

Tesis Doctoral

Estudio teórico y numérico de inestabilidades Hall-MHD en flujos tipo shear

Bejarano, Cecilia Soledad

2012

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Bejarano, Cecilia Soledad. (2012). Estudio teórico y numérico de inestabilidades Hall-MHD en flujos tipo shear. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

Cita tipo Chicago:

Bejarano, Cecilia Soledad. "Estudio teórico y numérico de inestabilidades Hall-MHD en flujos tipo shear". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2012.

Estudio teórico y numérico de inestabilidades Hall-MHD en flujos tipo *shear*

La presente Tesis se propone, como objetivo general, contribuir al estudio de los plasmas astrofísicos que conforman diversas configuraciones en el Universo; mientras que, como objetivo específico, se plantea investigar el desarrollo de inestabilidades en la microescala de plasmas completamente ionizados. En concreto, se analiza el rol del efecto Hall en la dinámica microscópica asociada a pequeñas parcelas de fluido inmersas en un flujo macroscópico tipo *shear*. A tal fin, se utiliza como marco teórico las ecuaciones de la teoría magnetohidrodinámica, en la aproximación *shearing-box*, teniendo en cuenta los términos adicionales correspondientes a las corrientes de Hall. Puntualmente, se estudia la evolución de una nueva inestabilidad a la cual se nombra Hall-MSI (Hall Magneto-Shear Instability). Con este propósito, se desarrolla un modelo analítico que proporciona una descripción del comportamiento de esta inestabilidad en el régimen lineal. Los resultados teóricos obtenidos se corroboran a su vez mediante cálculos numéricos. Asimismo, las simulaciones numéricas son fundamentales para abordar el estudio de la evolución no lineal del sistema. La comprensión de los procesos físicos involucrados en la microescala, responsables de los mecanismos de transporte, presumiblemente permitirá desarrollar modelos macroscópicos que profundicen los conocimientos de distintos fenómenos astrofísicos. En este contexto, el trabajo efectuado en esta Tesis resulta especialmente importante en el análisis de los procesos de acreción y de los mecanismos de eyección, sustentación y colimación de los denominados *jets*. Por un lado, el efecto Hall ciertamente modifica la inestabilidad magneto-rotacional, principal candidato para explicar el origen de la microturbulencia en discos de acreción. Por el otro, el desarrollo de la inestabilidad Hall magneto-shear podría afectar la evolución de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz, particularmente relevante en la interfaz entre *jet* y medio circundante.

Palabras Claves:

Plasmas astrofísicos - Magnetohidrodinámica - Efecto Hall - Flujos cizallas - Inestabilidades

Theoretical and numerical study of Hall-MHD instabilities in shear flows

The present Thesis aims to contribute to the study of astrophysical plasmas which are ubiquitous in the Universe in several configurations, dealing with the development of micro instabilities in fully ionized plasmas. It specifically addresses the role of the Hall effect in the dynamics of the micro-scale associated to small parcels of fluids embedded in a macroscopic shear flow. For this purpose, the framework of magnetohydrodynamics in the shearing-box approximation is adopted, with additional terms related to the Hall currents. Moreover, it studies the evolution of a new instability called Hall-MSI (Hall Magneto-Shear Instability). To this end, an analytical model is developed in order to describe the linear behavior of this instability. Furthermore, the theoretical results are corroborated by numerical simulations. In addition, the numerical approach allows to extend the evolution into the non-linear regime. The comprehension of the physical processes involved in the microscopic scales, which are responsible for the transport mechanisms, will hopefully contribute to develop macroscopic models to improve the knowledge of many astrophysical phenomena. In this context, the results reported in this Thesis may be important to enhance the understanding of the physics regarding accretion processes and launching, collimation and sustain mechanisms of astrophysical jets. On the one hand, the Hall effect certainly modifies the magneto-rotational instability, which is the main candidate to explain the origin of the microscopic turbulence in accretion disks. On the other hand, the Hall magneto-shear instability might affect the development of the Kelvin-Helmholtz instability, which is relevant at the interface between the jet and the surrounding environment.

Keywords:

Astrophysical plasmas - Magnetohydrodynamics - Hall effect - Shear flows - Instabilities

Agradecimientos

En este breve apartado quisiera agradecer a las instituciones y a las personas que me acompañaron a lo largo del desarrollo de esta Tesis.

En primer lugar, a la Universidad de Buenos Aires (UBA) - universidad pública, gratuita y laica - que me permitió realizar mis estudios tanto de grado como de posgrado en el Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. En segundo lugar, al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) por financiar casi la totalidad de los años dedicados al desarrollo de la investigación llevada a cabo. En tercer lugar, al Instituto de Astronomía y Física del Espacio (IAFE: UBA-CONICET) por haberme brindado un lugar de trabajo realmente envidiable, con todo lo necesario para realizar mi labor adecuadamente, en forma cómoda y amena. En muchas oportunidades, pasé muchas más horas aquí donde escribo estas líneas que en mi propia casa. En particular, quiero agradecer a su actual Directora Dra. Gloria Dubner por haberme brindado la posibilidad de continuar el desarrollo de esta Tesis en este último año y también por su buena predisposición y sus consejos. No quiero dejar de agradecer a Marta Pedernera, a Mariano Mayochi y al Dr. Esteban Calzetta por sus respectivas ayudas a último momento.

Agradezco a mi director Dr. Daniel Gómez por haber dirigido mi trabajo doctoral enmarcado en la presente Tesis; por sus aportes y correcciones que permitieron desarrollar la investigación aquí presentada. A Pablo Dmitruk y a Pablo Mininni por responder siempre mis preguntas. Particularmente, a Pablo M. por sus mails auto-explicativos!

Asimismo, mis más sinceros agradecimientos para Gustavo Romero quien siempre tuvo la mejor actitud y predisposición para hablar tanto de cuestiones académicas como de otra índole; por sus consejos y/o recomendaciones. A Ernesto Eiroa por estar siempre atento a mi desarrollo académico y por alentar mis esfuerzos. En especial, mis profundos agradecimientos para Leo Pellizza y para Alberto Vásquez con quienes compartí muchas charlas que me hicieron crecer como científica pero sobre todo como persona. Gracias a los dos por la buena onda, por escucharme y aconsejarme. Gracias, Albert, además, por los divertidos momentos que hemos compartido como compañeros de oficina, especialmente, aquellos en los que no paro de despotricar! A Carlitos Vigh con quien compartí la oficina en los primeros años del doctorado. Por la amistad que desde entonces se fue forjando. Por estar siempre predispuesto a dar una mano.

Especialmente quiero agradecer a mis compañeros y amigos del IAFE. A aquellos con los que, en algún momento, compartimos la convivencia y que a lo largo de este período me soportaron y me escucharon, me alentaron y me apoyaron. A Sole Nakwacki, a Fede Nuevo, a Caro Pepe y a Ana Pichel, por acompañarme de una u otra forma en uno u otro momento en el transcurso de

estos años. En particular en este último tramo, les agradezco su preocupación y sus muchas palabras de ánimos! A Franco “el tano” Fiorini, a Fede Holik, a Lau Kniznik y a María Emilia Ruiz. Por los momentos compartidos, por las charlas y por las salidas, por hacer de todo esto, algo muchísimo más divertido y llevadero. A todos muchas muchas muchas gracias! De igual modo, quiero agradecer a Mariana Ferreyra, a Lau González Silva, a Ale Romero y a Gaby Vila con quienes transitamos distintos momentos de la Licenciatura y/o Doctorado. Porque seguimos manteniendo las ganas de compartir experiencias, a pesar de que ya no compartimos la cotidianidad del día a día, porque seguimos eligiendo ser amigas. A las cuatro, gracias por escuchar y por aún estar. Gracias por las fuerzas que siempre me dan. En especial, a Lau por nuestro mutuo entendimiento y a Gaby por tener siempre las palabras justas. Y sí, también a mis amigos ajenos a la física...por estar desde siempre, por tantos buenos momentos, por la paciencia y por darme pilas cuando las necesité: a las chichis (LauF, LauRo, Lolo, Luji, Marina, Nico, Ro, Yani) y a los pibes (Galle, Nesti, Peque, Tomi). En definitiva, gracias a todos por estar!

Por último quiero agradecer a mi familia en general por su constante apoyo y comprensión. A los Aldao, a Roxi y Jaime, a mis tías Mirtas y primos. Palabras aparte merecen mis abuelos, mi mamá y mi novio. Palabras que no serán suficientes para expresar mis infinitos agradecimientos no sólo por todo lo que han hecho y me han ayudado en estos últimos 6 años, difícilmente pueda encontrar las palabras precisas para reflejarlo, sino por todos los otros años compartidos y que, espero, podamos seguir compartiendo. Lo que ustedes son para mí, lo que significan, lo que los quiero realmente no puedo escribirlo ni decirlo en simples palabras. Espero que mis acciones transmitan un poco mejor mis sentimientos. A ustedes va dedicada esta Tesis. Porque sólo ustedes saben de dónde vengo y gracias a ustedes me encuentro en donde estoy. A mis abuelos Belky Barrera y Enrique Joffe (los lelos), a mi mamá Azucena Joffe y a mi novio Martín Aldao. Les agradezco eternamente su presencia, su paciencia, su compañía, su apoyo constante, sus palabras de aliento, su preocupación, su amor. Gracias lelos por estar siempre a mi lado y por darme tanto pero tanto cariño; gracias má por todo, por tu esfuerzo, por tu constante aliento, por ser mi ejemplo; gracias Martín por seguir recorriendo la vida juntos y por seguir eligiendo estar uno al lado del otro, por acompañarme y por sostenerme, por tu amor. Y eso que ni siquiera atiné a enumerar las distintas cosas que en estas últimas varias semanas hicieron...Gracias. Mil veces gracias por todo!!! Y aún así me quedo corta ...

A mis abuelos, a mi mamá y a Martín

*Al éxito y al fracaso, esos dos impostores...
trátalos siempre con la misma indiferencia.*

Rudyard Kipling

*Nadie educa a nadie,
así como tampoco nadie se educa a sí mismo,
los hombres se educan en comunión.*

Paulo Freire

Para Horacio Bejarano. Siempre presente.

Índice general

Introducción	1
1. Dinámica de fluidos cargados	5
1.1. Flujos astrofísicos	5
1.2. Plasmas	6
1.2.1. Condición de cuasi-neutralidad	7
1.2.2. Colisiones entre partículas cargadas	9
1.2.3. Diferentes clases de plasmas	11
1.3. Distintos niveles de descripción	12
1.3.1. Equilibrio termodinámico local	15
1.3.2. Aproximación de medio continuo	15
2. Descripción teórica	17
2.1. Ecuaciones Básicas	17
2.1.1. Ecuaciones de Maxwell	18
2.1.2. Hidrodinámica	18
2.2. Magnetohidrodinámica (MHD)	20
2.2.1. Propagación de ondas MHD	26
–Análisis perturbativo	27
–Modos normales	29
–Estabilidad del sistema	32
2.3. Aproximación de dos fluidos	32
2.3.1. Ley de Ohm generalizada	34
2.3.2. Efecto Hall y difusión ambipolar	35
2.4. Hall-MHD	37
2.4.1. Propagación de ondas Hall-MHD	39
3. Flujos tipo <i>shear</i> en Hall-MHD	43
3.1. Flujos tipo <i>shear</i>	43
3.2. Aproximación <i>shearing-box</i>	45
3.3. Efecto Hall en flujos astrofísicos tipo <i>shear</i>	48
3.4. Ecuaciones Hall-MHD en la aproximación <i>shearing-box</i>	51
3.5. Simulaciones numéricas	54

Modelo 1D	57
Ecuaciones generales	57
Relación de dispersión	58
4. Inestabilidad Hall Magneto - Shear (Hall-MSI): 1D	63
4.1. Análisis lineal	63
4.2. Verificación numérica	66
4.3. Contexto astrofísico	67
5. Inestabilidad Hall Magneto - Rotacional (Hall-MRI): 1D	71
5.1. Análisis lineal	71
5.2. Verificación numérica	76
5.3. Contexto astrofísico	77
Epílogo (modelo 1D)	81
Ecuaciones no lineales	81
Conclusiones preliminares	88
6. Hall-MSI: perturbaciones 2D	91
6.1. Relación de dispersión	91
6.2. Resultados	95
6.3. Conclusiones preliminares	104
7. Hall-MSI en configuraciones 3D	105
7.1. Ecuaciones básicas	105
7.1.1. Inestabilidad Hall magneto-shear	106
7.1.2. Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz	107
7.2. Simulaciones globales	109
7.3. Resultados	110
7.4. Conclusiones preliminares	117
8. Conclusiones generales	119
Apéndice: Algunos parámetros de la física del plasma	125
Bibliografía	128

Introducción

En el Universo están presentes distintas clases de flujos astrofísicos que conforman múltiples y variadas configuraciones. En este sentido, el espacio constituye un excelente laboratorio natural para estudiar la física de plasmas y fluidos, complementando adecuadamente enfoques observacionales, numéricos y teóricos.

En esta Tesis se combinan herramientas teóricas y numéricas con el objeto de estudiar el desarrollo de inestabilidades en la microescala asociada a pequeñas parcelas de plasma, inmersas en un flujo macroscópico tipo *shear* bajo la acción de un campo magnético externo uniforme en presencia de corrientes de Hall. La relevancia del presente trabajo reside en que la evolución de inestabilidades locales podría conducir a la gestación de regímenes turbulentos microscópicos que, en última instancia, siendo responsables de los fenómenos de transporte, podrían condicionar la dinámica de la macroescala.

Los flujos astrofísicos involucran escalas espaciales muy grandes y, por ende, se caracterizan habitualmente por poseer altos números de Reynolds. Dado que este número adimensional expresa el cociente entre los efectos de convección y de disipación, los flujos con elevado número de Reynolds indican que el efecto dominante es el convectivo y que, en consecuencia, la dinámica del fluido es fuertemente no lineal por lo cual, en general, los flujos astrofísicos desarrollan turbulencia. Por lo tanto, la descripción microscópica de flujos astrofísicos, en relación con los fenómenos de transporte, puede proporcionar un modelo que permita explicar adecuadamente la dinámica asociada a las escalas macroscópicas.

El sistema de ecuaciones que describe la dinámica de pequeñas parcelas de fluido sujetas al efecto *shear*, se denominan ecuaciones tipo *shearing-box*. En particular, el marco teórico adecuado para estudiar flujos astrofísicos en presencia de campos magnéticos, es la teoría magnetohidrodinámica (MHD).

Específicamente, si se considera que el efecto Hall es relevante se denomina Hall-MHD. En este contexto, es posible realizar simulaciones locales tipo *shearing-box* (Hawley, Gammie, & Balbus, 1995; Brandenburg et al., 1995; Umurhan & Regev, 2004; Lesur & Longaretti, 2005) y estudiar la dinámica que gobierna las escalas microscópicas. En efecto, la aproximación tipo *shearing-box* permite estudiar la dinámica asociada a una región localizada, inmersa en un flujo de gran escala, que presenta fuertes gradientes en el campo de velocidades. Esta descripción, entonces, resulta adecuada para modelar la dinámica de las escalas microscópicas. En este sentido, las simulaciones locales tipo *shearing-box* son más apropiadas que las simulaciones globales para abordar los procesos de la microescala, dado que permiten alcanzar mayor resolución espacial (Regev & Umurhan, 2008; Bodo et al., 2008; Johansen, Youdin, & Klahr, 2009; Sorathia, Reynolds & Armitage, 2010).

A escalas microscópicas, el efecto Hall puede no ser despreciable en plasmas en los cuales la densidad de partículas cargadas resulte suficientemente baja, ya sea en plasmas calientes y tenues o en plasmas fríos con baja fracción de ionización (Huba, 1995; Balbus & Terquem, 2001; Mininni, Gómez & Mahajan, 2002; Mahajan, Mininni & Gómez, 2005; Pandey & Wardle, 2008). Por otra parte, el efecto de un flujo macroscópico sobre la dinámica de la microescala puede ser modelado a través de un flujo tipo *shear*. Por tal motivo, resulta relevante el análisis de estabilidad en flujos bajo la influencia conjunta del efecto Hall y del *shear*. Mediante herramientas teóricas y numéricas, se estudia el desarrollo de inestabilidades y su posterior evolución en el régimen lineal para flujos tipo *shear* en presencia de las corrientes de Hall. Como principal resultado, se encuentra una nueva inestabilidad a la cual se nombra *Hall magneto-shear instability* (Hall-MSI).

En concreto, esta Tesis estudia las características físicas de inestabilidades correspondientes a la dinámica microscópica de pequeñas porciones de plasma sometidas a la acción de gradientes intensos asociados al campo de velocidades de un flujo macroscópico y al efecto Hall. A tal fin, se deducen las ecuaciones dinámicas Hall-MHD en la aproximación *shearing-box* y se llevan a cabo simulaciones numéricas que permiten contrastar el modelo teórico desarrollado para la etapa lineal. Se exploran distintos regímenes físicos y se analizan distintas características de los diferentes estados del sistema, en términos de los parámetros físicos relevantes. Este análisis podría

contribuir a ponderar y cuantificar las magnitudes efectivas correspondientes a los fenómenos de transporte. En cualquier caso, el estudio sobre los procesos físicos microscópicos que controlan los fenómenos de transporte, es esencial para construir modelos macroscópicos que permitan explicar el desarrollo de turbulencia en distintos sistemas astrofísicos. En particular, el análisis realizado en esta Tesis podría resultar relevante en los procesos asociados al fenómeno de acreción y a los mecanismos de eyección, colimación y sustentación de los denominados *jets*.

La estructura de la Tesis está organizada de la siguiente manera. En el Capítulo 1, se describe brevemente las nociones elementales referentes a la física del plasma. En el Capítulo 2, se introducen las ecuaciones de la teoría magnetohidrodinámica (MHD); posteriormente, se obtienen las ecuaciones Hall-MHD y se señalan los conceptos básicos involucrados. En el Capítulo 3, se mencionan las principales características de los flujos tipo *shear* y se deducen las ecuaciones Hall-MHD en la aproximación *shearing-box* que constituyen el marco teórico y conceptual del trabajo presentado en esta Tesis. Puntualmente, se considera un plasma completamente ionizado permeado por un campo magnético externo en dirección axial. En los Capítulos siguientes se presenta el análisis de estabilidad efectuado para distintas configuraciones y sus potenciales aplicaciones en sistemas astrofísicos. En los Capítulos 4 y 5, se calcula la relación de dispersión en configuraciones 1D para flujos no rotantes y para flujos con rotación diferencial, respectivamente, y se contrastan los resultados teóricos mediante simulaciones numéricas. En ambos casos, se aborda cualitativamente el estudio del régimen no lineal desde un enfoque esencialmente numérico. En el Capítulo 6, se analiza la estabilidad de los modos normales de propagación en configuraciones 2D y se compara las predicciones del modelo teórico con los resultados numéricos. En el Capítulo 7, se estudia la estabilidad en configuraciones 3D con geometrías tales que permiten el desarrollo simultáneo de la inestabilidad macroscópica Kelvin-Helmholtz y la micro inestabilidad Hall magneto-shear. Finalmente, en el Capítulo 8 se exponen las conclusiones de la Tesis enfatizando, especialmente, la potencial relevancia de la inestabilidad Hall magneto-shear en sistemas astrofísicos tales como discos de acreción y jets.

Capítulo 1

Dinámica de fluidos cargados

1.1. Flujos astrofísicos

Desde sus orígenes y hasta mediados del siglo XX, la astronomía sólo realizaba observaciones en el rango del visible. Esta estrecha franja del espectro electromagnético, se corresponde con espectros de cuerpo negro cuyas temperaturas se encuentran entre 4000K y 10000K que, aproximadamente, coincide con el rango de temperaturas superficiales de las estrellas pertenecientes a la secuencia principal del diagrama HR.¹ A mediados del siglo XX surge la astronomía de ondas de radio y desde entonces la observación astronómica comenzó a encontrar distintas ventanas a lo largo de todo el espectro electromagnético. En la actualidad, la mayoría de los fenómenos astrofísicos se estudian mediante observaciones en todas las frecuencias (astronomía de multifrecuencia). Asimismo, el comienzo de la era espacial resultó crucial en el avance acelerado de la astronomía, empleando naves espaciales ya sea para enviar instrumentación fuera de la atmósfera terrestre para efectuar observaciones o también para realizar mediciones *in situ*. Paralelamente, el progreso en el conocimiento de los fenómenos astrofísicos se incrementó sustancialmente debido al desarrollo sostenido de las simulaciones numéricas en las últimas décadas.

Muchos de los sistemas astrofísicos que se observan en el Universo pueden ser modelados mediante flujos de partículas neutras o cargadas. Por otra

¹El diagrama de Hertzsprung-Russell permite clasificar a las estrellas a partir de su temperatura y luminosidad (cantidad de energía radiada por unidad de tiempo). La evolución de cada tipo de estrella (dada su masa inicial) se representa como una trayectoria en este diagrama.

parte, los campos magnéticos desempeñan un rol esencial en objetos tales como planetas, estrellas, medio interestelar, galaxias, cúmulos de galaxias, púlsares, discos de acreción, *jets*, explosiones de supernovas, erupciones de rayos gamma (*gamma ray burst*), rayos cósmicos, entre otros. No obstante, el origen, la morfología y la intensidad de los campos magnéticos asociados a cada uno de estos sistemas pueden ser muy distintos entre sí. Resulta entonces indispensable utilizar las herramientas teóricas provistas por la física de fluidos tanto neutros como cargados para estudiar la enorme diversidad de flujos astrofísicos observados en el Universo. Cabe aclarar, sin embargo, que existen sistemas astrofísicos en los cuales resulta necesario incluir otros efectos no contemplados por la dinámica de fluidos (neutros o cargados). Por ejemplo, cuando se considera la interacción entre fluido y radiación hay que tener en cuenta los procesos asociados a la presión de radiación y su influencia sobre el movimiento del fluido. Igualmente, existen sistemas en los cuales hay que considerar las correcciones que tanto la relatividad especial como la relatividad general incorporan a las ecuaciones básicas. Por un lado, la relatividad especial resulta relevante en sistemas en los cuales las partículas se mueven a velocidades próximas a la velocidad de la luz (es decir, sistemas que presentan temperaturas muy elevadas). Por el otro, los efectos de la relatividad general no pueden despreciarse si el fluido se encuentra en un campo gravitatorio intenso (es decir, cuando la energía potencial gravitatoria es comparable a la energía en reposo). En particular, el trabajo realizado en la presente Tesis se desarrolla en el contexto de los fluidos cargados no relativistas.

1.2. Plasmas

La materia ordinaria² cambia de estado de agregación en la medida en que la temperatura del sistema aumenta, transformándose de estado sólido a estado líquido y, posteriormente, a estado gaseoso. Si la temperatura del sistema sigue aumentando aún más, el gas se ioniza y el sistema pasa a estar en estado de plasma, razón por la cual también se denomina cuarto estado de la materia. De modo que, mediante procesos de ionización, es posible

²Los modelos cosmológicos actuales contemplan que el Universo está compuesto por energía oscura ($\sim 71,4\%$), materia oscura ($\sim 24\%$) y materia ordinaria o hadrónica ($\sim 4,6\%$), según los valores establecidos por NASA/WMAP *Science Team* <http://map.gsfc.nasa.gov/>.

romper las estructuras atómicas y moleculares que constituyen la materia, generándose un gas formado por iones y electrones libres y, eventualmente, con algún excedente de partículas neutras. Para producir este tipo de ruptura y alcanzar este estado de la materia se requiere temperaturas relativamente moderadas ($T \gtrsim 10^4\text{K}$) las cuales se alcanzan en una gran variedad de fenómenos astrofísicos.³ En el planeta Tierra, la materia se encuentra principalmente en tres estados: sólido, líquido y gaseoso. En el Universo, en cambio, se estima que prácticamente toda la materia ordinaria se encuentra en estado de plasma. La mayoría de los objetos astrofísicos (estrellas, medio interplanetario, medio interestelar, medio intergaláctico, magnetósferas planetarias, remanentes de supernovas, etc.) están conformados por material ionizado y por lo tanto la dinámica de los plasmas resulta relevante en, virtualmente, cualquier escenario astrofísico.

1.2.1. Condición de cuasi-neutralidad

En un plasma no relativista, las densidades de electrones y de iones, pueden ser consideradas aproximadamente iguales (neutralidad de carga), dado que si hubiese un pequeño desbalance en la carga, los campos eléctricos generados por ese desbalance producirían una redistribución de las partículas restaurando rápidamente la condición de cuasi-neutralidad.⁴ De todas formas, el plasma está sujeto a pequeñas y constantes perturbaciones que atentan contra la condición de neutralidad, generándose oscilaciones del plasma asociadas a cada una de las especies que lo componen. Dadas las densidades $n_{e,i}$ y las masas $m_{e,i}$ de electrones e iones, se considera una pequeña región en la cual hay un exceso de electrones ($n_i = n$ y $n_e = n + n'(\mathbf{x}, t)$ con $n' \ll n$). Asumiendo, por simplicidad, que hay igual cantidad de iones y electrones (es decir, que el número atómico es $Z = 1$) y teniendo en cuenta que $m_e \ll m_i$, se obtiene mediante la ecuación de Navier-Stokes y la ecuación de continuidad de la carga para los electrones, una ecuación de onda para la densidad en

³La energía de ionización del hidrógeno 13,6eV corresponde a temperaturas del orden de 10^4K .

⁴Sea un plasma de densidad de partículas n , en el que surge un desbalance del 1% en una región de volumen V y radio r . Los electrones (carga eléctrica e y masa m_e) sobre el límite de esa región experimentan un campo eléctrico \mathbf{E} tal que adquieren una aceleración $\dot{v} = e|\mathbf{E}|/m_e = Vne^2/100m_e r^2 \sim 10^{17}\text{cm s}^{-2}$. Para una densidad $n \sim 10^{10}\text{cm}^{-3}$ confinada en un volumen de radio $r = 1\text{cm}$, el desbalance de cargas es neutralizado en un tiempo del orden de 10^{-9}s .

exceso n' a partir de la cual se define la frecuencia de oscilación del plasma, como consecuencia del movimiento restitutivo de las cargas hacia sus respectivas posiciones de equilibrio,⁵

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m_e}}. \quad (1.1)$$

Si la frecuencia del plasma es tal que $\omega_p > \omega$, se dice que el plasma es opaco a la radiación electromagnética de frecuencia ω , dado que las variaciones del plasma son más rápidas que las variaciones de los campos electromagnéticos externos. Por lo tanto, la radiación no puede penetrar el plasma y es completamente reflejada.

A su vez, la frecuencia de plasma, naturalmente, tiene asociada una escala temporal ν_p^{-1} (siendo $\nu_p = \omega_p/2\pi$) de oscilación de las cargas y, por ende, una longitud característica. El campo eléctrico generado por el desbalance de cargas tiene un rango de aplicación del orden de esta longitud, producto del denominado efecto de apantallamiento debido al flujo de electrones. Esta longitud característica de apantallamiento del campo eléctrico se conoce como longitud de Debye

$$\lambda_D = \frac{v_{Te}}{\omega_{pe}}, \quad (1.2)$$

donde $v_{Te} \sim (k_B T_e/m_e)^{1/2}$ es la velocidad térmica electrónica, siendo $k_B = 1,38 \times 10^{-16} \text{erg K}^{-1}$ la constante de Boltzmann y T_e la temperatura del flujo asociado a los electrones. Esta longitud representa la escala por debajo de la cual se pueden producir desviaciones en la condición de neutralidad, especificando, además, el rango efectivo para las interacciones coulombianas en el plasma. En consecuencia, en el seno de un plasma, el potencial coulombiano se modifica mediante un factor e^{-r/λ_D} en la vecindad de cada una de las partículas cargadas. Así, el efecto de una carga es apantallado más allá de la longitud de Debye. En otras palabras, si bien el campo eléctrico de una partícula cargada se extiende hacia el infinito, la influencia de la partícula cargada inmersa en un plasma, efectivamente, sólo alcanza un volumen delimitado por la longitud de Debye (esfera de Debye), de manera que una partícula cargada en el interior de un plasma sólo interactúa con

⁵Incluso en plasmas que no están sometidos a pequeñas perturbaciones externas, las cargas presentan fluctuaciones debido al movimiento térmico de los electrones.

partículas que están adentro de la esfera de Debye.

En síntesis, la aproximación de cuasi-neutralidad establece que un plasma puede considerarse neutro cuando las distancias involucradas son mayores que λ_D , dado que se apantalla el campo de Coulomb correspondiente a cualquier partícula cuyo tiempo característico de interacción sea mayor que ν_p^{-1} , tiempo que tarda el plasma en reaccionar frente a perturbaciones en el balance de cargas. Por el contrario, el balance de cargas puede no ser válido para distancias menores a la longitud de Debye o frecuencias mayores a la frecuencia de plasma (es decir, distancias y tiempos muy pequeños).

1.2.2. Colisiones entre partículas cargadas

La diferencia entre un gas atómico o molecular y un plasma radica, principalmente, en que éste último está constituido por gases de partículas eléctricamente cargadas: electrones libres, diferentes clases de iones y partículas neutras. Por lo tanto, existen dos diferencias fundamentales con respecto a los gases atómicos o moleculares. En primer lugar, la interacción coulombiana entre partículas cargadas decrece lentamente con la distancia, de manera que cada partícula interactúa con muchas otras en un mismo instante. Esta situación, justamente, complica la descripción de las colisiones entre partículas con respecto a los gases atómicos o moleculares en los cuales predominan las interacciones de corto alcance. En segundo lugar, las masas de las distintas especies pueden ser muy diferentes y, por ende, en las colisiones entre partículas de distinta masa se transfiere sólo una porción (del orden del cociente de las masas) de la energía cinética. Esto, a su vez, posibilita que las distintas especies de un plasma posean diferentes temperaturas a escalas temporales apreciables. Si además las partículas cargadas están inmersas en un campo magnético externo, surgen dificultades adicionales.

De manera que las partículas en un plasma están sujetas a los campos electrostáticos de las partículas restantes e incluso pueden estar sometidas a la influencia de campos magnéticos externos.⁶ Por consiguiente, entre colisiones, las partículas cargadas interactúan con otras partículas en todo momento y, por lo tanto, las trayectorias que describen pueden ser muy complejas mientras que las partículas neutras se mueven en líneas rectas. Por

⁶Debido al apantallamiento de Debye, el interior de un plasma está usualmente protegido de la influencia de campos eléctricos externos.

otra parte, aunque la aceleración de partículas cargadas produce radiación electromagnética a expensas de la energía cinética de las partículas que colisionan mediante la interacción coulombiana, es posible considerar que las colisiones entre partículas son colisiones elásticas y, por ende, que la energía se conserva, dado que la pérdida de energía por radiación es despreciable en cada colisión.⁷

Las colisiones en un plasma pueden ser de dos clases: colisiones entre partículas cargadas y colisiones entre partículas cargadas y neutras. Teniendo en cuenta que el grado de ionización, para un gas en equilibrio termodinámico a una dada presión y temperatura, está determinado por los procesos atómicos y puede ser obtenido a partir de la ecuación de ionización de Saha,⁸ la primera clase de colisiones son predominantes en plasmas con grado de ionización alto mientras que la segunda clase corresponde a plasmas débilmente ionizados.

Analizando las colisiones coulombianas entre dos partículas tanto para colisiones cercanas como lejanas (factor de impacto pequeño o grande, respectivamente), se puede concluir que el efecto de la suma de muchas colisiones distantes débiles en un plasma resulta más importante que el efecto de algunas pocas colisiones aledañas. Si el plasma está débilmente ionizado, las partículas cargadas colisionan con mayor frecuencia con las partículas neutras que con otras partículas cargadas. Estas colisiones se producen cuando ambas clases de partículas se encuentran muy próximas entre sí, y en consecuencia, como resultado de la colisión, se produce una fuerte deflexión. Si el plasma está fuertemente ionizado, las colisiones debido a la fuerza de Coulomb son predominantes. En este caso, la mayoría de las partículas interactúan estando alejadas unas de otras y, por lo tanto, las desviaciones en las trayectorias son poco apreciables. Por eso se requiere una sucesión de interacciones para que se produzca un cambio perceptible en la trayectoria de las partículas cargadas.

Asimismo, los efectos colisionales de las partículas están directamente relacionados con los fenómenos de transporte. Por un lado, las interacciones débiles de largo alcance se incorporan mediante campos eléctricos y magnéticos promedio. Propiedades tales como la conductividad térmica y la conductivi-

⁷Para una partícula con velocidad v , el cociente entre las pérdidas de energía debido a la radiación y a la colisión es $P_{rad}/P_{col} \sim 1/137(v/c)^2 \ll 1$, siendo c la velocidad de la luz.

⁸La ecuación de Saha describe el grado de ionización de un plasma como función de la temperatura, la densidad y las energías de ionización asociadas.

dad eléctrica corresponden a fenómenos que suceden a escalas temporales más rápidas que el tiempo característico entre colisiones. Por el otro, las interacciones fuertes de corto alcance debido a las interacciones binarias se contemplan vía un término extra (términos de colisiones) en los correspondientes sistemas de ecuaciones. Para estimar los coeficientes de transporte, basta calcular, a primer orden, los apartamientos del equilibrio termodinámico.

1.2.3. Diferentes clases de plasmas

A partir de la densidad de partículas y la temperatura pueden considerarse diferentes clases de plasmas, pudiendo diferir ambas magnitudes entre las distintas clases, incluso varios órdenes de magnitud. En la Figura 1.1 se esquematiza las regiones en la que se encuentran los plasmas según su densidad y su temperatura. Se muestran ejemplos tanto de plasmas astrofísicos como de plasmas de laboratorio.

Una medida de la energía potencial de las interacciones con respecto a la energía cinética puede determinarse definiendo la siguiente cantidad $g = (n\lambda_D^3)^{-1}$ que, a su vez, representa la inversa del número de partículas adentro de la esfera de Debye, es decir, la inversa del número de partículas que actúan simultáneamente. Si $(n\lambda_D^3)^{-1} \ll 1$ (para plasmas de bajas densidades), muchas partículas interactúan entre sí pero la interacción es débil, mientras que si $(n\lambda_D^3)^{-1} \gg 1$ (para plasmas de altas densidades), pocas partículas interactúan colectivamente aunque la interacción entre partículas es fuerte. La condición $g < 1$ constituye el límite a partir del cual el sistema deja de ser considerado como un plasma. Por otra parte, si los efectos colectivos de las partículas del plasma no tienen relevancia, entonces el sistema puede tratarse como diferentes gases independientes para cada una de las especies.

En el Apéndice “Algunos parámetros de la física del plasma” se presentan los parámetros más relevantes en el contexto de plasmas astrofísicos utilizados y/o mencionados a lo largo de la Tesis.

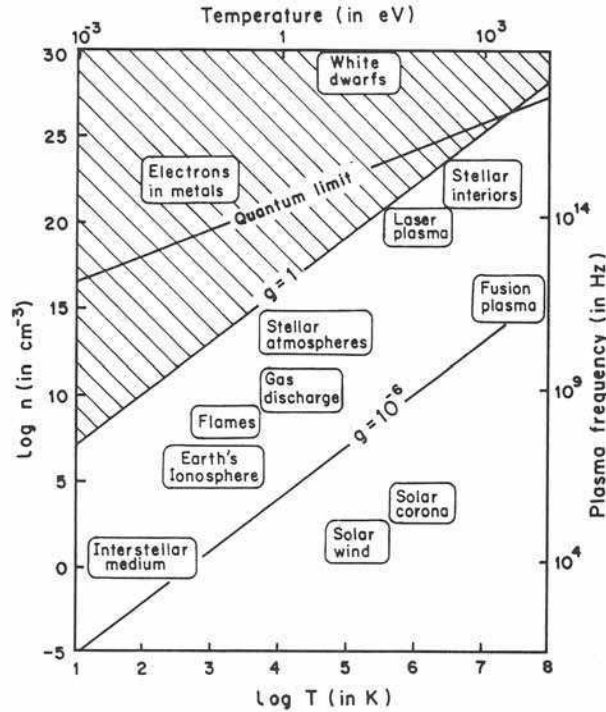


Figura 1.1: A partir de la densidad de partículas n , la temperatura T y la frecuencia de plasma ω_p (proporcional a $n^{1/2}$) quedan determinadas distintas clases de plasmas ($g = (n\lambda_D)^{-1}$). Figura extraída de Choudhuri (1998).

1.3. Distintos niveles de descripción

Los sistemas de partículas neutras o cargadas pueden ser descritos según distintos modelos teóricos, apropiados para distintos niveles de descripción, dependiendo de las características de cada sistema y la clase de fenómenos involucrados.

A nivel fundamental (nivel 0), todas las partículas microscópicas obedecen las leyes de la mecánica cuántica. La descripción del sistema está dada por la función de onda y su evolución temporal se rige por la ecuación de Schrödinger.

En el nivel de descripción siguiente (nivel 1), el sistema puede ser modelado como un conjunto de N partículas clásicas siempre y cuando el tamaño de los paquetes de onda de las partículas individuales (longitud de onda de De Broglie) sea mucho menor que la distancia típica entre partículas. Por lo

tanto, los paquetes de onda están separados entre sí y, en consecuencia, la interferencia cuántica no resulta relevante (teorema de Ehrenfest).⁹ En este nivel de descripción, un sistema de N partículas clásicas está descrito por el conjunto total de coordenadas y velocidades $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N)$ y la evolución temporal está dada por las leyes de Newton. Si, además, las partículas están cargadas se requieren las leyes del electromagnetismo para describir su dinámica en presencia de campos eléctricos y magnéticos.

Para N suficientemente grande (nivel 2) es necesario introducir el concepto de función de distribución $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ que proporciona la densidad de partículas en el espacio de seis dimensiones dado por (\mathbf{x}, \mathbf{u}) a un tiempo t . De esta manera, para describir un sistema de N partículas en este espacio se requieren N puntos. La evolución temporal de la función de distribución está determinada por la ecuación de Boltzmann para el caso de partículas neutras y por la ecuación de Vlasov para partículas cargadas.¹⁰ En este espacio, la función de distribución puede introducirse si el cociente entre el número de puntos en un pequeño volumen del espacio 6-dimensional (\mathbf{x}, \mathbf{u}) y el tamaño de ese pequeño volumen tiende a cero, de tal modo que el volumen sea lo suficientemente grande para albergar una cantidad significativa de puntos pero lo suficientemente chico en comparación con la extensión total del espacio (\mathbf{x}, \mathbf{u}) . Debido a la naturaleza de las interacciones involucradas, el tratamiento de los sistemas en los cuales las interacciones entre partículas no son despreciables introduce modificaciones distintas según el conjunto de partículas sea neutro o cargado, siendo más complejas en el último caso en donde las interacciones son de largo alcance. Este nivel de descripción corresponde al campo de la teoría cinética en donde se emplean métodos asociados a la mecánica estadística.

En el último nivel de descripción (nivel 3), el sistema es modelado como un medio continuo (los observables macroscópicos están determinados por los momentos sucesivos de la función de distribución). De manera que el estado

⁹Existen conjuntos de partículas que son inherentemente cuánticas y que no pueden ser sometidas a una descripción clásica, tal es el caso, por ejemplo, del material que constituye el interior de las enanas blancas.

¹⁰En la teoría de Vlasov, los campos microscópicos producidos por las partículas del plasma son reemplazados por campos promedios para un dado punto espacial y la función de distribución es calculada en forma auto-consistente con dichos campos. En esta teoría, el plasma es tratado como un fluido en el espacio de las fases (\mathbf{x}, \mathbf{u}) describiéndolo en términos de la función de distribución. La ecuación de Vlasov resulta adecuada para sistemas en los cuales las escalas temporales son mucho menores que el tiempo entre colisiones.

Neutral fluids		
Level	Description of state	Dynamical equations
0: N quantum particles	$\psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$	Schrödinger's eqn.
1: N classical particles	$(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N)$	Newton's laws
2: Distribution function	$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$	Boltzmann eqn.
3: Continuum model	$\rho(\mathbf{x}), T(\mathbf{x}), \mathbf{v}(\mathbf{x})$	Hydrodynamic eqns.
Plasmas (Levels 0 and 1 same as above)		
Level	Description of state	Dynamical equations
2: Distribution function	$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$	Vlasov eqn.
$2\frac{1}{2}$: Two-fluid model		
3: One-fluid model	$\rho(\mathbf{x}), T(\mathbf{x}), \mathbf{v}(\mathbf{x}), \mathbf{B}(\mathbf{x})$	MHD eqns.

Figura 1.2: Los fluidos (neutros o cargados) presentan distintos niveles de descripción según sean las aproximaciones consideradas en cada caso. Figura adaptada de Choudhuri (1998).

de un elemento de fluido queda descrito por su velocidad y por dos variables termodinámicas con tal que la aproximación de equilibrio termodinámico local sea válida. De modo que el estado de todo el flujo está determinado por tres magnitudes macroscópicas promedio, en cada punto del fluido y en cada instante de tiempo: la velocidad \mathbf{v} y, por ejemplo, la densidad ρ y la temperatura T . La evolución temporal de estos observables está dada por el conjunto de ecuaciones de la teoría hidrodinámica. Para los fluidos cargados se requiere, además, una variable adicional, el campo magnético \mathbf{B} , dado que los plasmas son permeables a los efectos de los campos magnéticos. Así, la evolución temporal está determinada por las ecuaciones de la teoría magnetohidrodinámica.

No obstante, existen situaciones en las que los campos eléctricos no pueden ser ignorados (a pesar de que el campo eléctrico no es una variable dinámica extra). En este caso resulta necesario un nivel intermedio de descripción (nivel $2\frac{1}{2}$) en el cual el plasma es considerado como la mezcla de dos fluidos con cargas opuestas (*two-fluid approximation*¹¹). A modo de resumen, en la Figura 1.2 se esquematiza esta jerarquía de niveles de descripción a partir de los cuales se puede abordar el estudio de una colección de partículas neutras

¹¹En contraposición con la aproximación magnetohidrodinámica, también denominada aproximación de un fluido (*one-fluid approximation*) debido a que el sistema de partículas sigue una dinámica colectiva cuando la inercia electrónica es considerada despreciable.

o cargadas.

1.3.1. Equilibrio termodinámico local

En el sistema de referencia solidario al movimiento del fluido es posible definir, localmente, una velocidad media que caracteriza el movimiento de las partículas cuya función distribución resulta ser de Maxwell-Boltzmann lo cual, a su vez, permite asociar una determinada temperatura. En consecuencia, un sistema de partículas puede ser tratado como un medio continuo si la frecuencia de colisiones es tal que la función de distribución se mantiene localmente próxima a la distribución maxwelliana. Esto es, el sistema presenta regiones que localmente se encuentran en equilibrio térmico, a pesar de que distintas partes del sistema no estén en equilibrio termodinámico unas con otras. Cuanto menor sea el camino libre medio respecto a las longitudes características del sistema, más adecuada será la aproximación de equilibrio térmico local y, consecuentemente, la descripción de medio continuo. Efectivamente, a pesar de que las partículas cargadas interactúan mediante fuerzas de largo alcance, existen regiones del plasma que, localmente, están en equilibrio termodinámico. El campo eléctrico es apantallado en el volumen encerrado por la esfera de Debye, garantizando la existencia de porciones de plasma estadísticamente neutras, permitiendo la aproximación de medio continuo.

1.3.2. Aproximación de medio continuo

Tanto la física de los fluidos como la física de los plasmas describen el comportamiento de un conjunto de partículas neutras y cargadas, respectivamente. Ambas teorías presentan aspectos microscópicos y macroscópicos, en tanto modelan partículas o un medio continuo. Las partículas en un fluido neutro sólo interactúan mediante choques, mientras que las partículas cargadas en un plasma interactúan a través de las interacciones electromagnéticas de largo alcance. Esta diferencia en la naturaleza de las interacciones produce que las descripciones microscópicas sean sutilmente diferentes. Asimismo, se espera que las dinámicas asociadas a la pequeña y a la gran escala sean distintas dado que en cierto nivel de descripción un fluido o un plasma es considerado un conjunto de partículas, y en otro nivel como un medio continuo. Ambos enfoques describen el comportamiento de un gas neutro o un gas ionizado, en

tanto se caracteriza como un conjunto de partículas que se mueven en forma independiente o un conjunto de partículas que actúan en forma colectiva.

Para un sistema cuyas longitudes características son varias veces la distancia que recorre una partícula entre colisiones, es posible definir un elemento de volumen cuya longitud sea mucho mayor que el camino libre medio¹² pero mucho menor que la longitud característica del problema. De este modo, el elemento de volumen está compuesto por un número estadísticamente grande de partículas que se mueven aleatoriamente. A partir de los efectos colisionales (vía promedios estadísticos) se pueden obtener cantidades macroscópicas que describen la acción conjunta de las partículas que integran dicho elemento de volumen. Mientras que el nivel de descripción de partículas individuales ignora los efectos colectivos, la aproximación de medio continuo, describe la dinámica macroscópica de un fluido (neutro o cargado), promediando las fluctuaciones microscópicas. Así, el sistema de partículas puede ser aproximado como un medio continuo, definido por magnitudes macroscópicas, funciones de la posición y del tiempo: aproximación hidrodinámica para flujos neutros o aproximación magnetohidrodinámica para flujos cargados.¹³

¹²En un plasma, el camino libre medio entre colisiones coulombianas es mucho mayor que la longitud de Debye. En particular, la descripción fluidística de un plasma requiere, además, escalas espaciales y temporales mucho mayores que, respectivamente, el radio de ciclotrón (radio de Larmor) y la inversa de la frecuencia ciclotrón (las definiciones de estas magnitudes se pueden ver en el Apéndice). De manera que la separación entre cargas puede despreciarse, y el plasma puede considerarse como un conjunto de partículas que actúan colectivamente.

¹³Si las longitudes del problema son comparables al camino libre medio la aproximación de medio continuo deja de ser válida siendo entonces la teoría cinética el enfoque apropiado para estudiar las propiedades del sistema.

Capítulo 2

Descripción teórica

2.1. Ecuaciones Básicas

Los plasmas interactúan significativamente con campos magnéticos y eléctricos dado que son flujos compuestos por partículas cargadas tales como iones y electrones libres. Bajo ciertas condiciones, el plasma puede ser considerado como un medio continuo, es decir, como un fluido. Las partículas cargadas en un plasma dan lugar a campos eléctricos y el flujo de estas partículas genera corrientes eléctricas que, a su vez, generan campos magnéticos. Consecuentemente, el movimiento del flujo de partículas es afectado por la presencia de campos tanto externos como auto-consistentes.¹ De esta manera, se desarrolla una dinámica compleja como consecuencia del acoplamiento entre el campo de velocidades y el campo magnético. La teoría magnetohidrodinámica (MHD) describe el comportamiento macroscópico del plasma a partir de un conjunto de ecuaciones que gobiernan la evolución e interacción entre estos campos y resulta adecuada para describir la dinámica macroscópica del plasma. La aproximación MHD parte de la hipótesis de que el plasma es un medio continuo no relativista en equilibrio termodinámico local. Por lo tanto, las ecuaciones MHD pueden ser deducidas a partir de las leyes del electromagnetismo y de la mecánica de fluidos.²

¹Los campos generados por las corrientes y las cargas en el plasma, se denominan campos auto-consistentes.

²Las ecuaciones MHD también pueden ser obtenidas desde un punto de vista microscópico (al igual que las ecuaciones de la teoría hidrodinámica), mediante los momentos que se definen a partir de promedios en las ecuaciones de la teoría cinética.

2.1.1. Ecuaciones de Maxwell

En el sistema de unidades cgs, las ecuaciones de Maxwell son³:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_c, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (2.4)$$

La ecuación (2.1) o Ley de Gauss indica que las cargas eléctricas (con ρ_c la densidad de carga) son fuentes o sumideros del campo eléctrico \mathbf{E} . La ecuación (2.2) muestra que las líneas del campo magnético \mathbf{B} , son cerradas y, por lo tanto, no existe el concepto de carga magnética (ausencia de monopolos magnéticos). La ecuación (2.3) corresponde a la Ley de Faraday según la cual la distribución espacial de \mathbf{E} condiciona las variaciones temporales de \mathbf{B} (siendo c la velocidad de la luz en el vacío). La ecuación (2.4) o Ley de Ampère determina la evolución temporal del campo eléctrico a partir de la distribución espacial de la densidad de corriente eléctrica \mathbf{J} y el campo magnético \mathbf{B} . En la presente Tesis, se estudian sistemas en los cuales las velocidades involucradas son no relativistas, por tanto, la corriente de desplazamiento ($\partial\mathbf{E}/\partial t$) se asume despreciable.

2.1.2. Hidrodinámica

La dinámica de un fluido neutro queda completamente definida a partir del sistema de ecuaciones hidrodinámicas que expresan la conservación del momento lineal, de la masa y de la energía.

La ecuación de movimiento de un fluido es la conocida ecuación de Navier-Stokes que, en un sistema de referencia inercial, se escribe como

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \frac{\mathbf{f}}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2.5)$$

donde \mathbf{u} es el campo de velocidades, P es la presión (supuesta isótropa), ρ es

³En electrodinámica, las ecuaciones de Maxwell distinguen cuatro campos: \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} y \mathbf{H} . Esta distinción no resulta útil en el estudio de plasmas dado que, usualmente, no se considera la diferencia entre conductores y medio, en tanto no se presenta la diferencia entre cargas y corrientes en un conductor y cargas y corrientes inducidas en el medio.

la densidad de masa, \mathbf{f} es la fuerza total por unidad de volumen aplicada en el interior del elemento de volumen y ν es el coeficiente de viscosidad cinemática ($\nu = \mu/\rho$ con μ la denominada viscosidad dinámica). La ecuación de Navier-Stokes expresa las variaciones de la cantidad de movimiento debido a las fuerzas que actúan sobre un elemento de fluido, ya sean fuerzas por unidad de volumen o esfuerzos tangenciales (fuerzas de contacto entre elementos de fluido vecinos), representadas por los términos del miembro derecho de la ecuación de movimiento. Mientras que el miembro izquierdo asociado a la derivada convectiva ($\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$) expresa los cambios de la velocidad siguiendo al elemento de fluido, de tal modo que el término $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ da cuenta de la convección del momento a través del gradiente de velocidades.⁴

La ecuación de conservación de la masa está dada por la denominada ecuación de continuidad⁵

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\rho) = 0 . \quad (2.6)$$

Esta ecuación indica que las variaciones temporales de la densidad de masa de un elemento de fluido se deben a divergencias no nulas del campo de velocidades (deformaciones del elemento de fluido).

La ecuación de la conservación de la energía considera la energía de un elemento de fluido como la suma de la energía cinética $\rho v^2/2$ y de la energía térmica $\rho\epsilon$ (siendo ϵ la energía interna por unidad de masa) la cual depende de la temperatura del flujo y está asociada a la energía de cada grado de libertad de cada partícula $k_B T/2$ (con k_B la constante de Boltzmann), según el teorema de equipartición. Asimismo, esta ecuación debe tener en cuenta la tasa de energía radiada que gana o pierde el sistema por absorción o emisión, respectivamente, y el flujo de calor que mide la tasa de transporte de energía térmica debido a movimientos aleatorios de las partículas. No obstante, bajo ciertas condiciones, la ecuación para la energía puede ser reemplazada por la ecuación de estado que, usualmente, relaciona las variables termodinámicas (densidad, temperatura y presión), en tanto sólo dos variables son independientes. Asumiendo que no hay emisión ni conducción térmica entre los elementos de fluidos y el medio que los rodea, se puede considerar que las

⁴La derivada lagrangiana (derivada total) expresa la variación temporal siguiendo al elemento de fluido que se mueve con velocidad \mathbf{u} mientras que la derivada euleriana (∂_t) corresponde a la diferenciación con respecto al tiempo en un punto fijo del espacio.

⁵Análogamente, la densidad de carga eléctrica satisface una ecuación equivalente.

variables termodinámicas se relacionan mediante la ecuación de estado de un gas ideal.⁶ Si, además, la presión es tal que es función sólo de la densidad $P(\rho)$, el fluido se denomina barotrópico. En particular, el flujo se dice politrópico si satisface la siguiente condición

$$\frac{P}{\rho^{n_p}} = \text{const} , \quad (2.7)$$

donde n_p es el índice politrópico. Esta relación describe distintos procesos posibles según el valor del índice n_p . Por ejemplo, para flujos isotérmicos, se tiene que $n_p = 1$ mientras que para flujos adiabáticos $n_p = \gamma$ (siendo γ el índice adiabático: cociente de los calores específicos a presión y a volumen constantes). El fluido será adiabático o isotérmico dependiendo de cómo sean los procesos radiativos de enfriamiento y calentamiento del gas. En el límite $n_p \rightarrow \infty$, el flujo se considera incompresible en tanto que las fluctuaciones de presión no conducen a cambios en la densidad.

El conjunto de las ecuaciones básicas de la teoría hidrodinámica descrito, se deduce asumiendo despreciables (i) la variación espacial del coeficiente de viscosidad y la producción de calor debido al amortiguamiento viscoso de los movimientos de las partículas y (ii) el término de viscosidad asociado a la divergencia del campo velocidad (hipótesis apropiada para flujos aproximadamente incompresibles).

2.2. Magnetohidrodinámica (MHD)

Las ecuaciones MHD describen la compleja interacción entre las partículas cargadas de un plasma y los campos electromagnéticos tanto externos como auto-consistentes (generados por las propias partículas del sistema). Debido a que los plasmas presentan una conductividad eléctrica significativa, el movimiento del flujo produce cambios en los campos electromagnéticos los cuales, a su vez, generan efectos dinámicos que influyen en los movimientos del medio. En consecuencia, cualquier problema MHD constituye un complicado sistema que acopla la dinámica de la materia con la dinámica de los campos eléctrico y magnético.

Una partícula cargada bajo la acción de un campo electromagnético,

⁶ $P = \rho k_B T / M_m$ donde M_m es la masa molecular media.

está sometida a la influencia de la fuerza de Lorentz. En general, teniendo en cuenta que $n_{i,e}$ representa la densidad de iones y de electrones con cargas, respectivamente, Ze (con Z el número total de protones) y $-e$ y con velocidades $\mathbf{u}_{i,e}$, se obtiene la fuerza de Lorentz por unidad de volumen, la cual representa la influencia tanto del campo eléctrico como del campo magnético

$$\begin{aligned} F_L &= (Zen_i - en_e)\mathbf{E} + \frac{(Zen_i\mathbf{u}_i - en_e\mathbf{u}_e) \times \mathbf{B}}{c} \\ &= \rho_c\mathbf{E} + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde ρ_c es la densidad de carga eléctrica y \mathbf{J} la densidad de corriente.⁷ Para fluidos altamente conductores que se mueven a velocidades no relativistas la componente eléctrica de la fuerza de Lorentz, puede despreciarse dado que puede verse, a partir de las leyes de Gauss (2.1) y Ampère (2.4), que $|\rho_c\mathbf{E}|/|(\mathbf{J} \times \mathbf{B})/c| \approx \mathbf{u}^2/c^2 \ll 1$, asumiendo, además, que las escalas de variación de los campos eléctrico y magnéticos son comparables.

Teniendo en cuenta que la masa de los electrones es mucho menor a la masa de los iones

$$\rho = n_em_em_e + n_im_im_i \approx nm_i, \quad (2.9)$$

y asumiendo que $u_e/u_i \ll m_i/m_e$

$$\mathbf{u} = \frac{n_im_i\mathbf{u}_i + n_em_e\mathbf{u}_e}{n_im_i + n_em_e} \approx \mathbf{u}_i, \quad (2.10)$$

se obtienen las magnitudes macroscópicas densidad de masa ρ y velocidad del fluido \mathbf{u} .

A partir de la ecuación de movimiento para fluidos neutros (2.5), incluyendo la componente magnética de la fuerza de Lorentz $((\mathbf{J} \times \mathbf{B})/c)$ debido a la presencia de un campo electromagnético, y de las magnitudes macroscópicas (2.9)–(2.10), se encuentra la ecuación de movimiento en la aproximación MHD

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (2.11)$$

Usando la ley de Ampère (2.4) puede obtenerse la densidad de corriente en términos del campo magnético lo que, a su vez, permite (utilizando, además,

⁷En particular, un gas de hidrógeno ($Z = 1$) totalmente ionizado es tal que $\rho_c \approx 0$ mientras que $\mathbf{J} = e(n_i\mathbf{u}_i - n_e\mathbf{u}_e) \approx en(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e)$.

una identidad vectorial⁸) reescribir la fuerza de Lorentz como

$$\frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} = \frac{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{4\pi} = -\nabla \left(\frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} \right) + \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}}{4\pi}. \quad (2.12)$$

De esta forma, la fuerza de Lorentz está compuesta por la presión magnética que se ejerce sobre el fluido (primer término) y la tensión magnética a lo largo de las líneas de campo (segundo término). Por consiguiente, la ecuación de movimiento, en el contexto MHD, contempla los efectos del campo magnético sobre el fluido a partir de dos términos adicionales asociados a la presión y a la tensión magnéticas de las líneas de campo.

La razón entre la presión térmica y la presión magnética define el denominado parámetro (adimensional) beta del plasma que mide el estado de magnetización del sistema

$$\beta = \frac{P}{P_{mag}} = \frac{8\pi P}{B^2} \propto \left(\frac{c_s}{v_A} \right)^2, \quad (2.13)$$

donde la constante de proporcionalidad depende del tipo de flujo politrópico (adiabático, isotérmico, etc) siendo $v_A = B/\sqrt{4\pi\rho}$ la velocidad de Alfvén y c_s la velocidad del sonido. Este parámetro permite identificar dos regímenes. Cuando $\beta \ll 1$ la presión magnética es mucho mayor que la presión térmica y, por lo tanto, el campo magnético domina la dinámica del fluido. Cuando $\beta \gg 1$, la presión térmica predomina frente a la presión magnética y el campo magnético, en consecuencia, juega un rol menor en la dinámica del plasma. Si, además, el sistema está libre de fuerzas externas, en el primer caso, el campo magnético es el encargado de mantener el equilibrio del sistema, mientras que en el segundo caso, el campo de velocidades es quien restablece el equilibrio.

Al igual que en hidrodinámica, también deben considerarse la ecuación de continuidad (2.6) que representa la conservación de la masa y una ecuación que relacione las variables termodinámicas, esto es, la ecuación de estado asumiendo la relación politrópica (2.7), comunmente utilizada en flujos astrofísicos.

Dado que un plasma es un medio conductor, es necesario determinar cómo depende la densidad de corriente \mathbf{J} con el campo eléctrico \mathbf{E} . En el sistema solidario al elemento de fluido, la densidad de corriente \mathbf{J}' y el campo eléctrico

⁸ $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$.

\mathbf{E}' se relacionan a través de la ley de Ohm $\mathbf{J}' = \sigma \mathbf{E}'$. Para velocidades no relativistas, los campos en el sistema inercial \mathbf{J}' y \mathbf{E}' se vinculan según las siguientes expresiones: $\mathbf{J}' = \mathbf{J}$ y $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + (\mathbf{u} \times \mathbf{B})/c$. Luego, reemplazando, se obtiene

$$\mathbf{J} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{B}}{c} \right), \quad (2.14)$$

donde σ es la conductividad eléctrica.

Cabe resaltar que el campo eléctrico no constituye una variable dinámica independiente. En un plasma, el campo eléctrico es despreciable adentro de la esfera de Debye (en el sistema de referencia solidario a la esfera, es decir, solidario al movimiento del fluido); en cualquier otro sistema de referencia, el campo eléctrico queda determinado en términos del campo velocidad y del campo magnético, combinando la ley de Ohm (2.14) y la ley de Ampère (2.4)

$$\mathbf{E} = \frac{c}{4\pi\sigma} \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{B}}{c}. \quad (2.15)$$

Reemplazando la expresión del campo eléctrico (2.15) en la ley de Faraday (2.3) (y utilizando la identidad vectorial de la nota al pie de página número 8), se obtiene la ecuación para la evolución temporal del campo magnético. Esta ecuación que describe la dinámica del campo magnético se denomina ecuación de inducción

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (2.16)$$

donde se define $\eta = c^2/(4\pi\sigma)$ como la difusividad magnética (o también llamada resistividad eléctrica). El miembro derecho muestra que las líneas magnéticas son parcialmente transportadas (advectadas, estiradas y comprimidas) por el flujo a velocidad \mathbf{u} (primer término)⁹ y parcialmente difundidas a través del plasma (segundo término). Equivalentemente, la ecuación de inducción, se puede obtener a partir del rotor de la ley de Ohm (2.14), teniendo en cuenta que la densidad de corriente \mathbf{J} es proporcional a $\nabla \times \mathbf{B}$, según la ley de Ampère (2.4) para velocidades no relativistas, utilizando, otra vez, la identidad vectorial de la nota al pie de página número 8 y reescribiendo el campo eléctrico en términos del campo magnético a partir de la ley de

⁹El término de inducción puede descomponerse de la siguiente manera: $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{u}$ (siendo $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$).

Faraday (2.3). La dinámica del campo magnético queda, entonces, unívocamente determinada mediante la ecuación de inducción (2.16) y la condición de divergencia nula (2.2). Luego pueden obtenerse, por ejemplo, la densidad de corriente vía la ley de Ampère y el campo eléctrico a partir de la ley de Ohm.

En suma, las ecuaciones MHD (ecuación de continuidad (2.6), ecuación de movimiento (2.11), ecuación de inducción (2.16), cerrando el sistema con una ecuación que relacione las variables termodinámicas) constituyen un sistema completo de ecuaciones para las 8 incógnitas del problema: tres componentes del campo de velocidades, tres componentes del campo magnético y dos variables termodinámicas.¹⁰

Consecuencias de la ecuación de inducción

Del sistema de ecuaciones MHD, surgen naturalmente dos números adimensionales, denominados número de Reynolds y número de Reynolds magnético, que permiten medir la relevancia relativa entre los términos no lineales y los términos disipativos¹¹

$$R = \frac{U_0 L_0}{\nu}, \quad R_m = \frac{U_0 L_0}{\eta}, \quad (2.17)$$

donde U_0 y L_0 son, respectivamente, la velocidad y la longitud características de variación de los campos \mathbf{u} y \mathbf{B} .

A su vez, el cociente entre ambos números de Reynolds da otro número adimensional denominado número de Prandtl

$$P_m = \frac{R_m}{R} = \frac{\nu}{\eta}. \quad (2.18)$$

A partir de la definición del número de Reynolds magnético se puede ver que el campo magnético se comporta de manera muy distinta según se consideren problemas con bajo o alto número de Reynolds magnético.

¹⁰Teniendo en cuenta la condición de divergencia nula $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ y la relación barotrópico $P(\rho)$, el número de incógnitas se reduce a 6.

¹¹ $R = |(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}|/|\nu \nabla^2 \mathbf{u}|$ caracteriza la importancia entre el término convectivo y las fuerzas viscosas mientras que $R_m = |\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})|/|\eta \nabla^2 \mathbf{B}|$ da cuenta de la relevancia entre el término inductivo (convección del campo magnético debido al movimiento del fluido) y la difusión magnética.

Si $R_m \ll 1$, la ecuación de inducción se reduce a una ecuación de difusión

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \approx \eta \nabla^2 \mathbf{B} . \quad (2.19)$$

En ausencia de fuentes, las corrientes decaen debido a la disipación Joule y, por ende, la ley de Ampère (2.4) establece que el campo magnético se aproxima, eventualmente, a un campo uniforme.¹² En particular, si inicialmente el campo magnético es uniforme, la ecuación de difusión indica que el campo no evoluciona y permanece uniforme.

Si $R_m \gg 1$, la ecuación de inducción corresponde al caso ideal en el cual se considera conductividad infinita y, por ende, difusión magnética despreciable

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \approx \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) . \quad (2.20)$$

Esta ecuación implica que el flujo magnético Φ que atraviesa cualquier superficie S , rodeada por una curva cerrada C que se mueve con el fluido, es constante (es decir, que expresa la conservación del flujo magnético). Por lo tanto, el flujo magnético a través de cualquier superficie en movimiento con el fluido, permanece “congelado” al mismo¹³

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 . \quad (2.21)$$

Esto, a su vez, significa que si dos elementos de fluido están conectados por una línea magnética en un dado instante, en el límite MHD ideal ($\eta = 0$), permanecerán asociados a la misma línea magnética en cualquier instante posterior. En consecuencia, dada una superficie S , el número de líneas magnéticas que la atraviesa se mantiene constante.¹⁴ Este resultado se conoce como el teorema del congelamiento del flujo magnético (también denominado teorema de Alfvén) dado que las líneas de campo magnético se mueven en forma conjunta

¹²Asimismo, si la velocidad del fluido es nula, entonces el campo magnético decae debido al término resistivo.

¹³Este resultado no es evidente considerando que el flujo ligado a una dada superficie puede variar en el tiempo debido a una variación intrínseca del campo magnético o debido al movimiento de dicha superficie.

¹⁴Los procesos de reconexión magnética no están presentes en el contexto MHD ideal de manera que la topología del campo magnético no resulta alterada. No obstante, movimientos del fluido, suficientemente complejos, pueden producir contorsiones en las líneas de campo de tal modo que la energía magnética aumente a expensas de la energía cinética.

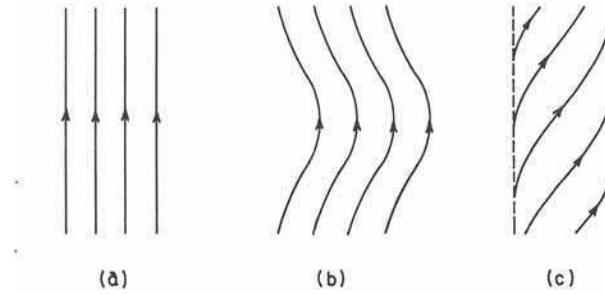


Figura 2.1: Ilustración del fenómeno del congelamiento de las líneas de campo magnético al plasma. En (a) se observan las líneas de campo magnético uniforme y unidireccional en una columna de plasma; las mismas líneas de campo magnético se muestran según la columna de plasma se curva en (b) o se retuerce sobre sí misma en (c). Figura extraída de Choudhuri (1998).

con el plasma. Análogamente, en hidrodinámica, el teorema de Kelvin muestra que la vorticidad (cuya ecuación de evolución es idéntica a la ecuación de inducción) se mueve siguiendo al fluido si la viscosidad es nula (fluido ideal). En la Figura 2.1 se observa cómo las líneas del campo magnético siguen el movimiento del plasma. El campo magnético puede ser estirado, torcido, distorsionado siguiendo los movimientos de la materia, como si las líneas de campo magnético estuviesen enhebradas a los elementos de fluido.

2.2.1. Propagación de ondas MHD

Las perturbaciones en un plasma pueden ser tales que los electrones y los iones respondan de modos diferentes o de igual manera. Cada una de estas situaciones se tiene que analizar en el nivel de descripción correspondiente. Consecuentemente, las ondas en un plasma se dividen en dos grandes grupos. Ondas de alta y baja frecuencia según sean mayor o menor que la frecuencia del plasma ω_p . El estudio de las ondas de alta frecuencia ($\omega > \omega_p$) se enmarca dentro de la teoría de dos fluidos,¹⁵ dado que es necesario considerar la separación entre cargas. En cambio, las ondas de baja frecuencia ($\omega < \omega_p$) son descritas adecuadamente por las ecuaciones de la magnetohidrodinámica.

¹⁵Las ondas de alta frecuencia son consideradas fenómenos no colisionales, dado que la frecuencia de oscilación es mucho mayor que la frecuencia entre colisiones las cuales, por tanto, resultan ser despreciables aunque siguen siendo responsables de que el plasma se encuentre en equilibrio termodinámico local.

En magnetohidrodinámica, debido a la presencia del campo magnético, la propagación de perturbaciones resulta anisótropa dependiendo de la dirección de propagación con respecto al campo magnético.¹⁶ Esto, a su vez, conduce a una cantidad mayor de modos de propagación.

Análisis perturbativo

Se denomina ondas lineales a las soluciones de las ecuaciones linealizadas, válidas para perturbaciones con amplitudes pequeñas.¹⁷ El proceso de linealización de las ecuaciones permite despreciar todos los términos no lineales asociados a las cantidades perturbativas, justamente, por considerarse sólo perturbaciones con pequeña amplitud. Dado que no se consideran los términos no lineales, se puede aplicar el principio de superposición. De manera que, una perturbación arbitraria puede ser representada mediante la superposición de modos normales¹⁸ en tanto que la evolución de cada modo normal puede ser estudiada en forma independiente.

Asumiendo que el estado de equilibrio está caracterizado por un campo de velocidades estático $\mathbf{u}_0 = 0$, un campo magnético uniforme $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{z}}$,¹⁹ densidad ρ_0 y presión P_0 , se perturba el sistema, a primer orden en los apartamientos,

$$\rho = \rho_0 + \rho_1(\mathbf{x}, t) , \quad (2.22)$$

$$P = P_0 + P_1(\mathbf{x}, t) , \quad (2.23)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t) , \quad (2.24)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}_1(\mathbf{x}, t) , \quad (2.25)$$

donde el subíndice 0 indica los valores de equilibrio y el subíndice 1 las perturbaciones respecto al estado de equilibrio. Sustituyendo en las ecuaciones MHD (ecuación de continuidad (2.6), ecuación de movimiento (2.11), ecuación de inducción (2.16)) y considerando sólo las contribuciones lineales de los

¹⁶En hidrodinámica pequeñas perturbaciones en el fluido se propagan isotrópicamente como ondas de sonido.

¹⁷Asimismo, las ondas en un fluido pueden ser ondas no lineales tales como ondas de choque y ondas de gran amplitud.

¹⁸Los vectores desplazamiento asociados a cada modo de oscilación conforman un conjunto de elementos ortogonales.

¹⁹El sistema de referencia se elige tal que el fluido sin perturbar se encuentra en reposo y el campo magnético externo en la dirección axial.

campos, se obtiene el conjunto de ecuaciones que describe la dinámica de las perturbaciones en el régimen lineal

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1, \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\frac{\nabla P_1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0} \frac{(\nabla \times \mathbf{b}_1) \times \mathbf{B}_0}{4\pi}, \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0). \quad (2.28)$$

Los efectos disipativos, cuyo único efecto es producir un amortiguamiento de las soluciones, se consideran despreciables, facilitando el desarrollo perturbativo y la resolución del sistema de ecuaciones linealizadas.

Las perturbaciones, supuestas ondas planas, en el espacio de Fourier corresponden a soluciones del tipo $e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$. Consecuentemente, las derivadas temporales se reducen a multiplicar por $-i\omega$ mientras que las derivadas espaciales a multiplicar por $i\mathbf{k}$. De esta forma, se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas, homogéneo y lineal a coeficientes constantes para las incógnitas correspondientes a las perturbaciones lineales \mathbf{b}_1 , \mathbf{u}_1 , ρ_1 y P_1 . Por lo tanto, el sistema de ecuaciones lineal y homogéneo en derivadas parciales con coeficientes constantes (asumiendo condiciones de contorno periódicas) se convierte en un sistema de autovalores y autovectores

$$-\omega \rho_1 + \rho_0 \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1 = 0, \quad (2.29)$$

$$-\omega \rho_0 \mathbf{u}_1 + P_1 \mathbf{k} - \frac{(\mathbf{k} \times \mathbf{b}_1) \times \mathbf{B}_0}{4\pi} = 0, \quad (2.30)$$

$$\omega \mathbf{b}_1 + \mathbf{k} \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0) = 0. \quad (2.31)$$

Eligiendo adecuadamente el sistema de referencia, es posible descomponer al vector de onda tal que, por ejemplo, se escriba como $\mathbf{k} = k(\sin\theta \hat{\mathbf{x}} + \cos\theta \hat{\mathbf{z}})$, siendo θ el ángulo entre el vector de onda \mathbf{k} y el campo magnético \mathbf{B}_0 .²⁰ Resolviendo el sistema (2.29)–(2.31), se obtiene la relación de dispersión $\omega(k)$

$$(\omega^2 - k^2 v_A^2 \cos^2\theta) (\omega^4 - \omega^2 k^2 (v_A^2 + c_s^2) + k^4 v_A^2 c_s^2 \cos^2\theta) = 0, \quad (2.32)$$

donde v_A es la velocidad de Alfvén y c_s es la velocidad del sonido (que en el

²⁰Como se mencionó anteriormente, en presencia de un campo magnético, el sistema resulta anisótropo, dependiendo de la dirección de propagación con respecto al campo magnético.

caso de flujos politrópicos isotérmicos resulta ser tal que $c_s^2 = P/\rho$); además como $\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}_1 = 0$, dado que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, la perturbación del campo magnético es perpendicular al vector de onda y puede escribirse en términos del ángulo θ . A partir de la relación de dispersión, se pueden identificar los modos normales de oscilación correspondientes a las frecuencias naturales de oscilación del plasma.

Modos normales

Existen tres modos MHD asociados a cada una de las raíces del polinomio bi-cúbico (polinomio característico del problema de autovalores y autovectores), relación de dispersión (2.32), que se denominan ondas magnetohidrodinámicas (Biskamp, 1997; Goedbloed & Poedts, 2004).²¹ Como en cualquier fenómeno ondulatorio, se requieren fuerzas restitutivas que se opongan a las perturbaciones en el sistema. En el contexto MHD, las fuerzas de restitución pueden provenir o bien de los gradientes de presión o bien de los esfuerzos magnéticos. Y en tanto el análisis lineal permite utilizar el principio de superposición, es posible escribir cualquier perturbación del sistema como combinación lineal de las tres soluciones de la ecuación de dispersión.

El primer factor de la ecuación (2.32) se anula si

$$\omega^2 = (kv_A \cos \theta)^2 . \quad (2.33)$$

Dado que θ es el ángulo entre el campo magnético externo y la dirección de propagación, la ecuación (2.33) implica que la perturbación se propaga a lo largo del campo magnético, en la dirección transversal tanto a \mathbf{B}_0 como a \mathbf{k} ($\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{B}_0 = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{k} = 0$). Este modo se propaga con velocidad v_A y, por ende, se denomina onda de Alfvén. Ante una perturbación perpendicular, las líneas de campo tienden a oponerse a dicha perturbación vía la tensión magnética, siendo entonces la fuerza restitutiva que genera la oscilación. En este caso, no hay involucradas variaciones ni de densidad ni de presión,²² por lo tanto, el modo de Alfvén es incompresible. Además, este modo resulta ser no dispersivo, en tanto presenta una dependencia lineal con k .

²¹Las soluciones $\pm\omega$ representan ondas que se propagan en direcciones opuestas.

²²Se tiene que $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{k} = 0$, lo que implica que $\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0$ y, por lo tanto, $\rho_1 = 0$ que, a su vez, significa que la perturbación en la presión es nula ($P_1 = 0$).

El segundo factor de la ecuación (2.32) es nulo si

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2}k^2 \left[v_A^2 + c_s^2 \pm \sqrt{(v_A^2 + c_s^2)^2 - 4v_A^2 c_s^2 \cos^2 \theta} \right]. \quad (2.34)$$

Teniendo en cuenta que la velocidad de fase es el cociente ω/k , se puede ver que las soluciones \pm son tales que $\omega_+/k > v_A > \omega_-/k$, por lo que la primera raíz se llama onda magnetosónica rápida (modo rápido) y la segunda onda magnetosónica lenta (modo lento). Ambos modos de propagación son tales que su velocidad de fase está acotada. En el caso de propagación paralela ($\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$), se obtiene la velocidad mínima del modo rápido determinada por la velocidad máxima entre la velocidad del sonido y la velocidad del Alfvén ($\max\{c_s, v_A\}$); mientras que en el caso de propagación perpendicular ($\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$) se alcanza la velocidad máxima dada por $\sqrt{v_A^2 + c_s^2}$. Análogamente, para el modo de oscilación lento, su velocidad de fase es máxima en el caso de propagación paralela ($\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$) e igual a la velocidad mínima entre la velocidad del sonido y la velocidad de Alfvén ($\min\{c_s, v_A\}$); en tanto que es nula en el caso de propagación perpendicular ($\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$). Ambos modos son no dispersivos dado que la velocidad de fase es independiente de k . Los dos modos magnetosónicos consisten en la combinación de ondas acústicas y ondas de Alfvén (oscilaciones puramente magnéticas (siendo $P_1 = 0$)). Si las fuerzas restitutivas debido a la presión y a la tensión magnética están en fase, surge el modo rápido de oscilación y la velocidad de propagación es más rápida que la velocidad del modo de Alfvén. Por el contrario, si ambas fuerzas restitutivas están aproximadamente en contrafase se obtiene el modo lento, en tanto que su velocidad de propagación es menor a la velocidad de Alfvén. En este contexto, siendo los modos magnetosónicos modos híbridos y teniendo presente que el parámetro β establece distintos regímenes en la dinámica del sistema, los modos rápido y lento adquieren comportamientos muy diferentes. En el caso $\beta \ll 1$ (dominio magnético), se observa que el modo rápido corresponde a oscilaciones transversales del campo magnético, es decir, que la perturbación magnética es perpendicular al vector de propagación ($\mathbf{b}_1 \perp \mathbf{k}$). Además, en este límite asintótico, este modo es aproximadamente incompresible. El modo lento resulta ser un modo compresible de tipo acústico, aunque no necesariamente longitudinal, dado que el vector de onda puede no estar en la misma dirección que el campo de velocidades. En el caso $\beta \gg 1$ (dominio

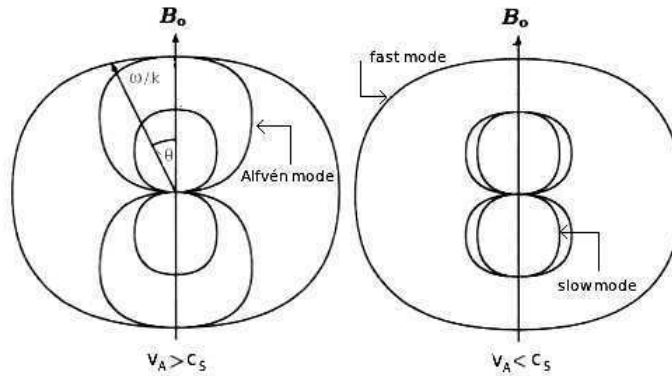


Figura 2.2: Diagramas polares para los tres modos de propagación en la aproximación MHD. La distancia al origen para cada curva representa la velocidad de fase de las ondas rápida (curva externa), alfvénica (intermedia) y lenta (curva interna): $\omega_+/k > v_A > \omega_-/k$. El ángulo θ indica la dirección de propagación con respecto a la dirección del campo magnético externo $B_0\hat{z}$. Figura adaptada de Kallenrode (2004).

hidrodinámico), se obtiene que el modo rápido se reduce al modo acústico, las perturbaciones de la presión y del campo de velocidades son longitudinales ($\mathbf{u}_1 \parallel \mathbf{k}$), sin presentarse perturbaciones del campo magnético; el modo lento se transforma en una onda de Alfvén, transversal e incompresible.

En la Figura 2.2 se representa mediante diagramas polares la propagación de ondas MHD para cualquier dirección arbitraria respecto al campo magnético externo, siendo θ el ángulo formado por los vectores \mathbf{k} y \mathbf{B}_0 . Cada una de las curvas corresponde a uno de los modos de propagación MHD: ω_+/k (curva externa) $>$ v_A (curva intermedia) $>$ ω_-/k (curva interna). La velocidad de fase ω/k , depende del ángulo θ y está dada por la distancia al origen para cada una de las curvas. Según la velocidad de Alfvén sea mayor o menor que la velocidad del sonido se obtienen dos familias de soluciones asociadas a los regímenes dados por $\beta \ll 1$ o $\beta \gg 1$. Para $\theta = \pi/2$ o $\theta = 3\pi/2$ (propagación perpendicular) sólo se desarrollan los modos rápidos en ambos regímenes. Para $\theta = 0$ o $\theta = \pi$ (propagación paralela o antiparalela), para $\beta \ll 1$, el modo de Alfvén es igual al modo rápido mientras que para $\beta \gg 1$, el modo de Alfvén resulta idéntico al modo lento. Se observa, también, como se mencionó previamente, que en ambos regímenes sucede que para el caso de propagación paralela (perpendicular) el modo rápido adquiere velocidad mínima (máxima) en tanto que el modo lento alcanza velocidad máxima (nula).

Estabilidad del sistema

El análisis de los modos normales implica, a su vez, estudiar la estabilidad de un sistema. Si las soluciones de la relación de dispersión son reales, todas las perturbaciones oscilan de manera armónica y el sistema permanece estable. En cambio, si las soluciones presentan una parte imaginaria, el sistema resulta inestable y las perturbaciones crecen exponencialmente en el tiempo. En aquellos sistemas que se desarrollan inestabilidades, el análisis lineal sigue siendo válido mientras que las amplitudes de los modos inestables permanezcan pequeñas, respecto a las longitudes características del problema. Por consiguiente, la teoría lineal no puede dar cuenta de la evolución completa de un modo inestable, dado que a medida que la perturbación crece, el modelo lineal en sí mismo deja de ser adecuado. De hecho, las ecuaciones linealizadas predicen que la inestabilidad crece indefinidamente. Por el contrario, debido a las no linealidades, la inestabilidad podría alcanzar el denominado estado de saturación. Además, cuando las perturbaciones son tales que al evolucionar generan movimientos irregulares en el espacio y en el tiempo, el sistema podría desarrollar turbulencia.

2.3. Aproximación de dos fluidos

La aproximación magnetohidrodinámica corresponde a lo que se denomina descripción de un fluido (*one-fluid model*) en tanto modela a la materia como si fuera un único fluido de partículas cargadas, sin distinguir la dinámica de las distintas especies presentes en un plasma. Esta teoría resulta adecuada para describir fenómenos macroscópicos en los cuales las longitudes características son mucho mayores que el camino libre medio de las partículas (y, por tanto, mayores que la longitud de Debye) y los tiempos típicos mucho mayores que la inversa de la frecuencia de colisiones (y, por ende, mayores que la inversa de la frecuencia de plasma). Existen, sin embargo, sistemas en los cuales es necesario considerar los efectos de cada especie por separado, cada una de las cuales puede comportarse de modos distintos.²³ Cuando se contemplan las distintas especies que constituyen un plasma, hay que tener en cuenta la

²³Los plasmas tenues o difusos, fríos y no colisionales (*collisionless plasmas*, tales que el camino libre medio entre colisiones es mucho más grande que el tamaño del sistema) no son adecuadamente descriptos por las ecuaciones MHD.

interacción entre las especies, como así también el movimiento relativo entre las mismas (Krall & Trivelpiece, 1973; Goldston & Rutherford, 1995).

Un primer paso para obtener una teoría más apropiada consiste en incluir términos asociados a los efectos cinéticos propios de la aproximación de dos fluidos (*two-fluid model*) en la ecuación de inducción. En esta teoría, el efecto de las interacciones se modela a partir de las frecuencias colisionales ν_{jk} que dan cuenta de la tasa de transferencia de momento de las partículas de la especie j a la especie k la cual, a su vez, representa la fuerza de fricción entre ambas especies

$$\mathbf{R}_{jk} = -m_j n_j \nu_{jk} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k) . \quad (2.35)$$

Si el plasma está compuesto por múltiples especies, el término adicional es la suma de todas las interacciones $\sum_{k \neq j} \mathbf{R}_{jk}$; por la conservación del momento, además, se cumple que $\mathbf{R}_{jk} = -\mathbf{R}_{kj}$.

Por lo tanto, el modelo de dos fluidos más elemental consiste en considerar a los electrones y a los iones como dos fluidos separados que interactúan mediante colisiones. De modo que la ecuación de movimiento de las partículas de la especie j tiene que incluir las ganancias o pérdidas de momento debido a las colisiones con otras especies agregando un término que contemple la influencia conjunta de las colisiones

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla \mathbf{u}_i = \frac{Ze}{m_i} (\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}_i \times \mathbf{B}}{c}) - \frac{\nabla P_i}{m_i n_i} + \frac{\mathbf{R}_{ie}}{m_i n_i} + \frac{\nabla \cdot \pi_i}{m_i n_i} , \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} + \mathbf{u}_e \cdot \nabla \mathbf{u}_e = \frac{-e}{m_e} (\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}_e \times \mathbf{B}}{c}) - \frac{\nabla P_e}{m_e n_e} + \frac{\mathbf{R}_{ei}}{m_e n_e} + \frac{\nabla \cdot \pi_e}{m_e n_e} \quad (2.37)$$

donde $\pi_{i,e}$ se denomina tensor de viscosidad generalizado (Braginskii, 1965).

Para un plasma parcialmente ionizado, se requiere una tercera ecuación de movimiento para el flujo de partículas neutras. En cualquier caso, la suma de las ecuaciones de movimiento de todas las especies presentes en el plasma se reduce a la ecuación de movimiento de la teoría MHD (2.11).²⁴

²⁴Bajo el supuesto de que las temperaturas de ambos fluidos son iguales ($T_e = T_i$), las variables de la aproximación de un fluido \mathbf{u} , ρ , \mathbf{J} pueden escribirse como combinaciones lineales de las variables del modelo de dos fluidos ρ_e , ρ_i , \mathbf{u}_e , \mathbf{u}_i .

2.3.1. Ley de Ohm generalizada

Asumiendo la condición de cuasi-neutralidad, considerando que $m_e/m_i \ll 1$ y excluyendo términos cuadráticos en las velocidades, se obtiene, a partir de la ecuación de movimiento electrónica (2.37), la denominada ley de Ohm generalizada

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u}_i \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} + \frac{1}{en_e} \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \frac{\nabla P_e}{en_e} + \frac{m_e}{e^2 n_e} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}, \quad (2.38)$$

donde la conductividad eléctrica está dada por $\sigma = n_e e^2 / m_e \nu_{ei}$.

Cada término del miembro derecho de la ecuación (2.38) representa un efecto distinto asociado a fenómenos vinculados con distintas escalas microscópicas.²⁵ El primer término es la disipación debido al efecto Joule. Justamente, las colisiones entre las dos especies, se manifiesta a través de la resistividad eléctrica $\eta \sim \sigma^{-1}$ dado que $\mathbf{R}_{ei} = \eta n_e e \mathbf{J}$. El segundo término representa el efecto Hall, producido por el campo eléctrico que se genera a partir de la fuerza de Lorentz. El tercer término corresponde a la presión electrónica (también se conoce con el nombre de batería de Biermann dado que permite generar campos magnéticos a partir de campo inicial nulo). El último término se asocia a los efectos inerciales electrónicos que pueden despreciarse si la escala temporal macroscópica es mayor que el período de las oscilaciones de plasma ($\sim \omega_{pe}^{-1}$) lo cual se cumple si las longitudes características son mayores que la longitud de penetración electrónica c/ω_{pe} (ver Apéndice). Para plasmas parcialmente ionizados, la ecuación de Ohm generalizada (2.38) posee un término extra denominado difusión ambipolar proporcional a $(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$.

Análogamente al caso MHD, la deducción de la ecuación de inducción generalizada se obtiene combinando la ley de Ohm generalizada y las leyes de Maxwell. Asumiendo despreciables los efectos inerciales y considerando el término asociado a la difusión ambipolar, resulta

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \frac{4\pi\eta}{c} \mathbf{J} - \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{ne} + \frac{(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{c\nu_{ni}\rho_i} \right). \quad (2.39)$$

Los dos primeros términos del miembro derecho, al igual que en la aproxi-

²⁵Si se relajan las condiciones asumidas, la ley de Ohm incluye varios términos adicionales que complican considerablemente la descripción del problema.

mación MHD, son los así llamados términos inductivo (I) y óhmico²⁶ (O); en tanto que los últimos dos términos corresponden, respectivamente, al efecto Hall (H) y a la difusión ambipolar (A).²⁷ Para comparar la relevancia de cada uno de estos términos, se pueden estimar los cocientes adimensionales entre alguno de ellos (Balbus & Terquem, 2001). Por ejemplo,

$$I/O \sim R_m, \quad H/O \sim \omega_{ce}/\nu_{en}, \quad A/O \sim \omega_{ci}\omega_{ce}/\nu_{in}\nu_{en}, \quad (2.40)$$

siendo R_m el número de Reynolds magnético, $\omega_{ci,ce}$ las frecuencias de ciclotrón y $\nu_{ni,ne}$ las frecuencias de colisiones (para las definiciones de estas cantidades, remitirse al Apéndice). En particular, comparando los términos de Hall y de difusión ambipolar se obtiene que $A/H \sim \omega_{ci}/\nu_{in}$.

2.3.2. Efecto Hall y difusión ambipolar

Para analizar el significado de los términos adicionales de la ecuación de inducción generalizada (2.39), conviene escribir dicha ecuación en su versión adimensional (eligiendo como unidades de velocidad, de longitud y densidad a la velocidad, la longitud y la densidad características del problema, respectivamente, U_0 , L_0 y n_0) en términos de la velocidad del fluido \mathbf{u} (*bulk velocity*)

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\left(\mathbf{u} - \varepsilon \frac{\mathbf{J}}{n} + \lambda \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{n} \right) \times \mathbf{B} \right) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (2.41)$$

donde $\varepsilon(\mathbf{J} \times \mathbf{B})/n$ corresponde al término de Hall y $\lambda(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}/n$ es el término asociado a la difusión ambipolar siendo

$$\varepsilon = \frac{c/\omega_{pi}}{L_0} \frac{v_A}{U_0} \chi^{-1/2}, \quad (2.42)$$

el denominado parámetro de Hall (con c la velocidad de la luz, ω_{pi} la frecuencia de plasma iónica, v_A la velocidad de Alfvén y χ la fracción de ionización del plasma, cociente entre la densidad de electrones y la densidad de neu-

²⁶Efecto difusivo que también se puede escribir como $\eta \nabla^2 \mathbf{B}$ utilizando la ley de Ampère.

²⁷En particular, para flujos incompresibles o politrópicos, el término debido a la presión electrónica se puede escribir como un gradiente y, en consecuencia, no constituye un término extra en la ecuación de inducción. No obstante, la presión electrónica es una incógnita del problema.

tros)²⁸ y

$$\lambda = \left(\frac{v_A}{U_0} \right)^2 (m_i n_i \nu_{in})^{-1}, \quad (2.43)$$

el denominado coeficiente de difusión ambipolar (con ν_{in} la frecuencia de colisiones entre iones y neutros).

El predominio de uno u otro efecto depende de la densidad del plasma y de la fracción de ionización (Braginskii, 1965). Ambos efectos juegan un rol importante en muchos sistemas astrofísicos (Zweibel, 1998; Wardle, 1999; Brandenburg & Subramanian, 2005). En concreto, resultan importantes si el campo magnético es intenso y siempre que la densidad del medio sea baja (plasmas tenues o difusos), lo que, a su vez, sucede en plasmas con altas temperaturas o bajo grado de ionización dependiendo de si se tratan de plasmas completa o parcialmente ionizados, respectivamente.

Cuando los efectos disipativos son despreciables (límite ideal $\eta = 0$), cada efecto por separado corresponde a una dinámica diferente. En el régimen de Hall, se tiene que las líneas de campo magnético están congeladas al movimiento de los electrones dado que $\mathbf{u}_e = \mathbf{u} - \varepsilon \mathbf{J}/n$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\left(\mathbf{u} - \varepsilon \frac{\mathbf{J}}{n} \right) \times \mathbf{B} \right) = \nabla \times (\mathbf{u}_e \times \mathbf{B}), \quad (2.44)$$

mientras que en el régimen de difusión ambipolar, las líneas de campo están congeladas al fluido iónico, debido a que $\mathbf{u}_i = \mathbf{u} + \lambda (\mathbf{J} \times \mathbf{B})/n$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\left(\mathbf{u} + \lambda \frac{(\mathbf{J} \times \mathbf{B})}{n} \right) \times \mathbf{B} \right) = \nabla \times (\mathbf{u}_i \times \mathbf{B}). \quad (2.45)$$

Ambos efectos se pueden interpretar como una velocidad tipo *drift*, velocidad de arrastre, consecuencia del movimiento relativo entre partículas de diferentes especies. Por un lado, el término de Hall, proporcional a la densidad de corriente, da cuenta del movimiento relativo entre iones y electrones. Por el otro, el término ambipolar, proporcional a la fuerza de Lorentz,²⁹ representa

²⁸Se define la longitud de Hall como $L_H = (c/\omega_{pi})(v_A/U_0)\chi^{-1/2}$ (Pandey & Wardle, 2008). De modo tal que el parámetro de Hall puede reescribirse como $\varepsilon = L_H/L_0$ señalando la relevancia del efecto Hall siempre que las longitudes características del problema sean menores o iguales que L_H . A su vez, la longitud de Hall corresponde, en el espacio de Fourier, a números de onda del orden de $k_H \sim 1/\varepsilon$.

²⁹Si las colisiones son suficientemente frecuentes, la fuerza de Lorentz que actúa sobre los iones es compensada por la fuerza de fricción producida por las colisiones con los neutros (acoplamiento fuerte), por lo tanto, $\rho_i \nu_{in} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_n) = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$.

el movimiento relativo de los iones respecto al flujo de partículas neutras.

En un fluido débilmente ionizado las partículas cargadas interactúan principalmente con las partículas neutras. Esto significa que la difusión magnética está gobernada por la difusión ambipolar vinculada con los efectos de fricción entre los iones y los neutros. En cambio, en un plasma con alto grado de ionización, las interacciones coulombianas predominan frente a las colisiones con las partículas neutras. En este caso, la difusión es llevada a cabo por la resistividad eléctrica, generada por la fricción entre iones y electrones. En particular, en plasmas completamente ionizados, la difusión ambipolar no se considera un efecto relevante.

2.4. Hall-MHD

Para un plasma completamente ionizado, compuesto por iones y electrones, asumiendo que $m_e \ll m_i$ y que $n_i = n_e = n$ (siendo $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_i$ y $\rho \approx \rho_i$) resulta que los efectos dominantes son la disipación óhmica y el efecto Hall. A partir de las magnitudes características del problema: campo magnético externo \mathbf{B}_0 , velocidad de Alfvén $\mathbf{v}_A = \mathbf{B}_0/\sqrt{4\pi m_i n_0}$, longitud característica L_0 ,³⁰ presiones y densidad de equilibrio $P_{0,i,e}$ y n_0 , se adimensionaliza el conjunto de ecuaciones dinámicas (Gómez, Mahajan, & Dmitruk, 2008). Luego, sumando las ecuaciones de movimiento para iones (2.36) y electrones (2.37), en sus versiones adimensionales (considerando $Z = 1$), y teniendo en cuenta que la densidad de corriente y la ley de Ampère permiten reescribir la velocidad electrónica (versión adimensional) como $\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_i - \varepsilon \mathbf{J}/n = \mathbf{u}_i - \varepsilon(\nabla \times \mathbf{B})/n$, se obtiene

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{n} - \beta \frac{\nabla(P_i + P_e)}{n} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2.46)$$

donde el parámetro de Hall (ecuación (2.42) con $\chi = 1$ para plasmas completamente ionizados) y el parámetro β del plasma (ecuación (2.13) con $P = c_s^2 \rho$ para flujos politrópicos isotérmicos) quedan determinados por las siguientes

³⁰La unidad de tiempo, en consecuencia, se establece como $t_0 = v_A/L_0$.

expresiones

$$\varepsilon = \frac{c}{\omega_{pi} L_0} = \left(\frac{m_i c^2}{4\pi e^2 n_i L_0^2} \right)^{1/2}, \quad (2.47)$$

$$\beta = 2 \left(\frac{c_s}{v_A} \right)^2 = \frac{P_{0i} + P_{0e}}{m_i n_0 v_A^2}. \quad (2.48)$$

Escribiendo el campo eléctrico y el campo magnético en términos del potencial eléctrico ϕ_e y el potencial vector \mathbf{A}

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi_e, \quad (2.49)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.50)$$

y reemplazando en la ecuación de movimiento electrónica (con \mathbf{u}_e en términos del campo magnético) se obtiene la ecuación de inducción asociada al potencial vector

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \left(\mathbf{u} - \frac{\varepsilon}{n} \nabla \times \mathbf{B} \right) \times \mathbf{B} - \nabla \phi_e + \varepsilon \beta \frac{\nabla P_e}{n} - \eta \nabla \times \mathbf{B}. \quad (2.51)$$

Tomando el rotor de la ecuación (2.51) se reobtiene la ecuación de inducción en términos del campo magnético que, al igual que en el caso MHD, también se puede obtener en forma directa a partir de la ley de Ohm junto a las leyes de Ampère y de Faraday.³¹

La ecuación de continuidad (que se obtiene sumando las correspondientes ecuaciones para cada especie) resulta

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0. \quad (2.52)$$

En suma, el conjunto de ecuaciones dado por la ecuación de movimiento (2.46), la ecuación de inducción (con el correspondiente término de Hall) (2.51), la ecuación de continuidad (2.52) y, por ejemplo, la relación politrópica entre las variables termodinámicas (ecuación (2.7)), constituye el denominado sistema de ecuaciones Hall-MHD que, mediante la inclusión del efecto Hall,

³¹Teniendo presente la resolución de este sistema de ecuaciones mediante cálculos numéricos, se presenta la versión adimensional del conjunto de ecuaciones Hall-MHD. Asimismo, para el desarrollo numérico resulta más adecuado trabajar con los campos velocidad y potencial vector.

da cuenta de la diferencia de velocidades entre iones y electrones (siendo $\mathbf{u}_e = \mathbf{u} - \varepsilon(\nabla \times \mathbf{B})/n$ y $\mathbf{u}_i \approx \mathbf{u}$).

Al adimensionalizar con la velocidad de Alfvén, queda claro que en el caso de plasmas completamente ionizados, el parámetro de Hall es el cociente entre la denominada longitud de penetración iónica (*ion skin-depth*) $\delta_i = c/\omega_{pi}$ y la longitud característica L_0 .³² Por consiguiente, el efecto Hall resulta relevante en fenómenos cuyas escalas espaciales sean comparables o menores que la longitud δ_i o, equivalentemente, cuyas frecuencias sean del orden de la frecuencia iónica de ciclotrón (ver Apéndice). Por el contrario, este efecto puede considerarse despreciable siempre que $\varepsilon \ll 1$, lo que significa que las longitudes características del sistema son mucho mayores que la longitud de penetración iónica.

2.4.1. Propagación de ondas Hall-MHD

El análisis de los modos normales de oscilación en el contexto Hall-MHD resulta análogo al modelo MHD (ver sección 2.2.1), con el único agregado del correspondiente término en la ecuación de inducción asociado a las corrientes de Hall. A partir del estado de equilibrio del sistema (campo de velocidades estático $\mathbf{u}_0 = 0$, campo magnético uniforme $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{z}}$, densidad ρ_0 y presión P_0), se perturban las ecuaciones a primer orden, se resuelven las ecuaciones Hall-MHD linealizadas y se obtiene la relación de dispersión que da lugar a los modos normales de oscilación. Precisamente, la ecuación para las perturbaciones del campo magnético contiene al efecto Hall de la siguiente manera

$$\frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial t} = \nabla \times \left(\mathbf{u}_1 - \varepsilon \frac{\nabla \times \mathbf{b}_1}{n_0} \right) \times \mathbf{B}_0 . \quad (2.53)$$

Teniendo en cuenta que, en el espacio de Fourier, las perturbaciones se comportan como ondas planas $e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$, resulta

$$\omega \mathbf{b}_1 + \mathbf{k} \times \left(\mathbf{u}_1 - i\varepsilon \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{b}_1}{n_0} \right) \times \mathbf{B}_0 = 0 . \quad (2.54)$$

Así, al igual que en el caso MHD, el sistema de ecuaciones homogéneo y lineal en derivadas parciales con coeficientes constantes y condiciones de con-

³²De manera que en el caso de plasmas completamente ionizados la longitud de Hall es la longitud de penetración iónica (ver nota al pie de página número 28).

torno periódicas se reduce a un sistema de ecuaciones algebraicas homogéneas con coeficientes constantes. Resolviendo el sistema de ecuaciones linealizadas (formado por las ecuaciones de continuidad (2.26), de movimiento (2.27) y de inducción modificada (2.53)),³³ en el espacio de Fourier (ecuaciones (2.29), (2.30) y (2.54)), se obtiene la expresión para la relación de dispersión en el contexto Hall-MHD

$$\omega^6 - k^2\omega (v_A^2 + 2c_s^2 + v_A^2\varepsilon^2k^2\cos^2\theta) + k^4\omega (2c_s^2v_A^2\varepsilon^2k^2\cos^2\theta + v_A^2(v_A^2 + 4c_s^2)\cos^2\theta) - k^6c_s^2v_A^4\cos^4\theta = 0 . \quad (2.55)$$

Las tres raíces que presenta la relación de dispersión (2.55) corresponden a los tres tipos de ondas (modos normales) que se pueden propagar a través de un plasma Hall-MHD. En particular, en el límite en el cual el efecto Hall es despreciable se recuperan los modos normales de oscilación asociados al modelo MHD (ver sección 2.2.1). En el caso de propagación perpendicular ($\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$) la presencia del efecto Hall no afecta al sistema. Por el contrario, para propagación paralela ($\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$), se obtiene un modo longitudinal y dos modos transversales. Por un lado, el modo longitudinal resulta ser un modo puramente acústico no dispersivo, correspondiente a oscilaciones de la densidad ρ_1 y de la componente longitudinal de la velocidad u_{1z}

$$\omega^2 = c_s^2k^2 . \quad (2.56)$$

Por el otro, se obtienen los modos perpendiculares que representan las oscilaciones de las componentes perpendiculares de los campos velocidad y magnético

$$\omega_{\pm}^2 = v_A^2k^2 \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon k}{2}\right)^2} \pm \frac{\varepsilon k}{2} \right)^2 . \quad (2.57)$$

La rama positiva está asociada a los denominados *whistler* mientras que la rama negativa a las ondas *ion-cyclotron*. Dado que ω no es proporcional a k , ambos modos son dispersivos. Estudiando los autovectores del problema se puede ver que estos modos presentan polarización circular, respectivamente, a derecha y a izquierda, lo que significa que el efecto Hall introduce una

³³Eligiendo el sistema de referencia tal que, por ejemplo, el vector de onda pueda escribirse como $\mathbf{k} = k(\sin\theta\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\hat{\mathbf{y}})$ teniendo en cuenta que el campo magnético externo está en la dirección z .

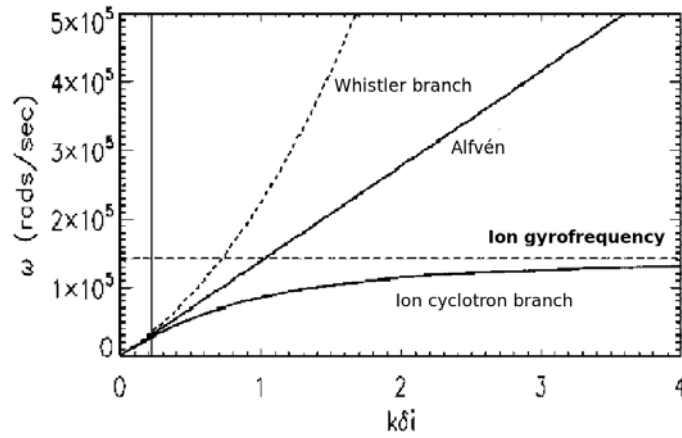


Figura 2.3: Diagrama para la relación de dispersión en el caso de propagación paralela respecto al campo magnético externo. Para frecuencias por debajo de la frecuencia iónica de ciclotrón (línea horizontal a rayas) se observa la relación de dispersión para ondas MHD ($\varepsilon = 0$). La línea vertical continua indica el límite de escalas espaciales mucho mayores que la longitud de penetración iónica (δ_i). Figura adaptada de <http://www-solar.mcs.st-andrews.ac.uk/>.

cambio en la polarización de los modos magnetosónicos MHD (linealmente polarizados). En el límite $k \rightarrow \infty$, la frecuencia de los modos ω_{\pm}^2 crece como $|\omega_{+}| \simeq v_A \varepsilon k^2$ que, restituyendo las unidades, se reduce a la frecuencia de ciclotrón iónica $\omega_{ci} = eB_0/m_i c$; mientras que los modos ω_{-}^2 son tales que $|\omega_{-}| \simeq v_A/\varepsilon = \text{const.}$

En la Figura 2.3 se esquematiza la relación de dispersión para el caso de propagación paralela para sistemas Hall-MHD. Para frecuencias menores que la frecuencia de ciclotrón iónica y longitudes mucho mayores que la longitud de penetración iónica, se obtiene el caso MHD para propagación paralela en cuyo caso sólo se propaga el modo de Alfvén.

Capítulo 3

Flujos tipo *shear* en Hall-MHD

3.1. Flujos tipo *shear*

Los flujos con cizalla o *shear* son aquellos cuya velocidad media es predominantemente unidireccional y presenta gradientes en una dirección perpendicular a la dirección de variación. Esto significa que dos elementos de fluidos adyacentes respecto de una dirección presentan movimiento relativo entre sus caras en la dirección transversal. Las estelas (*wakes*), las capas límites, los *jets* y los flujos en tuberías (*pipe flows*) son algunos ejemplos en los cuales el flujo es tipo *shear*. En la Figura 3.1 se muestra esquemáticamente esta clase de flujos. Como ejemplos, se pueden mencionar algunos casos particulares tales como los flujos de Couette (flujo encerrado entre dos planos uno de los cuales se mueve con respecto al otro tal que la velocidad es paralela a los planos y varía con respecto a la dirección transversal entre los mismo), de Taylor-Couette (flujo encerrado entre dos cilindros concéntricos uno de los cuales rota con respecto al otro de tal modo que la velocidad azimutal varía con respecto a la coordenada radial) y de Poiseuille (flujo confinado entre dos planos en reposo en presencia de un gradiente de presión). En la Figura 3.2 se ilustran cada uno de estos flujos tipo *shear*. A su vez, los flujos con *shear* pueden dividirse en aquellos que se encuentran no confinados (*free shear flows*) y aquellos que están limitados por paredes (*wall-bounded shear flows*). Los flujos libres de contornos están caracterizados por una sola escala espacial dada por la extensión de la región del *shear* (en donde se encuentran los fuertes gradientes); en cambio, los flujos restringidos por la presencia de paredes introducen una longitud característica adicional (la distancia entre

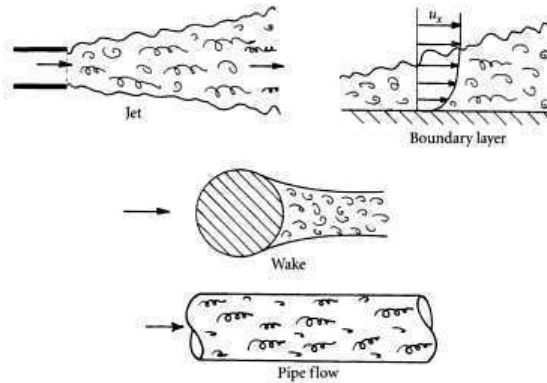


Figura 3.1: Ilustración representativa de algunos ejemplos de flujos tipo *shear*. Figura extraída de Davidson (2004).

las paredes que contienen al fluido).

En astrofísica, muchos sistemas presentan flujos tipo *shear*. Inestabilidades en flujos con *shear* han sido objeto de estudio en sistemas que presentan rotación diferencial, tales como estrellas rotantes (Cowling, 1951; Goldreich & Schubert, 1967) o discos de acreción (ver, a modo de compendio, Balbus & Hawley (1998) y Balbus (2003)). También se han analizado inestabilidades en flujos tipo *shear* en la aproximación de dos fluidos en configuraciones tales como nubes moleculares (Mouschovias & Ciolek, 1999), discos galácticos (Blaes & Balbus, 1994), discos protoestelares (Hawley & Stone, 1998; Fromang, Terquem, & Balbus, 2002), vientos y jets protoestelares (Wardle & Königl, 1993) y discos protoplanetarios (Sano & Miyama, 1999; Sano et al., 2000; Salmeron & Wardle, 2005). Asimismo, la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz (asociada al gradiente transversal del campo de velocidades) ha sido estudiada ampliamente en diversos contextos astrofísicos como por ejemplo, en la corona solar (Karpen et al., 1993), en jets extragalácticos (Ferrari, Trussoni & Zaninetti, 1980, 1981; Fiedler & Jones, 1984), en jets provenientes de objetos jóvenes estelares (YSOs) (Pringle, 1998) o en jets asociados a regiones de formación estelar (Watson et al., 2004).

Los flujos tipo *shear* permiten construir modelos simplificados para estudiar la influencia de flujos macroscópicos en la microescala. En esta Tesis, se estudia la dinámica asociada a las escalas microscópicas mediante flujos con *shear* considerando además el rol del efecto Hall.

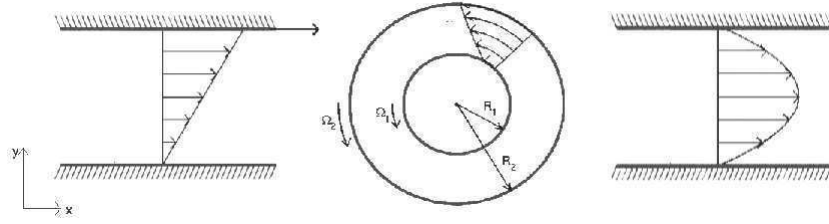


Figura 3.2: Representación esquemática de los perfiles de velocidad asociados a los flujos de Couette, Taylor-Couette y Poiseuille, respectivamente. Figura adaptada de <http://www.student.math.uwaterloo.ca/>.

3.2. Aproximación *shearing-box*

La aproximación *shearing-box* consiste en un desarrollo local de las ecuaciones. Dado un $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, el análisis se restringe a una región de dimensiones mucho menores que $|\mathbf{x}_0|$. En concreto, en esta aproximación, se modela una pequeña parcela de fluido (*shearing-box*) que se encuentra inmersa en un flujo macroscópico con *shear* lineal y uniforme dado por $\mathbf{u}_{sh} = u_{sh}(x)\hat{\mathbf{y}} = -sx\hat{\mathbf{y}}$. De esta forma, el *shear* queda determinado por el gradiente perpendicular a la dirección del flujo $s = -\partial_x u_y$. En la Figura 3.3 se representa una caja cartesiana sometida a un flujo tipo *shear*. A medida que transcurre el tiempo, la caja se deforma.

La presencia del *shear* se refleja en las ecuaciones que describen la dinámica del sistema, mediante términos adicionales. En particular, la derivada temporal total puede redefinirse como

$$\frac{D}{Dt} = \partial_t + u_{sh_y}(x)\partial_y + \mathbf{u} \cdot \nabla . \quad (3.1)$$

Mediante las técnicas de Fourier, un sistema de ecuaciones lineales en derivadas parciales con coeficientes constantes y condiciones de contorno periódicas se puede transformar en un conjunto de ecuaciones algebraicas, lo cual facilita la manipulación de las ecuaciones dinámicas. Sin embargo, el término $-sx\partial_y$ asociado a la presencia del *shear* impide la implementación de los desarrollos usuales de Fourier, debido a que este término depende linealmente de la coordenada x . El problema radica en que las condiciones de contorno no son estrictamente periódicas (debido a la condición de contorno en x) y, por lo tanto, las soluciones tipo ondas planas $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ no pueden usarse como

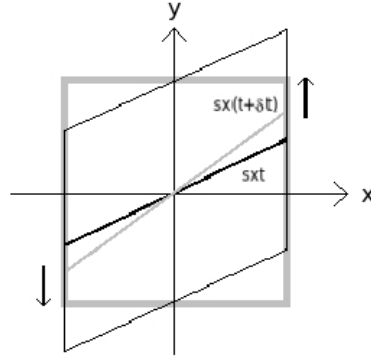


Figura 3.3: La caja al instante t se representa en trazo grueso gris. Transcurrido un tiempo δt , la caja se transforma en la denominada *shearing-box* (trazo fino negro). A medida que transcurre el tiempo, el proceso de “estiramiento” se intensifica (trazo fino gris). Visto desde el centro de coordenadas (centro de la caja) este proceso es equivalente al movimiento relativo entre las caras.

funciones bases en el espacio de Fourier.

Sean L_x , L_y y L_z las dimensiones de una pequeña caja cuyo centro está en x_0 , tal que $L_i \ll x_0$. Las condiciones de contorno para cualquier magnitud f (salvo la condición de contorno en x para la componente y de la velocidad), pueden escribirse de la siguiente manera,

$$f(x, y, z) = f(x + L_x, y - sL_x t, z) \quad (\text{contorno en } x), \quad (3.2)$$

$$f(x, y, z) = f(x, y + L_y, z) \quad (\text{contorno en } y), \quad (3.3)$$

$$f(x, y, z) = f(x, y, z + L_z) \quad (\text{contorno en } z). \quad (3.4)$$

La condición de contorno en x para u_y tiene que tener en cuenta el efecto de “deslizamiento” que produce el flujo tipo *shear*

$$u_y(x, y, z) = u_y(x + L_x, y - sL_x t, z) + sL_x \quad (\text{contorno en } x). \quad (3.5)$$

En la dirección de la coordenada x , las caras de la caja, periódicas al instante t , se mueven una con respecto a la otra, volviéndose a encontrar exactamente a $\delta t = nL_y/sL_x$ con $n \in \mathbb{N}$, tiempo en el cual se reestablece estrictamente la periodicidad de la caja. En la Figura 3.4 se muestra este proceso de desplazamiento entre las caras como consecuencia del gradiente de velocidad en la dirección transversal al movimiento del fluido (es decir, como consecuencia del *shear*). De modo que, el flujo resulta periódico en x con respecto a un

dado punto que se desliza con velocidad local $u_{shy}(x)$. Entonces, adoptando coordenadas co-movientes al fluido tipo *shear*

$$x' = x, \quad y' = y + sxt, \quad z' = z, \quad t' = t, \quad (3.6)$$

se pueden redefinir las derivadas como

$$\tilde{\partial}_x = \partial_{x'} + st'\partial_{y'}, \quad \partial_y = \partial_{y'}, \quad \partial_z = \partial_{z'}, \quad \partial_t = \partial_{t'} + sx'\partial_{y'}, \quad (3.7)$$

tal que las condiciones de contorno, en este sistema de coordenadas tipo *shear*, resultan estrictamente periódicas (*shearing-periodic boundary conditions*) y, por ende, permiten aplicar las técnicas usuales del análisis de Fourier.¹

Por lo tanto, la aproximación *shearing-box* consiste en modelar una pequeña parcela de fluido mediante una caja cartesiana con condiciones de contorno periódicas tipo *shear*. Por este motivo, es necesario considerar ondas que acompañen al *shear* impuesto por el flujo macroscópico en el cual se encuentra embebida la *shearing-box*, para lo cual se requiere que la componente x del vector de onda sea una función del tiempo tal que $\mathbf{k}(t) = (k_x(t), k_y, k_z)$ siendo $k_x(t) = 2\pi n_x/L_x + sk_y t$ y $k_{y,z} = 2\pi n_{y,z}/L_{y,z}$ con $n_{x,y,z} \in \mathbb{Z}$.² De esta manera se logra eliminar, en el espacio de Fourier, al término $-sx\partial_y$ asociado al *shear*, dado que $\dot{k}_x x = sxk_y$ (donde el punto indica derivada respecto al tiempo).

El modelo *shearing-box* se ha aplicado a diversos sistemas astrofísicos. Entre ellos, al estudio de estructuras galácticas (Goldreich & Lynden-Bell, 1965; Julian & Toomre, 1966; Goldreich & Tremaine, 1978), anillos planetarios (Wisdom & Tremaine, 1988), discos no auto-gravitantes (Narayan, Goldreich, & Goodman, 1987) y discos de acreción (Balbus & Hawley, 1992b; Hawley, Gammie, & Balbus, 1995; Brandenburg et al., 1995; Matsumoto & Tajima, 1995; Cabot, 1996; Brandenburg, Dintrans, & Haugen, 2004; Umurhan & Regev, 2004; Lesur & Longaretti, 2007; Regev & Umurhan, 2008, entre muchos otros).

¹Un esquema alternativo para afrontar este problema es utilizar el método WKB a partir del cual las soluciones se asumen no armónicas en x , es decir, $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x)e^{i(k_y y + k_z z - \omega t)}$. Este enfoque puede encontrarse en Ogilvie & Pringle (1996) y en Kunz (2008).

²Los números de onda $2\pi n/L$ (correspondientes a un dominio finito y periódico) se dicen lagrangianos, en tanto son independientes del tiempo, mientras que $k(t)$ representa a los modos eulerianos.

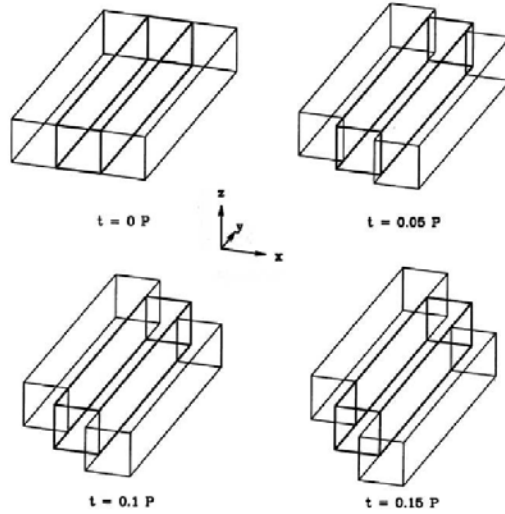


Figura 3.4: Esquema que muestra el proceso de *shearing* entre las caras de las cajas a medida que transcurre el tiempo (en unidades arbitrarias). Para obtener periodicidad en x se requieren coordenadas tipo *shear*. Figura adaptada de Hawley, Gammie, & Balbus (1995).

3.3. Efecto Hall en flujos astrofísicos tipo *shear*

La dinámica asociada a la macroescala de plasmas astrofísicos es descrita adecuadamente por las ecuaciones de la magnetohidrodinámica (MHD). Debido a las grandes longitudes que presentan estos sistemas, los correspondientes números de Reynolds suelen ser muy altos. En consecuencia, el comportamiento dinámico del sistema involucra un amplio rango de escalas espaciales. A escalas suficientemente pequeñas y bajo ciertas circunstancias, los procesos cinéticos de los plasmas pueden ser no despreciables y, por lo tanto, la aproximación magnetohidrodinámica deja de ser apropiada para estudiar esas escalas. Por tal motivo, a partir de la ley de Ohm generalizada, se pueden introducir efectos asociados a la aproximación de dos fluidos y obtener una teoría que permita describir la dinámica de la microescala. En este contexto, la disipación óhmica, la difusión ambipolar y el efecto Hall pueden adquirir un rol significativo en la dinámica del sistema.

En particular, en plasmas parcialmente ionizados el efecto Hall es relevante si las escalas espaciales involucradas resultan comparables a la escala de Hall $(c/\omega_{pi})(v_A/U_0)\chi^{-1/2}$ (ver ecuación (2.42)) donde c es la velocidad de la luz, ω_{pi} es la frecuencia del plasma iónica, v_A es la velocidad de Alfvén y

χ es la fracción de ionización (sobre detalles relacionados a plasmas parcialmente ionizados, ver Pandey & Wardle (2008)); en plasmas completamente ionizados, $\chi = 1$. De manera que, el efecto Hall resulta relevante, en sistemas en los que la temperatura y la fracción de ionización son suficientemente bajas (para el caso de plasmas débilmente ionizados) y en sistemas con alta temperatura y baja densidad (para el caso de plasmas completamente ionizados). En cualquier caso, si los campos magnéticos involucrados son intensos, las corrientes de Hall no pueden despreciarse.

A modo de comparación, es útil estimar órdenes de magnitud, para distintos sistemas astrofísicos, entre el término de Hall (H) y los términos óhmico (O) e inductivo (I) definidos en la sección 2.3.1 a partir de la ecuación (2.39).³ En un disco protoestelar se tiene que $H/O \sim 10^2$ y $H/I \sim 10^4$ (Balbus & Terquem, 2001); mientras que para discos de *dwarf nova* (sistema binario en el cual una enana blanca acreta materia de su compañera) $H/I \sim 1$ (Sano & Stone, 2002a); en la corteza de estrellas de neutrones $H/O \sim 10^3$ (Hollerbach & Rüdiger, 2002).⁴

La influencia del efecto Hall en el contexto astrofísico ha sido estudiada ampliamente. Por las longitudes y densidades involucradas, el efecto Hall resulta importante en regiones de formación de estrellas (Norman & Heyvaerts, 1985), nubes moleculares densas (Wardle & Ng, 1999), medio interestelar (Spangler, 1999; Kinney et al., 2000) e incluso en el universo temprano (Tajima et al., 1992). Asimismo, el término de Hall tiene que ser considerado, en las enanas blancas y en las estrellas de neutrones debido a los fuertes campos magnéticos que aparecen involucrados (Yakovlev & Urpin, 1980; Muslimov, 1994; Shalybkov & Urpin, 1997; Potekhin, 1999; Geppert & Rheinhardt, 2002). Además, las corrientes de Hall parecen desempeñar un papel significativo en la generación de campos magnéticos como consecuencia de la actividad turbulenta del efecto dínamo (Mininni, Gómez & Mahajan, 2002, 2003a,b, y las respectivas referencias). El efecto Hall también puede ser relevante en relación con procesos de reconexión magnética (Deng & Mat-

³Tanto el término óhmico como el inductivo también están presentes en la ecuación de inducción correspondiente a la descripción MHD.

⁴El término ambipolar puede ser importante en la evolución de los campos magnéticos asociados a discos protoplanetarios y a discos protoestelares como así también en la dinámica de nubes moleculares y gas galáctico (Brandenburg & Zweibel, 1995; Brandenburg & Subramanian, 2000; Zweibel, 2002; Desch, 2004; Kunz & Balbus, 2004; Pandey & Wardle, 2008).

sumoto, 2001; Mozer, Bale & Phan, 2002; Smith et al., 2004; Morales, Dasso, & Gómez, 2005).

En las escalas microscópicas, los efectos de un flujo asociado a la macroescala pueden aproximarse mediante un campo de velocidades tipo *shear*, supuesto lineal y uniforme. Si bien las estructuras correspondientes a la dinámica de pequeñas escalas, posiblemente, sean inobservable en los sistemas astrofísicos, podrían tener impacto en la dinámica macroscópica a través de interacciones no lineales. En particular, las inestabilidades microscópicas muchas veces afectan los fenómenos de transporte por lo cual su estudio reviste suma importancia a la hora de entender la dinámica de la macroescala. Por lo tanto, resulta relevante explorar el desarrollo de inestabilidades en el contexto de flujos tipo *shear* (*shear-driven instabilities*), originadas debido a la presencia de intensos gradientes perpendiculares a la dirección de movimiento del fluido.

La estabilidad de plasmas en sistemas rotantes en presencia de un campo de velocidades tipo *shear* (producido por rotación diferencial) ha sido ampliamente estudiada en el contexto de discos de acreción. Más específicamente en relación con la inestabilidad magneto-rotacional (MRI) que bajo la influencia de las corrientes de Hall, usualmente, se la denomina Hall-MRI. El comportamiento de esta inestabilidad ha sido analizado tanto en el régimen lineal (Wardle, 1999; Balbus & Terquem, 2001; Rüdiger & Kitchatinov, 2005; Devlen & Pekünlü, 2007) como en el régimen no lineal (Sano & Stone, 2002a,b). Otro estudio sobre el efecto Hall en plasmas débilmente ionizados sujetos a rotación diferencial, ha sido reportado por Rüdiger & Shalybkov (2004) y Rüdiger & Kitchatinov (2005) en el caso particular de número de Reynolds magnético finito del orden de las pocas centenas. A partir del análisis de estabilidad de plasmas no rotantes y sin *shear*, se obtiene la propagación de los modos lineales Hall-MHD (ver sección 2.4.1). Entre ellos, las ondas circulares con polarización derecha denominadas *whistlers* y las ondas circulares con polarización izquierda conocidas como ondas *ion-cyclotron* (ver, por ejemplo, Mahajan, Mininni & Gómez (2005) y las respectivas referencias). Cuando estos modos se propagan en un flujo tipo *shear* en presencia de corrientes de Hall, el modo *ion-cyclotron* se desestabiliza si el *shear* es suficientemente intenso; concretamente, cuando la intensidad del *shear* supera a la frecuencia

de ciclotrón iónica.⁵ Además, la presencia del efecto Hall conduce a la desestabilización de flujos con *shear* tanto positivo como negativo según sea la orientación del campo magnético. Si la vorticidad asociada al *shear* es anti-paralela al campo magnético externo, el flujo se vuelve inestable; en cambio, en el caso paralelo el flujo permanece estable. Esto se debe a que el efecto Hall introduce una especie de helicidad en la microescala debido a que rompe la simetría especular \mathbf{B} por $-\mathbf{B}$ en la ecuación de inducción (Wardle, 1999; Balbus & Terquem, 2001), generando cambios significativos en el espacio de parámetros dependiendo del alineamiento relativo entre el campo magnético y la vorticidad asociada a la velocidad tipo *shear*.

En la próxima sección se deducen las ecuaciones correspondientes al modelo teórico desarrollado en la presente Tesis. En el contexto de la teoría Hall-MHD se reobtienen las ecuaciones bajo la aproximación de *shearing-box*.

3.4. Ecuaciones Hall-MHD en la aproximación *shearing-box*

A continuación se listan las ecuaciones adimensionales Hall-MHD (deducidas en la sección 2.4) que describen la dinámica del sistema para un plasma completamente ionizado (asumiendo $Z = 1$). Como unidades de medida, se considera que la unidad de velocidad U_0 está dada por la velocidad de Alfvén v_A , el campo magnético se expresa en unidades de la velocidad, la unidad de tiempo es t_0 y la unidad de densidad de partículas n_0 está determinada por su valor en el estado de equilibrio.⁶ La ecuación de continuidad es

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0, \quad (3.8)$$

siendo n la densidad de partículas tanto de electrones como de protones ($n_e = n_i = n$), en virtud de la neutralidad de carga. La ecuación de movimiento

⁵En el régimen dominado por el efecto Hall, si las frecuencias de las fluctuaciones del campo magnético superan la frecuencia de ciclotrón, los iones no pueden adaptarse a los rápidos cambios del campo y sólo la dinámica de los electrones permanece acoplada a la dinámica del campo magnético

⁶La unidad de longitud L_0 queda determinada a partir de las unidades de medida de velocidad y tiempo. En tanto que la unidad de presión se desprende de la relación politrópica.

resulta

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -2\beta \nabla h + \frac{\nabla \times \mathbf{B} \times \mathbf{B}}{n} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (3.9)$$

donde β es el parámetro beta del plasma, h es la densidad de entalpía para flujos politrópicos para cada una de las especies ($h_{e,i} = h = \ln n$, para un gas ideal e isotérmico tal que $T_e = T_i = T = \text{const}$). La ecuación de inducción para el potencial vector \mathbf{A} , se escribe como

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \varepsilon \beta \nabla h - \nabla \phi_e + \left(\mathbf{u} - \varepsilon \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{n} \right) \times \mathbf{B} - \eta \nabla \times \mathbf{B}, \quad (3.10)$$

siendo ϕ_e el potencial electrostático y $\varepsilon = c/(\omega_{pi} L_0)$ el parámetro de Hall para plasmas completamente ionizados.

Bajo la aproximación *shearing-box*, se asume un sistema de referencia en coordenadas cartesianas correspondiente a una pequeña parcela de fluido. En este sentido, cualquier flujo macroscópico puede ser adecuadamente descrito mediante un perfil de velocidades lineal y uniforme (flujo tipo *shear*) siempre y cuando las dimensiones de la parcela sean lo suficientemente chicas. Sea un campo magnético externo uniforme en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$ y un campo de velocidades tipo *shear* $\mathbf{u}_{sh} = u_{sh}(x)\hat{\mathbf{y}} = -sx\hat{\mathbf{y}}$ (lineal y uniforme), donde s corresponde al gradiente en la velocidad del flujo macroscópico en la dirección transversal que en su versión adimensional se expresa como $s = -t_0 \partial_x u_{sh}$ (ver sección 3.2). Debido al *shear* las líneas del campo magnético externo se distorsionan, desarrollando componentes perpendiculares a la dirección del campo magnético externo. En consecuencia, tanto el campo magnético como el campo de velocidades y demás cantidades que describen el estado del flujo, se pueden descomponer como la suma de un valor medio y las fluctuaciones con respecto al mismo asociadas a la microescala

$$\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{b}(x, y, z, t), \quad \mathbf{u} = -sx\hat{\mathbf{y}} + \mathbf{u}(x, y, z, t). \quad (3.11)$$

Si se elige la unidad de tiempo t_0 como la inversa del *shear* resulta que $|\partial_x u_y| = 1$ con lo cual el parámetro s sólo puede adquirir dos valores tales que $s = \pm 1$. Por lo tanto, la vorticidad local asociada a la velocidad tipo *shear* ($\mathbf{w}_{sh} = \nabla \times \mathbf{u}_{sh} = (0, 0, -s)$), sólo puede tener componente vertical alineada ($s = -1$) o anti-alineada ($s = 1$) con el campo magnético externo el cual, a su vez, es perpendicular al plano (x, y) en el que se produce

el *shear*. En las unidades adoptadas, $B_0 = 1$.

Reescribiendo las ecuaciones Hall-MHD (3.8)–(3.10) en términos de los campos microscópicos \mathbf{u} y \mathbf{b} descritos en la ecuación (3.11), se obtienen las ecuaciones adimensionales Hall-MHD en la aproximación *shearing-box* (Hawley, Gammie, & Balbus, 1995; Umrhan & Regev, 2004)

$$(\partial_t - sx\partial_y)n + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0, \quad (3.12)$$

$$(\partial_t - sx\partial_y)\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -2\beta\nabla h + \frac{\nabla \times \mathbf{B} \times \mathbf{B}}{n} + su_x\hat{\mathbf{y}} + \nu\nabla^2\mathbf{u}, \quad (3.13)$$

$$(\partial_t - sx\partial_y)\mathbf{B} = \nabla \times \left(\mathbf{u} - \varepsilon \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{n} \right) \times \mathbf{B} - sB_x\hat{\mathbf{y}} + \eta\nabla^2\mathbf{B}. \quad (3.14)$$

siendo \mathbf{B} la suma del campo magnético externo y el campo perturbativo. Dada la presencia de un campo magnético externo y un flujo tipo *shear*, externamente aplicado, el conjunto de ecuaciones (3.12)–(3.14) permite analizar la dinámica de las perturbaciones asociadas a los campos microscópicos en una pequeña parcela de plasma correspondiente a la microescala.

Para estudiar la relevancia del efecto Hall en flujos tipo *shear* en presencia de un campo magnético externo, se realiza un análisis lineal de las ecuaciones Hall-MHD tipo *shearing-box* (3.12)–(3.14) para identificar posibles inestabilidades (ver sección 2.2.1). Se encuentra que en sistemas donde el efecto Hall y el *shear* actúan conjuntamente, el sistema se vuelve inestable cuando se cumple que $\varepsilon s > 1$. A esta nueva inestabilidad, asociada a la dinámica de la microescala, se la denomina, en la presente Tesis, Hall-MSI (*Hall magneto-shear instability*).⁷ La identificación y el posterior análisis de esta inestabilidad, constituyen el eje principal de la Tesis. A continuación se estudia, la presencia de esta inestabilidad en configuraciones 1D (Capítulos 4 y 5), 2D (Capítulo 6) y 3D (Capítulo 7). En las configuraciones 1D y 2D se linealizan las ecuaciones y se calculan las relaciones de dispersión correspondientes, comparando los resultados teóricos obtenidos con simulaciones numéricas. En el caso unidimensional, mediante un análisis cualitativo de los resultados numéricos, se presenta también el comportamiento de la inestabilidad en el régimen no lineal. Asimismo, en esta geometría se estudian

⁷Un análisis lineal sobre la estabilidad de flujos con *shear* bajo la influencia de la difusión ambipolar y el efecto Hall ha sido efectuado por Kunz (2008) para el caso de plasmas débilmente ionizados. Sin embargo, el tratamiento realizado por el autor difiere sustancialmente al desarrollado en esta Tesis.

dos problemas: por un lado, sistemas en los cuales el *shear* se presenta en ausencia de rotación y por el otro, sistemas en los que el *shear* es generado por un perfil de rotación diferencial. En la configuración 3D, además, se desarrolla la inestabilidad macroscópica de Kelvin-Helmholtz. El estudio de ambas inestabilidades en el régimen lineal se aborda esencialmente en forma numérica, verificando algunos resultados predichos por la teoría. Dado que en los flujos astrofísicos usualmente se asume que los efectos disipativos son despreciables, no se consideran los términos asociados a la viscosidad y a la resistividad eléctrica en el desarrollo de los siguientes Capítulos.⁸

3.5. Simulaciones numéricas

Para testear el modelo desarrollado, se comparan los resultados teóricos con simulaciones numéricas. Para estudiar la inestabilidad Hall-MSI en configuraciones 1D (Capítulos 4 y 5) y 2D (Capítulo 6) se realizan simulaciones locales en la aproximación *shearing-box* utilizando un código de diferencias finitas de alto orden PENCIL CODE⁹ (Brandenburg & Dobler, 2002). En geometrías 3D (Capítulo 7), además, se investiga el desarrollo conjunto de dos inestabilidades tipo *shear*: la inestabilidad Hall magneto-shear y la conocida inestabilidad macroscópica de Kelvin-Helmholtz. Por lo tanto, para analizar el comportamiento conjunto de ambas inestabilidades se realizan simulaciones globales utilizando un código pseudo-espectral desarrollado por el Grupo de Flujos Astrofísicos (Mininni, Gómez & Mahajan, 2003b).

En cualquier caso, hay que tener en cuenta que las simulaciones Hall-MHD requieren mayor tiempo de cálculo dado que se modifica la condición CFL (Courant-Friedrich-Lewy) la cual establece una cota superior para el paso temporal: $\Delta t \lesssim \Delta x^2 (\varepsilon v_A)^{-1}$ (asumiendo que v_A es la velocidad característica del problema). Es decir, que el paso temporal decrece, por un lado, cuadráticamente con la resolución espacial y, por el otro, linealmente con el valor del parámetro de Hall.¹⁰ Por esta razón, las simulaciones realizadas corresponden a resoluciones espaciales moderadas ($N = 128$). Por otra parte,

⁸Por otra parte, si se tienen en cuenta los efectos disipativos, la relación de dispersión presenta términos impares en ω cuya contribución a la dinámica del sistema consiste en agregar un factor de amortiguación proporcional a $e^{-k^2 \nu t}$ tanto en los modos estables como en los inestables sin afectar la estabilidad del sistema.

⁹<http://code.google.com/p/pencil-code/>.

¹⁰En simulaciones MHD, la condición CFL es menos restrictiva dado que $\Delta t \lesssim \Delta x v_A^{-1}$.

los coeficientes de viscosidad ν y resistividad magnética η son suficientemente bajos, siendo apreciables sólo en las escalas más pequeñas correspondientes a las escalas disipativas. Eligiendo adecuadamente los valores de ν y η , se garantiza que las escalas de disipación se resuelven correctamente tal que, a todo instante, se cumpla que k_ν y k_η permanezcan por debajo del máximo número de onda permitido. Las condiciones de contorno son 2π -periódicas.

Típicamente, en simulaciones numéricas, la unidad de longitud está dada por el tamaño de la caja L_{box} , que usualmente corresponde a 2π . En simulaciones locales tipo *shearing-box*, el flujo tipo *shear* ocupa la totalidad de la caja numérica mientras que en las simulaciones globales el *shear* está localizado en una región determinada y acotada. Para estudiar una inestabilidad Hall-MHD, se necesita que el efecto Hall sea relevante en la escala asociada a la inestabilidad que, en este caso, corresponde a la escala en la cual está presente el *shear* ($L_H \sim L_{shear}$). Por tal motivo, en las simulaciones locales realizadas $\varepsilon > 1$, en contraposición a las simulaciones globales implementadas en las que $\varepsilon < 1$:

$$\varepsilon = L_H/L_{box} \Rightarrow \text{si } L_H \sim L_{shear} \Rightarrow \varepsilon = \begin{cases} L_{shear}^{local}/L_{box} \gtrsim 1 \\ L_{shear}^{global}/L_{box} \lesssim 1 \end{cases} \quad (3.15)$$

Las simulaciones locales permiten estudiar escalas pequeñas con mucha resolución no siendo posible resolver, a la vez, escalas macroscópicas. Para eso se requieren las simulaciones globales, a expensas de perder resolución en la microescala. En otras palabras, las simulaciones locales *shearing-box* pueden pensarse como una ampliación de la región donde se encuentran los intensos gradientes asociados al campo de velocidades que, en simulaciones globales, sólo ocupan una pequeña fracción de la caja.¹¹

Las simulaciones tipo *shearing-box* pueden implementarse tanto en códigos de diferencias finitas (Hawley, Gammie, & Balbus, 1995; Brandenburg et al., 1995) como en códigos espectrales (Lesur & Longaretti, 2005; Umurhan & Regev, 2004).¹² Limitaciones de las simulaciones locales han sido discutidas

¹¹La implementación del *shear* en las simulaciones globales, se realiza a partir de un perfil de velocidades del tipo tangente hiperbólica. De manera que las regiones de intensos gradientes quedan localizadas en estrechas franjas rodeada por un campo de velocidades esencialmente uniforme.

¹²Para un análisis detallado sobre la adaptación numérica de las ecuaciones tipo *shearing-*

en Regev & Umurhan (2008) y en Bodo et al. (2008). Asimismo, la correspondencia entre simulaciones locales y simulaciones globales ha sido analizada recientemente en varios trabajos (Guan et al., 2009; Johansen, Youdin, & Klahr, 2009; Davis, Stone, & Pessah, 2010; Sorathia, Reynolds & Armitage, 2010). Para estudiar el comportamiento de la dinámica de la microescala y su influencia en las escalas macroscópicas, las simulaciones tipo *shearing-box* parecen ser las adecuadas permitiendo alcanzar mayor resolución en las escalas espaciales más pequeñas. Así, la dinámica de una pequeña parcela de fluido inmersa en un flujo tipo *shear* puede ser estudiada en detalle.

box en códigos de diferencias finitas o espectrales, remitirse a Hawley, Gammie, & Balbus (1995) o Umurhan & Regev (2004), respectivamente.

Modelo 1D

En los Capítulos 4 y 5 se analiza la influencia del efecto Hall en flujos tipo *shear* en configuraciones unidimensionales. En particular, se realiza un estudio de la estabilidad de una pequeña parcela de fluido inmersa en un flujo macroscópico tipo *shear* no rotante (Capítulo 4) y en rotación diferencial (Capítulo 5). A partir de las ecuaciones Hall-MHD en la aproximación *shearing-box*, se calcula la relación de dispersión correspondiente. El modelo teórico desarrollado se compara con los resultados obtenidos mediante simulaciones numéricas tipo *shearing-box*. En este apartado, se presenta el modelo teórico común a ambos sistemas analizados (no rotante y en rotación diferencial). Luego de exponer el análisis lineal para cada caso (Capítulos 4 y 5), se explora el régimen no lineal, esencialmente, en forma numérica. Los resultados asociados al modelo 1D constituyen parte del artículo Bejarano, Gómez, & Brandenburg (2011).

Ecuaciones generales

Sea una pequeña parcela de fluido centrada en un punto arbitrario del espacio \mathbf{r}_0 , inmersa en un plasma macroscópico que puede ser no rotante o estar en rotación diferencial. Para abarcar ambas situaciones, se elige un sistema de referencia solidario al movimiento de la parcela, cuyo origen de coordenadas se ubica en \mathbf{r}_0 . Las ecuaciones Hall-MHD (3.8)–(3.10) en un sistema de referencia en rotación con velocidad angular local uniforme $\Omega_0 \hat{\mathbf{z}}$ con $\Omega_0 = \Omega(\mathbf{r}_0)$ (considerando $\nu \approx \eta \approx 0$) son,

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -2\beta \nabla h + \frac{\nabla \times \mathbf{B} \times \mathbf{B}}{n} - 2\Omega \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \varepsilon \beta \nabla h - \nabla \phi_e + \left(\mathbf{u} - \varepsilon \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{n} \right) \times \mathbf{B} . \quad (3)$$

En tanto que la ecuación de continuidad y la ecuación de inducción no se ven afectadas, la rotación del sistema de referencia queda reflejada únicamente en el término adicional de la ecuación de movimiento correspondiente a la fuerza de Coriolis (donde $\Omega = \Omega_0 t_0$). Se asume, además, que la fuerza centrífuga, que puede escribirse como el gradiente del denominado potencial centrífugo, se suma al potencial gravitatorio y a la fuerza debido a la presión. Así, adoptando un sistema de coordenadas cartesianas, debido a que las dimensiones de la parcela de fluido son tales que $L_i \ll r_0$, y descomponiendo a los campos como la suma de campos correspondientes a las escalas macroscópicas y a las perturbaciones asociadas la microescala según la ecuación (3.11), se obtienen las ecuaciones Hall-MHD tipo *shearing-box* (3.12)–(3.14) en un sistema de referencia en rotación

$$(\partial_t - sx\partial_y)n + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0 , \quad (4)$$

$$(\partial_t - sx\partial_y)\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -2\beta\nabla h + \frac{\nabla \times \mathbf{B} \times \mathbf{B}}{n} - 2\Omega\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u} + su_x\hat{\mathbf{y}}, \quad (5)$$

$$(\partial_t - sx\partial_y)\mathbf{B} = \nabla \times \left(\mathbf{u} - \varepsilon \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{n} \right) \times \mathbf{B} - sB_x\hat{\mathbf{y}} . \quad (6)$$

Este conjunto de ecuaciones describe la dinámica de una pequeña parcela de plasma que puede estar sometida o no a una rotación rígida Ω y que puede estar expuesta o no a un *shear* s . En particular, las ecuaciones (4)–(6) permiten describir dos configuraciones de interés. En el Capítulo 4, se analiza la influencia del efecto Hall en un flujo tipo *shear* no rotante ($\Omega = 0$ y $s \neq 0$). En el Capítulo 5 se estudia el rol del efecto Hall sobre un flujo en rotación diferencial ($\Omega \neq 0$ y $s = a\Omega$), donde el perfil de rotación está dado por $\Omega(r) = \Omega_0(r/r_0)^{-a}$.

Relación de dispersión

Sea una pequeña parcela de hidrógeno completamente ionizado inmersa en un flujo tipo *shear* en un campo magnético uniforme externo (supuesto en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$). Se consideran configuraciones unidimensionales a aquellas tales que el campo magnético \mathbf{b} y la velocidad \mathbf{u} dependen únicamente de la

coordenada z

$$\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{b}(z, t) , \quad \mathbf{u} = -sx \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{u}(z, t) . \quad (7)$$

Asimismo, se consideran fluctuaciones respecto a la densidad de partículas de equilibrio n_0 , considerada uniforme,

$$n = n_0 + \delta n(z, t) = 1 + \delta n(z, t) , \quad (8)$$

siendo $n_0 = 1$ en el sistema de unidades adoptado.

Reemplazando las expresiones dadas por la ecuación (7) en el conjunto de ecuaciones (4)–(6), se obtiene a primer orden en las perturbaciones que el sistema se divide en dos subsistemas: por un lado, los modos longitudinales y, por el otro, los modos perpendiculares. Las perturbaciones longitudinales involucran ondas de tipo acústico con fluctuaciones en u_z y δn , mientras que las perturbaciones transversales están asociadas a oscilaciones de las componentes perpendiculares de los campos \mathbf{u} y \mathbf{b} . El primer subsistema, compuesto por la ecuación de continuidad y la componente z de la ecuación de movimiento, resulta

$$\partial_t \delta n = -\partial_z u_z , \quad (9)$$

$$\partial_t u_z = -2\beta \partial_z \delta n . \quad (10)$$

El segundo subsistema, correspondiente a las proyecciones perpendiculares de las ecuaciones de movimiento y de inducción, establece la dinámica lineal de los grados de libertad perpendiculares

$$\partial_t \mathbf{u}_\perp = \partial_z \mathbf{b}_\perp + \begin{pmatrix} 0 & 2\Omega \\ (s - 2\Omega) & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_\perp , \quad (11)$$

$$\partial_t \mathbf{b}_\perp = \partial_z \mathbf{u}_\perp + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -s & 0 \end{pmatrix} \mathbf{b}_\perp + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \partial_{zz}^2 \mathbf{b}_\perp . \quad (12)$$

Las ecuaciones linealizadas (9)–(12) indican que en el régimen lineal, los modos longitudinales $(\delta n, u_z)$ están completamente desacoplados de los modos perpendiculares $(\mathbf{u}_\perp, \mathbf{b}_\perp)$.

Asumiendo que los campos microscópicos son proporcionales a $e^{i(kz - \omega t)}$ se obtiene que los modos longitudinales conducen a la conocida relación de

dispersión responsable de la propagación de ondas acústicas mientras que el sistema perpendicular proporciona una dinámica más compleja dada por la siguiente relación de dispersión (polinomio característico del sistema 4×4 formado por las componentes perpendiculares de \mathbf{u} y \mathbf{b})

$$\omega^4 - 2C_2\omega^2 + C_0 = 0 , \quad (13)$$

donde los coeficientes del polinomio bi-cuadrático son

$$C_2(k) = \frac{\varepsilon^2}{2}k^4 + \left(1 - \frac{\varepsilon s}{2}\right)k^2 + \Omega(2\Omega - s) , \quad (14)$$

$$C_0(k) = k^2(1 + \varepsilon(2\Omega - s))(k^2(1 + 2\varepsilon\Omega) - 2s\Omega) . \quad (15)$$

Los coeficientes dados por las ecuaciones (14)–(15) reflejan el conjunto de parámetros relevantes asociado al sistema de ecuaciones (4)–(6) en el régimen lineal. Esto es, el número de onda $k = k_z$ (en particular, el sistema depende de k^2), el parámetro de Hall ε , la frecuencia de rotación Ω y el gradiente de velocidades determinado por el *shear* s el cual, a su vez, corresponde a la componente vertical de la vorticidad local. También el campo magnético externo, en unidades de la velocidad de Alfvén, constituyen un parámetro del sistema pero se asume que $B_0 = 1$.

Para encontrar los modos normales de propagación (ver sección 2.2.1) hay que hallar el conjunto de raíces de la relación de dispersión (13)

$$\omega_{\pm}^2 = C_2 \pm \sqrt{C_2^2 - C_0} . \quad (16)$$

Se analizan ambas ramas de la relación de dispersión en el espacio de parámetros determinado por ε , Ω y k^2 (considerando que $B_0 = 1$ y $s = \pm 1$). Se encuentra que únicamente la solución ω_-^2 puede conducir al desarrollo de una inestabilidad dado que sólo esta rama adquiere valores negativos y, por ende, posee una componente imaginaria no nula. La rama correspondiente a ω_-^2 en ausencia de *shear* corresponde a la rama de las ondas *ion-cyclotron* (modos normales Hall-MHD, presentados en la sección 2.4.1). En presencia de intensos gradientes estos modos normales resultan inestables, abasteciéndose de la energía libre del *shear* (Kunz, 2008). La desestabilización proviene de la acción conjunta del *shear* y del efecto Hall.

En la Figura 1 se muestra una secuencia de gráficos en los cuales se pre-

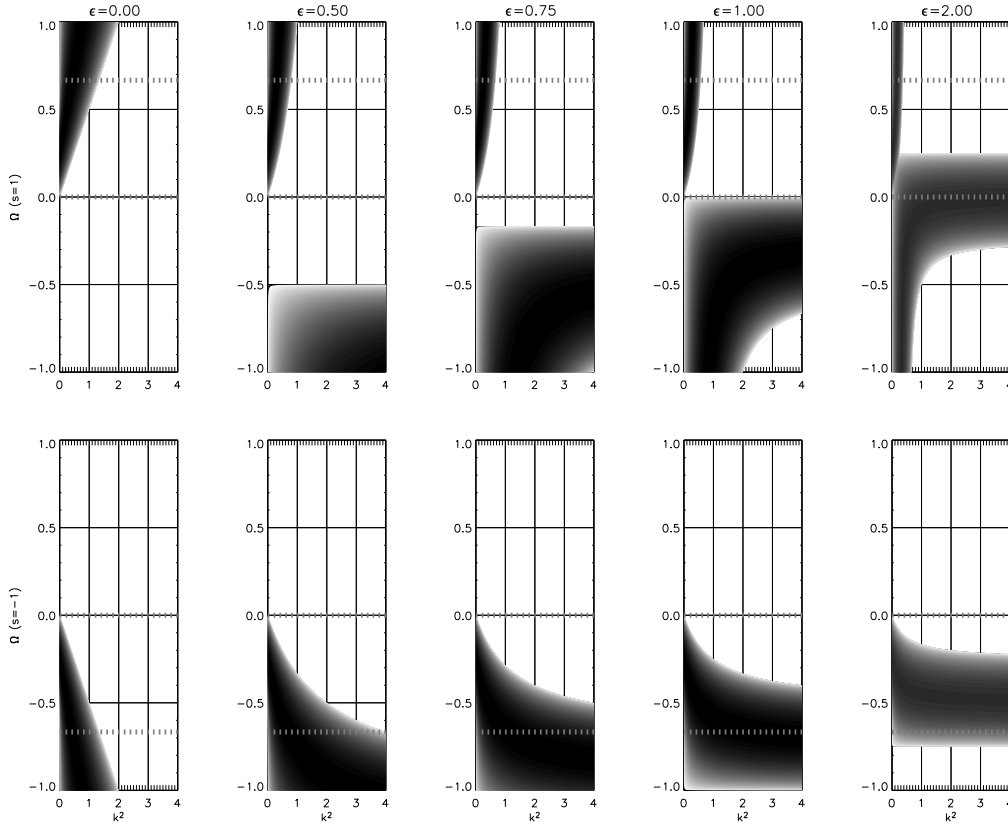


Figura 1: Contornos de nivel de la tasa de crecimiento para diferentes valores del parámetro de Hall en el plano (Ω, k^2) para $s = +1$ (panel superior) y $s = -1$ (panel inferior). Las regiones estables están representadas en color blanco mientras que las regiones sombreadas corresponden a las regiones inestables, siendo más oscuras cuanto mayor sea la tasa de inestabilidad. En líneas grises punteadas se indican los casos particulares sin rotación ($\Omega = 0$) y con rotación diferencial kepleriana ($\Omega = s/a$, con $a = 3/2$).

senta la tasa de crecimiento de la inestabilidad γ_- (siendo $\gamma_-^2 = -\omega_-^2$) en el plano determinado por los parámetros (Ω, k^2) para distintos valores de ε . El panel superior corresponde a $s = 1$ y el panel inferior a $s = -1$. Las líneas horizontales punteadas grises representan dos casos de particular interés: plasmas no rotantes ($\Omega = 0$ y $s \neq 0$) y plasmas con rotación diferencial kepleriana ($\Omega \neq 0$ y $s = a\Omega$ con $a=3/2$ y, por ende, $\Omega = s/a = \pm 2/3$). En el sistema de unidades adoptado, $\Omega = s/a = \pm a^{-1}$. Para valores de *shear* positivo (vorticidad local anti-alineada con el campo magnético externo), los plasmas no rotantes resultan inestables para valores del parámetro de Hall tales que $\varepsilon > 1$. En particular, todos los números de ondas son inestables para

$s = 1$ y $\varepsilon > 1$. En cambio, para valores de *shear* negativo (vorticidad local y campo magnético alineados) no surgen modos inestables. En tanto que los plasmas con rotación diferencial kepleriana siempre presentan un rango de modos inestables que varía según los distintos valores del parámetro de Hall. Además, la Figura 1 muestra claramente que la orientación relativa entre la vorticidad local y el campo magnético externo ($s > 0$ y $s < 0$) corresponde a casos enteramente distintos, excepto para el régimen MHD ($\varepsilon = 0$). En todos los casos considerados, existe un intervalo de frecuencias de rotación para las cuales todos los modos son inestables. La franja de inestabilidad está determinada por $-1/2\varepsilon < \Omega < (\varepsilon - 1)/2\varepsilon$ para $s = 1$ y por $-(\varepsilon - 1)/2\varepsilon \leq \Omega \leq -1/2\varepsilon$ para $s = -1$. Por otra parte, se observa un comportamiento asintótico para $k^2 \rightarrow \infty$ en todos los casos inestables.

Capítulo 4

Inestabilidad Hall Magneto - Shear (Hall-MSI): 1D

En este Capítulo se estudia la estabilidad de flujos tipo *shear* no rotantes bajo la influencia del efecto Hall en configuraciones unidimensionales. En el régimen lineal, se analiza la relación de dispersión y se encuentra una condición de inestabilidad suficiente para el desarrollo de una inestabilidad que surge en flujos sometidos a la acción conjunta del efecto Hall y del *shear*. A esta nueva inestabilidad se la nombra Hall-MSI (*Hall magneto-shear instability*).

4.1. Análisis lineal

Dado el sistema de ecuaciones (4)–(6), se analiza la influencia del efecto Hall en una pequeña parcela de plasma no sometida a una rotación rígida $\Omega = 0$ pero expuesta a un *shear* $s \neq 0$. En otras palabras, se estudia el rol del efecto Hall en la dinámica de la microescala asociada a un flujo tipo *shear* no rotante ($\Omega = 0$ y $s \neq 0$). A partir de las ecuaciones (14)–(15), los coeficientes de la relación de dispersión (13) para un plasma no rotante con intensos gradientes en la velocidad en presencia de las corrientes de Hall son

$$C_2(k) = \frac{\varepsilon^2}{2}k^4 + \left(1 - \frac{\varepsilon s}{2}\right)k^2, \quad (4.1)$$

$$C_0(k) = k^4(1 - \varepsilon s). \quad (4.2)$$

La sencillez de los coeficientes de la relación de dispersión (4.1)–(4.2), permite estudiar la inestabilidad de manera directa.

En ausencia de efecto Hall ($\varepsilon = 0$, régimen puramente MHD), el sistema resulta estable. Los coeficientes $C_2 = k^2$ y $C_0 = k^4$ corresponde a la relación de dispersión asociada a la propagación de modos de Alfvén a lo largo de la dirección $\hat{\mathbf{z}}$ (ecuación (2.33), sección 2.2.1). Por lo tanto, el *shear*, sin la presencia de las corrientes de Hall, no es suficiente para desestabilizar el sistema.

A partir de las expresiones (4.1)–(4.2), se observa que $C_2^2 - C_0 \geq 0$. Dependiendo de los signos de C_0 y C_2 , existen, *a priori*, cuatro casos posibles para estudiar la estabilidad. Sin embargo, en el plano (k^2, ε) no se cumplen simultáneamente las condiciones $C_0 > 0$ y $C_2 < 0$. De modo que la condición de inestabilidad (para que alguna de las soluciones ω_{\pm}^2 , dadas por la ecuación (16), posea una componente imaginaria) se reduce a que el término independiente de la relación de dispersión (13) sea negativo: $C_0 < 0$. Esto, a su vez, implica que $\varepsilon s > 1$ lo que significa que el *shear* tiene que ser lo suficientemente intenso como para que se cumpla que $|\partial_x u_y| > \omega_{ci}$ (siendo $\omega_{ci} = eB_0/(m_i c)$ la frecuencia ciclotrón iónica). Nótese que a mayor intensidad del campo magnético externo, se requiere *shear* más intenso para desestabilizar el sistema.

Según sea la orientación relativa de la componente z de la vorticidad local con respecto al campo magnético externo, se tiene que $s = \pm 1$. Sin pérdida de generalidad, se puede fijar $s = 1$ adjudicándole signo al parámetro de Hall dado que los coeficientes C_2 y C_0 (4.1)–(4.2) dependen de k^2 , ε^2 y del producto εs . De modo que, valores positivos del parámetro de Hall corresponden a configuraciones en las cuales la vorticidad y el campo magnético externo están anti-alineados, y valores negativos, al caso en que están alineados. Para $s = 1$ entonces, la condición de inestabilidad es tal que $\varepsilon > 1$ y, por lo tanto, la vorticidad local y el campo magnético externo tienen que estar anti-alineados. Esta condición refleja la ruptura de la simetría especular \mathbf{B} por $-\mathbf{B}$ debido a la presencia del efecto Hall.

Por otra parte, la tasa de crecimiento de la inestabilidad presenta un comportamiento asintótico en el límite $k \rightarrow \infty$, resultando independiente del número de onda

$$\gamma_-^2 \approx \frac{(\varepsilon s - 1)}{\varepsilon^2}. \quad (4.3)$$

En este régimen asintótico, todos los modos de Fourier son inestables para un dado rango de valores del parámetro de Hall siendo máxima la tasa de

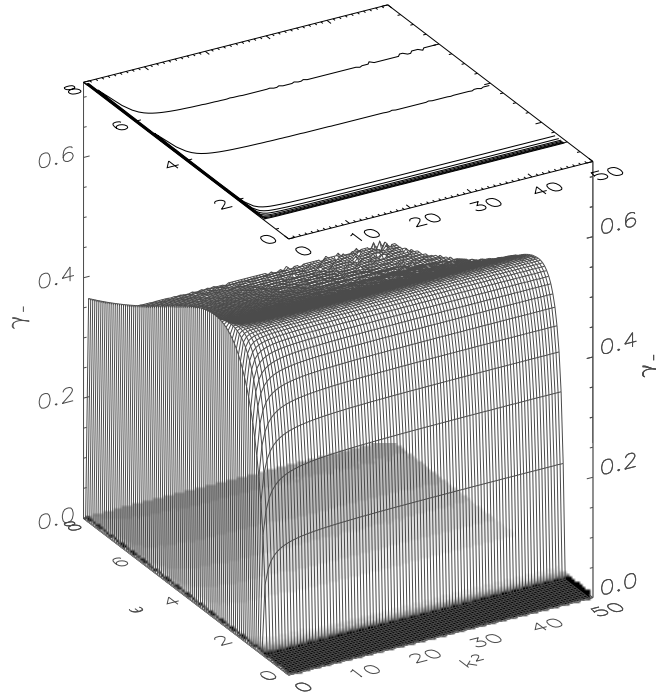


Figura 4.1: Tasa de crecimiento de la rama inestable como función del número de onda y del parámetro de Hall ($\gamma_-(k^2, \varepsilon)$) para $s = 1$. Se muestran también líneas de contorno (arriba) y una imagen en escala de grises (abajo) de la tasa de inestabilidad.

crecimiento de la inestabilidad cuando $\varepsilon s = 2$.

La tasa de inestabilidad máxima $\gamma_-^{\max} = 0,5$ se corresponde con todos los valores de los parámetros ε y k que satisfacen $(\varepsilon - 2)k^2 = 1/2$.

En la Figura 4.1 se muestra la tasa de crecimiento de la rama inestable $\gamma_-(k^2, \varepsilon)$, es decir, la componente imaginaria de la solución inestable $\text{Im}(\omega_-)$. Se puede ver que la región de inestabilidad se extiende desde $\varepsilon = 1$ hasta $\varepsilon \rightarrow \infty$ siendo inestable para todo número de onda, resultado que implica que esta inestabilidad es relevante en flujos con *shear* en los cuales el efecto Hall esté presente. Para números de ondas grandes, la tasa de crecimiento alcanza su valor máximo $\gamma_-^{\max} = 0,5$ en $\varepsilon = 2$ (es decir, $|\partial_x u_y| > 2\omega_{ci}$). Los contornos de nivel de γ_- en el plano (k^2, ε) , superpuestos en la parte inferior, muestran en forma clara el comportamiento asintótico para $k \rightarrow \infty$. En la Figura 4.2 se muestran los contornos de nivel para la tasa de inestabilidad en el plano (k^2, ε) .

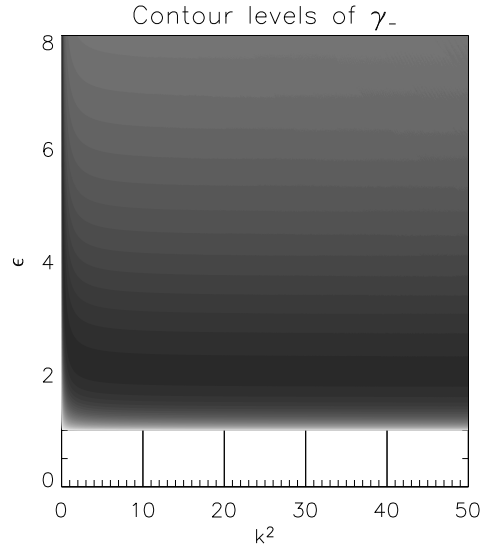


Figura 4.2: Niveles de contorno de la tasa de crecimiento de la inestabilidad γ_- en el plano (k^2, ε) para flujos con $s = 1$. Las regiones estables son blancas mientras que las regiones más inestables corresponden a las zonas más oscuras.

4.2. Verificación numérica

Para testear la tasa de crecimiento de los modos inestables se comparan los resultados analíticos obtenidos con simulaciones numéricas. Todas las simulaciones presentadas en este Capítulo son simulaciones tipo *shearing-box*, realizadas con el código de diferencias finitas PENCIL CODE.

En la Figura 4.3 se muestra un corte transversal de γ_- versus ε para $k^2 = 1$. Los resultados obtenidos a partir de las simulaciones numéricas (*) se condicen con la curva analítica (línea continua) que resulta de la relación de dispersión dada por los coeficientes (4.1)–(4.2). La región de inestabilidad corresponde a valores positivos del parámetro de Hall lo que, además, implica que \mathbf{w}_{sh} y \mathbf{B} están anti-alineados.

En la Figura 4.4 se presentan perfiles de la tasa de crecimiento como función del parámetro de Hall para tres números de onda ($k = 1$, $k = 2$, y $k = 5$) indicando el comportamiento asintótico para $k^2 \rightarrow \infty$ (curva gris en cada panel). En el límite asintótico, la tasa de crecimiento del modo inestable se vuelve gradualmente independiente de k . Esto implica que tanto el término convectivo como el término de Hall (es decir, términos primero y tercero del miembro derecho de la ecuación (12) crecen como k^2 , mientras que los

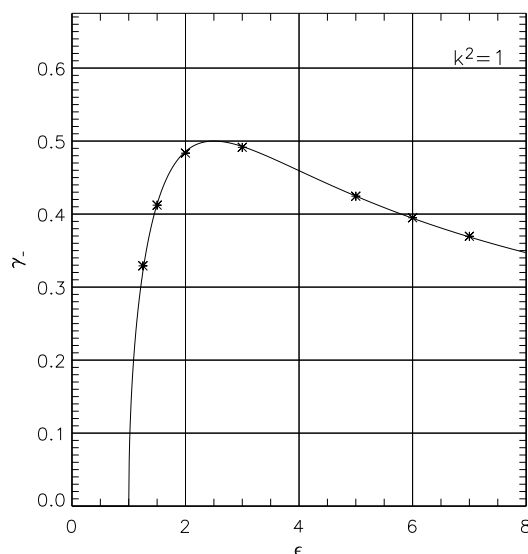


Figura 4.3: Resultados de las simulaciones numéricas (*) superpuestas a la predicción del modelo teórico (línea sólida) para $k = 1$ para un flujo con $s = 1$.

restantes términos se vuelven comparativamente despreciables. Por lo tanto, el régimen asintótico no depende del número de onda k .

Esta inestabilidad también se extiende hacia los números de onda pequeños (es decir, escalas espaciales grandes).¹ En este régimen particular, Rüdiger & Kitchatinov (2005) analizaron la estabilidad de sistemas en rotación diferencial encontrando que en el límite asintótico $\epsilon \gg 1$ (manteniendo ϵk^2 constante), el efecto de rotación se vuelve despreciable.

La inestabilidad Hall magneto-shear, producida por la combinación del efecto Hall y del *shear*, independientemente de si el sistema se encuentra en rotación diferencial o no, solamente ha sido estudiada, en el régimen lineal, por Kunz (2008), en el caso particular de plasmas débilmente ionizados.

4.3. Contexto astrofísico

La inestabilidad Hall magneto-shear podría jugar un rol importante en relación a la estabilidad de los jets. En la interfaz que separa al jet del medio que lo rodea, los gradientes de velocidad son muy intensos. Si en este contexto,

¹El comportamiento de la inestabilidad en estas escalas no ha sido abordado en el presente trabajo.

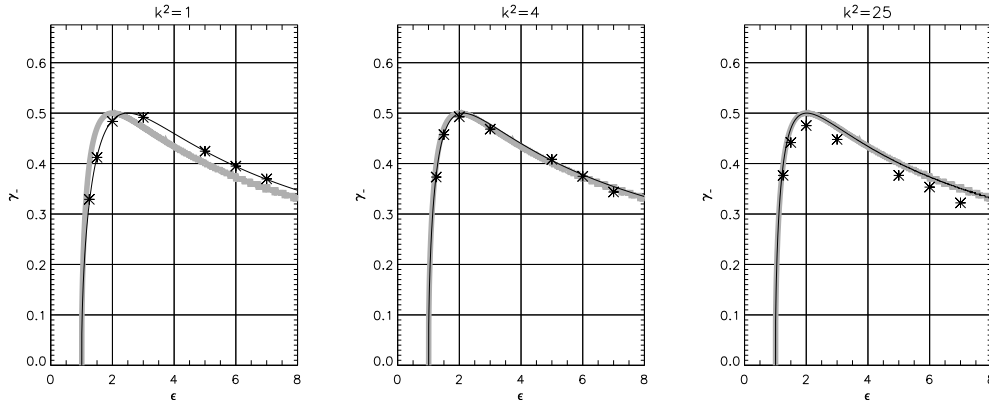


Figura 4.4: Superposición del modelo teórico (curva continua) y las simulaciones numéricas (*) para $k = 1$, $k = 2$ y $k = 5$ ($s = 1$). El comportamiento asintótico para $k^2 \rightarrow \infty$ (curva gris) se muestra en los tres casos.

además, se considera que el efecto Hall es no nulo, en principio es posible el desarrollo de la inestabilidad Hall-MSI. Debido al intenso *shear* presente en los contornos del jet, el principal candidato a desestabilizar el sistema es la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz (KH) (ya sea en su versión hidrodinámica o magnetohidrodinámica²). Sin embargo, observacionalmente, se sabe que los jets permanecen estables con un alto grado de colimación a lo largo de grandes distancias. El desarrollo conjunto de ambas inestabilidades, una asociada a la dinámica microscópica (Hall-MSI) y la otra correspondiente a las escalas macroscópica (KH) puede ser relevante a la hora de comprender la colimación observada en los jets astrofísicos.³

Valores típicos para la tasa de crecimiento de la inestabilidad de KH presentados en la literatura en el caso hidrodinámico (Ferrari, 1998), magnetohidrodinámico (Miura & Pritchett, 1982) e incluso en el contexto de la aproximación Hall-MHD (Huba, 1994) son tales que corresponden a una pequeña fracción de la intensidad del *shear* externo. Por lo tanto, la Hall-MSI cuya máxima tasa de crecimiento es 0,5 veces la intensidad del *shear*

²Como los campos magnéticos se consideran vinculados a los procesos de colimación, también puede resultar conveniente considerar la versión MHD de la inestabilidad de KH cuya tasa de crecimiento puede modificarse según la intensidad y la orientación del campo magnético.

³Mientras que la Hall-MSI se desarrolla en escalas comparables al tamaño de la región del *shear*, la inestabilidad de KH presenta longitudes de onda mucho mayores que la longitud característica del gradiente de velocidades.

impuesto, puede ser relevante en el análisis de estabilidad en la región que media entre el jet y el medio a su alrededor. Sin embargo, para estudiar ambas inestabilidades se precisa configuraciones 3D. En el Capítulo 7 se examina numéricamente la evolución de estas inestabilidades mediante simulaciones globales en tres dimensiones.

El modelo unidimensional presentado en este Capítulo se adapta adecuadamente a la descripción más simple de un jet, en la cual la componente azimutal del campo de velocidades helicoidal que rodea al jet puede ser representada como función de la componente radial, lo que conduce a un campo de velocidades tipo *shear* $u_\phi(r)$ que localmente puede escribirse como $u_y(x)$.

Capítulo 5

Inestabilidad Hall Magneto - Rotacional (Hall-MRI): 1D

En este Capítulo se estudia la estabilidad de flujos tipo *shear* rotantes bajo la influencia del efecto Hall en configuraciones unidimensionales. En el régimen lineal, se calcula la relación de dispersión y se analiza el desarrollo de la inestabilidad que surge en flujos sometidos a la acción conjunta del efecto Hall y la rotación diferencial. A esta inestabilidad se la conoce con el nombre Hall-MRI (*Hall magneto-rotational instability*). En particular, los resultados analíticos que constituyen este Capítulo se encuentran en Bejarano & Gómez (2010).

5.1. Análisis lineal

Se analiza el rol del efecto Hall en una pequeña parcela de plasma sometida a una rotación rígida $\Omega \neq 0$ y expuesta a un *shear* $s \neq 0$ el cual, a su vez, puede pensarse como consecuencia de una rotación diferencial. De modo que se estudia la influencia del efecto Hall en la dinámica microscópica asociada a un flujo en rotación diferencial, cuyo perfil de rotación está dado por $\Omega(r) = \Omega_0(r/r_0)^{-a}$, el cual produce un *shear* tal que $s = a\Omega$.

Sea un sistema de referencia localmente cartesiano centrado en \mathbf{r}_0 que rota con velocidad angular $\Omega_0 = \Omega(\mathbf{r}_0)$. Se asume una caja tal que $L_i \ll r_0$

(es decir, que se consideran despreciables los efectos de curvatura¹) tal que

$$x = r - r_0 , \quad y = r_0(\varphi - \Omega_0 t) , \quad z = z_0 \quad (5.1)$$

con (r, φ, z) coordenadas cilíndricas. De manera que en este sistema de referencia, el flujo con rotación diferencial $\Omega(r)$ puede aproximarse mediante un *shear* lineal superpuesto a un flujo uniformemente rotante. A primer orden alrededor de r_0 resulta que

$$\Omega(r) \approx \Omega_0 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)_{r=r_0} (r - r_0) = \Omega_0 + s \frac{x}{r_0} , \quad (5.2)$$

siendo $s = -r(\partial_r \Omega)_{r=r_0} = a\Omega$ con $\Omega = \Omega_0 t_0$ (donde a determina el perfil de rotación diferencial, Ω_0 es la velocidad angular local y t_0 la unidad de tiempo). De modo que, las ecuaciones *shearing-box* describen la dinámica de un sistema en rotación diferencial superponiendo una rotación rígida y un flujo tipo *shear* (lineal y uniforme). En este sentido, el *shear* es producido por la rotación diferencial.

A partir de las ecuaciones (14)–(15), se obtienen los coeficientes de la relación de dispersión (13) teniendo en cuenta que $s = a\Omega$

$$C_2 = \frac{\varepsilon^2 k^4}{2} + \left(1 - \frac{\varepsilon \Omega a}{2} \right) k^2 + (2 - a) \Omega^2 , \quad (5.3)$$

$$C_0 = k^2 (1 + \varepsilon \Omega (2 - a)) (k^2 (1 + 2\varepsilon \Omega) - 2a\Omega^2) . \quad (5.4)$$

Eligiendo que la unidad de tiempo, en el caso de flujos rotantes, sea la inversa de la velocidad angular local, $t_0 = |\Omega_0|^{-1}$, queda determinado que $\Omega = \pm 1$. Nótese que las ecuaciones (5.3)–(5.4) dependen de k^2 , ε^2 , Ω^2 y el producto $\varepsilon \Omega$ (a es un parámetro fijo definido por el perfil de rotación diferencial). Por lo tanto, se puede asumir, sin pérdida de generalidad, que $\Omega = 1$ asignándole signo positivo o negativo al parámetro de Hall según la velocidad angular de rotación Ω esté, respectivamente, alineada o anti-alineada con el campo magnético externo. Luego, el parámetro asociado al *shear* se puede escribir

¹Sin embargo, los efectos de rotación en el modelo *shearing-box* quedan expresados a través del término de Coriolis en la ecuación de movimiento (5).

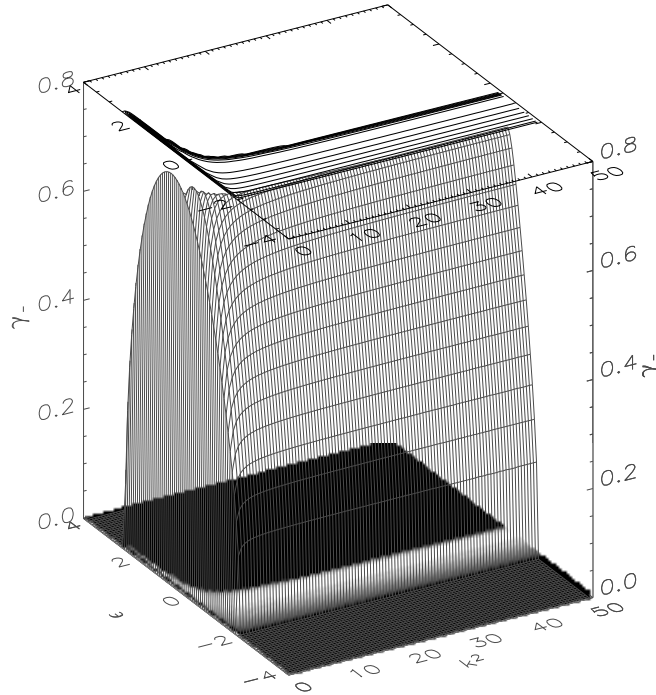


Figura 5.1: Tasa de crecimiento de la rama inestable como función del número de onda y del parámetro de Hall ($\gamma_-(k^2, \varepsilon)$) para un sistema con perfil de rotación kepleriano. Se muestran también líneas de contorno (arriba) y una imagen en escala de grises (abajo) de la tasa de inestabilidad.

como $s = a$. Así, los coeficientes resultan

$$C_2 = \frac{\varepsilon^2 k^4}{2} + \left(1 - \frac{\varepsilon a}{2}\right) k^2 + (2 - a) , \quad (5.5)$$

$$C_0 = k^2 (1 + \varepsilon(2 - a)) (k^2(1 + 2\varepsilon) - 2a) . \quad (5.6)$$

Como la presencia del efecto Hall rompe la simetría especular \mathbf{B} por $-\mathbf{B}$, la región inestable en el espacio de los parámetros depende del alineamiento relativo entre el campo magnético externo y la velocidad angular. Consecuentemente, el efecto Hall cambia cualitativamente el criterio de inestabilidad, siendo incluso posible que la inestabilidad surga en sistemas en donde la velocidad angular es una función radialmente creciente (Wardle, 1999; Balbus & Terquem, 2001; Sano & Stone, 2002a,b).

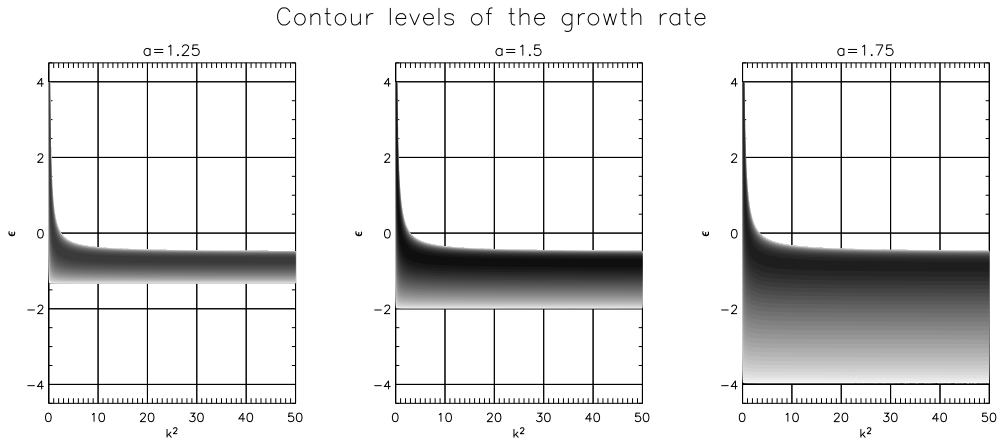


Figura 5.2: Niveles de contorno de la tasa de crecimiento de la inestabilidad γ_- en el plano (k^2, ε) para los casos sub-kepleriano ($a = 1,25$), kepleriano ($a = 1,5$) y supra-kepleriano ($a = 1,75$). Las regiones estables son blancas mientras que las regiones más inestables corresponden a las zonas más oscuras.

La tasa de crecimiento $\gamma_-(k^2, \varepsilon)$ se muestra en la Figura 5.1, para el caso de rotación kepleriana $a = 3/2$; pueden verse, además, niveles de contorno (arriba) y una imagen en escala de grises (abajo). En la Figura 5.2 se muestran contornos de niveles de la tasa de crecimiento de la inestabilidad para tres perfiles de rotación: levemente sub-kepleriano ($a = 1,25$), kepleriano ($a = 1,5$) y levemente supra-kepleriano ($a = 1,75$). En todos los casos, γ_- alcanza un valor asintótico positivo e independiente del número de onda. Además, la región de inestabilidad es apreciablemente más grande para sistemas con rotación supra-kepleriana que para aquellos con velocidad angular sub-kepleriana. La región de inestabilidad se encuentra limitada a un rango de valores negativos del parámetro de Hall ($\varepsilon < 0$) y, por ende, está asociada a sistemas en los cuales la velocidad angular y el campo magnético están anti-alineados. Para los sistemas en los cuales estos campos están alineados, la región de inestabilidad sólo se desarrolla para valores negativos del parámetro de Hall ($\varepsilon > 0$) en una región muy estrecha para los números de onda más pequeños permitidos en la aproximación *shearing-box* (correspondientes a las máximas escalas compatibles con el modelo). En cualquier caso, la región inestable, en el plano (k^2, ε) , está confinada a la zona encerrada por

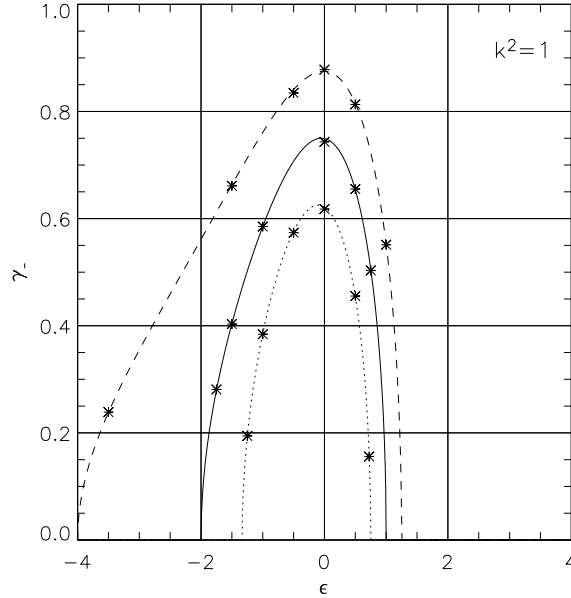


Figura 5.3: Resultados de las simulaciones numéricas (*) superpuestas a la predicción analítica para $k = 1$ y para los tres perfiles rotacionales analizados: sub-kepleriano (puntos), kepleriano (curva continua), supra-kepleriano (rayas). La inestabilidad magneto-rotacional sin efecto Hall corresponde al caso $\varepsilon = 0$ para el cual se alcanza la máxima tasa de crecimiento de la inestabilidad.

las dos curvas de estabilidad marginal determinadas por la condición $C_0 = 0$

$$\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{a}{k^2}, \quad (5.7)$$

$$\varepsilon = -\frac{1}{2-a}. \quad (5.8)$$

Para el perfil de rotación kepleriana ($a = 3/2$) la franja de inestabilidad para números de onda grandes abarca desde $\varepsilon = -1/2$ (para $k \rightarrow \infty$) hasta $\varepsilon = -2$ según las ecuaciones (5.7) y (5.8), respectivamente. La ecuación (5.8) indica que la franja de inestabilidad se amplía considerablemente a medida que el *shear* se incrementa hasta perfiles de rotación tales que $a \rightarrow 2$ (rotación supra-kepleriana). Sin embargo, para perfiles de rotación con $a > 2$ la franja de estabilidad resulta más estrecha cuanto mayor sea el *shear* invirtiéndose, además, las regiones de inestabilidad con respecto al signo del parámetro de Hall.

Para la inestabilidad magneto-rotacional estándar ($\varepsilon = 0$) se recuperan

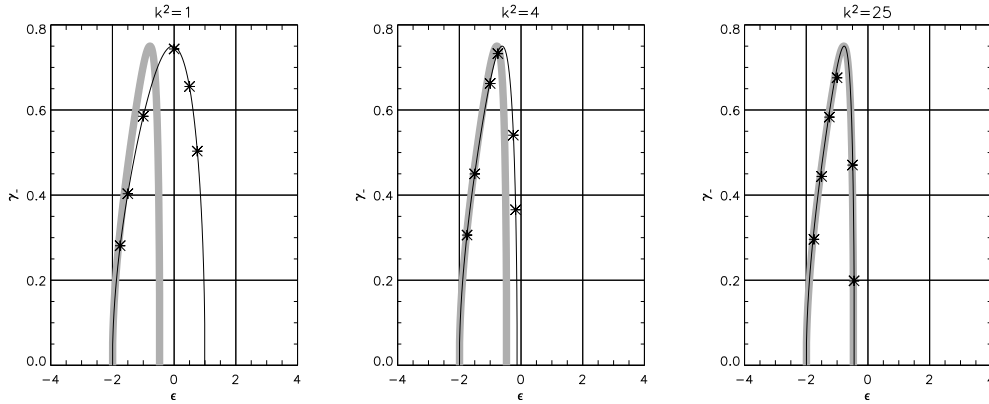


Figura 5.4: Superposición del resultado analítico (curva continua) y las simulaciones numéricas (*) para $k = 1$, $k = 2$ y $k = 5$ considerando rotación diferencial kepleriana. El comportamiento asintótico para $k^2 \rightarrow \infty$ (curva gris) se muestra en los tres casos.

los resultados reportados en la literatura (Balbus & Hawley, 1991). El valor máximo para la tasa de crecimiento de la rama inestable para $k^2 = 15/16$ es $\gamma_-^{\max} = 0,75$ y el rango de números de onda inestables se restringe al intervalo $0 < k^2 < 3$. Para los casos sub-kepleriano y supra-kepleriano, la tasa de inestabilidad máxima para k^2 son, respectivamente, $\gamma_-^{\max} = 0,625$ y $\gamma_-^{\max} = 0,875$, aunque cada valor máximo corresponde a diferentes intensidades del efecto Hall. Cada uno de los valores máximos de las tasas de crecimiento de la inestabilidad, corresponde al valor local de la constante de Oort A^2 asociada a cada uno de los perfiles de rotación (ver, por ejemplo, Balbus & Terquem (2001)).

5.2. Verificación numérica

Mediante simulaciones numéricas se contrastan los resultados analíticos obtenidos. Todas las simulaciones presentadas en este Capítulo son simulaciones tipo *shearing-box*, realizadas con el código de diferencias finitas PENCIL CODE.

En la Figura 5.3 se muestran cortes transversales de γ_- versus ϵ para

²Para un sistema en rotación diferencial $\Omega(r)$ se define a la constante de Oort A como $A = (1/2)(|d\Omega/d\ln(r)|)_{r=r_0}$. La tasa de crecimiento de una inestabilidad producida por rotación diferencial está dada por el valor local de la constante de Oort A (Balbus & Hawley, 1992a).

$k^2 = 1$. Los tres perfiles de rotación: sub-kepleriano (puntos), kepleriano (curva sólida), supra-kepleriano (rayas), se encuentran superpuestos para su comparación. A medida que el *shear* se intensifica, el rango de inestabilidad para los valores del parámetro de Hall aumenta considerablemente y la tasa de inestabilidad crece en forma progresiva. Los resultados de las simulaciones numéricas realizadas para diferentes valores de ε y de a , se indican mediante asteriscos (*), mostrando una muy buena concordancia con la predicción teórica.

En la Figura 5.4 están representados tres cortes de γ_- versus ε correspondientes a tres valores distintos del número de onda para el caso de flujo kepleriano. Esta figura también exhibe una muy buena concordancia entre los resultados analíticos y numéricos. El comportamiento asintótico (para $k \rightarrow \infty$), indicado mediante una línea de trazo gris, es alcanzado progresivamente para números de onda cada vez más grandes (es decir, escalas espaciales cada vez más chicas). Por lo tanto, la frecuencia para el modo más inestable se vuelve independiente del número de onda. De hecho, el balance entre el término convectivo y el término de Hall en la ecuación (12) es tal que para $k \gg 1$ la tasa de inestabilidad se vuelve asintóticamente independiente de k .

La inestabilidad presentada en este Capítulo, correspondiente a sistemas en rotación diferencial, se denomina inestabilidad magneto-rotacional (MRI) que bajo la influencia del efecto Hall se la conoce como Hall-MRI y ha sido investigada ampliamente en el contexto de discos de acreción. A modo de comparación, los resultados asintóticos para $k \rightarrow \infty$ presentados se corresponden con los reportados por Wardle (1999), Balbus & Terquem (2001) y Devlen & Pekünlü (2007). En particular, las Figuras 5.1 y 5.2 pueden ser comparadas en forma directa con las Figs. 1 y 5 del trabajo de Balbus & Terquem (2001). Asimismo, la relación de dispersión presentada por Rüdiger & Kitchatinov (2005) en la Ec. 7, para $\nu = \eta = 0$, se corresponde con los coeficientes de las ecuaciones (5.5)–(5.6).

5.3. Contexto astrofísico

Los discos de acreción se forman a partir de materia atraída gravitacionalmente por un objeto compacto, tal como una estrella de neutrones o

un agujero negro. Estos flujos astrofísicos poseen una significativa cantidad de impulso angular y constituyen un poderoso mecanismo de conversión de energía gravitacional en energía cinética y radiación (Pringle, 1981; Frank, King, & Raine, 1985). El proceso de acreción se encuentra en diversas configuraciones astrofísicas desde discos protoplanetarios, pasando por sistemas estelares binarios, hasta núcleos galácticos activos. Asimismo, ante la presencia de campos magnéticos se da origen a una estructura coronal en las inmediaciones del disco, convirtiendo a estos objetos en fuentes intensas de radiación X. Los discos de acreción corresponden a un flujo macroscópico en rotación diferencial (aproximadamente kepleriana) más una componente radial controlada por la viscosidad efectiva, la cual es responsable de la acreción de materia (ver, por ejemplo, Frank, King, & Raine (1985); Gómez (2009)).

Los modelos teóricos de sistemas acretantes muestran que para obtener tasas de acreción consistentes con las observaciones, es necesario invocar mecanismos que incrementen sensiblemente la viscosidad efectiva del fluido. Por este motivo, resulta relevante el estudio de inestabilidades en la microescala en tanto que pueden conducir a un estado turbulento que incremente la viscosidad efectiva del flujo de gran escala. En particular, la generación de turbulencia en las escalas microscópicas podría aumentar significativamente el transporte efectivo de momento angular y así incrementar la acreción de materia (Balbus & Hawley, 1998; Lesur & Longaretti, 2007; Fromang & Papaloizou, 2007). Para discos de acreción bajo la acción de campos magnéticos, el candidato más promisorio para explicar estos fenómenos parece ser la inestabilidad magneto-rotacional (MRI) (Velikhov, 1959; Chandrasekhar, 1961; Balbus & Hawley, 1991). Las simulaciones numéricas, en efecto, corroboran que el desarrollo de microturbulencia permite explicar el fenómeno de transporte de momento angular (ver, por ejemplo, entre muchos otros, algunos de los primeros trabajos numéricos al respecto: Brandenburg et al. (1995); Hawley, Gammie, & Balbus (1995); Matsumoto & Tajima (1995)). A modo de reseña, acerca de esta inestabilidad ver Balbus & Hawley (1998); Balbus (2003). En ausencia de campos magnéticos, la turbulencia se desarrolla a partir de inestabilidades no lineales dado que los discos de acreción keplerianos hidrodinámicos son linealmente estables (criterio de Rayleigh). Por lo tanto, la presencia de campos magnéticos parece ser esencial a la hora de explicar el proceso de acreción en relación al desarrollo de turbulencia. Sin

embargo, el origen de este campo magnético es todavía un tema de investigación abierto. Por tal motivo, inestabilidades puramente hidrodinámicas siguen siendo investigadas en el contexto de discos de acreción (Chagelishvili, 2003; Tevzadze et al., 2003; Urpin, 2003; Umurhan & Regev, 2004; Yecko, 2004; Dubrulle et al., 2005; Lesur & Longaretti, 2005; Mukhopadhyay, 2006; Fromang & Papaloizou, 2007; Regev & Umurhan, 2008).

En el contexto de discos de acreción, el efecto Hall puede afectar considerablemente la tasa de acreción de la MRI, entre otras cosas, debido a la orientación relativa entre el campo magnético y el vector velocidad angular (Wardle, 1999; Balbus & Terquem, 2001; Rüdiger & Kitchatinov, 2005; Devlen & Pekünlü, 2007). La influencia de las corrientes de Hall en la MRI ha sido analizada tanto en el régimen lineal (Wardle, 1999; Balbus & Terquem, 2001; Rüdiger & Shalybkov, 2004; Rüdiger & Kitchatinov, 2005; Devlen & Pekünlü, 2007) como en el no lineal (Sano & Stone, 2002a,b).³ En estos trabajos, la inestabilidad magneto-rotacional ha sido estudiada en el contexto de Hall-MHD, tanto en configuraciones 3D como en geometrías 2D (perturbaciones axisimétricas). Sin embargo, las configuraciones unidimensionales en las cuales las perturbaciones se propagan únicamente en la dirección asociada al campo magnético externo, permiten realizar una inspección más exhaustiva del espacio de los parámetros. Por este motivo, se considera relevante el análisis desarrollado para esta inestabilidad en sistemas 1D.

Por otra parte, se extiende el análisis del comportamiento de la Hall-MRI para sistemas no estrictamente keplerianos. En particular, los perfiles de rotación sub/supra-kepleriano pueden ser relevantes en diferentes contextos.⁴ Distintos modelos de acreción han sido estudiados para discos sub-keplerianos (Chakrabarti, 1995; Hueso & Guillot, 2005; Visser & Dullemond, 2010). Discos alrededor de objetos estelares jóvenes, pueden rotar a frecuencias angulares sub-keplerianas, debido a la fuerte magnetización que pueden presentar (Shu et al., 2008; Paardekooper, 2009). La evolución de la inestabilidad magneto-rotacional para discos protoplanetarios débilmente ionizados, en

³Asimismo, la inestabilidad magneto-rotacional en el contexto de difusión ambipolar también ha sido estudiada en el régimen lineal (Blaes & Balbus, 1994) y en el régimen no lineal (Hawley & Stone, 1998; Brandenburg et al., 1995; Mac Low et al., 1995).

⁴Este Capítulo analiza la dependencia de la inestabilidad Hall-MRI para diferentes perfiles de rotación. Sin embargo, no se consideran efectos generados por la presencia de partículas de polvo o el desarrollo de inestabilidades de origen gravitacional, en tanto exceden el propósito de la presente Tesis.

presencia de un campo magnético radialmente no uniforme, ha sido estudiada por Kato et al. (2009). En esta configuración, aparece una zona con rotación supra-kepleriana como consecuencia del crecimiento no uniforme de la turbulencia generada por la MRI. Frecuencias angulares sub/supra-kepleriana han sido analizadas en el contexto de discos de acreción alrededor de estrellas de neutrones y de agujeros negros (Mao, Psaltis & Milsom, 2009). Un posible camino de formación planetaria mediante la excitación no uniforme de la inestabilidad magneto-rotacional ha sido investigado por Kato, Fujimoto & Ida (2010). Encontraron que las partículas de polvo se acumulan en la frontera de regiones sub/supra-keplerianas, de tal manera que la densidad de polvo crece lo suficiente para que se establezca una inestabilidad gravitacional.

Epílogo (modelo 1D)

En este apartado, se realiza un análisis cualitativo del comportamiento de las inestabilidades Hall-MSI y Hall-MRI en el régimen no lineal. A partir del cálculo de los autovectores en el modelo lineal y mediante simulaciones numéricas, se analiza el comportamiento de los campos durante la etapa no lineal. Por último, se presentan las principales conclusiones referentes a las dos inestabilidades analizadas para geometrías unidimensionales.

Ecuaciones no lineales

El conjunto de ecuaciones Hall-MHD en la aproximación *shearing-box* en un referencial rotante (4)–(6) para configuraciones 1D según la ecuación (7), sin considerar los términos de disipación, es:

$$\partial_t \delta n = -\partial_z u_z - \partial_z (u_z \delta n) , \quad (\text{E.1})$$

$$(\partial_t + u_z \partial_z) u_z = -2\beta \partial_z \delta n - \frac{1}{1 + \delta n} \partial_z \left(\frac{b_\perp^2}{2} \right) , \quad (\text{E.2})$$

$$(\partial_t + u_z \partial_z) u_\perp = \frac{1}{1 + \delta n} (1 + b_z) \partial_z b_\perp + \begin{pmatrix} 0 & 2\Omega \\ (s - 2\Omega) & 0 \end{pmatrix} u_\perp , \quad (\text{E.3})$$

$$\begin{aligned} (\partial_t + u_z \partial_z) b_\perp = & -b_\perp \partial_z u_z + \partial_z u_\perp + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -s & 0 \end{pmatrix} b_\perp + \\ & + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \partial_z \left((1 + b_z) \frac{\partial_z b_\perp}{1 + \delta n} \right) . \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

A diferencia de las ecuaciones linealizadas, en el régimen no lineal se observa la interacción entre los modos longitudinales (ondas acústicas) y los modos perpendiculares (de los cuales pueden surgir las inestabilidades Hall-MSI y

Hall-MRI). Notar que incluso en el caso en los modos acústicos inicialmente no estén excitados, los términos no lineales acoplados con la dinámica de los modos perpendiculares, eventualmente, logran activar la dinámica longitudinal. En el régimen no lineal, además, se pone de manifiesto otro parámetro del problema: el denominado parámetro β del plasma. Dado que la relación de dispersión (13) es independiente de este parámetro, la tasa de crecimiento de la inestabilidad γ_- no se modifica. Establecidos los valores del campo magnético externo y del gradiente de velocidades asociado al flujo macroscópico, γ_- sólo depende del número de onda y del parámetro de Hall.

De las ecuaciones lineales (11)–(12), pueden ser calculados los autovectores asociados a los modos perpendiculares en el régimen lineal.

Para la Hall-MSI, se obtiene que

$$\mathbf{u}_\perp = \left(1, \frac{\varepsilon - (1 + \gamma_-^2)}{\gamma_- \varepsilon} \right) u_x, \quad (\text{E.5})$$

$$\mathbf{J}_\perp = \left(\frac{(1 + \gamma_-^2)}{\varepsilon}, \gamma_- \right) u_x. \quad (\text{E.6})$$

De modo que el campo de velocidades para los protones y la densidad de corriente están alineados si el parámetro de Hall es positivo o anti-alineados si el número de Hall es negativo (teniendo en cuenta que los modos inestables surgen para valores positivos de ε)

$$\tan \phi_u = \frac{\varepsilon - (1 + \gamma_-^2)}{\gamma_- \varepsilon} = \tan \phi_J = \frac{\gamma_- \varepsilon}{1 + \gamma_-^2}, \quad (\text{E.7})$$

donde $\tan \phi_u = u_y/u_x$ y $\tan \phi_J = J_y/J_x$.

Para la Hall-MRI, los autovectores son

$$\mathbf{u}_\perp = \left(1, \frac{\gamma_- (\gamma_-^2 + 1 + \varepsilon(\varepsilon - a))}{2\gamma_-^2 + 2\varepsilon(\varepsilon - a) + \varepsilon} \right) u_x, \quad (\text{E.8})$$

$$\mathbf{J}_\perp = \left(\frac{\gamma_-^2 (\gamma_-^2 + 1 + \varepsilon(\varepsilon - a))}{2\gamma_-^2 + 2\varepsilon(\varepsilon - a) + \varepsilon} + \varepsilon - a, \frac{\gamma_-^2 (\gamma_-^2 + 1 + \varepsilon(\varepsilon - a))}{2\gamma_-^2 + 2\varepsilon(\varepsilon - a) + \varepsilon} - \gamma_- \right) \times \frac{u_x}{\gamma_-^2 + \varepsilon(\varepsilon - a)}. \quad (\text{E.9})$$

En este caso, para todos los valores del parámetro Hall y para cualquier perfil

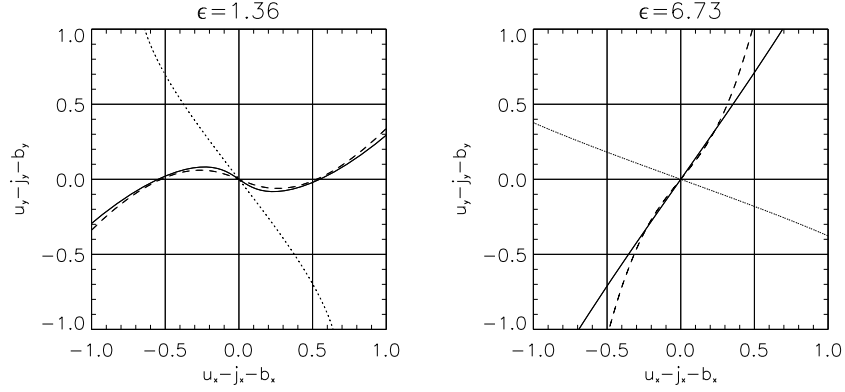


Figura 1: Representación paramétrica de la velocidad protónica (línea sólida), densidad de corriente (línea a rayas) y campo magnético (línea punteada) para diferentes valores del parámetro de Hall para la inestabilidad Hall magneto-shear (Hall-MSI).

de rotación diferencial (representado por a), se encuentra en forma numérica que la velocidad protónica y la densidad de corriente están anti-alineadas dado que

$$\cos(\phi_{u,j}) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{J}}{|\mathbf{u}||\mathbf{J}|} = -1 . \quad (\text{E.10})$$

Resultados numéricos

A partir de simulaciones numéricas, se analizan dos regímenes según el valor del parámetro de plasma sea $\beta \approx 1$ o $\beta \gg 1$. En el contexto de discos de acreción, la inestabilidad magneto-rotacional (MRI) requiere que las longitudes de onda sean menores que la altura del disco, lo que supone regímenes de alto β . Sin embargo, numéricamente se verifica que el régimen no lineal para $\beta \gg 1$ es aproximadamente equivalente al caso puramente MHD (es decir, sin efecto Hall).

A continuación se describen los comportamientos cuadráticos medios de las componentes de la velocidad tanto de protones como de electrones y de las componentes de la densidad de corriente y del campo magnético.

Para eso, se seleccionan valores determinados de los parámetros relevantes para cada una de las inestabilidades. Para la Hall-MSI, se eligen valores tales que la tasa de crecimiento de la inestabilidad corresponden al 75 % de la tasa máxima (correspondiente a $\varepsilon = 2$): $\varepsilon = 1,36$ y $\varepsilon = 6,73$ (ver Capítulo 4, Figura 4.3). Para la Hall-MRI, se adoptan valores comparables al 90 % de la

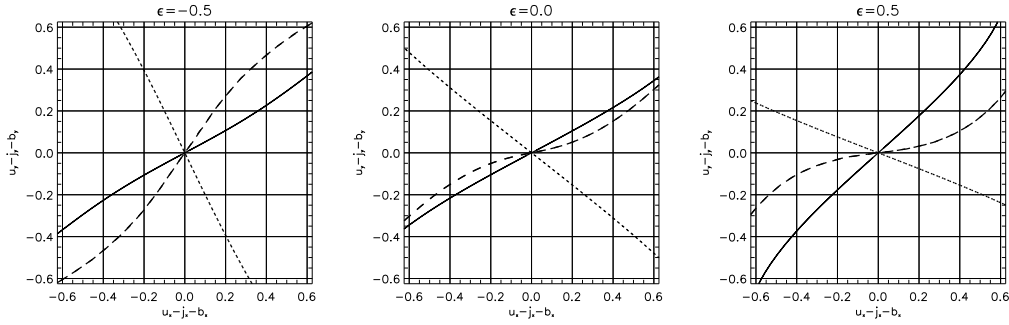


Figura 2: Representación paramétrica de la velocidad protónica (línea sólida), densidad de corriente (línea a rayas) y campo magnético (línea punteada) para diferentes valores del parámetro de Hall para la inestabilidad Hall magneto-rotacional (Hall-MRI): negativo ($\varepsilon = -0,5$), MHD ($\varepsilon = 0$), positivo ($\varepsilon = 0,5$).

máxima tasa de crecimiento (correspondiente a $\varepsilon = 0$): $\varepsilon = -0,5$ y $\varepsilon = 0,5$ (ver Capítulo 5, Figura 5.3). Estos porcentajes se determinan con el objeto de que las tasas γ_- en ambas inestabilidades sean comparables.

En las Figuras 1 y 2 se muestran gráficos paramétricos para la velocidad protónica (trazo continuo), la densidad de corriente (trazo a rayas) y el campo magnético (trazo punteado) a un dado tiempo en la evolución no lineal para diferentes valores de ε . En el caso de la Hall-MSI (Figura 1) independientemente del valor que adopte el parámetro de Hall, los autovectores asociados al campo de velocidades y a la densidad de corriente están alineados entre sí, lo cual extiende el resultado lineal provisto por la ecuación (E.7) al régimen no lineal. Análogamente, en el caso de la Hall-MRI (Figura 2) se muestra que el campo de velocidades y la densidad están anti-alineados también durante el desarrollo no lineal de la inestabilidad según indica la ecuación (E.10) para el régimen lineal.

En ambos casos, se observa que la influencia de los términos no lineales se vuelve relevante cuando las fluctuaciones en la densidad alcanzan valores aproximadamente del 10% del valor medio inicial. En particular, la evolución es fuertemente no lineal cuando la velocidad supera a la velocidad de Alfvén. Una vez que el sistema se encuentra en estado super-alfvénico, la Hall-MSI parece alcanzar el estado de saturación si el efecto Hall es lo suficientemente intenso, en tanto que la Hall-MRI tiende al estado de saturación para valores negativos del parámetro de Hall (lo que corresponde al caso en que la velocidad angular y el campo magnético son anti-paralelos).

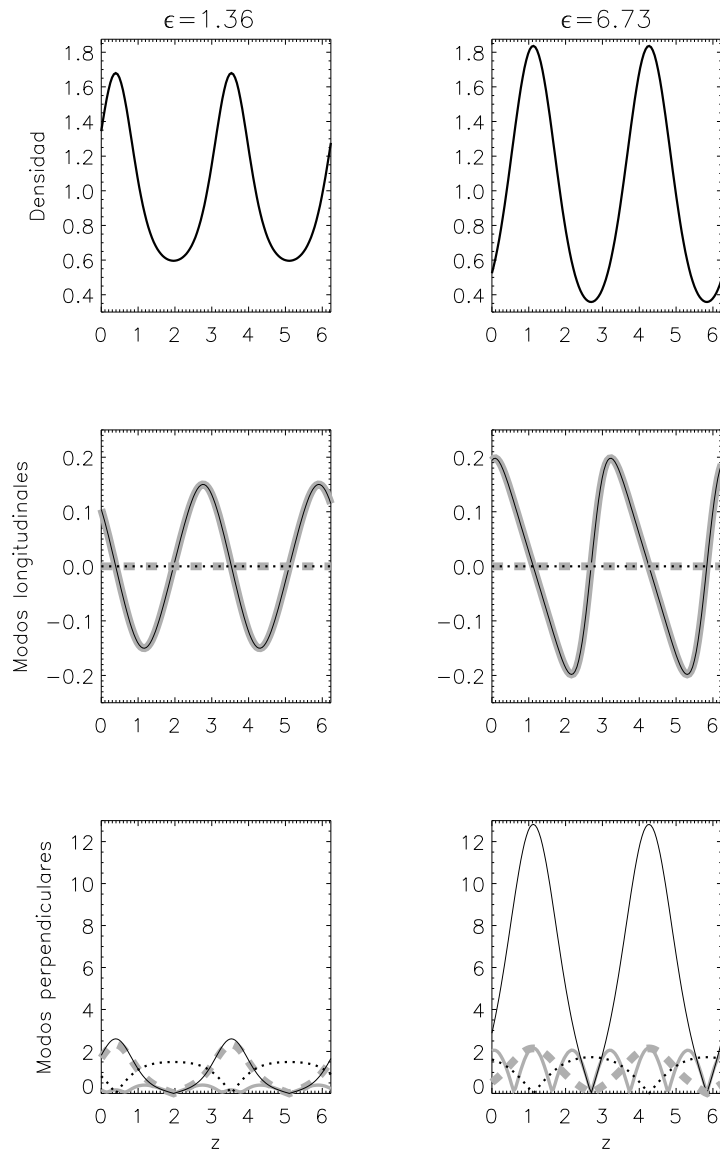


Figura 3: Comportamiento no lineal de la Hall-MSI con $\beta = 1$ para dos valores diferentes del parámetro de Hall. Los paneles superiores muestran la densidad de partículas, los paneles intermedios los modos longitudinales (componente z) y los paneles inferiores los modos perpendiculares (componentes (x, y)). Se representan cuatro campos vectoriales: velocidad de los protones (línea sólida negra), velocidad de los electrones (línea sólida gris), densidad de corriente (línea a rayas gris) y campo magnético (línea punteada negra).

Por otra parte, las configuraciones de los campos en el régimen no lineal dependen de los valores de ε . La Hall-MSI para valores moderados del parámetro de Hall parece mostrar la formación de hojas de corriente en ambas direcciones perpendiculares al campo magnético externo. La Hall-MRI que se desarrolla tanto para valores positivos como negativos del efecto Hall, presenta comportamientos distintos según sea el signo de ε . En el primer caso ($\varepsilon > 0$), la componente Jy de la densidad de corriente es considerablemente mayor que la componente Jx ; en el segundo caso ($\varepsilon < 0$) ocurre exactamente lo contrario. Para ambos valores de ε , el sistema muestra la formación de hojas de corriente en la componente dominante. Para el caso particular en que el parámetro de Hall es nulo (caso MHD), las velocidades protónica y electrónica coinciden, por lo tanto, en este caso, se forman hojas de corrientes en las direcciones $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{y}}$.

En las Figuras 3 y 4 se muestran perfiles en función de la coordenada z de: densidad, campos de velocidad \mathbf{u} (línea continua negra) y $\mathbf{u}_e = \mathbf{u} - \varepsilon\mathbf{J}$ (línea continua gris), densidad de corriente \mathbf{J} (línea a rayas gris), y campo magnético \mathbf{b} (línea punteada negra) para la Hall-MSI y la Hall-MRI, respectivamente. Valores negativos (positivos) del parámetro de Hall implican que la velocidad de los electrones es siempre mayor (menor) que la velocidad de los protones. En particular, para la Hall-MSI la velocidad de protones es mucho mayor que la velocidad de los electrones. Esto se acentúa si el efecto Hall es muy intenso, como se puede ver en la Figura 3 (paneles inferiores). Por otra parte, la Hall-MRI para valores positivos de ε , presenta formaciones tipo *two-channel flows*. Esta doble estructura de jets ha sido señalada también por Sano & Stone (2002a), para el caso de simulaciones 2D.

Las Figuras 3 y 4 también exhiben el perfecto solapamiento entre los modos longitudinales de los protones y de los electrones. Asimismo, se observa que la componente z del campo magnético y de la densidad de corriente, son aproximadamente nulas. Respecto a la componente z de ambas velocidades, si bien comienzan a crecer a medida que las fluctuaciones en la densidad aumentan su amplitud, se mantienen mucho menores que el resto de las componentes y, por tanto, se las considera despreciables.

El máximo valor de la densidad está correlacionado tanto con los máximos de las velocidades perpendiculares como con los máximos de la densidad de corriente (que corresponden, a su vez, a campo magnético nulo). Los valores

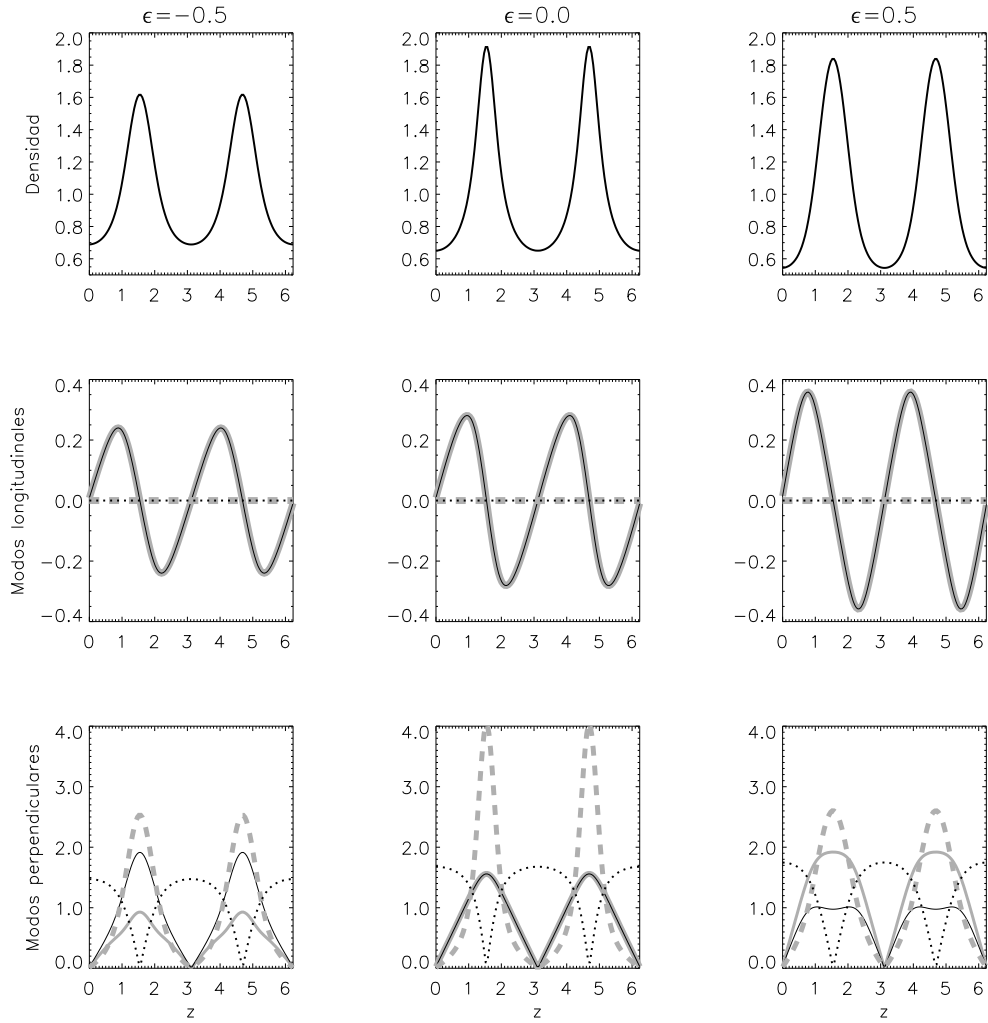


Figura 4: Comportamiento no lineal de la Hall-MRI con $\beta = 1$ para tres valores diferentes del parámetro de Hall: negativo ($\epsilon = -0,5$, izquierda), MHD ($\epsilon = 0$, centro), positivo ($\epsilon = 0,5$, derecha). En cada uno de los tres regímenes, los paneles superiores muestran la densidad de partículas, los paneles intermedios los modos longitudinales (componente z) y los paneles inferiores los modos perpendiculares (componentes (x, y)). Se representan cuatro campos vectoriales: velocidad de los protones (línea sólida negra), velocidad de los electrones (línea sólida gris), densidad de corriente (línea a rayas gris) y campo magnético (línea punteada negra).

mínimos de la densidad se relacionan con los ceros de los campos de velocidades y de la densidad de corriente (que coinciden, a su vez, con los valores máximos del campo magnético).

Conclusiones preliminares

Se realizó un análisis de estabilidad en flujos con *shear* en presencia de corrientes de Hall para configuraciones 1D. Para eso, se linealizaron las ecuaciones Hall-MHD en la aproximación *shearing-box*, para un plasma completamente ionizado, y se obtuvo la relación de dispersión del sistema. Específicamente, se estudió la inestabilidad que surge a partir de la combinación del efecto Hall y del *shear* en el caso de perturbaciones en una dimensión (modelo unidimensional) a lo largo de la dirección del campo magnético externo. Para flujos no rotantes, se le asignó el nombre de inestabilidad Hall magneto-shear (Hall-MSI). Para flujos con rotación diferencial se reobtiene la denominada inestabilidad magneto-rotacional en el contexto Hall-MHD (Hall-MRI). En ambos casos, se desestabiliza la rama asociada a los modos *ion-cyclotron*, ondas dispersivas que corresponden a la descripción Hall-MHD en medios homogéneos sin *shear*.

Concretamente, se investigó la estabilidad del sistema en el espacio de parámetros dado por el número de onda y el parámetro de Hall. Para ambas inestabilidades se identificaron las regiones en el plano (k^2, ε) en las cuales el sistema se inestabiliza. La inestabilidad magneto-rotacional (MRI) se recupera si $\varepsilon = 0$. En particular, por su relevancia en el contexto de discos de acreción, se examinaron tres clases de flujos rotantes: sub-kepleriano, kepleriano y supra-kepleriano. Se recobraron algunos resultados asociados al rol del efecto Hall en la inestabilidad magneto-rotacional reportados en la literatura. Los resultados analíticos correspondientes al régimen lineal, se confrontaron con simulaciones numéricas mostrando un alto grado de consistencia.

Como principales resultados del análisis de estabilidad en el régimen lineal se consideran los siguientes. Para la Hall-MSI, sobresale el hecho de que en el caso en que la vorticidad local, asociada al *shear*, y el campo magnético están anti-alineados existe un rango de valores del parámetro de Hall positivos para el cual todos los modos resultan inestables. En forma similar, para la Hall-MRI, se destaca el hecho de que en el caso en que la velocidad angular y

el campo magnético externo están anti-alineados ($\varepsilon < 0$), existe siempre un rango de valores del parámetro de Hall para el cual todos los números de onda resultan inestables. Asimismo, ambos casos presentan un comportamiento asintótico para $k^2 \rightarrow \infty$.

La evolución en el régimen no lineal se abordó cualitativamente a partir de simulaciones numéricas. Algunos resultados de la teoría linealizada permanecieron válidos también en el caso no lineal. Además, se estudió la influencia del parámetro β en el comportamiento del sistema para dos casos asintóticos : $\beta \approx 1$ and $\beta \gg 1$. En tanto que el régimen lineal es independiente del parámetro β , la evolución no lineal del sistema para β alto parece asemejarse a sistemas puramente magnetohidrodinámicos.

Cabe señalar una importante distinción entre los dos casos analizados: sin y con rotación. En el primer caso, para que el sistema se desestabilice se requieren simultáneamente la presencia de *shear* y de corrientes de Hall. La condición suficiente de inestabilidad es tal que $\varepsilon s > 1$ lo cual, a su vez, implica que el *shear* tiene que ser lo suficientemente intenso como para superar la frecuencia de ciclotrón. En el segundo caso, en cambio, si bien las corrientes de Hall modifican la tasa de inestabilidad de la MRI, esta inestabilidad existe independientemente de que el efecto Hall esté presente o no.

Capítulo 6

Hall-MSI: perturbaciones 2D

En este Capítulo se estudia la influencia del efecto Hall en un flujo tipo *shear* para configuraciones en dos dimensiones. En concreto, se realiza un análisis de la estabilidad de una pequeña parcela de plasma embebida en un flujo macroscópico tipo *shear* no rotante. Se linealizan las ecuaciones Hall-MHD en la aproximación *shearing-box* y se presenta la relación de dispersión para sistemas bidimensionales. Los resultados obtenidos analíticamente se confrontan mediante simulaciones numéricas tipo *shearing-box*. Se encuentra que la inestabilidad Hall-MSI, presentada en el modelo unidimensional, también se desarrolla en geometrías 2D. Parte de los resultados presentados en este Capítulo corresponden al trabajo realizado en Bejarano & Gómez (2012).

6.1. Relación de dispersión

Sea una configuración en dos dimensiones tal que $\hat{\mathbf{y}}\partial_y = 0$. La velocidad y el campo magnético pueden escribirse como la combinación de valores medios y perturbaciones a los mismos

$$\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{b}(x, z, t) , \quad \mathbf{u} = -sx\hat{\mathbf{y}} + \mathbf{u}(x, z, t) , \quad (6.1)$$

donde el campo magnético externo en su versión adimensional es $B_0 = 1$. Esta descomposición se realiza para todas las magnitudes físicas involucradas. En particular, la densidad de partículas se escribe como

$$n = n_0 + \delta n(x, z, t) = 1 + \delta n(x, z, t) , \quad (6.2)$$

siendo $n_0 = 1$ la densidad de partículas en equilibrio en el sistema de unidades adoptado. Reemplazando en el conjunto de ecuaciones tipo *shearing-box* en el contexto Hall-MHD (3.12)–(3.14) (asumiendo que la viscosidad y la resistividad son despreciables), se puede analizar la dinámica de las perturbaciones asociadas a los campos microscópicos en una pequeña parcela de plasma inmersa en un flujo tipo *shear*.

Para eso, se linealizan las ecuaciones a primer orden en las perturbaciones. Se asume que los campos microscópicos son tales que $e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$, con $\mathbf{k} = (k_x, 0, k_z)$, es decir, ondas planas en el espacio de Fourier. Por lo tanto, el sistema de ecuaciones diferenciales homogéneo y lineal a coeficientes constantes, en el espacio de Fourier, corresponde a un sistema de ecuaciones algebraicas, homogéneo y lineal a coeficientes constantes (ver sección 2.2.1)

$$-i\omega\delta n = -i\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}, \quad (6.3)$$

$$-i\omega\mathbf{u} = -2\beta i\mathbf{k}n + (i\mathbf{k}\times\mathbf{b})\times\hat{z} + su_x\hat{y}, \quad (6.4)$$

$$-i\omega\mathbf{b} = i\mathbf{k}\times((\mathbf{u}-i\varepsilon\mathbf{k}\times\mathbf{b})\times\hat{z}) - sb_x\hat{y}. \quad (6.5)$$

Considerando que θ es el ángulo entre el vector de onda \mathbf{k} y el campo magnético externo $B_0\hat{z}$ (con $B_0 = 1$), tal que el vector de onda se escribe como $\mathbf{k} = k(\sin\theta, 0, \cos\theta)$, las perturbaciones de los campos pueden dividirse en sus componentes paralelas y perpendiculares con respecto a la dirección de propagación dada por \mathbf{k}

$$\mathbf{b} = (b_\perp \cos\theta, b_y, -b_\perp \sin\theta), \quad (6.6)$$

$$\mathbf{u} = (u_\perp \cos\theta, u_y, -u_\perp \sin\theta) + (u_\parallel \sin\theta, 0, u_\parallel \cos\theta). \quad (6.7)$$

Reemplazando en las ecuaciones (6.3)–(6.5) y teniendo en cuenta que los campos \mathbf{b} y \mathbf{u} son proporcionales a $e^{i[(k\sin\theta)x+(k\cos\theta)z-\omega t]}$, se obtiene

$$\omega n = ku_\parallel, \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned}
 \omega \begin{pmatrix} u_{\perp} \cos \theta + u_{\parallel} \sin \theta \\ u_y \\ -u_{\perp} \sin \theta + u_{\parallel} \cos \theta \end{pmatrix} - is \begin{pmatrix} 0 \\ u_{\perp} \cos \theta + u_{\parallel} \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \\
 = 2\beta kn \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} b_{\perp} \\ b_y \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{6.9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \omega \begin{pmatrix} b_{\perp} \cos \theta \\ b_y \\ -b_{\perp} \sin \theta \end{pmatrix} + is \begin{pmatrix} 0 \\ b_{\perp} \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \\
 = -k \begin{pmatrix} (u_{\perp} \cos \theta + u_{\parallel} \sin \theta + i\epsilon kb_y \cos \theta) \cos \theta \\ (u_y - i\epsilon kb_{\perp}) \cos \theta \\ -(u_{\perp} \cos \theta + u_{\parallel} \sin \theta + i\epsilon kb_y \cos \theta) \sin \theta \end{pmatrix}. \tag{6.10}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el correspondiente sistema lineal de ecuaciones algebraicas resulta

$$\begin{aligned}
 \omega n &= ku_{\parallel}, \\
 \omega u_{\parallel} &= 2\beta kn - kb_{\perp} \sin \theta, \\
 \omega u_{\perp} &= -kb_{\perp} \cos \theta, \\
 \omega u_y &= is(u_{\perp} \cos \theta + u_{\parallel} \sin \theta) - kb_y \cos \theta, \\
 \omega b_y &= -isb_{\perp} \cos \theta - k(u_y - i\epsilon kb_{\perp}) \cos \theta, \\
 \omega b_{\perp} &= -k(u_{\perp} \cos \theta + u_{\parallel} \sin \theta + i\epsilon kb_y \cos \theta). \tag{6.11}
 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de autovalores, se encuentra el polinomio característico que constituye la relación de dispersión

$$\begin{aligned}
 \omega^6 &+ k^2 \omega^4 [-(1 - \epsilon s) - (\epsilon k)^2 \cos^2 \theta - 2\beta - 1] + \\
 &+ k^4 \omega^2 [(1 - \epsilon s) + 2\beta (2 + (\epsilon k)^2 - \epsilon s)] \cos^2 \theta + \\
 &+ k^6 [-2\beta(1 - \epsilon s) \cos^4 \theta] = 0. \tag{6.12}
 \end{aligned}$$

La relación de dispersión en el régimen ideal (6.12), resulta ser un polinomio bi-cúbico

$$\omega^6 + D_4 \omega^4 + D_2 \omega^2 + D_0 = 0, \tag{6.13}$$

donde los coeficientes son

$$D_4 = k^2((\varepsilon s - 1 - \varepsilon^2 k^2) \cos^2 \theta - 2\beta - 1) , \quad (6.14)$$

$$D_2 = k^4(-(\varepsilon s - 1) \cos^4 \theta - 2\beta \cos^2 \theta (\varepsilon s - 2 - \varepsilon^2 k^2) - \cos^2 \theta \sin^2 \theta (\varepsilon s - 1)) , \quad (6.15)$$

$$D_0 = 2\beta k^6 (\varepsilon s - 1) \cos^4 \theta . \quad (6.16)$$

El análisis de estabilidad del sistema, se corresponde con el estudio de los conjuntos de positividad y negatividad de ω^2 en función de los parámetros relevantes del problema. Los modos estables ($\omega^2 > 0$) oscilan a frecuencia ω mientras que los modos inestables ($\omega^2 < 0$) evolucionan con una tasa de crecimiento γ dada por $\omega^2 = -\gamma^2$.

Examinando la relación de dispersión (6.12), se observa que los coeficientes (6.14)–(6.16) son funciones de los parámetros del problema de tal modo que dependen de k^2 , εs , εk , β y θ . Al igual que en el caso unidimensional, la dependencia con el *shear* se manifiesta exclusivamente a través del producto εs . Y a diferencia de las configuraciones 1D, la dependencia con el parámetro β queda expuesta en las ecuaciones linealizadas.

La ecuación (6.12) provee tres modos diferentes de propagación. Si el efecto Hall es nulo ($\varepsilon = 0$), se obtiene la relación de dispersión correspondiente a las ondas MHD, independientemente del valor del *shear* debido, justamente, a que la relación de dispersión no depende, individualmente, del parámetro s . En ausencia del efecto Hall, los modos MHD (presentados en la sección 2.2.1) son: magnetosónico rápido, Alfvén y magnetosónico lento. Si se anula el *shear* ($s = 0$), se obtiene la relación de dispersión que describe a las ondas Hall-MHD (introducidas en la sección 2.4.1). El efecto Hall modifica la polarización de los modos magnetosónicos que en el contexto Hall-MHD se denominan, respectivamente, *whistlers* y ondas *ion-cyclotron* (ver, por ejemplo, Mahajan, Mininni & Gómez (2005)) presentando polarización circular a derecha (sentido horario) y a izquierda (sentido antihorario). En presencia de ambos efectos, los modos *ion-cyclotron* se vuelven inestables. Como condición suficiente de inestabilidad se encuentra que $D_0 < 0$. Nuevamente, esto significa que el efecto Hall y el *shear* tienen que cumplir que $\varepsilon s > 1$. Esta condición, a su vez, expresa explícitamente que la desestabilización del sistema se produce por la acción conjunta de las corrientes de Hall y del flujo

tipo *shear*. En consecuencia, la inestabilidad Hall-MSI se desarrolla también en configuraciones 2D.¹

Para el caso de propagación paralela ($\mathbf{k} \parallel B_0 \hat{\mathbf{z}}$) el problema se reduce al caso 1D previamente analizado en el Capítulo 4. Se encuentran dos subsistemas que permanecen desacoplados: los modos longitudinales asociados a ondas acústicas que se propagan a lo largo del campo magnético y los modos perpendiculares que resultan inestables si $\varepsilon s > 1$. En cambio, perturbaciones perpendiculares al campo magnético externo ($\mathbf{k} \perp B_0 \hat{\mathbf{z}}$) no conducen al desarrollo de inestabilidades. De hecho, resolviendo el sistemas de ecuaciones para este caso particular se obtiene la relación de dispersión para los modos *whistlers* en tanto que las ondas de Alfvén y los modos *ion-cyclotron* no se propagan en la dirección perpendicular al campo magnético externo.

6.2. Resultados

Fijados los valores para k y β , se determina el comportamiento del sistema para distintos valores del parámetro de Hall e intensidad del *shear*.

Para estudiar la propagación de modos en una dirección arbitraria, se realizan los denominados diagramas polares (ver Figura 2.2, sección 2.2.1). En el plano que contiene tanto al campo magnético externo \mathbf{B}_0 como al vector de onda \mathbf{k} , se grafica la velocidad de fase para todo ángulo θ .

La Figura 6.1 muestra diagramas polares (en el caso particular, $k = 1$ y $\beta = 1$) para la velocidad de fase ω/k (donde $k^2 = k_x^2 + k_z^2$). El módulo de la velocidad de fase es descrito por la componente radial de cada curva, mientras que la dirección de propagación está indicada por el correspondiente ángulo polar. En otra palabras, la distancia al origen de cada punto de estas curvas indica el módulo de la velocidad de fase según la dirección de propagación con respecto al campo magnético externo (orientado en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$, representada por el eje vertical). En cada diagrama, la curva más externa corresponde al modo rápido (*whistler*), la intermedia al modo de Alfvén y la más interna al modo lento (*ion-cyclotron*). Se manifiesta, además, el hecho de que los modos rápidos y lentos tienen, respectivamente, velocidades superiores e inferiores con respecto a los modos de Alfvén. La fila superior

¹En el caso de flujos rotantes, la inestabilidad Hall magneto-rotacional (Hall-MRI) ha sido estudiada en configuraciones axisimétricas por Balbus & Terquem (2001) y Sano & Stone (2002a).

muestra los diagramas polares correspondientes a $s = 1$ (vorticidad local y campo magnético externo anti-alineados) para distintos valores del parámetro de Hall. La fila inferior, en cambio, muestra los diagramas polares para $\varepsilon = 1$ y *shear* variable. La desestabilización del modo *ion-cyclotron* sucede cuando $\varepsilon s = 1$ que constituye el umbral de la inestabilidad. Asimismo, se observa que sólo los modos rápido y de Alfvén se propagan para $\varepsilon s > 1$. En línea punteada se indica la tasa de inestabilidad (determinada por la parte imaginaria de ω) sobre el número de onda (γ_-/k) para los modos inestables. A medida que el producto εs crece, la velocidad de fase de los modos lentos disminuye, anulándose para $\varepsilon s = 1$. Una vez que el sistema se desestabiliza, la tasa de crecimiento de la inestabilidad aumenta en la medida en que se intensifican el efecto Hall o el *shear*. Se advierte también que en la dirección perpendicular al campo magnético (supuesto en $\hat{\mathbf{z}}$) sólo se propagan los modos rápidos.

Análogamente al modelo 1D, la tasa de crecimiento de la rama inestable para configuraciones en dos dimensiones, también presenta un comportamiento asintótico para $k \rightarrow \infty$ dado por la siguiente expresión

$$\gamma_-^2 \approx \frac{\cos^2 \theta (\varepsilon s - 1)}{\varepsilon} . \quad (6.17)$$

En la Figura 6.2 se representa un diagrama polar para la tasa de crecimiento de la inestabilidad normalizada con el número de onda para los casos $k = 1$, $k = 2$, $k = 4$ y $k = 6$, en escala de grises. Se observa que el sistema, rápidamente, alcanza el régimen asintótico, independiente del valor de k . Por simetría basta considerar el primer cuadrante del diagrama polar.

En la Figura 6.3, se exhibe el comportamiento de los modos normales de oscilación según distintos valores del parámetro de Hall y del *shear*, a su vez, para diferentes valores del parámetro β . A la izquierda, se muestran las ondas MHD ($\varepsilon = 0$ y $s = 0$); en el centro, se representan los modos Hall-MHD ($\varepsilon \neq 0$ y $s = 0$); a la derecha, se exponen los modos de propagación asociados a los modos Hall-MHD en un medio con *shear* ($\varepsilon \neq 0$ y $s \neq 0$). Los paneles superiores corresponden al régimen magnético ($\beta \ll 1$), los paneles centrales al caso $\beta = 1$ y los paneles inferiores al régimen hidrodinámico $\beta \gg 1$. En particular, en los paneles inferiores sólo se representan los modos de Alfvén y lento dado que el modo rápido en este régimen posee una velocidad de fase al menos un orden de magnitud mayor. En cualquier caso, los modos rápidos (línea gris claro) están representados por las curvas más externas y

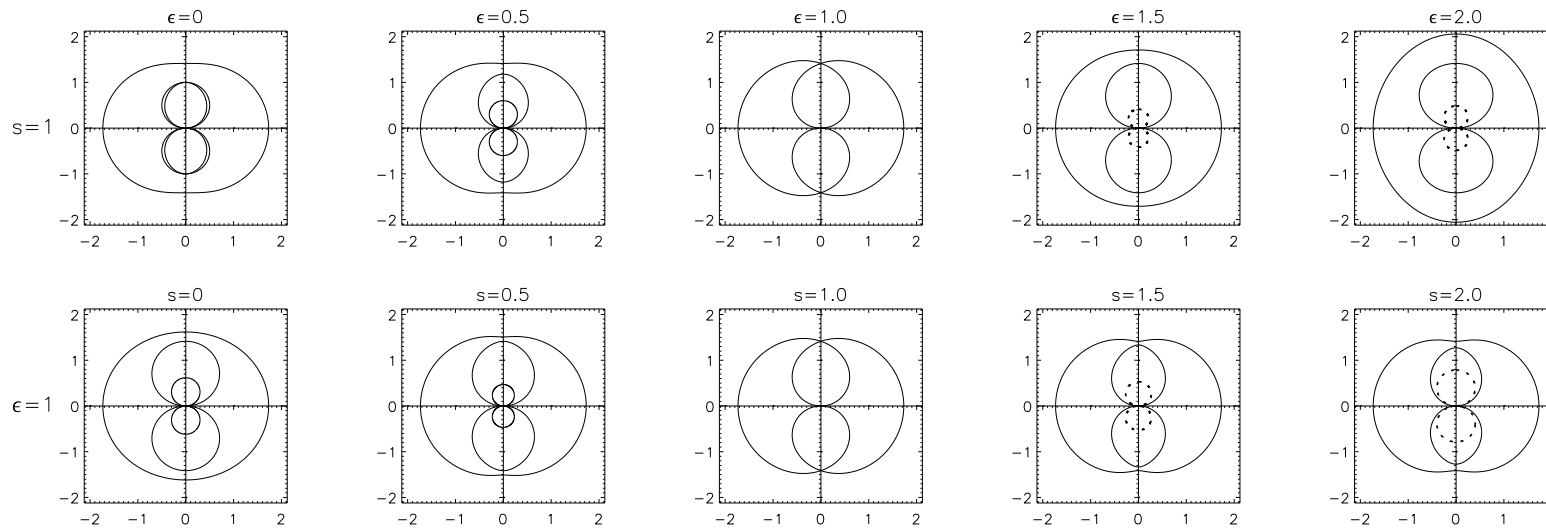


Figura 6.1: Representación de la velocidad de fase ω/k utilizando diagramas polares, en los cuales el módulo está dado por la componente radial de cada curva y la dirección de propagación por el ángulo polar entre \mathbf{k} y $B_0\hat{\mathbf{z}}$ (orientado en la dirección vertical). En todos los casos, la curva externa corresponde al modo rápido, la intermedia a ondas de Alfvén y la interna al modo lento. En los paneles de arriba se muestran los diagramas para $s = 1$ y ϵ variable, mientras que en los paneles de abajo se exponen los diagramas para $\epsilon = 1$ y s variable. La línea punteada representa a los modos inestables, descritos por γ_-/k (con γ la tasa de inestabilidad).

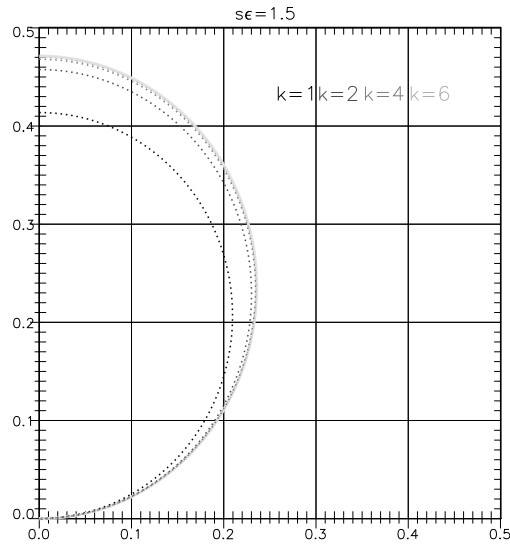


Figura 6.2: Tasa de crecimiento de la inestabilidad para $\varepsilon = 1,5$ y $s = 1$ para distintos valores del número de onda. El comportamiento asintótico se alcanza rápidamente. Por simetría es suficiente considerar únicamente el primer cuadrante del diagrama polar.

los modos lentos (línea negra) por las curvas más internas. Entremedio de ambos, se encuentran los modos de Alfvén (línea gris oscuro). Para el caso en el que tanto el efecto Hall como el *shear* son no nulos (y se cumple que $\varepsilon s > 1$), la tasa de crecimiento de la inestabilidad normalizada γ_-/k asociada al modo inestable se indica en línea punteada.

En el régimen magnético ($\beta \ll 1$), la velocidad de fase del modo lento ω_-/k resulta mucho menor que la velocidad de fase del modo rápido ω_+/k siendo esta última comparable con la correspondiente al modo alfvénico. La inclusión del efecto Hall aumenta la amplitud de la velocidad de fase para el modo rápido (excepto para propagación perpendicular) en tanto que la velocidad de fase para la onda de Alfvén se reduce (excepto para propagación perpendicular). Pasado el umbral de inestabilidad $\varepsilon s = 1$, la velocidad de fase del modo de Alfvén se reduce considerablemente. En el caso $\beta = 1$ se aprecian adecuadamente las características de los tres modos. Sin efecto Hall, los modos alfvénico y lento son prácticamente iguales, siendo exactamente idénticos para propagación perpendicular. Con efecto Hall, el modo de Alfvén aumenta su velocidad de fase en tanto que el modo lento la disminuye. El modo rápido incrementa su velocidad con respecto al modelo MHD. En el régimen hidrodinámico ($\beta \gg 1$), la velocidad de fase del modo rápido es

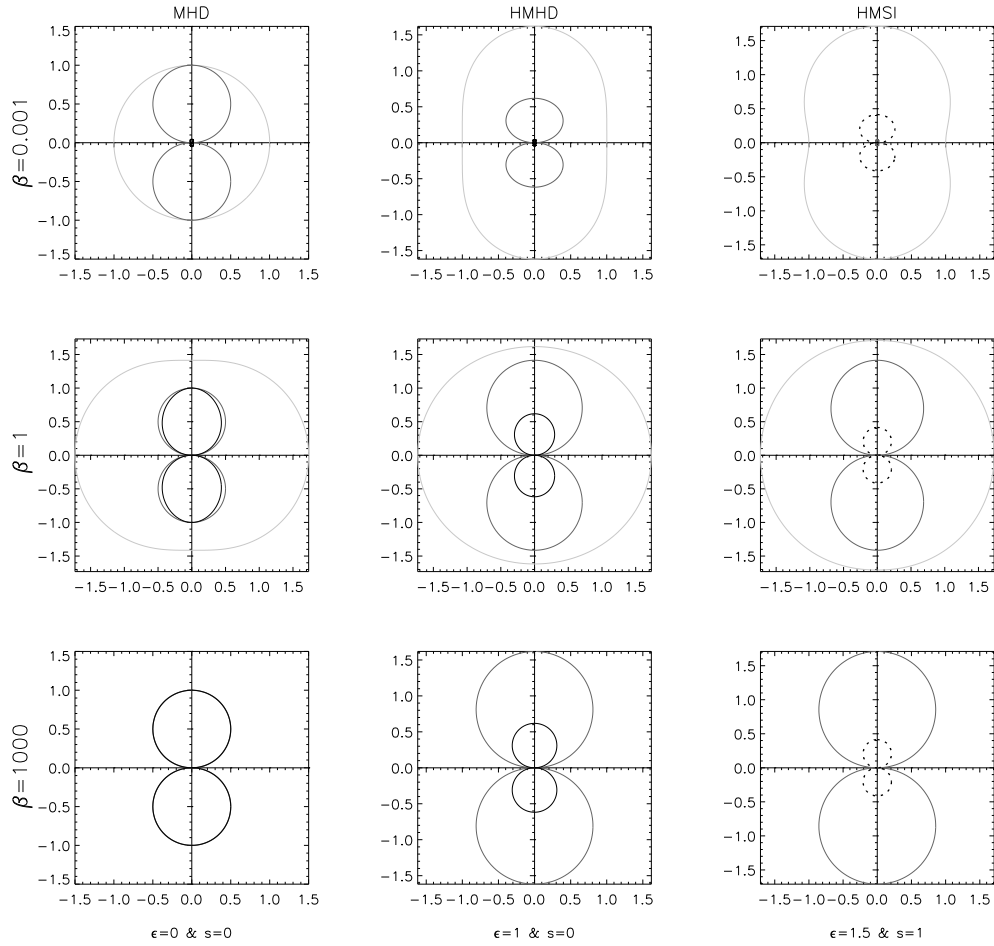


Figura 6.3: Diagrama polares para la propagación de modos normales MHD: $\varepsilon = 0$ y $s = 0$ (izquierda), Hall-MHD: $\varepsilon = 1$ y $s = 0$ (centro); Hall-MHD en un medio con *shear*: $\varepsilon = 1,5$ y $s = 1$ (derecha) para tres regímenes distintos según el valor del parámetro β : régimen magnético $\beta \ll 1$ (paneles superiores), $\beta = 1$ (paneles centrales) y régimen hidrodinámico $\beta \gg 1$ (paneles inferiores). Se representa la velocidad de fase para los modos rápidos (línea gris claro), los modos lentos (línea negra) y, entremedio de ambos, los modos de Alfvén (línea gris oscuro). La tasa de inestabilidad γ_-/k para el modo inestable se indica en línea punteada. En particular, en los paneles inferiores sólo se representan los modos alfvénico y lento debido a que ω_+/k excede la escala seleccionada.

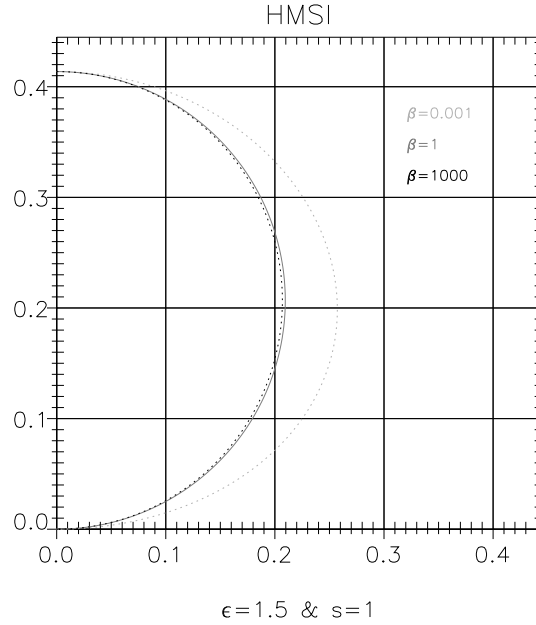


Figura 6.4: Diagrama polar que para la tasa de crecimiento de la inestabilidad normalizada γ_-/k correspondiente a la inestabilidad Hall magneto-shear para valores de los parámetros tal que $\epsilon s > 1$ ($\epsilon = 1,5$ y $s = 1$). El efecto del parámetro β sobre la inestabilidad es apreciable en el régimen magnético $\beta \ll 1$ (curva gris claro); mientras que el caso $\beta = 1$ (trazo continuo) resulta prácticamente indistinguible del régimen hidrodinámico $\beta \gg 1$ (curva gris oscuro).

mucho mayor que la velocidad de los otros modos y, por lo tanto, no se grafica con el propósito de mantener las escalas de los diagramas polares comparables entre sí. De todas maneras, el módulo de la velocidad del modo rápido para β alto parece no depender significativamente de los valores de ϵ y de s . Para el caso MHD, se observa que los modos alfvénico y lento coinciden; cuando se introduce el efecto Hall el módulo de la velocidad de fase para el modo de Alfvén se incrementa notoriamente. Tanto la velocidad de fase como la tasa de crecimiento de la inestabilidad adquieren sus máximos valores para el caso de propagación perpendicular. Exceptuando el modo rápido MHD y Hall-MHD para $\beta = 1$ que resultan tener velocidades de fase máximas en el caso de propagación paralela. En particular, para los modos MHD en los límites $\beta \ll 1$ (es decir, $v_A \gg c_s$) y $\beta \gg 1$ (es decir, $v_A \ll c_s$) los resultados obtenidos se corresponden con la Figura 2.2, sección 2.2.1. En cualquiera de los tres regímenes, en presencia de *shear* (para los valores de los parámetros elegidos tales que $\epsilon s > 1$), el modo lento se inestabiliza y surge la Hall-MSI.

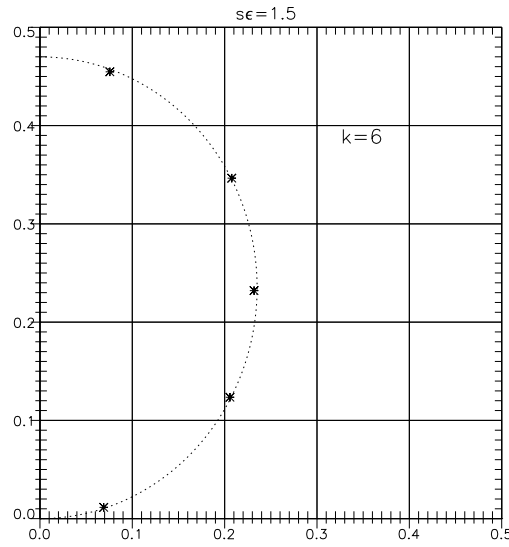


Figura 6.5: Sobre la predicción teórica (línea punteada) se representan los resultados obtenidos mediante simulaciones numéricas (*) para $\varepsilon = 1,5$, $s = 1$ y $k = 6$ (régimen asintótico).

En la Figura 6.4 se realiza un diagrama polar exclusivamente para los modos inestables con la intención de resaltar el efecto del parámetro β sobre la tasa de crecimiento de la inestabilidad normalizada γ_-/k . Se observa que el parámetro β parece no modificar sensiblemente la tasa de crecimiento de la Hall-MSI. En concreto, el régimen hidrodinámico $\beta \gg 1$ (curva gris oscuro) coincide prácticamente con el régimen $\beta = 1$ (trazo continuo). En particular, en el caso de propagación perpendicular, los tres regímenes resultan idénticos mientras que en el caso de propagación paralela se observan las mayores discrepancias siendo máxima la diferencia con el régimen magnético $\beta \ll 1$ (curva gris claro).

Simulaciones numéricas

Se realizan simulaciones numéricas tipo *shearing-box* utilizando el código de diferencias finitas PENCIL CODE. Se corroboran los resultados teóricos presentados y se describe cualitativamente la dinámica local de un flujo tipo *shear* en presencia de las corrientes de Hall para perturbaciones 2D. Como condiciones iniciales se consideran ondas de Alfvén con amplitudes muy pequeñas que se propagan en las direcciones $\hat{\mathbf{x}}$ y $\hat{\mathbf{z}}$.

En la Figura 6.5 se muestra la superposición entre los resultados analíticos (línea punteada) y numéricos (*). Se observa un excelente acuerdo entre la predicción teórica y las simulaciones numéricas. En particular, la Figura 6.5 corresponde a $\varepsilon = 1,5$, $s = 1$ y $k = 6$ (valor para el cual el sistema se encuentra en el régimen asintótico).

La dimensionalidad del problema permite estudiar la generación de patrones espaciales asociados a la evolución de la inestabilidad en sistemas con simetría de traslación en una de las direcciones ($\hat{y}\partial_y = 0$).

En la Figura 6.6 se presenta la evolución lineal de la inestabilidad, mostrando las estructuras que desarrollan los campos asociados tanto a la velocidad como al campo magnético en el plano (x, z) , superpuestos sobre una imagen de J_y , para tres tiempos característicos durante la evolución de la inestabilidad Hall magneto-shear, eligiendo un instante inicial (panel izquierdo), uno intermedio (panel central) y otro instante posterior cercano al comienzo de la etapa no lineal (panel derecho). Las líneas de campo magnético están representadas por líneas continuas; el campo de velocidades se indica mediante flechas; la componente y de la densidad de corrientes J_y se muestra mediante una imagen en escalas de grises donde la tonalidad más oscura indica el valor mínimo y la más clara el valor máximo. La simulación corresponde al caso $\varepsilon = 1,5$ y $s = 1$ y $k = 6$ (régimen asintótico, independiente de k).

De izquierda a derecha, a medida que la inestabilidad crece, se observa como cambian las magnitudes representadas. La componente y de la densidad de corriente adquiere mayor amplitud entre sus valores mínimos y máximos; la velocidad incrementa su módulo a la vez que reorienta su dirección. El predominio del campo magnético externo se evidencia prácticamente durante toda la etapa lineal. Recién finalizando la misma, las perturbaciones alcanzan valores comparables que permiten modificar la estructura de las líneas de campo magnético. La Figura 6.6 refleja, además, que la dirección del campo de velocidades en el plano (x, z) se correlaciona con los mínimos y máximos de la componente J_y . Asimismo se observa que la inestabilidad evoluciona rápidamente hacia lo que Sano & Stone (2002a) mencionaron como estructuras tipo *two-channel flow* en el desarrollo de la inestabilidad magneto-rotacional en el contexto de Hall-MHD para geometrías axisimétricas.

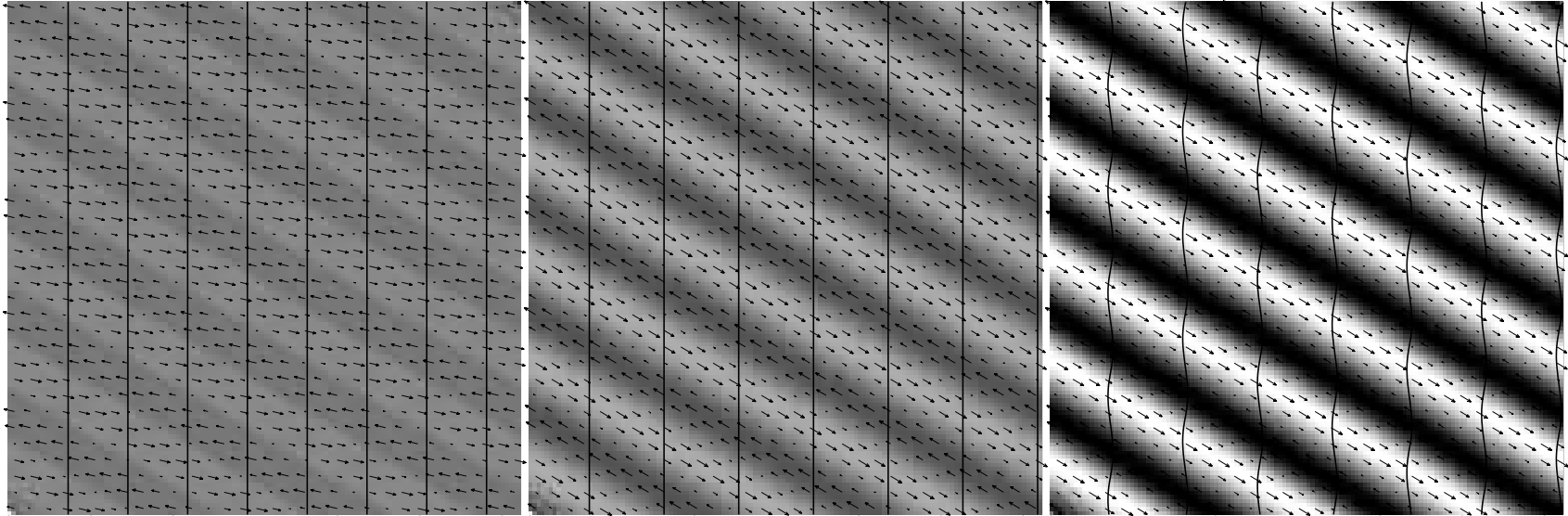


Figura 6.6: En el plano (x, z) se muestra el campo de velocidades (flechas) y las líneas de campo magnético (trazo continuo) sobre una imagen en escala de grises de J_y (la tonalidad más oscura corresponde al mínimo valor, mientras que la más clara representa el máximo). En el panel de la izquierda la inestabilidad se encuentra en su etapa inicial; el panel central exhibe el desarrollo de la inestabilidad a un tiempo intermedio; en el panel de la derecha la inestabilidad se encuentra aproximadamente en el final de la etapa lineal.

6.3. Conclusiones preliminares

Se realizó un estudio de la estabilidad ante perturbaciones 2D en flujos tipo *shear* con efecto Hall no nulo. Para esto, se linealizaron las ecuaciones Hall-MHD en la aproximación *shearing-box* para configuraciones tales que $\hat{\mathbf{y}}\partial_y = 0$ y se calculó la relación de dispersión correspondiente. Se encontró que el modo *ion-cyclotron* se vuelve inestable si el parámetro de Hall y el *shear* son tales que $\varepsilon s > 1$, análogamente a lo expuesto en el caso unidimensional. En particular, para perturbaciones puramente longitudinales ($\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$) el problema se reduce exactamente al caso 1D previamente analizado; para perturbaciones únicamente transversales ($\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$) el sistema es estable obteniéndose la relación de dispersión que corresponde a los *whistlers*. Se calculó la tasa de crecimiento de la inestabilidad para el límite $k \rightarrow \infty$, mostrando que el sistema presenta un régimen asintótico independiente del valor del número de onda. Para distintos valores del parámetro de Hall y de la intensidad del *shear*, se expuso el comportamiento de los tres modos de propagación correspondientes a la teoría de Hall-MHD para un flujo tipo *shear*. Para distintos regímenes del parámetro β se compararon los modos normales de propagación Hall-MHD en un medio con *shear* con respecto a los modos normales MHD y Hall-MHD. En particular, se analizó el efecto del parámetro β sobre la tasa de crecimiento de la inestabilidad encontrándose que para el caso $\beta \gg 1$ el módulo de γ_- se incrementa levemente siendo mayor el incremento para el caso de propagación paralela. Mediante simulaciones locales tipo *shearing-box*, se contrastaron los resultados analíticos mostrando un excelente acuerdo. Asimismo, las simulaciones numéricas permitieron analizar el comportamiento de los campos en el plano perpendicular a la dirección con simetría de traslación. La evolución de la inestabilidad muestra la presencia de estructuras tipo *two-channel flows*, previamente reportadas por Sano & Stone (2002a) al estudiar la inestabilidad magneto-rotacional en el contexto Hall-MHD para configuraciones axisimétricas.

Capítulo 7

Hall-MSI en configuraciones 3D

En este Capítulo se examina el desarrollo de inestabilidades en flujos tipo *shear* en el contexto de Hall-MHD. En concreto, se investiga la evolución conjunta de la inestabilidad Hall-magneto shear (Hall-MSI), previamente presentada, y la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. Para estudiar la dinámica de ambas inestabilidades, cada una asociada a distintas escalas espaciales, se requieren simulaciones numéricas globales. Específicamente, se analiza el comportamiento de ambas inestabilidades en el régimen lineal y se exhiben sus principales características. Los resultados encontrados pueden ser especialmente relevantes en la dinámica asociada a los jets astrofísicos. El estudio presentado en este Capítulo corresponde al trabajo Bejarano, Gómez, & Mininni (2012).

7.1. Ecuaciones básicas

Las regiones que presentan intensos gradientes en el campo de velocidades son propicias para el desarrollo de la conocida inestabilidad de Kelvin-Helmholtz (KH). Asimismo, en presencia de campos magnéticos, si el efecto Hall es no nulo, también puede desarrollarse la inestabilidad Hall magneto-shear (Hall-MSI). Una aplicación astrofísica concreta de la evolución de ambas inestabilidades, se encuentra en relación con la interfaz límite que separa a los jets del medio que los rodea.

Los jets astrofísicos están presentes en diversos sistemas tales como objetos estelares jóvenes (YSOs), estrellas binarias, microcuasares y núcleos galácticos activos (AGNs). En general, son flujos magnetizados que pueden

alcanzar velocidades relativistas y que se extienden a lo largo de grandes longitudes manteniendo, además, un alto grado de colimación. Aunque aún no está completamente determinado el origen y el mecanismo de eyección de estos jets, se estima que son expulsados desde los discos de acreción que se forman alrededor de un objeto compacto (a modo de compendio ver, por ejemplo, Livio (1999) y Spruit (2010)).

La inestabilidad de KH en la interfaz entre el jet y el medio que lo circunda¹ debería provocar un desmoronamiento del jet a medida que la inestabilidad evoluciona, impidiendo, por lo tanto, que el jet se propague durante grandes distancias y con alto grado de colimación. Sin embargo, la evidencia observacional, por el contrario, no muestra indicios de que esto así suceda. Por tal motivo, resulta relevante estudiar la evolución conjunta de la inestabilidad de KH y la Hall-MSI.

7.1.1. Inestabilidad Hall magneto-shear

Sea un flujo macroscópico tipo *shear* con velocidad $\mathbf{u}_{sh} = -sx\hat{\mathbf{y}}$ en presencia de un campo magnético externo uniforme $B_0\hat{\mathbf{z}}$ con efecto Hall no nulo. Ante perturbaciones paralelas a la dirección del campo magnético, puede desarrollarse la inestabilidad Hall magneto-shear (Hall-MSI), expuesta en el Capítulo 4.

En un sistema de unidades tal que las velocidades están en unidades de la velocidad máxima del *shear* U_0 y el campo magnético en términos de la velocidad de Alfvén, la tasa de crecimiento de la inestabilidad γ_- está dada por la siguiente expresión

$$\gamma_- = -C_2 + \sqrt{C_2^2 - C_0}, \quad (7.1)$$

donde

$$C_2 = \frac{\varepsilon^2 k^4}{2} + \left(1 - \frac{\varepsilon s}{2B_0}\right) k^2 B_0^2, \quad (7.2)$$

$$C_0 = k^4 \left(1 - \frac{\varepsilon s}{B_0}\right) B_0^4. \quad (7.3)$$

De modo que la dependencia con los parámetros del problema (número de

¹Si el campo de velocidades es helicoidal, debido a la velocidad tipo *shear* en la dirección radial, la región interior del jet también puede ser favorable para la gestación de ambas inestabilidades.

onda, parámetro de Hall, *shear* y campo magnético externo) tal que $\gamma_- = \gamma_-(k^2, \varepsilon^2, \varepsilon s, B_0)$.

A partir de la ecuación (7.3), se puede ver que la condición suficiente de inestabilidad ($C_0 < 0$) se reduce a $\varepsilon s > B_0$. Por otra parte, en el límite asintótico $k \rightarrow \infty$, se obtiene que la tasa de crecimiento de la inestabilidad es independiente del número de onda

$$\gamma_{HMSI}^2 \approx \left(\frac{\varepsilon s}{B_0} - 1 \right) \frac{B_0^4}{\varepsilon^2}, \quad (7.4)$$

alcanzando su valor máximo si $\varepsilon s = 2B_0$.

7.1.2. Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz

La interfaz entre dos fluidos puede dar lugar a distintas inestabilidades. Concretamente, si existe una velocidad relativa entre ambos fluidos, el sistema se desestabiliza debido a la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz la cual puede desarrollarse tanto en sistemas hidrodinámicos como magnetohidrodinámicos. En el contexto astrofísico, esta inestabilidad ha sido ampliamente estudiada: en diferentes regímenes y geometrías, para distintas clases de perturbaciones, con o sin campos magnéticos, con o sin rotación (a modo de reseña, ver Filippychev (2002) y las respectivas referencias). En particular, la inestabilidad de KH asociada a los jets astrofísicos se ha investigado extensamente (a modo de sumario de los primeros trabajos realizados, ver Birkinshaw (1991) y Ferrari (1998)). Por ejemplo, la evolución de la inestabilidad de KH en jets se ha estudiado numéricamente tanto en contexto hidrodinámico (Bodo et al., 1998) como magnetohidrodinámico (Malagoli, Bodo, & Rosner, 1996; Keppens & Tóth, 1999).

Para explicar la extensión y la colimación de los jets astrofísicos que evidencian los datos observacionales, se han desarrollado diversos intentos para encontrar mecanismos de estabilización que compitan con la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. Al respecto, Bodo et al. (1989) y Bodo et al. (1996) investigaron la relación entre la rotación rígida en presencia de campo magnético y la estabilización de algunos modos; Hardee & Stone (1997) y Micono et al. (2000) examinaron las pérdidas radiativas de los jets como posibles agentes estabilizantes; Baty & Keppens (2002) y Hardee (2011) analizaron la interacción entre la denominada *current-driven instability* y la inestabilidad de KH;

Viallet & Baty (2007) estudiaron mecanismos de auto-estabilización causados por la presencia de campos magnéticos.²

En sistemas hidrodinámicos, la relación de dispersión (asumiendo flujo incompresible) resulta ser una ecuación trascendente dada por

$$\gamma_{KH}^2 = \frac{1}{4} (e^{-4k} - (2k - 1)^2) . \quad (7.5)$$

Analizando esta expresión, se puede ver que los modos inestables surgen para longitudes macroscópicas tales que $\lambda \gtrsim 9,8L_0$ y que la máxima tasa de crecimiento se alcanza para $\lambda \approx 15,7L_0$, siendo L_0 el semi-ancho de la región de *shear*. Asimismo, mediante la ecuación (7.5), se puede determinar la tasa de crecimiento máxima: $\gamma_{KH}^{\max} \approx s/5$.

En sistemas magnetohidrodinámicos, la inestabilidad de KH se ve modificada según la intensidad y la dirección del campo magnético externo (Chandrasekhar, 1961; Lau & Liu, 1980; Miura & Pritchett, 1982; Filippichev, 2002). Si el flujo es perpendicular al campo magnético, la inestabilidad de KH permanece inalterada y preserva su carácter puramente hidrodinámico: ante cualquier perturbación la región con *shear* se vuelve inestable. Si el flujo es paralelo al campo magnético, la condición de inestabilidad queda determinada en función de la velocidad de Alfvén: $v_A/U_0 \leq 1/2$, con U_0 la amplitud máxima que puede adquirir la velocidad tipo *shear*. Esto significa que el sistema se vuelve inestable si el flujo tipo *shear* adquiere velocidades mayores o iguales que dos veces la velocidad de Alfvén (Chandrasekhar, 1961; Lau & Liu, 1980). Por lo tanto, si el campo magnético es suficientemente intenso el flujo puede no desestabilizarse. El efecto restitutivo que presenta la tensión magnética es responsable de la diferencia en la estabilidad del sistema según la dirección del campo magnético sea perpendicular o paralela al flujo; en tanto que la intensidad del campo magnético modifica la condición de inestabilidad en el caso correspondiente. En particular, la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz en el contexto de Hall-MHD ha sido estudiada tanto en el

²Distintos mecanismos de estabilización asociados a los jets también han sido analizados en relación al desarrollo de inestabilidades MHD denominadas *sausage instability* y *kink instability* a partir de flujos tipo *shear* axial (Desouza-Machado, Hassam, & Sina, 2000), azimutal (Wanex, Sotnikov, & Leboeuf, 2005) y helicoidal (Wanex & Tendeland, 2007). También se ha estudiado la influencia de la rotación diferencial como agente estabilizador vinculada al desarrollo de la inestabilidad magneto-rotacional (MRI) en los jets (Hanasz, Sol, & Sauty, 2000).

régimen lineal (Fujimoto & Terasawa, 1991; Opp & Hassam, 1991) como en el régimen no lineal (Huba, 1994).

7.2. Simulaciones globales

En las simulaciones globales, en contraposición con las simulaciones locales (como las simulaciones tipo *shearing-box*), la región de fuertes gradientes no cubre la totalidad de la caja numérica, sino que se encuentra confinada a una fracción de la misma. En este sentido, las simulaciones tipo *shearing-box* pueden interpretarse como una ampliación de las simulaciones globales de la región donde el *shear* es relevante. Por tal motivo, las simulaciones locales resultan adecuadas para estudiar la dinámica de la microescala mientras que las simulaciones globales son apropiadas para describir el comportamiento de las escalas macroscópicas.

A diferencia de la inestabilidad Hall magneto-shear que excita los modos asociados a longitudes microscópicas, la inestabilidad de KH desestabiliza modos cuya longitud de onda es mayor que la longitud característica del *shear*, es decir, modos asociados a longitudes de onda macroscópicas (según determina la ecuación (7.5)). Por esta razón, esta inestabilidad no emerge en simulaciones locales dado que los modos inestables de la inestabilidad de KH tienen longitudes de onda mayores que el tamaño de la caja numérica. Por lo tanto, el relevamiento de la Hall-MSI resulta adecuadamente descripto por simulaciones locales, pero el estudio de la inestabilidad de KH requiere simulaciones globales.

Fijada la velocidad del flujo tipo *shear* $u(x)\hat{\mathbf{y}}$, la inestabilidad de KH surge en el plano (x, y) . Si, además, se considera un campo magnético perpendicular al flujo $B_0\hat{\mathbf{z}}$, la inestabilidad Hall magneto-shear se desarrolla si el efecto Hall cumple la condición de inestabilidad ($\varepsilon s > B_0$). Por consiguiente, se requieren simulaciones 3D para poder estudiar la evolución de ambas inestabilidades. En esta geometría, la inestabilidad de KH, mantiene su carácter puramente hidrodinámico, dado que no se ve afectada por el campo magnético perpendicular al plano en el se encuentra el gradiente del campo de velocidades y, por ende, tampoco por la presencia de las corrientes de Hall. Sin embargo, el campo magnético en la dirección perpendicular al flujo y el efecto Hall resultan imprescindibles para que la Hall-MSI se desarrolle.

Implementación numérica del *shear* externo

Las simulaciones numéricas globales se realizan mediante un código pseudo-espectral desarrollado por el Grupo de Flujos Astrofísicos (Mininni, Gómez & Mahajan, 2003b). La implementación del *shear* se efectúa a partir de un perfil de velocidades generado por la superposición de dos tangentes hiperbólicas,³ a fin de asegurar la periodicidad en la caja numérica,

$$u_y(x) = U_0 \left(\tanh \left(\frac{x - \pi/2}{L_0} \right) - \tanh \left(\frac{x - 3\pi/2}{L_0} \right) - 1 \right), \quad (7.6)$$

donde U_0 y L_0 establecen el valor del módulo del *shear* $|s| = U_0/L_0$ (U_0 : velocidad máxima y L_0 : semi-ancho de la región), que se encuentra localizado en franjas relativamente delgadas centradas alrededor de $x = \pi/2$ ($s < 0$) y $x = 3\pi/2$ ($s > 0$), siendo $s = -\partial_x u_y$.

De esta manera, se establece un flujo que presenta dos regiones angostas de gradientes intensos, encerradas por un campo de velocidades aproximadamente uniforme. La inestabilidad de KH evoluciona en ambas franjas. Sin embargo, la inestabilidad Hall magneto-shear sólo puede surgir en la región donde la vorticidad local impuesta por el *shear* esté anti-alineada con la dirección del campo magnético.⁴ Por otra parte, esta inestabilidad microscópica, requiere que el efecto Hall sea importante en la región donde el *shear* es intenso. Como en esta configuración, el *shear* está confinado en una pequeña fracción de la caja numérica, ya no se necesita que las corrientes de Hall sean relevantes en toda la caja (como en el caso de las simulaciones locales tipo *shearing-box*). Teniendo en cuenta que la inestabilidad se desarrolla si $\varepsilon s > 1$ y que $s = 10$ (siendo $U_0 = 1$ y $L_0 = 0,1$), basta tomar valores tales que $\varepsilon > 0,1$ para que la Hall-MSI evolucione.

7.3. Resultados

A modo de comparación, se pueden mencionar las diferencias principales entre ambas inestabilidades. En primer lugar, la Hall-MSI se desarrolla en las escalas microscópicas, por el contrario, la inestabilidad de KH evoluciona en las longitudes macroscópicas. En segundo, la inestabilidad Hall magneto-

³Este perfil de velocidades se mantiene mediante un forzado externo estacionario.

⁴Para *shear* negativo, la vorticidad local es positiva y viceversa.

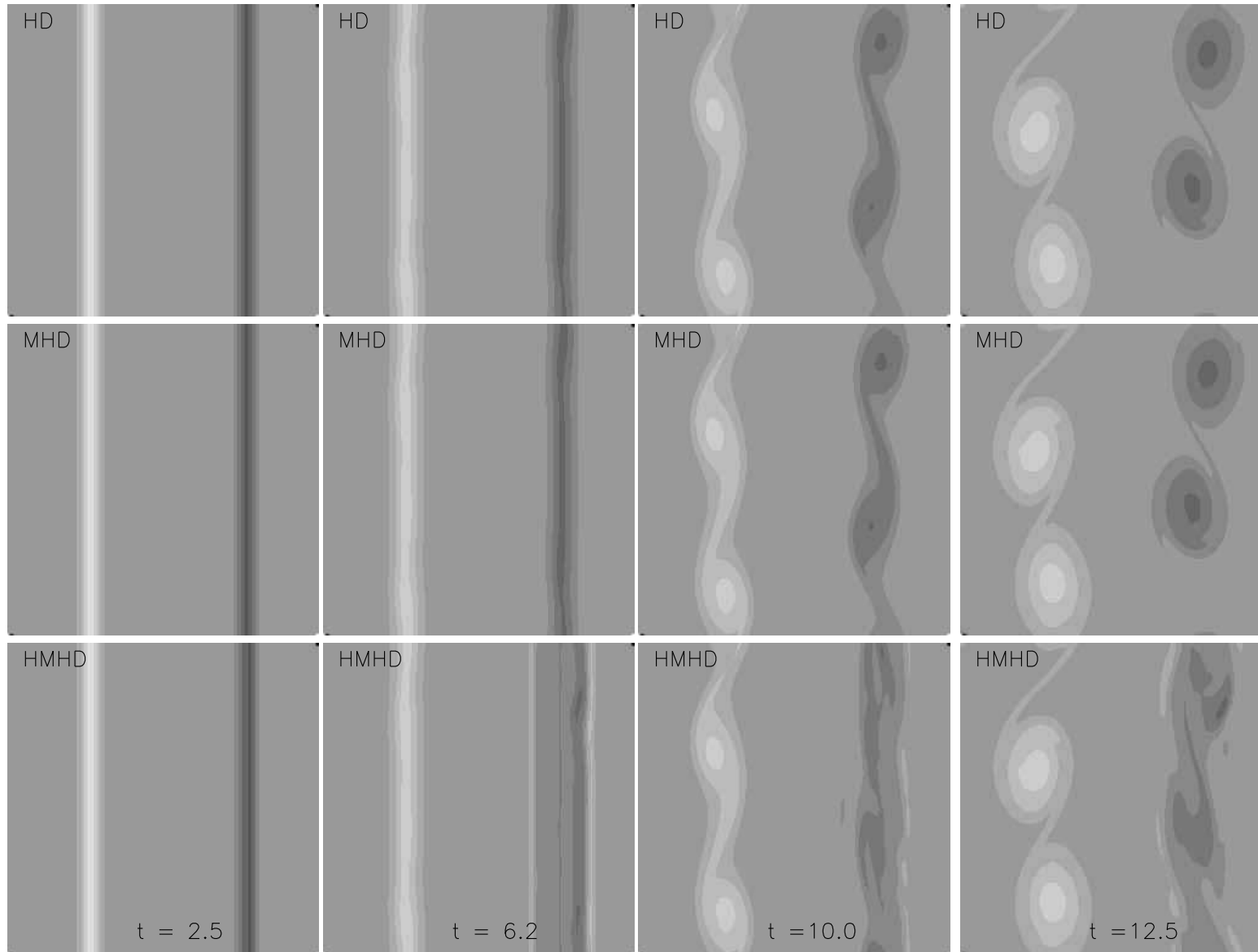


Figura 7.1: Representación de la intensidad de la componente w_z de la vorticidad. La tonalidad gris indica que $w_z \approx 0$. Las regiones más oscuras corresponden a los valores mínimos ($w_z < 0$), mientras que las más claras a los máximos ($w_z > 0$). Se muestra un corte de la caja numérica, transversal a la dirección del campo magnético. Se exhibe la evolución del flujo tipo *shear* para cuatro tiempos (uno por cada columna): los primeros tres pertenecen al régimen lineal mientras que el último a la etapa no lineal. Los paneles superiores corresponden al caso puramente hidrodinámico (campo magnético nulo). Los paneles intermedios representan la evolución del sistema en presencia de campo magnético externo. Los paneles inferiores reproducen el flujo tipo *shear* en presencia de campos magnéticos con efecto Hall. Se observa que además del desarrollo de la inestabilidad de KH, surge otra inestabilidad que afecta las escalas microscópicas.

shear, desestabiliza todos los modos, en tanto que la inestabilidad de KH excita sólo un rango acotado de números de onda. En tercer lugar, la tasa de crecimiento de la inestabilidad de KH es una fracción del *shear* impuesto mientras que la Hall-MSI arroja valores comparables a la magnitud del *shear*. En concreto, para $k = 1$, $s = 10$, $B_0 = 1$ y $\varepsilon = 0,5$ se obtiene, reemplazando en las correspondientes expresiones (ecuaciones (7.1) y (7.5)), que $\gamma_{KH} \sim 0,5$ (independientemente de los valores de B_0 y ε) y $\gamma_{HMSI} \sim 1,75$ lo que implica que $\gamma_{HMSI} \sim 3,5\gamma_{KH}$. En efecto, valores típicos de la tasa de crecimiento de la inestabilidad de KH reportados en la literatura tanto para el caso hidrodinámico (Ferrari, 1998), como para los casos MHD (Miura & Pritchett, 1982) y Hall-MHD (Huba, 1994), representan una pequeña fracción del *shear* impuesto. Por lo tanto, la inestabilidad Hall magneto-shear, definitivamente, debe ser considerada en la evolución de los jets astrofísicos o en cualquier otro sistema que presente regiones con intenso *shear*.

La evolución conjunta de la inestabilidad de KH y la Hall-MSI se estima que se estudia por primera vez en la presente Tesis. Mediante simulaciones numéricas se muestra el desarrollo de ambas inestabilidades.

En la Figura 7.1, se representa la componente w_z de la vorticidad en un plano perpendicular a la dirección del campo magnético para tres casos distintos. Las regiones más oscuras corresponden a valores negativos de w_z , mientras que las más claras a valores positivos. La tonalidad gris representa valores próximos a cero. El perfil inicial de velocidad dado por la ecuación (7.6) corresponde a la superposición de las dos tangentes hiperbólicas (consecuencia de la periodicidad impuesta) de tal modo que se generan dos regiones de *shear* intenso, cada una asociada a una vorticidad local positiva ($s < 0$) o negativa ($s > 0$). Se observa claramente que en el caso de las simulaciones globales el *shear* no ocupa la totalidad de la caja sino que, por el contrario, está localizado en una región acotada del recinto numérico.

En los paneles superiores de la Figura 7.1, se muestra la evolución del sistema para campo magnético nulo (régimen hidrodinámico). Se observa que a medida que transcurre el tiempo, la región con *shear* comienza a desestabilizarse mostrando la corrugación característica de la inestabilidad de KH para longitudes de onda macroscópicas, correspondiente a longitudes mayores que el ancho típico de la zona de intenso *shear*. En el comienzo de la etapa no lineal (última columna) se produce la formación de vórtices macroscópicos. En

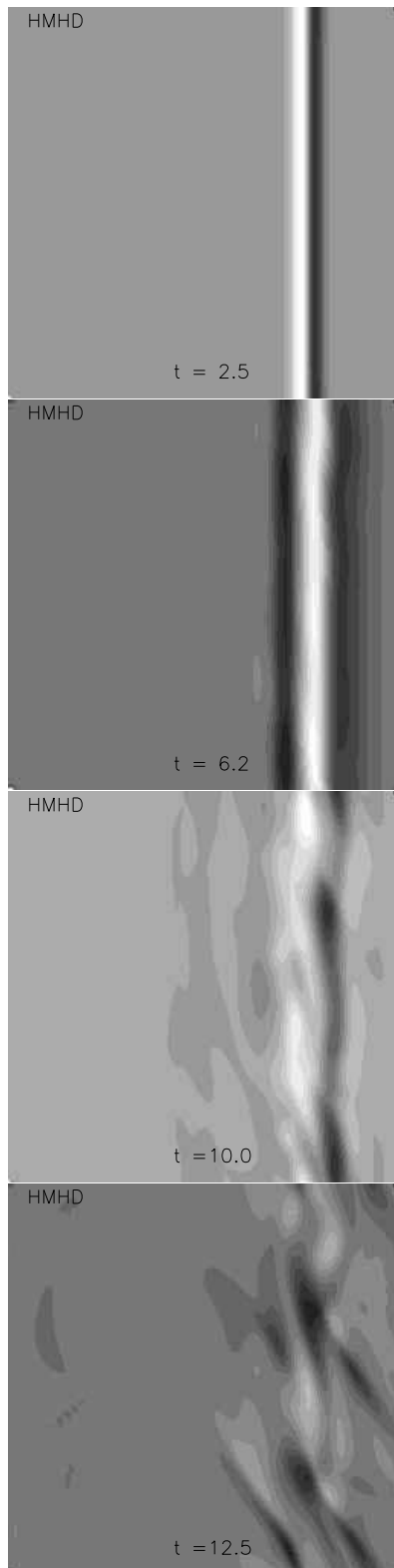


Figura 7.2: Componente J_z de la densidad de corriente en un plano perpendicular al campo magnético externo, para un flujo tipo *shear* en el contexto de Hall-MHD. En tanto la inestabilidad de KH evoluciona en un régimen puramente hidrodinámico, las magnitudes magnéticas no se ven afectadas. Teniendo en cuenta que la densidad de corriente inicial es nula, las sucesivas imágenes muestran exclusivamente la evolución temporal de la inestabilidad Hall magneto-shear. Las tonalidades más oscuras (claras) corresponden a los valores negativos (positivos).

los paneles del medio de la Figura 7.1, se describe la evolución de la inestabilidad de KH ante la presencia de campo magnético externo en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$, perpendicular al plano donde sea desarrolla la inestabilidad. Por lo tanto, el campo magnético no modifica la evolución del sistema. Por tal motivo, no se presentan modificaciones apreciables entre los paneles superiores e intermedios. En los paneles inferiores de la Figura 7.1, además del campo magnético, se considera la presencia de corrientes de Hall (se muestra el caso para $B_0 = 1$ y $\varepsilon = 0,4$). La evolución del flujo tipo *shear* bajo la influencia del efecto Hall, muestra evidentes diferencias con la dinámica puramente hidrodinámica. A tiempos medios en la etapa lineal, se observa la desestabilización en las escalas microscópicas, producida por la inestabilidad Hall magneto-shear. De hecho, la inestabilidad microscópica se desarrolla previamente a que comience la desestabilización (corrugación) debido a la inestabilidad de KH. En particular, la corrugación en presencia de la micro inestabilidad es significativamente más suave indicando un aplazamiento en la evolución de la KH. Asimismo, el último panel correspondiente al inicio de la etapa no lineal para los casos HD y MHD, muestra un notable retraso en la formación de los vórtices. Esto mismo, incluso, se evidencia entre las dos regiones con *shear* de signos opuestos. En tanto que la Hall-MSI se desarrolla para el caso en que la vorticidad local y el campo magnético están anti-alineados, la inestabilidad surge en una de las dos regiones con intensos gradientes. En concreto, la inestabilidad Hall magneto-shear nace en la región correspondiente a vorticidad local negativa (tonalidad gris oscuro).

En la Figura 7.2 se muestra la evolución temporal de la componente J_z de la densidad de corriente para los mismos tiempos que la Figura 7.1 y para los mismos parámetros ($B_0 = 1$ y $\varepsilon = 0,4$). La tonalidad gris indica $J_z \approx 0$ en tanto que las tonalidades oscuras y claras, corresponden, a valores negativos y positivos, respectivamente. Dado que la inestabilidad de KH se desarrolla en un régimen puramente hidrodinámico, las magnitudes magnéticas no se ven afectadas y, por lo tanto, su crecimiento se debe únicamente al surgimiento de la Hall-MSI. En particular, la densidad de corriente inicial es nula (campo magnético externo uniforme), por lo que la evolución de J_z , corresponde exclusivamente al desarrollo de la inestabilidad Hall magneto-shear. Asimismo, la Figura 7.2 manifiesta el hecho de que sólo una de las regiones con *shear* es inestable, siendo la otra estable debido a que en dicha región la

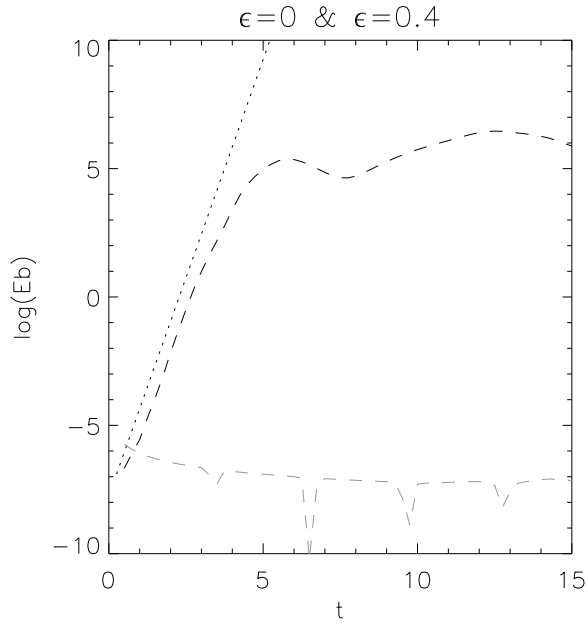


Figura 7.3: Energía magnética E_b en función del tiempo para los casos MHD ($\epsilon = 0$, trazo gris) y Hall-MHD ($\epsilon = 0,4$, trazo negro). En presencia del efecto Hall, se observa que surge la inestabilidad Hall magneto-shear. A modo de referencia se muestra una recta en línea punteada cuya pendiente representa el valor analítico de la tasa de crecimiento de esta inestabilidad ($\gamma_- \approx 1,7$). Alrededor de $t \gtrsim 6$ comienza a desarrollarse la inestabilidad de KH.

vorticidad local y el campo magnético externo están alineados. Comparando el desarrollo de ambas inestabilidades, se observa que la Hall-MSI surge más tempranamente con respecto a la inestabilidad de KH. Por este motivo, parte del régimen no lineal de la inestabilidad microscópica coexiste con la etapa aún lineal de la inestabilidad de KH. Se aprecia que a $t = 10$ (anteúltimo panel de la Figura 7.2) la Hall-MSI exhibe comportamiento no lineal, mientras que la inestabilidad macroscópica de KH se encuentra aún en su etapa lineal (ver paneles inferiores de la Figura 7.1).

En la Figura 7.3 se grafica la energía magnética (en escala logarítmica) en función del tiempo para el caso MHD ($\epsilon = 0$) en trazo gris y para el caso Hall-MHD ($\epsilon = 0,4$) en trazo negro. En el primer caso, en ausencia de corrientes de Hall, la inestabilidad Hall magneto-shear no se desarrolla y, por lo tanto, las magnitudes magnéticas permanecen inalteradas dado que la inestabilidad de KH evoluciona en un régimen puramente hidrodinámico. En el segundo caso, en presencia del efecto Hall, se observa la evolución de la Hall-MSI

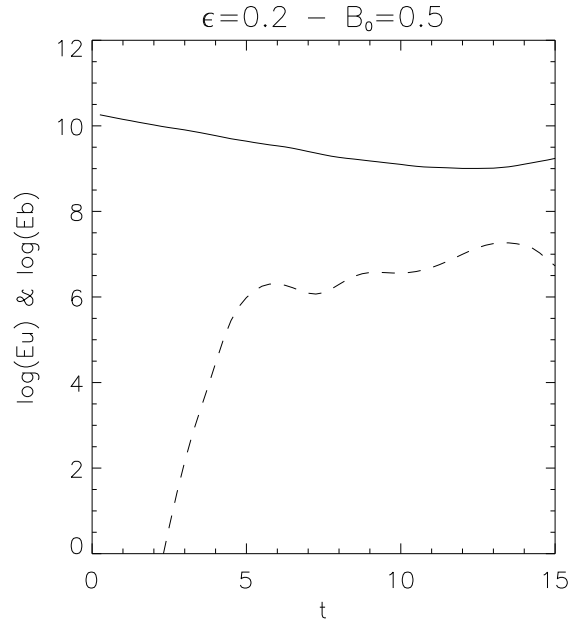


Figura 7.4: Energías magnética E_b (línea a rayas) y cinética E_u (línea continua) en función del tiempo para el caso Hall-MHD. La energía magnética crece a expensas de la energía cinética. Aproximadamente para $t \approx 13$, se observa que el máximo de la energía magnética se correlaciona con el mínimo de la energía cinética.

para tiempos tempranos ($t \lesssim 6$). Como referencia se muestra una recta en línea punteada negra cuya pendiente corresponde al valor analítico de la tasa de crecimiento de la inestabilidad Hall magneto-shear ($\gamma_- \approx 1,7$). La etapa lineal ($t \lesssim 3$) muestra un excelente acuerdo con los resultados teóricos. A partir de $t \gtrsim 6$, las simulaciones numéricas parecen indicar el surgimiento de la inestabilidad de KH.

En la Figura 7.4 se grafica las energías cinética y magnética (en escala logarítmica) en función del tiempo, para los modos bajo la influencia de ambas inestabilidades, es decir, en el caso Hall-MHD. La energía magnética (línea a rayas) presenta un pronunciado crecimiento durante el desarrollo de la micro inestabilidad Hall magneto-shear, a expensas de la energía cinética (línea continua) que disminuye consecuentemente. En particular, se muestra el resultado para el caso $B_0 = 0,5$ y $\epsilon = 0,2$, en el que este balance energético es significativamente apreciable. En particular, se obtiene que la energía magnética (cinética) aumenta (disminuye) aproximadamente un 15 %.

Cabe mencionar que las energías representadas en las Figuras 7.3 y 7.4 corresponden a las energías calculadas no sobre todo el recinto numérico sino únicamente sobre la región en donde se localiza el *shear*. En particular, se obtienen las energías magnéticas y cinéticas en la franja en donde se desarrollan ambas inestabilidades.

Las implicancias de estos resultados en el contexto de jets astrofísicos son potencialmente relevantes. Los datos observacionales asociados a diferentes sistemas, coinciden en la descripción según la cual los jets se propagan a lo largo de extensas longitudes manteniendo un alto grado de colimación (Meier, Koide, & Uchida, 2001; Bacciotti et al., 2003). Si bien diferentes modelos establecen el rol fundamental que desempeñan los campos magnéticos (Blandford, 1989), especialmente al respecto de la colimación del jet, no está establecido aún el motivo por el cual estos jets no se desestabilizan debido al desarrollo de la inestabilidad de KH en la interfaz entre el contorno externo del jet y el medio que lo rodea. En este sentido, la formación de una nueva inestabilidad en las escalas microscópicas podría ser tal que retrase o, incluso, impida la desestabilización del flujo a gran escala a causa de la inestabilidad de KH. Queda aún por investigar bajo qué condiciones o bajo qué valores de los parámetros, específicamente, se logra que el sistema no se vea afectado por la inestabilidad de KH. Al respecto, parece ser necesario el estudio del régimen no lineal para examinar la posibilidad de que el sistema desarrolle microturbulencia que permita, tal vez, contrarrestar los efectos desestabilizantes de la inestabilidad de KH.

7.4. Conclusiones preliminares

Se presentaron los resultados numéricos obtenidos a partir del desarrollo de simulaciones globales en tres dimensiones en el contexto de Hall-MHD. Se examinó la estabilidad de un flujo tipo *shear* en presencia de campo magnético externo bajo la influencia de corrientes de Hall en configuraciones 3D. Como principal resultado se observó la formación de la micro inestabilidad Hall magneto-shear en el seno de un flujo con intensos gradientes en las velocidades, sujeto a su vez a la inestabilidad macroscópica de Kelvin-Helmholtz. Por tanto, se estudió la evolución conjunta de la Hall-MSI y la inestabilidad de KH. Para esto, se adoptó una geometría en la cual sea posible el desarrollo

de ambas inestabilidades. El sistema de referencia se eligió de tal modo que el campo magnético permite el desarrollo de la Hall-MSI aunque no modifica la inestabilidad de KH que evoluciona en régimen puramente hidrodinámico. En este sentido, las corrientes de Hall, si bien no afectan a la dinámica de la inestabilidad de KH, son imprescindibles para que la micro inestabilidad Hall magneto-shear se desarrolle. Se estudiaron diferentes situaciones variando la intensidad de campo magnético y el valor del parámetro de Hall. Se mantuvo constante la intensidad del *shear* con la intención de no alterar la tasa de inestabilidad de KH, focalizando el análisis únicamente sobre la inestabilidad microscópica. Se estima que el estudio realizado en el presente Capítulo es el primer trabajo sobre la evolución conjunta de ambas inestabilidades. Los resultados encontrados presentan una potencial aplicación a la dinámica asociada a los jets astrofísicos. En concreto, la interacción entre la micro inestabilidad Hall magneto-shear y la inestabilidad macroscópica de KH puede aportar indicios que contribuyan a la comprensión de los mecanismos de colimación y de sustentación, responsables de la evolución de los jets a lo largo de extensas distancias conservando un alto grado de colimación que se observa en una diversidad de sistemas astrofísicos.

Capítulo 8

Conclusiones generales

La principal meta de esta Tesis ha sido inspeccionar el rol del efecto Hall en flujos tipo *shear*. En esta dirección se realizó un análisis de estabilidad de la dinámica asociada a una pequeña parcela de fluido inmersa en un flujo macroscópico bajo la acción de un campo magnético uniforme externo en presencia de corrientes de Hall. Para eso, se dedujeron las ecuaciones Hall-MHD en la aproximación *shearing-box*, las cuales permiten describir adecuadamente la dinámica correspondiente a la microescala. Como resultado principal se encontró el desarrollo de una inestabilidad como consecuencia de la influencia conjunta del efecto Hall y del *shear*. A esta inestabilidad se la denominó *Hall magneto-shear instability* (Hall-MSI). Examinando la relación de dispersión, se observa que la inestabilidad se vincula con la desestabilización de los modos *ion-cyclotron* (modos Hall-MHD con polarización circular a izquierda) al propagarse en un medio con *shear* intenso. Asimismo, para ciertos valores de los parámetros, todos los números de onda resultan inestables. Como condición suficiente para el surgimiento de la inestabilidad, se obtuvo que las intensidades de ambos efectos tienen que ser tales que $\varepsilon s > 1$. Esto, a su vez, significa que el sistema se desestabiliza si el *shear* es suficientemente fuerte y supera la frecuencia de ciclotrón iónica. A partir de la condición de estabilidad, queda explícito que esta micro inestabilidad proviene de la interacción entre el flujo tipo *shear* y las corrientes de Hall: sin *shear* ($s = 0$), el sistema permanece estable y se reobtienen las ondas Hall-MHD; sin efecto Hall ($\varepsilon = 0$), el sistema resulta estable y se recuperan los modos de propagación MHD. Los resultados teóricos obtenidos, se contrastaron con simulaciones numéricas mostrando un excelente acuerdo.

En los Capítulos 4 y 5 se estudió la estabilidad del sistema ante perturbaciones 1D paralelas al campo magnético externo, respectivamente, en plasmas no rotantes y en rotación, en presencia de corrientes de Hall (Bejarano & Gómez, 2010; Bejarano, Gómez, & Brandenburg, 2011). En ambos casos, se exploró el espacio de parámetros determinado por el número de onda y el parámetro de Hall, especificando las regiones inestables y sus principales características. En sistemas no rotantes la inestabilidad Hall magneto-shear asegura que, para $\varepsilon > 0$, existe un extenso rango de valores en el que todos los modos son inestables. En tanto que en sistemas en rotación, se analizaron tres perfiles de rotación de interés astrofísico: sub-kepleriano, kepleriano y supra-kepleriano. En todos los casos, se obtuvo que para $\varepsilon < 0$, existe siempre un rango de valores del parámetro de Hall para el cual todos los números de onda son inestables. Por otra parte, los flujos con rotación diferencial se pueden aproximar mediante un flujo tipo *shear* superpuesto a una rotación rígida. En estos sistemas, se desarrolla la conocida inestabilidad magneto-rotacional (MRI). Mediante el análisis lineal llevado a cabo, se corroboraron algunos de los resultados reportados en la literatura tanto para el caso MRI ($\varepsilon = 0$) como para el caso Hall-MRI ($\varepsilon \neq 0$). Además, en configuraciones 1D, se estudió cualitativamente el comportamiento de la inestabilidad en el régimen no lineal. Y dado que las ecuaciones no lineales dependen del parámetro β , se realizaron simulaciones numéricas en dos casos asintóticos: $\beta \approx 1$ y $\beta \gg 1$. En particular, se encontró que para el régimen de β alto, el flujo evoluciona como un sistema puramente MHD ($\varepsilon = 0$). A modo de comparación, se calcularon los autovectores para ambas inestabilidades en el régimen lineal y se mostró que las orientaciones relativas entre los campos involucrados no se modifica en la etapa no lineal.

En el Capítulo 6 se analizó la estabilidad de los modos de propagación Hall-MHD para flujos tipo *shear* en geometrías 2D tales que $\hat{\mathbf{y}}\partial_y = 0$ (Bejarano & Gómez, 2012). Si las perturbaciones son puramente paralelas al campo magnético externo, se recupera la relación de dispersión para configuraciones unidimensionales, mientras que para perturbaciones exclusivamente transversales a la dirección del campo magnético, el sistema resulta estable y la relación de dispersión corresponde a la propagación de *whistlers*. Para una dirección de propagación arbitraria, la tasa de inestabilidad depende del ángulo entre el vector de onda y el campo magnético externo, siendo máxima

en el caso de propagación paralela y nula para propagación perpendicular. A partir de simulaciones numéricas, se examinó la dependencia de la tasa de crecimiento de la inestabilidad con la dirección de la perturbación con respecto al campo magnético externo. Asimismo, se observó la formación de un flujo de dos canales (*two-channel flows*) anteriormente descrito por Sano & Stone (2002a) en simulaciones tipo *shearing-box* para perturbaciones axisimétricas para el caso de la inestabilidad Hall-MRI. Por otra parte, se estudió también la dependencia de la tasa de crecimiento de la inestabilidad con el parámetro β . En particular, el límite $\beta \gg 1$ es el régimen en el cual se puede apreciar el leve impacto del parámetro β sobre la inestabilidad, con mayor incidencia en el caso de propagación paralela.

Tanto para las configuraciones 1D como 2D, se obtuvo una alta concordancia entre los cálculos teóricos y los resultados numéricos. Las simulaciones locales tipo *shearing-box* se realizaron utilizando un código de diferencias finitas (Brandenburg & Dobler, 2002), asumiendo condiciones de contorno periódicas y efectos disipativos despreciables.

En el Capítulo 7 se investigó la evolución de la inestabilidad Hall magneto-shear en configuraciones 3D en las cuales, a su vez, pueda desarrollarse la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz (Bejarano, Gómez, & Mininni, 2012). Como esta inestabilidad surge en las escalas macroscópicas, típicamente, mayores que la longitud característica asociada a la región con *shear* intenso, no es posible estudiar la inestabilidad de KH en simulaciones tipo *shearing-box* (dado que los modos inestables tendrían longitudes de onda mayores que el tamaño de la caja numérica). Por este motivo, para examinar la evolución conjunta de la inestabilidad de KH y la Hall-MSI, se implementaron simulaciones globales. Los resultados numéricos obtenidos evidencian la coexistencia de ambas inestabilidades. En concreto, se observó a partir de las simulaciones numéricas que la micro inestabilidad Hall magneto-shear se desarrolla en el seno de la inestabilidad macroscópica de Kelvin-Helmholtz. Las simulaciones globales 3D se realizaron utilizando un código pseudo-espectral (Mininni, Gómez & Mahajan, 2003b), considerando condiciones de contorno periódicas y efectos disipativos despreciables. Se adoptó una geometría en la cual es posible el desarrollo de ambas inestabilidades. Al respecto, si bien la orientación del campo magnético elegida no afecta a la inestabilidad de KH, que evoluciona en un régimen puramente hidrodinámico, la presencia de las

corrientes de Hall es imprescindible para que se desarrolle la Hall-MSI.

Para todos los casos analizados, se consideraron valores negativos y positivos del parámetro de Hall, vinculados a la orientación relativa entre la vorticidad local (*shear vorticity*) y el campo magnético externo. Si el plasma es rotante, el signo del parámetro de Hall se asocia al alineamiento relativo entre la velocidad angular y el campo magnético externo. Según los resultados presentados, esto significa que en el caso de plasmas no rotantes, el sistema se vuelve inestable si la vorticidad local y el campo magnético externo están anti-alineados; en cambio, en el caso de plasmas rotantes, existe un conjunto de valores de los parámetros tal que el sistema resulta inestable independientemente de la orientación relativa de los campos involucrados. No obstante, en plasmas no rotantes, cuando el sistema se desestabiliza, todos los modos resultan inestables.

A partir del estudio realizado en la presente Tesis, se espera continuar esta línea de investigación mediante un análisis detallado de la evolución no lineal de la inestabilidad Hall magneto-shear, implementando simulaciones numéricas con mayor resolución. A tal fin resulta imperativo explorar la presencia de niveles de saturación y el posible desarrollo de turbulencia.

Consecuencias astrofísicas

La inestabilidad Hall magneto-shear puede ser relevante en sistemas astrofísicos en los cuales las corrientes de Hall son no despreciables en regiones con intensos gradientes en el campo de velocidades.

El rol del efecto Hall en flujos tipo *shear* ha sido ampliamente estudiado en el contexto de los discos de acreción en relación a la inestabilidad magneto-rotacional (Wardle, 1999; Balbus & Terquem, 2001; Sano & Stone, 2002a,b; Rüdiger & Shalybkov, 2004; Rüdiger & Kitchatinov, 2005; Devlen & Pekünlü, 2007). Sin embargo, la influencia de las corrientes de Hall en flujos tipo *shear* no rotantes, ha sido investigada únicamente en el trabajo de Kunz (2008) y en la presente Tesis (Bejarano & Gómez, 2010; Bejarano, Gómez, & Brandenburg, 2011; Bejarano & Gómez, 2012; Bejarano, Gómez, & Mininni, 2012). Concretamente, se espera que esta inestabilidad sea relevante también en la dinámica de los jets. En la interfaz que separa al jet y al medio que lo rodea, el gradiente del campo velocidad es muy intenso. Si el efecto

Hall es no nulo, la evolución de la inestabilidad macroscópica de Kelvin-Hemholtz podría verse alterada por el desarrollo de la micro inestabilidad Hall magneto-shear. De manera que la interacción de ambas inestabilidades, podría condicionar la dinámica del jet y justificar la estabilidad observada. En particular, el desarrollo de la inestabilidad de KH en relación con los jets ha sido extensamente investigada (Birkinshaw, 1991; Bodo et al., 1996; Malagoli, Bodo, & Rosner, 1996; Bodo et al., 1998; Keppens & Tóth, 1999, por nombrar sólo algunos de los primeros trabajos al respecto). La inestabilidad de KH debería producir una corrugación macroscópica en la superficie que separa al jet y al medio a su alrededor. Sin embargo, la evidencia observacional contradice esta predicción teórica dado que no sólo no se observa esa perturbación sino que además los jets evolucionan con un alto grado de colimación a lo largo de extensas distancias. Por lo tanto, el desarrollo de micro inestabilidades podría afectar la dinámica macroscópica contrarrestando o, al menos, retardando el surgimiento de la inestabilidad de KH. De hecho, estimaciones típicas para la tasa de crecimiento de la inestabilidad de KH ya sea en su versión hidrodinámica (Ferrari, 1998) o magnetohidrodinámica, sin (Miura & Pritchett, 1982) o con (Huba, 1994) efecto Hall, arrojan valores que resultan ser una pequeña fracción de la velocidad tipo *shear* en tanto que la Hall-MSI en los casos analizados puede alcanzar valores del orden de la mitad de la intensidad del *shear*. Por consiguiente, la inestabilidad Hall magneto-shear podría desempeñar un papel importante en la dinámica asociada a la evolución de los jets astrofísicos.

Apéndice

Algunos parámetros de la física del plasma

Se consideran unidades gaussianas (cgs), excepto la temperatura que está expresada en eV ($1\text{eV}/k_B \approx 11600\text{K}$) y la masa iónica expresada en unidades de la masa del protón (siendo $\mu = m_i/m_p$). Z es el número atómico (número total de protones en el núcleo), k_B es la constante de Boltzmann, k es el número de onda, γ es el índice adiabático y $\ln(\Lambda)$ es el denominado logaritmo de Coulomb (logaritmo del cociente entre el máximo y el mínimo parámetro de impacto en el *scattering* de Coulomb). Los subíndices “e” e “i” corresponden a magnitudes asociadas, respectivamente, a electrones e iones.¹

Frecuencias

- Girofrecuencia²: frecuencia angular de la órbita circular que describen los electrones/iones alrededor de las líneas magnéticas

$$\omega_{ce} = eB/m_e c = 1,76 \times 10^7 B \quad \text{rad s}^{-1} \quad (\text{A.1})$$

$$\omega_{ci} = ZeB/m_i c = 9,58 \times 10^3 Z\mu^{-1} B \quad \text{rad s}^{-1} \quad (\text{A.2})$$

- Frecuencia de plasma: frecuencia de oscilación de electrones/iones

$$\omega_{pe} = (4\pi n_e e^2/m_e)^{1/2} = 5,64 \times 10^4 n_e^{1/2} \quad \text{rad s}^{-1} \quad (\text{A.3})$$

$$\omega_{pi} = (4\pi n_i (Ze)^2/m_i)^{1/2} = 1,32 \times 10^3 Z\mu^{-1/2} n_i^{1/2} \quad \text{rad s}^{-1} \quad (\text{A.4})$$

¹Extraído de NRL Plasma Formulary, J. D. Huba, Naval Research Laboratory (2007).

²En un campo magnético uniforme en ausencia de colisiones, las partículas cargadas se mueven siguiendo una trayectoria helicoidal alrededor de las líneas de campo. La frecuencia de giro o frecuencia ciclotrón corresponde a la frecuencia angular del movimiento perpendicular al campo magnético. A lo largo de las líneas de campo magnético, el movimiento de las partículas no resulta afectado.

- Tasa de colisiones

$$\nu_e = 2,91 \times 10^{-6} n_e \ln \Lambda T_e^{-3/2} \text{ s}^{-1} \quad (\text{A.5})$$

$$\nu_i = 4,80 \times 10^{-8} Z^4 \mu^{-1/2} n_i \ln \Lambda T_i^{-3/2} \text{ s}^{-1} \quad (\text{A.6})$$

Velocidades

- Velocidad térmica³: velocidad típica de los electrones/iones considerando que la distribución de velocidades es maxwelliana

$$v_{Te} = (k_B T_e / m_e)^{1/2} = 4,19 \times 10^7 T_e^{1/2} \text{ cm s}^{-1} \quad (\text{A.7})$$

$$v_{Ti} = (k_B T_i / m_i)^{1/2} = 9,79 \times 10^5 \mu^{-1/2} T_i^{1/2} \text{ cm s}^{-1} \quad (\text{A.8})$$

- Velocidad del sonido iónica: velocidad de las ondas longitudinales de sonido que se obtienen a partir de la masa de los iones y la presión de los electrones

$$c_s = (\gamma Z k_B T_e / m_i)^{1/2} = 9,79 \times 10^5 (\gamma Z T_e / \mu)^{1/2} \text{ cm s}^{-1} \quad (\text{A.9})$$

- Velocidad de Alfvén iónica: velocidad de propagación de las denominadas ondas de Alfvén que se obtienen a partir de la masa de los iones y la fuerza restitutiva del campo magnético

$$v_A = B / (4\pi n_i m_i)^{1/2} = 2,18 \times 10^{11} \mu^{-1/2} n_i^{-1/2} B \text{ cm s}^{-1} \quad (\text{A.10})$$

Longitudes

- Longitud de onda térmica de de Broglie

$$\Lambda_e = \sqrt{\frac{h^2}{2\pi m_e k T_e}} = 6,919 \times 10^{-8} T_e^{-1/2} \text{ cm} \quad (\text{A.11})$$

- Giroradio⁴: radio de la proyección circular de la órbita que realizan los electrones/iones alrededor de las líneas de campo magnético

$$r_e = v_{Te} / \omega_{ce} = 2,38 T_e^{1/2} B^{-1} \text{ cm} \quad (\text{A.12})$$

³La distancia que recorren las partículas entre colisiones (camino libre medio) queda definida por v_T / ν .

⁴También denominado radio de Larmor.

$$r_i = v_{Ti}/\omega_{ci} = 1,02 \times 10^2 \mu^{1/2} Z^{-1} T_i^{1/2} B^{-1} \text{ cm} \quad (\text{A.13})$$

- Longitud inercial⁵

$$\delta_e = \frac{c}{\omega_{pe}} = 5,31 \times 10^5 n_e^{-1/2} \text{ cm} \quad (\text{A.14})$$

$$\delta_i = \frac{c}{\omega_{pi}} = 2,28 \times 10^7 Z^{-1} (\mu/n_i)^{1/2} \text{ cm} \quad (\text{A.15})$$

- Longitud de Debye: escala a partir de la cual los campos eléctricos son apantallados por la redistribución de electrones

$$\lambda_D = (k_B T / 4\pi n e^2)^{1/2} = 7,43 \times 10^2 T^{1/2} n^{-1/2} \text{ cm} \quad (\text{A.16})$$

Otras cantidades adimensionales relevantes

- Raíz cuadrada del cociente entre las masas electrónica e iónica

$$(m_e/m_p)^{1/2} = 2,33 \times 10^{-2} = 1/42,9 \quad (\text{A.17})$$

- Número de partículas adentro de la esfera de Debye

$$(4\pi/3)n\lambda_D^3 = 1,72 \times 10^9 T^{3/2} n^{-1/2} \quad (\text{A.18})$$

- Cociente entre la presión térmica y la presión magnética

$$\beta = 8\pi n k_B T / B^2 = 4,03 \times 10^{-11} n T B^{-2} \quad (\text{A.19})$$

⁵*Plasma skin depth*: longitud de profundidad hasta la cual la radiación electromagnética puede penetrar en el interior de un plasma.

Bibliografía

- Bacciotti, F., Ray, T. P., Eislöffel, J., Woitas, J., Solf, J., Mundt, R., & Davis, C. J. 2003, *Astrophysics & Space Science*, 287, 3
- Balbus, S. A. 2003, *Annual Review of Astronomy & Astrophysics*, 41, 555
- Balbus, S. A., & Hawley, J. F. 1991, *Astrophysical Journal*, 376, 214
- Balbus, S. A., & Hawley, J. F. 1992, *Astrophysical Journal*, 392, 662
- Balbus, S. A., & Hawley, J. F. 1992, *Astrophysical Journal*, 400, 610
- Balbus, S. A., & Hawley, J. F. 1998, *Review of Modern Physics*, 70, 1
- Balbus, S. A., & Terquem, C. 2001, *Astrophysical Journal*, 552, 235
- Baty, H. & Keppens, R. 2002, *Astrophysical Journal*, 580, 800
- Bejarano, C. & Gómez, D. 2010, *International Journal of Modern Physics D*, 19, 695
- Bejarano, C., Gómez, D., & Brandenburg, A. 2011, *Astrophysical Journal*, 737, 62
- Bejarano, C. & Gómez, D. 2012, Shear-driven flows in 2D Hall-MHD in *Gravitation, Relativistic Astrophysics, and Cosmology*, Pellizza, L. J. & Tovar Falciano, F. (Eds.) (Cambridge: Cambridge University Press), en prensa
- Bejarano, C., Gómez, D., & Mininni, P. 2012, “Kelvin-Helmholtz instability versus Hall-MSI in shear flows”, en preparación
- Birkinshaw, M. 1991, The stability of jets in *Beams and Jets in Astrophysics*, Hughes, P. A. (Ed.), Cambridge Astrophysics Series, 19, 278 (Cambridge: Cambridge University Press)
- Biskamp, D. 1997, *Nonlinear Magnetohydrodynamics* (Cambridge: Cambridge University Press)
- Blaes O. M. & Balbus S. A., 1994, *Astrophysical Journal*, 421, 163

-
- Blandford, R. D. 1989, Accretion disk magnetohydrodynamics and the origin of jets in *Theory of accretion disks*, Meyer, F., Duschl, W. J., Frank, J., & MeyerHofmeister, E. (Eds.), NATO Advanced Science Institutes Series C, 290, 35 (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers)
- Bodo, G., Mignone, A., Cattaneo, F., Rossi, P., & Ferrari, A. 2008, *Astronomy & Astrophysics*, 487, 1
- Bodo, G., Rosner, R., Ferrari, A., & Knobloch E. 1989, *Astrophysical Journal*, 341, 631
- Bodo, G., Rosner, R., Ferrari, A., & Knobloch, E. 1996, *Astrophysical Journal*, 470, 797
- Bodo, G., Rossi, P., Massaglia, S., Ferrari, A., Malagoli, A., & Rosner, R. 1998, *Astronomy & Astrophysics*, 333, 1117
- Braginskii, S. I. 1965, *Review of Plasma Physics*, 1, 205
- Brandenburg, A., Dintrans, B., & Haugen, N. E. L. 2004, *AIP Conference-Proceedings*, 733, 122
- Brandenburg, A., & Dobler, W. 2002, *Computer Physics Communications*, 147, 471
- Brandenburg, A., Nordlund, A., Stein, R. F., & Torkelsson, U. 1995, *Astrophysical Journal*, 446, 741
- Brandenburg, A. & Subramanian, K. 2000, *Astronomy & Astrophysics*, 361, L33
- Brandenburg, A., & Subramanian, K. 2005, *Physics Reports*, 417, 1
- Brandenburg, A., & Zweibel, E. G. 1995, *Astrophysical Journal*, 448, 734
- Cabot, W. 1996, *Astrophysical Journal*, 465, 874
- Chagelishvili, G. D., Zahn, J.-P., Tevzadze, A. G., & Lominadze, J. G. 2003, *Astronomy & Astrophysics*, 402, 401
- Chakrabarti, S. K. 1995, *Annals of the New York Academy of Sciences*, 759, 546
- Chandrasekhar, S. 1961, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability* (Oxford: Oxford University Press)
- Choudhuri, A. R. 1998, *The physics of fluids and plasmas: an introduction for astrophysicists* (Cambridge: Cambridge University Press)
- Cowling T. G. 1951, *Astrophysical Journal*, 114, 272

- Davidson, P. A. 2004, *Turbulence: an introduction for scientists and engineers* (Oxford: Oxford University Press)
- Davis, S. W., Stone, J. M., & Pessah, M. E. 2010, *Astrophysical Journal*, 713, 52
- Deng, X. H. & Matsumoto, H. 2001, *Nature*, 410, 557
- Desch S. J. 2004, *Astrophysical Journal*, 608, 509
- Desouza-Machado, S., Hassam, A. B., & Sina, R. 2000, *Physics of Plasmas*, 7, 4632
- Devlen, E., & Pekünlü, E. R. 2007, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 377, 1245
- Dubrulle, B., Marié, L., Normand, Ch., Richard, D., Hersant, F. & Zahn, J.-P. 2005, *Astronomy & Astrophysics*, 429, 1
- Ferrari, A. 1998, *Annual Review of Astronomy & Astrophysics*, 36, 539
- Ferrari A., Trussoni E., & Zaninetti L. 1980, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 193, 469
- Ferrari A., Trussoni E., & Zaninetti L. 1981, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 196, 1051
- Fiedler R., & Jones T. W. 1984, *Astrophysical Journal*, 283, 532
- Filippychiev, D. S. 2002, *Computational Mathematics and Modeling*, 13, 119
- Frank, J., King, A., & Raine, D. 1985, *Accretion power in astrophysics* (Cambridge: Cambridge University Press)
- Fromang, S. & Papaloizou, J. 2007, *Astronomy & Astrophysics*, 476, 1113
- Fromang S., Terquem C., & Balbus S. A. 2002, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 329, 18
- Fujimoto, M. & Terasawa, T. 1991, *Journal of Geophysical Research*, 96, 15725
- Geppert, U. & Rheinhardt, M. 2002, *Astronomy & Astrophysics*, 392, 1015
- Goedbloed, J. P. & Poedts, S. 2004, *Principles of magnetohydrodynamics: with applications to laboratory and astrophysical plasmas* (Cambridge: Cambridge University Press)
- Goldreich P. & Lynden-Bell D. 1965, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 130, 125

-
- Goldreich P. & Schubert G. 1967, *Astrophysical Journal*, 150, 571
- Goldreich, P. & Tremaine, S. 1978, *Astrophysical Journal*, 222, 850
- Goldston, R. J. & Rutherford, P. H. 1995 *Introduction to plasma physics* (Bristol: Institute of Physics Publishing)
- Gómez, D. O. 2009, Accretion power in astrophysics in *Compact objects and their emission*, Romero, G. E. & Benaglia, P. (Eds.), 1, 123 (LaPlata: AAA Book Series)
- Gómez, D. O., Mahajan, S. M., Dmitruk, P. 2008, *Physics of Plasmas*, 15, 102303
- Guan, X., Gammie, C. F., Simon, J. B., & Johnson, B. M. 2009, *Astrophysical Journal*, 694, 1010
- Hanasz, M. Sol, H., & Sauty, C. 2000, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 316, 494
- Hardee, P. E. 2011, *IAU Symposium*, 275, 41
- Hardee, P. E. & Stone, J. M. 1997, *Astrophysical Journal*, 483, 121
- Hawley, J. F., Gammie, C. F., & Balbus, S. A. 1995, *Astrophysical Journal*, 440, 742
- Hawley J. H., & Stone J. M. 1998, *Astrophysical Journal*, 501, 758
- Hollerbach, R., & Rüdiger, G. 2002, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 337, 216
- Huba, J. D. 1994, *Physical Review Letter*, 72, 2033
- Huba, J. D. 1995, *Physics of Plasmas*, 2, 2504
- Hueso, R., & Guillot, T. 2005, *Astronomy & Astrophysics*, 442, 703
- Johansen, A., Youdin, A., & Klahr, H. 2009, *Astrophysical Journal*, 697, 1269
- Julian, W. H. & Toomre, A. 1966, *Astrophysical Journal*, 146, 810
- Kallenrode, M.-B. 2004, *Space Physics: An Introduction to Plasmas and Particles in the Heliosphere and magnetospheres* (Berlin: Springer-Verlag)
- Karpen J. T., Antiochos S. K., Dahlburg R. B., & Spicer D. S. 1993, *Astrophysical Journal*, 403, 769
- Kato, M. T., Fujimoto, M., & Ida, S. 2010, *Astrophysical Journal*, 714, 1155

- Kato, M. T., Nakamura, K., Tandokoro, R., Fujimoto, M., & Ida, S. 2009, *Astrophysical Journal*, 691, 1697
- Keppens, R. & Tóth, G. 1999, *Physics of Plasmas*, 6, 1461
- Kinney, R. M., Chandran, B., Cowley, S., & McWilliams, J. C. 2000, *Astrophysical Journal*, 545, 907
- Krall, N. A. & Trivelpiece, A. W. 1973, *Principles of plasma physics* (New York: McGraw-Hill)
- Kunz, M. W. 2008, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 385, 1494
- Kunz M. W. & Balbus S. A. 2004, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 348, 355
- Lau, Y. Y. & Liu, C. S. 1980, *Physics of Fluids*, 23, 939
- Lesur, G. & Longaretti, P.-Y. 2005, *Astronomy & Astrophysics*, 444, 25
- Lesur, G. & Longaretti, P.-Y. 2007, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 378, 1471
- Livio M. 1999, *Physics Reports*, 311, 225
- Mac Low, M.-M., Norman, M. L., Königl, A., & Wardle, M. 1995, *Astrophysical Journal*, 442, 726
- Mahajan, S. M, Mininni, P. D., & Gómez, D. O. 2005, *Astrophysical Journal*, 619, 1014.
- Malagoli, A., Bodo, G., Rosner, & R. 1996, *Astrophysical Journal*, 456, 708
- Mao, S. A., Psaltis, D., & Milsom, J. A. 2009, *Astrophysical Journal*, 703, 717
- Matsumoto, R., & Tajima, T. 1995, *Astrophysical Journal*, 445, 767
- Meier, D. L., Koide, S., & Uchida, Y. 2001, *Science*, 291, 84
- Micono, M., Bodo, G., Massaglia, S., Rossi, P., Ferrari, A., & Rosner, R. 2000, *Astronomy & Astrophysics*, 360, 795
- Mininni, P. D., Gómez, D. O., & Mahajan, S. M. 2002, *Astrophysical Journal*, 567, L81
- Mininni, P. D., Gómez, D. O., & Mahajan, S. M. 2003a, *Astrophysical Journal*, 584, 1120

-
- Mininni, P. D., Gómez, D. O., & Mahajan, S. M. 2003b, *Astrophysical Journal*, 587, 472
- Miura, A. & Pritchett, P. L. 1982, *Journal of Geophysical Research*, 87, 7431
- Morales, L. F., Dasso, S., & Gómez, G. G. 2005, *Journal of Geophysical Research*, 110, A04204
- Mouschovias T. Ch., & Ciolek G. E. 1999, *Magnetic Fields and Star Formation: A Theory Reaching Adulthood in *The Origin of Stars and Planetary Systems**, Lada C. J. & Kylafis N. D. (Eds.), 350, 35 (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers)
- Mozer, F. S., Bale, S. D., & Phan, T. D. 2002, *Physical Review Letter*, 89, 015002
- Mukhopadhyay, B. 2006, *Astrophysical Journal*, 653, 503
- Muslimov, A. G 1994, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 267, 523
- Narayan, R., Goldreich, P., & Goodman, J. 1987, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 228, 1
- Norman, C., & Heyvaerts, J. 1985, *Astronomy & Astrophysics*, 147, 247
- Ogilvie, G. I. & Pringle, J. E. 1996 *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 279, 152
- Opp, E. N. & Hassam, A. B. 1991, *Physics of Fluids B*, 3, 885
- Paardekooper, S.-J. 2009, *Astronomy & Astrophysics*, 506, L9
- Pandey, B. P., & Wardle, M. 2008, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 385, 2269
- Potekhin, A. Y. 1999, *Astronomy & Astrophysics*, 351, 787
- Pringle, J. E. 1981, *Annual Review of Astronomy & Astrophysics*, 19, 137
- Pringle J. E. 1989, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 236, 107
- Regev, O. & Umurhan, O. M. 2008, *Astronomy & Astrophysics*, 481, 21
- Rüdiger, G., & Kitchatinov, L. 2005, *Astronomy & Astrophysics*, 434, 629
- Rüdiger, G., & Shalybkov, L. 2004, *Physical Review E*, 69, 016303

- Salmeron R. & Wardle M. 2005, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 361, 45
- Sano T. & Miyama S. M. 1999, *Astrophysical Journal*, 515, 776
- Sano T. & Miyama S. M., Umebayashi, T., & Nakano, T. 2000, *Astrophysical Journal*, 543, 486
- Sano, T., & Stone, J. M. 2002a, *Astrophysical Journal*, 570, 314
- Sano, T., & Stone, J. M. 2002b, *Astrophysical Journal*, 577, 534
- Shalybkov, D. A., & Urpin, V. A. 1997, *Astronomy & Astrophysics*, 321, 685
- Shu, F. H., Lizano, S., Galli, D., Cai, M. J., & Mohanty, S. 2008, *Astrophysical Journal*, 682, L121
- Smith, D., Ghosh, S., Dmitruk, P., & Matthaeus, W. H, 2004, *Geophysical Research Letters*, 31, 02805
- Sorathia, K. A., Reynolds, C. S., & Armitage, P. J. 2010, *Astrophysical Journal*, 712, 1241
- Spangler, S. R. 1999, *Small Scale Structure and Turbulence in the Interstellar Medium in *Interstellar Turbulence**, Franco, J. & Carraminana, A. (Eds.), 1, 41 (Cambridge: Cambridge University Press)
- Spruit, H. C. 2010, *Lecture Notes in Physics*, 794, 233
- Tajima, T., Cable, S., Shibata, K., & Kulsrud, R. M. 1992, *Astrophysical Journal*, 390, 309
- Tevzadze, A. G., Chagelishvili, G. D., Zahn, J.-P., Chanishvili, R. G., & Lominadze, J. G. 2003, *Astronomy & Astrophysics*, 407, 779
- Umurhan, O. M., & Regev, O. 2004, *Astronomy & Astrophysics*, 427, 855
- Urpin, V. 2003, *Astronomy & Astrophysics*, 404, 397
- Velikhov, E. P. 1959, *Soviet Physics JETP (Journal of Experimental and Theoretical Physics)*, 9, 995 [Zh. Éksp. Teor. Fiz., 36, 1398]
- Viallet, M. & Baty, H. 2007, *Astronomy & Astrophysics*, 473, 1
- Visser, R. & Dullemond, C. P. 2010, *Astronomy & Astrophysics*, 519, A28
- Wanex, L. F., Sotnikov, V. I., & Leboeuf, J. N. 2005, *Physics of Plasmas*, 12, 042101
- Wanex, L. F. & Tendeland, E. 2007, *Astrophysics & Space Science*, 307, 83

-
- Wardle, M. 1999, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 307, 849
- Wardle M., Königl A. 1993, *Astrophysical Journal*, 410, 218
- Wardle, M. & Ng, C. 1999, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 303, 239
- Watson C., Zweibel E. G., Heitsch F., & Churchwell E. 2004, *Astrophysical Journal*, 608, 274
- Wisdom, J. & Tremaine, S. 1988, *Astronomical Journal*, 95, 925
- Yakovlev, D. & Urpin, V. A. 1980, *Soviet Astronomy*, 24, 303 [A.Zh., 57, 526]
- Yecko, P. A. 2004, *Astronomy & Astrophysics*, 425, 385
- Zweibel, E. G. 1988, *Astrophysical Journal*, 329, 384
- Zweibel, E. G. 2002, *Astrophysical Journal*, 567, 962