considera la reacción $e(k) + H(p) \rightarrow e(k') + X(p_n)$, con p_n suma de momentos de todos los fragmentos generados. El momento del fotón virtual intercambiado es q = k - k'.

es el elemento de matriz de transición a la partícula *i* en términos de la corriente hadrónica electromagnética $J_{\mu}^{em}(0)$, con λ , λ' y σ estados de polarización del electrón en el estado inicial, en el estado final y del hadrón inicial, respectivamente. Al analizar procesos no polarizados, debe sumarse y promediarse sobre los espines de las partículas del estado inicial. Siguiendo el razonamiento expuesto para el scattering elástico, se puede aislar la dependencia en la estructura hadrónica dentro del tensor

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{4M} \sum_{s,i} \int \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E'_{0i}} \right) \left\langle p, s \middle| J^{em}_{\mu}(0) \middle| i \right\rangle \left\langle i \middle| J^{em}_{\nu}(0) \middle| p, s \right\rangle (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p + q - \sum_{i=1}^{n} p_i \right)$$
$$= \frac{1}{8\pi M} \sum_{\sigma} \int d^4 x \left\langle p, s \middle| J^{em}_{\mu}(x) J^{em}_{\nu}(0) \middle| p, s \right\rangle, \qquad (6.1.9)$$

que generaliza la definición de $H_{\mu\nu}$ para DIS, en el caso no polarizado. Para considerar colisiones polarizadas debe quitarse el promedio sobre espines de (6.1.9).

Debido a que la forma explícita de las corrientes hadrónicas es desconocida, para poder calcular una sección eficaz en DIS es necesario parametrizar $W_{\mu\nu}$. La forma tensorial propuesta para dicha parametrización debe ser compatible con la invariancia de Lorentz del problema, razón por la cual solo pueden usarse combinaciones lineales de la métrica $\eta^{\mu\nu}$ y de los vectores p^{μ} , q^{μ} , s^{μ} . En el caso no polarizado, el tensor resultante no puede depender del espín del hadrón (se está promediando sobre polarizaciones) y debe conservar la corriente hadrónica en la interacción. Esto último es equivalente a decir que $W_{\mu\nu}$ debe verificar la identidad de Ward, que viene dada

$$W^{\mu\nu}q_{\mu} = W^{\mu\nu}q_{\nu} = 0, \qquad (6.1.10)$$

con q el momento del fotón intercambiado. Este requisito impone restricciones sobre las posibles combinaciones de tensores que pueden expandir (6.1.9). En el caso particular de procesos que involucren solamente interacciones electromagnéticas no polarizadas puede escribirse

$$W^{\mu\nu} = W_1 \left(-\eta^{\mu\nu} + \frac{q^{\mu}q^{\nu}}{q^2} \right) + \frac{W_2}{M^2} \left(p^{\mu} - \frac{p \cdot q}{q^2} q^{\mu} \right) \left(p^{\nu} - \frac{p \cdot q}{q^2} q^{\nu} \right) , \qquad (6.1.11)$$

en donde W_1 y W_2 son funciones de estructura que dependen de variables escalares. A diferencia de lo ocurrido en el caso de scattering elástico, aquí hay dos variables escalares independientes. Por cuestiones de convención, la virtualidad del fotón Q^2 y el cambio de energía del electrón ν , definido como

$$\nu = E' - E = \frac{p \cdot q}{M}, \qquad (6.1.12)$$

son las que suelen emplearse. Es importante remarcar que se trabaja en el sistema de laboratorio, en el cual

$$p^{\mu} = (M, \vec{0}),$$
 (6.1.13)

$$k^{\mu} = (E, \vec{k}),$$
 (6.1.14)

$$k^{\prime \mu} = (E^{\prime}, \vec{k^{\prime}}), \qquad (6.1.15)$$

son los 4-vectores que definen los momentos de las partículas involucradas en el proceso. Por otro lado, apréciese que se incluyen en $W_{\mu\nu}$ únicamente los términos que conservan paridad, para que la descripción sea compatible con las interacciones electromagnéticas.

Para finalizar esta discusión, es interesante destacar que pueden definirse funciones de estructura para tener en cuenta procesos que involucren interacciones electrodébiles. Si se agrega la posibilidad de intercambiar bosones W y Z, debe quitarse la restricción de incluir únicamente términos compatibles con conservación de paridad. De este modo se agrega la función W_3 a $W^{\mu\nu}$ y se obtiene

$$W^{\mu\nu} = W_1(\nu, Q^2) \left(-\eta^{\mu\nu} + \frac{q^{\mu}q^{\nu}}{q^2} \right) + \frac{W_2(\nu, Q^2)}{M^2} \left(p^{\mu} - \frac{p \cdot q}{q^2} q^{\mu} \right) \left(p^{\nu} - \frac{p \cdot q}{q^2} q^{\nu} \right) - \frac{i}{2M^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\eta} p_{\rho} q_{\eta} W_3(\nu, Q^2) , \qquad (6.1.16)$$

en donde se indica que las funciones W_i dependen de las variables cinemáticas escalares $\nu \ge Q^2$. Respecto de la dependencia funcional, es útil introducir las variables

$$x = \frac{Q^2}{2M\nu},$$
 (6.1.17)

$$y = \frac{p \cdot q}{p \cdot k}, \qquad (6.1.18)$$

por

en donde x se conoce como variable de Bjorken. Además de verificar $x, y \in [0, 1]$, estas variables son relevantes para mostrar las propiedades de invariancia de escala aproximada de las funciones de estructura.

1.2. Modelo de partones naive

A principios de 1970, Feynman propuso un modelo para explicar la estructura interna de los hadrones basado en la existencia de partículas más fundamentales, llamadas genéricamente *partones* (60). Al momento de su introducción, el modelo de partones no implicaba conexión alguna entre los objetos puntuales y los campos predichos por QCD (es decir, quarks y gluones). Esto se debe a que los cálculos de secciones eficaces y funciones de estructura solo implicaban conocer ciertas propiedades de los partones, como su carga eléctrica y distribución interna en los hadrones, caracterizada por las funciones de distribución partónicas (PDFs). Fue tras una comparación exhaustiva entre los resultados experimentales y las predicciones de QCD que se pudo concluir que los partones estaban asociados con quarks y gluones.¹ Veamos a continuación algunas propiedades del modelo de partones.

Considérese el caso de colisiones elásticas mediadas por un fotón virtual. Siguiendo lo expuesto en Ref. (61) se puede mostrar que

$$W_1^{\text{elastico}} = G^2(Q^2) \frac{Q^2}{4M^2} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M\nu}\right) , \qquad (6.1.19)$$

$$W_2^{\text{elastico}} = G^2(Q^2)\delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M\nu}\right),$$
 (6.1.20)

lo que motiva la definición de las funciones adimensionales

$$F_1(x,Q^2) = MW_1(x,Q^2), \qquad (6.1.21)$$

$$F_2(x, Q^2) = \nu W_2(x, Q^2).$$
(6.1.22)

A pesar de que involucran explícitamente a $x \neq Q$, en este caso la dependencia funcional en Qse factoriza en el factor de forma G. Por ende, si se estudian colisiones elásticas entre objetos puntuales se encuentra que F es solo función de x. Cuando la virtualidad del fotón es lo suficientemente elevada como para resolver la estructura interna del hadrón e interactuar con sus

¹ Es necesario señalar aquí que existen extensiones del modelo en las cuales se consideran a los fotones como posibles partones. Desde el punto de vista de teoría de campos, debido a que el vacío es dinámico, es posible encontrar fotones dentro de los hadrones. Dichos fotones se podrían originar en procesos de aniquilación $q\bar{q}$ virtuales. También es importante apreciar que la noción de presencia de una partícula en el interior de un hadrón se relaciona siempre a procesos virtuales, pues inferimos la existencia de un objeto a partir de sus interacciones con alguna otra entidad que podemos detectar.

constituyentes fundamentales puntuales, se verifica que $F_i(x, Q^2) \approx F_i(x)$. Propuesta en 1967, esta aproximación se conoce como *scaling de Bjorken* y es una de las implicaciones más importantes del modelo de partones *naive*. Si se desea considerar procesos de DIS con intercambio de bosones electrodébiles, se propone

$$MW_1(x, Q^2) \to F_1(x),$$
 (6.1.23)

$$\nu W_2(x, Q^2) \to F_2(x),$$
 (6.1.24)

$$\nu W_3(x, Q^2) \to F_3(x),$$
 (6.1.25)

para Q suficientemente grande. Es interesante apreciar que esta predicción teórica fue observada en los experimentos efectuados durante la década de 1970. Cabe señalar que el éxito de la contrastación fue debido, en parte, a las limitaciones para explorar un rango de Q lo suficientemente amplio.

El desarrollo del modelo de partones requiere emplear aproximaciones cinemáticas adecuadas. Supongamos que, en cierto marco de referencia, el momento de un hadrón de masa M es p y solo tiene componente longitudinal. Introduciendo las fracciones de momento ξ resulta que el momento de un partón puede escribirse como ξp , despreciando las componentes transversales. Sin embargo, si el partón tiene masa m, no es posible que sea emitido por el hadrón sin adquirir momento transverso. La forma de solucionar este inconveniente es emplear un sistema de referencia en el cual se verifique $|\vec{p}| \gg m, M$. De este modo, las masas de todas las partículas intervinientes pueden ser despreciadas y la emisión colineal es una buena aproximación. Dicho marco de referencia se conoce como sistema de momento infinito (*infinite momentum frame* o IMF) y supone que el impulso del hadrón es muy elevado (en comparación con cualquier otra escala involucrada).

Otra de las ventajas de utilizar el IMF es que permite introducir de forma natural una factorización de escalas. Como el momento del hadrón es muy elevado², se produce una dilatación temporal en un marco de referencia solidario a él. Por ende, las interacciones entre los partones ocurren en una escala de tiempo típica τ_{soft} mucho mayor que la escala de tiempo τ_{hard} asociada a la interacción fotón-hadrón. De esta manera, el fotón incidente percibe al hadrón como un conjunto de partones puntuales no interactuantes, situación que puede ser modelada empleando una distribución estática. Tales distribuciones se conocen como PDFs (por sus siglas en inglés, parton distribution functions) y codifican la información no perturbativa que rige la composición hadrónica. Formalmente, definimos $f_a^h(\xi)$ de forma tal que $f_a^h(\xi)d\xi$ es la cantidad de partones de tipo a con fracción de impulso entre ξ y $\xi + d\xi$ dentro de un hadrón h. Consecuentemente, el

² Es más, en IMF se considera el límite $|\vec{p}| \to \infty$.

tensor hadrónico admite ser expresado como

$$W_{\mu\nu}^{\rm em} = \sum_{a} \int_{0}^{1} d\xi f_{a}^{h}(\xi) K_{\mu\nu}^{a}(\xi) , \qquad (6.1.26)$$

en donde la suma se efectúa sobre los diversos sabores de partones y $K^a_{\mu\nu}$ es un tensor que individualiza la contribución de los partones de clase *a* con fracción de impulso ξ . Si solo se posibilitan interacciones proyectil-blanco de tipo electromagnéticas, siguiendo lo expuesto en Ref. (62), se tiene para el caso no polarizado

$$K^{a}_{\mu\nu}(\xi) = \frac{e_{a}^{2}}{4\xi M} \sum_{\lambda,\lambda'} \bar{u}(\xi p) \gamma_{\mu} u(p') \bar{u}(p') \gamma_{\nu} u(\xi p) \frac{\delta \left(p'_{0} - \xi p_{0} - q_{0}\right)}{2p'_{0}}, \qquad (6.1.27)$$

en donde e_a es la carga eléctrica del partón de tipo a. Desarrollando esta expresión y despreciando los términos proporcionales a la masa del partón se llega a

$$K^{a}_{\mu\nu}(\xi) = e^{2}_{a}\delta(\xi - x) \left(\frac{\xi}{\nu}\frac{p_{\mu}p_{\nu}}{M^{2}} - \frac{1}{2M}\eta_{\mu\nu}\right), \qquad (6.1.28)$$

en donde x es la variable de Bjorken. Nótese que esta expresión indica que la fracción de impulso ξ asociada a un partón coincide con la variable de Bjorken correspondiente. De este modo, usando la ecuación (6.1.26) se llega a

$$W_{\mu\nu}^{\rm em} = \sum_{a} e_{a}^{2} \frac{x f_{a}^{h}(x)}{\nu} \frac{p_{\mu} p_{\nu}}{M^{2}} - \sum_{a} e_{a}^{2} \frac{f_{a}^{h}(x)}{2M} \eta_{\mu\nu} , \qquad (6.1.29)$$

y comparando con la expansión conocida en términos de las funciones de estructura se obtiene

$$F_1(x) = \sum_a \frac{e_a^2}{2} f_a^h(x), \qquad (6.1.30)$$

$$F_2(x) = \sum_a x e_a^2 f_a^h(x) . (6.1.31)$$

Por lo tanto, se puede apreciar que las funciones de estructura F_i cumplen la hipótesis de escaleo (independencia de Q^2) y que pueden ser expresadas en términos de la carga eléctrica y las distribuciones f_a^h . Más aún, se cumple

$$2x F_1(x) = F_2(x), \qquad (6.1.32)$$

que se conoce como relación de Callan-Gross. Es útil señalar que existen relaciones similares entre las funciones de estructura g_i y las distribuciones de partones dependientes de espín (o PDFs polarizadas).



Fig. 6.3: Esquema general de un proceso DIS, asumiendo válido el teorema de factorización. Es así como puede pensarse que el electrón interacciona, a través de un fotón virtual, con un partón libre a. El peso de dicho proceso partónico está dado por el valor de la correspondiente PDF.

A partir del estudio de las funciones de estructura y su comparación con los datos experimentales, pudo concluirse que el modelo de partones era compatible con QCD. En otras palabras, los objetos puntuales que componen a los hadrones se asocian principalmente a los quarks y gluones predichos por QCD.

Antes de mencionar las consecuencias del modelo de partones en la factorización de secciones eficaces, comentemos algunas propiedades de las PDFs. Considérese un hadrón h en el límite ultrarrelativista, es decir con $E \gg m$. En el contexto del modelo de partones *naive*, $f_a^h(x)$ indica cual es la densidad de probabilidad de hallar un partón de tipo a con fracción de impulso x dentro de un hadrón h. Debido a que todo el momento de los hadrones es aportado por los partones, debe verificarse

$$\sum_{a=q,\bar{q},g} \int dx \, x f_a^h(x) = 1 \,, \tag{6.1.33}$$

en donde la suma se efectúa sobre el gluón y todos los posibles sabores de quarks y antiquarks. Por otra parte, pueden imponerse requisitos adicionales sobre las PDFs apelando al modelo de *quarks de valencia*.

Dicho modelo fue uno de los primeros intentos para entender la composición de los hadrones en términos de objetos fundamentales. La idea era estudiar ciertas propiedades globales de los hadrones, como por ejemplo el isospín o la extrañeza. Para el caso del isospín, se suponía que había dos constituyentes fundamentales, u y d, con isospín total I = 1/2 e $I_Z = \pm 1/2$ respectivamente. De esta forma, se podían explicar las semejanzas entre protones y neutrones en términos de una simetría SU(2) aproximada. En otras palabras, un protón era entendido como un estado uud mientras que el neutrón era *udd*. El descubrimiento de nuevas partículas condujo a la necesidad de considerar más números cuánticos y extender la cantidad de constituyentes. Sin embargo, este modelo consideraba a los hadrones como formados por una cantidad fija de quarks de distintos sabores, adoptando un enfoque análogo al del modelo atómico. Por lo tanto, usando el modelo de partones *naive* debe cumplirse

$$\int dx \left[f_u^p(x,Q) - f_{\bar{u}}^p(x,Q) \right] = 2, \qquad (6.1.34)$$

$$\int dx \left[f_d^p(x,Q) - f_{\bar{d}}^p(x,Q) \right] = 1, \qquad (6.1.35)$$

$$\int dx \left[f_s^p(x,Q) - f_{\bar{s}}^p(x,Q) \right] = 0, \qquad (6.1.36)$$

para el caso de un protón, lo que permite, a su vez, definir las distribuciones de quarks de valencia $V_a^h(x) = f_a^h(x) - f_{\bar{a}}^h(x)$. Así, las ecuaciones (6.1.34) y (6.1.35) muestran que, aproximadamente, puede pensarse en el protón como dos quarks u y uno d en la capa de valencia. Respecto de (6.1.36), indica que la extrañeza del protón es nula. Las distribuciones de valencia para los restantes sabores de quarks son nulas para el protón, dentro del modelo *naive*.



Fig. 6.4: Relación esquemática entre la composición interna de un hadrón y la forma funcional de las PDFs. Se muestran tres estructuras diferentes para el hadrón: (a) tiene tres quarks de valencia;
(c) tiene tres quarks de valencia débilmente ligados; y, (d) tiene tres quarks de valencia ligados y se permite correcciones radiativas soft. Imagen adaptada de Ref. (62).

La dependencia de las PDF respecto de la fracción de momento brinda mucha información acerca de la estructura interna del hadrón. Si el hadrón fuera una partícula puntual, luego $f_a^h(x) = \delta_{ah}\delta(1-x)$ pues el momento estaría concentrado en una única partícula. Sin embargo, se sabe que los hadrones no son puntuales. Por ende, deben considerarse otros escenarios. En la figura (6.4) se muestran tres situaciones posibles: quarks de valencia, quarks de valencia ligados y quarks de valencia con emisión soft.

Suponiendo una estructura de tres quarks de valencia libres, se obtendría una distribución tipo delta centrada en x = 1/3, pues cada quark lleva una fracción idéntica del momento total. La situación se torna más compleja si se permiten interacciones entre los quarks de valencia, siempre que las mismas sean lo suficientemente débiles como para permitir la validez del modelo de partones. De todos modos es esperable que las distribuciones estén concentradas en torno a x = 1/3, pero que muestren una dispersión asociada a la presencia de ligaduras. En el tercer escenario se contempla la posibilidad de que haya emisión de partones de baja energía (soft), lo cual es compatible con la introducción de correcciones radiativas en estos modelos. La consecuencia más distintiva de esta situación es un incremento notable de la densidad de probabilidad de hallar partones con x bajo.

A modo de resumen, el modelo de partones *naive* implica una factorización de interacciones que permite separar el régimen de baja energía (soft) del proceso de scattering de alta energía (conocido como proceso hard o hard scattering). El régimen soft se asocia a la dinámica no perturbativa de las interacciones fuertes en el interior de los hadrones, y su descripción se encuentra codificada en las PDFs. Por el contrario, el proceso hard es calculable en el contexto de teoría de perturbaciones. Relajando parcialmente la condición $|\vec{p}| \to \infty$ impuesta por IMF, la factorización puede lograrse introduciendo una escala típica $\Lambda_{\rm QCD}$ relacionada con el límite de validez del régimen perturbativo. De forma cualitativa, puede afirmarse que esta escala debe ser del orden de magnitud de las masas de los hadrones, motivo por el cual suele elegirse $\Lambda_{\rm QCD} \approx 200 \,{\rm MeV}$. Usando argumentos heurísticos, es posible relacionar la energía típica de un proceso con la duración del mismo. En consecuencia, si $\Delta t \approx 1/\Delta E$, las diferencias entre escalas de energía se traducen en diferencias de tiempo. Por ende, si $Q \gg \Lambda_{\rm QCD}$ se cumplirá la condición $\tau_{soft} \gg \tau_{hard}$ que permite usar las aproximaciones del modelo de partones. Como consecuencia de esta separación, la sección eficaz de un proceso hadrónico se obtiene sumando las secciones eficaces partónicas $d\hat{\sigma}$ convolucionadas con las PDFs correspondientes. Por ejemplo, en el caso de DIS se puede escribir

$$d\sigma^{eh \to eX} = \sum_{a} \int_{0}^{1} dx f_{a}^{h}(x) d\hat{\sigma}_{ea \to eX}, \qquad (6.1.37)$$

que es válida al orden más bajo en una expansión en potencias de Λ_{QCD}/Q . Esto es lo que se conoce como teorema de factorización para DIS.

1.3. Modelo de partones mejorado: ruptura de scaling y ecuaciones DGLAP

Sin embargo, la conexión entre la factorización colineal y el lenguaje de partones fue establecida tiempo después, en un famoso trabajo de Altarelli y Parisi (59). El empleo del lenguaje del modelo de partones posibilitó obtener una interpretación probabilística de la violación del scaling de Bjorken, que fue observada en los experimentos al considerar colisiones con mayor energía. A continuación, motivamos las ecuaciones de evolución DGLAP y la definición de los núcleos de Altarelli-Parisi, siguiendo el enfoque original propuesto por los autores de Ref. (59).

Considérese un proceso de DIS mediado por interacciones electromagnéticas. Supongamos que la partícula intercambiada tiene una virtualidad muy grande, con lo cual su poder resolvente le permite adentrarse en la estructura del hadrón. En el contexto del modelo de quarks de valencia con emisión soft, puede ocurrir que el fotón de prueba interactúe con dicha radiación. En consecuencia, la forma en que el fotón percibe la estructura interna del hadrón es diferente de la inducida por las PDFs estáticas.

Esta situación sugiere la necesidad de modificar el enfoque *naive* del modelo de partones original, permitiendo la *evolución* de las PDFs. Entonces, motivemos las correcciones a $f_q^h(x)$ introducidas por la dependencia en la escala de energía Q. La contribución más intuitiva es la densidad de probabilidad de encontrar un quark q con fracción de impulso x dentro del hadrón h. Sin embargo, sabemos que la radiación de gluones de baja energía y su posterior decaimiento en un par $q\bar{q}$ es un fenómeno dinámicamente posible. Por ende, el fotón podría ser sensible a la distribución de gluones cuando interactúa con un quark originado en el proceso $g \to q\bar{q}$ o bien $q \to qg$. Así, se logra una modificación efectiva en $f_q^h(x)$ que depende de la escala Q.

Las interacciones partón-partón no solo introducen una dependencia de escala en las PDFs, sino que también proveen un marco probabilístico para encontrar las ecuaciones de evolución. Para motivar la obtención de dichas ecuaciones, considérese la función de estructura $F_1(x)$ en el marco de un experimento de DIS mediado por fotones virtuales³. Dentro del modelo *naive* puede escribirse

$$2F_1(x) = \sum_a \int \frac{dy}{y} f_a^h(x) \tilde{\sigma}_a\left(\frac{x}{y}\right) , \qquad (6.1.38)$$

en donde se están usando las funciones de distribución estáticas y $\tilde{\sigma}$ es la sección eficaz de interacción puntual normalizada, que viene dada por

$$\tilde{\sigma}_a\left(\frac{x}{y}\right) = e_a^2 \delta\left(\frac{x}{y} - 1\right).$$
(6.1.39)

 $^{^3}$ La discusión presentada aquí se basa en la expuesta en Ref. (63)

Nótese que (6.1.38) es válida a primer orden en $\frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{Q}$, de acuerdo al teorema de factorización para DIS. Debido a que los términos que aparecen en la suma de (6.1.38) son proporcionales a la carga eléctrica al cuadrado, puede dejarse de lado la contribución gluónica. Al orden más bajo, $\tilde{\sigma}$ se obtiene quitando los factores dimensionales de la sección eficaz del proceso $\gamma^* q \to q$. Puede verse que el único acople interviniente en ese caso es de origen electromagnético, lo que explica la dependencia en la carga eléctrica del quark.

El próximo paso es estudiar el proceso $\gamma^* q \to q$ a orden $g_{\rm S}^2$ (NLO), cuyo tratamiento es similar al realizado para $\gamma^* \to q\bar{q}$ (ver Capítulo 3). En particular, en las contribuciones finitas aparecen términos proporcionales a $t = \log\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right)$ en donde Q es la virtualidad del fotón mediador y μ es una escala de energía arbitraria introducida en el procedimiento de regularización/renormalización. De este modo, la sección eficaz corregida $\tilde{\sigma}_a$ viene dada por

$$\tilde{\sigma}_{a}(x,Q) = e_{a}^{2} \left[\delta(x-1) + \frac{\alpha_{s}}{2\pi} \left(tP_{a}(x) + f_{a}(x) \right) \right], \qquad (6.1.40)$$

en donde f_a contiene términos asociados con la regularización de divergencias IR a una escala de energía arbitraria μ y P_a contiene la parte finita de la sección eficaz corregida $\gamma^* q \rightarrow q$, a menos de un factor de normalización. De esta manera, volviendo a (6.1.38) e introduciendo las correcciones NLO se tiene

$$2F_1(x,Q) = \sum_q \int_x^1 \frac{dy}{y} f_q^h(x) e_q^2 \left[\delta\left(\frac{x}{y} - 1\right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left(tP_q\left(\frac{x}{y}\right) + f_q\left(\frac{x}{y}\right) \right) \right], \quad (6.1.41)$$

que muestra una violación logarítmica al scaling de Bjorken (asociada a los términos proporcionales a t). Cabe destacar que la suma involucrada en (6.1.41) debe realizarse sobre todos los posibles sabores de quarks y antiquarks. Es importante remarcar que la naturaleza logarítmica de las correcciones fue responsable de la observación, en primera instancia, de un comportamiento compatible con el scaling puesto que la tendencia de las desviaciones solo es apreciable sobre un rango de Q^2 suficientemente amplio.

Siguiendo con el estudio de (6.1.41), nótese que podemos definir

$$\delta f_q^h(x,Q) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} f_q^h(x) P_q\left(\frac{x}{y}\right) t, \qquad (6.1.42)$$

con lo cual F_1 se escribe

$$2F_1(x,Q) = \sum_q \int_x^1 \frac{dy}{y} f_q^h(y,Q) \left[\delta\left(\frac{x}{y} - 1\right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} f_q\left(\frac{x}{y}\right) \right].$$
(6.1.43)

De esta manera puede pensarse que las correcciones introducidas por el proceso $\gamma^* q \to q$ a orden $g_{\rm S}^2$ inducen correcciones de orden $g_{\rm S}^2$, dependientes de la escala Q, en $f_q^h(x)$. Luego, se tiene

$$f_q^h(x,Q) = f_q^h(x) + \delta f_q^h(x,Q),$$
 (6.1.44)

que son las funciones de distribución partónicas corregidas a primer orden en α_s , en el modelo de partones mejorado. Derivando respecto a t, introduciendo de forma explícita las dependencias respecto de Q y realizando el reemplazo $f_q^h(x) \to f_q^h(x, Q)$ en el integrando, se llega a

$$\frac{df_q^h(x,Q)}{dt} = \frac{\alpha_s(Q)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} f_q^h(y,Q) P_q(x/y) + \mathcal{O}(\alpha_s^2), \qquad (6.1.45)$$

que es una ecuación integro-diferencial responsable de la evolución de las distribuciones de quarks, a primer orden en α_s .

El procedimiento efectuado aquí puede generalizarse para contemplar la presencia de gluones. En tal caso, deben tenerse en cuenta no solo los acoplamiento quark-gluón sino también gluóngluón, lo que permite obtener

$$\frac{df_{q}^{h}(x,Q)}{dt} = \frac{\alpha_{s}(Q)}{2\pi} \int_{x}^{1} \frac{dy}{y} f_{g}^{h}(y,Q) P_{qg}(x/y) + \frac{\alpha_{s}(Q)}{2\pi} \int_{x}^{1} \frac{dy}{y} f_{q}^{h}(y,Q) P_{qq}(x/y) + \mathcal{O}(\alpha_{s}^{2}), \quad (6.1.46)$$

$$\frac{df_{g}^{h}(x,Q)}{dt} = \frac{\alpha_{s}(Q)}{2\pi} \int_{x}^{1} \frac{dy}{y} f_{g}^{h}(y,Q) P_{gg}(x/y) + \frac{\alpha_{s}(Q)}{2\pi} \sum_{q} \int_{x}^{1} \frac{dy}{y} f_{q}^{h}(y,Q) P_{gq}(x/y) + \mathcal{O}(\alpha_{s}^{2}), \quad (6.1.47)$$

que forman un conjunto cerrado de ecuaciones integro-diferenciales acopladas, conocidas como ecuaciones de evolución de Altarelli-Parisi o DGLAP (por Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi).

En las ecuaciones DGLAP aparecen involucrados los objetos $P_{ba}(x)$ que se conocen como núcleos de Altarelli-Parisi o funciones de *splitting*. Debido a que son uno de los temas centrales de estudio de este trabajo, expliquemos su significado en el contexto del modelo de partones. Para esto es importante tener en cuenta que se entiende la cinemática de los procesos partónicos en el IMF, razón por la cual los procesos estudiados corresponden a analizar el límite colineal de las respectivas configuraciones⁴.

Puesto que los partones son objetos sometidos a la dinámica de QCD (o QCD con acoples electromagnéticos), estos pueden decaer o recombinarse para originar otras partículas. Al motivar las ecuaciones DGLAP, un partón de tipo a decaía en un par de partones, uno de los cuales era de tipo b y llevaba una fracción de impulso x del partón padre. La probabilidad de que tal

⁴ Cuando el sistema de referencia está muy boosteado en una dirección existe una supresión de las componentes transversales o, equivalentemente, los procesos se tornan colineales.

proceso de división o *splitting* ocurra es denotada como $\Pi_{ba}(x, Q)$, en donde se indica de forma explícita la dependencia en Q. Asumiendo que los partones son partículas no masivas de QCD, si $Q \gg \Lambda_{\rm QCD}$ luego el acoplamiento $\alpha_s(Q)$ es pequeña y puede aplicarse teoría de perturbaciones. En consecuencia, las probabilidades de *splitting* son calculables en el marco de QCD perturbativa. Así, es posible realizar una expansión en potencias de $\alpha_s(Q)$, resultando

$$\Pi_{ba}(x,Q) = \delta_{ab}\delta(1-x) + \frac{\alpha_s(Q)}{2\pi}\Pi_{ba}^1(x,Q) + \mathcal{O}(\alpha_s^2), \qquad (6.1.48)$$

en donde el término de orden cero concuerda con la interpretación *naive* de partones puntuales no interactuantes entre sí. Sin embargo, las restantes contribuciones al desarrollo dependen de forma explícita de la escala de energía. En particular, vale que

$$\Pi_{ba}^{1}(x,Q) = tP_{ba}(x), \qquad (6.1.49)$$

con $P_{ba}(x)$ núcleo o kernel de Altarelli-Parisi, definido de acuerdo a

$$P_{ba}(x) = \frac{x(1-x)}{2} \sum_{c} \frac{|V_{a\to b+c}|^2}{k_T^2}, \qquad (6.1.50)$$

en donde V_{ba} es la amplitud del diagrama que contiene el vértice de interacción $a \to b + c$ (quitando la normalización $\frac{\alpha_S}{2\pi}$), k_T es el impulso transversal del partón b y se promedia sobre colores y espines. Nótese que esta expresión es válida solamente para x < 1, razón por la cual suele emplearse la notación $P_{ba}^{<}(x)$.

Cuando x = 1, el partón *b* lleva todo el impulso de *a*. En el contexto de las configuraciones divergentes analizadas en el Capítulo 3, esto corresponde a un proceso $a \rightarrow b + c$ con *c* soft. Sin embargo, cuando a = b debe existir una compensación con la contribución diagonal (esto es, aquella proporcional a $\delta(1-x)$ en (6.1.48)) de forma tal que se preserve la integrabilidad en [0, 1]. Explícitamente, las reglas de suma definidas por (6.1.33), (6.1.34) y (6.1.35) deben cumplirse para cualquier valor de *Q*. Así, derivando respecto a *t* y usando la relación entre PDFs y núcleos de Altarelli-Parisi se llega a

$$\int_0^1 dx \, P_{qq}(x) = 0 \,, \tag{6.1.51}$$

$$\int_0^1 dx \, \left[P_{qq}(x) + P_{gq}(x) \right] = 0 \,, \tag{6.1.52}$$

$$\int_0^1 dx \, \left[2N_F P_{qg}(x) + P_{gg}(x)\right] = 0 \,, \tag{6.1.53}$$

que son las relaciones que definen el comportamiento de P_{ab} en x = 1. Más aún, es posible introducir los núcleos *regularizados* de Altarelli-Parisi usando que

$$P_{aa}(x) = \left(P_{aa}^{<}(x) - \frac{2C_a}{1-x}\right) + \frac{2C_a}{(1-x)_+} + \gamma_a \delta(1-x) , \qquad (6.1.54)$$

en donde C_a es la carga de color correspondiente al partón a y

$$\gamma_q = \gamma_{\bar{q}} = \frac{3C_F}{2}, \qquad (6.1.55)$$

$$\gamma_g = \frac{\beta_0}{2}, \qquad (6.1.56)$$

son constantes que permiten emplear la distribución + para regularizar $(6.1.54)^5$. Es importante señalar que el valor de γ_a se relaciona con las contribuciones virtuales en las correcciones NLO. Además $C_a = 0 = \gamma_a$ cuando *a* no es un partón de QCD (por ejemplo, cuando *a* es un fotón).

Para concluir esta discusión, es importante señalar que aquí hemos empleado la notación y las convenciones de normalización introducidas en Ref. (59). Más adelante mostramos como compatibilizarla con la que se utiliza en la literatura actual.

1.4. Sobre factorización y LCG

Las propiedades de factorización de QCD pueden ser analizadas en el contexto de varios métodos. En DIS, la factorización de las singularidades de masa puede ser demostrada empleando la expansión en productos de operadores (OPE) aplicada en teoría de perturbaciones. Para procesos de aniquilación, también es posible probar la factorización de logaritmos colineales de la forma $\log (Q^2/p^2)$ (con Q momento transferido y p momento del jet o hadrón producido) en el límite $Q^2 \to \infty$. La diferencia crucial entre ambas configuraciones radica en la cinemática del proceso: en DIS las partículas intercambiadas son tipo *espaciales* ($Q^2 < 0$) mientras que la aniquilación produce estados virtuales tipo *temporales* ($Q^2 > 0$)⁶. Además de las técnicas de OPE, las demostraciones de factorización emplean elecciones de gauge específicas. En particular, la elección más empleada es el LCG (que definimos en el Capítulo 1).

Desde el punto de vista computacional, la forma de escribir los propagadores gluónicos en LCG permite establecer una jerarquía de las diversas contribuciones a las funciones de estructura. El uso de un gauge covariante hace que todos los diagramas sean igualmente relevantes para el cálculo de las funciones de estructura, aún en la aproximación de logaritmos dominantes (LLA) (64). En particular, dicha situación ocurre con los conocidos como *escaleras* o *ladders*. Los mismos

$$\int_0^1 dz \frac{f(z)}{(1-z)_+} = \int_0^1 dz \frac{f(z) - f(1)}{1-z}, \qquad (6.1.57)$$

para una función f suave.

 $^{^{5}}$ La distribución + se define como

⁶ Cabe señalar que el signo de la virtualidad del momento intercambiado depende de la signatura de la métrica. Recuérdese que en este trabajo se emplea (+ - - -) para la métrica 4-dimensional y que todas las extensiones de la misma se obtienen agregando componentes espaciales.

se obtienen insertando partículas en una pata del proceso, en forma secuencial. Sin embargo, como en el cálculo de las funciones de estructura se emplean elementos de matriz al cuadrado, es posible que la emisión de partículas adicionales provenga tanto del estado final como del estado inicial. Esto posibilita la distinción de distintos tipos de contribuciones. Por un lado se tienen aquellos en los cuales hay interferencia entre la emisión de estado inicial (final) y una partícula de estado final (inicial), conocidos como escaleras cruzadas. Por el otro, existen diagramas con correcciones únicamente en estado inicial o final. Estos últimos admiten una interpretación física en términos de desintegraciones o emisiones secuenciales y son las contribuciones dominantes cuando se emplea LCG en el contexto de LLA.

En la sección siguiente mostraremos de forma explícita la utilidad de LCG, al derivar las fórmulas de factorización colineal a todo orden perturbativo y definir las amplitudes de splitting. A diferencia del enfoque basado en OPE, se emplearán técnicas diagramáticas para llevar a cabo la demostración.

2. Propiedades de factorización

Con el objetivo de analizar el límite colineal, en esta sección comenzamos describiendo la parametrización de Sudakov aplicada a procesos en los cuales dos partículas son emitidas en direcciones casi paralelas. Tras discutir las ventajas de dichas variables en el caso doble colineal, se procede a su extensión para considerar configuraciones con múltiples partones emitidos de forma casi paralela. Por otra parte, trabajando en el espacio de color+espín se motivan las fórmulas maestras que utilizamos para calcular las matrices de splitting. Para concluir la sección, se procede a definir las funciones de splitting colineal en el contexto del formalismo de descomposición de color, estableciendo una relación con las matrices de splitting (en el espacio de color) y los núcleos de Altarelli-Parisi.

2.1. Parametrización de momentos

Para llevar a cabo el estudio del límite colineal de las amplitudes de scattering es necesario identificar las variables cinemáticas relevantes. Consideremos en primer lugar un proceso $1 \rightarrow 2$ donde p_1^{μ} , p_2^{μ} son los momentos de las partículas salientes. Aquí es importante notar que μ es un índice de Lorentz que corre sobre las diversas componentes del espacio-tiempo $D_{\rm ST}$ -dimensional. Debido a que nos interesa efectuar el análisis a nivel amplitud, asumimos que los momentos asociados a partículas externas son extensiones nulas de cuadrivectores (esto es, las componentes en las dimensiones extra son nulas). El momento del partón entrante es obtenido a través de la conservación de momento en los vértices de interacción, con lo cual $p_{12}^{\mu} = (p_1^{\mu} + p_2^{\mu})$, y su virtualidad viene dada por

$$s_{12} = p_{12}^{\mu} p_{12}^{\nu} \eta_{\mu\nu}^{D_{\rm ST}} = p_{12}^{\mu} p_{12}^{\nu} \eta_{\mu\nu}^{4} . \qquad (6.2.1)$$

Por otro lado, consideramos que las partículas restantes tienen momento saliente y que están on-shell. En concreto, se verifica que $p_1^2 = 0 = p_2^2$ y $p_{12}^2 > 0$. Esta última condición se asocia a la denominada cinemática *tipo temporal* (TL), que garantiza la validez de la factorización colineal estricta (incluso en el límite múltiple colineal).

La descripción del límite colineal requiere la introducción de un vector adicional n^{μ} que, además de ser tipo luz ($n^2 = 0$), verifica $n \cdot p_{12} \neq 0$. Más aún, en este trabajo consideraremos que se trata de la extensión nula D_{ST} -dimensional de un cuadrivector y que coincide con el vector de cuantización empleado en la definición de LCG. Es importante señalar que *n* define una dirección privilegiada en el espacio-tiempo que permite eliminar los grados de libertad espurios e indica la forma en que se produce la aproximación a la configuración colineal. Siendo más específicos, usando este vector es posible definir

$$\tilde{P}^{\mu} = p_{12}^{\mu} - \frac{s_{12}}{2n \cdot \tilde{P}} n^{\mu} , \qquad (6.2.2)$$

que se trata de un vector nulo asociado a la dirección colineal. En otras palabras, se cumple que $p_{12}^{\mu} \rightarrow \tilde{P}^{\mu}$ cuando $s_{12} \rightarrow 0$. Nótese que \tilde{P} cumple $\tilde{P}^2 = 0$ y $n \cdot \tilde{P} \neq 0$, lo que nos permite escribir $n \cdot \tilde{P} = n \cdot p_{12}$.

Por otro lado, utilizando las direcciones colineal \widetilde{P} y el vector n es posible introducir las variables escalares

$$z_i = \frac{n \cdot p_i}{n \cdot \tilde{P}} \quad i \in \{1, 2\} , \qquad (6.2.3)$$

que se encuentran sujetas a la restricción $z_1 + z_2 = 1$, la cual es consecuencia directa de la conservación de momento. En términos del lenguaje introducido en Ref. (59), z_i representa una fracción de momento en un marco de referencia boosteado en la dirección definida por \tilde{P} . Notemos que z_i es invariante frente a la transformación $n^{\mu} \to \lambda n^{\mu}$, lo cual es consistente con la invariancia presente en el propagador LCG. Además, para tener en cuenta la componente transversa de los momentos asociados a las partículas 1 y 2 es requerido un vector adicional, que denotamos k_{\perp}^{μ} y que cumple

$$n \cdot k_{\perp} = 0 = k_{\perp} \cdot \tilde{P} \,, \tag{6.2.4}$$

es decir, que se trata de un vector ortogonal a los anteriores. De esta forma, la cinemática del problema se reduce a considerar los vectores \tilde{P} , $n \ge k_{\perp}$, junto con las variables escalares $z_i \ge s_{12}$. Los momentos originales pueden expresarse como (65)

$$p_1^{\mu} = z_1 \tilde{P}^{\mu} + k_{\perp}^{\mu} - \frac{k_{\perp}^2}{2z_1 n \cdot \tilde{P}} n^{\mu} , \qquad (6.2.5)$$

$$p_2^{\mu} = (1 - z_1) \tilde{P}^{\mu} - k_{\perp}^{\mu} - \frac{k_{\perp}^2}{2(1 - z_1)n \cdot \tilde{P}} n^{\mu} , \qquad (6.2.6)$$

de donde es posible deducir que $k_{\perp}^2 = -z_1(1-z_1)s_{12}$. Esta es la conocida como parametrización de Sudakov y hace que sea evidente la interpretación de z_i en términos de fracciones de momento en el límite colineal.

Para adaptar estas definiciones al caso múltiple colineal, comencemos estableciendo algunas notaciones básicas. En primer lugar, suponemos que en un proceso de n partículas hay m que son simultáneamente colineales. Las mismas son denotadas como $i \in C = \{1, 2, ..., m\}$, siendo p_i^{μ} el cuadrimomento asociado a i. Por otra parte, en tal configuración es posible definir múltiples escalas de energía. En el caso doble colineal teníamos solamente s_{12} como escala característica del proceso colineal. Sin embargo, en esta situación podemos definir

$$s_{ij} = (p_i + p_j)^2 = 2p_i \cdot p_j,$$
 (6.2.7)

 $\operatorname{con} i, j \in C$ y también

$$s_{1,m} = \left(\sum_{i \in C} p_i\right)^2 = p_{1...m}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j \in C} s_{ij}, \qquad (6.2.8)$$

en donde se usa siempre que $p_i^2 = 0$. Más aún, es posible introducir otras escalas como $s_{i,j} = (p_i + p_{i+1} + \ldots + p_j)^2 = p_{i,j}^2$ (cuando i < j), que siempre se reducen a combinaciones de s_{ij} . La presencia de múltiples escalas es el mayor problema que tenemos que afrontar para caracterizar el límite colineal y extraer las funciones de splitting. Para simplificar la situación es posible centrarse en la configuración TL, en la cual todas las partículas colineales se encuentran en el estado final. De esta forma, $s_{ij} > 0 \forall i, j$ y por (6.2.8) se cumple que $s_{ij} < s_{1,m}$, con $s_{1,m} \to 0$ en el límite colineal. Así, podemos afirmar que en el límite múltiple colineal todas las subescalas tienden a 0 del mismo modo, siendo $s_{1,m}$ una cota superior en el caso TL. Ello motiva la introducción del vector nulo

$$\widetilde{P}^{\mu} = p_{1,m}^{\mu} - \frac{s_{1,m}}{2 \ n \cdot \widetilde{P}} n^{\mu} , \qquad (6.2.9)$$

que verifica $n \cdot \tilde{P} = n \cdot p_{1,m}$ y constituye una generalización de (6.2.2). Además, permite definir las variables z_i dadas en (6.2.3) sujetas a la restricción $z_1 + \ldots + z_m = 1$. En el Capítulo 9 se analizará más en detalle la parametrización de momentos en el caso m = 3.

Para concluir es necesario señalar que se pueden definir aún más escalas de energía si se consideran las interacciones de las partículas colineales y aquellas que no lo son. En otros términos, si tenemos los conjuntos C (colineales) y $NC = C^C$ (no colineales o el complemento de C) no hay impedimentos para introducir las variables s_{ij} con $i \in C$ y $j \in NC$. En vistas de la factorización motivada en el comienzo del capítulo, tales dependencias deben quedar relegadas a contribuciones subdominantes en el límite colineal. Sin embargo, como explicaremos brevemente más adelante, en configuraciones cinemáticas múltiple colineales SL es posible que la factorización no sea completa y que requiera hacer uso de estas variables.

2.2. Factorización en el espacio de color

Consideremos un proceso de scattering con n partículas y estudiemos una configuración cinemática colineal. La idea de esta discusión es motivar la factorización en el límite doble colineal, basándonos en una descripción física de la situación. Supongamos que dos partículas, etiquetadas como 1 y 2, son emitidas de forma casi paralela. En el análisis del límite colineal solo nos interesa retener los términos que presentan el mayor grado de divergencia, lo cual es análogo al procedimiento que se lleva a cabo cuando se estudia el OPE. Por otro lado, los cálculos se realizan en el LCG para exhibir de forma más sencilla la factorización de singularidades de masa.



Fig. 6.5: Contribución típica al término más divergente de una amplitud de scattering de n partículas en el límite doble colineal. El estado intermedio asociado a \tilde{P} se vuelve exactamente on-shell en el límite colineal, lo que justifica las propiedades de factorización en términos diagramáticos.

Con base en el esquema mostrado en la figura 6.5 y usando la cinemática descrita anteriormente, es posible escribir la contribución dominante en el límite colineal como

$$\mathcal{A}_{a_{1},a_{2}...}^{c_{1},c_{2}...;s_{1},s_{2}...}(p_{1},p_{2},...) \approx -\imath \sum_{P} (\mathcal{A}_{amp})_{P;a_{1},a_{2}}^{c_{P'},c_{1},c_{2};s_{1},s_{2}}(p_{1},p_{2};-p_{12}) \operatorname{Prop}(P;p_{12})_{c_{P}c_{P'}} \times (\mathcal{A}_{amp})_{P;a_{3}...}^{c_{P},c_{3}...;s_{3}...}(p_{12},p_{3},...) , \qquad (6.2.10)$$

en donde se han introducido las amplitudes amputadas \mathcal{A}_{amp} y un propagador genérico Prop, que depende de la cinemática y del tipo de partículas involucradas en el proceso. El estado intermedio P corresponde, en principio, a una partícula off-shell cuya virtualidad es s_{12} . En consecuencia, P pasa a describir una partícula on-shell cuando la configuración se vuelve *exactamente* colineal. Sin embargo, trabajar con la contribución dominante no es equivalente a tomar el límite s_{12} , razón por la cual debemos mantener $s_{12} \neq 0$ en todos los pasos intermedios.

Debe apreciarse que se está sumando sobre todos los posibles sabores y polarizaciones físicas de P compatibles con el estado final observado. El requisito de que P tenga una polarización física deriva de estar trabajando en un gauge axial (en LCG, en particular) pues en el mismo, los gluones (internos o externos) se asocian con grados de libertad estrictamente físicos.

En el contexto de QCD no masiva, P puede ser un gluón o bien un quark. Cuando P es un gluón, por conservación de sabor pueden tenerse las configuraciones $\{a_1 = g, a_2 = g\}$ o $\{a_1 = q, a_2 = \overline{q}\}$; si P es un quark (o antiquark) luego solo se permite $\{a_1 = q, a_2 = g\}$ o viceversa. Más adelante en el trabajo consideramos la posibilidad de tener procesos de splitting colineal iniciados por fotones. En tal caso, las fórmulas maestras obtenidas en esta sección seguirán siendo válidas, aunque es necesario reinterpretar su significado en el contexto del cálculo de correcciones a orden superior en QCD.

Estudiemos como se expresa \mathcal{A} en el límite colineal para cada posible elección de P. Cuando P es un quark, se puede escribir de forma explícita el propagador interno como

$$\operatorname{Prop} \equiv \frac{\imath \delta_{ij}}{\not p_{12}}, \qquad (6.2.11)$$

en donde δ_{ij} se introduce para forzar la conservación de color. Usando (6.2.2), se reescribe p_{12} en términos de \tilde{P} y obtenemos

$$\frac{\imath \delta_{ij}}{\not p_{12}} = \frac{\imath \delta_{ij}}{s_{12}} \left(\vec{P} + \frac{s_{12}}{2n \cdot \vec{P}} \not n \right) = \frac{\imath \delta_{ij} \vec{P}}{s_{12}} + \mathcal{O}(s_{12}^0) , \qquad (6.2.12)$$

en donde se está conservando solo la parte más divergente en el límite $s_{12} \rightarrow 0$. Más aún, debido a que \tilde{P} es un vector nulo es posible expresarlo en términos de espinores (ver Capítulo 2). Explícitamente, apelando a la relación de completitud (ver (2.3.7) y (2.3.7)), se tiene que

$$\tilde{P} = \sum_{\lambda \text{ phys.pol.}} u_{\lambda}(\tilde{P}) \bar{u}_{\lambda}(\tilde{P}) = \sum_{\lambda \text{ phys.pol.}} v_{\lambda}(\tilde{P}) \bar{v}_{\lambda}(\tilde{P}) , \qquad (6.2.13)$$

siendo λ una etiqueta que designa las posibles polarizaciones físicas del par quark-antiquark en el estado intermedio. En otras palabras, lo que estamos haciendo aquí es descomponer un propagador usando sumas sobre polarizaciones físicas 4-dimensionales de un par quark-antiquark. Esto puede interpretarse como cortar el diagrama a través del propagador que se torna singular en el límite colineal. Juntando consideraciones es posible reescribir (6.2.12) como

Volviendo a (6.2.10) se obtiene

$$\mathcal{A}_{a_{1},a_{2}...}^{c_{1},c_{2}...;s_{1},s_{2}...}(p_{1},p_{2},...) \approx \sum_{\lambda \text{ phys.pol.}} \frac{1}{s_{12}} (\mathcal{A}_{\text{amp}})_{P;a_{1},a_{2}}^{c_{P},c_{1},c_{2};s_{1},s_{2}}(p_{1},p_{2};-p_{12}) u_{\lambda}(\tilde{P}) \\ \times \left(\bar{u}_{\lambda}(\tilde{P})(\mathcal{A}_{\text{amp}})_{P;a_{3}...}^{c_{P},c_{3}...;s_{3}...}(p_{12},p_{3},...) \right) \\ \equiv \sum_{\lambda \text{ phys.pol.}} \left(\frac{1}{s_{12}} (\mathcal{A}_{\text{amp}})_{P;a_{1},a_{2}}^{c_{P},c_{1},c_{2};s_{1},s_{2}}(p_{1},p_{2};-p_{12}) u_{\lambda}(\tilde{P}) \right) \\ \times \mathcal{A}_{P,a_{3}...}^{c_{P},c_{3}...;\lambda,s_{3}...}(\tilde{P},p_{3},...) , \qquad (6.2.15)$$

donde, en la última línea, se reacomodaron los factores intervinientes en la expresión para mostrar la presencia del elemento de matriz *reducido* de n-1 patas externas. Dicho elemento de matriz se obtiene reemplazando las partículas 1 y 2 de la amplitud original por una pata con momento \tilde{P} . Es crucial apreciar que la partícula asociada a \tilde{P} corresponde a un estado no masivo on-shell y que $\mathcal{A}^{c_P,c_3...;\lambda,s_3...}$ es una amplitud on-shell física. Esto se debe a que puede tomarse el límite $s_{12} \to 0$ en $(\mathcal{A}_{amp})^{c_P,c_3...;s_3...}_{P;a_3...}$ ($p_{12}, p_3, ...$) ya que es finita en la configuración estrictamente colineal. Cabe señalar que, en este caso, todos los pasos del argumento son independientes del gauge en el que se trabaja.

Ahora, analicemos la situación en la cual la partícula intermedia corresponde a un gluón. Como estamos trabajando en LCG, el propagador gluónico se expresa

$$\frac{id_{\mu\nu}(p_{12},n)}{s_{12}} = \frac{i}{s_{12}} \left(-\eta_{\mu\nu} + \frac{p_{12\mu}n_{\nu} + p_{12\nu}n_{\mu}}{n \cdot p_{12}} \right) , \qquad (6.2.16)$$

en donde η es un tensor métrico, que puede estar asociado a un espacio 4 o $D_{\rm ST}$ -dimensional dependiendo del esquema de regularización empleado. Por simplicidad, supondremos aquí que $\eta = \eta^4$ puesto que nos interesa tener en cuenta únicamente los grados de libertad físicos. Además, Como hicimos para el caso P = q, podemos usar la definición de \tilde{P} y efectuar la expansión

$$d_{\mu\nu}(p_{12},n) = -\eta_{\mu\nu} + \frac{\tilde{P}_{\mu}n_{\nu} + \tilde{P}_{\nu}n_{\mu}}{n \cdot \tilde{P}} + s_{12}\frac{n_{\mu}n_{\nu}}{(n \cdot \tilde{P})^{2}} \approx -\eta_{\mu\nu} + \frac{\tilde{P}_{\mu}n_{\nu} + \tilde{P}_{\nu}n_{\mu}}{n \cdot \tilde{P}}$$

$$= d_{\mu\nu}(\tilde{P},n), \qquad (6.2.17)$$

que, junto con la relación de completitud

$$d_{\mu\nu}(\tilde{P},n) = \sum_{\lambda \text{ phys.pol.}} \epsilon^*_{\mu}(\tilde{P},\lambda)\epsilon_{\nu}(\tilde{P},\lambda), \qquad (6.2.18)$$

nos permiten escribir

$$\frac{id_{\mu\nu}(p_{12},n)}{s_{12}} \approx \sum_{\lambda \text{ phys.pol.}} \frac{\epsilon_{\mu}(\tilde{P},\lambda)}{s_{12}} \epsilon_{\nu}^{*}(\tilde{P},\lambda) + \mathcal{O}(s_{12}^{0}), \qquad (6.2.19)$$

que resulta una aproximación válida en el límite colineal (considerando solo los términos más divergentes). Aplicando estos resultados a (6.2.10), se obtiene

$$\mathcal{A}_{a_{1},a_{2}...}^{c_{1},c_{2}...;s_{1},s_{2}...}(p_{1},p_{2},...) \approx \sum_{\lambda \text{ phys.pol.}} \frac{1}{s_{12}} (\mathcal{A}_{\text{amp}})_{P;a_{1},a_{2}}^{c_{P},c_{1},c_{2};s_{1},s_{2};\mu}(p_{1},p_{2};-p_{12}) \epsilon_{\mu}(\tilde{P},\lambda)
\times \left(\epsilon_{\nu}^{*}(\tilde{P},\lambda)(\mathcal{A}_{\text{amp}})_{P;a_{3}...}^{c_{P},c_{3}...;s_{3}...;\nu}(p_{12},p_{3},...)\right)
\equiv \sum_{\lambda \text{ phys.pol.}} \left(\frac{1}{s_{12}} (\mathcal{A}_{\text{amp}})_{P;a_{1},a_{2}}^{c_{P},c_{1},c_{2};s_{1},s_{2};\mu}(p_{1},p_{2};-p_{12}) \epsilon_{\mu}(\tilde{P},\lambda)\right)
\times \mathcal{A}_{P,a_{3}...}^{c_{P},c_{3}...;\lambda,s_{3}...}(\tilde{P},p_{3},...), \qquad (6.2.20)$$

en donde, al igual que en el caso P = q, se procedió a reacomodar la expresión de forma tal que el primer factor contenga todas las contribuciones divergentes cuando $s_{12} \rightarrow 0$ y el segundo término corresponda a un elemento de matriz reducido de n - 1 partículas, no masivas y onshell. A diferencia del caso previo, aquí resultó crucial utilizar LCG pues la deducción efectuada se basa en la posibilidad de escribir el propagador gluónico como (6.2.16). A su vez, esto se vincula fuertemente con el hecho de que los gluones internos solo tienen polarizaciones físicas y con las condiciones de consistencia teórica mencionadas en el Capítulo 4. En particular, uno de los requisitos establecía que el tensor de polarización de los gluones virtuales debía satisfacer $d_{\mu\nu}p^{\mu} \approx p^2$. Por ende, si p^2 es la virtualidad de la línea interna asociada a P, en el límite colineal $p^2 = s_{12} \rightarrow 0$ y los gluones internos se comportan del mismo modo que los externos, lo que justifica la posibilidad de efectuar un *corte* en el diagrama⁷.

Utilizando las ecuaciones (6.2.15) y (6.2.20) es posible motivar la definición de las conocidas como matrices de splitting. Por ejemplo, en el caso doble colineal mediado por un quark, se define

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{q\to a_{1}a_{2}} = \frac{1}{s_{12}} \left| \left(\mathcal{A}_{\text{amp}} \right)_{q,a_{1},a_{2}} \left(p_{1}, p_{2}; -p_{12} \right) \right\rangle u(\tilde{P}), \qquad (6.2.21)$$

en donde a_1 y a_2 son un gluón y un quark, respectivamente. También en el límite doble colineal, cuando el partón padre es un gluón se introduce

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g\to a_1 a_2} = \frac{1}{s_{12}} \left| \left(\mathcal{A}_{\text{amp}} \right)_{g,a_1,a_2}^{\mu} \left(p_1, p_2; -p_{12} \right) \right\rangle \epsilon_{\mu}(\tilde{P}), \qquad (6.2.22)$$

con a_1 y a_2 un par $q\bar{q}$ o un par de gluones. En ambos casos, $|(\mathcal{A}_{amp})_{P,a_1,a_2}(p_1, p_2; -p_{12})\rangle$ corresponde a la amplitud amputada asociada al proceso $P \to a_1a_2$, sin efectuar la proyección sobre

⁷ Sin entrar en detalles técnicos, nótese que la noción de cortar un diagrama en estas configuraciones es equivalente a la idea de forzar a las partículas virtuales en el interior de un loop a cumplir la condición de capa de masa, interpretando los resultados en términos de un proceso de scattering. Este tipo de razonamiento es el que motiva una descripción unificada de las contribuciones reales y virtuales a las correcciones radiativas, y también se vincula con la similitud entre integrales de loop y de espacio de fases.

el espacio de color+espín. También es importante apreciar que en estas expresiones se emplea p_{12} como el momento asociado al partón incidente P. Esto se debe a que la cinemática debe mantenerse off-shell (esto es, con $s_{12} \neq 0$) puesto que Sp es divergente en el límite colineal. De esta manera, a pesar de efectuar la proyección sobre un espinor o vector de polarización asociado a \tilde{P} (y en consecuencia, asociado a una partícula no-masiva on-shell), debe calcularse $|(\mathcal{A}_{amp})_{P,a_{1},a_{2}}(p_{1},p_{2};-p_{12})\rangle$ forzando la conservación estricta de momento y manteniendo $s_{12} \neq 0$.

Las matrices de splitting permiten describir la factorización colineal de amplitudes de scattering. En particular, usando las definiciones dadas en (6.2.21) y (6.2.22) y siguiendo los argumentos esbozados anteriormente, se tiene

$$\left|\mathcal{A}^{(0)}\left(p_{1},\ldots,p_{n}\right)\right\rangle \simeq \mathbf{S}\boldsymbol{p}^{(0)}\left(p_{1},p_{2};\widetilde{P}\right)\left|\mathcal{A}^{(0)}\left(\widetilde{P},p_{3},\ldots,p_{n}\right)\right\rangle, \qquad (6.2.23)$$

que es una identidad válida manteniendo los términos más divergentes en el límite $s_{12} \rightarrow 0$. El supraíndice (0) se incluye para indicar que estamos considerando amplitudes a nivel árbol. Además, por estar trabajando en el espacio de color+espín, el producto matricial involucra una suma implícita sobre las polarizaciones y colores de los estados intermedios asociados a P. Es útil señalar que, a este orden perturbativo, la extensión de (6.2.23) al caso múltiple colineal es directa. Explícitamente, si $\{1, \ldots, m\}$ se vuelven colineales en un proceso de n partículas, se tiene

$$|\mathcal{A}^{(0)}(p_1,\ldots,p_n)\rangle \simeq \mathbf{S}\mathbf{p}^{(0)}(p_1\ldots,p_m;\widetilde{P}) |\mathcal{A}^{(0)}(\widetilde{P},p_{m+1},\ldots,p_n)\rangle, \qquad (6.2.24)$$

en donde se retienen las contribuciones dominantes en el límite $s_{1,m} \to 0$.

Para concluir este estudio, debemos mencionar que las propiedades de factorización colineal también se extienden a órdenes perturbativos superiores. Debido a que en este trabajo solo analizamos las correcciones NLO en QCD, nos limitamos describir el límite colineal de amplitudes a 1-loop. Comenzando con el caso doble colineal, vemos que es posible que las correcciones virtuales se factoricen en la amplitud reducida o en la matriz de splitting. Es decir, de todos los posible diagramas se consideran aquellos que incluyen una línea interna cuyo propagador se anula en el límite $s_{12} \rightarrow 0$. Como estamos trabajando con amplitudes a 1-loop, tales diagramas solo pueden tener el loop a la izquierda o a la derecha del corte, como se muestra en la figura 6.6. Sin embargo, existen otros diagramas en los cuales no es posible si las partículas colineales forman parte de un loop y en consecuencia debe analizarse el límite de una integral de loop cuando dos momentos externos se vuelven paralelos⁸. Estos diagramas pueden introducir correlaciones entre partículas colineales y aquellas que no lo son, conduciendo a la violación de factorización.

 $^{^{8}}$ Puede encontrarse una discusión detallada en Ref. (67), en donde los autores consideran estos límites para integrales box.



Fig. 6.6: Contribuciones posibles a una amplitud de n partículas a 1-loop. Suponiendo que los momentos 1 y 2 se tornan colineales, se clasifican los términos en tres posibles categorías: a)- el loop está asociado a la amplitud reducida; b)- el loop está contenido en la función de splitting; o c)las partículas colineales forman parte del loop. En las dos primeras contribuciones se efectúa un corte en la pata intermedia para explicitar la factorización. Los restantes diagramas están suprimidos por la cinemática (en el caso TL) y la elección del gauge (LCG).

Trabajando en la región TL (esto es, con $s_{ij} > 0$ para todas las partículas colineales) y en LCG es posible demostrar (71) que tales contribuciones son subdominantes, aún para el límite múltiple colineal. De este modo, se tiene

$$|\mathcal{A}^{(1)}(p_1,\ldots,p_n)\rangle \simeq \mathbf{S}\mathbf{p}^{(1)}(p_1\ldots,p_m;\widetilde{P}) |\mathcal{A}^{(0)}(\widetilde{P},p_{m+1},\ldots,p_n)\rangle + \mathbf{S}\mathbf{p}^{(0)}(p_1\ldots,p_m;\widetilde{P}) |\mathcal{A}^{(1)}(\widetilde{P},p_{m+1},\ldots,p_n)\rangle , \qquad (6.2.25)$$

en el contexto de la factorización estricta. Como es de esperar, en tal caso, las amplitudes de splitting solo dependen de las patas colineales y la dependencia en las partículas remanentes se encuentra en los elementos de matriz reducidos. Al final del capítulo discutiremos las consecuencias de trabajar en configuraciones SL y formas alternativas de expresar la factorización colineal.

2.3. Funciones de splitting y núcleos de Altarelli-Parisi

Los procesos de splitting colineal también han sido estudiados en el contexto del formalismo de descomposición de color (66; 67; 68). Debido a que el uso de amplitudes primitivas provee

un ordenamiento fijo para las partículas externas, resulta más intuitivo aislar las contribuciones divergentes cuando las patas externas se vuelven paralelas. De hecho, como mencionamos en el Capítulo 2, estos objetos solo presentan singularidades IR cuando dos (o más) partículas adyacentes son colineales o cuando hay momentos que se vuelven soft. En el caso doble colineal a NLO, la fórmula de factorización para el caso $1 \parallel 2$ se escribe como (68; 69)

$$\begin{aligned}
A_n^{(1)}(1^{\lambda_1}, 2^{\lambda_2}, \dots, n-1, n) &\to \sum_{\sigma \text{phys.pol.}} \left[\text{Split}_{-\sigma}^{(0)}(1^{\lambda_1}, 2^{\lambda_2}) A_{n-1}^{(1)}((1+2)^{\sigma}, \dots, n-1, n) \right. \\
&+ \left. \text{Split}_{-\sigma}^{(1)}(1^{\lambda_1}, 2^{\lambda_2}) A_{n-1}^{(0)}((1+2)^{\sigma}, \dots, n-1, n) \right], \quad (6.2.26)
\end{aligned}$$

en donde los objetos Split se suelen llamar funciones de splitting o amplitudes de splitting, y la suma se efectúa unicamente sobre las polarizaciones físicas del estado intermedio. Cabe destacar que Split solo depende de la cinemática y la configuración de helicidad del proceso estudiado. Usando las ideas y las fórmulas de descomposición provistas en el Capítulo 2, se puede probar que Split puede recuperarse a partir de la matriz de splitting Sp proyectando sobre las posible estructuras de color y factorizándolas. Para el caso doble colineal, existe una relación de proporcionalidad entre ambos splittings. Para procesos que involucran más de tres partículas con carga de color, se pueden vincular ambas expresiones efectuando combinaciones lineales. Una generalización de (6.2.26) para procesos con más loops para las contribuciones dominantes de color puede hallarse en Ref. (70).

Las matrices de splitting aquí definidas pueden vincularse con los núcleos de Altarelli-Parisi introducidos en Ref. (59). Para ello es necesario escribir las fórmulas de factorización colineal a nivel de elementos de matriz al cuadrado. Por ejemplo, trabajando a nivel árbol en el límite múltiple colineal, tomamos (6.2.24) y calculamos el elemento de matriz al cuadrado ⁹, obteniendo

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_{n}^{(0)}(p_{1}\dots p_{n})|^{2} &\to \left(\frac{2\,\mu^{2\epsilon}}{s_{1,m}}\right)^{m-1} \left[\langle \hat{P}_{a\to a_{1}\cdots a_{m}}^{(0)} \rangle \, |\mathcal{A}_{n-m+1}^{(0)}(\widetilde{P}, p_{m+1}\dots p_{n})|^{2} \\ &+ \Delta(a_{1}\dots a_{n}; p_{1}\dots p_{n}) \right] \,, \end{aligned} \tag{6.2.27}$$

en donde se introdujo

$$\langle \hat{P}_{a \to a_1 \cdots a_m}^{(0)} \rangle = \left(\frac{s_{1,m}}{2 \,\mu^{2\epsilon}}\right)^{m-1} \overline{|\mathbf{S} \mathbf{p}_{a \to a_1 \dots a_m}^{(0)}|^2} ,$$
 (6.2.28)

 $^{^{9}}$ Sumamos sobre polarizaciones físicas y colores de todas las partículas involucradas siempre, y se realiza el promedio sobre los mismos en el caso que se hayan definido los elementos de matriz físicos. Nótese que estamos usando todos los momentos salientes con el objetivo de explorar las propiedades de factorización en la región TL. En la ecuación (6.2.28) se introduce el promedio sobre el color y espín del partón padre, aunque solamente por una cuestión de normalización.

y aparece una contribución adicional proporcional a $\Delta(p_1 \dots p_n)$ que depende de todas las partículas presentes en el proceso. Este término es originado por correlaciones de espín asociadas al estado intermedio P. De hecho, (6.2.24) es una ecuación matricial y al computar $(\boldsymbol{Sp}_{a\to a_1\dots a_m}^{(0)})^{\dagger} \boldsymbol{Sp}_{a\to a_1\dots a_m}^{(0)}$ pueden aparecer contribuciones que no sean proporcionales a la matriz identidad en el espacio de color+espín¹⁰. Sin embargo, Δ se anula en ciertas circunstancias y no contribuye al efectuar integrales sobre las variables azimutales, con lo cual puede afirmarse con cierta generalidad que $\langle \hat{P}_{a\to a_1\dots a_m}^{(0)} \rangle$ controla el comportamiento del elemento de matriz de npartículas en el límite colineal. Si nos restringimos al caso doble colineal y comparamos con la ecuación (6.1.50) vemos que

$$\langle \hat{P}_{a \to a_1 a_2}^{(0)} \rangle = g_{\rm S}^2 P_{a_1 a}^{<}(z) , \qquad (6.2.29)$$

en la región z < 1 y $\epsilon \to 0$. De esta forma, se tiene una generalización de los núcleos de Altarelli-Parisi para el caso múltiple colineal apelando a (6.2.28).

También es útil definir los núcleos de Altarelli-Parisi en el espacio de helicidades, esto es, sin efectuar la suma sobre las polarizaciones del partón padre. Comencemos efectuando una motivación de las fórmulas a utilizar, considarando un proceso de *n*-partículas a nivel árbol en el cual m se vuelven colineales. Usando las propiedades de factorización colineal dadas en (6.2.24) y calculando el elemento de matriz al cuadrado se tiene

$$\langle \mathcal{A}^{(0)}(p_1, \dots, p_n) | \quad \text{Id} \quad |\mathcal{A}^{(0)}(p_1, \dots, p_n) \rangle \simeq \sum_{\lambda, \lambda'} \langle \mathcal{A}^{(0)}(\widetilde{P}^{-\lambda}, p_{m+1}, \dots, p_n) |$$

$$\times \quad (\epsilon^{\mu}(\widetilde{P}, \lambda))^* \left(\boldsymbol{Sp}^{(0)}_{\mu}(p_1 \dots p_m; \widetilde{P}) \right)^{\dagger} \boldsymbol{Sp}^{(0)}_{\nu}(p_1 \dots p_m; \widetilde{P}) \epsilon^{\nu}(\widetilde{P}, \lambda')$$

$$\times \quad |\mathcal{A}^{(0)}(\widetilde{P}^{-\lambda'}, p_{m+1}, \dots, p_n) \rangle ,$$

$$(6.2.30)$$

en donde se está efectuando una suma sobre las polarizaciones de los estados intermedios y se utilizan los splittings amputados Sp_{μ} (esto es, aquellos obtenidos tras remover el vector de polarización correspondiente al partón inicial). Si se reescribe esta ecuación en términos matriciales es posible definir

$$\boldsymbol{P}_{a\to a_1\dots a_m}^{(0)} = \left(\frac{s_{1,m}}{2\,\mu^{2\epsilon}}\right)^{m-1} \left(\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}^{(0)}(p_1\dots p_m; \widetilde{P})\right)^{\dagger} \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}^{(0)}(p_1\dots p_m; \widetilde{P}),$$

que constituye una generalización de las matrices de splitting en el espacio de espín, a nivel amplitud al cuadrado. Cabe destacar que en la expresión anterior se está efectuando una suma sobre las polarizaciones y los colores de todas las partículas colineales, pero solo se promedia

¹⁰ En el Apéndice B de Ref. (6) se computa de forma explícita la función Δ . Cabe destacar que hay un factor 2 entre nuestras convenciones y las allí empleadas, que se relaciona con la normalización de los elementos de matriz al cuadrado.

sobre el color del partón padre, preservando la información concerniente a su helicidad. En otras palabras, $P_{a \to a_1...a_m}$ es un operador en el espacio de espín del partón inicial y

$$\left\langle \mu \left| \boldsymbol{P}_{a \to a_1 \dots a_m}^{(0)} \right| \nu \right\rangle = \left(\frac{s_{1,m}}{2 \, \mu^{2\epsilon}} \right)^{m-1} \left(\boldsymbol{S} \boldsymbol{p}_{\mu}^{(0)}(p_1 \dots p_m; \widetilde{P}) \right)^{\dagger} \boldsymbol{S} \boldsymbol{p}_{\nu}^{(0)}(p_1 \dots p_m; \widetilde{P}) \quad (6.2.31)$$

$$= P_{a \to a_1 \dots a_m}^{(0), \ \mu\nu}, \tag{6.2.32}$$

son sus elementos de matriz, obtenidos tras remover los vectores de polarización $\epsilon(\tilde{P})$ asociados al partón padre.

Si bien la definición dada en (6.2.32) es completamente general, es necesario tener en cuenta que solo es relevante cuando los estados intermedios tienen polarizaciones físicas. En otras palabras, las propiedades de factorización colineal utilizan fuertemente que las partículas virtuales pueden originar únicamente estados físicos cuando están en su capa de masa. Por ende, podemos proyectar (6.2.32) sobre estados de polarización definida e introducir

$$\mathbf{P}_{a\to a_1\dots a_m}^{(0)}(\lambda,\lambda') = \left(\epsilon^{\mu}(\widetilde{P},\lambda)\right)^* \langle \mu \left| \mathbf{P}_{a\to a_1\dots a_m}^{(0)} \right| \nu \rangle \epsilon^{\nu}(\widetilde{P},\lambda'), \qquad (6.2.33)$$

que verifica

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_{n}^{(0)}(p_{1}\dots p_{n})|^{2} &\to \left(\frac{2\,\mu^{2\epsilon}}{s_{1,m}}\right)^{m-1} \sum_{\lambda,\lambda'} \langle \mathcal{A}_{n-m+1}^{(0)}(\widetilde{P}^{-\lambda}, p_{m+1}, \dots, p_{n})| \\ &\times \mathbf{P}_{a \to a_{1}\dots a_{m}}^{(0)}(\lambda,\lambda') |\mathcal{A}_{n-m+1}^{(0)}(\widetilde{P}^{-\lambda'}, p_{m+1}, \dots, p_{n})\rangle, \qquad (6.2.34) \end{aligned}$$

y que permite recuperar la fórmula (6.2.27), dando una descripción completa del límite colineal de elementos de matriz al cuadrado. Notemos que (6.2.33) implica la contracción de $P^{\mu\nu}$ con vectores de polarización físicos que satisfacen

$$\epsilon(\widetilde{P}, n) \cdot \widetilde{P} = 0 = \epsilon(\widetilde{P}, n) \cdot n \,. \tag{6.2.35}$$

Estas dos condiciones se traducen en la presencia de términos irrelevantes en la expansión de $P^{\mu\nu}$. Concretamente, toda contribución proporcional a n^a o \tilde{P}^a (con $a = \{\mu, \nu\}$) se anula al ser contraída con $\epsilon(\tilde{P}, n)$. Por ende, en el cálculo de $P^{\mu\nu}$ podemos simplificar los pasos intermedios tomando los límites

$$n^a \to 0, \qquad (6.2.36)$$

$$\widetilde{P}^a \to 0,$$
 (6.2.37)

siempre que a sea igual a μ o ν (índices libres originados al amputar los vectores de polarización del partón padre). Más aún, apelando a la definición de \tilde{P} vemos que (6.2.37) es equivalente a establecer el reemplazo

$$p_m^a \to -p_1^a - \dots - p_{m-1}^a,$$
 (6.2.38)

y eliminar el vector p_m^a de la expansión de $P^{\mu\nu}$. Estas observaciones son de crucial importancia para computar los splittings polarizados en el límite triple colineal, como veremos en detalle en el Capítulo 10.

Las fórmulas obtenidas para las funciones de splitting polarizado pueden ser extendidas a cualquier orden perturbativo, apelando a la extensión de las propiedades de factorización. En particular,

$$P_{a \to a_1 \dots a_m}^{\mu\nu} = \left(\frac{s_{1,m}}{2\,\mu^{2\epsilon}}\right)^{m-1} \left[\left(\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{\mu}^{(0)}(p_1 \dots p_m; \widetilde{P}) \right)^{\dagger} \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{\nu}^{(0)}(p_1 \dots p_m; \widetilde{P}) \right]$$
(6.2.39)

+2Re
$$\left(\left(\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{\mu}^{(0)}(p_{1}\ldots p_{m};\widetilde{P})\right)^{\dagger}\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{\nu}^{(1)}(p_{1}\ldots p_{m};\widetilde{P})\right)\right]$$
 + $\mathcal{O}(\alpha_{s}^{3})$, (6.2.40)

que es la correspondiente expansión a NLO en QCD. Nótese que estos objetos son simétricos en los índices μ , ν , que es otra propiedad que explotaremos para simplificar las expresiones.

Tras haber introducido los núcleos de Altarelli-Parisi polarizados, debemos mencionar que para recuperar las funciones de splitting análogas a (6.2.28) se debe promediar sobre las polarizaciones del partón padre. Explícitamente, se cumple que

$$\langle \hat{P}_{a \to a_1 \cdots a_m} \rangle = \frac{d_{\mu\nu}(\tilde{P}, n)}{\mathcal{N}} \langle \mu | \boldsymbol{P}_{a \to a_1 \dots a_m} | \nu \rangle, \qquad (6.2.41)$$

en donde \mathcal{N} es un factor de promedio relacionado con el número de polarizaciones de la partícula vectorial que inicia el splitting¹¹.

A modo de comentario final, vale destacar que en este trabajo utilizaremos el término *fun*ciones de splitting de forma genérica para referirnos tanto a las amplitudes/matrices de splitting como a los núcleos de Altarelli-Parisi generalizados.

3. Propiedades de las funciones de splitting a órdenes superiores

Como enfatizamos antes, la factorización colineal puede ser extendida a órdenes perturbativos superiores. En consecuencia, tiene sentido definir funciones de splitting a NLO y estudiar sus propiedades. En particular, para calcular las correcciones NLO es necesario realizar cómputos con integrales de loop. Las mismas aportan una estructura de divergencias (tanto IR como UV) que puede ser predicha empleando la fórmula de Catani (18; 71). De hecho, esta fórmula se puede

¹¹ Existe una sutileza relacionada con esta definición cuando se trabaja en DREG. En 4 dimensiones, el promedio sobre polarizaciones coincide con el promedio azimutal. Sin embargo, en DREG estas definiciones pueden ser diferentes dependiendo de la forma en que se extienden los momentos y el número de polarizaciones asignadas a cada partícula. Para más detalles, consultar Ref. (33).

extender al caso múltiple colineal y a configuraciones cinemáticas arbitrarias (SL o TL), e incluso a más de 1-loop.

Por otro lado, también analizamos el comportamiento de las correcciones a la autoenergía de los partones a 1-loop, en el contexto de LCG. Específicamente, encontramos que su aporte a las funciones de splitting puede ser calculado de forma universal, lo que permite simplificar el tratamiento de splittings que involucren muchas partículas.

3.1. Estructura de polos IR: la fórmula de Catani

El estudio de la estructura divergente de las correcciones virtuales es importante para garantizar la posibilidad de definir observables IR-safe. Por ejemplo, para desarrollar el método de sustracción de forma general se usa fuertemente que todos los polos IR de las correcciones virtuales se obtienen a partir de ciertos coeficientes de color y son siempre proporcionales a la contribución LO (7; 8). Al complementar esos resultados con el conocimiento de las propiedades de factorización a nivel árbol (tanto en el caso colineal como soft) se demuestra que todos los polos IR se cancelan entre las diversas contribuciones, conduciendo a un resultado final finito.

Siguiendo lo expuesto en Ref. (71), comencemos observando las propiedades de las matrices de splitting en el límite doble colineal. Debido a que en este trabajo analizamos QCD con acoples electromagnéticos, debemos considerar configuraciones en las cuales haya fotones colineales con quarks. A 1-loop, los splittings pueden ser escritos como

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}^{(1)}\left(p_{1},p_{2};\tilde{P}\right) = \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{H}^{(1)}\left(p_{1},p_{2};\tilde{P}\right) + \boldsymbol{I}^{(1)}\left(p_{1},p_{2};\tilde{P}\right)\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}^{(0)}\left(p_{1},p_{2};\tilde{P}\right), \quad (6.3.1)$$

en donde $\boldsymbol{Sp}_{H}^{(1)}$ contiene únicamente funciones racionales de las variables escalares $(z_1, s_{12} \text{ y el} parámetro \epsilon)$, mientras que

$$I^{(1)}\left(p_{1}, p_{2}; \tilde{P}\right) = c_{\Gamma}g_{S}^{2}\left(\frac{-s_{12}-\imath 0}{\mu^{2}}\right)^{-\epsilon} \\ \times \left\{\frac{1}{\epsilon^{2}}\left(C_{P}-C_{1}-C_{2}\right)+\frac{1}{\epsilon}\left(\gamma_{P}-\gamma_{1}-\gamma_{2}+\frac{m-1}{2}\beta_{0}\right)\right. \\ \left.-\frac{1}{\epsilon}\left[\left(C_{P}+C_{1}-C_{2}\right)f(\epsilon, z_{1})+\left(C_{P}+C_{2}-C_{1}\right)f(\epsilon, 1-z_{1})\right]\right\}, (6.3.2)$$

es un operador en el espacio de color+espín que contiene todas las contribuciones divergentes y aquellas asociadas a funciones transcendentales. En estas expresiones, C_i son los factores de Casimir asociados al partón de tipo a_i , γ_i las constantes definidas en (6.1.54), m es el número de partones colineales de QCD y c_{Γ} es el factor de volumen asociado a las integrales de 1-loop en D dimensiones. Por otra parte la función $f(\epsilon, z)$ está dada por

$$f(\epsilon, z) = \frac{1}{\epsilon} \left({}_2F_1\left(1, -\epsilon, 1-\epsilon, 1-\frac{1}{z}\right) - 1 \right), \qquad (6.3.3)$$

y se relaciona con el límite colineal de las integrales de 1-loop involucradas en cualquier splitting doble. Es importante apreciar que $f(\epsilon, z)$ posee discontinuidades esenciales y un salto de rama cuando z cambia de signo. Explícitamente, si se efectúa la expansión en potencias de ϵ se obtiene

$$f(\epsilon, z) = -\log(z) - \sum_{n=1} \operatorname{Li}_{n+1}\left(\frac{z-1}{z}\right) \epsilon^n, \qquad (6.3.4)$$

siendo el primer término un logaritmo que introduce un branch-cut en $\{z < 0\}$.

La otra configuración cinemática estudiada en este trabajo fue el límite triple colineal (ver Capítulos 9 y 10). En tal caso, existe una separación de las distintas contribuciones a $Sp^{(1)}$ análoga a (6.3.1) y es posible extender (6.3.2) para configuraciones TL definiendo (72)

$$\mathbf{I}_{P \to a_{1}...a_{m}}^{(1)}\left(p_{1},\ldots,p_{m};\widetilde{P}\right) = c_{\Gamma} g_{\mathrm{S}}^{2} \left(\frac{-s_{1,m}-\imath 0}{\mu^{2}}\right)^{-\epsilon} \left\{\frac{1}{\epsilon^{2}} \sum_{i,j=1(i\neq j)}^{\tilde{m}} \mathbf{T}_{i} \cdot \mathbf{T}_{j} \left(\frac{-s_{ij}-\imath 0}{-s_{1,m}-\imath 0}\right)^{-\epsilon} + \frac{1}{\epsilon^{2}} \sum_{i,j=1}^{\tilde{m}} \mathbf{T}_{i} \cdot \mathbf{T}_{j} \left(2-(z_{i})^{-\epsilon}-(z_{j})^{-\epsilon}\right) - \frac{1}{\epsilon} \left(\sum_{i=1}^{\tilde{m}} \left(\gamma_{i}-\epsilon\tilde{\gamma}_{i}^{\mathrm{RS}}\right)-\left(\gamma_{a}-\epsilon\tilde{\gamma}_{a}^{\mathrm{RS}}\right)-\frac{\tilde{m}-2}{2} \left(\beta_{0}-\epsilon\tilde{\beta}_{0}^{\mathrm{RS}}\right)\right)\right\},$$
(6.3.5)

en donde denotamos el operador de color asociado a la partícula con momento p_i como T_i , \bar{m} cuenta el número de partones de QCD colineales, mientras que \tilde{m} se refiere al número total de partones de QCD involucrados en el proceso de splitting. En el caso doble colineal no era necesario definir \tilde{m} pues las dos situaciones posibles (1 o 2 partones de QCD colineales) podían ser tenidas en consideración con el parámetro m. Sin embargo, aquí vale $\tilde{m} = \bar{m}$ en los procesos de división que son iniciados por fotones. Por otra parte, las partículas colineales son ordenadas de forma tal que $\{1...,\bar{m}\}$ pertenecen a QCD y las remanentes son fotones. Cabe destacar que la conservación de color implica que la carga del partón padre viene dada por

$$\sum_{i} \boldsymbol{T}_{i} \boldsymbol{S} \boldsymbol{p}^{(0)} = \boldsymbol{S} \boldsymbol{p}^{(0)} \boldsymbol{T}_{a}.$$
(6.3.6)

Es importante apreciar que cuando $\tilde{m} \leq 3$, Eq. (6.3.6) implica que todos los productos de operadores de color involucrados en la definición de $I^{(1)}$ son proporcionales a la matriz unidad en este espacio. De esta forma, podemos escribir

$$I_{P \to a_1...a_m}^{(1)} \to I_{P \to a_1...a_m}^{(1)} \mathrm{Id}_C ,$$
 (6.3.7)

en donde $I_{a_1...a_m}^{(1)}$ es solamente un número.

Algo interesante de remarcar en (6.3.6) es que dicha fórmula predice correctamente la dependencia en el esquema de regularización hasta $\mathcal{O}(\epsilon^0)$, estando controlada la misma por los coeficientes de ajuste $\tilde{\gamma}_i^{\text{RS}}$ y $\tilde{\beta}_0^{\text{RS}}$. Explícitamente, se tiene

$$\tilde{\gamma}_i^{\text{CDR}} = \tilde{\beta}_0^{\text{CDR}} = 0 , \qquad (6.3.8)$$

para el esquema CDR, mientras que

$$\tilde{\gamma}_q^{\text{DRED}} = \tilde{\gamma}_{\bar{q}}^{\text{DRED}} = C_F/2 , \qquad (6.3.9)$$

$$\tilde{\gamma}_{g}^{\text{DRED}} = \tilde{\beta}_{0}^{\text{DRED}}/2 = C_{A}/6 ,$$
(6.3.10)

cuando se aplica HV o alguna versión de DRED.

Como sabemos, las correcciones a 1-loop poseen tanto divergencias UV como IR. En las expresiones anteriores se mantuvieron los polos UV, es decir que se utilizaron cantidades no-renormalizadas. Los términos que acompañan a β_0 en (6.3.2) o a $\beta_0 - \epsilon \tilde{\beta}_0^{RS}$ en (6.3.6) son de origen ultravioleta y deben removerse de tales expresiones cuando se trabaja con funciones de splitting renormalizadas.

3.2. Correcciones al partón inicial

Al computar las matrices y funciones de splitting a NLO es necesario trabajar en el LCG. Desde el punto de vista operacional, esto representa una dificultad adicional puesto que las integrales incluyen un denominador lineal adicional (ver Capítulo 5). Sin embargo, es posible explotar ciertas propiedades que nos permiten simplificar el cálculo de las funciones de splitting.

Comencemos computando la corrección a 1-loop a la autoenergía gluónica. Usando el enfoque de diagramas de Feynman en LCG, vemos que hay dos posibles diagramas que aportan a $\Pi^{\mu\nu}$, los cuales se muestran en la figura 6.7. Así, definimos

$$\Pi^{\mu\nu}(p) = \Pi^{\mu\nu}_{A}(p) + \Pi^{\mu\nu}_{B}(p), \qquad (6.3.11)$$

en donde

$$\Pi_{A}^{\mu\nu}(p) = \left(g_{S}^{2}\mu^{2\epsilon}N_{f}\operatorname{Tr}\left[\mathbf{T}^{a}\mathbf{T}^{b}\right]\right) \int_{q} \frac{\operatorname{Tr}\left[\gamma^{\nu}\not{q}\gamma^{\mu}(\not{q}-\not{p})\right]}{q^{2}(q-p)^{2}}, \qquad (6.3.12)$$

$$\Pi_{B}^{\mu\nu}(p) = \frac{g_{S}^{2}\mu^{2\epsilon}f_{adc}f_{dbc}}{2} \int_{q} \frac{d_{\sigma\sigma'}(q)d_{\rho\rho'}(p-q)}{q^{2}(q-p)^{2}} \times V_{3g}(-p^{\mu},q^{\sigma},(p-q)^{\rho})V_{3g}(-q^{\sigma'},p^{\nu},(q-p)^{\rho'}), \qquad (6.3.13)$$

en donde se está usando p como momento del gluón, con $p^2 = s$. Apréciese que solo tiene sentido considerar el caso $s \neq 0$, pues de lo contrario las integrales involucradas son trivialmente nulas (s es la única escala del problema).



Fig. 6.7: Diagramas que contribuyen a las correcciones de autoenergía gluónica $\Pi^{\mu\nu}$ a NLO. Se indica de forma explícita la convención de momentos y de etiquetado de índices de Lorentz y de color.

Tras reemplazar las integrales de loop e introducir $np = n \cdot p$, se llega a

$$\Pi_{A}^{\mu\nu}(p) = \frac{2f_2 g_{\rm S}^2(\epsilon - 1)\epsilon N_f(1 - \beta_R \epsilon) \delta_{ab} \left(s\eta^{\mu\nu} - p^{\mu}p^{\nu}\right)}{4(\epsilon - 2)\epsilon + 3} \left(\frac{-s - i0}{\mu^2}\right)^{-\epsilon}, \qquad (6.3.14)$$

$$\Pi_{B}^{\mu\nu}(p) = \frac{f_{2}g_{S}^{2}C_{A}\delta_{ab}}{2np^{2}(4(\epsilon-2)\epsilon+3)} \left(\frac{-s-\imath 0}{\mu^{2}}\right)^{-\epsilon} \left[np^{2}s\left(-(D+38)\epsilon+16\epsilon^{2}+24\right)\eta^{\mu\nu} + np\,p^{\mu} - ((D-2)np\,\epsilon\,p^{\nu} - 8s(\epsilon-1)(2\epsilon-3)n^{\nu}) + 8s(\epsilon-1)(2\epsilon-3)n^{\mu}\left(sn^{\nu} - np\,p^{\nu}\right)\right],$$
(6.3.15)

en donde estamos usando $f_2 = -c_{\Gamma}/\epsilon^2$ y dejamos sin especificar la dimensión del álgebra de Dirac *D*. Más aún, el cálculo es efectuado contemplando la posibilidad de usar esquemas en los cuales $\text{Tr}(\mathbb{I}) = 4 - 4\epsilon$. A modo de introducción a lo que discutirá en el siguiente capítulo, analicemos el origen de los términos proporcionales a *D*. Para ello, se coloca un parámetro arbitrario (*flag*) multiplicando al tensor métrico en el interior de $d_{\mu\nu}$. Realizando el cálculo explícito se puede corroborar que *D* proviene de términos que involucran la contracción $d_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}$ y con ello siempre se relaciona con el número de polarizaciones de los gluones internos. Así, escribimos $D \to 4-2\delta\epsilon$, con $\delta = 0$ en FDH y $\delta = 1$ en HV/CDR (ver Capítulo 4). De este modo se obtiene

$$\Pi^{\mu\nu}(p) = f_2 g_S^2 \left(\frac{-s-i0}{\mu^2}\right)^{-\epsilon} \delta_{ab} \left[\frac{C_A(\epsilon((\delta+8)\epsilon-21)+12)+2(\epsilon-1)\epsilon N_f(1-\beta_R\epsilon)}{4(\epsilon-2)\epsilon+3} \times (s\eta^{\mu\nu}-p^{\mu}p^{\nu}) + \frac{4s(\epsilon-1)C_A}{2\epsilon-1} \left(\frac{p^{\mu}p^{\nu}}{s} - \frac{n^{\mu}p^{\nu}+n^{\nu}p^{\mu}}{np} + \frac{s}{np^2}n^{\mu}n^{\nu}\right)\right]. \quad (6.3.16)$$

Notemos que $\Pi^{\mu\nu}$ verifica ciertas propiedades relevantes. En primer lugar, satisface la conservación de la corriente (identidad de Ward), esto es

$$p_{\mu}\Pi^{\mu\nu}(p) = 0 = p_{\nu}\Pi^{\mu\nu}(p). \qquad (6.3.17)$$

Por otra parte, si definimos la función

$$\Pi(p^{2}) = -f_{2}g_{S}^{2} \left(\frac{-s-\iota_{0}}{\mu^{2}}\right)^{-\epsilon} \times \frac{C_{A}(\epsilon((\delta+8)\epsilon-21)+12)+2(\epsilon-1)\epsilon N_{f}(1-\beta_{R}\epsilon)}{4(\epsilon-2)\epsilon+3}, \quad (6.3.18)$$

y contraemos $\Pi^{\mu\nu}(p)$ con dos propagadores gluónicos, se obtiene

$$\frac{\imath d_{\mu'\mu}(p)}{s} \left(-\imath \Pi^{\mu\nu}(p)\right) \frac{\imath d_{\nu\nu'}(p)}{s} = \imath \delta_{ab} \left[\Pi(p^2) \left(-\eta_{\nu'\mu'} + \frac{p_{\nu'}n_{\mu'} + n_{\nu'}p_{\mu'}}{np}\right) + g_s^2 f_2 \left(\frac{-s - \imath 0}{\mu^2}\right)^{-\epsilon} \frac{4(\epsilon - 1)C_A n_{\nu'}n_{\mu'}}{np^2(2\epsilon - 1)} \right], \quad (6.3.19)$$

que en el límite $s \to 0$ se reduce a

$$\frac{\imath d_{\mu'\mu}(p)}{s} \left(-\imath \Pi^{\mu\nu}(p)\right) \frac{\imath d_{\nu\nu'}(p)}{s} \approx \Pi(p^2) \delta_{ab} \frac{\imath d_{\mu'\nu'}(p)}{s}, \qquad (6.3.20)$$

y es proporcional a $d_{\mu'\nu'}(p)$. Esta situación corresponde a colocar una corrección de autoenergía en un gluón virtual y luego tomar el límite colineal. En tal caso, se recupera la proporcionalidad al propagador, o equivalentemente, la corrección factoriza como el coeficiente global $\Pi(p^2)$ por el diagrama analizado. Una situación más interesante tiene lugar cuando se contrae $\Pi^{\mu\nu}(p)$ con un propagador y un vector de polarización asociado a

$$\tilde{P}^{\mu} = p^{\mu} - \frac{s}{2np} n^{\mu}.$$
(6.3.21)

En concreto, se obtiene

$$\frac{\imath d_{\mu'\mu}(p)}{s} \left(-\imath \Pi^{\mu\nu}(p)\right) \epsilon_{\nu}(\tilde{P}) = \Pi(p^2) \epsilon_{\mu'}(\tilde{P}), \qquad (6.3.22)$$

en donde se uso que $p \cdot \epsilon(\tilde{P}) = 0 = n \cdot \epsilon_{\nu}$. En este caso se encuentra que la corrección es exactamente proporcional al vector de polarización y el factor multiplicativo es nuevamente $\Pi(p^2)$.

Pasemos a considerar las corrección a la autoenergía de un quark, a 1-loop. De acuerdo a lo exhibido en la figura 3.1 solo hay un diagrama de Feynman relevante y se puede escribir

$$\Sigma_{ij}(p) = g_s^2 \mu^{2\epsilon} (\mathbf{T}^a \mathbf{T}^a)_{ij} \int_q \frac{\gamma^{\nu} (\not p - \not q) \gamma^{\mu}}{q^2 (q - p)^2} d_{\mu\nu}(q), \qquad (6.3.23)$$

en donde i, j son índices asociados a la representación fundamental de SU(3).

Tras efectuar la integral sobre el momento de loop, se obtiene

$$\Sigma(p) = -\frac{f_2 g_S^2 \mu^{2\epsilon} C_F((D-2)np\epsilon \not p + 4s(\epsilon-1)\not h)}{2np(2\epsilon-1)} \left(\frac{-s-\imath 0}{\mu^2}\right)^{-\epsilon}, \qquad (6.3.24)$$

en donde también aparecen contribuciones que dependen de D. Al igual que en el caso gluónico, D proviene de la contracción de $d_{\mu\nu}$ con un tensor métrico. La diferencia radica en que, en este caso, $\eta^{\mu\nu}$ es originado en la conmutación de matrices de Dirac, con lo que se vincula de forma directa con la cantidad D_{Dirac} definida en el Capítulo 4. Para ser más específicos, reescribiendo la cadena espinorial presente en (6.3.24) se tiene

$$\gamma^{\nu}(\not\!\!p - \not\!\!q)\gamma^{\mu} = -\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}(\not\!\!p - \not\!\!q) + 2(p-q)^{\mu}\gamma^{\nu}, \qquad (6.3.25)$$

que junto con la simetría de $d_{\mu\nu} = d_{\nu\mu}$ permite escribir

$$\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}(\not p - \not q) d_{\mu\nu}(q) = \gamma^{\mu}\gamma^{\nu}(\not p - \not q) d_{\mu\nu}(q)$$

$$= \frac{1}{2} \{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} (\not p - \not q) d_{\mu\nu}(q)$$

$$= -(\not p - \not q) (2 - 2\epsilon\delta),$$
(6.3.26)

en donde se uso $\eta^{\mu\nu}d_{\mu\nu}(q) = -(2-2\epsilon\delta)$. De esta manera, se llega al resultado

$$\Sigma_{ij}(p) = -f_2 g_{\rm S}^2 \left(\frac{-s-\imath 0}{\mu^2}\right)^{-\epsilon} C_F \left(\frac{\epsilon(\delta\epsilon-1)}{1-2\epsilon} \not p - \frac{2s(\epsilon-1)}{np(1-2\epsilon)} \not n\right).$$
(6.3.27)

Notemos que al contraer $\Sigma(p)$ con dos propagadores de quarks se obtiene

$$\frac{i\not\!p}{s}\left(-i\Sigma(p)\right)\frac{i\not\!p}{s} = ig_{\rm S}^2 C_F f_2\left(\frac{-s-i0}{\mu^2}\right)^{-\epsilon} \left(\frac{(\epsilon(\delta\epsilon-5)+4)}{s(2\epsilon-1)}\not\!p + \frac{2(\epsilon-1)}{np(2\epsilon-1)}\not\!p\right), (6.3.28)$$

cuya contribución dominante en el límite $s \to 0$ es

$$\frac{\imath p}{s} \left(-\imath \Sigma(p)\right) \frac{\imath p}{s} \approx \left(g_{\rm S}^2 f_2 C_F \left(\frac{-s-\imath 0}{\mu^2}\right)^{-\epsilon} \frac{\epsilon(5-\delta\epsilon)-4}{1-2\epsilon}\right) \frac{\imath p}{s}, \qquad (6.3.29)$$

y que resulta proporcional al propagador de un quark. Esto motiva la siguiente definición

$$\Sigma(p^2) = g_{\rm S}^2 f_2 C_F \left(\frac{-s-\imath 0}{\mu^2}\right)^{-\epsilon} \frac{\epsilon(5-\delta\epsilon)-4}{1-2\epsilon}, \qquad (6.3.30)$$

que es el factor numérico involucrado en (6.3.29). Por otra parte, se puede contraer $\Sigma(p)$ con un propagador de quark y un espinor no masivo $u(\tilde{P})$, lo que da lugar a

$$\frac{ip}{s}\left(-i\Sigma(p)\right)u(\tilde{P}) = \Sigma(p^2)u(\tilde{P}), \qquad (6.3.31)$$

que resulta ser el factor numérico $\Sigma(p^2)$ por $u(\tilde{P})$.

Tras haber analizado las propiedades de los propagadores a 1-loop de todos los posibles partones de QCD, estamos en condiciones de aplicar estos resultados al cálculo de funciones de

splitting. En particular, notemos que para obtener los splittings es necesario calcular la amplitud amputada para el proceso $P \rightarrow a_1 \dots a_m$ en donde la virtualidad del partón padre es $s_{1,m} \neq 0$. Por ende, deben tenerse en cuenta las correcciones de autoenergía al partón entrante P al momento de utilizar las ecuaciones (6.2.21) y (6.2.22). Sin embargo, a partir de (6.3.22) y (6.3.31) se concluye que dichas correcciones deben ser proporcionales al splitting a LO. Concretamente, si P = g vale

$$\boldsymbol{Sp}_{g \to p_1 \dots p_m}^{(1)} \mid_{\text{autoenergia}} = \Pi(s_{1,m}) \boldsymbol{Sp}_{g \to p_1 \dots p_m}^{(0)}, \qquad (6.3.32)$$

mientras que si P = q se tiene

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{q\to p_1\dots p_m}^{(1)} \mid_{\text{autoenergia}} = \Sigma(s_{1,m})\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{q\to p_1\dots p_m}^{(0)}, \qquad (6.3.33)$$

lo que permite evitar el cómputo de estas contribuciones. Además, los diagramas restantes se encuentran en correspondencia biyectiva con los necesarios para calcular el proceso $P \rightarrow a_1 \dots a_m$ con todas las partículas on-shell.

4. Validez de la factorización colineal

Como se discutió extensivamente en este capítulo, las propiedades de factorización son muy relevantes en el estudio de QCD, resultando de vital importancia para computar observables a órdenes superiores. En forma estricta, la noción de factorización colineal implica que, en tal límite cinemático, es posible separar las interacciones de las partículas colineales de aquellas que no las involucran. Dicho en otros términos, ocurre un desacople en la amplitud de scattering y toda la información del proceso colineal queda aislada en un factor universal, que no depende de las partículas no colineales. Ese factor es el que definimos como función de splitting (en todas sus posibles versiones). A nivel árbol esta situación es válida, independientemente de la configuración cinemática estudiada.

Al considerar la factorización a órdenes superiores, motivamos la demostración indicando la necesidad de trabajar en un gauge específico (LCG) y exigimos que $s_{ij} > 0$ para todas $i, j \in C$. En tales condiciones, se puede asegurar que aquellos diagramas en los cuales las partículas colineales forman parte de un loop con elementos de NC están suprimidos. Sin embargo, un análisis riguroso muestra que en configuraciones tipo SL tal factorización estricta puede no cumplirse. El potencial problema se relaciona con la presencia de funciones transcendentales en las integrales de Feynman, que introducen branch-cuts sensibles a la forma en que se efectúan los límites. Por ejemplo, si tomamos $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como $f(z) = \log(z)$ se aprecia fácilmente que $f(z + i\delta) - f(z - i\delta) \to 2\pi i$ en el límite $\delta \approx 0$ para cualquier $z \in \mathbb{R}_{\leq 0}$.

La extensión de las propiedades de factorización colineal a la región SL es abordada minuciosamente en Ref. (71). En dicho trabajo los autores muestran que, en su forma más general a 1-loop, vale

$$|\mathcal{A}^{(1)}(p_1,\ldots,p_n)\rangle \simeq \mathbf{Sp}^{(1)}(p_1\ldots p_m;\widetilde{P};p_{m+1}\ldots p_n) |\mathcal{A}^{(0)}(\widetilde{P},p_{m+1},\ldots,p_n)\rangle + \mathbf{Sp}^{(0)}(p_1\ldots p_m;\widetilde{P}) |\mathcal{A}^{(1)}(\widetilde{P},p_{m+1},\ldots,p_n)\rangle , \qquad (6.4.1)$$

en donde $C = \{1, ..., m\}$ es el conjunto de partones colineales y $NC = \{m + 1, ..., n\}$ aquellos que no lo son. Más aún, los splittings a 1-loop se escriben como

$$\boldsymbol{Sp}^{(1)}(p_1 \dots p_m; \widetilde{P}; p_{m+1} \dots p_n) = \boldsymbol{Sp}_H^{(1)} \left(p_1 \dots p_m; \widetilde{P} \right) \\ + \boldsymbol{I}^{(1)} \left(p_1 \dots p_m; \widetilde{P}; p_{m+1} \dots p_n \right) \boldsymbol{Sp}^{(0)} \left(p_1, p_2; \widetilde{P} \right) , (6.4.2)$$

en donde se indica que la dependencia en las patas no colineales proviene únicamente de I. Nótese que la parte racional de las funciones de splitting sigue siendo estrictamente universal pues solo depende de $i \in C$. Sin embargo, a través de la función $f(\epsilon, z)$ dada en (6.3.3), se introducen modificaciones en el operador I. Explícitamente, en el caso doble colineal, se tiene

$$I^{(1)}\left(p_{1}, p_{2}; \tilde{P}\right) = c_{\Gamma}g_{S}^{2}\left(\frac{-s_{12}-i0}{\mu^{2}}\right)^{-\epsilon} \\ \times \left\{\frac{1}{\epsilon^{2}}\left(C_{P}-C_{1}-C_{2}\right)+\frac{1}{\epsilon}\left(\gamma_{P}-\gamma_{1}-\gamma_{2}+\frac{m-1}{2}\beta_{0}\right)\right. \\ \left.-\frac{1}{\epsilon}\left(C_{P}+C_{1}-C_{2}\right)f(\epsilon, z_{1})+\boldsymbol{\delta}(p_{1}, p_{2}; p_{3}, \dots, p_{n})\right\}, \qquad (6.4.3)$$

 con

$$\boldsymbol{\delta}(p_1, p_2; p_3, \dots, p_n) = \frac{2}{\epsilon} \sum_{j \in NC} \boldsymbol{T}_2 \cdot \boldsymbol{T}_j f(\epsilon, z_2 - \imath 0 s_{2j}).$$
(6.4.4)

Para escribir estas expresiones se usa que $z_1 + z_2 = 1$ y que siempre puede elegirse $z_1 > 0$, eliminando la necesidad de usar una prescripción en $f(\epsilon, z_1)$. Nótese que en el caso m = 1podemos asumir que 2 no es un partón de QCD y, en consecuencia $T_2 = 0$, lo que impide la violación de factorización en ese tipo de procesos. Además, si nos encontramos en la región TL, $s_{2j} > 0 \ \forall j \in NC$ y

$$\sum_{j \in NC} \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_j f(\epsilon, z_2 - i 0 s_{2j}) = \mathbf{T}_2 \cdot \left(\sum_{j \in NC} \mathbf{T}_j\right) f(\epsilon, z_2 - i 0)$$

= $-(C_P + C_2 - C_1) f(\epsilon, z_2 - i 0),$ (6.4.5)

usando conservación de color en el proceso de n partículas y $T_P = -T_1 - T_2$, pues los splittings a nivel árbol son singletes. Sin embargo, en el caso genérico con cinemática SL, no se puede
efectuar la suma como en (6.4.5) pues existen $j, j' \in NC$ tales que $s_{2j} < 0$ y $s_{2j'} > 0$. Más aún, en tal configuración vale $z_2 < 0$. Entonces, debe mantenerse la prescripción $\pm i0$ de f pues esta función posee un branch-cut en z < 0.

En otras palabras, la combinación de las correlaciones de color y la presencia de branch-cuts es la responsable de la dependencia en la cinemática de los partones no colineales, y la consecuente violación de la factorización estricta.

7. LÍMITE DOBLE COLINEAL: DEPENDENCIA EN ESQUEMA

En este capítulo discutimos la dependencia en esquema de las funciones de splitting en el límite doble colineal, tanto a nivel amplitud como para los núcleos de Altarelli-Parisi. Tras comentar los resultados disponibles en la literatura, procedemos a analizar el comportamiento de $q \rightarrow gq$ a NLO en diversos esquemas. Apelando a la introducción de gluones escalares, mostramos como interpretar las diferencias y conectar los resultados. Por último, se describen reglas de transición efectivas válidas a $\mathcal{O}(\epsilon^0)$.

1. Motivación

En el Capítulo 4 se introdujeron parámetros que permiten definir diversos esquemas de regularización. La imposición de ciertas restricciones físicas sobre los tensores de polarización gluónicos mostraba la posibilidad de que algunas combinaciones de parámetros condujeran a inconsistencias teóricas. Por ende, es útil estudiar como dependen los resultados del esquema utilizado.

Los observables físicos bien definidos deben ser independientes de la elección del esquema de regularización. Sin embargo, las funciones de splitting son objetos involucrados en pasos intermedios de los cálculos, razón por la cual no está vedada su dependencia respecto del esquema. Este tema fue analizado con anterioridad en Ref. (33), en donde se plantea un estudio de los núcleos de Altarelli-Parisi al orden más bajo en teoría de perturbaciones. Además de analizar las diferencias entre las elecciones tradicionales (CDR, HV y variaciones de DRED), en el mencionado trabajo se estudian las consecuencias de establecer $\beta = \beta_R = 1$, permitiendo que existan $2 - 2\epsilon$ grados de libertad fermiónicos. Dicho análisis es efectuado en el contexto del cálculo de correcciones NLO a colisiones hadrónicas, con lo cual se establecen criterios de consistencia exigiendo que cualquier dependencia en el esquema se cancele entre las contribuciones virtuales, reales y los términos de sustracción. Las contribuciones virtuales incluyen polos IR provenientes del loop, mientras que las correcciones reales aportan polos dobles de naturaleza soft (asociados a los factores eikonales) y simples de origen colineal (relacionados con los núcleos de Altarelli-Parisi). Los términos de sustracción solo aportan polos simples colineales (proporcionales a funciones de splitting) que provienen de reabsorber divergencias IR en la definición de las PDFs. En el caso de las divergencias colineales, la dependencia en esquema no solo se introduce a través de la forma de regularizar las integrales de espacio de fases, sino también por los cambios en las funciones de splitting. De esta manera, la exigencia de que las correcciones a la sección eficaz hadrónica sean independientes de la regularización permite inferir cómo cambian los núcleos de Altarelli-Parisi con el esquema empleado. Más aún, esto posibilita la deducción de reglas de transición efectivas, válidas a $\mathcal{O}(\epsilon^0)$, para conectar funciones de splitting en diversos esquemas.

El trabajo descripto en este capítulo se basa principalmente en los resultados publicados en Ref. (39) y puede considerarse como una extensión de Ref. (33) al orden siguiente en teoría de perturbaciones, contemplando más libertades en la definición de esquemas. Específicamente, nos interesa explorar la consistencia teórica de los esquemas a nivel amplitud. Para ello, se estudia la estructura de los splittings y se comparan los términos divergentes con la forma prevista por las fórmulas de Catani (ver Capítulo 6). Por otro lado, en vez de buscar reglas efectivas para conectar resultados en diversos esquemas, aquí nos centramos en el rol de los gluones escalares (ver Capítulo 4) y su importancia para interpretar las diferencias en términos físicos.

1.1. Implementación de los cálculos

Antes me mostrar resultados físicos es importante mencionar algunos detalles técnicos de la implementación. Para manejar el álgebra de Dirac se utilizó el paquete FEYNCALC (73), en su versión 8.2. El mismo nos permite trabajar de forma independiente con las contribuciones 4 y *D*-dimensionales, lo cual resultó crucial para poder analizar la dependencia en esquema. En particular, *D* es un parámetro libre en FEYNCALC que puede ser modificado por el usuario. En nuestros cálculos realizamos la identificación $D \rightarrow D_{\text{Dirac}}$. Esto justifica la expansión del propagador gluónico en (4.1.17) en términos de $\eta^{D_{\text{Dirac}}}$, pues las amplitudes de splitting fueron tratadas con este paquete.

Por otra parte, las integrales de Feynman fueron reducidas empleando el paquete FIRE (47; 48), versión 4.0. El mismo implementa el algoritmo de Laporta, junto con otras técnicas de tratamiento de integrales tensoriales, para efectuar la reducción a un conjunto de integrales maestras. Estas últimas fueron extraídas de la bibliografía disponible o, en algunos casos particulares, calculadas con los métodos explicados en el Capítulo 5. Cabe destacar que FIRE permite controlar la dimensión del espacio-tiempo mediante un parámetro interno, que pudimos modificar independientemente del valor de D usado por FEYNCALC.

2. Caso de estudio: $q \rightarrow gq$ a NLO

Cuando se utiliza LCG, la presencia de líneas internas gluónicas introduce dificultades adicionales al momento de efectuar cálculos explícitos. Por lo tanto, para estudiar la dependencia en esquema de las funciones de splitting dobles, vamos a centrarnos en el proceso $q \rightarrow gq$ explicando los cambios introducidos al modificar los parámetros definidos en el Capítulo 4.

Comencemos expandiendo la matriz de splitting a NLO como

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{q\to gq} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{q\to gq}^{(0)} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{q\to gq}^{(1)} , \qquad (7.2.1)$$

en donde la contribución de nivel árbol (correspondiente al LO en este caso) es

$$Sp_{q \to gq}^{(0)} = \frac{g_{\rm S}\mu^{\epsilon}}{s_{12}} T^a \bar{u}(p_2) \not\in (p_1) u(\tilde{P}) . \qquad (7.2.2)$$

Siguiendo los lineamientos expuestos en el Capítulo 4, incluso a LO, es posible efectuar la descomposición $\gamma^{\mu} = \tilde{\gamma}^{\mu} + \hat{\gamma}^{\mu}$ al considerar $D_{\text{Dirac}} = 4 - 2\epsilon$. Esto conduce a la expresión

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{q\to gq}^{(0)} = \frac{g_{\mathrm{S}}\mu^{\epsilon}}{s_{12}}\boldsymbol{T}^{a} \left[\bar{u}(p_{2})\tilde{\gamma}^{\mu}u(\tilde{P}) + \bar{u}(p_{2})\hat{\gamma}^{\mu}u(\tilde{P}) \right] \epsilon_{\mu}(p_{1}), \qquad (7.2.3)$$

que incluye una contribución que viola la conservación de helicidad, solo presente al usar los esquemas CDR y HSA. Sin embargo, debido a que los gluones son tratados como objetos D-dimensionales en CDR, no es necesario efectuar la separación explícita de la contribución escalar. La situación es diferente en HSA, puesto que la presencia de tensores métricos 4 y $D_{\rm ST}$ -dimensionales conduce a un comportamiento distinto de los términos proporcionales a $\bar{u}(p_2)\hat{\gamma}^{\mu}u(\tilde{P})$ de aquellos que multiplican a $\bar{u}(p_2)\tilde{\gamma}^{\mu}u(\tilde{P})$.

Para comenzar con el cálculo de las correcciones NLO, debemos obtener la amplitud amputada asociada al proceso $q(p_{12}) \rightarrow g(p_1)q(p_2)$. Apréciese que el partón padre tiene cinemática off-shell, lo cual justifica que las contribuciones a la autoenergía deban ser incluidas. En otras palabras, las contribuciones NLO a $Sp_{q\rightarrow gq}$ se obtienen a partir de todos los diagramas que se muestran en la figura 7.1. Sin embargo, también es necesario tener en cuenta otro tipo de contribuciones para explorar los diversos esquemas. Como discutimos en el Capítulo 4, cuando tratamos QCD en el contexto de DREG, los gluones $D_{\rm ST}$ -dimensionales pueden ser expresados en términos de vectores 4-dimensionales y un conjunto de $D_{\rm ST}-4$ partículas escalares. De este modo, usando las correspondientes reglas de Feynman para cada tipo de partícula, podemos diferenciar tres tipos de diagramas:

• contribuciones de QCD estándar (STD);



Fig. 7.1: Diagramas de Feynman asociados con $q(\tilde{P}) \to g(p_1)q(p_2)$ a NLO, incluyendo las correcciones de autoenergía al partón inicial. Solo se muestran las contribuciones de QCD estándar hasta $\mathcal{O}(g_S^3)$ inclusive.

- procesos que preservan la helicidad de las partículas salientes mediados por gluones escalares (SCA-nHV);
- e interacciones que violan helicidad (SCA-HV).

Para calcular las contribuciones STD, comenzamos desde el lagrangiano 4-dimensional de QCD y dibujamos los diagramas de Feynman correspondientes, usando solo gluones vectoriales y quarks. Por otra parte, las correcciones tipo SCA incluyen gluones escalares como partículas externas o internas. En el caso de SCA-nHV, solo se permiten gluones escalares en líneas internas pues las configuraciones de helicidad externas admitidas son únicamente aquellas compatibles con QCD usual. Para ser más explícitos, consideremos el caso concreto del proceso $q \rightarrow gq$. Debido a que los vértices de QCD son vectoriales¹, tanto el quark entrante (partón padre) como el saliente deben tener la misma helicidad. En contraste, las configuraciones que aportan a los términos SCA-HV son aquellas que están prohibidas en QCD 4-dimensional estándar.

Tras haber aclarado cuales son los posibles aportes a $Sp_{q\to gq}^{(1,\text{STD})}$, se expresan tales contribuciones como

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{q\to gq}^{(1,\text{STD})} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{q\to gq}^{(1,A)} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{q\to gq}^{(1,B)} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{q\to gq}^{(1,C)}, \qquad (7.2.4)$$

¹ Una interacción vectorial es caracterizada a nivel lagrangiano por un término de la forma $\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi A_{\mu}$, mientras que los vértices axiales, o pseudovectoriales, se asocian a estructuras de la forma $\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\gamma^{5}\Psi A_{\mu}$. Para más detalles, consultar Ref. (1), Capítulo 3.

en donde $Sp_{q \to gq}^{(1,i)}$ se refiere al diagrama $i \in \{A, B, C\}$, como se muestra en la figura 7.1. Escribiendo cada término por separado se tiene que

$$Sp_{q \to gq}^{(1,A)} = -\frac{g_{\rm S}^{3} \mu^{3\epsilon} C_{F}}{s_{12}^{2}} T^{a} \bar{u}(p_{2}) \not \epsilon(p_{1}) \not p_{12} \gamma^{\nu} \gamma^{\alpha} \gamma^{\rho} u(\tilde{P}) \\ \times \int_{q} \frac{(p_{12} - q)_{\alpha} d_{\rho\nu}(q, n)}{q^{2} t_{12q}}, \qquad (7.2.5)$$

$$Sp_{q \to gq}^{(1,B)} = -\frac{g_{\rm S}^3 \mu^{3\epsilon} (2C_F - C_A)}{2s_{12}} T^a \bar{u}(p_2) \gamma^{\rho} \gamma^{\alpha} \not\in (p_1) \gamma^{\beta} \gamma^{\nu} u(\tilde{P}) \\ \times \int_a \frac{(p_{12} - q)_{\beta} (p_2 - q)_{\alpha} d_{\rho\nu}(q, n)}{q^2 t_{2a} t_{12a}}, \qquad (7.2.6)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S} \boldsymbol{p}_{q \to gq}^{(1,C)} &= -\frac{g_{\rm S}^3 \mu^{3\epsilon} C_A}{2s_{12}} \boldsymbol{T}^a \, \epsilon_\mu(p_1) \bar{u}(p_2) \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta u(\tilde{P}) \\ &\times \int_q \frac{(p_2 - q)_\alpha V_{3g} \left(p_1^\mu, q^{\nu_1}, -(p_1 + q)^{\mu_1}\right) d_{\beta\mu_1} \left(p_1 + q, n\right) d_{\nu\nu_1} \left(q, n\right)}{q^2 s_{1q} t_{2q}} \,, \end{aligned}$$
(7.2.7)

en donde no estamos efectuando ninguna distinción entre gluones 4 y $D_{\rm ST}$ -dimensionales. En particular, en el contexto del esquema HSA (con $\alpha = \alpha_R = 0$), puede utilizarse la expansión

$$\not(p_1) = \tilde{\gamma}^{\mu} \epsilon_{\mu}(p_1) + \hat{\gamma}^{\mu} \hat{\epsilon}_{\mu}(p_1) , \qquad (7.2.8)$$

puesto que hay $2 - 2\epsilon$ grados de libertad gluónicos pero los gluones vectoriales solo tienen 2 polarizaciones físicas, mientras las polarizaciones remanentes se asocian con los gluones escalares. También es útil apreciar que $\boldsymbol{Sp}_{q \to gq}^{(1,A)}$ viene dado por

$$Sp_{q \to gq}^{(1,A)} = \Sigma(p_{12}^2) Sp_{q \to gq}^{(0)},$$
 (7.2.9)

en donde $\Sigma(p_{12}^2)$ es la corrección a la autoenergía de los quarks a NLO, como se explicó en el Capítulo 6. Con la excepción del diagrama A, todos los restantes son exactamente iguales a los que deben considerarse cuando todas las partículas están on-shell.

Ahora pasemos a estudiar las distintas contribuciones que involucran gluones escalares. Comencemos estudiando aquellas en las cuales los diagramas considerados son compatibles con las configuraciones de helicidad permitidas por QCD en 4 dimensiones. Debido a que estos términos están asociados a interacciones con gluones escalares únicamente en las patas internas, los diagramas no nulos aparecen recién NLO. Como se puede apreciar en la figura 7.2, se tienen correcciones a los tres diagramas de QCD estándar. Explícitamente, las correcciones vienen dadas por

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{q \to gq}^{(1,\text{SCA-nHV})} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{q \to gq}^{(1,A')} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{q \to gq}^{(1,B')} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{q \to gq}^{(1,C')}, \qquad (7.2.10)$$



Fig. 7.2: Diagramas de Feynman asociados con la contribución de interacciones mediadas por gluones escalares al proceso $q(\tilde{P}) \rightarrow g(p_1)q(p_2)$ a NLO. Solo se muestran las configuraciones SCA-nHV (esto es, aquellas que conservan la helicidad de las partículas externas).

 con

$$Sp_{q \to gq}^{(1,A')} = -\frac{g_{\rm S}(g_{\rm S}^{\rm scalar})^{2}\mu^{3\epsilon}C_{F}}{s_{12}^{2}} T^{a} \bar{u}(p_{2}) \not\epsilon(p_{1}) \not p_{12} \hat{\gamma}^{\nu} \gamma^{\alpha} \hat{\gamma}^{\rho} u(\tilde{P}) \\ \times \int_{q} \frac{(p_{12} - q)_{\alpha} (-\eta_{\nu\rho}^{\epsilon})}{q^{2} t_{12q}}, \qquad (7.2.11)$$

$$Sp_{q \to gq}^{(1,B')} = -\frac{g_{\rm S}(g_{\rm S}^{\rm scalar})^{2}\mu^{3\epsilon}(2C_{F} - C_{A})}{2s_{12}} T^{a} \bar{u}(p_{2}) \hat{\gamma}^{\rho} \gamma^{\alpha} \not\epsilon(p_{1}) \gamma^{\beta} \hat{\gamma}^{\nu} u(\tilde{P}) \\ \times \int_{q} \frac{(p_{12} - q)_{\beta}(p_{2} - q)_{\alpha} (-\eta_{\nu\rho}^{\epsilon})}{q^{2} t_{2q} t_{12q}}, \qquad (7.2.12)$$

$$Sp_{q \to gq}^{(1,C')} = -\frac{(g_{\rm S}^{\rm scalar})^{3}\mu^{3\epsilon}C_{A}}{2s_{12}} T^{a} \epsilon_{\mu}(p_{1}) \bar{u}(p_{2}) \hat{\gamma}^{\nu} \gamma^{\alpha} \hat{\gamma}^{\beta} u(\tilde{P}) \\ \times \int_{q} \frac{(p_{2} - q)_{\alpha} V_{3g} (p_{1}^{\mu}, q^{\nu_{1}}, -(p_{1} + q)^{\mu_{1}}) \eta_{\nu\nu_{1}}^{\epsilon} \eta_{\beta\mu_{1}}^{\epsilon}}{q^{2} s_{1q} t_{2q}}, \qquad (7.2.13)$$

en donde usamos las reglas de Feynman obtenidas a nivel lagrangiano.

El próximo paso es mostrar que las contribuciones SCA-nHV pueden ser simplificadas utilizando propiedades de las matrices de Dirac en $D_{\rm ST}$ dimensiones. Concretamente, se quiere demostrar que es posible aplicar las reglas de Feynman efectivas para gluones escalares mencionadas en el Capítulo 4. Si nos centramos en $Sp_{q\to gq}^{(1,A')}$, notamos que dicha contribución depende de

Sin embargo, debido a que p_{12} es un momento físico, luego $p_{12} = (p_{12})_{\sigma} \tilde{\gamma}^{\sigma}$. Usando el hecho de que $\{\tilde{\gamma}^{\alpha}, \hat{\gamma}^{\sigma}\} = 0$ y $\hat{\gamma}^{\rho} \hat{\gamma}_{\rho} = -2\epsilon \mathbb{I}$, se llega a

$$\operatorname{Int}^{A'} = \int_{q} \frac{1}{q^{2} t_{12q}} \left(2\epsilon \not p_{12} \right) + \left(A(s_{12}) \left(p_{12} \right)_{\alpha} \right) \left(\hat{\gamma}^{\rho} \gamma^{\alpha} \hat{\gamma}^{\rho} \right) , \qquad (7.2.15)$$

en donde apelamos a una descomposición tipo Passarino-Veltman (PV) para escribir la integral tensorial del segundo término de forma general. Debido a que las integrales tensoriales solo dependen de momentos físicos, puede repetirse en procedimiento con el término restante y se obtiene

$$\operatorname{Int}^{A'} = \int_{q} \frac{1}{q^{2} t_{12q}} \left(2\epsilon \not p_{12} \right) + \int_{q} \frac{q_{\alpha}}{q^{2} t_{12q}} \left(2\epsilon \tilde{\gamma}^{\alpha} \right) \\
= 2\epsilon \int_{q} \frac{\left(\not p_{12} - \not q \right)}{q^{2} t_{12q}}.$$
(7.2.16)

Este resultado nos dice que podríamos haber llegado a las mismas expresiones para $Sp_{q\to gq}^{(1,A')}$ si hubiéramos empleado las reglas efectivas. Es importante señalar que tras contraer los índices asociados al espacio transverso se toma el límite $D_{\text{Dirac}} \to 4$, ya que los gluones escalares se originan formalmente en un proceso de reducción dimensional.

La situación es completamente análoga cuando consideramos $\boldsymbol{Sp}_{q \to gq}^{(1,C')}$, pero sutilezas adicionales surgen al tratar $\boldsymbol{Sp}_{q \to gq}^{(1,B')}$. Tal contribución involucra el término

en donde $\{\rho, \nu\}$ son índices asociados a las coordenadas transversas. Dependiendo del número de polarizaciones de los gluones externos, μ puede ser 4 o $D_{\rm ST}$ -dimensional cuando $n_g = 2$ o $n_g = 2 - 2\epsilon$, respectivamente. Aplicando nuevamente las descomposición PV, las integrales tensoriales pueden ser expandidas de acuerdo a

$$\int_{q} \frac{q_{\alpha}}{q^{2} t_{2q} t_{12q}} = \sum_{i} A_{i}(s_{12})(p_{i})_{\alpha}, \qquad (7.2.18)$$

$$\int_{q} \frac{q_{\alpha} q_{\beta}}{q^{2} t_{2q} t_{12q}} = \sum_{i,j} A_{ij}(s_{12})(p_{i})_{\alpha}(p_{j})_{\beta} + B(s_{12})\eta_{\alpha\beta}^{D_{\rm ST}}, \qquad (7.2.19)$$

con la inclusión de un término proporcional al tensor métrico D_{ST} -dimensional. Reemplazando estas expansiones en la ecuación (7.2.17) y usando que p_{12} y p_2 son 4-vectores, se obtiene

puesto que $\hat{\gamma}^{\rho} p_i = -p_i \hat{\gamma}^{\rho}$ y vale que $A_{ij} = A_{ji}$ recurriendo a propiedades de simetría. Por otro lado,

$$\gamma^{\alpha}\gamma^{\mu}\gamma_{\alpha} = (2 - D_{\text{Dirac}})\gamma^{\mu}, \qquad (7.2.21)$$

$$\hat{\gamma}^{\rho}\hat{\gamma}_{\rho} = (D_{\mathrm{ST}} - 4)\mathbb{I}, \qquad (7.2.22)$$

$$\hat{\gamma}^{\rho} \gamma^{\mu} \hat{\gamma}_{\rho} = (4 - D_{\rm ST}) \gamma^{\mu} + 2 \hat{\gamma}^{\mu},$$
(7.2.23)

en donde se está usando que la cantidad de matrices de gamma disponibles coincide con la dimensión del álgebra de Dirac. Así, luego de aplicar estas propiedades, junto al hecho de que

$$\hat{\gamma}^{\rho}\gamma^{\alpha}\gamma^{\mu}\gamma_{\alpha}\hat{\gamma}_{\rho} = \gamma^{\alpha}\hat{\gamma}^{\rho}\gamma^{\mu}\hat{\gamma}_{\rho}\gamma_{\alpha} + 2\left(\gamma^{\mu}\hat{\gamma}^{\rho}\hat{\gamma}_{\rho} - \hat{\gamma}^{\rho}\hat{\gamma}_{\rho}\gamma^{\mu}\right) = \gamma^{\alpha}\hat{\gamma}^{\rho}\gamma^{\mu}\hat{\gamma}_{\rho}\gamma_{\alpha}, \qquad (7.2.24)$$

es posible reescribir $\mathrm{Int}^{B'}$ como

en donde siempre se verifica que $4 - D_{\text{ST}} = \eta_{\rho\nu}^{\epsilon}(-(\eta^{\epsilon})^{\rho\nu})$. Nótese que el tensor métrico que se encuentra dentro del paréntesis proviene de conmutar y simetrizar el producto $\hat{\gamma}^{\rho}\hat{\gamma}^{\nu}$. Además, los términos que involucran una matriz $\hat{\gamma}^{\mu}$ en la cadena fermiónica violan la conservación de helicidad. De este modo, imponiendo la restricción de que las partículas externas se encuentran en configuraciones de helicidad permitidas en QCD estándar, es posible eliminar tales contribuciones.

Resumiendo todas estas observaciones, se puede concluir que el reemplazo

$$-\eta^{\epsilon}_{\rho\nu}\hat{\gamma}^{\rho}\gamma^{\alpha}\gamma^{\mu}\gamma^{\beta}\hat{\gamma}^{\nu} \to (-2\epsilon)\gamma^{\alpha}\gamma^{\mu}\gamma^{\beta}, \qquad (7.2.26)$$

es válido. De esta forma, se muestra que las reglas de Feynman efectivas para gluones escalares introducidas en el Capítulo 4 pueden ser aplicadas en el cálculo de funciones de splitting. Por otro lado, es útil recordar que en los esquemas usuales, al introducir gluones escalares debe establecerse $D_{\text{Dirac}} = 4$. Pero este límite debe ser tomado luego de haber reemplazado las integrales de Feynman, incluso aquellas tensoriales. En otras palabras, al aplicar directamente las reglas a nivel lagrangiano, es posible que haya términos que no pueden recuperarse utilizando las reglas efectivas. Sin embargo, los mismos siempre resultan proporcionales a integrales que desaparecen al considerar el límite $D_{\text{Dirac}} \to 4$. Esta situación ocurre, por ejemplo, en $Sp_{q\to gq}^{(1,B')}$ puesto que hay un término proporcional a $\gamma^{\alpha}\gamma^{\mu}\gamma_{\alpha} = -2(1-\epsilon)\gamma^{\mu}$ (ver la ecuación (7.2.25)).

Por lo tanto, tras haber discutido la validez de las reglas de Feynman efectivas, podemos reescribir las contribuciones SCA-nHV como

$$\boldsymbol{Sp}_{q \to gq}^{(1,A')} = \frac{2 g_{\rm S}^3 \mu^{3\epsilon} \epsilon C_F}{s_{12}^2} \boldsymbol{T}^a \, \bar{u}(p_2) \not \epsilon(p_1) \not p_{12} \gamma^\alpha u(\tilde{P}) \, \int_q \frac{(p_{12} - q)_\alpha}{q^2 t_{12q}} \,, \tag{7.2.27}$$

$$\boldsymbol{Sp}_{q \to gq}^{(1,B')} = \frac{g_{\rm S}^3 \mu^{3\epsilon} \epsilon (2C_F - C_A)}{s_{12}} \, \boldsymbol{T}^a \, \bar{u}(p_2) \gamma^{\alpha} \not\in (p_1) \gamma^{\beta} u(\tilde{P}) \, \int_q \frac{(p_{12} - q)_{\beta} (p_2 - q)_{\alpha}}{q^2 t_{2q} t_{12q}} \,, \, (7.2.28)$$

$$\boldsymbol{Sp}_{q \to gq}^{(1,C')} = \frac{g_{\rm S}^3 \mu^{3\epsilon} \epsilon C_A}{s_{12}} \, \boldsymbol{T}^a \, \epsilon_\mu(p_1) \bar{u}(p_2) \gamma^\alpha u(\tilde{P}) \, \int_q \frac{(p_2 - q)_\alpha (2q + p_1)^\mu}{q^2 s_{1q} t_{2q}} \,, \tag{7.2.29}$$

donde, además, se está utilizando que $g_{\rm S}^{\rm scalar}\approx g_{\rm S}$ a NLO.

Finalmente, es relevante hacer el siguiente comentario acerca de los diagramas SCA-HV. Cuando se trabaja en los esquemas HSA o HSB, es posible que las contribuciones STD mezclen estructuras que violan helicidad con otras que la conservan. El origen de tales términos proviene de la contracción de tensores métricos 4-dimensionales (incluidos en los propagadores gluónicos) con estructuras $D_{\rm ST}$ -dimensionales. Este punto será discutido en las secciones siguientes, usando siempre $Sp_{q \to gq}$ como caso de análisis.

2.1. Matriz de splitting genérica

Continuando con el estudio de la amplitud de splitting para $q \rightarrow gq$, procedemos a efectuar el cálculo sin especificar las helicidades de las partículas externas involucradas. Esto implica tener cadenas espinoriales e integrales tensoriales más complicadas. Sin embargo, contar con las matrices de splitting en el espacio de color+helicidad simplifica el cómputo de los núcleos de Altarelli-Parisi, especialmente si se desean mantener las correlaciones de espín.

Para empezar, consideremos las contribuciones NLO de tipo STD. Después de escribir explícitamente los diagramas de Feynman y reemplazar las integrales de loop involucradas², se

 $^{^{2}}$ La lista completa de integrales empleadas para el análisis del límite doble colineal puede encontrarse en el

obtiene

$$Sp_{q \to gq}^{(1,\text{STD})} = \frac{c_{\Gamma}g_{S}^{3}\mu^{\epsilon}}{2s_{12}\epsilon^{2}} \left(\frac{-s_{12}-\imath 0}{\mu^{2}}\right)^{-\epsilon} T^{a} \left[C_{q \to gq}^{(\text{STD},1)} \bar{u}(p_{2}) \not\epsilon(p_{1}) u(\tilde{P}) + C_{q \to gq}^{(\text{STD},2)} \frac{1}{nP} \bar{u}(p_{2}) \not\mu u(\tilde{P}) p_{2} \cdot \epsilon(p_{1}) + \delta_{\alpha,1} C_{q \to gq}^{(\text{STD},3)} \bar{u}(p_{2}) \hat{\gamma}^{\mu} u(\tilde{P}) \hat{\epsilon}_{\mu}(p_{1}) \right],$$
(7.2.30)

con los coeficientes $C_{q \rightarrow gq}^{(\mathrm{STD},i)}$ dados por

$$C_{q \to gq}^{(\text{STD},1)} = 2(C_A - 2C_F)_2 F_1 \left(1, -\epsilon, 1 - \epsilon, \frac{z_1}{z_1 - 1} \right) - 2C_{A2} F_1 \left(1, -\epsilon, 1 - \epsilon, \frac{z_1 - 1}{z_1} \right) - 2 \frac{C_A \left(\epsilon (\delta \epsilon^2 + \epsilon - 3) + 1 \right) - C_F \left(\delta \epsilon^3 + 3\epsilon^2 - 6\epsilon + 2 \right)}{(\epsilon - 1)(2\epsilon - 1)} + (1 - \alpha_R) \delta \epsilon^2 \frac{C_A \left(2\epsilon + 1 + \alpha_R \right) - 2C_F \epsilon}{(\epsilon - 1)(2\epsilon - 1)},$$
(7.2.31)

$$C_{q \to gq}^{(\text{STD},2)} = \frac{2\epsilon^2 (C_A - C_F)(\delta\epsilon - 1)}{(\epsilon - 1)(2\epsilon - 1)} + \frac{\delta(1 - \alpha_R)\epsilon}{2(1 - z_1)^2(\epsilon - 1)(2\epsilon - 1)} \left[C_A \left((z_1^2 - 4z_1 + 2)\epsilon + z_1 \right) + C_A (1 - z_1)^2 \epsilon_2 F_1 \left(1, 1 - \epsilon, 2 - 2\epsilon, \frac{1}{z_1} \right) + C_A z_1(\epsilon - 1)_2 F_1 \left(1, -\epsilon, 1 - \epsilon, \frac{z_1 - 1}{z_1} \right) + 2(1 - z_1)^2 \epsilon^2 \left(2C_F - C_A (\alpha_R + 2) \right) \right],$$

$$(7.2.32)$$

$$C_{q \to gq}^{(\text{STD},3)} = 2(1-\alpha_R)C_A \left[{}_2F_1 \left(1, -\epsilon, 1-\epsilon, \frac{z_1-1}{z_1} \right) + \frac{(1-z_1)\epsilon}{z_1(2\epsilon-1)^2} {}_2F_1 \left(1, 1-\epsilon, 2-2\epsilon, \frac{1}{z_1} \right) \right] + \frac{(1-\alpha_R) \left[2C_F(1-2\epsilon)\epsilon - C_A \left(\epsilon((1+\epsilon\delta)(1-\alpha_R) - 6\epsilon + 7) - 4 \right) \right]}{(\epsilon-1)(2\epsilon-1)}, \quad (7.2.33)$$

en donde δ controla la dimensión del álgebra de Dirac y dejamos α_R como parámetro libre. Nótese que hay un término que involucra una interacción escalar-fermión, lo cual viola la conservación de helicidad. Dicha contribución es proporcional a $1 - \alpha_R$ y solamente aporta al resultado cuando se trabaja en el esquema HSA (con $\alpha = 1$) ya que los gluones externos deben tener $2 - 2\epsilon$ grados de libertad. Además, vale la pena notar que modificar el valor de α_R solo introduce cambios de orden $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ en los coeficientes $C_{q \to gq}^{(\text{STD},1)}$ y $C_{q \to gq}^{(\text{STD},2)}$. Sin embargo, cuando se realiza una expansión en potencias de ϵ para $C_{q \to gq}^{(\text{STD},3)}$ se encuentra que

$$C_{q \to gq}^{(\text{STD},3)} = 6(1 - \alpha_R)C_A + \mathcal{O}(\epsilon), \qquad (7.2.34)$$

lo cual implica que $\boldsymbol{Sp}_{q \to gq}^{(1,\text{STD})}$ adquiere una contribución adicional al polo doble y que la misma es proporcional a $\delta_{\alpha 1}(1 - \alpha_R)$.

Apéndice A.

Si queremos efectuar un chequeo de nuestros cálculos, podemos fijar $\alpha_R = 1$ para recuperar los resultados en esquemas convencionales como FDH ($\delta = 0$) o bien en CDR/HV ($\delta = 1$). En dichas configuraciones, los splittings dobles fueron calculados a NLO por varios autores y los resultados son bien conocidos (68; 69). En particular, cuando se utiliza CDR es necesario asumir que $\epsilon_{\mu}(p_1)$ es un vector $D_{\rm ST}$ -dimensional, mientras que en los otros esquemas pertenece a un espacio 4-dimensional pues los gluones externos tienen 2 polarizaciones. También es importante apreciar que en todos los pasos intermedios se emplearon las propiedades $\epsilon(p_1) \cdot n = 0$ (condición de gauge) y $\epsilon(p_1) \cdot p_1 = 0$ (puesto que los gluones salientes son partículas físicas no masivas, on-shell, con polarización transversa) para simplificar los cálculos.

Continuando con el estudio de las diferentes contribuciones, computamos $Sp^{(1,\text{SCA}-n\text{HV})}$. Tras el reemplazo de las integrales correspondientes se llega a

$$\boldsymbol{Sp}_{q \to gq}^{(1,\text{SCA-nHV})} = c_{\Gamma} \left(\frac{-s_{12} - \imath 0}{\mu^2} \right)^{-\epsilon} \boldsymbol{T}^a \, \frac{g_{\text{S}}^3 \mu^{\epsilon}}{s_{12}} \, \frac{\epsilon \left(C_F - C_A \right)}{(\epsilon - 1)(2\epsilon - 1)} \left[\bar{u}(p_2) \not \in (p_1) u(\tilde{P}) \right. \\ \left. - \frac{1}{nP} \bar{u}(p_2) \not \approx u(\tilde{P}) \, p_2 \cdot \epsilon(p_1) \right] , \qquad (7.2.35)$$

en donde se está considerando que el álgebra de Dirac es 4-dimensional. Puede observarse que esta expresión es notablemente más compacta que la correspondiente a las contribuciones STD. Esto se debe, principalmente, a la ausencia de dos matrices de Dirac en las cadenas espinoriales. Las mismas fueron reemplazadas por el tensor métrico transverso, usando las propiedades de anticonmutación esbozadas en (7.2.21), (7.2.22) y (7.2.23). Además, los gluones escalares tienen propagadores proporcionales a η^{ϵ} , que no solo es una forma más sencilla que la del propagador gluónico en LCG sino que además actúa como un proyector sobre los índices del espacio transverso.

Por otro lado, apréciese que las contribuciones SCA-nHV son finitas en el límite $\epsilon \to 0$, con lo cual pueden ser sumadas a las anteriores sin alterar la estructura de polos infrarrojos. Esto posibilita usar $Sp^{(1,SCA-nHV)}$ para definir y conectar distintos esquemas de DREG. Más aún, observando las ecuaciones (7.2.30) y (7.2.35) se obtiene la relación

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{q \to gq}^{(1,\text{STD}),\text{HV}} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{q \to gq}^{(1,\text{STD}),\text{FDH}} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{q \to gq}^{(1,\text{SCA-nHV})}, \qquad (7.2.36)$$

la cual establece que los resultados en el esquema HV pueden recuperarse a partir de los calculados en FDH añadiendo las contribuciones SCA-nHV. Esta es una propiedad interesante debido a que hay veces en las que resulta más fácil efectuar los cómputos con $D_{\text{Dirac}} = 4$. Además (7.2.36) sigue siendo válida al restringir las polarizaciones externas a un espacio 4-dimensional. En dicha situación, es posible emplear el esquema FDH y aplicar un amplio rango de técnicas modernas, tales como el método de helicidad o unitariedad. Dependiendo del proceso estudiado, efectuar el cálculo en FDH podría resultar conveniente en términos computacionales. Por ende, establecer conexiones entre los esquemas FDH y HV/CDR mediante las contribuciones tipo SCA-nHV puede simplificar el tratamiento de algunos splittings.

2.2. Dependencia de esquema y estudio de divergencias

Tras haber obtenido resultados explícitos para $\boldsymbol{Sp}^{(1,\text{STD})}$ es posible estudiar la estructura de divergencias infrarrojas y analizar que ocurre al usar distintos esquemas. Para ello, usamos la descomposición sugerida en la ecuación (6.3.1). Como primer paso, asumimos que $\alpha = 0$ y solo usamos los diagramas STD; esto es equivalente a ignorar el esquema HSA. Si expandimos los resultados entorno a $\epsilon = 0$ y se ordenan las contribuciones que acompañan a los polos, se encuentra que

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{q\to gq}^{(1,\text{STD})} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{H,q\to gq}^{(1)} + \boldsymbol{I}_{q\to gq}^{(1)} \left(p_1, p_2; \tilde{P}\right) \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{q\to gq}^{(0)}, \qquad (7.2.37)$$

 con

$$\mathbf{I}_{q \to gq}^{(1)}\left(p_{1}, p_{2}; \tilde{P}\right) = \frac{c_{\Gamma}g_{S}^{2}}{\epsilon^{2}} \left(\frac{-s_{12} - \imath 0}{\mu^{2}}\right)^{-\epsilon} \left[\left(C_{A} - 2C_{F}\right) \left({}_{2}F_{1}\left(1, -\epsilon; 1 - \epsilon; \frac{z_{1}}{z_{1} - 1}\right) - 1 \right) - C_{A \ 2}F_{1}\left(1, -\epsilon; 1 - \epsilon; \frac{z_{1} - 1}{z_{1}}\right) \right],$$
(7.2.38)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{H,q\to gq}^{(1)} &= c_{\Gamma} \left(\frac{-s_{12} - \imath 0}{\mu^2} \right)^{-\epsilon} \boldsymbol{T}^a \, \frac{g_{\rm S}^3 \mu^{\epsilon}}{s_{12}} \left[\left(C_A \frac{2(1 - \delta\epsilon) + \delta(1 - \alpha_R)(1 + 2\epsilon + \alpha_R)}{2(\epsilon - 1)(2\epsilon - 1)} \right) \\ &- C_F \frac{1 - \alpha_R \delta\epsilon}{(2\epsilon - 1)(\epsilon - 1)} \right) \bar{u}(p_2) \not\in (p_1) u(\tilde{P}) \\ &+ \frac{C_{q\to gq}^{(\mathrm{STD}, 2)}}{2\epsilon^2} \frac{1}{nP} \bar{u}(p_2) \not= u(\tilde{P}) p_2 \cdot \epsilon(p_1) \right], \end{aligned}$$
(7.2.39)

en donde δ y α_R son tratados como parámetros libres. La estructura de $I_{q \to gq}^{(1)}$ coincide de forma exacta con el comportamiento singular previsto para las amplitudes de splitting no renormalizadas. Más aún, es sencillo notar en (7.2.38) la presencia de la función $f(\epsilon, z)$ introducida en el Capítulo 6 para definir el operador I. Además, los términos que acompañan a los polos son independientes de α_R y δ .

Sin embargo, el remanente finito exhibe una dependencia no trivial en el esquema empleado y conlleva a algunas discrepancias teóricas. De acuerdo a lo establecido en Ref. (71), $\boldsymbol{Sp}_{H}^{(1)}$ solo puede contener funciones racionales de la variable z y de ϵ . Esto se verifica cuando $\alpha_{R} = 1$, puesto que

$$C_{q \to gq}^{(\text{STD},2)}(\alpha_R = 1) = 2\epsilon^2 \frac{(C_A - C_F)(\delta \epsilon - 1)}{(\epsilon - 1)(2\epsilon - 1)}, \qquad (7.2.40)$$

con lo que el remanente finito se escribe

$$\boldsymbol{Sp}_{H,q \to gq}^{(1)}(\alpha_R = 1) = c_{\Gamma} \left(\frac{-s_{12} - \imath 0}{\mu^2}\right)^{-\epsilon} \boldsymbol{T}^a \frac{g_{\mathrm{S}}^3 \mu^{\epsilon}}{s_{12}} \frac{(C_F - C_A)(\delta \epsilon - 1)}{(\epsilon - 1)(2\epsilon - 1)} \left[\bar{u}(p_2) \not\in (p_1) u(\tilde{P}) - \frac{1}{nP} \bar{u}(p_2) \not\equiv u(\tilde{P}) p_2 \cdot \epsilon(p_1)\right].$$
(7.2.41)

Sin embargo, al establecer $\alpha_R = 0$ este término contiene una combinación de funciones hipergeométricas que no puede ser expresada en términos de funciones racionales. En consecuencia, cuando trabajamos en el esquema HSB ($\alpha = \alpha_R = 0$) $Sp_H^{(1)}$ no es una función racional, lo cual comienza a mostrar que los esquemas HS presentan problemas de consistencia. Una complicación adicional puede detectarse tras expandir en series una de las funciones que aparece en $C_{q \to gq}^{(\text{STD},2)}(\alpha_R = 0)$. Concretamente, se tiene que

$$\frac{1}{z_1} {}_2F_1\left(1, 1-\epsilon, 2-2\epsilon, \frac{1}{z_1}\right) = (2\epsilon - 1)\log\left(\frac{z_1 - 1}{z_1}\right) + \frac{\epsilon}{2}\left(4\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{z_1}\right) + \log^2\left(\frac{z_1 - 1}{z_1}\right)\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (7.2.42)$$

lo que introduce un logaritmo con un brach-cut *invertido*, que se encuentra en la región $\{z > 0\}$. Cuando en el Capítulo 9 discutamos los resultados de los splittings en el límite triple colineal, motivaremos criterios de consistencia que definen los posibles saltos de rama permitidos. Cabe señalar que esa función hipergeométrica puede ser introducida por alguna integral de la forma

$$\int_{q} \frac{q_{\epsilon}^{2}}{q^{2} s_{1q} t_{2q} n q}, \qquad (7.2.43)$$

que se origina al mezclar métricas 4 y $D_{\rm ST}$ -dimensionales, situación posible en el contexto de los esquemas HS.

La situación se torna peor si se trabaja en HSA, estableciendo $\alpha = 1$ pero $\alpha_R = 0$. En tal caso, la estructura divergente difiere de la predicha por la fórmula de Catani, resultando imposible reescribir $Sp^{(1,\text{STD})}$ como en (7.2.37). Los términos singulares están dados por

$$Sp_{q \to gq}^{(1,\text{STD}),\text{HSA}} = c_{\Gamma}g_{S}^{2} \left(\frac{-s_{12}-i0}{\mu^{2}}\right)^{-\epsilon} \\ \left[\left(-\frac{C_{A}}{\epsilon^{2}} + \frac{C_{A}\log\left(z_{1}\right) + (2C_{F} - C_{A})\log\left(1 - z_{1}\right)}{\epsilon} \right) Sp_{q \to gq}^{(0)} \right] \\ + \left(\frac{3C_{A}}{\epsilon^{2}} + \frac{2(2C_{A} + C_{F}) - C_{A}(1 - z_{1})\log\left(z_{1} - 1\right) - C_{A}(1 + z_{1})\log\left(z_{1}\right)}{2\epsilon} \right) \\ \times \frac{T^{a}g_{S}\mu^{\epsilon}}{s_{12}} \bar{u}(p_{2})\hat{\gamma}^{\mu}u(\tilde{P})\hat{\epsilon}_{\mu}(p_{1}) + \mathcal{O}(\epsilon^{0}) \right], \qquad (7.2.44)$$

que introduce polos adicionales, los cuales no pueden ser absorbidos en términos proporcionales al splitting a nivel árbol. Esto indica que debe agregarse alguna contribución adicional para poder cancelar los polos remanentes cuando se trabaja en el esquema HSA. Desde otro punto de vista, esto es equivalente a decir que es necesario modificar la definición de HSA y agregar contribuciones adicionales. En concreto, puede probarse que este problema de consistencia es originado por haber excluido las contribuciones que involucran gluones escalares, tanto aquellas asociadas a SCA-nHV como los diagramas tipo SCA-HV. Para entender mejor la situación, recordemos que los esquemas HS consideran $D_{\text{Dirac}} = 4 - 2\epsilon = D_{\text{ST}}$ (esto es $\delta = 1$). Debido a que los campos de gluones se obtienen tras resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange (EL) en un espacio D_{Dirac} -dimensional se tienen $D_{\text{Dirac}} - 2$ grados de libertad provenientes de estas partículas. Esto quiere decir que al usar $D_{\text{Dirac}} = D_{\text{ST}}$ hay $2 - 2\epsilon$ polarizaciones gluónicas. Pero en los esquemas HS, efectuamos una descomposición vector-escalar que conduce a tener 2 grados de libertad en gluones 4-vectoriales y las polarizaciones remanentes se transforman en -2ϵ sabores de gluones escalares. En consecuencia, si $D_{\text{Dirac}} = D_{\text{ST}}$ hay que incluir diagramas con ambos tipos de partículas, pues en caso contrario se estarían omitiendo soluciones de las ecuaciones EL. En el caso del esquema HSB ($\alpha = 0 = \alpha_R$), los gluones externos son siempre 4-dimensionales, pero deben incluirse diagramas con escalares virtuales. Debido a que los acoplamientos son los mismos cuando se trabaja a NLO, para tener en cuenta ambas contribuciones basta con sumar los propagadores, lo que conduce a

$$D_{G}^{(\alpha_{R}=0)}(k,\mu,\nu) + D_{S}(k,\mu,\nu) = \frac{i}{k^{2}+i0} \left(\left(-\eta_{\mu\nu}^{4} + \frac{n_{\mu}k_{\nu} + n_{\nu}k_{\mu}}{n \cdot k} \right) + \left(-\eta_{\mu\nu}^{\epsilon} \right) \right)$$
$$= i \frac{d_{\mu\nu}^{D_{ST}}(k,n)}{k^{2}+i0} = D_{G}^{(\alpha_{R}=1)}(k,\mu,\nu) .$$
(7.2.45)

Esta relación nos dice que la versión consistente de HSB es el esquema HV ($\delta = 1$ y $\alpha = 0$), pues se consideran los gluones virtuales como vectores de D_{ST} -dimensiones y 2 - 2 ϵ polarizaciones.

Por otro lado, en el esquema HSA debe permitirse la presencia de escalares como estados externos. Nuevamente, esto es equivalente a agregar diagramas idénticos a los de las contribuciones STD, pero escribiendo el vector de polarización externo como $\epsilon_{\mu} = \tilde{\epsilon}_{\mu} + \hat{\epsilon}_{\mu}$. En otras palabras, si se agregan todas las contribuciones necesarias para arreglar las inconsistencias de HSA se recupera la definición del esquema CDR ($\delta = 1$ y $\alpha = 1$). En la sección siguiente se discute más detalladamente este punto, en el contexto del cálculo de los núcleos de Altarelli-Parisi.

En resumen, luego de analizar la dependencia en esquema de los resultados para el splitting $q \rightarrow gq$ y efectuar la comparación con la fórmula de Catani, se concluye que los esquemas HSA y HSB no son consistentes. Por lo tanto, al momento de presentar resultados para los procesos restantes en el límite doble colineal, solo usaremos CDR, HV y FDH, con la libertad adicional de modificar el número de grados de libertad fermiónicos (cambiando los parámetros β y β_R).

2.3. Correcciones al núcleo de Altarelli-Parisi

Habiendo efectuado el cálculo explícito de la matriz de splitting, es posible obtener las correcciones a los núcleos de Altarelli-Parisi para $q \to gq$ a NLO. En particular, dado que se conoce $Sp_{q\to gq}$ para configuraciones de helicidad genéricas, es posible retener las correlaciones de espín completas mediante la matriz $P_{q\to gq}$ definida en el Capítulo 6. Para simplificar la nomenclatura, definimos los núcleos AP polarizados como los elementos de matriz de $P_{q\to gq}$, sumados sobre las polarizaciones de las partículas colineales,

$$\langle s | \boldsymbol{P}_{a \to a_1 \dots a_m} | s' \rangle = \left[\sum_{\text{color } s_i \in \text{phys.pol.}} \left(\boldsymbol{S} \boldsymbol{p}_{a \to a_1 \dots a_m} \right)^{\dagger} \boldsymbol{S} \boldsymbol{p}_{a \to a_1 \dots a_m} \right]_{s,s'}, \quad (7.2.46)$$

mientras que las funciones de Altarelli-Parisi no polarizadas se recuperan tras promediar sobre la polarización del partón padre. Explícitamente,

$$\langle \hat{P}_{a \to a_1 \dots a_m} \rangle = \frac{1}{\omega(a)} \sum_{s \in \text{phys.pol.}} \langle s | \boldsymbol{P}_{a \to a_1 \dots a_m} | s \rangle, \qquad (7.2.47)$$

con $\omega(a) = n_a$ número de polarizaciones del partón de tipo $a \in \{q, g\}$. Nótese que cada vez que se suma o promedia sobre polarizaciones, se pierde información relativa a las correlaciones de espín. Pero, por otro lado, las expresiones obtenidas son más compactas y fáciles de implementar.

Antes de mostrar los resultados explícitos, hagamos un breve comentario sobre la dependencia en esquema a nivel amplitud al cuadrado. Como sabemos, tanto la suma como el promedio sobre polarizaciones depende del esquema de regularización. Si se consideran configuraciones con $\alpha = 0$, como HV o FDH/DRED, los gluones externos tienen 2 polarizaciones físicas. Pero, cuando $\alpha = 1$ (en CDR, por ejemplo), los gluones se asocian a vectores $D_{\rm ST}$ -dimensionales. Entonces, en tal circunstancia, un gluón escalar puede ser considerado como un estado externo, lo que nos conduce a incluir contribuciones que violen conservación de helicidad a nivel amplitud. Computando los diagramas STD a $Sp_{q\to gq}$ se obtienen los núcleos AP en cualquier esquema tradicional. Es útil notar que cuando se usa CDR, las interacciones que violan helicidad están escondidas dentro de la definición de los vectores de polarización $D_{\rm ST}$ -dimensionales, como se ve en (7.2.3). Por lo tanto, en tal esquema no es necesario llevar a cabo la separación entre parte escalar y vectorial de forma explícita, sino que pueden tratarse de forma unificada. De todas formas, apelaremos a tal descomposición con el fin de interpretar físicamente cada contribución.

Volviendo a los cálculos, se tiene que a nivel árbol, los núcleos AP vienen dados por

$$\langle s \left| \mathbf{P}_{q \to gq}^{(0)} \right| s' \rangle = C_F \delta_{s,s'} \frac{g_{\rm S}^2}{z_1} \left(1 + (1 - z_1)^2 - \alpha \delta \epsilon z_1^2 \right) ,$$
 (7.2.48)

$$\langle \hat{P}_{q \to gq}^{(0)} \rangle = C_F \frac{g_{\rm S}^2}{z_1} \left(1 + (1 - z_1)^2 - \alpha \delta \epsilon z_1^2 \right) ,$$
 (7.2.49)

para el caso polarizado y no polarizado, respectivamente. Nótese que cuando se suma sobre las polarizaciones de los fermiones externos aparece un factor global $\text{Tr}(\mathbb{I}) = 4 - 4\epsilon\beta$ multiplicando los resultados. Pero dicho factor se cancela cuando se promedia sobre el espín del quark padre. De este modo el núcleo AP para $q \rightarrow gq$ es independiente del número de polarizaciones fermiónicas. También se puede probar que

$$\langle s | \boldsymbol{P}_{q \to gq} | s' \rangle = \delta_{s,s'} \langle \hat{P}_{q \to gq} \rangle, \qquad (7.2.50)$$

debido a que los procesos que involucran una línea fermiónica son diagonales en el espacio de helicidad, como consecuencia de la conservación de la misma. Por tal razón, solo presentamos las corrección NLO al núcleo no polarizado, la cual viene dada por

$$\langle \hat{P}_{q \to gq}^{(1)} \rangle = \frac{c_{\Gamma} g_{\rm S}^2}{\epsilon^2} \left(\frac{-s_{12} - i0}{\mu^2} \right)^{-\epsilon} \left[\langle \hat{P}_{q \to gq}^{(0)} \rangle \left(\frac{(C_F - C_A) \left(\epsilon(\delta\epsilon^2 + \epsilon - 3) + 1\right)}{(\epsilon - 1)(2\epsilon - 1)} \right) \right] + \left(C_A - 2C_F \right) {}_2F_1 \left(1, -\epsilon; 1 - \epsilon; \frac{z_1}{z_1 - 1} \right) - C_A {}_2F_1 \left(1, -\epsilon; 1 - \epsilon; \frac{z_1 - 1}{z_1} \right) + C_F \right) + \frac{g_{\rm S}^2 C_F}{z_1} \frac{(z_1 - 2)(z_1 - 1)\epsilon^2(\delta\epsilon - 1) (C_A - C_F)}{(\epsilon - 1)(2\epsilon - 1)} + {\rm c.c.},$$

$$(7.2.51)$$

en donde $\alpha = 1$ en CDR y $\alpha = 0$ en los esquemas HV y FDH/DRED. Como se esperaba, las correcciones NLO también son independientes de β_R y β .



Fig. 7.3: Diagramas de Feynman asociados a las contribuciones de gluones escalares externos, en el proceso $q(\tilde{P}) \rightarrow \phi(p_1)q(p_2)$ a NLO.

Como conclusión de esta sección, es interesante analizar el rol de los gluones escalares cuando se llevan a cabo cálculos en el esquema CDR. Para ello, podemos computar las contribuciones que incluyen escalares como estados externos. A nivel árbol, usando (7.2.3), se tiene que el núcleo AP no polarizado está dado por

en donde ϕ denota a los gluones escalares y se utilizó el reemplazo indicado en la ecuación (4.2.19). Para obtener las correcciones NLO a este proceso, es necesario tener en cuenta los diagramas SCA-HV y computar la matriz de splitting asociada. Debido a que estamos descomponiendo los gluones externos en una parte 4-dimensional más los escalares ϕ , los términos requeridos pueden recuperarse a partir de $Sp^{(1,STD)}$ simplemente mediante el reemplazo $\epsilon_{\mu}(p_1) \rightarrow \hat{\epsilon}_{\mu}(p_1)$. Por ende, podemos escribir

$$Sp_{q \to \phi q}^{(1,\text{SCA-HV})} = \left(Sp_{q \to gq}^{(1,A)} + Sp_{q \to gq}^{(1,B)} + Sp_{q \to gq}^{(1,C)}\right)_{\epsilon \to \hat{\epsilon}, \delta \to 1, \alpha_R \to 1}$$
$$= \frac{c_{\Gamma}g_s^3 \mu^{\epsilon}}{2s_{12}\epsilon^2} \left(\frac{-s_{12} - \imath 0}{\mu^2}\right)^{-\epsilon} T^a$$
$$\times C_{q \to gq}^{(\text{STD},1)}(\alpha_R = 1, \delta = 1) \bar{u}(p_2)\hat{\gamma}^{\mu} u(\tilde{P})\hat{\epsilon}_{\mu}(p_1), \qquad (7.2.53)$$

estando los correspondientes diagramas de Feynman expuestos en la figura 7.3. Luego de sumar sobre las polarizaciones de las partículas externas y promediar sobre las del partón entrante, se llega a

$$\langle \hat{P}_{q \to \phi q}^{(1)} \rangle = \frac{c_{\Gamma} g_{\rm S}^4 z_1 C_F}{\epsilon} \left(\frac{-s_{12} - i0}{\mu^2} \right)^{-\epsilon} \left[C_A \,_2 F_1 \left(1, -\epsilon; 1 - \epsilon; \frac{z_1 - 1}{z_1} \right) - C_F \right] - \left(C_A - 2C_F \right) \,_2 F_1 \left(1, -\epsilon; 1 - \epsilon; \frac{z_1}{z_1 - 1} \right) + \frac{(\epsilon(\epsilon + 2) - 1) \left(C_A - C_F \right)}{2\epsilon - 1} \right] + \text{ c.c.}$$

$$(7.2.54)$$

Así, se puede apreciar que vale la relación

$$\langle \hat{P}_{q \to gq}^{\text{CDR}} \rangle = \langle \hat{P}_{q \to gq}^{\text{HV}} \rangle + \langle \hat{P}_{q \to \phi q} \rangle, \qquad (7.2.55)$$

la cual refleja el hecho de que las polarizaciones gluónicas adicionales pueden ser interpretadas en términos de grados de libertad escalares. En consecuencia, es posible recuperar los resultados en el esquema CDR calculando las contribuciones con gluones 4-dimensionales externos y luego sumando los términos originados al producir partículas escalares. Cabe señalar que este tratamiento debe efectuarse con cada gluón externo presente en el proceso, lo cual puede hacer que el pasaje de un esquema a otro resulte complicado en procesos más generales.

3. Dependencia del esquema en splittings

El estudio aquí realizado mostró que es posible vincular las amplitudes de splitting en diversos esquemas a través de la introducción de gluones escalares. A pesar de que esto implica computar más diagramas, la presencia de interacciones escalares simplifica el álgebra requerida en los cálculos y permite establecer la conexión a todo orden en ϵ . Debido a que los núcleos de Altarelli-Parisi son objetos cruciales en el cálculo de observables a NLO o incluso órdenes superiores, retener información acerca de la dependencia en ϵ puede ser relevante para la obtención de contribuciones finitas en el límite $\epsilon \to 0$.

A pesar de tales motivaciones para usar expresiones válidas a todo orden en ϵ , existen circunstancias en las cuales solo interesa conocer como varían los resultados en distintos esquemas hasta $\mathcal{O}(\epsilon^0)$. Por ejemplo, en Ref. (33), los autores estudian la dependencia en esquema de los núcleos de Altarelli-Parisi (a nivel árbol), en el contexto de cálculos de secciones eficaces hadrónicas utilizando el método de sustracción dipolar. Tras realizar cálculos explícitos a LO, muestran que es posible escribir los núcleos no polarizados como

$$\langle \hat{P}_{a\to bc}^{(0),\text{RS}}(z,\epsilon) \rangle = \langle \hat{P}_{a\to bc}^{(0)}(z,\epsilon) \rangle + 2\epsilon \mathcal{P}_{a\to bc}^{\text{RS}}(z) + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) , \qquad (7.3.1)$$

tomando como esquema de partida a CDR (o sea, $\langle \hat{P}_{a\to bc}^{(0)}(z,\epsilon) \rangle = \langle \hat{P}_{a\to bc}^{(0),CDR}(z,\epsilon) \rangle$) e introduciendo las funciones de transición $\mathcal{P}_{a\to bc}^{\text{RS}}$ para conectar los diversos esquemas. Para los esquemas CDR y HV, $\mathcal{P}_{a\to bc}^{\text{CDR}} = 0$ y $\mathcal{P}_{a\to bc}^{\text{HV}} = 0$ para cualquier proceso. Para FDH/DRED, se tiene

$$\mathcal{P}_{g \to gg}^{\text{FDH}}(z) = C_A z(1-z),$$
 (7.3.2)

$$\mathcal{P}_{q \to qg}^{\text{FDH}}(z) = \mathcal{P}_{q \to gq}^{\text{FDH}}(1-z) = C_F \frac{1-z}{2},$$
(7.3.3)

mientras que en el esquema TSC (que us
a $\beta_R=\beta=1)$

$$\mathcal{P}_{g \to q\bar{q}}^{\text{TSC}}(z) = -T_R \frac{z^2 + (1-z)^2}{2}, \qquad (7.3.4)$$

son las únicas contribuciones no nulas.

Tras haber caracterizado la forma en que cambian las funciones de splitting con la elección de esquema, es posible imponer criterios de consistencia exigiendo una cancelación total de dicha dependencia en los observables físicos. Siguiendo los lineamientos de Ref. (33), la sección eficaz completa a NLO de un proceso con n partones se escribe como

$$\sigma^{NLO} = \int_{n} d\sigma^{V} + \int_{n+1} d\sigma^{R}, \qquad (7.3.5)$$

con $d\sigma^V$ y $d\sigma^R$ correcciones virtuales y reales³, respectivamente. Dado que existe una cancelación cruzada de divergencias infrarrojas, es posible definir un término de sustracción para quitar las

³ Es importante señalar que se están reabsorbiendo los contratérminos asociados a la redefinición de las PDFs en la parte asociada al proceso $2 \rightarrow n$.

singularidades de ambas contribuciones. Así, se define el términos dipolar como (7)

$$d\sigma^A = \sum_{\text{dipolos}} d\sigma_{\text{RS}}^{(0)} \otimes dV_{\text{dipolo}}^{\text{RS}}, \qquad (7.3.6)$$

con $d\sigma_{\text{RS}}^{(0)}$ sección eficaz LO y $dV_{\text{dipolo}}^{\text{RS}}$ denota las contribuciones dipolares. Nótese que la etiqueta Rs indica que estos objetos dependen del esquema empleado. Además, \otimes se utiliza para indicar la presencia de correlaciones de color y espín introducidas por los dipolos. La conexión con los núcleos de Altarelli-Parisi se obtiene introduciendo las constantes K_i usando

$$-\frac{1}{2}\sum_{b}\int_{0}^{1}dz\left(z(1-z)\right)^{-\epsilon}\left\langle\hat{P}_{a\to bc}^{(0)}\right\rangle = \frac{2C_{a}}{\epsilon} + \gamma_{a} + \left(K_{a} - \frac{\pi^{2}}{6}C_{a}\right)\epsilon + \mathcal{O}\left(\epsilon^{2}\right), \quad (7.3.7)$$

que se emplean en la definición del operador de inserción

$$\boldsymbol{I}^{\text{RS}}(\{p\},\epsilon) = -\frac{\alpha_{\text{S}}}{2\pi} \frac{1}{\Gamma(1-\epsilon)} \sum_{I} \frac{\mathcal{V}_{I}(\epsilon)}{\boldsymbol{T}_{I}^{2}} \sum_{J \neq I} \boldsymbol{T}_{I} \cdot \boldsymbol{T}_{J} \left(\frac{4\pi\mu^{2}}{2p_{I} \cdot p_{j}}\right)^{\epsilon}, \qquad (7.3.8)$$

 con

$$\mathcal{V}_{I}(\epsilon) = \mathbf{T}_{I}^{2}\left(\frac{1}{\epsilon^{2}} - \frac{\pi^{2}}{3}\right) + \frac{\gamma_{I}}{\epsilon} + \gamma_{I} + K_{I} + \mathcal{O}(\epsilon), \qquad (7.3.9)$$

función que incluye los polos simples y dobles. De esta forma, la dependencia en esquema de los núcleos de Altarelli-Parisi se traslada a la definición de los términos de sustracción dipolar. Específicamente, usando (7.3.1) es posible obtener constantes $\tilde{\gamma}_a^{\text{RS}}$ y \tilde{K}_a^{RS} tales que

$$\gamma_a^{\rm RS} = \gamma_a^{\rm CDR} + \tilde{\gamma}_a^{\rm RS} , \qquad (7.3.10)$$

$$K_a^{\rm RS} = K_a^{\rm CDR} + \tilde{K}_a^{\rm RS},$$
 (7.3.11)

con lo que resulta posible escribir el operador I^{RS} en distintos esquemas. En particular, estas relaciones justifican la forma de los términos singulares de las matrices de splittings resumidas en la ecuación (6.3.6).

8. LÍMITE DOBLE COLINEAL: RESULTADOS

Anteriormente, se mostró como calcular las correcciones NLO al splitting $q \rightarrow gq$. En este capítulo se compilan los resultados para todas las funciones de splitting a NLO en el límite doble colineal. Primero, se exhiben las correcciones a $g \rightarrow q\bar{q}$ y $g \rightarrow gg$, analizando las diferencias entre los distintos esquemas y explicando las comprobaciones de consistencia realizados. En particular, mostramos que es posible extender la identidad de Ward supersimétrica a NLO usando esquemas DREG específicos. Finalmente, se presentan resultados para los splittings que involucran fotones.

1. Introducción: historia y estado actual

El límite doble colineal de las amplitudes de scattering fue estudiado en detalle desde 1970, principalmente tras el trabajo de Altarelli y Parisi. Sin embargo, el análisis efectuado en un primer momento se centraba en el estudio de las funciones de splitting a nivel del elemento de matriz al cuadrado. Como explicamos en el Capítulo 6, las propiedades de factorización colineal se expresan de forma manifiesta al nivel de amplitudes. Sin embargo, la introducción de las amplitudes de splittings tuvo lugar a mediados de 1980 (74; 66). Los primeros cálculos fueron efectuados en el formalismo de descomposición de color a nivel árbol, lo cual permitía obtener expresiones muy compactas tras fijar las helicidades de las partículas involucradas. Desde entonces, las funciones de splitting en el límite doble colineal fueron estudiadas a 1-loop (67; 68; 69; 75; 76; 77) y a 2-loops (78; 79). A pesar de que existen estudios relacionados con las propiedades de estos objetos a órdenes superiores (70), actualmente solo se dispone de cálculos NNLO completos.

Existe interés teórico en computar las funciones de splitting con precisión por varios motivos. Por un lado, como se desprende de las ecuaciones DGLAP, tanto las PDFs como las funciones de fragmentación (FFs) son controladas por los núcleos de Altarelli-Parisi. En consecuencia, el conocimiento de las correcciones a órdenes superiores a $\langle \hat{P}_{a\to bc} \rangle$ se traduce en la posibilidad de calcular con más precisión las PDFs y FFs. A su vez esto mejora la confiabilidad de los cálculos de observables en colisionadores hadrónicos, pues toda la información de la dinámica no perturbativa se encuentra en las PDFs y FFs.

Por otra parte, las funciones de splitting son empleadas en la definición de los contratérminos

en el contexto del método de sustracción. Cuando se efectúan cálculos de secciones eficaces hadrónicas, es necesario llevar a cabo la cancelación de divergencias IR antes de tratar las correcciones finitas. En el método de sustracción¹ esto se logra exhibiendo de forma explícita las divergencias, tanto de la parte virtual como de las correcciones reales. Los polos IR de los términos virtuales son predichos por las fórmulas de Catani, mientras que las singularidades de las contribuciones reales provienen de las configuraciones que involucran radiación soft o colineal. En particular, en la región colineal se apela a fórmulas similares a (6.2.27) que utilizan los núcleos AP. Cuando el método se aplica a NLO, solo deben usarse núcleos AP a nivel árbol. Para cálculos NNLO, se necesitan las correcciones NLO a las funciones de splitting doble y los splitting triples a LO. De esta forma, aumentar la precisión de observables hadrónicos requiere calcular las funciones de splitting a órdenes superiores, tanto en loops como en cantidad de partículas colineales.

Para concluir, las funciones de splitting son útiles para simular procesos de lluvia de partones o *parton shower*. La idea de estos métodos es generar estados finales multipartículas permitiendo el decaimiento partónico secuencial. Debido a que la emisión de partículas es muy favorecida en la región de baja energía, los núcleos de Altarelli-Parisi son empleados para modelar el decaimiento casi colineal. Volveremos a mencionar este tema en el Capítulo 9.

2. Functiones de splitting doble en QCD: resultados color-stripped

Partiendo de las propiedades de factorización colineal exhibidas anteriormente, es posible recuperar las funciones de splitting tomando los límites cinemáticos correspondientes a determinadas amplitudes de scattering físicas. Esta es una alternativa al uso de las fórmulas maestras (6.2.21) y (6.2.22), y permite corroborar la factorización colineal de forma explícita.

Por cuestiones de simplicidad, es útil efectuar los cálculos en el contexto del formalismo de descomposición de color y utilizando amplitudes parciales en ciertas configuraciones específicas de helicidad. Esto se debe a que las amplitudes parciales solo presentan singularidades IR cuando dos partículas adyacentes se vuelven colineales, o bien cuando hay partículas soft. De esta forma, es más sencillo identificar las amplitudes de splitting comparando con la fórmula (6.2.26).

Comencemos con la amplitud MHV de 5 gluones exhibida en (2.4.2),

$$A_{5}^{(0)}(1^{-}, 2^{-}, 3^{+}, 4^{+}, 5^{+}) = \frac{i \langle 12 \rangle^{4}}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \langle 45 \rangle \langle 51 \rangle}, \qquad (8.2.1)$$

en la cual cambiamos levemente la notación con el fin de explicitar el momento asociado a cada pata externa. Supongamos que las patas 1 y 2 se vuelven paralelas. En tal caso, usando el vector

¹ Una exposición introductoria de este método puede encontrarse en el Capítulo 5 de Ref. (80).

 \tilde{P} definido en (6.2.2) junto con las fracciones de momento z_i es posible aproximar los momentos en el límite colineal como

$$p_i \rightarrow z_i \widetilde{P} + \mathcal{O}(s_{12})$$
 (8.2.2)

Sin embargo, es necesario expresar las propiedades de transformación de los productos biespinoriales $\langle ij \rangle$ y [ij] cuando involucran alguna partícula colineal. Para ello usamos la conexión entre espinores y momentos esbozada en (2.3.5), y proponemos

$$\langle ir \rangle \rightarrow \sqrt{z_i} \left\langle \widetilde{P}r \right\rangle + \mathcal{O}\left(\sqrt{s_{ij}}\right) ,$$
 (8.2.3)

$$[jr] \rightarrow \sqrt{z_j} \left[\widetilde{P}r \right] + \mathcal{O} \left(\sqrt{s_{ij}} \right) , \qquad (8.2.4)$$

en donde $i \parallel j \neq r$ es otro momento, no colineal con los anteriores. En particular, se tiene que $\langle ij \rangle \rightarrow 0 \neq [ij] \rightarrow 0$ cuando se mantienen solamente las contribuciones más divergentes en el límite colineal². Por lo tanto, en el límite 1 $\parallel 2$ se tiene

$$A_5^{(0)}(1^-, 2^-, 3^+, 4^+, 5^+) = 0, \qquad (8.2.5)$$

pues $A_5^{(0)}(1^-, 2^-, 3^+, 4^+, 5^+) \approx \langle 12 \rangle^3 \rightarrow 0$. Este límite colineal no nos permite deducir ningún splitting, pero es compatible con (6.2.26). De hecho, el resultado podía intuirse de tal fórmula puesto que, a nivel árbol, se tiene

$$A_5^{(0)}(1^-, 2^-, 3^+, 4^+, 5^+) \to \sum_{\sigma \text{phys.pol.}} \text{Split}_{-\sigma}^{(0)} (1^-, 2^-) A_4^{(0)} \left(\widetilde{P}^{\sigma}, 3^+, 4^+, 5^+ \right) ,$$

con $A_4^{(0)}(\pm, +, +, +) = 0$ por restricciones de helicidad. Entonces, considérese el límite 2 || 3, lo que conduce a

$$A_5^{(0)}(1^-, 2^-, 3^+, 4^+, 5^+) \rightarrow \frac{z_2^2}{\sqrt{(1-z_2)z_2} \langle 23 \rangle} \times \frac{i \langle 1P \rangle^4}{\langle 1P \rangle \langle P4 \rangle \langle 45 \rangle \langle 51 \rangle}, \qquad (8.2.6)$$

en donde puede identificarse $A_4^{(0)}(1^-,\widetilde{P}^-,4^+,5^+)$ junto con

$$\text{Split}^{(0)}_{+}(a^{-},b^{+}) = \frac{z^{2}}{\sqrt{(1-z)z} \langle ab \rangle},$$
 (8.2.7)

² Esta condición parece completamente razonable en vistas de que $\langle ij \rangle [ji] = s_{ij} \ y \ s_{ij} \to 0$ cuando $i \parallel j$. Sin embargo, en el contexto de las relaciones BCFW, $s_{ij} = 0$ no implica que necesariamente ambos productos espinoriales sean nulos. Esto se debe a que en tal formalismo, los momentos se extienden al espacio complejo y se introducen corrimientos en los espinores, lo cual permite definir $[ij] \neq 0$ o $\langle ij \rangle \neq 0$, aunque alguno de ellos debe ser nulo. Cabe señalar que este detalle es crucial para la definición de las subamplitudes primitivas no-nulas, que constituyen los bloques fundamentales de cualquier amplitud a nivel árbol en el contexto de la recursión BCFW.

que es el splitting doble asociado a $g(+) \rightarrow g(-)g(+)$. Aplicando la transformación $z \rightarrow 1-z$ y paridad es posible recuperar

Split₊⁽⁰⁾
$$(a^+, b^-) = \frac{(1-z)^2}{\sqrt{(1-z)z} \langle ab \rangle},$$
 (8.2.8)

aunque para las restantes configuraciones de helicidad es necesario tomar otros límites colineales. Considerando 4 || 5 en $A_5^{(0)}(1^-, 2^-, 3^+, 4^+, 5^+)$ se recupera

$$\text{Split}_{-}^{(0)}(a^+, b^+) = \frac{1}{\sqrt{(1-z)z} \langle ab \rangle},$$
 (8.2.11)

$$\operatorname{Split}_{+}^{(0)}(a^{-}, b^{-}) = -\frac{1}{\sqrt{(1-z)z} [ab]},$$
 (8.2.12)

en donde se aplicó paridad para recuperar el resultado de la segunda línea. Respecto de las configuraciones restantes, es posible mostrar que

$$\operatorname{Split}_{+}^{(0)}(a^{+}, b^{+}) = \operatorname{Split}_{-}^{(0)}(a^{-}, b^{-}) = 0.$$
 (8.2.13)

Para ello, debe utilizarse $A_6^{(0)}(1^-,2^-,3^+,4^+,5^+,6^+)$ y tomar el límite 5 || 6, que conduce a

$$A_5^{(0)}(1^-, 2^-, 3^+, 4^+, 5^+, 6^+) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{(1-z_5)z_5} \langle 56 \rangle} \times \frac{i \langle 12 \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \langle 4P \rangle \langle P1 \rangle}, \quad (8.2.14)$$

lo que implica $\text{Split}^{(0)}_+(a^+, b^+) = 0$ pues $A^{(0)}_5(1^-, 2^-, 3^+, 4^+, \widetilde{P}^-)$ es una amplitud $\overline{\text{MHV}}$ (y, por ende, no es nula).

Exactamente el mismo procedimiento puede ser aplicado para recuperar las funciones de splitting que involucran quarks. Sin embargo, en este caso, será necesario recurrir a amplitudes NMHV para obtener todas las posibles configuraciones de helicidad. Para el proceso $g \rightarrow q\bar{q}$ se tiene (67)

$$\operatorname{Split}_{+}^{(0)}(a_{q}^{+}, b_{\bar{q}}^{-}) = -\frac{(1-z)^{3/2} z^{1/2}}{\sqrt{(1-z)z} \langle ab \rangle}, \qquad (8.2.15)$$

$$\operatorname{Split}_{+}^{(0)}(a_{q}^{-}, b_{\bar{q}}^{+}) = -\frac{(1-z)^{1/2} z^{3/2}}{\sqrt{(1-z)z} \langle ab \rangle}, \qquad (8.2.16)$$

$$\operatorname{Split}_{-}^{(0)}(a_q^+, b_{\bar{q}}^-) = -\frac{(1-z)^{1/2} z^{3/2}}{\sqrt{(1-z)z} [ab]}, \qquad (8.2.17)$$

$$\operatorname{Split}_{-}^{(0)}(a_q^-, b_{\bar{q}}^+) = -\frac{(1-z)^{3/2} z^{1/2}}{\sqrt{(1-z)z} [ab]}, \qquad (8.2.18)$$

mientras que

Split⁽⁰⁾₋
$$(a_q^+, b^+) = \frac{z^{1/2}}{\sqrt{(1-z)z} \langle ab \rangle},$$
 (8.2.19)

$$\text{Split}_{-}^{(0)}(a_q^+, b^-) = -\frac{z^{3/2}}{\sqrt{(1-z)z} [ab]}, \qquad (8.2.20)$$

$$\text{Split}_{+}^{(0)}(a_q^-, b^+) = \frac{z^{3/2}}{\sqrt{(1-z)z} \langle ab \rangle},$$
 (8.2.21)

$$\text{Split}_{+}^{(0)}(a_{q}^{-}, b^{-}) = -\frac{z^{1/2}}{\sqrt{(1-z)z} [ab]}, \qquad (8.2.22)$$

son las funciones de splitting correspondientes para $q \rightarrow qg$. Es importante observar que los resultados pueden ser conectados a través de la acción del operador de paridad o bien apelando al intercambio 1 \leftrightarrow 2. En este último caso, es necesario tener en cuenta que se está trabajando con amplitudes primitivas lo que introduce un signo menos adicional al efectuar el cambio $q \leftrightarrow \bar{q}$ (recordar la discusión sobre las reglas de Feynman efectivas en el formalismo de descomposición de color, en el Capítulo 2).

Como comentario final, es crucial indicar que las cálculos aquí efectuados son válidos solamente en 4 dimensiones. Esto se debe a que la escritura de los productos espinoriales, como fue definida en el Capítulo 2, usa fuertemente las propiedades de trabajar en un espacio-tiempo 4-dimensional plano.

3. Functiones de splitting doble en QCD: resultados generales

En esta sección se presentan las correcciones a orden $g_{\rm S}^3$ para las amplitudes de splitting y núcleos de Altarelli-Parisi asociados a los procesos $g \to q\bar{q}$ y $g \to gg$. Comenzamos escribiendo las matrices de splitting mediante el uso de las fórmulas (6.2.21) y (6.2.22), tanto para las contribuciones de QCD estándar como para diagramas mediados por gluones escalares. Para continuar con el estudio de la dependencia en el esquema de regularización, todos los cálculos son efectuados manteniendo δ , α , β_R y β como parámetros libres. Por lo discutido en el capítulo precedente establecemos $\alpha_R = 1$ para evitar el uso de los esquemas HSA y HSB, puesto que solo nos interesa estudiar como varían los resultados en esquemas bien definidos. En ambos casos, se implementan verificaciones basadas en argumentos de simetría y en el análisis de la estructura de polos infrarrojos de los splittings, efectuando la comparación con la fórmula de Catani. Más aún, al final de la sección se discute la validez de las identidades de Ward supersimétricas más allá del nivel árbol. En concreto, mostramos que los esquemas FDH/DRED y TSC son compatibles con tales identidades, lo cual provee una comprobación adicional de los resultados obtenidos.

3.1.
$$g \to q\bar{q}$$

En el capítulo previo tratamos en gran detalle el cálculo de la matriz de splitting asociada a $q \rightarrow gq$. En esta sección nos centramos en el proceso $g \rightarrow q\bar{q}$, haciendo hincapié en las diferencias respecto del caso previo. En particular, podemos anticipar que el hecho de que el partón padre sea un gluón posibilitará obtener resultados más compactos.

Como punto de partida, comencemos expandiendo la matriz de splitting como

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g\to q\bar{q}} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g\to q\bar{q}}^{(0)} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g\to q\bar{q}}^{(1)} , \qquad (8.3.1)$$

en donde la contribución a nivel árbol viene dada por

$$Sp_{g \to q\bar{q}}^{(0)} = \frac{g_{\rm S}\mu^{\epsilon}}{s_{12}} T^a \bar{u}(p_1) \not\in (\tilde{P}) v(p_2) , \qquad (8.3.2)$$

con p_i el momento físico de la partícula $i \ge \epsilon(\widetilde{P})$ vector de polarización asociado al gluón padre. Nótese que se está empleando la fórmula (6.2.22), lo que justifica que se evalúe el vector de polarización en \widetilde{P} aunque el momento del partón padre sea p_{12} con $p_{12}^2 = s_{12} \neq 0$.

La contribución asociada a los términos de QCD estándar se expande como

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g \to q\bar{q}}^{(1,\text{STD})} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g \to q\bar{q}}^{(1,A)} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g \to q\bar{q}}^{(1,B)} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g \to q\bar{q}}^{(1,C)} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g \to q\bar{q}}^{(1,D)}, \qquad (8.3.3)$$

en donde $Sp_{g \to q\bar{q}}^{(1,i)}$ se refiere al diagrama $i \in \{A, B, C, D\}$, como se muestra en la figura 8.1, y

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Sp}_{g \to q\bar{q}}^{(1,A)} &= -\frac{g_{S}^{3} \mu^{3\epsilon}}{2s_{12}^{2}} C_{A} \boldsymbol{T}^{a} \epsilon_{\mu}(\tilde{P}) \bar{u}(p_{1}) \gamma^{\nu} v(p_{2}) d_{\nu\nu_{1}}(p_{12}, n) \\ &\times \int_{q} \frac{d_{\rho\rho_{1}}(q, n) d_{\sigma\sigma_{1}}(p_{12} - q, n) V_{3g}(-p_{12}^{\mu}, q^{\rho}, (p_{12} - q)^{\sigma})}{q^{2} t_{12q}} \\ &\times V_{3g}(-q^{\rho_{1}}, p_{12}^{\nu_{1}}, (q - p_{12})^{\sigma_{1}}) , \\ \boldsymbol{Sp}_{g \to q\bar{q}}^{(1,B)} &= -\frac{g_{S}^{3} \mu^{3\epsilon}}{2s_{12}} C_{A} \boldsymbol{T}^{a} \epsilon_{\mu}(\tilde{P}) \bar{u}(p_{1}) \gamma^{\rho_{1}} \gamma^{\alpha} \gamma^{\sigma_{1}} v(p_{2}) \\ &\times \int_{q} \frac{(p_{1} - q)_{\alpha} d_{\sigma\sigma_{1}}(p_{12} - q, n) d_{\rho\rho_{1}}(q, n) V_{3g}(-p_{12}^{\mu}, q^{\rho}, (p_{12} - q)^{\sigma})}{q^{2} t_{1q} t_{12q}} , \end{aligned}$$

$$\end{aligned}$$

$$\tag{8.3.4}$$



Fig. 8.1: Diagramas de Feynman asociados con $g(\tilde{P}) \rightarrow q(p_1)\bar{q}(p_2)$ a NLO. Aquí el gluón entrante (partón padre) se encuentra fuera de la capa de masa y su virtualidad viene dada por $(p_{12})^2 = s_{12}$. Solo se muestran las contribuciones STD (asociadas a procesos compatibles con QCD 4-dimensional).

$$Sp_{g \to q\bar{q}}^{(1,C)} = \frac{g_{S}^{3}\mu^{3\epsilon}}{2s_{12}} (C_{A} - 2C_{F})T^{a}\bar{u}(p_{1})\gamma^{\rho}\gamma^{\alpha} \not\in (\tilde{P})\gamma^{\beta}\gamma^{\sigma}v(p_{2})$$

$$\times \int_{q} \frac{q_{\alpha}(q - p_{12})_{\beta}d_{\sigma\rho}(q - p_{1}, n)}{q^{2}t_{1q}t_{12q}},$$

$$Sp_{g \to q\bar{q}}^{(1,D)} = \frac{g_{S}^{3}\mu^{3\epsilon}N_{f}}{2s_{12}^{2}}T^{a}\bar{u}(p_{1})\gamma^{\nu}v(p_{2})d_{\nu\nu_{1}}(p_{12}, n)\int_{q} \frac{\mathrm{Tr}\left(\gamma^{\nu_{1}}\not\in (\tilde{P})(\not= p_{f2})\right)}{q^{2}t_{12q}}.$$
(8.3.6)
$$(8.3.7)$$

Apréciese que los diagramas A y D se asocian con las correcciones de autoenergía al gluón entrante (con virtualidad $s_{12} \neq 0$). Por tal motivo, podemos escribir

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g\to q\bar{q}}^{(1,A)} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g\to q\bar{q}}^{(1,D)} = \Pi(p_{12}^2) \, \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g\to q\bar{q}}^{(0)} \,, \tag{8.3.8}$$

apelando a la discusión presentada en el Capítulo 6.

Para este proceso, hay cuatro posibles diagramas SCA-nHV que contribuyen a la amplitud de splitting. Siguiendo lo exhibido en la figura 8.2 se puede expandir esta contribución como

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g \to q\bar{q}}^{(1,\text{SCA-nHV})} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g \to q\bar{q}}^{(1,A')} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g \to q\bar{q}}^{(1,A'')} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g \to q\bar{q}}^{(1,B')} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g \to q\bar{q}}^{(1,C')}, \qquad (8.3.9)$$

 con

$$Sp_{g \to q\bar{q}}^{(1,A')} = -\frac{g_{S}^{3}\mu^{3\epsilon}}{s_{12}^{2}} C_{A}T^{a} \epsilon_{\mu}(\tilde{P})\bar{u}(p_{1})\gamma^{\nu}v(p_{2}) d_{\nu\nu_{1}}(p_{12},n)$$

$$\times \int_{q} \frac{\left(-\eta_{\rho\rho_{1}}^{\epsilon}\right) d_{\sigma\sigma_{1}}(p_{12}-q,n) V_{3g}\left(-p_{12}^{\mu},q^{\rho},(p_{12}-q)^{\sigma}\right)}{q^{2}t_{12q}}$$

$$(8.3.10)$$

$$\times V_{3g} \left(-q^{\rho_{1}}, p_{12}^{\nu_{1}}, (q-p_{12})^{\sigma_{1}}\right) ,$$

$$\mathbf{Sp}_{g \to q\bar{q}}^{(1,A'')} = -\frac{g_{S}^{3} \mu^{3\epsilon}}{2s_{12}^{2}} C_{A} \mathbf{T}^{a} \epsilon_{\mu}(\tilde{P}) \bar{u}(p_{1}) \gamma^{\nu} v(p_{2}) d_{\nu\nu_{1}}(p_{12}, n)$$

$$\times \int_{q} \frac{\eta_{\rho\rho_{1}}^{\epsilon} \eta_{\sigma\sigma_{1}}^{\epsilon} V_{3g} \left(-p_{12}^{\mu}, q^{\rho}, (p_{12}-q)^{\sigma}\right)}{q^{2} t_{12q}} V_{3g} \left(-q^{\rho_{1}}, p_{12}^{\nu_{1}}, (q-p_{12})^{\sigma_{1}}\right) ,$$

$$\mathbf{Sp}_{g \to q\bar{q}}^{(1,B')} = -\frac{g_{S}^{3} \mu^{3\epsilon}}{2s_{12}} C_{A} \mathbf{T}^{a} \epsilon_{\mu}(\tilde{P}) \bar{u}(p_{1}) \hat{\gamma}^{\rho_{1}} \gamma^{\alpha} \hat{\gamma}^{\sigma_{1}} v(p_{2}) \eta_{\rho_{1}\rho}^{\epsilon} \eta_{\sigma_{1}\sigma}^{\epsilon}$$

$$\times \int_{q} \frac{(p_{1}-q)_{\alpha} V_{3g} \left(-p_{12}^{\mu}, q^{\rho}, (p_{12}-q)^{\sigma}\right)}{q^{2} t_{1q} t_{12q}} ,$$

$$(8.3.12)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g\to q\bar{q}}^{(1,C')} &= \frac{g_{\mathrm{S}}^{3}\mu^{3\epsilon}}{2s_{12}} \left(C_{A} - 2C_{F}\right)\boldsymbol{T}^{a}\bar{u}(p_{1})\hat{\gamma}^{\rho}\gamma^{\alpha} \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{P})\gamma^{\beta}\hat{\gamma}^{\sigma}v(p_{2}) \\ &\times \int_{q} \frac{q_{\alpha}(q-p_{12})_{\beta}\left(-\eta_{\rho\sigma}^{\epsilon}\right)}{q^{2}t_{1q}t_{12q}} \,, \end{aligned}$$

$$(8.3.13)$$

en donde se usaron las reglas de Feynman a nivel lagrangiano para escribir cada diagrama con gluones escalares.

Cuando se discutió la estructura de las contribuciones a la amplitud de splitting $q \to gq$, se mencionó la posibilidad de encontrar integrales que involucren a q_{ϵ}^2 . En este proceso encontramos este tipo de términos al analizar $\boldsymbol{Sp}_{g\to q\bar{q}}^{(1,A')}$. En efecto, tras expandir el vértice de tres gluones se tiene

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S} \boldsymbol{p}_{g \to q \bar{q}}^{(1,A')} &= \frac{g_{\rm S}^3 \mu^{3\epsilon}}{s_{12}^2} C_A \boldsymbol{T}^a \, \epsilon_\mu(\tilde{P}) \bar{u}(p_1) \gamma^\nu v(p_2) \, d_{\nu \sigma_1}(p_{12},n) \, \eta_{\rho \rho_1}^\epsilon \\ &\times \int_q \frac{q_\rho q_{\rho_1} \, d_{\mu \sigma_1}(p_{12}-q,n)}{q^2 t_{12q}} \,. \end{aligned} \tag{8.3.14}$$

Debido a que la contribución escalar debe calcularse estableciendo $D_{\text{Dirac}} = 4$, es posible escribir la integral requerida como

$$\operatorname{Int}^{A''} = \int_{q} \frac{q_{\rho}q_{\rho_{1}} d_{\mu\sigma_{1}} (p_{12} - q, n)}{q^{2}t_{12q}} = F_{1}(k_{i} \cdot k_{j})\eta_{\rho\rho_{1}}^{4}\eta_{\mu\sigma_{1}}^{4} + \sum_{P} F_{2}(k_{i} \cdot k_{j}, P)\eta_{a_{1}a_{2}}^{4}(k_{i})_{a_{3}}(k_{j})_{a_{4}} + \sum_{P,Q} F_{3}(k_{i} \cdot k_{j}, P, Q)(k_{i_{1}})_{a_{1}}(k_{i_{2}})_{a_{2}}(k_{i_{3}})_{a_{3}}(k_{i_{4}})_{a_{4}}, \quad (8.3.15)$$

en donde P es una permutación del conjunto de índices de Lorentz $\{\rho, \rho_1, \mu, \sigma\}, k_i \in \{p_{12}, n\}$ y Q es un ordenamiento particular de los elementos del conjunto $\{k_i\}$. El hecho importante de remarcar aquí es que $\operatorname{Int}^{A''}$ solo tiene componentes 4-dimensionales, lo cual implica que $\eta^4_{\alpha\beta}(\eta^{\epsilon})^{\alpha\beta} = 0$. Esta es una observación muy sutil, pues tal reemplazo solo puede llevarse a cabo cuando $D_{\text{Dirac}} = 4$, ya que esto eliminará las componentes transversas que acompañan a la estructura tensorial de $\operatorname{Int}^{A''}$. De este modo, vale que

$$Sp_{g \to q\bar{q}}^{(1,A')} = 0,$$
 (8.3.16)

cuando se usan las convenciones estándar para calcular los diagramas con gluones escalares. Los términos remanentes de la amplitud de splitting vienen dados por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g \to q \bar{q}}^{(1,A'')} &= \frac{g_{S}^{3} \mu^{3\epsilon}}{s_{12}^{2}} \epsilon C_{A} \boldsymbol{T}^{a} \epsilon_{\mu}(\tilde{P}) \bar{u}(p_{1}) \gamma^{\nu} v(p_{2}) d_{\nu \nu_{1}}(p_{12},n) \end{aligned} \tag{8.3.17} \\ &\times \int_{q} \frac{(2q - p_{12})_{\mu} (2q - p_{12})_{\nu_{1}}}{q^{2} t_{12q}}, \\ \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g \to q \bar{q}}^{(1,B')} &= -\frac{g_{S}^{3} \mu^{3\epsilon}}{s_{12}} \epsilon C_{A} \boldsymbol{T}^{a} \epsilon_{\mu}(\tilde{P}) \bar{u}(p_{1}) \gamma^{\alpha} v(p_{2}) \int_{q} \frac{(p_{1} - q)_{\alpha} (p_{12} - q)_{\mu}}{q^{2} t_{1q} t_{12q}}, \end{aligned} \tag{8.3.18}$$

$$\boldsymbol{Sp}_{g \to q\bar{q}}^{(1,C')} = -\frac{g_{\rm S}^3 \mu^{3\epsilon}}{s_{12}} \epsilon \left(C_A - 2C_F \right) \boldsymbol{T}^a \bar{u}(p_1) \gamma^{\alpha} \not\in (\tilde{P}) \gamma^{\beta} v(p_2) \int_q \frac{q_\alpha (q - p_{12})_\beta}{q^2 t_{1q} t_{12q}} , \quad (8.3.19)$$

en donde usamos los mismos argumentos que en el Capítulo 7 para efectuar los reemplazos $\hat{\gamma}^a \gamma^c \hat{\gamma}^b \rightarrow -(\eta^\epsilon)^{ab} \gamma^c y \ \hat{\gamma}^a \gamma^c \gamma^d \gamma^e \hat{\gamma}^b \rightarrow -(\eta^\epsilon)^{ab} \gamma^c \gamma^d \gamma^e$.

En relación con las contribuciones que involucran gluones escalares, aquí puede apreciarse un hecho importante. Aunque se pueden construir muchos diagramas empleando las reglas efectivas, algunos de ellos resultan nulos por ser proporcionales a q_{ϵ}^2 . Estas estructuras aparecen cuando índices del espacio transverso ϵ -dimensional se contraen con el momento del loop. De esta forma, para evitar tal situación, los índices del espacio transverso deben contraerse entre sí, formando cadenas cerradas. Es decir, las contribuciones no nulas son aquellas que involucran objetos de la forma

$$(\eta^{\epsilon})_{a_1 a_2} (\eta^{\epsilon})^{a_2 a_3} \dots (\eta^{\epsilon})^{a_n a_1} = (\eta^{\epsilon})^{a_1}_{a_1}, \qquad (8.3.20)$$

lo cual es equivalente a decir que cada cadena debe ser proporcional a la traza del tensor métrico transverso, $\text{Tr}(\eta^{\epsilon}) = -2\epsilon = (\eta^{\epsilon})^{\mu}_{\mu}$.

Antes de mostrar resultados explícitos para la matriz de splitting de $g \to q\bar{q}$, analicemos las posibles estructuras espinoriales que pueden emplearse para expandir $\boldsymbol{Sp}_{g\to q\bar{q}}^{(1)}$. En primer lugar, la contribución LO es proporcional a $\bar{u}(p_1) \notin (\tilde{P})v(p_2)$, con lo cual $\boldsymbol{Sp}_{g\to q\bar{q}}^{(1)}$ incluye esta estructura. Por otra parte, debido a la simetría de intercambio $p_1 \leftrightarrow p_2$, junto a las propiedades

$$p_{12} \cdot \epsilon(\tilde{P}) = n \cdot \epsilon(\tilde{P}) = \tilde{P} \cdot \epsilon(\tilde{P}) = 0, \qquad (8.3.22)$$

y la existencia de solamente cuatro vectores físicos $(p_1, p_2, \epsilon(\tilde{P}) \ge n)$, es posible construir también la cadena espinorial $\bar{u}(p_1) \not| v(p_2)$. Cabe destacar que, a 1-loop, pueden encontrarse contribuciones



Fig. 8.2: Diagramas de Feynman asociados con las contribuciones SCA-nHV al proceso $g(\tilde{P}) \rightarrow q(p_1)\bar{q}(p_2)$, a NLO.

con hasta cinco matrices gamma en su interior. Sin embargo, las propiedades mencionadas antes, junto con las restricciones impuestas por el álgebra de Dirac, permiten reducirlas a combinaciones de $\bar{u}(p_1) \notin (\tilde{P}) v(p_2)$ y $\bar{u}(p_1) \# v(p_2) p_1 \cdot \epsilon(\tilde{P})$. Por tales razones, tras reemplazar las integrales de Feynman en las expresiones para $\boldsymbol{Sp}_{g \to q\bar{q}}^{(1,i)}$, se obtiene

$$Sp_{g \to q\bar{q}}^{(1,\text{STD})} = \frac{c_{\Gamma}g_{S}^{3}\mu^{\epsilon}T^{a}}{\epsilon^{2}s_{12}} \left(\frac{-s_{12}-\imath 0}{\mu^{2}}\right)^{-\epsilon} \left[C_{g \to q\bar{q}}^{(\text{STD},1)}\bar{u}(p_{1})\not\in(\tilde{P})v(p_{2}) + C_{g \to q\bar{q}}^{(\text{STD},2)}\frac{1}{nP}\bar{u}(p_{1})\not\approx v(p_{2})p_{1}\cdot\epsilon(\tilde{P})\right], \qquad (8.3.23)$$

para la contribución STD, en donde los coeficientes $C^{({\rm STD},i)}_{g\to q\bar{q}}$ están dados por

$$C_{g \to q\bar{q}}^{(\text{STD},1)} = N_f \frac{2(\epsilon - 1)\epsilon(1 - \beta_R \epsilon)}{4(\epsilon - 2)\epsilon - 3} + C_F \frac{\epsilon \left(3 - (2 + \delta)\epsilon + 2\delta\epsilon^2\right) - 2}{(\epsilon - 1)(2\epsilon - 1)} + C_A \left(\frac{3 + \epsilon^2 (2(\epsilon - 2) + \delta(1 + 2(\epsilon - 2)\epsilon))}{(\epsilon - 1)(3 - 2\epsilon)(2\epsilon - 1)} - {}_2F_1 \left(1, -\epsilon; 1 - \epsilon; \frac{z_1 - 1}{z_1}\right) - {}_2F_1 \left(1, -\epsilon; 1 - \epsilon; \frac{z_1}{z_1 - 1}\right) + 2\right),$$

$$(8.3.24)$$

$$C_{a \to q\bar{q}}^{(\text{STD},2)} = 0,$$

con $\alpha_R = 1$ puesto que estamos descartando los esquemas HSA/HSB. Es interesante señalar que la corrección a NLO completa resulta proporcional a $\boldsymbol{Sp}_{g \to q\bar{q}}^{(0)}$, trabajando en cualquiera de los esquemas convencionales. Además, a modo de verificación, se corrobora que $C_{g \to q\bar{q}}^{(\text{STD},1)}$ es simétrico

ante el intercambio 1 \leftrightarrow 2. Al igual que con $q \rightarrow gq$, cuando se emplea $\alpha = 1$ es necesario considerar que μ es un índice D_{ST} -dimensional, mientras que en los esquemas restantes se asocia a una cantidad 4-dimensional.

Por otro lado, es posible rescribir $\boldsymbol{Sp}_{q \to q\bar{q}}^{(1)}$ como

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g\to q\bar{q}}^{(1)} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{H,g\to q\bar{q}}^{(1)} + \boldsymbol{I}_{g\to q\bar{q}}^{(1)} \left(p_1, p_2; \tilde{P}\right) \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g\to q\bar{q}}^{(0)}, \qquad (8.3.25)$$

haciendo uso de las expresiones

$$\mathbf{I}_{g \to q\bar{q}}^{(1)}\left(p_{1}, p_{2}; \tilde{P}\right) = \frac{c_{\Gamma}g_{S}^{2}}{\epsilon^{2}} \left(\frac{-s_{12} - i0}{\mu^{2}}\right)^{-\epsilon} \left[3C_{A} - (3\epsilon + 2)C_{F} + 2\epsilon\beta_{0}\right] \qquad (8.3.26)$$

$$- C_{A}\left({}_{2}F_{1}\left(1, -\epsilon; 1 - \epsilon; \frac{z_{1} - 1}{z_{1}}\right) + {}_{2}F_{1}\left(1, -\epsilon; 1 - \epsilon; \frac{z_{1}}{z_{1} - 1}\right)\right), \qquad (8.3.26)$$

$$- C_{A}\left({}_{2}F_{1}\left(1, -\epsilon; 1 - \epsilon; \frac{z_{1} - 1}{z_{1}}\right) + {}_{2}F_{1}\left(1, -\epsilon; 1 - \epsilon; \frac{z_{1}}{z_{1} - 1}\right)\right), \qquad (8.3.26)$$

$$+ C_{F}g_{S}^{2}\left(\frac{-s_{12} - i0}{\mu^{2}}\right)^{-\epsilon}\left[C_{A}\left(\frac{2 - 3\delta}{6(3 - 2\epsilon)} + \frac{1 - \delta}{\epsilon - 1} + \frac{\delta - 18}{2(2\epsilon - 1)}\right) + C_{F}\left(\frac{\delta - 1}{\epsilon - 1} + \frac{8}{2\epsilon - 1}\right) + N_{f}\frac{6\beta_{R}(1 - \epsilon) + 8\epsilon - 10}{3(4(\epsilon - 2)\epsilon + 3)}\right] \mathbf{Sp}_{g \to q\bar{q}}^{(0)}, \quad (8.3.27)$$

lo que está de acuerdo con las ecuaciones (6.3.1) y (6.3.2). A diferencia de lo ocurrido con el splitting $q \to gq$, $\boldsymbol{Sp}_{g \to q\bar{q}}^{(1)}$ depende explícitamente de β_R . Sin embargo podemos apreciar que, independientemente del valor de β_R , la estructura divergente es compatible con la fórmula de Catani y el remanente finito $\boldsymbol{Sp}_{H,g \to q\bar{q}}^{(1)}$ solo involucra funciones racionales de z y ϵ .

Analizando las contribuciones SCA-nHV, se tiene que

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g \to q\bar{q}}^{(1,\text{SCA-nHV})} = c_{\Gamma}g_{\text{S}}^{2} \left(\frac{-s_{12}-\imath 0}{\mu^{2}}\right)^{-\epsilon}$$

$$\times \frac{(2(2-\epsilon)\epsilon-1)C_{A} + (4(\epsilon-2)\epsilon+3)C_{F}}{(\epsilon-1)(2\epsilon-3)(2\epsilon-1)} \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g \to q\bar{q}}^{(0)},$$

$$(8.3.28)$$

y es posible recuperar la relación

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g \to q\bar{q}}^{(1,\text{STD},\text{HV})} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g \to q\bar{q}}^{(1,\text{STD},\text{FDH})} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g \to q\bar{q}}^{(1,\text{SCA-nHV})}, \qquad (8.3.29)$$

que establece que la diferencia entre los resultados en FDH y HV es simplemente la contribución de los diagramas SCA-nHV.

Para concluir, procedemos a mostrar los resultados para los núcleos de Altarelli-Parisi. Para las contribuciones a nivel árbol se tiene

$$\langle \mu \left| \boldsymbol{P}_{g \to q\bar{q}}^{(0)} \right| \nu \rangle = -\frac{g_{\rm S}^2 (1 - \beta \epsilon)}{2} \left((\eta^{D_{\rm Dirac}})^{\mu\nu} + \frac{4(z_1 - 1)z_1}{k_{\perp}^2} k_{\perp}^{\mu} k_{\perp}^{\nu} \right), \qquad (8.3.30)$$

$$\langle \hat{P}_{g \to q\bar{q}}^{(0)} \rangle = \frac{g_{\rm S}^2 (1 - \beta \epsilon)}{2(1 - \alpha \epsilon)} ((1 - z_1)^2 + z_1^2 - \alpha \delta \epsilon),$$
 (8.3.31)

en donde se puede apreciar la dependencia explícita en β , es decir, en el número de polarizaciones fermiónicas externas. Esto se debe a que al sumar sobre las polarizaciones fermiónicas se forma una traza, que resulta proporcional a $2 - 2\beta$. Sin embargo, este factor no se cancela al efectuar el promedio sobre polarizaciones entrantes, puesto que el partón padre es un gluón. Pasando a las correcciones NLO, debido a que a nivel amplitud resultan proporcionales al LO, se tiene que

$$\langle \hat{P}_{g \to q\bar{q}}^{(1)} \rangle = \frac{c_{\Gamma}}{\epsilon^2} g_{\rm S}^2 \left(\frac{-s_{12} - \imath 0}{\mu^2} \right)^{-\epsilon} C_{g \to q\bar{q}}^{\rm STD,1} \langle \hat{P}_{g \to q\bar{q}}^{(0)} \rangle + {\rm c.c.}, \qquad (8.3.32)$$

en donde solo se está manteniendo la parte real del lado derecho de la ecuación. Puede apreciarse que, en este caso, también se introduce una dependencia en β y que no es posible cancelarla fijando $\beta = \beta_R$. Sin embargo, es interesante notar que los factores adicionales en (8.3.31) desaparecen al trabajar en el esquema TSC (ver Capítulo 4).

3.2.
$$g \rightarrow gg$$

Por último, analicemos la matriz de splitting $g \rightarrow gg$. En este caso será necesario aplicar varias propiedades de los vectores de polarización para poder obtener resultados compactos. Además, el hecho de no tener que utilizar cadenas espinoriales permite que todos las expresiones puedan ser escritas en términos de productos escalares, los cuales están bien definidos en cualquier esquema de DREG.

Como primer paso, descomponemos la matriz de splitting como

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g \to gg} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g \to gg}^{(0)} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g \to gg}^{(1)} , \qquad (8.3.33)$$

en donde la contribución a nivel árbol viene dada por

$$\boldsymbol{Sp}_{g \to gg}^{(0)} = \frac{2g_{\mathrm{S}}\mu^{\epsilon}}{s_{12}}\boldsymbol{T}^{a}(A)\left(p_{1}\cdot\epsilon(\tilde{P})\,\epsilon(p_{1})\cdot\epsilon(p_{2})-p_{1}\cdot\epsilon(p_{2})\,\epsilon(p_{1})\cdot\epsilon(\tilde{P})\right) + p_{2}\cdot\epsilon(p_{1})\,\epsilon(p_{2})\cdot\epsilon(\tilde{P})\right), \qquad (8.3.34)$$

con p_i el momento físico de la partícula $i \in (\mathbf{T}^a(A))_{bc} = i f_{abc}$ los generadores de la representación adjunta de SU(3).

La contribución NLO estándar puede expandirse como

$$Sp_{g \to gg}^{(1,\text{STD})} = Sp_{g \to gg}^{(1,A)} + Sp_{g \to gg}^{(1,B)} + Sp_{g \to gg}^{(1,C)} + Sp_{g \to gg}^{(1,D)} + Sp_{g \to gg}^{(1,E)}, \qquad (8.3.35)$$

con $Sp_{g \to gg}^{(1,i)}$ asociado con el diagrama $i \in \{A, B, C, D, E\}$, como se muestra en a figura 8.3, y

$$\boldsymbol{Sp}_{g \to gg}^{(1,A)} = \frac{g_{S}^{3} \mu^{3\epsilon}}{2s_{12}^{2}} C_{A} \boldsymbol{T}^{a}(A) \epsilon_{\mu}(\tilde{P}) \epsilon_{\nu}(p_{1}) \epsilon_{\rho}(p_{2}) V_{3g}\left(-p_{12}^{\alpha_{1}}, p_{1}^{\nu}, p_{2}^{\rho}\right) d_{\alpha\alpha_{1}}\left(p_{12}, n\right)$$



Fig. 8.3: Diagramas de Feynman asociados con $g(\tilde{P}) \rightarrow g(p_1)g(p_2)$ a NLO. Aquí el gluón entrante (partón padre) se encuentra fuera de la capa de masa y su virtualidad viene dada por $(p_{12})^2 = s_{12}$. Solo se muestran las contribuciones STD (asociadas a procesos compatibles con QCD 4-dimensional).

$$\times \int_{q} \frac{d_{\rho\rho_{1}}(q,n) d_{\lambda\lambda_{1}}(p_{12}-q,n) V_{3g}\left(-p_{12}^{\mu},q^{\sigma},(p_{12}-q)^{\lambda}\right)}{q^{2}t_{12q}} \times V_{3g}\left(-q^{\sigma_{1}},p_{12}^{\alpha},(q-p_{12})^{\lambda_{1}}\right),$$

$$(8.3.36)$$

$$Sp_{g \to gg}^{(1,B)} = -\frac{g_{S}^{3}\mu^{3\epsilon}N_{f}}{2s_{12}^{2}} T^{a}(A) \epsilon_{\nu}(p_{1})\epsilon_{\rho}(p_{2}) V_{3g}(-p_{12}^{\alpha_{1}}, p_{1}^{\nu}, p_{2}^{\rho}) d_{\alpha\alpha_{1}}(p_{12}, n) \\ \times \int_{q} \frac{\text{Tr}\left(\gamma^{\nu_{1}} \not{q} \notin (\tilde{P})(\not{q} - p_{\not{q}2})\right)}{q^{2}t_{12q}}, \qquad (8.3.37)$$

$$\boldsymbol{Sp}_{g \to gg}^{(1,C)} = \frac{g_{\rm S}^3 \mu^{3\epsilon}}{2s_{12}} N_f \boldsymbol{T}^a(A) \int_q \frac{\operatorname{Tr}\left(\not \in (\tilde{P}) \not \notin (p_1)(\not q - p_1) \not \in (p_2)(\not q - p_{1/2})\right)}{q^2 t_{1q} t_{12q}}, \qquad (8.3.38)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g \to gg}^{(1,D)} &= \frac{g_{S}^{3}\mu^{3\epsilon}}{4s_{12}} C_{A}\boldsymbol{T}^{a}(A) \epsilon_{\mu}(\tilde{P})\epsilon_{\nu}(p_{1})\epsilon_{\rho}(p_{2}) \int_{q} \frac{d_{\sigma\sigma_{1}}(q,n) d_{\eta\eta_{1}}(q-p_{12},n)}{q^{2}t_{12q}} \\ &\times V_{3g}\left(-p_{12}^{\mu},q^{\sigma},(p_{12}-q)^{\eta}\right) \end{aligned} \tag{8.3.39} \\ &\times \left[\frac{d_{\lambda\lambda_{1}}(q-p_{1},n)}{t_{1q}}V_{3g}\left((p_{1}-q)^{\lambda_{1}},p_{2}^{\rho},(q-p_{12})^{\eta_{1}}\right)V_{3g}\left(-q^{\sigma_{1}},p_{1}^{\nu},(q-p_{1})^{\lambda}\right) \\ &- \frac{d_{\lambda\lambda_{1}}(q-p_{2},n)}{t_{2q}}V_{3g}\left((p_{2}-q)^{\lambda_{1}},p_{1}^{\nu},(q-p_{12})^{\eta_{1}}\right)V_{3g}\left(-q^{\sigma_{1}},p_{2}^{\rho},(q-p_{2})^{\lambda}\right)\right], \end{aligned}$$

$$\times \int_{q} \frac{d_{\sigma\sigma_{1}}(q,n) \ d_{\lambda\lambda_{1}}(p_{12}-q,n)}{q^{2}t_{12q}} V_{3g}\left(-p_{12}^{\mu},q^{\sigma},(p_{12}-q)^{\lambda}\right) , \qquad (8.3.40)$$

en donde se utilizó la función

$$V_{4g}^{\text{Cin}}(\mu,\nu,\rho,\sigma) = \frac{3}{2} \left(\eta_{\mu\nu}^{D_{\text{ST}}} \eta_{\rho\sigma}^{D_{\text{ST}}} - \eta_{\mu\rho}^{D_{\text{ST}}} \eta_{\nu\sigma}^{D_{\text{ST}}} \right) , \qquad (8.3.41)$$

que es una versión puramente cinemática del vértice de cuatro gluones. La misma proviene de la contracción de la estructura de color de los vértices de tres y cuatro gluones, respectivamente. Es necesario señalar que, debido a las propiedades de simetría, los diagramas C y D solo describen la topología asociada, con lo cual $\boldsymbol{Sp}^{(1,C)}$ y $\boldsymbol{Sp}^{(1,D)}$ incluyen la suma sobre todos los posibles reordenamientos de las partículas externas.

Por otra parte, los diagramas A y B expanden las correcciones de autoenergía para el gluón entrante. De esta forma, la contribución correspondiente se expresa simplemente como

$$Sp_{g \to gg}^{(1,A)} + Sp_{g \to gg}^{(1,B)} = \Pi(p_{12}^2) Sp_{g \to gg}^{(0)}.$$
(8.3.42)



Fig. 8.4: Diagramas de Feynman asociados con los términos con gluones escalares en el proceso $g(\tilde{P}) \rightarrow g(p_1)g(p_2)$ a NLO. Solo se muestran los diagramas que contribuyen no trivialmente a la amplitud de splitting.

En este proceso, cuando se trabaja con las contribuciones asociadas a gluones escalares se encuentra una gran cantidad de diagramas. Sin embargo, como se mostró mientras se calculaba $Sp_{g\to q\bar{q}}^{(1)}$, los únicos términos no triviales son aquellos que involucran cadenas cerradas de índices asociados al espacio transverso y resultan proporcionales a Tr (η^{ϵ}). Cualquier otra configuración involucra la presencia de integrandos proporcionales a q_{ϵ}^2 , los cuales dan lugar a integrales nulas en el límite $D_{\text{Dirac}} = 4$. Por ende, empleando los diagramas mostrados en la figura 8.4 y usando las reglas efectivas para gluones escalares, las contribuciones SCA-nHV pueden expresarse como

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g \to gg}^{(1,\text{SCA-nHV})} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g \to gg}^{(1,A')} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g \to gg}^{(1,D')} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g \to gg}^{(1,E')}, \qquad (8.3.43)$$

 con

$$\boldsymbol{Sp}_{g \to gg}^{(1,A')} = -\frac{g_{S}^{3} \mu^{3\epsilon} \epsilon}{s_{12}^{2}} C_{A} \boldsymbol{T}^{a}(A) \epsilon_{\mu}(\tilde{P}) \epsilon_{\nu}(p_{1}) \epsilon_{\rho}(p_{2}) d_{\alpha\alpha_{1}}(p_{12},n) V_{3g}(-p_{12}^{\alpha_{1}},p_{1}^{\nu},p_{2}^{\rho})$$
$$\times \int_{q} \frac{(2q - p_{12})_{\mu} (2q - p_{12})_{\alpha}}{q^{2} t_{12q}}, \qquad (8.3.44)$$

$$Sp_{g \to gg}^{(1,D')} = -\frac{g_{S}^{3}\mu^{3\epsilon}\epsilon}{2s_{12}}C_{A}T^{a}(A)\epsilon_{\mu}(\tilde{P})\epsilon_{\nu}(p_{1})\epsilon_{\rho}(p_{2})\int_{q}\frac{(2q-p_{12})_{\mu}}{q^{2}t_{12q}} \times \left[\frac{(2q-p_{1})_{\nu}(2q-2p_{1}-p_{2})_{\rho}}{t_{1q}} - \frac{(2q-p_{2})_{\rho}(2q-2p_{2}-p_{1})_{\nu}}{t_{2q}}\right], \quad (8.3.45)$$

$$Sr_{m}^{(1,E')} = 0 \qquad (8.2.46)$$

$$Sp_{g \to gg}^{(1,E')} = 0.$$
 (8.3.46)

Es importante apreciar que $Sp_{g \to gg}^{(1,E')}$ se anula debido a propiedades del álgebra de color. En concreto, se tiene

$$f_{ade} \left(f_{bex} f_{cdx} + f_{bdx} f_{cex} \right) = 0,$$
 (8.3.47)

en donde se efectuó la contracción del vértice efectivo ssgg con un factor f_{ade} proveniente del vértice de tres gluones.

Tras haber detallado las posibles contribuciones a $Sp_{g\to gg}^{(1)}$, podemos discutir la estructura de los resultados. En primer lugar, sabemos que hay tres momentos físicos involucrados: p_1 , p_2 y \tilde{P} , aunque este último puede reemplazarse por n. Además, se dispone de tres vectores de polarización físicos. Debido a que las patas externas se asocian con estados no masivos y on-shell, debe verificarse que

$$\tilde{P} \cdot \epsilon(\tilde{P}) = 0 = n \cdot \epsilon(\tilde{P}) \Rightarrow p_{12} \cdot (\tilde{P}) = 0,$$
 (8.3.48)

$$p_i \cdot \epsilon(p_i) = 0 = n \cdot \epsilon(p_i) , \ i \in \{1, 2\} ,$$
 (8.3.49)

en donde se impuso que todos los vectores de polarización se anulen al ser contraídos con el vector n. De esta forma, solo se tiene el siguiente conjunto de productos escalares no-nulos

$$\left\{p_1 \cdot \epsilon(p_2), p_2 \cdot \epsilon(p_1), (p_1 - p_2) \cdot \epsilon(\tilde{P})\right\}, \qquad (8.3.50)$$

у

$$\left\{\epsilon(p_1)\cdot\epsilon(p_2),\epsilon(p_1)\cdot\epsilon(\tilde{P}),\epsilon(p_2)\cdot\epsilon(\tilde{P})\right\},\qquad(8.3.51)$$

para lo cual usamos $p_1 \cdot \epsilon(\tilde{P}) = -p_2 \cdot \epsilon(\tilde{P})$. Luego de listar todos los posibles productos escalares, es necesario agruparlos para formar combinaciones que involucren a los tres vectores de polarización y que sean compatibles con la simetría de intercambio 1 \leftrightarrow 2. Así, se obtiene

$$E_1 = \epsilon(p_1) \cdot \epsilon(p_2) p_1 \cdot \epsilon(\tilde{P}), \qquad (8.3.52)$$

$$E_2^{\pm} = p_2 \cdot \epsilon(p_1) \,\epsilon(p_2) \cdot \epsilon(\tilde{P}) \pm p_1 \cdot \epsilon(p_2) \,\epsilon(p_1) \cdot \epsilon(\tilde{P}) \,, \qquad (8.3.53)$$

$$E_3 = p_1 \cdot \epsilon(p_2) p_2 \cdot \epsilon(p_1) p_1 \cdot \epsilon(\tilde{P}), \qquad (8.3.54)$$

y puede apreciarse que E_2^+ es simétrico mientras que E_1, E_2^-, E_3 son combinaciones antisimétricas.

Después de reemplazar las integrales de Feynman en las expresiones para $\boldsymbol{Sp}_{g \to gg}^{(1,i)}$ y sumar sobre todas las contribuciones, se observa que solo dos estructuras aportan al resultado final: $E_1 + E_2^-$ (que es el término proporcional a $\boldsymbol{Sp}_{g \to gg}^{(0)}$) y $E_1 - \frac{2}{s_{12}}E_3$. De esta manera, la contribución de los diagramas de QCD estándar (STD) pueden escribirse como

$$\boldsymbol{Sp}_{g \to gg}^{(1,\text{STD})} = \frac{c_{\Gamma} g_{\text{S}}^{3} \mu^{\epsilon} \boldsymbol{T}^{a}(A)}{\epsilon^{2} s_{12}} \left(\frac{-s_{12} - i0}{\mu^{2}} \right)^{-\epsilon} \\ \times \left[C_{g \to gg}^{(\text{STD},1)} \left(\epsilon(p_{1}) \cdot \epsilon(p_{2}) p_{1} \cdot \epsilon(\tilde{P}) + p_{2} \cdot \epsilon(p_{1}) \epsilon(p_{2}) \cdot \epsilon(\tilde{P}) - p_{1} \cdot \epsilon(p_{2}) \epsilon(p_{1}) \cdot \epsilon(\tilde{P}) \right) \right. \\ \left. + C_{g \to gg}^{(\text{STD},2)} p_{1} \cdot \epsilon(\tilde{P}) \left(\epsilon(p_{1}) \cdot \epsilon(p_{2}) - \frac{2}{s_{12}} p_{1} \cdot \epsilon(p_{2}) p_{2} \cdot \epsilon(p_{1}) \right) \right], \qquad (8.3.55)$$

con los coeficientes $C_{g \to gg}^{(\text{STD},i)}$ dados por

$$C_{g \to gg}^{(\text{STD},1)} = 2C_A \left[1 - {}_2F_1 \left(1, -\epsilon; 1-\epsilon; \frac{z_1}{z_1 - 1} \right) - {}_2F_1 \left(1, -\epsilon; 1-\epsilon; \frac{z_1 - 1}{z_1} \right) \right], (8.3.56)$$

$$C_{g \to gg}^{(\text{STD},2)} = \frac{2\epsilon^2 \left((\delta \epsilon - 1)C_A + N_f (1 - \beta_R \epsilon) \right)}{(\epsilon - 1)(2\epsilon - 1)(2\epsilon - 3)}, \qquad (8.3.57)$$

en donde se fijó $\alpha_R=1$ para evitar el uso de los esquemas HSA/HSB.

Siguiendo lo expresado en la ecuación (6.3.1), $\boldsymbol{Sp}_{g \to gg}^{(1)}$ puede ser reescrito en la forma

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g\to gg}^{(1)} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{H,g\to gg}^{(1)} + \boldsymbol{I}_{g\to gg}^{(1)} \left(p_1, p_2; \tilde{P}\right) \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g\to gg}^{(0)}, \qquad (8.3.58)$$

 con

$$I_{g \to gg}^{(1)}\left(p_{1}, p_{2}; \tilde{P}\right) = \frac{c_{\Gamma}g_{S}^{2}}{\epsilon^{2}} \left(\frac{-s_{12} - i0}{\mu^{2}}\right)^{-\epsilon} C_{A}\left(1 - {}_{2}F_{1}\left(1, -\epsilon; 1 - \epsilon; \frac{z_{1} - 1}{z_{1}}\right)\right) \\ - {}_{2}F_{1}\left(1, -\epsilon; 1 - \epsilon; \frac{z_{1}}{z_{1} - 1}\right)\right), \qquad (8.3.59)$$

$$Sp_{H,g \to gg}^{(1)} = \frac{2c_{\Gamma}g_{S}^{3}\mu^{\epsilon}}{s_{12}} \left(\frac{-s_{12} - i0}{\mu^{2}}\right)^{-\epsilon} T^{a}(A) \frac{C_{A}(\delta\epsilon - 1) + N_{f}(1 - \beta_{R}\epsilon)}{(\epsilon - 1)(2\epsilon - 3)(2\epsilon - 1)}$$

$$\times \quad p_1 \cdot \epsilon(\tilde{P}) \left(\epsilon(p_1) \cdot \epsilon(p_2) - \frac{2}{s_{12}} p_1 \cdot \epsilon(p_2) \, p_2 \cdot \epsilon(p_1) \right) \,, \tag{8.3.60}$$

que concuerda con el comportamiento esperado. Pasando a las contribuciones SCA-nHV, se obtiene

$$\boldsymbol{Sp}_{g \to gg}^{(1,\text{SCA-nHV})} = \frac{c_{\Gamma} g_{\text{S}}^{3} \mu^{\epsilon} \epsilon C_{A} \boldsymbol{T}^{a}(A)}{s_{12}(\epsilon - 1)(2\epsilon - 3)(2\epsilon - 1)} \left(\frac{-s_{12} - \imath 0}{\mu^{2}}\right)^{-\epsilon} p_{1} \cdot \epsilon(\tilde{P}) \\ \times \left(\epsilon(p_{1}) \cdot \epsilon(p_{2}) - \frac{2}{s_{12}} p_{1} \cdot \epsilon(p_{2}) p_{2} \cdot \epsilon(p_{1})\right), \qquad (8.3.61)$$

y comparando con las contribuciones STD en distintos esquemas se llega a

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g \to gg}^{(1,\text{STD},\text{HV})} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g \to gg}^{(1,\text{STD},\text{FDH})} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{g \to gg}^{(1,\text{SCA-nHV})}, \qquad (8.3.62)$$

que es la misma relación encontrada en los procesos $q \to gq$ y $g \to q\bar{q}$.

Para concluir esta discusión, podemos calcular las correcciones a los núcleos de Altarelli-Parisi. A nivel árbol se tiene

$$\left\langle \mu \left| \boldsymbol{P}_{g \to gg}^{(0)} \right| \nu \right\rangle = -\frac{2g_{\rm S}^2 C_A}{z_1 (1 - z_1)} \left[(1 - 2(1 - z_1)z_1) \left((1 - \alpha)(\eta^4)^{\mu\nu} + \alpha(\eta^{D_{\rm ST}})^{\mu\nu} \right) + 2\frac{(1 - z_1)^2 z_1^2}{k_\perp^2} k_\perp^\mu k_\perp^\nu (1 - \alpha\delta\epsilon) \right],$$

$$(8.3.63)$$

$$\langle \hat{P}_{g \to gg}^{(0)} \rangle = \frac{2g_{\rm S}^2 (1 - (1 - z_1)z_1)^2 C_A (1 - \alpha \delta \epsilon)}{(1 - z_1)z_1 (1 - \alpha \epsilon)}, \qquad (8.3.64)$$

para los casos polarizado y no polarizado, respectivamente. Nótese que cuando se emplea la elección $\alpha = 1$, los estados externos tienen $2 - 2\epsilon$ polarizaciones y son tratados como vectores $D_{\rm ST}$ -dimensionales. Por ende, en tal caso, debe utilizarse $\delta = 1$, lo cual nos perite cancelar la dependencia en α de la función de splitting no polarizada. Pasando a las correcciones NLO se obtiene

$$\langle \mu \left| \boldsymbol{P}_{g \to gg}^{(1)} \right| \nu \rangle = c_{\Gamma} g_{\rm S}^2 \left(\frac{-s_{12} - i0}{\mu^2} \right)^{-\epsilon} \left[\frac{C_A}{\epsilon^2} \left(1 - {}_2F_1 \left(1, -\epsilon; 1 - \epsilon; \frac{z_1 - 1}{z_1} \right) \right) \\ - {}_2F_1 \left(1, -\epsilon; 1 - \epsilon; \frac{z_1}{z_1 - 1} \right) \right) \langle \mu \left| \boldsymbol{P}_{g \to gg}^{(0)} \right| \nu \rangle \\ + \frac{2g_{\rm S}^2 C_A \left(1 - 2\alpha\delta(1 - z_1)z_1\epsilon \right) \left(C_A (\delta\epsilon - 1) + N_f (1 - \beta_R \epsilon) \right)}{s_{12}(1 - z_1)z_1(\epsilon - 1)(2\epsilon - 3)(2\epsilon - 1)} k_{\perp}^{\mu} k_{\perp}^{\nu} \right] \\ + \text{ c.c.},$$

$$(8.3.65)$$

para la contribución polarizada, mientras que la función de splitting no polarizada es

$$\begin{aligned} \langle \hat{P}_{g \to gg}^{(1)} \rangle &= c_{\Gamma} g_{\rm S}^2 \left(\frac{-s_{12} - i0}{\mu^2} \right)^{-\epsilon} \frac{C_A}{\epsilon^2} \left[\frac{g_s^2 \epsilon^2 \left(1 - 2\alpha \delta \epsilon z_1 (1 - z_1) \right) \left(C_A (\delta \epsilon - 1) + N_f (1 - \beta_R \epsilon) \right)}{(1 - \alpha \epsilon) (\epsilon - 1) (2\epsilon - 3) (2\epsilon - 1)} \right. \\ &+ \left. \left(1 - {}_2 F_1 \left(1, -\epsilon; 1 - \epsilon; \frac{z_1 - 1}{z_1} \right) - {}_2 F_1 \left(1, -\epsilon; 1 - \epsilon; \frac{z_1}{z_1 - 1} \right) \right) \left\langle \hat{P}_{g \to gg}^{(0)} \right\rangle \right] \\ &+ {\rm c.c.} \,, \end{aligned}$$
(8.3.66)

en donde se utiliza $\alpha = 1$ para CDR/TSC o bien $\alpha = 0$ en los esquemas HV/FDH/DRED. Es útil señalar que los núcleos de Altarelli-Parisi polarizados contienen términos proporcionales a \tilde{P}^{μ} y n^{μ} , pero debido a las relaciones

$$\tilde{P} \cdot \epsilon(\tilde{P}) = n \cdot \epsilon(\tilde{P}) = 0, \qquad (8.3.67)$$

es posible ignorarlos, obteniendo así expresiones más compactas.

3.3. Consistencia y supersimetría

Tras haber calculado las correcciones NLO a todos los posibles procesos de QCD en el límite doble colineal, podemos extraer algunas conclusiones generales. En primer lugar, vemos que la fórmula de Catani predice correctamente la estructura infrarroja en todos los casos. Más aún, la parte divergente de los splittings es la misma para cualquier elección de parámetros (exceptuando el caso $\alpha_R = 0$) y siempre es proporcional al resultado a nivel árbol. Además, la parte remanente no solo es finita sino que solo involucra funciones racionales de z y ϵ .

Por otra parte, podemos analizar el límite supersimétrico de QCD y sus implicaciones sobre las funciones de splitting. A nivel árbol, QCD es compatible con una teoría de Yang-Mills supersimétrica con una sola carga (esto es, $\mathcal{N} = 1$ SYM). Para lograr tal identificación, basta pensar en los quarks como los compañeros supersimétricos de los gluones, denominados gluinos. Nótese que esto no es estrictamente cierto, puesto que los quarks pertenecen a la representación fundamental de SU(3) mientras que los gluones están en la adjunta. Sin embargo, en el contexto del formalismo de descomposición de color, QCD es efectivamente supersimétrica a nivel árbol³. De este modo es posible recuperar las amplitudes primitivas de $\mathcal{N} = 1$ SYM reemplazando quarks por gluinos si se toma el límite $C_A = C_F = N_f = 1$, al menos a nivel árbol. Por supuesto, también es válido utilizar la relación en el sentido inverso; esto es, partir de amplitudes en $\mathcal{N} = 1$ SYM y recuperar las de QCD en el límite mencionado. Esta idea tiene la ventaja de permitir trasladar propiedades de supersimetría a los resultados de QCD e imponer condiciones de consistencia adicionales. Por ejemplo, sabemos que los gluones g y los gluinos \tilde{g} decaen con la misma probabilidad en g y \tilde{g} . Debido a que los núcleos AP miden tales probabilidades de transición se tiene

$$\langle \hat{P}_{g \to gg}^{(0)}(z) \rangle + \langle \hat{P}_{g \to \tilde{g}\tilde{g}}^{(0)}(z) \rangle = \langle \hat{P}_{\tilde{g} \to \tilde{g}g}^{(0)}(z) \rangle + \langle \hat{P}_{\tilde{g} \to \tilde{g}\tilde{g}}^{(0)}(z) \rangle , \qquad (8.3.68)$$

con la dependencia en la fracción de momento z (dada por $a \rightarrow b(z) + c(1 - z)$) indicada de forma explícita. Sin embargo, cuando consideramos $C_A = C_F = N_f = 1$ se tiene

$$\langle \hat{P}_{g \to \tilde{g}\tilde{g}}^{(0)}(z) \rangle \approx \langle \hat{P}_{g \to q\bar{q}}^{(0)}(z) \rangle,$$

$$(8.3.69)$$

$$\langle \hat{P}^{(0)}_{\tilde{g} \to g\tilde{g}}(z) \rangle \approx \langle \hat{P}^{(0)}_{q \to gq}(z) \rangle,$$

$$(8.3.70)$$

en donde \approx se emplea para señalar que la igualdad solo vale en el límite antes mencionado. De esta forma, (8.3.68) se traduce en

$$\langle \hat{P}_{g \to gg}^{(0)}(z) \rangle + \langle \hat{P}_{g \to q\bar{q}}^{(0)}(z) \rangle = \langle \hat{P}_{q \to gq}^{(0)}(z) \rangle + \langle \hat{P}_{q \to gq}^{(0)}(1-z) \rangle, \qquad (8.3.71)$$

³ Para más detalles, consultar la Sección 3 de Ref. (12).

usando $\langle \hat{P}_{q \to qg}^{(0)}(z) \rangle = \langle \hat{P}_{q \to gq}^{(0)}(1-z) \rangle$. A partir de nuestros resultados se puede verificar que esta relación se cumple en los esquemas FDH/DRED y en TSC, como fue observado anteriormente en Ref. (33). El uso de los esquemas HV y CDR conduce a una incompatibilidad con este tipo de identidades, puesto que no contienen el mismo número de grados de libertad bosónicos y fermiónicos al extender la teoría a D dimensiones. Concretamente,

- $n_g = n_q = h_q = 2$ pero $h_g = 2(1 \epsilon)$ en HV (diferencia en los gluones);
- y $n_g = h_g = 2(1 \epsilon)$ pero $n_q = h_q = 2$ en CDR (diferencia en los fermiones).

En otras palabras, CDR (HV) trata a los fermiones (bosones) internos y externos de formas distintas, rompiendo de forma explícita la simetría fermión-bosón propia de cualquier modelo supersimétrico. Por su parte,

- $n_q = n_q = h_q = h_q = 2$ en FDH/DRED;
- $y n_g = n_q = h_q = h_g = 2(1 \epsilon)$ en TSC,

pudiéndose esta última elección considerarse como una extensión de CDR compatible con supersimetría. De algún modo, TSC trata de la misma manera a fermiones y bosones, tanto virtuales como reales.

Para concluir esta sección, debemos mencionar que la relación (8.3.71) sigue siendo válida a NLO cuando se emplean los esquemas FDH/DRED o TSC.

3.4. Sobre las propiedades de crossing

Existen propiedades de simetría que simplifican el cálculo de amplitudes de scattering que involucran partículas físicas. Si la teoría es invariante frente a transformaciones de Poincarè, es posible vincular elementos de matriz cruzando partículas entrantes y salientes⁴. Por ejemplo, usando la convención de momentos salientes se puede calcular $\mathcal{A}(0 \to g(p_1)g(p_2)g(p_3)g(p_4))$ y luego obtener $\mathcal{A}(g(k_1)g(k_2) \to g(p_3)g(p_4))$ efectuando la identificación $p_i \to -k_i$ con i = 1, 2. Concretamente, vale que

$$\mathcal{A}(g(k_1)g(k_2) \to g(p_3)g(p_4)) = \mathcal{A}(0 \to g(-k_1)g(-k_2)g(p_3)g(p_4)) .$$
(8.3.72)

Una transformación en la cual se intercambian partículas entre estado inicial y final se conoce como relación de *crossing*. La forma clásica de comprender su origen es apelando a la interpretación de Stueckelberg, según la cual una antipartícula corresponde a una partícula que se mueve

⁴ Para más detalles, consultar el Capítulo 5.4 de Ref. (1).

atrás en el tiempo. De este modo, producir una partícula en estado final es análogo a considerar una antipartícula en el estado inicial. Es importante señalar que la simetría de crossing es válida a todo orden perturbativo, pues deriva de propiedades generales de la teoría⁵.

Al momento de calcular funciones de splitting la posibilidad de emplear este tipo de relaciones se vuelve menos evidente. Por empezar, cuando calculamos estos objetos debemos emplear amplitudes amputadas con cinemática off-shell. En consecuencia, el partón inicial corresponde a una partícula off-shell mientras que las restantes están en su capa de masa.

En el límite colineal, a nivel árbol existe una relación similar al crossing entre $q \rightarrow gq$ y $g \rightarrow \bar{q}q$. Trabajando con los correspondientes núcleos de Altarelli-Parisi se tiene que

$$w_q \left\langle \hat{P}_{q \to gq}^{(0)}(z_1) \right\rangle = w_g z_1 \left\langle \hat{P}_{g \to \bar{q}q}^{(0)} \left(\frac{1}{z_1} \right) \right\rangle, \qquad (8.3.73)$$

 con

$$w_q = w_{\bar{q}} = 2(1 - \beta \epsilon)C_A,$$
 (8.3.74)

$$w_g = 4(1 - \alpha \epsilon)C_A C_F,$$
 (8.3.75)

factores de promedio sobre color y espín del partón padre. La transformación $f(z_1) \to z_1 f(z_1^{-1})$ puede entenderse en términos físicos. Trabajando en IMF en el límite colineal, el gluón en $q \to gq$ tiene momento $\tilde{P}_g = z_1 \tilde{P}_q$ y el quark padre \tilde{P}_q . Al realizar el intercambio, se tiene que normalizar respecto de \tilde{P}_g y el quark en estado final pasa a tener una fracción de momento $\tilde{z}_1 = z_1^{-1}$. Nótese que esto es estrictamente válido en el límite $s_{12} \to 0$, que corresponde a trabajar con amplitudes on-shell. Además, es necesario remover los factores de promedio sobre color y espín para no introducir una distinción explícita entre las partículas intercambiadas.

Tras haber calculado las correcciones NLO a los núcleos AP, podemos analizar la validez de (8.3.73) a 1-loop. Usando los resultados mostrados en (7.2.51) y (8.3.32) se prueba explícitamente que tal relación deja de cumplirse a 1-loop. Desde el punto de vista computacional, vemos que $q \rightarrow gq$ y $g \rightarrow \bar{q}q$ difieren en su expansión en términos de diagramas de Feynman. En consecuencia, podemos definir

$$\mathcal{J}_{g \to a_1 \dots a_m}^{(1)} = \langle \hat{P}_{g \to a_1 \dots a_m}^{(1)} \rangle - (\Pi(s_{1,m}) + \Pi^*(s_{1,m})) \langle \hat{P}_{g \to a_1 \dots a_m}^{(1)} \rangle, \qquad (8.3.76)$$

$$\mathcal{J}_{q \to a_1 \dots a_m}^{(1)} = \langle \hat{P}_{q \to a_1 \dots a_m}^{(1)} \rangle - (\Sigma(s_{1,m}) + \Sigma^*(s_{1,m})) \langle \hat{P}_{q \to a_1 \dots a_m}^{(1)} \rangle, \qquad (8.3.77)$$

que involucran los mismos diagramas de Feynman. Es importante señalar que aquí estamos usando las expresiones (6.3.32) y (6.3.33) que establecen que las correcciones de autoenergía

⁵ Existen algunas sutilezas relacionadas con la transformación $p \to -k$, puesto que las soluciones físicas son aquellas con energía positiva, o sea $p^0 > 0$. En consecuencia, no es posible satisfacer simultáneamente $k^0 > 0$ y $p^0 > 0$ lo que fuerza a realizar una continuación analítica de las amplitudes de scattering.

al partón padre son proporcionales a las funciones de splitting a nivel árbol. Calculando las funciones \mathcal{J} en el límite doble colineal, se comprueba que no están vinculadas por una relación como (8.3.73). En conclusión, no es posible extender las propiedades de crossing del partón padre más allá del nivel árbol. Podemos justificar este resultado recordando que la transformación $f(z_1) \rightarrow z_1 f(z_1^{-1})$ era válida cuando $s_{12} \rightarrow 0$. Pero las correcciones NLO son proporcionales a $\left(\frac{s_{12}}{\mu^2}\right)^{-\epsilon}$, con lo cual se tiene una identidad trivial de la forma 0 = 0 al considerar el mencionado límite.

4. Functiones de splitting con fotones a NLO

Para concluir este capítulo, estudiamos el límite doble colineal de amplitudes de scattering que involucran fotones. En particular, computamos las correcciones NLO en QCD a los procesos $q \rightarrow \gamma q$ y $\gamma \rightarrow q\bar{q}$, y calculamos las correspondientes funciones de splitting. Además, analizamos la dependencia en el esquema de regularización y efectuamos una comparación de la estructura divergentes de las mismas empleando la fórmula de Catani.

Es importante señalar que los splittings con fotones son relevantes, tanto desde el punto de vista teórico como fenomenológico. Por un lado, al involucrar partículas sin carga de color son más sencillos que los análogos en QCD, lo que permite estudiar mejor su estructura para poder atacar más eficientemente los procesos con más partículas coloreadas. De hecho, esa es la estrategia que seguimos en el Capítulo 9 para analizar el límite triple colineal.

Por otro lado, $\langle \hat{P}_{q \to \gamma q} \rangle$ controla la evolución de las funciones de fragmentación a fotones y es un ingrediente clave para el cálculo de secciones eficaces hadrónicas que involucren fotones. Este tema es analizado en Ref. (80), en el contexto del cálculo de correcciones NLO al proceso $p + p \to \gamma + h$ en colisiones polarizadas (81).

4.1.
$$q \rightarrow q\gamma$$

Este proceso puede considerarse como la versión puramente Abeliana de $q \rightarrow gq$, puesto que no se tiene ninguna corrección que involucre vértices con autointeracciones de gluones. Por lo tanto, después de haber efectuado el cálculo explícito de $q \rightarrow gq$ podemos extraer resultados importantes para $q \rightarrow \gamma q$ sin necesidad de repetir el procedimiento.

Para comenzar, la lista de todos los diagramas de Feynman que contribuyen al proceso hasta $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ se muestra en la figura 8.5. Nótese que son esencialmente los mismos que se utilizaron para $q \to gq$ (ver figuras 7.1 y 7.2), exceptuando aquellos diagramas que tienen el vértice triple



Fig. 8.5: Diagramas de Feynman asociados con $q(\tilde{P}) \to \gamma(p_1)q(p_2)$, hasta $\mathcal{O}(g_S^2)$. También se muestran las contribuciones SCA-nHV.

de gluones. Entonces, a nivel árbol se tiene

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{q\to\gamma q}^{(0)} = \frac{ee_q\mu^{\epsilon}}{s_{12}} \mathrm{Id}_C \,\bar{\boldsymbol{u}}(p_2) \not\in (p_1) \boldsymbol{u}(\tilde{P}) , \qquad (8.4.1)$$

mientras que las correcciones NLO a las contribuciones STD pueden escribirse como

$$\boldsymbol{Sp}_{q \to \gamma q}^{(1,\text{STD})} = c_{\Gamma} g_{\text{S}}^{2} \left(\frac{-s_{12} - i0}{\mu^{2}} \right)^{-\epsilon} \text{Id}_{C} \frac{ee_{q} \mu^{\epsilon} C_{F}}{s_{12} \epsilon^{2}} \left[C_{q \to \gamma q}^{(\text{STD},1)} \bar{u}(p_{2}) \not\in (p_{1}) u(\tilde{P}) \right. \\ \left. + C_{q \to \gamma q}^{(\text{STD},2)} \frac{1}{nP} \bar{u}(p_{2}) \not= u(\tilde{P}) p_{2} \cdot \epsilon(p_{1}) \right], \qquad (8.4.2)$$

con los coeficientes $C_{q \rightarrow \gamma q}^{(\mathrm{STD},i)}$ dados por

$$C_{q \to \gamma q}^{(\text{STD},1)} = \frac{\epsilon^2 (\delta \epsilon - 1)}{(\epsilon - 1)(2\epsilon - 1)} + 2 - 2_2 F_1 \left(1, -\epsilon; 1 - \epsilon; \frac{z_1}{z_1 - 1} \right), \qquad (8.4.3)$$

$$C_{q \to \gamma q}^{(\text{STD},2)} = \frac{1 - \delta\epsilon}{(\epsilon - 1)(2\epsilon - 1)}.$$
(8.4.4)

De forma análoga, las contribuciones SCA-nHV están dadas por

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{q\to\gamma q}^{(1,\text{SCA-nHV})} = c_{\Gamma}g_{\text{S}}^{2} \left(\frac{-s_{12}-\imath 0}{\mu^{2}}\right)^{-\epsilon} \text{Id}_{C} \frac{\epsilon e e_{q}\mu^{\epsilon} C_{F}}{s_{12}(2\epsilon-1)(\epsilon-1)} \left[\bar{u}(p_{2}) \not\in (p_{1})u(\tilde{P}) - \frac{1}{nP}\bar{u}(p_{2})\not= u(\tilde{P})p_{2}\cdot\epsilon(p_{1})\right], \qquad (8.4.5)$$

y es trivial notar que se cumple

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{q\to\gamma q}^{(1,\text{STD},\text{HV})} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{q\to\gamma q}^{(1,\text{STD},\text{FDH})} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{q\to\gamma q}^{(1,\text{SCA-nHV})}, \qquad (8.4.6)$$

lo cual muestra que la cancelación de los grados de libertad asociados a los gluones escalares se compensan independientemente en la parte Abeliana y en la no Abeliana.

A modo de cheque
o de consistencia y siguiendo la ecuación (6.3.1), puede reescribirs
e $\boldsymbol{Sp}_{q\to\gamma q}^{(1)}$ como

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{q\to\gamma q}^{(1)} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{H,q\to\gamma q}^{(1)} + \boldsymbol{I}_{q\to\gamma q}^{(1)} \left(p_1, p_2; \tilde{P} \right) \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{q\to\gamma q}^{(0)}, \qquad (8.4.7)$$

 con

$$\boldsymbol{I}_{q \to \gamma q}^{(1)} = c_{\Gamma} g_{\rm S}^2 \left(\frac{-s_{12} - \imath 0}{\mu^2} \right)^{-\epsilon} \frac{2C_F}{\epsilon^2} \left(1 - {}_2F_1 \left(1, -\epsilon; 1 - \epsilon; \frac{z_1}{z_1 - 1} \right) \right), \quad (8.4.8)$$

$$Sp_{H,q \to \gamma q}^{(1)} = c_{\Gamma} g_{\rm S}^2 \left(\frac{-s_{12} - i0}{\mu^2}\right)^{-\epsilon} \operatorname{Id}_C \frac{ee_q \mu^{\epsilon} C_F(\delta \epsilon - 1)}{s_{12}(2\epsilon - 1)(\epsilon - 1)} \left[\bar{u}(p_2) \not\in (p_1) u(\tilde{P}) - \frac{1}{nP} \bar{u}(p_2) \not= u(\tilde{P}) p_2 \cdot \epsilon(p_1)\right], \qquad (8.4.9)$$

en donde se puede comprobar que todos los términos divergentes (que contienen polos en $\epsilon = 0$ y funciones con branch-cuts) están aislados en el operador I, mientras que las contribuciones que forman parte de $Sp_{H}^{(1)}$ solo involucran funciones racionales y es finita en el límite $\epsilon \to 0$. Más aún, apréciese que las correcciones NLO involucran una nueva estructura espinorial, que se encuentra enteramente contenida en $Sp_{H}^{(1)}$, posibilitando que los términos divergentes sean proporcionales a $Sp_{q\to\gamma q}^{(0)}$.

Por último, pasando a los núcleos de Altarelli-Parisi se verifica que

$$\langle s | \boldsymbol{P}_{q \to \gamma q} | s' \rangle = \delta_{s,s'} \langle \hat{P}_{q \to \gamma q} \rangle, \qquad (8.4.10)$$

por tratarse de un proceso iniciado por un quark en el contexto de un modelo que solo permite interacciones que conservan helicidad. De esta manera, la función de splitting a LO es

$$\langle \hat{P}_{q \to \gamma q}^{(0)} \rangle = e^2 e_q^2 \frac{1 + (1 - z_1)^2 - \alpha \delta \epsilon z_1}{z_1},$$
 (8.4.11)

en donde podemos apreciar que el resultado es independiente del número de polarizaciones fermiones. Por otro lado, a NLO se tiene

$$\langle \hat{P}_{q \to \gamma q}^{(1)} \rangle = c_{\Gamma} g_{\rm S}^2 \left(\frac{-s_{12} - i0}{\mu^2} \right)^{-\epsilon} \frac{C_F}{\epsilon^2} \left[\left(\frac{2 + \epsilon(\epsilon(3 + \delta\epsilon) - 6)}{(\epsilon - 1)(2\epsilon - 1)} - 2_2 F_1 \left(1, -\epsilon; 1 - \epsilon; \frac{z_1}{z_1 - 1} \right) \right) \right] \\ \times \langle \hat{P}_{q \to \gamma q}^{(0)} \rangle + \frac{e^2 e_q^2 \epsilon^2 (z_1 - 1)(z_1 - 2)(1 - \delta\epsilon)}{z_1 (2\epsilon - 1)(\epsilon - 1)} \right] + \text{c.c.},$$

$$(8.4.12)$$

recordando que α nos permite elegir entre los esquemas CDR/TSC ($\alpha = 1$) y HV/FDH/DRED ($\alpha = 0$).

4.2.
$$\gamma \to q\bar{q}$$

Para concluir con el estudio del límite doble colineal, presentamos los resultados para $Sp_{\gamma \to q\bar{q}}$. Los mismos pueden recuperarse partiendo del proceso $g \to q\bar{q}$ y reemplazando la pata inicial por un fotón. Esto nos conduce a ignorar las correcciones de autoenergía al partón inicial, pues son términos de orden superior en e, y también aquellas que involucren vértices de tres gluones. Efectuando estos reemplazos en los diagramas mostrados en la figura 8.1 se concluye que solo es necesario usar un único proceso para cada contribución, como se muestra en la figura 8.6.

La matriz de splitting a nivel árbol está dada por

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{\gamma \to q\bar{q}}^{(0)} = \frac{ee_q \mu^{\epsilon}}{s_{12}} \mathrm{Id}_C \, \bar{u}(p_1) \notin (\tilde{P}) v(p_2) , \qquad (8.4.13)$$

mientras que las correcciones NLO a los diagramas STD es

$$\boldsymbol{Sp}_{\gamma \to q\bar{q}}^{(1,\text{STD})} = c_{\Gamma} g_{\text{S}}^{2} \left(\frac{-s_{12} - \imath 0}{\mu^{2}} \right)^{-\epsilon} \text{Id}_{C} \frac{ee_{q}\mu^{\epsilon}}{\epsilon^{2} s_{12}} \left[C_{\gamma \to q\bar{q}}^{(\text{STD},1)} \bar{u}(p_{1}) \not\in (\tilde{P}) v(p_{2}) \right. \\ \left. + C_{\gamma \to q\bar{q}}^{(\text{STD},2)} \frac{1}{nP} \bar{u}(p_{1}) \not\approx v(p_{2}) p_{1} \cdot \epsilon(\tilde{P}) \right], \qquad (8.4.14)$$

con los coeficientes

$$C_{\gamma \to q\bar{q}}^{(\text{STD},1)} = C_F \frac{\epsilon (3 - \epsilon (2 - \delta (2\epsilon - 1))) - 2}{(\epsilon - 1)(2\epsilon - 1)}, \qquad (8.4.15)$$

$$C_{\gamma \to q\bar{q}}^{(\text{STD},2)} = 0.$$
 (8.4.16)

Apréciese que las contribuciones NLO son proporcionales a $\mathbf{Sp}_{\gamma \to q\bar{q}}^{(0)}$, al igual que en el proceso $g \to q\bar{q}$. Como discutiremos más en detalle en el próximo capítulo, esto se debe a que el proceso es iniciado por una partícula vectorial, lo cual impone más restricciones a la forma del splitting.

Por otra parte, para las correcciones NLO asociadas al diagrama SCA-nHV se tiene

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{\gamma \to q\bar{q}}^{(1,\text{SCA-nHV})} = c_{\Gamma}g_{\text{S}}^{2} \left(\frac{-s_{12}-\imath 0}{\mu^{2}}\right)^{-\epsilon} \frac{C_{F}}{\epsilon-1} \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{\gamma \to q\bar{q}}^{(0)}, \qquad (8.4.17)$$

y nuevamente se encuentra la relación

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{\gamma \to q\bar{q}}^{(1,\text{STD},\text{HV})} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{\gamma \to q\bar{q}}^{(1,\text{STD},\text{FDH})} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{\gamma \to q\bar{q}}^{(1,\text{SCA-nHV})}, \qquad (8.4.18)$$

que permite establecer una conexión entre los resultados en HV y FDH/DRED. Como hemos verificado de forma explícita, esta relación es válida para todas las funciones de splitting doble en el contexto de QCD con fotones.

Analizando la estructura divergente de $\boldsymbol{Sp}_{\gamma o q \bar{q}}^{(1)}$, podemos efectuar la separación

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{\gamma\to q\bar{q}}^{(1)} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{H,\gamma\to q\bar{q}}^{(1)} + \boldsymbol{I}_{\gamma\to q\bar{q}}^{(1)} \left(p_1, p_2; \tilde{P}\right) \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{\gamma\to q\bar{q}}^{(0)}, \qquad (8.4.19)$$

 con

$$\boldsymbol{I}_{\gamma \to q\bar{q}}^{(1)} = c_{\Gamma} g_{\rm S}^2 \left(\frac{-s_{12} - \imath 0}{\mu^2}\right)^{-\epsilon} C_F \left(-\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon}\right) , \qquad (8.4.20)$$

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{H,\gamma\to q\bar{q}}^{(1)} = c_{\Gamma}g_{\mathrm{S}}^{2} \left(\frac{-s_{12}-\imath 0}{\mu^{2}}\right)^{-\epsilon} C_{F}\frac{2(3+\delta)\epsilon-7-\delta}{(\epsilon-1)(2\epsilon-1)} \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{\gamma\to q\bar{q}}^{(0)}, \qquad (8.4.21)$$

que concuerda con lo expuesto en las fórmulas (6.3.1) y (6.3.2).



Fig. 8.6: Diagramas de Feynman asociados con $\gamma(\tilde{P}) \to q(p_1)\bar{q}(p_2)$, hasta $\mathcal{O}(g_S^2)$. También se muestran las contribuciones SCA-nHV.

Respecto de las correcciones a los núcleos de Altarelli-Parisi, se tiene

$$\langle \mu \left| \boldsymbol{P}_{\gamma \to q\bar{q}}^{(0)} \right| \nu \rangle = -e^2 e_q^2 C_A (1 - \beta \epsilon) \left((\eta^{D_{\text{Dirac}}})^{\mu\nu} + \frac{4(z_1 - 1)z_1}{k_\perp^2} k_\perp^\mu k_\perp^\nu \right) , \qquad (8.4.22)$$

$$\langle \hat{P}_{\gamma \to q\bar{q}}^{(0)} \rangle = \frac{e^2 e_q^2 C_A (1 - 2(1 - z_1) z_1 - \alpha \delta \epsilon) (1 - \beta \epsilon)}{1 - \alpha \epsilon},$$
 (8.4.23)

para el término a nivel árbol y

$$\langle \hat{P}_{\gamma \to q\bar{q}}^{(1)} \rangle = c_{\Gamma} g_{\rm S}^2 \left(\frac{-s_{12} - i0}{\mu^2} \right)^{-\epsilon} \frac{C_F}{\epsilon^2} \frac{\epsilon \left(2\delta\epsilon^2 - (\delta+2)\epsilon + 3 \right) - 2}{(\epsilon-1)(2\epsilon-1)} \langle \hat{P}_{\gamma \to q\bar{q}}^{(0)} \rangle + \text{c.c.}, \quad (8.4.24)$$

para las correcciones NLO no polarizadas. Por su parte, el núcleo AP polarizado se expresa como

$$\left\langle \mu \left| \boldsymbol{P}_{\gamma \to q\bar{q}}^{(1)} \right| \nu \right\rangle = \frac{\left\langle \hat{P}_{\gamma \to q\bar{q}}^{(1)} \right\rangle}{\left\langle \hat{P}_{\gamma \to q\bar{q}}^{(0)} \right\rangle} \left\langle \mu \left| \boldsymbol{P}_{\gamma \to q\bar{q}}^{(0)} \right| \nu \right\rangle, \qquad (8.4.25)$$

debido a que $\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{\gamma \to q\bar{q}}^{(1)}$ es proporcional a $\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{\gamma \to q\bar{q}}^{(1)}$.

9. LÍMITE TRIPLE COLINEAL CON FOTONES I

En este capítulo presentamos resultados explícitos para los núcleos de Altarelli-Parisi en el límite triple colineal a 1-loop. Solo se consideran aquellos que involucran al menos un fotón, tanto en el estado final como iniciando el proceso de división. Al final, comentamos algunas simplificaciones adicionales que tienen lugar cuando el partón inicial es un fotón y estudiamos transformaciones de crossing para vincular los distintos procesos.

1. Introducción general

El estudio del límite múltiple colineal es muy importante por diversas razones. En primer lugar, el cálculo de secciones eficaces hadrónicas con precisión NNLO o superior requiere la utilización de los núcleos de Altarelli-Parisi con tres o más partículas colineales. Ello responde a la necesidad de incluir contribuciones reales con dos o más partículas adicionales. Debido a que la radiación real debe ser integrada sobre todo el espacio de fases correspondiente, en tales circunstancias es posible encontrar regiones con tres o más partículas colineales, lo que fuerza a comprender la estructura de divergencias IR de esos procesos.

En el contexto del estudio de las singularidades infrarrojas en procesos de emisión doble real, los primeros cálculos de funciones de splitting triple colineales fueron efectuados por Campbell y Glover en Ref. (82). En el mencionado trabajo los autores analizan todas las posibles regiones con divergencias IR en el espacio de fases de las partículas adicionales. Además de las regiones con dos pares de partículas soft/colineales o combinaciones de tales límites, también tienen en cuenta procesos en los cuales tres partones se vuelven simultáneamente colineales. Los cálculos son efectuados en el formalismo de descomposición de color, utilizando el proceso $e^+e^- \rightarrow a_1 \dots a_5$ (con a_i partones de QCD) como ejemplo. De forma general, concluyen que las únicas contribuciones divergentes son aquellas que involucran partones con una conexión de color. Tal afirmación se relaciona con la estructura de las amplitudes primitivas, las cuales solo presentan polos colineales si hay al menos un par de patas adyacentes emitidas de forma paralela.

A modo de generalización de Ref. (82), Catani y Grazzini computaron los núcleos polarizados de Altarelli-Parisi en Ref. (83). La ventaja de los mismos es que preservan las correlaciones de

espín y, en consecuencia, permiten recuperar el término Δ presente en (6.2.27). Más aún, como señalan los autores en la introducción del mencionado trabajo, el método de sustracción se basa en la construcción de contratérminos locales que requieren mantener las posibles correlaciones de espín. Es importante señalar que todos los cálculos allí efectuados son a nivel árbol e involucran únicamente partones de QCD.

Las funciones de splitting triple colineal a 1-loop comenzaron a ser estudiadas en el contexto de la evolución de PDFs. Concretamente, las ecuaciones DGLAP se pueden extender a órdenes superiores. Esto involucra tener en cuenta no solamente las correcciones virtuales a los núcleos de Altarelli-Parisi dobles sino también las funciones de splitting con múltiples partones colineales, incluso con loops. En particular, el conocimiento de las correcciones a 1-loop al proceso de splitting $q \rightarrow q\bar{Q}Q$ es relevante para comprender las contribuciones perturbativas a la asimetría strange-antistrange como se explica en Ref. (84).

Actualmente se conocen las funciones de splitting múltiple colineal a nivel árbol (82; 83; 65; 85; 86; 87), aunque solamente hay resultados parciales para las contribuciones a 1-loop. Específicamente, en Ref. (72) se presentan las correcciones NLO a la parte antisimétrica del splitting $q \rightarrow q\bar{Q}Q$.

En este trabajo, se calcularon todas las funciones de splitting en el límite triple colineal que incluyen al menos un fotón, a 1-loop en QCD. La discusión que presentamos a continuación se basa en Ref. (88). Tras describir los detalles técnicos del cálculo, en las remanentes secciones presentamos los resultados para los procesos $q \to q\gamma\gamma$, $q \to qg\gamma$ y $g \to q\bar{q}\gamma$. Para concluir el capítulo, se presentan los splittings iniciados por fotones y se discute su estructura. Adicionalmente, mostramos la imposibilidad de efectuar crossings que involucren al partón padre para relacionar los distintos splittings.

2. Detalles del cálculo

Para calcular las funciones de splitting en el límite triple colineal partimos de las ecuaciones (6.2.21) y (6.2.22). En particular, nos centramos en la obtención de las correcciones NLO a los núcleos de Altarelli-Parisi no polarizados para los procesos iniciados por quarks: solamente $g \rightarrow q\bar{q}\gamma$ fue analizado en el caso polarizado. Debido a la complejidad de las expresiones encontradas fue necesario organizar los resultados quitando las contribuciones singulares y agrupando los términos finitos de acuerdo al tipo de funciones transcendentales involucradas.

Concretamente, usando

$$\boldsymbol{Sp}^{(1)}\left(p_1, p_2, p_3; \tilde{P}\right) = \boldsymbol{Sp}_H^{(1)}\left(p_1, p_2, p_3; \tilde{P}\right)$$
(9.2.1)

+
$$I^{(1)}\left(p_1, p_2, p_3; \tilde{P}\right) Sp^{(0)}\left(p_1, p_2, p_3; \tilde{P}\right)$$
,

presentamos la corrección NLO en la forma

$$\langle \hat{P}_{a \to a_{1} \cdots a_{3}}^{(1)} \rangle = \left(\frac{s_{123}}{2 \,\mu^{2\epsilon}} \right)^{2} \left(\overline{\boldsymbol{S} \boldsymbol{p}_{a \to a_{1} \dots a_{3}}^{(1)} \left(\boldsymbol{S} \boldsymbol{p}_{a \to a_{1} \dots a_{3}}^{(0)} \right)^{\dagger}} + \text{c.c.} \right)$$

$$= 2 \operatorname{Re} \left(\boldsymbol{I}_{a \to a_{1} \cdots a_{3}}^{(1)} (p_{1}, \dots, p_{3}; \widetilde{P}) \right) \langle \hat{P}_{a \to a_{1} \cdots a_{3}}^{(0)} \rangle$$

$$+ \left(\langle \hat{P}_{a \to a_{1} \cdots a_{3}}^{(1)} \rangle + \text{c.c.} \right) , \qquad (9.2.2)$$

con $I^{(1)}$ dada por (6.3.6) en el caso m = 3. Luego, trabajando con la parte finita, se lleva a cabo una clasificación de los distintos términos de acuerdo a la *transcendentalidad* de los mismos. La noción de peso transcendental está relacionada con la cantidad de integrales iteradas de funciones racionales necesarias para definir alguna expresión específica. De esta forma, las funciones racionales (incluyendo las constantes), tienen peso 0; $\log(x) \ge \pi$ tienen peso 1; $\sum i_n(x)$ $\sum \zeta_n$ tienen peso n. Debido a que se trata de una cantidad multiplicativa, f(x)g(y) tiene peso n+m, siendo f $\ge g$ funciones de peso n $\ge m$, respectivamente. Además de estos, es útil señalar que se sabe que todas las amplitudes de scattering a 1-loop en QCD pueden ser expandidas utilizando funciones de peso 2 (inclusive) cuando se consideran solamente contribuciones de orden ϵ^0 (como máximo). Tras estas aclaraciones, podemos escribir

$$\langle \hat{P}_{a \to a_1 \cdots a_3}^{(1) \text{ fn.}} \rangle = c^{a \to a_1 \cdots a_m} \left[C^{(0)} + \sum_{i=1}^2 \sum_j C_j^{(i)} F_j^{(i)}(\{s_{rl}, z_k\}) + \mathcal{O}(\epsilon) \right], \qquad (9.2.3)$$

en donde $F_j^{(i)}$ denota una base del espacio de funciones de peso transcendental *i* (requerido para expandir el resultado) y $C_j^{(i)}$ son los correspondientes coeficientes. Aquí $c^{a \to a_1 \cdots a_m}$ es un factor de normalización que depende del proceso y que incluye los acoplamientos. Resulta muy importante notar que solo se están manteniendo los términos relevantes en el límite $\epsilon \to 0$.

Respecto de la representación de los momentos de las partículas, se utilizó la parametrización de Sudakov definida en el Capítulo 6. En particular, especificando m = 3, se introdujo la dirección colineal \tilde{P} de acuerdo a (6.2.9) y

$$p_i^{\mu} = z_i \widetilde{P}^{\mu} + (k_{\perp})_i^{\mu} - \frac{(k_{\perp})_i^2}{z_i} \frac{n^{\mu}}{2 n \cdot \widetilde{P}}, \qquad (9.2.4)$$

con $(k_{\perp})_i$ componente transversa de la partícula *i*. Las fracciones de momento se generalizan de forma directa a partir de la definición dada en (6.2.3), mientras que los vectores $(k_{\perp})_i$ verifican

$$(k_{\perp})_i \cdot P = 0 = (k_{\perp})_i \cdot n,$$
 (9.2.5)

junto con la restricción

$$\sum_{i=1}^{3} (k_{\perp})_{i}^{\mu} = 0, \qquad (9.2.6)$$

que equivale a imponer la condición de conservación de momento en el plano transverso. Sabiendo que \tilde{P} y n son vectores tipo luz, y que los partones salientes son estados no masivos on-shell, es posible escribir

$$s_{ij} = 2 p_i \cdot p_j = \frac{-1}{z_i z_j} \left(z_i (k_\perp)_j + z_j (k_\perp)_i \right)^2, \qquad (9.2.7)$$

$$s_{123} = -\sum_{i} \frac{(k_{\perp})_{i}^{2}}{z_{i}},$$
(9.2.8)

lo que exhibe la conexión entre las variables $s_{ij} \ge (k_{\perp})_i^2$.

Por otro lado, los cálculos fueron realizados utilizando el esquema CDR y considerando que todos los invariantes cinemáticos son positivos ($s_{ij} > 0 \text{ con } i, j \in C$). Esta última elección está motivada en la discusión referida a la validez de la factorización colineal estricta, la cual solo tiene lugar en configuraciones TL (71).

3. Procesos iniciados por partones de QCD

Centrándonos en el límite triple colineal y usando la notación introducida anteriormente, se tiene m = 3 (número de partículas colineales). Sin embargo, el valor de \bar{m} (número de partículas colineales de QCD) depende del proceso estudiado. Como estamos interesados en correcciones de QCD, todos los procesos involucran al menos un partón de QCD. Más aún, en esta sección se consideran aquellos iniciados por quarks y gluones exclusivamente. Entonces, para $\bar{m} = 1$ solo se tiene $a \to a\gamma\gamma$ con a un quark o gluón. Pero como $Sp_{g\to g\gamma\gamma}^{(0)} = 0$, la única configuración relevante con $\bar{m} = 1$ es $\langle \hat{P}_{q\to q\gamma\gamma}^{(0)} \rangle$.

Cuando $\bar{m} = 2$ hay más posibilidades. El proceso puede ser escrito de forma genérica como $P(a, b) \rightarrow ab\gamma$, en donde P(a, b) denota el partón padre perteneciente a QCD. Si P(a, b) = q luego a = q, b = g o viceversa. Pero cuando P(a, b) = g puede ocurrir que $a = q, b = \bar{q}$ (y viceversa) o bien a = b = g. Las únicas funciones de splitting relevantes serán $\langle \hat{P}_{q \rightarrow qg\gamma} \rangle$ y $\langle \hat{P}_{g \rightarrow q\bar{q}\gamma} \rangle$, debido a que $\boldsymbol{Sp}_{g \rightarrow gg\gamma}^{(0)} = 0$.

Como se mencionó al comienzo del capítulo, los cálculos fueron realizados en el contexto de DREG, empleando el esquema CDR. Esta elección estuvo motivada por cuestiones técnicas relacionadas con la implementación del cálculo. En particular, CDR trata de la misma forma a los gluones internos y externos, lo que nos permitió utilizar las mismas rutinas computacionales en ambos casos. De todos modos, es posible recuperar los resultados en otros esquemas apelando al cálculo de contribuciones con gluones escalares, como mostramos en el Capítulo 7. Más aún, en este caso particular solo nos interesan las correcciones $\mathcal{O}(\epsilon^0)$, razón por la cual podemos explotar (6.3.6) reemplazando los coeficientes de sabor y $\tilde{\beta}_0^{\text{RS}}$ por los valores adecuados según el esquema.

A continuación, se muestran los resultado para el splitting $q \to q\gamma\gamma$ a NLO. Luego calculamos $q \to qg\gamma$ y finalmente $Sp_{g\to q\bar{q}\gamma}^{(0)}$. El orden elegido responde a la posibilidad de usar información de los procesos previos para simplificar los splittings más complejos. Haremos especial hincapié en ese detalle durante la exposición de los resultados.

3.1.
$$q \rightarrow q\gamma\gamma$$

Comencemos estudiando el proceso $q \to q\gamma\gamma$. En términos de la estructura de color se trata de la configuración más sencilla, pues es proporcional a la matriz identidad Id_C. A nivel árbol, la amplitud de splitting correspondiente viene dada por

$$Sp_{q \to q_{1} \gamma_{2} \gamma_{3}}^{(0)(a_{1};a)} = \frac{e^{2} e_{q}^{2} \mu^{2\epsilon} \operatorname{Id}_{C}^{a_{1}a}}{s_{123} s_{13}} \bar{u}(p_{1}) \left(\notin(p_{3}) \not p_{3} + 2 p_{1} \cdot \epsilon(p_{3}) \right) \notin(p_{2}) u(\widetilde{P}) + (2 \leftrightarrow 3), \qquad (9.3.1)$$

en donde hacemos uso de la evidente simetría de intercambio $2 \leftrightarrow 3$.



Fig. 9.1: Diagramas que contribuyen al proceso de splitting $q \rightarrow q\gamma\gamma$ a NLO. Debido a la simetría de intercambio solo se muestran algunos diagramas; los restantes pueden ser recuperados intercambiando las partículas 2 y 3.

Con el objetivo de reducir las expresiones obtenidas y mostrar de forma explícita que los

núcleos de Altarelli-Parisi son cantidades sin dimensiones, se introduce la notación

$$x_i = \frac{-s_{jk} - i0}{-s_{123} - i0} , \qquad (9.3.2)$$

en donde (i, j, k) es un reordenamiento de los índices $\{1, 2, 3\}$ y se define el caso especial $x_0 \equiv 1$. Es importante apreciar estas cantidades dependen de la configuración cinemática empleada a través del signo de la prescripción *i*0. Cuando las variables x_i son parte del argumento de una función racional, es posible eliminar la dependencia en *i*0. Para ser más específicos, como *i*0 tiende a cero vale

$$x_i \approx \frac{s_{jk}}{s_{123}} - i0 \frac{s_{jk} - s_{123}}{s_{123}^2}.$$
 (9.3.3)

Luego si f función racional continua,

$$f(x_i) \approx f\left(\frac{s_{jk}}{s_{123}}\right) + \mathcal{O}(i0),$$
 (9.3.4)

aunque el requisito de continuidad puede relajarse a la región de parámetros $\{x_i\}$ físicos. Sin embargo, en la expansión de las distintas contribuciones a la corrección NLO aparecen funciones transcendentales, las cuales tienen branch-cuts y son sensibles a la prescripción empleada. En consecuencia, es necesario mantener la definición (9.3.2) en tales funciones. De todos modos, los coeficientes que multiplican a las funciones transcendentales son racionales, con lo cual allí puede efectuarse el reemplazo $x_i \rightarrow s_{jk}/s_{123}$.

Por otro lado también resulta conveniente definir

$$\Delta_{i',j'}^{i,j} \equiv x_i z_j + x_{i'}(z_{j'} - 1), \qquad (9.3.5)$$

$$\bar{\Delta}_{i',j'}^{i,j} \equiv x_i z_j - x_{i'} (z_{j'} - 1) , \qquad (9.3.6)$$

en donde los índices representan partículas colineales y se elije $z_0 \equiv 1$. Empleando esta notación podemos reescribir el núcleo de Altarelli-Parisi no polarizado a nivel árbol como

$$\langle \hat{P}_{q \to q_1 \gamma_2 \gamma_3}^{(0)} \rangle = \frac{e^4 e_q^4}{x_2} \left(\frac{\langle \mathcal{P}_{q_1 \gamma_2}^{(0)} \rangle}{z_2} \left(1 + \frac{(1+x_2)z_1}{x_3} \right) + (\Delta - 1) \left(\Delta \left(x_1 - \frac{z_1(x_1+1)}{1-x_1} + \frac{z_1}{2x_3} \right) + x_3 + z_1 - z_2 + 2 \right) \right) + (2 \leftrightarrow 3),$$

$$(9.3.7)$$

en donde $\Delta = \alpha \epsilon$ y α es el parámetro que controla la cantidad de grados de libertad de los gluones externos, y nos permite elegir entre los esquemas FDH/HV ($\alpha = 0$) y CDR ($\alpha = 1$). En (9.3.7) se introdujo la notación

$$\langle \mathcal{P}_{q_1\gamma_2}^{(0)} \rangle = \frac{\langle \hat{P}_{q \to q_1\gamma_2}^{(0)} \rangle}{e^2 e_q^2}, \qquad (9.3.8)$$

para identificar las contribuciones que involucran a los procesos de splitting con fotones en el límite doble colineal.

Pasando a las correcciones NLO, utilizamos fuertemente la descomposición sugerida en las ecuaciones (9.2.2) y (9.2.3). El operador que controla las divergencias infrarrojas viene dado por

$$\boldsymbol{I}_{q \to q_1 \gamma_2 \gamma_3}^{(1)}(p_1, p_2, p_3; \widetilde{P}) = 2c_{\Gamma} g_{\rm S}^2 C_F \left(\frac{-s_{123} - \imath 0}{\mu^2}\right)^{-\epsilon} \frac{1 - z_1^{-\epsilon}}{\epsilon^2} , \qquad (9.3.9)$$

y concuerda con la expresión hallada mediante el cálculo explícito.

Por otro lado, el coeficiente racional es

$$C^{(0)} = \frac{\langle \mathcal{P}_{q_1\gamma_2}^{(0)} \rangle (z_1 - 1)(x_1(x_2 - 1) + (x_3 - 1)z_2)}{x_1^2 x_2(x_3 - 1)z_2} + \frac{(x_1 - 1)(\Delta_{0,1}^{1,0} - 3)}{x_1 x_2 z_2} + \frac{3x_1^2 \bar{\Delta}_{0,2}^{3,0} - z_2}{x_1^2(1 - x_2)x_2} + \frac{(\Delta_{0,1}^{1,0})^2 + 2x_1 z_2 + 2(1 - x_1)^2}{x_1^2 x_2} + \frac{\Delta_{0,1}^{1,2} - x_1 z_3}{x_1^2(1 - x_2)} + \frac{z_1 (x_1^2 + 2(x_1 + 1)x_3)}{x_1^2(x_3 - 1)x_3 z_2} + \frac{1}{x_1^2 z_2} \left(\frac{x_1^3}{1 - x_2} + \frac{2z_1}{x_2}\right) - \frac{3(1 - x_2)z_1}{x_1 x_2 x_3 z_2} + \frac{4(z_1 - 1)}{x_1 z_2} + (2 \leftrightarrow 3), \qquad (9.3.10)$$

y el factor global viene dado por

$$c^{q \to q\gamma\gamma} = e^4 e_q^4 g_{\rm S}^2 C_F \,. \tag{9.3.11}$$

A modo de observación adicional, nótese que en esta expresión efectuamos la aproximación

$$\langle \mathcal{P}_{q_1\gamma_2}^{(0)} \rangle \rightarrow \frac{1+z_1^2}{1-z_1},$$

$$(9.3.12)$$

pues solamente se retienen las contribuciones $\mathcal{O}(\epsilon^0)$. La misma será aplicada en los restantes términos, con el objetivo de simplificar la notación y de mostrar la conexión en el proceso de splitting doble.

Respecto a las componentes de peso transcendental 1, se encuentra que la base de funciones asociada es

$$F_1^{(1)} = \log(x_1) , \qquad (9.3.13)$$

$$F_2^{(1)} = \log(x_3)$$
 (9.3.14)

Es importante apreciar que estos logaritmos dependen solamente de cocientes de variables cinemáticas, lo cual permite asegurar la integrabilidad de estas contribuciones. Teniendo en mente el método de sustracción, estos términos forman parte de las contribuciones necesarias para computar observables con precisión N³LO. Por otro lado, la simetría del proceso analizado nos permiten representar los resultados como

$$\langle \hat{P}_{q \to q_1 \gamma_2 \gamma_3}^{(1) \text{ fin.}} \rangle |_{w=1} = c^{q \to q \gamma \gamma} \left[\sum_{i=1}^2 C_i^{(1)} F_i^{(1)} + (2 \leftrightarrow 3) \right],$$
 (9.3.15)

en donde

$$\begin{split} C_1^{(1)} &= \frac{2\Delta_{2,3}^{0,1}((z_3-1)\Delta_{2,3}^{0,1}+x_3(z_1+z_3(2z_2+z_3-2)+1))}{(1-x_1)x_3^2 z_2 z_3} + \frac{4x_2\bar{\Delta}_{0,3}^{3,0}}{x_3(1-x_1)} \\ &+ \frac{2z_2 z_3(x_1+z_1)+(z_1+1)z_1}{(x_1-1)z_2 z_3}, \end{split} \tag{9.3.16} \\ C_2^{(1)} &= \frac{\Delta_{0,1}^{1,0}}{1-x_3} \left(\frac{2(\Delta_{0,1}^{1,0}-z_1+1)}{x_1 x_2(1-z_1)z_2} + \frac{\Delta_{0,1}^{1,0}+2z_1}{x_1 x_3 z_3} + \frac{1}{x_1 z_2} - \frac{x_2(1-z_1)-(1-x_3)(5z_1-2)}{x_2(1-x_3)(1-z_1)z_2} \right) \\ &- \frac{\Delta_{0,1}^{1,0}}{(1-z_1)z_2} \left(\frac{z_1(3x_1+4x_2)+x_1-z_1+1}{x_1 x_2(1-x_3)} + \frac{2}{x_2^2} \right) - 4 \right) \\ &+ \frac{1}{1-x_3} \left(2\Delta_{0,2}^{2,0} - \frac{3x_1^2\Delta_{0,3}^{1,0}+x_1(z_2-z_3)+z_2+2z_3}{x_1^2(1-x_3)} + \frac{1}{z_2} \left(\frac{3(1-z_1)z_1}{x_1} - \frac{2\Delta_{0,1}^{1,1}}{x_1(1-x_3)} \right) \right) \\ &+ \frac{x_1(x_1^2(z_1-z_2+2)-x_1(z_3+1)+4z_1+z_2-2)-2z_1-z_2+2}{x_1^2 x_2} + \frac{x_1}{(1-x_3)z_3} \\ &+ \frac{x_1z_1^2(2x_1z_1+x_2(z_1-2))}{x_2^2(z_1-1)z_3} - \frac{(x_1+3)z_1^2-4z_1+1}{x_1z_3} - 2 \right) \\ &+ \frac{1-x_1}{1-x_3} \left(\frac{2(x_1+z_1)-z_2-\bar{\Delta}_{0,1}^{1,3}}{x_1 x_3} - \frac{2(\Delta_{0,1}^{1,1}-\bar{\Delta}_{0,2}^{1,2}+2x_1)}{x_2^2} \right) . \end{aligned}$$

Al analizar los términos de transcendentalidad 2, podemos explotar la simetría de intercambio $2 \leftrightarrow 3$ para minimizar el tamaño de la base funciones. En particular, se tiene

$$\langle \hat{P}_{q \to q_1 \gamma_2 \gamma_3}^{(1) \text{ fin.}} \rangle |_{w=2} = c^{q \to q \gamma \gamma} \left[\sum_{i=1}^{7} C_i^{(2)} F_i^{(2)} + (2 \leftrightarrow 3) \right],$$
 (9.3.18)

con la base

$$F_1^{(2)} = \log^2(z_1) , \qquad (9.3.19)$$

$$F_2^{(2)} = \frac{\pi^2}{6} - \text{Li}_2 (1 - x_1) , \qquad (9.3.20)$$

$$F_3^{(2)} = \log(x_1)\log(z_1), \qquad (9.3.21)$$

$$F_4^{(2)} = \text{Li}_2(1-x_2) + \log(x_1)\log(x_2),$$
 (9.3.22)

$$F_5^{(2)} = \mathcal{R}(x_1, x_2) + 2\operatorname{Li}_2(1 - x_2) + 2\log(x_1)\log(x_2), \qquad (9.3.23)$$

$$F_{6}^{(2)} = \operatorname{Li}_{2}\left(\frac{\Delta_{0,2}^{2,0}}{z_{2}-1}\right) - \operatorname{Li}_{2}\left(1-x_{2}\right) - \operatorname{Li}_{2}\left(-\frac{z_{3}}{z_{1}}\right) - \operatorname{Li}_{2}\left(\frac{z_{2}}{z_{2}-1}\right) - \log(x_{2})\log\left(\frac{1-z_{2}}{z_{1}}\right), \qquad (9.3.24)$$

$$F_7^{(2)} = \operatorname{Li}_2(z_2) + \log\left(\frac{1-z_2}{z_1}\right) \log\left(\frac{x_1(1-z_2)}{x_2}\right) + \log(x_1)\log(z_1), \quad (9.3.25)$$

en donde $\Delta_{0,2}^{2,0} = x_2 + z_2 - 1$ apelando a la notación definida en (9.3.5). Las primeras componentes de la base son simétricas, mientras que las restantes no poseen propiedades de simetría bien definidas ante el intercambio 2 \leftrightarrow 3. Por otro lado, es útil definir la función

$$\mathcal{R}(x_1, x_2) = \frac{\pi^2}{6} - \log(x_1) \log(x_2) - \operatorname{Li}_2(1 - x_1) - \operatorname{Li}_2(1 - x_2) , \qquad (9.3.26)$$

que no solamente nos permite reescribir $F_5^{(2)}$, sino que también aparecerá en todos los procesos de splitting estudiados. Al final de este capítulo motivaremos el origen de $\mathcal{R}(x_1, x_2)$ al analizar la estructura de los splittings triples iniciados por fotones. Notemos que $\mathcal{R}(x_1, x_2) = 0$ en el límite $x_3 \to 0$ puesto que $x_1 + x_2 = 1$ y la identidad de Euler establece

$$\frac{\pi^2}{6} - \log(x_1)\log(1 - x_1) = \operatorname{Li}_2(1 - x_1) + \operatorname{Li}_2(x_1) , \qquad (9.3.27)$$

que es equivalente a $\mathcal{R}(x_1, x_2) = 0.$

Siguiendo con la presentación de los resultados, los coeficientes asociados a la base de peso 2 vienen dados por

$$C_{1}^{(2)} = \frac{2z_{1} (z_{2}z_{3} + (1 - z_{2})^{2})}{x_{2}x_{3}z_{2}z_{3}},$$

$$(9.3.28)$$

$$C_{2}^{(2)} = \frac{4(1 - z_{2})(\bar{\Delta}_{1,2}^{0,3})^{2}}{x_{2}^{3}z_{2}z_{3}} - \frac{16x_{1}(1 - z_{2})^{2}}{x_{2}^{3}z_{2}} - \frac{2(1 - x_{1})^{2} (3x_{1}z_{2}z_{3} + z_{1} (z_{1}^{2} + 1)))}{x_{1}x_{2}x_{3}z_{2}z_{3}}$$

$$+ \frac{4z_{1}(2(1 - z_{2})z_{3} - \bar{\Delta}_{1,2}^{0,3})}{x_{2}^{2}z_{2}z_{3}} + \frac{4(z_{2}(x_{1} - 2z_{1} - z_{3}) + (1 - z_{3})^{2})}{x_{3}z_{2}}$$

$$+ \frac{4(1 - z_{3})^{2}}{x_{2}z_{2}},$$

$$(9.3.29)$$

$$C_3^{(2)} = \frac{4\left(z_1(1-z_2) + (1-z_3)^3\right)}{x_3 z_2 z_3} - \frac{4x_2}{x_3}, \qquad (9.3.30)$$

para la parte que involucra funciones simétricas, mientras que

$$C_4^{(2)} = -\frac{2(x_3z_1 - \Delta_{0,2}^{2,0} - x_1z_3)\left((z_1^2 + 1)\Delta_{3,2}^{2,2} - x_1z_2z_3(2x_2 + x_3)\right)}{x_1x_2x_3z_2z_3\Delta_{0,2}^{2,0}}, \qquad (9.3.31)$$

$$C_{5}^{(2)} = -\frac{2\langle \mathcal{P}_{q_{1}\gamma_{2}}^{(0)}\rangle(x_{2}z_{2}\bar{\Delta}_{0,1}^{1,0} + x_{3}(z_{1}-1)(x_{1}(z_{2}-1) + z_{1}-z_{2}+1))}{x_{1}x_{2}x_{3}z_{2}z_{3}} + \frac{2\Delta_{0,1}^{1,0}(\Delta_{0,1}^{1,0} - x_{3}z_{1})}{x_{3}^{3}(z_{1}-1)z_{3}} - \frac{2x_{1}^{2}z_{1}^{3} - 2x_{1}x_{3}z_{1}^{2} + 2x_{3}^{2}(z_{1}+1)z_{1}}{x_{3}^{3}(1-z_{1})z_{2}} + \frac{4(1-x_{1})(2x_{2}+x_{3})}{x_{2}x_{3}} - \frac{2(1-x_{1})(x_{1}(2z_{1}+z_{2}+1) - z_{2}-1)}{x_{3}^{3}} + \frac{4z_{1}}{x_{3}^{2}} + \frac{2}{x_{3}z_{3}} - 4, \qquad (9.3.32)$$

$$C_6^{(2)} = -\frac{2\langle \mathcal{P}_{q_1\gamma_2}^{(0)}\rangle(1-z_1)((z_1-1)\Delta_{0,3}^{3,0}+x_1(z_1-z_2)-z_1z_3)}{x_1x_2x_3z_2z_3}, \qquad (9.3.33)$$

$$C_{7}^{(2)} = \frac{2\langle \mathcal{P}_{q_{1}\gamma_{2}}^{(0)} \rangle}{x_{2}x_{3}\Delta_{0,2}^{2,0}} \left(\frac{x_{2}\Delta_{0,1}^{1,0} + x_{2}x_{3}(1-z_{1}) + 2x_{3}z_{1}^{2}}{z_{3}} + \frac{x_{1}x_{2}z_{1} + x_{2}x_{3}(z_{1}-1) + 2x_{3}}{z_{2}} \right) - \frac{2(x_{1}(z_{2}-1) + 2z_{1}^{2} + z_{1}(3-2z_{2}) + 2z_{2}^{2} - 7z_{2} + 7)}{x_{2}\Delta_{0,2}^{2,0}} + \frac{4\Delta_{1,3}^{0,2}}{\Delta_{0,2}^{2,0}} \\ + \frac{2(z_{1}-2z_{2}+3)}{\Delta_{0,2}^{2,0}}, \qquad (9.3.34)$$

son los que expanden las restantes contribuciones.

3.2. $q \rightarrow qg\gamma$

Siguiendo en orden ascendente de complejidad, el próximo paso consiste en reemplazar un fotón por un gluón. Esto da lugar a expresiones más complicadas, aunque es posible establecer relaciones con los resultados para el proceso $q \rightarrow q\gamma\gamma$. Con el fin de encontrar tales relaciones, observemos los diagramas de Feynman que se muestran en la figura 9.2. A nivel árbol, se tiene

$$Sp_{q \to q_{1}g_{2}\gamma_{3}}^{(0)(a_{1},\alpha_{2};a)} = \frac{e \, e_{q} \, \mu^{2\epsilon} \boldsymbol{T}_{a_{1}a}^{\alpha_{2}}}{s_{123}} \bar{u}(p_{1}) \left[\left(\boldsymbol{\ell}(p_{3}) \boldsymbol{\not{p}}_{3} + 2 \, p_{1} \cdot \boldsymbol{\epsilon}(p_{3}) \right) \frac{\boldsymbol{\ell}(p_{2})}{s_{13}} + (2 \leftrightarrow 3) \right] \, u(\widetilde{P}) \\ = \boldsymbol{T}_{a_{1}a}^{\alpha_{2}} \, \frac{g_{S}}{ee_{q}} Sp_{q \to q_{1}\gamma_{2}\gamma_{3}}^{(0)(i_{1};i)}, \qquad (9.3.35)$$

como consecuencia de que ambos procesos comparten la misma estructura cinemática. Tal observación resulta evidente en el contexto del formalismo de descomposición de color, ya que este $Sp_{q\to q_1g_2\gamma_3}^{(0)}$ tiene una estructura trivial (pues es proporcional a T_{ij}^a) y los vértices con gluones son iguales a aquellos con fotones. Por ende, también se verifica que

$$\langle \hat{P}_{q \to q_1 g_2 \gamma_3}^{(0)} \rangle = C_F \frac{g_{\rm S}^2}{e^2 e_q^2} \langle \hat{P}_{q \to q_1 \gamma_2 \gamma_3}^{(0)} \rangle,$$
 (9.3.36)

para el núcleo de Altarelli-Parisi no polarizado.

También es útil señalar que el proceso $q \rightarrow qg\gamma$ no tiene una simetría de intercambio bien definida. Si bien es cierto que la estructura cinemática a nivel árbol es simétrica ante 2 \leftrightarrow 3, la presencia de una estructura de color no trivial conduce a correlaciones que rompen tal simetría.



Fig. 9.2: Diagramas que contribuyen al proceso de splitting $q \rightarrow qg\gamma$. Solamente se muestran algunos diagramas: los restantes pueden recuperarse intercambiando las partículas 2 y 3. Tales contribuciones se asocian a los términos abelianos y tienen la misma estructura cinemática que los presentes en $q \rightarrow q\gamma\gamma$. Los diagramas con la etiqueta NA deben ser contados solo una vez, puesto que provienen de las interacciones no abelianas.

Para obtener las correcciones a NLO, se usa nuevamente la descomposición sugerida en las ecuaciones (9.2.2) y (9.2.3). La estructura del operador de inserción $I^{(1)}$ está dada por

$$\mathbf{I}_{q \to q_{1}g_{2}\gamma_{3}}^{(1)}(p_{1}, p_{2}, p_{3}; \widetilde{P}) = \frac{c_{\Gamma}g_{S}^{2}}{\epsilon^{2}} \left(\frac{-s_{123} - i0}{\mu^{2}}\right)^{-\epsilon} \left[2C_{F} - C_{A}\left(x_{3}^{-\epsilon} + z_{2}^{-\epsilon}\right) - D_{A}z_{1}^{-\epsilon}\right] \\
= \frac{D_{A}}{2C_{F}} \mathbf{I}_{q \to q_{1}\gamma_{2}\gamma_{3}}^{(1)}\left(p_{1}, p_{2}, p_{3}; \widetilde{P}\right) \\
+ \frac{c_{\Gamma}g_{S}^{2}}{\epsilon^{2}} \left(\frac{-s_{123} - i0}{\mu^{2}}\right)^{-\epsilon} C_{A}\left(1 - x_{3}^{-\epsilon} - z_{2}^{-\epsilon}\right), \quad (9.3.37)$$

en donde se utilizó $D_A = 2C_F - C_A$. Es importante señalar que encontramos un completo acuerdo entre la estructura de polos infrarrojos de nuestros resultados y aquellos predichos por (6.3.6). Más aún, como vemos en (9.3.37), $q \to q\gamma\gamma$ y $q \to qg\gamma$ comparten parcialmente sus términos divergentes. Antes de presentar de forma explícita los resultados, es útil efectuar un análisis de los diagramas de Feynman que definen las correcciones NLO. Si solo miramos la topología, puede apreciarse que muchos de ellos estaban presentes en la expansión de $\boldsymbol{Sp}_{q\to q_1\gamma_2\gamma_3}^{(1)}$ (ver figura 9.1). Debido a que un fotón fue reemplazo por un gluón, el proceso involucra una matriz de color adicional. Pero, en estos diagramas, la estructura cinemática permanece inalterada y solo algunos factores de color tienen que ser corregidos. A nivel de la amplitud, en $q \to q\gamma\gamma$ había un factor de color global $(\boldsymbol{T}^b\boldsymbol{T}^b)_{i_1i} = C_F \operatorname{Id}_{Ci_1i}$ originado por la presencia de un loop con un gluón en su interior. Sin embargo, en $q \to qg\gamma$ se tiene otra matriz de color \boldsymbol{T}^a que se encuentra asociada con el gluón externo. La falta de conmutatividad de los generadores de SU(3) conduce a dos configuraciones posibles:

- $(T^bT^bT^a)_{i_1i} = \frac{D_A+C_A}{2}T^a_{i_1i}$ cuando el gluón externo interacciona con el fermión virtual contenido en el loop;
- o bien, $(\mathbf{T}^b \mathbf{T}^a \mathbf{T}^b)_{i_1 i} = \frac{D_A}{2} \mathbf{T}^a_{i_1 i}$ si el gluón externo se acopla con un quark también externo (esto es, una línea fermiónica que no está enteramente contenida en un loop).

Es importante apreciar que ambas configuraciones incluyen una contribución proporcional a C_F . Por otra parte, hay algunos diagramas que incluyen un vértice triple de gluones. Denotamos a tales diagramas F_1 -NA, F_2 -NA y G-NA, como se presenta en la figura 9.2, y sus correspondientes factores de color son $C_A T^a_{i_1i}$. En particular, estos términos tienen una topología que difiere de aquellos presentes en el proceso $q \to q\gamma\gamma$.

Tras esta breve discusión, se concluye que el núcleo de Altarelli-Parisi asociado a $q \to qg\gamma$ admite ser expresado en términos de $\langle \hat{P}_{q \to q_1 \gamma_2 \gamma_3} \rangle$. En concreto, para las correcciones a NLO se puede escribir

$$\langle \hat{P}_{q \to q_1 g_2 \gamma_3}^{(1)} \rangle = D_A \langle \hat{P}_{q \to q_1 g_2 \gamma_3}^{(1,D_A)} \rangle + C_A \langle \hat{P}_{q \to q_1 g_2 \gamma_3}^{(1,C_A)} \rangle + \text{c.c.}, \qquad (9.3.38)$$

 con

$$\langle \hat{P}_{q \to q_{1}g_{2}\gamma_{3}}^{(1,D_{A})} \rangle = \frac{1}{2C_{F}} \left[\boldsymbol{I}_{q \to q_{1}\gamma_{2}\gamma_{3}}^{(1)} \left(p_{1}, p_{2}, p_{3}; \widetilde{P} \right) \langle \hat{P}_{q \to q_{1}g_{2}\gamma_{3}}^{(0)} \rangle + \langle \hat{P}_{q \to q_{1}\gamma_{2}\gamma_{3}}^{(1) \text{ fn.}} \rangle \right] , \quad (9.3.39)$$

$$\langle \hat{P}_{q \to q_{1}g_{2}\gamma_{3}}^{(1,C_{A})} \rangle = \frac{c_{\Gamma}g_{S}^{2}}{\epsilon^{2}} \left(\frac{-s_{123} - i0}{\mu^{2}} \right)^{-\epsilon} \left(1 - x_{3}^{-\epsilon} - z_{2}^{-\epsilon} \right) \langle \hat{P}_{q \to q_{1}g_{2}\gamma_{3}}^{(0)} \rangle$$

$$+ \langle \hat{P}_{q \to q_{1}g_{2}\gamma_{3}}^{(1,C_{A}) \text{ fn.}} \rangle , \qquad (9.3.40)$$

en donde el factor de normalización global viene dado por

$$c^{q \to qg\gamma} = e^2 e_q^2 g_{\rm S}^4 C_F \,.$$
 (9.3.41)

Por lo tanto, para describir por completo $\langle \hat{P}_{q \to q_1 g_2 \gamma_3}^{(1)} \rangle$ solo es necesario calcular $\langle \hat{P}_{q \to q_1 g_2 \gamma_3}^{(1,C_A) \text{ fin.}} \rangle$, que se obtiene extrayendo la parte $\mathcal{O}(\epsilon^0)$ de los términos proporcionales a C_A . Específicamente, usando la descomposición dada en (9.2.3) se puede escribir

$$\langle \hat{P}_{q \to q_1 g_2 \gamma_3}^{(1,C_A) \text{ fn.}} \rangle = c^{q \to q g \gamma} \left[C_0^{(0,C_A)} + \sum_{i=1}^2 \sum_j C_j^{(i,C_A)} F_j^{(i,C_A)}(\{x_l, z_k\}) + \mathcal{O}(\epsilon) \right], \quad (9.3.42)$$

en donde se separan las distintas contribuciones de acuerdo al tipo de funciones involucradas. El término racional es

$$C^{(0,C_A)} = \frac{x_1(z_2(\Delta_{0,3}^{3,0} + 4(1 - x_2z_3)) + 3x_3z_3) + x_2z_3(3z_2 - 4x_3)}{2x_1(x_2 - 1)x_2z_3} + \frac{(2 - x_1)x_1^2 + x_2(x_3 - 1)z_2}{2x_1(x_2 - 1)x_2x_3z_2^{-1}z_3} - \frac{(1 - x_3)(4(1 - x_2) - x_1(3x_1 + x_3)) - x_1(x_1 + 1)x_3}{2(x_2 - 1)x_2(x_3 - 1)x_3z_2} - (2 \leftrightarrow 3), \qquad (9.3.43)$$

que resulta totalmente antisimétrico ante el intercambio de las partículas 2 y 3. Esto es un hecho interesante pues los diagramas que aportan a la parte proporcional a C_A no tienen, en principio, ninguna simetría ante el intercambio 2 \leftrightarrow 3. En concreto, hay tres contribuciones distintas que aportan a $C^{(0,C_A)}$:

- los diagramas del tipo NA, esto es, aquellos que incluyen vértices de tres gluones;
- los diagramas que son proporcionales a C_F (pues $2C_F = D_A + C_A$), es decir, A, C, D y los conjugados mediante el intercambio $2 \leftrightarrow 3, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$;
- y los términos que provienen de la parte finita de $2\operatorname{Re}\left(I_{q \to q_1 \gamma_2 \gamma_3}^{(1)}\right) \langle \hat{P}_{q \to q_1 \gamma_2 \gamma_3}^{(0)} \rangle$.

Debido a que la última parte es simétrica ante el intercambio $2 \leftrightarrow 3$ (por ser proporcional a la función de splitting a nivel árbol), se tiene que la parte racional de la suma de los diagramas NA y aquellos proporcionales a C_F también lo es. En consecuencia, como ninguna contribución es nula, la cancelación de las componentes simétricas de $C^{(0,C_A)}$ es una propiedad global de la suma de los diagramas. Expresado en otras palabras, no puede asociarse la antisimetría de $C^{(0,C_A)}$ a un conjunto específico de diagramas.

Analizando las contribuciones de peso transcendental 1, vemos que pueden ser expandidas empleando únicamente la función

$$F^{(1,C_A)} = \log(x_3) , \qquad (9.3.44)$$

que solo depende de cocientes de variables cinemáticas. Forzando la descomposición en contribuciones de simetría bien definida, podemos reescribir la parte de peso 1 como

$$\langle \hat{P}_{q \to q_1 g_2 \gamma_3}^{(1,C_A) \text{ fn.}} \rangle |_{w=1} = c^{q \to qg\gamma} \left[\left(C_{\text{sym}}^{(1,C_A)} F^{(1,C_A)} + (2 \leftrightarrow 3) \right) + \left(C_{\text{asym}}^{(1,C_A)} F^{(1,C_A)} - (2 \leftrightarrow 3) \right) \right],$$

$$(9.3.45)$$

en donde se introdujeron los coeficientes

$$\begin{aligned} C_{\text{sym}}^{(1,C_A)} &= \frac{3(x_1(1-\Delta_{0,1}^{1,0}-\bar{\Delta}_{1,2}^{1,1}-z_2)+z_1)}{2x_1x_2(1-x_3)} + \frac{3\left(z_3\Delta_{3,1}^{1,1}\left(\Delta_{0,1}^{1,0}-z_1^2+1\right)+x_1^2z_1^3z_2\right)}{2x_1x_2(x_3-1)(z_1-1)z_2z_3} \\ &+ \frac{3z_1(\Delta_{0,1}^{1,0}-x_3\Delta_{0,1}^{1,1})}{2x_1(1-x_3)x_3z_3} + \frac{3(2\Delta_{0,2}^{2,0}-z_1-1)}{2(1-x_3)} + \frac{3(1-x_1)z_1}{2x_1(1-x_3)x_3}, \end{aligned} \tag{9.3.46} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{\text{asym}}^{(1,C_A)} &= \frac{\langle \mathcal{P}_{q_1\gamma_2}^{(0)}\rangle(z_1-1)}{x_1^2x_3z_3} \left(\frac{x_2}{1-x_3}-x_2-1\right) + \frac{(2x_1-3)(\Delta_{1,3}^{0,2}+2\Delta_{0,1}^{1,0})}{2x_1^2x_2(1-x_3)} \\ &- \frac{x_1(3x_1\Delta_{0,3}^{1,0}+z_2-z_3)+z_2+2z_3}{2x_1^2(1-x_3)^2} + \frac{(1-z_1)(2(\bar{\Delta}_{3,1}^{1,0}-z_1+1)-5x_1)}{2x_1^2(1-x_3)z_2} \\ &+ \frac{(x_1-1)(x_1^2(z_3-2)-x_1(2z_1+z_2+1)-2z_1+2z_2+2)}{2x_1^2(1-x_3)x_3} \\ &+ \frac{x_1(z_1-1)(2x_3z_1+x_3-3)-4z_1(x_2x_3+x_3-1)}{2x_1^2(x_3-1)x_3z_3} \\ &- \frac{x_2\Delta_{0,1}^{1,1}\bar{\Delta}_{0,1}^{1,0}+(2x_1-3)(1-x_3)(1-z_1)\Delta_{0,1}^{1,0}}{2x_1^2x_2(1-x_3)^2z_2} \\ &+ \frac{x_1+(x_3-1)(x_3(z_1-1)z_3-z_1)}{2(x_3-1)^2x_3z_3}. \end{aligned} \tag{9.3.47}$$

A diferencia de lo ocurrido con la parte racional, aquí tiene lugar una mezcla entre términos simétricos y antisimétricos. Tal comportamiento es razonable teniendo en cuenta que al aumentar el orden transcendental de las contribuciones se exploran los efectos de potencias superiores del desarrollo en ϵ .

Finalmente, los términos de peso transcendental 2 pueden ser expandidos como

$$\langle \hat{P}_{q \to q_1 g_2 \gamma_3}^{(1,C_A) \text{ fin.}} \rangle |_{w=2} = c^{q \to qg\gamma} \sum_{i=1}^7 C_i^{(2,C_A)} F_i^{(2,C_A)} ,$$
 (9.3.48)

usando las funciones de base

$$F_1^{(2,C_A)} = \operatorname{Li}_2(z_3) + \log(1-z_3)\log\left(\frac{x_2(1-z_3)}{z_2}\right) + \log(x_3)\log\left(\frac{z_2}{1-z_3}\right), \quad (9.3.49)$$

$$F_2^{(2,C_A)} = \frac{\pi^2}{6} - \text{Li}_2 (1 - x_2) , \qquad (9.3.50)$$

$$F_3^{(2,C_A)} = \operatorname{Li}_2(1-x_3) - \operatorname{Li}_2(z_3) + \log\left(\frac{1-z_3}{x_3}\right) \log\left(\frac{z_2}{x_2(1-z_3)}\right), \qquad (9.3.51)$$

$$F_4^{(2,C_A)} = \frac{\pi^2}{6} - \operatorname{Li}_2(1-x_2) - \operatorname{Li}_2(1-z_2) + \log(x_2)\log(z_2), \qquad (9.3.52)$$

$$F_{5}^{(2,C_{A})} = 2\left[\operatorname{Li}_{2}(1-x_{3}) + \operatorname{Li}_{2}\left(-\frac{z_{1}}{z_{2}}\right) - \operatorname{Li}_{2}\left(-\frac{\Delta_{0,3}^{3,0}}{1-z_{3}}\right)\right] - \operatorname{Li}_{2}(z_{3}) + \log(x_{2})\log(1-z_{3}) + \log\left(\frac{x_{3}}{z_{2}}\right)\log\left(\frac{1-z_{3}}{z_{2}}\right), \quad (9.3.53)$$

$$F_6^{(2,C_A)} = \frac{\pi^2}{6} - \operatorname{Li}_2(1-x_2) - \operatorname{Li}_2(1-z_2) , \qquad (9.3.54)$$

$$F_7^{(2,C_A)} = \mathcal{R}(x_2, x_3),$$
 (9.3.55)

cuyos coeficientes vienen dados por

$$C_{1}^{(2,C_{A})} = \frac{\langle \mathcal{P}_{q_{1}\gamma_{2}}^{(0)} \rangle}{1-x_{1}} \left(\frac{(x_{1}-3)z_{1}}{x_{3}z_{2}} - \frac{1-x_{1}+2z_{1}}{x_{2}z_{2}} - \frac{(1-x_{1})z_{1}+2}{x_{2}z_{3}} + \frac{x_{1}-3}{x_{3}z_{3}} \right) + \frac{4}{x_{2}} + \frac{2(4-z_{2}-2z_{3})}{x_{3}}, \qquad (9.3.56)$$

$$C_{2}^{(2,C_{A})} = \frac{\langle \mathcal{P}_{q_{1}\gamma_{2}}^{(0)} \rangle}{1-x_{1}} \left(\frac{3x_{1}+z_{1}-3}{x_{2}z_{2}} + \frac{(3x_{1}-4)z_{1}+2}{x_{2}z_{3}} + \frac{(3x_{1}-2)z_{1}}{x_{3}z_{2}} + \frac{3x_{1}-z_{1}-1}{x_{3}z_{3}} \right) + \frac{2(2(1-x_{1}+z_{1})+z_{2})}{x_{3}} - \frac{4(x_{1}-z_{1}+z_{2}-2)}{x_{2}} - 8, \qquad (9.3.57)$$

$$C_{3}^{(2,C_{A})} = \frac{\langle \mathcal{P}_{q_{1}\gamma_{2}}^{(0)} \rangle}{(1-x_{1})\Delta_{0,3}^{3,0}} \left(\frac{z_{1}\Delta_{0,1}^{1,0}}{x_{2}z_{2}} + \frac{\bar{\Delta}_{1,1}^{1,0}}{x_{2}z_{3}} + \frac{\bar{\Delta}_{0,1}^{1,0}}{x_{3}z_{3}} - \frac{(1-x_{1}^{2})(1-z_{1})}{x_{2}x_{3}} + \frac{x_{1}z_{1}^{2}}{x_{3}z_{2}} \right) - \frac{2(x_{1}(z_{2}+1)-z_{3})}{x_{2}\Delta_{0,3}^{3,0}} - \frac{x_{1}(1-z_{3})+z_{2}}{x_{3}\Delta_{0,3}^{3,0}} - \frac{1-z_{1}}{\Delta_{0,3}^{3,0}}, \qquad (9.3.58)$$

$$C_{4}^{(2,C_{A})} = \frac{\langle \mathcal{P}_{q_{1}\gamma_{2}}^{(0)} \rangle}{z_{2}z_{3}\Delta_{0,2}^{2,0}} \left((1-z_{1})(z_{3}-z_{2}) - \frac{z_{2}\Delta_{0,1}^{1,0} + x_{1}z_{1}z_{3}}{x_{3}} \right) + \frac{x_{1}(z_{2}-1) + z_{3}}{x_{2}\Delta_{0,2}^{2,0}} - \frac{2\left((1-x_{1})(2-x_{1}-z_{3}) - z_{1} + (1-z_{3})^{2}\right)}{x_{3}\Delta_{0,2}^{2,0}} + \frac{2(2x_{2}+3z_{2}) - 3(1-z_{1})}{\Delta_{0,2}^{2,0}}, \quad (9.3.59)$$

$$C_5^{(2,C_A)} = \frac{z_1(z_1^2+1)}{2x_2x_3z_2z_3} + (2 \leftrightarrow 3), \qquad (9.3.60)$$

$$C_{6}^{(2,C_{A})} = -\frac{2\langle \mathcal{P}_{q_{1}\gamma_{2}}^{(0)} \rangle}{x_{2}\Delta_{0,2}^{2,0}} \left(\frac{z_{1}^{2}}{z_{3}} + \frac{1}{z_{2}}\right) + \frac{2\left((1-x_{1})^{2} + (1-z_{3})^{2}\right)}{x_{3}\Delta_{0,2}^{2,0}} - \frac{4\bar{\Delta}_{0,3}^{2,0}}{\Delta_{0,2}^{2,0}} + \frac{2\left(z_{1}(4-3z_{2}) - z_{2} + z_{3}^{2} + 2\right)}{x_{2}\Delta_{0,2}^{2,0}}, \qquad (9.3.61)$$

$$C_{7}^{(2,C_{A})} = \frac{\langle \mathcal{P}_{q_{1}\gamma_{2}}^{(0)} \rangle}{x_{1}^{3}x_{3}} \left(\frac{x_{1}^{3}(x_{2}z_{1} + x_{3}) + x_{3}^{3}(1-z_{1})}{x_{2}z_{2}} + \frac{\Delta_{0,1}^{1,0} + x_{1}^{3}(z_{1} - x_{1}) + 2x_{1}}{z_{3}(1-x_{1})}\right)$$

$$-\frac{\langle \mathcal{P}_{q_{1}\gamma_{2}}^{(0)} \rangle}{z_{3}} \left(\frac{\Delta_{0,1}^{1,1} + \Delta_{2,1}^{1,1} + x_{1}}{x_{1}^{3}} - \frac{\Delta_{0,1}^{2,1} + \Delta_{0,1}^{3,1}}{(1-x_{1})x_{2}} \right) + \frac{2z_{1} \left(\Delta_{0,1}^{1,1} + \Delta_{2,1}^{1,1} + x_{1} \right)}{x_{1}^{3}z_{3}(1-z_{1})} \\ -\frac{(1-x_{1})^{2} \bar{\Delta}_{0,1}^{0,3} + 2x_{1}^{3}(x_{3}+z_{1}-z_{2})}{x_{1}^{3}x_{2}} + \frac{(1-x_{1})(z_{2}-\Delta_{0,1}^{1,0} - \bar{\Delta}_{1,3}^{1,1}) + 2x_{1}^{3}(1-x_{2})}{x_{1}^{3}x_{3}} \\ +\frac{x_{1}^{2} - 2x_{3}^{2}z_{1}}{x_{1}^{3}x_{2}z_{2}} - \frac{x_{1}^{3}(z_{1}+1) - 4x_{1}^{2} + 6x_{1}z_{1}(z_{1}-1)^{-1} + 2z_{1}}{(x_{1}-1)x_{1}^{3}x_{3}z_{3}}.$$
(9.3.62)

Apréciese que, al igual que en la parte de peso 1, aquí se mezclan las contribuciones simétricas y antisimétricas. También, como se anticipó en la sección previa, la función \mathcal{R} está involucrada en la expansión de las correcciones NLO a esta función de Altarelli-Parisi.

3.3. $g \rightarrow q\bar{q}\gamma$: caso no polarizado

Para concluir con el tratamiento de los procesos de splitting colineal iniciados por partones de QCD, consideremos $g \to q\bar{q}\gamma$. Comenzando con la contribución a nivel árbol, se tiene que la amplitud de splitting es

$$\operatorname{Sp}_{g \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(0)(a_1, a_2; \alpha)} = \frac{e \, e_q g_{\mathrm{S}} \mu^{2\epsilon} \boldsymbol{T}_{a_1 a_2}^{\alpha}}{s_{123}} \, \bar{u}(p_1) \left(\frac{\not(p_3) \not\!p_{13} \not(\widetilde{P})}{s_{13}} - \frac{\not(\widetilde{P}) \not\!p_{23} \not(p_3)}{s_{23}} \right) \, v(p_2) \, , \quad (9.3.63)$$

mientras que el núcleo de Altarelli-Parisi no polarizado viene dado por

$$\langle \hat{P}_{g \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(0)} \rangle = \frac{e^2 e_q^2 g_S^2}{2x_1 x_2} \left[\left(\Delta_{0,1}^{1,0} \right)^2 + z_1^2 - \Delta \left(\frac{2z_2 (\Delta_{0,1}^{1,0} + 1) + \Delta_{0,3}^{3,0}}{1 - \Delta} + \frac{(1 - x_3)^2}{2} \right) \right]$$

+ $(1 \leftrightarrow 2),$ (9.3.64)

 $\operatorname{con} \Delta = \alpha \epsilon$, como definimos para los anteriores procesos. Nótese que esta expresión es totalmente simétrica frente al intercambio 1 \leftrightarrow 2. Sin embargo, a nivel amplitud, aparece un signo menos adicional relacionado con la carga $e_q \rightarrow e_{\bar{q}} = -e_q$. Por otra parte, es útil definir

$$\left\langle \mathcal{P}_{q_1\bar{q}_2\gamma_3}^{(0)} \right\rangle|_{\epsilon^0} = \left. \frac{\left(\Delta_{0,1}^{1,0}\right)^2 + z_1^2}{2x_1x_2} + (1\leftrightarrow 2) = \left. \frac{\left\langle \hat{P}_{g\to q_1\bar{q}_2\gamma_3}^{(0)} \right\rangle}{e^2 e_q^2 g_{\rm S}^2} \right|_{\epsilon=0}, \qquad (9.3.65)$$

debido a que esta expresión nos permitirá simplificar los resultados de las correcciones NLO.

Antes de estudiar las correcciones NLO a las funciones de splitting, es relevante comparar este proceso con $q \rightarrow qg\gamma$. El contenido de partículas es el mismo, aunque difieren en el partón padre. Para este proceso en particular, los diagramas de Feynman correspondientes se muestran en la figura 9.3. Excluyendo las correcciones de autoenergía al partón padre, los remanentes diagramas se encuentran en correspondencia biunívoca. Más aún, ambos conjuntos pueden relacionarse,



Fig. 9.3: Diagramas de Feynman que contribuyen a la amplitud de splitting $g \to q\bar{q}\gamma$. Solo se muestran algunos diagramas: los restantes pueden ser obtenidos a través del intercambio de las partículas 1 y 2. Excepto por los diagramas que incluyen correcciones de autoenergía en el partón padre, el resto se encuentra en correspondencia biyectiva con los que aparecen en la expansión de $q \to qg\gamma$.

pictóricamente, a través del intercambio $P \leftrightarrow 2$. Debido a que el partón inicial se encuentra off-shell la cinemática del proceso no resulta compatible con la posibilidad de efectuar crossings. Es más, como podemos ver en las ecuaciones (9.3.36) y (9.3.64), los núcleos de Altarelli-Parisi en el límite triple colineal exhiben una dependencia no trivial en las variables x_i , asociadas a subescalas de energía. Por ende, en caso de existir una transformación que vincule $\langle \hat{P}_{q \to q_1 g_2 \gamma_3} \rangle$ con $\langle \hat{P}_{q \to q_1 g_2 \gamma_3} \rangle$, la misma tendrá que conectar tanto las variables z_i como las fracciones de energía x_i en ambas configuraciones. Más adelante en el texto volveremos a esta discusión, analizando más en detalle las transformaciones de crossing en el límite múltiple colineal.

Volviendo al estudio de las correcciones NLO, encontramos que el operador de inserción viene dado por

$$I_{g \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(1)}(p_1, p_2, p_3; \tilde{P}) = \frac{c_{\Gamma} g_{\rm S}^2}{\epsilon^2} \left(\frac{-s_{123} - \imath 0}{\mu^2}\right)^{-\epsilon} \left[C_A \left(2 - z_1^{-\epsilon} - z_2^{-\epsilon} + x_3^{-\epsilon}\right) - 2C_F x_3^{-\epsilon} - \epsilon \left(2\gamma_q - \gamma_g - \frac{\beta_0}{2}\right)\right], \qquad (9.3.66)$$

y los términos divergentes hallados en nuestros cálculos concuerdan con el comportamiento predicho por la fórmula de Catani. Por otra parte, para expresar los resultados de una forma compacta, efectuamos una descomposición de acuerdo a los coeficientes de color que acompañan a cada contribución. De esta forma, las correcciones NLO al núcleo de Altarelli-Parisi no polarizado pueden expandirse como

empleando el factor de normalización global

$$c^{g \to q\bar{q}\gamma} = \frac{e^2 e_q^2 g_{\rm S}^4}{4(1-\epsilon)},$$
(9.3.68)

junto con las componentes

$$\langle \hat{P}_{g \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(1,N_f) \text{ fin.}} \rangle = C^{(0,N_f)},$$
(9.3.69)

$$\langle \hat{P}_{g \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(1,D_A) \text{ fin.}} \rangle = C^{(0,D_A)} + \sum_{i=1}^2 C_i^{(1,D_A)} F_i^{(1)} + C_1^{(2,D_A)} F_1^{(2,D_A)},$$
 (9.3.70)

$$\langle \hat{P}_{g \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(1,C_A) \text{ fin.}} \rangle = C^{(0,C_A)} + C_1^{(1,C_A)} F_1^{(1)} + \sum_{j=1}^9 C_j^{(2,C_A)} F_j^{(2,C_A)},$$
 (9.3.71)

en donde se clasificaron las distintas contribuciones de acuerdo a su transcendentalidad. Puede apreciarse que la parte proporcional a N_f es puramente racional. Debido a que es originada por aquellos diagramas que contienen loops fermiónicos, esta contribución recibe únicamente el aporte de burbujas escalares sin denominadores LCG. La estructura divergente de tales integrales contiene polos simples en ϵ , que son absorbidos en $I_{g \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(1)}$. Más aún, haciendo uso de la figura 9.3 y de la ecuación (6.3.32), vemos que

$$\langle \hat{P}_{g \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(1,N_f) \text{ fin.}} \rangle = 2 \operatorname{Re} \left(\Pi(s_{123}) - \boldsymbol{I}_{g \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(1)}(p_1, p_2, p_3; \widetilde{P}) \right) \Big|_{N_f} \langle \hat{P}_{g \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(0)} \rangle, \qquad (9.3.72)$$

siendo

$$\left[\Pi(s_{123}) - \boldsymbol{I}_{g \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(1)}\right]\Big|_{N_f} = 2c_{\Gamma} g_{\rm S}^2 \left(\frac{-s_{123} - i0}{\mu^2}\right)^{-\epsilon} \frac{4\epsilon - 5}{3(1 - 2\epsilon)(3 - 2\epsilon)}$$
(9.3.73)

$$= g_{\rm S}^2 \left(-\frac{10}{9} - \frac{56\epsilon}{27} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) , \qquad (9.3.74)$$

lo que justifica la estructura hallada¹.

¹ Para ser rigurosos, debe tenerse en cuenta que I es un operador en el espacio de color+espín. Sin embargo, al trabajar a nivel de elementos de matriz al cuadrado en estos procesos, los operadores de color dan lugar a contribuciones proporcionales a la identidad. De esta forma, se abusa de la notación e identificamos I con un escalar. Para más detalles sobre esta observación, se sugiere repasar la discusión presentada en el Capítulo 6.

Continuando con la presentación de resultados, los términos racionales vienen dados por

$$C^{(0,N_{f})} = -\frac{20}{9} \langle \mathcal{P}_{q_{1}\bar{q}_{2}\gamma_{3}}^{(0)} \rangle |_{\epsilon^{0}} , \qquad (9.3.75)$$

$$C^{(0,C_{A})} = \frac{71}{9} \langle \mathcal{P}_{q_{1}\bar{q}_{2}\gamma_{3}}^{(0)} \rangle |_{\epsilon^{0}} + \frac{z_{1}}{x_{3}} \left(\frac{x_{3}(1-2z_{3})+z_{1}}{x_{1}-1} + \frac{(x_{3}+1)(x_{3}-z_{1})}{x_{2}(x_{3}-1)} \right)$$

$$+ \frac{x_{3}(z_{1}^{2}-z_{1}+1)(x_{3}-2x_{1}+1)}{(1-x_{1})x_{1}(1-x_{3})} , \qquad (9.3.76)$$

$$C^{(0,D_{A})} = (x_{1}x_{2}-z_{1}z_{2}-\Delta_{0,1}^{1,0}\Delta_{0,2}^{2,0}) \left(\frac{2-2x_{1}(x_{2}+1)}{x_{1}x_{2}(1-x_{3})} - \frac{1}{1-x_{1}} \right)$$

$$- \frac{2z_{1}\Delta_{0,1}^{1,0}}{x_{1}x_{2}} \left(\frac{(x_{2}+1)(1-x_{2})^{2}}{(1-x_{1})(1-x_{3})} + \frac{x_{3}-x_{1}x_{2}}{1-x_{3}} + \frac{(3-x_{2})x_{2}-x_{1}(x_{2}+1)}{2(1-x_{1})} + 8 \right)$$

$$- \frac{8(1-x_{1})^{2}}{x_{1}x_{2}} - \frac{1-x_{1}}{x_{1}} , \qquad (9.3.77)$$

en donde vemos que el $C^{(0,N_f)}$ queda definido a partir del resultado de (9.3.74): el factor 2 que conecta ambas expresiones se absorbe en la normalización global de los coeficientes. Por otra parte, la contribución de peso transcendental 1 puede expandirse empleando las funciones

$$F_1^{(1)} = \log(x_1),$$
 (9.3.78)

$$F_2^{(1)} = \log(x_3) ,$$
 (9.3.79)

junto con los coeficientes

$$C_{1}^{(1,D_{A})} = \frac{x_{1}x_{2} - z_{1}z_{2} - \Delta_{0,1}^{1,0}\Delta_{0,2}^{2,0}}{(1-x_{1})x_{1}} \left(\frac{x_{2} + 2x_{3}}{x_{2}^{2}} - \frac{x_{1}x_{2} + 2x_{3}}{(1-x_{1})x_{2}} - \frac{1+x_{1}}{1-x_{1}}\right) - \frac{z_{2}(2x_{3} - x_{2})\Delta_{0,2}^{2,0}}{x_{1}x_{2}^{2}} - \frac{(1-x_{2})^{2}z_{1}(2(1-x_{1}) + x_{2})\Delta_{0,1}^{1,0}}{(1-x_{1})^{2}x_{1}x_{2}^{2}} + \frac{(1-x_{2})(x_{2} - 2x_{3})}{(1-x_{1})x_{2}}, \qquad (9.3.80)$$

$$= 2\left(2x_{1}(z_{2} - 1 - \Delta_{0,2}^{2,0}(x_{1}x_{2} + 1)) - (\Delta_{1,2}^{0,3})^{2} - 2x_{2}(z_{1} + 2z_{2} - 3)(x_{1}x_{2} + 2z_{3}) - x_{2}z_{3}\right)$$

$$C_{2}^{(1,D_{A})} = \frac{2\left(2x_{1}(z_{2}-1-\Delta_{0,2}^{2,0}(x_{1}x_{2}+1))-(\Delta_{1,2}^{0,3})^{2}-2x_{2}(z_{1}+2z_{2}-3)(x_{1}x_{2}+2z_{3})-x_{2}z_{3}\right)}{x_{2}^{2}(1-x_{3})^{2}} - \frac{2\left(x_{1}^{2}(2z_{1}(z_{2}-3)+(4z_{2}-13)z_{2}+7)+2z_{3}^{2}\right)}{x_{1}x_{2}(1-x_{3})^{2}} - \frac{2(2x_{1}x_{2}+(z_{1}-15)z_{1}+7)}{(1-x_{3})^{2}}, \qquad (9.3.81)$$

para la parte Abeliana y

$$C_1^{(1,C_A)} = \frac{z_2(2(x_2-2)z_1-9x_2+10) + (x_2-1)(2x_2(z_1-2)-3z_1+4) - 6z_2^2}{(1-x_1)^2 x_2}$$

+
$$\frac{x_1^2 \left(3 (\Delta_{0,2}^{2,0})^2 - \Delta_{2,2}^{0,0} + \bar{\Delta}_{2,2}^{0,2}\right) + \Delta_{2,1}^{0,3} (\Delta_{2,1}^{0,3} - \Delta_{0,2}^{2,0} - z_2)}{(1 - x_1)^2 x_1 x_2}, \qquad (9.3.82)$$

para aquellos términos proporcionales a C_A . Finalmente, si consideramos la parte de transcendentalidad 2, puede expresarse el término proporcional a D_A usando

$$F_{1}^{(2,D_{A})} = \mathcal{R}(x_{1}, x_{3}), \qquad (9.3.83)$$

$$C_{1}^{(2,D_{A})} = \frac{2\left(x_{2}\left(x_{3}\Delta_{3,2}^{0,1} + \Delta_{0,3}^{3,0}(\Delta_{2,3}^{0,1} + z_{1}) + x_{2}^{3} + 2x_{2}x_{3}z_{1}\right) + (\Delta_{3,2}^{0,1})^{2}\right)}{x_{1}x_{2}^{3}} - \frac{4\Delta_{0,1}^{1,0}(x_{3} - z_{1})}{x_{1}x_{2}}, \qquad (9.3.84)$$

mientras que la componente proporcional a C_A requiere introducir las funciones

$$F_{1}^{(2,C_{A})} = \frac{\pi^{2}}{6} - 2\operatorname{Li}_{2}\left(1 - \frac{x_{1}}{1 - z_{1}}\right) - 2\operatorname{Li}_{2}\left(1 - \frac{z_{2}}{1 - z_{1}}\right) + 2\operatorname{Li}_{2}\left(1 - z_{1}\right) + 2\operatorname{Li}$$

$$F_2^{(2,C_A)} = \log(x_1)\log(x_2), \qquad (9.3.86)$$

$$F_3^{(2,C_A)} = \mathcal{R}(x_1, x_2) - \log(x_1)\log(z_1) - \log(x_2)\log(z_2) + \frac{\pi^2}{3}, \qquad (9.3.87)$$

$$F_4^{(2,C_A)} = \frac{\pi^2}{4} - \operatorname{Li}_2(1-x_1) - \log(x_1)\log(z_1) + (1\leftrightarrow 2), \qquad (9.3.88)$$

$$F_5^{(2,C_A)} = \log\left(\frac{x_1}{1-z_1}\right)\log\left(\frac{1-z_1}{z_1z_2}\right) - \log(x_2)\log(1-z_1), \qquad (9.3.89)$$

y los coeficientes

$$C_1^{(2,C_A)} = \frac{z_1^2}{x_1 x_2}, \qquad (9.3.90)$$

$$C_2^{(2,C_A)} = \frac{z_2 - x_1 \Delta_{0,2}^{2,0} - x_1}{x_1 \Delta_{0,1}^{1,0}} + \frac{7 - 3x_2}{x_1} - \frac{2}{x_1 x_2}, \qquad (9.3.91)$$

$$C_3^{(2,C_A)} = -\frac{2(x_1^2 - 3x_1 + 1)}{x_1 x_2}, \qquad (9.3.92)$$

$$C_4^{(2,C_A)} = \frac{4(1-z_1)z_1}{x_1x_2} - \frac{2(2z_1+1)}{x_2}, \qquad (9.3.93)$$

$$C_{5}^{(2,C_{A})} = \frac{(1 - 2(1 - z_{2})z_{2})\Delta_{1,2}^{2,2}}{x_{1}x_{2}z_{3}} + \frac{z_{2} - x_{1}(\Delta_{0,2}^{2,0} + 1)}{x_{1}\Delta_{0,1}^{1,0}} + \frac{x_{2} + 2(2z_{2}^{2} + z_{2} - 1)}{x_{1}} + \frac{z_{3}(3(x_{2} + 2)z_{2} - 4 - x_{1}(1 - z_{2}))}{x_{1}x_{2}} + \frac{3 - 2(x_{1} + 3)(1 - z_{2})z_{2}}{x_{1}x_{2}}$$

$$+ \frac{(x_2+3)z_3^2}{x_1x_2}, \qquad (9.3.94)$$

en donde hacemos uso de la notación introducida en (9.3.5) y (9.3.6) para expresar de forma más compacta los resultados. De todas maneras, puede apreciarse que las expresiones obtenidas son más sencillas que las correspondientes a procesos iniciados por quarks. En cierto modo, este comportamiento es razonable puesto que los espinores solo satisfacen la ecuación de Dirac, mientras que los vectores de polarización físicos quedan determinados por las condiciones de transversalidad e invariancia de gauge. Explícitamente, para calcular funciones de splitting se utilizan amplitudes amputadas con cinemática off-shell y luego se realiza una proyección sobre un estado on-shell. Dicho estado queda representado por un espinor $u(\tilde{P})$ cuando el partón inicial es un quark o por un vector de polarización físico $\epsilon(\tilde{P})$ si el proceso es iniciado por un gluón (o un fotón). Los espinores verifican

$$\widetilde{P}u(\widetilde{P}) = 0, \qquad (9.3.95)$$

mientras que un vector de polarización on-shell no masivo cumple

$$\tilde{P} \cdot \epsilon(\tilde{P}) = 0, \qquad (9.3.96)$$

$$n \cdot \epsilon(\vec{P}) = 0, \qquad (9.3.97)$$

en donde n es un vector tipo luz que define el gauge. Recordando que las amplitudes de splitting quedan definidas por las ecuaciones (6.2.21) y (6.2.22), puede apreciarse que los procesos iniciados por partículas vectoriales quedan sujetos a dos restricciones, mientras que solo una condición se impone en aquellos que involucran un fermión en estado inicial.

4. Procesos iniciados por fotones

Continuando con el estudio del límite triple colineal, consideramos las correcciones de QCD a aquellos procesos que son iniciados por un fotón. Las funciones de splitting correspondientes resultan relevantes para llevar a cabo el análisis de decaimientos de fotones virtuales en tres partículas no masivas on-shell. Puede apreciarse que existen solamente dos procesos iniciados por fotones que deben tenerse en cuenta en el límite triple colineal: $\gamma \to q\bar{q}\gamma$ y $\gamma \to q\bar{q}g$. Esto se debe a que, la amplitud a nivel árbol asociada a $\gamma \to ng$ es nula para todo $n \in \mathbb{N}$. Tal resultado es consecuencia de las identidades de desacople e implica que $\gamma \to ng$ es finito a órdenes superiores.

Más allá de presentar resultados explícitos, nos centramos en el análisis de los mismos aprovechando su simplicidad para extraer conclusiones acerca de las estructuras funcionales involucradas en los splittings.

4.1.
$$\gamma \to q\bar{q}\gamma$$

Si escribimos la amplitud de splitting a nivel árbol, encontramos

$$\operatorname{Sp}_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(0)(a_1, a_2)} = \frac{e^2 e_q^2 \mu^{2\epsilon} \operatorname{Id}_{Ca_1 a_2}}{s_{123}} \bar{u}(p_1) \left(\frac{\not(p_3) \not\!p_{13} \not(\widetilde{P})}{s_{13}} - \frac{\not(\widetilde{P}) \not\!p_{23} \not(p_3)}{s_{23}} \right) v(p_2) , \quad (9.4.1)$$

en donde es posible apreciar que corresponde a la contribución *color-stripped* asociada al proceso $Sp_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(0)}$. Concretamente, la relación entre ambos procesos puede expresarse como

$$\operatorname{Sp}_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(0)(a_1, a_2; \alpha)} = \frac{g_{\mathrm{S}}}{e \, e_q} \boldsymbol{T}_{a_1 a_2}^{\alpha} \operatorname{Sp}_{g \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(0)(a_1, a_2)}, \qquad (9.4.2)$$

que implica de forma trivial que la función de splitting no polarizada sea

$$\langle \hat{P}_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(0)} \rangle = \frac{C_A e^2 e_q^2}{C_F g_S^2} \langle \hat{P}_{g \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(0)} \rangle.$$
(9.4.3)

Nótese que las expresiones heredan la simetría frente al intercambio 1 \leftrightarrow 2, presente en el proceso $g \rightarrow q\bar{q}\gamma$.



Fig. 9.4: Diagramas que contribuyen al proceso de splitting $\gamma \rightarrow q\bar{q}\gamma$. Ignoramos las correcciones a la autoenergía del fotón padre por tratarse de aportes a órdenes superiores en QED. Solo se muestra la mitad de los diagramas: el resto puede recuperarse apelando a la simetría de intercambio 1 \leftrightarrow 2.

Cuando estudiamos el proceso $g \to q\bar{q}\gamma$ en la sección anterior, las diferentes contribuciones a la función de splitting a NLO fueron ordenadas con el objetivo de distinguir los términos Abelianos y no Abelianos. Vimos que los términos puramente Abelianos originaban expresiones muy sencillas y que las mismas podían ser escritas empleando logaritmos y solamente una función de peso transcendental 2. Debido a que $\gamma \rightarrow q\bar{q}\gamma$ es proporcional a la contribución Abeliana de $g \rightarrow q\bar{q}\gamma$, la función de splitting asociada es también compacta. En la figura 9.4 se muestran todos los diagramas de Feynman requeridos para efectuar el cálculo de las correcciones NLO a este proceso. Cabe señalar que no se están teniendo en cuenta las correcciones a la autoenergía del fotón padre, pues las mismas son de orden superior en QED.

Aplicando el mismo procedimiento que para los otros procesos, podemos estudiar la estructura de divergencias infrarrojas. De acuerdo a la fórmula de Catani, el operador de inserción viene dado por

$$\boldsymbol{I}_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(1)}(p_1, p_2, p_3; \widetilde{P}) = \frac{c_{\Gamma} g_{\rm S}^2}{\epsilon^2} \left(\frac{-s_{123} - i0}{\mu^2}\right)^{-\epsilon} \left[-2C_F x_3^{-\epsilon} - 2\epsilon \gamma_q\right], \qquad (9.4.4)$$

y tras la comparación con los resultados del cálculo explícito encontramos un completo acuerdo. Por otra parte, el núcleo no polarizado a NLO puede ser expresado como

$$\langle \hat{P}_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(1) \text{ fn.}} \rangle = 2C_F c^{\gamma \to q\bar{q}\gamma} \left[\langle \hat{P}_{g \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(1,D_A) \text{ fn.}} \rangle + (1 \leftrightarrow 2) \right], \qquad (9.4.5)$$

como se esperaba tras efectuar una comparación en base a diagramas de Feynman entre ambos procesos. Aquí estamos utilizando el factor global

$$c^{\gamma \to q\bar{q}\gamma} = \frac{C_A e^4 e_q^4 g_S^2}{2(1-\epsilon)},$$
(9.4.6)

para reabsorber constantes y simplificar la notación.

Para concluir esta sección hagamos algunos comentarios relacionados con las identidades de crossing para funciones de splitting. Anteriormente se presentaron los resultados explícitos para el proceso $q \rightarrow q\gamma\gamma$. En particular, la componente de peso transcendental 2 en las correcciones NLO a $\langle \hat{P}_{q\rightarrow q_1\gamma_2\gamma_3}^{(1)} \rangle$ involucraba un conjunto de 7 funciones. Expresando dichas funciones mediante la notación de símbolos se puede probar que son independientes; esto es, no es posible relacionar-las mediante combinaciones lineales con coeficientes racionales. Sin embargo, $\langle \hat{P}_{\gamma\rightarrow q_1\bar{q}_2\gamma_3}^{(1)\,\text{fin.}} \rangle |_{w=2}$ es directamente proporcional a una única función transcendental, en particular a $\mathcal{R}(x_1, x_2)$. Debido a que cualquier relación de crossing involucra transformacionales racionales de variables cinemáticas, no es posible alterar la dimensionalidad del subespacio de funciones que expanden las contribuciones de peso transcendental 2. De esta manera, estamos en condiciones de afirmar que no es posible generalizar las relaciones de crossing para el partón padre a órdenes perturbativos superiores.

4.2.
$$\gamma \to q\bar{q}g$$

Por último, llegamos al último proceso no trivial iniciado por fotones: $\gamma \to q\bar{q}g$. En este caso no es posible recuperar los resultados partiendo de los splittings exhibidos anteriormente. Esto se debe a que las contribuciones aquí presentes forman parte del splitting $Sp_{q\bar{q}g}$. Como se muestra en la figura 9.5, con excepción de las correcciones de autoenergía al partón inicial, los diagramas de Feynman remanentes se encuentran en correspondencia biunívoca con los que aparecen en la expansión del proceso $g \to q\bar{q}\gamma$.



Fig. 9.5: Diagramas que contribuyen al proceso $\gamma \rightarrow q\bar{q}g$. Con la excepción de las correcciones de autoenergía al partón padre, los restantes diagramas de Feynman son los mismos que se emplearon para obtener el splitting $g \rightarrow q\bar{q}\gamma$ (intercambiando las partículas $P \ge 3$). E_1 -NA $\ge F$ -NA son los únicos términos que involucran interacciones no Abelianas. Además, exceptuando la contribución de F-NA, es necesario tener en cuenta el intercambio $1 \leftrightarrow 2$ para todos los diagramas mostrados.

La función de splitting a nivel amplitud, al orden más bajo, viene dada por

$$Sp_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 g_3}^{(0)(a_1, a_2, \alpha_3)} = \frac{ee_q g_S \mu^{2\epsilon} T_{a_1 a_2}^{\alpha_3}}{s_{123}} \bar{u}(p_1) \left(\frac{\notin(p_3) \not\!\!p_{13} \notin(P)}{s_{13}} - \frac{\notin(P) \not\!\!p_{23} \notin(p_3)}{s_{23}} \right) v(p_2)$$
$$= \frac{g_S}{ee_q} T_{a_1 a_2}^{\alpha_3} Sp_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(0)(a_1, a_2)}, \qquad (9.4.7)$$

en donde se emplearon resultados previos para obtener la expresión en la última línea. De hecho, utilizando la relación con el proceso de splitting $\gamma \to q\bar{q}\gamma$, se obtiene el correspondiente núcleo de Altarelli-Parisi no polarizado a nivel árbol,

$$\langle \hat{P}_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 g_3}^{(0)} \rangle = \frac{g_{\rm S}^2 C_F}{e^2 e_q^2} \langle \hat{P}_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(0)} \rangle = 2C_A C_F \langle \hat{P}_{g \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(0)} \rangle , \qquad (9.4.8)$$
que puede relacionarse con otros núcleos intercambiando fotones y gluones. Es importante señalar que solamente estamos cambiando la estructura de color, pero las configuraciones cinemáticas subyacentes son las mismas.

Con el objetivo de expresar los resultados para las correcciones NLO, se sigue la misma estrategia empleada para estudiar el proceso $g \to q\bar{q}\gamma$. Debido a la presencia de contribuciones proporcionales tanto a C_A como a $D_A = 2C_F - C_A$, cada una fue tratada de forma independiente. La contribución proporcional a D_A proviene de $\langle \hat{P}_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(1)} \rangle$ (con un factor 2 de diferencia asociado con la definición de D_A). Para corroborar la estructura divergente, los polos en ϵ fueron extraídos y comparados con las expresiones provistas por la fórmula de Catani; esto es,

$$\mathbf{I}_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 g_3}^{(1)}(p_1, p_2, p_3; \widetilde{P}) = \frac{c_{\Gamma} g_S^2}{\epsilon^2} \left(\frac{-s_{123} - i0}{\mu^2} \right)^{-\epsilon} \left[\left(-2C_F x_3^{-\epsilon} - 2\epsilon \gamma_q \right) + C_A \left(x_3^{-\epsilon} - x_1^{-\epsilon} - x_2^{-\epsilon} \right) \right] \\
= \frac{c_{\Gamma} g_S^2 C_A}{\epsilon^2} \left(\frac{-s_{123} - i0}{\mu^2} \right)^{-\epsilon} \left(x_3^{-\epsilon} - x_1^{-\epsilon} - x_2^{-\epsilon} \right) \\
+ \mathbf{I}_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(1)}(p_1, p_2, p_3; \widetilde{P}), \qquad (9.4.9)$$

encontrando un acuerdo completo. Nótese que se utilizó el operador $I_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(1)}$ con el objetivo de simplificar los resultados. Más aún, siguiendo esta idea se reescribió el núcleo de Altarelli-Parisi a NLO como

$$\langle \hat{P}_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 g_3}^{(1)} \rangle = D_A \langle \hat{P}_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(1,D_A)} \rangle + C_A \langle \hat{P}_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 g_3}^{(1,C_A)} \rangle + \text{h.c.}, \qquad (9.4.10)$$

 con

$$\langle \hat{P}_{\gamma \to q_{1}\bar{q}_{2}g_{3}}^{(1,D_{A})} \rangle = \frac{1}{2C_{F}} \boldsymbol{I}_{\gamma \to q_{1}\bar{q}_{2}\gamma_{3}}^{(1)} \left(p_{1}, p_{2}, p_{3}; \widetilde{P} \right) \langle \hat{P}_{\gamma \to q_{1}\bar{q}_{2}g_{3}}^{(0)} \rangle + \frac{c^{\gamma \to q\bar{q}g}}{2C_{F}c^{\gamma \to q\bar{q}g}} \langle \hat{P}_{\gamma \to q_{1}\bar{q}_{2}\gamma_{3}}^{(1) \text{ fm.}} \rangle$$

$$= \frac{g_{S}^{2}}{2e^{2}e_{q}^{2}} \left[\boldsymbol{I}_{\gamma \to q_{1}\bar{q}_{2}\gamma_{3}}^{(1)} \left(p_{1}, p_{2}, p_{3}; \widetilde{P} \right) \langle \hat{P}_{\gamma \to q_{1}\bar{q}_{2}\gamma_{3}}^{(0)} \rangle + \langle \hat{P}_{\gamma \to q_{1}\bar{q}_{2}\gamma_{3}}^{(1) \text{ fm.}} \rangle \right] , \qquad (9.4.11)$$

en donde se introdujo el factor de normalización global

$$c^{\gamma \to q\bar{q}g} = \frac{C_A C_F \, e^2 e_q^2 g_S^4}{2(1-\epsilon)} \,.$$
(9.4.12)

Para tratar la contribución finita, podemos expresarla como

$$\langle \hat{P}_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 g_3}^{(1) \text{ fn.}} \rangle = c^{\gamma \to q \bar{q} g} \left[D_A \langle \hat{P}_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 g_3}^{(1, D_A) \text{ fn.}} \rangle + C_A \langle \hat{P}_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 g_3}^{(1, C_A) \text{ fn.}} \rangle \right] , \qquad (9.4.13)$$

en donde los términos Abelianos vienen dados por

$$\langle \hat{P}_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 g_3}^{(1,D_A)\,\text{fn.}} \rangle = \frac{g_{\rm S}^2}{2e_q^2 g_e^2} \langle \hat{P}_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(1)\,\text{fn.}} \rangle.$$
 (9.4.14)

El aporte de los términos no Abelianos se encuentra contenido en $\langle \hat{P}_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 g_3}^{(1,C_A) \text{ fin.}} \rangle$. Clasificando tales términos de acuerdo a su transcendentalidad, obtenemos

$$\langle \hat{P}_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 g_3}^{(1,C_A) \text{ fin.}} \rangle = C^{(0,C_A)} + C^{(1,C_A)} F^{(1)} + C^{(2,C_A)} F^{(2,C_A)} + (1 \leftrightarrow 2), \qquad (9.4.15)$$

en donde los términos racionales están dados por

$$C^{(0,C_A)} = \frac{16 - 7x_2 - 2z_1z_2 + (1 - z_1)^2 - 15z_2}{x_1} - \frac{z_1^2}{(1 - x_1)x_2} - 8\frac{z_1^2 + (1 - z_1)^2}{x_1x_2} + \frac{2z_1(1 - z_3) - x_2(1 - z_1)^2 - (x_2 + 1)z_1}{(1 - x_1)x_1},$$
(9.4.16)

у

$$F^{(1)} = \log(x_1) , \qquad (9.4.17)$$

$$F^{(2,C_A)} = \mathcal{R}(x_1, x_2),$$
 (9.4.18)

son las funciones que expanden los espacios de transcendentalidad 1 y 2, respectivamente. Es importante apreciar que $F^{(2,C_A)}$ es la misma función que aparece involucrada en el proceso $\gamma \rightarrow q\bar{q}\gamma$ (a menos de una permutación de las variables cinemáticas). Al final del capítulo discutiremos detalladamente el origen de estas contribuciones. Por último, para describir completamente las correcciones a NLO para el splitting $\gamma \rightarrow q\bar{q}g$ presentamos los coeficientes definidos en la ecuación (9.4.15), los cuales vienen dados por

$$C^{(1,C_A)} = \frac{z_2(x_2(4x_1z_1 + x_1 - 1) + 2x_3z_1) + x_2(x_1((x_2 - 1)z_1 + x_2 - 3) - 2x_2 + 3)}{(x_1 - 1)^2 x_1 x_2} + \frac{3x_2^2 + 5x_2(z_2 - 1) + 3z_2^2 - 4z_2 + 1}{x_1 x_2} - \frac{(1 - x_2)^2 z_1^2}{(1 - x_1)^2 x_1 x_2}, \qquad (9.4.19)$$

$$C^{(2,C_A)} = \langle \mathcal{P}_{q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(0)} \rangle |_{\epsilon^0} .$$
(9.4.20)

Nuevamente, cabe señalar que este splitting no puede ser relacionado de forma sencilla con $g \to q\bar{q}\gamma$. En particular, anteriormente se mostró que se requieren 7 funciones para expandir las contribuciones de peso transcendental 2 a $\langle \hat{P}_{g \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(1) \text{ fin.}} \rangle$. Sin embargo, este proceso solo requiere hacer uso de $\mathcal{R}(x_1, x_2)$.

5. Comentarios sobre la estructura de los resultados

Tras haber presentado las funciones de splitting iniciadas por fotones, es interesante analizar su estructura y dependencias funcionales. En particular, explotando la simplicidad de estos resultados, podemos estudiar el origen de las distintas contribuciones.

$$\langle \hat{P}_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(1)} \rangle = A_1^{(4)} (z_j, x_k; \epsilon) I_1^{(4)} + \sum_{i=1}^3 A_i^{(2)} (z_j, x_k; \epsilon) I_i^{(2)} + (1 \leftrightarrow 2) ,$$

$$(9.5.1)$$

en donde los acoplamientos y los factores de color son absorbidos en la definición de los coeficientes A. Aquí $A_i^{(4)}$ y $A_i^{(2)}$ son funciones racionales de las variables cinemáticas $\{x_i, z_j\}$ y dependen explícitamente de ϵ . Sin embargo, las expresiones también involucran funciones transcendentales que introducen branch-cuts. En particular, se puede verificar que tales funciones provienen de las integrales de Feynman $I_1^{(4)}$ (box) y $I_i^{(2)}$ (burbuja). Más aún, utilizando $D = 4 - 2\epsilon$, el box viene dado por

$$I_{1}^{(4)} = \int_{q} \frac{\mu^{2\epsilon}}{q^{2}(q+p_{1})^{2}(q-p_{2})^{2}(q-p_{23})^{2}} = \frac{2c_{\Gamma}}{\epsilon^{2}x_{1}x_{3}s_{123}^{2}} \left(\frac{-s_{123}-\iota 0}{\mu^{2}}\right)^{-\epsilon} \\ \times \left[x_{1}^{-\epsilon}{}_{2}F_{1}\left(1,-\epsilon;1-\epsilon;-\frac{x_{2}}{x_{3}}\right) + x_{3}^{-\epsilon}{}_{2}F_{1}\left(1,-\epsilon;1-\epsilon;-\frac{x_{2}}{x_{1}}\right) - {}_{2}F_{1}\left(1,-\epsilon;1-\epsilon;-\frac{x_{2}}{x_{1}x_{3}}\right)\right], \qquad (9.5.2)$$

mientras que

$$I_1^{(2)} = \int_q \frac{\mu^{2\epsilon}}{q^2(q-p_{123})^2} = \frac{c_{\Gamma}}{\epsilon(1-2\epsilon)} \left(\frac{-s_{123}-i0}{\mu^2}\right)^{-\epsilon}, \qquad (9.5.3)$$

$$I_2^{(2)} = \int_q \frac{\mu^{2\epsilon}}{q^2(q-p_{23})^2} = \frac{c_{\Gamma} x_1^{-\epsilon}}{\epsilon(1-2\epsilon)} \left(\frac{-s_{123}-i0}{\mu^2}\right)^{-\epsilon}, \qquad (9.5.4)$$

$$I_3^{(2)} = \int_q \frac{\mu^{2\epsilon}}{q^2(q-p_{12})^2} = \frac{c_{\Gamma} x_3^{-\epsilon}}{\epsilon(1-2\epsilon)} \left(\frac{-s_{123}-i0}{\mu^2}\right)^{-\epsilon}, \qquad (9.5.5)$$

son todas las burbujas involucradas. Cabe señalar que estas integrales se conocen a todo orden en ϵ , lo cual permite calcular $\langle \hat{P}_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(1)} \rangle$ de forma exacta. Sin embargo, los coeficientes A presentan una estructura muy compleja y no es posible llevar a cabo una simplificación eficiente de los mismos.

Si estudiamos las integrales involucradas en las correcciones NLO al proceso $\gamma \rightarrow q\bar{q}g$, se aprecia que tienen lugar una situación similar. En otras palabras, es posible escribir tales correcciones como

$$\langle \hat{P}_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 g_3}^{(1)} \rangle = A_1^{(4)} (z_j, x_k; \epsilon) I_1^{(4)} + A_2^{(4)} (z_j, x_k; \epsilon) I_2^{(4)} + \sum_{i=1}^3 A_i^{(2)} (z_j, x_k; \epsilon) I_i^{(2)}$$

+ $(1 \leftrightarrow 2)$, (9.5.6)

en donde

$$I_{2}^{(4)} = \int_{q} \frac{\mu^{2\epsilon}}{q^{2}(q+p_{2})^{2}(q-p_{3})^{2}(q-p_{13})^{2}} = \frac{2c_{\Gamma}}{\epsilon^{2}x_{1}x_{2}s_{123}^{2}} \left(\frac{-s_{123}-i0}{\mu^{2}}\right)^{-\epsilon} \\ \times \left[x_{2}^{-\epsilon}{}_{2}F_{1}\left(1,-\epsilon;1-\epsilon;-\frac{x_{3}}{x_{1}}\right) + x_{1}^{-\epsilon}{}_{2}F_{1}\left(1,-\epsilon;1-\epsilon;-\frac{x_{3}}{x_{2}}\right) - {}_{2}F_{1}\left(1,-\epsilon;1-\epsilon;-\frac{x_{3}}{x_{1}x_{2}}\right)\right], \qquad (9.5.7)$$

es una integral de box con una única masa externa. Nuevamente, los correspondientes coeficientes se calculan a todo orden en ϵ , pero no se encontró una forma compacta de escribirlos.

Luego de motivar las expresiones explícitas para $\langle \hat{P}_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(1)} \rangle$ y $\langle \hat{P}_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 g_3}^{(1)} \rangle$, es interesante apreciar que la integral de box escalar tiene la siguiente expansión en potencias de ϵ :

$$I_{1}^{(4)} = \frac{2c_{\Gamma}}{x_{1}x_{3}s_{123}^{2}} \left(\frac{-s_{123}-\imath 0}{\mu^{2}}\right)^{-\epsilon} \left[\frac{1}{\epsilon^{2}} - \frac{\log(x_{1}x_{3})}{\epsilon} + \frac{\log^{2}(x_{1}) + \log^{2}(x_{3})}{2} - \mathcal{R}(x_{1},x_{3})\right], \qquad (9.5.8)$$

lo cual explica el origen de la función \mathcal{R} en los cálculos anteriores. En otras palabras, esta contribución proviene de la expansión de las funciones hipergeométricas involucradas en las integrales de box escalares que no incluyen propagadores lineales. Pero lo que resulta más interesante es el hecho de que \mathcal{R} aparece en todas las funciones de splitting triple-colineales a 1-loop. Más aún, revisando las expresiones correspondientes a la parte antisimétrica del núcleo de Altarelli-Parisi para el proceso $\langle \hat{P}_{q \to q_1 \bar{Q}_2 Q_3}^{(1)} \rangle$ (calculada en Ref. (72)) vemos que también se requiere de la función \mathcal{R} . Por lo tanto, su presencia es inherente a la cinemática del proceso de emisión triple colineal a 1-loop.

Otro hecho que merece ser destacado es que los procesos iniciados por fotones pueden ser descritos empleando únicamente boxes y burbujas. Los boxes se asocian a las topologías más complejas, mientras las burbujas corresponden a las contribuciones más sencillas no triviales: todas los términos que involucran integrales triangulares se cancelan.

Para concluir esta discusión, analicemos la diferencia entre procesos de splitting iniciados por gluones y fotones. Estos últimos involucran expresiones muy sencillas y pueden ser expresados utilizando únicamente integrales escalares estándar (esto es, sin denominadores lineales provenientes de la elección del LCG). Si se efectúa una comparación de los diagramas de Feynman requeridos para $\gamma \to q\bar{q}\gamma$ con aquellos empleados en el cálculo de $g \to q\bar{q}\gamma$, se aprecia que las interacciones de origen no Abeliano están ausentes en el primer proceso. Más aún, cambiando el acoplamiento y removiendo el factor de color global, las correcciones NLO de QCD para $\gamma \to q\bar{q}\gamma$ son exactamente las mismas que se encuentran a 1-loop en QED. Debido a que QED es una teoría Abeliana, es posible emplear un gauge covariante par efectuar el cálculo de las correcciones virtuales y los resultados coinciden con los hallados en LCG. Este argumento nos permite comprender la simplicidad de $\gamma \to q\bar{q}\gamma$, y en particular la ausencia de integrales con denominadores lineales.

Sin embargo, al analizar el proceso $\gamma \rightarrow q\bar{q}g$ se encuentran contribuciones no triviales asociadas a diagramas con vértices no Abelianos. Por ende, el argumento anterior no es aplicable de forma directa, aunque la idea central de la simplicidad del resultado también se relaciona con la invariancia de gauge. Notemos que las amplitudes y funciones de splitting se calculan empleando un gauge físico fijo (el *light-cone gauge*) y amplitudes de scattering amputadas, con la partícula inicial *off-shell* pero proyectando sobre un estado *on-shell*. Cuando el partón inicial es una partícula de QCD, existe un flujo de color no trivial a través del mismo. Pero, si se trata de un fotón, se verifica que

$$\sum_{i=1}^{m} T^{i} = 0, \qquad (9.5.9)$$

debido a que los fotones son singletes de color. Esto implica que podemos acoplar la amplitud amputada a un par de fermiones sin color (por ejemplo, a un par electrón-positrón) y reconstruir la corrección completa de QCD a NLO para una amplitud de scattering on-shell física. Debido a que tales objetos son invariantes frente a transformaciones de gauge, podemos utilizar un gauge covariante y solamente estarán involucradas integrales con denominadores cuadráticos. En otros términos, podemos escribir

$$\mathcal{A}_{e^-e^+ \to a_1 a_2 a_3}^{(1)} \left(k_1, k_2; p_1, p_2, p_3 \right) \big|_{\text{LCG}} = \bar{v}(k_2) \left(-i g_e \gamma^{\nu} \right) u(k_1) \frac{-i \eta_{\mu\nu}}{s_{123}} \mathcal{A}_{(\text{amp},\gamma)}^{(1,\mu)} \big|_{\text{LCG}} \quad (9.5.10)$$
$$= -g_e C_{\text{pol}} \left[\frac{1}{s_{123}} \frac{\bar{v}(k_2) \gamma_{\mu} u(k_1)}{C_{\text{pol}}} \mathcal{A}_{(\text{amp},\gamma)}^{(1,\mu)} \big|_{\text{LCG}} \right],$$

en donde estamos utilizando los momentos físicos para el proceso $e^-e^+ \rightarrow a_1a_2a_3$ con a_i cualquier partón, lo que implica que $k_i^2 = 0$ (por tratarse de fermiones no masivos en su capa de masa) y $k_1 + k_2 = p_1 + p_2 + p_3$ (conservación del momento). Apelando a la invariancia de gauge,

$$\mathcal{A}_{e^-e^+ \to a_1 a_2 a_3}^{(1)}\left(k_1, k_2; p_1, p_2, p_3\right) = \mathcal{A}_{e^-e^+ \to a_1 a_2 a_3}^{(1)}\left(k_1, k_2; p_1, p_2, p_3\right) \big|_{\text{LCG}} , \qquad (9.5.11)$$

lo que conduce a

$$\frac{\bar{v}(k_2)\gamma_{\mu}u(k_1)}{C_{\rm pol}} \mathcal{A}_{(\rm amp,\gamma)}^{(1,\mu)} \mid_{\rm LCG} = \frac{\bar{v}(k_2)\gamma_{\mu}u(k_1)}{C_{\rm pol}} \mathcal{A}_{(\rm amp,\gamma)}^{(1,\mu)}.$$
(9.5.12)

Pero esta relación es válida para cualquier valor de k_i que verifique las condiciones físicas. En particular podríamos emplear

$$k_1^{\mu} = \tilde{P}^{\mu} , \quad k_2^{\mu} = \frac{s_{123}}{2 n P} n^{\mu} , \qquad (9.5.13)$$

o en el orden inverso. Si se consideran únicamente estados externos físicos se obtiene

$$\frac{\bar{v}(k_2)\gamma_{\mu}u(k_1)}{C_{\text{pol}}} = \epsilon_{\mu}^{\pm} \left(\tilde{P}, n\right) , \qquad (9.5.14)$$

en donde estamos aplicando las propiedades del mapeo de vectores de polarización en cadenas de espinores, definido en el Capítulo 2. En consecuencia, apelando a (6.2.22) junto a estas observaciones, se concluye que es posible utilizar el gauge covariante para calcular los diagramas con loops correspondientes a un proceso de splitting iniciado por un fotón. En el caso del límite triple colineal, este hecho implica directamente que podemos efectuar la sustitución

$$d_{\mu\nu}(q,n) \to -\eta_{\mu\nu} \,, \tag{9.5.15}$$

dentro en los diagramas con loops presentes en las figuras 9.4 $(\gamma \rightarrow q\bar{q}\gamma)$ y 9.5 $(\gamma \rightarrow q\bar{q}g)$.

Esta discusión puede ser generalizada para tratar funciones de splitting con más partículas con color, siempre que se encuentren en el estado final. Más aún, la demostración es válida en teorías de gauge cuyo grupo G pueda ser expresado en términos de un producto directo.

5.1. Sobre las relaciones de crossing

Al comienzo de este capítulo presentamos una generalización de las variables de Sudakov para parametrizar los momentos en el límite triple colineal. Volviendo a escribir la descomposición indicada en (9.2.4) tenemos

$$p_i^{\mu} = z_i \widetilde{P}^{\mu} + (k_{\perp})_i^{\mu} - \frac{(k_{\perp})_i^2}{z_i} \frac{n^{\mu}}{2 n \cdot \widetilde{P}}, \qquad (9.5.16)$$

de donde es posible derivar una relación explícita entre s_{ij} y la virtualidad de los momentos transversales $(k_{\perp})_i^2$. Contrayendo con los momentos p_i y el vector n, armando un sistema de ecuaciones para las variables $(k_{\perp})_i^2$ e invirtiéndolo, se obtiene

$$(k_{\perp})_i^2 = s_{123} z_i \left(x_i + z_i - 1 \right) , \qquad (9.5.17)$$

con lo cual (9.5.16) se puede expresar como

$$p_i^{\mu} = z_i \widetilde{P}^{\mu} + (k_{\perp})_i^{\mu} - \Delta_{0,i}^{i,0} \frac{s_{123} n^{\mu}}{2 n \cdot \widetilde{P}}, \qquad (9.5.18)$$

haciendo uso de las variables $\Delta_{k,l}^{i,j}$ definidas en (9.3.5). Notemos que esto justifica la presencia de $\Delta_{0,i}^{i,0}$ en los resultados exhibidos en esta sección, puesto que $(k_{\perp})_i^2$ es una variable natural del problema. También podemos apreciar que

$$2\widetilde{P}_{\mu}p_{i}^{\mu} = -s_{123}\Delta_{0,i}^{i,0}, \qquad (9.5.19)$$

es decir que $\Delta_{0,i}^{i,0}$ es proporcional al invariante cinemático surgido de la contracción del vector \tilde{P} con el momento de la partícula *i*. Esta observación resulta muy interesante puesto que permite escribir los argumentos de todas las funciones transcendentales como productos de momentos físicos.

Volviendo a las relaciones de crossing, podemos intentar generalizar el procedimiento empleado en el Capítulo 8 para contemplar el límite triple colineal. Supongamos que intercambiamos el partón padre P con la partícula 1. Tanto \tilde{P} como p_i son vectores nulos, con lo cual podemos emplear (9.5.18) y escribir los momentos $\{\tilde{P}, p_2, p_3\}$ en términos de p_1 , n y vectores transversales. En particular, contrayendo con el vector nulo n (que es transversal a $(k_{\perp})_i$) se tiene

$$n \cdot p_1 = z_1 n \cdot P , \qquad (9.5.20)$$

con $P = p_{123}$ momento del partón padre. Entonces, usando la definición de las fracciones de momento expresada en (6.2.3) junto con el intercambio simbólico $P \leftrightarrow -p_1$ tenemos que

$$z_i \rightarrow z'_i = -\frac{z_i}{z_1},$$

$$z_1 \rightarrow z'_1 = \frac{1}{z_1},$$
(9.5.21)

lo que nos indica como transforman las variables z_i . Notemos que

$$\sum z'_{i} = 1, \qquad (9.5.22)$$

aunque algunas de estas variables son negativas o mayores que 1.

Respecto de la transformación de los productos escalares s_{ij} debemos efectuar un análisis más riguroso. En primer lugar, intercambiar el partón padre P y la partícula 1 implica cambiar un estado off-shell con uno on-shell no masivo, y viceversa. En otras palabras, el momento asociado a P cumple $P^2 = s_{123} \neq 0$ pero $p_1^2 = 0$. Utilizando el vector auxiliar n podemos definir

$$P^{\prime \mu} = -p_1^{\mu} + \frac{s_{123}}{2nP} n^{\mu}, \qquad (9.5.23)$$

$$p_{1}^{\prime \mu} = -\widetilde{P}^{\mu},$$
 (9.5.24)



Fig. 9.6: Esquema de las transformaciones necesarias para efectuar el crossing $P \leftrightarrow 1$ en un splitting triple colineal. Se indican los momentos de cada partícula, así como también su correspondiente fracción de impulso z_i .

que verifican $P'^2 = -z_1 s_{123}, p'^2_1 = 0$, junto con la conservación de momento

$$P' + \sum_{i=1}^{3} p'_{i} = 0, \qquad (9.5.25)$$

en el proceso completo, como se puede apreciar en la figura 9.6. La idea detrás de estas definiciones es extraer la estructura cinemática del splitting colineal y compatibilizarla con una transformación de crossing. De esta forma, el intercambio $P \leftrightarrow 1$ es equivalente a pasar del proceso $P(P, \tilde{P}) \rightarrow a(p_1)b(p_2)c(p_3)$ a $a(P', -p_1) \rightarrow P(p'_1)b(p_2)c(p_3)$, en donde se indica explícitamente la dirección colineal nula en cada caso. Luego, los invariantes s_{ij} verifican

$$s_{1j} = 2p_1 \cdot p_j \quad \to \quad 2p'_1 \cdot p_j = s_{123} \left(x_j + z_j - 1 \right) ,$$

$$s_{123} = P^2 \quad \to \quad {P'}^2 = -z_1 s_{123} , \qquad (9.5.26)$$

con lo cual tenemos el conjunto completo de transformaciones. Cabe señalar que (9.5.21) y (9.5.26) son complementarias y consistentes entre sí. Concretamente, si transformamos s_{12} usando (9.5.26) llegamos a

$$s_{12} \rightarrow s_{123} (x_2 + z_2 - 1) = s_{13} + s_{123} (z_2 - 1),$$
 (9.5.27)

y al aplicar (9.5.21) para invertir la relación se tiene

$$s_{13} + s_{123}(z_2 - 1) \rightarrow s_{12} + s_{123}(z_3 - 1) - z_1 s_{123}\left(-\frac{z_2}{z_1} - 1\right) = s_{13},$$
 (9.5.28)

con lo cual se prueba la consistencia del sistema propuesto. Para terminar de definir el crossing, cabe señalar que es necesario cambiar la normalización global del splitting. Esto se debe a la

presencia de un propagador entre la función de splitting y el elemento de matriz reducido², que transforma de acuerdo a

$$\frac{1}{P^2} = \frac{1}{s_{123}} \to \frac{-1}{z_1 s_{123}}, \qquad (9.5.29)$$

con lo que el splitting transformado debe ser multiplicado por $-z_1$. Nótese que este factor es igual al que aparece en el límite doble colineal, discutido en el Capítulo 8.



Fig. 9.7: Análisis de la transformación de crossing para los procesos $\gamma \to q\bar{q}\gamma$ y $q \to q\gamma\gamma$, a nivel árbol. Se muestra como cambian los propagadores en cada diagrama por separado. Mientras que el diagrama *a*) preserva el propagador, no ocurre lo mismo con b). La presencia de un término proporcional a s_{123} en el denominador invalida el crossing en ese diagrama.

Contando con las transformaciones de crossing para el límite triple colineal, podemos explorar sus efectos sobre las funciones de splitting a nivel árbol. Consideremos los procesos $\gamma \rightarrow q\bar{q}\gamma$ y $q \rightarrow q\gamma\gamma$, vinculados por el intercambio $P \leftrightarrow 2$. Usando las expresiones dadas en (9.3.7) y (9.4.3), vemos que no es posible establecer la conexión entre ambos resultados. En particular, puede apreciarse que los denominadores cambian de forma incompatible. Explícitamente, transformando

² Ver discusión presentada en el Capítulo 6, cuando se motivaron las propiedades de factorización colineal.

 $\langle P_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(0)} \rangle$ vale

$$\langle P_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(0)} \rangle \to \frac{N(s_{ij}, z_i)}{s_{13}(s_{12} + s_{123}(z_3 - 1))},$$
 (9.5.30)

donde $N(s_{ij}, z_i)$ denota al numerador de la función obtenida tras el crossing. Pero según (9.3.7) debe cumplirse

$$\langle P_{q \to q_1 \gamma_2 \gamma_3}^{(0)} \rangle \to \frac{N'(s_{ij}, z_i)}{s_{13} s_{12}},$$
 (9.5.31)

con lo cual nunca puede verificarse la igualdad³. Este problema puede comprenderse mejor analizando los diagramas a nivel árbol en ambos casos. Como se observa en la figura 9.7, el segundo diagrama involucra un propagador que no cambia de la forma correcta. Esto es una consecuencia directa de la presencia de partículas off-shell en el proceso. El crossing intercambia toda la información asociada con cada partícula, incluso su virtualidad. En consecuencia, solo cuando $s_{123} = 0$ es posible relacionar ambos procesos.

³ Es importante apreciar que las fórmulas dadas en (9.3.7) y (9.4.3) están escritas de forma simplificada, lo cual hace que puedan aparecer algunos denominadores espurios como z_i o $1 - x_i$.

10. LÍMITE TRIPLE COLINEAL CON FOTONES II

En este capítulo se presentan las funciones de splitting polarizadas para procesos que involucran al menos un fotón, a NLO en el acoplamiento fuerte. En primer lugar se efectúa una detallada discusión de las técnicas de cálculo empleadas, haciendo hincapié en el procedimiento de reducción tensorial. Luego se presentan los splittings polarizados para procesos iniciados por fotones, $\gamma \to q\bar{q}\gamma$ y $\gamma \to q\bar{q}g$. Finalmente, se analiza el caso $\gamma \to q\bar{q}\gamma$ y se describen las pruebas de consistencia efectuadas.

1. Generalidades y técnicas de cálculo

El estudio de las correlaciones de espín es importante pues permite efectuar una descripción completa del comportamiento de los elementos de matriz al cuadrado en el límite colineal. Cuando analizamos los procesos iniciados por quarks, presentamos los núcleos de Altarelli-Parisi no polarizados únicamente. En tal caso, la conservación de helicidad en las interacciones vectoriales fuerza a que las matrices de splitting sean diagonales en el espacio de espín. Concretamente,

$$\langle s | \boldsymbol{P}_{q \to a_1 \dots a_m} | s' \rangle = \delta_{s,s'} \langle \hat{P}_{q \to a_1 \dots a_m} \rangle, \qquad (10.1.1)$$

con lo cual basta conocer las funciones de splitting no polarizadas. Sin embargo, cuando el partón padre es una partícula vectorial las correlaciones de espín no son triviales. En otras palabras, un gluón permite el flujo de información concerniente a la helicidad de las partículas interactuantes. Por ende, para el proceso $g \rightarrow q\bar{q}\gamma$ es relevante calcular las proyecciones de P sobre el espacio de espín del gluón padre. Por supuesto, una situación análoga ocurre cuando el proceso de división colineal es iniciado por un fotón. En tal caso, veremos que las expresiones resultantes son muy compactas, en concordancia con el comportamiento observado en el caso no polarizado (Capítulo 9).

Desde el punto de vista computacional, la complejidad de los cálculos involucrados es notablemente superior a la enfrentada en el caso doble colineal. Esto se debe a la presencia de una partícula adicional, que introduce un vector independiente y 2 nuevas variables escalares. De esta manera, no solamente se complican las dependencias funcionales sino que las expansiones tensoriales involucran más términos. En particular, esto conlleva a la aparición de integrales de Feynman con hasta 3 índices libres y 5 propagadores (boxes LCG de rango 3). Las expresiones explícitas para tales integrales son muy extensas y, al efectuar un reemplazo *naive* en los cálculos, se obtienen resultados inmanejables con un ordenador estándar. En otras palabras, la estrategia utilizada para atacar los splittings polarizados en el límite doble colineal no puede ser extendida directamente al caso con múltiples partículas. De esta forma fue necesario combinar una serie de herramientas para llevar a cabo la reducción tensorial a nivel splitting en vez de hacerlo en cada integral individualmente.

La discusión que se presenta a continuación está basada en Ref. (89), que constituye una extensión de Ref. (88) al caso polarizado.

1.1. Reducción tensorial combinada

Tomemos como punto de partida las definiciones efectuadas en el Capítulo 6, en particular la ecuación (6.2.40). Para efectuar una adecuada expansión de $P^{\mu\nu}$, se requiere una base para el espacio de todas las posibles estructuras tensoriales que pueden intervenir en su construcción. Al considerar un proceso de *n*-partículas en el cual *m* se vuelven colineales, hay *m* vectores asociados con los momentos externos y un vector tipo luz, n^{μ} , introducido para eliminar los grados de libertad no físicos de los gluones y describir la manera en que se llega al límite colineal. Debido a que $P^{\mu\nu}$ es un tensor de rango 2 que solamente depende de $\{p_i^{\mu}\}_{i\in C}$ y n^{μ} , ¹ luego puede introducirse la base de estructuras tensoriales:

$$f_0^{\mu\nu} = (\eta^{D_{\rm ST}})^{\mu\nu} , \qquad (10.1.2)$$

$$f_i^{\mu\nu} = \tilde{p}_{\sigma_1(i),\sigma_2(i)}^{\mu\nu} \quad i \in \{1,\dots,\Delta_1\} , \qquad (10.1.3)$$

$$f_{i+\Delta_1}^{\mu\nu} = \bar{p}_{\rho_1(i),\rho_2(i)}^{\mu\nu} \quad i \in \{1,\dots,\Delta_2\} , \qquad (10.1.4)$$

$$f_{j+\Delta_1+\Delta_2}^{\mu\nu} = \tilde{p}_{j,m+1}^{\mu\nu} \quad j \in \{1,\dots,m\} ,$$
 (10.1.5)

$$f_{j+\Delta_1+\Delta_2+m}^{\mu\nu} = \bar{p}_{j,m+1}^{\mu\nu} \quad j \in \{1,\dots,m\} ,$$
 (10.1.6)

$$f_{1+\Delta_1+\Delta_2+2m}^{\mu\nu} = \tilde{p}_{m+1,m+1}^{\mu\nu}, \qquad (10.1.7)$$

en donde se está empleando la notación

$$\tilde{p}_{i,j}^{\mu\nu} = p_i^{\mu} p_j^{\nu} + p_j^{\mu} p_i^{\nu} , \qquad (10.1.8)$$

¹ La validez de esta afirmación se encuentra restringida configuraciones cinemáticas TL. En el caso más general (configuraciones SL), los potenciales efectos de violación de factorización estricta descriptos Refs. (71; 90) podrían introducir una dependencia no trivial en las partículas no colineales. Sin embargo, de acuerdo a lo expresado en los mencionados trabajos, se espera que los términos que violan factorización modifiquen solamente la parte divergente de las funciones de splitting.

$$\bar{p}_{i,j}^{\mu\nu} = p_i^{\mu} p_j^{\nu} - p_j^{\mu} p_i^{\nu}, \qquad (10.1.9)$$

$$\Delta_1 = \frac{m(m+1)}{2}, \qquad (10.1.10)$$

$$\Delta_2 = \frac{m(m-1)}{2}, \qquad (10.1.11)$$

y $p_{m+1}^{\mu} = n^{\mu}$. En la lista previa, σ es una permutación de los pares de momentos externos (contempla la inclusión de elementos repetidos) y contribuye a la parte simétrica ante el intercambio $\mu \leftrightarrow \nu$; en cambio, ρ es una permutación que excluye elementos repetidos. Por otra parte, es importante apreciar que f_0 es el tensor métrico D_{ST} -dimensional. En principio, como discutimos en el Capítulo 4, la métrica puede elegirse libremente, definiendo en cada caso un esquema de regularización diferente. Debido a que trabajamos en CDR, la opción elegida es la que garantiza la consistencia en los cálculos.

Al motivar la definición de las funciones de splitting polarizadas (ver Capítulo 6), mencionamos la posibilidad de cancelar ciertas contribuciones debido a que, al analizar el límite colineal, $P^{\mu\nu}$ debe contraerse con vectores de polarización físicos asociados al partón padre. En particular, partiendo de (6.2.36) y (6.2.37), vimos que era posible efectuar las sustituciones

$$p_m^a \to -p_1^a - \ldots - p_{m-1}^a,$$
 (10.1.12)

$$n^a \to 0, \qquad (10.1.13)$$

siempre que *a* estuviera asociado al partón que origina el proceso de splitting. Sin embargo, cuando el índice *a* está asociado al momento de loop *q*, estos reemplazos no pueden ser efectuados antes de calcular las correspondientes integrales tensoriales. Esto se debe, como se explicó en el Capítulo 5, a que las técnicas de reducción tensorial requieren proyectar sobre una base completa del espacio de estructuras de rango 2 formadas combinando los vectores físicos del problema y la métrica $\eta^{D_{\rm ST}}$.

Tras efectuar estas aclaraciones, describamos el procedimiento empleado para calcular los splittings polarizados. En primer lugar, se escriben los correspondientes diagramas de Feynman y se llevan a cabo todas las simplificaciones posibles, a nivel integrando. El próximo paso consiste en realizar la descomposición

$$P_{a \to a_1 \dots a_m}^{\mu\nu} = \sum_{j=0}^{1+m+\Delta_1} \left(\int_q A^{(0)}(q) \right) f_j^{\mu\nu} |_{\mathcal{S}_{\mu} \cup \mathcal{S}_{\nu}} + \sum_{j=1}^{m+1} \left(\int_q A^{(1)}(q) q^{\nu} \right) p_j^{\mu} |_{\mathcal{S}_{\mu}} + \sum_{j=1}^{m+1} \left(\int_q A^{(2)}(q) q^{\mu} \right) p_j^{\nu} |_{\mathcal{S}_{\nu}} + \int_q A^{(3)}(q) q^{\mu} q^{\nu}, \qquad (10.1.14)$$

en donde $A^{(l)}(q)$ es una función escalar que depende del momento del loop q y S_a es un operador que implementa formalmente las cancelaciones dadas en (10.1.12) y (10.1.13). Cabe señalar que el enfoque utilizado aquí es diferente de la reducción de Passarino-Veltman tradicional, puesto que no se están tratando las integrales de Feynman de forma aislada. Por el contrario, la reducción tensorial se efectúa a nivel amplitud de scattering, combinando todas las integrales y tratándolas simultáneamente. Este método resulta más eficiente puesto que explota las simetrías asociadas con los elementos de matriz. En concreto, al sumar las diversas integrales y sus correspondientes expansiones se producen muchas cancelaciones cruzadas, con lo cual efectuar la reducción considerando el splitting completo evita calcular contribuciones innecesarias.

Siguiendo con la descripción del cálculo, el próximo paso consiste en reescribir Eq. (10.1.14), proyectando $P^{\mu\nu}$ sobre los $v = ((m+1)^2 + 1)$ elementos de la base tensorial. De esta forma, se obtiene

$$P_{a \to a_1 \dots a_m}^{\mu\nu} = \sum_{j=0}^{\nu-1} A_j f_j^{\mu\nu}, \qquad (10.1.15)$$

en donde se define el vector \vec{B} como

$$B_j = \sum_{i=1}^{\nu-1} A_i f_i^{\mu\nu} (f_j)_{\mu\nu} = (M \cdot A)_j , \qquad (10.1.16)$$

con la matriz cinemática $(M)_{ij} = f_i^{\mu\nu}(f_j)_{\mu\nu}$. Esta matriz ν -dimensional contiene toda la información cinemática relacionada con los productos escalares entre los momentos de las partículas colineales y la métrica $D_{\rm ST}$ -dimensional. La forma explícita de M depende, obviamente, de la base particular que se haya elegido para describir el problema. Sin embargo, si D = 4 los vectores asociados a los momentos de las partículas dejan de ser linealmente independientes y Mes singular. En otras palabras, sabemos que det $(M) = \mathcal{O}(\epsilon)$ cuando $D = 4 - 2\epsilon$. Teniendo en cuenta la expansión realizada en Eq. (10.1.15), el problema se reduce a obtener los coeficientes A_j para todos aquellos términos que contribuyan al splitting. Por supuesto, ello requiere invertir el sistema definido por M y calcular M^{-1} .

Centrándonos en el caso particular del límite triple colineal, decidimos aplicar la regla de Cramer para recuperar los coeficientes involucrados en la expansión definida por (10.1.15). Esto se debe a que la aplicación de los reemplazos dados en (10.1.12) y (10.1.13) posibilita ignorar muchas contribuciones a $P^{\mu\nu}$, las cuales se cancelan tras la contracción con $\epsilon^*_{\mu}(\tilde{P}, n)\epsilon_{\nu}(\tilde{P}, n)$. Por otra parte, al momento de escribir la base tensorial podemos explotar la simetría $\mu \leftrightarrow \nu$ (asociada al hecho de que estamos calculando la parte real del producto $\boldsymbol{Sp}^{(1)}(\boldsymbol{Sp}^{(0)})^{\dagger}$) junto con $1 \leftrightarrow 2$. En particular, cuando m = 3 existe una relación estrecha entre ambas propiedades. Sabiendo que (10.1.13) implica que $p_{123}^a \to 0$ (que deriva, a su vez, de $\tilde{P}^a \to 0$), podemos escribir la base tensorial de acuerdo a

$$f_1^{\mu\nu} = (\eta^{D_{\rm ST}})^{\mu\nu} , \qquad (10.1.17)$$

$$f_2^{\mu\nu} = 2\frac{p_1^{\mu}p_1^{\nu}}{s_{123}}, \qquad (10.1.18)$$

$$f_3^{\mu\nu} = \frac{p_1^{\mu} p_2^{\nu} + p_1^{\nu} p_2^{\mu}}{s_{123}}, \qquad (10.1.19)$$

$$f_4^{\mu\nu} = 2\frac{p_2^{\mu}p_2^{\nu}}{s_{123}}, \qquad (10.1.20)$$

$$f_5^{\mu\nu} = \frac{p_1^{\mu} p_{123}^{\nu} + p_1^{\nu} p_{123}^{\mu}}{s_{123}}, \qquad (10.1.21)$$

$$f_6^{\mu\nu} = \frac{p_2^{\mu} p_{123}^{\nu} + p_2^{\nu} p_{123}^{\mu}}{s_{123}}, \qquad (10.1.22)$$

$$f_7^{\mu\nu} = 2\frac{p_{123}^{\mu}p_{123}^{\nu}}{s_{123}}, \qquad (10.1.23)$$

$$f_8^{\mu\nu} = \frac{p_1^{\mu}n^{\nu} + p_1^{\nu}n^{\mu}}{nP}, \qquad (10.1.24)$$

$$f_9^{\mu\nu} = \frac{p_2^{\mu}n^{\nu} + p_2^{\nu}n^{\mu}}{nP}, \qquad (10.1.25)$$

$$f_{10}^{\mu\nu} = \frac{p_{123}^{\mu}n^{\nu} + p_{123}^{\nu}n^{\mu}}{nP}, \qquad (10.1.26)$$

$$f_{11}^{\mu\nu} = s_{123} \frac{n^{\mu} n^{\nu}}{nP^2}, \qquad (10.1.27)$$

que son las posibles estructuras simétricas ante $\mu\leftrightarrow\nu$ y

$$f_{12}^{\mu\nu} = \frac{p_1^{\mu} p_2^{\nu} - p_1^{\nu} p_2^{\mu}}{s_{123}}, \qquad (10.1.28)$$

$$f_{13}^{\mu\nu} = \frac{p_1^{\mu} p_{123}^{\nu} - p_1^{\nu} p_{123}^{\mu}}{s_{123}}, \qquad (10.1.29)$$

$$f_{14}^{\mu\nu} = \frac{p_2^{\mu} p_{123}^{\nu} - p_2^{\nu} p_{123}^{\mu}}{s_{123}}, \qquad (10.1.30)$$

$$f_{15}^{\mu\nu} = \frac{p_1^{\mu}n^{\nu} - p_1^{\nu}n^{\mu}}{nP}, \qquad (10.1.31)$$

$$f_{16}^{\mu\nu} = \frac{p_2^{\mu}n^{\nu} - p_2^{\nu}n^{\mu}}{nP}, \qquad (10.1.32)$$

$$f_{17}^{\mu\nu} = \frac{p_{123}^{\mu}n^{\nu} - p_{123}^{\nu}n^{\mu}}{nP}, \qquad (10.1.33)$$

los elementos antisimétricos. Nótese que elegimos normalizar los elementos para que sean cantidades adimensionales en todos los casos. Debido a que los espacios simétricos y antisimétricos son ortogonales², la matriz cinemática M puede escribirse en la forma

$$M = \begin{pmatrix} M_{\rm sym} & 0\\ 0 & M_{\rm asym} \end{pmatrix}, \qquad (10.1.34)$$

en donde M_{sym} tiene dimensión 11×11 mientras que M_{asym} es una matriz de 7×7 . El hecho de que M sea una matriz por bloques nos permite tratar las contribuciones simétricas y antisimétricas de forma independiente. Además de ello, si computamos sus determinantes encontramos que

$$\det(M) = \det(M_{\text{sym}}) \times \det(M_{\text{asym}}) , \qquad (10.1.35)$$

$$\det\left(M_{\text{asym}}\right) = \Omega^3, \qquad (10.1.36)$$

$$\det(M_{\rm sym}) = -8\epsilon \,\Omega^5 \,, \qquad (10.1.37)$$

en donde se introdujo la función

$$\Omega = \sum_{i=1}^{3} x_i z_i \left(x_i z_i - \sum_{j \neq i} x_j z_j \right), \qquad (10.1.38)$$

que resulta ser independiente de ϵ e invariante ante reordenamientos cíclicos de las partículas colineales. Nótese que el determinante de la parte simétrica, M_{sym} es explícitamente proporcional a ϵ , lo que se relaciona con la singularidad de M al trabajar en D = 4 con más de tres vectores.

Tras discutir la construcción de la base, es necesario obtener el vector B_j definido en la ecuación Eq. (10.1.16). Debido a (10.1.12) y (10.1.13), solamente son necesarios 4 coeficientes de la parte simétrica y 1 que acompaña a la estructura antisimétrica. Explícitamente, resulta posible expandir las funciones de splitting polarizadas en el límite triple colineal utilizando

$$P_{a \to a_1 a_2 a_3}^{\mu\nu} = \sum_{j=1}^{4} A_j^{\text{sym}} f_j^{\mu\nu} + A^{\text{asym}} f_{12}^{\mu\nu}, \qquad (10.1.39)$$

que se obtiene de Eq. (10.1.15) tras ignorar los términos proporcionales a n^a y p_{123}^a ; este hecho permite apreciar la ventaja de haber elegido la base que estamos empleando. Con el objetivo de calcular A_j^{sym} y A^{asym} , podemos realizar una implementación de la regla de Cramer a través de la introducción de las matrices

$$(M_{\text{sym}}^{\text{Cramer}})_{ij} = -\frac{\det M^{(i,j)}}{8\epsilon\Omega^8} \qquad i \in \{1,\dots,4\} ,$$
 (10.1.40)

$$\left(M_{\text{asym}}^{\text{Cramer}}\right)_{j} = -\frac{\det \bar{M}^{(12,j)}}{8\epsilon\Omega^{8}} , \qquad (10.1.41)$$

² Utilizamos la noción de ortogonalidad inducida por la contracción mediada por $\eta_{\mu'\nu'}^{D_{\rm ST}}$ como producto interno.

en donde $\overline{M}^{(i,j)}$ denota una matriz obtenida a partir de M mediante el reemplazo de la columna *i*-ésima por el vector unidad canónico \hat{e}_j . Así, $M_{\text{sym}}^{\text{Cramer}}$ es una matriz de tamaño 4×17 mientras que $M_{\text{asym}}^{\text{Cramer}}$ es 1×17 -dimensional. Cabe señalar que estos objetos nos permiten recuperar únicamente los coeficientes relevantes, haciendo que el procedimiento sea computacionalmente más eficiente comparado con la inversión completa del sistema. Además, las fórmulas Eq. (10.1.40) y Eq. (10.1.41) se expresan en términos de la función Ω , lo que permite escribirlas de una forma más compacta. De esta forma, se tiene que

$$A_j^{\text{sym}} = \left(M_{\text{sym}}^{\text{Cramer}} \cdot \vec{B} \right)_j \quad j \in \{1, \dots, 4\} , \qquad (10.1.42)$$

$$A^{\text{asym}} = \left(M^{\text{Cramer}}_{\text{asym}} \cdot \vec{B} \right) , \qquad (10.1.43)$$

son las ecuaciones que conducen a la obtención de los coeficientes buscados.

Por último, es útil efectuar algunos comentarios acerca del tratamiento del vector \vec{B} . Debido a que cada componente de este vector es un escalar de Lorentz, se puede simplificar el cálculo de las integrales de Feynman allí involucradas. En particular, pueden aplicarse técnicas de simplificación para reducir las expresiones y obtener resultados más compactos. La estrategia consiste, llegado este punto, en agrupar las diferentes contribuciones de acuerdo al conjunto de denominadores irreducibles que involucren. Armando una base para cada uno, se pueden aplicar las identidades IBP a través de alguna rutina automatizada (como FIRE (48)) y expresar el resultado en términos de unas pocas integrales maestras (MI).

1.2. Presentación de resultados

Al igual que en el caso no polarizado, para presentar los resultados explotaremos fuertemente el conocimiento de la estructura de polos de las amplitudes de splitting. Partiendo de la fórmula maestra dada en (6.2.40) y aplicando la descomposición sugerida en (6.3.1) para el caso múltiple colineal, se obtiene

$$P_{a\to a_{1}\dots a_{m}}^{(1),\mu\nu} \equiv \left(\frac{s_{1,m}}{2\,\mu^{2\epsilon}}\right)^{m-1} \left(\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{a\to a_{1}\dots a_{m}}^{(0),\mu}\right)^{\dagger} \left(\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{a\to a_{1}\dots a_{m}}^{(1)\operatorname{div},\nu} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{a\to a_{1}\dots a_{m}}^{(1)\operatorname{fin},\nu}\right) + \operatorname{c.c.},$$

$$= 2\operatorname{Re}\left(\boldsymbol{I}_{a\to a_{1}\dots a_{m}}^{(1)}(p_{1},\dots,p_{m};\widetilde{P})\right) P_{a\to a_{1}\dots a_{m}}^{(0),\mu\nu} + \left(P_{a\to a_{1}\dots a_{m}}^{(1)\operatorname{fin},\mu\nu} + \operatorname{c.c.}\right), (10.1.44)$$

siendo

$$P_{a \to a_1 \dots a_m}^{(1) \text{fn.},\mu\nu} = \left(\frac{s_{1,m}}{2 \,\mu^{2\epsilon}}\right)^{m-1} \left(\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{a \to a_1 \dots a_m}^{(0),\mu}\right)^{\dagger} \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_{a \to a_1 \dots a_m}^{(1) \text{fn.},\nu}, \qquad (10.1.45)$$

el remanente finito en el límite $\epsilon \to 0$. Al escribir estas expresiones debemos recordar que se está sumando sobre los colores y polarizaciones físicas de las partículas colineales, pero solo

se promedia sobre los colores del partón padre. Si nos centramos en el límite triple colineal, Eq. (10.1.39) puede ser reescrita como

$$P_{a \to a_1 a_2 a_3}^{(1) \text{fin.},\mu\nu} = \tilde{c}^{a \to a_1 a_2 a_3} \left[\sum_{j=1}^4 A_j^{(1) \text{fin.}} f_j^{\mu\nu} + A_5^{(1) \text{fin.}} f_{12}^{\mu\nu} \right], \qquad (10.1.46)$$

en donde $\tilde{c}^{a \to a_1 a_2 a_3}$ es un factor de normalización que depende del proceso. La convención aquí utilizada se relaciona con el factor introducido en el Capítulo 9 de acuerdo a

$$\tilde{c}^{a \to a_1 a_2 a_3} = 2(1-\epsilon)c^{a \to a_1 a_2 a_3}, \qquad (10.1.47)$$

es decir que solo difieren en un factor 2 al considerar el límite $\epsilon \to 0$.

Por otra parte, todos los procesos estudiados en este capítulo son de la forma $V' \rightarrow q_1 \bar{q}_2 V_3$, razón por la cual las funciones de splitting correspondientes son simétricas ante el intercambio $1 \leftrightarrow 2$. Además de eso, como mencionamos al comienzo de la sección, los elementos de la base tensorial tienen propiedades de simetría bien definidas bajo la acción del operador de intercambio $S_{1\leftrightarrow 2}$. Explícitamente, se tiene

$$S_{1\leftrightarrow 2}(f_j) = f_j \text{ para } j \in \{1,3\}$$
, (10.1.48)

$$S_{1\leftrightarrow 2}(f_{12}) = -f_{12}, \qquad (10.1.49)$$

$$S_{1\leftrightarrow 2}(f_2) = f_4,$$
 (10.1.50)

lo que nos permite inferir el comportamiento de los coeficientes asociados en la expansión (10.1.46). Más aún, al momento de presentar los resultados podemos ignorar $A_4^{(1) \text{ fin.}}$ puesto que es posible recuperar el término correspondiente aplicando el operador de simetría $S_{1\leftrightarrow 2}$ a $A_2^{(1) \text{ fin.}}$). Es útil señalar que, sin embargo, al llevar a cabo los cálculos explícitos no se efectuó ninguna presunción acerca de la simetría de los resultados, de forma tal de poder utilizar este conocimiento como test de consistencia al finalizar el cálculo.

El último paso en la organización de los resultados consiste en clasificar los distintos términos involucrados de acuerdo a su peso transcendental, como se hizo en el capítulo precedente. De esta forma, imponiendo además los criterios de simetría, es posible expresar los coeficientes A_j de acuerdo a

$$A_j^{(1) \text{ fin.}} = \sum_{i=0}^2 \mathcal{C}_j^{(i)} + (1 \leftrightarrow 2) \text{ para } j \in \{1,3\} , \qquad (10.1.51)$$

$$A_2^{(1)\,\text{fin.}} = \sum_{i=0}^2 \mathcal{C}_2^{(i)}, \qquad (10.1.52)$$

$$A_5^{(1)\,\text{fin.}} = \sum_{i=0}^2 \mathcal{C}_5^{(i)} - (1 \leftrightarrow 2), \qquad (10.1.53)$$

en donde $\mathcal{C}_{j}^{(i)}$ solo incluye funciones de peso transcendental *i*.

2. Procesos iniciados por fotones

En esta sección presentamos los resultados correspondientes a los procesos que son iniciados por fotones. A diferencia del camino seguido en el caso no polarizado, comenzamos analizando la estructura de los splittings más sencillos para luego considerar el caso iniciado por gluones. Analizamos primero $\gamma \to q\bar{q}\gamma$ ($\bar{m} = 1$) y luego $\gamma \to q\bar{q}g$ ($\bar{m} = 2$).

Tras la presentación de las correcciones NLO, se realiza una discusión genérica sobre la estructura de los resultados. En particular, hacemos hincapié en las dependencias funcionales y establecemos un nexo con las observaciones efectuadas en el Capítulo 9.

2.1.
$$\gamma \to q\bar{q}\gamma$$

Comencemos con el proceso $\gamma \to q\bar{q}\gamma$. La correspondiente función de splitting polarizada a nivel árbol puede escribirse como

$$P_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(0),\mu\nu} = e_q^4 g_e^4 C_A \mathcal{P}^{\mu\nu} \left(p_1, p_2, p_3; \tilde{P} \right) , \qquad (10.2.1)$$

en donde hemos introducido una función puramente cinemática dada por

$$\mathcal{P}^{\mu\nu}\left(p_{1}, p_{2}, p_{3}; \widetilde{P}\right) = \frac{1}{x_{1}x_{2}} \left(\eta^{\mu\nu}\left(\epsilon x_{1}(1-x_{3})-(1-x_{1})^{2}\right)+2(\epsilon-1)\widetilde{p}^{\mu\nu}_{1,1}+2\epsilon \widetilde{p}^{\mu\nu}_{1,2}\right) + (1\leftrightarrow2).$$
(10.2.2)

Nótese que esta expresión es totalmente simétrica frente al intercambio $1 \leftrightarrow 2$, y que solamente involucra elementos simétricos de la base tensorial. Por otro lado, es útil señalar que $\mathcal{P}^{\mu\nu}$ describe completamente los procesos de splitting polarizados con fotones a LO. Esto es una consecuencia de la factorización de las estructuras de color en tales procesos.

Pasemos ahora a las correcciones a NLO. En primer lugar, el factor de normalización viene dado por

$$\tilde{c}^{\gamma \to q\bar{q}\gamma} = C_A e_q^4 g_e^4 g_{\rm S}^2,$$
 (10.2.3)

y los términos puramente racionales son

$$\mathcal{C}_{1}^{(0)} = \frac{8C_{F}(1-x_{1})^{2}}{x_{1}x_{2}} + \frac{C_{F}(1-x_{1})}{x_{1}}, \qquad (10.2.4)$$

$$\mathcal{C}_{2}^{(0)} = \frac{2C_{F}\left((x_{1}^{2}-1)x_{2}+(1-x_{1})^{2}+(x_{2}+1)(1-x_{2})^{2}\right)}{(1-x_{1})x_{1}x_{2}(1-x_{3})} + \frac{16C_{F}}{x_{1}x_{2}}$$

+
$$\frac{C_F((3-x_2)x_2-x_1(x_2+1))}{(1-x_1)x_1x_2}$$
, (10.2.5)

$$\mathcal{C}_{3}^{(0)} = -\frac{4C_{F}(x_{1}(x_{2}+1)-1)}{x_{1}x_{2}(1-x_{3})} - \frac{2C_{F}}{1-x_{1}}, \qquad (10.2.6)$$

$$\mathcal{C}_{5}^{(0)} = -\frac{2C_{F}\left(x_{1}x_{2}+x_{3}^{2}\right)}{(1-x_{1})(1-x_{2})x_{2}(1-x_{3})} - \frac{2C_{F}}{x_{2}(1-x_{3})}, \qquad (10.2.7)$$

mientras que

$$\mathcal{C}_{1}^{(1)} = \frac{C_{F}(x_{2}-1)}{x_{2}} \left(\frac{\log(x_{1})(x_{2}-2x_{3})}{1-x_{1}} - \frac{2x_{3}\log(x_{3})}{1-x_{3}} \right), \qquad (10.2.8)$$

$$\mathcal{C}_{2}^{(1)} = \frac{C_{F}(1-x_{2})^{2}(-2x_{1}+x_{2}+2)\log(x_{1})}{(1-x_{1})^{2}x_{2}x_{3}} + \frac{C_{F}(2x_{3}-x_{1})\log(x_{2})}{x_{2}^{2}x_{3}}$$

$$= \frac{C_F(1-x_2)^2(-2x_1+x_2+2)\log(x_1)}{(1-x_1)^2x_1x_2^2} + \frac{C_F(2x_3-x_1)\log(x_2)}{x_1^2x_2} + \frac{2C_F\log(x_3)}{(1-x_3)^2} \left(\frac{(1-x_2)^2(2(1-x_1)x_1x_2+(1-x_3)^2)}{x_1^2x_2^2} + 2(x_2-2)\right), \quad (10.2.9)$$

$$\mathcal{C}_{3}^{(1)} = \frac{2C_F \log(x_1) \left(-(x_1+1)x_2^2 - x_2(x_1x_2+2x_3) + (1-x_1)(x_2+2x_3)\right)}{(x_1-1)^2 x_1 x_2^2} \quad (10.2.10)$$

+
$$\frac{4C_F \left(x_1^2 (x_2 - 1) + x_1 (1 - 6x_2) + 2x_2\right) \log(x_3)}{x_1 x_2^2 (1 - x_3)^2},$$
 (10.2.11)

$$\mathcal{C}_{5}^{(1)} = \frac{2C_{F}\left((x_{1}-2)x_{2}+2(1-x_{1})^{2}\right)\log(x_{1})}{(1-x_{1})^{2}x_{1}x_{2}} - \frac{4C_{F}\log(x_{3})}{x_{2}(1-x_{3})^{2}}, \qquad (10.2.12)$$

corresponden a las contribuciones de peso 1.

Finalmente, para los términos de peso 2 tenemos

$$\mathcal{C}_{1}^{(2)} = -2C_{F}\mathcal{F}_{1}\left(\frac{1-x_{1}}{x_{2}^{2}} + \frac{2x_{1}-5}{x_{2}} + \frac{x_{2}-2}{x_{1}} + \frac{2}{x_{1}x_{2}} + 2\right), \qquad (10.2.13)$$

$$\mathcal{C}_{2}^{(2)} = -\frac{2C_{F}\mathcal{F}_{1}\left(2x_{2}^{2}+(1-x_{2})^{2}\right)}{x_{1}x_{2}^{3}} - \frac{2C_{F}\mathcal{F}_{2}\left(2x_{1}^{2}+2x_{1}(x_{2}-1)+(1-x_{2})^{2}\right)}{x_{1}^{3}x_{2}},(10.2.14)$$

$$\mathcal{C}_{3}^{(2)} = -\frac{4C_{F}\mathcal{F}_{1}\left((1-x_{2})^{2}-x_{1}\right)}{x_{1}x_{2}^{3}}, \qquad (10.2.15)$$

$$\mathcal{C}_5^{(2)} = -\frac{4C_F \mathcal{F}_1 x_3}{x_1 x_2^2}, \qquad (10.2.16)$$

en donde

$$\mathcal{F}_i = \mathcal{R}(x_i, x_3) , \qquad (10.2.17)$$

utilizando la función \mathcal{R} definida en Eq. (9.3.26). Nótese que la expansión en diagramas de Feynman de este proceso involucra burbujas y triángulos, los cuales pueden originar términos proporcionales a $\log^2(x_i)$. Sin embargo, tales contribuciones se cancelan con las presentes en los boxes escalares y las originadas en los términos de sustracción, a través de $I^{(1)}(p_1, p_2, p_3; \tilde{P})$; así, las contribuciones remanentes de peso 2 admiten ser expresadas empleando únicamente \mathcal{R} .

2.2.
$$\gamma \to q\bar{q}g$$

El siguiente proceso es $\gamma \rightarrow q\bar{q}g$, que incluye tres partones de QCD. En este caso, la estructura de color presenta complicaciones pero aún se mantiene al mismo nivel de complejidad que en el caso de los procesos doble colineales en QCD pura. Por otro lado, como los tres partones con carga de color se encuentran en el estado final y están en su capa de masa, se espera que la función de splitting asociada pueda ser expresada de una forma compacta. Comenzando con la presentación de resultados, el splitting polarizado a nivel árbol viene dado por

$$P_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 g_3}^{(0),\mu\nu} = e_q^2 g_e^2 g_S^2 C_A C_F \mathcal{P}^{\mu\nu} \left(p_1, p_2, p_3; \widetilde{P} \right) .$$
(10.2.18)

Al tratar las correcciones NLO, tenemos que el factor de normalización es

$$\tilde{c}^{\gamma \to q \bar{q} g} = C_A C_F e_q^2 g_e^2 g_S^4 .$$
 (10.2.19)

Por su parte, los términos racionales vienen dados por

$$\mathcal{C}_{1}^{(0)} = \frac{(1-x_{1})(C_{F}-C_{A})}{x_{1}} + \frac{8C_{F}(1-x_{1})^{2}}{x_{1}x_{2}},$$
(10.2.20)
$$\mathcal{C}_{2}^{(0)} = -\frac{(C_{A}-2C_{F})((x_{1}^{2}-1)x_{2}+(1-x_{1})^{2}+(1-x_{2})^{2}(x_{2}+1))}{(1-x_{1})x_{1}x_{2}(x_{1}+x_{2})} + \frac{(C_{F}-C_{A})((3-x_{2})x_{2}-x_{1}(x_{2}+1))}{(1-x_{1})x_{1}x_{2}} + \frac{16C_{F}}{x_{1}x_{2}},$$
(10.2.21)

$$\mathcal{C}_{3}^{(0)} = \frac{2(C_{A} - 2C_{F})(x_{1}(x_{2} + 1) - 1)}{x_{1}x_{2}(x_{1} + x_{2})} - \frac{2C_{F}}{1 - x_{1}}, \qquad (10.2.22)$$

$$\mathcal{C}_{5}^{(0)} = -\frac{2(C_{F} - C_{A})}{x_{2}(1 - x_{3})} - \frac{2C_{F}(x_{1}x_{2} + x_{3}^{2})}{(1 - x_{1})(1 - x_{2})x_{2}(1 - x_{3})}, \qquad (10.2.23)$$

mientras que

$$\mathcal{C}_{1}^{(1)} = \frac{C_{A}(x_{2}-1)((1-x_{3})\log(x_{1})+x_{3}\log(x_{3}))}{x_{2}(1-x_{3})} + \frac{C_{F}(x_{2}-1)}{x_{2}} \left(\frac{\log(x_{1})(x_{2}-2x_{3})}{1-x_{1}}-\frac{2x_{3}\log(x_{3})}{1-x_{3}}\right),$$
(10.2.24)

$$\mathcal{C}_{2}^{(1)} = -\frac{(C_{A} - 2C_{F})\log(x_{3})}{(1 - x_{3})^{2}} \left(\frac{(1 - x_{2})^{2} (2(1 - x_{1})x_{1}x_{2} + (1 - x_{3})^{2})}{x_{1}^{2}x_{2}^{2}} + 2(x_{2} - 2) \right)
+ \frac{(1 - x_{2})^{2}\log(x_{1})((1 - x_{1})(2C_{F} - C_{A}) + C_{F}x_{2})}{(1 - x_{1})^{2}x_{1}x_{2}^{2}}
+ \frac{\log(x_{2})(C_{F}(2x_{3} - x_{1}) - C_{A}(1 - x_{2}))}{x_{1}^{2}x_{2}}, \qquad (10.2.25)$$

$$\mathcal{C}_{3}^{(1)} = -\frac{2(C_{A} - 2C_{F})(x_{1}^{2}(x_{2} - 1) + x_{1}(1 - 6x_{2}) + 2x_{2})\log(x_{3})}{x_{1}x_{2}^{2}(1 - x_{3})^{2}} - \frac{2C_{A}x_{3}\log(x_{1})}{(1 - x_{1})x_{1}x_{2}^{2}} \\
+ \frac{2C_{F}\log(x_{1})(2x_{3}^{2} - x_{2}(2x_{1}x_{2} - x_{3}))}{(1 - x_{1})^{2}x_{1}x_{2}^{2}}, \qquad (10.2.26)$$

$$\mathcal{C}_{5}^{(1)} = \log(x_{1})\left(\frac{2C_{A}}{(1 - x_{1})x_{2}} + \frac{2C_{F}(2(1 - x_{1})x_{3} - x_{1}x_{2})}{(1 - x_{1})^{2}x_{1}x_{2}}\right) \\
= 2(2C_{F} - C_{F})\log(x_{F}), \qquad (10.2.26)$$

$$= \frac{2(2C_F - C_A)\log(x_3)}{x_2(1 - x_3)^2}, \qquad (10.2.27)$$

son las correcciones de peso 1. Las contribuciones de peso transcendental 2 están dadas por

_

$$C_{1}^{(2)} = \frac{\mathcal{F}_{1}(C_{A} - 2C_{F}) \left(x_{1}^{2}(2x_{2} - 1) + x_{1} \left(2(1 - x_{2})^{2} - 1\right) + x_{2} \left(1 - x_{1} + (1 - x_{2})^{2}\right)\right)}{x_{1}x_{2}^{2}} - \frac{C_{A}\mathcal{F}_{3}(1 - x_{1})^{2}}{x_{1}x_{2}}, \qquad (10.2.28)$$

$$\mathcal{C}_{2}^{(2)} = \mathcal{F}_{1}(C_{A} - 2C_{F}) \left(\frac{x_{3}^{2}}{x_{1}x_{2}^{3}} + \frac{(1 - x_{3})^{2} - 2x_{1}(x_{2} - x_{3})}{x_{1}x_{2}^{3}} + \frac{1}{x_{1}x_{2}} \right)
+ \mathcal{F}_{2}(C_{A} - 2C_{F}) \left(\frac{x_{3}^{2}}{x_{1}^{3}x_{2}} + \frac{1}{x_{1}x_{2}} \right) - \frac{2C_{A}\mathcal{F}_{3}}{x_{1}x_{2}},$$
(10.2.29)

$$\mathcal{C}_{3}^{(2)} = -\frac{2\mathcal{F}_{1}(C_{A} - 2C_{F})\left(x_{1} - (1 - x_{2})^{2}\right)}{x_{1}x_{2}^{3}}, \qquad (10.2.30)$$

$$\mathcal{C}_5^{(2)} = \frac{2\mathcal{F}_1 x_3 (C_A - 2C_F)}{x_1 x_2^2}, \qquad (10.2.31)$$

en donde utilizamos las mismas funciones transcendentales introducidas en la escritura de $\gamma \rightarrow q\bar{q}\gamma$, junto con

$$\mathcal{F}_3 = \mathcal{R}(x_1, x_2) , \qquad (10.2.32)$$

que es la última función \mathcal{R} disponible en la expansión de las integrales de box escalares sin denominadores LCG, compatible con la simetría del problema.

Debido a que los procesos $\gamma \to q\bar{q}\gamma$ y $\gamma \to q\bar{q}g$ comparten algunos diagramas de Feynman en sus correspondientes expansiones perturbativas, existe la posibilidad de relacionar ciertos

términos involucrados en sus correcciones a NLO. Esto constituye un chequeo de consistencia de nuestros resultados, debido a que los cálculos para cada proceso fueron implementados de forma independiente (utilizando códigos distintos). De forma explícita, tenemos la relación

$$P^{\mu\nu}_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3} = \frac{e_q^2 g_e^2}{C_F g_S^2} \left(P^{\mu\nu}_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 g_3} \big|_{C_A \to 0} \right) , \qquad (10.2.33)$$

que es equivalente a cancelar todos los diagramas con interacciones no Abelianas presentes en $\gamma \rightarrow \gamma$ $q\bar{q}g$ y corregir el factor global de normalización. Efectivamente, los resultados aquí presentados verifican (10.2.33).

2.3.Comentarios sobre la estructura de los resultados

Es interesante observar que los coeficientes $\mathcal{C}_{j}^{(i)}$ requeridos en la expansión de las funciones de splitting polarizadas son independientes de las fracciones de momento longitudinal z_i . Esto ocurre tanto para $P_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(1) \text{ fin.}, \mu\nu}$ como con $P_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 g_3}^{(1) \text{ fin.}, \mu\nu}$. Sin embargo, al computar los splittings no polarizados, podía apreciarse una dependencia no trivial en tales variables. Concretamente, para $\gamma \to q\bar{q}\gamma$ obtuvimos

$$\langle \hat{P}_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(1) \text{ fin.}} \rangle = \frac{C_F C_A}{2} e_q^4 g_e^4 g_S^2 \left[C^{(0,A)} + C_1^{(1,A)} \log(x_1) + C_2^{(1,A)} \log(x_3) + C^{(2,A)} \mathcal{R}(x_1, x_3) + (1 \leftrightarrow 2) \right],$$

$$+ C^{(2,A)} \mathcal{R}(x_1, x_3) + (1 \leftrightarrow 2) \right],$$

$$(10.2.34)$$

con

$$C^{(0,A)} = (x_1 x_2 - z_1 z_2 - \Delta_{0,1}^{1,0} \Delta_{0,2}^{2,0}) \left(\frac{2 - 2x_1 (x_2 + 1)}{x_1 x_2 (1 - x_3)} - \frac{1}{1 - x_1} \right) - \frac{2z_1 \Delta_{0,1}^{1,0}}{x_1 x_2} \left(\frac{(x_2 + 1)(1 - x_2)^2}{(1 - x_1)(1 - x_3)} + \frac{x_3 - x_1 x_2}{1 - x_3} + \frac{(3 - x_2)x_2 - x_1 (x_2 + 1)}{2(1 - x_1)} + 8 \right) - \frac{8(1 - x_1)^2}{x_1 x_2} - \frac{1 - x_1}{x_1},$$
(10.2.35)

$$C_{1}^{(1,A)} = \frac{x_{1}x_{2} - z_{1}z_{2} - \Delta_{0,1}^{1,0}\Delta_{0,2}^{2,0}}{(1 - x_{1})x_{1}} \left(\frac{x_{2} + 2x_{3}}{x_{2}^{2}} - \frac{x_{1}x_{2} + 2x_{3}}{(1 - x_{1})x_{2}} - \frac{1 + x_{1}}{1 - x_{1}}\right) - \frac{z_{2}(2x_{3} - x_{2})\Delta_{0,2}^{2,0}}{x_{1}x_{2}^{2}} - \frac{(1 - x_{2})^{2}z_{1}(2(1 - x_{1}) + x_{2})\Delta_{0,1}^{1,0}}{(1 - x_{1})^{2}x_{1}x_{2}^{2}} + \frac{(1 - x_{2})(x_{2} - 2x_{3})}{(1 - x_{1})x_{2}}, \qquad (10.2.36)$$

 $(1-x_1)x_2$

$$C_{2}^{(1,A)} = \frac{2\left(2x_{1}(z_{2}-1-\Delta_{0,2}^{2,0}(x_{1}x_{2}+1))-(\Delta_{1,2}^{0,3})^{2}-2x_{2}(z_{1}+2z_{2}-3)(x_{1}x_{2}+2z_{3})-x_{2}z_{3}\right)}{x_{2}^{2}(1-x_{3})^{2}} - \frac{2\left(x_{1}^{2}(2z_{1}(z_{2}-3)+(4z_{2}-13)z_{2}+7)+2z_{3}^{2}\right)}{x_{1}x_{2}(1-x_{3})^{2}}$$

$$-\frac{2(2x_{1}x_{2} + (z_{1} - 15)z_{1} + 7)}{(1 - x_{3})^{2}},$$

$$C^{(2,A)} = \frac{2\left(x_{2}\left(x_{3}\Delta_{3,2}^{0,1} + \Delta_{0,3}^{3,0}(\Delta_{2,3}^{0,1} + z_{1}) + x_{2}^{3} + 2x_{2}x_{3}z_{1}\right) + (\Delta_{3,2}^{0,1})^{2}\right)}{x_{1}x_{2}^{3}}$$

$$-\frac{4\Delta_{0,1}^{1,0}(x_{3} - z_{1})}{x_{1}x_{2}},$$
(10.2.37)
(10.2.38)

mientras que

$$\langle \hat{P}_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 g_3}^{(1) \text{ fin.}} \rangle = \frac{(2C_F - C_A)g_{\rm S}^2}{2e_q^2 g_e^2} \langle \hat{P}_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(1) \text{ fin.}} \rangle + \frac{C_A^2 C_F}{2} e_q^2 g_e^2 g_{\rm S}^4 \left[C^{(0,B)} + C_1^{(1,B)} \log(x_1) + \langle \mathcal{P}_{q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(0)} \rangle |_{\epsilon^0} \mathcal{R}(x_1, x_2) + (1 \leftrightarrow 2) \right],$$

$$(10.2.39)$$

 con

$$C^{(0,B)} = \frac{16 - 7x_2 - 2z_1z_2 + (1 - z_1)^2 - 15z_2}{x_1} - \frac{z_1^2}{(1 - x_1)x_2} - 8\frac{z_1^2 + (1 - z_1)^2}{x_1x_2} + \frac{2z_1(1 - z_3) - x_2(1 - z_1)^2 - (x_2 + 1)z_1}{(1 - x_1)x_1},$$
(10.2.40)

$$C^{(1,B)} = \frac{z_2(x_2(4x_1z_1+x_1-1)+2x_3z_1)+x_2(x_1((x_2-1)z_1+x_2-3)-2x_2+3)}{(x_1-1)^2x_1x_2} + \frac{3x_2^2+5x_2(z_2-1)+3z_2^2-4z_2+1}{x_1x_2} - \frac{(1-x_2)^2z_1^2}{(1-x_1)^2x_1x_2},$$
(10.2.41)

corresponde a las correcciones NLO al núcleo AP no polarizado para el proceso $\gamma \to q\bar{q}g.^3$ Como consecuencia de la relación (6.2.41), las funciones no polarizadas se obtienen multiplicando los coeficientes C_j por el resultado de contraer las estructuras tensoriales asociadas con el tensor de polarización del partón padre, $d_{\mu\nu}(\tilde{P}, n)$. Explícitamente, como vale

$$d_{\mu\nu}(\tilde{P},n)f_1^{\mu\nu} = -2(1-\epsilon), \qquad (10.2.42)$$

$$d_{\mu\nu}(\widetilde{P},n)f_2^{\mu\nu} = -2z_1\Delta_{0,1}^{1,0}, \qquad (10.2.43)$$

$$d_{\mu\nu}(\widetilde{P},n)f_3^{\mu\nu} = x_1x_2 - z_1z_2 - \Delta_{0,1}^{1,0}\Delta_{0,2}^{2,0}, \qquad (10.2.44)$$

$$d_{\mu\nu}(\vec{P},n)f_{12}^{\mu\nu} = 0, \qquad (10.2.45)$$

luego es posible escribir los splittings no polarizados como

$$\langle \hat{P}_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 V_3}^{(1) \text{ fn.}} \rangle = c^{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 V_3} \sum_{i=0}^{2} \left[(-2) \mathcal{C}_1^{(i)} + (-2z_1 \Delta_{0,1}^{1,0}) \mathcal{C}_2^{(i)} \right]$$

 $^{^{3}}$ Si bien estos resultados fueron presentados en el Capítulo 9, decidimos expresarlos de una forma más compacta en esta sección con el objetivo de exhibir explícitamente las diferencias con el caso polarizado.

+
$$(x_1x_2 - z_1z_2 - \Delta_{0,1}^{1,0}\Delta_{0,2}^{2,0})\mathcal{C}_3^{(i)} + (1\leftrightarrow 2)],$$
 (10.2.46)

lo que justifica no solamente la aparición de términos proporcionales a z_i , sino también de las funciones $\Delta_{0,i}^{i,0}$. Nótese que C_5 no contribuye debido a que es proporcional a $f_{12}^{\mu\nu}$, que es antisimétrica ante el intercambio de índices $\mu \leftrightarrow \nu$.

De esta forma podemos apreciar que la dependencia en z_i asociada a los splittings iniciados por fotones se debe exclusivamente a la descripción de los vectores de polarización del partón padre, que involucra al vector de referencia n. Las amplitudes amputadas que se requieren para obtener las correcciones a $P^{\mu\nu}$ son independientes de n, apelando a la invariancia de gauge de los procesos iniciados por singletes de color. Como explicamos en el Capítulo 9, esta propiedad nos permite cancelar todas las contribuciones proporcionales a integrales con denominadores LCG. Más aún, podemos generalizar este argumento y afirmar que los coeficientes $C_j^{(i)}$ que intervienen en la expansión de los splittings polarizados asociados a $\gamma \to a_1 \dots a_m$ son independientes de z_i y nP.

3. $g \rightarrow q\bar{q}\gamma$: caso polarizado

Finalmente, estamos en condiciones de describir el proceso de splitting iniciado por gluones $g \rightarrow q\bar{q}\gamma$. En el contexto de la factorización colineal, esta función de splitting es requerida para caracterizar procesos de scattering que pueden cortarse a través de un gluón. Por ende, no es posible remover todas las integrales que dependen de n, ya que la carga de color asociada al partón padre no permite cambiar el gauge al computar las correcciones virtuales al proceso.

A nivel árbol, la función de splitting polarizada viene dada por

$$P_{g \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(0),\mu\nu} = \frac{e_q^2 g_e^2 g_S^2}{2} \mathcal{P}^{\mu\nu} \left(p_1, p_2, p_3; \widetilde{P} \right) . \tag{10.3.1}$$

Respecto de las correcciones NLO, se tiene que el factor de normalización es

$$\tilde{c}^{g \to q\bar{q}\gamma} = \frac{e_q^2 g_e^2 g_{\rm S}^4}{2}.$$
(10.3.2)

Por otra parte, recordando la forma del factor de inserción $I^{(1)}$ dada en Eq. (9.3.66), puede apreciarse que la expansión del contratérmino de sustracción de divergencias involucra la presencia de $\log^j(z_i)$ (i, j = 1, 2). Esto implica, a su vez, que es posible que los coeficientes $C_j^{(i)}$ exhiban alguna dependencia en z_i .

Continuando con la presentación de resultados, los términos puramente racionales son

$$\mathcal{C}_{1}^{(0)} = \frac{2(1-x_{1})^{2}(36C_{F}+5N_{f}-38C_{A})}{9x_{1}x_{2}} + \frac{C_{F}(1-x_{1})}{x_{1}}, \qquad (10.3.3)$$

$$\mathcal{C}_{2}^{(0)} = \frac{4(36C_{F} + 5N_{f} - 38C_{A})}{9x_{1}x_{2}} - \frac{(C_{A} - 2C_{F})\left((x_{1}^{2} - 1)x_{2} + (1 - x_{1})^{2} + (1 - x_{2})^{2}(x_{2} + 1)\right)}{(1 - x_{1})x_{1}x_{2}(1 - x_{3})}$$

+
$$\frac{C_F((3-x_2)x_2 - x_1(x_2+1))}{(1-x_1)x_1x_2}$$
, (10.3.4)

$$\mathcal{C}_{3}^{(0)} = \frac{2(C_{A} - 2C_{F})(x_{1}(x_{2} + 1) - 1)}{x_{1}x_{2}(1 - x_{3})} + \frac{2(C_{A} - C_{F})}{1 - x_{1}}, \qquad (10.3.5)$$

$$\mathcal{C}_{5}^{(0)} = \frac{2(C_{A} - C_{F})(x_{1}x_{2} + x_{3}^{2})}{(1 - x_{1})(1 - x_{2})x_{2}(1 - x_{3})} - \frac{2C_{F}}{x_{2}(1 - x_{3})}, \qquad (10.3.6)$$

mientras que

$$\mathcal{C}_{1}^{(1)} = \frac{C_{A}(x_{2}-1)((1-x_{3})\log(x_{1})+x_{3}\log(x_{3}))}{x_{2}(1-x_{3})} \\
+ \frac{C_{F}(x_{2}-1)}{x_{2}} \left(\frac{\log(x_{1})(x_{2}-2x_{3})}{1-x_{1}} - \frac{2x_{3}\log(x_{3})}{1-x_{3}} \right), \quad (10.3.7)$$

$$\mathcal{C}_{2}^{(1)} = -\frac{(C_{A}-2C_{F})\log(x_{3})}{(1-x_{3})^{2}} \left(\frac{(1-x_{2})^{2}(2(1-x_{1})x_{1}x_{2}+(1-x_{3})^{2})}{x_{1}^{2}x_{2}^{2}} + 2(x_{2}-2) \right) \\
+ \frac{(1-x_{2})^{2}\log(x_{1})((1-x_{1})(2C_{F}-C_{A})+x_{2}(C_{F}-C_{A}))}{(1-x_{1})^{2}x_{1}x_{2}^{2}} \\
+ \frac{\log(x_{2})(C_{F}(2x_{3}-x_{1})-C_{A}(1-x_{2}))}{x_{1}^{2}x_{2}}, \quad (10.3.8)$$

$$C_{3}^{(1)} = \frac{\log(x_{1})\left((2C_{F} - C_{A})\left((1 - x_{1})(x_{2} + 2x_{3}) - (x_{1} + 1)x_{2}^{2}\right) - 2C_{F}x_{2}(x_{1}x_{2} + 2x_{3})\right)}{(x_{1} - 1)^{2}x_{1}x_{2}^{2}} - \frac{2(C_{A} - 2C_{F})\left(x_{1}^{2}(x_{2} - 1) + x_{1}(1 - 6x_{2}) + 2x_{2}\right)\log(x_{3})}{x_{1}x_{2}^{2}(1 - x_{3})^{2}}, \qquad (10.3.9)$$

$$C_{5}^{(1)} = \log(x_{1})\frac{(2C_{F} - C_{A})\left((x_{1} - 2)x_{2} + 2(1 - x_{1})^{2}\right) + C_{A}(2x_{1}x_{2} + x_{3})}{(1 - x_{1})^{2}x_{1}x_{2}}$$

$$= \log(x_1) - (1 - x_1)^2 x_1 x_2 - \frac{2(2C_F - C_A)\log(x_3)}{x_2(1 - x_3)^2}, \qquad (10.3.10)$$

son las contribuciones de peso 1. Estos coeficientes son independientes de z_i puesto que toda la dependencia racional y logarítmica es absorbida en el factor $I_{g \to q\bar{q}\gamma}^{(1)} P_{g \to q\bar{q}\gamma}^{(0),\mu\nu}$ (contratérmino de sustracción). La situación se torna diferente al analizar los términos de peso 2, que resultan notablemente más complicados que lo involucrados en los splittings anteriores. En consecuencia, fue necesario adoptar un procedimiento de simplificación más sofisticado. El primer paso consistió en definir una base de funciones optimizada para reducir la complejidad de los coeficientes involucrados. Tal base viene dada por

$$\mathcal{F}_{1} = 2\mathrm{Li}_{2}\left(-\frac{z_{3}}{z_{1}}\right) - 2\mathrm{Li}_{2}\left(z_{1}\right) - 2\mathrm{Li}_{2}\left(-\frac{\Delta_{0,1}^{1,0}}{1-z_{1}}\right) + 2\log(x_{1})\log\left(\frac{1-z_{1}}{z_{2}}\right) + \log^{2}(1-z_{1}) + \log^{2}(z_{2}) + \frac{\pi^{2}}{2} + (1\leftrightarrow2), \qquad (10.3.11)$$

$$\mathcal{F}_{2} = \frac{1}{2} \log(x_{1}) \log(x_{2}) + \log(x_{1}) \log\left(\frac{1-z_{1}}{(1-z_{2})z_{2}}\right) + \log(1-z_{1}) \log(z_{1}z_{2}) + (1\leftrightarrow 2), \qquad (10.3.12)$$

$$\mathcal{F}_3 = \log(1-z_2)\log(z_1z_2) + \log^2(1-z_1) - \log\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\log\left(\frac{1-z_2}{z_1}\right), \quad (10.3.13)$$

$$\mathcal{F}_4 = \mathcal{F}_3|_{1\leftrightarrow 2} , \qquad (10.3.14)$$

$$\mathcal{F}_5 = \frac{\pi^2}{3} - \mathcal{R}(x_1, x_3) - 2\mathrm{Li}_2(1 - x_3) , \qquad (10.3.15)$$

$$\mathcal{F}_6 = \mathcal{F}_5|_{1\leftrightarrow 2} , \qquad (10.3.16)$$

$$\mathcal{F}_7 = \frac{\pi^2}{6} - \text{Li}_2 \left(1 - x_3 \right) \,, \tag{10.3.17}$$

$$\mathcal{F}_{8} = 2\mathcal{R}\left(x_{1}, \frac{1-z_{1}}{z_{2}}\right) + 2\mathrm{Li}_{2}\left(-\frac{\Delta_{0,1}^{1,0}}{1-z_{1}}\right) - 2\mathrm{Li}_{2}\left(1-z_{1}\right) + \log^{2}\left(\frac{1-z_{1}}{z_{1}}\right) - 2\log^{2}(z_{1}) + (1\leftrightarrow2), \qquad (10.3.18)$$

mientras que los coeficientes asociados son

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{1}^{(2)} &= \frac{C_{A}\mathcal{F}_{1}\left(2(1-x_{1})^{2}-1\right)}{4x_{1}x_{2}} + C_{A}\mathcal{F}_{2}\left(\frac{x_{3}\left((2-z_{1})z_{2}+(1-z_{1})^{2}\right)-x_{3}^{2}(1-z_{1})-z_{2}(2z_{2}+z_{3})}{2x_{1}\Delta_{0,1}^{1,0}\Delta_{0,2}^{2,0}}\right) \\ &+ \frac{x_{1}^{2}+x_{1}(z_{1}-z_{2})+z_{1}^{2}}{\Delta_{0,1}^{1,0}\Delta_{0,2}^{2,0}}\right) + \frac{C_{A}\mathcal{F}_{3}}{z_{3}\Delta_{0,1}^{1,0}}\left(\frac{x_{3}^{2}(1-z_{1})z_{3}-(1-x_{3})z_{2}^{2}}{2x_{1}(1-x_{3})} - z_{3}(z_{3}-2x_{1}+2z_{2})\right) \\ &- \frac{(1-z_{2})\left(x_{3}^{2}-x_{3}+z_{1}\right)+x_{3}\left(z_{2}z_{3}-(1-z_{2})^{2}+z_{3}^{2}\right)}{2x_{2}(1-x_{3})} + \frac{x_{3}^{2}\left(2x_{3}z_{3}-3(1-z_{2})z_{3}+2z_{3}^{2}\right)}{2x_{2}(1-x_{3})} \\ &+ \frac{1-z_{3}}{2}\right) - \frac{\mathcal{F}_{6}(C_{A}-2C_{F})\left(x_{1}^{3}-2x_{1}^{2}(1-x_{2})+x_{1}\left(2x_{2}^{2}-5x_{2}+2\right)+(1-x_{2})x_{2}\right)}{x_{1}^{2}x_{2}} \\ &+ \frac{2\mathcal{F}_{7}(C_{A}-2C_{F})\left(x_{1}^{2}(3x_{1}x_{2}-x_{1}-7x_{2}+1)+2x_{1}x_{2}(x_{1}x_{2}+1)\right)}{x_{1}^{2}x_{2}^{2}} \\ &+ \frac{C_{A}(1-x_{1})^{2}\mathcal{F}_{8}}{2x_{1}x_{2}}, \end{aligned}$$

$$(10.3.19)$$

$$+ \frac{x_1^2(z_1+z_1-1)}{x_1x_2} + \frac{x_2^2(z_2-z_1)\left((1-z_1)^2+2z_2^2\right)+2x_2\left(z_2^2-(1-z_1)^3\right)-(z_1^2+z_1+1)z_2^2+(1-z_1)^3+z_2^3}{x_1x_2}$$

$$+ \frac{z_{1}(1-z_{2})((1-x_{1})z_{2}-x_{1}+3)-(1-z_{2})^{2}((x_{1}+2)z_{2}+1)+2z_{1}^{2}(2z_{2}-1)}{x_{2}}}{x_{2}}$$

$$- \frac{(1-z_{1})(z_{1}z_{2}-x_{2}(1-z_{1}))^{2}}{x_{1}x_{2}\Delta_{0,1}^{1,0}} + \frac{((4-3z_{1})z_{1}-1)z_{2}}{x_{1}x_{2}} - 2(1-z_{1})z_{1}+2(1-z_{2})z_{2}}\right)$$

$$+ \frac{2\mathcal{F}_{5}(C_{A}-2C_{F})(x_{1}-(1-x_{2})^{2})}{x_{1}x_{2}^{3}} + \frac{4\mathcal{F}_{7}(C_{A}-2C_{F})}{x_{1}x_{2}^{2}}\left(\frac{1-x_{1}}{x_{2}}+x_{2}-2\right), \quad (10.3.21)$$

$$\mathcal{C}_{5}^{(2)} = \frac{C_{A}\mathcal{F}_{2}}{x_{2}\Delta_{0,2}^{2,0}} - \frac{C_{A}\mathcal{F}_{4}}{x_{1}x_{2}}\left(\frac{x_{1}}{\Delta_{0,2}^{2,0}} + \frac{(1-z_{1})^{2}+(1-z_{2})^{2}}{z_{3}}\right)$$

$$- \frac{2(C_{A}-2C_{F})(\mathcal{F}_{5}x_{3}-2\mathcal{F}_{7}(1-x_{1}))}{x_{1}x_{2}^{2}}. \quad (10.3.22)$$

Puede apreciarse que estas contribuciones involucran una dependencia explícita en z_i y $\Delta_{0,i}^{i,0}$, no solamente en los coeficientes racionales, sino también en la definición de los elementos de la base de funciones transcendentales. Esto es una consecuencia de la presencia de integrales de Feynman tipo LCG, que se relacionan con la presencia de interacciones no Abelianas con el gluón inicial. De hecho, es fácil apreciar que la dependencia en z_i está relacionada a contribuciones proporcionales a C_A .

3.1. Verificación de los resultados

Debido a que los cálculos efectuados son puramente analíticos, es muy importante la implementación de rutinas de control para evitar errores. Al igual que para las funciones de splitting no polarizadas, el primer test consistió en comparar la estructura de divergencias infrarrojas con el comportamiento predicho por la fórmula de Catani (ver Eq. (6.3.6)). Por supuesto, en todos los casos se encontró que $P_{a\to a_1a_2a_3}^{(1)\,\text{fin},\mu\nu}$ era finito en el límite $\epsilon \to 0$, lo que indica que los polos IR/UV fueron sustraídos completamente.

También se corroboró la simetría de los resultados ante el intercambio $1 \leftrightarrow 2$. Es importante recordar que, en ningún punto de la implementación de los cálculos, se hizo alguna presunción sobre la simetría. Por ende, esta verificación constituye un test genuino de las expresiones mostradas en este trabajo.

Por otra parte, se estudió el límite Abeliano mencionado anteriormente. Como se puede apreciar en las figuras 9.4 y 9.3, existen diagramas que son formalmente iguales cuando se remueve la estructura de color. Concretamente, tomando el límite $C_A, N_f \rightarrow 0$, se obtiene la relación

$$P_{\gamma \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{\mu\nu} = \frac{2C_A e_q^2 g_e^2}{g_S^2} \left(P_{g \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{\mu\nu} \Big|_{C_A \to 0, N_f \to 0} \right) , \qquad (10.3.23)$$

que fue verificada con éxito. Cabe señalar que debe establecerse $N_f \rightarrow 0$ para eliminar la contribución de autoenergía del gluón, puesto que estamos ignorando correcciones de orden superior en g_e y, por ende, no se contemplan las correcciones de autoenergía para el fotón inicial.

Para concluir esta discusión debemos destacar que efectuamos la contracción de $P_{\gamma \to q\bar{q}\gamma}^{(1) \text{ fin.},\mu\nu}$ con $d_{\mu\nu}(\tilde{P}, n)$ para recuperar las correcciones NLO asociadas al núcleo de Altarelli-Parisi no polarizado. Las expresiones mostradas en esta sección son consistentes con los resultados mostrados en el Capítulo 9.

3.2. Verificación de integrales involucradas

La fórmula de Catani predice la estructura de polos de amplitudes virtuales y funciones de splitting a 1-loop⁴, aunque es posible extraer aún más información. De hecho puede apreciarse que el polo doble es proporcional a funciones racionales y el polo simple involucra funciones de peso 1 como máximo. En otras palabras, el peso transcendental de las funciones que multiplican al polo ϵ^{-l} en $I^{(1)}$ es como máximo 2 - l. Por lo tanto podemos utilizar esta información para establecer un chequeo de las integrales de Feynman involucradas.

Como se puede apreciar en la lista presentada en el Apéndice A, hay integrales que no son conocidas a todo orden en ϵ . Los polos pueden ser calculados más fácilmente que las contribuciones finitas, pues son originados por las regiones divergentes del integrando. Por otra parte, los términos de orden ϵ^0 de las integrales triangulares y boxes con denominadores LCG incluyen funciones de peso transcendental 2. La idea del test implementado consiste en incluir marcadores (*flags*) en la expansión de dichas integrales y luego forzar la cancelación de las divergencias infrarrojas en el splitting polarizado $g \to q\bar{q}\gamma$. Esto se debe a que al calcular los coeficientes $A_j^{(1) \text{ fin.}}$, es necesario multiplicar por la matriz M^{Cramer} , cuyos elementos tienen polos simples en ϵ . Por lo tanto, como resultado de esa operación, las partes finitas de las integrales (de peso 2) podrían contribuir a la estructura de polos IR, multiplicando a ϵ^{-1} .

El proceso de splitting $g \rightarrow q\bar{q}\gamma$ involucra la integral de box LCG sin masas dada por

$$I_{25} = -i \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 (q - p_2)^2 (q - p_{23})^2 (q - p_{123})^2 (n \cdot q)}, \qquad (10.3.24)$$

cuya expansión es conocida hasta orden ϵ^0 . Luego, podemos efectuar una expansión genérica en potencias de ϵ , obteniendo

$$I_{25} = c_{\Gamma} g_{\rm S}^2 \left(\frac{-s_{123} - i0}{\mu^2}\right)^{-\epsilon} \left(\frac{B_0}{\epsilon^2} + \frac{B_1}{\epsilon} + B_2\right), \qquad (10.3.25)$$

⁴ Existen generalizaciones de esta fórmula para órdenes superiores, aunque esto se aparta del tópico central del trabajo aquí considerado. Para más información, se sugiere consultar Refs. (18; 91; 92).

en donde B_0 solo contiene funciones racionales y B_i incluye funciones de peso transcendental *i*. El próximo paso consistió en reemplazar B_0 y B_1 por sus valores correspondientes, y colocar *flags* acompañando a las contribuciones finitas de las restantes integrales. Tras sustraer las divergencias incluidas en la definición de $I_{g \to q_1 \bar{q}_2 \gamma_3}^{(1)}$ y forzar la cancelación de los polos simples en el resultado final, se obtiene la siguiente ecuación

$$\frac{1}{\epsilon} \left[\frac{B_2 + \mathcal{S}_{1\leftrightarrow 2} \left(B_2 \right)}{2} + \mathcal{D}(x_i, z_i) \right] = 0, \qquad (10.3.26)$$

en donde $\mathcal{D}(x_i, z_i)$ es una combinación racional de funciones transcendentales de peso 2. Más aún, como podemos identificar cuál es la integral que contribuye a cada término en la expansión de $\mathcal{D}(x_i, z_i)$, es posible escribir dicha función en términos de integrales de Feynman con menos propagadores (triángulos y burbujas). De esta forma, Eq. (10.3.26) admite dos usos diferentes. Por un lado, podemos reemplazar la expresión conocida para B_2 y verificar que la estructura de divergencias es compatible con la fórmula de Catani. Pero por otro, es interesante la posibilidad de utilizar esta fórmula para calcular la parte simétrica de B_2 , asumiendo que el splitting polarizado fue correctamente calculado. En otras palabras, este procedimiento constituye una verificación cruzada (*cross-check*) de los splittings y las integrales de Feynman empleadas que podría permitir imponer restricciones en la parte finita de ciertas integrales, recursivamente.

11. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

En este trabajo discutimos detalladamente el comportamiento singular de las amplitudes de scattering en la teoría QCD+QED en el límite colineal. Nos centramos en el cálculo de las denominadas funciones de splitting, las cuales son factores universales que controlan la estructura divergente de las amplitudes, en ciertas configuraciones cinemáticas generales (esto es, la región TL con $s_{ij} > 0$ para cualquier $i, j \in C$). En particular, se analizaron las funciones de splitting que involucran hasta tres partones simultáneamente colineales, a NLO en el contexto de QCD perturbativa. Sin embargo, para llegar a esos resultados fue imprescindible realizar un análisis segmentado del problema original.

Por lo discutido en el Capítulo 3, el cálculo de correcciones perturbativas en QCD conlleva la presencia de divergencias. Consecuentemente, los métodos de regularización son fundamentales para dotar de sentido a las expresiones obtenidas formalmente. Específicamente, en este trabajo nos centramos en la regularización dimensional o DREG. La idea central del método consiste en extender la dimensionalidad del espacio-tiempo, realizando una prolongación analítica de los resultados para $D_{\rm ST}$ genérica. Sin embargo, la aplicación de DREG permite ciertas arbitrariedades, como por ejemplo el tratamiento del álgebra de Dirac o los grados de libertad de las partículas escalares. La elección de un conjunto de parámetros dados define un esquema de regularización. En el Capítulo 4 estudiamos en detalle las diversas definiciones posibles, haciendo hincapié en los parámetros involucrados y su interpretación física.

El próximo paso consistió en comprender las herramientas de cálculo estándar para lidiar con integrales de Feynman a 1-loop. Este tópico, desarrollado en el Capítulo 5, involucra el estudio de identidades puramente algebraicas, conocidas como identidades de integración por partes o IBPs. Dichas relaciones permiten transformar el conjunto original de integrales en uno más pequeño, cuyos elementos se conocen como *master integrals* o MIs.

Sin embargo, la obtención de expresiones analíticas para las MIs requiere emplear otras técnicas. Las más tradicionales son la representación α y la parametrización de Feynman. Si bien ambas se encuentran vinculadas a través de un cambio de variables, la parametrización de Feynman resulta particularmente adecuada para tratar integrales con denominadores cuadráticos de forma estandarizada. Por su parte, los parámetros de Schwinger son útiles con más generalidad y permiten obtener la estructura de polos, aplicando un procedimiento de sustracción y posterior expansión en ϵ . Una alternativa más moderna es el conocido como método de ecuaciones diferenciales. El mismo consiste en emplear operadores diferenciales, junto con IBPs, para armar un sistema de ecuaciones diferenciales en las variables escalares externas. Sin embargo, debe señalarse que la determinación de la condición de contorno del mencionado sistema debe ser efectuada empleando otro método.

Por otro lado, en este trabajo también fue necesario resolver integrales tensoriales, esto es, aquellas con índices de Lorentz que no se encuentran contraídos. La técnica de reducción de Passarino-Veltman fue suficiente para nuestros propósitos iniciales, aunque en el cálculo de las funciones de splitting polarizadas $P_{a\to a_1a_2a_3}^{(1),\mu\nu}$ fue necesario apelar a una variante más sofisticada.

Tras contar con todas las integrales de Feynman necesarias procedimos a estudiar las funciones de splitting a NLO. Primero, llevamos a cabo un exhaustivo análisis del comportamiento de las mismas ante cambios de esquema, en el caso doble colineal. Como mostramos en el Capítulo 7 a través del estudio del proceso $q \rightarrow gq$ a NLO, los grados de libertad asociados a las polarizaciones ϵ -dimensionales pueden ser absorbidos mediante la introducción de partículas escalares, los gluones escalares. De este modo, computando diagramas que involucren gluones escalares se puede obtener la diferencia entre los resultados en los esquemas HV y FDH, o bien entre CDR y HV. Es importante recordar que estas contribuciones son racionales (en el caso doble colineal) y finitas, lo cual está en completo acuerdo con la predicción efectuada por la fórmula de Catani (ver Eq. (6.3.6), para el caso m = 2). Además, cabe señalar que calcular diagramas con partículas escalares es computacionalmente más sencillo que hacerlo cuando hay partículas vectoriales, debido a la transferencia de información de espín.

Por completitud, en el Capítulo 8 se presentan los resultados correspondientes a todas las funciones de splitting doble en QCD+QED, a NLO en el acoplamiento fuerte. Las expresiones encontradas, a nivel amplitud y para los núcleos de Altarelli-Parisi (polarizados y no polarizados), concuerdan con las disponibles en la literatura cuando elegimos los esquemas convencionales. Al dejar como parámetro libre el número de grados de libertad fermiónicos, fue posible explorar el comportamiento de los splittings en el esquema TSC. De esta manera, se efectúo una extensión a NLO del análisis presentado en Ref. (33). A raíz de este estudio, se concluyó que el esquema TSC permite preservar las identidades de Ward supersimétricas, al mismo tiempo que extiende todos los objetos intervinientes a $D_{\rm ST} = 4 - 2\epsilon$ dimensiones.

En la última parte del trabajo se estudiaron las funciones de splitting triple colineal para procesos que involucran al menos un fotón, a NLO en el acoplamiento fuerte. En el Capítulo 9 nos centramos en el estudio de los procesos no polarizados, mientras que en el Capítulo 10 se mantuvieron las correlaciones de espín en los procesos iniciados por partículas vectoriales (tanto fotones como gluones). Para esto último fue necesario adoptar una variante del método de Passarino-Veltman, combinada con las identidades IBPs, al nivel de las funciones de splitting completas. De esta forma, muchas cancelaciones entre diversas contribuciones ocurren antes de efectuar el reemplazo de las integrales tensoriales, lo cual se traduce en una significativa mejora del rendimiento computacional de la implementación realizada.

Más allá de presentar los resultados explícitos, se prestó especial atención a la implementación de chequeos de consistencia y se efectuó un análisis de la estructura de las expresiones obtenidas. Apelando a la fórmula de Catani, se verificaron los términos divergentes de todas las funciones de splitting y se encontró un acuerdo completo con el comportamiento esperado. Por otro lado, se encontró que la dependencia funcional en los procesos que son iniciados por fotones es notablemente más sencilla que en aquellos iniciados por gluones. Este hecho está vinculado con la invariancia de gauge de las subamplitudes obtenidas a partir del corte de una línea por la cual no circula color (como en el caso del fotón). Por ende, es posible efectuar el cálculo de las correcciones virtuales a $\gamma \rightarrow a_1 \dots a_m$ trabajando en el gauge covariante, lo que elimina las integrales con propagadores LCG. Consecuentemente, los resultados solo pueden depender de las variables x_i . Es más, encontramos que la parte que involucra funciones de peso transcendental 2 puede ser descripta empleando únicamente la función

$$\mathcal{R}(x_i, x_j) = \frac{\pi^2}{6} - \log(x_i) \log(x_j) - \operatorname{Li}_2(1 - x_i) - \operatorname{Li}_2(1 - x_j) . \quad (11.0.1)$$

Dicha función está involucrada en los desarrollos de todos los splittings analizados en este trabajo, e incluso en la parte antisimétrica de $\langle P_{q \to q \bar{Q} Q}^{(1)} \rangle$. Su origen se relaciona con la expansión en ϵ del box escalar con una pata off-shell y partículas no masivas, que corresponde a la topología maximal permitida en cualquier proceso $1 \to 3$. Como explicamos en el Capítulo 9, tras la aplicación de IBPs, los resultados obtenidos admiten ser expresados empleando solo burbujas y un box escalar. Más aún, una combinación particular de estas integrales da lugar a la función \mathcal{R} .

Por otro lado, en los Capítulos 8 y 9 se puso especial énfasis en la posibilidad de aplicar identidades de crossing para vincular resultados con el mismo contenido de partículas pero que difieren en el sabor del partón padre. Notamos que para el caso doble colineal a LO es posible encontrar una fórmula de crossing, pero que la misma deja de ser válida a NLO y que no es posible realizar una generalización *naive* al caso múltiple colineal. La imposibilidad para efectuar tal extensión guarda estrecha relación con la presencia de nuevas escalas en el problema, las cuales permiten distinguir cinemáticamente al partón inicial de los restantes. En consecuencia, las transformaciones propuestas son estrictamente válidas cuando $s_{1,m} = 0$; esto es, cuando el partón padre está on-shell. Tal situación resulta comprensible pues, en el límite colineal exacto, los splittings son proporcionales a elementos de matriz on-shell, compatibles con la simetría de crossing. Cabe señalar que los resultados obtenidos a lo largo de este trabajo fueron publicados en Ref. (39) para el caso doble colineal y en las Refs. (88) y (89) para el límite triple colineal, no polarizado y polarizado, respectivamente.

Tras discutir el material presente en esta tesis, resulta de especial interés remarcar algunas direcciones futuras para ampliar estos tópicos. En primer lugar, vimos que los resultados finales presentan una estructura funcional muy sencilla, a pesar de que los pasos intermedios conllevan a expresiones muy complicadas. Por lo tanto, este comportamiento sugiere la posibilidad de establecer un *anszatz* (o solución tentativa de un problema) y evitar el enfoque tradicional. Si bien es posible establecer algunas restricciones a las dependencias de las funciones transcendentales involucradas, aún no se conoce como hacer lo mismo para los coeficientes racionales que las acompañan. El conocimiento de formas eficientes de computar tales coeficientes constituiría un gran avance, no solo para el cálculo de funciones de splitting, sino también para la obtención de elementos de matriz físicos con muchas partículas o con varios loops.

Por otro lado, la caracterización completa de las correcciones a NLO de los splittings en el límite triple colineal de QCD pura constituye el próximo paso a seguir. Actualmente solo se conocen contribuciones aisladas a tales correcciones, como en el caso de la parte antisimétrica de $\langle P_{q\to q\bar{Q}Q}^{(1)} \rangle$ (72). Utilizando los códigos desarrollados en este proyecto es posible calcular tales contribuciones efectuando una clasificación de acuerdo a las estructuras de color involucradas. De todas formas, el tratamiento analítico de los resultados reviste un grado de dificultad notablemente superior al de los mostrados en este trabajo, pues hay más estructuras de color independientes al considerar 4 partículas con carga bajo $SU(3)_C$.

Para concluir este trabajo, es necesario remarcar que el estudio de los límites colineales de los elementos de matriz es una pieza clave en la comprensión del comportamiento general de los mismos. El descubrimiento de las estructuras matemáticas subyacentes implicaría la posibilidad de obtener resultados exactos en el contexto de las teorías de gauge, lo que constituye un problema actualmente abierto de crucial importancia para mejorar el entendimiento de las teorías más fundamentales de la física moderna.
Apéndice A

INTEGRALES DE FEYNMAN UTILIZADAS

Para llevar a cabo los cálculos mostrados en los Capítulos 7-10 utilizamos un conjunto de integrales escalares y tensoriales básicas. En este Apéndice colectamos todos los resultados empleados, mostrando primero aquellos requeridos en el análisis del límite doble colineal a nivel amplitud. Luego, presentamos las integrales escalares maestras involucradas en el estudio de las funciones de splitting para el caso triple colineal.

1. Caso doble colineal

En primer lugar, seguimos la presentación sugerida en Ref. (69). Para ello se introducen las funciones auxiliares

$$f_1(z) = \frac{2c_{\Gamma}}{\epsilon^2} \left(-\Gamma(1-\epsilon)\Gamma(1+\epsilon)z^{-1-\epsilon}(1-z)^{\epsilon} - \frac{1}{z} + \frac{(1-z)^{\epsilon}}{z} {}_2F_1(\epsilon,\epsilon;1+\epsilon;z) \right)$$
$$= -\frac{2c_{\Gamma}}{\epsilon^2 z} {}_2F_1\left(1,-\epsilon;1-\epsilon;\frac{z-1}{z}\right), \qquad (1.1.1)$$

$$f_2 = -\frac{c_{\Gamma}}{\epsilon^2}, \qquad (1.1.2)$$

en donde $z \in [0, 1]$, por tratarse de la fracción de momento partónica. Nótese que, empleando identidades relativas a las funciones hipergeométricas, $f_1(z)$ involucra el mismo comportamiento presente en el operador de inserción I, definido en (6.3.2).

Debido a que el análisis del límite doble colineal se asocia a procesos $1 \rightarrow 2$, únicamente podemos encontrar burbujas y triángulos a 1-loop. Comencemos estudiando las integrales escalares. La presencia de denominadores lineales aportados por los propagadores en LCG origina tres tipos distintos de burbujas:

$$I_1 = \int_q \frac{1}{q^2(q-p_{12})^2} = \frac{f_2\epsilon(-s_{12}-\imath 0)^{-\epsilon}}{2\epsilon - 1}, \qquad (1.1.3)$$

$$I_2 = \int_q \frac{1}{q^2(q-p_{12})^2 nq} = \frac{f_2(-s_{12}-i0)^{-\epsilon}}{nP}, \qquad (1.1.4)$$

$$I_3 = \int_q \frac{1}{q^2(q-p_{12})^2 n \cdot (q-p_1)} = \frac{c_{\Gamma}(-s_{12}-i0)^{-\epsilon}}{nP z_1(1-2\epsilon)\epsilon} {}_2F_1\left(1, 1-\epsilon; 2-2\epsilon; \frac{1}{z_1}\right), \quad (1.1.5)$$

y tres integrales triangulares diferentes:

$$I_4 = \int_q \frac{1}{q^2(q-p_1)^2(q-p_{12})^2} = -\frac{f_2}{s_{12}}(-s_{12}-i0)^{-\epsilon}, \qquad (1.1.6)$$

$$I_5 = \int_q \frac{1}{q^2(q-p_1)^2(q-p_{12})^2 nq} = \frac{f_1(z_1)(-s_{12}-i0)^{-\epsilon}}{s_{12}nP}, \qquad (1.1.7)$$

$$I_6 = \int_q \frac{1}{q^2(q+p_1)^2(q-p_2)^2 nq} = \frac{(z_1(2-4\epsilon)+2\epsilon-1)I_1+\epsilon nPI_3}{nPs_{12}(z_1-1)z_1(2\epsilon+1)}, \quad (1.1.8)$$

en donde estamos manteniendo de forma explícita la prescripción +i0 acompañando al invariante s_{12} . Aquí p_i denota el cuadrimomento asociado con las partículas colineales no masivas y onshell. Cabe destacar que, en este caso, únicamente podemos encontrar integrales con una sola escala de energía (s_{12}) ; sin embargo, la dependencia en z_1 es no trivial. Además, las integrales I_3 e I_6 presentan un comportamiento patológico pues introducen funciones transcendentales que dependen de $1 - \frac{1}{z_1}$. Como vimos en el Capítulo 7, utilizando esquemas consistentes se evita la presencia de tales integrales.

Debido a que en pasos intermedios fue necesario mantener índices de Lorentz sin contraer, también se emplearon integrales tensoriales de rango 2 como máximo. Para calcularlas, utilizamos la descomposición de Passarino-Veltman y el paquete FIRE (47; 48) para efectuar la reducción a integrales maestras aplicando el método IBP. Las integrales tipo burbujas requeridas son:

$$I_7(\mu) = \int_q \frac{q^{\mu}}{q^2(q-p_{12})^2} = -\frac{f_2(-s_{12}-\imath 0)^{-\epsilon}}{2(1-2\epsilon)} p_{12}^{\mu}, \qquad (1.1.9)$$

$$I_8(\mu,\nu) = \int_q \frac{q^{\mu}q^{\nu}}{q^2(q-p_{12})^2} = \frac{2-\epsilon}{2(3-2\epsilon)} I_1\left(p_{12}^{\mu}p_{12}^{\nu} - \frac{s_{12}}{4-2\epsilon}\eta^{\mu\nu}\right), \qquad (1.1.10)$$

$$I_{9}(\mu) = \int_{q} \frac{q^{\mu}}{q^{2}(q-p_{12})^{2}nq} = \frac{\epsilon f_{2}(-s_{12}-i0)^{-\epsilon}}{nP(2\epsilon-1)} \left(p_{12}^{\mu} - \frac{s_{12}}{2nP\epsilon}n^{\mu}\right), \qquad (1.1.11)$$

$$I_{10}(\mu,\nu) = \int_{q} \frac{q^{\mu}q^{\nu}}{q^{2}(q-p_{12})^{2}nq} = \frac{\epsilon f_{2}(-s_{12}-\imath 0)^{-\epsilon}}{4nP(\epsilon-1)(2\epsilon-1)} \left(s_{12}\eta^{\mu\nu} + p_{12}^{\mu}\left(2(\epsilon-1)p_{12}^{\nu} - \frac{s_{12}}{nP}n^{\nu}\right) + \frac{s_{12}}{nP}n^{\mu}\left(\frac{s_{12}}{\epsilon nP}n^{\nu} - p_{12}^{\nu}\right)\right), \qquad (1.1.12)$$

$$I_{11}(\mu) = \int_{q} \frac{q^{\mu}}{(q+p_{1})^{2}(q-p_{2})^{2}nq} = \frac{1}{2nP^{2}} \left[s_{12}n^{\mu} \left(I_{3}nP(1-2z_{1})-2I_{1} \right) \right]$$

$$+ 2nPp_{12}^{\mu}(I_{1} + I_{3}nP(1 - z_{1})) + 2I_{3}nP^{2}p_{2}^{\mu}],$$

$$(1.1.13)$$

$$I_{12}(\mu, \nu) = \int_{q} \frac{q^{\mu}q^{\nu}}{(q + p_{1})^{2}(q - p_{2})^{2}nq} = s_{12}\eta^{\mu\nu}\frac{(1 - 2z_{1})I_{1} + 2I_{3}nP(1 - z_{1})z_{1}}{4nP(\epsilon - 1)}$$

$$+ \frac{p_{2}^{\mu}p_{2}^{\nu}}{2nP}\left((2z_{1} + 1)I_{1} + 2I_{3}nPz_{1}^{2}\right) + \frac{p_{1}^{\mu}p_{1}^{\nu}}{2nP}\left((2z_{1} - 3)I_{1} + 2I_{3}nP(1 - z_{1})^{2}\right)$$

$$+ \frac{s_{12}^{2}n^{\mu}n^{\nu}}{4nP^{3}(\epsilon - 1)}\left((2z_{1} - 1)(2\epsilon - 3)I_{1} + I_{3}nP(2(z_{1} - 1)z_{1}(2\epsilon - 3) + \epsilon - 1)\right)$$

$$+ \frac{s_{12}\left(p_{2}^{\nu}n^{\mu} + p_{2}^{\mu}n^{\nu}\right)\left((z_{1}(6 - 4\epsilon) - 1)I_{1} + 2I_{3}nPz_{1}(z_{1}(3 - 2\epsilon) + \epsilon - 2)\right)}{4nP(\epsilon - 1)}$$

$$+ \frac{s_{12}\left(p_{1}^{\nu}n^{\mu} + p_{1}^{\mu}n^{\nu}\right)\left((z_{1}(6 - 4\epsilon) + 4\epsilon - 5)I_{1} - 2I_{3}nP(z_{1} - 1)(z_{1}(2\epsilon - 3) - \epsilon + 1))\right)}{4nP(\epsilon - 1)}$$

$$+ \frac{p_{2}^{\mu}p_{1}^{\nu} + p_{1}^{\mu}p_{2}^{\nu}}{2nP}\left((2z_{1} - 1)I_{1} + 2I_{3}nP(z_{1} - 1)z_{1}\right).$$

$$(1.1.14)$$

Por otro lado, los triángulos tensoriales que se emplearon en este trabajo fueron:

$$I_{13}(\mu) = \int_{q} \frac{q^{\mu}}{q^{2}(q-p_{1})^{2}(q-p_{12})^{2}} = -\frac{f_{2}(-s_{12}-\imath 0)^{-\epsilon}\left((\epsilon-1)p_{1}^{\mu}+\epsilon p_{2}^{\mu}\right)}{(2\epsilon-1)s_{12}}, \qquad (1.1.15)$$

$$I_{14}(\mu,\nu) = \int_{q} \frac{q^{\mu}q^{\nu}}{q^{2}(q-p_{1})^{2}(q-p_{12})^{2}} = \frac{f_{2}(-s_{12}-i0)^{-\epsilon}}{4(1-\epsilon)(2\epsilon-1)} \left(\frac{2\epsilon}{s_{12}}p_{2}^{\mu}\left((\epsilon-2)p_{1}^{\nu}+(\epsilon-1)p_{2}^{\nu}\right) + \frac{2(\epsilon-2)}{s_{12}}p_{1}^{\mu}\left((\epsilon-1)p_{1}^{\nu}+\epsilon p_{2}^{\nu}\right)+\epsilon\eta^{\mu\nu}\right),$$
(1.1.16)

$$\begin{split} I_{15}(\mu,\nu,\rho) &= \int_{q} \frac{q^{\mu}q^{\nu}q^{\rho}}{q^{2}(q-p_{1})^{2}(q-p_{12})^{2}} = \frac{f_{2}(-s_{12}-i0)^{-\epsilon}}{4(1-\epsilon)(2\epsilon-3)(2\epsilon-1)} \\ &\times \left[\epsilon \left(p_{1}^{\rho}(\epsilon-2) \left(\eta^{\mu\nu} + 2\frac{(\epsilon-1)(\epsilon-3)}{s_{12}} p_{2}^{\mu} p_{1}^{\rho} + 2\frac{(\epsilon-1)(\epsilon-3)}{s_{12}(\epsilon-2)} p_{2}^{\mu} p_{2}^{\rho} \right) \right. \\ &+ p_{1}^{\nu}(\epsilon-2) \left(\eta^{\mu\rho} + 2\frac{(\epsilon-3)}{s_{12}} p_{2}^{\mu} p_{1}^{\rho} + 2\frac{(\epsilon-2)}{s_{12}} p_{2}^{\nu} p_{2}^{\rho} \right) \\ &+ (\epsilon-1) \left((p_{2}^{\rho} \eta^{\mu\nu} + p_{2}^{\nu} \eta^{\mu\rho}) + p_{2}^{\mu} \left(\eta^{\nu\rho} + 2\frac{(\epsilon-2)}{s_{12}} p_{2}^{\nu} p_{2}^{\rho} \right) \right) \right) \\ &+ p_{1}^{\mu}(\epsilon-2) \left(\epsilon \left(\eta^{\nu\rho} + 2\frac{(\epsilon-3)}{s_{12}} p_{2}^{\nu} p_{1}^{\rho} + 2\frac{(\epsilon-1)(\epsilon-3)}{s_{12}(\epsilon-2)} p_{2}^{\nu} p_{2}^{\rho} \right) \\ &+ 2\frac{(\epsilon-3)}{s_{12}} p_{1}^{\nu} \left((\epsilon-1) p_{1}^{\rho} + \epsilon p_{2}^{\rho} \right) \right) \right], \end{split}$$
(1.1.17)
$$I_{16}(\mu) = \int_{q} \frac{q^{\mu}}{q^{2}(q-p_{1})^{2}(q-p_{12})^{2} nq} = \frac{(-s_{12}-i0)^{-\epsilon}}{2nPs_{12}(1-z_{1})} \left(p_{2}^{\mu} \frac{z_{1}f_{1}(z_{1}) - 2f_{2}}{1-z_{1}} \right) \right)$$

$$- f_1(z_1)p_1^{\mu} - \frac{s_{12}(f_1(z_1) - 2f_2)}{2nP(1 - z_1)}n^{\mu}\right), \qquad (1.1.18)$$

$$I_{17}(\mu,\nu) = \int_{q} \frac{q^{\mu}q^{\nu}}{q^{2}(q-p_{1})^{2}(q-p_{12})^{2}nq} = -\frac{(-s_{12}-i0)^{-\epsilon}}{s_{12}nP} \left[f_{5,aa}(z_{1})p_{1}^{\mu}p_{1}^{\nu} + f_{5,ab}(z_{1})\frac{p_{1}^{\mu}p_{2}^{\nu} + p_{2}^{\mu}p_{1}^{\nu}}{2} + f_{5,bb}(z_{1})p_{2}^{\mu}p_{2}^{\nu} + \left(\frac{s_{12}}{2nP}\right)^{2}f_{5,qq}(z_{1})n^{\mu}n^{\nu} + s_{12}f_{5,aq}(z_{1})\frac{p_{1}^{\mu}n^{\nu} + n^{\mu}p_{1}^{\nu}}{2nP} + s_{12}f_{5,bq}(z_{1})\frac{p_{2}^{\mu}n^{\nu} + n^{\mu}p_{2}^{\nu}}{2nP} + s_{12}f_{5,g}\eta^{\mu\nu} \right], \quad (1.1.19)$$

$$I_{18}(\mu) = \int_{q} \frac{q^{\mu}}{q^{2}(q+p_{1})^{2}(q-p_{2})^{2}nq} = \frac{(1-2\epsilon)I_{1}}{2nPs_{12}(1-z_{1})z_{1}\epsilon} \left((1-z_{1})p_{1}^{\mu}+z_{1}p_{2}^{\mu}-\frac{s_{12}}{2nP}n^{\mu}\right) + \frac{I_{3}}{2s_{12}(1-z_{1})z_{1}} \left((1-z_{1})p_{1}^{\mu}-z_{1}p_{2}^{\mu}+\frac{s_{12}(1-2z_{1})}{2nP}n^{\mu}\right), \qquad (1.1.20)$$

$$I_{19}(\mu,\nu) = \int_{q} \frac{q^{\mu}q^{\nu}}{q^{2}(q+p_{1})^{2}(q-p_{2})^{2}nq} = \frac{1}{4nPs_{12}z_{1}(1-z1)} \left[f_{19,aa}(z_{1},s_{12},nP)p_{1}^{\mu}p_{1}^{\nu} + f_{19,ab}(z_{1},s_{12},nP)p_{1}^{\mu}p_{2}^{\nu} + f_{19,bb}(z_{1},s_{12},nP)p_{2}^{\mu}p_{2}^{\nu} + f_{19,qq}(z_{1},s_{12},nP)n^{\mu}n^{\nu} + f_{19,aq}(z_{1},s_{12},nP)\frac{p_{1}^{\mu}n^{\nu} + n^{\mu}p_{1}^{\nu}}{2} + f_{19,bq}(z_{1},s_{12},nP)\frac{p_{2}^{\mu}n^{\nu} + n^{\mu}p_{2}^{\nu}}{2} + f_{19,bq}(z_{1},s_{12},nP)\frac{p_{2}^{\mu}n^{\nu} + n^{\mu}p_{2}^{\nu}}{2} + f_{19,g}(z_{1},s_{12},nP)\eta^{\mu\nu} \right], \qquad (1.1.21)$$

en donde los coeficientes $\{f_{5,ij},f_{5,g}\}$ están disponibles en Ref. (69) y

$$f_{19,aa}(z_1, s_{12}, nP) = \frac{1 - z_1}{z_1(2\epsilon - 1)} \left[I_1 nP(2z_1\epsilon + \epsilon - 1) + \bar{I}_{13}s_{12}(\epsilon - 1) + nPz_1(2I_3nP(z_1 - 1)\epsilon + I_4s_{12}(\epsilon - 1))) \right], \qquad (1.1.22)$$

$$f_{19,ab}(z_1, s_{12}, nP) = \frac{2\epsilon (nP(-2I_1z_1 + I_1 + z_1(I_4s_{12} - 2I_3nP(z_1 - 1))) + \bar{I}_{13}s_{12})}{2\epsilon - 1}, \qquad (1.1.23)$$

$$f_{19,bb}(z_1, s_{12}, nP) = \frac{z_1}{(1 - z_1)(2\epsilon - 1)} \left[I_1 n P((2z_1 - 3)\epsilon + 1) + \bar{I}_{13} s_{12}(\epsilon - 1) + n P z_1 (2I_3 n P(z_1 - 1)\epsilon + I_4 s_{12}(\epsilon - 1)) \right], \qquad (1.1.24)$$

$$f_{19,qq}(z_1, s_{12}, nP) = \frac{s_{12}^2}{4nP^2(1-z_1)z_1(2\epsilon-1)} [I_1nP(2z_1-1)(2(z_1-1)z_1(2\epsilon-1)-\epsilon+1) + s_{12}(\epsilon-1)(\bar{I}_{13}+I_4nPz_1) + 2I_3nP^2(z_1-1)z_1(2(z_1-1) \times z_1(2\epsilon-1)+\epsilon)], \qquad (1.1.25)$$

$$f_{19,aq}(z_1, s_{12}, nP) = -\frac{s_{12}}{nP z_1(2\epsilon - 1)} \left[I_1 n P(2z_1(z_1 - 2z_1\epsilon + \epsilon) + \epsilon - 1) \right]$$
(1.1.26)

$$+ s_{12}(\epsilon - 1)(\bar{I}_{13} + I_4 n P z_1) + 2I_3 n P^2(z_1 - 1)z_1(z_1 - 2z_1\epsilon + \epsilon)],$$

$$f_{19,bq}(z_1, s_{12}, nP) = \frac{s_{12}}{nP(z_1 - 1)(2\epsilon - 1)} [I_1 n P(2z_1(z_1(2\epsilon - 1) - 3\epsilon + 2) + \epsilon - 1) + \bar{I}_{13}s_{12}(\epsilon - 1) + nPz_1(2I_3 n P(z_1 - 1)(2z_1\epsilon - z_1 - \epsilon + 1) + I_4s_{12}(\epsilon - 1))],$$

$$f_{19,g}(z_1, s_{12}, nP) = \frac{s_{12}(nP(-2I_1z_1 + I_1 + z_1(I_4s_{12} - 2I_3nP(z_1 - 1))) + \bar{I}_{13}s_{12})}{2(2\epsilon - 1)},$$

$$(1.1.28)$$

en donde se introdujo la notación $\bar{I}_{13} = I_{13}(\alpha)n^{\alpha}$ para simplificar las expresiones.

Para finalizar, es necesario efectuar un comentario sobre las integrales que involucran a q_{ϵ}^2 . Recordemos que este tipo de expresiones se origina al escribir los tensores de polarización de los gluones internos utilizando una métrica 4-dimensional. Tal situación solo tiene lugar al considerar las configuraciones HSA/HSB, como se analizó en el Capítulo 7. Para calcularlas, se requiere conocer las correspondientes integrales tensoriales de rango superior a 2 y luego efectuar la contracción con la métrica del espacio trasverso, η^{ϵ} . Así, las integrales escalares necesarias son

$$I_1^{\epsilon} = \int_q \frac{q_{\epsilon}^2}{q^2(q-p_1)^2(q-p_{12})^2} = \frac{(4-D_{\rm ST})f_2\epsilon}{4(\epsilon-1)(2\epsilon-1)}(-s_{12}-i0)^{-\epsilon}, \qquad (1.1.29)$$

$$I_{2}^{\epsilon} = \int_{q} \frac{q_{\epsilon}^{2}}{q^{2}(q-p_{1})^{2}(q-p_{12})^{2}nq} = \frac{(4-D_{\rm ST})f_{5,g}(z_{1})}{nP}(-s_{12}-i0)^{-\epsilon}, \qquad (1.1.30)$$

$$I_{3}^{\epsilon} = \int_{q} \frac{q_{\epsilon}^{2}}{q^{2}(q+p_{1})^{2}(q-p_{2})^{2}nq} = \frac{(D_{\rm ST}-4)}{4nP(1-z_{1})z_{1}(1-2\epsilon)^{2}} \left[I_{1}(2z_{1}-1)(2\epsilon-1) + I_{2}nP(\epsilon-z_{1}) + z_{1}(2\epsilon-1)(2I_{3}nP(z_{1}-1) + I_{4}s_{12})\right], \qquad (1.1.31)$$

y las tensoriales

$$I_{4}^{\epsilon}(\mu) = \int_{q} \frac{q^{\mu}q_{\epsilon}^{2}}{q^{2}(q+p_{1})^{2}(q-p_{2})^{2}n \cdot (q+p_{1})} = \frac{D_{\mathrm{ST}}-4}{8(1-z_{1})(2\epsilon-1)} \left[(2I_{2}-s_{12}z_{1}I_{5})p_{1}^{\mu} + \left(\frac{2(1-2z_{1})I_{2}+s_{12}z_{1}^{2}I_{5}}{z_{1}-1} + \frac{2I_{2}}{1-\epsilon} \right) p_{2}^{\mu} + \left(\frac{z_{1}(2I_{2}-s_{12}I_{5})}{z_{1}-1} + \frac{2I_{2}}{\epsilon-1} \right) \frac{s_{12}n^{\mu}}{2nP} \right], \qquad (1.1.32)$$

$$I_{5}^{\epsilon}(\mu) = \int_{q} \frac{q^{\mu}q_{\epsilon}^{2}}{q^{2}(q+p_{1})^{2}(q-p_{2})^{2}nq} = \frac{D_{\mathrm{ST}}-4}{8(2\epsilon-1)(\epsilon-1)} \left[2\left((1-z_{1})(2\epsilon-1)I_{3}-\epsilon I_{2}\right)p_{1}^{\mu} + 2\left(z_{1}(1-2\epsilon)I_{3}-\epsilon I_{2}\right)p_{2}^{\mu} + (2\epsilon I_{2}+(2z_{1}-1)(2\epsilon-1)I_{3})\frac{s_{12}n^{\mu}}{nP} \right].$$
(1.1.33)

2. Caso triple colineal: integrales maestras

Para estudiar el límite triple colineal es necesario incluir nuevas integrales de Feynman. Puesto que siempre trabajamos con integrales escalares, en este caso ningún método de reducción tensorial fue requerido. Así, solamente fue necesario contar con algunas integrales maestras.

Además de las utilizadas en el cálculo de los splittings dobles, la descripción de los procesos $1 \rightarrow 3$ implicó integrales de triángulo con dos escalas y boxes con una pata off-shell. Por ende, comencemos describiendo estos nuevos objetos.

En primer lugar, se tiene un triángulo con dos escalas sin denominador LCG

$$I_{20} = \int_{q} \frac{1}{q^{2}(q-p_{1})^{2}(q-p_{23})} = \frac{c_{\Gamma}}{(s_{23}-s_{123})} \left[\left(\frac{s_{23}}{\mu^{2}}\right)^{-\epsilon} - \left(\frac{s_{123}}{\mu^{2}}\right)^{-\epsilon} \right], \quad (1.2.1)$$

que puede calcularse fácilmente usando técnicas estándar (ver discusión en Capítulo 5). Por otro lado, es necesario introducir los triángulos modificados con propagador LCG usando la notación

$$C_{0,n}(k_1, k_2; k_3) = \int_q \frac{1}{q^2(q+k_1)^2(q+k_1+k_2)^2 n \cdot (q+k_3)}, \qquad (1.2.2)$$

con k_i momentos genéricos. Sin embargo, en el límite triple colineal solo hay tres nuevos casos que pueden manifestarse:

• Caso I: $C_{0,n}(k_1, k_2; k_1)$ con $(k_1 + k_2)^2 = 0;$

$$I_{21} = \int_{q} \frac{1}{q^{2}(q-p_{23})^{2}(q-p_{123})^{2}nq} = \frac{2c_{\Gamma}}{nP\epsilon^{2}s_{123}\Delta_{0,1}^{1,0}} \left(-\frac{s_{123}}{\mu^{2}}\right)^{-\epsilon}$$
(1.2.3)

$$\times \left(x_{1}^{-\epsilon}{}_{2}F_{1}\left(1,-\epsilon;1-\epsilon;\frac{x_{1}z_{1}}{\Delta_{0,1}^{1,0}}\right) - {}_{2}F_{1}\left(1,-\epsilon;1-\epsilon;\frac{z_{1}}{\Delta_{0,1}^{1,0}}\right)\right),$$

• Caso II: $C_{0,n}(k_1, k_2; 0) \operatorname{con} k_1^2 = 0;$

$$I_{22} = \int_{q} \frac{1}{q^{2}(q-p_{2})^{2}(q-p_{123})^{2}nq} = \frac{c_{\Gamma}z_{2}^{-\epsilon-1}}{nPs_{123}} \left(-\frac{s_{123}}{\mu^{2}}\right)^{-\epsilon} x_{2}^{\epsilon}$$

$$\times \left(\frac{1}{\epsilon^{2}} + 2\text{Li}_{2}\left(1-\frac{1}{x_{2}}\right) + \frac{\pi^{2}}{3}\right), \qquad (1.2.4)$$

• Caso III: $C_{0,n}(-k_1, -k_2; k_3)$ con $k_i^2 = 0;$

$$I_{23} = \int_{q} \frac{1}{(q-p_2)^2 (q-p_{23})^2 (q-p_{123})^2 nq} = \frac{c_{\Gamma} z_2^{-\epsilon} x_2^{-1-\epsilon}}{n P s_{123} (1-z_1)} \left(-\frac{s_{123}}{\mu^2}\right)^{-\epsilon} \left(\frac{1-z_1}{z_2}\right)^{-2\epsilon} \times \left(\frac{1}{\epsilon^2} + 2 \text{Li}_2\left(z_1\right) + 2 \text{Li}_2\left(-\frac{z_3}{z_2}\right)\right).$$
(1.2.5)

Todas estas integrales pueden ser relacionadas con límites de configuraciones particulares de boxes escalares con propagadores cuadráticos. En particular, el caso I corresponde al límite de un *box fácil* pues tiene dos patas externas masivas no adyacentes. Para los casos II y III deben considerarse boxes con patas masivas adyacentes, los cuales son conocidos como *boxes difíciles* y sus expresiones analíticas solo son conocidas hasta orden ϵ^0 . Cabe destacar que, además de las integrales I_{20} a I_{23} , deben tenerse en cuenta aquellas obtenidas mediante el intercambio de partículas externas junto con otras expresiones equivalentes aplicando cambios de variables.

Para concluir, la topología maximal en las funciones de splitting triple colineal corresponde a un box. Específicamente, aquí solo se necesitan el box escalar con propagadores cuadráticos

$$I_{24} = \int_{q} \frac{1}{q^{2}(q-p_{2})^{2}(q-p_{23})^{2}(q-p_{123})^{2}} = \frac{-2c_{\Gamma}}{x_{2}x_{3}s_{123}^{2}\epsilon^{2}} \left(-\frac{s_{123}}{\mu^{2}}\right)^{-\epsilon} \left({}_{2}F_{1}\left(1,-\epsilon;1-\epsilon;-\frac{x_{1}}{x_{2}x_{3}}\right) - x_{2}^{-\epsilon}{}_{2}F_{1}\left(1,-\epsilon;1-\epsilon;-\frac{x_{1}}{x_{3}}\right)\right), \quad (1.2.6)$$

y una versión particular de un box con denominador LCG,

$$I_{25} = \int_{q} \frac{1}{q^{2}(q-p_{2})^{2}(q-p_{23})^{2}(q-p_{123})^{2}nq} = \frac{c_{\Gamma}}{x_{1}x_{2}s_{123}^{2}nP\epsilon} \left(-\frac{s_{123}}{\mu^{2}}\right)^{-\epsilon} \\ \times \left(\frac{1}{\epsilon}\left(\frac{1+x_{2}}{z_{2}}+\frac{1}{1-z_{1}}\right) + \frac{\log\left(x_{1}\right)\left(x_{3}(z_{2}+1)-z_{1}+x_{2}(2-z_{1}+z_{2})\right)}{z_{2}\Delta_{0,1}^{1,0}} - \frac{x_{1}\log\left(1-z_{1}\right)\left(z_{1}z_{2}+x_{2}(1-z_{1})\right)}{(1-z_{1})z_{2}\Delta_{0,1}^{1,0}} + \log\left(\frac{1-z_{1}}{z_{2}}\right)\frac{z_{3}+x_{1}(1-z_{1})}{(1-z_{1})z_{2}} - \frac{\log\left(x_{2}\right)\left(z_{2}+(1-x_{2})(1-z_{1})\right)}{(1-z_{1})z_{2}} + \epsilon\mathcal{B}_{0}\right),$$
(1.2.7)

en donde se define

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{0} &= \frac{x_{1}(1-z_{2})+x_{2}(1-z_{1})-z_{3}}{\Delta_{0,1}^{1,0}z_{2}} \mathrm{Li}_{2} \left(-\frac{\Delta_{0,1}^{1,0}}{1-z_{1}}\right) + \frac{2x_{1}z_{1}\mathrm{Li}_{2}\left(z_{1}\right)}{\Delta_{0,1}^{1,0}(1-z_{1})} - \frac{2(1-x_{1})\mathrm{Li}_{2}\left(1-x_{1}\right)}{\Delta_{0,1}^{1,0}} \\ &- \frac{\Delta_{0,1}^{1,0}-x_{2}z_{3}+x_{3}z_{2}}{\Delta_{0,1}^{1,0}z_{2}} \left(\log(x_{1})\log\left(\frac{1-z_{1}}{z_{2}}\right) + \log(1-z_{1})\log(z_{2})\right) \\ &+ \frac{\log^{2}(x_{1}x_{2})(\Delta_{0,1}^{1,0}+x_{2}z_{3}-x_{3}z_{2})}{2\Delta_{0,1}^{1,0}z_{2}} - \frac{\log^{2}(x_{2}(1-z_{1}))\left(x_{2}(1-z_{1})^{2}-2x_{1}z_{1}z_{2}\right)}{2\Delta_{0,1}^{1,0}\left(1-z_{1}\right)z_{2}} \\ &+ \frac{\Delta_{0,1}^{1,0}+(1-x_{1})z_{2}}{2\Delta_{0,1}^{1,0}z_{2}}\log^{2}\left(\frac{1-z_{1}}{x_{2}}\right) - \frac{x_{2}(1-z_{1})\log^{2}(x_{1})}{\Delta_{0,1}^{1,0}z_{2}} \end{aligned}$$

$$- \frac{\log^{2}(x_{2})(\Delta_{0,1}^{1,0}(x_{2}+1)+(1-x_{1})z_{2})}{\Delta_{0,1}^{1,0}z_{2}} + \frac{2(1-x_{2})}{z_{2}}\left(\operatorname{Li}_{2}(1-x_{2})-\frac{\pi^{2}}{6}\right) + \frac{x_{2}(1-z_{1})+z_{3}}{2(1-z_{1})z_{2}}\log^{2}\left(\frac{x_{2}}{z_{2}}\right) + \frac{2z_{3}}{(1-z_{1})z_{2}}\left(\operatorname{Li}_{2}\left(\frac{z_{3}}{1-z_{1}}\right)+\log(x_{2})\log(z_{2})\right), \quad (1.2.8)$$

En todos los casos, las partículas externas son no masivas y se encuentran on-shell $(p_i^2 = 0)$. La integral I_{24} puede ser calculada utilizada parámetros de Feynman o bien mediante la técnicas de ecuaciones diferenciales, como se muestra en Ref. (93). Respecto de I_{28} , Catani y Rodrigo obtuvieron una expresión válida a orden ϵ^0 aplicando identidades de *shift* dimensional, junto con la conocida reducción a una base de boxes, triángulos y burbujas en 4-dimensiones (94).

Bibliografía

- M. Peskin y D. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory. Perseus Book Publishing, 1995.
- [2] A. Banfi, "QCD as a Yang-Mills theory", charla presentada en SNFT Parma, Septiembre de 2007.
- [3] R. Field, Applications of Perturbative QCD. Perseus Book Publishing, 1995.
- [4] H. Lehmann, K. Symanzik y W. Zimmermann, "On the formulation of quantized field theories," Nuovo Cim. 1 (1955) 205.
- [5] Z. Kunszt y D. E. Soper, "Calculation of jet cross-sections in hadron collisions at order alpha-s**3," Phys. Rev. D 46 (1992) 192.
- S. Frixione, Z. Kunszt y A. Signer, "Three jet cross-sections to next-to-leading order," Nucl. Phys. B 467 (1996) 399 [hep-ph/9512328].
- [7] S. Catani y M. H. Seymour, "The Dipole formalism for the calculation of QCD jet crosssections at next-to-leading order," Phys. Lett. B 378 (1996) 287 [hep-ph/9602277].
- S. Catani y M. H. Seymour, "A General algorithm for calculating jet cross-sections in NLO QCD," Nucl. Phys. B 485 (1997) 291 [Erratum-ibid. B 510 (1998) 503] [hep-ph/9605323].
- [9] G. Ossola, C. G. Papadopoulos y R. Pittau, "Reducing full one-loop amplitudes to scalar integrals at the integrand level," Nucl. Phys. B 763 (2007) 147 [hep-ph/0609007].
- [10] P. Mastrolia, E. Mirabella, G. Ossola y T. Peraro, "Integrand-Reduction for Two-Loop Scattering Amplitudes through Multivariate Polynomial Division," Phys. Rev. D 87 (2013) 8, 085026 [arXiv:1209.4319 [hep-ph]].
- [11] A. Solotar, M. Farinati y M. Suárez-Alvarez, "Anillos y sus categorías de representaciones," Cuadernos de Matemática y Mecánica, IMAL (CONICET - UNL) - CIMEC (INTEC, CONICET - UNL), 2007.
- [12] L. J. Dixon, "Calculating scattering amplitudes efficiently," In *Boulder 1995, QCD and beyond* 539-582 [hep-ph/9601359].
- [13] E. Witten, "Perturbative gauge theory as a string theory in twistor space," Commun. Math. Phys. 252 (2004) 189 [hep-th/0312171].

- [14] S. J. Parke y T. R. Taylor, "An Amplitude for n Gluon Scattering," Phys. Rev. Lett. 56 (1986) 2459.
- [15] F. A. Berends y W. T. Giele, "Recursive Calculations for Processes with n Gluons," Nucl. Phys. B 306 (1988) 759.
- [16] R. Britto, F. Cachazo y B. Feng, "New recursion relations for tree amplitudes of gluons," Nucl. Phys. B 715 (2005) 499 [hep-th/0412308].
- [17] R. Britto, F. Cachazo, B. Feng y E. Witten, "Direct proof of tree-level recursion relation in Yang-Mills theory," Phys. Rev. Lett. 94 (2005) 181602 [hep-th/0501052].
- [18] S. Catani, "The Singular behavior of QCD amplitudes at two loop order," Phys. Lett. B 427 (1998) 161 [hep-ph/9802439].
- [19] C. G. Bollini y J. J. Giambiagi, "Dimensional Renormalization: The Number of Dimensions as a Regularizing Parameter," Nuovo Cim. B 12 (1972) 20.
- [20] G. 't Hooft y M. J. G. Veltman, "Regularization and Renormalization of Gauge Fields," Nucl. Phys. B 44 (1972) 189.
- [21] G. M. Cicuta y E. Montaldi, "Analytic renormalization via continuous space dimension," Lett. Nuovo Cim. 4 (1972) 329.
- [22] J. F. Ashmore, "A Method of Gauge Invariant Regularization," Lett. Nuovo Cim. 4 (1972) 289.
- [23] J. Collins, Renormalization. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1998.
- [24] G. 't Hooft, "Dimensional regularization and the renormalization group," Nucl. Phys. B 61 (1973) 455.
- [25] S. Weinberg, "New approach to the renormalization group," Phys. Rev. D 8 (1973) 3497.
- [26] T. Muta, Foundations of Quantum Chromodynamics. World Scientific Publishing, 1987.
- [27] W. A. Bardeen, A. J. Buras, D. W. Duke y T. Muta, "Deep Inelastic Scattering Beyond the Leading Order in Asymptotically Free Gauge Theories," Phys. Rev. D 18 (1978) 3998.
- [28] D. J. Gross y F. Wilczek, "Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories," Phys. Rev. Lett. 30 (1973) 1343.

- [29] H. D. Politzer, "Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?," Phys. Rev. Lett. 30 (1973) 1346.
- [30] F. Bloch y A. Nordsieck, "Note on the Radiation Field of the electron," Phys. Rev. 52 (1937) 54.
- [31] T. Kinoshita, "Mass singularities of Feynman amplitudes," J. Math. Phys. 3 (1962) 650.
- [32] T. D. Lee y M. Nauenberg, "Degenerate Systems and Mass Singularities," Phys. Rev. 133 (1964) B1549.
- [33] S. Catani, M. H. Seymour y Z. Trocsanyi, "Regularization scheme independence and unitarity in QCD cross-sections," Phys. Rev. D 55 (1997) 6819 [hep-ph/9610553].
- [34] R. Gastmans y R. Meuldermans, "Dimensional regularization of the infrared problem," Nucl. Phys. B 63 (1973) 277.
- [35] W. B. Kilgore, "Regularization Schemes and Higher Order Corrections," Phys. Rev. D 83 (2011) 114005 [arXiv:1102.5353 [hep-ph]].
- [36] A. Signer y D. Stockinger, "Using Dimensional Reduction for Hadronic Collisions," Nucl. Phys. B 808 (2009) 88 [arXiv:0807.4424 [hep-ph]].
- [37] W. Siegel, "Supersymmetric Dimensional Regularization via Dimensional Reduction," Phys. Lett. B 84 (1979) 193.
- [38] D. M. Capper, D. R. T. Jones y P. van Nieuwenhuizen, "Regularization by Dimensional Reduction of Supersymmetric and Nonsupersymmetric Gauge Theories," Nucl. Phys. B 167 (1980) 479.
- [39] G. Sborlini, D. de Florian y G. Rodrigo, "Double collinear splitting amplitudes at next-toleading order," JHEP 1401 (2014) 018 arXiv:1310.6841 [hep-ph].
- [40] R. Harlander, P. Kant, L. Mihaila y M. Steinhauser, "Dimensional Reduction applied to QCD at three loops," JHEP 0609 (2006) 053 [hep-ph/0607240].
- [41] R. Harlander, P. Kant, L. Mihaila y M. Steinhauser, "Dimensional reduction applied to QCD at higher orders," arXiv:0706.2982 [hep-ph].
- [42] V. A. Smirnov, "Feynman integral calculus," Berlin, Germany: Springer (2006) 283 p
- [43] A. G. Grozin, "Integration by parts: An Introduction," Int. J. Mod. Phys. A 26 (2011) 2807 [arXiv:1104.3993 [hep-ph]].

- [44] K. G. Chetyrkin y F. V. Tkachov, "Integration by Parts: The Algorithm to Calculate beta Functions in 4 Loops," Nucl. Phys. B 192 (1981) 159.
- [45] R. N. Lee, "Group structure of the integration-by-part identities and its application to the reduction of multiloop integrals," JHEP 0807 (2008) 031 [arXiv:0804.3008 [hep-ph]].
- [46] S. Laporta, "High precision calculation of multiloop Feynman integrals by difference equations," Int. J. Mod. Phys. A 15 (2000) 5087 [hep-ph/0102033].
- [47] A. V. Smirnov, "Algorithm FIRE Feynman Integral REduction," JHEP 0810, 107 (2008) [arXiv:0807.3243 [hep-ph]].
- [48] A. V. Smirnov y V. A. Smirnov, "FIRE4, LiteRed and accompanying tools to solve integration by parts relations," arXiv:1302.5885 [hep-ph].
- [49] S. Weinzierl, "Hopf algebra structures in particle physics," Eur. Phys. J. C 33 (2004) S871 [hep-th/0310124].
- [50] C. Bogner y S. Weinzierl, 'Periods and Feynman integrals," J. Math. Phys. 50 (2009) 042302 [arXiv:0711.4863 [hep-th]].
- [51] C. Duhr, "Hopf algebras, coproducts and symbols: an application to Higgs boson amplitudes," JHEP 1208 (2012) 043 [arXiv:1203.0454 [hep-ph]].
- [52] A. I. Davydychev, "A Simple formula for reducing Feynman diagrams to scalar integrals," Phys. Lett. B 263 (1991) 107.
- [53] E. Remiddi, "Differential equations for Feynman graph amplitudes," Nuovo Cim. A 110 (1997) 1435 [hep-th/9711188].
- [54] S. Laporta, "Calculation of master integrals by difference equations," Phys. Lett. B 504 (2001) 188 [hep-ph/0102032].
- [55] G. Curci, W. Furmanski y R. Petronzio, "Evolution of Parton Densities Beyond Leading Order: The Nonsinglet Case," Nucl. Phys. B 175 (1980) 27.
- [56] S. Mandelstam, "Light Cone Superspace and the Ultraviolet Finiteness of the N=4 Model," Nucl. Phys. B 213 (1983) 149.
- [57] G. Leibbrandt, "The Light Cone Gauge in Yang-Mills Theory," Phys. Rev. D 29 (1984) 1699.
- [58] R. Bentin, "Not a prescription but an identity: Mandelstam-Leibbrandt," hep-th/0209058.

- [59] G. Altarelli y G. Parisi, "Asymptotic Freedom in Parton Language," Nucl. Phys. B 126 (1977) 298.
- [60] R. P. Feynman, "Photon-hadron interactions," Reading 1972, 282p
- [61] Halzen, F. y Martin, A., Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics. John Wiley and Sons, Inc., 1984.
- [62] Cheng, T. P. y Li, L. F. Gauge theory of elementary particle physics. Oxford Science Publications, 1982.
- [63] Altarelli, G., Partons in Quantum Chromodynamics. North-Holland Publishing, 1981.
- [64] D. J. Pritchard y W. J. Stirling, "Qcd Calculations In The Light Cone Gauge. 1," Nucl. Phys. B 165 (1980) 237.
- [65] S. Catani y M. Grazzini, "Infrared factorization of tree level QCD amplitudes at the nextto-next-to-leading order and beyond," Nucl. Phys. B 570 (2000) 287 [hep-ph/9908523].
- [66] M. L. Mangano y S. J. Parke, "Multiparton amplitudes in gauge theories," Phys. Rept. 200 (1991) 301 [hep-th/0509223].
- [67] Z. Bern, V. Del Duca, W. B. Kilgore y C. R. Schmidt, "The infrared behavior of one loop QCD amplitudes at next-to-next-to leading order," Phys. Rev. D 60 (1999) 116001 [hepph/9903516].
- [68] Z. Bern, L. J. Dixon, D. C. Dunbar y D. A. Kosower, "One loop n point gauge theory amplitudes, unitarity and collinear limits," Nucl. Phys. B 425 (1994) 217 [hep-ph/9403226].
- [69] D. A. Kosower y P. Uwer, "One loop splitting amplitudes in gauge theory," Nucl. Phys. B 563 (1999) 477 [hep-ph/9903515].
- [70] D. A. Kosower, "All order collinear behavior in gauge theories," Nucl. Phys. B 552 (1999) 319 [hep-ph/9901201].
- [71] S. Catani, D. de Florian y G. Rodrigo, "Space-like (versus time-like) collinear limits in QCD: Is factorization violated?," JHEP 1207 (2012) 026 [arXiv:1112.4405 [hep-ph]].
- [72] S. Catani, D. de Florian y G. Rodrigo, "The Triple collinear limit of one loop QCD amplitudes," Phys. Lett. B 586 (2004) 323 [hep-ph/0312067].
- [73] R. Mertig, M. Bohm y A. Denner, "FEYN CALC: Computer algebraic calculation of Feynman amplitudes," Comput. Phys. Commun. 64 (1991) 345.

- [74] F. A. Berends y W. T. Giele, "Recursive Calculations for Processes with n Gluons," Nucl. Phys. B 306 (1988) 759.
- [75] Z. Bern, V. Del Duca y C. R. Schmidt, "The infrared behavior of one-loop gluon amplitudes at next-to-next-to-leading order," Phys. Lett. B 445 (1998) 168; [arXiv:hep-ph/9810409].
- [76] Z. Bern, G. Chalmers, L. J. Dixon y D. A. Kosower, "One loop N gluon amplitudes with maximal helicity violation via collinear limits," Phys. Rev. Lett. 72 (1994) 2134. [arXiv:hepph/9312333].
- [77] Z. Bern y G. Chalmers, "Factorization in one loop gauge theory," Nucl. Phys. B 447 (1995) 465. [arXiv:hep-ph/9503236].
- [78] Z. Bern, L. J. Dixon y D. A. Kosower, "Two-Loop g ->gg Splitting Amplitudes in QCD," JHEP 0408 (2004) 012. [arXiv:hep-ph/0404293].
- [79] S. D. Badger y E. W. N. Glover, "Two-loop splitting functions in QCD," JHEP 0407 (2004) 040.
- [80] G. F. R. Sborlini, Producción de pión+fotón en colisiones hadrónicas a NLO. Tesis de Licenciatura, Departamento de Física, FCEyN, UBA, 2009.
- [81] D. de Florian y G. F. R. Sborlini, "Hadron plus photon production in polarized hadronic collisions at next-to-leading order accuracy," Phys. Rev. D 83 (2011) 074022 [arXiv:1011.0486 [hep-ph]].
- [82] J. M. Campbell y E. W. N. Glover, "Double unresolved approximations to multiparton scattering amplitudes," Nucl. Phys. B 527 (1998) 264 [hep-ph/9710255].
- [83] S. Catani y M. Grazzini, "Collinear factorization and splitting functions for next-to-next-toleading order QCD calculations," Phys. Lett. B 446 (1999) 143 [hep-ph/9810389].
- [84] S. Catani, D. de Florian, G. Rodrigo y W. Vogelsang, "Perturbative generation of a strangequark asymmetry in the nucleon," Phys. Rev. Lett. 93 (2004) 152003 [hep-ph/0404240].
- [85] V. Del Duca, A. Frizzo y F. Maltoni, "Factorization of tree QCD amplitudes in the high-energy limit and in the collinear limit," Nucl. Phys. B 568 (2000) 211. [arXiv:hepph/9909464].
- [86] T. G. Birthwright, E. W. N. Glover, V. V. Khoze y P. Marquard, "Multi-Gluon Collinear Limits from MHV diagrams," JHEP 0505 (2005) 013. [arXiv:hep-ph/0503063].

- [87] T. G. Birthwright, E. W. N. Glover, V. V. Khoze y P. Marquard, "Collinear Limits in QCD from MHV Rules," JHEP 0507 (2005) 068. [arXiv:hep-ph/0505219].
- [88] G. Sborlini, D. de Florian y G. Rodrigo, "Triple collinear splitting functions at NLO for scattering processes with photons," [arXiv:14xx.xxxx [hep-ph]].
- [89] D. de Florian, G. Rodrigo y G. Sborlini, "Polarized triple-collinear splitting functions at NLO for processes with photons," [arXiv:14xx.xxxx [hep-ph]].
- [90] J. R. Forshaw, M. H. Seymour y A. Siodmok, "On the Breaking of Collinear Factorization in QCD," JHEP 1211 (2012) 066 [arXiv:1206.6363 [hep-ph]].
- [91] T. Becher and M. Neubert, Phys. Rev. Lett. 102 (2009) 162001 [Erratum-ibid. 111 (2013) 19, 199905] [arXiv:0901.0722 [hep-ph]].
- [92] T. Becher and M. Neubert, JHEP 0906 (2009) 081 [Erratum-ibid. 1311 (2013) 024] [ar-Xiv:0903.1126 [hep-ph]].
- [93] T. Gehrmann y E. Remiddi, "Using differential equations to compute two loop box integrals," Nucl. Phys. Proc. Suppl. 89 (2000) 251 [hep-ph/0005232].
- [94] G. Rodrigo y S. Catani, Notas internas, 2003.