

Tesis Doctoral

Transporte anisótropo de escalares pasivos en turbulencia rotante

Rodríguez Imazio, Paola Carolina

2014

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Rodríguez Imazio, Paola Carolina. (2014). Transporte anisótropo de escalares pasivos en turbulencia rotante. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

Cita tipo Chicago:

Rodríguez Imazio, Paola Carolina. "Transporte anisótropo de escalares pasivos en turbulencia rotante". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2014.

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

Transporte anisótropo de escalares pasivos en turbulencia rotante

Trabajo de Tesis para optar por el título de
Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área
Ciencias Físicas

por *Paola Carolina Rodriguez Imazio*

Director: Dr. Pablo D. Mininni

Consejero de Estudios: Dr. César Moreno

Lugar de Trabajo: Departamento de Física, FCEyN - UBA

Resumen

Un escalar pasivo es un contaminante difusivo presente en un fluido con un grado de concentración tan pequeño que no produce un efecto dinámico en el campo de velocidad. Aerosoles, contaminantes en pequeñas concentraciones en la atmósfera y los océanos, elementos químicos en el interior de las estrellas, o bajo ciertas aproximaciones pequeñas fluctuaciones en la temperatura de un fluido son ejemplos de escalares pasivos. La correcta comprensión de la dinámica de estas magnitudes es relevante para muchas aplicaciones, pero también tiene implicancias importantes en el entendimiento general de la turbulencia. Por este motivo, muchos estudios de escalares pasivos se concentraron en el caso de flujos turbulentos isótropos y homogéneos, aunque en flujos geofísicos, astrofísicos e industriales muchas veces la presencia de fuerzas externas introduce anisotropías en el campo de velocidad que no pueden despreciarse. En esta tesis se presenta un estudio detallado de la advección, el mezclado y la difusión de escalares pasivos en flujos turbulentos rotantes, con y sin helicidad neta. La rotación está presente en muchos flujos en la atmósfera, mientras que se cree que la helicidad (una magnitud conservada por un fluido ideal, asociada a la ruptura de simetría de reflexión en el flujo) es relevante en algunos fenómenos como las tormentas rotantes convectivas. Para caracterizar la advección de los escalares pasivos en el campo de velocidades turbulento, se estudian sus leyes de escala y el desarrollo de anisotropías en el espacio espectral, y en el espacio real usando una descomposición axisimétrica para las funciones de estructura de la velocidad y el escalar pasivo. En el caso rotante no helicoidal, confirmamos que el escalar pasivo es más anisótropo que el campo de velocidad y observamos que su espectro de potencias sigue una ley espectral consistente con un espectro $V(k_{\perp}) \sim k_{\perp}^{-3/2}$. En el caso helicoidal, observamos que las leyes de escala son consistentes con un espectro más empinado para la energía, y menos empinado para el espectro de varianza escalar.

Ambos casos se explican con argumentos fenomenológicos que consideran el efecto de la rotación y de la helicidad.

La intermitencia del escalar pasivo y del campo de velocidad se caracteriza usando exponentes de escala y funciones de densidad de probabilidad de los incrementos de la velocidad y el escalar pasivo. En presencia de rotación, mostramos que los exponentes de escala pueden ser correctamente predichos usando el modelo de Kraichnan en dos dimensiones. Esta reducción en la dimensionalidad efectiva del problema está asociada a la fuerte anisotropía en la distribución espacial del escalar pasivo. Finalmente, estudiamos y medimos en simulaciones numéricas la difusión turbulenta de escalares pasivos en flujos con y sin rotación y con y sin helicidad neta, y calculamos coeficientes efectivos de transporte usando las leyes de difusión de Fick. Para los flujos rotantes, los coeficientes se calculan en las direcciones paralela y perpendicular al eje de rotación para tener en cuenta la anisotropía en el mezclado y transporte turbulento. Se varían también los números de Rossby y de Schmidt para cuantificar su efecto sobre la difusión efectiva. Para flujos rotantes sin helicidad neta, encontramos que la rotación reduce la difusividad del escalar en el plano perpendicular al eje de rotación, pero no modifica la difusión en la dirección paralela. En presencia de helicidad y ausencia de rotación, los coeficientes de transporte turbulento aumentan ligeramente, en buen acuerdo con resultados previos. Finalmente, en el caso rotante helicoidal, encontramos que la difusión perpendicular disminuye aún más que en el caso rotante sin helicidad, mientras que la difusión paralela se ve levemente incrementada respecto al mismo caso.

Palabras clave: Turbulencia, Escalares pasivos, Transporte anisótropo

Abstract

Anisotropic transport of passive scalars in rotating turbulence

A passive scalar is a diffusive contaminant present in a fluid in such a small concentration that it produces a negligible dynamic effect on the velocity field. Aerosols, contaminants in the atmosphere and the oceans in small concentrations, chemical elements in stellar interiors, and under certain approximations small fluctuations in the fluid temperature are all examples of passive scalars. The correct understanding of the dynamics of these quantities is relevant for many applications, but it also has important implications for our general understanding of turbulence theory. For this reason, previous studies in many cases focused on passive scalar dynamics in isotropic and homogeneous turbulence, although geophysical, astrophysical, and industrial flows are often anisotropic as the result of the presence of external forces with preferred directions. In this thesis we present a detailed study of the advection, mixing, and diffusion of passive scalars in turbulent rotating flows with and without net helicity. Rotation is relevant in atmospheric flows, and it is believed that the helicity (an ideal invariant of rotating fluids, and a quantity associated with mirror symmetry in the flow) is relevant in such phenomena as supercell thunderstorms. To characterize the advection of passive scalars in a turbulent velocity field, we study scaling laws and the development of anisotropy in spectral space as well as in real space using an axisymmetric decomposition for the structure functions of the velocity and the passive scalar. In the non-helical rotating case, we confirm that the passive scale is more anisotropic than the velocity field, and found that its power spectrum is consistent with a power law $V(k_{\perp}) \sim k_{\perp}^{-3/2}$. In the helical case rotating case, we find that the scaling laws are consistent with a steeper spectrum for the energy and a shallower spectrum for the

scalar variance. Both cases are correctly explained by phenomenological arguments that take into account the effect of rotation and helicity.

Intermittency of the passive scalar and of the velocity field is characterized using scaling exponents and probability density functions of velocity increments and passive scalar increments. In the presence of rotation, we show that scaling exponents are in good agreement with those obtained from Kraichnan's model in two dimensions. This effective reduction in the dimensionality of the problem is associated with the strong anisotropy observed in the spatial distribution of passive scalar. Finally, we study and measure in numerical simulations the turbulent diffusion of passive scalars in flows with and without rotation, and with and without net helicity. Effective transport coefficients are calculated using Fick's diffusion laws. For rotating flows, the transport coefficients are calculated in directions parallel and perpendicular to the rotational axis, to account for any anisotropy in the turbulent mixing and diffusion. We also vary the Rossby and Schmidt numbers to quantify their effect on the effective diffusion. For non-helical rotating flows, we find that turbulent diffusion is reduced in the plane perpendicular to the rotation axis, while it does not change in the parallel direction. In the absence of rotation, helicity causes a slight increase in the turbulent transport coefficients, in good agreement with previous results. Finally, for rotating helical flow, the perpendicular diffusion further decreases (compared to the non-helical rotating case), while the parallel diffusion is slightly increased (compared to the same case).

Key words: Turbulence, Passive scalars, Anisotropic transport

Indice

1	Introducción	5
2	Escalares Pasivos	11
2.1	Introducción	11
2.2	Escalares pasivos en turbulencia isótropa y homogénea	17
2.2.1	Escalares pasivos, ecuaciones y nociones generales	17
2.2.2	Conservación del campo medio escalar	18
2.2.3	Cascadas del escalar pasivo	20
2.2.4	Intermitencia y el modelo de Kraichnan	26
2.2.5	Difusión turbulenta	30
2.3	Escalares pasivos en turbulencia rotante	35
2.3.1	La descomposición helicoidal y los modos resonantes	35
2.4	Fenomenología de flujos turbulentos rotantes	38
2.4.1	Flujos no helicoidales	38
2.4.2	Flujos helicoidales	40
3	Leyes de Escala	43
3.1	Introducción	43
3.2	Definiciones	45

3.2.1	Simulaciones numéricas	45
3.2.2	Escalas características y números adimensionales	48
3.2.3	Espectros	49
3.3	Resultados Numéricos	50
3.3.1	Efectos de la rotación	51
3.3.2	Efectos de la helicidad	61
3.4	Conclusiones	68
4	Intermitencia	71
4.1	Introducción	71
4.2	Cálculo de las funciones de estructura: grupos de simetrías $SO(3)$ y $SO(2) \times \mathfrak{R}$	74
4.3	Resultados numéricos	79
4.3.1	Efectos de la rotación	79
4.3.2	Efectos de la helicidad	98
4.4	Conclusiones	105
5	Coefficientes de difusión	111
5.1	Introducción	111
5.2	Propiedades de mezclado de la turbulencia	116
5.2.1	Difusión turbulenta, escalas y tiempos característicos	116
5.2.2	Ley de Fick, coeficientes de difusión efectivos	120
5.3	Resultados numéricos	122
5.3.1	Simulaciones	122
5.3.2	Cálculo de los coeficientes de difusión turbulenta	126
5.3.3	Efectos de la rotación	127
5.3.4	Efectos de la helicidad	136

5.3.5	Efectos de P_e y S_c	145
5.3.6	Estructuras turbulentas y difusión	149
5.4	Conclusiones	154
6	Conclusiones	157
	Bibliografía	163

Capítulo 1

Introducción

A pesar de ser un fenómeno de mucha importancia en un gran número de sistemas físicos, y a pesar de un gran esfuerzo por parte de importantes científicos, el problema de la turbulencia se encuentra lejos de ser resuelto. La no linealidad de los sistemas turbulentos produce un acoplamiento entre estructuras en diferentes escalas, volviendo al problema altamente complejo. No obstante, años de estudio de los sistemas turbulentos contribuyeron notablemente con muchas ideas y herramientas útiles en diferentes áreas de la física. Las importantes nociones de invarianza de escala y universalidad tuvieron orígenes fuertemente asociados al contexto de la turbulencia. El estudio de los flujos turbulentos permitió reconocer y expresar (aunque ambiguamente) la co-existencia entre aleatoriedad y la existencia de estructuras, y el rol del acoplamiento entre estas estructuras en el transporte de materia, calor y momento. Con todo esto, podemos decir que la turbulencia no constituye un único problema, sino mas bien un campo amplio con aplicaciones en ingeniería, geofísica, astrofísica y cosmología.

Según la teoría introducida por Kolmogorov en 1941, las escalas pequeñas de los flujos turbulentos son estadísticamente homogéneas, isotrópicas e universales [89]. Si bien este comportamiento universal fue cuestionado a través de los años, los resultados obtenidos hasta el día de hoy manifiestan ciertos indicios de universalidad,

asociados al desarrollo de una cascada directa de energía (es decir, una transferencia de energía hacia escalas más pequeñas con flujo espectral constante). Sin embargo, y como veremos en más detalle luego, se observan correcciones a este comportamiento universal, dadas por el fenómeno de intermitencia (es decir, el desarrollo espontáneo de fuertes gradientes en escalas pequeñas). Para una lista detallada de resultados teóricos y experimentales en turbulencia isótropa y homogénea ver, pueden verse, por ejemplo, en [59]).

En los años siguientes a la teoría de Kolmogorov, se propuso que las ideas básicas de universalidad y de la teoría de cascadas turbulentas podían extenderse a los escalares pasivos (es decir, a campos escalares que no afectan la dinámica del campo de velocidad, pero que son adveccionados y difundidos por él), y que el comportamiento del campo de velocidad en las escalas pequeñas debía manifestarse naturalmente en el campo escalar (ver, por ejemplo, [131, 49, 13, 123]). Mas tarde, experimentos en [160, 156, 177] y simulaciones numéricas en [44] confirmaron que los escalares pasivos también desarrollan una cascada directa, y presentan signos de intermitencia y de anisotropía en escalas pequeñas. El aporte teórico mas importante acerca de la dinámica de los escalares pasivos en turbulencia isótropa y homogénea fue realizado por Kraichnan [88], quien mostró que los escalares pasivos podían ser intermitentes aun en ausencia de intermitencia en el campo de velocidad. Estos conceptos, y mas tarde el modelo introducido por Kraichnan, constituyen el pilar teórico de la presente tesis, y serán explicados en detalle en el capítulo 2.

Los aportes hechos por el estudio de escalares pasivos durante los últimos años contribuyeron notablemente al entendimiento de la turbulencia en si. Sin embargo, además de resultar una herramienta útil en la descripción de flujos turbulentos, el estudio de la advección, difusión y mezclado de escalares pasivos en flujos turbulentos es un problema con entidad propia. El transporte de contaminantes en pequeñas concentraciones en la atmósfera, el transporte de salinidad en los océanos, el transporte de elementos químicos y de entropía en las estrellas, el intercambio de oxígeno entre

la vegetación de un bosque y la atmósfera, se encuentran entre la variedad de problemas que pueden ser abordados mediante el estudio de escalares pasivos en flujos turbulentos. La motivación principal para el estudio de este tipo de problemas surge de la discrepancia entre las concentraciones observadas para las distintas magnitudes escalares en estos escenarios con los valores esperados por el proceso de difusión molecular. En todos estos casos, las observaciones indican que el proceso de difusión molecular no es suficiente para explicar el transporte y la difusión de las diferentes magnitudes escalares. Dado que una de las principales características de la turbulencia es su eficiencia en el mezclado, hoy en día, y como veremos en detalle en el último capítulo de esta tesis, se considera que la difusión turbulenta (descrita por un coeficiente de difusión efectiva que surge de la interacción entre las estructuras que se desarrollan en el flujo turbulento) es la responsable de acelerar el proceso de difusión en estos flujos. La diversidad de aplicaciones hicieron que el transporte de escalares pasivos en flujos turbulentos gane mas y mas importancia en los últimos años.

Dentro de los diferentes tipos de flujos turbulentos están los flujos turbulentos rotantes. Ellos son importantes en la dinámica de fluidos, dado que un gran número de sistemas turbulentos se ven afectados por la rotación. Se sabe que la rotación es crucial en los movimientos en las escalas grandes de la atmósfera terrestre y de los océanos. En astrofísica, la rotación es importante en las regiones estelares convectivas (como por ejemplo en el Sol). A nivel industrial, se encuentran las turbomáquinas (como las bombas hidráulicas y las turbinas, en las cuales el intercambio de momento entre el fluido y la máquina se da por medio de la rotación del motor), y los motores de alas rotantes mejor conocidos como *motor-craft*, utilizados en vehículos de vuelo tales como los helicópteros. Si bien este gran número de aplicaciones demandan un conocimiento detallado de la dinámica de los flujos turbulentos rotantes, poco se sabe acerca de sus propiedades. Según lo dicho mas arriba, resulta intuitivo (o al menos tentador) intentar caracterizar las propiedades de los flujos turbulentos rotantes a través del estudio de escalares pasivos, y también así describir el transporte de los escalares pasivos en flujos turbulentos sometidos a rotación. A pesar de estas moti-

vaciones, los resultados previos a esta tesis acerca de escalares pasivos en turbulencia rotante son prácticamente nulos.

Hoy en día se sabe que uno de los efectos de la rotación en los flujos turbulentos es el de modificar la transferencia de energía, volviéndola anisótropa y transfiriéndola preferentemente hacia modos perpendiculares al eje de rotación [33, 174, 35]. Esto resulta en una cuasi-bidimensionalización del flujo y en el desarrollo de una cascada inversa de parte de la energía disponible en el sistema (es decir, de una transferencia de energía hacia escalas mas grandes). Durante este proceso se generan diferentes estructuras en el flujo turbulento, que rompen las simetrías esperadas para flujos isotropos. El efecto la anisotropía del flujo en el transporte y difusión de los escalares pasivos es el tema central de esta tesis.

Además, también se consideran los efectos de la helicidad en el transporte de escalares pasivos en flujos con y sin rotación. La helicidad, definida como el producto escalar entre la velocidad y su rotor, es una magnitud de gran importancia en los flujos turbulentos, ya que es un invariante cuadrático ideal de la ecuación de movimiento que rige a la turbulencia tridimensional. La conservación de la helicidad fue descubierta en [118], en donde se mostró que dicha magnitud es proporcional al grado de anudamiento de los filamentos de vorticidad del fluido. Mas adelante, esta magnitud ganó importancia en el contexto de los flujos turbulentos astrofísicos, cuando se notó que los flujos que no poseen simetría de reflexión juegan un rol central en la amplificación de campos magnéticos [119] (un valor de helicidad distinto de cero indica la ruptura de la simetría de reflexión en el flujo). Luego, en [85] se predijo que el efecto de la helicidad en turbulencia hidrodinámica isotropa y homogénea es el de inhibir la transferencia de energía hacia las escalas chicas, retrasando la ocurrencia del máximo de disipación de la energía. Simulaciones numéricas en [3] corroboraron este resultado. Dado entonces que la helicidad afecta la cascada de energía, nuestro principal interés será ver como estos efectos se traducen en la dinámica del escalar advechado por el flujo turbulento rotante.

Esta tesis consta de seis capítulos organizados como sigue. En el capítulo 2 se presenta una breve introducción sobre la teoría de escalares pasivos en flujos turbulentos, junto con los principales resultados hallados previamente para escalares pasivos en turbulencia isótropa y homogénea. Luego, se introducen las ecuaciones que rigen la dinámica de los flujos turbulentos rotantes, y los resultados principales acerca de los efectos de la rotación en turbulencia con y sin helicidad, que serán de utilidad para interpretar la dinámica del escalar pasivo a lo largo de toda la tesis. En el capítulo 3 se comienza con una breve descripción del código numérico utilizado, para luego presentar los resultados que surgen del estudio de las leyes de escala de la velocidad y del escalar pasivo en flujos con y sin rotación, y con y sin helicidad. Para esto, se presentan los espectros y los flujos de la energía y de la varianza del escalar pasivo. Para el campo de velocidad, se utilizan argumentos fenomenológicos ya conocidos para predecir la ley de escala del espectro de energía. En el caso del escalar pasivo, se propone un argumento fenomenológico nuevo para explicar el espectro de varianza escalar, que se contrasta con lo observado en las simulaciones. En el capítulo 4 se extiende el estudio de las leyes de escala a los momentos de orden mayor de la velocidad y el escalar por medio del cálculo de las funciones de estructura de ambos campos, utilizando las descomposiciones $SO(3)$ para los flujos isótropos, y la descomposición $SO(2) \times \mathfrak{R}$ para los flujos rotantes. Para caracterizar la intermitencia, se calculan los exponentes de escala de las funciones de estructura y se los compara con diferentes modelos, utilizando como referencia el exponente de segundo orden proveniente de los espectros estudiados en el capítulo previo. Encontramos que el modelo de Kraichnan, modificado solo para tener en cuenta la anisotropía del flujo y la forma del espectro del escalar, predice correctamente todos los exponentes de escala del sistema. Por último, la anisotropía en las escalas pequeñas se caracteriza por medio de las funciones de densidad de probabilidad de los incrementos de la velocidad y del escalar pasivo. En el capítulo 5 se calculan los coeficientes de difusión turbulenta en las direcciones paralela y perpendicular al eje de rotación, utilizando un método propuesto en [173] para flujos estratificados. Para esto, se estudia la evolución

espacial y temporal de un perfil inicial Gaussiano del escalar pasivo, y se obtienen los coeficiente de transporte cuantificando cuanta concentración escalar es arrastrada por el flujo turbulento en todas las direcciones del espacio. Finalmente, las conclusiones se presentan las en el capítulo 6.

Capítulo 2

Escalares Pasivos

2.1 Introducción

Un escalar pasivo es un contaminante difusivo presente en un fluido con un grado de concentración tal que no produce un efecto dinámico en el movimiento propio del mismo. Aerosoles y contaminantes en pequeñas concentraciones en la atmósfera, o en los mares y ríos, elementos químicos en las estrellas, o la temperatura de un gas o un líquido (por ejemplo, cuando un flujo de aire caliente entra en un medio con menor temperatura, si la diferencia de temperatura es pequeña) se comportan como escalares pasivos. Por esto, el transporte y mezclado de escalares pasivos en flujos turbulentos es un proceso de gran importancia en muchos escenarios naturales, y a su vez tiene un gran número de aplicaciones industriales.

Como ejemplo, el entendimiento del intercambio de magnitudes entre la vegetación de un bosque y la atmósfera es necesario para la correcta cuantificación de la evaporación y del flujo de calor en balances hidrológicos, la deposición de ozono en bosques urbanos, las emisiones de hidrocarburos libres de metano provenientes de la vegetación natural, y el almacenamiento de carbono en ecosistemas, entre otros [78, 20]. Todos estos intercambios se rigen por un proceso de mezclado turbulento.

El transporte de contaminantes y aerosoles en la atmósfera también es un problema que puede ser modelado mediante el transporte de escalares pasivos en un flujo turbulento. Si bien existen diversos métodos para esto, muchos de ellos se basan en el estudio de la evolución de una dada concentración de contaminante (es decir, un escalar pasivo) en un campo de velocidades. Los denominados modelos de difusión atmosférica combinan simulaciones numéricas y procesamiento de datos para estimar y predecir la concentración de contaminantes en el medio ambiente. Entre ellos, pueden nombrarse los modelos AERMOFF, CALPUFF y OCD-Offshore, que son utilizados por la Agencia de Protección Ambiental de los Estados Unidos [169]. Como veremos mas adelante, la determinación correcta de los coeficientes de difusión efectiva es fundamental para dichos modelos.

En los océanos también se sabe que el transporte de solutos en la superficie del mar está controlado por el proceso de difusión turbulenta [102]. Dada la baja concentración de estos solutos, los mismos actúan como escalares pasivos. Estudios en el Mar del Norte concluyeron que la forma cóncava del perfil de las aguas a lo largo de la zona costera belga fue causada por una difusión de sedimentos cien veces mayor en los primeros centímetros de la superficie, en comparación con las capas más profundas, donde domina la difusión molecular [171, 150]. Otros estudios realizados con trazadores reportaron que la discrepancia entre los cálculos y las mediciones de los flujos de agua sedimentada sólo puede atribuirse al transporte turbulento generado por la interacción entre las olas y las corrientes [60].

En el contexto astrofísico, las concentraciones de ciertos elementos químicos en la superficies de las estrellas también está relacionado con la dinámica de un escalar pasivo en un flujo turbulento. Como ejemplo, los coeficientes de difusión turbulenta capaces de reproducir fehacientemente las concentraciones de elementos químicos observadas en la superficie de la estrella, y la masa de ciertas estrellas en la secuencia principal corresponde a una valor efectivo de 200κ , donde κ es la difusión molecular [61].

Para tener otra idea de los tiempos y las longitudes características involucradas en los procesos de transporte turbulento, pueden tomarse varios ejemplos simples de la naturaleza. En ellos, es fácil ver que el proceso de difusión molecular no es suficiente para explicar las observaciones. Pensemos, por ejemplo, en el caudal de agua que la radiación solar evapora desde la superficie de la cuenca del Amazonas hacia la atmósfera, y que está asociado a la producción de constantes tormentas convectivas. Por análisis dimensional, sabemos que la difusión tiene unidades de longitud al cuadrado sobre tiempo, L^2/t . Teniendo en cuenta que el río Amazonas tiene una altitud media de aproximadamente 212 metros sobre el nivel del mar, la distancia media a la tropósfera es de aproximadamente 10 *km*. Si tomamos que la difusión molecular del vapor de agua en el aire a una temperatura de 24 °C es $\kappa = 22 \times 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$, el tiempo característico de difusión es $t > 10^7$ años, lo cual implicaría que el transporte de vapor de agua a las regiones mas altas de la tropósfera evaporación de agua es insignificante. Se sabe que la difusión del vapor en el aire depende del nivel de turbulencia [147]. Valores de difusión turbulenta obtenidos a partir de mediciones de la concentración de vapor de agua en el aire arrojan un valor de $\mathcal{D} \sim 2 \text{ m}^2/\text{s}$, con lo cual se obtiene un tiempo característico de $t \sim 1 \text{ hora}$. Si bien estos valores son meras estimaciones, nos dan un indicio de los órdenes de magnitud involucrados en cada proceso. En los mares, lagos y ríos, los coeficientes de difusión molecular típicos son del orden de $10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$, mientras que los coeficientes de difusión turbulenta pueden alcanzar valores entre 10^2 y 10^4 veces mas grandes.

Dado que muchas industrias arrojan desechos en las aguas de ríos y mares, otro ejemplo de interés está dado por el tiempo o la distancia caracterísitca de mezclado de un contaminante luego de ser arrojado en el río. Si tomamos al río Rhin, el cual posee un coeficiente de difusión turbulenta lateral de $\mathcal{D} \sim 0.45 \text{ m}^2/\text{s}$, vemos que se necesitan aproximadamente 10 horas para cubrir una distancia de 100 *km* (el rio Rhin tiene un ancho de 200 *m*). Para esta misma distancia, el tiempo característico que se obtiene utilizando la difusión molecular a temperatura ambiente es del orden de un año. Este ejemplo también puede plantearse en la dirección vertical, y se observa

que, en los ríos, los tiempos asociados a los procesos difusivos son mucho más cortos. Esta diferencia se debe a que los coeficientes de difusión turbulenta en la dirección longitudinal y paralela al flujo medio del río son diferentes, es decir, anisótropos. En este caso el origen de la anisotropía es la estratificación dada por la diferencia de temperatura con la profundidad y por la sedimentación del río. Mas adelante veremos que la anisotropía introducida por la rotación también produce diferencias en los coeficientes de difusión en diferentes direcciones, aunque estos efectos son diferentes a los observados en el caso de flujos estratificados.

Los ejemplos previos nos dan un indicio de que la turbulencia es un proceso de mucha importancia tanto en la atmósfera como en los océanos y en el contexto astrofísico. Uno de los métodos utilizados para medir el intercambio de magnitudes escalares, llamado método de covarianza de remolinos (más conocido como *eddy covariance*, en el idioma inglés), se basa en la medición de la velocidad de los remolinos turbulentos en una capa definida a cierta altura (por ejemplo, la superficie que separa la capa superior de un bosque, conocida como *canopy*, y la atmósfera) y la atmósfera, para calcular el flujo vertical de alguna de las magnitudes escalares de interés [6]. Una forma esquemática de representar este método se muestra en la figura 2.1. El flujo vertical de la magnitud escalar estará dado por la variación en la velocidad del viento medida en un punto dado (por ejemplo el punto A en la figura 2.1), obtenida a partir del movimiento vertical ascendente y descendente de parcelas de aire con una dada concentración de gas, temperatura, humedad y presión. Si estas magnitudes son conocidas para cada parcela, la covarianza del viento vertical nos permite calcular el flujo F según

$$F = \overline{\rho w' \theta'}, \quad (2.1)$$

donde ρ representa la densidad del aire, w' son las fluctuaciones en la velocidad del viento, θ' son las fluctuaciones en la concentración de la magnitud de interés, y la barra superior denota el valor medio (en este modelo convencional se asume que no hay fluctuaciones en la densidad, por lo que $\bar{\rho}$ corresponde a la densidad, y que las



Figura 2.1: Esquema del método de covarianza de remolinos. Los remolinos turbulentos producen movimientos ascendentes y descendentes de distintas parcelas de aire, cada una con una dada concentración de gas, temperatura, humedad y presión, a distintos tiempos. La covarianza entre la velocidad vertical del viento nos permite calcular el flujo de una dada magnitud escalar en el punto A. El coeficiente de difusión vertical puede calcularse a partir de dicho flujo.

fluctuaciones de todas las magnitudes tienen valor medio nulo). De esta manera, el viento y la otra variable (por lo general la concentración de gas, temperatura o cantidad de movimiento) se descomponen en componentes medias y fluctuantes. La covarianza se calcula entre la componente fluctuante de la velocidad vertical del viento y la componente fluctuante de la concentración. El flujo turbulento medido es entonces proporcional a la covarianza. Como veremos a lo largo de esta tesis, los coeficientes de difusión turbulenta pueden estimarse a partir de éste flujo y de la variación espacial de la concentración escalar. Este método es ampliamente utilizado para monitorear emisiones de dióxido de carbono, gas metano, gases de efecto invernadero y pérdida de agua, entre otros [172, 78, 32]. Como se anticipó previamente, la rotación produce anisotropías en el flujo turbulento. Estas anisotropías afectan el transporte, la

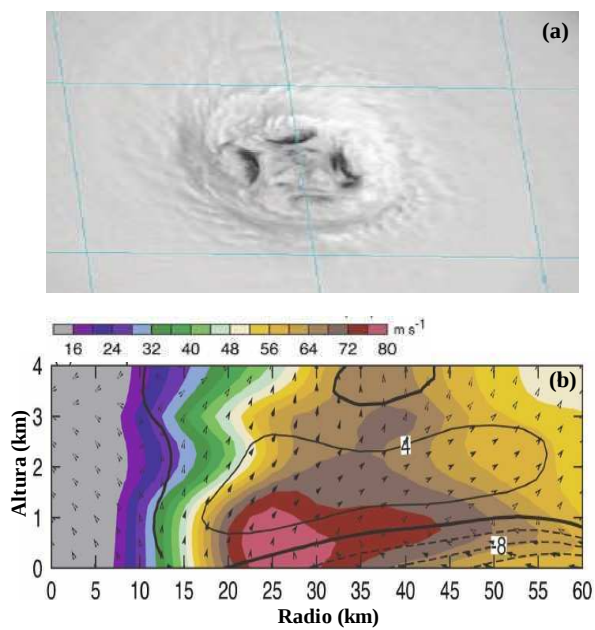


Figura 2.2: (a) Imagen satelital del huracán Isabel, tomada en Septiembre de 2006 [125]. (b) Perfiles del viento vertical y horizontal. Puede verse que el viento tiene componente vertical en el centro del huracán, que se vuelve más y mas horizontal a medida que aumenta el radio, aumentado a su vez su intensidad [29].

advección y el mezclado de los escalares pasivos, resultando, entre otras cosas, en diferentes leyes de escala para el escalar, y en coeficientes de difusión anisótropos. Hoy en día se sabe que uno de los efectos de la rotación es una cuasi-bidimensionalización de los flujos turbulentos, reduciendo las fluctuaciones al plano perpendicular al eje de rotación [33]. En los huracanes, por ejemplo, se sabe que la anisotropía impuesta por la rotación tiene un efecto directo sobre la transferencia horizontal y vertical del viento, la masa, y la cantidad de momento angular en el interior, siendo la difusión turbulenta horizontal (perpendicular al eje de rotación del tornado) el factor determinante de la intensidad máxima de la tormenta [148]. La figura 2.2 muestra una imagen del huracán Isabel, tomada en el año 2006. En ella puede observarse un proceso de bidimensionalización a través de la dirección del viento.

Con estas motivaciones en mente, en lo que sigue de éste capítulo presentamos las nociones generales y las ecuaciones que describen la dinámica del escalar pasivo en flujos turbulentos, junto con los resultados teóricos mas relevantes hallados en estudios previos. Presentamos primero resultados para turbulencia isótropa y homogénea, donde el escalar pasivo fue estudiado en detalle. En el caso de flujos rotantes el transporte de escalares pasivos casi no fue estudiado en la literatura, pero presentamos resultados generales sobre turbulencia rotante en flujos helicoidales y no helicoidales que serán de utilidad en toda esta tesis.

2.2 Escalares pasivos en turbulencia isótropa y homogénea

2.2.1 Escalares pasivos, ecuaciones y nociones generales

Si consideramos un flujo turbulento con campo de velocidad incompresible \mathbf{u} , la dinámica de un escalar pasivo está dada por

$$\partial_t \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \kappa \nabla^2 \theta + \phi, \quad (2.2)$$

donde θ es la concentración de la magnitud escalar, κ es la difusión molecular, y ϕ es la fuente del escalar. Debe notarse que la ecuación (2.2) también puede ser válida para la temperatura, en cuyo caso κ representa la difusividad térmica, y ϕ es una fuente de calor. A su vez, la dinámica campo de velocidades viene dada por las ecuaciones de Navier-Stokes

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (2.3)$$

mas la condición de incompresibilidad

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.4)$$

Aquí, \mathbf{u} es el campo de velocidades, p es la presión dividida por la densidad de masa (que asumimos uniforme), ν es la viscosidad cinemática, y \mathbf{f} representa la fuerza externa que produce la turbulencia.

Existe un número adimensional importante para caracterizar la dinámica del escalar pasivo. De la ecuación (2.2), el número de Peclet se define como el cociente entre las amplitudes del término convectivo $\mathbf{u} \cdot \nabla \theta$ y del difusivo $\kappa \nabla^2 \theta$, siendo $P_e = UL/\kappa$, donde U y L son una velocidad y una escala característica del flujo. Dado que para flujos turbulentos U y L son de orden uno y κ es pequeño, P_e resulta ser un número muy grande. Esto implica que el término difusivo $\kappa \nabla^2 \theta$ es despreciable en las escalas del orden de las estructuras de mayor tamaño que generan la turbulencia. En esta situación el escalar pasivo actúa como un trazador, que simplemente sigue a las partículas de fluido. El término difusivo sólo es importante cuando $P_e \approx 1$. Esta situación se da cuando consideramos escalas mucho menores que L .

2.2.2 Conservación del campo medio escalar

Una descripción básica de la conservación del escalar pasivo $\theta(\mathbf{x}, t)$ puede obtenerse estudiando la dinámica de su valor medio espacial $\bar{\theta}(\mathbf{x}, t)$. Esta descripción resultará de utilidad a la hora de definir coeficientes de difusión turbulenta, dado que éstos están relacionados con la concentración y con el flujo medio espacial del escalar pasivo. Las

fluctuaciones del campo escalar $\theta'(\mathbf{x}, t)$ pueden definirse como

$$\theta'(\mathbf{x}, t) = \theta(\mathbf{x}, t) - \bar{\theta}(\mathbf{x}, t). \quad (2.5)$$

Para el campo de velocidades, las fluctuaciones $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$ serán

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t), \quad (2.6)$$

donde $\bar{\mathbf{u}}$ es el valor medio de la velocidad. Dada la condición de incompresibilidad (2.4), la ecuación (2.2) (sin fuentes) puede escribirse como

$$\partial_t \theta + \nabla \cdot (\mathbf{u}\theta) = \kappa \nabla^2 \theta. \quad (2.7)$$

El valor medio del término no lineal, que involucra al flujo convectivo $\mathbf{u}\theta$, está dado por

$$\overline{\mathbf{u}\theta} = \overline{(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')(\bar{\theta} + \theta')} = \bar{\mathbf{u}}\bar{\theta} + \overline{\mathbf{u}'\theta'}. \quad (2.8)$$

El vector $\overline{\mathbf{u}'\theta'}$ representa al flujo espacial del escalar, es decir la tasa de concentración escalar por unidad de área transportada por las fluctuaciones del campo de velocidad. Si tomamos el valor medio de la ecuación (2.8), obtenemos

$$\partial_t \bar{\theta} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}}\bar{\theta} + \overline{\mathbf{u}'\theta'}) = \kappa \nabla^2 \bar{\theta}, \quad (2.9)$$

o en términos de la derivada material

$$D_t \bar{\theta} = \nabla \cdot (\kappa \nabla \bar{\theta} - \overline{\mathbf{u}'\theta'}). \quad (2.10)$$

En esta ecuación vemos como el flujo del escalar juega un rol análogo al del tensor de esfuerzos de Reynolds en las ecuaciones de Navier-Stokes para las fluctuaciones del campo de velocidad [137]. En particular, la ecuación (2.10) genera un problema de clausura: aun si se conoce el valor de $\bar{\mathbf{u}}$, (2.10) no puede resolverse para $\bar{\theta}$ sin conocer $\overline{\mathbf{u}'\theta'}$.

2.2.3 Cascadas del escalar pasivo

Consideremos ahora que la distribución de θ es estadísticamente homogénea e isotrópica, y con valor medio nulo. Esta situación simplifica notablemente los cálculos y sirve como un punto de partida para comprender la dinámica de los escalares pasivos en flujos turbulentos. A partir de la ecuación (2.2) podemos obtener una expresión para la tasa de cambio de la varianza del escalar $\langle \theta^2 \rangle$. Multiplicando la ecuación (2.2) por θ e integrando por partes se obtiene

$$\partial_t \left[\frac{1}{2} \theta^2 \right] + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \theta \mathbf{u} \right) = \nabla \cdot (\kappa \theta \nabla \theta) - \kappa (\nabla \theta)^2. \quad (2.11)$$

Si tomamos un promedio de ensamble sobre esta última ecuación, los términos que son divergencias desaparecen debido a la hipótesis de homogeneidad. Como resultado se tiene que

$$\partial_t \left\langle \frac{1}{2} \theta^2 \right\rangle = -\kappa \langle (\nabla \theta)^2 \rangle. \quad (2.12)$$

Por lo tanto, las fluctuaciones del escalar pasivo θ (o mejor dicho, su varianza) se disipan debido a la difusión con una tasa proporcional a

$$\sigma = \kappa \langle (\nabla \theta)^2 \rangle. \quad (2.13)$$

Este proceso representa la difusión cruzada del escalar pasivo entre regiones con excesos de concentración negativa y positiva. Cabe destacar que si bien en la ecuación (2.12) no queda ningún rastro del término convectivo, la convección es fundamental en la difusión de $\langle \theta^2 \rangle$. El término difusivo σ actúa en las escalas pequeñas, produciendo allí el mezclado más eficiente. Pero la varianza de θ sólo alcanza estas escalas por medio de una cascada, que genera estructuras de menor y menor tamaño, que está asociada al término convectivo. Si ahora consideramos que η_θ es la escala característica de las fluctuaciones más rápidas de θ , podemos escribir

$$\sigma \sim \kappa \left(\frac{\delta \theta_{\eta_\theta}}{\eta_\theta} \right)^2, \quad (2.14)$$

donde $\delta \theta_{\eta_\theta}$ es la fluctuación característica de θ sobre distancias del orden de η_θ . El valor de η_θ representa también la escala para la cual la difusión se vuelve impor-

tante. De esta forma, puede verse que η_θ es el análogo de la microescala de Kolmogorov para las fluctuaciones del campo de velocidades \mathbf{u} en un flujo turbulento. Así mismo, σ juega el mismo rol que la tasa de disipación de energía ϵ en la teoría de Kolmogorov [137]. Esta teoría estipula que toda la energía inyectada al flujo turbulento en escalas grandes (L), se transfiere con una tasa constante ϵ hacia las escalas más pequeñas (l) hasta alcanzar las escalas difusivas $\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$, en donde los efectos viscosos son dominantes. Cualitativamente, los remolinos turbulentos de mayor tamaño transfieren su energía a remolinos de menor tamaño, y este proceso se repite hacia escalas menores con tasa ϵ , por lo cual se dice que la energía sufre una cascada desde la escala de inyección de energía (escala integral) hasta la escala disipativa η . Esta cascada se conoce como cascada de Richardson, y el rango de escalas en las cuales se produce es conocido como rango inercial [59].

De acuerdo con la ecuación (2.12), en ausencia de difusión o para escalas mayores que η_θ , θ es arrastrado por los elementos de fluido. De esta manera, la cascada de Richardson para remolinos turbulentos debería estar acompañada por una cascada de $\langle\theta^2\rangle$. Si esto efectivamente sucede, el flujo de energía cinética en la cascada (denotado en general como Π) estará acompañado por un flujo de varianza escalar $\Sigma = \sigma$. La cascada de $\langle\theta^2\rangle$ se detiene cuando la escala de las fluctuaciones de θ es del orden de η_θ .

Como en la teoría de Kolmogorov, el flujo constante de $\langle\theta^2\rangle$ en el rango inercial sugiere la posible existencia de una ley universal de escalas. De hecho, existe un análogo a la *ley de los dos tercios* de Kolmogorov [89] para escalares pasivos en flujos turbulentos. Este resultado constituye uno de los pilares en el estudio de escalares pasivos en flujos turbulentos, y lo detallaremos a continuación.

Consideremos L la escala integral de la turbulencia, l una escala característica de variaciones de θ , y $\langle\delta\theta^2\rangle$ la función de estructura de segundo orden, definida como

$$\langle\delta\theta^2\rangle = \langle[\theta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \theta(\mathbf{x})]^2\rangle. \quad (2.15)$$

En el caso de turbulencia isotrópica, $\langle \delta\theta^2 \rangle$ es independiente de la orientación del vector \mathbf{r} , y por lo tanto sólo es función de $r = |\mathbf{r}|$. Consideremos ahora que nos encontramos en un rango de escalas l tales que

$$\eta_{max} = \max[\eta, \eta_\theta] \ll r \ll \min[L, l] = l_{min}. \quad (2.16)$$

Dado que $r \gg \eta$, la inercia en éste rango de escalas domina sobre las fuerzas viscosas. A su vez, como $r \gg \eta_\theta$, el término convectivo es mucho mayor que la difusión sobre θ . Por otro lado, como $\eta_{max} = \max[\eta, \eta_\theta] \ll r$, tanto ν como κ no afectan a $\langle \delta\theta^2 \rangle$ dentro de las escalas consideradas. Por último, la restricción $r \ll \min[L, l] = l_{min}$ sugiere que la dependencia de $\langle \delta\theta^2 \rangle$ en las escalas grandes es solo en el sentido de que estas determinan el flujo de energía y varianza escalar, es decir sobre los valores de Π y Σ . De esta forma, dentro del rango de escalas considerado, podemos esperar que

$$\langle \delta\theta^2 \rangle = f(\sigma, \epsilon, r). \quad (2.17)$$

Basados en cuestiones meramente dimensionales, la única posibilidad para la dependencia de la función f es que

$$\langle \delta\theta^2 \rangle \sim \sigma \epsilon^{-1/3} r^{2/3}, \quad (2.18)$$

ya que ϵ y r no contienen unidades de θ , y σ tiene unidades de θ^2 . Este resultado fija $\langle \delta\theta^2 \rangle$ a menos de una constante de proporcionalidad en el rango $\eta_{max} \ll r \ll l_{min}$. Fue propuesto por Obukhov en el año 1949 e independientemente por Corrsin en el año 1951 [131, 49]. De forma más general, podemos escribir para las funciones de estructura de orden p

$$\langle \delta\theta^p \rangle \sim \sigma^{p/2} \epsilon^{-p/6} r^{p/3}. \quad (2.19)$$

Este resultado es conocido como la teoría de *Kolmogorov-Obukhov-Corrsin* [131, 49, 123]. Si bien la ecuación (2.18) es consistente con resultados numéricos y experimentales, la validez de la teoría de *Kolmogorov-Obukhov-Corrsin* tiene sus limitaciones. En la próxima sección veremos que existen correcciones a la ecuación (2.19)

dadas por un fenómeno denominado intermitencia, observado en la concentración espacial y temporal del escalar pasivo. Además de éste fenómeno, algunos experimentos también observan una falta de isotropía local [163, 178, 109, 160, 161], en contravención con la hipótesis de *isotropía local* de Kolmogorov.

Si bien la ecuación (2.18) fue hallada utilizando argumentos dimensionales, es posible hallar un resultado exacto a partir de la ecuación que gobierna la dinámica del escalar pasivo. Supongamos que \mathbf{u} y θ tienen valor medio nulo y que sus distribuciones son estadísticamente isótropas y homogéneas. La idea es hallar la evolución temporal de la función de correlación a dos puntos $\langle \theta(\mathbf{x})\theta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle = \langle \theta\theta' \rangle$. Por la ecuación (2.2), se cumple que

$$\partial_t \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \kappa \nabla^2 \theta, \quad (2.20)$$

$$\partial_t \theta' + \mathbf{u}' \cdot \nabla' \theta' = \kappa \nabla'^2 \theta', \quad (2.21)$$

donde las magnitudes primadas son las evaluadas en $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{r}$. Si multiplicamos la ecuación (2.20) por θ' y la ecuación (2.21) por θ , y las sumamos, luego de tomar promedio obtenemos

$$\partial_t \langle \theta\theta' \rangle + \langle \theta' \partial_{x_i} (u_i \theta) + \theta \partial_{x'_i} (u'_i \theta') \rangle = \kappa \langle \theta' \nabla^2 \theta + \theta \nabla'^2 \theta' \rangle. \quad (2.22)$$

Teniendo en cuenta que las operaciones de diferenciación y de promedio conmutan, que θ' es independiente de \mathbf{x} así como θ es independiente de \mathbf{x}' , y que bajo las hipótesis de homogeneidad las derivadas espaciales en x_i dentro de los promedios pueden reemplazarse por derivadas en $-r_i$ (y las derivadas en x'_i por r_i), la ecuación de evolución para $\langle \theta\theta' \rangle$ se reduce a

$$\partial_t \langle \theta\theta' \rangle + \partial_{r_i} \langle (u'_i - u_i) \theta' \theta \rangle = 2\kappa \nabla_r^2 \langle \theta' \theta \rangle. \quad (2.23)$$

Usando la forma más general para escribir un tensor isótropo de primer rango, podemos escribir

$$\langle (u'_i - u_i) \theta' \theta \rangle = A(r) r_i. \quad (2.24)$$

De esta manera, el término de la divergencia en la ecuación (2.23) queda

$$\partial_{r_i} \langle (u'_i - u_i) \theta' \theta \rangle = r A'(r) + 3A = \frac{1}{r^2} d_r (r^3 A), \quad (2.25)$$

y por lo tanto la ecuación para la evolución temporal de $\langle \theta \theta' \rangle$ es

$$\partial_t \langle \theta \theta' \rangle + \frac{1}{r^2} \partial_r [r^2 \langle \delta u_{\parallel} \theta \theta' \rangle] = 2\kappa \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r \langle \theta \theta' \rangle, \quad (2.26)$$

siendo δu_{\parallel} la componente paralela a \mathbf{u} de $\mathbf{u}' - \mathbf{u}$. Aquí, vemos que para determinar la evolución de $\langle \theta \theta' \rangle$ es necesario conocer $\langle \delta u_{\parallel} \theta \theta' \rangle$. Sin embargo, es posible obtener información útil de ésta ecuación. En principio, podemos notar que por condiciones de continuidad, dado cualquier escalar γ vale que $\langle \mathbf{u} \gamma' \rangle = 0$. Por ende podemos escribir

$$\langle \delta u_{\parallel} (\delta \theta)^2 \rangle = -2 \langle \delta u_{\parallel} \theta \theta' \rangle. \quad (2.27)$$

De esta manera la ecuación (2.26) puede escribirse como

$$\partial_t \langle \theta \theta' \rangle = \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \left[\frac{1}{2} \langle \delta u_{\parallel} (\delta \theta)^2 \rangle + \kappa \partial_r \langle \theta \theta' \rangle \right]. \quad (2.28)$$

Por otro lado, dado que estamos en el rango $\eta_{\theta} \ll r \ll L$, la difusión no es importante, por lo cual podemos despreciar el término difusivo $2\kappa \partial_r \langle \theta \theta' \rangle$ en (2.28).

Si ahora usamos que

$$\langle (\delta \theta)^2 \rangle = 2 \langle \theta^2 \rangle - 2 \langle \theta \theta' \rangle, \quad (2.29)$$

la derivada temporal de la ecuación (2.28) para escalas $r \ll L$ y en equilibrio, viene dada por

$$\partial_t \langle \theta \theta' \rangle = \partial_t \langle \theta^2 \rangle - \frac{1}{2} \partial_t \langle (\delta \theta)^2 \rangle \approx \partial_t \langle \theta^2 \rangle = -2\sigma, \quad (2.30)$$

ya que la derivada de $\langle (\delta \theta)^2 \rangle$ es mucho menor que la derivada temporal de $\langle \theta^2 \rangle$ [51].

Por lo tanto, en el rango de escalas con $r \ll L$, si integramos la ecuación (2.28) utilizando (2.27) y (2.29), se obtiene

$$\langle \delta u_{\parallel} (\delta \theta)^2 \rangle = -\frac{4}{3} \sigma r \quad (2.31)$$

Esta ecuación se conoce como *ley de los cuatro tercios* de Yaglom [179], y representa el equivalente a la *ley de los cuatro quintos* de Kolmogorov para turbulencia isótropa

y homogénea. Esta última estipula que en el rango $\eta_\theta \ll r \ll L$ la función de estructura longitudinal de la velocidad $\langle \delta u_{\parallel} \rangle$ satisface [59]

$$\langle (\delta u_{\parallel})^3 \rangle = -\frac{4}{5} \epsilon r. \quad (2.32)$$

Asumiendo autosimilaridad, de la ecuación 2.31, se sigue que

$$\langle (\delta \theta)^2 \rangle \sim \sigma \epsilon^{-1/3} r^{2/3}. \quad (2.33)$$

Estas dos últimas ecuaciones nos permiten expresar las leyes de escala de los espectros de energía y de la varianza del escalar pasivo en el rango inercial, a quienes denotaremos como $E(k)$ y $V(k)$, respectivamente. Teniendo en cuenta que $E(k) \propto \langle (\delta u)^2 \rangle / k$ y $V(k) \propto \langle (\delta \theta)^2 \rangle / k$, de las ecuaciones (2.32) y (2.33) podemos escribir

$$E(k) \sim \epsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (2.34)$$

$$V(k) \sim \epsilon^{1/3} \sigma k^{-5/3}. \quad (2.35)$$

De aquí vemos que para turbulencia isótropa y homogénea, tanto la energía como la varianza del escalar pasivo siguen la misma ley de escalas en el rango inercial. En este punto cabe destacar que para que ambas cascadas puedan desarrollarse, es necesario que tanto P_e como R_e alcancen valores elevados. En la naturaleza, los números de R_e en sistemas turbulentos alcanzan valores que van de 10^8 o más en la atmósfera, hasta 10^{12} en escenarios astrofísicos. Dado que el número de $P_e = \nu R_e / \kappa$, es necesario que κ sea del orden de ν para observar una cascada de $\langle \theta^2 \rangle$. En los cálculos previos, la elección de un rango inercial definido como $\eta_{max} \ll r \ll l_{min}$, garantiza que ambas cascadas puedan observarse dentro de un mismo rango. En la práctica, en muchas aplicaciones P_e es ligeramente menor que R_e , y en este caso la cascada de varianza escalar se produce en un rango de escalas más pequeño dentro del rango inercial definido para la energía. En este trabajo, por simplicidad tomaremos $\kappa = \nu$, de forma tal que ambas cascadas se observarán en el mismo rango de escalas. En algunos casos consideraremos el efecto de variar la razón entre κ y ν .

2.2.4 Intermitencia y el modelo de Kraichnan

En la sección previa, vimos que bajo ciertas hipótesis la función de estructura de segundo orden del escalar pasivo, $\langle \delta\theta^2 \rangle$, sigue una ley de escalas en el llamado rango inercial. También vimos que mediante argumentos fenomenológicos este concepto puede extrapolarse a las funciones de estructura de orden p , $\langle \delta\theta^p \rangle$, para obtener las leyes de escala para cada una de éstas en el rango inercial, obteniendo

$$\langle \delta\theta^p \rangle \sim \sigma^{p/2} \epsilon^{-p/6} r^{p/3}. \quad (2.36)$$

Aquí, recordemos que p es un número natural, y σ y ϵ representan el flujo constante de varianza escalar y energía, respectivamente.

Esto mismo se obtiene para las funciones de estructura de la velocidad en el rango inercial, que según la teoría de Kolmogorov, también tiene exponentes $p/3$. Experimentalmente se observa que existen desviaciones de estas leyes, tanto para el campo de velocidades como para el escalar pasivo [57, 161]. Estas desviaciones están asociadas con fuertes variaciones espaciales en los campos en regiones localizadas del espacio. Este fenómeno es conocido como intermitencia. Debido a las variaciones bruscas del campo (ya sea en el campo de velocidades o en el escalar pasivo), el fluido se encuentra menos correlacionado en las escalas más pequeñas, y por lo tanto se rompe el concepto de semejanza de escalas. De esta manera, la intermitencia puede ser caracterizada cuantitativamente como la desviación en la ley de escalas que siguen las funciones de estructura con respecto de la predicción autosimilar. Existen otras formas de cuantificar el fenómeno de intermitencia, como por ejemplo a través de las funciones de distribución de los campos (o de sus incrementos), que veremos más adelante en este trabajo.

En el caso de turbulencia isotropa y homogénea, las desviaciones observadas para el campo de velocidades suelen ser pequeñas, mientras que para el escalar pasivo la desviación resulta ser bastante más significativa [161, 177, 57]. Simulaciones numéricas y experimentos indican que el escalar pasivo es más intermitente que el

campo de velocidades en el rango inercial [161, 177]. En ciertos casos se ha observado una fuerte intermitencia para el escalar pasivo aún en ausencia de intermitencia para el campo de velocidad en el rango inercial [161]. Esto último puede resultar anti-intuitivo, dado que, según interpretaciones previas, en ausencia de difusión el escalar pasivo simplemente sigue al elemento de fluido. En este punto es necesario reconocer que no es sólo la advección quien determina de forma unívoca a las funciones de estructura del escalar pasivo en el rango inercial. La difusión puede jugar un rol importante. Sin embargo, los efectos de la difusión sólo pueden ser fácilmente aislados en el caso de $\langle \delta\theta^2 \rangle$ [88].

En este contexto, existe un resultado exacto que explica los efectos de la advección y la difusión sobre las funciones de estructura del escalar pasivo siempre que el campo de velocidades varíe rápidamente en el tiempo. Este resultado se conoce como *modelo de Kraichnan* [88, 44]. Este modelo provee una expresión explícita para los exponentes de escala de todas las funciones de estructura del escalar pasivo.

Supongamos que el escalar pasivo obedece la ecuación (2.2) sin fuentes

$$\partial_t \theta(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \theta(\mathbf{x}, t) = \kappa \nabla^2 \theta(\mathbf{x}, t), \quad (2.37)$$

donde \mathbf{u} es ahora un campo de velocidades aleatorio delta-correlacionado en el tiempo. Escribiendo la ecuación (2.37) para $\theta(\mathbf{x}', t) = \theta'$, donde $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{r}$, y sumando nuevamente con la ecuación (2.37) se obtiene

$$[\partial_t + \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)] \delta\theta^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = 2\kappa \delta\theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) (\nabla^2 + \nabla'^2) \delta\theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t), \quad (2.38)$$

donde

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \nabla + \mathbf{u}(\mathbf{x}', t) \nabla'. \quad (2.39)$$

Al igual que en párrafos previos, $\delta\theta = \theta(\mathbf{x}, t) - \theta(\mathbf{x}', t)$, y los operadores primados representan derivadas con respecto a \mathbf{x}' . Multiplicando sucesivamente la ecuación (2.38) por $\delta\theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$, es fácil ver que

$$[\partial_t + \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)] \delta\theta^n(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \kappa \mathcal{K}_n(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t), \quad (2.40)$$

donde

$$\delta\theta^n(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = [\theta(\mathbf{x}, t) - \theta(\mathbf{x}', t)]^n, \quad (2.41)$$

con n entero positivo, y \mathcal{K}_n viene dado por

$$\mathcal{K}_n(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = n [\delta\theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)]^{n-1} (\nabla^2 + \nabla'^2) \delta\theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t). \quad (2.42)$$

El lado izquierdo de la ecuación (2.40) representa la evolución de $\delta\theta^n(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$ debido a la variación temporal y a la advección en las coordenadas \mathbf{x} y \mathbf{x}' . El lado derecho contiene el efecto sobre las escalas mas pequeñas, para las cuales el escalar siente la difusión.

Supongamos ahora que la concentración inicial $\theta(\mathbf{x}, 0)$ y cualquier término fuente agregado a la ecuación (2.37) se producen en escalas L mucho mayores que las escalas difusivas η_θ , y que son tales que los momentos impares son nulos. La separación de escalas permitirá una cascada de varianza escalar, tal que las funciones de estructura de orden n pueden escribirse como

$$T_n = \langle \delta\theta^n(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle = \langle [\theta(\mathbf{x}, t) - \theta(\mathbf{x}', t)]^n \rangle \propto r^{\zeta_n}, \quad (2.43)$$

donde $n > 0$, $0 < \zeta_n \leq n$, y $0 < \zeta_2 \leq 2$ (esta última condición se verá mas claramente al obtener el resultado final). De la ecuación (2.39) puede deducirse la ecuación de movimiento para la funciones de estructura de orden par

$$\partial_t T_{2n}(r) + 2 \langle \delta\theta^n \mathcal{A} \delta\theta^n \rangle = \kappa \mathcal{J}_{2n}(r), \quad (2.44)$$

donde $r = |\mathbf{x} + \mathbf{x}'|$ y $\mathcal{J}_{2n} = 2 \langle \delta\theta^n \mathcal{K}_n \rangle$. Si θ tiene estadística Gaussiana en \mathbf{x} , o para cualquier estadística en $n = 1$, se cumple que

$$\mathcal{J}_{2n} = 2n \frac{T_{2n}(r)}{T_2(r)} A(r), \quad (2.45)$$

donde $A(r) = \nabla^2 T_2(r) - \nabla^2 T_2(0)$. En condiciones de incompresibilidad, isotropía e homogeneidad, el termino advectivo en la ecuación (2.44) puede escribirse como

$$\langle \delta\theta^n \mathcal{A} \delta\theta^n \rangle = -\frac{1}{r^{d-1}} \partial_r [r^{d-1} \mathcal{D}(r) \partial_r T_{2n}], \quad (2.46)$$

donde $\mathcal{D}(r)$ es el coeficiente de difusión turbulenta a dos puntos, y d es la dimensión del espacio. Usando las ecuaciones (2.45) y (2.46) en la ecuación (2.43), la ecuación de evolución para T_{2n} queda

$$\partial_t T_{2n}(r) - 2 \frac{1}{r^{d-1}} \partial_r (r^{d-1} \mathcal{D}(r) \partial_r T_{2n}) = 2\kappa n \frac{T_{2n}(r)}{T_2(r)} A(r). \quad (2.47)$$

El coeficiente $\mathcal{D}(r)$ es también el coeficiente de difusión a dos puntos, y su expresión mas general es

$$\mathcal{D}(r) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \langle \delta u_{\parallel}(\mathbf{x}, t) \delta u_{\parallel}(\mathbf{x}, t') \rangle dt', \quad (2.48)$$

como ya mencionamos $\delta u_{\parallel} = [\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)] \cdot \mathbf{r}/r$, y $\mathcal{D}(r)$ es independiente de t si el flujo es estadísticamente estacionario. Para un campo de velocidades isótropo, y para escalas $r \ll L$, la difusión turbulenta $\mathcal{D}(r)$ puede escribirse como

$$\mathcal{D}(r) = \mathcal{D}_0 \left(\frac{r}{L} \right)^{\zeta_{\mathcal{D}}}, \quad (2.49)$$

y se puede despreciar la difusión molecular. En este punto cabe destacar que el resultado exacto a obtener para los exponentes de escala de las funciones de estructura T_{2n} esta sujeto a que el coeficiente de difusión turbulenta pueda expresarse de la forma explícita dada en la ecuación (2.49). Sin embargo, como en el rango inercial el campo de velocidades sigue por definición una ley de potencias, y como \mathcal{D} es una función en la función de estructura de la velocidad, esta hipótesis es razonable.

Si consideramos un estado estacionario, con derivadas temporales nulas, la solución de (2.47), con la condición (2.49) para $n = 1$ nos da

$$T_2(r) = \frac{\kappa \nabla^2 T_2(0)}{(\vartheta_0/L^2) \zeta_2 d} \left(\frac{r}{L} \right)^{\zeta_2}, \quad (2.50)$$

donde el exponente de segundo orden ζ_2 cumple que

$$\zeta_2 = 2 - \zeta_{\mathcal{D}}, \quad 0 < \zeta_{\mathcal{D}} < 2. \quad (2.51)$$

Esta ecuación es valida siempre que la naturaleza de las interacciones en la cascada de energía sea local [88]. Esta hipótesis, también común a la teoría de Kolmogorov, implica que el flujo σ durante la cascada transfiere energía entre estructuras de tamaño

comparable. Los límites de validez de la ecuación (2.50), $\zeta_{\mathcal{D}} = 2$ y $\zeta_{\mathcal{D}} = 0$, corresponden a casos límites del rango inercial. El valor $\zeta_{\mathcal{D}} = 2$ corresponde a un campo de velocidad confinado en escalas grandes (números de onda pequeños), para lo cual ya no se obtiene un espectro escalar $\propto k^{-5/3}$, sino $\propto k^{-1}$. En el caso en que $\zeta_{\mathcal{D}} = 0$, los efectos de la difusión turbulenta que siente el escalar en una dada escala están dados por contribuciones del campo de velocidad a escalas mucho menores, que simplemente se suman a los efectos de la difusión molecular κ . En este caso el espectro decae exponencialmente [86].

Si ahora consideramos $n > 1$, una observación directa es que tanto el término difusivo \mathcal{J}_{2n} como el término advectivo $\langle \delta\theta^n \mathcal{A} \delta\theta^n \rangle$ son lineales en T_{2n} y ambos son proporcionales a $r^{\zeta_{2n} - \zeta_2}$. Utilizando el resultado hallado en la ecuación (2.50) en la ecuación (2.47) obtenemos

$$\zeta_{2n}(\zeta_{2n} + d - \zeta_2) = nd\zeta_2. \quad (2.52)$$

La solución de ésta última ecuación es

$$\zeta_{2n} = \frac{1}{2} \sqrt{4dn\zeta_2 + (d + \zeta_2)^2} - \frac{1}{2}(d + \zeta_2). \quad (2.53)$$

Este es el principal resultado del *modelo de Kraichnan* y predice los exponentes de las funciones de estructura de orden $2n$ para el escalar pasivo, a partir del exponente de estructura de orden dos, ζ_2 .

2.2.5 Difusión turbulenta

En la sección anterior vimos que es necesario incluir un coeficiente de difusión turbulenta para describir correctamente la cascada de varianza escalar. Esto es así porque uno de los efectos más importantes de la turbulencia es el de aumentar el mezclado, acelerando entonces los procesos de difusión significativamente respecto a la difusión molecular.

Existen diferentes formas de abordar el concepto de difusión turbulenta. Para empezar, supongamos que $\mathbf{x}(\mathbf{a}, t)$ es la trayectoria de una partícula en un flujo tur-

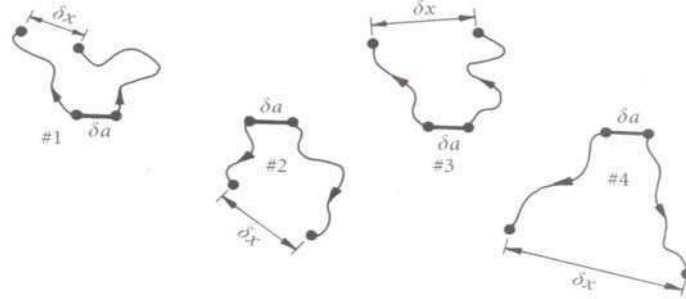


Figura 2.3: Estiramiento de un segmento material en un flujo turbulento [51].

bulento tal que $\mathbf{x}(\mathbf{u}, 0) = \mathbf{u}$. Supongamos que liberamos una secuencia de tales partículas desde el mismo punto \mathbf{a} en un flujo estadísticamente estacionario. Si bien \mathbf{a} no es una variable aleatoria, si lo será la trayectoria de la n -ésima partícula, $\mathbf{x}_n(\mathbf{a}, t)$. Consideremos ahora un pequeño segmento de longitud δa centrado en \mathbf{a} en $t = 0$. Luego de un tiempo t los extremos del segmento se habrán desplazado en direcciones diferentes, como se muestra esquemáticamente en la figura 2.3. Para cada segmento δa centrado en \mathbf{a} que consideremos, vale que

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \delta a_j, \quad (2.54)$$

donde $\delta \mathbf{x}$ es la separación de los extremos luego de un tiempo δt . El tensor $\partial x_i / \partial a_j$ se denomina tensor de deformaciones para un flujo incompresible, y posee la propiedad de conservar el volúmen, de modo que $\det(\partial x_i / \partial a_j) = 1$. Si repetimos el experimento muchas veces para valores idénticos de δa en $t = 0$ y realizamos un promedio de ensamble, tenemos que

$$\langle (\delta \mathbf{x})^2 \rangle = \left\langle \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \frac{\partial x_i}{\partial a_k} \right\rangle \delta a_j \delta a_k. \quad (2.55)$$

Si definimos la matriz simétrica $A_{ij} = (\partial x_i / \partial a_j)(\partial x_i / \partial a_k)$, con autovalores reales λ_1, λ_2 y λ_3 , se cumple que

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{Tr}(A), \quad (2.56)$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = \det(A). \quad (2.57)$$

Como $\det(\partial x_i / \partial a_j) = 1$, entonces $\det(A) = 1$. Para cada realización, se sigue que

$$\frac{1}{3}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \geq (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{1/3} = 1. \quad (2.58)$$

Además, si la turbulencia es isotrópica $\langle A_{jk} \rangle$ es diagonal, por lo cual

$$\left\langle \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \frac{\partial x_i}{\partial a_k} \right\rangle = \alpha(t) \delta_{jk}, \quad 3\alpha = \langle \text{Tr}(A) \rangle. \quad (2.59)$$

Por (2.56) y (2.57) debe cumplirse que $\alpha \geq 1$. Una observación es que el caso en que $\alpha = 1$ es poco probable, ya que esto requiere que los λ_i sean idénticamente uno en cada experimento. Con todo esto, podemos escribir la ecuación 2.55 como

$$\langle (\delta \mathbf{x})^2 \rangle = \alpha(t) (\delta \mathbf{a})^2, \quad \alpha \geq 1. \quad (2.60)$$

Este resultado indica que, en promedio, las partículas en un flujo turbulento se alejan conforme avanza el tiempo. Debajo de éste resultado subyace el concepto de dispersión turbulenta. Aún si la difusión molecular es despreciable, la turbulencia tiende a mezclar las partículas arrastradas por el flujo, y a difundir cualquier homogeneidad en la concentración inicial de partículas o escalares pasivos. El coeficiente de difusión turbulenta que ya mencionamos no es mas que un coeficiente de transporte efectivo para describir este proceso.

En mas detalle, supongamos que $\delta \mathbf{a}$ representa el tamaño de cierta nube esférica de concentración de un escalar pasivo θ y que representa a su ubicación inicial. Sabemos que si P_e es lo suficientemente grande, θ simplemente sigue a los elementos de fluido. Sin embargo, la ecuación (2.60) nos dice que la distancia $\delta \mathbf{a}$ aumenta a medida que el flujo evoluciona. Esto es cierto para cualquier línea material $\delta \mathbf{a}$ sobre la nube esférica a $t = 0$. Por lo tanto, la nube de concentración θ se expande (o dispersa) bajo la acción de fluctuaciones turbulentas. Esto constituye un ejemplo de difusión turbulenta.

Existen dos formas diferentes de estudiar la difusión turbulenta, asociadas a diferentes regímenes de difusión. Por un lado existe la denominada *difusión de Taylor*, que trata de la distancia que se aleja una partícula de fluido de su origen debido

a los remolinos turbulentos [165]. Como veremos mas adelante, este enfoque es relevante a la hora de estudiar la dispersión de un contaminante liberado en forma continua desde un punto fijo en el espacio. La tasa a la cual se esparce dicho contaminante estará dada por la tasa de migración de las partículas de fluido con respecto a su fuente, y en este régimen el flujo en las escalas mas grandes del fluido suele jugar un rol importante.

Por otro lado se tiene el *problema de Richardson*, que trata la dispersión relativa de dos partículas de fluido dentro del flujo turbulento [139]. Este problema se vuelve mas relevante cuando el contaminante es inyectado en el fluido de forma discreta en pequeñas escalas. Por pequeño, se entiende que el tamaño de las nubes de concentración que se inyectan es mucho menor que las escalas integrales del fluido, pero mayor que la microescala de Kolmogorov. De esta manera, vemos que la dispersión de Taylor nos dirá como se mueve el centro de la nube, mientras que la difusión de Richardson nos dice cual será la tasa de crecimiento de la nube. Esta tasa de crecimiento está asociada a la tasa de separación relativa de dos partículas de fluido ubicadas inicialmente en lados opuestos de la nube de contaminante. El coeficiente de difusión turbulenta a dos puntos \mathcal{D} introducido previamente constituye un forma de cuantificar la difusión de Richardson.

Existen diferentes modelos de difusión a dos puntos [87, 71]. En la mayoría de ellos, la difusión turbulenta es proporcional a la energía cinética media de las fluctuaciones turbulentas, $\langle u^2 \rangle / 2$. Para ver esto, se puede usar un argumento simple de campo medio. El argumento que sigue a continuación será muy útil para el resto de este trabajo, y fue obtenido como parte de los resultados de esta tesis y presentado en [145]. Consideremos una concentración escalar dada por la ecuación (2.2) en un campo de velocidades dado por (2.3). Al igual que en la sección 2.2.2, podemos descomponer al campo de velocidades como $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{U}} + \mathbf{u}'$, donde $\bar{\mathbf{U}}$ representa un campo medio y \mathbf{u}' son las fluctuaciones de \mathbf{u} . La descomposición es tal que las fluctuaciones tienen promedio nulo, es decir que $\overline{\mathbf{u}'} = 0$ y que el flujo corresponde

sólo a fluctuaciones (no hay circulación media), $\overline{\mathbf{U}} = 0$. Si hacemos lo mismo para el escalar pasivo, $\theta = \overline{\theta} + \theta'$, reemplazamos en la ecuación (2.2) y promediamos obtenemos

$$\partial_t \overline{\theta} = -\nabla \cdot (\overline{\mathbf{u}'\theta'}), \quad (2.61)$$

donde despreciamos el término difusivo, y asumimos que el campo de velocidad es incompresible. Si restamos esta ecuación de la ecuación (2.2) obtenemos

$$\partial_t \theta' = -\nabla \cdot (\mathbf{u}'\overline{\theta}). \quad (2.62)$$

donde despreciamos los términos cuadráticos en las fluctuaciones. Esta ecuación puede integrarse asumiendo que θ' está correlacionado en un tiempo característico proporcional al tiempo que tarda un remolino turbulento en dar una vuelta completa τ_c . Entonces obtenemos

$$\theta' \sim -\tau_c \nabla \cdot (\mathbf{u}'\overline{\theta}) \sim -\tau_c \mathbf{u}' \cdot \nabla \overline{\theta}, \quad (2.63)$$

donde se usó nuevamente la condición de incompresibilidad (2.4). Si reemplazamos en la ecuación (2.61) tenemos que

$$\partial_t \overline{\theta} \approx \partial_{x_i} (\tau_c \overline{u'_i u'_j} \partial_{x_j} \overline{\theta}). \quad (2.64)$$

El coeficiente $\tau_c \overline{u'_i u'_j}$ puede ser interpretado como una difusión turbulenta. Si el flujo es isótropo, entonces el coeficiente de difusión turbulenta es

$$\mathcal{D} \sim \tau_c \overline{u'^2}. \quad (2.65)$$

Una derivación mas completa en términos de teoría de campo medio puede encontrarse en [55, 19, 24]. Otras derivaciones para coeficientes de difusión a dos puntos pueden hallarse en [87, 71]. Si bien el argumento previo es puramente ilustrativo, da una idea de la dependencia de los coeficientes de difusión con la energía en el flujo turbulento. Como veremos mas adelante, la ley de escalas del espectro de energía varía en los casos en los que el flujo no es isótropo, como por ejemplo, en presencia de rotación. Para este caso particular, veremos que los coeficientes de difusión también se ven afectados.

2.3 Escalares pasivos en turbulencia rotante

Si bien casi no existen estudios previos a esta tesis que consideren escalares pasivos en flujos rotantes, existe un gran número de estudios sobre el efecto de la rotación en un campo turbulento. En esta sección nos concentraremos en esos resultados, que serán útiles para interpretar la dinámica del escalar pasivo mas adelante.

2.3.1 La descomposición helicoidal y los modos resonantes

La dinámica de un fluido incompresible sometido a rotación rígida en el sistema de referencia rotante se describe agregando los términos de aceleración centrífuga y de Coriolis a la ecuación de Navier Stokes,

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} - \nabla \mathcal{P} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (2.66)$$

y al igual que antes la condición de incompresibilidad es

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.67)$$

En la ecuación (2.66) la aceleración centrífuga se encuentra absorbida en el término de la presión total por unidad de masa \mathcal{P} dada por

$$\mathcal{P} = \frac{p}{\rho} - \frac{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})^2}{2}, \quad (2.68)$$

donde $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ es la vorticidad.

Una primer forma de considerar el efecto de la rotación en el flujo es mediante la ecuación linealizada para la vorticidad

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} = 2(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \quad (2.69)$$

que se obtiene tomando el rotor de la ecuación (2.66). La ecuación para la vorticidad admite soluciones del tipo $\mathbf{u} = \mathbf{h} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega t)]$, siempre que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{h} = 0$ por la condición de incompresibilidad. Los modos corresponden a ondas circularmente polarizadas que se propagan en la dirección \mathbf{k} , con

$$\mathbf{h} = \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{k}} + i s \mathbf{v}, \quad (2.70)$$

donde $s = \pm 1$ es la polarización, $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$ y $\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \boldsymbol{\Omega}/\|\mathbf{k} \times \boldsymbol{\Omega}\|$ son dos vectores unitarios ortogonales entre sí, definidos por el vector fijo $\boldsymbol{\Omega}$. Estos modos se denominan modos helicoidales, y la relación de dispersión esta dada por $w = 2s(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega})/k$.

Los modos helicoidales son paralelos a su rotor y, por lo tanto, poseen helicidad máxima cuyo signo dependerá del signo de s ,

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{h} = sk\mathbf{h}. \quad (2.71)$$

Además de ser soluciones lineales, los modos helicoidales son soluciones del sistema no lineal (2.66). Finalmente, los modos poseen la misma estructura que las ondas inerciales, las cuales brindan una representación apropiada del campo de velocidades para el caso rotante [68]. Esta base ha sido ampliamente utilizada en trabajos sobre turbulencia bajo rotación fuerte [33, 34], en estudios teóricos sobre turbulencia rotante [175] y en turbulencia helicoidal [95]. Como forman una base podemos decomponer el campo de velocidad en términos de los modos helicoidales como

$$\mathbf{u}(\mathbf{k}, t) = a_+(\mathbf{k}, t)\mathbf{h}_+ + a_-(\mathbf{k}, t)\mathbf{h}_-. \quad (2.72)$$

Para proseguir podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\hat{z}$. De esta manera la relación de dispersión de los modos helicoidales queda

$$w = 2s\Omega\frac{k_{\parallel}}{k} = 2s\Omega\cos(\alpha_k), \quad (2.73)$$

donde α_k es el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{\Omega}$ y \mathbf{k} . Los modos con $k_{\parallel} = k_z = 0$ poseen frecuencia igual a cero y por lo tanto reciben el nombre de modos lentos; son modos bidimensionales (2D) que no presentan variación en la dirección paralela al eje de rotación. El resto de los modos con $k_{\parallel} \neq 0$ son modos tridimensionales (3D) con frecuencia distinta de cero y reciben el nombre de modos rápidos. Sustituyendo la ecuación (2.72) en la ecuación (2.69) se obtiene una ecuación para la evolución de las amplitudes $a_{\mathbf{k}} = a_{\pm}(\mathbf{k}, t)$,

$$(\partial_t - iw + \nu^*k^2) a_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2}R_o \sum_{\mathbf{k}+\mathbf{p}+\mathbf{q}=0} C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}} a_{\mathbf{p}}^* a_{\mathbf{q}}^* \quad (2.74)$$

El número de Rossby $R_o = U/(2\Omega L)$ se obtiene adimensionalizando la ecuación con una velocidad y una escala característica del fluido, U y L respectivamente, y mide la intensidad de la fuerza asociada a la rotación comparada con la fuerza de inercia. El número de Ekman es otro parámetro adimensional, dado por $\nu^* = \nu/(2\Omega L^2)$, y mide la fuerza de rotación comparada con las fuerzas viscosas. Los $C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}$ son coeficientes de interacción entre modos con vectores de onda \mathbf{k} , \mathbf{p} y \mathbf{q} (ver [174, 175]). La condición $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0$ implica que los modos interactúan únicamente entre tríadas.

Las amplitudes a_k evolucionan en dos escalas de tiempo diferentes: una escala lenta $\tau \sim l/U$ asociada a los remolinos turbulentos, y una escala rápida $\tau_\Omega \sim R_o$ asociada a la rotación. Como resultado, las amplitudes pueden escribirse como oscilaciones rápidas moduladas en amplitud por los remolinos más lentos, a saber

$$a_k = b_k(\tau)e^{iw_k t}. \quad (2.75)$$

Sustituyendo la ecuación (2.75) en la ecuación (2.74) y promediando sobre el tiempo rápido se obtiene,

$$(\partial_t + \nu^* k^2) b_k = \frac{1}{2} R_o \sum_{\mathbf{k}+\mathbf{p}+\mathbf{q}=0}^{w_k+w_q+w_p=0} C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}} b_{\mathbf{p}}^* b_{\mathbf{q}}^*. \quad (2.76)$$

Aquí consideramos que aquellas interacciones con $w_k + w_p + w_q \neq 0$ promedian cero sobre la escala rápida τ . Pruebas más rigurosas de esta ecuación pueden encontrarse en [56, 103]. La ecuación (2.76) es idéntica a la ecuación (2.74), excepto que la suma se encuentra restringida, además, por la condición de resonancia para las ondas $w_k + w_p + w_q = 0$. A partir de la relación de dispersión (2.73), las condiciones $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0$ y $w_k + w_p + w_q = 0$ en la ecuación (2.76) resultan

$$s_k \cos(\alpha_k) + s_p \cos(\alpha_p) + s_q \cos(\alpha_q) = 0, \quad (2.77)$$

$$k \cos(\alpha_k) + p \cos(\alpha_p) + q \cos(\alpha_q) = 0. \quad (2.78)$$

De estas relaciones se sigue que existen tres tipos de interacciones resonantes [175]. Interacciones entre modos rápidos-lentos-rápidos (r-l-r), rápidos-rápidos-rápidos (r-r-r) y lentos-lentos-lentos (l-l-l). Mientras que sólo un subconjunto de interacciones

r-r-r cumplen con las condiciones (2.77) y (2.78), las interacciones l-l-l son todas trivialmente resonantes (pues todos los modos lentos tienen frecuencia nula) y, por lo tanto, la energía se transfiere con mayor eficiencia entre modos 2D (aquellos con $\alpha_k = \pi/2$). Por otro lado, en las interacciones r-l-r, el modo lento actúa solamente como intermediario en el intercambio de energía entre dos modos rápidos sin existir transferencia de energía hacia ó desde el modo lento [67, 175]. Debido a que los modos lentos siempre cumplen las condiciones (2.77) y (2.78), las interacciones entre modos 3D tienden a transferir energía a modos más cercanos al plano $k_{\parallel} = 0$, es decir, a modos con α mayor, siendo entonces la condición de resonancia la responsable del proceso mediante el cual los flujos rotantes tienden a un estado cuasi-2D. Este proceso es conocido como *teorema dinámico de Taylor Proudman* [68, 43], y resulta en la formación de estructuras con forma de columna en un flujo turbulento rotante. Como veremos mas adelante, esta anisotropía tendrá un efecto importante en el transporte y mezclado de magnitudes escalares pasivas en presencia de rotación.

2.4 Fenomenología de flujos turbulentos rotantes

Como ya vimos en la sección 2.2.4, la difusión turbulenta depende de la intensidad de las fluctuaciones turbulentas. Por lo tanto, dependerá de la forma del espectro de energía del flujo, que gobierna cuanta energía se encuentra en las escalas pequeñas. En ésta sección presentamos argumentos fenomenológicos sencillos que serán útiles para flujos turbulentos rotantes con y sin helicidad.

2.4.1 Flujos no helicoidales

Varios estudios consideran el efecto de la rotación en la cascada de energía. Mientras que en un flujo rotante parte de la energía sufre una cascada directa (hacia escalas mas chicas), hay evidencia de que para tasas moderadas de rotación una fracción de la energía también sufre una cascada inversa, lo cual resulta en una acumulación de

energía en las escalas más grandes que la escala de inyección de energía [174, 157]. También se sabe, y como se mencionó, que la presencia de rotación establece una dirección preferencial para la transferencia de energía en el espacio espectral, con la energía yendo hacia modos con números de onda paralelos pequeños (donde paralelo se define respecto al eje de rotación), lo que resulta en una cuasi-bidimensionalization del flujo [33, 174, 35]. El flujo de energía también se reduce (en comparación con el caso isótropo y homogéneo) en virtud de la condición adicional de resonancia que deben cumplir las tríadas para la transferencia eficaz de energía entre modos [174, 35]. Esto resulta en un espectro de energía más pronunciado que el esperado según la fenomenología de Kolmogorov.

Teniendo en cuenta las definiciones de la sección anterior, la tasa de energía inyectada a escalas grandes, ϵ , y transferida en forma constante en el rango inercial pueden escribirse como

$$\epsilon \sim \frac{u_{l_{\perp}}^2}{\tau_{l_{\perp}}} \frac{\tau_{\Omega}}{\tau_{l_{\perp}}}, \quad (2.79)$$

donde l_{\perp} corresponde a una escala del rango inercial perpendicular al eje de rotación, y $\tau_{l_{\perp}}$ es el tiempo característico de giro de un remolino turbulento en la escala l_{\perp} . En la ecuación (2.79), la razón $\tau_{\Omega}/\tau_{l_{\perp}}$ representa la reducción en el flujo de energía por el efecto de las ondas. Cuanto menor es el tiempo de las ondas τ_{Ω} , más difícil es satisfacer la condición de resonancia y mayor cantidad de períodos de la onda son necesarios para tener una transferencia de energía de orden uno.

Considerando ahora el tiempo característico de las ondas $\tau_{\Omega} \sim 1/\Omega$, podemos escribir

$$\epsilon \sim \frac{u_{l_{\perp}}^2}{\tau_{l_{\perp}}^2} \Omega. \quad (2.80)$$

A su vez, si un remolino a escala l_{\perp} tiene velocidad asociada $u_{l_{\perp}}$, entonces $\tau_{l_{\perp}} \sim l_{\perp}/u_{l_{\perp}}$. De esta manera, la ecuación (2.80) queda

$$\epsilon \sim \frac{u_{l_{\perp}}^4}{l_{\perp}^2 \Omega}, \quad (2.81)$$

de lo que sigue que $u_{l_{\perp}}^2 \sim (\epsilon\Omega)^{1/2}l_{\perp}$. De esta manera el espectro de energía perpendicular puede expresarse como

$$E(k_{\perp}) \sim \frac{\langle u_{l_{\perp}}^2 \rangle}{k_{\perp}} \sim (\epsilon\Omega)^{1/2}k_{\perp}^{-2}, \quad (2.82)$$

donde usamos que $l_{\perp} = 2\pi/k_{\perp}$. Este argumento fenomenológico nos permite confirmar que el espectro de energía perpendicular en un flujo rotante sigue una ley de escalas mas pronunciada que el espectro de energía en el caso isótropo y homogéneo. El argumento original fue introducido en [82] para incluir la influencia de las ondas de Alfvén en el espectro de turbulencia magnetohidrodinámica, y fue aplicado en turbulencia rotante en [186, 185]. Como veremos en capítulos subsiguientes, los efectos de la rotación sobre el campo de velocidades se trasladan al transporte de escalares pasivos, modificando tanto la cascada de varianza escalar como los coeficientes de transporte.

2.4.2 Flujos helicoidales

La helicidad se define como el producto vectorial entre la velocidad y su rotor, a saber,

$$H = \int \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} d^3\mathbf{x}. \quad (2.83)$$

Al igual que la energía, la helicidad es un invariante cuadrático de las ecuaciones de Euler, aunque a diferencia de ésta, no es definida positiva. Es una magnitud de gran importancia en distintos procesos atmosféricos [101, 79, 104], tales como tormentas convectivas rotantes. En turbulencia isótropa y homogénea tanto la helicidad como la energía se transfieren hacia escalas mas pequeñas [21, 41, 42, 63, 113]. La suposición de que la tasa de transferencia de ambas cantidades está puramente determinada por el flujo de energía da como resultado las leyes de escala predichas por la teoría de Kolmogorov en el rango inercial, independientemente de la cantidad de helicidad en el flujo. Sin embargo, la presencia de helicidad puede afectar en cierto nivel la transferencia de energía. Cuando \mathbf{u} es estrictamente paralelo a $\boldsymbol{\omega}$, el término no lineal,

escrito en términos del vector $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$, se anula a menos de un término de presión. Como resultado, el desarrollo de la turbulencia se retrasa en el caso helicoidal.

El caso es diferente en turbulencia rotante. Resultados numéricos y teóricos muestran que los efectos de la rotación junto a los de la helicidad inhiben la transferencia de energía por medio de dos mecanismos diferentes. Por un lado, la helicidad disminuye globalmente la intensidad de las interacciones no-lineales, mientras que la rotación concentra las interacciones no lineales en tríadas resonantes de ondas inerciales [127].

Simulaciones numéricas en [114] muestran que para flujos rotantes la cascada directa de helicidad domina a la cascada de energía en el rango inercial. Esto se debe al desarrollo de una cascada inversa de energía, la cual deja menos flujo de energía disponible para transferir hacia escalas mas pequeñas. Como resultado los espectros pueden obtenerse mediante un simple argumento fenomenológico. Para la máxima inyección posible de helicidad, la tasa de inyección de helicidad δ se relaciona con la tasa de inyección de energía según $\delta \sim k_F \epsilon$, donde k_F es el número de onda correspondiente a la escala de inyección de energía. Para cada número de onda k_\perp en el espacio de Fourier se cumple la desigualdad de Schwartz

$$H(k_\perp) \leq k_\perp E(k_\perp), \quad (2.84)$$

donde $H(k_\perp)$ es el espectro de helicidad. Para escalas cada vez mas pequeñas (en el límite $k_\perp \rightarrow \infty$), debe haber un flujo despreciable de helicidad (a menos que $E(k_\perp) \rightarrow \infty$), por lo cual el flujo de helicidad sólo puede transferirse hacia escalas mas pequeñas. Como ya se mencionó, debido a la cascada inversa de energía, queda menos energía disponible para transferir hacia escalas mas pequeñas, por lo cual el flujo de helicidad resulta dominante para escalas $k \geq k_F$. Si llamamos Δ al flujo de helicidad, y repitiendo el argumento utilizado en la sección previa para incluir al tiempo de las ondas $\tau_\Omega \sim 1/\Omega$, podemos escribir

$$\Delta \sim \delta \sim \frac{h_{L\perp}}{\tau_{L\perp}^2} \tau_\Omega, \quad (2.85)$$

donde $h_{l_{\perp}}$ es el contenido de helicidad en la escala l_{\perp} y $\tau_{l_{\perp}} \sim l_{\perp}/u_{l_{\perp}}$ es el tiempo de giro de un remolino turbulento en la escala l_{\perp} . Usando esta última ecuación mas la desigualdad de Schwartz (2.84), si $E(k_{\perp}) \sim k_{\perp}^{-n}$ entonces

$$H(k_{\perp}) \sim k_{\perp}^{n-4}. \quad (2.86)$$

El caso $n = 2$ corresponde a un flujo sin helicidad neta, mientras que por la desigualdad de Schwartz para helicidad máxima $n = 2.5$. Esto además nos da un espectro de helicidad menos empinado que el espectro de energía para $n \geq 2$.

Otra forma de caracterizar las leyes de escala seguidas por la helicidad puede verse en [141], donde desarrollamos un método especialmente útil cuando la helicidad fluctúa alrededor de cero. En este caso, la ley de escalas del espectro de helicidad en un flujo turbulento puede obtenerse a partir del exponente espectral de la medida de signo de la helicidad, conocido como exponente de cancelación.

Capítulo 3

Leyes de Escala

3.1 Introducción

En los últimos años el estudio de escalares pasivos ha estado asociado con avances sustanciales en el conocimiento teórico de los flujos turbulentos [88, 44, 57]. Se sabe que los escalares pasivos comparten similitudes con la turbulencia hidrodinámica tridimensional, tales como el desarrollo de una cascada directa (una transferencia de varianza a escalas más pequeñas con flujo espectral constante), y el fenómeno de intermitencia (el desarrollo espontáneo de fuertes gradientes en escalas pequeñas). Al igual que en el estudio de turbulencia en las ecuaciones de Navier-Stokes, algunos temas de interés incluyen la persistencia de la anisotropía en escalas pequeñas [161, 177], el estudio de universalidad, y de las desviaciones de invarianza de escala asociadas con eventos intermitentes. Para entender estos temas en el escalar pasivo, se han hecho avances significativos en el marco de el modelo Kraichnan descrito en el capítulo anterior [86, 88, 45].

El caso de escalares pasivos en turbulencia rotatante ha recibido menos atención. Como vimos en el capítulo previo, es sabido que uno de los efectos de la rotación es modificar la transferencia de energía, transfiriéndola preferentemente hacia modos perpendiculares al eje de rotación [33, 174, 35]. Esto resulta en una bidimension-

alización del flujo y en el desarrollo de una cascada inversa de parte de la energía disponible en el sistema. Simulaciones de alta resolución confirman estos resultados, y también indican que la intermitencia en el campo de velocidad es reducida sustancialmente por la rotación [128, 114, 115, 116]. El transporte de escalares pasivos también se ha estudiado en simulaciones numéricas (que forman parte de esta tesis) y en experimentos. Ambos acuerdan en que la transferencia del escalar se ve afectada por la rotación [181, 25], y en el desarrollo de leyes de escala anómalas en las funciones de estructura, como se verá en el próximo capítulo.

En cuanto al efecto de la helicidad, resultados numéricos en [47] y en [144] (estos últimos son parte de esta tesis) muestran que la helicidad no afecta la cascada inercial de varianza escalar en turbulencia isótropa y homogénea. Sin embargo, el efecto de la helicidad en el transporte de cantidades escalares en flujos rotantes no había sido considerado hasta los trabajos que forman parte del cuerpo de esta tesis.

Uno de los objetivos de este capítulo es estudiar cómo la rotación y la helicidad afectan el espectro del escalar pasivo en un flujo turbulento. En éste capítulo se presenta el análisis de los datos de simulaciones numéricas directas de la ecuación de Navier-Stokes en un sistema de referencia rotante, junto con la ecuación de advección-difusión para el escalar pasivo. Para cada simulación numérica se calculan los flujos y espectros en presencia o ausencia de rotación, y con o sin inyección de helicidad, para identificar los índices espectrales en el rango inercial de la cascada directa de energía y del escalar pasivo. Las simulaciones se realizan usando un código pseudospectral paralelo descrito en la sección 3.2.1. El forzado utilizado para todos los campos es una superposición de modos aleatorios delta-correlacionados en el tiempo, con inyección de helicidad controlable, que en las simulaciones presentadas aquí es cero o máxima. Más detalles acerca del forzado pueden hallarse en [138, 167]. La resolución espacial utilizada es de 512 puntos en cada dirección espacial, en una grilla regular y periódica. El escalar pasivo se inyecta en un flujo turbulento inicialmente homogéneo e isótropo, y la rotación se activa luego de alcanzar un estado de

equilibrio. Para la escala de inyección de energía se consideran dos casos diferentes. En un caso, la escala de inyección es la mayor disponible en el dominio. En otro, el escalar y la energía se inyectan en escalas intermedias, para permitir el desarrollo de una cascada inversa de energía mecánica y estudiar sus efectos sobre la cascada directa del escalar. Se consideran diferentes velocidades de rotación para explorar valores del número de Rossby moderados.

Encontramos que las leyes de escala de los espectros de energía y escalar pasivo en la dirección perpendicular al eje de rotación difieren en el caso de los flujos helicoidales con respecto de los que se encuentran en el caso no helicoidal. Además, en este capítulo presentamos un argumento fenomenológico sencillo que vincula los efectos de la rotación y de la helicidad con el espectro del escalar pasivo. Los resultados reportados en este capítulo fueron publicados en [142] y en [144].

3.2 Definiciones

3.2.1 Simulaciones numéricas

En este capítulo se utilizan datos provenientes de simulaciones numéricas directas de las ecuaciones (2.2) y (2.3), realizadas con el código paralelizado GHOST [64, 65, 117]. Este código resuelve las ecuaciones mediante un método pseudo-espectral, y la evolución temporal se realiza utilizando el método de Runge-Kutta de orden 2, con la regla de los dos tercios para evitar efectos de aliasing [64, 65]. Dicha regla cancela la amplitud del campo de velocidades para números de onda $k \geq N/3$ en cada iteración, con lo cual el máximo número de onda resuelto en las simulaciones es $k_{max} = N/3$, donde $N = 512$ es la resolución espacial lineal. Para que las simulaciones sean *directas* (es decir para que todas las escalas espaciales estén bien resueltas y no se necesite un método de subgrilla), el número de onda k_{max} debe ser mayor al número de onda asociado a la escala de disipación de Kolmogorov k_η , es decir, al mínimo número de onda para el cual la disipación se vuelve dominante. En el caso de

turbulencia isotrópica en tres dimensiones (3D), el número de onda asociado a la escala de disipación es $k_\eta = (\epsilon/\nu^3)^{1/4}$, donde ϵ es la tasa de inyección de energía. Para que una simulación con N puntos de grilla resuelva todas las escalas, debe cumplirse entonces que

$$\frac{N}{3} \geq \left(\frac{\epsilon}{\nu^3}\right)^{1/4}. \quad (3.1)$$

Las ecuaciones (2.2) y (2.3) se resuelven en un dominio tridimensional de tamaño 2π con condiciones de contorno periódicas. Para resolver la presión, tomamos la divergencia de la ecuación (2.3), utilizamos la condición de incompresibilidad (2.4), y resolvemos la ecuación de Poisson resultante. Todas las simulaciones presentadas están bien resueltas, en el sentido explicado arriba de que los números de onda de disipación k_η y k_{η_θ} (respectivamente, para la energía cinética y para el escalar pasivo) son mucho menores que el número de onda máximo k_{max} en todo momento.

Los parámetros adimensionales usados para controlar las simulaciones son los números de Reynolds (R_e), Peclet (P_e), y Rossby (R_o) definidos en la sección siguiente. Para la mayoría de las simulaciones que se muestran en la siguiente sección, la velocidad turbulenta media es $U \approx 1$, y todas las corridas tienen $\nu = \kappa$ (es decir, $P_e = R_e$). El forzado utilizado para el campo de velocidades, así como para el escalar pasivo, es una superposición de modos de Fourier con fases aleatorias, delta-correlacionadas en el tiempo, y la helicidad es inyectada de forma controlada mediante la correlación de las componentes de campo de velocidad y las fases entre sus modos Fourier usando el método descrito en [138].

Tanto la energía cinética como la varianza del escalar pasivo son inyectadas en el mismo número de onda k_F . Uno de los conjuntos de simulaciones (conjunto A) tiene la fuerza externa aplicada en $k \in [1, 2]$. Por lo tanto, $k_F \approx 1$, y las simulaciones poseen la mayor separación posible de escalas entre el número de onda de inyección y el mayor número de onda resuelto. Otra serie de simulaciones (conjunto B) es forzada en $k \in [2, 3]$ (entonces $k_F \approx 2$). Por último, la tercera serie de simulaciones se fuerza en $k_F = 3$ (conjunto C). Para estas últimas series, la elección

de $k_F = 2$ ó $k_F = 3$ resulta en una mayor separación de escalas entre el tamaño de la caja y la escala del forzado, permitiendo cierta transferencia de energía hacia escalas más grandes en presencia de rotación (a pesar de que la separación de escalas no es lo suficientemente grande como para estudiar la cascada inversa en detalle). Esto reduce el número de Reynolds y da lugar a una cascada inercial directa menos resuelta, ya que la separación entre el forzado y la escala de disipación se reduce. Sin embargo, permitir el desarrollo de una transferencia inversa de energía es importante para poder observar una cascada directa dominada por la helicidad en presencia de rotación [114]. Como resultado, las tres series de simulaciones nos permiten comparar simulaciones con números de Rossby similares (aunque con diferentes números de Reynolds), para distintos valores de helicidad neta.

Las simulaciones se realizaron como sigue: en primer lugar se hizo una simulación de la ecuación de Navier-Stokes con $\Omega = 0$, hasta que el flujo alcanza un régimen turbulento estacionario. Esto requiere una integración de aproximadamente diez veces el tiempo de giro característico de remolinos de tamaño L (donde L es la escala integral del flujo), a saber τ_{NL} . A continuación, se inyecta el escalar pasivo y se continua la simulación durante otros diez τ_{NL} hasta alcanzar un nuevo estado estacionario para el escalar pasivo. Esta metodología se aplica en los tres grupos de simulaciones, y las simulaciones resultantes corresponden a las simulaciones $A1$, $B1$ y $C1$ (ver Tabla 3.1). Por último, se enciende la rotación. Se consideraron diferentes valores de Ω para alcanzar números de Rossby similares en todas las simulaciones con $\Omega \neq 0$. En todas las simulaciones con rotación se utilizó como condición inicial el último estado de la velocidad y el escalar pasivo correspondiente a las simulaciones sin rotación. Cada una de las simulaciones con rotación se extendió veinte veces en el tiempo, en unidades de τ_{NL} . Los parámetros para todas las simulaciones se enumeran en la Tabla 3.1.

3.2.2 Escalas características y números adimensionales

En esta tesis se utilizan varias escalas características para caracterizar a los flujos, y que son normalmente usadas en el estudio de flujos turbulentos. La escala integral,

$$L = 2\pi \frac{\sum_k k^{-1} E(k)}{\sum_k E(k)}, \quad (3.2)$$

con $E(k)$ el espectro de energía isotrópico (promediado en el tiempo en el caso de esta tesis). En la práctica esta escala es cercana a la escala de inyección de energía. Como parámetro, nos da una idea del tamaño de los remolinos que contienen la mayor parte de ella. La escala de Taylor,

$$\lambda = 2\pi \frac{\sum_k E(k)}{\sum_k k^2 E(k)}, \quad (3.3)$$

usada mayormente en estudios experimentales. En el espectro turbulento, esta escala representa una escala típica en el rango inercial. La otra escala utilizada es la escala de disipación de Kolmogorov para turbulencia isotrópica y homogénea 3D que ya fue definida,

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4}, \quad (3.4)$$

y por último, la escala de disipación para el escalar pasivo,

$$\eta_\theta = \left(\frac{\kappa}{\sigma} \right)^{1/2}. \quad (3.5)$$

Estas dos últimas escalas son aquellas para las cuales los efectos disipativos son dominantes.

Como ya se mencionó, para describir ciertos aspectos de los flujos y como parámetros de control en las simulaciones utilizamos distintos números adimensionales. El número de Reynolds mide la amplitud relativa del término no lineal respecto al término viscoso en la ecuación de Navier-Stokes.

$$R_e = \frac{UL}{\nu}. \quad (3.6)$$

Un número comunmente utilizado en el estudio de turbulencia es el número de Reynolds basado en la escala de Taylor

$$R_{e\lambda} = \frac{U\lambda}{\nu}. \quad (3.7)$$

En flujos rotantes, el número de Rossby mide la relación entre el término no lineal y el término de Coriolis, siendo menor cuanto mayor es la frecuencia de rotación

$$R_o = \frac{U}{2L\Omega}. \quad (3.8)$$

En flujos rotantes también se utiliza el número llamado “micro Rossby”,

$$R_o^\omega = \frac{\omega}{2\Omega}, \quad (3.9)$$

que establece una relación entre la aceleración dada por convección y aquella causada por la fuerza de Coriolis en la escala de Taylor. En las simulaciones, R_o se mantiene lo suficientemente chico para que la rotación afecte a la turbulencia, mientras que R_o^ω debe ser mayor que la unidad para que el efecto linealizador de las ondas inerciales no sea dominante, resultando en un decaimiento de la energía puramente exponencial por efectos viscosos [35]. Por último, tenemos al número de P_e que se define a partir del cociente entre el término advectivo y el difusivo en la ecuación (2.2)

$$P_e = \frac{UL}{\kappa} = \frac{\nu}{\kappa} R_e. \quad (3.10)$$

El cociente ν/κ se conoce como el número de Schmidt, o en su equivalente magnetohidrodinámico, como el número de Prandtl [136].

3.2.3 Espectros

En la presente tesis se consideran espectros isótropos y anisótropos para la energía, la helicidad y el escalar pasivo. El espectro isótropo usual se define promediando sobre casquetes esféricos (en 3D) ó circulares (en 2D) en el espacio Fourier. Por ejemplo, para la energía, se define el espectro anisótropo como

$$E(k, t) = \frac{1}{2} \sum_{k \leq |k| \leq k+1} \mathbf{u}^*(\mathbf{k}, t) \mathbf{u}(\mathbf{k}, t), \quad (3.11)$$

donde \mathbf{u}^* es el complejo conjugado del campo de velocidad en el espacio de Fourier.

En el límite continuo, este espectro es

$$E(k, t) = \frac{1}{2} \int \phi_{ii}(\mathbf{k}, t) k^2 d\Omega_k, \quad (3.12)$$

donde ϕ_{ii} es la transformada Fourier de la función de correlación de segundo orden de la velocidad $\langle u_i(\mathbf{x}, t)u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle$, y Ω_k representa el ángulo sólido en el espacio Fourier. Para calcular el espectro anisótropo perpendicular, las componentes de \mathbf{u} se integran alrededor del eje de rotación para obtener un espectro que depende solamente de k_{\perp} ,

$$E(k_{\perp}, t) = \frac{1}{2} \sum_{k_{\perp} \leq |k_{\perp}| \leq k_{\perp}+1} \mathbf{u}^*(\mathbf{k}, t) \mathbf{u}(\mathbf{k}, t). \quad (3.13)$$

Análogamente, podemos definir el espectro paralelo integrando las componentes de $\mathbf{u}(\mathbf{k}, t)$ sobre planos perpendiculares al eje de rotación,

$$E(k_{\parallel}, t) = \frac{1}{2} \sum_{k_{\parallel} \leq |k_{\parallel}| \leq k_{\parallel}+1} \mathbf{u}^*(\mathbf{k}, t) \mathbf{u}(\mathbf{k}, t). \quad (3.14)$$

Los espectros del escalar pasivo y de la helicidad se calculan de forma análoga. Para el escalar pasivo, el espectro $V(k, t)$ se define a partir de la varianza escalar $\langle \delta\theta^2 \rangle$, o análogamente a partir de la función de correlación a dos puntos $\langle \theta_i(\mathbf{x}, t)\theta(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle$. Tanto para la velocidad como para el escalar pasivo y la helicidad, los espectros presentados en las secciones siguientes se promedian en el tiempo.

3.3 Resultados Numéricos

Los resultados presentados en ésta sección corresponden a simulaciones numéricas directas de las ecuaciones de Navier-Stokes en un marco rotante para un flujo incompresible, mas la ecuación de difusión-advección para el escalar pasivo. Estos resultados fueron publicados en [142] y en [144] y los parámetros utilizados en las simulaciones se encuentran resumidos en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1: Parámetros utilizados en las simulaciones: k_F es el número de onda correspondiente a la escala del forzado, Ω es la velocidad angular de rotación, R_o es el número de Rossby, ν es la viscosidad cinemática, R_e es el número de Reynolds, U es la velocidad cuadrática media en el estado turbulento estacionario, y $H = \langle \mathbf{u} \cdot \nabla \times \mathbf{u} \rangle$ es la helicidad total (promediada en el tiempo).

Simulación	k_F	Ω	R_o	ν	R_e	U	H
A1	1	0	∞	6×10^{-4}	1000	2	0
A2	1	4	0.04	6×10^{-4}	1000	2	0
B1	2	0	∞	5×10^{-4}	600	2	3
B2	2	8	0.04	5×10^{-4}	600	2	6
B3	2	16	0.04	5×10^{-4}	600	4	11
C1	3	0	∞	6×10^{-4}	240	2	0
C2	3	12	0.04	6×10^{-4}	240	2	0

3.3.1 Efectos de la rotación

Espectros y flujos

La figura 3.1 muestra los espectros isótropos de energía $E(k)$ y de varianza escalar $V(k)$ para la simulación *A1* (sin rotación y sin inyección de helicidad). Se puede identificar un rango inercial donde la energía y el escalar y pasivo siguen una ley de escalas $\sim k^{-5/3}$, como se esperaba de estudios anteriores del escalar pasivo en turbulencia isotrópa y homogénea [57, 162, 44]. Para las simulaciones *B1* y *C1*, también sin rotación pero forzadas a diferentes números de onda (y en el caso de *B1*, con helicidad), se observa la misma ley de escalas en el rango inercial.

En la figura 3.2 se muestran los espectros perpendiculares de la energía y el escalar pasivo, respectivamente $E(k_\perp)$ y $V(k_\perp)$, para las simulaciones *A2* y *C2* (correspondientes a flujos con rotación pero sin helicidad neta, ver Tabla 3.1). En las

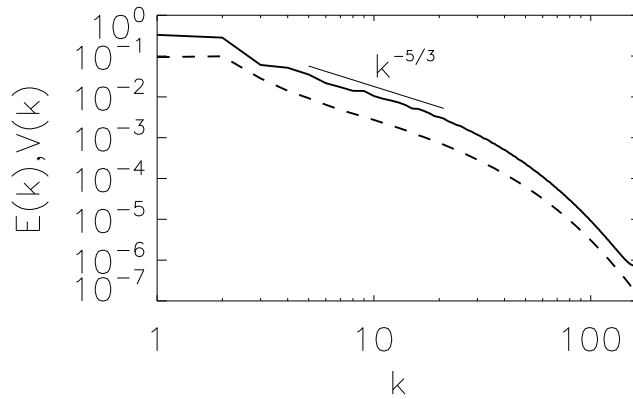


Figura 3.1: Espectros de energía (línea llena) y de varianza escalar (línea de trazos) para la simulación A1 (sin rotación ni helicidad). La ley de escalas de Kolmogorov se indica como referencia.

figuras 3.2(a) y 3.2(b) puede identificarse un rango inercial de escalas tanto para la energía como para la varianza del escalar pasivo, aunque con diferentes leyes de potencia. El espectro de energía perpendicular sigue una ley de escalas compatible con una ley de potencias $\sim k_{\perp}^{-2}$. Esta ley de potencias fue reportada previamente tanto en experimentos como en resultados numéricos de turbulencia rotante (véase, por ejemplo, [128, 114]), y es compatible también con modelos fenomenológicos sencillos basados en una reducción del flujo de energía asociado con la interacción entre las ondas y los remolinos turbulentos [186, 128, 114], así como con predicciones de modelos de clausura a dos puntos, detallados en [33, 35]. La ley de escalas en el rango inercial para el escalar pasivo es compatible con $\sim k_{\perp}^{-3/2}$. Estas leyes de potencias pueden verse más claramente en los espectros compensados de las figuras 3.3(a) y 3.3(b). A diferencia del caso isótropo y homogéneo, en presencia de rotación la energía cinética y el escalar pasivo muestran leyes de potencia diferentes en el rango inercial.

En las simulaciones con rotación, y a diferencia de las leyes de escala observadas para los espectros perpendiculares, los espectros isótropos y los espectros en la dirección paralela ($E(k)$ y $E(k_{\parallel})$ en el caso de la energía) no presentan una ley

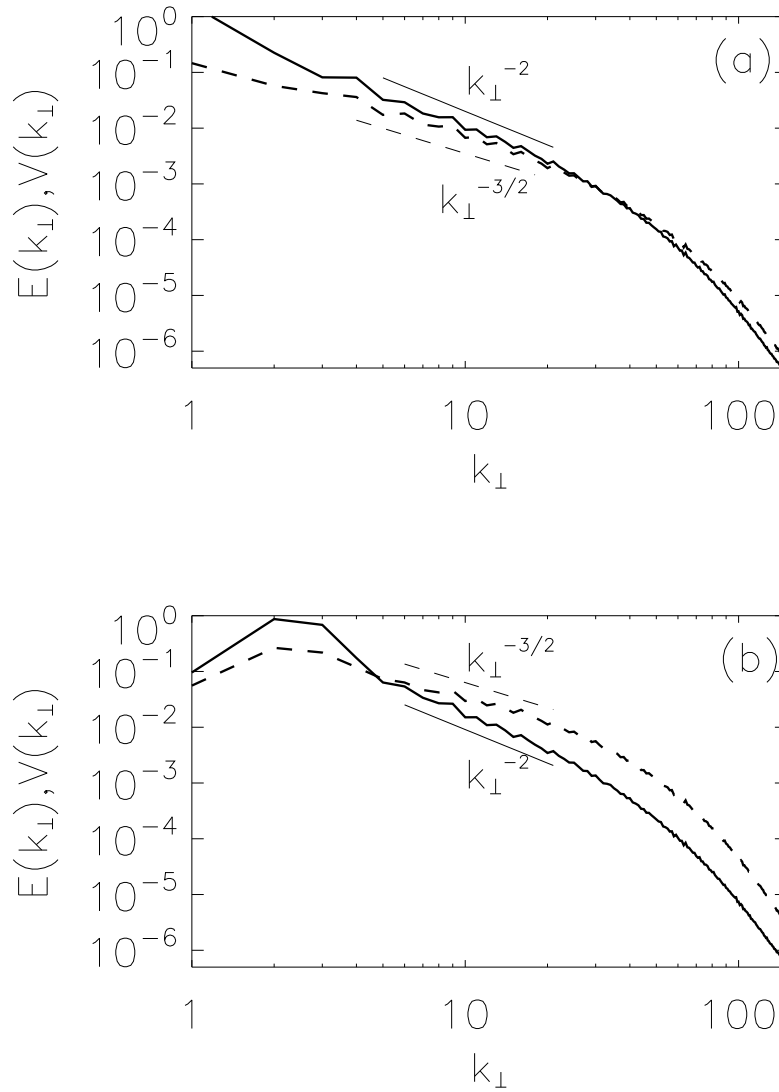


Figura 3.2: Espectros de energía perpendicular (línea llena) y de varianza escalar (línea de trazos) para: (a) simulación A2 ($\Omega = 4$), y (b) simulación C2 ($\Omega = 12$). Las leyes de escala k_{\perp}^{-2} y $k_{\perp}^{-3/2}$ se indican como referencia.

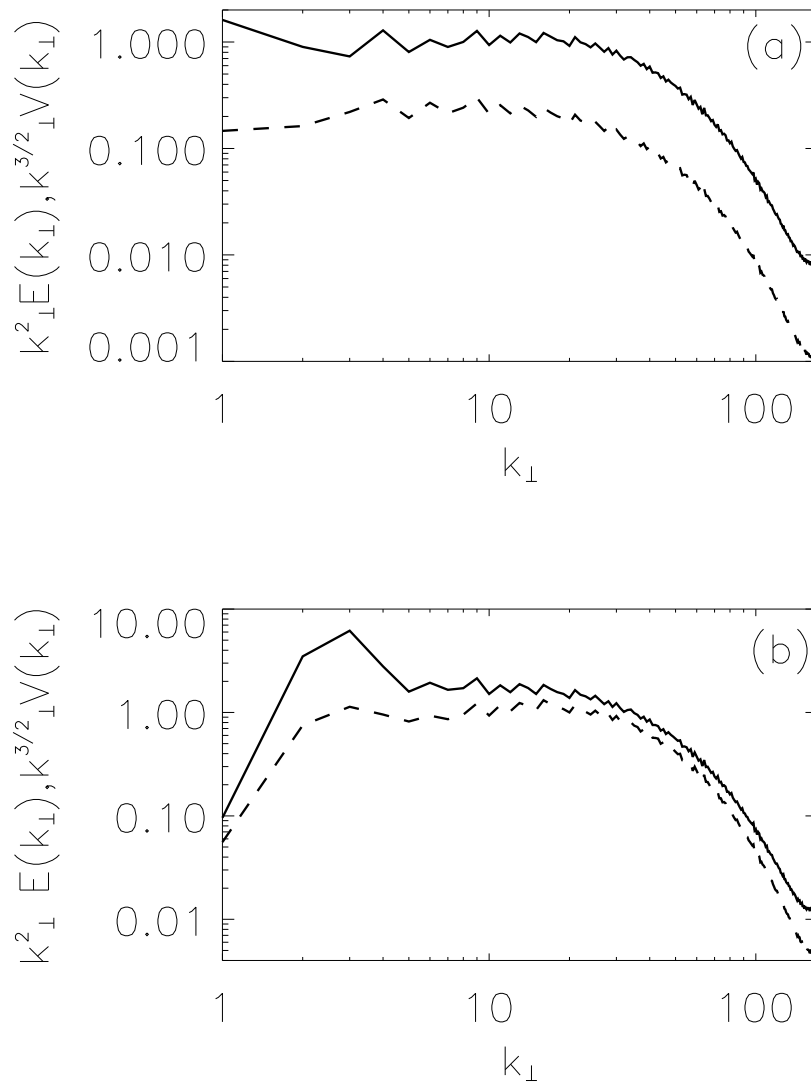


Figura 3.3: (a) Espectros de energía perpendicular (línea sólida) y de varianza escalar (línea de trazos) compensados por leyes de potencia con exponentes -2 y $-3/2$, en la simulación *A2*. (b) Lo mismo para la simulación *C2*.

de escalas evidente en el rango inercial. Como ejemplo, la figura 3.4(a) muestra los espectros isótropos de la energía y de la varianza escalar para la simulación A2. El espectro de energía isótropo sigue una ley de escalas similar a $\sim k^{-2}$. Sin embargo, el espectro isótropo del escalar pasivo es más empinado y no posee un claro rango inercial, de lo cual podemos deducir que su distribución espectral es más anisótropa que la de la energía para $k > k_F$. En el caso de los espectros paralelos, no es posible identificar una ley de escalas en el rango inercial tanto para $E(k_{\parallel})$ como para $V(k_{\parallel})$; ver la figura 3.4(b).

Los rangos inerciales indicados en las figuras 3.2 y 3.3 corresponden a cascadas directas de la energía cinética y la varianza escalar. Esto puede confirmarse estudiando los flujos espectrales de la energía y el escalar pasivo, que se definen como

$$\Pi(k) = - \int_k^{\infty} T(k) dk, \quad (3.15)$$

y

$$\Sigma(k) = - \int_k^{\infty} S(k) dk, \quad (3.16)$$

respectivamente. $T(k)$ y $S(k)$ son las funciones de transferencia de la energía y del escalar pasivo, dadas por

$$T(k) = \int \mathbf{u}^*(\mathbf{k})(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})_{\mathbf{k}} d\Omega_{\mathbf{k}}, \quad (3.17)$$

y

$$S(k) = \int \theta^*(\mathbf{k})(\theta \cdot \nabla \theta)_{\mathbf{k}} d\Omega_{\mathbf{k}}. \quad (3.18)$$

En el caso rotante, los flujos pueden calcularse por separado para las direcciones k_{\perp} y k_{\parallel} . En el caso perpendicular, los flujos anisótropos se definen como

$$\Pi(k_{\perp}) = - \int_{k_{\perp}=0}^{k_{\perp}} T(k'_{\perp}) dk'_{\perp}, \quad (3.19)$$

para la energía, y como

$$\Sigma(k_{\perp}) = - \int_{k_{\perp}=0}^{k_{\perp}} S(k'_{\perp}) dk'_{\perp}, \quad (3.20)$$

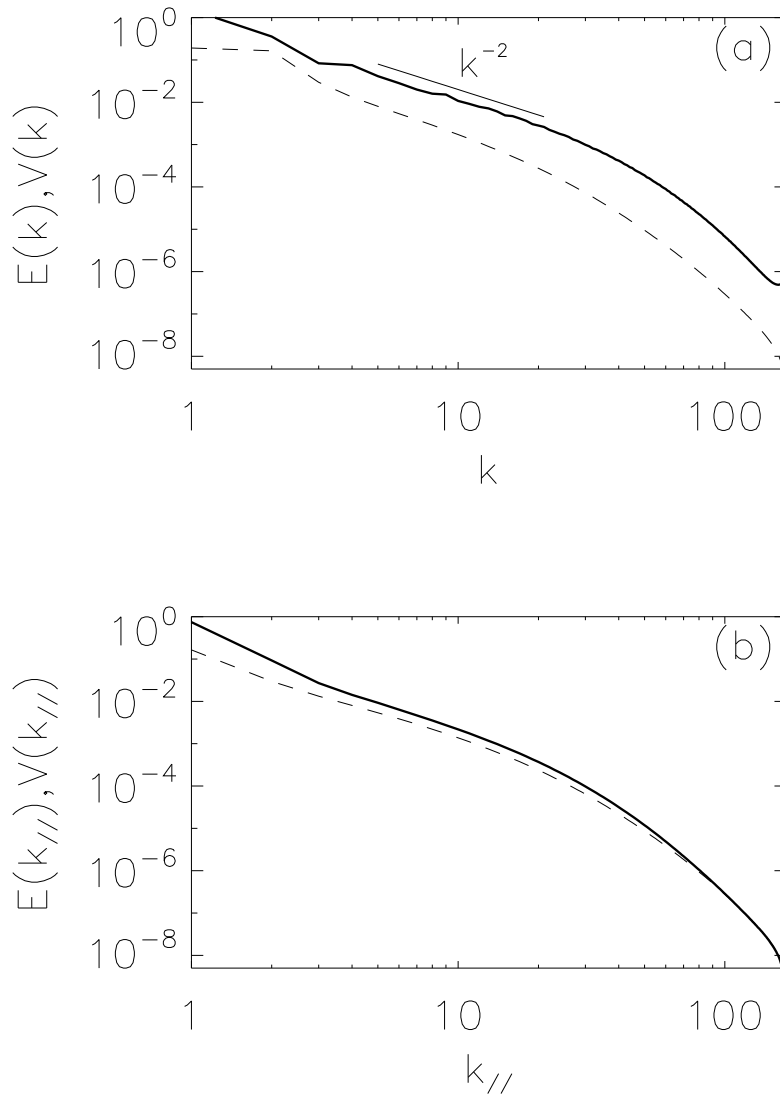


Figura 3.4: (a) Espectros isotrópos de energía (línea llena) y de varianza escalar (línea de trazos) para la simulación A2 ($\Omega = 4$). (b) Espectros paralelos de energía (línea llena) y de varianza escalar (línea de trazos) para la misma simulación.

para el escalar pasivo, donde las funciones de transferencia perpendicular ahora están dadas por

$$T(k_{\perp}) = \int \mathbf{u}^*(\mathbf{k})(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})_{\mathbf{k}} dS_{k_{\perp}}, \quad (3.21)$$

y

$$S(k_{\perp}) = \int \theta^*(\mathbf{k})(\theta \cdot \nabla \theta)_{\mathbf{k}} dS_{k_{\perp}}, \quad (3.22)$$

para la velocidad y el escalar pasivo, respectivamente, y donde $dS_{k_{\perp}}$ es el diferencial de superficie sobre un cilindro en el espacio Fourier con radio k_{\perp} . Para la dirección paralela, los flujos pueden definirse de forma análoga, integrando sobre planos con k_z constante.

Estos flujos se muestran en la figura 3.5 para las simulaciones *C1* y *C2* (respectivamente sin rotación y con rotación). En el caso no rotante, la energía posee un rango con flujo de energía aproximadamente constante (y positivo), lo que indica que la energía es transferida hacia escalas más pequeñas. A su vez, para números de onda menores que el número de onda forzado ($k < k_F = 3$) el flujo de energía es prácticamente despreciable. El flujo de varianza del escalar pasivo también indica una cascada directa hacia escalas más pequeñas, con un rango de números de onda con flujo aproximadamente constante. En presencia de rotación (figura 3.5(b)), el flujo perpendicular de energía se vuelve negativo para $k < k_F$ (lo cual sugiere que una fracción de la energía es transferida hacia escalas mayores que la escala de forzado), mientras que el flujo de energía hacia escalas más pequeñas sigue siendo positivo (aunque disminuye en comparación con la simulación *C1*). Para el escalar pasivo no se observa un flujo significativo hacia escalas mayores, y la cascada sigue siendo directa, también con una pequeña disminución del flujo positivo para $k > k_F$ en comparación con el caso no rotante. La figura 3.6 muestra el flujo de energía isótropo para la simulación *C2*. La transferencia de energía hacia escalas mayores, asociada con la cascada inversa de energía en presencia de rotación, puede verse más claramente (y sólo en el caso de la simulación *C2*), para $k < k_F$. Sin embargo, la separación de escalas utilizada en este trabajo no es suficiente para el completo desarrollo de una

cascada inversa. En el caso del escalar pasivo, el flujo no muestra evidencia de una cascada inversa.

Medidas de anisotropía

Además de con los espectros, existen diferentes formas de caracterizar el desarrollo de anisotropías en un flujo rotante [33, 11, 35]. Como ejemplo, el cociente entre la energía total en todos los modos con $k_{\parallel} = 0$ y la energía total, $E(k_{\parallel} = 0)/E$, puede ser utilizado para caracterizar la anisotropía en las escalas grandes [114]. Para un flujo puramente bidimensional, este cociente es igual a uno. Para el escalar pasivo, puede usarse la cantidad equivalente, $V(k_{\parallel} = 0)/V$. En todas las simulaciones sin rotación, el valor medio de $E(k_{\parallel} = 0)/E$ y $V(k_{\parallel} = 0)/V$ varía alrededor de 0.1. Como puede verse en la tabla 3.2, estos cocientes aumentan a medida que aumenta la rotación, siendo $E(k_{\parallel} = 0)/E$ mayor que $V(k_{\parallel} = 0)/V$ en todos los casos. Estos resultados sugieren que, en las escalas grandes, el campo de velocidad es más anisótropo que el escalar pasivo.

Para caracterizar la anisotropía en las escalas pequeñas, pueden usarse los ángulos de Shebalin. Esta medida fue introducida para estudiar la anisotropía en turbulencia magnetohidrodinámica [155, 111], y para el caso de la velocidad está dada por

$$\tan^2(\alpha_u) = 2 \lim_{l \rightarrow 0} \frac{S_2(l_{\perp})}{S_2(l_{\parallel})} = 2 \frac{\sum_{k_{\perp}} k_{\perp}^2 E(k_{\perp})}{\sum_{k_{\parallel}} k_{\parallel}^2 E(k_{\parallel})}. \quad (3.23)$$

El ángulo α_u es una medida global de la anisotropía en escalas pequeñas, siendo $\tan^2(\alpha_u) = 2$ el valor correspondiente a un flujo isótropo. El cuadrado de la tangente de los ángulos de Shebalin para el campo de velocidades y el escalar pasivo, $\tan^2(\alpha_u)$ y $\tan^2(\alpha_{\theta})$ respectivamente, se enumeran en la Tabla 3.2. Los valores de $\tan^2(\alpha_{\theta})$ son mayores que los valores de $\tan^2(\alpha_u)$, indicando que el escalar pasivo es más anisótropo que el campo de velocidad en las escalas pequeñas. Esta recuperación lenta de la isotropía en las escalas pequeñas del escalar pasivo, en comparación con el campo de velocidades, también se observa en turbulencia no rotante, como fue

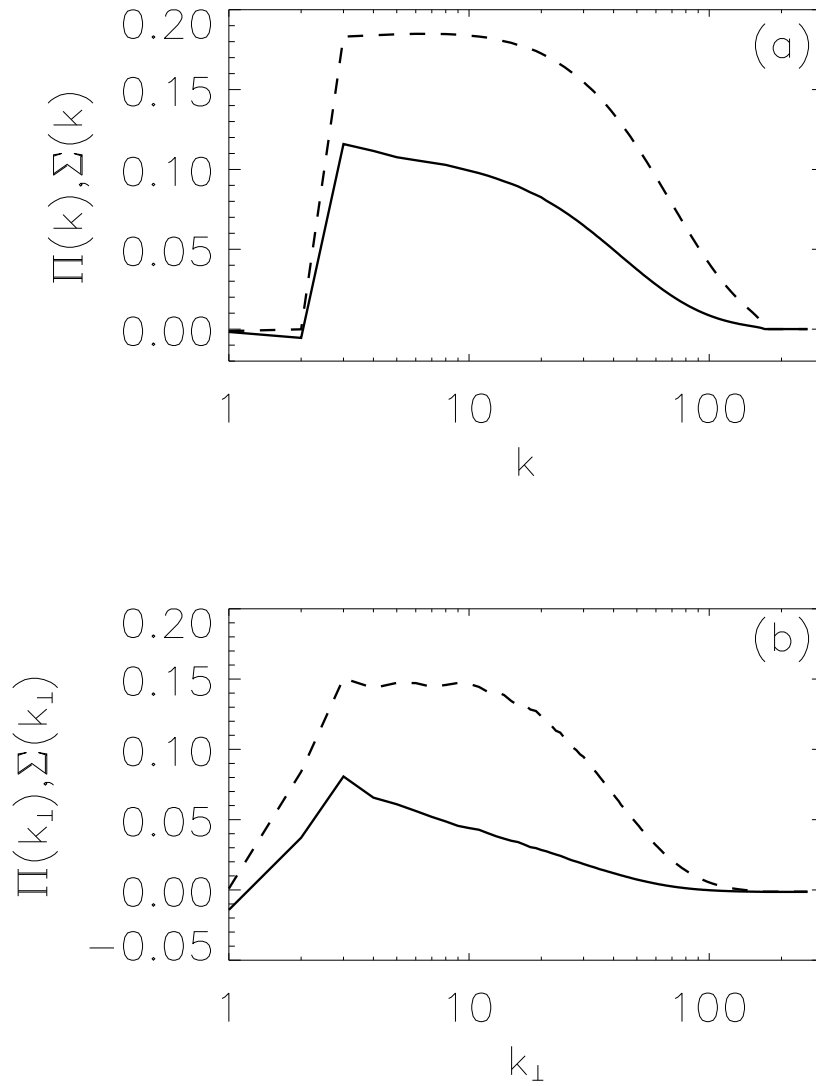


Figura 3.5: (a) Flujo de energía $\Pi(k)$ (línea llena) y flujo de escalar pasivo $\Sigma(k)$ (línea de trazos) para la simulación sin rotación $C1$. (b) Flujo perpendicular de energía $\Pi(k_{\perp})$ (línea llena) y flujo perpendicular de escalar pasivo $\Sigma(k_{\perp})$ (línea de trazos) para la simulación con rotación $C2$.

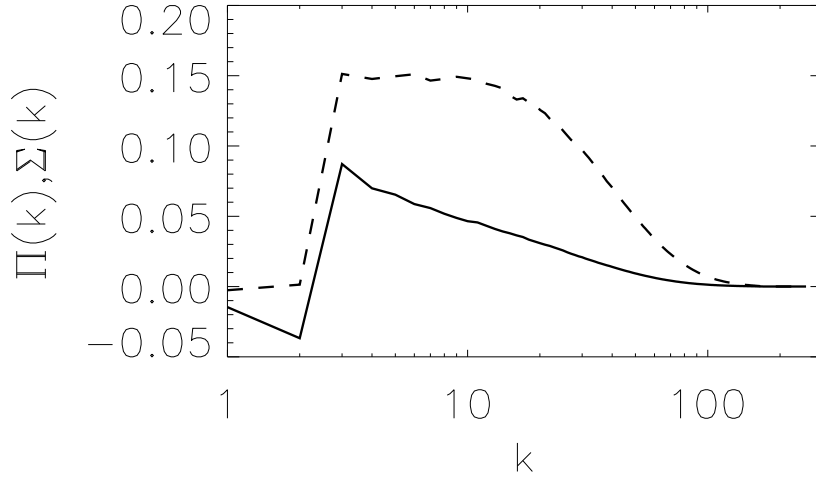


Figura 3.6: Flujo isotrópico de energía $\Pi(k)$ (línea llena) y flujo de escalar pasivo $\Sigma(k)$ (línea de trazos) para la simulación *C2*.

reportado en [177]. Sin embargo, no existían resultados previos para escalares pasivos en turbulencia rotante que mostrasen este efecto.

Fenomenología

La ley de escalas observada para el espectro perpendicular del escalar pasivo, $V(k_{\perp})$, puede explicarse mediante un simple argumento fenomenológico considerando los efectos de la rotación. De la ecuación (2.2) puede verse que, por motivos dimensionales, para las escalas del rango inercial el flujo del escalar pasivo a través de la escala l_{\perp} (igual a la tasa de inyección del escalar pasivo) $\Sigma \approx \sigma = d_t \langle \theta^2 \rangle$ debe ser

$$\sigma \sim \frac{u_{l_{\perp}} \theta_{l_{\perp}}^2}{l_{\perp}}, \quad (3.24)$$

donde $u_{l_{\perp}}$ es la velocidad característica en la escala l_{\perp} , y $\theta_{l_{\perp}}$ es la concentración característica del escalar pasivo en esa misma escala. Como el flujo escalar es constante en el rango inercial, entonces $\theta_{l_{\perp}}$ puede escribirse como

$$\theta_{l_{\perp}}^2 \sim \frac{\sigma l_{\perp}}{u_{l_{\perp}}}. \quad (3.25)$$

Tabla 3.2: Medidas de anisotropía para las simulaciones helicoidales y no helicoidales con rotación. $E(k_{\parallel} = 0)/E$ es el cociente entre la energía en los modos con $k_{\parallel} = 0$ y la energía total, $V(k_{\parallel} = 0)/V$ es el cociente entre la varianza escalar en los modos con $k_{\parallel} = 0$ y la varianza escalar total, y $H(k_{\parallel} = 0)/H$ es el cociente entre la helicidad en los modos con $k_{\parallel} = 0$ y la helicidad total. Los ángulos α_u , α_θ , y α_H son los ángulos de Shebalin para la velocidad, el escalar pasivo y la helicidad, respectivamente.

Run	$E(k_{\parallel})/E(k)$	$V(k_{\parallel})/V(k)$	$H(k_{\parallel})/H(k)$	$\tan^2\alpha_u$	$\tan^2\alpha_\theta$	$\tan^2\alpha_H$
A2	0.5	0.4	—	13	20	—
B2	0.6	0.25	0.27	17	37	14
B3	0.4	0.24	0.17	18	76	20
C2	0.2	0.1	—	14	50	—

Si el espectro de energía en la cascada directa sigue una ley de potencias dada por $E(k_{\perp}) \sim k_{\perp}^{-2}$, entonces, en ausencia de intermitencia $u_{i\perp} \sim l_{\perp}^{1/2} \sim k_{\perp}^{-1/2}$, de lo que se sigue que

$$V(k_{\perp}) \sim \frac{\theta_{i\perp}^2}{k_{\perp}} \sim \sigma k_{\perp}^{-3/2}. \quad (3.26)$$

3.3.2 Efectos de la helicidad

Espectros y flujos

En esta sección analizamos las simulaciones con rotación y con inyección de helicidad máxima, que corresponden a flujos turbulentos anisótropos helicoidales. Las figuras 3.7 y 3.8 muestran los espectros perpendiculares de la helicidad, la energía y el escalar pasivo para las simulaciones *B2* y *B3*, junto con pendientes de referencia para las leyes de escala en el rango inercial. Como ya se mencionó, en ausencia de rotación la helicidad no cambia la ley de escala del espectro del escalar pasivo. Por el

contrario, en el caso rotante se observa una ley de escalas distinta en el rango inercial que en el caso rotante sin helicidad. Un análisis cuidadoso del espectro indica que el escalar pasivo sigue una ley de potencias aproximada $\sim k_{\perp}^{-1,4}$, siendo esta pendiente ligeramente menos empinada que la observada en las simulaciones *A2* y *C2*. Este espectro diferente para $V(k_{\perp})$ está asociado con un cambio en el espectro de energía del flujo rotante en presencia de helicidad. El espectro de energía en las simulaciones helicoidales *B2* y *B3* es más pronunciado que el observado para las simulaciones no helicoidales *A2* y *C2*, como también puede verse en las figuras 3.7 y 3.8. De hecho, las leyes de potencias en el rango inercial son consistentes con una ley de potencias de $\sim k_{\perp}^{-2,2}$. Este resultado es compatible con los argumentos fenomenológicos del capítulo 2, y con resultados reportados en [114], en donde se presentaron simulaciones numéricas que muestran que en flujos rotantes helicoidales la transferencia directa de helicidad domina sobre la transferencia directa de energía, afectando la ley de escala de la energía en el rango de la cascada directa. Para mayor claridad, la figura 3.9 muestra los mismos espectros compensados.

Si calculamos los flujos en el espacio de Fourier, nuevamente podemos confirmar que los flujos siguen siendo positivos (es decir, que las cascadas son directas) y aproximadamente constantes (dentro de las limitaciones impuestas por la resolución espacial y los números de Reynolds considerados). Los flujos espectrales de helicidad, energía y escalar pasivo que se muestran en la figura 3.10 para las simulaciones *B2* y *B3* (el flujo de helicidad se define por analogía con el de la energía, y en la figura está dividido por k_F para comparar todos los flujos con las mismas unidades). Al igual que en las simulaciones sin helicidad, el flujo de energía muestra algunos indicios de transferencia inversa hacia escalas mayores para $k < k_F$, mientras que todos los otros flujos son positivos en todas las escalas, lo cual indica que no hay transferencia de helicidad ni del escalar pasivo hacia escalas más grandes. Puede también observarse un exceso de flujo de helicidad (en comparación con el flujo de energía), en acuerdo con los argumentos en [114] y con lo explicado en el capítulo 2, que indica una cascada directa dominante de helicidad en el rango inercial.

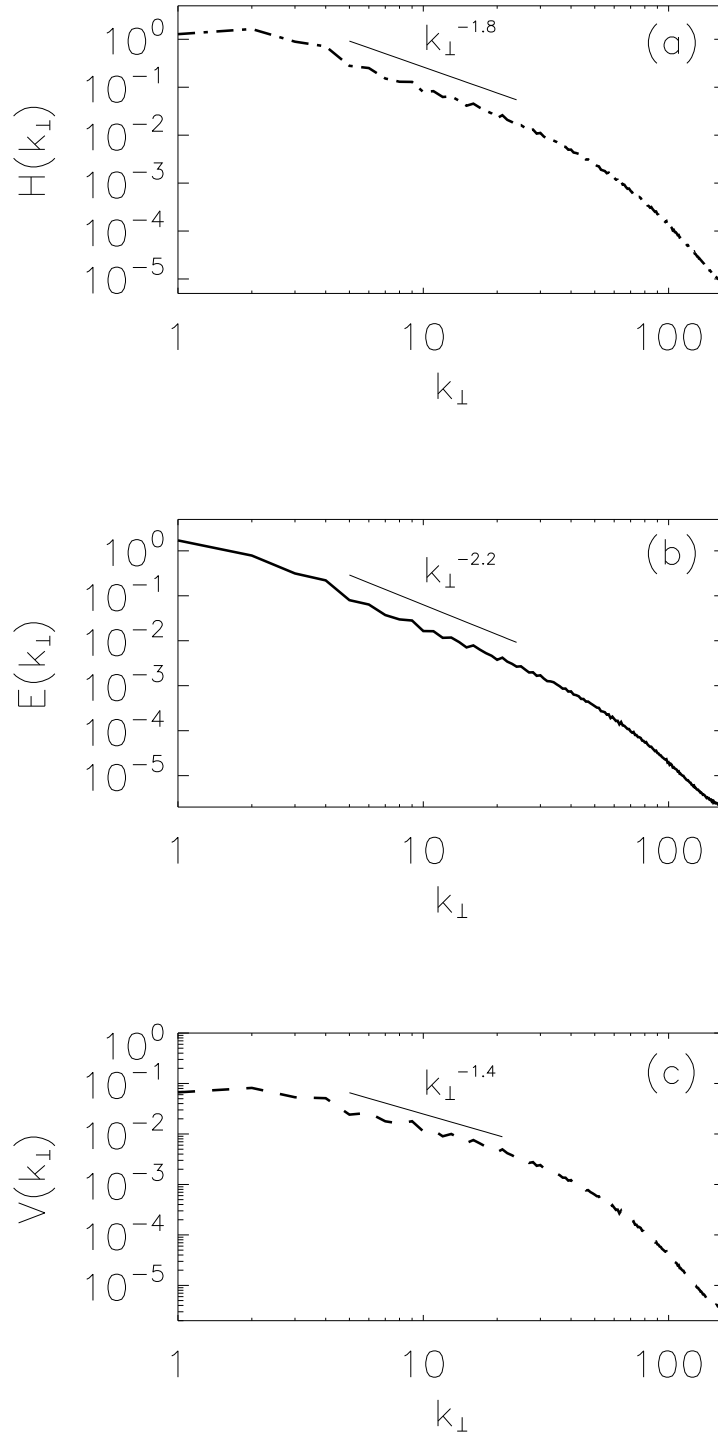


Figura 3.7: (a) Espectro perpendicular de helicidad, (b) de energía, y (c) de varianza escalar para la simulación *B2* (flujo helicoidal con $\Omega = 8$). En los tres casos se indican pendientes de referencia en el rango inercial.

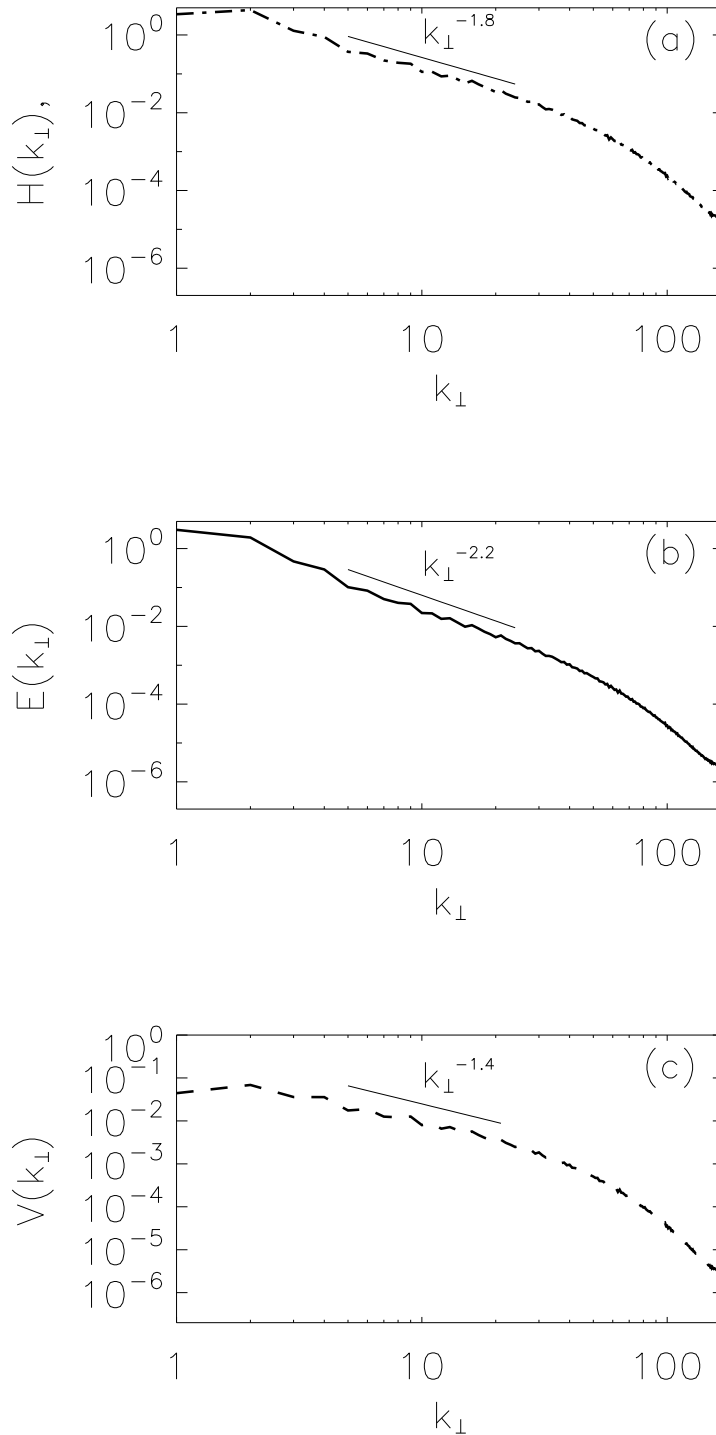


Figura 3.8: (a) Espectro perpendicular de helicidad, (b) de energía, y (c) de varianza escalar para la simulación *B3* (flujo helicoidal con $\Omega = 16$). En los tres casos se indican pendientes de referencia en el rango inercial.

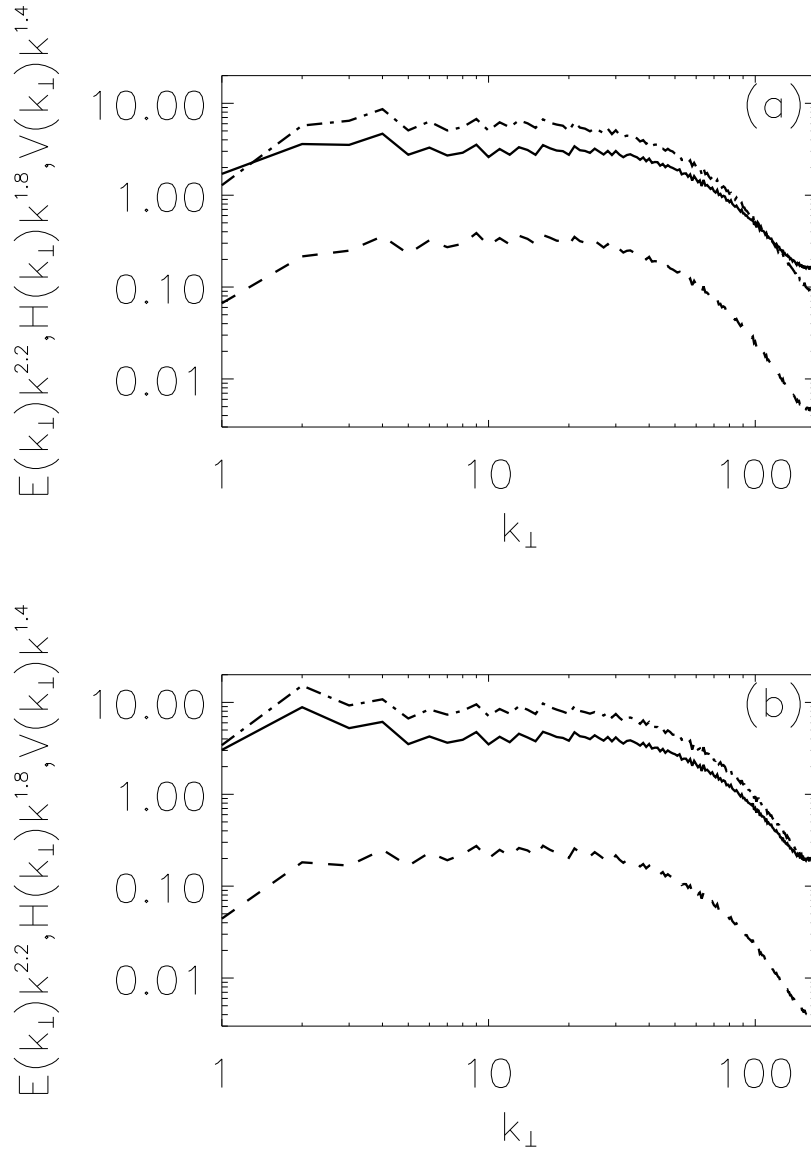


Figura 3.9: Espectro perpendicular de helicidad (línea de trazos y puntos), de energía (línea llena), y de escalar pasivo (línea de trazos), compensados respectivamente por $k_{\perp}^{-1.8}$, $k_{\perp}^{-2.2}$, y $k_{\perp}^{-1.4}$, en las simulaciones helicoidales: (a) B2 y (b) B3.

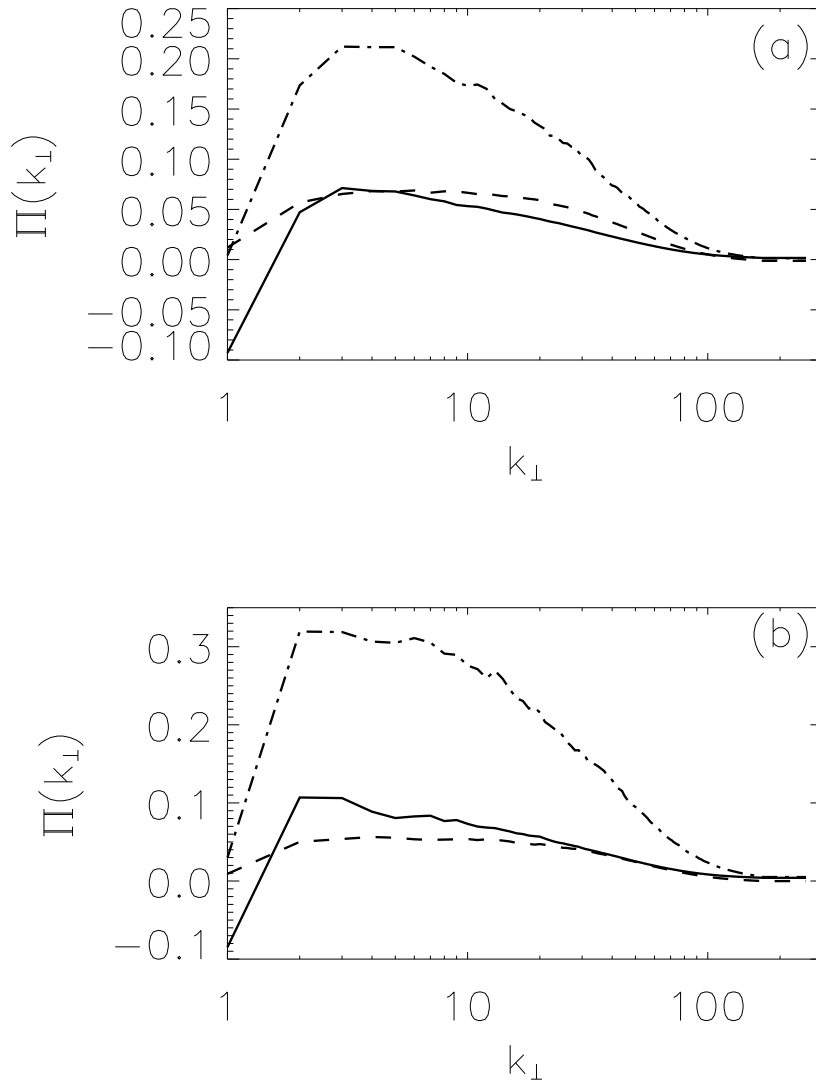


Figura 3.10: Flujo perpendicular de helicidad $\Delta(k_{\perp})/k_F$ (línea de trazos y puntos), flujo de energía $\Pi(k_{\perp})$ (línea llena), y flujo del escalar pasivo $\Sigma(k)$ (línea de trazos) para las simulaciones: (a) B2 y (b) B3.

Medidas de anisotropía

Como puede verse en la tabla 3.2, para todas las simulaciones una fracción sustancial de la energía, de la concentración del escalar pasivo, y (en menor medida) de la helicidad, está en los modos bidimensionales (es decir en los modos con $k_{\parallel} = 0$). La presencia de helicidad no parece afectar a la anisotropía de estas cantidades a gran escala. Independientemente del contenido de helicidad en el flujo, la energía es más anisótropa que el escalar pasivo en escalas grandes, al igual que en el caso de los flujos rotantes sin inyección de helicidad.

Los ángulos de Shebalin (3.23) para las simulaciones rotantes con helicidad máxima enumerados en la Tabla 3.2 muestran que los flujos con helicidad desarrollan anisotropías más fuertes para el escalar pasivo, en comparación con el caso no helicoidal.

Fenomenología

Al igual que para el caso no helicoidal, las leyes de escala del espectro de varianza escalar pueden explicarse mediante un argumento fenomenológico. Siguiendo el argumento presentado en el capítulo 2, suponiendo que la cascada directa de helicidad es dominante, se obtiene un espectro $E(k_{\perp})H(k_{\perp}) \sim k_{\perp}^{-4}$. En otras palabras, si el espectro de energía satisface $E(k_{\perp}) \sim k_{\perp}^{-n}$, entonces la helicidad debe tener un espectro $H(k_{\perp}) \sim k_{\perp}^{4-n}$; n se hace más grande (y por lo tanto el espectro de energía se vuelve más empinado) a medida que el flujo se hace más helicoidal, con el límite de $n = 2, 5$ para el caso de un flujo turbulento con helicidad máxima (en la práctica no se puede obtener este límite, dado que un flujo con helicidad máxima tiene el término no lineal igual a cero en la ecuación de Navier-Stokes, por lo cual no hay transferencia).

El comportamiento de los espectros de helicidad y energía en las simulaciones $B2$ y $B3$ es consistente con el argumento fenomenológico descrito anteriormente. En las figuras 3.7 y 3.8, puede verse una ley de escalas consistente con $\sim k_{\perp}^{-1,8}$ para $H(k_{\perp})$. Los espectros compensados de la energía, la helicidad y el escalar pasivo

para las simulaciones *B2* y *B3* que se muestran en la la figura 3.9 también indican un buen acuerdo entre las pendientes de referencia y los datos numéricos.

Siguiendo el mismo argumento fenomenológico, se puede presentar un argumento sencillo para explicar la diferencia observada en la ley de escalas del escalar pasivo en flujos turbulentos helicoidales y no helicoidales. Tal como se hizo para el caso no helicoidal, el flujo del escalar pasivo en la escala l_{\perp} puede estimarse como

$$\sigma \sim \frac{\theta_{l_{\perp}}^2 u_{l_{\perp}}}{l_{\perp}}, \quad (3.27)$$

Si σ es constante en el rango inercial, se puede estimar el espectro del escalar pasivo $V(k_{\perp}) \sim \theta_{l_{\perp}}^2 / k_{\perp}$ de la ecuación (3.27) como

$$V(k_{\perp}) \sim \frac{\sigma l_{\perp}^2}{u_{l_{\perp}}}. \quad (3.28)$$

Si el espectro de energía es $E(k_{\perp}) \sim k_{\perp}^{-n}$, y por tanto, la velocidad característica en la escala l_{\perp} es $u_{l_{\perp}} \sim l_{\perp}^{1-n}$, el espectro del escalar pasivo resulta

$$V(k_{\perp}) \sim \sigma l_{\perp}^{\frac{5-n}{2}} \sim \sigma k_{\perp}^{-\frac{5-n}{2}}. \quad (3.29)$$

Por lo tanto, el índice espectral para el escalar pasivo está dado por

$$n_{\theta} = \frac{5-n}{2}. \quad (3.30)$$

Este simple argumento fenomenológico, que vincula a los exponentes espectrales de la energía y el escalar pasivo en la cascada inercial, se aplica a también al caso isotrópico, sustituyendo l_{\perp} por l , en cuyo caso resulta $n = n_{\theta} = 5/3$. Más aún, para el caso rotante no helicoidal visto en la sección previa, en el cual $n = 2$, se obtiene $n = 1.5$, en buen acuerdo con los resultados numéricos de esta tesis. Finalmente, en presencia de helicidad, las simulaciones arrojan un valor de $n = 2.2$, disminuyendo el índice espectral de $V(k_{\perp})$ a $n_{\theta} = 1.4$, consistentemente con la predicción (3.30).

3.4 Conclusiones

En éste capítulo se estudiaron las leyes de escala del escalar pasivo en la cascada inercial, para flujos turbulentos rotantes helicoidales y no helicoidales. Los flujos

turbulentos se generan a partir de un campo de velocidad inicial nulo, utilizando una fuerza que consiste en una superposición de modos de Fourier con fase aleatoria delta-correlacionados en el tiempo. El escalar pasivo se inyecta en el flujo turbulento cuando éste alcanzó un estado estadísticamente estacionario, utilizando un forzado similar al del campo de velocidad. Para estudiar los efectos de la rotación en el transporte escalar, se impuso una rotación en la dirección \hat{z} , una vez que el escalar pasivo alcanzó un nuevo estado estadísticamente estacionario. Finalmente, la inyección de helicidad en los flujos turbulentos se controló mediante el forzado del campo de velocidad, y se consideró sólo el caso con inyección de helicidad máxima. Para caracterizar la transferencia de energía y de varianza escalar se calcularon espectros y flujos isótropos (en el caso no rotante) y anisótropos (en el caso rotante).

En ausencia de rotación, tanto la energía como el escalar pasivo siguen una ley de escalas consistente con $k^{-5/3}$ en el rango inercial, independientemente del contenido de helicidad de los flujos. El espectro obtenido en éste caso corrobora resultados bien conocidos para turbulencia isótropa y homogénea [47, 121]. Para flujos turbulentos con rotación, se obtuvo un espectro perpendicular de energía proporcional a k_{\perp}^{-2} en el caso no helicoidal, y un espectro de varianza escalar menos empinado consistente con $V(k_{\perp}) \sim k_{\perp}^{-1.5}$.

La presencia de helicidad en los flujos isótropos no parece afectar la ley de escalas de los espectros de energía y de varianza escalar, aunque este no es el caso para flujos helicoidales con rotación, para los cuales se obtiene un espectro más pronunciado para la energía, compatible con $E(k_{\perp}) \sim k_{\perp}^{-2.2}$, y un espectro menos empinado para el escalar pasivo consistente con $V(k_{\perp}) \sim k_{\perp}^{-1.4}$. Estos resultados numéricos son consistentes con un modelo fenomenológico que predice que si la energía sigue una ley de escalas de la forma $E(k_{\perp}) \sim k_{\perp}^{-n}$, entonces el escalar pasivo sigue una ley de potencias $V(k_{\perp}) \sim k_{\perp}^{-n_{\theta}}$ en el rango inercial, donde $n_{\theta} = (5 - n)/2$. Este argumento fenomenológico, que se aplica tanto a flujos isótropos como a flujos rotantes, helicoidales y no helicoidales, junto con las leyes de escala observadas para el espectro

de varianza escalar son resultados novedosos, y constituyen la conclusión principal de éste capítulo. Dichos resultados fueron publicados en [142] y en [144].

Mediante el cálculo de los flujos espectrales pudo determinarse que las cascadas de energía y de varianza escalar son directas, con indicios de una cascada inversa en el caso de la energía en los flujos rotantes. Utilizando medidas de anisotropía pudo determinarse que en escalas pequeñas, el escalar pasivo se vuelve más anisótropo que el campo de velocidad en los flujos rotantes helicoidales (en comparación con los resultados obtenidos para el caso no helicoidal), mientras que las escalas grandes no se ven afectadas por la presencia de helicidad.

En los capítulos siguientes consideraremos los efectos de la rotación y de la helicidad en el transporte y mezclado de escalares pasivos mediante el estudio de las leyes de escala de magnitudes en el espacio real, como funciones de estructura y funciones de densidad de probabilidades de la energía y el escalar pasivo. Para profundizar este estudio también se calcularán coeficientes de difusión turbulenta en las direcciones perpendicular y paralela al eje de rotación. Las leyes de escala obtenidas en este capítulo serán importantes para explicar el nivel de intermitencia y las propiedades del transporte turbulento en magnitudes escalares.

Capítulo 4

Intermitencia

4.1 Introducción

En el capítulo previo vimos que los espectros de energía y de varianza del escalar pasivo siguen una ley de escalas en el denominado rango inercial, y que estas leyes se ven modificadas por la presencia de rotación. A su vez, vimos que la inyección de helicidad en flujos rotantes también tiene efectos sobre las leyes de escala de ambos campos, volviendo más empinado al espectro de energía y menos empinado al espectro de varianza del escalar. Las leyes de escala de éstos espectros se relacionan entre sí, y esta relación puede explicarse mediante un argumento fenomenológico que dice que si el espectro de energía escala como $E(k) \sim k^n$, entonces el espectro de varianza escalar debe seguir una ley $V(k) \sim k^{n_\theta}$ en el rango inercial, con $n_\theta = (5 - n)/2$. Sin embargo, no alcanza con conocer el espectro de una cantidad turbulenta para caracterizar completamente sus propiedades estadísticas.

Al igual que en el caso isótropo, existen desviaciones con respecto de estas leyes de escala dadas por la intermitencia, tales como las observadas en [161, 177, 57] para turbulencia isótropa y homogénea, y las observadas más tarde en [35, 36] para turbulencia rotante. Por intermitencia, entendemos la ocurrencia de eventos extremos, localizados espacial y temporalmente, que rompen por lo tanto la autosemejanza de

escalas que podría esperarse del espectro con una ley de potencias. Los eventos extremos generan también desviaciones de la estadística Gaussiana en el fluido, y por lo tanto es necesario conocer más números que simplemente el exponente del espectro para caracterizar estadísticamente al flujo (por ejemplo, puede ser necesario conocer todos los momentos de la función de distribución de probabilidad de los campos). El estudio de la intermitencia tiene una larga historia en el estudio de la turbulencia. Si bien desde un principio existieron pocas dudas acerca de la existencia de intermitencia en el rango disipativo [83, 58], una pregunta más sutil en turbulencia isotrópica y homogénea se refirió a la existencia de intermitencia en el rango inercial, dado que esto invalidaba (o al menos introducía correcciones a) la teoría de Kolmogorov de 1941 (K41) [89]. Históricamente, los primeros intentos de detectar dicha intermitencia involucraron mediciones de la disipación local de energía. Estas mediciones involucran simultáneamente escalas en el rango disipativo y en el rango inercial, por lo cual son difíciles de interpretar. La teoría de K41 predice que no sólo la función de correlación de segundo orden $\langle \delta u^2 \rangle = \langle [\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{l}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \hat{l}] \rangle$ escala como $\langle \delta u^2 \rangle \sim l^{2/3}$ (equivalente a la ley del espectro). Sino que en esta teoría, como resultado de la autosemejanza de escalas, todas las funciones de estructura de orden p siguen una ley de escalas con un exponente $p/3$ en el rango inercial,

$$\langle \delta u^p \rangle \sim l^{p/3}. \quad (4.1)$$

Sin embargo, las predicciones de la teoría de Kolmogorov son sólo aproximadamente correctas para las funciones de estructura de orden dos y tres. Las primeras mediciones de las funciones de estructura para órdenes $p \geq 4$ son posteriores a 1970 [170]. Para órdenes muy altos, la medición de las funciones de estructura se vuelve más complicada, dado que se requiere medir de forma muy precisa los incrementos de la velocidad. Esto involucra medir eventos en las colas de la función de densidad de probabilidad, es decir, los eventos más extremos (o menos probables), por lo que es necesario procesar mediciones de la señal turbulenta para tiempos considerablemente largos. Incluso en éstos días este es un desafío con limitaciones tanto

en el área experimental como en la numérica. Sin embargo, es claro hoy que un flujo turbulento es intermitente, y que son necesarias correcciones a la teoría de Kolmogorov, tal como se evidencia en un considerable número de resultados experimentales y numéricos [4, 161].

Esta pregunta se extiende a la intermitencia y a las funciones de estructura del escalar pasivo, cuya varianza exhibe en el caso isótropo y homogéneo un espectro consistente con la teoría de K41 en el rango inercial [177, 161, 142]. La literatura sobre funciones de estructura de escalares pasivos en turbulencia isótropa y homogénea es vasta. El resultado más importante, probablemente sea el modelo de Kraichnan que predice analíticamente todos los exponentes de escala [88], tal como fue discutido en el capítulo 2.

Sin embargo, las funciones de estructura de escalares pasivos en turbulencia rotante no han sido consideradas previamente. La ley observada para espectro perpendicular de varianza escalar en el rango inercial predice un exponente de escala igual a $1/2$ para el orden $p = 2$, con lo cual la predicción lineal (es decir, en ausencia de intermitencia) para el orden p de la función de estructura del escalar pasivo es $p/4$. En presencia de helicidad y rotación se espera una ley lineal con exponentes $3p/5$ para el escalar pasivo, teniendo en cuenta que el espectro observado con helicidad máxima tiene un índice espectral compatible con $n_\theta = 1.4 = 7/5$.

En éste capítulo estudiaremos las leyes de escala de las funciones de estructura del escalar pasivo y del campo de velocidad para flujos con y sin rotación, y con y sin inyección de helicidad. El cálculo de las funciones de estructura de ambos campos en el caso isótropo y homogéneo nos permite reobtener resultados previamente observados en simulaciones y experimentos para la velocidad y el escalar pasivo [162, 177], mientras que los resultados obtenidos para el escalar pasivo en los casos rotante y rotante helicoidal son novedosos, forman parte del cuerpo de esta tesis, y fueron publicados en [142, 144, 145]. Los resultados presentados aquí son una extensión del análisis realizado en el capítulo previo sobre las leyes de escala de los espectros, por lo

cual se utilizan las mismas simulaciones (enumeradas en la Tabla 3.1). Para considerar correctamente la anisotropía de los campos, debemos descomponer las funciones de estructura en una forma conveniente, como se explica en la siguiente sección. Así, las funciones de estructura de la velocidad y del escalar pasivo se calculan utilizando una descomposición axisimétrica, y los exponentes de escala correspondientes se utilizan para caracterizar la intermitencia de los campos. Por último, consideramos las funciones de densidad de probabilidad de los incrementos del escalar pasivo y de la velocidad, y de sus derivadas en la dirección perpendicular al eje de rotación.

Para el caso rotante sin inyección de helicidad, vemos que la intermitencia se reduce considerablemente en el campo de velocidad comparada con el caso isótropo y homogéneo, mientras que la intermitencia persiste para el escalar pasivo, con exponentes de escala consistentes con la predicción del modelo de Kraichnan en dos dimensiones, y un exponente de escala de orden dos consistente con el índice espectral de la varianza escalar observado en el capítulo previo. En el caso helicoidal, encontramos que los exponentes de escala de las funciones de estructura del escalar pasivo también son compatibles con los predichos por el modelo de Kraichnan bidimensional, con un exponente de orden dos consistente con el espectro de varianza escalar en presencia de helicidad. Sin embargo, observamos que mientras que la presencia de helicidad reduce la intermitencia en el campo de velocidades, aumenta notablemente la intermitencia en el escalar pasivo.

4.2 Cálculo de las funciones de estructura: grupos de simetrías $SO(3)$ y $SO(2) \times \mathfrak{R}$

En éste capítulo caracterizaremos la intermitencia y la anisotropía de los flujos turbulentos con y sin rotación, y con y sin inyección de helicidad. Considerando las simetría de estos flujos, vamos a considerar una descomposición isótropa y otra ax-

isimétrica de las funciones de la estructura, lo que nos dará información de la intermitencia e anisotropía en los campos.

Los incrementos longitudinales del campo de velocidades y del escalar pasivo se definen como:

$$\delta u(\mathbf{x}, \mathbf{l}) = [\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{l}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})] \cdot \frac{\mathbf{l}}{|\mathbf{l}|}, \quad (4.2)$$

$$\delta \theta(\mathbf{x}, \mathbf{l}) = [\theta(\mathbf{x} + \mathbf{l}) - \theta(\mathbf{x})], \quad (4.3)$$

donde el incremento l puede apuntar en cualquier dirección. A continuación, las funciones de estructura de orden p se definen como

$$S_p(\mathbf{l}) = \langle [\delta u(\mathbf{x}, \mathbf{l})]^p \rangle \quad (4.4)$$

para el campo de velocidades, y como

$$T_p(\mathbf{l}) = \langle [\delta \theta(\mathbf{x}, \mathbf{l})]^p \rangle \quad (4.5)$$

para el escalar pasivo, donde las llaves denotan promedio espacial sobre todos los valores de \mathbf{x} . Estas funciones de estructura dependen de la dirección del incremento (asumimos que los campos son homogéneos). En las simulaciones sin rotación, el campo es además isótropo, y por lo tanto utilizaremos la descomposición $SO(3)$ para calcular la componente isótropa de las funciones estructura [5, 17, 18]. Para un campo arbitrario, esta descomposición consiste en expresar al mismo como la suma de componentes que manifiestan diferentes simetrías frente al grupo de las rotaciones. La componente isótropa del campo corresponderá entonces al término que resulta invariante ante una rotación arbitraria.

Para realizar la descomposición se utilizan los armónicos esféricos, dado que cada uno de ellos representa diferentes simetrías ante el grupo de las rotaciones. En este caso, la parte isótropa de la función de estructura viene dada por la proyección sobre el armónico esférico $Y_{00} = (1/4\pi)^{1/2}$. Para las funciones de estructura consideradas en el presente trabajo, la descomposición completa utilizando el conjunto de

los armónicos esféricos queda

$$S_p(\mathbf{l}) = \left\langle \sum_{jm} S_p^{jm}(\mathbf{r}, l) Y_{jm}(\hat{l}) \right\rangle = \sum_{jm} \langle S_p^{jm}(\mathbf{r}, l) \rangle Y_{jm}(\hat{l}) = \sum_{jm} S_p^{jm}(l) Y_{jm}(\hat{l}) \quad (4.6)$$

para el caso particular de las funciones de estructura de la velocidad. La ecuación (4.6) corresponde a la descomposición en términos de la representación irreducible del grupo de las rotaciones $SO(3)$ utilizando armónicos esféricos. Los coeficientes S_p^{jm} se obtienen realizando las proyecciones sobre cada uno de los armónicos esféricos, y promediando en todo el espacio (teóricamente, el promedio se refiere a un promedio de ensamble; en la práctica, se supone que el proceso es ergódico y se reemplaza el promedio de ensamble por un promedio espacial). La proyección de interés es la correspondiente al coeficiente S_p^{00} , ya que es la que no depende de \hat{l} (y por lo tanto es la isotropa)

$$S_p^{00}(l) = \frac{1}{V} \int_V \frac{dV}{\sqrt{4\pi}} \int S_p(\mathbf{r}, \mathbf{l}) d\Omega_l = \frac{1}{V} \int_V \frac{dV}{\sqrt{4\pi}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi S_p(\mathbf{r}, \mathbf{l}) l^2 \text{sen}(\phi_l) d\phi_l d\theta_l \quad (4.7)$$

donde V es el volumen de integración sobre la variable \mathbf{r} , y $d\Omega_l$ es el diferencial de superficie en la variable \mathbf{l} . La implementación numérica de la ecuación (4.7) debe llevarse a cabo con ciertas precauciones. Dadas las limitaciones computacionales para almacenar gran cantidad de datos en el espacio y el tiempo, se opta por promediar primero sobre todos los puntos del espacio para una dirección fija, para luego promediar en todas las direcciones. Entonces, en la práctica la ecuación que discretiza el código es

$$S_p^{00}(l) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi S_p(\mathbf{l}) l^2 \text{sen}(\phi_l) d\phi_l d\theta_l. \quad (4.8)$$

Para calcular las funciones de estructura, el código comienza por el cálculo de la velocidad (o del escalar pasivo) en el punto incremental a un dado \mathbf{x} , en una dada dirección \mathbf{l}_i , $u(\mathbf{x} + n\mathbf{l}_i)$. El valor \mathbf{l}_i define una dirección en el espacio (con el subíndice i indicando las diferentes elecciones posibles), y el n se varía para calcular todos los incrementos posibles en el volumen del fluido. Los valores de n posibles están

sujetos a que $\mathbf{x} + n\mathbf{l}_i$ caiga dentro de un punto de la grilla para evitar la interpolación (reduciendo así el costo computacional). Luego, se calculan los incrementos $[\mathbf{u}(\mathbf{x} + n\mathbf{l}_i) - \mathbf{u}(\mathbf{x})]^p$ para todos los valores de \mathbf{x}_i y se realiza un promedio para obtener los $S_p(n\mathbf{l}_i)$. Finalmente se repite el procedimiento para otra dirección \mathbf{l}_i . El promedio sobre todas las direcciones es equivalente a la versión discreta de la ecuación (4.8), dada por (para las funciones de estructura de la velocidad)

$$\langle [\delta\mathbf{u}]^p \rangle = \frac{1}{N^3 N_d} \sum_{i=0}^{N_d} \sum_{j=0}^{N^3} [\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}_j, \mathbf{l}_i)]^p, \quad (4.9)$$

donde N es el número de puntos de grilla (512 para todas nuestras simulaciones) y N_d es el número de direcciones consideradas. El cómputo de las funciones de estructura (para la velocidad y el escalar pasivo) se realizó para $N_d = 146$ direcciones diferentes que cubren de forma casi isotrópica una esfera, usando el método descrito en [166]. Las 146 direcciones están dadas por $\mathbf{l}_i = (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (2, 1, 0), (2, 1, 1), (2, 2, 1), (3, 1, 0), (3, 1, 1)$, y las que se obtienen con todas las permutaciones posibles de las componentes (incluyendo multiplicaciones por -1). Todos los vectores están expresados en puntos de grilla en las simulaciones. Con estas elecciones, todos los puntos $\mathbf{x} + n\mathbf{l}_i$ caen sobre puntos de grilla si n es entero. Para más detalles acerca de la implementación numérica de esta descomposición en el código GHOST puede consultarse [106].

En las simulaciones con rotación, dada la dirección preferencial impuesta y la axisimetría asociada al problema, estaremos interesados en incrementos paralelos y perpendiculares al eje de rotación. Los incrementos en estas dos direcciones se denotarán como l_{\parallel} y l_{\perp} respectivamente. El procedimiento para calcular las funciones de estructura en este caso es el introducido en [114] para realizar una descomposición basada en el grupo de simetrías $SO(2) \times \mathfrak{R}$ (rotaciones en el plano xy , más traslaciones en la dirección z). El cómputo de las funciones de estructura se realiza siguiendo el mismo procedimiento que para el caso isotrópico, utilizando 26 direcciones diferentes para los incrementos l , generados por múltiplos enteros de los vectores $(1, 0, 0), (1, 1, 0), (2, 1, 0), (3, 1, 0), (0, 1, 0), (-1, 1, 0), (1, 2, 0), (-2, 1, 0)$,

$(-1, 2, 0)$, $(1, 3, 0)$, $(-3, 1, 0)$, $(-1, 3, 0)$ y $(0, 0, 1)$ para las translaciones en z , mas los 13 vectores que se obtienen al multiplicar éstos por -1 . Una vez que se calculan estas funciones de estructura, las funciones de estructura perpendicular $S_p(l_\perp)$ y $T_p(l_\perp)$ (respectivamente, para la velocidad y el escalar pasivo) se obtienen promediando en las 24 direcciones xy , y las funciones de estructura paralelas $S_p(l_\parallel)$ y $T_p(l_\parallel)$ se calculan directamente utilizando los dos generadores en la dirección z .

Para todas las simulaciones en la Tabla 3.1, este procedimiento se aplicó para siete instantes de la velocidad y del escalar pasivo, separados por al menos un tiempo τ_{NL} cada uno. Para números de Reynolds lo suficientemente grandes, se espera que las funciones de estructura posean un rango inercial con una ley de escalas, es decir, se espera que para algun rango de escalas se cumpla

$$S_p(l) \sim l^{\xi_p}, \quad (4.10)$$

$$T_p(l) \sim l^{\zeta_p}, \quad (4.11)$$

donde l se puede sustituir por l_\parallel o l_\perp en los casos con rotación, y donde ξ_p y ζ_p son, respectivamente, los exponentes de escala de orden p de la velocidad y del escalar pasivo. Los exponentes de escala que se muestran en las siguientes secciones se calcularon para los siete instantes en cada simulación, y se promediaron en el tiempo. Los errores se definen entonces como el error cuadrático medio, dado por (por ejemplo en el caso de los exponentes para el escalar pasivo),

$$e_{\zeta_p} = \frac{1}{m} \sqrt{\sum_{i=1}^m (\zeta_{pi} - \bar{\zeta}_p)^2}. \quad (4.12)$$

En este caso m es el número de instantes del campo utilizados para el cálculo, ζ_{pi} es la pendiente obtenida a partir de un ajuste de cuadrados mínimos para el i -ésimo instante y $\bar{\zeta}_p$ es valor medio del exponente. El error en el cálculo de la pendiente por medio de cuadrados mínimos para cada instante es mucho mas pequeño que este error cuadrático medio, y por lo tanto es despreciado en el cálculo del error. Otra forma de calcular los exponentes de escala es utilizando el método de *autosimilaridad*

extendida [14, 15]. En este caso, las funciones de estructura de orden p se normalizan utilizando la función de estructura de orden dos, y los exponentes se calculan con respecto a esa normalización. Este método no fue utilizado en el presente trabajo.

4.3 Resultados numéricos

Consideremos ahora las funciones de estructura isótropas y axisimétricas de la velocidad y del escalar pasivo para todas las simulaciones enumeradas en la Tabla 3.1, usando el método explicado en la sección 4.2. Se completa en análisis de intermitencia considerando funciones de densidad de probabilidad de los incrementos en la dirección perpendicular al eje de rotación para el escalar pasivo ($\delta\theta$) y para la componente en \hat{x} del campo de velocidad (δu_x), y de sus derivadas espaciales ($\partial_x u_x$ y $\partial_x \theta$). Todos los resultados presentados en ésta sección son originales y fueron publicados en [142, 145]. Se consideran flujos con y sin rotación, helicoidales y no helicoidales.

4.3.1 Efectos de la rotación

En ésta sección presentamos los resultados del análisis para las simulaciones con y sin rotación, pero sin inyección de helicidad (grupos A y C de la tabla 3.1).

Funciones de estructura

La figura 4.1 muestra las funciones de estructura del escalar pasivo para la simulación $A1$ (isótropa) y $A2$ (rotante, por lo cual sólo se muestran las funciones de estructura para incrementos l_\perp), para un tiempo ($t = 7$ para $A1$, y $t = 18$ para $A2$). Las funciones isótropas y axisimétricas, respectivamente para cada simulación, fueron obtenidas usando las descomposiciones $SO(3)$ y $SO(2) \times \mathfrak{R}$ explicadas en la sección anterior. Las funciones de estructura muestran un rango de escalas consistente con una ley de potencias en el rango inercial, y en las escalas más pequeñas se acercan a otra ley $\sim l^p$ para cada función de orden p , como se espera para un campo suave

y derivable en el rango disipativo. La figura 4.2 muestra un detalle, para las simulaciones con rotación $A2$ y $C2$, de las funciones de estructura de segundo orden del escalar pasivo en la dirección perpendicular, $T_2(l_\perp)$ (como antes, corresponden a un promedio en todas las direcciones del plano xy), y en la dirección paralela, $T_2(l_\parallel)$. Con el aumento en la tasa de rotación se observa mayor anisotropía a pequeña escala, que se manifiesta en la dependencia más empinada de $T_2(l_\parallel)$ con el incremento espacial en comparación con $T_2(l_\perp)$, y en una amplitud mucho menor de $T_2(l_\parallel)$ en las escalas pequeñas.

Un rango inercial con una ley de potencias puede ser identificado a escalas intermedias para $T_2(l_\perp)$, aunque no tan claramente para $T_2(l_\parallel)$ (esto es especialmente cierto para la simulación $B2$, donde la función de estructura paralela posee sólo un rango con la ley de escalas suave $\sim l_\parallel^2$). Esto es consistente con los resultados presentados en el capítulo previo para los espectros reducidos del escalar pasivo: el espectro perpendicular de varianza escalar posee un rango inercial con una ley de potencias de $V(k_\perp) \sim k_\perp^{-3/2}$, mientras que no pudo identificarse una ley de escalas clara para $V(k_\parallel)$. Cabe notar que para escalas cercanas o mayores a la escala del forzado, la distribución del escalar pasivo parece más isótropa, en buen acuerdo con los resultados expuestos en la Tabla 3.2.

Las pendientes de referencia indicadas en la figura 4.2 corresponden a un promedio temporal del exponente de escala de orden dos, ζ_2 , obtenido a partir de un ajuste en el rango inercial de todas las funciones de estructura, para cada uno de los tiempos disponibles en cada simulación. Los exponentes de segundo orden (en la dirección perpendicular) para el escalar pasivo son $\zeta_2 \approx 0.49 \pm 0.01$ en el caso $A2$, y $\zeta_2 \approx 0.50 \pm 0.01$ en el caso $B2$. Los valores obtenidos para ζ_2 son consistentes con la ley de potencias $V(k_\perp) \sim k_\perp^{-3/2}$ observada para el espectro perpendicular reducido del escalar pasivo, que por razones dimensionales conduce a $T_2(l_\perp) \sim l_\perp^{1/2}$. Esto es fácil de ver ya que $V(k_\perp) \sim \langle \delta\theta^2 \rangle / k_\perp \sim l_\perp \langle \delta\theta^2 \rangle$

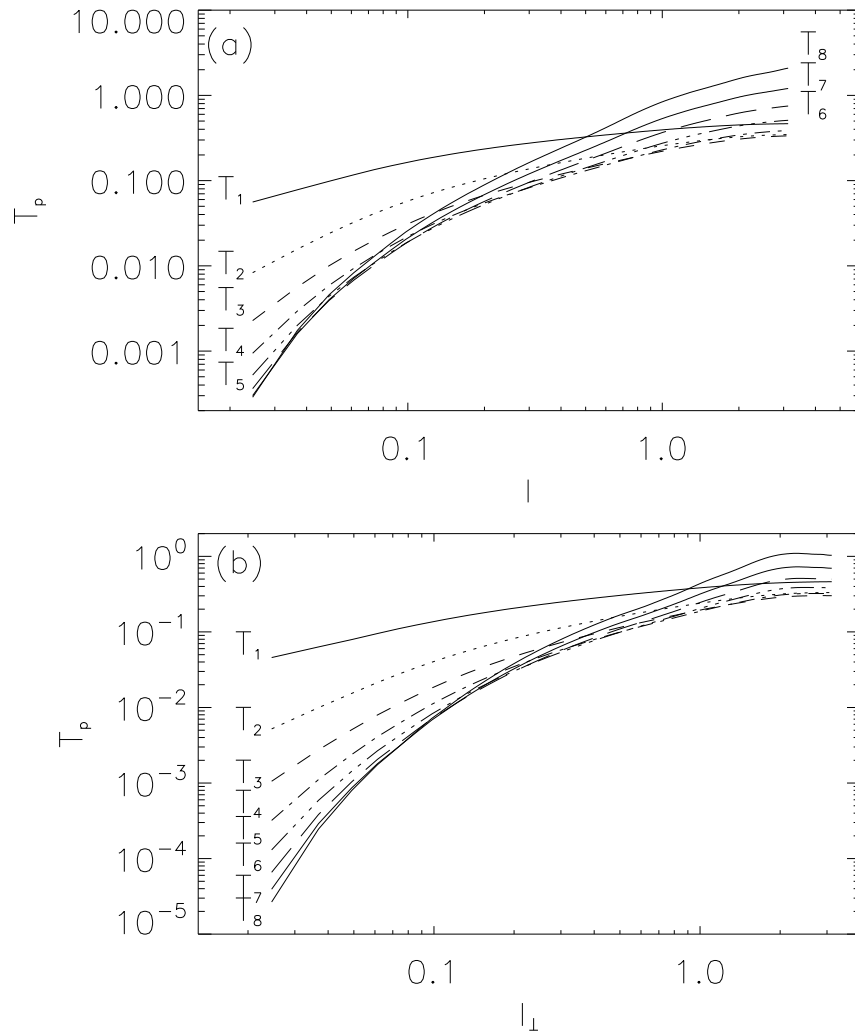


Figura 4.1: (a) Funciones de estructura isótropas para el escalar pasivo hasta octavo orden para la simulación A1 en $t = 7$. (b) Funciones de estructura axisimétricas perpendiculares (es decir, sólo para incrementos l_{\perp}) para el escalar pasivo hasta octavo orden para la simulación A2 en $t = 18$.

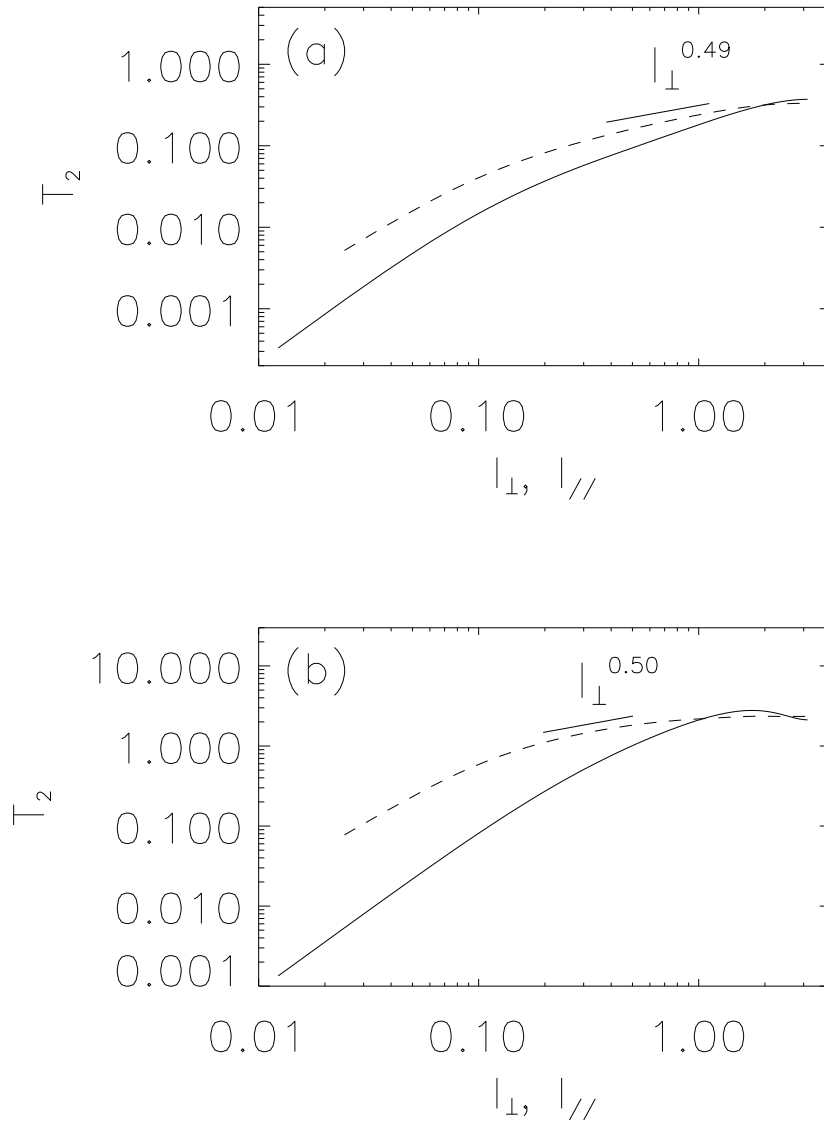


Figura 4.2: Funciones de estructura axisimétricas de segundo orden en la dirección perpendicular para el escalar pasivo: (a) simulación A2 ($\Omega = 4$) en $t = 18$, y (b) simulación C2 ($\Omega = 12$) en $t = 14$. $T_2(l_{\perp})$ corresponde a líneas de trazos, y $T_2(l_{\parallel})$ a líneas continuas. Las pendientes indicadas como referencia corresponden al promedio temporal de los exponentes de escala, obtenidos del mejor ajuste lineal en el rango inercial de las funciones de estructura perpendiculares a diferentes tiempos.

La figura 4.3 muestra las funciones de estructura de la velocidad para la simulaciones $A1$ (isótropa) y $A2$ (entonces sólo para los incrementos l_{\perp}), para los tiempos $t = 7$ en el caso de $A1$ y $t = 18$ para $A2$. Al igual que las funciones de estructura del escalar pasivo, puede observarse un rango de escalas consistente una ley de potencias en el rango inercial, y en las escalas más pequeñas se observa una tendencia hacia una ley de potencias $\sim l^p$.

Las funciones de estructura de segundo orden del campo de velocidad pueden verse en mas detalle en la figura 4.4, para las simulaciones con rotación $A2$ y $C2$, sólo para incrementos perpendiculares, y para los tiempos $t = 18$ y $t = 14$ respectivamente. Se observa un desarrollo de anisotropía en las escalas pequeñas, mas pronunciado para la simulación $C2$ (con $\Omega = 12$). Para ésta misma simulación también se observa una mayor correlación en la dirección paralela que en la perpendicular en las escalas mas grandes. Esto es de esperarse, dado que esta simulación tiene cierta separación entre la escala más grande disponible en la caja y la escala de forzado, y el flujo se vuelve casi bidimensional en escalas grandes. Comparando éstas funciones de estructura con las del escalar pasivo en la figura 4.2, se hace evidente que para los números de Rossby considerados, la anisotropía en escalas pequeñas asociada con la rotación es más fuerte para el escalar pasivo que para el campo de velocidad.

También se observa un rango inercial con una ley potencias para las funciones de estructura de la velocidad. Para las simulaciones $A2$ y $C2$, los exponentes de escala de segundo orden promediados en el tiempo, correspondientes a una ley de escalas $S_2(l_{\perp}) \sim l_{\perp}^{\xi_2}$, se indican como referencia en las pendientes de las figuras 4.4(a) y 4.4(b). Los exponentes de escala de segundo orden son $\xi_2 \approx 0.96 \pm 0.01$ para la simulación $A2$, y $\xi_2 \approx 0.98 \pm 0.01$ para la simulación $C2$. Estos valores son consistentes con la ley de escalas en el rango inercial encontrada para el espectro de energía perpendicular en éstas simulaciones, $E(k_{\perp}) \sim k_{\perp}^{-2}$, lo que conduce a $S_2(l_{\perp}) \sim l_{\perp}$.

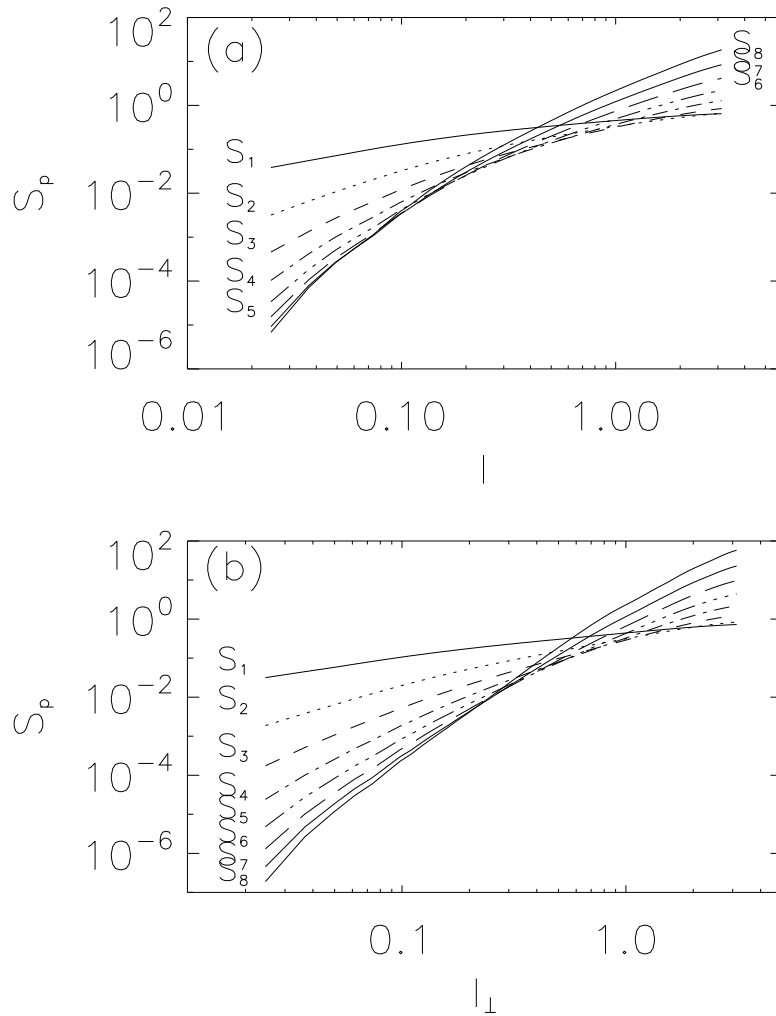


Figura 4.3: (a) Funciones de estructura isotropas para el campo de velocidad hasta octavo orden para la simulación A1 en $t = 7$. (b) Funciones de estructura axisimétricas perpendiculares (sólo para incrementos l_{\perp}) para el campo de velocidad hasta octavo orden para la simulación A2 en $t = 18$.

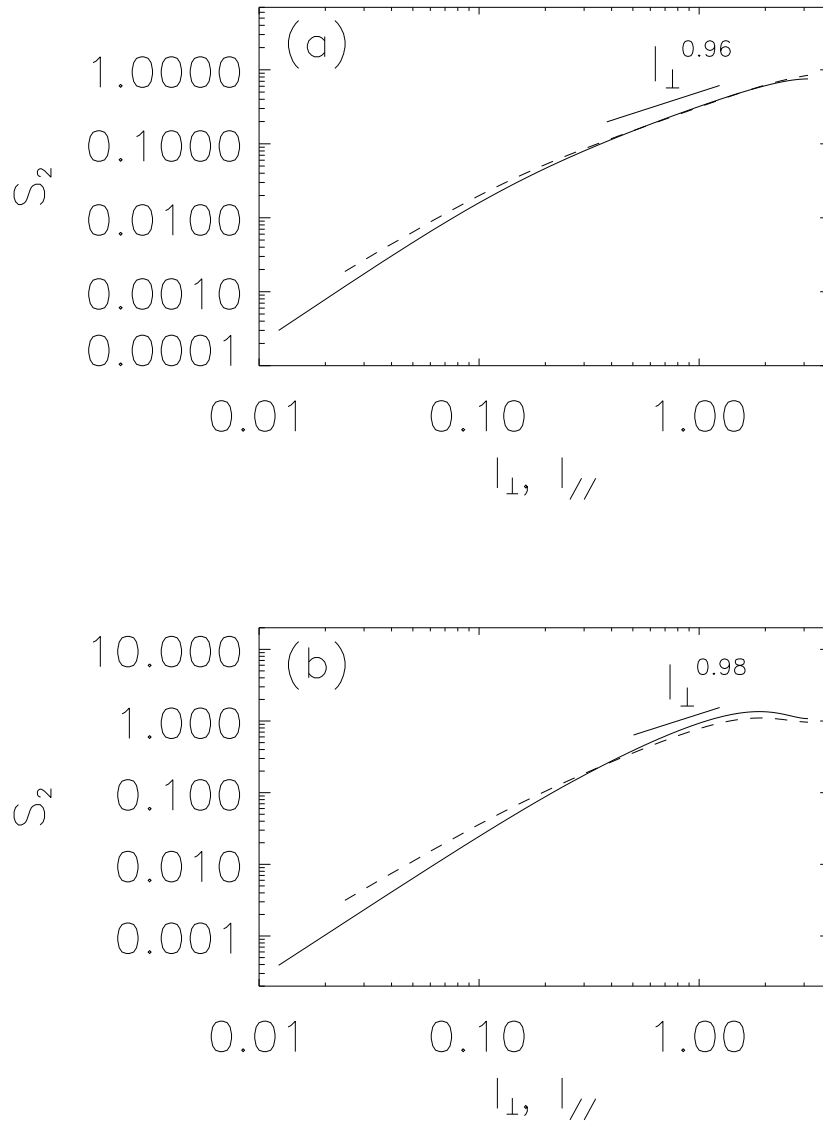


Figura 4.4: Funciones de estructura de orden dos para el campo de velocidad en las simulaciones: (a) A2 ($\Omega = 4$) en $t = 18$, y (b) C2 ($\Omega = 12$) en $t = 14$. $S_2(l_{\perp})$ corresponde a líneas de trazos y $S_2(l_{\parallel})$ a la línea continúa. Las pendientes indicadas como referencia corresponden al promedio temporal de los exponentes de escala, obtenido a partir del mejor ajuste en el rango inercial de todas las funciones de la estructura perpendiculares a diferentes tiempos.

Exponentes de escala

A partir de las curvas de la figura 4.1 se pueden calcular los exponentes de escala para todos los órdenes. Los exponentes de escala para la velocidad y el escalar pasivo en el rango inercial se calcularon hasta orden siete para las simulaciones del grupo *A*. Para las simulaciones en el grupo *C*, estos exponentes se calcularon sólo hasta el sexto orden, dado que las simulaciones de este grupo tienen una menor separación entre las escalas de forzado y de disipación.

La figura 4.5 muestra los exponentes de escala de la velocidad y el escalar pasivo para las simulaciones *A1* y *C1* (sin rotación). Para el campo de velocidad, los exponentes en ambas simulaciones son similares. El exponente de escala de tercer orden del campo de velocidad es $\xi_3 = 0.99 \pm 0.02$ para *A1*, y $\xi_3 = 0.98 \pm 0.01$ para *C1*, en buen acuerdo con el valor de 1 que se espera de la ley de los 4/5 para turbulencia isotrópica y homogénea. Los exponentes de escala del campo de velocidad muestran una desviación habitual respecto de la ley lineal ($\xi_p = p/3$) de Kolmogorov, asociada con el fenómeno de intermitencia. Esta desviación de la estricta invarianza de escala se cuantifica a menudo en términos del exponente de intermitencia $\mu = 2\xi_3 - \xi_6$, que para estas simulaciones es $\mu = 0.24 \pm 0.12$ para *A1*, y $\mu = 0.25 \pm 0.06$ para *C1*. Los exponentes de escala de orden superior obtenidos para las funciones de estructura de la velocidad también son consistentes con los resultados anteriores para turbulencia no rotante a número de Reynolds altos [162, 154, 106].

Los exponentes de escala para el escalar pasivo en éstas simulaciones también muestran valores similares, que son consistentes (dentro de las barras de error) con los valores de los exponentes del campo de velocidad para órdenes $p = 1$ y 2 , y muestran grandes desviaciones de la predicción de invarianza de escala de Kolmogorov para valores mayores de p . Este es un resultado bien conocido que indica que el escalar pasivo en turbulencia isotrópica y homogénea es más intermitente que el campo de velocidad [86, 45]. Según el modelo de Kraichnan (ver sección 2.2.4), los exponentes de escala de las funciones de estructura del escalar pasivo de orden p en un espacio

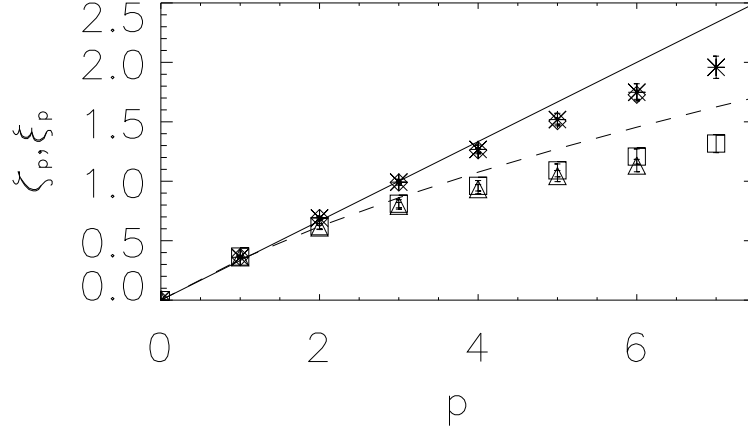


Figura 4.5: Exponentes de escala (con barras de error) en función del orden p , para la velocidad (estrellas para A1 y diamantes para C1) y el escalar pasivo (cuadrados para A1 y triángulos para C1). La línea continua corresponde a la ley de Kolmogorov $\xi_p = p/3$, y la línea discontinua corresponde al modelo de Kraichnan para el escalar pasivo con $d = 3$ y $\zeta_2 = 0.62$.

de dimensionalidad d , se obtienen a partir de ζ_2 según [88],

$$\zeta_p = \frac{1}{2} \left[\sqrt{2d\zeta_2 p + (d - \zeta_2)^2} + (d - \zeta_2) \right]. \quad (4.13)$$

Esta predicción también se muestra en la figura 4.5, con los exponentes calculados utilizando el valor de ζ_2 obtenido de las simulaciones, y para $d = 3$. Las desviaciones de este modelo, que comienzan en $p = 4$, son pequeñas en comparación con las desviaciones con respecto de la ley de lineal. Desviaciones similares también fueron reportadas previamente en simulaciones numéricas de transporte turbulento de escalares pasivos para turbulencia isótropa y homogénea [44].

En presencia de rotación y para números de Rossby pequeños, para un flujo completamente autosimilar se espera que los exponentes de escala de la velocidad sigan una ley lineal $\xi_p = p/2$, si la ley de escalas del espectro de energía es $\sim k_{\perp}^{-2}$. En las simulaciones con rotación A2 y C2, los exponentes de escala de la velocidad están más cerca de la ley $p/2$, con desviaciones significativamente más pequeñas

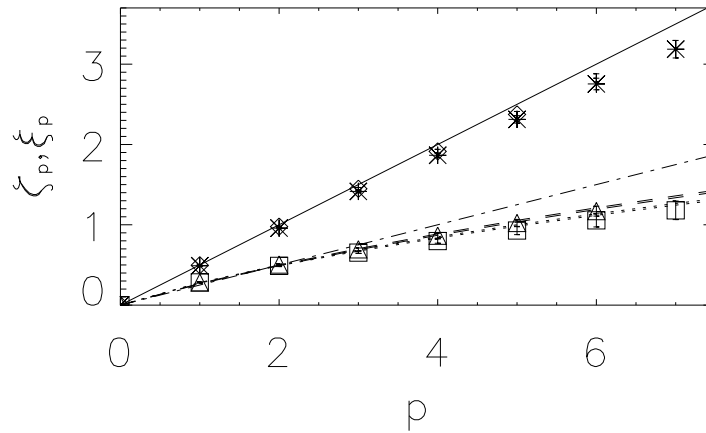


Figura 4.6: Exponentes de escala (con barras de error) en función del orden p , para la velocidad (estrellas para $A2$ y diamantes para $C2$) y el escalar pasivo (cuadrados para $A2$ y triángulos para $C2$). La línea continua corresponde a la ley lineal $\xi_p = p/2$, la línea de puntos y trazos corresponde a la ley lineal $\zeta_p = p/4$, y las líneas sólo de puntos y sólo de trazos corresponden, respectivamente, al modelo de Kraichnan con $d = 2$ y $d = 3$ con $\zeta_{2d} = 0,5$.

de la línea recta que en el caso no rotante para los órdenes mayores de ξ_p (véase la figura 4.6). Además, los exponentes de escala de la velocidad son similares para ambas simulaciones con rotación. El coeficiente de intermitencia para $A2$ y $C2$ es $\mu = 0.1 \pm 0.1$ (notar que este valor es compatible con ausencia de intermitencia). De acuerdo con resultados previamente reportados en [9, 128, 151, 114, 116], la intermitencia se ve sustancialmente reducida para flujos con una tasa de rotación lo suficientemente grande.

La figura 4.6 también muestra los exponentes de escala para el escalar pasivo en las simulaciones con rotación. En el caso de perfecta invarianza de escalas (ausencia de intermitencia), se espera una ley lineal $\zeta_p = p/4$ para los exponentes del escalar pasivo, si el exponente de segundo orden es $\zeta_2 = 1/2$. Las desviaciones de esta ley lineal son claramente visibles en todas las simulaciones. Para las simulaciones $A2$ y $C2$, el

modelo de Kraichnan, se ajusta con buen acuerdo a los datos numéricos con $\zeta_2 = 0.5$ y $d = 2$. El buen acuerdo con el modelo para $d = 2$ en las simulaciones con números de Rossby pequeños indica una fuerte bidimensionalización de la distribución del escalar pasivo en presencia de rotación. Este es el resultado más importante de este capítulo. La combinación del modelo fenomenológico del capítulo 3, que permite obtener el exponente de escala de segundo orden para el escalar pasivo a partir del exponente de segundo orden de la velocidad, junto con el modelo de Kraichnan (que tiene como parámetros libres al exponente de segundo orden y la dimensionalidad del problema), permiten determinar con buen grado de acuerdo todos los exponentes de escala del escalar pasivo en el caso rotante no helicoidal. Esto es equivalente a poder determinar todos los momentos de la función de distribución de probabilidad del escalar pasivo, y así determinar todas sus propiedades estadísticas. La mejor coincidencia del modelo de Kraichnan con las observaciones en el caso rotante es explicable por el hecho que en este caso el campo de velocidad es menos intermitente (es decir, más cercano al caso Gaussiano), y el valor de $d = 2$ está asociado a la fuerte anisotropía observada en el escalar pasivo, que tiene una dependencia suave en la dirección del eje de rotación y una cascada turbulenta se desarrolla casi exclusivamente en la dirección perpendicular.

La intermitencia del escalar pasivo disminuye con el número de Rossby, aunque menos que para la velocidad. El coeficiente de intermitencia para el escalar pasivo, $\mu_s = 2\zeta_3 - \zeta_6$, es $\mu_s = 0,4 \pm 0.1$ para A1 y C1 ($\Omega = 0$), y $\mu_s = 0.2 \pm 0.1$ y $\mu_s = 0.22 \pm 0.09$ para A2 y C2 ($\Omega \neq 0$), respectivamente.

Funciones de densidad de probabilidad

Consideramos ahora funciones de densidad de probabilidades (FDPs) para los incrementos longitudinales definidos previamente, y para las derivadas en la dirección espacial x del escalar pasivo y de la componente x del campo de velocidad. En todos los casos, las curvas que se muestran están normalizadas por su varianza, y una curva

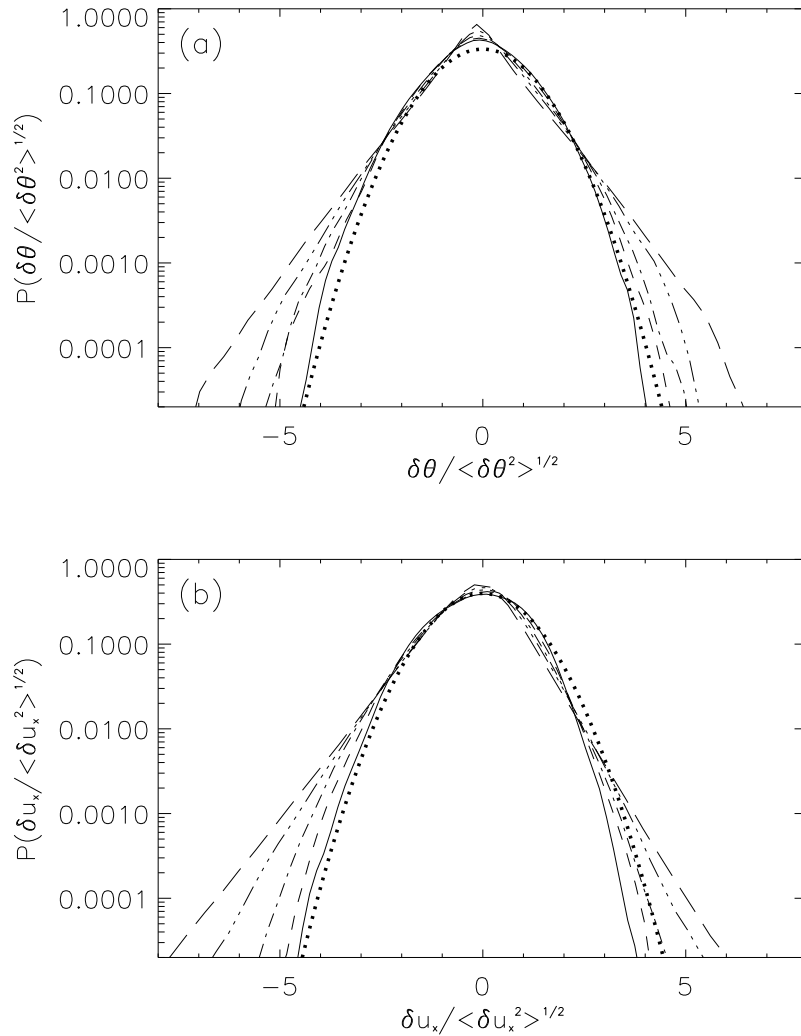


Figura 4.7: Funciones de densidad de probabilidad para incrementos del escalar pasivo y de la velocidad en la simulación *A1*, para cinco incrementos espaciales diferentes: $l = 1, 6$ (línea llena), $0, 8$ (línea de trazos), $0, 4$ (línea de trazos y puntos), $0, 2$ (línea de doble trazos y puntos), y $0, 1$ (línea de trazos largos), para (a) el escalar pasivo, y (b) la componente x del campo de velocidad. En ambos casos la curva de puntos representa una distribución Gaussiana con varianza unitaria. Pueden verse colas no Gaussianas fuertes para los incrementos mas pequeños.

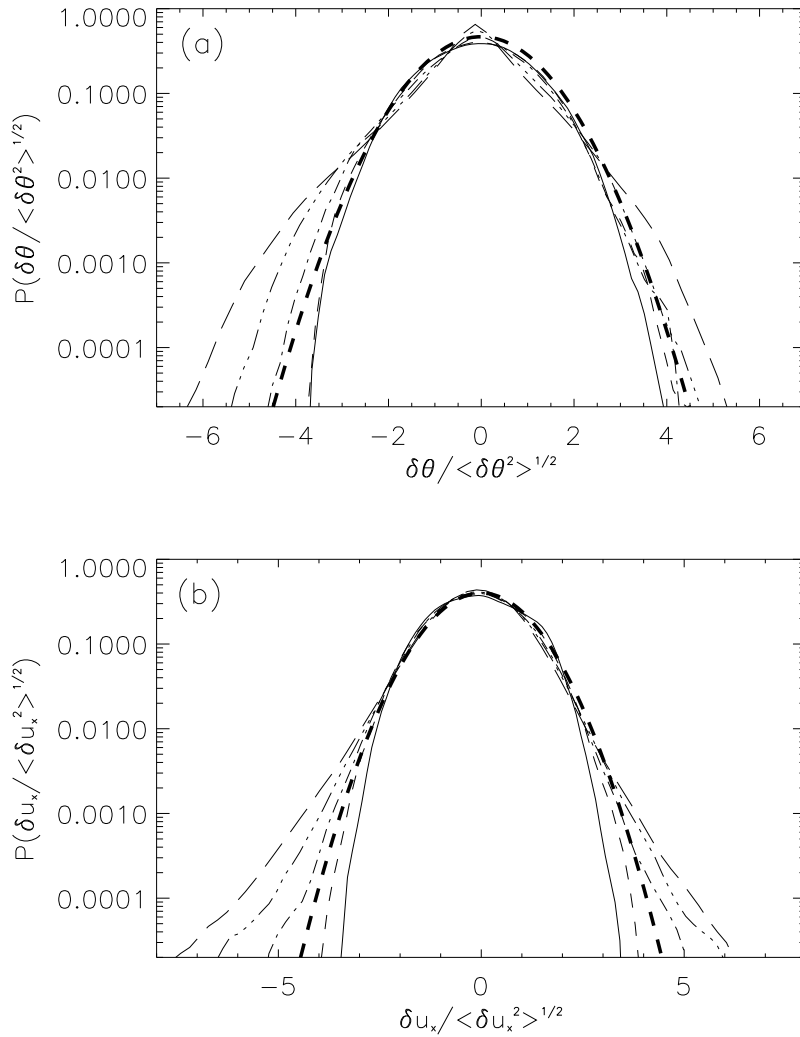


Figura 4.8: Funciones de densidad de probabilidad para incrementos del escalar pasivo y de la velocidad en la simulación *A2*, para cinco incrementos espaciales diferentes: $l = 1, 6$ (línea llena), $0, 8$ (línea de trazos), $0, 4$ (línea de trazos y puntos), $0, 2$ (línea de doble punto y trazos), y $0, 1$ (línea de trazos largos), para (a) el escalar pasivo, y (b) la componente x del campo de velocidad. Una vez más, a medida que se reducen los incrementos, las curvas se alejan más y más de la distribución Gaussiana.

Gaussiana con varianza unitaria se muestra como referencia. En un flujo invariante de escala, se espera que las FDPs de los incrementos de la velocidad y del escalar sean Gaussianas, y que colapsen en una s3la curva al ser debidamente normalizadas. Por otro lado, en un flujo intermitente, se espera que las funciones de densidad de probabilidad tengan colas no Gaussianas con mayor amplitud a medida que los incrementos espaciales se hacen m3s peque3os. Estas colas no Gaussianas se asocian con una mayor probabilidad de que se produzcan eventos extremos en las escalas mas peque3as, lo cual representa un claro indicio de intermitencia.

La figura 4.7 muestra las FDPs de los incrementos de la velocidad y del escalar pasivo para cuatro valores diferentes del incremento espacial, a saber, $l = 1.6, 0.8, 0.4, 0.2$, y 0.1 , para la simulaci3n $A1$ ($\Omega = 0$). Como referencia, la escala de inyecci3n de energ3a en esta simulaci3n es $\approx 2\pi$ y la escala de disipaci3n es ≈ 0.05 ; $l = 0.8$ y 0.4 claramente corresponden a escalas dentro del rango inercial. Las FDPs de los incrementos de la velocidad y del escalar pasivo para $l = 1.6$ muestran una distribuci3n aproximadamente Gaussiana, mientras que para los incrementos espaciales mas peque3os se desarrollan colas no Gaussianas.

La figura 4.8 muestra las FDPs de los incrementos del escalar pasivo y del campo de velocidades para la simulaci3n con rotaci3n $A2$. Para esta simulaci3n, las desviaciones de las FDPs del escalar pasivo con respecto de la Gaussianidad comienzan en $l = 0.4$, y se observa una fuerte asimetr3a para $l = 0.4, 0.2$ y 0.1 . Los incrementos de la velocidad tambi3n se desv3an de la curva con distribuci3n Gaussiana a partir de $l = 0.4$, aunque menos que en el caso sin rotaci3n. Por otro lado, la asimetr3a en las colas de las FDPs en los incrementos del escalar pasivo se vuelve mas pronunciada en las simulaciones con rotaci3n. Esto es consistente con los resultados encontrados en el apartado anterior, que indican un incremento en la anisotrop3a a peque3a escala con la presencia de rotaci3n.

En la figura 4.9 se muestran las FDPs de las derivadas espaciales en la direcci3n x de la velocidad y del escalar pasivo (respectivamente, $\partial_x u_x$ y $\partial_x \theta$), para la simu-

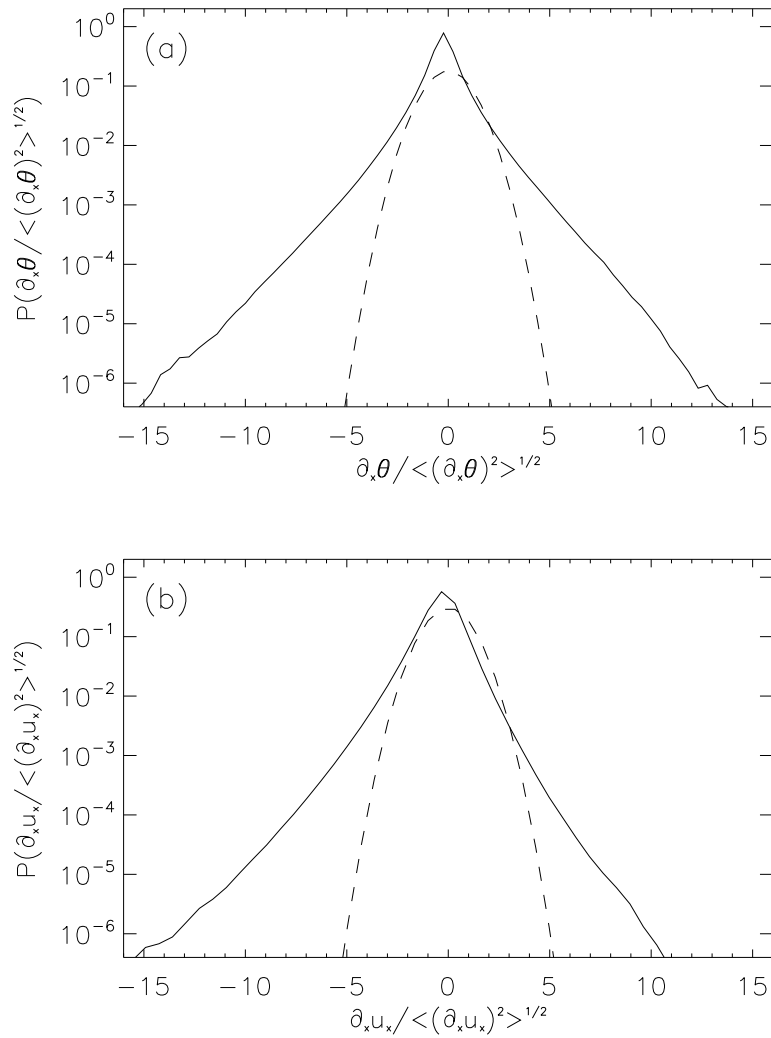


Figura 4.9: Funciones de densidad de probabilidad de las derivadas en x de la velocidad y del escalar pasivo para la simulación A1. (a) Escalar pasivo, y (b) componente en x del campo de velocidad. Las curvas discontinúas representan una distribución Gaussiana con varianza unitaria.

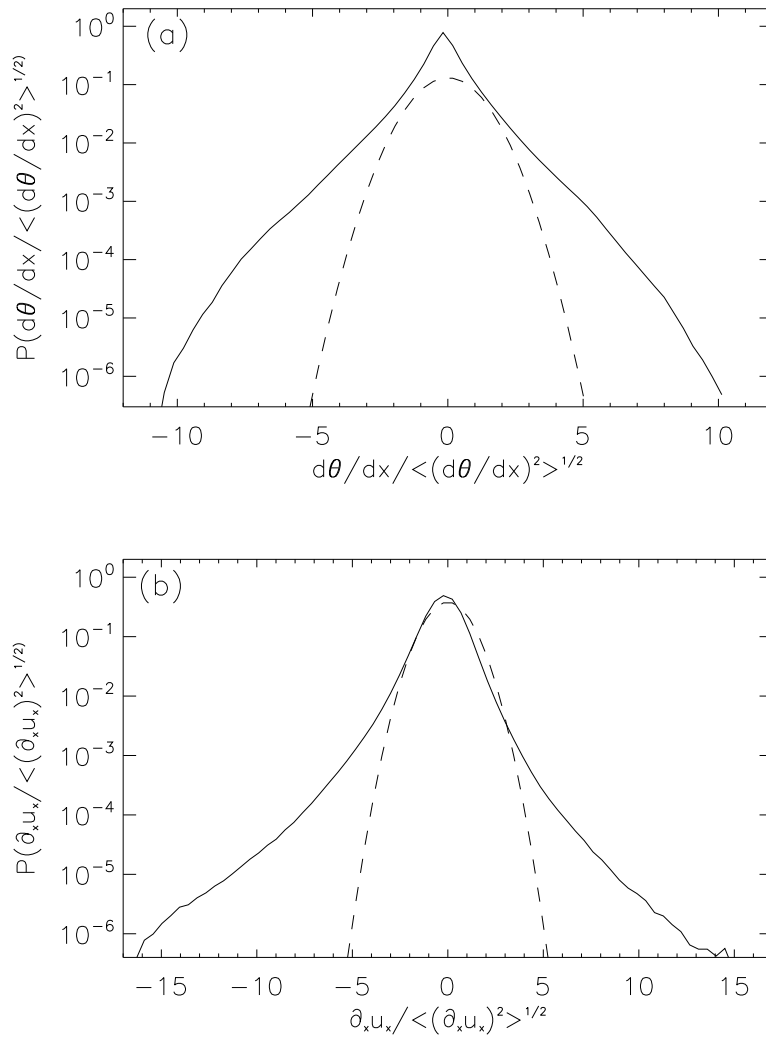


Figura 4.10: Funciones de densidad de probabilidad de las derivadas en x de la velocidad y del escalar pasivo para la simulación *A2*. (a) Escalar pasivo, y (b) componente en x del campo de velocidad. Las curvas punteadas representan una distribución Gaussiana con varianza unitaria.

Tabla 4.1: Asimetría (S) y curtosis (K) para las simulaciones $A1$ y $A2$, para diferentes cantidades (para los incrementos del escalar o del campo de velocidad, l representa el incremento espacial considerado).

Cantidad	l	$S(A1)$	$S(A2)$	$K(A1)$	$K(A2)$
$\partial_x \theta$	-	0.04	-0.15	12.11	9.01
$\delta \theta$	1.6	-0.06	0.01	3.1	2.8
$\delta \theta$	0.8	0.006	-0.04	3.4	2.9
$\delta \theta$	0.4	0.005	-0.2	4.0	3.3
$\delta \theta$	0.2	0.02	-0.2	4.6	4.2
$\delta \theta$	0.1	0.03	-0.2	6.0	5.4
$\partial_x u_x$	-	-0.65	-0.44	8.15	7.96
δu_x	1.6	-0.19	-0.08	2.8	2.6
δu_x	0.8	-0.25	-0.08	3.2	2.8
δu_x	0.4	-0.31	-0.02	3.6	3.1
δu_x	0.2	-0.36	-0.05	4.3	3.6
δu_x	0.1	-0.44	-0.2	5.3	4.6

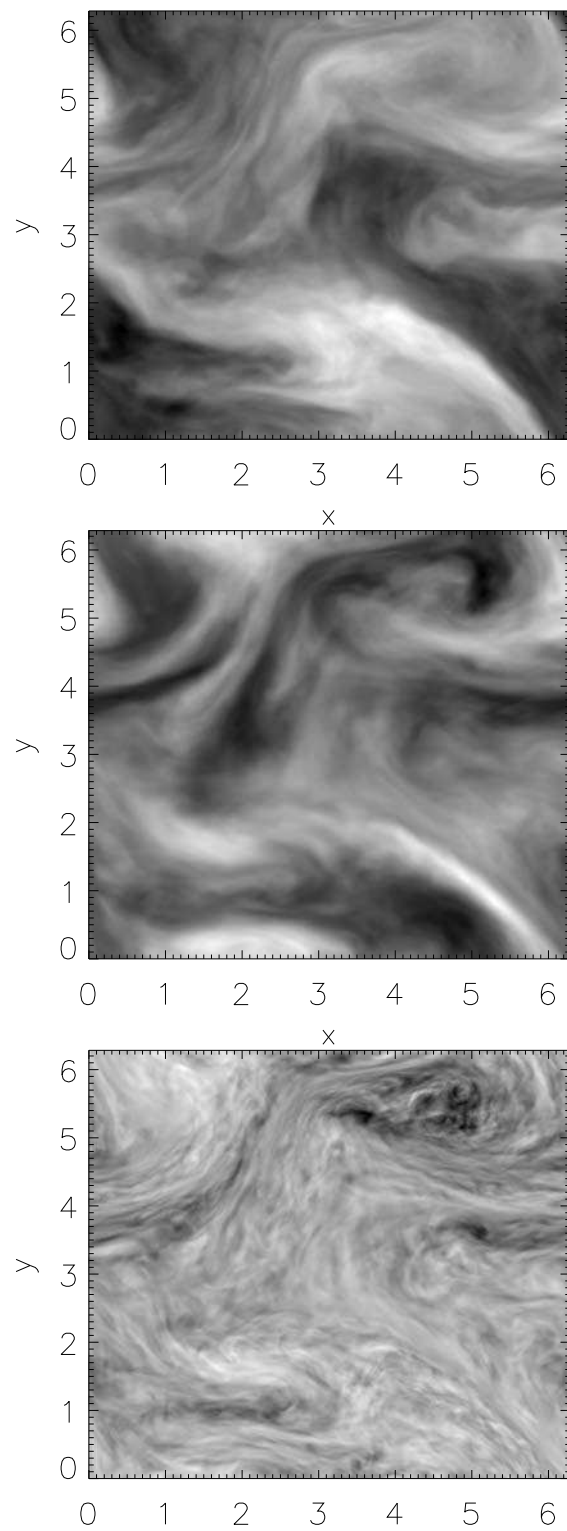


Figura 4.11: Cortes horizontales del escalar pasivo (arriba), la componente vertical de la velocidad (centro) y la componente vertical de la vorticidad (abajo) para un instante de en la simulación *A2*.

lación $A1$ ($\Omega = 0$). Se observan desviaciones de la estadística Gaussiana para ambas derivadas. Las FDPs de las derivadas $\partial_x \theta$ y $\partial_x u_x$ para la simulación $A2$ ($\Omega \neq 0$) se muestran en la figura 4.10. En este caso también se observan fuertes desviaciones con respecto de la Gaussianidad, y asimetría para $\partial_x \theta$. Sin embargo, notar que las colas de la FDP de $\partial_x u_x$ son menos pronunciadas que para el caso sin rotación. Una forma de cuantificar las desviaciones de las FDPs con respecto de la curva de distribución Gaussiana es a través de la curtosis y de la asimetría, (ésta última mejor conocida como skewness en el idioma inglés). La curtosis de una función f está definida a partir del momento de cuarto orden según

$$K(f) = \frac{\langle f^4 \rangle}{\langle f^2 \rangle^2}. \quad (4.14)$$

Por otro lado, la asimetría de una función f está definida como

$$S(f) = \frac{\langle f^3 \rangle}{\langle f^2 \rangle^{3/2}}. \quad (4.15)$$

Como referencia, una distribución Gaussiana tiene $K = 3$ y $S = 0$. Los cálculos de la asimetría para las FDPs de $\partial_x \theta$ arrojan valores de $S_\theta = 0.04$ para la simulación $A1$, y $S_\theta = -0.15$ para $A2$. Para los gradientes de la velocidad, la asimetría es $S_u = -0.65$ para $A1$ y $S_u = -0.44$ para $A2$. Para identificar mas fácilmente las diferencias en las colas de las FDPs en los casos con y sin rotación, la tabla 4.1 muestra los valores de asimetría y curtosis calculados para las distintas cantidades consideradas en las simulaciones $A1$ y $A2$. Para el campo escalar, la asimetría está cerca de cero para todas las cantidades cuando $\Omega = 0$, pero se vuelve negativa y con valores absolutos mas grandes en presencia de rotación. La curtosis de todas las cantidades disminuye en el caso rotante. Para el campo de velocidades, la asimetría es negativa en todos los casos, pero disminuye considerablemente con la presencia de rotación. Al igual que para el escalar pasivo, la curtosis de las cantidades asociadas con el campo de velocidades también disminuye con la rotación.

Los resultados mostrados indican que tanto el escalar pasivo como el campo de velocidad se vuelven menos intermitentes y anisótropos en las simulaciones con

rotación. Para ilustrar esto, la figura 4.11 muestra un promedio horizontal del escalar pasivo, la componente z campo de velocidad, y la componente z de la vorticidad, para tiempos largos en la simulación *A2*. Pueden identificarse ciertas correlaciones entre la distribución de las tres cantidades, dada la configuración similar a gran escala en los tres casos. Sin embargo, la vorticidad vertical desarrolla estructuras a escalas mucho menores, como podía esperarse.

4.3.2 Efectos de la helicidad

En ésta sección nos concentraremos en las simulaciones con rotación y máxima inyección de helicidad, a saber, las simulaciones en el grupo *B* de la Tabla 3.1. Como en el capítulo 3 vimos que la helicidad afecta al espectro del escalar pasivo en el caso rotante, es de esperarse que también afecte a las funciones de densidad de probabilidad, y a sus momentos, los exponentes de escala.

Funciones de estructura

La figura 4.12 muestra las funciones de estructura axisimétricas (sólo para incrementos perpendiculares l_{\perp}) del escalar pasivo y del campo de velocidad hasta séptimo orden en la simulación *B3*. Cada función de estructura corresponde a un promedio sobre 8 instantes durante el estado turbulento estacionario de la simulación. Al igual que en el caso no helicoidal, se observa un rango de escalas con una ley aproximada de potencias en las escalas intermedias, mientras que las escalas mas pequeñas se acercan a una ley $\sim l^p$.

La figura 4.13 muestra un detalle de las funciones de estructura axisimétricas de segundo orden del escalar pasivo para la simulación con rotación y helicidad máxima *B3*, en la dirección perpendicular $T_2(l_{\perp})$ y $S_2(l_{\perp})$, y en la dirección paralela, $T_2(l_{\parallel})$ y $S_2(l_{\parallel})$. Nuevamente se observa que el escalar pasivo es más anisótropo que el campo de velocidad en las escalas pequeñas, lo cual se manifiesta en una mayor diferencia entre $T_2(l_{\parallel})$ y $T_2(l_{\perp})$ que entre $S_2(l_{\parallel})$ y $S_2(l_{\perp})$ a escalas chicas. Para

escalas intermedias $T_2(l_\perp)$ y $S_2(l_\perp)$ muestran un rango compatible con una ley de escalas, no así $T_2(l_\parallel)$ y $S_2(l_\parallel)$, para las cuales no se identifica un rango de inercial claro y los campos parecen ser suaves y derivables en casi todas las escalas. Este resultado era de esperarse dados los resultados hallados para los espectros paralelos de la velocidad y el escalar pasivo en el caso helicoidal.

En las simulaciones helicoidales y no helicoidales introducidas en el capítulo 3, fue posible identificar un rango inercial con leyes de potencia claras para los espectros perpendiculares $V(k_\perp)$ y $E(k_\perp)$, lo que no fue posible para $V(k_\parallel)$ y $E(k_\parallel)$. Las pendientes mostradas como referencia en la figura 4.13 corresponden a un promedio temporal del exponente de segundo orden, obtenido a partir de un mejor ajuste en el rango inercial de todas las funciones de estructura para todos los tiempos disponibles (ocho instantes para la simulación *B3*). Los exponentes de segundo orden (en la dirección perpendicular) son $\zeta_2 = 0.410 \pm 0.006$ para el escalar pasivo y $\xi_2 = 1.222 \pm 0.005$ para el campo de velocidad. Estos valores están en buen acuerdo con los índices espectrales de los espectros $V(k_\perp) \sim k^{-1.4}$ y $E(k_\perp) \sim k^{-2.2}$, lo cual nos lleva a $T_2(l_\perp) \sim (l_\perp)^{0.4}$ y $S_2(l_\perp) \sim (l_\perp)^{1.2}$ por argumentos dimensionales.

Exponentes de escala

Al igual que para el caso no helicoidal, se calcularon los exponentes de escala para órdenes superiores partir de las curvas de la figura 4.12. Para las simulaciones helicoidales en el grupo *B* se calcularon los exponentes de escala de la velocidad y escalar pasivo hasta el séptimo orden. Teniendo en cuenta los índices espectrales para $V(k_\perp)$ y $E(k_\perp)$, se espera que las funciones de estructura sigan leyes lineales dadas por $\zeta_p = p/5$ y $\xi_p = 3p/5$ para el escalar pasivo y la velocidad, respectivamente. La figura 4.14 muestra los exponentes de la velocidad y del escalar pasivo para las simulaciones helicoidales *B2* y *B3* (respectivamente $\Omega = 8$ y $\Omega = 16$). Las dependencias lineales de los exponentes en ausencia de intermitencia y el modelo de Kraichnan (4.13) se muestran como referencia. En el caso del modelo de Kraich-

nan los exponentes ζ_p para órdenes superiores se calcularon utilizando el valor de ζ_2 obtenido de las simulaciones, con $d = 3$, y también con $d = 2$.

Los exponentes de escala para el campo de velocidad son similares para ambas simulaciones. El exponente de orden dos para el campo de velocidades es $\xi_2 = 1.22 \pm 0.02$ para $B2$ y $\xi_2 = 1.23 \pm 0.01$ para $B3$, en buen acuerdo con el valor de 1.2 esperado de la ley seguida por el espectro de energía en el rango inercial. Los exponentes del campo de velocidad muestran las desviaciones usuales de la ley lineal asociada con intermitencia. Los exponentes de intermitencia $\mu = 2\xi_3 - \xi_6$, son $\mu = 0.68 \pm 0.20$ para la simulación $B2$ y $\mu = 0.22 \pm 0.16$ para $B3$. Esta disminución en los valores de μ indican una reducción de la intermitencia con el aumento de la rotación, al igual que para las simulaciones rotantes sin inyección de helicidad presentadas previamente.

Los exponentes de escala del escalar pasivo para estas dos simulaciones también muestran valores similares. El exponente de escala de segundo orden es $\zeta_2 = 0.408 \pm 0.003$ para la simulación $B2$ y $\zeta_2 = 0.406 \pm 0.006$ para $B3$, en buen acuerdo con el valor de 0.4 esperado de la ley de escalas del espectro escalar en el rango inercial. Las desviaciones con respecto de la ley lineal persisten, y los exponentes de intermitencia son $\mu_s = 0.36 \pm 0.06$ para $B2$ y $\mu_s = 0.27 \pm 0.04$ para $B3$. En éstas simulaciones el modelo de Kraichnan con $\zeta_2 = 0.4$ y $d = 2$ también ajusta bien a los datos numéricos. Esto indica que aún en el caso helicoidal la distribución del escalar pasivo tiende a bidimensionalizarse en presencia de la rotación, al igual que lo observado para el caso no helicoidal.

La disminución en los valores de μ observada para el campo de velocidad y para el escalar pasivo sugiere nuevamente una reducción de la intermitencia con el número de Rossby. Esta reducción es mas pronunciada en el campo de velocidad que en el escalar pasivo, de la misma forma que en el caso rotante no helicoidal.

A modo de comparación entre los resultados con y sin helicidad, la figura 4.15, muestra los exponentes de escala calculados para el campo de velocidad y para el

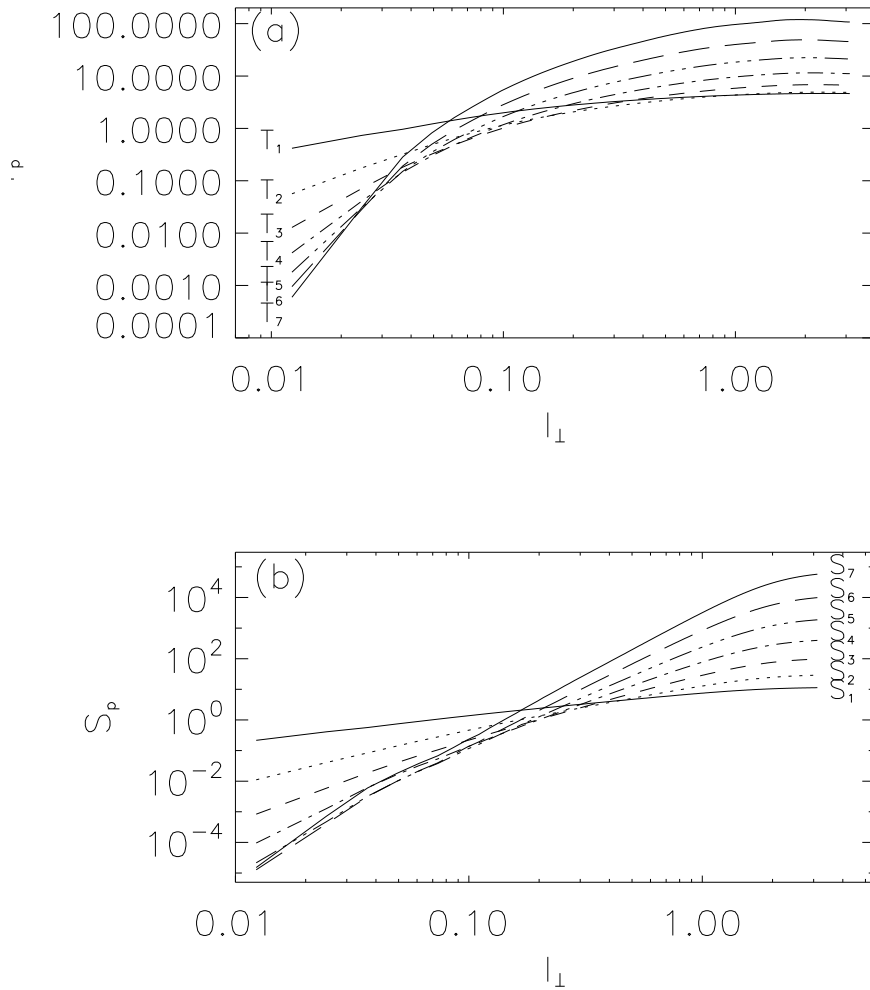


Figura 4.12: Funciones de estructura axisimétricas (sólo para incrementos l_{\perp}) hasta séptimo orden en la simulación *B3* (helicoidal, $\Omega = 16$) para (a) el escalar pasivo, y (b) el capo de velocidad.

escalar pasivo en las simulaciones $B3$ y $C2$ (helicoidal y no helicoidal, respectivamente). Las desviaciones de los exponentes con respecto de la ley lineal son mayores para $B3$, y más pronunciadas para el escalar pasivo que para el campo de velocidad. Esta mayor desviación de la ley lineal en el caso helicoidal sugiere que la intermitencia del escalar pasivo aumenta con la presencia de la helicidad. En efecto, el exponente de intermitencia para la simulación $C2$ es $\mu_s = 0.22 \pm 0.09$ para el escalar pasivo mientras que para la simulación $B3$ este exponente se incrementa a $\mu_s = 0.27 \pm 0.04$.

Funciones de densidad de probabilidad

La figura 4.16 muestra las funciones de densidad de probabilidad de los incrementos de la velocidad y del escalar pasivo para los mismos incrementos espaciales considerados previamente, a saber, $l = 1.6, 0.8, 0.4, 0.2$, y 0.1 , para la simulación $B3$. Al igual que para el caso no helicoidal, la distribución es aproximadamente Gaussiana para el incremento $l = 1.6$ (cercano a la escala de inyección de energía $\approx \pi$), y se observan colas no Gaussianas a medida que disminuye el incremento. Las desviaciones de la Gaussianidad en las FDPs del escalar pasivo comienzan en $l = 0.4$, y se observa una fuerte asimetría para $l = 0.4, 0.2$ y 0.1 . Los incrementos de la velocidad también se desvían de la distribución de Gauss en $l = 0.4$, aunque las colas no Gaussianas en la distribución del escalar pasivo son de mayor amplitud y parecen más asimétricas.

La figura 4.17 muestra las FDPs de las derivadas del escalar pasivo y de la velocidad en x (respectivamente, $\partial_x \theta$ y $\partial_x u_x$), para la simulación $B3$ ($\Omega = 16$). Las desviaciones de la estadística Gaussiana se observan para las derivadas de ambos campos, con mayor asimetría para la derivada del escalar pasivo. A partir de la forma de las FDPs, también podemos inferir que la curtosis es mayor en la FDP de la derivada del escalar pasivo. El cálculo de la asimetría y la curtosis de $\partial_x \theta$ y $\partial_x u_x$ para $B3$, muestra que $S(\partial_x \theta) = 0.074$, $S(\partial_x u_x) = -0.23$, $K(\partial_x \theta) = 8.8$ y $K(\partial_x u_x) = 4.2$. Por otro lado, en el caso no helicoidal, los valores de la asimetría y la curtosis

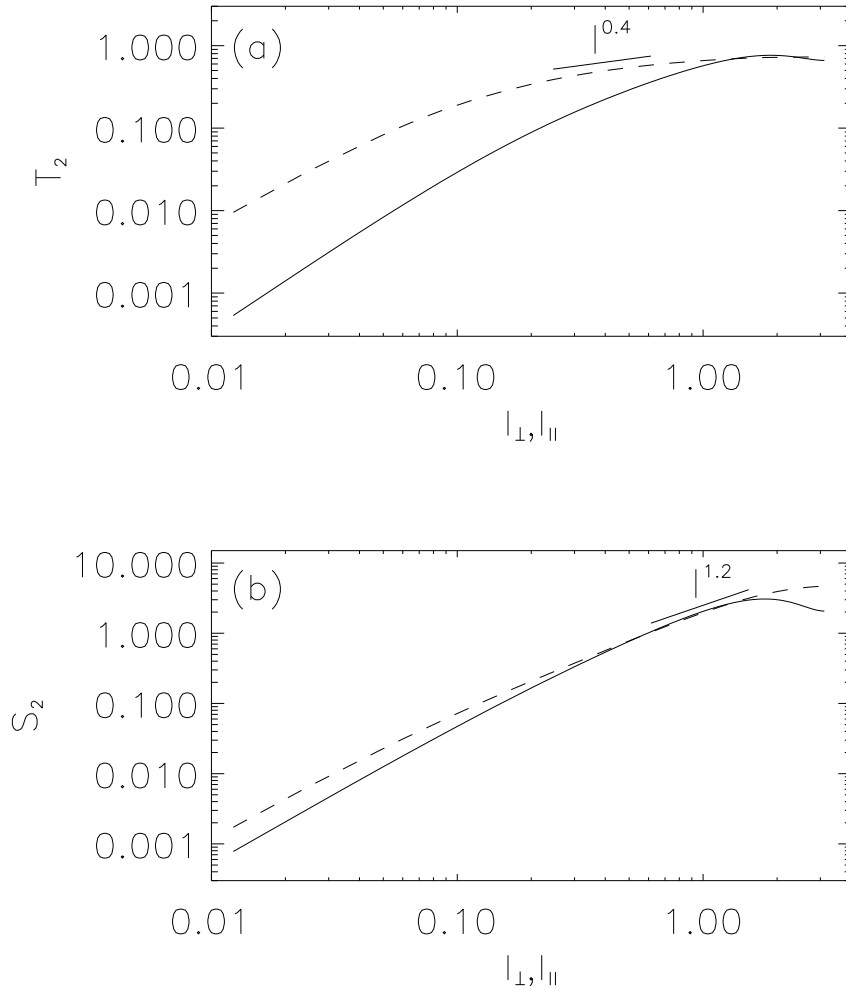


Figura 4.13: Funciones axisimétricas de segundo orden para la simulación *B3* (helicoidal, $\Omega = 16$) (a) para el escalar pasivo, y (b) para el campo de velocidad. Para ambos campos, las líneas continuas corresponden a las funciones de estructura en la dirección paralela, mientras que las líneas de trazos corresponden a las funciones de estructura en la dirección perpendicular. Las pendientes indicadas como referencia corresponden a un promedio temporal de los exponentes de escala, obtenidos de un ajuste en el rango inercial para todos los tiempos disponibles en la simulación.

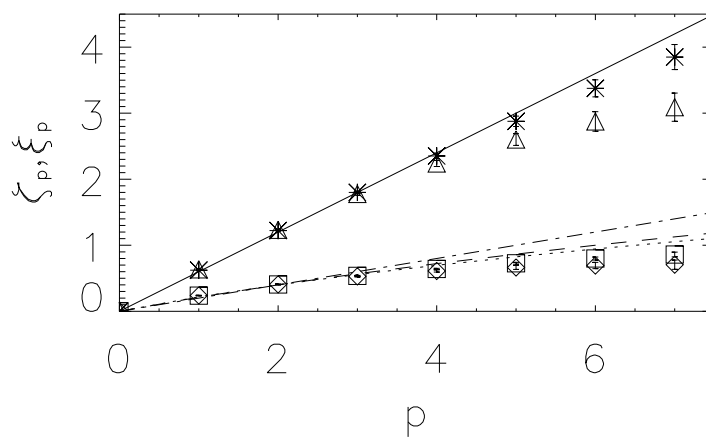


Figura 4.14: Exponentes de escala (con barras de error) en función del orden p , para la velocidad (estrellas para la simulación $B3$ y triángulos para la simulación $B2$) y para el escalar pasivo (cuadrados para la simulación $B3$ y diamantes para la simulación $B2$). La línea continua corresponde a la ley lineal esperada para los exponentes de la velocidad, mientras que la línea de trazos y puntos corresponde a la ley lineal esperada para los exponentes del escalar pasivo. La línea de puntos y la línea de trazos corresponden respectivamente al modelo de Kraichnan con $d = 2$ y con $d = 3$ usando $\zeta_2 = 0.4$.

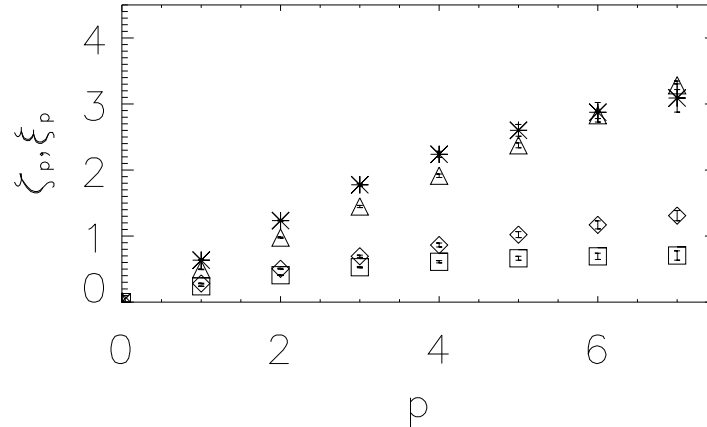


Figura 4.15: Exponentes de escala (con barras de error) en función del orden p , para la velocidad (estrellas para la simulación helicoidal $B3$ y triángulos para la simulación no helicoidal $C2$) y para el escalar pasivo (cuadrados para la simulación $B3$ y diamantes para $C2$).

para la simulación $C1$ arrojaron los valores $S(\partial_x \theta) = -0.22$, $S(\partial_x u_x) = -0.13$, $K(\partial_x \theta) = 9.9$ y $K(\partial_x u_x) = 3.3$. Estos resultados sugieren que el campo de velocidad (rotante) es menos intermitente en el caso helicoidal, mientras que el escalar pasivo se vuelve más intermitente en la presencia de helicidad.

4.4 Conclusiones

En éste capítulo se estudiaron las leyes de escala de las funciones de estructura del campo de velocidad y del escalar pasivo, para flujos con y sin helicidad, en presencia y ausencia de rotación. Aquí, se extendió por lo tanto el análisis de las leyes espectrales de las simulaciones de la Tabla 3.1 presentado en el capítulo previo, hacia el estudio de la intermitencia reflejado en las funciones de estructura y en los exponentes de escala de las mismas.

El resultado más importante de éste capítulo es que, para flujos rotantes a números de Rossby moderados, todos los exponentes de escala del escalar pasivo

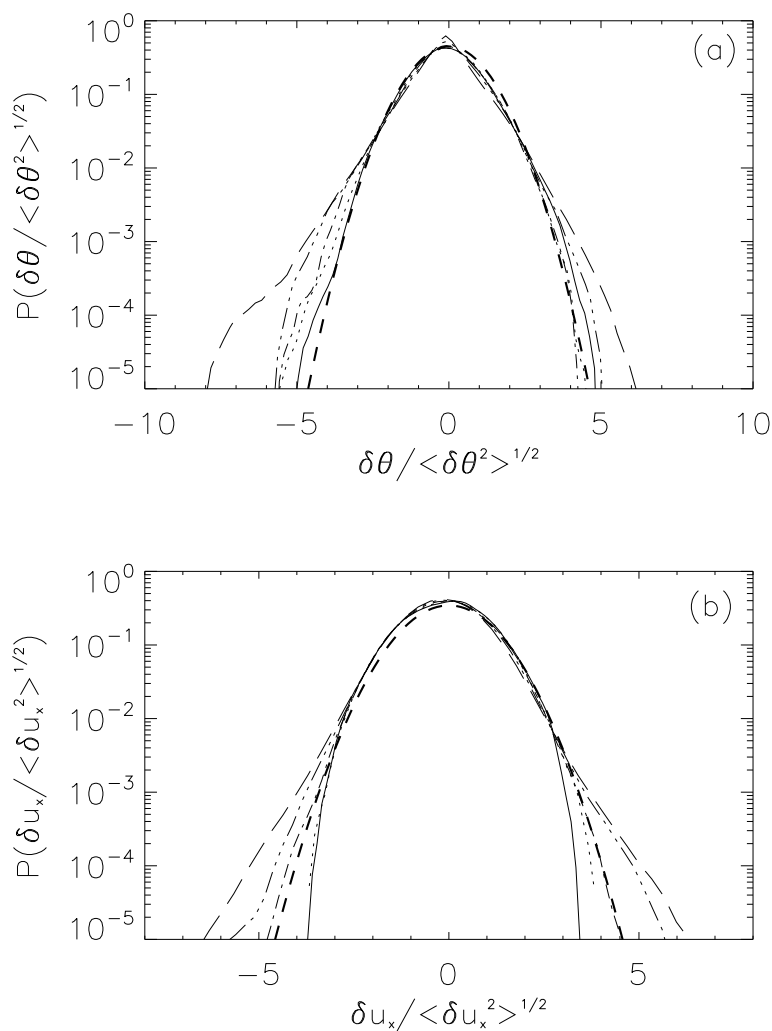


Figura 4.16: Funciones de densidad de probabilidad para la simulación *B3*, para cinco incrementos espaciales diferentes: $l = 1.6$ (línea llena), 0.8 (línea de trazos), 0.4 (línea de trazos y puntos), 0.2 (línea de trazos y doble punto), y 0.1 (línea de trazos largos), (a) para el escalar pasivo, y (b) para la componente x del campo de velocidad. Se muestra una curva Gaussiana con varianza unitaria como referencia (línea de trazos gruesa). Una vez más, a medida que los incrementos disminuyen se desarrollan colas no Gaussianas de mayor amplitud.

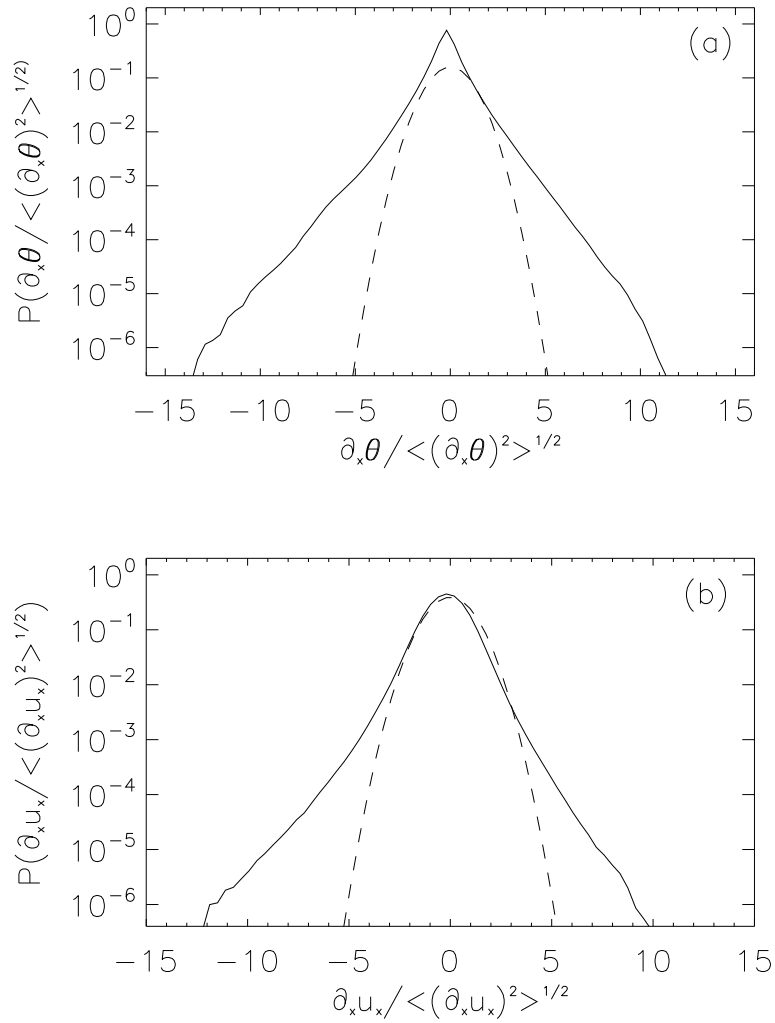


Figura 4.17: Funciones de densidad de probabilidad para las derivadas en la dirección x del escalar pasivo y de la velocidad para la simulación $B3$. (a) Escalar pasivo, y (b) componente x del campo de velocidad. La línea de trazos representa una distribución Gaussiana con varianza unitaria.

pueden determinarse a partir del modelo de Kraichnan utilizando $d = 2$ (al menos hasta el orden mas alto considerado en éste trabajo, y dentro de las barras de error), excepto por el exponente de segundo orden que debe ser determinado de otra forma ya que es un parámetro del modelo. El valor de d puede entenderse en términos de los efectos de la rotación, que propician la transferencia de la energía hacia modos perpendiculares al eje de rotación, produciendo una cuasi-bidimensionalización del flujo [33, 176, 35]. Más aun, para el caso del exponente de escala de segundo orden ζ_2 , el valor de dicho exponente pudo hallarse mediante argumentos dimensionales, obteniéndose para el caso no helicoidal en las simulaciones un valor de $\zeta_2 = 0.5$, consistente con el valor esperado según el espectro de varianza escalar y los argumentos fenomenológicos del capítulo previo. En flujos rotantes con helicidad, se mostró que todos estos resultados se mantienen, pero se obtuvo un exponente de segundo orden para el escalar pasivo de $\zeta_2 = 0.4$, también de acuerdo con el índice espectral observado en el capítulo anterior.

Físicamente, el efecto de la helicidad en el escalar pasivo (en flujos rotantes) es entonces el de, por un lado, aumentar la intensidad de sus fluctuaciones en las escalas mas pequeñas (como se deduce del espectro de varianza menos empinado), y al mismo tiempo, aumentar la intermitencia (es decir, la localización espacial de regiones con fuertes gradientes de escalar pasivo).

Finalmente, se consideraron funciones de densidad de probabilidad de los incrementos longitudinales del campo de velocidad y del escalar pasivo, como también así de sus derivadas espaciales. Las FDPs de ambos campos apuntan también a una reducción de la intermitencia en presencia de la rotación (como lo indican, por ejemplo, los valores de la curtosis y la asimetría), mas pronunciada para la velocidad que para el escalar pasivo. Las FDPs para las simulaciones rotantes con inyección de helicidad muestran una reducción en la intermitencia en el campo de velocidad con respecto al caso no helicoidal. Por el contrario, los resultados obtenidos para el escalar pasivo sugieren un aumento de la intermitencia en presencia de helicidad. Todo esto es

consistente con los resultados obtenidos para las funciones de estructura del escalar pasivo y del campo de velocidad, y con los valores de los exponentes de intermitencia obtenidos en cada caso.

Capítulo 5

Coeficientes de difusión

5.1 Introducción

Hasta aquí, hemos caracterizado las propiedades estadísticas del escalar pasivo con herramientas propias de la teoría de turbulencia homogénea, como el espectro de potencias y las funciones de estructura. Sin embargo, una propiedad importante (y muy usada en aplicaciones) de los flujos turbulentos es que amplifican significativamente el transporte y mezclado de magnitudes que no están distribuidas homogéneamente. En este capítulo consideraremos ese problema.

El transporte turbulento de escalares pasivos en flujos anisótropos desempeña un papel importante en una amplia variedad de procesos astrofísicos y geofísicos [152, 40, 140, 149, 148]. Usualmente, los procesos de mezclado en dichos flujos son a menudo estudiados por medio de coeficientes de transporte [173, 23, 148] .

Mientras que el transporte de escalares pasivos en flujos turbulentos isótropos ha recibido mucha atención en la literatura (véase, por ejemplo, [177, 57, 38]), menos estudios consideran el caso de la difusión del escalar pasivo en flujos anisótropos. En presencia de anisotropía el transporte del escalar pasivo se modifica, y se espera que los coeficientes de transporte se vuelvan anisótropos. Casos de particular relevancia para la atmósfera y los océanos (así como para la mezcla en regiones convectivas

estelares) son los casos en los cuales la anisotropía está impuesta por la rotación o la estratificación. En el caso de flujos estratificados, simulaciones numéricas en [173] mostraron que la estratificación reduce las fluctuaciones horizontales del escalar (es decir, preserva el efecto de mezclado turbulento en planos horizontales), mientras que suprime el transporte y la difusión vertical del escalar pasivo. Estos resultados fueron luego obtenidos en teorías analíticas en [135].

El transporte turbulento y la difusión de escalares pasivos en flujos rotantes ha recibido menos atención, aunque la anisotropía introducida por la rotación es importante en las escalas más grandes de la atmósfera y los océanos, así como en las estructuras de la atmósfera que desarrollan fuerte rotación local, como ocurre en los tornados [30, 31]. En el contexto astrofísico, los efectos de la rotación sobre la difusión turbulenta también son importantes para entender el desarrollo de gradientes latitudinales de entropía en estrellas [23]. Por otra parte, se cree que el transporte anisótropo de escalares pasivos está también asociado con el agotamiento parcial de Litio observado en el Sol [149].

El desarrollo de la anisotropía en los flujos rotantes difiere del de flujos estratificados. Mientras que en el último caso las estructuras tienden a ser planas y en capas, como ya se mencionó, en flujos sujetos a rotación las estructuras son alargadas a lo largo del eje de rotación, y el flujo tiende a ser cuasi-bidimensional [98]. En uno de los pocos estudios previos en la literatura, coeficientes de transporte turbulento para escalares pasivos en flujos rotantes fueron obtenidos a partir de simulaciones numéricas mediante un modelo de campo medio en [23]. Los resultados indican que la difusión turbulenta en la dirección de la rotación se reduce cuando las escalas de la turbulencia son comparables con la del campo medio.

En un contexto más general, muchos autores han estudiado la difusión turbulenta en flujos anisótropos para el problema de la dispersión de partículas. Estos estudios están relacionados con el transporte de escalares pasivos, dado que la concentración media de un escalar pasivo está relacionada con la dispersión de una partícula

en un flujo turbulento (véase, por ejemplo, el capítulo 2). Los estudios teóricos y numéricos en [129, 36] (véase también [76, 75, 130] y las simulaciones en [80]) indican que la dispersión de partículas en flujos turbulentos establemente estratificados con y sin rotación se suprime a lo largo de la dirección de la estratificación. Por otra parte, los resultados en [36] y [130] muestran que la anisotropía introducida por la estratificación también reduce la dispersión horizontal, aunque en un grado mucho menor que la dispersión vertical. Estos resultados están en buen acuerdo con resultados experimentales previos en [26]. En el caso de flujos rotantes sin estratificación, los mismos estudios indican que la dispersión horizontal de una partícula se reduce notablemente, mientras que la dispersión vertical permanece casi sin cambios. Mas recientemente, autocorrelaciones Lagrangianas de la velocidad (relacionadas también con la difusión turbulenta, como ya se vió en el capítulo 2) se obtuvieron en experimentos de turbulencia rotante forzada [53] y en simulaciones numéricas de flujos rotantes [181].

Otro caso de interés, el transporte de escalares pasivos en turbulencia rotante helicoidal, ha sido prácticamente ignorado en la literatura. En turbulencia isotrópica, los efectos de helicidad en la difusión de escalares pasivos fueron considerados en [87, 121, 47]. La helicidad aumenta la difusión turbulenta, como lo muestran resultados en [121, 47].

Como vimos en los capítulos previos, la helicidad afecta la cascada directa de la energía en flujos con rotación, resultando en un espectro de energía más pronunciado (es decir con fluctuaciones turbulentas en escalas pequeñas con menor amplitud que en ausencia de helicidad). Como era de esperar, la cascada del escalar pasivo hacia escalas más pequeñas también se ve afectada por la presencia de la helicidad.

En el último capítulo se estudiaron las leyes de escala y la intermitencia del escalar pasivo en flujos con rotación, y se encontró que la distribución del escalar pasivo se vuelve altamente anisótropa, con leyes de escala que se desarrollan en el plano perpendicular al eje de rotación, y con exponentes de escala compatibles con

el modelo de Kraichnan [88] para el escalar pasivo en dos dimensiones [142, 144]. También se observó que la helicidad modifica el transporte del escalar pasivo en flujos rotantes, y que las fluctuaciones del escalar pasivo se vuelven más intermitentes en presencia de la helicidad.

En este capítulo estudiamos entonces los coeficientes de transporte turbulento para el escalar pasivo en flujos turbulentos rotantes con y sin inyección de helicidad. Siguiendo un procedimiento similar al utilizado en [173] para flujos estratificados, los coeficientes efectivos se obtienen mediante el estudio de la difusión de una distribución inicial inhomogénea del escalar en un flujo turbulento, y se calculan mediante la medición de la concentración media y del flujo medio espacial del escalar. A diferencia de trabajos anteriores (véase, por ejemplo, [23]), los coeficientes obtenidos aquí son independientes de la escala. Los coeficientes calculados de esta manera son útiles cuando se precisa una descripción más económica del problema desde el punto de vista computacional, como a menudo es el caso, por ejemplo, en el modelado de fenómenos climáticos (ver [31]). Como la turbulencia de pequeña escala del pronóstico meteorológico no se puede resolver en los modelos numéricos de simulaciones climáticas (como ejemplo, la resolución de turbulencia de pequeña escala en huracanes requiere grillas con una separación menor que 100 m, véase [28]), y dado que los modelos de subgrilla requieren que una fracción del espectro turbulento esté resuelta (siendo entonces computacionalmente costosos), una gran parte de los modelos numéricos en ciencias de la atmósfera utilizan esquemas de parametrización de la turbulencia sencillos, con coeficientes efectivos de mezclado y difusión [30]. Se sabe que estos modelos numéricos producen resultados físicamente incorrectos si la turbulencia no se parametriza correctamente (véase, por ejemplo, [70], [134]). Como resultado, la determinación de coeficientes de transporte anisótropos es importante, entre otras aplicaciones, para estos modelos numéricos y teóricos.

Al igual que en los capítulos previos, el campo de velocidad y la concentración del escalar pasivo se obtienen a partir de simulaciones numéricas directas de las ecua-

ciones de Navier-Stokes en un sistema rotante, junto con la ecuación de advección-difusión para el escalar pasivo, aunque con una configuración ligeramente diferente, que se explicará mas adelante. Los coeficientes de difusión turbulenta se calculan en las direcciones vertical (paralela al eje de rotación) y horizontal. La caracterización de la difusión turbulenta incluye un estudio paramétrico del efecto de variar el número de Schmidt, y el número de Peclèt. Por último, presentamos visualizaciones del escalar que permiten obtener una interpretación más completa de los procesos difusivos en las direcciones vertical y horizontal.

Encontramos que la rotación reduce drásticamente la difusividad del escalar en la dirección horizontal (en comparación con el caso isótropo y homogéneo). Esto es consistente con los argumentos teóricos en [130] para la dispersión de una partícula, donde se encontró que la dispersión vertical es dos veces más grande que dispersión horizontal en presencia de rotación pura. Dentro de las barras de error, nuestros resultados son consistentes con esta predicción. Por otra parte, encontramos que la difusión horizontal puede ser razonablemente estimada utilizando argumentos de longitud de mezclado de Prandtl, $\mathcal{D} \sim U_{\perp} L_{\perp}$ (donde U_{\perp} y L_{\perp} son, respectivamente, una velocidad y una escala características en la dirección perpendicular al eje de rotación).

Para flujos helicoidales isótropos, confirmamos que la helicidad incrementa la difusión turbulenta (en comparación con el caso no helicoidal) en buen acuerdo con los resultados previos hallados en [121, 47]. Para los flujos con rotación, la helicidad reduce la difusión horizontal, aunque incrementa la difusión vertical (en comparación con el caso no helicoidal). La reducción en la difusión horizontal puede explicarse mediante un modelo simple para la difusión turbulenta, que se basa en la cantidad de energía disponible en las fluctuaciones de pequeña escala de la velocidad.

En todos los casos, para números de Schmidt y Peclèt bajos la difusión turbulenta disminuye a medida que la difusión molecular se hace mas importante, mientras que para números de Peclèt los suficientemente grandes la difusión efectiva se vuelve

independiente del número de Peclèt. Todos los resultados enumerados arriba, que conforman el último capítulo de esta tesis, fueron publicados en [143] y [145].

5.2 Propiedades de mezclado de la turbulencia

5.2.1 Difusión turbulenta, escalas y tiempos característicos

Una de las características más importantes de la turbulencia es la habilidad de transportar y mezclar momento, energía cinética, y contaminantes tales como el calor, partículas, o humedad. Las tasas de transferencia y mezclado observadas en flujos turbulentos son varios órdenes de magnitud mayores que las correspondientes a la difusión molecular. Tomando como ejemplo la temperatura, la transferencia de calor y las tasas de combustión en un incinerador son órdenes de magnitud mayores que en la llama laminar de una vela. Mas adelante volveremos a considerar esto con ejemplos importantes en distintos escenarios naturales.

Como complemento de los conceptos introducidos en el capítulo 2, en ésta sección presentamos una descripción más eurística del problema, mediante la introducción de ciertos modelos simples de difusión turbulenta. La metodología nos permitirá entrar en contacto con conceptos muy importantes relacionados con el problema de estudio, como sus tiempos y sus longitudes características.

Tiempos característicos

Existen diferentes formas de interpretar y entender el rol de la difusión turbulenta. Una forma de abordar el problema, como se hizo arriba, es contrastar la difusión laminar con la turbulenta. Para esto, supongamos que se tiene una habitación con una dimensión lineal característica L , en la cual funciona un calentador o un elemento que irradia calor. Si no hay movimiento de aire en la habitación, el calor es distribuido por la difusión molecular. Este proceso es gobernado por la ecuación de difusión para

la temperatura θ

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa_{ij} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (5.1)$$

donde κ_{ij} es un tensor, y si el medio es isótropo la ecuación se reduce a

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa \nabla^2 \theta. \quad (5.2)$$

A diferencia del capítulo 2, en este caso κ representa a la difusión térmica. La idea es ver las implicancias de la ecuación (5.2) sin necesidad de buscar una solución explícita. Valiéndonos una vez más de argumentos dimensionales, de la ecuación (5.2) podemos estimar

$$\tau = \frac{L^2}{\kappa}, \quad (5.3)$$

que relaciona la escala temporal de la difusión molecular τ con los parámetros independientes L y κ . Si la dimensión característica de la habitación es de 5 m , y usamos un valor característico de $\kappa \approx 0.2 \text{ cm}^2/\text{s}$ (para aire a temperatura y presión ambiente), obtenemos un tiempo de $\tau \approx 10^7 \text{ s}$, (mas de 2000 horas). Este simple ejemplo nos muestra que la difusión molecular es poco efectiva para distribuir el calor en la habitación, y nos da una idea del tiempo característico de la difusión turbulenta en un problema con una escala espacial impuesta.

Un ejemplo de gran importancia de esto es el agotamiento parcial del Litio en la región convectiva del Sol. En las estrellas como el Sol (estrellas frías en la secuencia principal), el tiempo de decaimiento del Li es exponencial, con un tiempo característico de 1 *Gaño* [54]. El Li se destruye por reacciones nucleares a temperaturas de $2.6 \times 10^6 \text{ K}$ [110], lo cual corresponde a zonas profundas dentro del Sol, aproximadamente a $4 \times 10^4 \text{ km}$ por debajo de la zona de convección (ver figura 5.1). De esta manera, debe existir un proceso capaz que transportar el Li desde el fondo de la zona de convección, a través de la tacoclina (una región con fuertes gradientes de velocidad entre a región convectiva y la región radiativa de la estrella) y hasta la zona de “destrucción”. El tiempo de decaimiento del Litio es aproximadamente 10^7 veces el tiempo característico de la difusión molecular en la zona de convección,

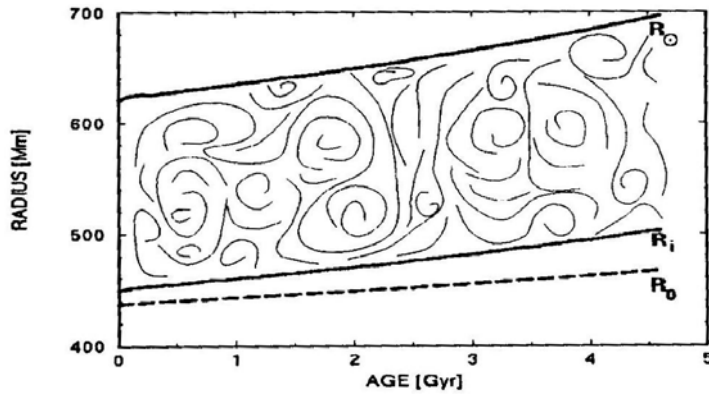


Figura 5.1: Estructura externa del sol durante su secuencia principal. R_i limita la capa interna de convección inestablemente estratificada, R_\odot corresponde a la capa externa (el radio del sol), mientras que R_0 corresponde a la zona de destrucción de Li con una temperatura de $2.6 \times 10^6 K$ [77, 164].

correspondiente a 100 años. Las observaciones de la abundancia relativa de Li indican que para éstos tiempos característicos (es decir, sólo teniendo en cuenta la difusión molecular) la abundancia queda sobrestimada, por lo cual se cree que la difusión turbulenta es la encargada de transportar el Li restante [152, 153, 159, 183, 184, 149].

Escalas características

En la sección previa hallamos un tiempo característico para el proceso difusivo imponiendo una escala del problema. Análogamente, puede imponerse un tiempo con la intención de hallar una escala característica. Una forma útil y de aplicación directa para esto es pensar en la capa límite de la atmósfera terrestre. Dado que las capas de la atmósfera están sujetas a la rotación de la Tierra, en el marco rotante los flujos se aceleran debido a la fuerza de Coriolis, dada por $-2\mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega}$. Si la velocidad angular en el marco rotante es $\Omega = f/2$, entonces el flujo atmosférico tiene una escala temporal característica (asociada a las ondas inerciales) de $1/f$. El parámetro f es conocido

como número de Coriolis y si se tiene en cuenta la curvatura de la tierra, esta dado por $f = 2\Omega \sin(\phi)$ (donde ϕ es la latitud). Para una latitud de 40° el valor de f es aproximadamente de 10^{-4} s^{-1} .

Si el flujo en la atmósfera fuera laminar, la dinámica estaría gobernada por la ecuación de difusión (5.1) (por ejemplo, para el transporte de momento desde y hacia el suelo), por lo cual las escalas espaciales y temporales estarían relacionadas según $L \sim (\kappa\tau)^{1/2}$. Valores típicos para la atmósfera son $\kappa \approx 0.15 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$ y $\tau = f^{-1} \approx 10^4 \text{ s}$, lo cual resulta en $L = 40 \text{ cm}$. En la práctica, la capa límite de la atmósfera es casi siempre turbulenta y con un espesor de $L \approx 1 \text{ km}$.

Teniendo en cuenta la turbulencia, puede pensarse que los remolinos turbulentos con velocidad característica u y con una escala temporal $\tau \sim 1/f$, transportan magnitudes en una escala

$$L \sim u\tau. \quad (5.4)$$

En la capa límite de la atmósfera, la velocidad característica turbulenta U es aproximadamente $1/30$ de la velocidad media del viento. Para una velocidad del viento de $10 \text{ m/s} = 36 \text{ km/h}$, estimamos $u \approx 0.3 \text{ m/s}$. Si $\tau \approx 10^4 \text{ s}$, entonces $L \approx 3 \times 10^3 \text{ m} = 3 \text{ km}$, del mismo orden que el espesor observado. En este razonamiento debe tenerse en cuenta que el espesor de la capa límite L se asocia también al tamaño de los remolinos turbulentos. Esta estimación se desprende de que en la mayoría de los flujos turbulentos, los remolinos de mayor tamaño son comparables con la longitud característica del flujo en la dirección perpendicular al flujo medio (ver figura 5.2). Esta hipótesis ya fue utilizada previamente en ésta tesis, y representa un argumento central en el estudio de flujos turbulentos. Mas adelante veremos que esto es muy útil en la estimación de la difusión, dado que los remolinos de mayor tamaño son los encargados principales de la mezcla.

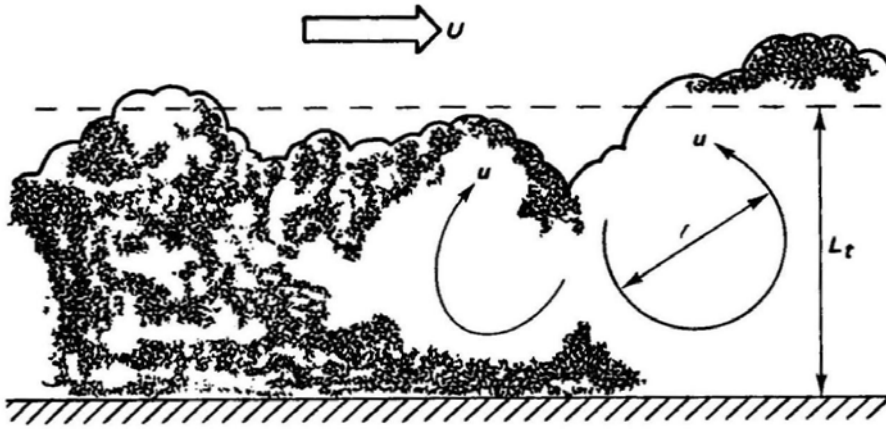


Figura 5.2: Remolinos turbulentos de mayor tamaño en la capa límite atmosférica. El flujo en la parte superior de la capa límite tiene velocidad U , los remolinos tienen velocidad u . El remolino de mayor tamaño (l) es comparable con el espesor de la capa límite L . La interfase entre el flujo turbulento y el flujo en la parte superior es delgada [50].

5.2.2 Ley de Fick, coeficientes de difusión efectivos

Los conceptos y ejemplos que vimos indican que la turbulencia genera un proceso difusivo más efectivo que el de la difusión turbulenta molecular (o térmica) con coeficiente κ . Es natural preguntarse entonces si es posible definir un coeficiente efectivo de difusión turbulenta.

En principio se puede reemplazar el valor de κ_{ij} en la ecuación (5.1) por un tensor de difusividad escalar constante \mathcal{D}_{ij} , que nos permita simplemente escribir la dinámica del escalar θ como

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \mathcal{D}_{ij} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (5.5)$$

Nuevamente, si el flujo es isótropo, la ecuación se simplifica según

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \mathcal{D} \nabla^2 \theta, \quad (5.6)$$

donde \mathcal{D} se conoce como la difusividad asociada a los remolinos turbulentos (“eddy diffusivity” en el idioma inglés). Al igual que antes, el análisis dimensional indica

que $\mathcal{D} \sim L^2/\tau$. Para un remolino turbulento de tamaño l con velocidad característica u , sabemos que $\tau \sim l/u$, de lo cual se desprende que

$$\mathcal{D} \sim lu. \quad (5.7)$$

esta expresión corresponde al conocido resultado de longitud de mezclado de Prandtl. Cabe notar que la ecuación (5.7) es una estimación dimensional que no predice el valor numérico de los coeficientes de difusión, aunque tiene gran importancia para estimar el orden de magnitud de la difusión. En el ejemplo de la capa límite atmosférica explicado mas arriba, $\mathcal{D} \sim lu$ aumenta con el tamaño de los remolinos turbulentos (ver figura 5.2).

La hipótesis de difusión de gradientes

A partir de este argumento puede definirse un coeficiente de difusión efectiva mas formalmente. En el contexto de esta tesis, el vector de flujo medio espacial de las fluctuaciones del escalar pasivo θ' , $\overline{\mathbf{u}'\theta'}$, nos da la dirección y la magnitud del transporte turbulento del escalar θ . De acuerdo con la hipótesis de *difusión de gradientes*, este flujo debe ser en la dirección opuesta al gradiente del escalar, es decir, en la dirección de $-\nabla\overline{\theta'}$. Esto es razonable ya que la difusión debe oponerse al gradiente, y tender a homogeneizar la distribución espacial del escalar θ . De acuerdo a ésto, existe una magnitud escalar positiva \mathcal{D} , tal que

$$\overline{\mathbf{u}'\theta'} = -\mathcal{D}\nabla\overline{\theta'}, \quad (5.8)$$

donde \mathcal{D} es el coeficiente de difusión turbulenta. Si se define $\mathcal{D}_{eff} = \kappa + \mathcal{D}$, y se incorpora ésto en la ecuación (2.10) para $\langle\theta\rangle$ se obtiene que

$$D_t\overline{\theta'} = \nabla \cdot (\mathcal{D}_{eff}\nabla\overline{\theta'}), \quad (5.9)$$

donde D_t es la derivada material o convectiva. Asumiendo que el flujo es homogéneo, esta ecuación es matemáticamente análoga a la Ley de Fourier para la conducción del calor, o a la Ley de Fick para la difusión de un escalar.

5.3 Resultados numéricos

5.3.1 Simulaciones

Como en los capítulos previos, consideraremos primero los efectos de la rotación, y luego los efectos de la helicidad junto con los de la rotación. Las simulaciones utilizadas en éste capítulo se enumeran en la Tabla 5.1. Dado que el objetivo del estudio son los coeficientes de difusión, las simulaciones se realizan siguiendo un procedimiento ligeramente distinto al utilizado para las simulaciones de los capítulos 3 y 4. El procedimiento para obtener las simulaciones numéricas es el siguiente: En primer lugar, se lleva a cabo una simulación de las ecuaciones (2.3) y (2.4) (Navier-Stokes sin escalar pasivo y sin rotación) a partir del fluido en reposo ($\mathbf{u} = 0$), y con la aplicación de una fuerza externa \mathbf{f} aleatoria similar a la utilizada en las simulaciones previas (ver sección 3.2.1), hasta llegar a un estado turbulento estacionario. Esta simulación se continua durante aproximadamente 13 tiempos τ_{NL} . El estado final de esta simulación es utilizado como condición inicial para el campo de velocidad en múltiples simulaciones en las que el forzado externo \mathbf{f} se mantiene igual, pero en las que se inyecta un escalar pasivo. Estas simulaciones componen los grupos A , B , C , E , F , G , e I de las cuales se obtendrán varios subgrupos de simulaciones con el mismo número de Rossby (ver Tabla 5.1).

Cada simulación en cada grupo corresponde a una simulación en la que se utiliza un perfil inicial de Gauss para el escalar pasivo, de la forma

$$\theta(t = 0, x_i) = \theta_0 e^{-(x_i - \mu)^2 / \sigma^2} \quad (5.10)$$

donde $i = 1$ ó 3 (es decir, el perfil inicial es una función de $x_1 = x$ o $x_3 = z$), $\mu = \pi$ (el perfil se centra en el medio del recinto, con la caja de longitud 2π), y $\sigma = 1$. Esto nos permite estudiar la difusión del perfil inicialmente inhomogéneo en la dirección paralela al eje de rotación (z , o vertical) o en la dirección perpendicular (x , u horizontal). En las simulaciones se comprobó explícitamente que la difusión en las direcciones x e y fuera la misma (dado que con la rotación la turbulencia

Tabla 5.1: Parámetros utilizados en cada grupo de simulaciones. Típicamente, cada grupo corresponde a al menos 14 simulaciones. En cada grupo, Ω es la tasa de rotación, R_o es el número de Rossby, R_e es el número de Reynolds, U es el valor cuadrático medio de la velocidad en el estado turbulento estacionario y H es el valor cuadrático medio de la helicidad en el estado turbulento estacionario.

Grupo	Ω	R_o	R_e	U	k_F	H
<i>A</i>	0	∞	1050	1	1	0
<i>B</i>	2	0.04	1050	1	1	0
<i>C</i>	4	0.02	1050	1	1	0
<i>E</i>	8	0.01	1050	1	1	0
<i>F</i>	0	∞	525	1	2	0
<i>G</i>	8	0.02	525	1	2	0
<i>I</i>	16	0.01	525	1	2	0
<i>F_h</i>	0	∞	525	1	2	3
<i>G_h</i>	8	0.02	525	1	2	6
<i>I_h</i>	16	0.01	525	1	2	11

Tabla 5.2: Parámetros utilizados en cada uno de los subconjuntos de simulaciones. En cada simulación, el subíndice x o z indica la dependencia con la coordenada de perfil inicial Gaussiano del escalar pasivo, y el subíndice indica el valor de $1/S_c$. Para cada simulación, ν es la viscosidad cinemática, κ es la difusión molecular, P_e es el número de Peclèt, y S_c es el número de Schmidt.

Grupo	ν	κ	P_e	S_c
$A_{x1/2}$	6×10^{-4}	3×10^{-4}	2100	2
A_{x1}	6×10^{-4}	6×10^{-4}	1050	1
A_{x2}	6×10^{-4}	1.2×10^{-3}	520	0.5
A_{x4}	6×10^{-4}	2.4×10^{-3}	260	0.25
A_{x8}	6×10^{-4}	4.8×10^{-3}	130	0.12
A_{x16}	6×10^{-4}	9.6×10^{-3}	66	0.06
A_{x32}	6×10^{-4}	1.92×10^{-2}	33	0.03

tiende a ser axisimétrica). Las simulaciones en cada grupo están etiquetadas con un subíndice que indica la dependencia del perfil inicial (por ejemplo, las simulaciones en el grupo A se etiquetan A_x o A_z en función del perfil inicial Gaussiano utilizado, ver Tabla 5.1).

Para considerar los efectos de la helicidad tanto en los flujos isótropos como en los flujos rotantes, se realizaron una serie de simulaciones con parámetros similares a los de las simulaciones F , G , e I (no helicoidales), pero inyectando helicidad máxima en el fluido, de lo cual se obtuvieron las simulaciones helicoidales F_h , G_h e I_h (donde el subíndice h indica que las simulaciones son helicoidales). Esto es posible usando forzado aleatorio \mathbf{f} con helicidad controlable explicado en la sección 3.2.1. Para el caso de un flujo isótropo helicoidal, se tienen las simulaciones F_h , mientras que los flujos rotantes helicoidales están representados por las simulaciones helicoidales G_h e I_h . En estos casos, cada letra también representa un grupo de simulaciones con casos

en los que el perfil inicial del escalar depende de x (F_{hx} , G_{hx} e I_{hx}) o simulaciones cuyo perfil inicial depende de z (F_{hz} , G_{hz} e I_{hz}). Los parámetros de los grupos de simulaciones helicoidales también se encuentran enumerados en la Tabla 5.1.

Por último, para medir el efecto del número de Schmidt en la difusividad efectiva, todas las simulaciones en cada grupo (con subíndice x o z) se repitieron usando diferentes valores de κ . En la práctica, se realizaron simulaciones aumentando la difusividad molecular desde $\kappa = \nu$ (todas las simulaciones descritas anteriormente) hasta $\kappa = 32\nu$ (aumentando $1/S_c$ en factores de 2 para cada simulación). También se llevaron a cabo simulaciones con $\kappa = \nu/2$. Esto resulta en 12 simulaciones más en cada grupo, con $S_c = 2$ hasta $S_c = 1/32$. Para diferenciar las simulaciones en cada conjunto, se añade un subíndice extra que corresponde al valor de $1/S_c$ después del subíndice x ó z . La lista resultante de todas las simulaciones en el conjunto A se muestran en la Tabla 5.2, donde se indica el valor de ν , κ y los correspondientes números de Pe y S_c . Las simulaciones en los otros conjuntos están etiquetadas siguiendo las mismas reglas (salvo para las simulaciones helicoidales, en donde no se varió el número de Schmidt), y tienen los mismos parámetros que los que se muestran en la Tabla 5.2. Como un ejemplo, las simulaciones A_{x4} y C_{x4} tienen los mismos valores de ν , κ , Pe y $S_c = 1/4$, con un perfil inicial Gaussiano en x para el escalar pasivo. Las dos simulaciones sólo difieren en el número de Rossby.

Dado que para cada conjunto de valores de Ro se consideraron siete números de Schmidt diferentes, y puesto que para cada uno de estos conjuntos de parámetros se realizaron dos simulaciones (una para el perfil inicial del escalar pasivo en la dirección x , y otra para el perfil en la dirección z), el número total de simulaciones numéricas analizadas a continuación es de 62 para el caso no helicoidal. Si a estas simulaciones se suman las simulaciones con helicidad, el total de simulaciones analizadas para calcular los coeficientes de transporte es de 68.

5.3.2 Cálculo de los coeficientes de difusión turbulenta

Para caracterizar la difusión turbulenta del escalar pasivo consideraremos perfiles promediados sobre las dos direcciones perpendiculares a la de la dependencia inicial del perfil Gaussiano. En particular, consideraremos la concentración media espacial del escalar pasivo $\bar{\theta}$ y el flujo espacial $\overline{\theta u_i}$, donde $i = 1$ ó 3 según la coordenada de la dependencia del perfil Gaussiano inicial, y donde los promedios se realizan en las dos coordenadas cartesianas restantes. Debe notarse que el flujo espacial $\overline{\theta u_i}$ representa la cantidad de escalar pasivo transportada en la dirección i por unidad de tiempo por las fluctuaciones del campo de velocidad turbulento. Puesto que no hay flujo medio en las simulaciones (el forzado utilizado es el mismo forzado aleatorio delta-correlacionado en el tiempo usado en las simulaciones del capítulo previo), u_i es la velocidad fluctuante. De esta manera, el coeficiente efectivo de difusión turbulenta dependiente del espacio y del tiempo es [173]

$$\mathcal{D}_i(x_i, t) = \frac{\overline{\theta u_i}}{\partial_{x_i} \bar{\theta}}. \quad (5.11)$$

Este coeficiente corresponde a la cantidad de escalar pasivo transportado por la velocidad fluctuante, por unidad de variación de $\bar{\theta}$ con respecto a x_i . Como ya mencionó, $i = 1$ corresponde a la difusión horizontal, mientras que $i = 3$ se refiere a la difusión vertical.

En la naturaleza, la turbulencia a menudo es el resultado de una inestabilidad en un flujo a escalas grandes (por ejemplo, la convección en las estrellas, en el núcleo terrestre y en la atmósfera, o la circulación general en las escalas más grandes en la atmósfera y los océanos). El forzado aleatorio descrito anteriormente está destinado a imitar el comportamiento de la turbulencia rotante en escalas más pequeñas que las escalas del flujo medio. En un flujo medio con estas características la ecuación (5.11) sigue siendo válida, pero la velocidad fluctuante \mathbf{u}' debe definirse a partir la velocidad total \mathbf{u} después de restar el flujo medio

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \langle \mathbf{u} \rangle, \quad (5.12)$$

donde el flujo medio \mathbf{u} se puede definir, por ejemplo, a partir de un promedio temporal, de tal modo que el valor medio de la velocidad fluctuante \mathbf{u}' sea cero.

De la ecuación (5.11) podemos definir los coeficientes de difusión promedio de la siguiente manera: Primero se calcula el valor medio sobre las coordenadas x_i , para obtener un coeficiente de difusión turbulenta dependiente del tiempo,

$$\mathcal{D}_i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{D}_i(x_i, t) dx_i. \quad (5.13)$$

Luego, se puede hacer un promedio temporal para obtener la difusión turbulenta media

$$\mathcal{D}_i = \frac{1}{T} \int_{t_0}^T \mathcal{D}_i(t) dt, \quad (5.14)$$

Aquí, t_0 y T son tiempos característicos del flujo. En la práctica, en nuestras simulaciones los coeficientes de difusión turbulenta $\mathcal{D}_i(x_i, t)$ primero crecen en el tiempo (ya que el perfil inicial Gaussiano es mezclado por la turbulencia) hasta llegar a un máximo, para luego disminuir hasta que el escalar se diluye por completo (lo cual toma alrededor de tres τ_{NL} para todos los conjuntos de simulaciones). Esta evolución es similar a la observada en la disipación de energía en turbulencia en decaimiento libre, que alcanza un máximo y luego disminuye. Siguiendo la práctica habitual en el estudio de los flujos en decaimiento libre, en las simulaciones t_0 se elige como el tiempo de saturación en el crecimiento de $\mathcal{D}_i(t)$, y $T \approx 1$ proporcional al tiempo τ_{NL} .

5.3.3 Efectos de la rotación

Difusión horizontal

En ausencia de rotación (simulaciones en el conjunto A y F), se espera que los coeficientes de difusión sean isotrópos (es decir, que los coeficientes en la dirección horizontal y vertical sean los mismos dentro de las barras de error). La Figura 5.3 muestra el perfil medio horizontal del escalar pasivo $\bar{\theta}(x, t)$, el flujo medio horizontal $\overline{\theta u_x}(x, t)$, y el coeficiente $\mathcal{D}_x(x, t)$ para cuatro tiempos diferentes de la simulación

A_{x1} . A medida que evoluciona el tiempo, el perfil medio $\bar{\theta}(x, t)$ se aplana y se ensancha. El flujo es antisimétrico, y es positivo para $x > \pi$ y negativo para $x < \pi$. Esto era de esperarse debido a que inicialmente ($t = 0$) hay un exceso de concentración de θ en $x = \pi$, que posteriormente es transportando hacia $x = 0$ y hacia $x = 2\pi$ por el flujo turbulento. La difusión horizontal aumenta hasta alcanzar su valor de saturación para $t_0 \approx 1,5$ y después de este tiempo fluctúa alrededor de un valor medio. Las grandes fluctuaciones de $\mathcal{D}_x(x, t)$ cerca del centro de la caja se deben al hecho de que, por definición, el coeficiente de difusión turbulenta diverge en ese punto.

La figura 5.4 muestra el perfil medio horizontal del escalar pasivo $\bar{\theta}(x, t)$, el flujo medio horizontal $\overline{\theta u_x}(x, t)$, y la difusión turbulenta puntual $\mathcal{D}_x(x, t)$ para cinco tiempos diferentes de la simulación F_{x1} (no helicoidal, sin rotación y forzada en $k_F = 2$). Observamos características similares a las de la simulación A_{x1} , el perfil Gaussiano se ensancha y se achata a medida que avanza el tiempo, aunque aparecen colas no Gaussianas de mayor amplitud y para tiempos mas cortos y el flujo del escalar también es antisimétrico con respecto del centro del dominio ($x = \pi$).

La concentración media del escalar pasivo, el flujo vertical y el coeficiente de difusión vertical también se calcularon para la simulaciones A_{z1} y F_{z1} (también con $R_o = \infty$, pero con un perfil inicial Gaussiano con dependencia en z). Como se esperaba, se obtuvieron los mismos resultados que los observados para las simulaciones A_{x1} y F_{z1} respectivamente.

La figura 5.5 muestra la concentración media horizontal $\bar{\theta}(x, t)$, el flujo medio horizontal $\overline{\theta u_x}(x, t)$, y el coeficiente horizontal $\mathcal{D}_x(x, t)$ para diferentes tiempos en la simulación C_{x1} ($R_o = 0.02$). En este caso, la difusión crece más rápido que en el caso no rotante, pero luego satura en un valor más bajo. También debe notarse que el perfil medio y el flujo medio se vuelven asimétricos con respecto al centro de la caja ($x = \pi$): hay un exceso de $\overline{\theta(x, t)}$ para $x < \pi$, y el flujo espacial (en valor absoluto) es mayor para $x < \pi$ que para $x > \pi$. Esta asimetría está asociada con la fuerza de

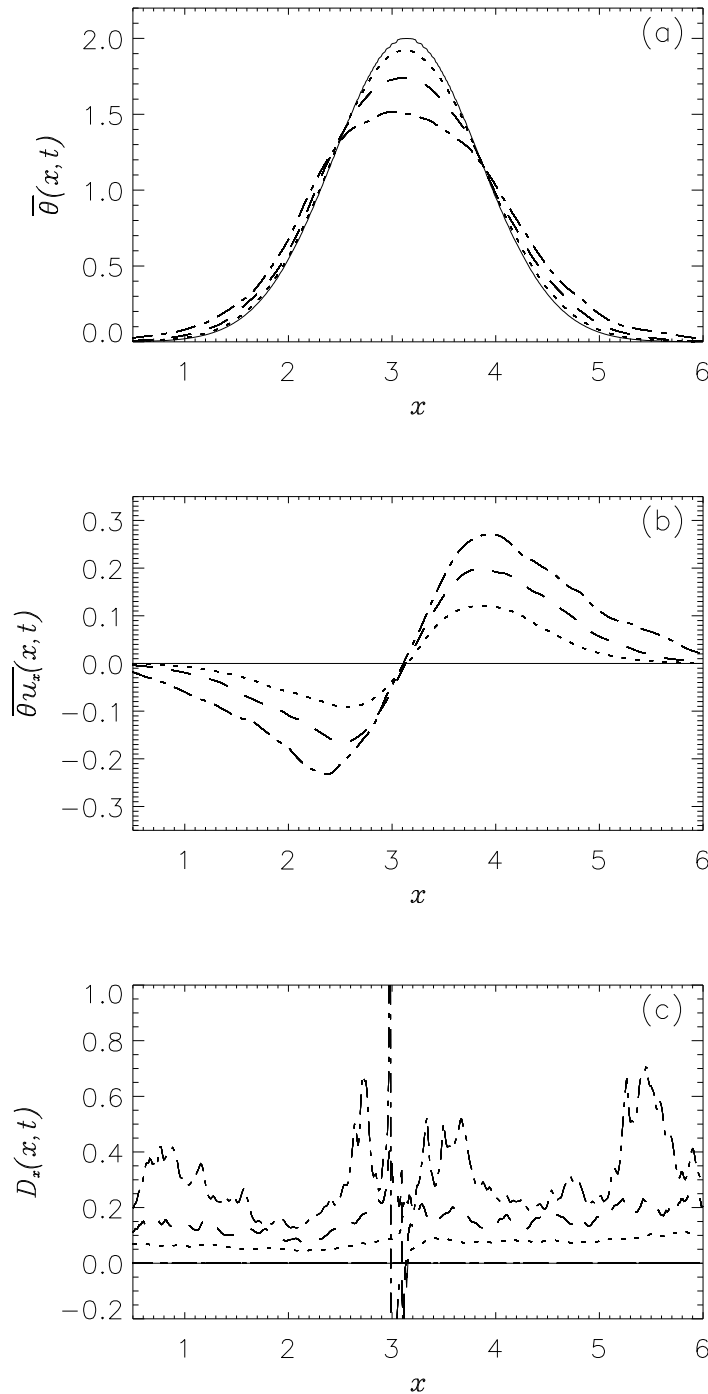


Figura 5.3: (a) Concentración horizontal promedio $\bar{\theta}$ en función de x en la simulación A_{x1} , para los tiempos $t = 0, 0.5, 1$ y 1.5 , indicados por las líneas llenas, punteadas, de trazos, y de trazos y puntos respectivamente. (b) Flujo medio horizontal en función de x para los mismos tiempos. (c) Coeficiente horizontal $D_x(x, t)$ en función de x para los mismos tiempos.

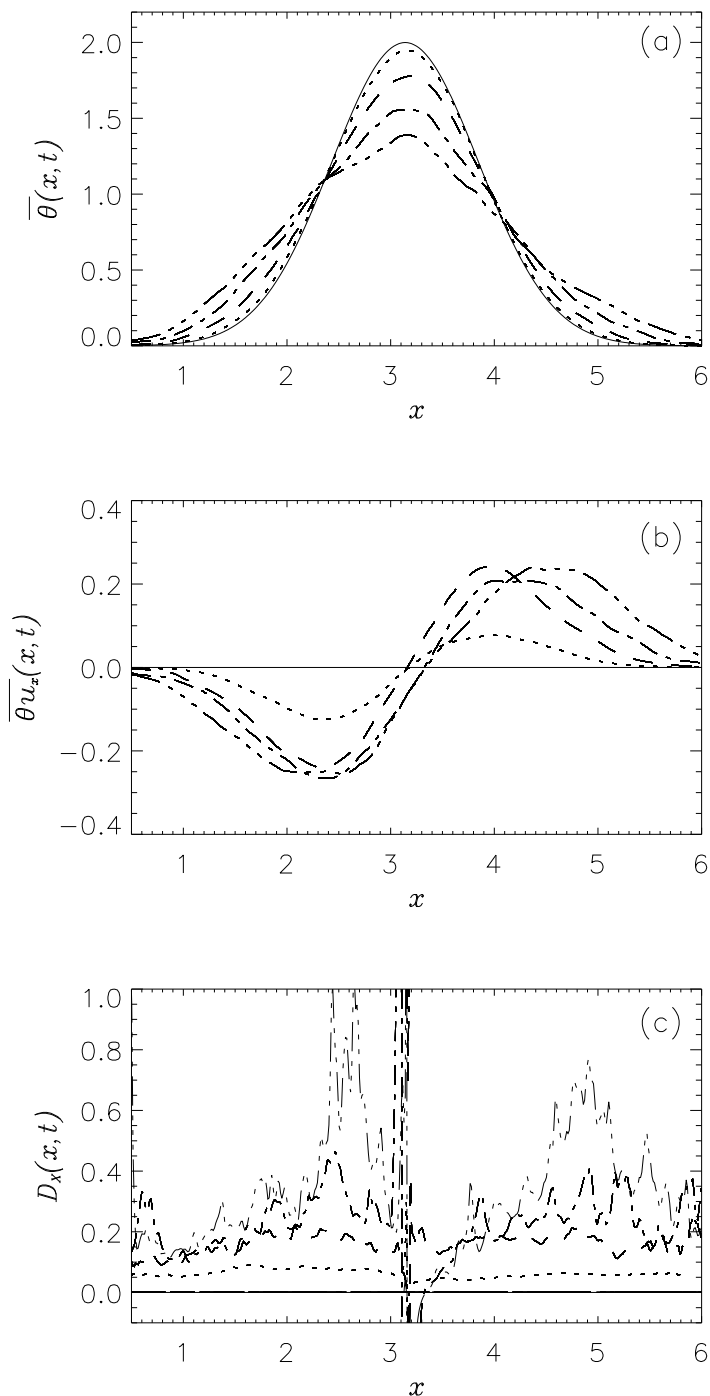


Figura 5.4: (a) Concentración horizontal promedio $\bar{\theta}$ en función de x en la simulación F_{x1} , para los tiempos $t = 0, 0.25, 0.5, 0.75$, y 1 . indicadas por las líneas llenas, punteadas, de trazos, de trazos y puntos, y de trazos y triple punto respectivamente. (b) Flujo medio horizontal en función de x para los mismos tiempos. (c) Coeficiente horizontal $D_x(x, t)$ en función de x para los mismos tiempos.

Coriolis, como ya fue observado en [23]. Como se verá más adelante, esta asimetría resulta de una rotación del perfil inicial del escalar pasivo.

De los coeficientes $\mathcal{D}_x(x, t)$ calculados para cada tiempo, se obtiene el coeficiente de difusión turbulenta efectiva $\mathcal{D}_x(t)$ promediando sobre todos los valores de x . La figura 5.6(a) muestra la difusión turbulenta horizontal en función del tiempo para las simulaciones A_{x1} y C_{x1} . En ambos casos $\mathcal{D}_x(t)$ crece a partir de un valor inicial pequeño hasta un valor de saturación en $t_0 \approx 1,5$ para A_{x1} , y $t_0 \approx 1,2$ para C_{x1} . Estos dos valores son típicos en todas las simulaciones sin y con rotación, respectivamente, y se utilizaron para calcular el promedio temporal de $\mathcal{D}_x(t)$ usando la ecuación (5.14). Cabe notar que t_0 es menor para C_{x1} dado que las simulaciones con rotación exhiben un crecimiento más rápido de $\mathcal{D}_x(t)$, aunque saturan a un valor más pequeño. Para tiempos posteriores a t_0 , $\mathcal{D}_x(t)$ fluctúa y luego disminuye a medida que el escalar pasivo se difunde y finalmente se mezcla hasta alcanzar la homogeneidad. Como puede verse en la figura 5.6(a), esta disminución es más evidente en la simulación C_{x1} .

Resulta interesante ver que, para tiempos $t < t_0$, el crecimiento de $\mathcal{D}_x(t)$ puede ser explicado por un modelo fenomenológico simple. Si pensamos que los remolinos turbulentos dominan el transporte por sobre la difusión molecular, y que el flujo turbulento es una superposición de éstos remolinos en diferentes escalas l , entonces podemos imaginar que los remolinos más pequeños (mucho menores que los remolinos en la escala integral), y con tiempos de giro más rápido τ_l , son los primeros en empezar a mezclar al escalar pasivo. A medida que el tiempo avanza, remolinos más grandes entran en juego, mezclando más y más al escalar, hasta completar el proceso de mezclado. Para remolinos en el rango inercial, el tiempo de rotación del remolino se puede estimar como

$$\tau_l \sim l/u_l. \quad (5.15)$$

En turbulencia isótropa y homogénea la ley de escalas de la velocidad en el rango inercial es $u_l \sim l^{1/3}$ (sin correcciones por intermitencia), por lo cual el tiempo de giro

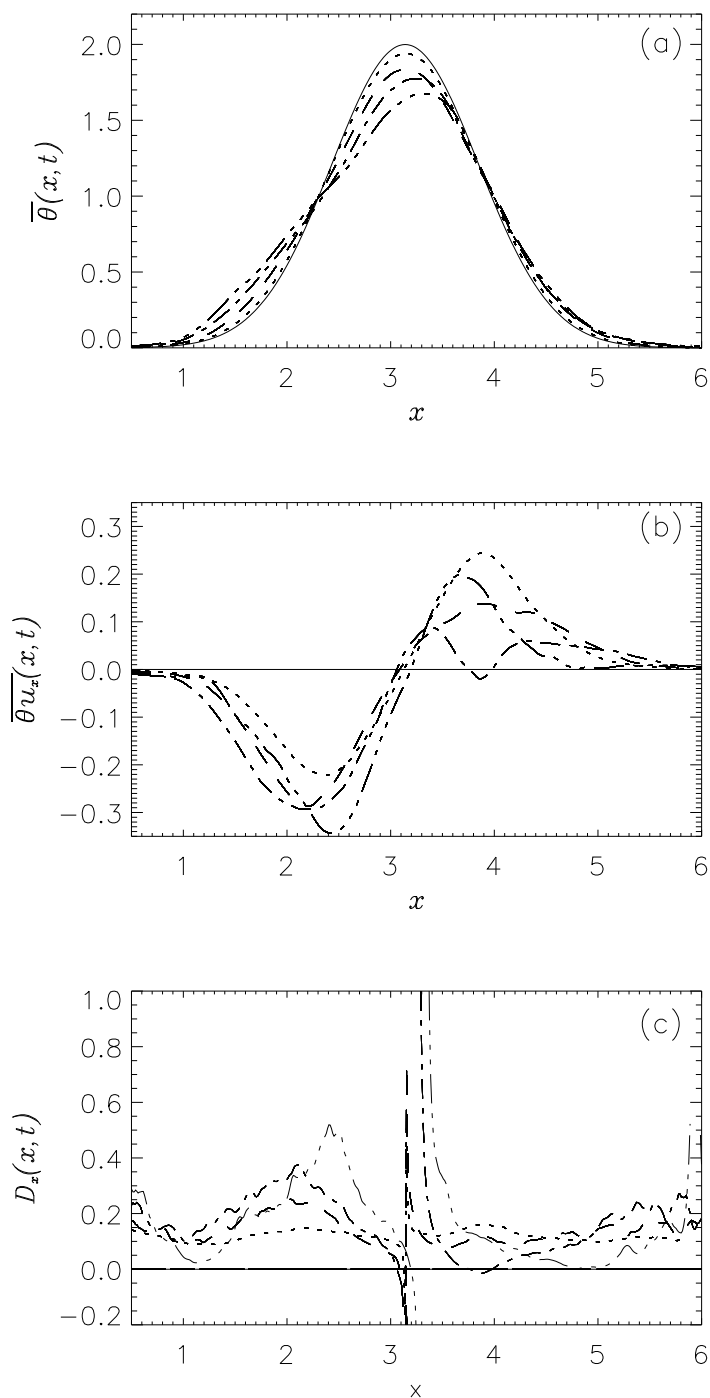


Figura 5.5: (a) Concentración horizontal promedio $\bar{\theta}$ en función de x en la simulación C_{x1} , para los tiempos $t = 0, 0.25, 0.5, 0.75$, y 1 . indicadas con líneas; llenas, punteadas, de trazos, de trazos y puntos, respectivamente. (b) Flujo medio horizontal en función de x para los mismos tiempos. (c) Coeficiente horizontal $D_x(x, t)$ en función de x para los mismos tiempos.

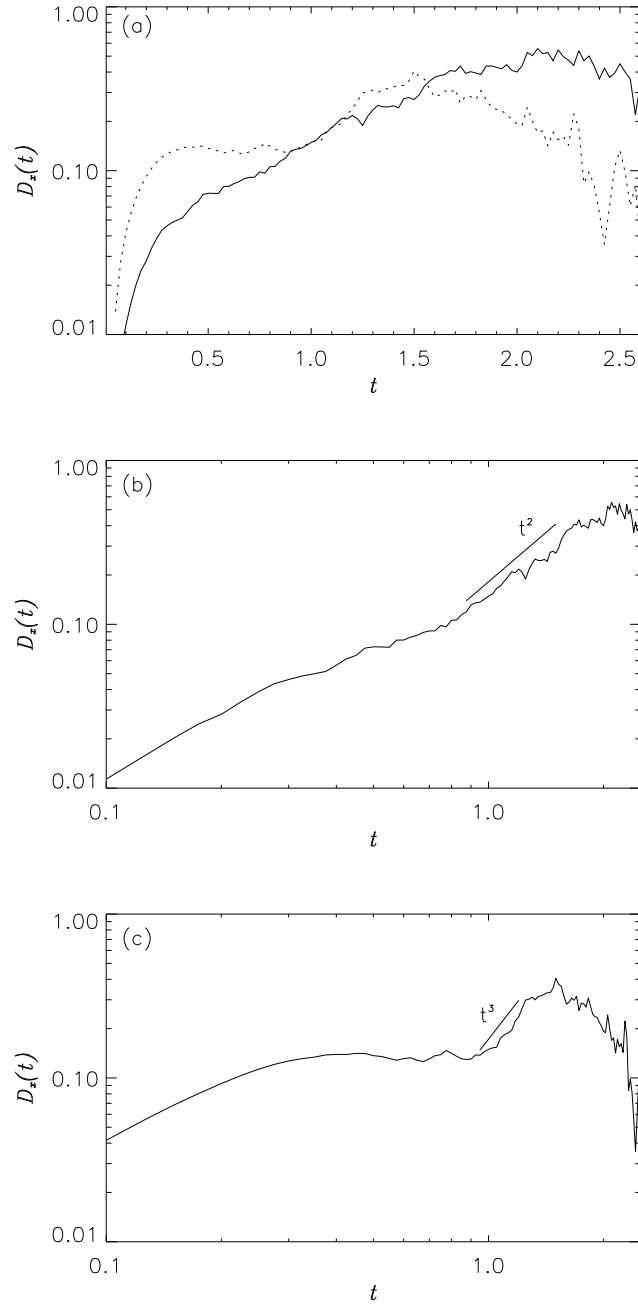


Figura 5.6: (a) Difusión turbulenta horizontal en función del tiempo para las simulaciones A_{x1} (línea llena) y C_{x1} (línea de puntos). (b) Detalle en escala log-log de la difusión turbulenta horizontal en la simulación A_{x1} . (c) Lo mismo para C_{x1} .

de un remolino es

$$\tau_l \sim l^{2/3}. \quad (5.16)$$

Para tiempos largos, podemos usar argumentos de longitud de mezclado para el coeficiente de difusión, por lo cual $\mathcal{D}_x \sim LU$, como vimos en la sección 5.2.2. Para tiempos cortos, si sólo contribuyen al mezclado los remolinos con tiempo de giro menor o igual que el tiempo que transcurrió desde que se inyectó el escalar, de las ecuaciones (5.15) y (5.16) se obtiene

$$\mathcal{D}_x \sim \tau_l^2. \quad (5.17)$$

En el caso rotante, la ley de escalas de la velocidad en el rango inercial se modifica. Ya sabemos que uno de los efectos de la rotación es la transferencia preferencial de energía hacia modos con $k_{\parallel} = 0$, resultando en una bidimensionalización del flujo. Si asumimos que $E(k_{\perp}) \sim k_{\perp}^{-2}$ en el rango inercial, se sigue que $u_{\perp} \sim l_{\perp}^{1/2}$. Si pensamos nuevamente que la difusión a tiempos largos es $\mathcal{D}_x \sim L_{\perp}U_{\perp}$ (con L_{\perp} y U_{\perp} una longitud y una velocidad características en la dirección perpendicular), y seguimos los mismos argumentos que para el caso isótropo, entonces

$$\mathcal{D}_x \sim \tau_l^3. \quad (5.18)$$

Asumiendo que $t \sim \tau_l$ (es decir, que para un dado tiempo dominan en el mezclado los remolinos más energéticos que lograron completar un giro), uno podría esperar observar el crecimiento dado por las ecuaciones (5.17) y (5.18) antes de la saturación en $\mathcal{D}_x(t)$. Estas leyes se indican como referencia en las figuras 5.6(b) y 5.6(c). Aunque hay cierto acuerdo con la predicción, los intervalos son más cortos que una década en t , por lo cual no podemos concluir en forma definitiva la validez de (5.17) y (5.18).

Para $t > t_0$ y en la simulación con rotación C_{x1} , $\mathcal{D}_x(t)$ satura en un valor menor que el observado para la simulación A_{x1} . Esto indica que la difusión horizontal disminuye en presencia de rotación, en comparación con el caso isótropo y homogéneo. Este resultado es consistente con las predicciones en [130, 26] acerca de la reducción para el transporte horizontal de escalares pasivos en presencia de

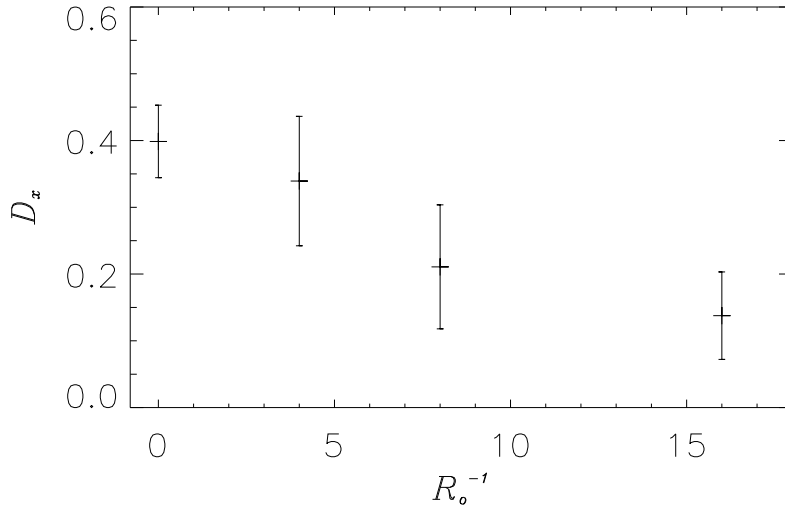


Figura 5.7: Difusión turbulenta horizontal en función de la inversa del número de Rossby, obtenida de las simulaciones A_{x1} , B_{x1} , C_{x1} , y E_{x1} (todas con $S_c = 1$). Las barras de error corresponden a la desviación estándar media.

rotación, y también con mediciones de coeficientes de transporte turbulento en las simulaciones numéricas utilizando un método de campo medio en [23].

La reducción en el valor de saturación de la difusión turbulenta horizontal que se observa en las figuras 5.3, 5.5, y 5.6 puede ser confirmada mediante el estudio del valor medio temporal de $\mathcal{D}_x(t)$ (es decir, D_x) para todas las simulaciones con $S_c = 1$. La figura 5.7 muestra el valor medio temporal de la difusión horizontal, en función de la inversa del número de Rossby (R_o^{-1}) para las simulaciones A_{x1} , B_{x1} , C_{x1} , y E_{x1} (es decir, simulaciones con $\Omega = 0, 2, 4$ y 8 , y con perfil inicial Gaussiano en x para el escalar pasivo). Las barras de error corresponden a la desviación estándar media. Se desprende de los datos que D_x disminuye monótonamente a medida que aumenta $1/R_o$.

Difusión vertical

La figura 5.8 muestra la concentración vertical media del escalar pasivo $\bar{\theta}(z, t)$, el flujo vertical medio $\overline{\theta u_z}(z, t)$, y el coeficiente $\mathcal{D}_z(z, t)$ para distintos tiempos en la simulación C_{z1} . Los perfiles en este caso son similares a los obtenidos en el caso isotrópico y homogéneo: $\bar{\theta}(z)$ y $\overline{\theta u_z}(z)$ son respectivamente simétricos y antisimétricos con respecto a $z = \pi$.

Como en el caso de la difusión horizontal, podemos calcular el coeficiente de difusión vertical en el estado estacionario de las simulaciones A_{z1} , B_{z1} , C_{z1} y E_{z1} promediando primero en todos los valores de z y luego en el tiempo. Esto nos da como resultado la dependencia de \mathcal{D}_z con el número de Rossby que se muestra en la figura 5.9. Mientras que la difusión horizontal es fuertemente dependiente del número de Rossby, la difusión vertical parece ser (dentro de las barras de error) independiente de su valor.

5.3.4 Efectos de la helicidad

Difusión horizontal

Para estudiar los efectos de la helicidad en los flujos con y sin rotación en esta parte de la tesis se presenta el análisis de todas las simulaciones con $k_F = 2$ listadas en la Tabla 5.1. En otras palabras, para comparar entre flujos sin y con helicidad, se analizan y comparan las simulaciones no helicoidales F , G , e I con las simulaciones helicoidales F_h , G_h , e I_h .

La figura 5.10 muestra el promedio horizontal del perfil del escalar pasivo $\bar{\theta}(x, t)$, el flujo horizontal $\overline{\theta u_x}(x, t)$, y el coeficiente $\mathcal{D}_x(x, t)$ para cinco tiempos diferentes en la simulación F_{hx} (sin rotación, con helicidad media positiva, y con perfil inicial Gaussiano dependiente de x). El comportamiento de la concentración media del escalar pasivo, el flujo horizontal y la difusión horizontal es similar a observada para el caso no helicoidal A_{x1} (ver, por ejemplo, la figura 5.3). Sin embargo,

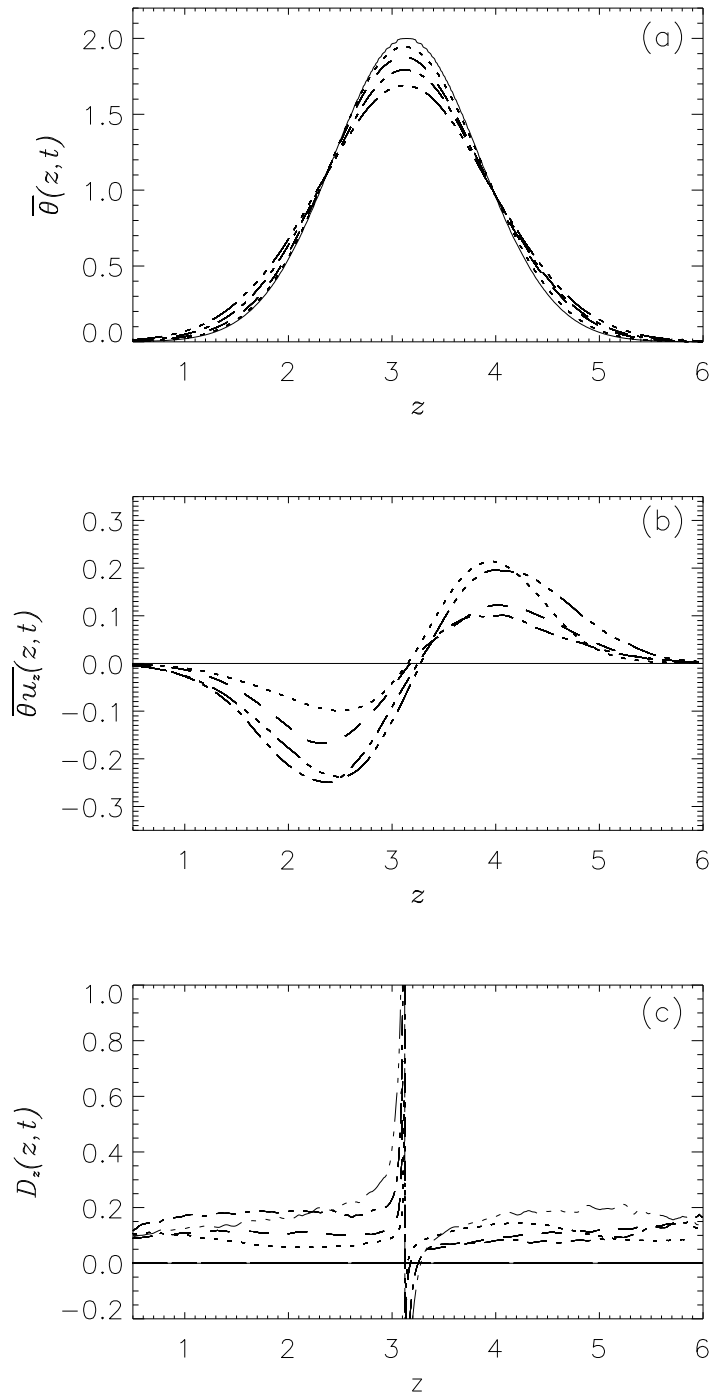


Figura 5.8: (a) Perfil promedio para el escalar pasivo $\bar{\theta}(z, t)$ en función de z en la simulación C_{z1} , para los tiempos $t = 0, 0.25, 0.5, 0.75$, y 1 , indicados por las líneas llenas, de puntos, de trazos, de puntos, de trazos y puntos, y de trazos y triple punto respectivamente. (b) Flujo medio vertical en función de z para los mismos tiempos en la misma simulación. (c) Lo mismo para el coeficiente vertical D_z .

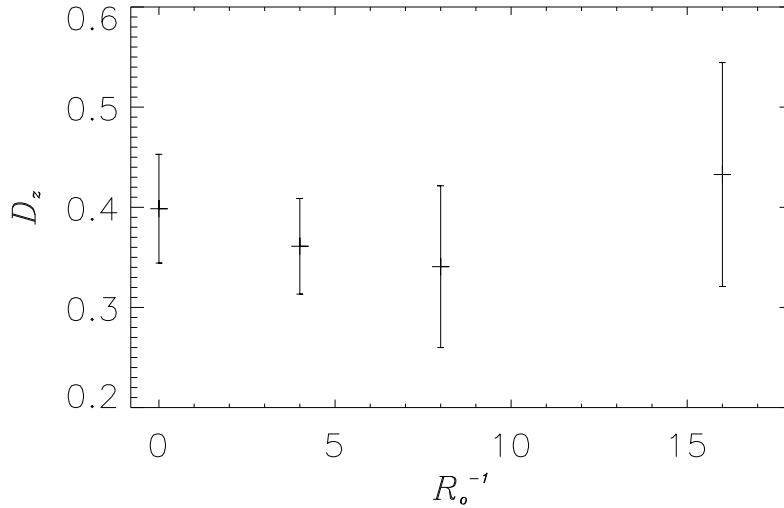


Figura 5.9: Difusión turbulenta vertical en función de la inversa del número de Rossby, obtenida para las simulaciones A_{z1} , B_{z1} , C_{z1} , y E_{z1} (todas con $S_c = 1$). Las barras de error corresponden a la desviación estándar media.

se observa cierto exceso en las colas del perfil de la concentración media. Además, el flujo espacial del escalar alcanza un valor máximo mayor que el observado para la simulación F_{x1} , en el tiempo $t_0 \approx 1$. Este aumento en el flujo resulta en una difusión horizontal más grande, como se puede observar en la figura 5.10(c). La concentración del escalar pasivo, el flujo vertical y la difusión turbulenta vertical también se calcularon para la simulación F_{hz} (es decir, la simulación con iguales parámetros pero con perfil inicial Gaussiano en z). Como era de esperarse para el caso isótropo, se observan los mismos resultados que para la simulación F_{hx} .

La figura 5.11 muestra la difusión turbulenta horizontal (promediada en x) en función del tiempo para las simulaciones F_{x1} y F_{hx} . Para ambas simulaciones $\mathcal{D}_x(t)$ crece a partir de un valor inicial pequeño a un valor de saturación alrededor de $t_0 \approx 1,5$ para F_{x1} y $t_0 \approx 1$ para F_{hx} . Como se observó anteriormente, la difusión turbulenta satura en un valor mayor en la presencia de helicidad. Los valores medios de la difusión turbulenta son $\mathcal{D} \approx 0.2$ para la simulación F_{x1} y $\mathcal{D} \approx 0.3$ para F_{hx} .

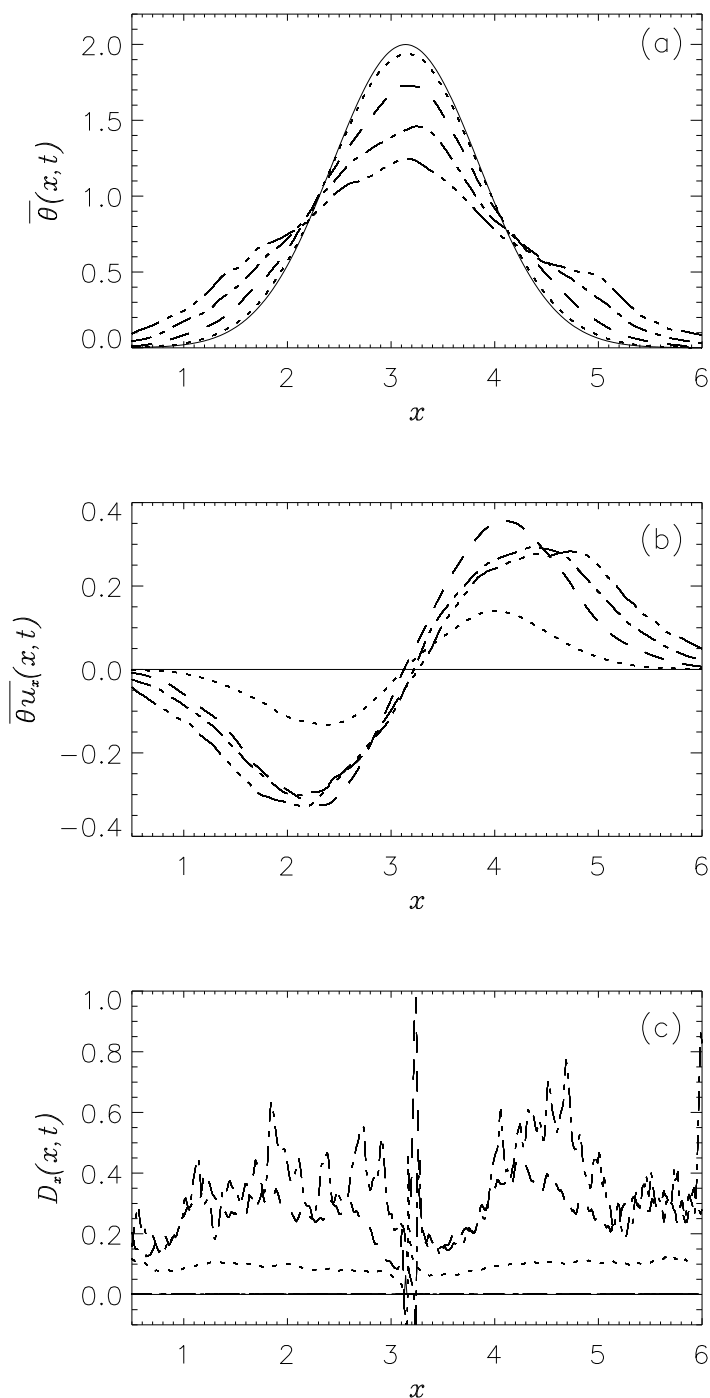


Figura 5.10: (a) Concentración horizontal promedio $\bar{\theta}$ en función de x en la simulación F_{hx} , para los tiempos $t = 0, 0.5, 1, 1.25$, y 1.5 , indicadas por las líneas llenas, punteadas, de trazos, de trazos y puntos, y de trazos y triple punto respectivamente. (b) Flujo medio horizontal en función de x para los mismos tiempos. (c) Coeficiente horizontal $\mathcal{D}_x(x,t)$ en función de x para los mismos tiempos.

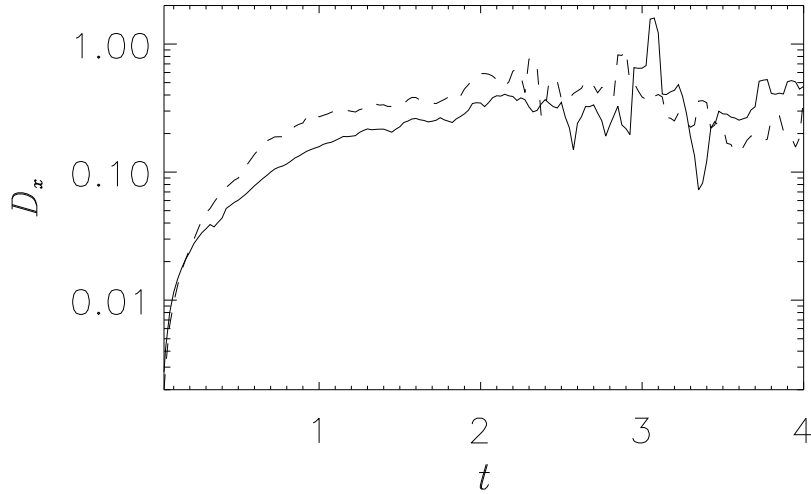


Figura 5.11: Difusión turbulenta horizontal en función del tiempo para la simulación F_{x1} (línea llena) y F_{hx} (línea de trazos) (sin rotación, sin y con helicidad respectivamente).

Este resultado es compatible con el aumento predicho en [47], que establece que la difusión turbulenta en flujos helicoidales isótropos se incrementa en un cincuenta por ciento con respecto del caso no helicoidal.

La figura 5.12 muestra el promedio horizontal del perfil del escalar pasivo $\bar{\theta}(x, t)$, el flujo horizontal $\overline{\theta u_x}(x, t)$, y el coeficiente horizontal $\mathcal{D}_x(x, t)$ para cinco tiempos diferentes en la simulación I_{hx} ($\Omega = 16$, $R_o = 0.01$). En este caso observamos que el perfil medio y el flujo se vuelven asimétricos, es decir, con un exceso de concentración de $\bar{\theta}(x, t)$ en $x < \pi$, y el valor absoluto del flujo es mayor en $x < \pi$ que en $x > \pi$. Esta asimetría es la misma que se observó para los flujos rotantes no helicoidales de la sección previa debida a la fuerza de Coriolis. Una vez más, podemos obtener el coeficiente de difusión turbulenta mediante el cálculo del valor medio de $\mathcal{D}_x(x, t)$ para todos los valores de x . A modo de comparación, las figuras 5.13(a) y 5.13(b) muestran la difusión turbulenta horizontal en función del tiempo para las simulaciones G_{x1} y G_{hx} (ambas con $R_o = 0.02$, sin y con helicidad respectivamente),

y para las simulaciones I_{x1} e I_{hx} (ambas con $R_o = 0.01$, sin y con helicidad respectivamente). Para ambas tasas de rotación se puede observar que la difusión horizontal disminuye en presencia de helicidad. Este resultado es el opuesto al observado para las simulaciones isótropas, en las cuales la helicidad aumenta el valor efectivo de los coeficientes de difusión.

En el capítulo 3, y de acuerdo con resultados previos en turbulencia isótropa y homogénea, observamos que en los flujos isótropos la presencia de helicidad no afecta las cascadas directas de la energía y de la varianza del escalar pasivo. Este no es el caso en turbulencia rotante, donde vimos que la presencia de helicidad resulta en espectros perpendiculares más empinados para la energía, en comparación con el caso rotante no helicoidal. De esta manera, se puede esperar que los coeficientes de difusión turbulenta sean más pequeños en presencia de helicidad, dada la disminución en las fluctuaciones del campo de velocidad que se da en este caso. Según el argumento en la sección 2.2.5, la difusión turbulenta puede expresarse como $\mathcal{D} \sim \tau \bar{u}^2$. La disminución en las fluctuaciones del campo de velocidad producida por la presencia de helicidad resulta entonces en una disminución de los coeficientes de difusión turbulenta.

Difusión vertical

La figura 5.14 muestra la concentración media vertical del escalar pasivo $\bar{\theta}(z, t)$, el flujo medio vertical $\overline{\theta u_z}(z, t)$, y el coeficiente $\mathcal{D}_z(z, t)$ para distintos tiempos en la simulación I_{hz} . Como en el caso rotante no helicoidal, los perfiles verticales son más similares a los obtenidos en el caso isótropo y homogéneo: $\bar{\theta}(z, t)$ y $\overline{\theta u_z}(z, t)$ son respectivamente simétricos y antisimétricos con respecto a $z = \pi$. En la figura 5.15 se muestra el promedio vertical de los coeficientes $\mathcal{D}_z(z, t)$ en función del tiempo para las simulaciones G_{z1} y G_{hz} (ambas con $R_o = 0.02$). De forma contraria al caso horizontal, puede verse que la difusión vertical se incrementa en presencia de helicidad.

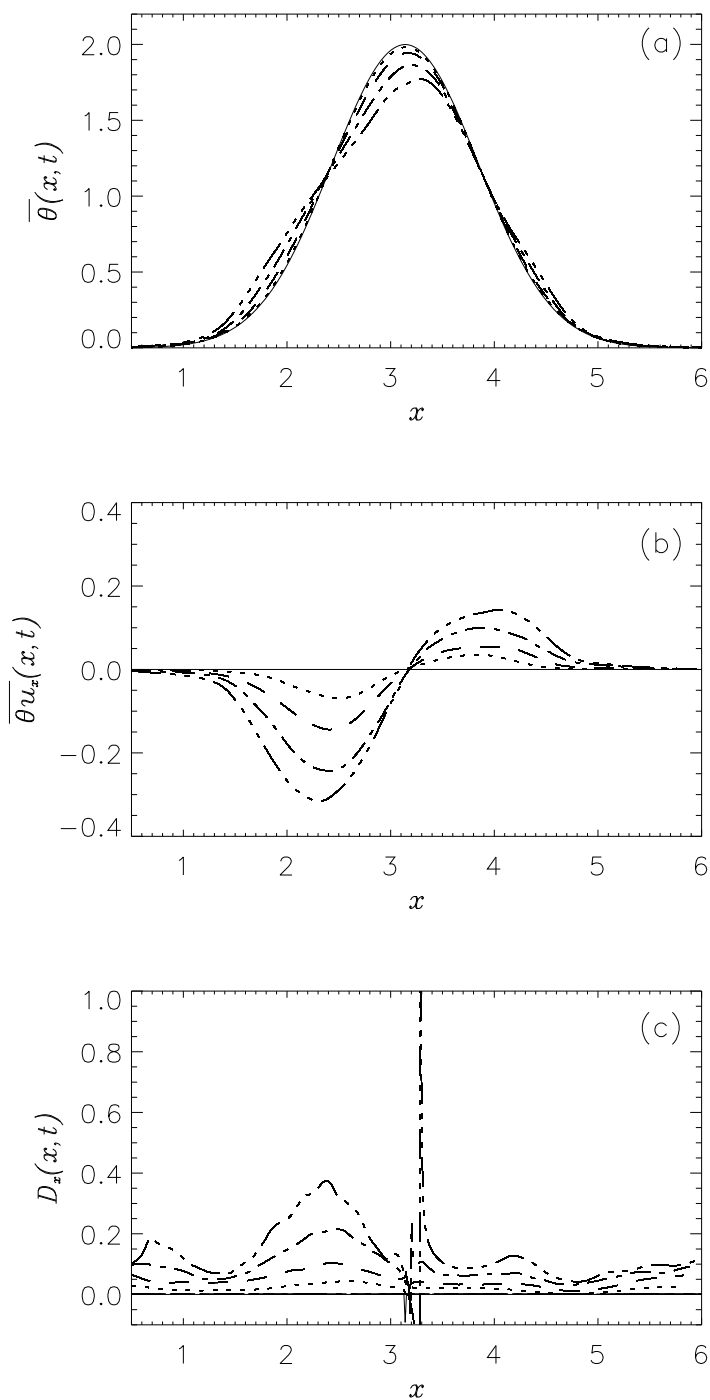


Figura 5.12: (a) Concentración horizontal promedio $\bar{\theta}$ en la simulación I_{hx} , para los tiempos $t = 0, 0.25, 0.5, 0.75$, y 1 , indicadas por líneas llenas, punteadas, de trazos, de trazos y puntos, y de trazos y triple punto respectivamente. (b) Flujo horizontal para los mismos tiempos. (c) Coeficiente horizontal $D_x(x, t)$ para los mismos tiempos.

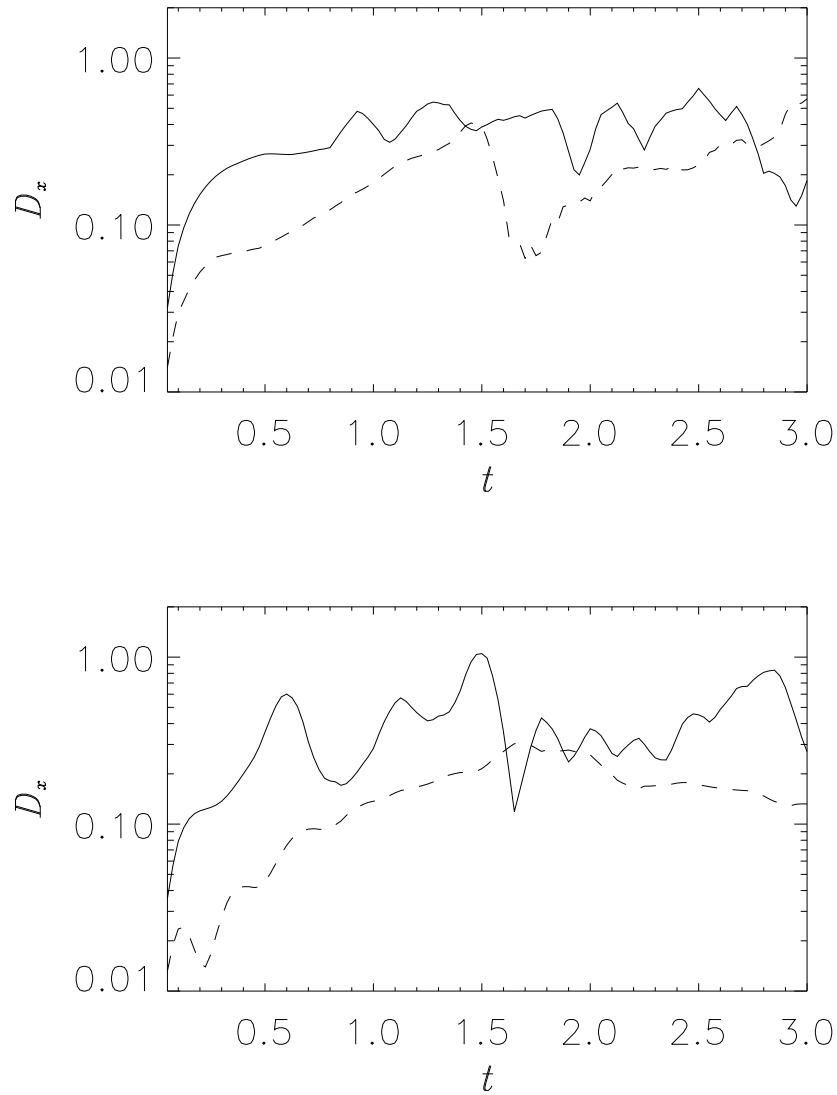


Figura 5.13: (a) Difusión turbulenta horizontal en función del tiempo para las simulaciones G_{x1} (línea llena) y G_{hx} (línea de trazos) ($R_o = 0.02$ sin y con helicidad, respectivamente). (b) Lo mismo para las simulaciones I_{x1} (línea llena) y I_{hx} (línea de trazos) ($R_o = 0.01$ sin y con helicidad, respectivamente).

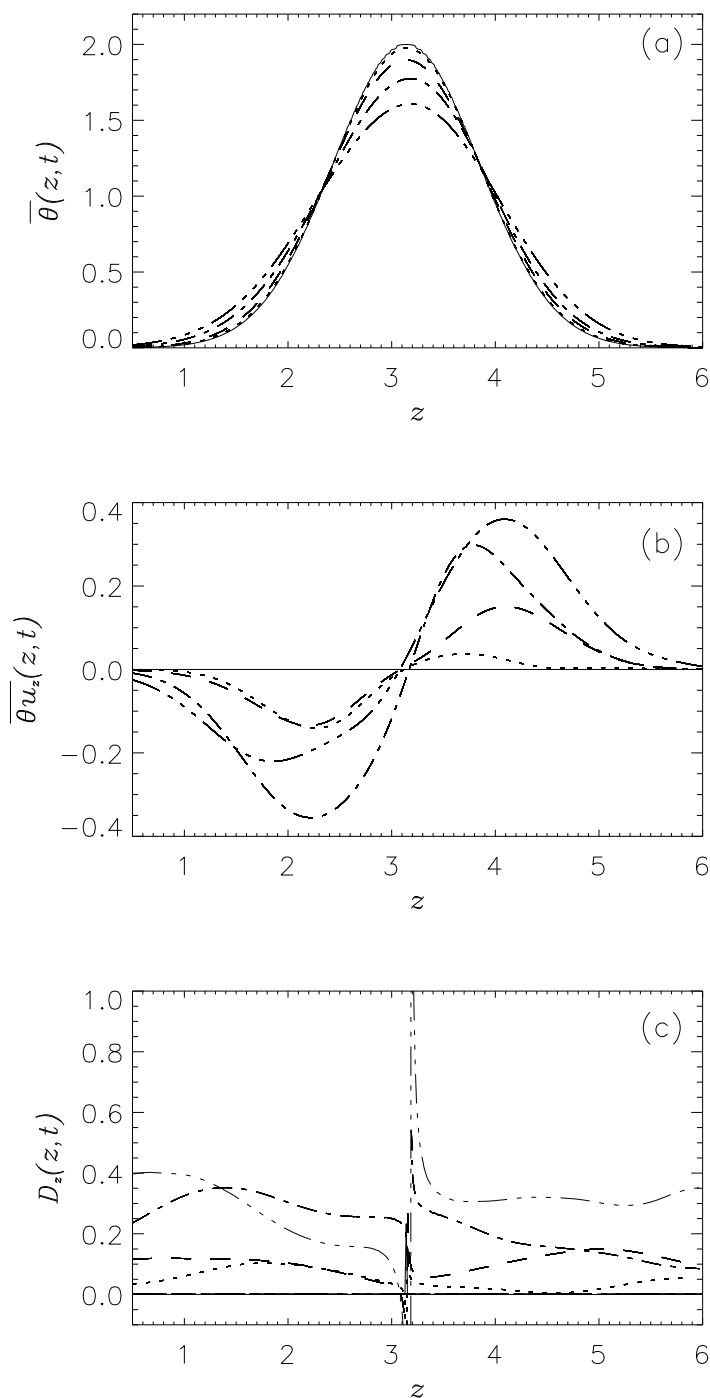


Figura 5.14: (a) Concentración vertical promedio $\bar{\theta}$ en la simulación I_{hz} en función de z , para los tiempos $t = 0, 0.25, 0.5, 0.75$, y 1 , indicadas por las líneas llenas, punteadas, de trazos, de trazos y puntos, y de trazos y triple punto respectivamente. (b) Flujo horizontal en función de z para los mismos tiempos. (c) Coeficiente vertical $D_z(z,t)$ en función de z para los mismos tiempos.

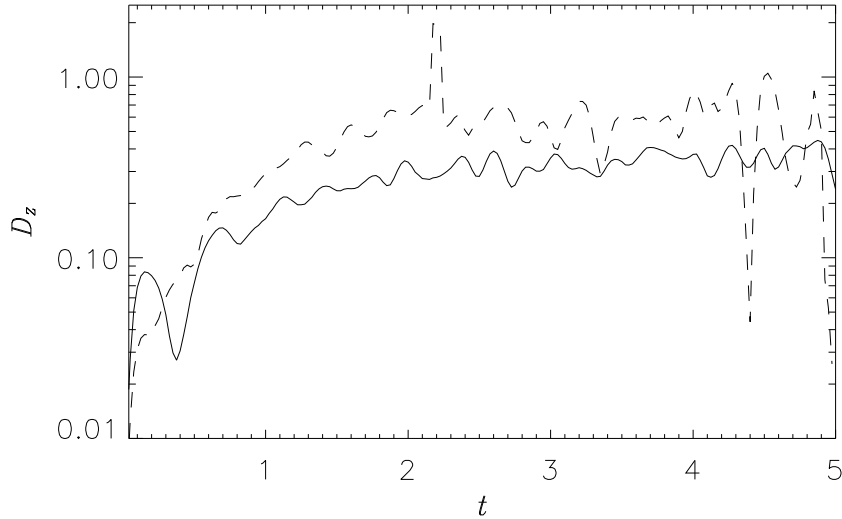


Figura 5.15: Difusión turbulenta vertical en función del tiempo para las simulaciones G_{z1} (línea llena) y G_{hz} (línea de trazos) ($R_o = 0.02$ sin y con helicidad respectivamente).

5.3.5 Efectos de P_e y S_c

Para estudiar el efecto de variar los números de Schmidt y de Peclèt en la difusión turbulenta, se realizaron un gran número de simulaciones. Al aumentar el valor de la difusividad molecular κ , se espera que el valor de la difusión turbulenta disminuya hasta que la difusión molecular sea dominante. La figura 5.16 muestra el valor medio temporal de la difusión turbulenta \mathcal{D}_x en función de P_e en las simulaciones con $\Omega = 0$ (es decir, la estimación de \mathcal{D}_x en todas las simulaciones dentro del conjunto A). Como el flujo es aproximadamente isótropo, $\mathcal{D}_x \approx \mathcal{D}_z$. Pueden observarse efectos asociados con los números de Peclèt y de Schmidt para valores pequeños de P_e , para los cuales \mathcal{D}_x comienza a disminuir a partir de $P_e \lesssim 100$. Sin embargo, para una amplia gama de valores del número de Peclèt, \mathcal{D}_x se mantiene aproximadamente constante. Esto concuerda con las expectativas teóricas que predicen que para valores suficientemente pequeños de ν y κ , el valor efectivo del número de Schmidt turbu-

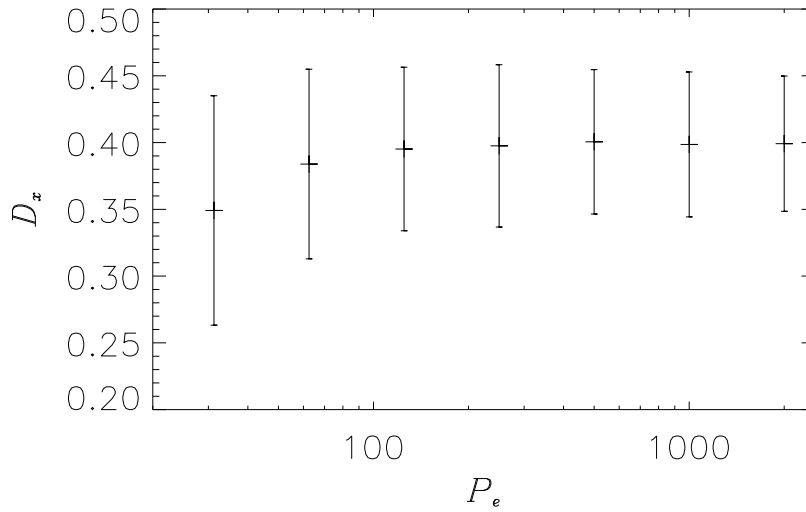


Figura 5.16: Difusión turbulenta en función del número de Peclèt para las simulaciones A_{x1} a A_{x32} ($\Omega = 0$).

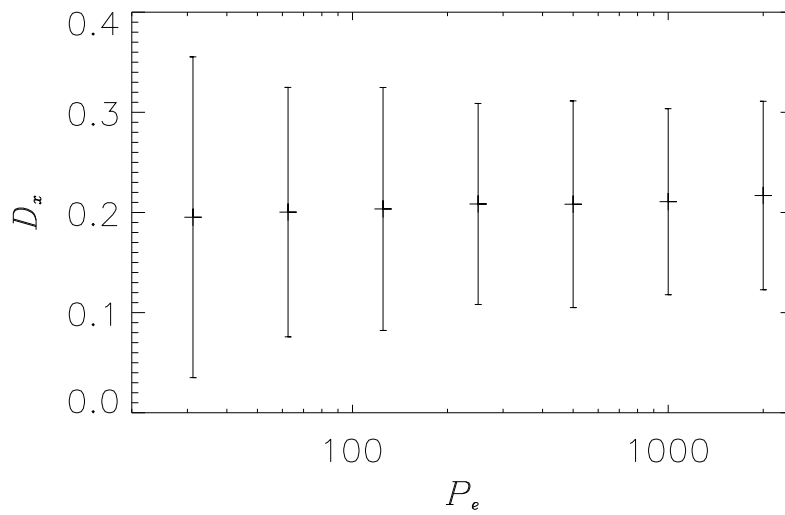


Figura 5.17: Difusión turbulenta horizontal en función del número de Peclèt para las simulaciones C_{x1} a C_{x32} ($\Omega = 4$, $R_o = 0.02$).

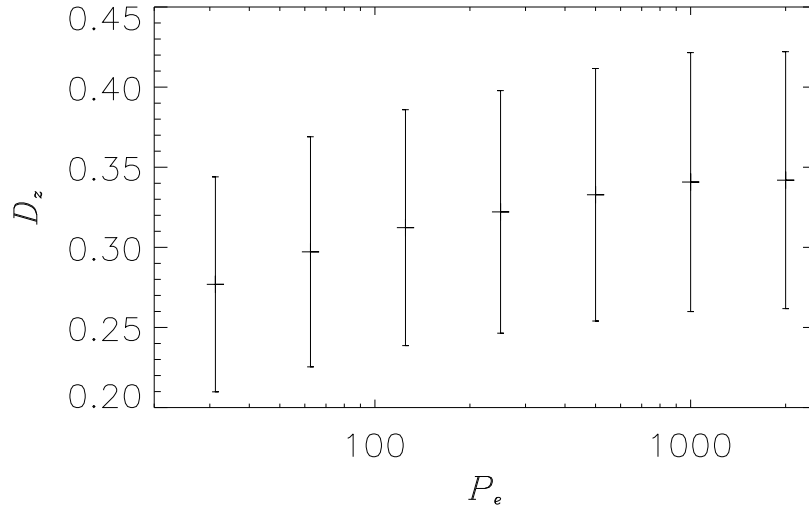


Figura 5.18: Difusión turbulenta vertical en función del número de Peclèt para las simulaciones C_{z1} a C_{z32} ($\Omega = 4$, $R_o = 0.02$).

lento debe ser de de orden uno (ver [136], para argumentos similares en el caso del número de Prandtl en turbulencia magnetohidrodinámica).

Un comportamiento similar se observó en el caso rotante, como puede verse en las figuras 5.17 y 5.18. En estas figuras, los coeficientes de transporte turbulento se calculan a partir de las simulaciones del conjunto C ($\Omega = 4$, $R_o = 0.02$). Como en el caso isótropo, para valores de P_e lo suficientemente grandes la difusión turbulenta permanece aproximadamente constante y el número de Schmidt efectivo es de orden uno. Efectos asociados con el número de P_e se observan en la difusión vertical para valores pequeños de P_e (de hecho, para $P_e \leq 500$ ya puede verse un cambio en el comportamiento de \mathcal{D}_z), aunque es evidente que se requieren valores de P_e muchos menores para ver una disminución significativa en la difusión horizontal \mathcal{D}_x . Esto podría estar asociado con el hecho de que, en presencia de rotación, la difusividad turbulenta ya está reducida, y por ende se necesitan difusividades moleculares mucho mayores para disminuirla aún mas. Por otro lado, debe notarse que en las simulaciones con números de P_e lo suficientemente grandes y números de R_o

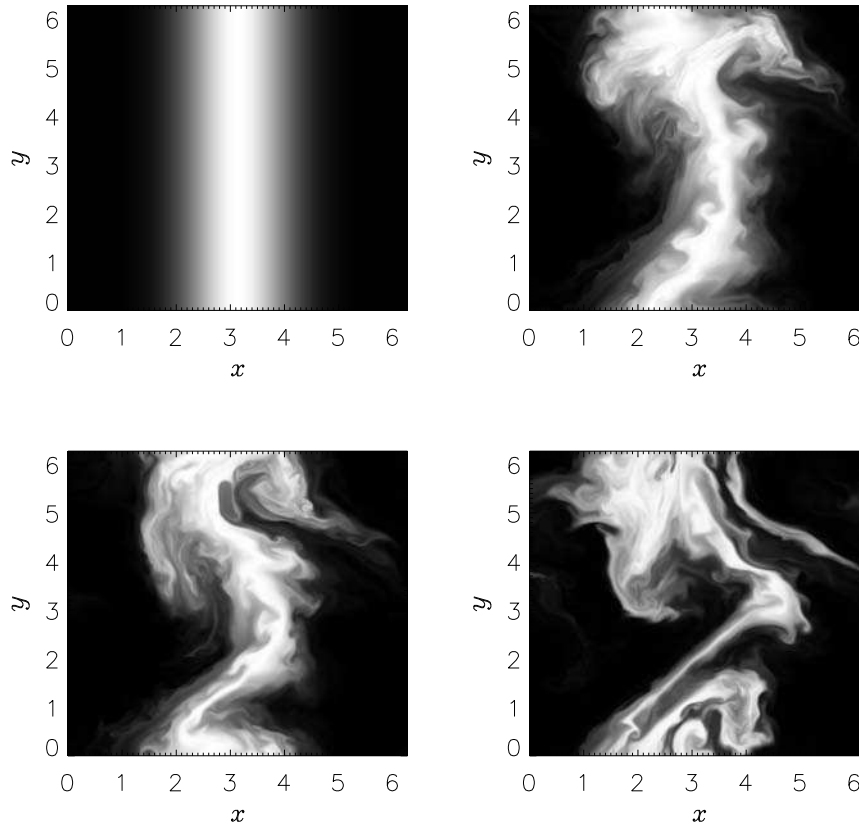


Figura 5.19: Concentración del escalar pasivo en un plano horizontal para la simulación C_{x1} , para $t = 0, 1, 1.5$, y 2.5 de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo.

lo suficientemente pequeños, la difusión turbulenta vertical llega a un valor que es aproximadamente el doble de la horizontal, en buen acuerdo con las predicciones en [36, 130].

El cambio en la difusividad turbulenta a medida que disminuye el número P_e también puede explicarse a partir de los espectros de energía y varianza del escalar pasivo estudiados en el capítulo 3. Para $S_c = 1$, y a tiempos largos, la energía y la varianza del escalar pasivo exhiben un rango inercial para los mismos números de onda. Como resultado, los remolinos turbulentos mezclarán la concentración del escalar pasivo en cualquier escala, pero para valores pequeños de S_c y P_e , el escalar pasivo no puede desarrollar un cascada inercial. Como resultado, los remolinos con

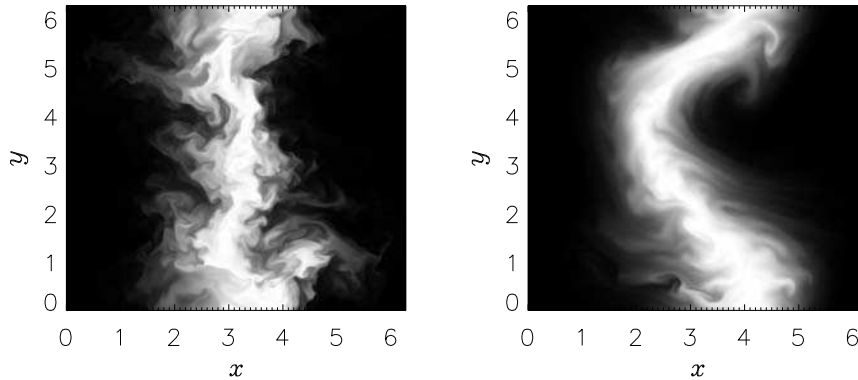


Figura 5.20: Concentración del escalar pasivo en un plano horizontal en $t = 1$ en las simulaciones A_{x1} (izquierda, sin rotación) y E_{x1} (derecha, $\Omega = 8$, $R_o = 0.01$).

tamaños menores que la escala de disipación para el escalar pasivo (es decir, remolinos en el rango inercial del campo de velocidad) son incapaces de mezclar al escalar pasivo y por lo tanto la difusión turbulenta disminuye.

5.3.6 Estructuras turbulentas y difusión

A partir de los resultados presentados anteriormente es evidente que la rotación juega un papel importante en la difusión del escalar pasivo, modificando su transporte y mezclado con respecto al caso isótropo y homogéneo. La figura 5.19 muestra un corte en un plano horizontal de la concentración del escalar pasivo en la simulación C_{x1} para diferentes tiempos. El perfil inicial Gaussiano no sólo se difunde en el tiempo, sino que también se dobla y rota. La rotación en la concentración del escalar pasivo fue observada antes en [23] y está asociada a un efecto de la fuerza de Coriolis. En nuestras simulaciones, el escalar pasivo en $t = 0$ se concentra en una banda estrecha alrededor de $x = \pi$. El flujo medio del escalar es por lo tanto hacia valores positivos de x para $x > \pi$, y hacia valores negativos de x para $x < \pi$ (es decir, en la dirección de $-\nabla\theta$, véase las figuras 5.19 y 5.20). La fuerza de Coriolis en la ecuación (2.3) es $-2\Omega\hat{z} \times \mathbf{u}$, por lo que, en promedio, esta fuerza crea una deriva del flujo hacia los valores positivos de y en la región $x > \pi$, y hacia los valores negativos de y para

$x < \pi$ [23]. Esto explica la rotación del perfil inicial observada en las simulaciones con rotación, que no se observa en las simulaciones sin rotación (ver figura 5.20 para una comparación).

La difusión en la dirección paralela al eje de rotación es de una naturaleza diferente, y más fuertemente dependiente de las estructuras que emergen en flujos turbulentos rotantes. Los flujos turbulentos sujetos a rotación rápida se caracterizan por estructuras columnares desarrolladas por los campos de velocidades y la vorticidad, asociadas a la cuasi-bidimensionalización del flujo. Como se explicó en el capítulo 2, el mecanismo subyacente a la transferencia de energía hacia los modos bidimensionales, y responsable de la formación de estas columnas, está asociado con la interacción resonante entre ondas durante el intercambio de energía entre tríadas [174]. Modelos de turbulencia de clausura a dos puntos, (ver, por ejemplo, [33]) explican con éxito la aparición de columnas con el mismo principio. Sin embargo, existen teorías alternativas que consideran la formación de éstas columnas como resultado de una concentración relativa de la energía cinética en estructuras cilíndricas resultantes de la conservación del momento lineal y del momento angular [51]. Estructuras columnares fueron reportadas en muchas simulaciones numéricas de flujos turbulentos (ver, por ejemplo, [113]).

A medida que estas columnas se mueven a través del dominio, desempeñan un papel importante en la mezcla vertical del escalar pasivo. La figura 5.21 muestra un corte en un plano vertical de la concentración del escalar pasivo para diferentes tiempos en la simulación C_{z1} . Puede notarse que la difusión es diferente de la que se observa en los planos horizontales de la misma simulación (fig. 5.19), y para la que se observa en el caso isótropo y homogéneo (fig. 5.20(a)). El escalar pasivo se difunde a partir de su perfil inicial en franjas verticales, que se extienden aún más (aumentando por lo tanto la mezcla) a medida que el tiempo evoluciona. Estas franjas son creadas por corrientes ascendentes o descendentes en el interior de las columnas. A medida que estas columnas avanzan sobre una región con gran concentración de

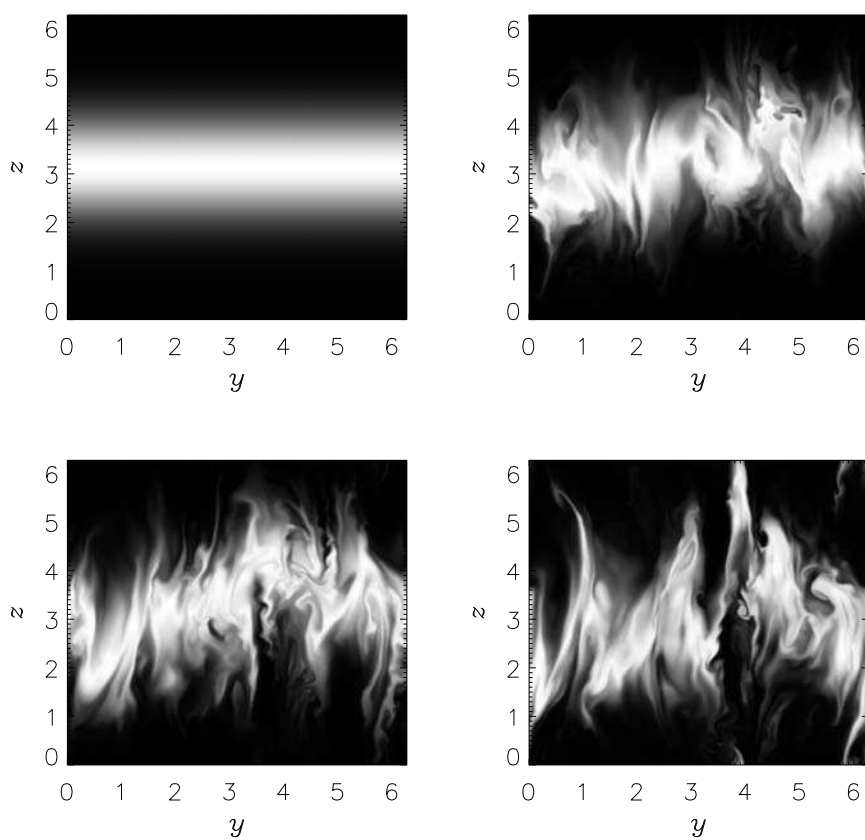


Figura 5.21: Concentración del escalar pasivo en un plano vertical para la simulación C_{z1} , a tiempos $t = 0, 1, 1.5$, y 2.5 de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo.

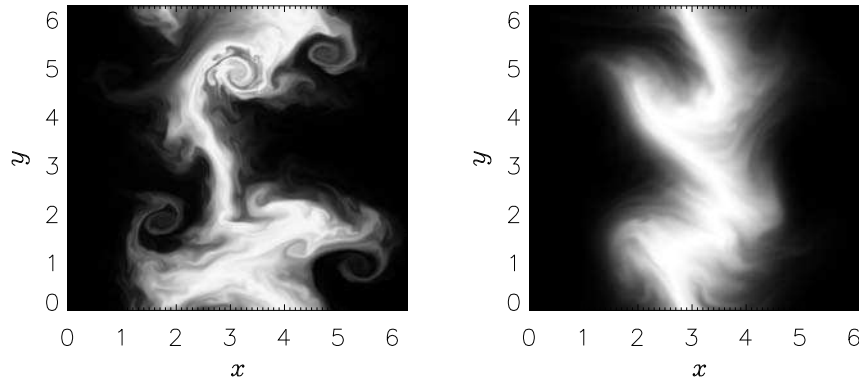


Figura 5.22: Concentración del escalar pasivo en un plano horizontal en $t = 1$ en las simulaciones G_{x1} (izquierda, sin helicidad y $R_o = 0.02$) e G_{hx} (derecha, con helicidad, mismo R_o).

escalar pasivo, las corrientes verticales mezclan al escalar pasivo con las regiones inmediatamente por encima o por debajo.

Si bien la presencia de helicidad en flujos con y sin rotación altera el valor efectivo de los coeficientes de difusión (aumentando la difusión en el caso isótropo, y disminuyendo la difusión horizontal y aumentando la difusión vertical en el caso rotante), a partir de la visualización espacial del flujo puede verse que los efectos geométricos mencionados persisten. A modo de comparación, la figura 5.22 muestra un corte horizontal de la concentración del escalar pasivo a $t = 1$ para las simulaciones rotantes G_{x1} (no helicoidal) y G_{hx} (helicoidal). Como puede verse, el perfil se dobla en ambos casos. En el caso vertical, las simulaciones helicoidales muestran la misma distribución columnar para la concentración del escalar pasivo a medida que pasa el tiempo, según puede verse en las figuras 5.23 y 5.24, para dos tiempos diferentes en las simulaciones G_{x1} y G_{hx} .

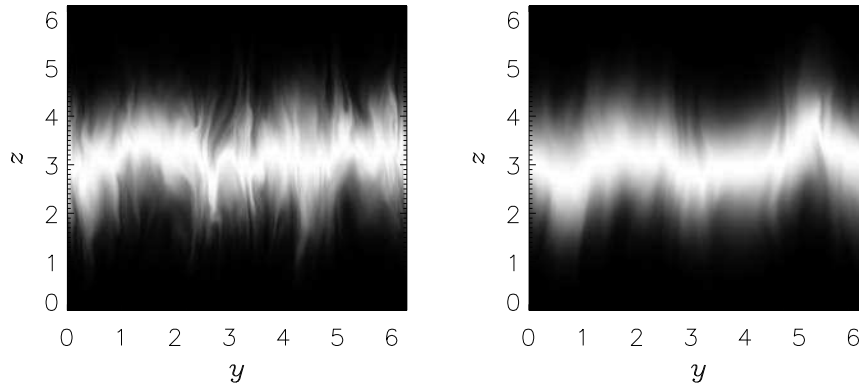


Figura 5.23: Concentración del escalar pasivo en un plano vertical en $t = 1$ en las simulaciones G_{z1} (izquierda, sin helicidad, $R_o = 0.02$) e G_{hz} (derecha, con helicidad, mismo R_o).

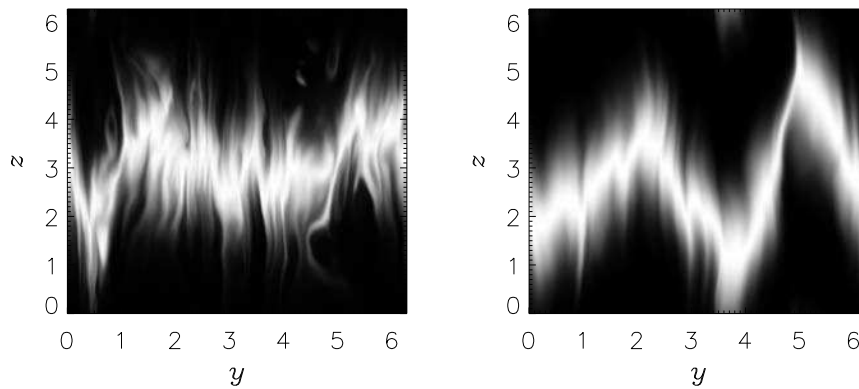


Figura 5.24: Concentración del escalar pasivo en un plano vertical en $t = 1.5$ en las simulaciones G_{z1} (izquierda, sin helicidad, $R_o = 0.02$) e G_{hz} (derecha, con helicidad, mismo R_o).

5.4 Conclusiones

En éste capítulo utilizamos 68 simulaciones numéricas directas para medir la difusión turbulenta en las direcciones paralela y perpendicular al eje de rotación, en flujos turbulentos con diferentes números de Rossby y de Schmidt, y con y sin inyección de helicidad. Los coeficientes efectivos se obtuvieron mediante el estudio de la evolución de una concentración inicial inhomogénea del escalar pasivo, y fueron calculados usando la ley de Fick y de la difusión de gradientes a partir de su concentración del flujo espacial medio.

En ausencia de helicidad, el efecto de la rotación en la difusión turbulenta es el opuesto al encontrado en la presencia de estratificación [173, 80]: mientras que en este último caso la estratificación reduce la difusión vertical con respecto de la difusión horizontal, la rotación reduce drásticamente la difusividad del escalar en la dirección horizontal. En nuestras simulaciones, la difusión vertical sigue siendo del mismo orden que en el caso isótropo y homogéneo, aunque por una razón diferente: en los flujos con rotación, la difusión en la dirección vertical es fuertemente dominada por corrientes ascendentes y descendentes en las estructuras columnares en el campo de velocidad. Dentro de las barras de error, y para números de Rossby lo suficientemente pequeños y de Peclet lo suficientemente grandes, nuestros resultados son consistentes con los resultados teóricos basados en la dispersión de una partícula que predicen que en presencia de rotación pura la difusión vertical es dos veces más grande que la difusión horizontal [36, 130].

Para los flujos helicoidales, la helicidad aumenta la difusión turbulenta en el caso isótropo y homogéneo, en buen acuerdo con resultados previos. Dentro de las barras de error, los resultados son consistentes con la teoría en [47], que predice un aumento del cincuenta por ciento para los coeficientes de difusión turbulenta en presencia de helicidad. Para los flujos rotantes, se encontró que la helicidad tiende a disminuir aún más la difusión del escalar en la dirección perpendicular, pero aumenta notablemente la difusión turbulenta en la dirección vertical. Este efecto puede ex-

plicarse fácilmente con la teoría de campo medio para los coeficientes de difusión turbulenta presentado en el capítulo 2, y con la reducción de la energía turbulenta en flujos rotantes helicoidales reportada en el capítulo 3.

Por último, se observó que para números de Peclèt y de Schmidt pequeños, la difusión turbulenta disminuye a medida que la difusión molecular se vuelve más importante, mientras que para números de Peclèt lo suficientemente grandes la difusión efectiva se vuelve independiente del número de Peclèt, lo que resulta en un número de Schmidt turbulento de orden uno en todos los casos.

Capítulo 6

Conclusiones

En ésta tesis se analizaron los efectos de la rotación y de la helicidad en el transporte de escalares pasivos en flujos turbulentos. Los datos analizados a lo largo de toda la tesis surgieron de simulaciones numéricas directas de las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles, mas la ecuación de advección-difusión para el escalar pasivo. Estas simulaciones se realizaron utilizando el código numérico GHOST, descrito en [64, 65, 117]. Para todos los flujos, se utilizó un forzado que consiste en una superposición de modos de Fourier con fase aleatoria, delta-correlacionado en el tiempo y con helicidad controlable, partiendo de condiciones iniciales nulas para el campo de velocidad. Para el escalar pasivo, se variaron las condiciones del forzado y las condiciones iniciales dependiendo del objetivo de estudio.

Para explicar las propiedades del transporte turbulento del escalar pasivo, se comenzó con el estudio de las leyes de escala de magnitudes pasivas en la cascada inercial. En este caso, para el escalar pasivo se utilizó un forzado similar al utilizado para el campo de velocidad (una superposición de modos de Fourier con fases aleatorias delta-correlacionadas en el tiempo) y condiciones iniciales nulas. Para caracterizar la transferencia de energía y de varianza escalar en los flujos turbulentos, se calcularon espectros y flujos isótropos (en el caso no rotante) y anisótropos (en el caso rotante). Es importante remarcar aquí que en los flujos rotantes, la presencia de

helicidad afecta la amplitud de las fluctuaciones turbulentas de pequeña escala en el campo de velocidad, y las leyes de escala del escalar pasivo. A partir de los resultados observados, propusimos un modelo fenomenológico sencillo compatible con los resultados numéricos que dice que si la energía sigue una ley de escalas de la forma $E(k_{\perp}) \sim k_{\perp}^{-n}$, entonces el escalar pasivo sigue una ley de potencias $V(k_{\perp}) \sim k_{\perp}^{-n_{\theta}}$ en el rango inercial, donde $n_{\theta} = (5 - n)/2$. Este argumento fenomenológico, que se aplica tanto a flujos isótropos como a flujos rotantes (helicoidales y no helicoidales), junto con las leyes de escala observadas para el espectro de varianza escalar, son resultados novedosos y constituyen la conclusión principal del capítulo 3.

Las leyes de escala obtenidas en el capítulo 3 sirvieron como punto de partida para un análisis más detallado de los efectos de la rotación y de la helicidad en el transporte y mezclado de escalares pasivos, incluyendo las modificaciones introducidas por la intermitencia. Como continuación, en el capítulo 4 se consideraron las leyes de escala de magnitudes en el espacio real, utilizando las funciones de estructura y las funciones de densidad de probabilidad de la velocidad y del escalar pasivo. El resultado más importante de ese capítulo es que, para flujos rotantes a números de Rossby moderados, todos los exponentes de escala del escalar pasivo pueden determinarse a partir del modelo de Kraichnan utilizando dimensionalidad $d = 2$, y el valor del exponente de segundo orden dado por la teoría fenomenológica del capítulo 3. El valor de d puede entenderse en términos de los efectos de la rotación, que propician la transferencia de la energía preferencialmente hacia modos Fourier perpendiculares al eje de rotación, produciendo una cuasi-bidimensionalización del flujo [33, 176, 35]. En flujos rotantes con helicidad se mostró que todos estos resultados se mantienen, aunque los valores de los exponentes de escala son diferentes al caso no helicoidal.

Es importante notar que, hasta este estudio, no existían resultados previos sobre las leyes de escala que sigue el escalar pasivo en turbulencia rotante. Nuestros resultados indican que las fluctuaciones del escalar pasivo acompañan la cuasi-bidimensionalización de las fluctuaciones del campo de velocidad, aunque, al igual

que en el caso isótropo y homogéneo, los escalares pasivos muestran una distribución aún mas intermitente y anisótropa.

Para finalizar el estudio del mezclado anisótropo de los escalares pasivos, en el capítulo 5 presentamos los resultados obtenidos del cálculo de los coeficientes de difusión turbulenta en las direcciones paralela y perpendicular al eje de rotación, en flujos turbulentos con diferentes números de Rossby y de Schmidt, y con y sin inyección de helicidad. En este caso, y a diferencia de las simulaciones en los capítulos previos, se utilizó en las simulaciones numéricas una concentración inicial inhomogénea, y un término de forzado nulo para el escalar pasivo. Los coeficientes de difusión efectivos se obtuvieron estudiando la evolución del promedio espacial del perfil inicial en las direcciones paralela y perpendicular al eje de rotación. Para el cálculo de dichos coeficientes, se utilizó un método usado también en [173] para flujos con estratificación estable, que calcula los coeficientes de difusión turbulenta a partir de la razón entre el flujo del escalar en la dirección i (aquí, paralela o perpendicular al eje de rotación) y el gradiente de la concentración. El método se basa en la ley de Fick, y en el uso del método de la difusión de gradientes discutidas en el capítulo 5.

Hallamos que la rotación reduce drásticamente la difusividad del escalar en la dirección horizontal, mientras que la difusión vertical sigue siendo del mismo orden que en el caso isótropo y homogéneo. Esto se debe a que en los flujos con rotación la difusión en la dirección vertical es dominada por corrientes ascendentes y descendentes en las estructuras columnares desarrolladas por el campo de velocidad. En las simulaciones hallamos que, dentro de las barras de error, la difusión vertical es dos veces más grande que la difusión horizontal, lo cual es consistente con resultados teóricos previos basados en la dispersión de una partícula [36, 130].

Para los flujos helicoidales, se encontró que la helicidad tiende a aumentar la difusión turbulenta en los flujos isótropos y homogéneos. Dentro de las barras de error, estos resultados concuerdan con los argumentos en [47], que predicen un aumento del cincuenta por ciento para los coeficientes de difusión turbulenta en presencia de

helicidad. En los flujos con rotación, se observó que la helicidad tiende a disminuir la difusión horizontal del escalar, pero aumenta notablemente la difusión turbulenta en la dirección vertical. Este comportamiento se explicó con una teoría de campo medio para los coeficientes de transporte, y está asociado a la reducción de las fluctuaciones turbulentas de la velocidad en el caso helicoidal rotante.

Por último, se observó que para números de Peclèt y Schmidt pequeños, la difusión turbulenta disminuye a medida que la difusión molecular se vuelve más importante, mientras que para números de Peclèt lo suficientemente grandes la difusión efectiva se vuelve independiente del número de Peclèt, lo que resulta en un número de Schmidt turbulento de orden uno en todos los casos.

A lo largo de la tesis, vimos que existen muchos escenarios en los cuales el transporte de escalares pasivos es importante, los cuales a su vez se ven claramente afectados por la rotación de la tierra. Entre ellos, el transporte de diferentes magnitudes en huracanes, de aerosoles y de cenizas volcánicas en la atmósfera, o simplemente el transporte de sal en el océano. Si bien en muchos de estos casos también debe tenerse en cuenta el efecto de la estratificación, los resultados obtenidos en esta tesis concuerdan cualitativamente con un gran número de observaciones. En huracanes, por ejemplo, las observaciones reportan una gran anisotropía en el transporte vertical y horizontal en su interior. Esta anisotropía, dominada por la fuerte rotación, hace que la intensidad del huracán este casi completamente determinada por el transporte horizontal, tal como lo indican la observaciones analizadas en [125] y las simulaciones en [29, 30]. Considerar situaciones mas realistas, y extender los resultados de esta tesis a esos casos, requiere agregar en las simulaciones el efecto de la estratificación (por ejemplo, en la aproximación de Boussinesq), y de otras condiciones de contorno. Sin embargo, las herramientas presentadas en esta tesis (como por ejemplo la descomposición $SO(2) \times R_e$, o el uso de la ley de Fick para calcular coeficientes de transporte) son fáciles de extender a esos casos. De esta forma, el estudio del

transporte en flujos estratificados, y en flujos rotantes y estratificados, constituyen extensiones naturales de este trabajo.

Bibliografía

- [1] Alexakis A., Mininni P. D., Pouquet A., Phys. Rev. E. **72**, 046301 (2005).
- [2] Alexakis A., Mininni P. D., Pouquet A., New J. Phys. **72**, 046301 (2007).
- [3] André J. C., Lesieur M., J. Fluid Mech. **81**, 187 (1977).
- [4] Anselmet F., Gagne Y., Hopfinger E. J., Antonia R. A., J. Fluid Mech. **140**, 63 (1984).
- [5] Arad I., Dhruva B., Kurien S., L'vov S. V., Procaccia I., Sreenivasan K. R., Phys. Rev. Lett. **81**, 5330 (1998).
- [6] Aubinet M., Vesala T., Papale D., *Eddy Covariance: A Practical Guide to Measurement and Data Analysis* (Springer Atmospheric Sciences, New York, 2012).
- [7] Babin A., Mahalov A., Nicolaenko B., Eur. J. Mech. B/Fluids **15**, 291 (1996).
- [8] Baerenzung J., Politano H., Ponty Y., Pouquet A., Phys. Rev. E. **4**, 046303 (2008).
- [9] Baraud C. N., Plapp B. B., Swinney H. L., She Z. S., Phys. Fluids **15**, 2091 (2003).
- [10] Bardina J., Ferziger J. H., Rogallo R. S., J. Fluid Mech. **154**, 321 (1985).
- [11] Bartello P., Métais O., Lesieur M., J. Fluid Mech. **273**, 1 (1994).
- [12] Batchelor G., *The Theory of Homogeneous Turbulence* (Cambridge University Press, Cambridge, 1953).

-
- [13] Batchelor G., *J. Fluid Mech.* **5**, 113 (1956).
- [14] Benzi R., Ciliberto S., Tripicciono R., Baudet C., Massaioli F., Succi S., *Phys. Rev. E.* **48**, R29 (1993).
- [15] Benzi R., Ciliberto S., Baudet C., Ruiz Chavarria G., Tripicciono R., *Europhys. Lett.* **24**, 275 (1993).
- [16] Betchov R., *Phys Fluids.* **7**, 925 (1961).
- [17] Biferale L., Procaccia I., *Phys. Rep.* **414**, 43 (2005)
- [18] Biferale L., Vergassola M., *Phys. Fluids* **13**, 2139 (2001).
- [19] Blackman E., Field G., *Phys. Fluids.* **15**, L73 (2003).
- [20] Bolzan M. J. A., Ramos F. M., Sá L. D. A., Rodrigues Neto C., Rosa R. R., *J. Geophys. Res.* **107**, 8063 (2002).
- [21] Borue V., Orszag S. A., *Phys. Rev. E* **55**, 7005 (1997).
- [22] Brandenburg A., Subramanian K., *Phys. Rep.* **417**, 209 (2005).
- [23] Brandenburg A., Svedin A., Vasil G. M., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **395**, 1599 (2009).
- [24] Brandenburg A., Rädler K. H., Kemel K., *Astron. Astrophys.* **539**, A35 (2012).
- [25] Brethouwer G., *J. Fluid Mech.* **542**, 3056 (2005).
- [26] Britter R. E., Hunt J. C. R., Marsh G. L., Snyder W. H., *J. Fluid. Mech.* **127**, 27 (1986).
- [27] Bruno R., Carbone V., *Astrophys. J.* **488**, 482 (1997).
- [28] Bryan G. H., Rotunno R., *Mon. Wea. Rev.* **137**, 1770 (2009).

- [29] Bryan G. H., Rotunno R., Chen Y., Conference on Hurricanes and Tropical Meteorology, Amer. Meteor. Soc., Tucson, AZ, 8C.7 (2010).
- [30] Bryan G. H., Quarterly J. Royal Meteorological Soc. **139**, 1957 (2012).
- [31] Bryan G. H., Morrison H., Mon. Wea. Rev. **140**, 202 (2012).
- [32] Burba G., LI-COR Biosciences, Lincoln, USA, 331 (2013).
- [33] Cambon C., Jacquin L., J. Fluid Mech. **202**, 295 (1989).
- [34] Cambon C., Jacquin L., Lubrano J. L., Phys. Fluids A 4, 812 (1992).
- [35] Cambon C., Mansour N. N., Godefert F. S., J. Fluid Mech. **337**, 303 (1997).
- [36] Cambon C., Rubinstein R., Godefert F. S., New J. Phys. **6**, 73 (2004).
- [37] Cambon C., Godefert F. S., Nicolleau F., Vassilicos J. C., J. Fluid Mech. **499**, 231 (2004).
- [38] Celani A., Cencini M., Mazzino A., Vergassola M., New J. Phys. **9**, 1367 (2004).
- [39] Chapman A., The Chapman Conference, *Magnetic Helicity in Space and Laboratory Plasmas*, (<http://www.agu.org/meetings/cc98bcall.html>, 1998)
- [40] Charbonnel C., Vauclair S., P-Zahn J., Astron. Astrophys. **255**, 191 (1992).
- [41] Chen Q., Chen S., Eyink G., Phys. Fluids. **15**, 361 (2003)
- [42] Chen Q., Chen S., Eyink G., Holm D., Phys. Rev. Lett. **90**, 214503 (2003)
- [43] Chen Q., Chen S., Eyink G., Holm D., J. Fluid Mech. **542**, 139 (2005).
- [44] Chen S., Kraichnan R., Phys Fluids. **10**, 2867 (1998).
- [45] Chertkov M., Falkovich G., Lebedev V., Phys. Rev. Lett. **76**, 3707 (1996).
- [46] Chkhetiani O., Ponomarev V., Khapev A., *EGS XXVII*, General Assembly, 5291 (2002).

- [47] Chkhetiani O., Hanitch M., Jurcisinová E, Jurcisin M, Mazzino A., Rapasan M, J. Phys. A: Math. Gen. **39**, 7913 (2006).
- [48] Chkhetiani O., Golbraikh E., Phys. Lett. A. **34**, 5603 (2008).
- [49] Corrsin S., J. Appl. Phys. **22**, 469 (1951).
- [50] Corrsin S., Kistler A. L., National Advisory Committee for Aeronautics, Technical Note NACA TN 2133 (1954).
- [51] Davidson P. A., Staplehurst P. J., Dalziel S. B., J. Fluid Mech. **557**, 135 (2006).
- [52] Davidson P. A., *Turbulence an Introduction for Scientist and Engineers* (Oxford University Press, New York, 2004).
- [53] Del Castello L., Clercx H. J. H., Phys. Rev. E. **83**, 056316 (2011).
- [54] Duncan D. K., Astrophys. J. **248**, 651 (1981).
- [55] Elperin T., Kleorin N., Rogachevskii I., Phys. Rev. E. **61**, 2617 (2000).
- [56] Embid P., Majda A., Commun. Partial Diff. Eqns. **21**, 619 (1996).
- [57] Falkovich G., Gawedzki K., Vergassola M., Rev. Mod. Phys. **73**, 913 (2001).
- [58] Frisch U., Morf R. H., Phys. Rev. A **23**, 2673 (1981).
- [59] Frisch U., *Turbulence* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [60] Gehlen M, Malschaert J. F. P, van Raaphorst W., Cont. Shelf Res. **15**, 1675 (1995).
- [61] Genova F., Schatzman E, Astron. Astrophys. **78**, 323 (1979).
- [62] Golbraikh E., J. Non-Linear Mech. **44**, 441 (2009).
- [63] Gomez D. O., Mininni P. D., Physica A **342**, 69 (2004).

- [64] Gomez D. O., Mininni P. D., Dmitruk P., *Adv. Sp. Res.* **35**, 899 (2005).
- [65] Gomez D. O., Mininni P. D., Dmitruk P., *Phys. Src.* **T116**, 123 (2005)
- [67] Greenspan H. P., *J. Fluid Mech.* **36**, 257 (1969).
- [68] Greenspan H. P., *The Theory of Rotating Fluids* (Breukelen, Brookline, MA, 1990).
- [69] Gujer W., *System of Analisis for Water Technology* (Springer-Verlag, Berlin, 2008).
- [70] Hausman J. A., Ph.D. dissertation Colorado State University, 207pp (2001).
- [71] Herring J. R., Shertzer, M. Lesieur, *J. Fluid. Mech.* **124**, 411 (1982).
- [72] Holm D., Kerr R., *Phys Fluids.* **2**, 025101 (2007).
- [73] Ishida T., Davidson P. A., Kaneda Y., *J. Fluid Mech.* **564**, 455 (2006).
- [74] Juneja A., Ph.D. dissertation, Yale University, Section B, 4543 (1995).
- [75] Kaneda Y., *J. Phys. Soc. Japan* **69**, 3847 (2000).
- [76] Kaneda Y., Ishida T., *J. Fluid. Mech.* **402**, 311 (2000).
- [77] Kämmerer S., Ph.D. dissertation, Postdam, (2000).
- [78] Katul C., Geron C., Hsieh C., Vidakovic B., Guenther A., *J. App. Meteorology* **37**, 1533 (1998).
- [79] Kerr B. W., Darkow G. L., *Weather Forecast* **11**, 489 (1996).
- [80] Kimura Y., Herring j. R., *J. Fluid Mech.* **328**, 253 (1996).
- [81] Kimura Y., Herring J. R., *Proc. FEDSM99 3rd ASME/JSME Joint Fluid Engineering Conf. FEDSM99*, 7753 (1999).

- [82] Kraichnan R. H., Phys. Fluids **8**, 1385 (1965).
- [83] Kraichnan R. H., Phys. Fluids **10**, 2080(1967).
- [84] Kraichnan R. H., Phys. Fluids. **11**, 945 (1968).
- [85] Kraichnan R. H., J. Fluid Mech. **59**, 745 (1973).
- [86] Kraichnan R. H., J. Fluid Mech. **64**, 737 (1974).
- [87] Kraichnan R. H., J. Fluid Mech. **77**, 753 (1976).
- [88] Kraichnan R. H., Phys. Rev. Lett. **72**, 1016 (1994).
- [89] Kolmogorov A. N., C.R. Acad. Sci. URSS **32**, 16 (1941).
- [90] Kurien S., Phys. D. **167**, 175 (2003).
- [91] Kurien S., Taylor M., Matsumoto T., Phys. Rev. E **6**, 066313 (2004).
- [92] Landau L. D., Lifschitz E. M., *Mecánica de Fluidos* (Reverté, Madrid, 1971).
- [93] Landau L. D., Lifschitz E. M., *Electrodinámica de los medios continuos* (Reverté, Madrid, 1980).
- [94] Larmor J., *How could a rotating body such as the Sun become a magnet?* Rep. Brit. Assoc. Adv. Sci. **1919**, 159 (1919).
- [95] Lesieur M., *Turbulence in Fluids, 2da. ed.* (Kluwer Academic, Dordrecht, Holanda, 1990).
- [96] Levich E., Tsinober A., Phys. Rev. Lett. **93**, 293 (1983).
- [97] Levich E., Phys. Rep. **3-4**, 129 (1987).
- [98] Liechtenstein L., Godeferd F. S., Cambon C., J. Turbul. **6**, N24 (2005).
- [99] Lilly D., J. of Atmospheric Sci. **2**, 113 (1986).

- [100] Lilly D., J. of Atmospheric Sci. **2**, 126 (1986).
- [101] Lilly D., J. of Atmospheric Sci. **43**, 126 (1988).
- [102] Lohse L., Epping E. H., Helder W., van Rapphorst W., Marine Ecology Prog. Series **145**, 63 (1996).
- [103] Majda A., Embid P., Theor. Comput. Fluid Dyn. **11**, 155 (1998).
- [104] Markowsky P. M., Straka E. N., Rasmussen E. N., Blanchard D. O., Mon. Weather Rev. **126**, 2959 (1998).
- [105] Martin L. N., *Autosimilarides y simetrías en flujos turbulentos*, (Tesis de Licenciatura, Universidad de Buenos Aires, 76pp, 2008).
- [106] Martin L. N., Mininni P. D., Phys. Rev. E. **81**, 016310 (2010).
- [107] Matthaeus W., Pouquet A., Mininni P. D., Dmitruk P., Breech B., Phys. Rev. Lett. **8**, 085003 (2008).
- [108] Meneveau C., Cerutti S., Phys. Fluids. **10**, 928 (1998).
- [109] Mestayer P. G., Gibson C. H., Phys. Fluids. **19**, 1279 (1976).
- [110] Michaud G. J., Charbonneau P., Space Sci. Rev. **57**, 1 (1991).
- [111] Milano L. J., Matthaeus W. H., Dmitruk P., Montgomery C., Phys. Plasmas **8**, 085003 (2001).
- [112] Milano L. J., Dasso S., Matthaeus W. H., Smith C., Phys. Rev. Lett. **15**, 155005 (2004).
- [113] Mininni P. D., Alexakis A., Pouquet A., Phys. Rev. E **74**, 016303 (2006).
- [114] Mininni P. D., Pouquet A., Phys. Rev. E **79**, 026304 (2009).
- [115] Mininni P. D., Pouquet A., Phys. Fluids. **22**, 035105 (2010).

- [116] Mininni P. D., Pouquet A., *Phys. Fluids*. **22**, 035106 (2010).
- [117] Mininni P. D., Rosenberg D., Reddy R., Pouquet A., *Parallel Computing* **37**, 316 (2011).
- [118] Moffat H. K., *J. Fluid. Mech.* **35**, 117 (1969).
- [119] Moffat H. K., *J. Fluid. Mech.* **41**, 435 (1970).
- [120] Moffat H. K., *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids* (Cambridge University Press, Cambridge 1978).
- [121] Moffat H. K., *Reg. Prg. Phys.* **46**, 621 (1983).
- [122] Moisy F., Willaime H., Andersen J. S., Tabeling P., *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4827 (2001).
- [123] Monin A. S., Yaglom M., *Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence*, (Volumen 1. MIT Press, Cambridge 1971).
- [124] Monin A. S., Yaglom M., *Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence*, (Volumen 2. MIT Press, Cambridge 1975).
- [125] Montgomery M. T., Bell M. M., Aberson S. D., Black M. L., *Bull. Amer. Meteor. Soc.* **87**, 1335 (2006).
- [126] Moreau M., *Sol. Phys.* **191**, 47 (1999).
- [127] Morinishi Y., Nakabayashi K., Ren S., *JSME Int. J. Ser. B* **44**, 410 (2001).
- [128] Müller W. C., Thiele M., *Europhys. Lett.* **77**, 34003 (2007).
- [129] Nicolleau F., Vassilicos J. C., *J. Fluid. Mech.* **410**, 170 (2000).
- [130] Nicolleau F., Yu G., Vassilicos J. C., *Fluid Dyn. Res.* **40**, 68 (2008).
- [131] Obukhov A. M., *Izv. Akad. Nauk SSSR. Geogr. Geofiz.* **13**, 58 (1949).

- [132] Osborn T. R., *J. Phys. Oceanogr.* **10**, 83 (1980).
- [133] Panchev S., *Random Functions and Turbulence* (Pergamon Press, Oxford, 1971).
- [134] Persing J., Montgomery M. T., *J. Atmos. Sci.* **60**, 2349 (2003).
- [135] Pipin V. V., *Astron. Lett.* **27**, 203 (2001).
- [136] Ponty Y., Mininni P. D., Montgomery D. C., Pinton J. F., Politano H., Pouquet A. **94**, 164502 (2005).
- [137] Pope S., *Turbulent Flows* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [138] Pouquet A., Patterson G. S., *J. Fluid Mech.* **85**, 305 (1978).
- [139] Richardson L. F., *Weather Prediction by Numerical Process* (Cambridge University Press, Cambridge, 1922).
- [140] Roberts P. H., Glatzmaier G. A., *Rev. Mod. Phys.* **72**, 1081 (2000).
- [141] **Rodríguez Imazio P.**, Mininni P. D., *J. Fluid. Mech.* **651**, 241 (2010).
- [142] **Rodríguez Imazio P.**, Mininni P. D., *Phys. Rev. E* **83**, 066309 (2011).
- [143] **Rodríguez Imazio P.**, Mininni P. D., *Phys. Rev. E* **87**, 0263018 (2013).
- [144] **Rodríguez Imazio P.**, Mininni P. D., *Phys. Scr.* **T149**, 014037 (2012).
- [145] **Rodríguez Imazio P.**, Mininni P. D., enviado a *Phys. Rev. E.* (2013).
- [146] **Rodríguez Imazio P.**, Martin L. N., Dmitruk P., Mininni P. D., *Phys. Plasmas* **20**, 052506 (2013).
- [147] Roldán Pérez G. A., Ramírez Restrepo J. J., *Fundamentos de limnología neotropical* (Editorial Universidad de Antioquía, 1992).
- [148] Rotunno R., G. H. Bryan, *J. Atmos. Sci.* **69**, 2284 (2012).

- [149] Rüdiger G., Pipin V. V., *Astron. Astrophys.* **375**, 149 (2001).
- [150] Rutgers van der Loeff M. M., *Neth. J. Sea Res.* **15**, 100 (1981).
- [151] Seiwert J., Morize C., Moisy F., *Phys. Fluids* **20**, 071702 (2008).
- [152] Schatzman E., *Astron. Astrophys.* **56**, 211 (1977).
- [153] Schatzman E., Maeder A., *Astron. Astrophys.* **96**, 1 (1981).
- [154] She Z. S., Lévêque E., *Phys. Rev. Lett.* **72** (1994).
- [155] Shebalin J. V., Mattheus W. H., Montgomery D., *J. Plasma Phys.* **29**, 525 (1983).
- [156] E. D. Siggia, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **26**, 137 (1994).
- [157] Smith M., Chasnov J., Waleffe F., *Phys. Rev. E.* **77**, 12 (1996).
- [158] Sorriso-Valvo L., Carbone V., Noullez A., Politano H., Pouquet A., Veltri P., *Phys. Plasmas* **9**, 89 (2009).
- [159] Spruit H. C., *Proc. of the Fourth European Meeting on Solar Physics*, 21 (1984).
- [160] Sreenivasan K. R., Antonia R. A., Britz D., *J. Fluid Mech.* **94**, 745 (1979).
- [161] Sreenivasan K. R., Antonia R. A., Britz D., *Proc. R. Soc. Lond. A* **434**, 165 (1991).
- [162] Sreenivasan K. R., Antonia R. A., *Annu. Rev. Fluid. Mech.* **29**, 437 (1997).
- [163] Stewart R. W., *Radios Sci.* **4**, 1269 (1969).
- [164] Stix M., Skaley D., *Astron. Astrophys.* **232**, 234 (1990).
- [165] Taylor G. I., *Proc. London Math. Soc.* **20**, 196 (1921)

- [166] Taylor M. A., Kurien S., Eyink G. L., Phys. Rev. E **68**, 026310 (2003).
- [167] Teitelbaum T., *El decaimiento libre de flujos turbulentos rotantes* (Tesis de Doctorado, Universidad de Buenos Aires, 2013).
- [168] Tennekes H., Lumley J. L., *A First Course in Turbulence* (The MIT Press, Cambridge, 1972).
- [169] Turner D. B., *Workbook of atmospheric dispersion estimates: an introduction to dispersion modeling* (CRC Press, 1994)
- [170] Van Atta C. W., Chen W. Y., J. Fluid. Mech. **44** 145 (1970).
- [171] Vanderborgh J. P., Wollast R., Billen G., Limnol. Oceanogr. **22**, 787 (1977).
- [172] Verma S. B., Remote Sensing Reviews **5**, 99 (1990).
- [173] Vincent A., Michaud G., Meneguzzi M., Phys. Fluids. **8**, 1312 (1996).
- [174] Waleffe F., Phys. Fluids A **4**, 350 (1992).
- [175] Waleffe F., Phys. Fluids A **54**, 677 (1993).
- [176] Wang J., Gibson J., Waleffe F., Phys. Rev. Lett. **98**, 204501 (2007).
- [177] Warhaft Z., Annu. Rev. Fluid. Mech. **32**, 203 (2000).
- [178] Wyngaard J. C., Phys. Fluids. **14**, 2052 (1971).
- [179] Yaglom A. M., Sovirt Phys. Dokl. **32**, 26 (1966).
- [180] Yeung P. K., Zhou Y., Phys. Fluids **10**, 2895 (1998).
- [181] Yeung P. K., Jia Xu, Phys. Fluids **16**, 93 (2004).
- [182] Yeung P. K., Donzis D. A., Sreenivasan K. R., Phys. Fluids **17**, 081703 (2005).
- [183] Zahn J. P., IAU Coll. **121**, 425 (1989).

[184] Zahn J. P., *Astron. Astrophys.* **265**, 115 (1992).

[185] Zeman O., *Phys. Fluids* **6**, 3221 (1994).

[186] Zhou Y., *Phys. Fluids* **7**, 2092 (1995).

Agradecimientos

En principio quiero agradecer a Pablo Mininni por darme la oportunidad de trabajar con él. Gracias Pablo por enseñarme a trabajar de forma responsable, por acompañarme, por la paciencia, el compromiso, y la generosidad. Sos un excelente director y una gran persona.

También quisiera agradecer al Departamento de Física por brindarme un espacio donde trabajar, y a la ANPCyT y al CONICET por otorgarme las becas que me permitieron realizar el doctorado. Gracias al Grupo de Flujos Astrofísicos por los recursos dedicados a que los doctorandos seamos mejores estudiantes y futuros investigadores. En particular, gracias a Luis y a Tomás por la compañía, y por ayudarme cuando lo necesitaba.

Para mi familia, el agradecimiento es inmenso. Se que soy afortunada de contar con una familia amorosa, que te cuida y te deja crecer sin esperar nada mas que amor. Gracias a mis padres, a mis hermanos y a mis sobrinos por todo el amor y la fuerza, estoy cada vez más orgullosa de todos ustedes. Gracias a Celeste, a Gustavo y a Julieta por su amor incondicional, me llenan de orgullo y alegría.

Gracias a mi amiga y asesora profesional Verónica Diana Raspa por miles de cosas, no se puede pedir más...Gracias a Mariano por la amistad y el apoyo.

Gracias Damián, amor mío. No alcanza una vida entera para decirte lo que sos para mi, ni para expresarte la felicidad y el profundo agradecimiento que siento por todo lo que me diste en esta etapa. Sos simplemente maravilloso, esta tesis te la dedico a vos.

