

Tesis Doctoral

Sombras de agujeros negros en teorías alternativas de gravitación

Amarilla, Leonardo

2013

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Amarilla, Leonardo. (2013). Sombras de agujeros negros en teorías alternativas de gravitación. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

Cita tipo Chicago:

Amarilla, Leonardo. "Sombras de agujeros negros en teorías alternativas de gravitación". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2013.



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

*Sombras de agujeros negros en
teorías alternativas de
gravitación*

Trabajo de Tesis para optar por el título de
Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Físicas

por *Lic. Leonardo Amarilla*

Director de Tesis: Dr. Ernesto F. Eiroa

Consejero: Dr. Rafael Ferraro

Lugar de Trabajo: Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas,
Universidad Nacional de La Plata

Diciembre 2013

Resumen

La presente Tesis trata sobre la forma aparente de agujeros negros rotantes y sin discos de acreción, vista por un observador lejano, en el contexto de tres teorías de gravitación alternativas a la Relatividad General. La apariencia óptica de agujeros negros iluminados por fuentes extensas, o que poseen flujos de acreción geoméricamente gruesos y ópticamente delgados, se caracteriza por la presencia de una región oscura, o sombra, rodeada por un fondo brillante. El contorno de la sombra depende de la geometría del espacio-tiempo alrededor del objeto compacto y su observación puede ser utilizada para poner a prueba diferentes teorías de gravitación. Las teorías abordadas en este trabajo son la modificación a la Relatividad General de Chern–Simons, la de Einstein–Maxwell acoplada con un campo escalar y el modelo de mundos brana de Randall–Sundrum. Para cada una de las correspondientes soluciones de agujero negro rotante se estudian las geodésicas nulas, se obtienen los parámetros de impacto asociados a la esfera de fotones y se calculan los contornos de las sombras. El tamaño y la deformación de las mismas (con respecto al caso no rotante) se describen en términos de dos observables. Se halla el comportamiento de los mismos en función de la masa y del momento angular del objeto, así como también de los parámetros propios de cada una de las teorías estudiadas. Para la solución rotante proveniente del modelo de Randall–Sundrum también se estudian las sombras de las singularidades desnudas, correspondientes a valores grandes del parámetro de rotación. El caso del agujero negro supermasivo del centro galáctico se discute a la luz de los resultados obtenidos.

Palabras clave: *Teorías alternativas de gravitación – Agujeros negros rotantes – Geodésicas nulas – Forma aparente – Agujero negro supermasivo del centro galáctico.*

Black hole shadows in alternative theories of gravity

Abstract

This Thesis deals with the apparent shape of rotating black holes without accretion discs, as seen by a far away observer, in the context of three different theories of gravity, alternative to General Relativity. The optical appearance of black holes illuminated from behind by an extended source, or having accretion flows geometrically thick and optically thin, is characterized by the presence of a dark region, or shadow, surrounded by a bright background. The contour of the shadow depends on the space-time geometry around the compact object and its observation can be used to test alternative theories of gravity. The theories addressed in this work are the Chern–Simons modification to General Relativity, the Einstein–Maxwell theory coupled to a scalar field, and the Randall–Sundrum braneworld model. For each of the corresponding rotating black hole solutions, the null geodesics are studied, the impact parameters associated to the photon sphere are obtained, and the contours of the shadows are computed. The size and the distortion (with respect to the non rotating case) of the shadow are described in terms of two observables. Their behaviour is found as a function of the black hole mass and angular momentum, as well as of the particular parameter related to the specific theory. The shadows of naked singularities –corresponding to large values of the rotation parameter– coming from the rotating solution of the Randall–Sundrum braneworld model, are also studied. Finally, the observational prospects corresponding to the supermassive black hole at the Galactic center is discussed in light of the results.

Keywords: *Alternative theories of gravity – Rotating black holes – Null geodesics – Apparent shape – Supermassive black hole at the Galactic center.*

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mi Director de Tesis, Ernesto Eiroa, por haber guiado este trabajo, por su paciencia y dedicación, y por confiar en mi. Quiero agradecer a Gastón Giribet, de quien aprendí el valor de la rigurosidad en la investigación. Quiero agradecer al Papi Vucetich, Director de mi Beca de Doctorado. Quiero agradecer al Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, que fue durante tres años mi lugar de trabajo; a la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de la Universidad Nacional de La Plata, mi lugar de trabajo durante dos años; al Instituto de Astronomía y Física del Espacio, por la hospitalidad durante el tiempo de mi visita y al CONICET. Quiero agradecer a mis viejos y a mi hermano, que están, me apoyan y confían. A mi Baba. A Marcelo. Quiero agradecer a mis amigos, en especial a Scheikens, Brian, Gastón, Tom, Pablo, Ceci y Mariano. Y por supuesto, a quién sino a vos, Jazmín, mi novia, mi flor.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes y motivación	1
1.2. Teorías alternativas de gravitación	4
1.3. Comentarios preliminares y organización de la Tesis	10
2. Agujeros negros rotantes en Relatividad General	13
2.1. La geometría de Kerr	14
2.1.1. Propiedades generales	14
2.1.2. Simetrías y separabilidad	17
2.1.3. Geodésicas	19
2.2. Propagación de la luz	23
2.3. Sombra del agujero negro	28
2.4. Solución de Kerr–Newman	33
2.5. Observables R_s y δ_s	35
3. Agujero negro de Chern–Simons	39
3.1. Gravedad modificada de Chern–Simons	39
3.2. Agujero negro lentamente rotante	44
3.3. Geodésicas nulas	47
3.4. Sombra del agujero negro	49
3.5. Observables	51

3.6. Discusión	54
4. Agujero negro de Kaluza–Klein	57
4.1. Marco teórico	57
4.1.1. Teoría de Kaluza–Klein	57
4.1.2. Teoría Einstein–Maxwell–escalar	59
4.2. Agujero negro rotante con carga eléctrica	60
4.2.1. Propiedades	61
4.2.2. Geodésicas nulas	63
4.3. Sombras y observables	63
4.4. Discusión	68
5. Agujero negro en mundos brana	71
5.1. Introducción	71
5.2. Modelos de Randall–Sundrum	73
5.3. Agujero negro rotante con carga tidal	76
5.3.1. Carga tidal	78
5.3.2. Propiedades	79
5.4. Trayectorias de la luz	81
5.5. Sombra y observables	82
5.6. Singularidades desnudas	86
5.6.1. Forma aparente	87
5.6.2. Observables R_a y φ_a	91
5.7. Discusión	92
6. Conclusiones finales	95
Bibliografía	107

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes y motivación

Desde principios de la década de 1970 numerosos trabajos intentaron contestar la pregunta sobre cómo sería la imagen de un agujero negro en el caso de que la tecnología permitiera detectarla. En 1972, J. M. Bardeen obtuvo el contorno aparente de la esfera de fotones, es decir el borde de la “sombra”, de un agujero negro de Kerr visto por un observador ubicado en la región asintóticamente plana del espacio [1]¹. En 1976, P. J. Young investigó la captura de fotones en agujeros negros rotantes [2] y en 1979, J.-P. Luminet generó la primera imagen bolométrica simulada de un agujero negro de Schwarzschild con su disco de acreción [4]. En su trabajo calculó la proyección de las curvas de radio constante en el plano del observador, utilizando los resultados de [5], y logró computar el flujo bolométrico asociado al disco de acreción, teniendo en cuenta el corrimiento al rojo gravitatorio, debido al campo intenso en las cercanías del agujero negro, y el efecto Doppler, asociado a la rotación del disco. El estudio de la deflexión de la luz en el régimen gravitatorio fuerte para el caso de

¹En 1968, B. B. Godfrey calculó la sección eficaz de captura de fotones para agujeros negros con diferentes momentos angulares [3]. Infortunadamente el trabajo contiene un error matemático y la mayoría de sus resultados son inválidos, como indicara oportunamente J. M. Bardeen en [1].

fuentes lumínicas cuyo tamaño angular, visto por un observador lejano, es mucho menor al del objeto compacto, ha recibido gran atención durante los últimos años debido a la creciente evidencia de la presencia de agujeros negros supermasivos en los centros galácticos. Las cantidades relevantes desde el punto de vista astrofísico, es decir las posiciones, magnificaciones y los retrasos temporales de las imágenes relativistas producidas por lentes gravitatorias muy compactas como los agujeros negros, pueden ser obtenidas en forma numérica [6] o de manera analítica, en forma aproximada, valiéndose del límite de deflexión fuerte para lentes con simetría esférica. Este método, que se basa en la expansión logarítmica del ángulo de deflexión de la luz que se mueve en las cercanías de la esfera de fotones, fue introducido por C. Darwin² en 1959 para la geometría de Schwarzschild [7], redescubierto por otros autores [8–10] y extendido tanto al espacio-tiempo de Reissner–Nordström [11] como a cualquier agujero negro con simetría esférica [12]. También se estudiaron agujeros negros rotantes como lentes gravitacionales en el contexto de la Relatividad General [13–18] y, en particular, el régimen de deflexión fuerte se extendió a estos objetos [13–15, 17]. Agujeros negros no rotantes provenientes de diferentes teorías alternativas de gravitación también fueron considerados como lentes gravitacionales [19–29].

Por otra parte, la deflexión de la luz proveniente de una fuente extensa ubicada detrás de un agujero negro, o bien que se origina en el plasma transparente que lo rodea, también ha sido objeto de estudio durante los últimos años. En el primer caso, un agujero negro estático es detectado como un disco oscuro en un fondo brillante. El contorno del disco marca el límite entre las geodésicas que intersectan el horizonte y aquellas que llegan al observador, y está asociado a aquellos rayos que giran alrededor del objeto varias veces antes de escapar y así llegar al observador. Los giros de la luz alrededor del agujero negro ocurren muy cerca de la órbita inestable de fotones y es entonces su posición quien define el borde de la sombra. En el segundo caso,

²nieto del famoso naturalista, evolucionista y explorador homónimo, autor de *El Origen de las Especies*.

la emisión ocurre en una región ópticamente delgada alrededor del agujero negro y el contorno aparente posee la misma forma que antes, ya que las propiedades de las geodésicas son independientes de la posición de la fuente. Aquellos fotones que viajan en geodésicas que se encuentran dentro del borde aparente y que pueden alcanzar al observador, experimentan un fuerte corrimiento al rojo gravitatorio y su longitud de camino óptico es menor, lo que genera una menor emisividad integrada. Los fotones que se encuentran por fuera del borde aparente pueden orbitar numerosas veces al agujero negro cerca de la órbita inestable, contribuyendo así a la intensidad observada. En consecuencia, se genera un déficit significativo en esta última dentro del contorno aparente, dando origen a la sombra del agujero negro.

Las soluciones rotantes, ya sean en el contexto de la Relatividad General o en el de otras teorías de gravitación, adquieren en astrofísica una relevancia significativa ya que, en general, los procesos físicos que intervienen en la formación de agujeros negros poseen momento angular, que se debe conservar luego del colapso gravitacional. La rotación genera que la sombra adquiera una forma asimétrica como consecuencia de que fotones corrotantes y contrarrotantes interactúan con potenciales gravitatorios efectivos diferentes [1, 30]. No obstante, las sombras de los agujeros negros rotantes no varían dramáticamente respecto de las de los no rotantes [2].

Los contornos de las sombras de los agujeros negros son de suma importancia ya que sus propiedades no dependen de la forma específica del flujo de acreción y se mantienen estables en el tiempo. Por lo tanto una vez que se consiga distinguir al menos parte del contorno, será posible extraer información valiosa asociada a las diferentes propiedades del agujero negro. En resumen, la motivación principal de esta Tesis puede enunciarse de la siguiente forma:

La observación del tamaño y la forma del borde de la sombra de un agujero negro aporta una descripción directa de la región cercana al horizonte y no depende de ninguna hipótesis teórica concerniente a la teoría de gravedad subyacente o a los procesos astrofísicos que suceden en las inmediaciones del mismo. Es por eso que

esta característica relacionada al régimen gravitatorio fuerte adquiere importancia a la hora de comparar diferentes teorías de gravitación.

Las sombras de agujeros negros han sido consideradas recientemente en diferentes trabajos [17, 31–43], tanto en la teoría de Einstein como en teorías modificadas, ya que se espera que la observación directa de agujeros negros sea posible en un futuro no lejano [38–40, 44, 45]. También se estudiaron las sombras de objetos como los agujeros negros regulares [46], los agujeros de gusano [47] y las singularidades desnudas [34, 35, 37]. La forma aparente de agujeros negros con discos de acreción fue considerada en las Refs. [4, 31, 32, 48–52] en el contexto de la Relatividad General, y en las Refs. [33, 53] en teorías alternativas de gravitación.

La caracterización cuantitativa de las sombras se realiza mediante la definición de observables físicos relacionados a su tamaño, deformación relativa y la posición de su centro [35, 41, 43]. A partir ellos es posible determinar las diferentes propiedades del agujero negro, como su momento angular, inclinación respecto del observador y su carga, o bien, eventualmente, extraer límites sobre el acoplamiento característico de una teoría alternativa. Es por eso que la observación futura y el estudio de las sombras será de gran utilidad a la hora de caracterizar agujeros negros astrofísicos y de comparar, y/o poner a prueba, diferentes teorías de gravitación.

1.2. Teorías alternativas de gravitación

Si bien la Relatividad General ha demostrado predecir con exactitud la dinámica a nivel astrofísico y cosmológico, a energías suficientemente altas la teoría falla y debe ser completada con una teoría de gravitación cuántica. Es deseable que las singularidades clásicas predichas por la Relatividad General en el colapso gravitacional y en el Big Bang puedan ser removidas por una teoría cuántica. Sin embargo, aún por debajo de la escala energética asociada con la transición cuántica podrían producirse correcciones significativas a la gravedad clásica que impactarían en la físi-

ca del colapso gravitacional, de los agujeros negros y del universo temprano, entre otros. Las huellas de esas correcciones podrían ser entonces encontradas en observaciones y experimentos, de manera que es necesario estimarlas de forma teórica y desarrollar experimentos u observaciones para detectarlas o, eventualmente, descartarlas. Es en este sentido que durante las últimas décadas se concentraron los esfuerzos no solamente en la búsqueda de una teoría fundamental, sino también en el desarrollo de teorías efectivas, fenomenológicamente viables, que puedan tratarse como límites particulares de teorías fundamentales, y a la vez predecir fenómenos a nivel astrofísico y cosmológico. Estas teorías efectivas tienen el potencial de indicar cuáles son los fenómenos, eventualmente observables, en donde se debe buscar nueva física. Es esperable encontrar indicios en el régimen gravitatorio fuerte y es por eso que la física de los agujeros negros jugará un papel preponderante en los próximos años.

Existen numerosas soluciones, tanto exactas como aproximadas, de agujeros negros en teorías alternativas de gravitación. En la presente Tesis se estudian agujeros negros rotantes provenientes de tres diferentes teorías viables y promisorias; ellas son: la teoría de gravitación modificada de Chern–Simons, la gravitación de Einstein–Maxwell acoplada a un dilatón y el modelo de branas de Randall–Sundrum.

Gravitación modificada de Chern–Simons:

La modificación a la Relatividad General introducida por R. Jackiw y S-Y. Pi en 2003 [54, 55] recibió creciente atención en los últimos años. La acción de la teoría se compone del término de la gravitación clásica de Einstein–Hilbert y de uno cuatridimensional que viola la simetría de paridad. El interés en esta teoría radica en el hecho de que la teoría de cuerdas requiere una corrección de este tipo de manera de cancelar anomalías a través del mecanismo de Green–Schwarz [56, 57]. Una de las características que generan interés en esta teoría es que admite como solución a la de Schwarzschild de la Relatividad General. La corrección a la acción de la

gravitación clásica consiste en el producto de un campo escalar con la densidad de Pontryagin, que se define como la contracción entre el tensor de Riemann y su dual³. La violación potencial de paridad se evidencia en la presencia de este último, ya que contiene en su definición al tensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita en cuatro dimensiones. La corrección de Chern-Simons es novedosa ya que la violación de paridad surge de un término puramente geométrico, a diferencia de lo que sucede habitualmente en la gravitación clásica, en donde proviene del sector material.

Existen dos formulaciones de la gravitación de Chern-Simons que conllevan sus propias consecuencias observacionales: la no dinámica y la dinámica. En la primera, el campo escalar surge de una prescripción a priori y su evolución efectiva se traduce en una restricción sobre el valor de la densidad de Pontryagin, que debe ser nula, en el espacio de soluciones permitidas. En la segunda, el campo escalar posee su propia dinámica, que es consistente con las ecuaciones de campo. Esto sucede debido a que el escalar se encuentra dotado de una ecuación diferencial para su evolución y de un tensor de energía-momento propio, lo que hace que esta formulación sea más relevante desde el punto de vista físico. Ambas formulaciones fueron utilizadas para explicar diferentes fenómenos tanto a nivel astrofísico como cosmológico [58–70].

Como fuera mencionado anteriormente, la solución de Schwarzschild satisface las ecuaciones de campo de la teoría, mientras que la solución de Kerr, que a diferencia de la de Schwarzschild no posee densidad de Pontryagin nula, no lo hace. Hasta el momento la única solución conocida de agujero negro rotante en la formulación dinámica es la hallada simultáneamente en las Refs. [68] y [71], y es válida en el régimen de rotación lenta y acoplamiento débil. La métrica del espacio-tiempo de esta solución puede ser escrita como la de Kerr más una corrección en el sector de la métrica que mezcla la coordenada temporal con la axial, de manera que su

³Esta teoría de gravitación recibe el nombre de Chern-Simons ya que la densidad de Pontryagin puede ser reescrita como la derivada exterior de una forma de Chern-Simons en cuatro dimensiones, lo cual remite al estudiado término gravitacional en tres dimensiones.

presencia genera una modificación en el efecto de arrastre de los sistemas inerciales. No obstante, la corrección se encuentra suprimida por un factor $1/r^3$ respecto al término usual de Kerr, de manera que es posible extraer límites relevantes sobre los parámetros de la teoría sólo en el régimen gravitatorio fuerte.

Teoría Einstein–Maxwell–escalar con acoplamiento no mínimo:

Se trata de una de las extensiones más sencillas de la Relatividad General. Como su nombre lo indica, consiste de la gravitación de Einstein enriquecida con la presencia de un campo de Maxwell y un escalar (dilatón) no mínimamente acoplados. Diferentes valores de la constante de acoplamiento dan lugar a diferentes teorías: por ejemplo, si se anula, la acción se reduce a la de una teoría del tipo Einstein–Maxwell–escalar con acoplamiento mínimo, mientras que si es igual a 1, la acción original puede ser interpretada como una contribución a una acción total asociada a un límite de bajas energías de la teoría de cuerdas. Un caso interesante ocurre cuando su valor es $\sqrt{3}$ ya que la acción es equivalente a la de la teoría de Kaluza–Klein, que se obtiene a partir de una reducción dimensional de la acción 5-dimensional de Einstein–Hilbert en vacío.

Existen soluciones exactas de agujeros negros cargados y con simetría esférica para valores arbitrarios de la constante de acoplamiento de la teoría [72–74]. Si ésta es no nula, sólo se conocen soluciones aproximadas de agujeros negros rotantes [74, 75], excepto en el caso en que es igual a $\sqrt{3}$: se trata de la solución de agujero negro asintóticamente plano, cargado y rotante de Kaluza–Klein hallado en [76], cuyas propiedades matemáticas y dinámicas fueron estudiadas en [74].

Modelo de branas de Randall–Sundrum:

La última de las teorías de gravitación alternativas a la Relatividad General abordadas en esta Tesis es la proveniente del modelo de branas de L. Randall y R. Sundrum [77, 78] que surge, entre otras cosas, como una posible explicación al pro-

blema de la jerarquía entre la escala gravitatoria y la electro-débil [77–80]. Según este tipo de modelos, el universo cuadridimensional que habitamos, o brana, se encuentra embebido en un espacio-tiempo de dimensiones superiores, o *bulk*. Los campos de materia se localizan en la 3-brana, mientras que la gravedad puebla todas las dimensiones espacio-temporales. Por lo tanto, entendiendo el comportamiento de la gravedad en este tipo de escenarios es posible encontrar las huellas físicas que las dimensiones adicionales imprimen sobre el espacio-tiempo de cuatro dimensiones efectivas. El modelo de Randall–Sundrum de una sola brana supone a ésta sumergida en un espacio-tiempo asintóticamente anti-de Sitter de cinco dimensiones, con la dimensión adicional extendida [78]. En el régimen de bajas energías, el modelo mantiene las propiedades de la gravitación de Einstein en cuatro dimensiones sobre la brana [81, 82], y por lo tanto es posible la formación de agujeros negros a partir del colapso gravitatorio de materia. Este modelo y sus generalizaciones proveen de escenarios fenomenológicos que reflejan diferentes características de la teoría M y que ponen en juego nuevas ideas sobre la geometría y la física de partículas. Por otra parte, también brindan un marco para la exploración de las ideas holográficas y de la correspondencia ADS/CFT [83]. Otros modelos relevantes con dimensiones espaciales adicionales son el de N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos y G. Dvali [79], y el de branas postulado por G. Dvali, G. Gabadadze y M. Porrati [84]. En el primero, las longitudes características de las dimensiones espaciales adicionales (mucho mayores que la escala de Planck, 10^{-33} cm) permiten llevar la escala de la gravedad cuántica al orden del TeV; en el segundo, la gravitación newtoniana en cuatro dimensiones emerge en una brana sumergida en un espacio-tiempo de Minkowski 5-dimensional, con la dimensión adicional extendida. El interés en este último reside, entre otras cosas, en la posibilidad de explicar la aceleración del universo sin una constante cosmológica.

La descripción completa de los agujeros negros en este tipo de escenarios es un tema abierto y existen diferentes formas de abordar su estudio. La primera se

vincula a las soluciones clásicas de agujeros negros en dimensiones superiores: si el agujero negro sobre la brana es lo suficientemente pequeño en comparación con el tamaño de las dimensiones extra, éste se comporta como un objeto de mayor dimensionalidad, afectado de la misma manera por todas las dimensiones espaciales. A modo de ejemplo, las soluciones de Tangherlini [85] y de Myers-Perry [86] describen apropiadamente estos objetos. Sin embargo, si el tamaño característico del agujero negro es grande en comparación con el de las dimensiones extra, éste se comporta de manera efectiva como un objeto de cuatro dimensiones y es posible que una porción finita de su horizonte se filtre hacia el *bulk*. Otro abordaje posible describe estos agujeros negros a partir de la solución de Schwarzschild sobre la brana extendidos a modo de “cuerda negra” desde el punto de vista 5-dimensional [87]. El principal argumento en contra de este tipo de soluciones de cuerda negra es que contienen singularidades en la curvatura que se propagan a lo largo de la dimensión adicional. Otras soluciones de agujero negro asociados a mundos brana fueron construidas a partir de postular métricas con simetría esférica o estacionarias y del tipo de Kerr-Schild sobre la brana, y luego resolviendo las ecuaciones de campo efectivas sobre ella [88, 89]. Este enfoque lleva a soluciones del tipo de Reissner-Nordström en el caso de agujeros negros estáticos [88], y del tipo de Kerr-Newman [89] en el de agujeros negros rotantes. Ambas soluciones contienen una carga tidal de origen puramente gravitatorio y que no debe ser confundida con la asociada a la teoría de Maxwell, ya que se trata de soluciones de vacío. La diferencia fundamental con las soluciones de electro-vacío de la Relatividad General radica en el hecho de que en éstas últimas el valor de la carga aparece en la métrica elevado al cuadrado, mientras que en las soluciones provenientes de modelos de branas la carga tidal aparece con un exponente igual a uno. Este hecho tiene consecuencias significativas tanto en la dinámica como en la apariencia óptica de los agujeros negros. Las huellas de las dimensiones espaciales adicionales se encuentran codificadas en la carga tidal, cuya presencia afecta de forma no local la dinámica sobre la brana.

1.3. Comentarios preliminares y organización de la Tesis

Todas las soluciones rotantes descritas en este trabajo comparten con la solución de Kerr una característica destacable: su ecuación de Hamilton–Jacobi asociada es separable y existe una constante de movimiento extra a lo largo del movimiento geodésico de una partícula, además de la energía, la componente a lo largo del eje de simetría del momento angular y la masa. Como consecuencia de esta conservación, el sistema de ecuaciones de movimiento se vuelve integrable. Por otra parte, las soluciones estudiadas son asintóticamente planas, lo que permite definir de forma simple los parámetros de impacto de los fotones en el infinito, que finalmente dan lugar a la llamada *sombra del agujero negro*.

Esta Tesis se organiza de la siguiente forma. En el Capítulo 2 se detallan las propiedades de los agujeros negros rotantes en Relatividad General sin y con carga eléctrica, se describen las geodésicas nulas y, luego de definir las coordenadas celestes del observador, se obtienen los bordes de las sombras para diferentes inclinaciones del observador, parámetros de rotación y cargas. Además, se definen los observables a partir de los cuales se caracterizan cuantitativamente las sombras. En el Capítulo 3 se describe la teoría de gravitación modificada de Chern–Simons, se presenta la solución de agujero lentamente rotante y se estudia el comportamiento de la luz en sus inmediaciones. Por otra parte, se grafican las sombras de los agujeros negros vistas por un observador ecuatorial, para valores moderados del parámetro de rotación y de la constante de acoplamiento. Además, se obtienen los observables en función de ésta última y se grafican las curvas de nivel en el espacio de parámetros definido por la rotación y el acoplamiento. En el Capítulo 4 se describe la teoría Einstein–Maxwell–escalar para un acoplamiento no mínimo entre el campo escalar y el campo de gauge, y se estudia la solución exacta de agujero negro cargado y rotante correspondiente a un acoplamiento de valor $\sqrt{3}$. Se obtienen las sombras vistas por un observador

ecuatorial para diferentes valores del parámetro de rotación y de la carga, y se estudia el comportamiento de los observables en función de esta última. Por último, se obtienen las curvas de nivel de los observables en el espacio de parámetros. En el Capítulo 5 se presenta el modelo de mundos brana de Randall–Sundrum y la solución de agujero negro rotante con carga tidal. De forma análoga a los anteriores capítulos, se grafican las sombras, los observables en función de la carga tidal y las curvas de nivel de los observables. Finalmente, en el Capítulo 6 se enumeran los resultados principales de esta Tesis y se discuten las conclusiones finales tomando como referencia el caso del agujero negro supermasivo del centro galáctico. A lo largo del trabajo se utilizan unidades tales que $G = c = 1$ (salvo indicación en contrario) y las métricas presentadas poseen signatura $(- + ++)$. Además, se trabaja en la aproximación de óptica geométrica, es decir que sólo es relevante la dirección de propagación de la luz, ya que se asume que su longitud de onda es pequeña en comparación con el tamaño del agujero negro.

Capítulo 2

Agujeros negros rotantes en Relatividad General

Una de las predicciones más inquietantes de la Relatividad General es la existencia de objetos masivos ultra-compactos sin emisiones (clásicas) asociadas y con una estructura espacio-temporal caracterizada por la presencia de un horizonte de eventos. Estos objetos fueron fuente de especulación teórica y observacional durante más de cincuenta años. Imaginados en un contexto newtoniano por J. Michell (1783) y P.-S. Laplace (1796), predichos como el resultado del colapso gravitacional de una estrella por Oppenheimer y Snyder (1939), y bautizados por J. A. Wheeler (1967), los agujeros negros fueron considerados durante un largo tiempo como objetos extremadamente exóticos. Casi cincuenta años después del hallazgo de la solución de agujero negro estático de Schwarzschild (1916), R. Kerr encontró la solución rotante (1963). Nueve años más tarde se obtuvo la primera evidencia observacional de la presencia de un agujero negro en el sistema binario Cygnus X-1 (1972).

En este Capítulo se detallan las características generales de los agujeros negros rotantes en la Relatividad General. Se estudia la estructura geodésica y se pone especial atención en la propagación de la luz, para así obtener la forma aparente de estos objetos al ser vistos por un observador lejano. Se grafican los contornos de las

sombras correspondientes a la soluciones de Kerr y de Kerr–Newman, y se presentan dos observables que permiten caracterizarlas cuantitativamente.

2.1. La geometría de Kerr

2.1.1. Propiedades generales

La acción de Einstein–Hilbert de la Relatividad General en cuatro dimensiones se escribe

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (2.1)$$

donde g es el determinante de la métrica $g_{\mu\nu}$ y R es el escalar de Ricci construido a partir de ella. Las ecuaciones de Einstein en vacío y sin constante cosmológica se obtienen al variar esta acción respecto de la métrica $g_{\mu\nu}$ y se leen

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0. \quad (2.2)$$

La solución de agujero negro estacionaria, con simetría axial y asintóticamente plana a estas ecuaciones está descripta por la geometría de Kerr [90]. Esta solución es, en realidad, una familia de soluciones cuyos miembros dependen de dos parámetros: el momento angular J y la masa M . Si el momento angular es nulo, la solución se reduce a la de Schwarzschild. Los agujeros negros de Kerr son los más relevantes a nivel astrofísico, ya que los procesos a partir de las cuales se originan poseen, en general, momento angular.

En las coordenadas de Boyer–Lindquist, el elemento de línea de la solución de Kerr se lee

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} d\phi dt + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 \\ & + [(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta] \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma} d\phi^2, \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde $a = J/M$ es el parámetro de rotación,

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (2.4)$$

y

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2. \quad (2.5)$$

La métrica (2.3) no depende de las coordenadas t y ϕ y posee las simetrías discretas

$$(t, \phi) \longrightarrow (-t, -\phi), \quad \theta \longrightarrow \pi - \theta.$$

La primera es evidente a partir del hecho de la falta de términos cruzados de t o ϕ con r o θ , y la segunda garantiza la existencia de órbitas ecuatoriales. Las coordenadas (t, r, θ, ϕ) son análogas a las utilizadas en Schwarzschild para describir un agujero negro no rotante de masa M . Esto puede ser verificado al anular el parámetro de rotación a , en cuyo caso la métrica (2.3) se reduce a la de Schwarzschild. En el límite de masa y momento angular nulos $M = J = 0$, para $J/M = a = \text{constante}$, se obtiene el elemento de línea correspondiente al espacio-tiempo de Minkowski $ds^2 = -dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2$ escrito en coordenadas esféricas oblatas, donde las coordenadas (T, X, Y, Z) se relacionan con (t, r, θ, ϕ) según la transformación

$$\begin{aligned} T &= t, \\ X &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \phi, \\ Y &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \phi, \\ Z &= r \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.6)$$

De esta manera, una superficie de r constante es un elipsoide oblato de revolución

$$\frac{X^2 + Y^2}{r^2 + a^2} + \frac{Z^2}{r^2} = 1. \quad (2.7)$$

Una diferencia esencial con la solución de Schwarzschild es la presencia del término que mezcla la coordenada temporal t con la axial ϕ . Este término es proporcional al momento angular J del objeto y, si bien no se anula para ningún r , su contribución en el límite $r \longrightarrow \infty$ es de orden $1/r^2$, al tiempo que los demás términos relevantes son de orden $1/r$. La presencia de este término da origen al fenómeno de arrastre de los sistemas inerciales: la solución de Kerr es de vacío, y por lo tanto es pertinente la

pregunta sobre qué es lo que efectivamente se encuentra en rotación. Es el espacio-tiempo mismo quien rota y en consecuencia arrastra a los sistemas inerciales. En $r = 0$ y $\theta = \pi/2$ existe una singularidad esencial en forma de anillo y los horizontes se encuentran ubicados en las raíces de la ecuación $\Delta(r) = 0$, cuyas soluciones son

$$r_{\pm} = M^2 \pm \sqrt{M^2 - a^2}, \quad (2.8)$$

donde r_+ es el horizonte externo de eventos y r_- es un horizonte interno de Cauchy. No cualquier combinación de a y M corresponde a un agujero negro: sólo aquellos objetos para los que se cumple que $|a| \leq M$ poseen singularidades cubiertas por horizontes. En el caso de no cumplirse esta desigualdad entre el parámetro de rotación y la masa, el objeto recibe el nombre de singularidad desnuda. Si bien un agujero negro es el estado final que alcanza la materia luego de colapsar por efecto de la gravedad, no hay ninguna demostración rigurosa a partir de las ecuaciones de Einstein de que un colapso gravitacional genérico culmine con su formación (es decir, con una singularidad cubierta por un horizonte). Se trata de una conjetura. Ésta es la conocida “conjetura del censor cósmico”, formulada por primera vez por R. Penrose en 1969, que se asume como cierta en el caso del colapso gravitacional de materia (bariónica o, eventualmente, oscura) en situaciones físicas reales. De ser correcta, el estado final de, por ejemplo, un sistema binario, sería eventualmente un agujero negro con sólo dos parámetros físicos: la masa M y el momento angular J . Mientras que la situación inicial depende de muchos parámetros y requiere para su comprensión tanto de la física clásica como de la cuántica, el estado final es notablemente más sencillo ya que está caracterizado por los parámetros de masa y momento angular, y sus propiedades externas pueden ser explicadas valiéndose sólo de la gravitación clásica.

Otra de las propiedades de los agujeros negros de Kerr es la existencia de un límite estático por fuera del horizonte externo: la componente $t-t$ del tensor métrico se anula en la superficie $r_e(\theta) = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}$, y es positiva dentro de la misma, de manera que no pueden existir observadores estacionarios a partir de allí.

La región localizada entre el horizonte externo y esta superficie recibe el nombre de ergoesfera. Una propiedad interesante inherente a la geometría de Kerr es la existencia de órbitas dentro del límite estático (y externas al horizonte) de energías negativas. R. Penrose mostró en 1969 que la existencia de las mismas, en principio, permite la extracción de energía rotacional del agujero negro [91, 92].

2.1.2. Simetrías y separabilidad

El espacio-tiempo de Kerr es estacionario y axisimétrico. Estas simetrías tienen vectores de Killing $\kappa_{(t)}^\mu$ y $\kappa_{(\phi)}^\mu$ asociados. Las cantidades conservadas a lo largo del movimiento geodésico de una partícula de prueba en el espacio-tiempo de Kerr, además de su masa m , se relacionan con estos vectores y se escriben

$$\kappa_{(t)}^\mu p_\mu = p_t = -E, \quad (2.9)$$

$$\kappa_{(\phi)}^\mu p_\mu = p_\phi = L_z. \quad (2.10)$$

Estas cantidades se interpretan en términos de los valores de energía y proyección del momento angular a lo largo del eje de simetría, respectivamente, medidos por un observador ubicado en la región asintóticamente plana del espacio. Estas relaciones permiten deducir las ecuaciones de movimiento para las coordenadas t y ϕ , que toman la forma

$$p_t = g_{\mu t} p^\mu = g_{00} p^0 + g_{0\phi} p^\phi, \quad (2.11)$$

y

$$p_\phi = g_{\mu\phi} p^\mu = g_{0\phi} p^0 + g_{\phi\phi} p^\phi. \quad (2.12)$$

Despejando $p^t = dt/d\lambda$ y $p^\phi = d\phi/d\lambda$ en función de E y L_z , queda que

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{g_{0\phi}^2 - g_{00}g_{\phi\phi}} (g_{\phi\phi}E + g_{0\phi}L_z), \quad (2.13)$$

y

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = -\frac{1}{g_{0\phi}^2 - g_{00}g_{\phi\phi}} (g_{0\phi}E + g_{00}L_z), \quad (2.14)$$

donde λ es un parámetro que coincide con el tiempo propio en el caso de partículas masivas.

Las simetrías evidentes del espacio-tiempo de Kerr no son suficientes para garantizar la integrabilidad completa de las ecuaciones de movimiento. Para poder garantizarla en el caso relativista, es suficiente con contar con cuatro vectores de Killing y/o tensores de Killing. Uno de estos tensores, que existe siempre, es la métrica y la cantidad conservada asociada es la masa de la partícula:

$$g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = -m^2. \quad (2.15)$$

La métrica de Kerr (2.3) se encuentra escrita en coordenadas adaptadas a las simetrías de traslación temporal y axial. Esto quiere decir que, en esas coordenadas, las variables t y ϕ son cíclicas y por lo tanto se conservan las cantidades antes mencionadas, $p_t = -E$ y $p_\phi = L_z$, en el movimiento geodésico de una partícula. Según se puede ver en la Ec. (2.9), estas cantidades son lineales en el momento p^μ . El espacio-tiempo de Kerr posee una simetría adicional oculta que se asocia a una cuarta cantidad conservada, cuya existencia fue descubierta por B. Carter en 1968 [93]. Esta nueva constante de movimiento, llamada constante de Carter, a diferencia de las anteriores es cuadrática en el momento y se escribe [94]

$$\mathcal{Q} = K^{\mu\nu} p_\mu p_\nu, \quad (2.16)$$

donde

$$K^{\mu\nu} = a^2 \sin^2 \theta \kappa_{(t)}^\mu \kappa_{(\phi)}^\nu + 2a \kappa_{(t)}^{(\mu} \kappa_{(\phi)}^{\nu)} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \kappa_{(\phi)}^\mu \kappa_{(\phi)}^\nu + \delta_\theta^\mu \delta_\theta^\nu - a^2 \cos^2 \theta g^{\mu\nu}, \quad (2.17)$$

es el tensor de Killing de segundo rango, que satisface que

$$\nabla_{(\rho} K_{\mu\nu)} = 0. \quad (2.18)$$

La constante de Carter se puede escribir de la forma [94]

$$\mathcal{Q} = L^2 - 2aEL_z + a^2(E^2 - p_z^2), \quad (2.19)$$

donde L_z y p_z son componentes cartesianas del momento angular y lineal, respectivamente. De manera que la constante de Carter puede interpretarse como una generalización del (cuadrado del) momento angular. Gracias a la presencia de esta cuarta constante, la ecuación de Hamilton–Jacobi es separable y el sistema de ecuaciones de movimiento se torna integrable [93].

En el caso de geometrías 4-dimensionales de vacío, sin aceleración y pertenecientes a la clasificación Petrov–D, la ecuación de Hamilton–Jacobi es separable y el sistema de ecuaciones de movimiento es integrable [94–96]. La presencia de una simetría oculta posibilita que el movimiento geodésico de partículas en esas geometrías tenga asociado una cuarta cantidad conservada (la constante de Carter). No obstante, la separabilidad de la ecuación de Hamilton–Jacobi, la presencia de una nueva cantidad conservada y la integrabilidad de las ecuaciones de movimiento también ocurren en geometrías no pertenecientes a la clasificación mencionada (ver por ejemplo las Refs. [35, 97] en las que la métrica estudiada es la de Kerr–Sen, que es Petrov–I y no es de vacío).

2.1.3. Geodésicas

La ecuación de Hamilton–Jacobi que gobierna el movimiento geodésico en un espacio-tiempo caracterizado por la métrica $g^{\mu\nu}$ es

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu}, \quad (2.20)$$

donde S es la función principal de Hamilton, que en la geometría de Kerr toma la forma

$$S = \frac{1}{2} m^2 \lambda - Et + L_z \phi + S_r(r) + S_\theta(\theta), \quad (2.21)$$

con m la masa de la partícula y λ el parámetro afín. Esta forma de escribir la función S incluye la información de que las coordenadas t y ϕ son cíclicas: el segundo término en el lado derecho de la ecuación está relacionado con la conservación de la energía, mientras que el tercer término se relaciona con la conservación del momento angular

en la dirección del eje de simetría. Luego, considerando el *ansatz* (2.21) para la función S , se tiene que

$$2\frac{\partial S}{\partial \lambda} = g^{00}E^2 - 2g^{0\phi}EL_z + g^{\phi\phi}L_z^2 + g^{rr}\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 + g^{\theta\theta}\left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2. \quad (2.22)$$

Las componentes de la métrica son¹

$$\begin{aligned} g^{00} &= -\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Delta \Sigma}, \\ g^{rr} &= \frac{\Delta}{\Sigma}, \\ g^{\theta\theta} &= \frac{1}{\Sigma}, \\ g^{\phi\phi} &= \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Delta \Sigma \sin^2 \theta}, \\ g^{t\phi} &= -\frac{2Mra}{\Delta \Sigma}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Entonces, reemplazando las Ecs. (2.23) en la Ec. (2.22) se tiene que

$$\begin{aligned} m^2(r^2 + a^2 \cos^2 \theta) &= \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)E - aL_z]^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} (aE \sin^2 \theta - L_z)^2 \\ &\quad - \Delta \left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 - \left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2. \end{aligned} \quad (2.24)$$

La separabilidad de esta ecuación se torna evidente, de manera que se tienen dos ecuaciones: una que involucra a la coordenada r y la otra a θ ,

$$\Delta \left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 = \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)E - aL_z]^2 - m^2 r^2 - [\mathcal{K} + (L_z - aE)^2], \quad (2.25)$$

$$\left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 = \mathcal{K} - (L_z^2 \operatorname{cosec}^2 \theta - a^2 E^2) \cos^2 \theta - m^2 a^2 \cos^2 \theta, \quad (2.26)$$

donde se usó la identidad

$$(aE \sin^2 \theta - L_z)^2 \operatorname{cosec}^2 \theta = (L_z^2 \operatorname{cosec}^2 \theta - a^2 E^2) \cos^2 \theta + (L_z - aE)^2, \quad (2.27)$$

y $\mathcal{K} = \mathcal{Q} - (L_z - aE)^2$ con \mathcal{Q} la constante (de separación) de Carter. Finalmente, la acción de Jacobi S se escribe

$$S = \frac{1}{2}m^2\lambda - Et + L_z\phi + \int_{r_0}^r \frac{\sqrt{\mathcal{R}(r)}}{\Delta} dr + \int_{\theta_0}^\theta \sqrt{\Theta(\theta)} d\theta, \quad (2.28)$$

¹Por completitud, el valor del determinante es $\sqrt{-g} = \Sigma \sin \theta$.

con las funciones $\mathcal{R}(r)$ y $\Theta(\theta)$ definidas por

$$\mathcal{R} = [(r^2 + a^2)E - aL_z]^2 - \Delta [m^2 r^2 + \mathcal{K} + (L_z - aE)^2], \quad (2.29)$$

y

$$\Theta = \mathcal{K} + \cos^2 \theta [a^2(E^2 - m^2) - L_z^2 \operatorname{cosec}^2 \theta]. \quad (2.30)$$

La función S se escribe entonces en función de las cuatro integrales de movimiento E, L_z, \mathcal{K} y m , y por lo tanto es una integral completa de las ecuaciones de Hamilton–Jacobi. Los signos de $\sqrt{\mathcal{R}}$ y $\sqrt{\Theta}$ pueden ser elegidos de forma independiente y, una vez realizada la elección, ésta se debe reflejar consistentemente en todas las ecuaciones. Los cambios de signo ocurren en los puntos de retorno de las ecuaciones correspondientes, es decir en $\mathcal{R} = 0$ o $\Theta = 0$. Los límites de integración iniciales en la Ec. (2.28) pueden elegirse de manera independiente en cada integral ya que sólo las variaciones de la acción tienen significado físico.

La forma integral de las ecuaciones geodésicas puede obtenerse a partir del hecho de que las derivadas parciales de la acción de Jacobi S respecto de las cantidades conservadas E, L_z, \mathcal{K} y m son constantes que representan el valor inicial de las coordenadas (que en este caso se absorben como constantes de integración):

$$\begin{aligned} \int^r \frac{dr}{\sqrt{\mathcal{R}}} &= \int^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}}, \\ t &= \lambda E + 2M \int^r \frac{r [r^2 E - a(L_z - aE)]}{\Delta \sqrt{\mathcal{R}}} dr, \\ \phi &= \int^r \frac{a [E(r^2 + a^2) - aL_z]}{\Delta \sqrt{\mathcal{R}}} dr - \int^\theta \frac{aE - L_z \operatorname{cosec}^2 \theta}{\sqrt{\Theta}} d\theta, \\ \lambda &= \int^r \frac{r^2}{\sqrt{\mathcal{R}}} dr + \int^\theta \frac{a^2 \cos^2 \theta}{\sqrt{\Theta}} d\theta. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Las ecuaciones diferenciales de movimiento provienen de la relación entre el momento

y la acción de Jacobi, dada por $p_\mu = \partial S / \partial x^\mu$, y se leen

$$\begin{aligned}\Sigma \frac{dt}{d\lambda} &= \frac{1}{\Delta} \{ [(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta] E - 2MarL_z \}, \\ \Sigma \frac{dr}{d\lambda} &= \sqrt{\mathcal{R}}, \\ \Sigma \frac{d\theta}{d\lambda} &= \sqrt{\Theta}, \\ \Sigma \frac{d\phi}{d\lambda} &= \frac{1}{\Delta} [2MarE + (\Sigma - 2Mr)L_z \operatorname{cosec}^2 \theta].\end{aligned}\tag{2.32}$$

En el caso de la luz, se debe tomar $m = 0$ en las definiciones de \mathcal{R} y Θ .

El vector tangente $dx^\mu/d\lambda$ queda entonces determinado a lo largo de la trayectoria, que puede obtenerse mediante integración directa. Sin embargo, para evitar integrales que mezclen θ y r es mejor sacar ventaja de lo mencionado anteriormente en cuanto a las derivadas de la función S respecto de las cantidades conservadas y escribir las coordenadas en términos de las integrales, como se muestra en las Ecs. (2.31). Esas expresiones pueden ser reducidas a integrales elípticas y evaluadas en forma numérica [98]. Existen numerosos códigos computacionales capaces de calcular estas trayectorias en la geometría de Kerr que, a diferencia de lo que sucede en el caso de Schwarzschild, son en general tridimensionales [50–52].

La tercera ecuación de (2.32) describe el movimiento en la variable θ e implica que ese ángulo sólo puede variar en la región donde $\Theta(\theta) \geq 0$. La función $\Theta(\theta)$ es simétrica respecto de una reflexión en el plano ecuatorial, $\theta \rightarrow \pi - \theta$, y no depende de la masa del agujero negro M . Esto significa que la función adquiere la misma forma en el caso $M = 0$, es decir en el espacio-tiempo plano.

Los posibles tipos de movimiento en la coordenada θ pueden clasificarse según el signo de \mathcal{K} . Si $\mathcal{K} > 0$ la función Θ es positiva en el plano ecuatorial. Si además es $L_z \neq 0$, ésta tiende a $-\infty$ en el eje de simetría $\theta = 0, \pi$, lo que significa que existe θ_0 tal que $\Theta(\theta_0) = \Theta(\pi - \theta_0) = 0$ y $\Theta > 0$ en el intervalo $[\theta_0, \pi - \theta_0]$. De manera que, en su movimiento entre θ_0 y $\pi - \theta_0$, la partícula cruza el ecuador $\theta = \pi/2$ y cuando eso ocurre es $\Theta = \mathcal{K}$. En el caso de que $L_z = 0$ el intervalo mencionado se extiende hasta los polos y es $\mathcal{K} + a^2(E^2 - m^2) \geq 0$. Si $\mathcal{K} = 0$ una de las soluciones

posibles es un movimiento restringido al plano ecuatorial. La otra solución no trivial, que admite la variación temporal del ángulo, existe sólo si $a^2(E^2 - m^2) > L_z^2$ y se asocia a un movimiento en el cual la partícula llega al plano ecuatorial, arribando desde el “sur” o desde el “norte”. El rango de θ se extiende al eje de simetría sólo en el caso de que $L_z = 0$. Por último, si $\mathcal{K} < 0$, existe una solución real sólo si $\mathcal{K} \geq -(a\sqrt{E^2 - m^2} - |L_z|)$. En el caso de que valga la igualdad, la solución es $\theta = \text{constante}$. Para $L_z = 0$ la solución yace en el eje de simetría, mientras que para $L_z \neq 0$ el valor fijo de θ se encuentra entre el eje de simetría y el plano ecuatorial. En el caso de que se trate de una desigualdad estricta, θ varía entre dos valores y la partícula no cruza nunca el plano ecuatorial.

2.2. Propagación de la luz

Gran parte de la información acerca del agujero negro y de la materia que lo rodea se obtiene al estudiar la radiación electromagnética. Cuando la longitud de onda asociada es pequeña en comparación con el tamaño del agujero negro, es posible utilizar la aproximación de óptica geométrica en la que los fotones se propagan a lo largo de geodésicas nulas.

Las ecuaciones de movimiento para la luz se escriben

$$\begin{aligned}
 \Sigma \frac{dt}{d\lambda_*} &= \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta - 2Mar\xi], \\
 \Sigma \frac{dr}{d\lambda_*} &= \sqrt{\mathcal{R}}, \\
 \Sigma \frac{d\theta}{d\lambda_*} &= \sqrt{\Theta}, \\
 \Sigma \frac{d\phi}{d\lambda_*} &= \frac{1}{\Delta} [2Mar + (\Sigma - 2Mr)\xi \operatorname{cosec}^2 \theta].
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

donde se tuvo en cuenta el sistema de ecuaciones (2.32) especializando en $m = 0$, se redefinió el parámetro afín $\lambda_* = E\lambda$ y se usó que $\xi = L_z/E$ y $\eta = \mathcal{K}/E^2$. En este

contexto, las definiciones (2.29) y (2.30) se leen

$$\mathcal{R} = [r^2 + a^2 - a\xi]^2 - \Delta [\eta + (\xi - a)^2], \quad (2.34)$$

y

$$\Theta = \eta + \cos^2 \theta (a^2 - \xi^2 \operatorname{cosec}^2 \theta) = \eta + (a - \xi)^2 - (a \sin \theta - \xi \operatorname{cosec} \theta)^2. \quad (2.35)$$

Como se mencionó con anterioridad, las trayectorias, en este caso de los fotones, pueden obtenerse a partir de la integración de las ecuaciones de movimiento. No obstante, es posible describirlas a grandes rasgos distinguiendo dos grandes grupos, en el caso de fotones que llegan al agujero negro desde el infinito: trayectorias de captura y de *scattering*. La ocurrencia de unas u otras depende del valor que tomen los parámetros ξ y η , definidos a partir de las cantidades L_z , \mathcal{K} y E , conservadas a lo largo de las mismas. El caso de interés en este trabajo es aquel en el que los parámetros poseen valores tales que la luz que llega del infinito permanece marginalmente atrapada por el agujero negro y lo rodea una o más veces antes de llegar al observador. Se trata del caso separatriz entre los grupos de trayectorias antes descritos. Es decir, en esta Tesis son de interés solamente las órbitas marginales no planares arriba mencionadas, quedando el cálculo de las trayectorias fuera del alcance de este trabajo.

La tercera ecuación del sistema (2.33) tiene la misma forma que la tercera ecuación de (2.32) (para $m = 0$), y por lo tanto el movimiento en θ está sujeto a las mismas condiciones discutidas en la sección anterior. Por otro lado, la función \mathcal{R} es un polinomio de grado cuatro en la variable r cuyo valor en el horizonte externo es

$$\mathcal{R}(r = r_+) = (r_+^2 + a^2 - a\xi)^2, \quad (2.36)$$

ya que $\Delta(r_+) = 0$, y por lo tanto $\mathcal{R} > 0$ en r_+ . Además, $\mathcal{R} > 0$ en el límite $r \rightarrow \infty$. La condición $\mathcal{R} = 0$ determina los puntos de retorno en las trayectorias de los fotones. El polinomio $\mathcal{R}(r)$ tiene a lo sumo cuatro raíces reales r_i , con $i = 1, \dots, 4$

tales que $r_1 \geq r_2 \geq r_3 \geq r_4$. Al carecer de término cúbico en r , la suma de las raíces se debe anular, lo cual implica que al menos una de ellas, r_4 , es negativa. Como \mathcal{R} es positiva tanto en el horizonte como en el infinito, posee no más de dos raíces reales por fuera del horizonte: $r_+ \leq r_2 < r_1$. De no existir raíces reales de la ecuación $\mathcal{R} = 0$, la trayectoria de un fotón se extiende desde el horizonte hasta el infinito, lo cual describe su captura por parte del agujero negro. Si las raíces reales existen y son distintas, la función \mathcal{R} es negativa en el intervalo (r_2, r_1) y la interpretación física de esta situación es la propagación del fotón desde el horizonte hasta un punto de retorno y luego de regreso al horizonte, o bien el arribo del fotón desde el infinito hasta un punto de retorno, y su regreso al infinito (órbita de *scattering*). En cualquier caso, el fotón posee no más de un punto de retorno radial. El caso crítico sucede cuando las dos raíces reales y externas al horizonte coinciden. En ese caso se tiene

$$\mathcal{R} = \frac{d\mathcal{R}}{dr} = 0. \quad (2.37)$$

El radio solución de este sistema, r_{fot} , corresponde a órbitas “esféricas” inestables: se trata de curvas tridimensionales localizadas en un radio fijo. En las cercanías de ese radio es $r = r_{\text{fot}} + \delta r$ y se tiene que $\mathcal{R} \sim \delta r^2$ y $d\phi/dr \sim \delta r^{-1}$, es decir que un fotón cuyo punto de retorno es cercano a r_{fot} realiza numerosas vueltas alrededor del agujero negro antes de ser capturado o de escapar al infinito.

En el caso de un agujero negro de Kerr, a diferencia del caso no rotante, r_{fot} depende de la trayectoria del fotón. Por lo tanto, se puede establecer una relación entre r_{fot} y los valores correspondientes a las cantidades conservadas ya que el sistema de ecuaciones (2.37) puede ser resuelto para $\xi(r_{\text{fot}})$ y $\eta(r_{\text{fot}})$. Despejando $\xi(r_{\text{fot}})$ queda que (en lo que sigue se omite el subíndice *fot*)

$$\xi(r) = \frac{1}{a(r - M)} [(r^2 - a^2)M \pm \Delta r]. \quad (2.38)$$

Si se elige el signo positivo, se tiene que

$$\xi(r) = \frac{r^2 + a^2}{a}, \quad (2.39)$$

y

$$\eta(r) = -\frac{r^4}{a^2}. \quad (2.40)$$

En este caso, la Ec. (2.35) queda

$$\Theta = -(a \sin \theta - \xi \operatorname{cosec} \theta)^2, \quad (2.41)$$

ya que

$$\eta + (a - \xi)^2 = 0 \quad (2.42)$$

para $\xi(r)$ y $\eta(r)$ dados por las Ecs. (2.39) y (2.40). En estas circunstancias, la condición $\Theta \geq 0$ discutida con anterioridad se satisface sólo si $\theta = \theta_0 = \text{constante}$ tal que $\sin^2 \theta_0 = \xi/a$. Entonces, los rayos de luz en este caso están caracterizados por

$$\xi = a \sin^2 \theta_0 \quad (2.43)$$

y

$$\eta = -a^2 \cos^4 \theta_0, \quad (2.44)$$

y se propagan a lo largo de $\theta = \theta_0$ y $r = a \cos \theta_0$. Las direcciones de arriba aparentes de estas órbitas se encuentran dentro del horizonte, a excepción de la que yace en el plano ecuatorial $\theta_0 = \pi/2$ de un agujero negro extremal. Ningún fotón con estos valores de ξ y η es capaz de llegar al observador en el infinito².

La solución físicamente relevante del sistema (2.37) es

$$\xi(r) = \frac{1}{a(r-M)} [(r^2 - a^2)M - \Delta r], \quad (2.45)$$

y

$$\eta(r) = \frac{r^3}{a^2(r-M)^2} [4M\Delta - r(r-M)^2]. \quad (2.46)$$

Al variar r , $\xi(r)$ y $\eta(r)$ describen una region en el espacio (ξ, η) que corresponde a todas las posibles órbitas inestables de fotones. Un fotón orbitando en un radio

²En el caso extremal $a = M$ el observador en el plano ecuatorial podría, en principio, ver un punto negro asociado a estas trayectorias [37]. Sin embargo, el punto negro se encuentra dentro de la sombra y no es posible distinguirlo.

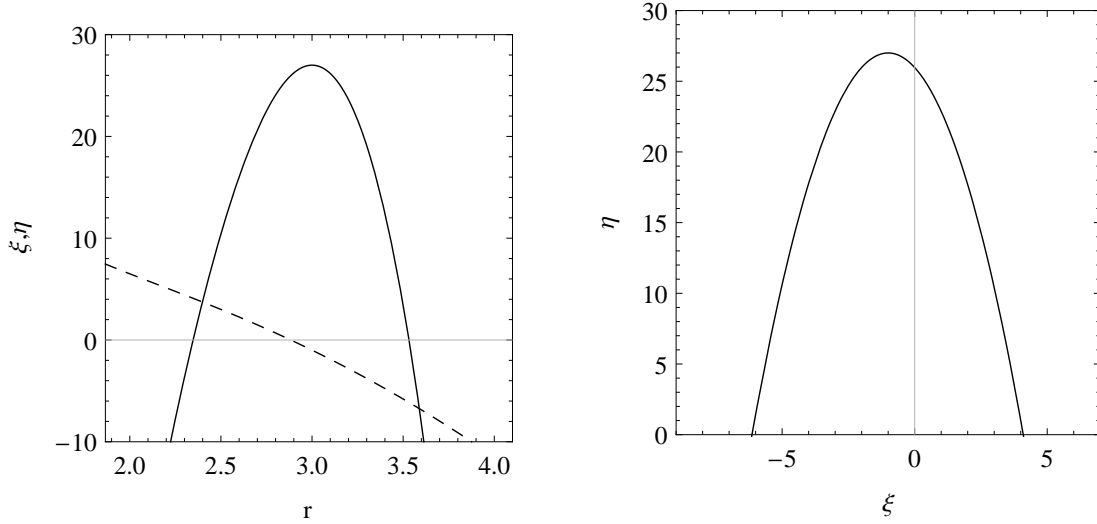


Figura 2.1: Izquierda: parámetros ξ (línea de trazos) y η (línea continua) en función de la coordenada r . Derecha: gráfico implícito de $\eta(r)$ vs $\xi(r)$. En ambos casos la coordenada r se encuentra adimensionalizada con la masa del agujero negro M .

r se encuentra entonces caracterizado por los parámetros $\xi(r)$ y $\eta(r)$. Los valores posibles de r son aquellos para los que se cumple que $\Theta \geq 0$.

En la Figura 2.1 se observan los gráficos de $\xi(r)$ (izquierda, línea de trazos) y de $\eta(r)$ (izquierda, línea continua) y el gráfico implícito $\eta(r)$ vs. $\xi(r)$ (derecha). Todas aquellas partículas no masivas cuyos parámetros se encuentran fuera del contorno demarcado por la curva $\eta(\xi)$ pueden llegar al observador lejano, mientras que aquellas cuyos parámetros toman valores dentro del perímetro delimitado por la curva, caen al horizonte. Aquellos pares (ξ, η) ubicados sobre la curva están asociados a la presencia de las orbitas marginales no planares de radio constante r , mencionadas anteriormente. Su caracter inestable se debe a que

$$\frac{d^2\mathcal{R}(r)}{dr^2} > 0 \quad (2.47)$$

para cualquier $r > 0$ tal que $r > r_+$. Existen también órbitas que satisfacen la condición (2.47) en $r < 0$, pero no son relevantes desde el punto de vista físico, ya

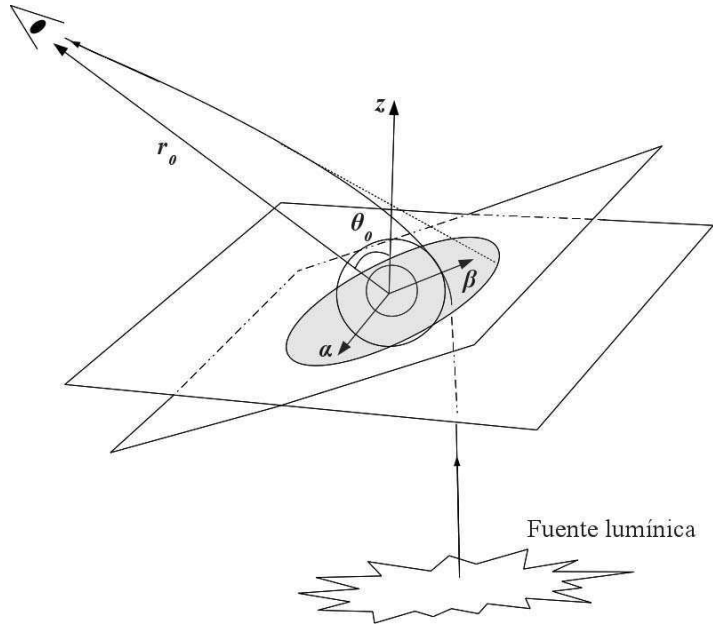


Figura 2.2: Coordenadas α y β del plano del observador. El agujero negro se sitúa en el origen de coordenadas (ver texto).

que suceden dentro del horizonte y por lo tanto los fotones que se encuentren en ellas nunca podrán llegar al observador. Estas órbitas sí tendrán relevancia al estudiar singularidades desnudas en el Capítulo 5.

La posición aparente de la esfera de fotones en el cielo del observador lejano genera el contorno de la llamada sombra del agujero negro. Para poder hallarlo es necesario relacionar ξ y η con las coordenadas “celestes” del observador, o parámetros de impacto en el infinito.

2.3. Sombra del agujero negro

La posición del borde de la sombra del agujero negro en el cielo del observador puede ser descrita mediante el uso de “coordenadas celestes”, o parámetros de impacto en el infinito, α y β [1, 16, 30]. La primera, mide la distancia perpendicular

aparente de la imagen al eje de simetría, mientras que la segunda mide la distancia perpendicular aparente de la imagen a su proyección en el plano ecuatorial del objeto. Estas coordenadas permiten conocer la posición aparente de la imagen sobre un plano que pasa por el centro del objeto, y que es ortogonal a la línea de visión que une el agujero negro con el observador (ver Figura 2.2). Dado que la geometría de Kerr es asintóticamente plana, las coordenadas de un referencial euclídeo (con el agujero negro en su origen y rotando con $a > 0$ en sentido antihorario alrededor del eje z positivo) coinciden con las de Boyer–Lindquist en el infinito. La trayectoria de una geodésica nula en el sistema de referencia de un observador en $(r_0, \theta_0, 0)$ está dada por la curva paramétrica $(x(r), y(r), z(r))$, con $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, tal que si r es lo suficientemente grande, coincide con la coordenada radial de Boyer–Lindquist. El vector asociado a la recta que intersecta el plano del observador en el punto (α, β) , es tangente a la curva paramétrica mencionada y está dado por $(dx/dr)|_{r_0} \hat{\mathbf{x}} + (dy/dr)|_{r_0} \hat{\mathbf{y}} + (dz/dr)|_{r_0} \hat{\mathbf{z}}$. Teniendo en cuenta que en coordenadas (x, y, z) el punto (α, β) se escribe $(-\beta \cos \theta_0, \alpha, \beta \sin \theta_0)$, y luego cambiando a coordenadas esféricas, usando la ecuación de la recta y tomando el límite de un observador lejano, queda que

$$\alpha = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \left(-r_0^2 \sin \theta_0 \frac{d\phi}{dr} \right) \quad (2.48)$$

y

$$\beta = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} r_0^2 \frac{d\theta}{dr}. \quad (2.49)$$

Utilizando las últimas tres ecuaciones de (2.33) para calcular $d\theta/dr$ y $d\phi/dr$, se obtiene que

$$\alpha = -\frac{\xi}{\sin \theta_0} \quad (2.50)$$

y

$$\beta = \pm \sqrt{\eta + a^2 \cos^2 \theta_0 - \xi^2 \cot^2 \theta_0}. \quad (2.51)$$

Es claro que no todos los fotones llegan al observador: sólo aquellos para los cuales el radicando de la Ec. (2.51) es mayor o igual a cero lo hacen. Resolviendo

la ecuación $\beta^2 = 0$ numéricamente se encuentran los dos extremos del intervalo de valores permitidos para r , para cualquier valor de los parámetros y de la inclinación θ_0 . Dejando variar r entre esos dos valores en las Ecs. (2.50) y (2.51), y permitiendo ambos signos para β , se obtiene una curva cerrada en el cielo del observador al graficar β vs. α , que es el borde de la sombra del agujero negro.

Otra forma equivalente de relacionar ξ y η con los parámetros de impacto en el infinito medidos por un observador lejano es la siguiente: para el observador cuya posición es la descrita anteriormente, la tercera y la cuarta ecuación de (2.33) se leen

$$\frac{d\theta}{dt} \sim \pm \frac{1}{r_0^2} \sqrt{\eta + a^2 \cos^2 \theta_0 - \xi^2 \cot^2 \theta_0}, \quad (2.52)$$

y

$$\frac{d\phi}{dt} \sim \frac{\xi}{r_0^2 \sin^2 \theta_0}, \quad (2.53)$$

donde se usó la primera ecuación de (2.33) que relaciona el tiempo t medido por el observador en el infinito con el parámetro afín λ_* . Los ángulos de desplazamiento del fotón en las direcciones ϕ y θ son $r_0 \sin \theta_0 d\phi/dt$ y $r_0 d\theta/dt$, y decrecen como r_0^{-1} . Es así que, luego de multiplicar estas cantidades por r_0 , se reobtienen los parámetros de impacto en el infinito, o coordenadas celestes del observador, definidos en las Ecs. (2.50) y (2.51).

En la Figura 2.3 se pueden observar los contornos de las sombras de un agujero negro de Kerr con parámetro de rotación adimensionalizado con la masa $a = 0,99$, para diferentes ángulos de inclinación θ_0 –entre $\pi/6$ (línea de puntos) y $\pi/2$ (línea continua)– respecto del observador. Se puede observar que el efecto de la rotación se acentúa al acercarse al plano ecuatorial y la deformación aumenta, mientras que al ser observada desde el polo la forma de la sombra no presenta diferencias respecto de la que se obtendría para un agujero negro de Schwarzschild, visto desde una dirección arbitraria. No obstante, en todos los casos, inclusive en el polar, se registra un desplazamiento del centroide de la sombra hacia la derecha.

Al encender la rotación, la sombra adquiere una forma particular que refleja la

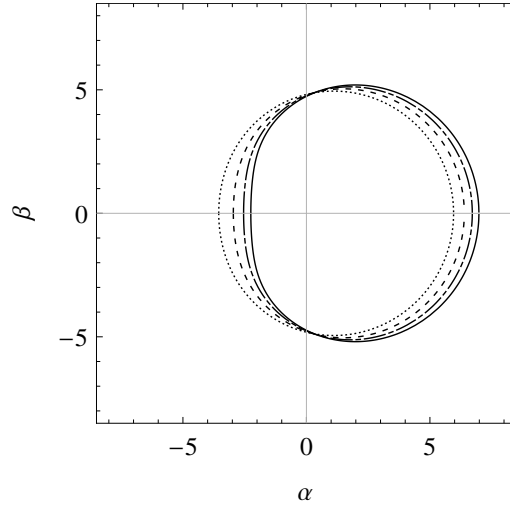


Figura 2.3: Sombras de agujeros negros de Kerr con parámetro de rotación $a = 0,99$, correspondientes a diferentes inclinaciones θ_0 del observador: $\theta_0 = \pi/6$ (línea de puntos), $\pi/4$ (línea de trazos), $\pi/3$ (línea de trazos y puntos) y $\pi/2$ (línea continua; observador en el plano ecuatorial). Las cantidades se encuentran adimensionalizadas con la masa del agujero negro M .

ausencia de simetría esférica y la presencia de la axial: en el caso de Schwarzschild ($a = 0$) la forma aparente de la esfera de fotones es un círculo de radio $3\sqrt{3}M$, mientras que para $a \neq 0$ el contorno adquiere una forma asimétrica. Esta característica distintiva de las sombras de los agujeros negros rotantes tiene su origen en el hecho de que las partículas no masivas corrotantes interactúan con un potencial más intenso que aquellas que se mueven en sentido contrario al del agujero negro, lo cual genera un mayor acercamiento de las primeras al agujero negro en comparación con lo que les ocurre a las segundas.

El caso de un observador ubicado en el plano ecuatorial del objeto es natural desde el punto de vista astrofísico, si lo que se quiere es realizar los cálculos para el agujero negro del centro galáctico. Además, los efectos de la rotación se acentúan al

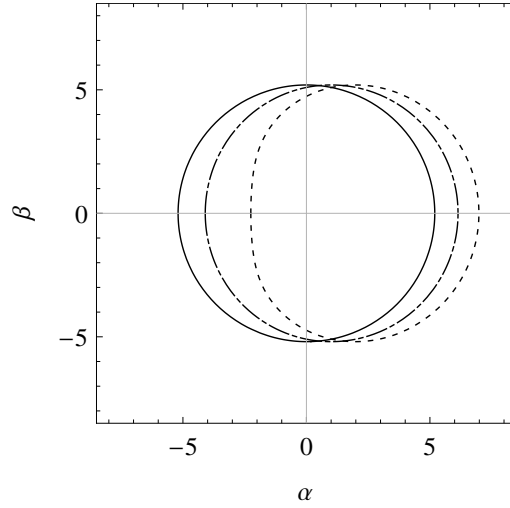


Figura 2.4: Sombras de agujeros negros rotantes en Relatividad General con parámetros de rotación $a = 0$ (línea continua), $0,5$ (línea de trazos y puntos) y $0,99$ (línea de trazos). Las cantidades se encuentran adimensionalizadas con la masa del agujero negro M .

ser vistos desde ese plano. Si $\theta_0 = \pi/2$ las Ecs. (2.50) y (2.51) toman la forma

$$\alpha = -\xi \quad (2.54)$$

y

$$\beta = \pm\sqrt{\eta}. \quad (2.55)$$

En la Figura 2.4 se muestran los contornos de las sombras correspondientes a agujeros negros con parámetros de rotación (adimensionalizados con la masa) $a = 0$ (línea continua), $0,5$ (línea de trazos y puntos) y $0,99$ (línea de trazos), vistos desde el plano ecuatorial $\theta_0 = \pi/2$. En esta situación, la diferencia en la curvatura del contorno a ambos lados de la figura se vuelve significativa. Al igual que antes, las sombras sufren un corrimiento hacia la derecha.

2.4. Solución de Kerr–Newman

La generalización de la solución de Kerr, en el caso en el que el agujero se encuentra eléctricamente cargado, es la geometría de Kerr–Newman. El lado derecho de la Ec. (2.2) se modifica debido a la presencia del tensor de energía–momento asociado al campo eléctrico, $T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{\text{Maxwell}}$. El valor de la carga eléctrica puede determinarse a través de la medición del campo electrostático del agujero negro en el infinito, de manera similar a la forma en la que se definen la masa y el momento angular en términos de las integrales de Komar. Las ecuaciones de movimiento que surgen de variar la acción

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \quad (2.56)$$

respecto de la métrica $g_{\mu\nu}$ –de determinante g – y del campo de gauge A_μ –con $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ – se leen, en ausencia de corrientes,

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R &= 8\pi T_{\mu\nu}, \\ \nabla_\nu F^{\mu\nu} &= 0, \end{aligned} \quad (2.57)$$

donde

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu\zeta} F_\nu^\zeta - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^2 \right) \quad (2.58)$$

es el tensor de energía–momento del campo electromagnético y ∇ es la derivada covariante. La métrica de Kerr–Newman en coordenadas de Boyer–Lindquist es

$$\begin{aligned} ds^2 &= - \left(1 - \frac{2Mr - q^2}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{(2Mr - q^2)2a \sin^2 \theta}{\Sigma} d\phi dt + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 \\ &\quad + [(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta] \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma} d\phi^2, \end{aligned} \quad (2.59)$$

con Σ definido en la Ec. (2.4) y

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + q^2. \quad (2.60)$$

El potencial vector del campo electromagnético adquiere la forma

$$A_\mu dx^\mu = -\frac{qr}{\Sigma} (dt - a \sin^2 \theta d\phi). \quad (2.61)$$

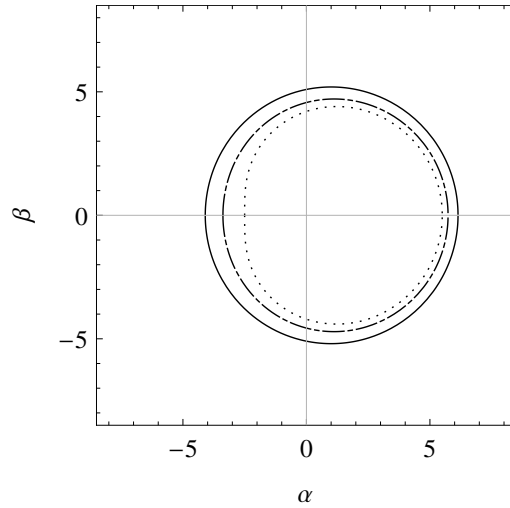


Figura 2.5: Borde de la sombra de un agujero negro de Kerr–Newman visto desde el plano ecuatorial, con parámetro de rotación $a = 0,5$ y carga eléctrica $q = 0$ (línea continua), $0,707$ (línea de trazos y puntos) y $0,866$ (línea de puntos), siendo este último valor el máximo permitido para un agujero negro que rota con el parámetro antes mencionado. Las coordenadas α y β , el parámetro de rotación a y la carga q se encuentran adimensionalizados con la masa del agujero negro M .

El horizonte externo del agujero negro de Kerr–Newman se encuentra en la raíz de mayor valor de la ecuación $\Delta = 0$ y es

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2 - q^2}, \quad (2.62)$$

de manera que siempre que $a^2 < M^2 + q^2$ la singularidad central se encuentra cubierta por un horizonte.

En el límite $a = 0$ la solución de Kerr–Newman se reduce a la de Reissner–Nordström que describe un agujero negro cargado con simetría esférica. Por otro lado, si $q = 0$ se reobtiene la solución de Kerr. La estructura de la geometría de Kerr–Newman es similar a la de Kerr y comparte propiedades similares con ésta última, como la existencia de un horizonte interno, de la ergoesfera y el hecho de que la ecuación de Hamilton–Jacobi sea separable gracias a la existencia de una

cuarta constante de integración (a lo largo de las geodésicas de partículas sin carga eléctrica). Las ecuaciones de movimiento de una partícula sin carga que se obtienen a partir de las ecuaciones de Hamilton–Jacobi son similares a las Ecs. (2.32), halladas en el caso de Kerr, con la diferencia de que en este caso Δ está dada por la Ec. (2.60), donde se pone de manifiesto la presencia de la carga q .

El estudio de la propagación de la luz en la geometría de Kerr–Newman se puede realizar siguiendo los mismos pasos que en el caso de Kerr. Los parámetros que se conservan a lo largo de las geodésicas nulas de un agujero negro cargado son

$$\xi(r) = \xi_K(r) - \frac{2q^2 r}{a(r - M)}, \quad (2.63)$$

y

$$\eta(r) = \eta_K(r) - \frac{4q^2 r^2 (\Delta - r)}{a^2 (r - M)^2}, \quad (2.64)$$

donde $\xi_K(r)$ y $\eta_K(r)$ son los correspondientes a la solución de Kerr, expresados en las Ecs. (2.45) y (2.46). El borde de la sombra de un agujero negro de Kerr–Newman se obtiene, entonces, a partir de las Ecs. (2.50), (2.51), (2.63) y (2.64). En la Figura 2.5 se muestran los contornos de las sombras de agujeros negros para un valor representativo del parámetro de rotación adimensionalizado con la masa del agujero negro ($a = 0,5$), y q entre 0 (línea continua) y el valor máximo 0,866 (línea de puntos), vistas desde el plano ecuatorial $\theta_0 = \pi/2$. Se puede apreciar cómo la presencia de la carga eléctrica q genera una disminución en el tamaño de la sombra (a rotación fija) en comparación con el caso de Kerr. Otro efecto importante que se destaca en la Fig. 2.5 es que al aumentar la carga, no sólo se reduce el tamaño de la sombra, sino que se acentúa la deformación de su contorno.

2.5. Observables R_s y δ_s

La sombra del agujero negro puede ser caracterizada a partir de observables que se relacionan con su tamaño y deformación. En la Ref. [37] se definen los observables

R_s y δ_s para caracterizar las sombras de los agujeros negros de Kerr y así deducir el parámetro de rotación del objeto junto con la inclinación θ_0 . La cantidad R_s se define como el radio de una circunferencia de referencia que pasa por tres puntos: la posición superior del contorno de la sombra (α_t, β_t) , la inferior (α_b, β_b) , y el punto donde el contorno corta el eje $\alpha > 0$, $(\alpha_r, 0)$. El parámetro de distorsión δ_s se define como D/R_s , donde D es la diferencia entre los puntos correspondientes a la circunferencia y a la sombra, ambos en el lado opuesto de $(\alpha_r, 0)$. El radio R_s brinda entonces una idea del tamaño aproximado de la sombra, mientras que δ_s mide su deformación respecto de la circunferencia de referencia. En la Figura 2.6 se observa un gráfico ilustrativo de los observables. Utilizando geometría se puede deducir que el observable R_s se escribe como

$$R_s = \frac{(\alpha_t - \alpha_r)^2 + \beta_t^2}{2|\alpha_t - \alpha_r|}, \quad (2.65)$$

mientras que el observable δ_s está dado por

$$\delta_s = \frac{\bar{\alpha}_p - \alpha_p}{R_s}, \quad (2.66)$$

donde $(\bar{\alpha}_p, 0)$ y $(\alpha_p, 0)$ son los puntos en los que la circunferencia de referencia y el contorno de la sombra cortan el eje horizontal, en el lado opuesto a $(\alpha_r, 0)$, respectivamente.

Otros observables diferentes a los introducidos en la Ref. [37] pueden ser utilizados para obtener la misma información. Por ejemplo, los definidos en la Ref. [41]. Sin embargo, R_s y δ_s tienen interpretaciones físicas directas: el primero, relacionado al tamaño estimativo de la sombra y el segundo, asociado a su deformación respecto del caso no rotante.

Mediciones lo suficientemente precisas de R_s y δ_s pueden servir, en principio, para obtener diferentes propiedades del agujero negro, como el valor de a/M y su inclinación en forma simultánea [37]. Si el ángulo de inclinación θ_0 se conoce de forma independiente (ver por ejemplo [99]) se pueden utilizar estos observables para

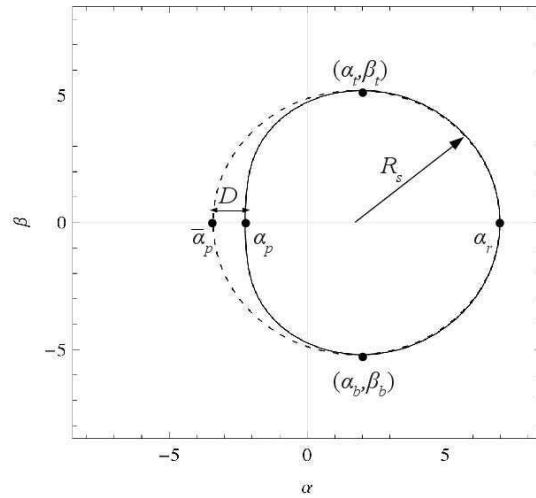


Figura 2.6: Observables R_s y δ_s . El primero se define como el radio de la circunferencia de referencia (graficada con línea de trazos) y el segundo es el cociente entre D y R_s . Las coordenadas se encuentran adimensionalizadas con la masa del agujero negro.

caracterizar agujeros negros rotantes y cargados en el contexto de la Relatividad General o de otras teorías de gravitación.

Capítulo 3

Agujero negro de Chern–Simons

En el presente capítulo se exploran los aspectos generales de la modificación de Chern–Simons a la Relatividad General y se presenta la solución de agujero negro lentamente rotante, válida en el régimen de acoplamiento débil de la teoría. Se estudian las geodésicas nulas y se calculan los contornos de las sombras para diferentes valores del parámetro de rotación y de la constante de acoplamiento. Las sombras son analizadas desde el punto de vista de los observables relacionados a su tamaño y deformación. Por último, se discute el caso del agujero negro del centro galáctico.

3.1. Gravedad modificada de Chern–Simons

La modificación de Chern–Simons a la Relatividad General consiste en una extensión de la acción de Einstein–Hilbert a partir de un término extra que viola paridad y que acopla un campo escalar con la densidad de Pontryagin de primera clase. S. Deser, R. Jackiw y S. Templeton formularon originalmente la modificación de la gravedad de Chern–Simons en 2+1 dimensiones [100] y R. Jackiw y S-Y. Pi extendieron el análisis a 3+1 dimensiones introduciendo un campo escalar externo [54].

El término que se adiciona al de Einstein–Hilbert incluye contracciones del tensor

de Levi–Civita debido a la presencia del dual del tensor de Riemann, que es impar ante transformaciones de paridad y por lo tanto se asocia a la posibilidad de que exista una violación de esta simetría discreta a partir de la gravitación. Este término puede pensarse como un análogo gravitacional del término axiónico de QCD que viola paridad. Este hecho no implica que soluciones que preservan paridad estén prohibidas, ya que si el campo escalar es constante la teoría modificada se reduce a la Relatividad General. La corrección de Chern–Simons introduce entonces una forma de alentar la violación de paridad a partir de un término puramente geométrico.

La motivación para este tipo de modificaciones subyace en el hecho de que su presencia está ligada a la teoría de cuerdas: la teoría heterótica requiere de la presencia de un término de estas características en la acción gravitatoria efectiva de bajas energías en cuatro dimensiones acoplada a una teoría de Yang–Mills, de manera de posibilitar la cancelación de anomalías mediante el mecanismo de Green–Schwarz. No obstante, en el contexto de la teoría de cuerdas, el orden de magnitud natural de la constante de acople es varios órdenes de magnitud más pequeña de la necesaria para que sus efectos a nivel astrofísico sean observables [55].

En la formulación no dinámica las soluciones de la teoría son tales que sus densidades de Pontryagin se anulan. En la dinámica, el campo escalar se encuentra provisto de un tensor de energía-momento y de una ecuación de evolución. La formulación original, en la que el campo escalar no posee dinámica, atrajo considerable atención debido a las predicciones de polarización y birrefringencia de las ondas gravitatorias [54]. Más recientemente, la teoría fue analizada en un contexto fenomenológico en cosmología y astrofísica, y fueron estudiados problemas como leptogénesis [58], curvas de rotación de galaxias [59], interacciones entre fermiones [60], torsión [60, 61], ondas gravitacionales [62, 63], soluciones aproximadas [101], soluciones exactas [65, 66, 102] y perturbaciones a la solución de Schwarzschild [64], entre otros, en el régimen no dinámico.

La teoría dinámica es físicamente la más relevante ya que no requiere de ninguna

prescripción arbitraria para el campo escalar, que es dejado evolucionar de forma autoconsistente. En los últimos años se han realizado considerables avances en lo que respecta a la teoría dinámica. Yunez y Pretorius estudiaron límites observacionales a la constante de acople de la teoría γ provenientes de objetos compactos rotantes, y encontraron que $16\pi\gamma^2 < 5 \times 10^{28} \text{ m}^4$ [68]; en la Ref. [70] se especula con la posible mejora de este límite en algunos órdenes de magnitud a partir de la detección de ondas gravitacionales; recientemente, se discutió la posibilidad de mejorar en tres órdenes de magnitud la predicción hecha en la Ref. [68] mediante la observación de pulsares [69]. Además, perturbaciones gravitacionales de agujeros negros de Schwarzschild se estudiaron en el contexto dinámico, y se demostró que los modos de oscilación llevan la signatura del acople al campo escalar, de manera que es posible validar la teoría a partir de la detección de ondas gravitacionales [67].

La acción de la modificación de Chern–Simons a la gravedad se puede escribir como

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\text{EH}} + \mathcal{S}_{\text{CS}} + \mathcal{S}_{\varphi} + \mathcal{S}_{\text{mat}}, \quad (3.1)$$

donde el primer término es el de Einstein–Hilbert de la gravitación clásica

$$\mathcal{S}_{\text{EH}} = \frac{1}{2\kappa} \int dx^4 \sqrt{-g} R, \quad (3.2)$$

la corrección de Chern–Simons es de la forma

$$\mathcal{S}_{\text{CS}} = \frac{\gamma}{4} \int dx^4 \sqrt{-g} \varphi * R R, \quad (3.3)$$

el término asociado al campo escalar es

$$\mathcal{S}_{\varphi} = -\frac{\beta}{2} \int dx^4 \sqrt{-g} [g^{\mu\nu} (\nabla_{\mu} \varphi) (\nabla_{\nu} \varphi) + 2V(\varphi)]^2 \quad (3.4)$$

y la contribución debida a otras fuentes de materia (no especificada) es

$$\mathcal{S}_{\text{mat}} = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{mat}}, \quad (3.5)$$

donde \mathcal{L}_{mat} es la densidad lagrangeana de la materia y es independiente del campo escalar φ . En estas ecuaciones, γ y β son constantes de acoplamiento, $\kappa = 8\pi$, g es el

determinante de la métrica, ∇_μ es la derivada covariante asociada al tensor métrico $g_{\mu\nu}$ y R es el escalar de Ricci. La cantidad $*R R$ es la densidad de Pontryagin y se define como

$$*R R = *R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (3.6)$$

donde

$$*R_{\alpha\beta\rho\sigma} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\rho\sigma}{}^{\mu\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (3.7)$$

es el dual del tensor de Riemann, con $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ el tensor de Levi-Civita totalmente antisimétrico en cuatro dimensiones. El campo escalar φ es función de las coordenadas espacio-temporales y parametriza las deformaciones respecto de la Relatividad General. Si $\varphi = \text{constante}$ la teoría modificada se reduce a la gravitación clásica, ya que la densidad de Pontryagin puede escribirse como la derivada exterior de la forma de Chern–Simons, es decir

$$*R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} = 2\nabla_\mu \varepsilon^{\mu\alpha\beta\lambda} \left(\Gamma_{\alpha\rho}^\delta \partial_\beta \Gamma_{\lambda\delta}^\rho + \frac{2}{3} \Gamma_{\alpha\rho}^\delta \Gamma_{\beta\sigma}^\rho \Gamma_{\lambda\delta}^\sigma \right), \quad (3.8)$$

donde Γ es la conexión de Christoffel, y ésta lleva a la conservación de una corriente topológica. Esta relación con el término gravitacional de Chern–Simons en tres dimensiones es la razón por la cual la teoría descrita por la Ec. (3.1) lleva este nombre, aún cuando suene curioso en cuatro dimensiones. Esto genera que esta teoría resulte ligada especialmente a la gravedad masiva en tres dimensiones [100].

Las ecuaciones de campo modificadas se obtienen al variar la acción (3.1) respecto de las cantidades dinámicas:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} = & \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R + 2\gamma\kappa C_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \\ & + \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{\gamma}{4} *R R + \beta \square \varphi - \beta \frac{dV}{d\varphi} \right) \delta\varphi + \text{term. superf.}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde $\square = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$ es el operador D’Alambertiano y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento total, que cuenta con una contribución asociada al contenido de materia y otra, al campo φ

$$T^{\mu\nu} = T_{\text{mat}}^{\mu\nu} + T_\varphi^{\mu\nu}, \quad (3.10)$$

donde

$$T_{\mu\nu}^{\varphi} = \beta \left(\nabla_{\mu}\varphi\nabla_{\nu}\varphi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_{\rho}\varphi\nabla^{\rho}\varphi - g_{\mu\nu}V(\varphi) \right). \quad (3.11)$$

Los términos de superficie que aparecen en la Ec. (3.9) provienen de la integración por partes. En la Ref. [103] se estudia el término de superficie asociado a \mathcal{S}_{CS} y se construye uno análogo al de Gibbons–Hawking–York para la gravedad de Chern–Simons. En el trabajo se muestra que la acción total de la teoría, es decir aquella que incluye los términos de superficie, tiene bien definido el problema de valores de frontera de Dirichlet. Este tipo de términos adquieren importancia a nivel cuántico.

El tensor de traza nula $C_{\mu\nu}$ que aparece en la Ec. (3.9) está dado por

$$C^{\mu\nu} = \nabla_{\delta}\varphi \varepsilon^{\delta\rho\sigma\mu}\nabla_{\sigma}R_{\rho}^{\nu} + \nabla_{\delta}\nabla_{\rho}\varphi * R^{\rho\mu\nu\delta} + (\mu \leftrightarrow \nu). \quad (3.12)$$

Las ecuaciones de movimiento obtenidas a partir de la anulación de la Ec. (3.9) son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + 2\kappa\gamma C_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (3.13)$$

y

$$\beta\Box\varphi = \beta\frac{dV}{d\varphi} - \frac{\gamma}{4} * R R. \quad (3.14)$$

El principio de equivalencia fuerte, es decir $\nabla_{\mu}T_{\text{mat}}^{\mu\nu} = 0$, se preserva naturalmente en esta teoría, ya que se satisface la Ec. (3.14). Esto ocurre debido a que al tomar la divergencia de la Ec. (3.13), la suma del primer y el segundo término del lado izquierdo se anula gracias a las identidades de Bianchi, mientras que el tercer término es proporcional a la densidad de Pontryagin, ya que

$$\nabla_{\mu}C^{\mu\nu} = -\frac{1}{8}\nabla^{\nu}\varphi * R R. \quad (3.15)$$

La igualdad entre la divergencia del tensor $C^{\mu\nu}$ y la del tensor de energía-momento del campo $T_{\varphi}^{\mu\nu}$ lleva a la ecuación de evolución (3.14).

Existen diferentes elecciones posibles de las unidades del campo escalar φ y de las constantes γ y β . Sin embargo, al fijar las unidades de uno de ellos, quedan fijadas las del resto. En unidades geometrizadas la acción tiene unidades de L^2 , de

manera que si se desea que el campo sea adimensional (como ocurre, por ejemplo, en las teorías escalares-tensoriales) debe ser $[\gamma] = L^2$ y $[\beta] = 1$, es decir que β debe ser adimensional también. En lo que sigue se asume $\beta = 1$ sin pérdida de generalidad.

La introducción del término de Chern–Simons en la acción gravitacional lleva a una modificación de la geometría de los agujeros negros rotantes [68, 71, 101, 102] ya que, a diferencia de lo que ocurre con la solución de Schwarzschild, la de Kerr tiene densidad de Pontryagin no nula.

3.2. Agujero negro lentamente rotante

La solución de agujero negro rotante sólo se conoce en la aproximación de rotación lenta y acoplamiento débil, y fue encontrada de forma independiente y similar en los trabajos [68] y [71]. En adelante se describe el procedimiento utilizado en la Ref. [68] para hallar la solución. En ese trabajo la métrica de fondo es expandida suponiendo rotación lenta a partir de la aproximación de Hartle–Thorne y se escribe en la forma

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & -f[1 + h(r, \theta)]dt^2 + \frac{1}{f}[1 + m(r, \theta)]dr^2 + r^2[1 + k(r, \theta)]d\theta^2 \\
 & + r^2 \sin^2 \theta [1 + p(r, \theta)][d\phi - \omega(r, \theta)dt]^2,
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

donde M es la masa del agujero negro en ausencia de la corrección de Chern–Simons, $f = 1 - 2M/r$ y las coordenadas (t, r, θ, ϕ) son las de Boyer–Lindquist. Las perturbaciones a la métrica h, m, k, p y ω son tales que si $a = 0$ se debe recuperar la métrica de Schwarzschild y si $\gamma = 0$, la métrica de Kerr en rotación lenta. Estas perturbaciones se expanden entonces considerando términos lineales en la rotación (que son nulos, excepto en el caso de la función ω), bilineales en la rotación y el acoplamiento, y cuadráticos en la rotación. Por otra parte, el campo escalar $\varphi(r, \theta)$ —que debe ser nulo a orden cero en la rotación (para todo orden del acoplamiento), ya que en ese caso la métrica solución debe ser la de Schwarzschild— se expande

considerando términos lineales y cuadráticos en la rotación, y bilineales en la rotación y el acoplamiento. La expansión asociada a la rotación lenta se realiza en términos del parámetro de Kerr adimensionalizado con la masa del agujero negro, a/M , mientras que la expansión de acoplamiento débil se realiza en términos de un parámetro que surge del producto entre $2\kappa\gamma$ y γ/β , adimensionalizado con M^4 . Esto se puede entender a partir de que el factor $2\kappa\gamma$ aparece en las ecuaciones de Einstein modificadas (3.13) delante del tensor $C_{\mu\nu}$, que es proporcional a los gradientes del campo φ . A su vez, el campo es proporcional al factor γ/β , según la Ec. (3.14).

El término de fuente de la ecuación de evolución (3.14) para φ es siempre de menor orden que el término correctivo a las ecuaciones de Einstein modificadas (3.13) (en cuanto a las derivadas de la métrica). Este hecho permite resolver en primer lugar y de forma independiente la ecuación de movimiento de φ , en la que se asume que $V(\varphi) = 0$. El campo escalar obtenido de esta manera puede ser luego insertado en las ecuaciones de Einstein modificadas para encontrar la corrección a la métrica, que una vez calculada es utilizada en la ecuación del campo φ para hallar el segundo término en la expansión del campo. Luego de sucesivas iteraciones es posible, en principio, encontrar soluciones para la métrica y el campo de ordenes superiores en los parámetros de expansión.

La solución correspondiente a la teoría modificada, en las aproximaciones de rotación lenta y acoplamiento γ débil, es entonces [68]

$$ds^2 = ds_{\text{KL}}^2 + \frac{5\gamma^2\kappa}{2r^4} \left(1 + \frac{12M}{7r} + \frac{27M^2}{10r^2} \right) a \sin^2 \theta dt d\phi, \quad (3.17)$$

donde

$$\begin{aligned} ds_{\text{KL}}^2 = & - \left(B + \frac{2a^2 M}{r^3} \cos^2 \theta \right) dt^2 + \frac{1}{B^2} \left[B - \frac{a^2}{r^2} (1 - B \cos^2 \theta) \right] dr^2 \\ & + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 + \left[r^2 + a^2 \left(1 + \frac{2M}{r} \sin^2 \theta \right) \right] \sin^2 \theta d\phi^2 \\ & - \frac{4M}{r} a \sin^2 \theta dt d\phi, \end{aligned}$$

describe el régimen de rotación lenta ($a \ll M$) de la solución de Kerr en las coor-

denadas de Boyer–Lindquist y $B = 1 - 2M/r$. La configuración correspondiente al campo escalar φ está dada por

$$\varphi = \left(\frac{5}{2} + \frac{5M}{r} + \frac{9M^2}{r^2} \right) \frac{\gamma a \cos \theta}{4Mr^2}. \quad (3.18)$$

Según la Ec. (3.17), la corrección a la componente fuera de la diagonal es de orden $a\gamma^2$, lo que genera un debilitamiento del efecto de arrastre de los sistemas inerciales y, como se muestra más adelante, altera la estructura de las geodésicas nulas, lo cual finalmente deja sus huellas en las sombras de los agujeros negros rotantes. Además, esta corrección decae como $1/r^4$ y por lo tanto se encuentra altamente suprimida para r grande. De manera que, al orden calculado, la estructura asintótica de la solución de Kerr no se ve afectada y la nueva solución posee los mismos parámetros ADM de masa y momento angular que la solución original. Por otra parte, el hecho de que la corrección se vea fuertemente debilitada en el infinito sugiere que las desviaciones a la Relatividad General debidas a la modificación de Chern–Simons sólo podrían ser observadas en el régimen de campo fuerte.

Cabe aclarar que no es posible anular la corrección de Chern–Simons mediante una transformación de coordenadas, lo cual se puede deducir a partir del hecho de que los invariantes de curvatura se ven corregidos por esta modificación. En particular, la densidad de Pontryagin correspondiente a la solución rotante de Chern–Simons difiere de la correspondiente a la solución de Kerr, ya que este invariante se ve afectado por la presencia del campo φ según la Ec. (3.14). Otra forma de entender que no se trata de una modificación trivial de la geometría de Kerr es a partir de la posición de las órbitas ecuatoriales circulares estables más internas, que también se ven modificadas en esta teoría, de forma tal que la corrotante se aleja y la contrarrotante se acerca al horizonte [68].

Otro aspecto importante de esta solución es que tanto la localización de la ergoesfera como la posición de los horizontes se mantienen inalteradas respecto de las de la solución de Kerr, ya que la corrección inherente a esta teoría sólo afecta el sector gravitomagnético de la métrica [68].

En cuanto al campo φ , éste no puede ser interpretado como un “pelo” escalar ya que posee dinámica y, al orden de la aproximación, queda unívocamente determinado por el parámetro de rotación a y la masa M . La energía total transportada por el campo es

$$E_\varphi = \int_\Sigma d^3x T_{\mu\nu}^{(\varphi)} t^\mu t^\nu \sqrt{\lambda},$$

donde Σ es una superficie espacial ($t = \text{constante}$), t^μ es un cuadrivector temporal y λ es el determinante de la métrica intrínseca de Σ . Calculada fuera del horizonte, la energía es proporcional a órdenes superiores a los tenidos en cuenta en el cálculo de la nueva solución [68], de manera que, al orden considerado, el campo escalar no transporta energía, lo cual es consistente con el hecho de que tanto la masa ADM como el momento angular y la posición del horizonte de la nueva solución sean los heredados de la de Kerr.

3.3. Geodésicas nulas

Por simplicidad, en lo que sigue se adimensionalizan todas las cantidades con la masa del agujero negro. Es decir, se reemplaza r/M por r , a/M por a , γ/M^2 por γ , etc. (lo que es equivalente a fijar $M = 1$ en todas las ecuaciones).

La ecuación de Hamilton–Jacobi se escribe como en la Ec. (2.20), pero con $g^{\mu\nu}$ correspondiente a la solución (3.17) y calculada a orden $a\gamma^2$. Luego de reemplazar con el *ansatz* (2.21) (evaluado en $m = 0$) en la Ec. (2.20) se obtiene una expresión que se puede escribir como

$$0 = F_{\text{KL}} - \mathcal{F}_{\text{CS}}, \quad (3.19)$$

donde F_{KL} coincide con el lado derecho de la Ec. (2.24), calculado en el régimen de rotación lenta, $\mathcal{O}(a^2)$, y

$$\mathcal{F}_{\text{CS}} = \frac{2\pi L E (189 + 120r + 70r^2)}{7(r-2)r^5} a\gamma^2 \quad (3.20)$$

es un término correctivo que aparece al considerar la solución (3.17). Entonces, al orden de validez de esta solución, la expresión que queda en el lado derecho de la Ec. (3.19) es separable en funciones de r y θ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{E^2} \left(\frac{dS_r}{dr} \right)^2 &= \frac{1}{\Delta} \left(\xi^2 + \eta + \frac{r^3}{r-2} - \frac{4\xi}{r-2}a + \frac{[(r-2)\xi^2 - 4r]}{r(r-2)^2}a^2 + \frac{\mathcal{F}_{CS}}{E^2} \right), \\ \frac{1}{E^2} \left(\frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 &= a^2 \cos^2(\theta) - \xi^2 \cot^2(\theta) + \eta, \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde, al igual que en el Capítulo 2, es $\xi = L_z/E$, $\eta = \mathcal{K}/E^2$, con \mathcal{K} la constante de separación y Δ se define en la Ec. (2.5). A orden $a\gamma^2$, la acción de Jacobi S se escribe de forma análoga a (2.28) para $m = 0$, $\xi = L_z/E$ y $\eta = \mathcal{K}/E^2$. La función \mathcal{R} se calcula al orden mencionado y se lee

$$\mathcal{R}(r) = \mathcal{R}_K + r(r-2)\mathcal{F}_{CS}, \quad (3.22)$$

con \mathcal{R}_K dado por la expresión cuadrática en a (2.34). La función $\Theta(\theta)$ no se modifica respecto de la de Kerr y es idéntica a la dada por la Ec. (2.35), de manera que el movimiento en θ está sujeto a las mismas apreciaciones que en el Capítulo 2 para la geometría de Kerr. Por otra parte, en este punto es importante notar que al reemplazar con $\gamma = 0$ en la Ec. (3.22), se reobtiene la expresión hallada para la métrica de Kerr, que es de segundo orden en a .

Las ecuaciones de movimiento pueden deducirse a partir de las relaciones entre el momento y la derivada de la acción de Jacobi, $p_\mu = \partial S / \partial x^\mu$. En el caso de la coordenada radial se lee

$$\Delta g_{rr} \frac{dr}{d\lambda} = \sqrt{R}, \quad (3.23)$$

donde g_{rr} corresponde a la métrica (3.17). La ecuación para la coordenada angular es

$$g_{\theta\theta} \frac{d\theta}{d\lambda} = \sqrt{\Theta}, \quad (3.24)$$

donde $g_{\theta\theta} = \Sigma$, con Σ definido en la Ec. (2.4).

Las órbitas no planares de radio constante son aquellas que satisfacen $\mathcal{R}(r) = d\mathcal{R}/dr = 0$ y los valores de los parámetros ξ y η compatibles con estas

condiciones son aquellos que determinan el contorno de la sombra del agujero negro. En este contexto, y teniendo en cuenta la positividad de la función $\Theta(\theta)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \xi(r) = \xi_K(r) - \frac{\pi}{7ar^6(r-1)(r-2)^2} [r^2(r-3)(r-2)(-945 + 87r + 90r^2 + 140r^3) \\ + 2(945 + 102r - 408r^2 - 101r^3 + 55r^4 + 35r^5)a^2] \gamma^2 \end{aligned} \quad (3.25)$$

y

$$\begin{aligned} \eta(r) = \eta_K(r) - \frac{2\pi(r-3)}{7a^2r^4(r-1)^2(r-2)^2} [r^2(r-3)(r-2)(-945 + 87r + 90r^2 + 140r^3) \\ + (1890 + 582r - 1143r^2 - 233r^3 + 20r^4 + 140r^5)a^2] \gamma^2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde $\xi_K(r)$ y $\eta_K(r)$ se definen en las Ecs. (2.45) y (2.46), y corresponden a la geometría de Kerr.

3.4. Sombra del agujero negro

La geometría (3.17) es asintóticamente plana y por lo tanto las coordenadas celestes del observador, o parámetros de impacto en el infinito α y β , se escriben como en las Ecs. (2.48) y (2.49). Calculando $d\phi/dr$ y $d\theta/dr$ a partir de las ecuaciones de movimiento, tomando el límite de un observador lejano y despreciando términos de orden superior a $a\gamma^2$, se tiene que

$$\alpha = -\frac{\xi}{\sin \theta_0} \quad (3.27)$$

y

$$\beta = \frac{a^2 + 4(\xi^2 + \eta) + a^2 \cos 2\theta_0 - 4\xi^2 \csc^2 \theta_0}{4\sqrt{\eta - \xi^2 \cot^2 \theta_0}}. \quad (3.28)$$

En el caso particular en el que el observador se encuentra en el plano ecuatorial del objeto (situación para la cual las desviaciones respecto de la Relatividad General son mayores), el ángulo de inclinación es $\theta_0 = \pi/2$ y se tiene que las ecuaciones tienen la misma forma que para el caso de Kerr (ver Ecs. (2.54) y (2.55)), pero con

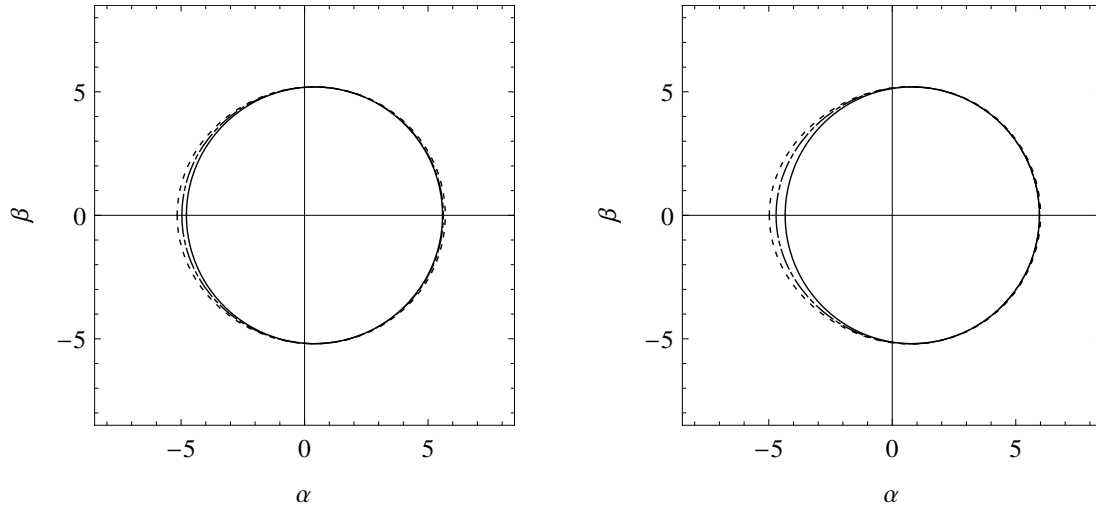


Figura 3.1: Contorno de la sombra de un agujero negro situado en el origen de coordenadas, con ángulo de inclinación $\theta_0 = \pi/2$ y parámetros de rotación $a = 0,2$ (izquierda) y $a = 0,4$ (derecha). En ambos casos los valores del acoplamiento de Chern–Simons son $\gamma = 0$ (línea continua), $0,3$ (línea de trazos y puntos) y $0,4$ (línea de trazos). Todas las cantidades se encuentran adimensionalizadas con la masa del agujero negro.

ξ y η dados por las Ecs. (3.25) y (3.26). El contorno de la sombra se visualiza en la gráfica de β vs. α . En la Figura 3.1 se muestran los contornos de las sombras de agujeros negros con parámetros de rotación $a = 0,2$ (izquierda) y $a = 0,4$ (derecha) para valores ilustrativos de la constante de acoplamiento de la teoría: $\gamma = 0$ (línea continua), $0,3$ (línea de trazos y puntos) y $0,4$ (línea de trazos). Se puede observar cómo el lado izquierdo del contorno se corre hacia la izquierda al aumentar el valor del acoplamiento. Esto se puede entender a partir del debilitamiento del efecto de arrastre de los sistemas inerciales, provocado por la corrección en el sector $t - \phi$ de la métrica (3.17), que genera que las órbitas se alejen del horizonte. Este efecto es más fuerte en los fotones corrotantes. Se puede decir que el efecto de la constante de acoplamiento se opone al del parámetro de rotación: mientras que en el caso de

Kerr el lado izquierdo del contorno se aplana, en este caso se curva.

3.5. Observables

Los observables definidos en el Capítulo 2 pueden ser utilizados para obtener los valores del parámetro de rotación a y de la constante de acoplamiento de Chern-Simons γ (ambos adimensionalizados con la masa del agujero negro), si se conoce el ángulo θ_0 de forma independiente.

En la Figura 3.2 los observables R_s y δ_s se muestran como función de γ , para $\theta_0 = \pi/2$. A partir de las Figuras 3.1 y 3.2 se puede ver que, para un valor fijo de a , la presencia de la constante de acoplamiento γ genera una sombra de mayor tamaño (mayor R_s) que la que se obtendría en el caso de Kerr; mientras que para valores pequeños de γ la distorsión en la forma de la sombra es menor que en el caso de Kerr (debido a un δ_s mas pequeño y positivo). Para valores mayores de γ la silueta se distorsiona en sentido contrario a lo que sucede en la solución de Kerr y δ_s es negativo, ya que el numerador de la expresión (2.66) cambia de signo. Esto se debe a que al aumentar el valor de γ el arrastre de los sistemas inerciales se debilita y como consecuencia de ello la posición de la órbita ecuatorial corrotante de fotones se aleja y, eventualmente, se ubica a la izquierda del punto en el cual la circunferencia de referencia corta al eje α , $(\bar{\alpha}_p, 0)$. A modo comparativo, cabe aclarar que la solución no rotante de la gravedad de Chern-Simons para cualquier valor de γ , es decir un agujero negro de Schwarzschild, posee una sombra circular de radio (adimensionalizado con la masa M) $R_s = 3\sqrt{3} \approx 5,19615$.

En la Figura 3.3 se pueden observar las curvas de nivel de R_s y δ_s en el plano definido por el parámetro de rotación del agujero negro, a , y la constante de acoplamiento de la teoría, γ . Se puede ver que para valores pequeños de a y γ ($\lesssim 0,2$) las curvas de nivel de los observables se intersectan una sola vez, lo cual permite predecir simultánea y unívocamente la magnitud de la rotación del agujero negro

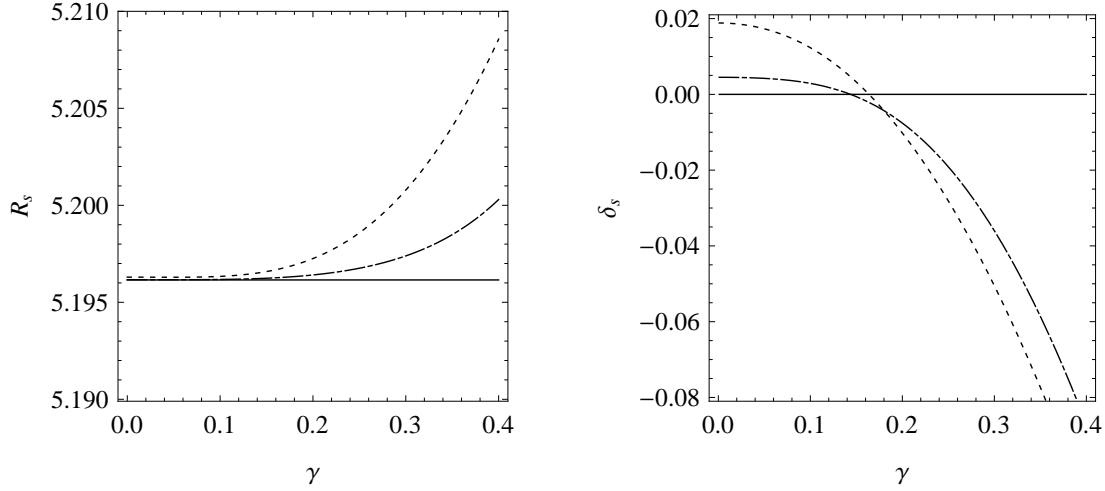


Figura 3.2: Observables R_s y δ_s en función de la constante de acoplamiento de Chern–Simons γ , correspondientes a la sombra de un agujero negro situado en el origen de coordenadas con ángulo de inclinación $\theta_0 = \pi/2$ y parámetro de rotación $a = 0$ (línea continua), 0,2 (línea de trazos y puntos) y 0,4 (línea de trazos). Los valores de los observables para el caso de un agujero negro de Schwarzschild son $R_s = 3\sqrt{3} \approx 5,19615$ y $\delta_s = 0$. Todas las cantidades se encuentran adimensionalizadas con la masa del agujero negro.

junto con el acoplamiento de la teoría. Lo mismo ocurre si $a \gtrsim 0,2$, ya que para todo el rango de γ considerado ($0 < \gamma < 0,4$) los contornos de los observables se cruzan en un solo par (a, γ) . Sin embargo, si la constante de acoplamiento de la teoría es lo suficientemente grande ($\gamma \gtrsim 0,2$) es posible que para ciertos valores de los observables existan dos pares (a, γ) diferentes que registren las mismas mediciones. Por ejemplo, un agujero negro con parámetro de rotación $a = 0,01$ en una teoría con $\gamma = 0,353$ resultaría indistinguible de una situación en la que $a = 0,17$ y $\gamma = 0,345$, si sólo se tienen en cuenta los observables R_s y δ_s , ya que éstos toman los mismos valores en ambos casos ($R_s = 5,1979$ y $\delta_s = -0,0546$). Es decir, el aumento en la rotación es compensado por una disminución en la constante de acoplamiento de la teoría (o viceversa), en lo que a este par de observables respecta. Una forma de

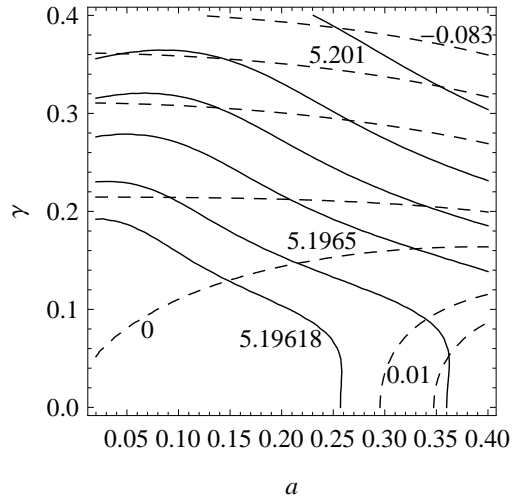


Figura 3.3: Curvas de nivel de los observables R_s (línea continua) y δ_s (línea de trazos) en el plano (a, γ) . Los valores correspondientes de R_s y δ_s se indican en algunas de las curvas. Los parámetros a y γ se encuentran adimensionalizados con la masa del agujero negro.

evitar esta degeneración sería a partir de un tercer observable, por ejemplo la posición del centro de la circunferencia de referencia. En el caso de los pares (a, γ) antes mencionados, las posiciones de los centros de las circunferencias respectivas resultan significativamente diferentes, ya que en el primer caso $\alpha_c = 0,157$ y en el segundo $\alpha_c = 0,398$. No obstante, no es claro que las curvas de nivel de R_s y δ_s calculadas en este trabajo sean representativas de la realidad física en el sector del plano $a - \gamma$ en el cual ambos parámetros toman valores relativamente grandes ($> 0,2$), ya que la solución (3.17) es válida en el régimen de acoplamiento débil y rotación lenta, y por lo tanto, para valores grandes de a y γ , las curvas de la Figura 3.2 podrían discrepar significativamente respecto de aquellas calculadas a partir de la solución exacta, que es aún desconocida.

3.6. Discusión

En esta teoría alternativa de gravitación, fijado el parámetro de rotación a y para γ menor que un cierto valor crítico, la sombra es siempre de mayor tamaño y menos distorsionada que en el contexto de la Relatividad General, y ésta se deforma en sentido contrario cuando γ excede el valor crítico. La razón central de este hecho es que el efecto del término de Chern–Simons sobre el arrastre de los sistemas inerciales es sustancialmente mayor en la región cercana al plano ecuatorial.

Los valores de γ adoptados en las figuras tienen un propósito ilustrativo: los reales deben ser mucho menores. En la Ref. [68] se obtuvo un límite sobre la constante de acoplamiento proveniente de la variación de los parámetros orbitales del sistema binario de estrellas de neutrones PSR J0737-3039 A/B, que puede ser escrito en términos del parámetro adimensionalizado como $\gamma < 1,4 \times 10^7 (M/M_\odot)^{-2}$, donde M_\odot es la masa solar. Por ejemplo, para un agujero negro supermasivo con $M = 10^6 M_\odot$ se obtiene $\gamma < 1,4 \times 10^{-5}$; por otro lado, para un agujero negro de masa intermedia con $M = 10^4 M_\odot$ se tiene $\gamma < 0,14$; mientras que para uno de masa estelar con $M = 10 M_\odot$ el límite es $\gamma < 1,4 \times 10^5$.

Luego, en el caso de que la gravitación de Chern–Simons sea una corrección válida a la Relatividad General, los límites conocidos sugieren una mayor desviación relativa respecto de Kerr en las sombras de agujeros negros de baja masa. Esto conlleva una dificultad observacional, ya que los ángulos subtendidos por las sombras de los agujeros negros de masa estelar –vistos desde la Tierra– son mucho más pequeños que aquellos que corresponden a agujeros negros de masa intermedia, o al del agujero negro supermasivo en el centro galáctico Sgr A*.

El radio angular de la sombra puede ser estimado a partir del correspondiente a un agujero negro de Schwarzschild de la misma masa, dado por $\theta_s = 3\sqrt{3}M/D_o$, con D_o la distancia entre el observador y el agujero negro. Se puede deducir que $\theta_s = 3\sqrt{3} \times 10^{-5} (M/M_\odot) (1 \text{ kpc}/D_o) \mu\text{as}$, de manera que para Sgr A* ($M = 4,3 \times 10^6 M_\odot$, $D_o = 8,3 \text{ kpc}$ [104]) se tiene que $\theta_s = 27 \mu\text{as}$. Para un agujero negro de

masa intermedia en un cúmulo globular, se puede suponer que $M \sim 10^4 M_\odot$ y $D_o \sim 4$ kpc [105, 106], y por lo tanto $\theta_s \sim 0,13 \mu\text{as}$. Para un agujero negro de masa estelar se puede suponer que $M \sim 7 M_\odot$ y $D_o \sim 1,7$ kpc [107], por lo que $\theta_s \sim 2 \times 10^{-4} \mu\text{as}$. Resoluciones angulares del orden de $1 \mu\text{as}$ se esperan en el futuro cercano (ver, por ejemplo [38–40, 108–111]). El efecto de la constante de acoplamiento de la teoría sobre la sombra correspondiente al agujero negro en la vecindad de Sgr A* sería extramadamente difícil de detectar debido a la pequeña deformación permitida por el límite sobre γ . En el caso de agujeros negros de masas estelares, el problema principal no es ya el límite sobre γ , sino el tamaño angular de la sombra que resulta ser muy pequeño.

Al parecer, los mejores candidatos para observar los posibles efectos del parámetro de Chern–Simons sobre las sombras serían los agujeros negros de masa intermedia, si su existencia se confirmara. De todos modos, la observación de los efectos de lente gravitatoria discutidos en este trabajo debidos a la corrección de Chern–Simons no será posible con la tecnología actual o de un futuro inmediato.

Los efectos del término de Chern–Simons sobre las sombras son más prominentes para valores grandes del parámetro de rotación, pero, infortunadamente, la solución a esta teoría para un valor arbitrario de a es aún desconocida.

Capítulo 4

Agujero negro de Kaluza–Klein

En el presente Capítulo se detallan los aspectos generales de una solución de agujero negro dilatónico, rotante y cargado, y su relación con la teoría de Kaluza–Klein. Se estudia la estructura de las geodésicas nulas y se obtiene la forma aparente vista por un observador en la región asintóticamente plana del espacio. Los contornos de las sombras se grafican para diferentes combinaciones de rotación y carga. Por último, se obtiene la dependencia de los observables en función del valor de la carga, se grafican las curvas de nivel en el plano determinado por ésta última y el parámetro de rotación, y se discuten los resultados tomando como ejemplo el caso del agujero negro del centro galáctico.

4.1. Marco teórico

4.1.1. Teoría de Kaluza–Klein

En 1921 Kaluza [112], impulsado por la búsqueda de una teoría unificada de las interacciones fundamentales, sugirió una nueva teoría que, en principio, permitía unificar el electromagnetismo con la gravitación. Lo hizo valiéndose de la Relatividad General formulada en una variedad de cinco dimensiones. Es decir que, a partir de

postular la existencia de una dimensión espacial extra, intentó explicar las interacciones físicas en cuatro dimensiones como una manifestación pura de la geometría 5-dimensional.

La acción de la teoría de Kaluza se construye, entonces, a partir del escalar de Ricci ${}^{(5)}R$ asociado a la métrica 5-dimensional g_{AB} y, en vacío, toma la forma

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa_5} \int d^4x dy \sqrt{-g^{(5)}} {}^{(5)}R, \quad (4.1)$$

donde κ_5 es la constante de gravitación en cinco dimensiones, $y = x^4$ representa la dimensión espacial extra y $g^{(5)}$ es el determinante de la métrica g_{AB} . Las ecuaciones de Einstein correspondientes a la acción (4.1) se leen

$${}^{(5)}R_{AB} = 0, \quad (4.2)$$

donde ${}^{(5)}R_{AB}$ es el tensor de Ricci asociado a g_{AB} . El elemento de línea en cinco dimensiones se puede escribir como

$$ds_{(5)}^2 = g_{AB} dx^A dx^B, \quad (4.3)$$

y se parametriza la métrica de la siguiente forma

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} e^{2\phi/\sqrt{3}} g_{\mu\nu} + 4e^{-4\phi/\sqrt{3}} A_\mu A_\nu & 2e^{-4\phi/\sqrt{3}} A_\mu \\ 2e^{-4\phi/\sqrt{3}} A_\nu & e^{-4\phi/\sqrt{3}} \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Se asume que los campos $g_{\mu\nu}$, A^μ y ϕ no dependen de la coordenada espacial extra y que transforman respectivamente como un tensor, un vector y un escalar ante transformaciones generales de coordenadas en cuatro dimensiones.

A partir de este *ansatz* para la métrica, las ecuaciones de Einstein en cinco dimensiones (4.2) pueden reescribirse de manera que, no sólo se recobran las ecuaciones de campo para la métrica $g_{\mu\nu}$ de cuatro dimensiones, sino que también se obtienen las ecuaciones de Maxwell para el campo A^μ y la ecuación de Klein-Gordon (sin término de masa) para el escalar ϕ . Por lo tanto, la teoría del electromagnetismo de Maxwell

se presenta como una consecuencia de la gravitación clásica al ser formulada en cinco dimensiones.

La acción efectiva en cuatro dimensiones en la teoría de Kaluza se obtiene reemplazando la Ec. (4.4) en la Ec. (4.1), teniendo en cuenta que las derivadas respecto de la coordenada extra y se anulan, ya que nada depende ella, e integrando en y . De manera que [113],

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa_4} \int d^4x \sqrt{-g} \left[R - 2\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - e^{-2\sqrt{3}\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right], \quad (4.5)$$

donde $\kappa_4 = \kappa_5 / \int dy$ es la constante de gravitación en cuatro dimensiones.

En 1926, Klein [114] propuso una forma de explicar el hecho de que la métrica (4.4) no dependiera de la coordenada extra: ésta última debía ser compacta, con topología circular y periódica ($0 \leq my \leq 2\pi$, donde m es la inversa del radio del círculo S^1). De esta forma, los campos físicos sólo dependen de y a partir de su periodicidad y pueden ser expandidos en sus modos de Fourier. Además, la escala de compactificación debe ser lo suficientemente pequeña de manera que todos los modos de Fourier por encima del estado fundamental tengan energías lo suficientemente grandes como para ser inobservables. De esta forma, la física puede ser independizarse de manera efectiva de la dimensión extra propuesta por Kaluza.

4.1.2. Teoría Einstein–Maxwell–escalar

La acción asociada al régimen de bajas energías de la teoría de cuerdas, con un campo de Maxwell y todos los demás campos de gauge, y el tensor antisimétrico, iguales a cero es [72–74, 76]

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa_4} \int d^4x \sqrt{-g} \left[R - 2\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - e^{-2\gamma\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right], \quad (4.6)$$

donde $\kappa_4 = 8\pi$. Ésta representa la gravitación clásica acoplada a un campo de Maxwell $F^{\mu\nu}$ y a un campo dilatónico ϕ sin potencial ($V(\phi) = 0$). Si $\gamma = \sqrt{3}$ se reobtiene la acción de Kaluza–Klein (4.5) mientras que si $\gamma = 0$ se recobra el

lagrangeano de una teoría Einstein–Maxwell–escalar mínimamente acoplada. Las ecuaciones de Einstein que se derivan de la Ec. (4.6), y cuyas fuentes son el dilatón y el campo de Maxwell, son

$$\nabla_{\mu} (e^{-2\gamma\phi} F^{\mu\nu}) = 0, \quad (4.7)$$

$$\nabla^2\phi + \frac{\gamma}{2}e^{-2\gamma\phi}F^2 = 0, \quad (4.8)$$

$$R_{\mu\nu} = 2\nabla_{\mu}\phi\nabla_{\nu}\phi + 2e^{-2\gamma\phi} \left(F_{\mu\zeta}F_{\nu}^{\zeta} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^2 \right). \quad (4.9)$$

Las soluciones de agujero negro estáticas y con simetría esférica a estas ecuaciones de campo fueron obtenidas en las Refs. [72,73] para valores arbitrarios de γ . Soluciones rotantes, estacionarias y con simetría axial sólo se conocen para ciertos valores de la constante de acoplamiento: si $\gamma = 0$ se reobtiene la solución de Kerr–Newman, mientras que si $\gamma = \sqrt{3}$ se tiene la solución de agujero rotante de Kaluza–Klein, llamada así por tratarse de la solución de las ecuaciones de movimiento asociadas a la acción (4.5).

4.2. Agujero negro rotante con carga eléctrica

Como fue mencionado anteriormente, sólo se conocen soluciones exactas en el caso $\gamma = 0$ y $\gamma = \sqrt{3}$. Soluciones rotantes para valores arbitrarios de γ se conocen sólo en algunos regímenes: rotación lenta [74] y cociente carga–masa pequeño [75]. La solución de agujero negro rotante de Kaluza–Klein (hallada en la Ref. [76] y estudiada en detalle en la Ref. [74]) se deriva de una reducción dimensional de la solución correspondiente a un *boost* de la de Kerr en cinco dimensiones de la siguiente forma. Primero se utiliza la métrica de Kerr (2.3) como “semilla” para construir un espacio de cinco dimensiones, adicionándole una coordenada espacial plana extra y . La métrica que se obtiene posee simetría de traslación en la coordenada extra y es

$$ds_{(5)}^2 = ds_K^2 + dy^2. \quad (4.10)$$

Luego se realiza un *boost* en la dirección de y de la forma

$$\begin{aligned}\tilde{y} &= \frac{1}{1-v^2}(y+vt), \\ \tilde{t} &= \frac{1}{1-v^2}(t+vy),\end{aligned}\tag{4.11}$$

donde v es el parámetro de la transformación (o velocidad del *boost*). La métrica que se obtiene satisface las ecuaciones de Einstein en cinco dimensiones en vacío ${}^{(5)}R_{AB} = 0$. Al escribirla según la parametrización (4.4), se tiene que la métrica cuadridimensional $g_{\mu\nu}$, el vector A^μ y el escalar ϕ son solución de las ecuaciones de campo (4.7), (4.8) y (4.9). La sección cuadridimensional de la métrica 5-dimensional resultante tiene la forma [74, 76]

$$\begin{aligned}ds^2 &= -\frac{1-Z}{B}dt^2 + \frac{B\Sigma}{\Delta_0}dr^2 + B\Sigma d\theta^2 + \left[B(r^2+a^2) + a^2\frac{Z}{B}\sin^2\theta \right] \sin^2\theta d\varphi^2 \\ &\quad - \frac{2aZ\sin^2\theta}{B\sqrt{1-v^2}}dt d\varphi,\end{aligned}\tag{4.12}$$

con

$$B = \sqrt{1 + \frac{v^2 Z}{1-v^2}}, \quad Z = \frac{2\mu r}{\Sigma}, \quad \Delta_0 = r^2 + a^2 - 2\mu r, \quad \Sigma = r^2 + a^2 \cos^2\theta,$$

donde μ y a son la masa y el parámetro de rotación de la solución de Kerr original, respectivamente. Las componentes no nulas del campo vectorial $U(1)$ asociado a $F_{\mu\nu}$ son

$$A_t = \frac{v}{2(1-v^2)}\frac{Z}{B^2}, \quad A_\varphi = -\frac{av}{2\sqrt{1-v^2}}\frac{Z}{B^2}\sin^2\theta,\tag{4.13}$$

y el dilatón es

$$\phi = -\frac{\sqrt{3}}{2}\log B.\tag{4.14}$$

4.2.1. Propiedades

La geometría (4.12) es asintóticamente plana y representa un agujero negro de masa M , carga Q y momento angular J :

$$M = \mu \left[1 + \frac{v^2}{2(1-v^2)} \right],\tag{4.15}$$

$$Q = \frac{\mu v}{1 - v^2} \quad (4.16)$$

y

$$J = \frac{\mu a}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (4.17)$$

El parámetro de rotación físico se define como $A = J/M$. El signo de la carga Q queda determinado por el signo de la velocidad del *boost* v gracias al límite natural $|v| < 1$. Es importante notar que si $v = 0$ se recobra la solución de Kerr.

Las raíces de Σ y Δ_0 están asociadas a singularidades en la curvatura en $r = 0$ y $\theta = \pi/2$, y a horizontes regulares, respectivamente. El horizonte de eventos se encuentra en

$$r_+ = \mu + \sqrt{\mu^2 - a^2}, \quad (4.18)$$

y existe si $\mu^2 \geq a^2$. La igualdad corresponde al caso extremal. En lo que sigue se adimensionalizan todas las cantidades físicas con la masa M del agujero negro (lo que es equivalente a adoptar $M = 1$). En ese caso, de la Ec. (4.15) se tiene que $\mu = 2(1 - v^2)/(2 - v^2)$. De manera que, en términos de la velocidad v , la presencia del horizonte requiere que

$$|a| \leq \frac{2(1 - v^2)}{2 - v^2}. \quad (4.19)$$

Estas últimas dos expresiones pueden ser escritas en términos de los parámetros físicos A y Q . La Ec. (4.18) se reescribe como

$$r_+ = \frac{1}{2} \left(3 - \sqrt{1 + 2Q^2} + \sqrt{2} \sqrt{5 + Q^2 - 3\sqrt{1 + 2Q^2}} - \frac{4A^2}{1 - Q^2 + \sqrt{1 + 2Q^2}} \right), \quad (4.20)$$

donde se utilizaron las Ecs. (4.15) y (4.16) (con $M = 1$). De manera que para evitar singularidades desnudas se necesita que

$$|A| \leq \frac{1}{2} \sqrt{2(1 + \sqrt{1 + 2Q^2}) - Q^2(10 + Q^2 - 4\sqrt{1 + 2Q^2})}, \quad (4.21)$$

que es una condición equivalente a (4.19) e implícitamente define un valor máximo para la carga $Q_{max}(A)$ en función de A .

4.2.2. Geodésicas nulas

La ecuación de Hamilton–Jacobi asociada a la métrica (4.12) resulta separable sólo en el caso de partículas sin masa [115]. Las ecuaciones de movimiento para las geodésicas nulas, con energía E y componente del momento angular a lo largo del eje de simetría L_z , se escriben de la forma

$$\begin{aligned}
B\Sigma \frac{dt}{d\lambda} &= \frac{2\mu r}{\Delta_0} \left[(r^2 + a^2) \left(\frac{1}{Z} + \frac{v^2}{1-v^2} \right) E + a^2 \sin^2 \theta E - \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} a L_z \right], \\
B\Sigma \frac{dr}{d\lambda} &= \sqrt{\mathcal{R}}, \\
B\Sigma \frac{d\theta}{d\lambda} &= \sqrt{\Theta}, \\
B\Sigma \frac{d\varphi}{d\lambda} &= \frac{2\mu r}{\Delta_0} \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} a E - \frac{Z-1}{Z} \operatorname{cosec}^2 \theta L_z \right),
\end{aligned} \tag{4.22}$$

donde $\Theta(\theta)$ se escribe como en la Ec. (2.30) (con $m = 0$) y

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_K + \frac{2r}{2-v^2} \left\{ [(aE - L_z)^2 - 2L_z^2 - \mathcal{K} + 2E^2 r^2] v^2 + 4aL_z E (1 - \sqrt{1-v^2}) \right\}, \tag{4.23}$$

con \mathcal{R}_K dado por la Ec. (2.29) ($m = 0$) y \mathcal{K} es la constante de separación. Estas ecuaciones determinan la propagación de la luz en el espacio-tiempo de un agujero negro dilatónico de Kaluza–Klein.

La geometría (4.12) es asintóticamente plana y la trayectoria de los fotones, lejos del objeto, está dada por líneas rectas. Esas trayectorias, se caracterizan por los parámetros descriptos en los capítulos anteriores $\xi = L_z/E$ y $\eta = \mathcal{K}/E^2$.

4.3. Sombras y observables

El contorno de la sombra asociada a esta solución de agujero negro se obtiene a partir de las órbitas no planares de fotones de radio r constante, que satisfacen $\mathcal{R}(r) = 0$ y $d\mathcal{R}(r)/dr = 0$. Estas condiciones se satisfacen en este caso para los

parámetros

$$\xi(r) = \frac{1}{a[2(1-v^2) - r(2-v^2)]} \left[2(a^2 - r^2)\sqrt{1-v^2} + \Delta_0 \sqrt{r[2v^2 + r(2-v^2)](2-v^2)} \right] \quad (4.24)$$

y

$$\begin{aligned} \eta(r) = & \frac{r^2}{a^2[2(1-v^2) - r(2-v^2)]^2} \left\{ \frac{r}{v^2-2} [8r(r^2 - 4r + 5) \right. \\ & + 4(-3r^3 + 18r^2 - 31r + 8)v^2 + 2(3r^3 - 24r^2 + 58r - 32)v^4 \\ & - (r-4)^2(r-2)v^6] + 4\Delta_0 \sqrt{r[2v^2 + r(2-v^2)](2-v^2)}\sqrt{1-v^2} \\ & \left. + 2a^2(2v^2 - 2v^4 + r(v^2 - 2)^2) \right\}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Las ecuaciones que relacionan estos parámetros con las coordenadas celestes del observador tienen la misma forma que en el caso de Kerr (ver ecuaciones (2.50)–(2.51), y (2.54)–(2.55) para un observador ecuatorial), pero con ξ y η dados por las Ecs. (4.24) y (4.25).

El estudio de la forma y del tamaño de la sombra se basa en los observables descritos en capítulos anteriores, R_s y δ_s , siendo el primero el radio de la circunferencia de referencia correspondiente a la sombra dada, y el segundo relacionado a la deformación de la misma. Como se mencionó anteriormente, la importancia de estos observables radica en el hecho de que, si se conoce θ_0 de forma independiente, mediciones precisas de los mismos pueden servir para obtener los valores del parámetro de rotación físico A y de la carga Q , a partir de la gráfica de las curvas de nivel de R_s y δ_s en el plano (A, Q) .

Las características de las sombras pueden ser discutidas en términos de las cantidades físicas A y Q . La carga aparece elevada al cuadrado en todas las ecuaciones de manera que, sin pérdida de generalidad, se adopta $Q \geq 0$.

En la Figura 4.1 se muestran las sombras de agujeros negros en el origen de coordenadas, vistas desde el plano ecuatorial, para diferentes parámetros de rotación A y de carga Q . En todos los casos, los valores de las cargas van desde 0 al valor crítico $Q_{max}(A)$. El caso no rotante $A = 0$ se muestra en la fila superior, para $Q = 0$

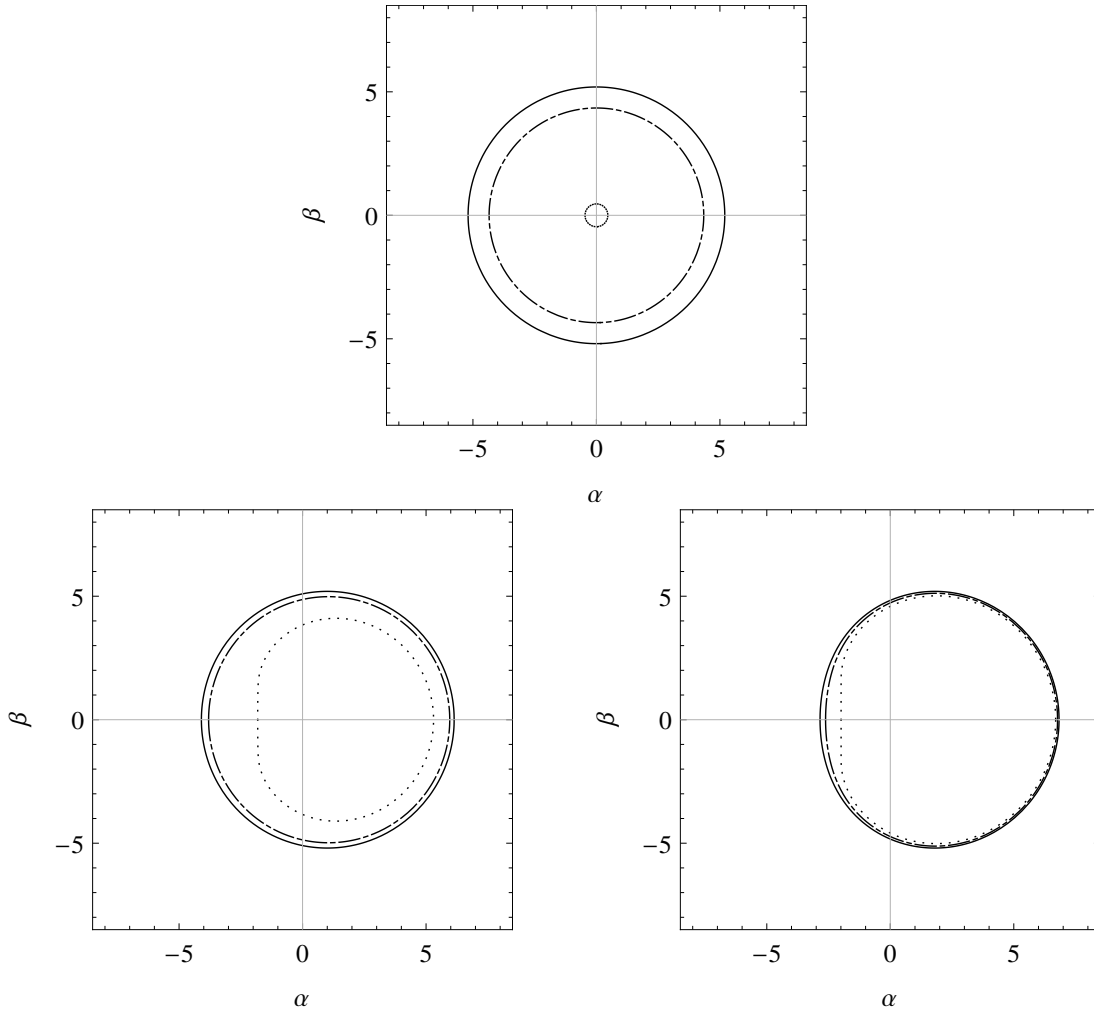


Figura 4.1: Borde de la sombra de un agujero negro situado en el origen de coordenadas con ángulo de inclinación $\theta_0 = \pi/2$, parámetro de rotación físico A y carga eléctrica Q . Fila superior: $A = 0$, $Q = 0$ (línea continua), $0,5$ (línea de trazos y puntos) y $1,99$ (línea de puntos); fila inferior, izquierda: $A = 0,5$, $Q = 0$ (línea continua), $0,5$ (línea de trazos y puntos) y $Q_{max} = 1,1298$ (línea de puntos); fila inferior, derecha: $A = 0,9$, $Q = 0$ (línea continua), $0,3$ (línea de trazos y puntos) y $Q_{max} = 0,4583$ (línea de puntos). Todas las cantidades se encuentran adimensionalizadas con la masa física M del agujero negro .

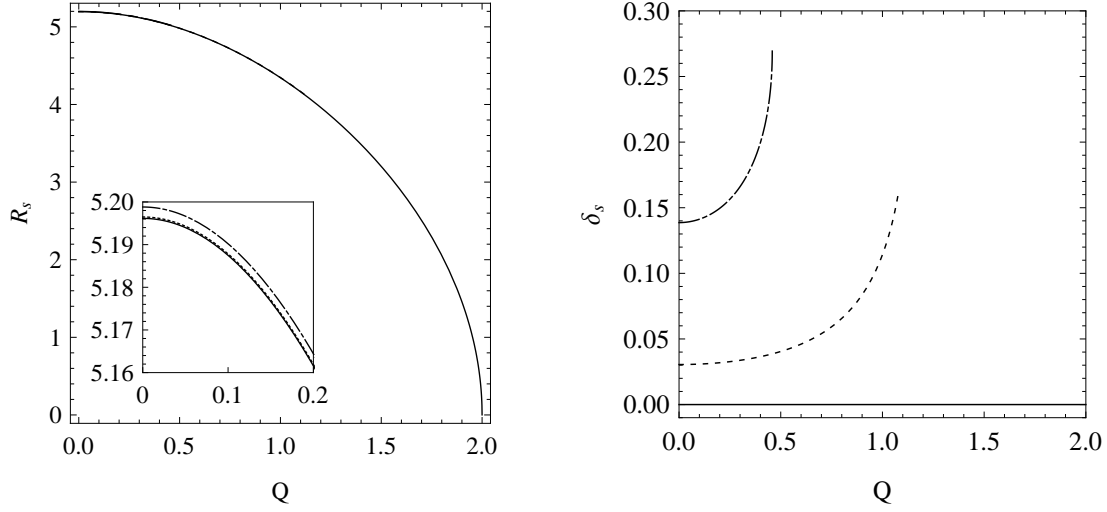


Figura 4.2: Observables R_s (izquierda) y δ_s (derecha) en función de la carga eléctrica Q , para un agujero negro en el origen de coordenadas, con ángulo de inclinación $\theta_0 = \pi/2$ y parámetro de rotación físico $A = 0$ (línea continua), $A = 0,5$ (línea de trazos) y $A = 0,9$ (línea de trazos y puntos). En el cuadro interno dentro del gráfico de R_s el rango de Q es menor y las curvas pueden ser distinguidas.

(línea continua), $Q = 0,5$ (línea de trazos y puntos) y $Q = 0,995 Q_{max}(0) = 1,99$ (línea de puntos). El tamaño de la sombra disminuye con la carga, desde $R_s = 3\sqrt{3}$ hasta transformarse en un punto cuando $Q = Q_{max}(0) = 2$. Ésta es una característica relevante de la teoría en comparación con la solución de Reissner–Nordström de la Relatividad General: en el último caso, el radio R_s de la sombra disminuye con la carga Q , comenzando desde $R_s = 3\sqrt{3}$ y alcanzando un tamaño mínimo para el que $R_s = 4$, lo cual sucede en el caso extremal $Q = 1$. En la fila inferior se muestran las sombras correspondientes, respectivamente, a $A = 0,5$ (izquierda) y $A = 0,9$ (derecha), para $Q = 0$ (línea continua), $Q = 0,5$ (izquierda, línea de trazos y puntos), $Q = 0,3$ (derecha, línea de trazos y puntos), $Q = Q_{max}(0,5) = 1,1298$ (izquierda, línea de puntos) y $Q = Q_{max}(0,9) = 0,4583$ (derecha, línea de puntos). Nuevamente, los tamaños de las sombras decrecen con Q , comenzando en el mismo

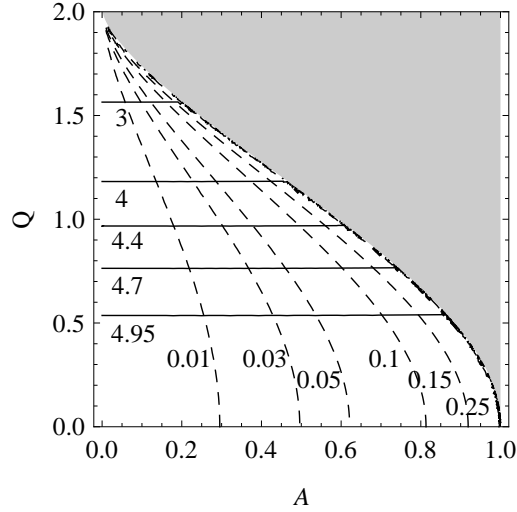


Figura 4.3: Curvas de nivel de R_s (línea continua) y δ_s (línea de trazos) en el plano (A, Q) ; los valores correspondientes de R_s y δ_s se indican en cada curva. La zona gris corresponde a singularidades desnudas.

valor de R_s que la solución de Kerr para valores fijos de A y $Q = 0$, y culminan en tamaños extremales, para A fijo y $Q = Q_{max}(A)$, que difieren de los que se obtienen con la solución de Kerr–Newman.

La carga máxima, fijado el valor de A , es mayor para los agujeros negros de Kaluza–Klein que para los de Kerr–Newman, de manera que los primeros pueden albergar mayores cantidades de carga que sus análogos de la Relatividad General antes de convertirse en singularidades desnudas.

En la Figura 4.2 (izquierda), se puede visualizar el comportamiento del radio de la sombra R_s en función de la carga Q , para diferentes valores del parámetro de rotación: $A = 0$ (línea continua), $A = 0,5$ (línea de puntos) y $A = 0,9$ (línea de trazos y puntos). Este observable, que se relaciona con el tamaño de la sombra, decrece con Q para todo A , y sus valores son similares para los diferentes valores de A considerados, lo cual genera que las curvas no se distingan en el rango $0 < Q < 2$. En el cuadro interno de la figura, el rango de Q es menor y se puede ver que R_s

aumenta con A . La diferencia entre las curvas de $A = 0$ y $A = 0,9$ para Q fijo es de orden 3×10^{-3} . Todas las curvas finalizan en el valor crítico de la carga $Q_{max}(A)$ para el cual el horizonte deja de existir y, por lo tanto, aparece una singularidad desnuda. La deformación de la sombra respecto de la circunferencia de referencia, δ_s , se muestra en la misma figura (derecha), en función de la carga Q , para $A = 0$ (línea continua), $A = 0,5$ (línea de puntos) y $A = 0,9$ (línea de trazos y puntos). Este observable aumenta con la carga hasta llegar a una distorsión máxima, que se obtiene para el valor crítico $Q_{max}(A)$.

En la Figura 4.3 se muestran las curvas de nivel de R_s y δ_s en el plano (A, Q) , para valores representativos de los observables. La zona gris corresponde a singularidades desnudas y el límite entre esta región y la correspondiente a agujeros negros está dado por la curva $Q_{max}(A)$. Desde una perspectiva observacional este es un gráfico interesante, ya que el parámetro de rotación y la carga del agujero negro surgen de la intersección de las curvas de nivel de R_s y δ_s , cuyos valores se obtienen de observaciones: una vez medidos, se pueden deducir los valores de A y Q de este tipo de gráficos sin ninguna ambigüedad gracias a que las curvas de los observables se intersectan en un solo punto (A, Q) .

4.4. Discusión

Los agujeros rotantes de Kaluza–Klein, cargados y asociados a un campo escalar, satisfacen un límite en cuanto al valor de su parámetro de rotación dado por la Ec. (4.21); éste último debe ser menor o igual a la masa del objeto, cualquiera sea el valor de la carga. Al igual que lo que ocurre en la Relatividad General, el tamaño de estos objetos crece con el parámetro de rotación y disminuye con la carga eléctrica. Sin embargo, al aumentar la carga (a rotación fija) el tamaño mínimo que adquieren antes de perder su horizonte es menor que el predicho por la teoría clásica, mientras que el valor máximo de carga que pueden almacenar resulta mayor. La deformación

$A = 0$	KN			$KKRD$		
Q	0	0,25	0,5	0	0,25	0,5
$\theta_s(\mu\text{as})$	26,5718	26,2916	25,4047	26,5718	26,2959	25,4763
$\delta_s(\%)$	0	0	0	0	0	0
$A = 0,5$	KN			$KKRD$		
Q	0	0,2	0,4	0	0,2	0,4
$\theta_s(\mu\text{as})$	26,5735	26,3951	25,8419	26,5735	26,3968	25,8707
$\delta_s(\%)$	3,05086	3,19113	3,69364	3,05086	3,18884	3,64816
$A = 0,9$	KN			$KKRD$		
Q	0	0,05	0,1	0	0,05	0,1
$\theta_s(\mu\text{as})$	26,5855	26,5744	26,5413	26,5855	26,5745	26,5414
$\delta_s(\%)$	13,8666	13,9301	14,1248	13,8666	13,9300	14,1236

Tabla 4.1: Tamaño angular θ_s y deformación δ_s para el agujero negro del centro galáctico, considerando diferentes valores del parámetro de rotación A y de la carga Q . Las cantidades se encuentran adimensionalizadas con la masa M del agujero negro. El tamaño angular se calcula utilizando la aproximación mencionada en el Cap. 3, Sec. 3.6.

de la sombra asociada a estos agujeros negros también se comporta de forma similar a lo que ocurre en la Relatividad General, ya que crece con la carga y con el parámetro de rotación. Para valores fijos de rotación y carga se tiene que las sombras de los agujeros negros rotantes de Kaluza–Klein (KKRD), vistas desde el plano ecuatorial, tienen tamaños mayores y son menos distorsionadas que las de los agujeros negros de Kerr–Newman (KN).

Desde el punto de vista astrofísico, el caso de mayor interés corresponde al agujero negro supermasivo del centro galáctico Sgr A*. En la Tabla 4.1 se condensan los valores del tamaño angular θ_s y de la distorsión δ_s (%) de la sombra del agujero

negro del centro galáctico, para diferentes valores del parámetro de rotación A y de la carga Q . Este efecto se acentúa en el caso $A = 0,5$ y $Q = 0,4$, para el que la diferencia entre los valores de θ_s es aproximadamente del 0.1%. Esto significa que si se desean observar este tipo de desviaciones de la Relatividad General se debe contar con una resolución del orden de $0,01 \mu\text{as}$, o mejor.

Capítulo 5

Agujero negro en mundos brana

La solución de agujero negro rotante con carga tidal es reminiscente de la solución de Kerr–Newman de la Relatividad General. Sin embargo, existe una diferencia fundamental entre ambas, y es la presencia de una carga de origen gravitatorio que codifica los efectos no locales provenientes de las dimensiones adicionales. El término de carga puede tomar valores negativos a diferencia de lo que ocurre en la solución clásica. En este Capítulo se discuten las principales características de esta solución, se deducen las ecuaciones de movimiento de la luz y se obtienen los contornos de las sombras. Además, se estudia el caso de las singularidades desnudas asociadas a valores grandes del parámetro de rotación y de la carga tidal, y se grafica su forma aparente. Los tamaños y deformaciones se discuten en términos de los observables R_s y δ_s , en el caso de los agujeros negros, y de R_a y φ_a , en el de las singularidades desnudas. Por último, se analiza el caso del agujero negro del centro galáctico.

5.1. Introducción

En el contexto de las cosmologías de mundos brana, la materia ordinaria se encuentra confinada en una hipersuperficie 3+1-dimensional (la brana), que se encuentra embebida en un espacio con mayor número de dimensiones espaciales (el

bulk), en el cual sólo la gravedad se puede propagar. Estos modelos recibieron considerable atención durante los últimos años y fueron propuestos como una explicación al problema de la jerarquía (esto es, la dificultad para explicar por qué la escala de la gravedad es 16 órdenes de magnitud mayor a la electro-débil) y su motivación reside en los recientes desarrollos en la teoría de cuerdas y en holografía, vía la correspondencia ADS/CFT [83].

La presencia de dimensiones adicionales genera una modificación en las propiedades de los agujeros negros [116, 117]. Clancy et al. [118–120] demostraron que en el escenario más sencillo en el contexto de mundos-brana, el modelo de Randall–Sundrum [78] (una brana de tensión positiva en un *bulk* con una sola dimensión extra y constante cosmológica negativa), la vida media de los agujeros negros primordiales formados durante el régimen de altas energías es mayor que la esperada debido a una tasa de evaporación modificada. La masa de estos agujeros negros primordiales podría haber crecido durante la fase de altas energías gracias a la acreción de la radiación circundante, incrementándose así su tiempo de vida [121]. Consecuentemente, estos objetos, cuyas geometrías asociadas inducidas en la brana son diferentes a la de Schwarzschild, podrían haber sobrevivido hasta el presente. Los modelos de cosmológicos de branas también predicen la formación de agujeros negros como resultado de colisiones de altas energías en aceleradores de partículas o de rayos cósmicos [117].

En el escenario de Randall–Sundrum, Dadhich et al. encontraron una solución de agujero negro con simetría esférica en una brana 3+1-dimensional [88], caracterizada por una carga tidal vinculada a los efectos gravitacionales no locales de la dimensión adicional sobre la brana.

Recientemente una solución de agujero negro rotante con carga tidal fue investigada por Aliev et al. [89, 122]. El estudio de las geodésicas nulas de la geometría de estos objetos, sobre las cuales se mueven los fotones provenientes de fuentes astrofísicas, es esencial para la obtención de información sobre los mismos.

5.2. Modelos de Randall–Sundrum

El modelo de branas de Randall–Sundrum considera un *bulk* asintóticamente anti de Sitter de cinco dimensiones. En su versión original [77], el modelo consta de dos branas embebidas dentro de un *bulk* con gran curvatura que sirve de explicación a la jerarquía existente entre la escala de Planck y la electro-débil, y las partículas del Modelo Estándar están confinadas a una de las dos branas. En un segundo trabajo [78], una de las branas es enviada al infinito y el nuevo sistema está formado por una sola de ellas, sobre la cual sólo los modos no masivos del gravitón pueden propagarse (además de las partículas del Modelo Estándar). En estos modelos la dimensión espacial adicional es no compacta, lo que los diferencia del de Kaluza–Klein, en el que las dimensiones extra se encuentran compactificadas en círculos. En el modelo de Randall–Sundrum de una sola brana, ésta se encuentra localizada en el origen de la dimensión adicional, la cual posee simetría Z_2 y la métrica inducida en la brana es Minkowski.

Tanto el modelo de Randall–Sundrum como las sucesivas generalizaciones de la geometría sobre la brana (de Minkowski a Friedmann–Robertson–Walker) fueron obtenidas como soluciones a las ecuaciones de Einstein 5-dimensionales valiéndose del uso de un sistema de coordenadas particular y de las condiciones de juntura sobre la brana. Sin embargo, existe un enfoque diferente en el que tanto la métrica del *bulk* como la de la brana son tratadas de forma general. Se trata del enfoque covariante de Shiromizu–Maeda–Sasaki [81] que se basa en el uso de las ecuaciones de Gauss–Codazzi para proyectar la curvatura 5-dimensional sobre la brana, que posee simetría Z_2 . Otra forma de estudiar este tipo de sistemas es la presentada en la Ref. [82], en donde se utiliza un formalismo del tipo del de Arnowitt, Deser y Misner.

Las ecuaciones de campo en cinco dimensiones se leen

$${}^{(5)}G_{AB} = -\Lambda_5 g_{AB} + \kappa_5 \left[{}^{(5)}T_{AB} + T_{AB}^{\text{brana}} \delta(y) \right], \quad (5.1)$$

donde $A = 0, 1, \dots, 4$, ${}^{(5)}G_{AB}$, Λ_5 y g_{AB} son el tensor de Einstein, la constante cosmológica y la métrica, respectivamente, del espacio-tiempo 5-dimensional. El acoplamiento gravitatorio en cinco dimensiones está dado por κ_5 y ${}^{(5)}T_{AB}$ es el tensor de energía-momento del sector gravitacional (por ejemplo, del dilatón, moduli, formas, etc.). El tensor de energía-momento de la brana es T_{AB}^{brana} . La presencia de la distribución $\delta(y)$, con y una coordenada gaussiana, pone de manifiesto el confinamiento de los campos en la brana, localizada en $y = 0$.

La métrica 5-dimensional escrita en términos de la métrica inducida sobre una superficie $y = \text{constante}$ es, localmente,

$$ds_{(5)}^2 = g_{\mu\nu}(x^\alpha, y)dx^\mu dx^\nu + dy^2. \quad (5.2)$$

Las ecuaciones de campo inducidas sobre la brana se derivan a partir de la Ec. (5.1), haciendo uso de las ecuaciones de Gauss–Codazzi y de las condiciones de juntura de Israel a ambos lados de la hipersuperficie, habida cuenta de la simetría Z_2 [81]. Las ecuaciones de Gauss relacionan el tensor de Riemann en cuatro dimensiones, asociado a la métrica $g_{\mu\nu}$, con el correspondiente a la métrica g_{AB} y con la curvatura extrínseca de la brana, mientras que las ecuaciones de Codazzi relacionan la curvatura extrínseca y la normal a la brana con el tensor de Ricci 5-dimensional.

Las ecuaciones de campo sobre la brana se obtienen luego de reemplazar cantidades 5-dimensionales en términos de cantidades 4-dimensionales y toman la forma de ecuaciones de Einstein modificadas, ya que contienen nuevos términos, ausentes en la Relatividad General, relacionados a los efectos del *bulk* sobre la brana:

$$G_{\mu\nu} = -\Lambda_4 g_{\mu\nu} + \kappa_4 T_{\mu\nu} + \kappa_5 S_{\mu\nu} - \mathcal{E}_{\mu\nu} + \kappa_5 \mathcal{F}_{\mu\nu}. \quad (5.3)$$

El tensor de Einstein formado con el tensor y el escalar de Ricci en cuatro dimensiones es $G_{\mu\nu}$; $\Lambda_4 = (\Lambda_5 + \kappa_4 \lambda)/2$ es la constante cosmológica efectiva sobre la brana y $\kappa_4 = \lambda \kappa_5/6$ es el acoplamiento gravitatorio en cuatro dimensiones, con λ la tensión de la brana. Además, se tuvo en cuenta que el tensor de energía-momento de la brana se escribe $T_{AB}^{\text{brana}} g_\mu^A g_\nu^B = T_{\mu\nu}^{\text{brana}} = T_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu}$. El tensor $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ es líneal en el tensor

de energía-momento 5-dimensional, mientras que $S_{\mu\nu}$ es cuadrático en el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$. El tensor $\mathcal{E}_{\mu\nu}$ es la proyección sobre la brana del tensor de Weyl 5-dimensional ortogonal a n^A ,

$$\mathcal{E}_{\mu\nu} = {}^5 C_{ACDB} n^C n^D g_\mu^A g_\nu^B, \quad (5.4)$$

con n^A un vector espacial unitario normal a la brana. La simetría de Weyl asegura que $\mathcal{E}_{\mu\nu}$ sea simétrico y sin traza. Este tensor está asociado a la influencia de los grados de libertad gravitacionales no locales del *bulk* sobre la brana.

En la vecindad de un agujero negro sobre la brana es, en vacío, $T_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} = 0$, y se puede despreciar el efecto de la constante cosmológica Λ_4 . Por lo tanto, las Ecs. (5.3) se leen

$$R_{\mu\nu} = -\mathcal{E}_{\mu\nu} \quad \text{y} \quad R_\mu^\mu = \mathcal{E}_\mu^\mu = 0. \quad (5.5)$$

Además debe ser

$$\nabla^\mu \mathcal{E}_{\mu\nu} = 0, \quad (5.6)$$

donde ∇^μ es la derivada covariante sobre la brana, debido a las identidades de Bianchi sobre la brana y en vacío.

El sistema de ecuaciones formado por las Ecs. (5.5) y (5.6) no es cerrado en general ya que depende de la dinámica en la dimensión extra a través de la Ec. (5.4), y por lo tanto se debe considerar el sistema completo de ecuaciones 5-dimensionales. No obstante, es posible tener un sistema de ecuaciones cerrado sobre la brana asumiendo ciertas hipótesis sobre la métrica inducida en ella [88, 89]: es decir, la estrategia consiste en especificar una forma particular para la métrica inducida sobre la brana y, utilizando la segunda ecuación de (5.5) que se traduce en el vínculo $R = 0$, hallar su forma explícita. Luego, haciendo uso de la primera ecuación de (5.5), se calculan las componentes del tensor $\mathcal{E}_{\mu\nu}$ compatibles con la condición (5.6). Es importante aclarar que, debido a la complejidad del sistema de ecuaciones, aún falta una demostración rigurosa de la compatibilidad de la métrica inducida sobre la brana hallada de esta forma con una solución exacta de la geometría 5-dimensional. Es decir, que

se satisfagan las ecuaciones de campo 5-dimensionales (5.1) para la métrica (5.2), escrita en función de la geometría inducida sobre la brana. Sin embargo, ante la falta de soluciones exactas, es útil proponer métodos del tipo de los discutidos en las Refs. [88] y [89] para ganar conocimiento sobre el sistema.

5.3. Agujero negro rotante con carga tidal

Una solución de vacío en el exterior de una distribución de masa localizada en la brana debe satisfacer las condiciones (5.5) y (5.6). Esto induce a pensar en el mapeo de soluciones 4-dimensionales de la Relatividad General en soluciones provenientes de mundos brana en gravedad 5-dimensional. Mediante la identificación $\kappa_4 T_{\mu\nu} \longleftrightarrow -\mathcal{E}_{\mu\nu}$ y teniendo en cuenta que las ecuaciones de conservación de la Relatividad General, $\nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0$, corresponden entonces a la condición (5.6), se tiene que, en particular, soluciones de Einstein–Maxwell de la Relatividad General pueden ser interpretadas como soluciones de vacío en la gravitación derivada del modelo de mundos brana. En la Ref. [88] se propone un *ansatz* estático y con simetría esférica para la métrica inducida sobre la brana y, haciendo uso de la identificación mencionada, se obtiene una solución del tipo Reissner-Nordström. La carga que aparece en la solución codifica la influencia no local del *bulk* sobre la gravitación en la brana y es de origen tidal. No existe ninguna restricción en cuanto al signo del término asociado a esta carga presente en la métrica, lo que constituye una diferencia significativa con la solución de la Relatividad General.

En la Ref. [89] se introduce un *ansatz* con simetría axial y estacionario para la métrica, que es del tipo Kerr–Schild. Esta propuesta implica que la métrica de un agujero negro rotante puede ser expresada como una desviación de la métrica plana, de la forma

$$ds^2 = ds_{\text{plano}}^2 + H(k_\mu dx^\mu)^2, \quad (5.7)$$

donde H es una función escalar de las coordenadas y k^μ es un vector nulo en ambas

métricas. En coordenadas $x^\mu = (u, r, \theta, \varphi)$ la métrica (5.7) se lee

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = [-(du + dr)^2 + dr^2 + \Sigma d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2 + 2a \sin^2 \theta dr d\varphi] + H(du - a \sin^2 \theta d\varphi)^2, \quad (5.8)$$

donde el término entre corchetes corresponde al espacio-tiempo plano; la función H depende de la coordenada radial r y de la azimutal θ , el parámetro a está asociado al momento angular del agujero negro y Σ es el definido en la Ec. (2.4), es decir

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta.$$

Al reemplazar la condición (5.8) en la segunda expresión de (5.5), $R = 0$, se tiene que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4r}{\Sigma} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{\Sigma} \right) H = 0. \quad (5.9)$$

Se puede verificar que esta ecuación admite una solución del tipo

$$H = \frac{2Mr}{\Sigma} - \frac{Q}{\Sigma}, \quad (5.10)$$

donde los parámetros M y Q son constantes de integración. El significado físico de estas constantes se evidencia al realizar una transformación de coordenadas a las de Boyer–Lindquist, en las que la métrica tiene un comportamiento asintótico adecuado. Al aplicar la transformación

$$du = dt - \frac{(r^2 + a^2)}{\Delta} dr \quad \text{y} \quad d\varphi = d\phi - \frac{a}{\Delta} dr, \quad (5.11)$$

donde

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr + Q, \quad (5.12)$$

se tiene que la métrica inducida (5.8), con H definida en la Ec. (5.10), toma la forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr - Q}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{(2Mr - Q)2a \sin^2 \theta}{\Sigma} d\phi dt + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + [(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta] \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma} d\phi^2, \quad (5.13)$$

donde M es la masa ADM, $a = J/M$ es el parámetro de rotación, y Q es una carga tidal.

Las componentes del tensor $\mathcal{E}_{\mu\nu}$ pueden ser calculadas reemplazando con la métrica (5.13) en la primera ecuación de (5.5):

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_t^t &= -\mathcal{E}_\phi^\phi = -\frac{Q}{\Sigma^3} [\Sigma - 2(r^2 + a^2)], \\ \mathcal{E}_r^r &= -\mathcal{E}_\theta^\theta = \frac{Q}{\Sigma^2}, \\ \mathcal{E}_\phi^t &= -(r^2 + a^2) \sin^2 \theta \mathcal{E}_t^\phi = -\frac{2aQ}{\Sigma^3} (r^2 + a^2) \sin^2 \theta.\end{aligned}\tag{5.14}$$

El tensor $\mathcal{E}_{\mu\nu}$ definido por las expresiones anteriores satisface la segunda condición de (5.5) y su forma es reminiscente de la del tensor de energía-momento de un agujero negro rotante con carga eléctrica en Relatividad General:

$$\begin{aligned}T_t^t &= -T_\phi^\phi = \frac{q^2}{8\pi\Sigma^3} [\Sigma - 2(r^2 + a^2)], \\ T_r^r &= -T_\theta^\theta = -\frac{q^2}{8\pi\Sigma^2}, \\ T_\phi^t &= -(r^2 + a^2) \sin^2 \theta T_t^\phi = \frac{aq^2}{4\pi\Sigma^3} (r^2 + a^2) \sin^2 \theta,\end{aligned}\tag{5.15}$$

donde q es la carga eléctrica. Se puede ver que las componentes del tensor de energía-momento definidas en las Ecs. (5.15) y las del tensor $\mathcal{E}_{\mu\nu}$ definidas en las Ecs. (5.14) tienen la misma forma y se diferencian en el hecho de que la carga eléctrica q está elevada al cuadrado mientras que la tidal aparece con exponente uno.

5.3.1. Carga tidal

La carga tidal Q presente en la métrica (5.13) está asociada a los efectos gravitatorios no locales del *bulk* sobre la brana [89] y puede tomar valores tanto positivos como negativos. Si se anula, se recobra la métrica de Kerr, mientras que si $a = 0$ se reobtiene el caso no rotante estudiado en la Ref. [88]. En ese caso, la métrica solución es llamada Reissner-Nordström tidal por su parecido con la solución de la Relatividad General. Si $Q = q^2 > 0$ la analogía con la solución de Reissner-Nordström de

carga eléctrica q es directa y sus propiedades por lo tanto son similares. Por ejemplo, existen dos horizontes

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q},$$

y un valor crítico de la carga tidal a partir de la cual aparece una singularidad desnuda

$$Q > Q_c = M^2.$$

Sin embargo, si $Q < 0$ existe sólo un horizonte

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 + |Q|},$$

que cubre una singularidad central del tipo espacial, al igual que en el caso de Schwarzschild. En cambio, si $Q > 0$ la singularidad es del tipo temporal, lo que constituye un cambio cualitativo importante respecto de la solución de Schwarzschild. A la hora de especular sobre el signo natural de la carga tidal, este último es un argumento a favor del negativo. Además, dado que el origen de la carga tidal es gravitacional y está asociado a la masa M presente en la brana, es natural suponer que su rol está ligado a reforzar la interacción gravitatoria, lo cual sucede si su signo es negativo [88, 89, 122].

5.3.2. Propiedades

Las propiedades de la geometría (5.13) son similares a las de Kerr–Newman de la Relatividad General. El horizonte externo se encuentra en la raíz de mayor valor de la ecuación $\Delta = 0$, dada por

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2 - Q}. \quad (5.16)$$

Por lo tanto existe un horizonte externo siempre que

$$Q \leq Q_c = M^2 - a^2, \quad (5.17)$$

y la igualdad corresponde a la solución maximal $r_+ = M$. Si la carga tidal es positiva, esta condición lleva a un límite del tipo de Kerr sobre el momento angular. La situación es diferente para un valor negativo de la carga tidal: en ese caso se genera un horizonte externo de mayor radio en comparación con el correspondiente a la solución de Kerr–Newman. En particular, si $Q < 0$ y en el límite $a \rightarrow M$, la Ec. (5.16) se lee

$$r_+ \rightarrow M + \sqrt{-Q} > M,$$

lo cual no sucede en la Relatividad General. Por otro lado, si $Q < 0$ las Ecs. (5.16) y (5.17) sugieren que un horizonte extremal $r_+ = M$ corresponde a un agujero negro cuyo parámetro de rotación es mayor que su masa. Por lo tanto, los efectos gravitacionales del *bulk* sobre la brana proveen un mecanismo para aumentar la rotación de un agujero negro por encima del límite de la Relatividad General.

Desde el punto de vista físico, la geometría (5.13) se diferencia de la de Kerr–Newman, mostrada en la Ec. (2.59), en que la primera es una solución de vacío, mientras que la segunda posee un campo electromagnético asociado cuyo potencial vector se expresa en la Ec. (2.61). Esta discrepancia fundamental se evidencia desde el punto de vista algebraico en el hecho de que la carga eléctrica aparece en la Ec.(2.59) elevada al cuadrado, mientras que la Ec. (5.13) es lineal en la carga tidal. Como fuera mencionado con anterioridad, una importante consecuencia de esta propiedad es la posibilidad de mantener cubierta una singularidad, aún si $a > M$, a costa de una carga tidal negativa. Es decir que, reinterprelando la Ec. (5.17), siempre que la suma del cuadrado del parámetro de rotación y la carga tidal sea menor que la masa, se tendrá un agujero negro. Caso contrario, el objeto en cuestión será una singularidad desnuda.

El límite estático se determina a partir de la anulación de la componente $0-0$ de la métrica (5.13). La raíz de mayor valor de esa ecuación es el límite externo de la ergoesfera, que en este caso es

$$r_e = M + \sqrt{M^2 - Q - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (5.18)$$

Al igual que en Kerr, se trata de una superficie que es externa al horizonte r_+ y que coincide con éste en los polos $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. La presencia de una carga tidal negativa genera una extensión del radio de la ergoesfera alrededor del agujero negro, mientras que una carga positiva genera lo opuesto. Teniendo en cuenta la Ec. (5.18) y el caso extremal descrito por la Ec. (5.17), el radio de la ergoesfera se ubica en el rango

$$M < r_e < M + \sin \theta \sqrt{M^2 - Q_c}, \quad (5.19)$$

de manera que los agujeros negros rotantes con carga tidal negativa son objetos más energéticos comparados con aquellos cuya carga es positiva, en el sentido de la posibilidad de extracción de energía rotacional de la ergoesfera.

5.4. Trayectorias de la luz

La forma aparente del agujero negro se obtiene a partir de la estructura de las geodésicas nulas de la geometría, determinada por la ecuación de Hamilton–Jacobi (2.20) para $m = 0$. En este caso la métrica está dada por la Ec. (5.13). Se trata de un problema separable y por lo tanto la constante de Carter es otra cantidad conservada. Las ecuaciones de movimiento que se obtienen a partir de las de Hamilton–Jacobi son similares a las escritas en la Sec. 2.2, Ecs. (2.33):

$$\begin{aligned} \Sigma \frac{dt}{d\lambda_*} &= \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta - 2Mar\xi], \\ \Sigma \frac{dr}{d\lambda_*} &= \sqrt{\mathcal{R}}, \\ \Sigma \frac{d\theta}{d\lambda_*} &= \sqrt{\Theta}, \\ \Sigma \frac{d\phi}{d\lambda_*} &= \frac{1}{\Delta} [2Mar + (\Sigma - 2Mr)\xi \operatorname{cosec}^2 \theta]. \end{aligned}$$

con \mathcal{R} y Θ dados por las ecuaciones (2.34) y (2.35)

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= [r^2 + a^2 - a\xi]^2 - \Delta [\eta + (\xi - a)^2], \\ \Theta &= \eta + \cos^2 \theta (a^2 - \xi^2 \operatorname{cosec}^2 \theta) = \eta + (a - \xi)^2 - (a \sin \theta - \xi \operatorname{cosec} \theta)^2, \end{aligned}$$

donde $\xi = L_z/E$ y $\eta = \mathcal{K}/E^2$. La diferencia radica en que en este caso Δ es el definido en la Ec. (5.12).

En lo que sigue, y de la misma forma que en los capítulos anteriores, se adimensionalizan todas las cantidades con la masa del objeto (lo que equivale a reemplazar con $M = 1$ en todas las ecuaciones).

Las órbitas de radio constante son aquellas que determinan el contorno de la sombra del agujero negro y, al igual que en los capítulos anteriores, satisfacen las condiciones $\mathcal{R}(r) = 0 = d\mathcal{R}(r)/dr$. En este caso los parámetros asociados a estas órbitas son

$$\xi(r) = \frac{a^2(1+r) + r[(r-3)r + 2Q]}{a(1-r)} = \xi_K(r) - \frac{2Qr}{a(r-1)}, \quad (5.20)$$

$$\eta(r) = \frac{r^2 \{4a^2(r-Q) - [r(r-3) + 2Q]^2\}}{a^2(r-1)^2} = \eta_K(r) - \frac{4Qr^2(\Delta-r)}{a^2(r-1)^2}, \quad (5.21)$$

donde ξ_K y η_K corresponden a la solución de Kerr expresados en las Ecs. (2.45) y (2.46), respectivamente.

Los parámetros asociados a esta solución de agujero negro se reducen, al menos en cuanto a su forma algebraica, a los correspondientes a Kerr–Newman, Ecs. (2.63) y (2.64), para $Q = q^2$. No obstante, al comparar estas expresiones es necesario recordar que el origen de las cargas es completamente diferente.

5.5. Sombra y observables

La geometría (5.13) es asintóticamente plana y por lo tanto la trayectoria de los fotones son líneas rectas lejos del objeto. La sombra se describe adoptando las coordenadas celestes α y β introducidas en el Capítulo 2. Asumiendo las mismas condiciones que en los capítulos anteriores (posición del observador r_0 tendiendo a infinito y $\theta_0 = \pi/2$) se obtienen las expresiones para las coordenadas celestes dadas por las Ecs. (2.54) y (2.55). La Figura 5.1 muestra el contorno de las sombras de agujeros negros con parámetros de rotación $a = 0$ (fila superior, izquierda), $a = 0,5$

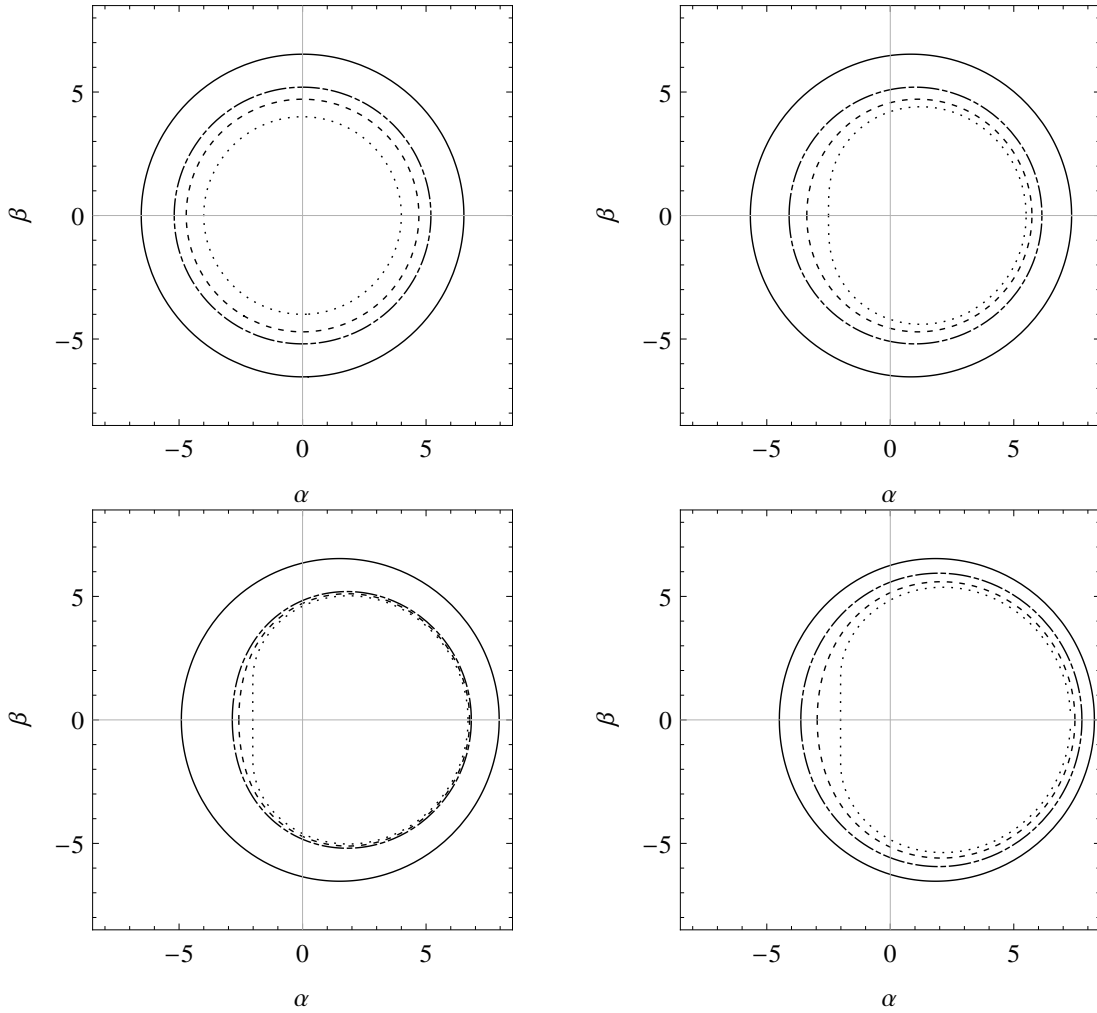


Figura 5.1: Borde de la sombra de un agujero negro situado en el origen de coordenadas con ángulo de inclinación $\theta_0 = \pi/2$, parámetro de rotación a y carga tidal Q . Fila superior, izquierda: $a = 0$, $Q = -2$ (línea continua), 0 (línea de trazos y puntos), 0,5 (línea de trazos) y $Q_c = 1$ (línea de puntos). Fila superior, derecha: $a = 0,5$, $Q = -2$ (línea continua), 0 (línea de trazos y puntos), 0,5 (línea de trazos) y $Q_c = 0,75$ (línea de puntos). Fila inferior, izquierda: $a = 0,9$, $Q = -2$ (línea continua), 0 (línea de trazos y puntos), 0,1 (línea de trazos) y $Q_c = 0,19$ (línea de puntos). Fila inferior, derecha: $a = 1,1$, $Q = -2$ (línea continua), -1 (línea de trazos y puntos), $-0,5$ (línea de trazos) y $Q_c = -0,21$ (línea de puntos). Todas las cantidades se encuentran adimensionalizadas con la masa del agujero negro.

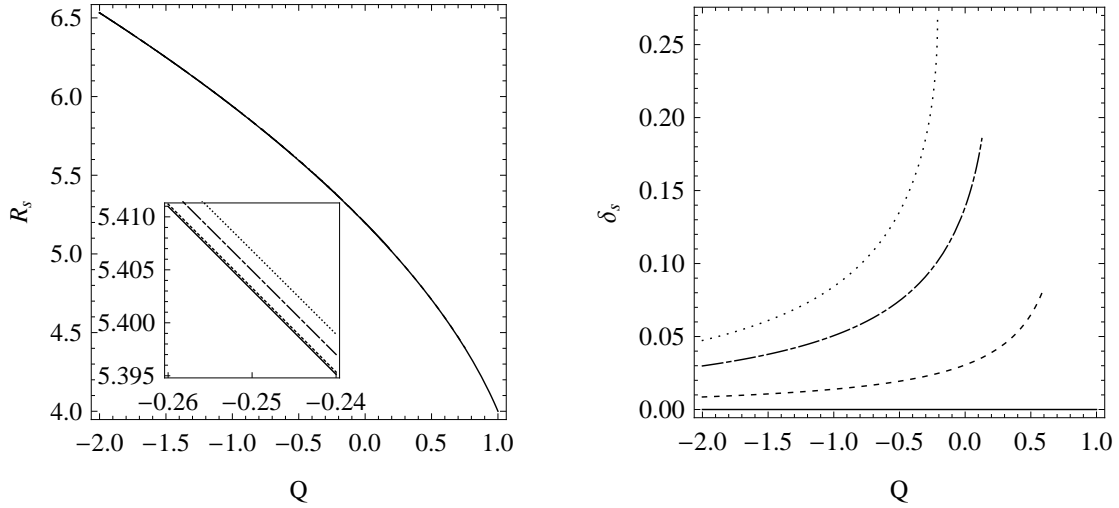


Figura 5.2: Observables R_s y δ_s en función de la carga tidal Q , correspondientes a la sombra de un agujero negro situado en el origen de coordenadas con un ángulo de inclinación $\theta_0 = \pi/2$ y parámetros de rotación $a = 0$ (línea continua), $a = 0,5$ (línea de trazos), $a = 0,9$ (línea de trazos y puntos) y $a = 1,1$ (línea de puntos). Las curvas para diferentes valores de a son similares en el caso de R_s (izquierda); en el cuadro interno el rango de Q es menos amplio y las diferentes curvas pueden ser apreciadas.

(fila superior, derecha), $a = 0,9$ (fila inferior, izquierda), y $a = 1,1$ (fila inferior, derecha), para algunos valores de la carga tidal Q . El efecto de una carga tidal positiva subyace en una disminución en el tamaño de la sombra, al igual que en el caso de Kerr–Newman para el cuadrado de la carga eléctrica [34], mientras que valores negativos generan un aumento del mismo. Las gráficas de los contornos de las sombras de la Figura 5.1 son similares a aquellas obtenidas previamente en la Ref. [41] para otros valores de los parámetros.

Para caracterizar la forma de la sombra se adoptan los observables R_s y δ_s definidos en el Capítulo 2. Mediciones de éstos observables podrían servir en este caso para determinar el parámetro de rotación a y la carga tidal Q del objeto. En

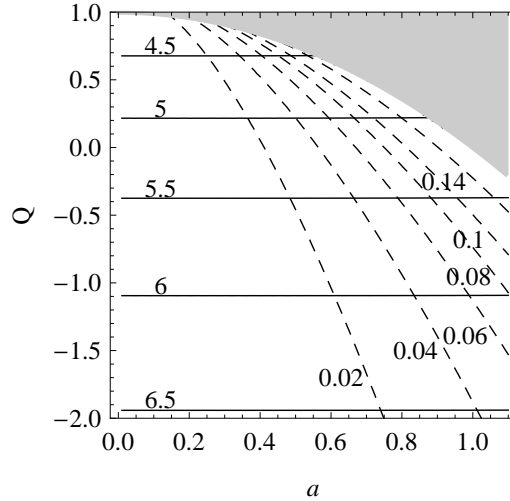


Figura 5.3: Curvas de nivel de los observables R_s y δ_s en el plano (a, Q) para un agujero negro situado en el origen de coordenadas con ángulo de inclinación $\theta_0 = \pi/2$. Los valores correspondientes a R_s y δ_s se encuentran indicados en cada curva. La zona gris corresponde a singularidades desnudas.

la Figura 5.2 se muestra su comportamiento en función de la carga tidal Q para diferentes valores del parámetro de rotación: $a = 0$ (línea continua), $a = 0,5$ (línea de trazos), $a = 0,9$ (línea de trazos y puntos) y $a = 1,1$ (línea de puntos). Se puede ver que el observable R_s (izquierda) tiene un comportamiento similar como función de Q para diferentes valores de a . En el cuadro interno el rango de Q es menos amplio y las curvas correspondientes a los diferentes parámetros de rotación pueden ser apreciadas. Además, se puede notar que, para un valor fijo de Q , la diferencia entre la curva correspondiente a $a = 0$ y la asociada a $a = 1,1$ es de orden 10^{-3} , significando ésto una variación débil del tamaño de la sombra con a , lo cual es esperable si se tienen en cuenta los casos de Kerr y Kerr–Newman. Valores positivos de Q generan una disminución en el tamaño (y por lo tanto, en R_s) de la sombra, y valores negativos producen un aumento en el mismo. El parámetro de distorsión δ_s (derecha) se mantiene constante e igual a cero en el caso no rotante $a = 0$ (línea

continua) y crece en función de Q para $a = 0,5$ (línea de trazos), $a = 0,9$ (línea de trazos y puntos) y $a = 1,1$ (línea de puntos). La distorsión es máxima cuando Q llega a su valor límite $Q_c = 1 - a^2$. Cuando la carga tidal toma valores negativos, la distorsión en la forma de la sombra respecto de la circunferencia de referencia correspondiente decrece con Q . Para Q fijo, la deformación de la sombra aumenta con a .

Las curvas de nivel de R_s y δ_s en el plano (a, Q) se muestran en la Figura 5.3 para valores representativos de los parámetros. Si R_s y δ_s se obtienen de observaciones, el punto en el plano en el que se intersectan las curvas proporciona los valores correspondientes del parámetro de rotación a y de la carga tidal Q .

5.6. Singularidades desnudas

Según la conjetura del censor cósmico [91], no es posible obtener una singularidad desprovista de un horizonte como resultado del colapso gravitacional de materia. En otras palabras: las singularidades desnudas no existen en la naturaleza. Sin embargo, esta conjetura no ha sido demostrada aún, y por lo tanto no hay razones suficientes para descartar este tipo de soluciones, que aparecen en la gravitación clásica y en teorías modificadas [22, 123, 124]. Un ejemplo de estas últimas es la teoría discutida en este Capítulo.

Las órbitas inestables de fotones juegan un papel importante en el caso de las singularidades desnudas ya que, al igual que en el caso de los agujeros negros estudiados en las secciones anteriores, están asociadas al borde de la sombra. Para estas órbitas esféricas, ubicadas en algún r , se satisface que $\Delta(r) > 0$. En el caso de los agujeros negros la condición anterior se satisface en $r > r_+$ o $r < r_-$, mientras que en el caso de las singularidades desnudas la condición se cumple cualquiera sea r . Las condiciones que dan lugar a la existencia de estas órbitas son las mismas que en el caso de los agujeros negros: $\mathcal{R} = d\mathcal{R}/dr = 0$, y la inestabilidad surge de

$d^2\mathcal{R}/dr^2 > 0$. En el caso de que $a^2 + Q < M^2$, las órbitas inestables se ubican en r tal que $r > r_+$ o $r < 0$, mientras que si $a^2 + Q > M^2$ se encuentran en $r > r_{min}$ o $r < 0$, donde $r_{min} = M - [M(M^2 - a^2 - Q)]^{1/3}$. Para un agujero negro las órbitas esféricas dentro del horizonte (como las que tienen lugar en $r < 0$) no son relevantes al estudiar las sombras, ya que luego de atravesar el horizonte de eventos, la luz no puede escapar al infinito. Sin embargo, en el caso de una singularidad desnuda, las órbitas internas en $r < 0$ sí son relevantes ya que algunos fotones cercanos a ella pueden, eventualmente, salir en dirección del observador.

5.6.1. Forma aparente

Cuando $Q > Q_c = 1 - a^2$, es decir, si $a^2 + Q > 1$, el horizonte desaparece (ver Ec. (5.16)) y para $a = 0$ una singularidad desnuda puntual aparece en el origen, mientras que si $a \neq 0$ se obtiene una singularidad desnuda con forma de anillo. La forma aparente de estos objetos cambia radicalmente respecto de la asociada a agujeros negros.

Si $a = 0$, es decir una singularidad desnuda no rotante con carga tidal, la región dentro del la borde no es oscura y la sombra consiste de una circunferencia oscura con un punto central oscuro, correspondientes a la esfera de fotones y a la singularidad, respectivamente. Si $a \neq 0$, los fotones que llegan al observador son aquellos para los cuales el radicando de la Ec. (2.51) es mayor o igual a cero. En el caso de las singularidades desnudas, los extremos del intervalo de valores posibles de r están dados por r_{min} y la raíz de mayor valor de la ecuación $\beta^2 = 0$. Permitiendo a r variar entre esos dos valores en las Ecs. (2.50) y (2.51), y considerando ambos signos para β , se obtiene en este caso una curva abierta en el cielo del observador al graficar β vs. α . Para valores grandes de los parámetros a y Q , el valor de r_{min} puede exceder al de la raíz más grande de $\beta^2 = 0$, lo que se traduce en la pérdida de la esfera de fotones.

Por lo tanto, en el caso de las singularidades desnudas, la órbita inestable de

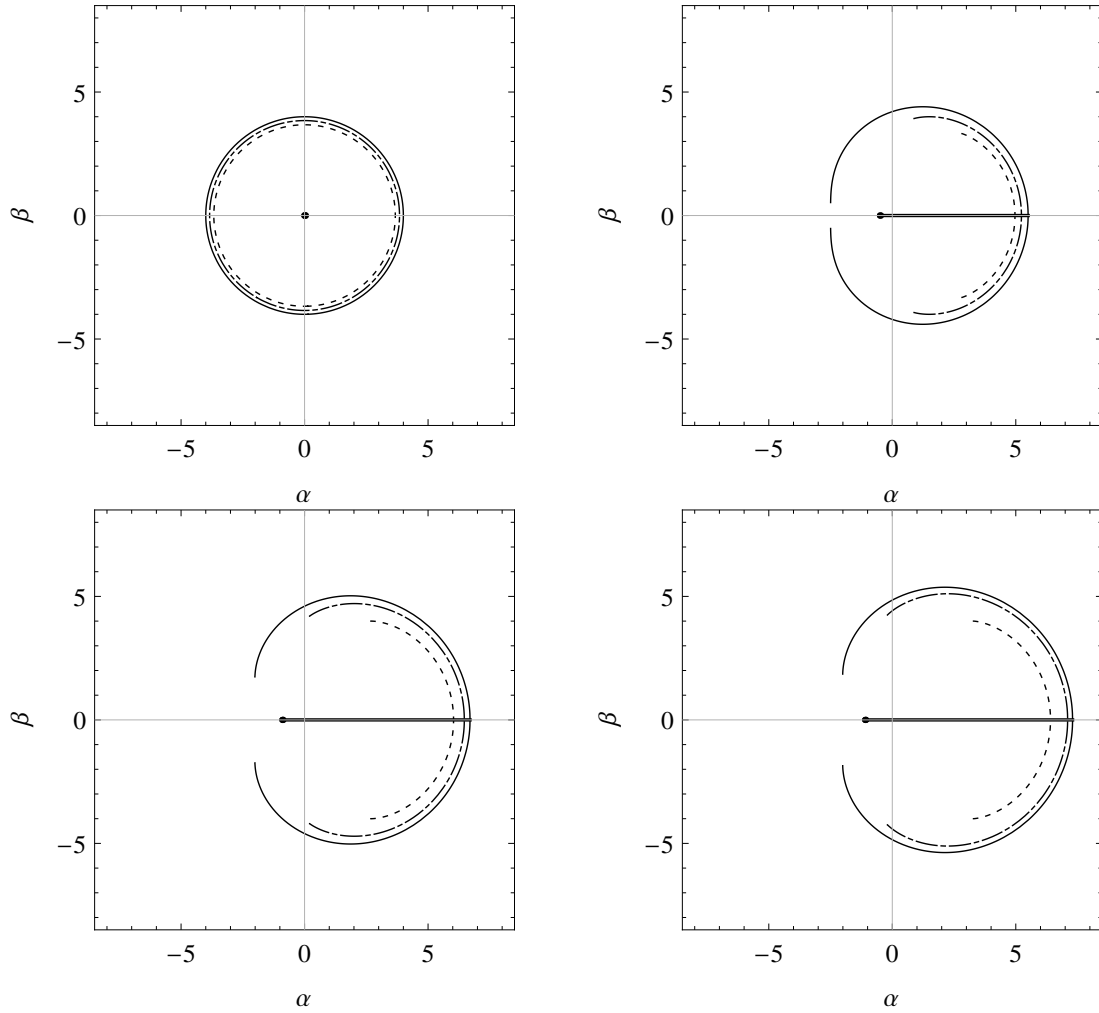


Figura 5.4: Sombras correspondientes a una singularidad desnuda situada en el origen de coordenadas con ángulo de inclinación $\theta_0 = \pi/2$, parámetro de rotación a y carga tidal Q . Fila superior, izquierda: $a = 0$, $Q = Q_c + 10^{-5} = 1 + 10^{-5}$ (línea continua), 1,07 (línea de trazos y puntos) y 1,125 (línea de trazos). Fila superior, derecha: $a = 0,5$, $Q = Q_c + 10^{-5} = 0,75 + 10^{-5}$ (línea continua), 1 (línea de trazos y puntos) y 1,2 (línea de trazos). Fila inferior, izquierda: $a = 0,9$, $Q = Q_c + 10^{-5} = 0,19 + 10^{-5}$ (línea continua), 0,5 (línea de trazos y puntos) y 1 (línea de trazos). Fila inferior, derecha: $a = 1,1$, $Q = Q_c + 10^{-5} = -0,21 + 10^{-5}$ (línea continua), 0,1 (línea de trazos y puntos) y 1 (línea de trazos). Todas las cantidades se encuentran adimensionalizadas con la masa de la singularidad desnuda.

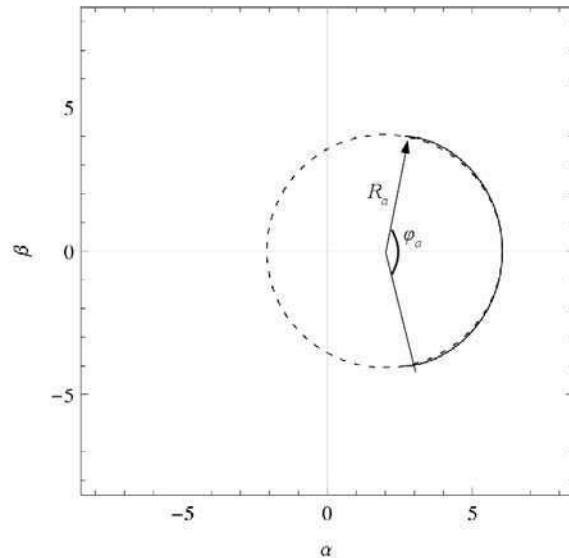


Figura 5.5: Singularidades desnudas: observables R_a y φ_a . El primero se define como el radio de la circunferencia que pasa por los extremos del arco y por el punto en el que corta al eje horizontal; el segundo es el ángulo subtendido por los extremos del arco, medido desde el centro de la circunferencia mencionada. Las coordenadas se encuentran adimensionalizadas con la masa del agujero negro.

fotones de radio positivo da lugar a un arco abierto en vez de una curva cerrada. Los extremos del arco poseen coordenadas celestes (α, β) , dadas por las expresiones (2.50) y (2.51) donde ξ y η se evalúan en r_{min} . Los fotones cercanos a ambos lados de este arco pueden llegar al observador gracias a la ausencia del horizonte. Por otra parte, las órbitas inestables de radio negativo forman una mancha oscura: el observador nunca podrá detectar la luz proveniente de esas direcciones debido a que ésta escapa hacia el otro infinito luego de atravesar el anillo singular. El punto oscuro asociado a la geodésica nula principal se encuentra dentro de esa mancha.

Cuando el observador se sitúa en el plano ecuatorial el arco persiste y la mancha desaparece. Este hecho se debe a que los rayos de luz que viajan en dirección de los radios negativos siempre caen en el anillo singular. Estas geodésicas nulas resultan

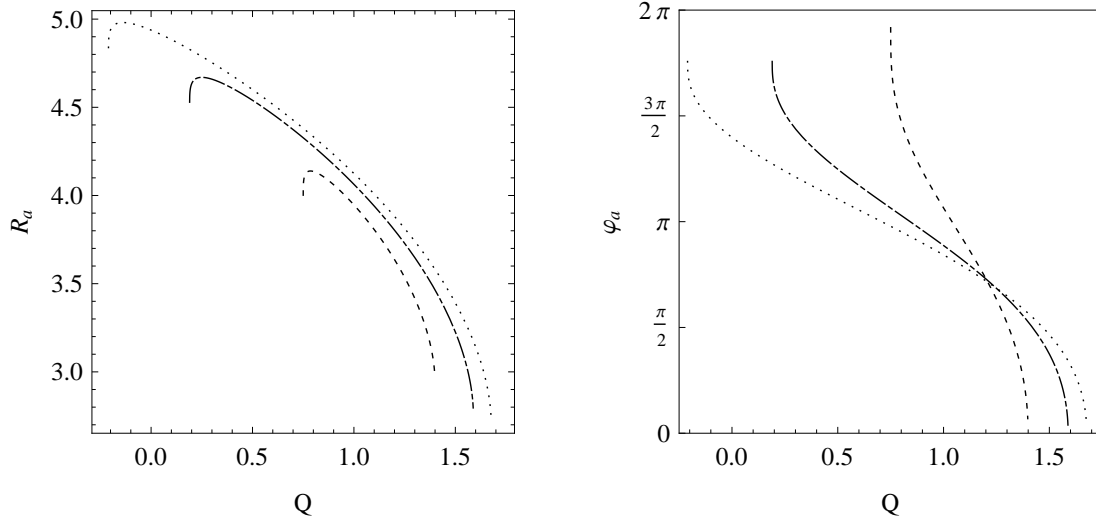


Figura 5.6: Observables R_a y φ_a en función de la carga tidal Q , correspondientes a la sombra de una singularidad desnuda situada en el origen de coordenadas con ángulo de inclinación $\theta_0 = \pi/2$ y parámetros de rotación $a = 0,5$ (línea de trazos), $a = 0,9$ (línea de trazos y puntos) y $a = 1,1$ (línea de puntos).

en una línea recta, uno de cuyos extremos corresponde a la geodésica nula principal. Al variar el ángulo de inclinación θ_0 desde 0 a $\pi/2$ la mancha oscura se contrae hasta transformarse en un punto, que resulta ser el extremo de la línea recta mencionada (y la geodésica nula principal).

En la Figura 5.4 se muestran sombras de singularidades desnudas situadas en el origen de coordenadas con ángulo de inclinación $\theta_0 = \pi/2$, y parámetros de rotación $a = 0$ (fila superior, izquierda), $a = 0,5$ (fila superior, derecha), $a = 0,9$ (fila inferior, izquierda) y $a = 1,1$ (fila inferior, derecha), para diferentes valores de carga tidal Q , mayores que el valor crítico correspondiente Q_c . Para $a = 0$ se puede ver que la sombra es una circunferencia cuyo radio disminuye con la carga tidal, con un punto oscuro en el centro. Si $a \neq 0$ la sombra consiste de un arco oscuro y una línea recta con un extremo en el punto oscuro. El arco se cierra a medida que el valor de la carga se acerca a Q_c y se abre al aumentar la carga.

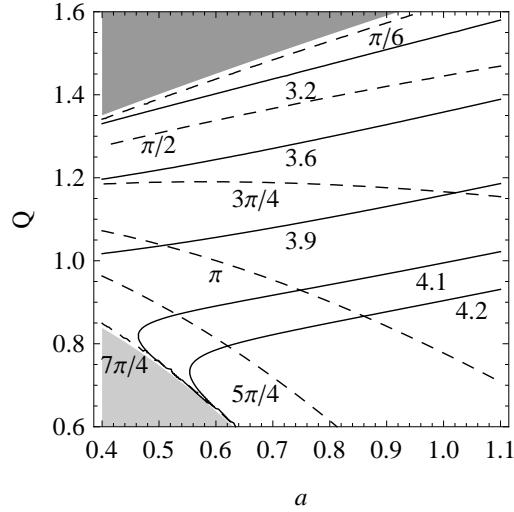


Figura 5.7: Curvas de nivel de los observables R_a (línea continua) y φ_a (línea de trazos) en el plano (a, Q) , correspondientes a una singularidad desnuda situada en el origen de coordenadas con ángulo de inclinación $\theta_0 = \pi/2$. Los valores de R_a y φ_a se indican en las curvas. La zona gris clara corresponde a singularidades cubiertas por horizontes, mientras que la zona gris oscura corresponde a objetos que perdieron su esfera de fotones y por lo tanto no poseen un arco asociado.

5.6.2. Observables R_a y φ_a

La forma aparente de las singularidades desnudas se pueden estudiar a partir de los observables que caracterizan el tamaño y la apertura del arco. Se trata de los definidos en la Ref. [37] para la geometría de Kerr y son el radio R_a y el ángulo central φ_a (ver Figura 5.5). El valor de R_a se define como el radio de una circunferencia que pasa por el punto medio del arco y por sus extremos. El observable φ_a se determina a partir del ángulo subtendido por el arco, medido desde el centro de la circunferencia utilizada para definir R_a . Al igual que en el caso de agujeros negros, cuando el ángulo de inclinación del objeto es conocido, si se obtienen los valores de R_a y φ_a de observaciones, las curvas de nivel de R_a y φ_a en el plano (a, Q) pueden ser utilizadas para hallar el parámetro de rotación a y la carga tidal Q . Ambos observables fueron

calculados numéricamente en función de a y Q .

En la Figura 5.6 (izquierda) se muestra al observable R_a en función de la carga tidal Q , para $\theta_0 = \pi/2$ y diferentes valores del parámetro de rotación de la singularidad desnuda: $a = 0,5$ (línea de trazos), $a = 0,9$ (línea de trazos y puntos) y $a = 1,1$ (línea de puntos). El comportamiento de R_a es similar para los diferentes valores de a , creciendo lentamente para valores de Q cercanos a Q_c y luego disminuyendo. El crecimiento inicial se relaciona con la forma particular que adquiere la sombra debido a la rotación y con la forma de definir la circunferencia de referencia. Por otro lado, el decrecimiento continúa hasta que el arco generado por los fotones provenientes de la esfera de fotones se transforma en un punto para luego desaparecer, indicando la pérdida de dicha esfera. Tal como se esperaba, el radio es una función creciente del parámetro de rotación, lo cual se deduce de la posición de las curvas para los distintos valores de a . En la Figura 5.6 (derecha) se observa la gráfica del ángulo φ_a en función de Q , para $\theta_0 = \pi/2$ y $a = 0,5$ (línea de trazos), $a = 0,9$ (línea de trazos y puntos), y $a = 1,1$ (línea de puntos). El ángulo subtendido por los extremos del arco, medidos desde el centro de la circunferencia de referencia, disminuye con Q . Los valores límite son $\varphi_a = 2\pi$ y $\varphi_a = 0$, asociados a situaciones en las que la carga toma el valor crítico Q_c (y la singularidad se encuentra cubierta por un horizonte) y se pierde la esfera de fotones, respectivamente.

Los valores del parámetro de rotación a y de la carga tidal Q se pueden obtener a partir de la intersección de las curvas de nivel de R_a y φ_a en el plano (a, Q) . En la Figura 5.7 se muestran diferentes curvas para valores representativos de los observables.

5.7. Discusión

En el caso de los agujeros negros, los resultados obtenidos en cuanto al tamaño y la forma de la sombra, indican que para un valor fijo de a , la presencia de una

a	0				0,9			
Q	-0,5	-0,1	0	0,1	-0,5	-0,1	0	0,1
$\theta_s(\mu\text{as})$	28,605	27,006	26,572	26,120	28,612	27,018	26,586	26,136
$\delta_s(\%)$	0	0	0	0	7,45	11,8	13,9	17,2

Tabla 5.1: Tamaño angular θ_s y deformación δ_s (%) para el agujero negro del centro galáctico considerando diferentes valores del parámetro de rotación a y de la carga tidal Q . Las cantidades se encuentran adimensionalizadas con la masa del agujero negro M .

carga tidal negativa (positiva) lleva a un aumento (disminución) en el valor de R_s (y por ende en el tamaño de la sombra), respecto al que se obtendría en la geometría de Kerr. Mientras que un valor negativo (positivo) de Q genera una sombra menos (más) distorsionada que en el caso del espacio-tiempo de Kerr, lo que corresponde a un valor menor (mayor) de δ_s .

El radio angular θ_s del agujero negro, estimado a partir del observable R_s , se puede escribir como en el Capítulo 3 (ver Sec. 3.6). Por lo tanto, se pueden calcular θ_s y δ_s (%) asociados a diferentes valores del parámetro de rotación a y de la carga tidal Q (medidos por un observador lejano en el plano ecuatorial), para el agujero negro del centro galáctico ($M = 4,3 \times 10^6 M_\odot$ y $D_o = 8,3$ kpc [104]). Los resultados se muestran en la Tabla 5.1 para valores ilustrativos de a y Q .

El caso de Schwarzschild se obtiene para $a = Q = 0$ y es $\theta_s = 26,572 \mu\text{as}$ y $\delta_s = 0$; si $a = 0,9$ y $Q = 0$ se tiene un caso particular de Kerr para el que $\theta_s = 26,586 \mu\text{as}$ y $\delta_s = 0,139$. Se puede deducir a partir de la tabla que son necesarias resoluciones menores a $1 \mu\text{as}$ para poder extraer información útil de futuras observaciones de la sombra del agujero negro supermasivo del centro galáctico.

En lo que a singularidades desnudas concierne, éstas serían difíciles de detectar (en caso de existir en la naturaleza): si bien el arco asociado a la sombra de estos

objetos es estrictamente unidimensional, en un escenario realista la vecindad del arco también se vería oscurecida y la sombra adquiriría la forma de una “luna” (menguante) oscura, al igual que lo que ocurre en el caso de Kerr [37]. De manera que, si bien existe la posibilidad de detectar la sombra de una singularidad desnuda, hacerlo sería más dificultoso que en el caso de un agujero negro. Para un parámetro de rotación a dado, el tamaño característico del arco es ligeramente menor que el del disco deformado correspondiente a una carga tidal que satisfaga $a^2 + Q \leq 1$, para la cual la singularidad se encuentra cubierta por un horizonte.

Capítulo 6

Conclusiones finales

En esta Tesis se realizó un estudio de las llamadas sombras de agujeros negros rotantes en tres teorías de gravitación alternativas a la Relatividad General. La importancia observacional de las sombras en el cielo de un observador lejano radica en el hecho de que su apariencia no depende de ninguna suposición teórica en cuanto a la geometría del espacio-tiempo, así como tampoco sobre los procesos físicos que tienen lugar en las inmediaciones del objeto. Esta afirmación constituye el argumento principal en favor de estudiar este tipo de fenómenos asociados al régimen gravitatorio fuerte.

En el Capítulo 2 se consideró el caso de los agujeros negros rotantes clásicos y asintóticamente planos, es decir aquellos que pertenecen a la familia de soluciones de Kerr y Kerr–Newman, de la Relatividad General. La geometría del espacio-tiempo alrededor de estos objetos depende de la masa, del momento angular y, en el caso de Kerr–Newman, también de la carga eléctrica. Por tratarse de una geometría estacionaria y con simetría axial, se conservan tanto la energía como la proyección del momento angular a lo largo del eje de simetría para una partícula que se mueve sobre una geodésica. Por su parte, la masa también se conserva y su valor surge de la contracción doble de la métrica con el momento. Gracias a la presencia de una simetría oculta descubierta por B. Carter, las partículas (con o sin masa) que se

mueven en el espacio-tiempo de Kerr cuentan con una cuarta cantidad conservada a lo largo de las geodésicas, que es la constante de Carter. Ésta posee una expresión algebraica que es similar a la descrita para la masa, pero en este caso surge de la contracción cuadrática del tensor de Killing de segundo rango con el momento de la partícula. Su presencia posibilita la separabilidad de la ecuación de Hamilton–Jacobi y la integrabilidad de las ecuaciones de movimiento. El caso de interés de este trabajo no fue la integración de las trayectorias sino la forma aparente de la esfera de fotones. Para ello se hallaron las condiciones que se deben satisfacer para la ocurrencia de órbitas no planares de fotones, inestables y de radio constante, así como también los valores de los parámetros en cada una de estas posibles órbitas. Estos parámetros, contruidos con las constantes de movimiento E , L_z y \mathcal{K} , se relacionan con los parámetros de impacto en el infinito α y β , y por lo tanto el contorno de la sombra del agujero negro, es decir su borde óptico, se obtiene a partir de la gráfica implícita de β vs. α , que varía según el ángulo desde el cual se observe. Se obtuvieron las sombras para agujeros negros de Kerr y Kerr–Newman para diferentes valores del parametro de rotación adimensionalizado con la masa del agujero negro y para diferentes ángulos de observación θ_0 . Los contornos, que en el caso de Schwarzschild son circunferencias de radio $3\sqrt{3}M$, carecen de la simetría del caso estático: el lado asociado a los fotones corrotantes se encuentra más cerca de la posición del agujero negro en el centro del plano del observador y sufre un aplanamiento, mientras que el lado opuesto, asociado a los fotones contrarrotantes, es más curvado. Los efectos más significativos se obtienen cuando la observación se realiza desde el plano ecuatorial. Por otra parte, la presencia de la carga eléctrica en el caso de Kerr–Newman tiende a reducir el tamaño de la zona oscura. Las propiedades de las sombras, como su tamaño y su deformación respecto de un disco, pueden ser cuantificadas en términos de los observables descritos en el Capítulo 2.

En los Capítulos 3, 4 y 5 se realizó un analisis similar al detallado en el párrafo anterior, verificando la separabilidad de la ecuación de Hamilton–Jacobi, encontran-

do los parámetros de impacto en el infinito a través de las cantidades conservadas y obteniendo la forma aparente del borde óptico del agujero negro, pero esta vez para soluciones provenientes de teorías de gravitación modificadas, como la de Chern–Simons, la de Kaluza–Klein (o Einstein–Maxwell–escalar para un acoplamiento no mínimo $\gamma = \sqrt{3}$ entre el campo escalar y el vectorial) y un modelo de branas del tipo de Randall–Sundrum. Todas ellas son asintóticamente planas y se postulan como teorías efectivas fenomenológicamente viables; su motivación radica en su estrecha relación con diferentes límites de ciertas teorías de cuerdas. La gravitación modificada de Chern–Simons consiste en aumentar la acción de Einstein–Hilbert con un término proporcional a la densidad de Pontryagin de la geometría, que viola paridad y que contiene un campo escalar. Se trata de una teoría para la que la solución de Schwarzschild persiste como tal, lo que la hace atractiva y relevante a nivel astrofísico. La solución exacta de agujero negro rotante permanece desconocida y sólo se conoce en el límite de rotación y acoplamiento débiles. Dicha solución aproximada es la estudiada en el Capítulo 3. El agujero negro rotante proveniente de la gravitación del tipo Einstein–Maxwell–escalar con acoplamiento no mínimo se estudió en el Capítulo 4. Éste recibe el nombre de agujero negro de Kaluza–Klein debido a que satisface las ecuaciones de movimiento que se obtienen al variar la acción de una teoría Einstein–Maxwell–escalar con acoplamiento $\gamma = \sqrt{3}$, cuya forma es idéntica a la que se obtiene a partir de la acción de Kaluza, luego de una reducción dimensional. Se trata de un agujero negro cargado que satisface un límite del tipo de Kerr sobre su momento angular. En el Capítulo 5 se estudió el agujero negro rotante con carga tidal proveniente de un modelo de branas del tipo de Randall–Sundrum. Se trata de una solución que se obtiene a partir de postular un *ansatz* de Kerr–Schild para la métrica sobre la brana, lo cual genera que las ecuaciones sobre ella se desacoplen de las ecuaciones 5-dimensionales. Sobre la brana, queda una ecuación que remite a la de la gravedad de Einstein–Maxwell, pero donde el término de la derecha no es el tensor de energía-momento del campo electromagnético sino que se trata de la

proyección del tensor de Weyl 5-dimensional. Esto permite mapear soluciones del modelo de branas en soluciones de Einstein–Maxwell, con la diferencia fundamental de que la carga que aparece en las ecuaciones posee un origen puramente gravitacional y codifica los efectos no locales del *bulk* sobre la brana. La forma algebraica de la métrica de este agujero negro es similar a la de Kerr–Newman, pero con la diferencia de que la carga no aparece elevada al cuadrado y por lo tanto el término asociado a ella puede tomar valores negativos.

En todos estos casos se obtuvieron las sombras vistas desde el plano ecuatorial, para diferentes parámetros de rotación y diferentes valores de un parámetro particular asociado a la solución estudiada. Además, se las caracterizó según los observables R_s y δ_s , vinculados al tamaño y la deformación, respectivamente. Los resultados más importantes y relevantes se pueden enumerar de la siguiente forma:

- i.* En el caso de Chern–Simons, en primer lugar se verificó la separabilidad de la ecuación de Hamilton–Jacobi a orden $a\gamma^2$, que es el orden de validez de la aproximación. Luego se confirmó la relajación del efecto de arrastre de los sistemas inerciales a partir del alejamiento de las órbitas de los fotones corrotantes, que generan que el lado aplanado de la sombra del caso de Kerr se curve y que se aleje al aumentar el valor de la constante de acoplamiento de la teoría. Se halló que el tamaño de la sombra crece con el parámetro de rotación y con el valor de la constante de acoplamiento. Además, se encontró que en esta teoría, para un valor dado del parámetro de rotación, la sombra es mayor y menos distorsionada que en la gravitación clásica, siempre que γ se mantenga por debajo de un valor crítico. Si el acoplamiento de la teoría excede ese valor, la deformación es en sentido opuesto, lo que significa un comportamiento de δ_s inverso al de la solución de Kerr.
- ii.* En el caso del agujero negro dilatónico de Kaluza–Klein, se estudió el efecto de la presencia de la carga eléctrica y se encontró que para valores fijos del parámetro de rotación, de la masa y de la carga, la presencia del campo

dilatónico genera que la sombra sea de mayor tamaño y menos deformada respecto de la correspondiente a la solución de la Relatividad General con los mismos parámetros. Se encontró también que estos objetos son capaces de almacenar grandes valores de carga –mayores que en el caso de Kerr–Newman– antes de perder su horizonte. Se halló que el tamaño de la sombra disminuye con la carga y llega hasta valores que difieren de las predicciones de la Relatividad General, antes de perder el horizonte. Este hecho es más significativo en el caso de los agujeros negros no rotantes, cuya sombra adquiere radio nulo cuando la carga toma el valor máximo, a diferencia de lo que ocurre en el caso de Reissner–Nordström, en el que las sombras alcanzan un tamaño mínimo, distinto de cero, para el valor máximo de la carga. Por otra parte, se encontró que la deformación de las sombras aumenta con la carga, y tanto este observable como el radio de la circunferencia de referencia aumentan su valor con la rotación, característica que es compartida con el caso de Kerr–Newman.

- iii.* Para la solución proveniente de mundos brana, se verificó que la presencia de la carga tidal Q , capaz de tomar valores negativos, genera diferencias sustanciales respecto del caso de Kerr–Newman. Si la carga tidal toma valores positivos, los resultados que se obtienen coinciden con las predicciones de la Relatividad General para agujeros negros rotantes con cargas eléctricas $q = \sqrt{Q}$, mientras que valores negativos generan que las sombras crezcan en tamaño hasta valores imposibles en el caso clásico, y que sus contornos sean cada vez menos deformados respecto de una circunferencia. Respecto del observable R_s , se encontró que, para un valor fijo del parámetro a , éste decrece con la carga tidal Q . Como consecuencia de este comportamiento, si la carga es negativa, las sombras de estos agujeros negros tienen un tamaño mayor que en la geometría de Kerr, y viceversa. En cuanto a la deformación δ_s , este observable aumenta con Q de manera que para $Q < 0$ la sombra es menos deformada, y si $Q > 0$ ocurre lo contrario. Tanto el observable R_s como δ_s aumentan con el valor

del parámetro de rotación adimensionalizado con la masa. Una característica significativa de este tipo de soluciones que la hace interesante y que la diferencia de la Relatividad General, es la posibilidad de contar con agujeros negros que violen el límite del tipo de Kerr, y que por lo tanto puedan rotar con parámetros mayores a 1, en unidades de masa M , lo que tiene su origen en la posibilidad de tener cargas tidales negativas. También se estudió el caso de las singularidades desnudas, para las cuales las sombras vienen dadas por una curva abierta en forma de arco en el cielo del observador, con luz proveniente de ambos lados de ella. Estas formas aparentes se analizaron en términos de observables relacionados al tamaño efectivo del arco y de su ángulo de apertura. En un escenario realista, los alrededores del arco se oscurecerían y la imagen se vería como la de una luna menguante oscura. Entonces, en principio, sería posible observar este tipo de imágenes asociadas a las singularidades desnudas. Sin embargo, por tratarse de figuras cuasi-unidimensionales, su detección será más dificultosa que la de la sombra de los agujeros negros, de existir este tipo de objetos en la naturaleza. Más aún cuando, para un valor dado del parámetro a/M , el tamaño efectivo del arco es más pequeño que el del disco distorsionado asociado a un agujero negro con el mismo valor de a/M .

Todas las soluciones estudiadas cuentan con dos parámetros que requieren de mediciones, si el ángulo desde el cual se observan las imágenes es conocido de forma independiente. Uno de esos parámetros es el de rotación a adimensionalizado con la masa del agujero negro M . La determinación del segundo parámetro depende de la solución estudiada y en el caso de la de Chern–Simons se trata de la constante de acomplamiento de la teoría, mientras que en el de Kaluza–Klein es la carga eléctrica y en el de mundos brana, la carga tidal. Las curvas de nivel de los observables R_s y δ_s en los planos definidos por a/M y γ , Q_{KK} o Q_{tidal} , respectivamente, que se obtuvieron para cada una de las soluciones constituyen una herramienta importante a la hora de estudiar las propiedades de estos objetos, ya que mediciones lo suficientemente

precisas de los observables pueden caracterizar al agujero negro dentro de cada una de las teorías. En los Capítulos 4 y 5, las curvas calculadas se intersectan una sola vez en el plano (a, Q_{KK}) y (a, Q_{tidal}) , lo cual establece una relación unívoca entre observables y propiedades físicas del agujero negro. Esto no ocurre en el caso estudiado en el Capítulo 3, para el cual se encuentra que existe una región en el plano (a, γ) en la que se observa degeneración. No obstante, no se trata de resultados concluyentes ya que no es claro que esta ambigüedad persista para la aún desconocida solución exacta.

Los resultados de cada uno de los Capítulos se analizaron en un contexto astrofísico observacional. En el Capítulo 3 se discutió el límite sobre el acoplamiento de la teoría hallado en la Ref. [68] y se concluyó que los candidatos naturales para observar posibles desviaciones de la Relatividad General son los agujeros negros de masas intermedias (si su existencia se confirma), teniendo en cuenta el compromiso que existe entre la magnitud de la desviación y el ángulo subtendido por el objeto visto desde la Tierra. En los Capítulos 4 y 5 se discutieron los resultados a la luz del caso del agujero negro supermasivo del centro galactico. En el caso de la solución rotante de Kaluza–Klein, se compararon los tamaños angulares y deformaciones relativas considerando diferentes valores del parámetro de rotación y de la carga eléctrica para Sgr A*. Las desviaciones respecto de los resultados predichos por la Relatividad General son más significativas para $A = 0,5$ y $Q = 0,4$, valores para los que el tamaño angular difiere en un 0,1% respecto del correspondiente a la solución de Kerr–Newman, para los mismos valores de los parámetros. Para el caso del agujero negro rotante de mundos brana también se obtuvieron los valores del tamaño angular y de la deformación relativa de la sombra del agujero negro del centro galáctico, para diferentes combinaciones de rotación y carga tidal. Tanto en este último caso como en el estudiado en el Capítulo 4, son necesarios instrumentos de observación con resoluciones del orden de, por lo menos, $1 \mu\text{as}$ para poder detectar desviaciones respecto de la Relatividad General. Si lo que se desea es no

solamente contrastar una teoría particular con la Relatividad General, sino también realizar comparaciones entre diferentes teorías de gravedad modificadas como las que se discuten en esta Tesis, serán necesarias resoluciones mejoradas en dos o tres ordenes de magnitud respecto de la mencionada.

La observación directa de agujeros negros (o de singularidades desnudas) es uno de los objetivos principales de la astrofísica observacional y será posible en un futuro cercano. Las sombras serán una de las principales características de interés, ya sea que el agujero negro se encuentre iluminado por una fuente de mayor tamaño angular o tenga un disco o flujo de acreción asociado. De todos los (candidatos a) agujeros negros conocidos, el del centro galáctico, Sgr A*, es el que tiene las mayores probabilidades de ser observado hasta distancias del orden de su horizonte de eventos.

A pesar de la extinción que se produce debido al medio interestelar, que impide su detección en longitudes de onda correspondientes a luz visible y ultravioleta, Sgr A* ha sido detectado en radio, en infrarojo y en rayos X. En la Ref. [125] se estudió el espectro de radiación proveniente del centro galáctico en longitudes de onda entre 20 cm y 1 mm, detectándose un exceso en la región submilimétrica. Esta última característica resulta particularmente interesante ya que estaría relacionada con la existencia de una región compacta emisora de radiación sincrotrón [125]. En la Ref. [126] se reportó la presencia de una región compacta emisora en radio en el centro galáctico en longitudes de onda cercanas a 1,4 mm, mientras que en 2008 Doeleman et al. [127] reportaron la observación de una estructura de la escala del horizonte de eventos de Sgr A* en longitudes de onda cercanas a 1,3 mm. Por otro lado, en longitudes de onda milimétricas la estructura intrínseca de la fuente domina por sobre el *scattering* en el medio interestelar y la región alrededor de Sgr A* se vuelve ópticamente delgada.

Las longitudes de onda (sub)milimétricas permiten observaciones basadas en la técnica de interferometría *VLBI* (*Very Long Baseline Interferometer technique*). La

atmósfera terrestre es transparente hasta longitudes de onda del orden de 0,3 mm y las observaciones pueden realizarse desde la superficie del planeta. La posibilidad de observar la sombra asociada al agujero negro del centro galáctico a través de este método fue propuesta en la Ref. [31], a partir de simulaciones para agujeros negros de Schwarzschild y de Kerr rodeados por un plasma emisor en caída libre y por cascaras keplerianas, respectivamente. Los contornos de las sombras, visualizados como anillos brillantes, y sus propiedades son independientes de la forma específica del flujo de acreción y se mantienen estables aún en condiciones de gran variabilidad [43]. La densidad de flujo estimada para el contorno brillante de la sombra del agujero negro del centro galáctico es del orden de $1/15$ del flujo total de la fuente en longitudes de onda $\lesssim 0,8$ mm [108]. De manera que su intensidad relativa y constancia temporal lo hacen un candidato ideal para las observaciones mediante el método *VLBI*.

El telescopio Event Horizon (*circa* 2020) se encuentra proyectado para llevar a cabo mediciones desde Tierra en longitudes de onda (sub)milimétricas tanto del centro galáctico como de galaxias cercanas. Éste consiste de telescopios dispersos sobre la superficie terrestre que, en conjunto, forman un telescopio de alta resolución de tamaño planetario [109] que alcanzará una resolución de $15 \mu\text{as}$ en frecuencias de 345 GHz en los próximos años [45]. Además de este proyecto, otras misiones espaciales como RadioAstron y Millimetron serán capaces de realizar mediciones en radio, y MAXIM en rayos X. La primera es un radio-telescopio lanzado en 2011, con resoluciones angulares de entre 1 y $10 \mu\text{as}$ [38–40, 110]. La misión Millimetron, contará con resoluciones de $0,3 \mu\text{as}$, o menores, en longitudes de onda de 0,4 mm [108]. El proyecto MAXIM es un interferómetro de rayos X que se emplazará en el espacio con una resolución angular esperada de $0,1 \mu\text{as}$ [111]. Eventualmente, estos instrumentos serán capaces de resolver la sombra del agujero negro supermasivo del centro galáctico, así como también la correspondiente a agujeros negros en los centros de galaxias cercanas, como M87 [108].

La detección de las sombras, combinada con otras observaciones, permitirá conocer los parámetros físicos de los objetos. Sin embargo, para poder detectar las sutiles desviaciones de la Relatividad General mencionadas a lo largo del trabajo, y para poder establecer comparaciones entre diferentes teorías de gravitación, como las estudiadas en esta Tesis, serán necesarias resoluciones del orden de $0,01 \mu\text{as}$, o incluso mejores. Por lo tanto, no será posible distinguir entre las diferentes teorías consideradas hasta que se desarrolle una próxima generación de instrumentos.

La investigación realizada en esta Tesis sobre las sombras de los agujeros negros no se agota en las geometrías estudiadas. Existen diferentes posibilidades de continuación de este trabajo. Métricas diferentes a las estudiadas y correspondientes a agujeros negros rotantes en otras teorías de gravitación modificadas pueden ser abordadas de forma similar a la de esta Tesis, de manera de obtener los contornos de las sombras y la dependencia de los observables con los parámetros particulares de cada teoría. En el caso de que estas geometrías fueran asintóticamente planas y la ecuación de Hamilton–Jacobi asociada fuera separable, el análisis sería similar al realizado. Por otro lado, el caso para el cual alguna (o ambas) de las hipótesis mencionadas no estuviera presente constituye también una extensión natural de este trabajo.

Epílogo

La respuesta a la pregunta sobre si los agujeros negros observados reflejan de forma exacta las predicciones de la Relatividad General se encuentra abierta. Las futuras observaciones proveerán de datos cruciales para medir con precisión las propiedades físicas de los mismos. La posibilidad de que las observaciones no sean compatibles con las predicciones de la Relatividad General es inquietante y estimula todo tipo de estudios teóricos a cerca de las propiedades observables de los agujeros negros, más allá de la teoría clásica. A comienzos de la década de 1970, J. M. Bardeen menciona en la Ref. [1] que

“It is conceptually interesting, if not astrophysically very important, to calculate the precise apparent shape of the black hole”,

mientras que en la Ref. [128] el mismo autor sostiene que

“Unfortunately, there seems to be no hope of observing this effect”.

Con el transcurso de los años la posibilidad de detectar las sombras se tornó plausible y central en materia de astrofísica observacional. Gracias al avance en las tecnologías de detección, es esperable que en pocos años más se alcancen resoluciones inimaginadas cuarenta años atrás. Éstas, eventualmente, permitirán estudiar en detalle las sombras de los agujeros negros. Sin duda, la observación de las mismas será de gran utilidad en el avance hacia una teoría cuántica de la gravedad.

Para finalizar, se quiere destacar que los resultados obtenidos y discutidos en esta Tesis son originales y fueron reportados en tres publicaciones. Estos trabajos fueron realizados en colaboración con Ernesto Eiroa y Gastón Giribet [129], y con Ernesto Eiroa [130, 131].

Bibliografía

- [1] J. M. Bardeen, in *Black Holes*, Les Houches, Eds. C. De Witt and B. De Witt (Gordon and Breach, New York, 1973).
- [2] P. J. Young, *Phys. Rev. D* **14**, 3281 (1976).
- [3] B. Godfrey, *Phys. Rev. D* **1**, 2721 (1970).
- [4] J. -P. Luminet, *Astron. Astrophys.* **75**, 228 (1979).
- [5] D. N. Page and K. S. Thorne, *Astrophys. J.* **191**, 499 (1974).
- [6] K. S. Virbhadra and G. F. R. Ellis, *Phys. Rev. D* **62**, 084003 (2000).
- [7] C. Darwin, *Proc. Roy. Soc. London A* **249**, 180 (1959).
- [8] H. C. Ohanian, *Am. J. Phys.* **55**, 428 (1987).
- [9] R. J. Nemiroff, *Am. J. Phys.* **61**, 619 (1993).
- [10] V. Bozza, S. Capozziello, G. Iovane, and G. Scarpetta, *Gen. Relativ. Gravit.* **33**, 1535 (2001).
- [11] E. F. Eiroa, G. E. Romero, and D. F. Torres, *Phys. Rev. D* **66**, 024010 (2002).
- [12] V. Bozza, *Phys. Rev. D* **66**, 103001 (2002).
- [13] V. Bozza, *Phys. Rev. D* **67**, 103006 (2003).

- [14] V. Bozza, F. De Luca, G. Scarpetta, and M. Sereno, *Phys. Rev. D* **72**, 083003 (2005).
- [15] V. Bozza, F. De Luca, and G. Scarpetta, *Phys. Rev. D* **74**, 063001 (2006).
- [16] S. Vázquez and E. Esteban, *Nuovo Cim.* **119B**, 489 (2004).
- [17] V. Bozza and G. Scarpetta, *Phys. Rev. D* **76**, 083008 (2007).
- [18] G. V. Kraniotis, *Class. Quantum Grav.* **28**, 085021 (2011).
- [19] A. Bhadra, *Phys. Rev. D* **67**, 103009 (2003).
- [20] E. F. Eiroa, *Phys. Rev. D* **73**, 043002 (2006).
- [21] K. Sarkar and A. Bhadra, *Class. Quantum Grav.* **23**, 6101 (2006).
- [22] G. N. Gyulchev and S. S. Yazadjiev, *Phys. Rev. D* **75**, 023006 (2007).
- [23] Y. Liu, S. Chen, and J. Jing, *Phys. Rev. D* **81**, 124017 (2010).
- [24] E. F. Eiroa and C. M. Sendra, *Class. Quantum Grav.* **28**, 085008 (2011).
- [25] E. F. Eiroa, *Phys. Rev. D* **71**, 083010 (2005).
- [26] R. Whisker, *Phys. Rev. D* **71**, 064004 (2005).
- [27] C. R. Keeton and A. O. Petters, *Phys. Rev. D* **73**, 104032 (2006).
- [28] A. Y. Bin-Nun, *Phys. Rev. D* **81**, 123011 (2010).
- [29] E. F. Eiroa and C. M. Sendra, *Phys. Rev. D* **86**, 083009 (2012).
- [30] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes* (Oxford University Press, New York, 1992).
- [31] H. Falcke, F. Melia, and E. Agol, *Astrophys. J.* **528**, L13 (2000).

- [32] R. Takahashi, *Astrophys. J.* **611**, 996 (2004).
- [33] Z. Stuchlík and J. Schee, *Class. Quantum Grav.* **27**, 215017 (2010).
- [34] A. de Vries, *Class. Quantum Grav.* **17**, 123 (2000).
- [35] K. Hioki and U. Miyamoto, *Phys. Rev. D* **78**, 044007 (2008).
- [36] C. Bambi and K. Freese, *Phys. Rev. D* **79**, 043002 (2009).
- [37] K. Hioki and K. Maeda, *Phys. Rev. D* **80**, 024042 (2009).
- [38] A. F. Zakharov, A. A. Nucita, F. De Paolis, and G. Ingrosso, *New Astron.* **10**, 479 (2005).
- [39] A. F. Zakharov, F. De Paolis, G. Ingrosso, and A. A. Nucita, *Astron. Astrophys.* **442**, 795 (2005).
- [40] F. De Paolis, G. Ingrosso, A. A. Nucita, A. Qadir, and A. F. Zakharov, *Gen. Relativ. Gravit.* **43**, 977 (2011).
- [41] J. Schee and Z. Stuchlík, *Int. Jour. Mod. Phys. D* **18**, 983 (2009).
- [42] A. Yumoto, D. Nitta, T. Chiba, and N. Sugiyama, *Phys. Rev. D* **86**, 103001 (2012).
- [43] T. Johannsen and D. Psaltis, *Astrophys. J.* **718**, 446 (2010).
- [44] M. R. Morris, L. Meyer, and A. M. Ghez, *Res. Astron. Astrophys.* **12**, 995 (2012).
- [45] V. L. Fish and S. S. Doeleman, *IAU Symposium* **261** (2009).
- [46] Z. Li and C. Bambi, *arXiv:1309.1606* (2013).
- [47] C. Bambi, *Phys. Rev. D* **87**, 107501 (2013).

- [48] J. Fukue, *Publ. Astron. Soc. Japan* **55**, 155 (2003).
- [49] Z. Younsi, K. Wu, and S. V. Fuerst, *Astron. Astrophys.* **545**, A13 (2012).
- [50] X. Yang and J. Wang, *Astrophys. J. Suppl.* **207**, 6 (2013).
- [51] F. H. Vincent, T. Paumard, E. Gourgoulhon, and G. Perrin, *Class. Quantum Grav.* **28**, 225011 (2011).
- [52] J. Dexter and E. Agol, *Astrophys. J.* **696**, 1616 (2009).
- [53] T. Harko, Z. Kovács, and F. S. N. Lobo, *Class. Quantum Grav.* **27**, 105010 (2010).
- [54] R. Jackiw and S-Y. Pi, *Phys. Rev. D* **68**, 104012 (2003).
- [55] S. Alexander and N. Yunes, *Phys. Repts.* **480**, 1 (2009).
- [56] S. H. S. Alexander and S. J. Gates Jr., *JCAP* **0606**, 018 (2006).
- [57] B. A. Campbell, N. Kaloper, R. Madden, and K. A. Olive, *Nucl. Phys. B* **399**, 137 (1993).
- [58] S. H. S. Alexander, M. E. Peskin, and M. M. Sheikh-Jabbari, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 081301 (2006).
- [59] K. Konno, T. Matsuyama, Y. Asano, and S. Tanda, *Phys. Rev. D* **78**, 024037 (2008).
- [60] S. Alexander and N. Yunes, *Phys. Rev. D* **77**, 124040 (2008).
- [61] M. B. Cantcheff, *Phys. Rev. D* **78**, 025002 (2008).
- [62] N. Yunes and L. S. Finn, *J. Phys.: Conf. Ser.* **154**, 012041 (2009).
- [63] S. Alexander, L. S. Finn, and N. Yunes, *Phys. Rev. D* **78**, 066005 (2008).

- [64] N. Yunes and C. F. Sopuerta, Phys. Rev. D **77**, 064007 (2008).
- [65] B. Tekin, Phys. Rev. D **77**, 024005 (2008).
- [66] D. Guarrera and A. J. Hariton, Phys. Rev. D **76**, 044011 (2007).
- [67] C. Molina, P. Pani, V. Cardoso, and L. Gualtieri, Phys. Rev. D **81**, 124021 (2010).
- [68] N. Yunes and F. Pretorius, Phys. Rev. D **79**, 084043 (2009).
- [69] N. Yunes, D. Psaltis, F. Özel, and A. Loeb, Phys. Rev. D **81**, 064020 (2010).
- [70] C. F. Sopuerta and N. Yunes, Phys. Rev. D **80**, 064006 (2009).
- [71] K. Konno, T. Matsuyama, and S. Tanda, Prog. Theor. Phys. **122**, 561 (2009).
- [72] G. W. Gibbons and K. Maeda, Nucl. Phys. B **298**, 741 (1988).
- [73] D. Garfinkle, G. T. Horowitz, and A. Strominger, Phys. Rev. D **43**, 3140 (1991); *ibid.* **45**, 3888(E) (1992).
- [74] J. H. Horne and G. T. Horowitz, Phys. Rev. D **46**, 1340 (1992).
- [75] R. Casadio, B. Harms, Y. Leblanc, and P. H. Cox, Phys. Rev. D **55**, 814 (1997).
- [76] V. P. Frolov, A. Zelnikov, and U. Bleyer, Ann. Phys. (Leipzig) **499**, 371 (1987).
- [77] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 3370 (1999).
- [78] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 4690 (1999).
- [79] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. Dvali, Phys. Lett. B **429**, 263 (1998).
- [80] I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. Dvali, Phys. Lett. **B**, 436, 257 (1998).

- [81] T. Shiromizu, K. Maeda, and M. Sasaki, *Phys. Rev. D* **62**, 024012 (2000).
- [82] A. N. Aliev and A. E. Gümrükçüoğlu, *Class. Quantum Grav.* **21**, 5081 (2004).
- [83] M. J. Duff and J. T. Liu, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2052 (2000).
- [84] G. Dvali, G. Gabadadze, and M. Porrati, *Phys. Lett. B* **485**, 208 (2000).
- [85] F. R. Tangherlini, *Nuovo Cim.* **27**, 636 (1963).
- [86] R. C. Myers and M. J. Perry, *Ann. Phys. (N.Y.)* **172**, 304 (1986).
- [87] A. Chamblin, S. W. Hawking and H. S. Reall, *Phys. Rev. D* **61**, 065007 (2000).
- [88] N. Dadhich, R. Maartens, P. Papadopoulos, and V. Rezanian, *Phys. Lett. B* **487**, 1 (2000).
- [89] A. N. Aliev and A. E. Gümrükçüoğlu, *Phys. Rev. D* **71**, 104027 (2005).
- [90] R. Kerr, *Phys. Rev. Lett.* **11**, 237 (1963).
- [91] R. Penrose, *Nuovo Cim.* **1**, 252 (1969).
- [92] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation* (W.H. Freeman, San Francisco, 1973).
- [93] B. Carter, *Phys. Rev.* **174**, 1559 (1968).
- [94] V. P. Frolov and A. Zelnikov, *Introduction to Black Hole Physics* (Oxford University Press, New York, 2011).
- [95] M. Demianski and M. Francaviglia, *J. Phys. A* **14**, 173 (1981).
- [96] M. Walker and R. Penrose, *Commun. Math. Phys.* **18**, 265 (1970).
- [97] P. Blaga and C. Blaga, *Class. Quantum Grav.* **18**, 3893 (2001).
- [98] K. P. Rauch and R. D. Blandford, *Astrophys. J.* **421**, 46 (1994).

- [99] L.-X. Li, R. Narayan, and J.E. McClintock, *Astrophys. J.* **691**, 847 (2009).
- [100] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, *Phys. Rev. Lett.* **48** 975 (1982).
- [101] K. Konno, T. Matsuyama, and S. Tanda, *Phys. Rev. D* **76**, 024009 (2007).
- [102] D. Grumiller and N. Yunes, *Phys. Rev. D* **77**, 044015 (2008).
- [103] D. Grumiller, R. Mann, and R. McNees, *Phys. Rev. D* **78**, 081502 (2008).
- [104] S. Gillessen, F. Eisenhauer, S. Trippe, T. Alexander, R. Genzel, F. Martins, and T. Ott, *Astrophys. J.* **692**, 1075 (2009).
- [105] W. E. Harris, *Astron. J.* **112**, 1487 (1996).
- [106] P. Miochi, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **381**, 103 (2007).
- [107] R. J. H. Dunn, R. P. Fender, E. G. Körding, T. Belloni, and C. Cabanac, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **403**, 61 (2010).
- [108] T. Johannsen, D. Psaltis, S. Gillessen, D. P. Marrone, F. Özel, S. S. Doeleman, and V. L. Fish, *Astrophys. J.* **758**, 30 (2012).
- [109] <http://www.eventhorizontelescope.org>.
- [110] <http://www.asc.rssi.ru/radioastron>.
- [111] <http://bhi.gsfc.nasa.gov>.
- [112] T. Kaluza, *Preuss. Akad. Wiss. (Berlin)*, 966 (1921).
- [113] J. M. Overduin and P. S. Wesson, *Phys. Rept.* **283**, 303 (1997).
- [114] O. Klein, *Zeitschrift für Physik A* **37** (12), 895 (1926).
- [115] A. N. Aliev and G. D. Esmer, *Phys. Rev. D* **87**, 084022 (2013).
- [116] R. Maartens and K. Koyama, *Living Rev. Relativity* **13**, 5 (2010).

- [117] P. Kanti, *Int. J. Mod. Phys. A* **19**, 4899 (2004).
- [118] R. Guedens, D. Clancy, and A. R. Liddle, *Phys. Rev. D* **66**, 043513 (2002).
- [119] R. Guedens, D. Clancy, and A. R. Liddle, *Phys. Rev. D* **66**, 083509 (2002).
- [120] D. Clancy, R. Guedens, and A. R. Liddle, *Phys. Rev. D* **68**, 023507 (2003).
- [121] A. S. Majumdar, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 031303 (2003).
- [122] A. N. Aliev and P. Talazan, *Phys. Rev. D* **80**, 044023 (2009).
- [123] K. S. Virbhadra and G. F. R. Ellis, *Phys. Rev. D* **65**, 103004 (2002).
- [124] K. Nakao, N. Kobayashi and H. Ishihara, *Phys. Rev. D* **67**, 084002 (2003).
- [125] H. Falcke et al., *Astrophys. J.* **499**, 731 (1998).
- [126] T. P. Kirchbaum et al., *Astron. Astrophys.* **335**, L106 (1998).
- [127] Doeleman et al., *Nature* **455**, 78 (2008).
- [128] J. M. Bardeen, in *Gravitational radiation and gravitational collapse; Proceedings of the Symposium*, Warsaw, Poland (Dordrecht, D. Reidel Publishing Co., 1974).
- [129] L. Amarilla, E.F. Eiroa, and G. Giribet, *Phys. Rev. D* **81**, 124045 (2010).
- [130] L. Amarilla and E.F. Eiroa, *Phys. Rev. D* **85**, 064019 (2012).
- [131] L. Amarilla and E.F. Eiroa, *Phys. Rev. D* **87**, 044057 (2013).