Producción de partículas en colisionadores hadrónicos

Cieri, Leandro Javier

2012

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

Producción de partículas en colisionadores hadrónicos

Trabajo de Tesis para optar por el título de Doctor
de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Físicas

por ***Lic. Leandro Javier Cieri***

Director de Tesis: Dr. Daniel de Florian

Consejero: Dr. Rodolfo Sassot

Lugar de Trabajo: Depto. de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA

18 de diciembre de 2012

Resumen

El presente trabajo versa sobre el cálculo de secciones eficaces para colisionadores hadrónicos. La motivación principal, que constituye el eje de esta tesis, es la de realizar tales cálculos con la mayor precisión posible. En particular incrementar para diversos procesos la precisión hasta ahora disponible de los mismos, cuando se le calculan las correcciones de QCD (*Quantum ChromoDynamics*) radiativas correspondientes.
El método utilizado para tales propósitos, que permite lidiar con procesos cuyo estado final no posea *color* (producción de pares de leptones, bosones vectoriales, bosones de Higgs, etc), es una variante del *método de sustracción* y posibilita el cómputo de observables numéricamente de forma libre de divergencias infrarojas. Para cancelar tales divergencias nos valemos del comportamiento universal de las distribuciones asociadas en momento transverso (q_T) en la región de q_T pequeño. Este método es ilustrado de forma general en el presente trabajo hasta el *next-to-next-to-leading order* (NNLO) en teoría de perturbaciones de QCD, y requiere, por lo tanto, del conocimiento de los coeficientes *hard-collinear* a NNLO ($\mathcal{H}^2$), de las contribuciones logarítmicas resumadas a todo orden a pequeño momento transverso q_T.
En esta tesis se calculan explicitamente los coeficientes $\mathcal{H}^2$ a NNLO, para el caso de producción de bosones vectoriales (Drell-Yan) y de producción de par de fotones (di-fotones), como así también la forma general de tal coeficiente que permite calcularlo para cualquier proceso cuyo estado final no posea color. De esta forma la variante del método de sustracción presentada queda completamente especificada a NNLO, siendo así utilizable por el resto de la comunidad, para cualquier observable que no posea color en su estado final.
Se consideran dos aplicaciones explícitas del método de sustracción a NNLO: el proceso de Drell-Yan y la producción de di-fotones, principal señal de fondo en la producción del bosón de Higgs. Estas dos aplicaciones constituyen el aporte fundamental de esta tesis, siendo el caso de producción de di-fotones el primer cálculo para procesos en colisiones hadrónicas cuyo estado final está compuesto de dos partículas a un nivel de precisión NNLO.
En el caso particular de producción de par de fotones, la precisión NNLO es esencial e inevitable para comprender la fenomenología de este proceso de forma satisfactoria. Tarea esencial en la actual búsqueda del bosón de Higgs y futuros estudios.
Estos cálculos fueron implementados en sendos programas de tipo Monte Carlo. Estos programas permiten al usuario aplicar cortes cinemáticos arbitrarios sobre la física del estado final y calcular las correspondientes distribuciones en la forma de histogramas.

Palabras clave:QCD, difotones, sustracción, NNLO, Drell–Yan, coeficientes hard-collinear.

Abstract

Particle production in hadron colliders.

In this Thesis we show and explain cross sections calculations in hadron collisions. The main aim here is to perform these calculations in the best way possible, with the highest precision. In particular, our aim is to consider benchmark processes and apply our subtraction method to increment the precision available in the literature, calculating their QCD (*Quantum ChromoDynamic*) corrections. The method implemented in such calculations was the transverse momentum (q_T) subtraction method which allows to deal with final states which are colorless (lepton pair production, boson pair production, Higgs boson production, associated Higgs production, etc). The virtue of our method is its capability to offer counter-terms to cancel the singularities that appear in the reals emission contributions to the total cross section exploiting the universal behaviour of the matrix elements in the small-q_T limit. This method is illustrated in the present Thesis up to the next-to-next-to-leading-order (NNLO) of accuracy in perturbative QCD. Therefore, due to the order of accuracy implemented we need the hard-collinear coefficients at the same order of precision ($\mathcal{H}^2$). In the present Thesis are calculated the hard-collinear coefficients up to NNLO in the case of the Drell–Yan process and the diphoton production in hadron collisions. To calculate the hard-collinear coefficient in the case of diphoton production was necessary the deduction of a new general and universal method to extract such coefficients. In this sense, the transverse momentum subtraction formalism acquires its final and complete form. And now is possible to use this new method to extract the $\mathcal{H}^2$ coefficient for any class of colorless process up to NNLO.

We'll show two explicit implementations of the transverse momentum subtraction method up to NNLO: the Drell–Yan process and the diphoton production, which is the main background in recent Higgs boson searches. These are the main contributions of this Thesis, and the case of diphoton production is the first calculation with two particles in the final state at the NNLO accuracy. Even more, the NNLO accuracy for this process is essential and inevitable to understand the phenomenology related to this process. Crucial task in current Higgs boson searches and studies.

Both calculations were implemented in parton level Monte Carlo codes. The programs allow the user to apply arbitrary kinematical cuts on the final-state photons and the associated jet activity, and to compute the corresponding distributions in the form of bin histograms.

Keywords:QCD, diphoton, subtraction, NNLO, Drell–Yan, hard-collinear coefficients.

A los Abuelos Juan y Ninín,
a Papucho y Mamucha, a Ali
y a Yami.

Agradecimientos

Escribir esta sección (casi siempre la última en ser escrita) no sólo expresa la gratitud que me invade al pensar quienes de alguna u otra forma contribuyeron a este trabajo, sino que constituye un adiós.

Mientras recordaba estos años pasados, volvían de la memoria los personajes que voy a extrañar en esta nueva etapa que comienza lejos de mi Universidad, de sus aulas, pasillos, tilos y de su gente. Estos párrafos son entonces el saludo final (ojalá un hasta pronto...), el abrazo fuerte que guardaré conmigo para siempre y que estas líneas tratarán de salvar del olvido.

Recordar... del latín recordis: *volver a pasar por el corazón.*

La mayor parte de esta tesis fue realizada en la casa de mis abuelos (la casa de los abuelos). Casa que siento mía aun, aunque el lugar físico en el que vivo ya sea otro. Quiero rescatar del olvido los mates sin fin que me hacía el abuelo Juan cuando me quedaba trabajando hasta la madrugada y las comidas (de otro mundo) y meriendas de la abuela Ninín. Gracias por enseñarme a hacer las cosas bien por el sólo hecho de hacerlas bien y con compromiso. Ojalá mis manos algún día hagan algo semejante a levantar dos colegios de la nada. Y gracias por sobre todas las cosas, por la pasión por el mar.

A los queridos Viejos: Papuchin y Mamucha, que me acompañaron en el difícil proceso de crecer (a veces a los golpes). Trabajar en su compañía, frente al mar (donde gran parte de este trabajo fue realizado) en el depto o en el patio de la casita con el ruido de las olas de fondo, es la imagen de la paz que tengo y tendré.

A Ali, mi hermanita, mi compañera incondicional. Esta tesis es para vos también Negra; la imposibilidad de elegir algo para contar en estas líneas es el signo de que hemos compartido todo. Gracias por haberme hecho sentir menos solo en algunos momentos.

A Daniel, por haberme enseñado a trabajar y básicamente por sus consejos dados con insistencia y tenacidad inclaudicable. No tengo como pagar todo lo que me ha ayudado y sigue ayudándome. Gracias por darme en los momentos propicios los `pjzs` que necesitaba; es la enseñanza que me llevo y que, estoy convencido, tiene más valor que cualquier otro conocimiento técnico.

Al Tano, por ser el compañero de senda de todos estos años, por compartir la búsqueda. Se que caminamos juntos aun a la distancia. La Montaña, como así también la física, el Mar y su poder no son los mismos después de todos estos años. Porque tengo la certeza de que nuestro entendimiento escapa a las palabras y así el espíritu descansa.

Al Flaco, por haberme acompañado todos estos años con su amistad, porque es una persona buena; y esta cualidad en él siempre me inspiró y me dio fuerza.

A Javi y Hernán (Rata). Gracias por ser mis amigos, por hacerme reír, y por saber que cuento siempre con su ayuda. Por haberme guiado en los primeros pasos en el arduo mundo de la programación.

A mis grandes amigos de la Facu: Chechu, Lau, Tom, Pablo (Pelado), Pedro, Tom, Yann,

Diego (Vitamina), Diego (Capitán), Diegote, La Vieja y Pablo (Germánico). Por haber compartido la vida dentro de la Facu, los momentos buenos y los malos; y por haber estado siempre dispuestos a darme una mano, aun cuando no pedía nada.

A Germán, Juani y Pía, por las infinitas charlas de Física y por estar dispuestos siempre a ayudarme; por el trabajo compartido.

A Rolo y Ricardo por estar siempre dispuestos a aconsejar, charlar y ayudar. Por tratarme bien y con amabilidad y buena onda. Porque se que puedo recurrir a ellos ante cualquier duda.

A la gente de la Universidad de Buenos Aires, mi Universidad, y al pueblo argentino, Argentina, ya que gracias a él tuve un sueldo para realizar mi pasión y mi sueño.

A Fer y Seba, mis grandes amigos del barrio, del colegio y de toda la vida. Que conozco desde que éramos unos pibes roñosos que le tirábamos piedras a los colectivos.

A los chicos de la secundaria: Damián, Javi (Gorda), Coco, Leo, Andrés, por la amistad de todos estos años, por poder seguir compartiendo aun a la distancia.

A Stefano. Gracias por ser un padre (un babbo) aquí en Firenze. Por llevarme al hospital cuando estuve *medio muerto*, por la ayuda y buena onda de todos los días. Por Barberino, Bilancino y los almuerzos en familia. Quiero agradecer algo aquí que por mi incapacidad de expresarme o por no hallar el modo no pude hacer desde los agradecimientos en papers y proceedings. "*I would like to thank Stefano Catani for helpful comments*" queda muy corto (es de maraca dirían en Villa Sarmiento). Lo que debería haber dicho es: gracias por leerme los papers y proceedings aun cuando no eras uno de los autores; por reescribir partes por completo de los mismos y porque con toda tu amabilidad, buena onda y respeto, tus correcciones no llevan la pesada carga del error cometido. Por dudar de tus ideas y recomendaciones, aun cuando vos y yo sabemos con férrea seguridad que tenés razón.

A Gianca. Por haber compartido todo el trabajo de esta tesis, por ser mi amigo y estar dispuesto a ayudarme siempre.

A Massi por abrirme las puertas de su casa, y darme todo lo que había dentro. Por seguir trabajando juntos.

A los *ragazzi* del INFN de Firenze: Dario, Gianluca, Antonio, Fede y Pipo. Por integrarme ni bien llegué. Por acompañarme todos los días a *prendere il pranzo* y hacerme reír.

A Antonella (desde Italia) y Mariano, por aliviar y ayudarme a hacer los trámites con buena onda, todos los días.

El último lugar también es un lugar especial. Es el cierre de la despedida y como tal una mirada al presente y los años que vienen.

Gracias Yami por haberme elegido y por elegirme para los años que vienen. Sos la fuerza de todos los días, ahora que me toca estar solo aquí. Dudo haber podido trabajar tanto sin la fortaleza que confiere el saber que estás en algún lugar. Gracias por ponerte el despertador a las tres de la matina para saludarme antes de cada viaje que hago. Aun cuando después debés despertarte a las cinco, para ir a trabajar al CBC. No se si lo dije o no, pero esa clase

de gestos podrían parecer tonterías, cuando en verdad tienen un valor infinito. Podría seguir enumerando hechos, aunque no creo que sea el lugar para hacerlo. Gracias por hacerme saber que en algún lugar estás mirando para aquí.

18 de diciembre de 2012 Firenze

Que así el hombre mantenga lo que de niño prometió.

Frederich Hölderlin

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El objetivo central de esta tesis es proveer las herramientas necesarias para posibilitar el cálculo de secciones eficaces en la forma más precisa que sea posible, ya que la alta luminosidad[1] de los experimentos actuales garantiza una precisión experimental al nivel *porcentual* en el LHC[2] (*Large Hadron Collider*) y precisiones mayores en los posibles aceleradores futuros como el ILC[3] (*International Linear Collider*). Las mediciones experimentales de alta precisión deberán ser comparadas con predicciones teóricas al mismo nivel de incerteza[1, 2]. En teoría cuántica de campos perturbativa, esta tarea requiere la evaluación de contribuciones de orden superior, las llamadas *correcciones radiativas*, hasta el orden de precisión de interés. Estas correcciones requieren de técnicas altamente no triviales de cálculo, tanto para la obtención de los elementos de matriz, como en su empleo en códigos numéricos para simular el cálculo de los distintos observables de interés. Ellas juegan un papel estelar en la búsqueda del bosón de Higgs y de señales directas de nueva física, que pueden ser aisladas de la señal de fondo (*background*, en inglés) del Modelo Estándar (SM, por sus iniciales en inglés: Standard Model), sólo si este último se conoce con la suficiente precisión.

Nos encontramos en una época fascinante para el estudio de la física de partículas. Los análisis finales del acelerador Tevatron, en Fermilab (Chicago, EE.UU), y los nuevos datos que nos está brindando el LHC, no solamente nos proveen más datos de los que jamás hemos podido contar, sino que se decidirá en breve uno de los temas centrales de la física de partículas: la existencia del bosón de Higgs, la única partícula del SM, que no ha sido detectada (de forma directa o indirecta) en experimento alguno hasta el día de hoy (ver nota al pie[4]). Es decir se podrá clarificar la naturaleza de la ruptura espontánea de simetría electrodébil,

[1] La luminosidad es el número de partículas, en un haz, por unidad de superficie y por unidad de tiempo.

[2] En español: Gran Colisionador de Hadrones, en el CERN, Suiza.

[3] En español: Colisionador Lineal Internacional.

[4] Los resultados presentados el 4 de julio por las colaboraciones ATLAS [3] y CMS [4] que afirman la espectacular observación de un nuevo bosón neutro, están en acuerdo con la señal esperada para el bosón de Higgs del Modelo Estándar. No obstante deberán realizarse nuevos estudios para inferir su espín, sus acoples a otras partículas, etc. De esta manera y finalmente podrá afirmarse que se trata del bosón de Higgs del Modelo Estándar.

el mecanismo por el que las partículas del SM adquieren masa[5].

Además del gran interés sobre el bosón de Higgs y las posibles señales que delaten la existencia de nueva física, diversos procesos del SM mantienen su papel central aunque no constituyan, normalmente, ningún acontecimiento novedoso en sí mismo. Los procesos como el de *Drell-Yan* (creación de bosones vectoriales, como el Z o el W), eventos de *jets*, creación de pares de quarks $t\bar{t}$, producción de *W/Z+jets*, producción de fotones y di-fotones directos, producción de fotones más un jet, etc, por diversos motivos siguen atrayendo gran interés, de manera que los cálculos teóricos de éstos, continúan refinándose constantemente, para acompañar las mediciones cada vez más precisas de los mismos.

En esta tesis se estudian en detalle dos procesos de gran interés y se alcanza en ambos la mayor precisión con la que se puede contar en la actualidad. Se estudian los procesos de Drell-Yan y la producción de di-fotones a *next-to-next-to-leading-order*[6] en teoría de perturbaciones de la cromo-dinámica cuántica[7], QCD (*Quantum ChromoDynamics*).

1.1. QCD perturbativa en la era del LHC

La aproximación en teoría de perturbaciones de QCD para calcular secciones eficaces hadrónicas está basada en el marco del modelo partónico. De acuerdo a este modelo, la sección eficaz para cualquier proceso de *hard-scattering*[8] puede ser escrita como la convolución de funciones de distribución $f_a(x, Q^2)$ y de fragmentación $d_a(x, Q^2)$ de partones (a = quarks, gluones) con la sección eficaz *hard*. Tanto $f_a(x, Q^2)$ como $d_a(x, Q^2)$ son cantidades no perturbativas pero universales, es decir independientes del proceso. Y la sección eficaz hard está en cambio dominada por regiones de momento del orden de Q, y ya que $Q \gg \Lambda_{QCD}$ (donde Λ_{QCD} es la escala de QCD), esta puede ser computada en teoría de perturbaciones a orden más bajo en la constante de acople de QCD, $\alpha_s(Q) \approx (\beta_0 \ln Q^2/\Lambda^2_{QCD})^{-1}$.

Esta visión *naïve* del modelo de partones constituye la aproximación a orden más bajo (LO, por las iniciales de: *leading-order*). Ésta queda justificada por el comportamiento de $\alpha_s(Q)$ a grandes valores de momento transferido Q. Sin embargo y justamente por su carácter perturbativo, la variación de la constante de acople de QCD, puede manifestarse en las correcciones a orden más alto; basta notar: $\alpha_s(Q) = \alpha_s^{(0)}(\mu)(1 + K(Q/\mu)\alpha_s(Q/\mu) + \cdots)$, donde $\alpha_s^{(0)}(\mu)$ es el valor de $\alpha_s(Q)$ a una escala de momento fija y arbitraria μ. Se sigue de aquí que según el valor que adquiera $K(Q/\mu)$, un cálculo a LO puede predecir únicamente el orden de magnitud[9] de una dada sección eficaz y las propiedades y características a grandes rasgos de los observables asociados. La precisión de la expansión perturbativa de QCD es en cambio controlada por el tamaño de las contribuciones a orden más alto. Por este motivo (y otros que se detallan en las secciones siguientes) es que necesitamos las correcciones de QCD

[5] Además esta construcción teórica es de vital importancia en cuanto al carácter predictivo del SM, ya que esta representa la única forma de acomodar las masas de los bosones de gauge y de los fermiones dentro del modelo, sin arruinar su renormalizabilidad.

[6] Próximo orden, al orden siguiente al dominante.

[7] Es la teoría que rige las interacciones fuertes entre las partículas, que son las dominantes, en los colisionadores hadrónicos.

[8] Colisiones con grandes cantidades de momento transferidos Q. Un proceso *hard*, es aquel donde hacemos uso de una expansión perturbativa en la constante de acople fuerte α_s.

[9] Y a veces, como se verá en esta tesis, el LO de un proceso es un orden inferior al NNLO, por ejemplo.

a órdenes superiores.

Los colisionadores hadrónicos actuales no han sido diseñados para estudiar de forma refinada QCD, sino que la motivación principal de los mismos está centrada en el descubrimiento del bosón de Higgs y la búsqueda de nueva física.
A grandes rasgos hay dos formas de realizar descubrimientos en el LHC [5]. Por un lado, algún experimento puede efectuar una medición de cierta distribución de una variable cinemática y observar una discrepancia respecto de lo que se espera según el SM. Esto sólo puede ser considerado un descubrimiento si la predicción del SM tiene la suficiente precisión; inevitablemente involucrando diversos aspectos propios de QCD, tales como las distribuciones de partones (PDF, según las iniciales de: *Parton Distribution Functions*), elementos de matriz, lluvia de partones (*parton showers*), etc. De forma alternativa podemos hacer un descubrimiento a través de la observación de una estructura cinemática distintiva, tal como un pico en una distribución de masa invariante. Si bien podría objetarse que QCD juega un papel menos preponderante en tales cuestiones, rápidamente podemos entender que no es así, si pensamos que entendiendo, cómo QCD opera y funciona, podemos reducir de manera significativa backgrounds y hacer más evidentes los picos en la estructura cinemática de la señal, permitiendo entonces, emerger de manera más convincente, la señal de interés por sobre la señal de fondo. Más aun, si eventualmente surgen descubrimientos, QCD puede ser crucial también al permitirnos extraer información acerca de los nuevos objetos que han sido encontrados: sus constantes de acople, masas, espines, etc.

1.1.1. Generadores de eventos tipo Monte Carlo

Es difícil concebir la simulación del estado final de un experimento (como uno del LHC) sin la utilización de códigos numéricos de tipo Monte Carlo. Y no es sencillo mejorar la precisión de cálculo de los mismos.

La forma de incrementar sistemáticamente la precisión de estos cálculos de QCD a altas energías es la de usar aproximaciones perturbativas, involucrando la expansión en serie, en la constante de acoplamiento fuerte α_s, es decir las secciones eficaces son escritas $\sigma = c_0 + c_1\alpha_s + c_2\alpha_s^2 + \cdots$, de manera que la mejora en la precisión se logra por el cálculo del coeficiente próximo en la serie.

1.1.2. NLO

A escalas de momento y energía relevantes para el LHC ($\alpha_s \simeq 0{,}1$), esperaríamos cálculos a orden más bajo en teoría de perturbaciones[10], cuya precisión sea aproximadamente del 10 %. Sin embargo la experiencia demuestra que rara vez esto sucede, siendo usual que las correcciones siguientes al orden más bajo (NLO, de la iniciales de la frase en inglés *next-to-leading-order*) modifiquen a las secciones eficaces por un factor "K = NLO/LO" cercano a dos (por ejemplo para producción de Higgs [6, 7, 8] o $Wb\bar{b}$ [9, 10]). En algunas situaciones extremas, en las que un nuevo canal abre a NLO, el factor K puede ser mucho más grande, tanto como $\mathcal{O}(100)$ [11, 12, 13]. Este incremento a NLO es de importancia fundamental ya que por ejemplo en búsqueda de señales de supersimetría son usuales factores de exceso

[10] Es decir el primer término distinto de cero de la expansión en serie.

de $\mathcal{O}(5)$ por sobre el background (ver por ejemplo Ref. [14]), siendo estas señales de fondo calculadas en la mayoría de los casos a LO. Entonces, ¿Cómo podemos determinar cuándo un exceso de datos comparados a LO se trata de señal real o simplemente de background con un factor K inesperadamente alto no calculado hasta el momento? En todas las anteriores situaciones entonces es necesario contar con cálculos a NLO.

Los cálculos a NLO, de n-partículas en el estado final, de un observable constan de dos contribuciones: la corrección virtual a *1-loop*[11] al proceso de producción de n partículas, y la contribución de la radiación real, que es un proceso de producción de $n+1$-partículas. Ambas contribuciones contienen divergencias infrarrojas y pueden ser evaluadas numéricamente solo después de extraer las contribuciones divergentes del proceso de radiación real. Numerosos métodos existen para tratar esta tarea. Los primeros cálculos a NLO datan de finales de la década de 1970. El primer cálculo a NLO, si bien se trató de procesos de $2 \to 1$ partículas, fue el de Drell-Yan en 1979 [15]. Tomó casi diez años alcanzar el NLO para procesos de $2 \to 2$ partículas. Numerosos resultados han aparecido en los finales de la década de 1980 (por ejemplo: producción de di-jets [16, 17], pares de quarks pesados [18, 19, 20], producción de bosones vectoriales más un jet [21, 22]). Y otro diez años más fueron necesarios para lograr el NLO en procesos de $2 \to 3$ partículas, como el caso de $Wb\bar{b}$ [9] en 1998 y el caso de producción de $3-jets$ y $W+2-jets$ [23, 24] algunos años más tarde. Siguiendo la "regla" de diez años por *pata*[12], los primeros cálculos de procesos $2 \to 4$ partículas aparecieron hace un par de años: $W+3-jets$ [25, 26], $Z+3-jets$ [27], $t\bar{t}b\bar{b}$ [28, 29], $t\bar{t}+2-jets$ [30], $W^{\pm}W^{\pm}+2-jets$ [31] y $WWb\bar{b}$ [32, 33].

Es decir, una buena forma de cuantificar la dificultad de un cálculo a NLO es de acuerdo al número de partículas en el estado final e inicial.

1.1.3. NNLO y el estado actual del arte

Unos pocos observables (por ejemplo, secciones eficaces de jets, producción de bosones vectoriales, producción de quarks pesados) están medidos experimentalmente a una precisión del 1 % o menor. Para dar una interpretación teórica de estos observables una descripción a NLO (la cual posee una incerteza residual típica del 10 %) no basta: la extracción de parámetros fundamentales de estos observables estaría limitada por la incerteza teórica. En la actualidad y por algunos años más, la máxima precisión perturbativa a la que se podrá acceder con las técnicas de cálculo disponibles por la comunidad es NNLO, es decir correcciones de $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ respecto del proceso dominante [5]. Hay dos motivaciones fundamentales por las que deberíamos estar interesados en cálculos a NNLO. Por un lado podemos desear extraer información precisa acerca de los acoples del SM o también extraer las distribuciones de partones de las secciones eficaces medidas. O de manera alternativa, si uno debe lidiar con procesos donde las correcciones a NLO son grandes, NNLO constituye el primer orden al cual uno espera hacer predicciones cuantitativamente fiables.

En el caso específico de producción de un par de fotones (que es el tema central de esta tesis), la precisión a NNLO es necesaria para una descripción completa y satisfactoria de

[11] Con *loop*, palabra que en inglés significa lazo, nos referiremos a las correcciones virtuales a un dado proceso. Por ejemplo, correcciones a *un-loop* significa las correcciones virtuales a primer orden en α_s a un dado proceso.

[12] Cuenta como pata, toda partícula en el estado final: partones y bosones electrodébiles.

la fenomenología de este proceso, que no puede brindar el NLO. De manera especial, en aquellas zonas de las distribuciones asociadas donde el NLO es de manera *efectiva* LO[13], es decir en regiones alejadas de la configuración *back-to-back*[14].

Las correcciones a NNLO para procesos de n-partículas en el estado final requieren tres ingredientes: los elementos de matriz a $2-loops$ para el proceso de n-partículas, los elementos de matriz a $1-loop$ para el proceso de $n+1$-partículas y la doble radiación real (procesos de $n+2$-partículas). Cálculos a NNLO para colisionadores hadrónicos están disponibles desde hace algún tiempo, para producción de Higgs, producción asociada WH [34] y bosones vectoriales[15] (el estado del arte de estos códigos puede hallarse en [36, 37, 38, 35]), y recientemente, por primera vez, para procesos de $2 \to 2$, para el caso del principal background del bosón de Higgs, producción de di-fotones[16] [39]. La frontera actual es el caso de inclusión de partículas con *color* en el estado final, como producción de pares $t\bar{t}$ o jets livianos.

Otro resultado significativo reciente es el cálculo a NNLO para producción de Higgs en procesos iniciados por fusión de bosones vectoriales [40], haciendo uso del enfoque de "función de estructura" [41] en el cual cada emisión de un bosón vectorial desde un protón es visto como una reacción de colisión inelástica profunda, DIS (de las iniciales en inglés de *Deep ineleastic scattering*), y luego de forma separada se considera la fusión de los dos bosones. Esto provee un resultado que es perturbativamente estable a nivel del NLO, con una reducción en la dependencia de escalas del $5-10\,\%$ (a NLO) al $2-3\,\%$.

Son varias las dificultades para alcanzar el NNLO. A las contrariedades propias de los cálculos a NLO se le agregan nuevas, exclusivas de este orden. Por un lado tenemos la dificultad inherente en el cálculo de los elementos de matriz a *dos-loops*. Y por otro poseemos el inconveniente de la integración en el espacio de fases de los procesos de doble emisión *real* y el tratamiento sistemático de las divergencias que así surgen. Divergencias que necesitan ser canceladas con aquellas de los diagramas a $1-loop$ y $2-loops$. Cuando el estado final del proceso a considerar no posee partículas con *color*, existe el formalismo de *sustracción* [42](*subtraction*) para tratar a las divergencias de forma sistemática y de manera universal. Sin embargo cuando se consideran partículas con color en el estado final, el estado actual del arte es más precario, en el sentido de que está pobremente sistematizado para cualquier proceso de forma universal.

1.2. Algoritmos de cálculo de secciones eficaces

Los cálculos perturbativos de QCD más allá del LO y su implementación en códigos numéricos que calculan secciones eficaces, poseen las dificultades que se enumeraron en los párrafos anteriores[17]. Esta problemática hace que sea muy difícil hallar un procedimiento o algoritmo que permita su implementación de manera sistemática o de la forma más directa

[13] Y por lo tanto el NNLO es de manera *efectiva* NLO.

[14] Frase en inglés con la que nos referiremos a aquellas configuraciones del espacio de fase, en la que el estado final del proceso sólo posee dos partículas.

[15] Publicación [35] fruto del cálculo que está hecho en esta tesis y se detalla en el capítulo (Capítulo Drell-Yan).

[16] Publicación [39] también que es fruto del cálculo que se detalla en esta tesis y se discute en el capítulo (Capítulo 9).

[17] En la literatura pueden hallarse diversos resúmenes donde se enumera el estado actual del tema. En particular, dos trabajos recientes [43, 5] sintetizan los avances en este tema de forma clara y sencilla.

posible. El origen físico de tales dificultades reside en la necesidad de factorizar las componentes de larga y corta distancia de la sección eficaz y se refleja en la presencia de divergencias en las distintas instancias del cálculo perturbativo. Existen dos tipos de divergencias. Las divergencias ultravioletas, presentes en las contribuciones virtuales, son removidas por las técnicas de renormalización. Las regiones de momento pequeño (*soft*) y de ángulo pequeño (*colineales*) en cambio producen singularidades en las contribuciones reales y virtuales.

A NLO existen básicamente dos tipos de algoritmos para tratar con estas dificultades cuando se calculan, de manera numérica, estas secciones eficaces y observables asociados. Podemos citar como tales algoritmos de cálculo al método de *slicing* [44, 45] y al de sustracción[18] [47]. La diferencia principal entre estos algoritmos y la forma usual de proceder cuando todo el cálculo se realiza de forma analítica, es que en estos métodos numéricos solo parte del cálculo total es hecho analíticamente (sólo aquellas contribuciones que dan a lugar singularidades). Más aun, para un dado proceso, estas contribuciones están computadas de manera independiente del observable. Una vez que el término singular ha sido aislado y la cancelación/factorización de las divergencias ha sido alcanzada, podemos realizar la parte restante del cálculo. En esta instancia uno podría completar el citado cálculo de forma analítica. Pero el uso de técnicas de integración numéricas (usualmente de tipo Monte Carlo) es más conveniente. Primero, porque se puede calcular cualquier número de observables de forma numérica simultáneamente (en forma de histogramas) sin la necesidad de realizar un cálculo analítico para cada observable por separado. Y luego porque utilizando estos algoritmos numéricos es muy sencillo implementar diferentes condiciones experimentales, como cortes cinemáticos, etc. Es decir, tanto el método de *slicing* como el de *sustracción* proveen las bases para la construcción de un programa de tipo Monte Carlo para el cálculo de secciones eficaces arbitrarias a NLO en teorías de perturbaciones de QCD.

El método de *slicing*, como el de *sustracción*, fueron introducidos y usados por primera vez en el contexto de cálculos a NLO de secciones eficaces de tres jets en aniquilaciones de e^+e^-. Luego cuando se observó que las partes divergentes de los elementos de matriz de QCD de emisión real, pueden ser factorizadas utilizando propiedades generales de factorización de radiación soft y colineal [48, 49], los métodos fueron generalizados para su utilización en cualquier proceso, tanto en colisión de leptones [50] como de hadrones [22]. Una variante del método de sustracción es el método dipolar de Catani-Seymour [51], que permite tratar con cualquier número de jets en el estado final, una prescripción general para el trato de procesos con fragmentación y la inclusión de quarks pesados de forma completamente general e independiente del proceso. Existen en la literatura numerosos códigos [32, 52, 53, 54, 55, 39, 56] que utilizan los dipolos universales de este método y paquetes que automatizan el cálculo de los mismos [57, 58].

A NNLO sólo existen en la actualidad dos métodos que han sido exitosos. El método de descomposición en sectores [59, 60, 61] (*sector decomposition*) que está basado en una sistemática descomposición en distribuciones, seguido de la integración numérica sobre pequeños y diferentes sectores del espacio de fases. Por otro lado extensiones de los métodos de sustracción a NLO: el método de sustracción de antenas para procesos de aniquilación e^+e^- [62], y el método de sustracción en momento transverso q_T para colisiones hadrónicas [42]. Además está en desarrollo, una combinación entre ambos métodos que eventualmente podría conducir

[18] Invitamos a la lectura de la Introducción de la Ref. [46] para una descripción elemental sobre las diferencias básicas entre estos dos métodos.

a un método multi-propósito [63].

1.3. Organización y contenido

En esta tesis se presentan los cálculos que conducen a la sección eficaz completamente exclusiva de Drell-Yan (producción de bosones vectoriales) y de difotones a NNLO que han sido publicadas en Ref. [35] y en Ref. [39] respectivamente. El código de tipo Monte Carlo que calcula los distintos observables asociados a la producción de bosones vectoriales se puede hallar en Ref. [55]. Y para el caso de di-fotones el código estará disponible en breve.

El formalismo de sustracción en momento transverso q_T, en el que están basados nuestros códigos, requiere la parte finita de los elementos de matriz a 2-loops (el coeficiente $\mathcal{H}^2$). El método de extracción del coeficiente $\mathcal{H}^2$ a partir de los elementos de matriz a 2-loops se detalla en Ref. [64], donde además se lo utiliza para hallar el $\mathcal{H}^2_{Higgs}$ para el caso de producción de Higgs a través de fusión de gluones. La extracción del coeficiente $\mathcal{H}^2_{DY}$ para el caso de Drell-Yan forma parte del trabajo presentado en esta tesis [65]. La forma general del coeficiente $\mathcal{H}^1$, es conocida [66], y se extrae de los elementos de matriz a 1-loop. En la Ref. [67], se detalla el método para hallar la forma general del coeficiente $\mathcal{H}^2$ (que es parte del trabajo original de esta tesis), y se lo emplea para calcular el $\mathcal{H}^2$ para el caso de difotones.

El contenido de esta tesis se organiza de la siguiente forma: en el Capítulo 2 se presentan las nociones básicas de QCD, notación y convenciones. En el Capítulo 3 se detalla el formalismo dipolar de Catani-Seymour para el cálculo de secciones eficaces a NLO. En el Capítulo 4 se presenta el formalismo de sustracción en momento transverso q_T, que permite calcular secciones eficaces a NNLO, para estados finales que no posean color. En el Capítulo 5 se deduce el método para extraer el coeficiente $\mathcal{H}^2$ y se lo utiliza para la extracción de $\mathcal{H}^2_{DY}$. En el Capítulo 6 se generaliza el método del capítulo 5, se encuentra la forma general del coeficiente $\mathcal{H}^2$ y se lo utiliza para obtener el coeficiente $\mathcal{H}^2_{\gamma\gamma}$.

En el Capítulo 7 se detalla la fenomenología del proceso de producción de bosones vectoriales a NNLO en teoría de perturbaciones de QCD. En el Capítulo 8 se detalla la fenomenología de la producción de difotones a NLO y se discuten las nociones básicas de la aislación de fotones.

En el capítulo 9 se presenta la fenomenología de la producción de difotones en colisiones hadrónicas a NNLO y se compara la predicción teórica a éste orden de precisión con los datos de mediciones recientes realizadas por el LHC y Tevatron. Se concluye que el NNLO es necesario para entender la fenomenología de este proceso pues soluciona las discrepancias entre la descripción teórica a NLO de los códigos disponibles hasta el momento [68, 69, 54, 52] y los datos publicados recientemente [70, 71, 72, 73, 74].

Cada capítulo puede ser leído de forma independiente; contiene su respectiva introducción y conclusiones.

Capítulo 2

QCD perturbativa

La Cromodinámica Cuántica, o QCD es la teoría de las interacciones fuertes (una de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza) y es en muchos aspectos la más perfecta y menos trivial de las teorías físicas que describen los fenómenos subatómicos. Ésta teoría[1] especifica las interacciones entre los fermiones con carga de color (quarks) y gluones[2] y explica cómo se acoplan para formar estados a los que llamamos hadrones.

QCD es una teoría cuántica de campos no Abeliana (o teoría de Yang-Mills) [75] que consta de dos campos: campos de quarks y de gluones. A diferencia de la electrodinámica cuántica (QED), no se han podido hallar hasta el momento, estados aislados de quark o gluón, en contraposición con los leptones y el fotón.

QCD surge en la década de 1970 como una teoría matemáticamente consistente y es, en la actualidad, uno de los pilares fundamentales del Modelo Estándar de las partículas elementales y sus interacciones.

Una característica fundamental de QCD es la llamada "*libertad asintótica*": la constante de acople efectiva de QCD tiende a cero cuando la distancia entre las partículas interactuantes tiende a cero, y esta propiedad por lo tanto, conduce a sofisticados métodos perturbativos. Comparada con QED, donde los métodos perturbativos (deducidos de primeros principios) proveen predicciones de espectacular precisión, muchos fenómenos aparentemente simples en QCD son altamente no triviales y requieren de técnicas no-perturbativas, tales como simples estados ligados, como el protón o el pión. Aunque los cálculos de *lattice* Monte-Carlo han progresado de manera formidable en los últimos años, estos poseen una precisión limitada y una gama de observables acotada.

Más allá de esta naturaleza no perturbativa de los estados de partícula en QCD, hay un vasto dominio donde los métodos perturbativos pueden ser aplicados a procesos de colisiones para describirlos con precisión.

Constituye el presente breve resumen de QCD, una descripción de estos métodos y su justificación que sirven de base para entender los capítulos siguientes.

[1] Se trata de la componente de SU(3) del Modelo Estándar de partículas de SU(3)×SU(2)×U(1).

[2] Los gluones también portan carga de color a diferencia del fotón que porta carga eléctrica nula.

2.1. Quarks, Gluones y SU(3) de color

El grado de libertad llamado de color, y el principio básico de QCD que establece que la materia hadrónica está compuesta por quarks, son los pilares fundamentales de esta teoría.

La idea de los quarks surge de la necesidad de poseer una manifestación física para $SU(3)$ de sabor ($SU(3)_f$), que se observa en el espectro de masa de los mesones y bariones [76]. En la Tabla 2.1 se muestran las propiedades de los seis quarks conocidos. Se interpreta a

Quark	Carga	Masa	Número bariónico	Isospín
u	+ 2/3	1.7-3.3 MeV/c^2	1/3	+1/2
d	- 1/3	4.5-5.8 MeV/c^2	1/3	- 1/2
c	+ 2/3	1.47-1.83 GeV/c^2	1/3	0
s	- 1/3	101^{+29}_{-21} MeV/c^2	1/3	0
t	+ 2/3	$174{,}7^{+10{,}0}_{7{,}8}$ GeV/c^2	1/3	0
b	- 1/3	$4{,}79^{+0{,}19}_{0{,}08}$ GeV/c^2	1/3	0

Tabla 2.1: *Propiedades de los quarks.*

los bariones como estados de tres quarks. Los quarks, componentes de los bariones, deben tener espín semientero, para poder describir al estado fundamental de las partículas que componen. Los quarks en los bariones de espín 3/2 están entonces en un estado simétrico tanto en la función de onda espacial, como de espín y de $SU(3)_f$. Sin embargo los requisitos de la Estadística de Fermi-Dirac implican la asimetría total de la función de onda. La solución a este dilema se logró con la introducción de un nuevo número cuántico, el grado de libertad de *color*. El índice de color a que puede tener tres ($N_c = 3$) posibles valores distintos (llamados rojo, verde y azul para $a = 1, 2, 3$) etiqueta a la función de onda del quark. De esta manera la función de onda total bariónica es antisimétrica gracias a este nuevo índice.

Podemos clarificar con un ejemplo. Sea el barión con proyección de espín $S_z = 3/2$, Δ^{++} (1230 MeV) cuya resonancia se observa como resultado de colisiones entre piones (π) y nucleones (N). Por sus números cuánticos (inferidos del experimento), la función de onda total resulta simétrica, si escribimos a la componente de sabor y espín de la siguiente forma

$$\Delta^{++} \equiv u \uparrow u \uparrow u \uparrow, \tag{2.1}$$

y si notamos que la parte espacial es simétrica también,debido al hecho de que la partícula está en su estado fundamental. Este resultado, como se sabe, está prohibido por el principio de exclusión de Pauli.
Si tenemos ahora también en cuenta la existencia de carga de color, podemos construir una función de onda total, completamente antisimétrica:

$$\Delta^{++} \equiv \epsilon_{ijk} u_i \uparrow u_j \uparrow u_k \uparrow, \tag{2.2}$$

donde ($i, j, k = 1, \cdots, N_c$) son los índices de color de los quarks u y ϵ_{ijk} es el tensor de Levi-Civita en tres dimensiones.

Como no se observan en la naturaleza estados hadrónicos "exóticos" que posean carga de color debemos agregar una hipótesis extra: *Solo estados sin color pueden existir en la naturaleza*[3]. Entonces como los hadrones son singletes de color, son invariantes ante transformaciones de color.

Numerosas pruebas experimentales verifican la validez de estas hipótesis. Tal vez uno de los test más famosos o más difundido entre los libros de estudio es el de la razón entre la sección eficaz totalmente inclusiva de producción de hadrones en colisiones de electrón-positrón (e^-e^+) y la sección eficaz de producción de partículas puntuales cargadas, como los muones, por ejemplo.

A baja energía el fotón virtual que media la interacción, solo puede producir quarks u, d y s que pueden manifestarse en tres colores distintos. El resultado de esta razón R, es por lo tanto

$$R = 3\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2\right) = 2. \tag{2.3}$$

A energías de centro de masa que satisfagan $E_{cm} = \sqrt{s} \geq 10\text{GeV}$, es posible la producción de quarks c y b también, y entonces obtenemos

$$R = 3\left(2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2\right) = \frac{11}{3}. \tag{2.4}$$

Los datos tomados para R que se muestran en la Figuras (2.1) y (2.1) están en razonable acuerdo con el modelo de quarks de tres colores.

Cabe acotar, que la confirmación de que los hadrones estaban compuestos de partículas puntuales provino de los experimentos clásicos de dispersión inelástica profunda llevados acabo en SLAC [78, 79, 80].

2.2. El Lagrangiano de QCD

La teoría de QCD queda completamente especificada asumiendo el número cuántico de color (la carga de las interacciones fuertes).

Los quarks (componentes de los hadrones) son fermiones de Dirac. Los seis sabores de quarks están agrupados en tres dobletes de $SU(2)_L$

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L \tag{2.5}$$

y seis singletes de $SU(2)_L$, que son las componentes *right* de cada sabor.

La peculiaridad de los quarks, es que tienen carga de color, como adelantamos en la sección anterior. Cada sabor posee tres estados de color diferentes ($N_c = 3$) con masas iguales y la misma carga electrodébil. La interacción de los quarks está mediada por los ocho bosones de gauge (los gluones g) del grupo de $SU(3)_C$ de color, que también poseen carga de color al igual que los quarks. Los quarks pertenecen a la representación fundamental de $SU(3)_C$ mientras que los gluones a la adjunta. La teoría de gauge sobre este grupo no Abeliano es la llamada Cromodinámica Cuántica (QCD), como hemos mencionado en la introducción a este capítulo, y constituye la teoría actual de las interacciones fuertes.

[3] Hipótesis que se conoce como confinamiento de color.

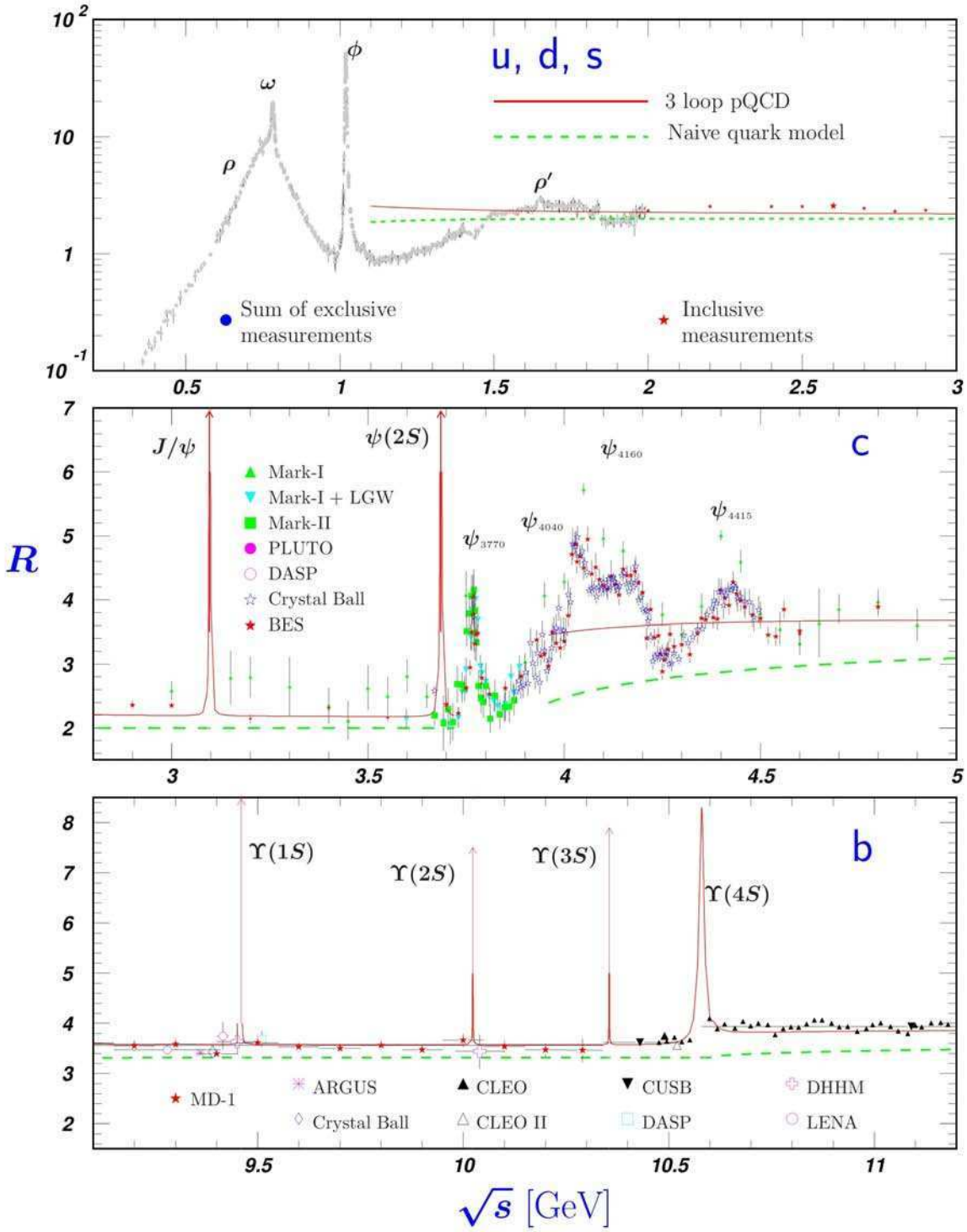

Figura 2.1: *Sección eficaz* $\sigma(e^+e^- \to hadrones)$ *y razón* $R(s) = \sigma(e^+e^- \to hadrones, s)/\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-, s)$ *obtenidas con la totalidad de los datos disponibles [77].* $\sigma(e^+e^- \to hadrones)$ *es la sección eficaz experimental corregida para tener en cuenta radiación desde el estado inicial y correcciones de loop en el vértice electrón-positrón,* $\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-, s) = 4\pi\alpha(s)/3s$. *La curva en verde (a trozos) es la predicción del modelo naive de partones, y la curva sólida, en rojo, es la predicción de QCD a tres-loops.*

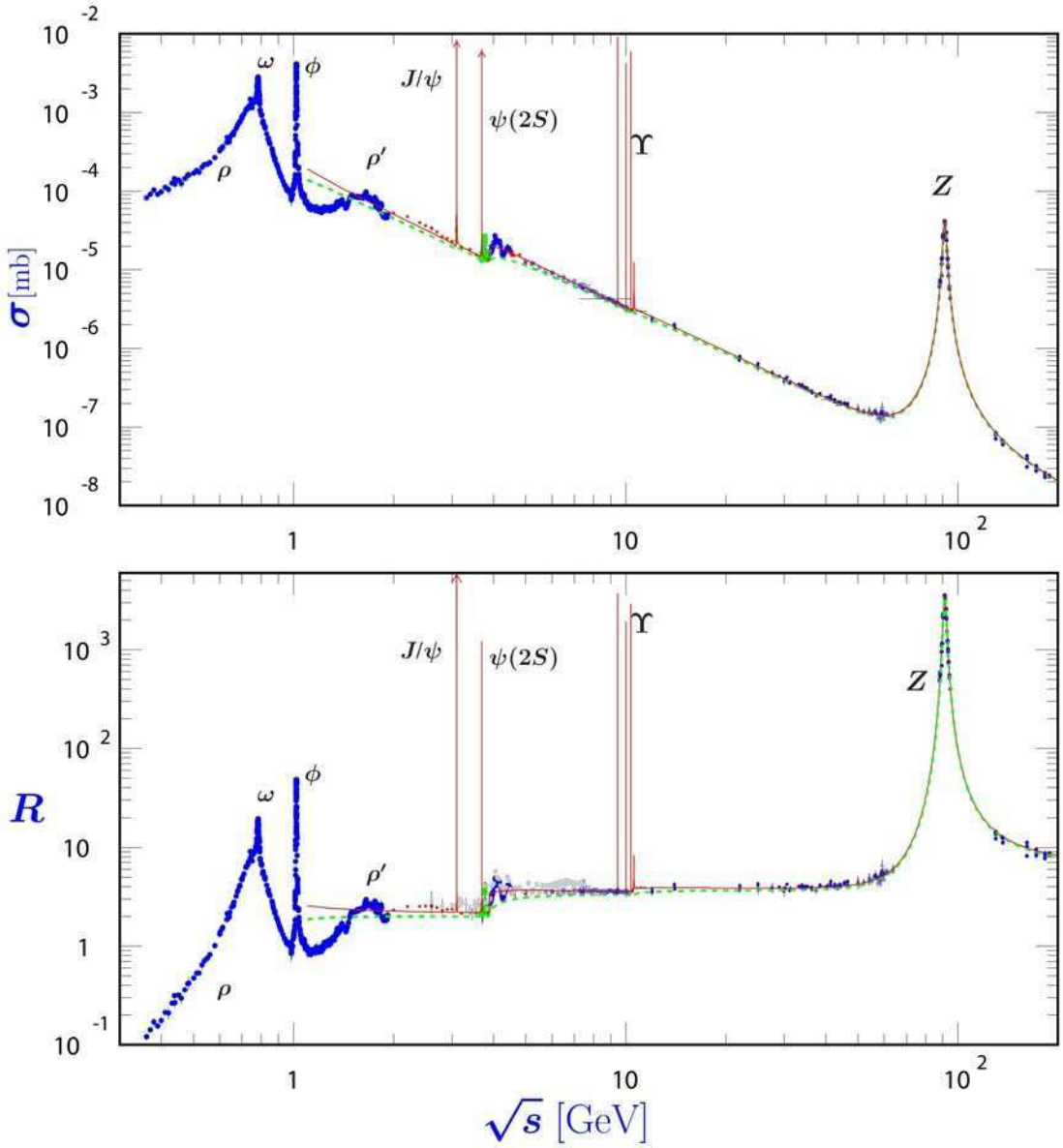

Figura 2.2: *Valores de la razón* $R(s) = \sigma(e^+e^- \to hadrones, s)/\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-, s)$ *[77], en la zona umbral de creación de los quarks c y b. Las curvas son las mismas que en la Fig. (2.1).*

Una transformación de gauge de $SU(3)_C$ de un quark ($q_a(x)$ con $a = 1, 2, 3$) está dada por

$$q_a(x) \rightarrow q'_a(x) = U_{ab}(x) q_b(x) \tag{2.6}$$
$$\bar{q}_a(x) \rightarrow \bar{q}'_a(x) = \bar{q}_b U^\dagger_{ba}(x), \tag{2.7}$$

donde la matriz $U_{ik}(x)$ de 3×3 está en la representación fundamental del grupo de $SU(3)_C$ que actúa sobre un espacio interno definido en cada punto del espacio-tiempo x. Las matrices U satisfacen

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1, \qquad \det(U) = 1. \tag{2.8}$$

Se entiende la suma sobre todos los índices repetidos, y la suma sobre los índices espinoriales se omite por simplicidad. La usual representación exponencial de las matrices de transformación en término de los generadores de $SU(3)_C$ del álgebra correspondiente de $su(3)_C$ es:

$$U(x) = e^{-\frac{i}{2}\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{\lambda}} = e^{-i\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{t}}, \tag{2.9}$$

donde $\vec{\alpha}(x) = (\alpha_1(x), \ldots, \alpha_8(x))$ son los ocho parámetros arbitrarios de la transformación de gauge, $\vec{\lambda}$ son los ocho elementos de la base del álgebra de $su(3)_C$ (o equivalentemente los ocho generadores de grupo) y $\vec{t}$ son los ocho operadores de color. Ellos rigen el hecho por el que la interacción de un gluón con un quark rota el color del quark en el espacio de SU(3).

Una representación posible es la de las matrices de Gell-Mann para la base de $su(3)_C$ en la representación fundamental

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Con estas definiciones, las matrices de color satisfacen las siguientes relaciones

$$[t^A, t^B] = i f^{ABC} t^C \tag{2.11}$$
$$\mathrm{Tr}\,(t^A t^B) = T_R \delta^{AB}, \quad T_R = \frac{1}{2} \tag{2.12}$$

donde a T_R, que es el factor de color asociado a la emisión de un par $q\bar{q}$ por un gluón, se lo toma como la normalización de las matrices de color en la representación fundamental y f^{ABC} son las llamadas constantes de estructura del álgebra de $su(3)_C$, que son completamente antisimétricas en $\{A, B, C\}$. Estas constantes están dadas por:

$$f^{123} = 1, \quad f^{147} = \frac{1}{2}, \quad f^{156} = -\frac{1}{2}, \quad f^{246} = \frac{1}{2}, \quad f^{257} = \frac{1}{2} \tag{2.13}$$
$$f^{345} = \frac{1}{2}, \quad f^{367} = -\frac{1}{2}, \quad f^{458} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f^{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{2.14}$$

Más aun, las constantes de estructura nos proveen de la representación adjunta del álgebra de $su(3)_C$ (que tiene las mismas dimensiones que el álgebra), y satisfacen

$$f^{ACD} f^{BCD} = C_A \delta^{AB} \,, \tag{2.15}$$

donde $C_A \equiv N_c = 3$ es el factor de color asociado con la emisión de un gluón por un gluón. El operador de Casimir C [4], adopta la forma

$$t^A_{ab} t^A_{bc} = C_F \delta_{ac} \,, \tag{2.16}$$

donde

$$C_F \equiv \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \,, \tag{2.17}$$

es el factor de color ("Casimir") asociado con la emisión de un gluón por un quark. En particular, tenemos que los operadores de Casimir están dados (para $N_c = 3$) por

$$C_F = \frac{4}{3}, \qquad C_A = 3 \,, \tag{2.18}$$

para la representaciones fundamental y adjunta, respectivamente.

Ahora mostraremos un ejemplo simple sobre cómo los principios de simetría de gauge (junto con la invarianza de Lorentz) pueden ser utilizados para construir a partir de un lagrangiano *libre*[5] un lagrangiano invariante de gauge con términos de interacción.
Partamos del lagrangiano de Dirac libre para cada campo de quark autoestado de masa y color

$$\mathcal{L}_D(x) = \bar{\psi}_{fa}(x) \left(i \not{\partial} - m_f \right) \psi_{fa}(x), \tag{2.19}$$

donde f es el índice de sabor, a es el índice de color del quark, $\not{\partial} = \gamma_\alpha \partial^\alpha$, y la métrica está dada por $g^{\alpha\beta} = (1, -1, -1, -1)$. Este término no es invariante de gauge. De hecho, bajo las transformaciones de gauge de las Ecs. (2.6,2.9) el lagrangiano libre de Dirac de la Ec. (2.19) transforma como

$$\mathcal{L}_D(x) \to \mathcal{L}_D(x) + \bar{\psi}_{fb} \left[i U^\dagger_{ba}(x) \partial_\mu U_{ac}(x) \right] \gamma^\mu \psi_{fc}(x) \,. \tag{2.20}$$

Para lograr la invarianza de gauge es que introducimos la matriz de campo de gauge $A_{\mu\, ab}(x)$, que posee ocho componentes expandidos en las direcciones del espacio interno de $SU(3)$,

$$A_{\mu\, ab}(x) = t^A_{ab} A^A_\mu \,. \tag{2.21}$$

Asignamos a esta matriz de campo el siguiente término de interacción

$$\mathcal{L}_I(x) = g_s \bar{\psi}_{fa} A_{\mu\, ab} \gamma^\mu \psi_{fb} \,. \tag{2.22}$$

Aquí g_s es la constante de acople fuerte adimensional. Para cancelar el término de rompimiento de simetría de la Ec. (2.20), la transformación de gauge de $A_{\mu\, ab}(x)$ debe ser

$$A_{\mu\, ab}(x) \to U_{ac}(x) A_{\mu\, cd}(x) U^\dagger_{db}(x) - \frac{i}{g_s} \partial_\mu U_{ac}(x) U^\dagger_{cb}(x). \tag{2.23}$$

[4] Es aquel operador definido dentro del álgebra de interés y que conmuta con todos los elementos de ese álgebra.

[5] Sin términos de interacción.

Y por lo tanto, con la introducción del campo de gauge $A_{\mu\,ab}$, la suma $\mathcal{L}_D + \mathcal{L}_I$, es ahora invariante de gauge. Pero aun los campos $A_{\mu\,ab}$ no poseen término cinético. Inspirados por el caso del electromagnetismo agregamos al lagrangiano el término cinético invariante de gauge:

$$\mathcal{L}_G(x) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\left(G_{\mu\nu}(x)G^{\mu\nu}(x)\right), \tag{2.24}$$

donde el tensor de campo del gluón viene dado por

$$G_{\mu\nu\,ab}(x) = \partial_\mu A_{\nu\,ab} - \partial_\nu A_{\mu\,ab} - ig_s\left[A_\mu, A_\nu\right]_{ab}. \tag{2.25}$$

Nótese que el tercer término del tensor de campo es el responsable de las autointeracciones del gluón y que pone de manifiesto el carácter no Abeliano de la teoría. Este término es el que aporta el triple vértice de gluón (de intensidad g_s), y un cuádruple vértice de gluón (de intensidad g_s^2). La forma final del lagrangiano de QCD es obtenida sumando los tres términos que se introdujeron en los párrafos precedentes

$$\mathcal{L}_{QCD}^{\text{clasico}}(x) = -\frac{1}{4}G^A_{\mu\nu}(x)G^{A\,\mu\nu}(x) + \bar{\psi}_{fa}(x)(iD_{\mu\,ab}\gamma^\mu - m_f\delta_{ab})\psi_{fb}(x), \tag{2.26}$$

donde

$$D_{\mu ab} = \delta_{ab}\partial_\mu - ig_s A_{\mu\,ab} \tag{2.27}$$

es la derivada covariante.

2.3. Las reglas de Feynman

La cuantización del lagrangiano clásico de QCD de la ecuación (2.26) puede ser hecho con la prescripción de Fedeev-Popov. Este procedimiento tiene en cuenta el hecho de que la ecuación de movimiento del campo del gluón no puede ser invertida. Se puede probar (ver por ejemplo [81, 82]) que no es posible definir un propagador para el campo de gluón, sin hacer una elección del gauge. Como consecuencia, sin una elección de un gauge particular, que puede ser entendido como una condición extra sobre el campo del gluón, no podemos efectuar un desarrollo perturbativo al lagrangiano de la Ec. (2.26). Para fijar el gauge tenemos dos opciones

1. Gauges físicos: Seleccionan solo dos polarizaciones transversas (en un dado sistema de referencia), por ejemplo:

$$\eta^\mu A^a_\mu = 0\,, \tag{2.28}$$

   elección que se conoce como gauge Axial. Donde η^μ es un cuadrivector arbitrario fijo. Poseen la desventaja de que en los pasos intermedios de cálculo, los términos no son explícitamente covariantes de Lorentz.

2. Gauges covariantes: Se propaga todo el campo A^a_μ (grados de libertad físicos y no físicos). Este enfoque introduce otros campos no físicos (llamados *ghosts*) para cancelar los grados de libertad longitudinales de A^a_μ. Los ghosts interactúan sólo en QCD, en QED desacoplan y pueden ser despreciados.

La elección

$$\mathcal{L}_{\text{gauge-fixing}} = -\frac{1}{2\lambda}\left(\partial^\alpha A^A_\alpha\right)^2 , \tag{2.29}$$

fija la clase de *gauges covariantes* con parámetro de gauge λ. Dos elecciones usuales son el gauge de Feynman, $\lambda = 1$, y el gauge de Landau, $\lambda \to 0$. En los próximos párrafos consideraremos el caso general.

El vínculo de la expresión (2.29) en QCD es no lineal, y entonces es que se deben añadir al lagrangiano partículas ficticias[6], escalares de Lorentz, que anticonmutan y aparecen solo en loops.

En una teoría de gauge no Abeliana, como es el caso de QCD, el término covariante que fija el gauge deberá estar acompañado de un lagrangiano de tipo *ghost*, el cual viene dado por

$$\mathcal{L}_{\text{ghost}} = \partial_\alpha \eta^{A\dagger}\left(D^\alpha_{AB}\eta^B\right) . \tag{2.30}$$

Aquí η^A, el llamado *ghost*, es un escalar complejo, que porta carga de color y que obedece la estadística de Fermi y D^α_{AB} es la derivada covariante en la representación adjunta. La derivación de la forma del lagrangiano de ghost puede realizarse por el formalismo de integrales de camino y los procedimientos de Faddeev y Popov. Los campos de ghost cancelan grados de libertad no físicos los que de otra manera se propagarían en los gauges covariantes. Las Ecuaciones (2.26),(2.29) y (2.30) son suficientes para derivar las reglas de Feynman de la teoría, en un gauge covariante. Las reglas de Feynman se definen a partir del siguiente operador

$$S = i\int d^4x\mathcal{L}(x) \tag{2.31}$$

el cual da la amplitud de transición entre un estado final y uno inicial. La densidad lagrangiana puede separarse en tres contribuciones libres $\mathcal{L}_0$ que normalmente contienen todos los términos bilineales en los campos, y un término de interacción $\mathcal{L}_I$, que contiene todo el resto

$$S = S_0 + S_I,$$

$$S_0 = i\int d^4x\mathcal{L}_0(x), \quad S_I = i\int d^4x\mathcal{L}_I(x) . \tag{2.32}$$

La receta práctica para derivar las reglas de Feynman es que la inversa del propagador se deriva de S_0, mientras que las reglas de Feynman para las partes interactuantes de la teoría, las que son tratadas como perturbaciones, son derivadas de S_I. Los propagadores de quarks y de gluones son obtenidos usando el término libre $\mathcal{L}_0$ del lagrangiano de QCD dado en la Ec. (2.26).

Entonces, por ejemplo, la inversa del propagador del fermión en el espacio de momentos puede ser obtenido haciendo la siguiente identificación: $\partial^\alpha = -ip^\alpha$ para un campo entrante a un vértice. En el espacio de momentos la función de dos puntos del quark depende de un solo momento p. Entonces tenemos

$$\Gamma^{(2)}_{ab}(p) = -i\delta_{ab}(\not{p} - m) , \tag{2.33}$$

[6]Los llamados fantasmas de Fadeev-Popov (*ghosts*).

que es la inversa del propagador dado en la Fig. 2.3. La prescripción $i\epsilon$ para el polo del propagador garantiza la preservación de la causalidad, de manera análoga a QED. Similarmente la inversa del propagador del gluon esta dado por

$$\Gamma^{(2)}_{\{AB,\alpha\beta\}}(p) = i\delta_{AB}\left[p^2 g_{\alpha\beta} - (1-\frac{1}{\lambda})p_\alpha p_\beta\right] . \tag{2.34}$$

Se puede probar que sin el término que fija el gauge esta función no tiene inversa. El propagador del gluón Δ es

$$\Gamma^{(2)}_{\{AB,\alpha\beta\}}(p)\Delta^{(2)\ \{BC,\beta\gamma\}}(p) = \delta^C_A g^\gamma_\alpha \tag{2.35}$$

$$\Delta^{(2)\ \{BC,\beta\gamma\}}(p) = \delta_{BC}\frac{i}{p^2}\left[-g_{\beta\gamma} + (1-\lambda)\frac{p_\beta p_\gamma}{p^2}\right] . \tag{2.36}$$

Reemplazando las derivadas con los momentos apropiados, las Ecs. (2.26), (2.29) y (2.30) pueden ser usadas para derivar todas las reglas de Feynman para los diagramas de la Fig. 2.3. Una lista completa de las reglas de Feynman puede hallarse, por ejemplo en la Ref. [83].

2.4. QCD perturbativa, α_s y libertad Asintótica

En la sección anterior hemos introducido brevemente las reglas de Feynman para QCD. Pero la utilización de las mismas solo tendrá sentido si la expansión en potencias de la constante de acoplamiento fuerte es posible. Es decir sólo si

$$\alpha_s = \frac{g_s}{4\pi}, \tag{2.37}$$

es lo suficientemente pequeña.

Las predicciones hechas por la QCD perturbativa (pQCD) se expresan en término de la constante de acople renormalizada $\alpha_s(\mu_R)$. Una función de una escala no física, de renormalización μ_R. Cuando se toma al valor de μ_R cercano a la escala de momento transferido Q para un dado proceso, entonces $\alpha_s(\mu_R \simeq Q)$ es indicativa de intensidad efectiva de la interacción fuerte en tal proceso.

La teoría no puede predecir el valor de la constante de acople, pero su dependencia en la escala del proceso es predicha por la teoría sin ninguna ambigüedad.

Para introducir el concepto de la variación de la constante de acople fuerte consideremos un observable R adimensional que depende de una sola escala de energía Q, que por hipótesis, es mucho mayor a todos los demás parámetros de los que pueda depender R, tales como las masas de los quarks[7]. En esta situación por ejemplo se encuentra la razón adimensional $R(s) = \sigma(e^+e^- \to hadrones, s)/\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-, s)$ definida en la Sec. (2.1), si consideramos que Q es la energía del centro de masa de los procesos involucrados.

[7] Por lo tanto, estas masas, pueden ser despreciadas.

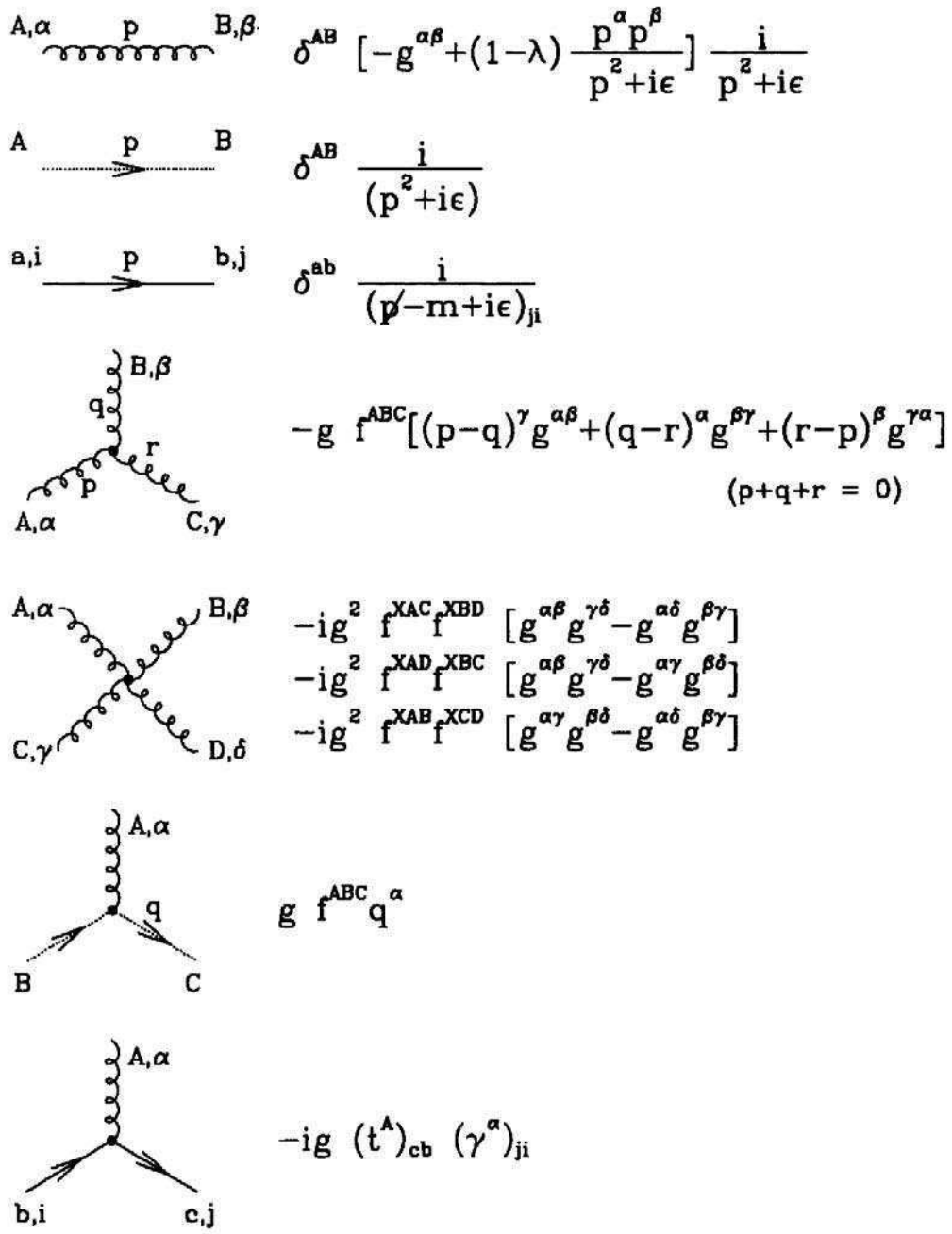

Figura 2.3: *Reglas de Feynman para QCD en un gauge covariante para gluones (líneas con rizos), fermiones (líneas llenas) y ghosts (líneas punteadas). Reglas extraídas del libro de texto [83].*

Podríamos argumentar, realizando un análisis dimensional que R es independiente de Q; ya que R es una cantidad adimensional que depende de una sola variable Q con dimensiones de energía.

Sin embargo este resultado no es cierto en teorías cuánticas de campos renormalizables. El hecho de renormalizar el observable R desarrollado en potencias de la constante de acople fuerte, para remover las divergencias ultravioletas introduce una nueva escala de masa μ_R [8]. R dependerá entonces de la razón Q^2/μ_R^2 y es por lo tanto no constante. Se sigue de este razonamiento que la constante de acople renormalizada α_s también dependerá de la elección hecha del punto de sustracción μ_R. Sin embargo μ_R es un parámetro arbitrario y los observables no pueden depender de tal elección. Ya que R es adimensional, solo puede depender de la razón Q^2/μ_R^2 y de α_s[9], la constante de acople fuerte renormalizada. Matemáticamente, la independencia en μ de R se puede expresar de la siguiente manera

$$\mu_R^2 \frac{d}{d\mu_R} R(Q^2/\mu_R^2, \alpha_s) \equiv \left[\mu_R^2 \frac{\partial}{\partial \mu_R^2} + \mu_R^2 \frac{\partial \alpha_s}{\partial \mu_R^2} \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \right] R \equiv 0 \,. \tag{2.38}$$

Que es una ecuación diferencial de primer orden con la condición inicial ($Q = \mu_R$) $R(1, \alpha_s(\mu_R))$. Esto significa que si encontramos una solución para la Ec. (2.38), ésta es única. Podemos entender entonces, a esta condición inicial, como la necesidad de un valor de referencia para α_s, a una dada escala μ_0 [10].
Podemos escribir a la Ec. (2.38) en una forma más compacta introduciendo la notación

$$t = \ln\left(\frac{Q^2}{\mu_R^2}\right) \,, \quad \beta(\alpha_s) = \mu_R^2 \frac{\partial \alpha_s}{\partial \mu_R^2} \,. \tag{2.39}$$

La derivada de la constante de acople en la definición anterior de la función β se realiza a constante de acople desnuda[11] fija. Podemos reescribir la Ec. 2.38 como

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t} + \beta(\alpha_s) \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \right] R(e^t, \alpha_s) = 0 \,. \tag{2.40}$$

Esta ecuación diferencial en derivadas parciales de primer orden puede ser resuelta simplemente definiendo una nueva función, la constante de acople variable $\alpha_s(Q^2)$:

$$t = \int_{\alpha_s}^{\alpha_s(Q^2)} \frac{dx}{\beta(x)} \,, \quad \alpha_s(\mu_R^2) \equiv \alpha_s \,. \tag{2.41}$$

Diferenciando la Ec. 2.41 vemos que

$$\frac{\partial \alpha_s(Q^2)}{\partial t} = \beta(\alpha_s(Q^2)) \,, \quad \frac{\partial \alpha_s(Q^2)}{\partial \alpha_s} = \frac{\beta(\alpha_s(Q^2))}{\beta(\alpha_s)} \,, \qquad \alpha_s(\mu_R^2) \equiv \alpha_s \,, \tag{2.42}$$

[8] Es el punto en el que se realiza la sustracción que remueve las divergencias ultravioletas.

[9] Recordemos que antes R solo podía depender de Q la energía del proceso, porque estábamos considerando el primer orden no nulo de la expansión. Al tener en cuenta órdenes más altos en la expansión, es que se introduce la dependencia en la constante de acople fuerte α_s.

[10] En la práctica y por razones históricas, esta escala de referencia se elige usualmente $\mu_0 = M_Z$. Donde M_Z es la masa del bosón Z. Esto se debe a que una de las determinaciones más precisas de α_s, proviene de los experimentos en el LEP, al medir secciones eficaces hadrónicas en colisiones e^+e^-[76].

[11] Con la palabra *desnuda* nos referiremos a objetos que no han sido renormalizados.

ya que $R(1, \alpha(Q^2))$ es una solución de la Ec. 2.40. Este análisis muestra que toda la dependencia en escala de R, entra a través de la constante de acople variable $\alpha_s(Q^2)$. Se sigue que el conocimiento de la cantidad $R(1, \alpha(Q^2))$, calculada en teoría de perturbaciones a orden fijo, permite predecir la variación de R con Q si podemos resolver la Ec. 2.41. En la siguiente sección mostraremos que QCD es una teoría asintóticamente libre. Y esto significa que $\alpha_s(Q^2)$ decrece cuando la escala Q crece. Y entonces para una escala suficientemente grande Q, siempre podemos resolver la Ec. 2.41 usando teorías de perturbaciones.

2.4.1. La función β

Para encontrar la forma explícita de la constante de acople fuerte, necesitamos conocer a la función β para poder resolver la Ec. (2.42). La función β puede ser calculada perturbativamente de los contratérminos utilizados en el proceso de renormalización. El conocimiento de la constante de acople a orden α_s^{n+1} requiere de un cálculo a n loops. La expansión perturbativa de la función β está dada por:

$$\beta(\alpha_s) = -\alpha_s \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^{n+1}. \tag{2.43}$$

Hasta el momento, la función β de QCD es conocida a orden α_s^5 [84], donde en el esquema $\overline{MS}$ los primeros cuatro términos pueden escribirse

$$\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}N_f, \quad \beta_1 = 102 - \frac{38}{3}N_f, \tag{2.44}$$

$$\beta_2 = \frac{2857}{2} - \frac{5033}{18}N_f + \frac{325}{54}N_f^2 \tag{2.45}$$

$$\begin{aligned}\beta_3 &= \left(\frac{149753}{6} + 3564\xi_3\right) - \left(\frac{1078361}{162} + \frac{6508}{27}\xi_3\right)N_f \\ &+ \left(\frac{50065}{162} + \frac{6472}{81}\xi_3\right)N_f^2 + \frac{1093}{729}N_f^3,\end{aligned} \tag{2.46}$$

con N_f el número de sabores de quarks, y ξ es la función zeta de Riemann ($\xi_3 = 1{,}202056903\ldots$). La solución a dos loops de la Ec. (2.42) está dada por

$$\begin{aligned}\alpha_s(Q^2) &= \frac{\alpha_s(\mu_R^2)}{1 + (\beta_0/4\pi)\alpha_s(\mu_R^2)\log\frac{Q^2}{\mu_R^2}}\left[1 - \frac{\beta_1}{4\pi\beta_0}\frac{\alpha_s(\mu_R^2)\log(1 + (\beta_0/4\pi)\alpha_s(\mu_R^2)\log\frac{Q^2}{\mu_R^2})}{1 + (\beta_0/4\pi)\alpha_s(\mu_R^2)\log\frac{Q^2}{\mu_R^2}}\right] \\ &+ O(\alpha_s^{k+3}\log^k\frac{Q^2}{\mu_R^2}).\end{aligned} \tag{2.47}$$

Es común en la literatura el uso de otra parametrización de los coeficientes β_n, los cuales se obtienen haciendo el reemplazo

$$\beta_n = b_n(4\pi)^{n+1}. \tag{2.48}$$

Con esta parametrización, el desarrollo perturbativo de la función β (Ec.(2.43)) es

$$\beta(\alpha_s) = -\sum_{n=0}^{\infty} b_n \alpha_s^{n+2}. \tag{2.49}$$

De la Ec.(2.47), vemos que $\alpha_s(Q^2)$ es una función monótona decreciente del parámetro Q, ya que los coeficientes β_0 y β_1 son positivos (con $N_f \leq 6$). La dependencia de la constante de acoplamiento fuerte con la energía ha sido medida con gran precisión (ver Fig. (2.4.1)). Al hecho por el cual la constante de acoplamiento de QCD decrece a altas energía se lo conoce con el nombre de *libertad asintótica*, y es una peculiaridad de las teorías no Abelianas. Hecho de extrema importancia para la física de las interacciones fuertes ya que en procesos de alto momento transferido,los hadrones se comportan como una colección de partones libres débilmente interactuantes. Y es así que podemos usar teoría de perturbaciones, para hacer predicciones teóricas con QCD y no es necesario resolver de manera exacta sus ecuaciones de movimiento.

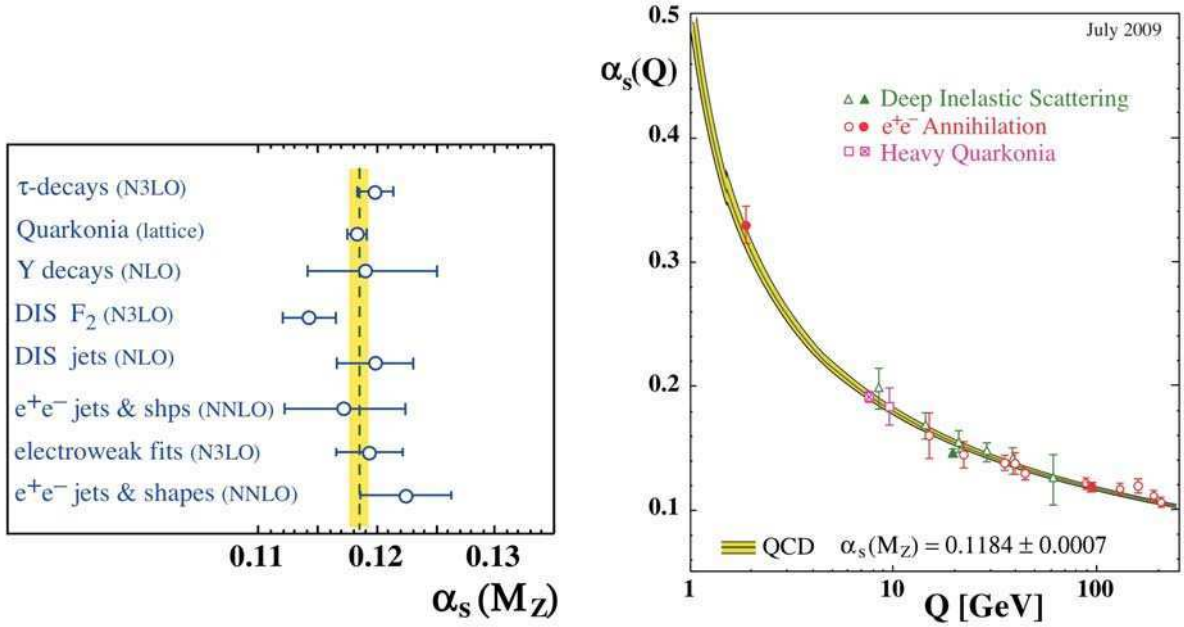

Figura 2.4: *Izquierda: Sumario de las mediciones de $\alpha_s(M_Z^2)$, usado como valor de referencia para el valor del promedio mundial; Derecha: Sumario de mediciones de α_s como función de la escala de energía Q. Gráfico extraído de la Ref. [85].*

A bajas escalas de energías $(1 + (\beta_0/4\pi)\alpha_s(\mu_0^2)\log\frac{Q^2}{\mu_0^2} \simeq 0)$ la expresión a orden más bajo para α_s (ver Ec. (2.47)) diverge. Esto define una escala

$$\Lambda_{QCD} \simeq \mu_0 \exp\left[-\frac{2\pi}{\beta_0\alpha_s(\mu_0^2)}\right] . \tag{2.50}$$

Λ_{QCD}, que es la típica escala hadrónica, denota la región donde las interacciones fuertes, se vuelven "realmente fuertes", en el sentido de que ya no es posible hacer un desarrollo perturbativo. Entonces a esta escala de baja energía, un análisis no perturbativo es obligatorio, y el aumento desmesurado de α_s (a estas bajas escalas de energía), es consistente con el confinamiento de color[12].

[12]Aunque una prueba rigurosa de esta propiedad aun está pendiente.

Notemos que si sólo incluimos el término a LO para la solución de α_s de la Ec. (2.47), ésta tiene solución analítica

$$\alpha_s(Q) = \frac{1}{b_0 \ln(Q^2/\Lambda^2_{QCD})} \quad . \tag{2.51}$$

De la Ec. (2.51) vemos que un cambio en la escala Q por un factor arbitrario del orden de la unidad (por ejemplo, $Q \to Q/2$) induce a una variación en α_s del orden de α_s^2. Esta variación es incontrolable ya que va más allá de la precisión en la que la Ec. (2.51) es válida. Por lo tanto en teoría de perturbaciones la magnitud de α_s no está definida sin ambigüedades. Éstas se deben a los órdenes superiores al definido que no están bajo consideración.

2.5. Resumen de las herramientas de cálculo de QCD

Todos los procesos que se investigan en el LHC o el Tevatron, involucran QCD o requieren de QCD para ser explicados. Y esto no podría ser de otra manera ya que los quarks y gluones, presentes en la colisión, transportan carga de color. Podemos usar teoría de perturbaciones para describir la sección eficaz de un proceso inclusivo de colisión fuerte (*hard scattering*),

$$h_1(p_1) + h_2(p_2) \to H(Q, \{\dots\}) + X \quad . \tag{2.52}$$

Aqui, h_1 y h_2 son los hadrones que colisionan, que tienen momentos p_1 y p_2 respectivamente, H denota el estado final detectado (bosones vectoriales, jets, quarks pesados, bosones de Higgs, partículas supersimétricas, etc) y con X nos referimos a aquellas partículas que no observamos, pero que son producto de la colisión también. La escala típica del proceso Q puede ser asignada a la masa invariante o el momento transverso de H y con la notación $\{\dots\}$ referimos cualquier otra variable cinemática medida del proceso[13].

Si hacemos la elección $M_H = Q$, el simple análisis que se describe mas abajo aplica sólo si $Q_T \approx M_H$. En los casos $Q_T \ll M_H$ y $Q_T \gg M_H$ hay dos escalas involucradas en el proceso y un análisis más elaborado es requerido.

La sección eficaz para el proceso de la ecuación (2.52) es calculada usando la fórmula de factorización [83, 86]

$$\begin{aligned}\sigma(p_1, p_2; Q, \{\dots\}) = \sum_{a,b} \int dx_1\, dx_2\, f_{a/h_1}(x_1, Q^2)\, f_{b/h_2}(x_2, Q^2)\, \hat{\sigma}_{ab}(x_1 p_1, x_2 p_2; Q, \{\dots\}; \alpha_s(Q)) \\ + \mathcal{O}\left((\Lambda_{QCD}/Q)^p\right) \quad . \end{aligned} \tag{2.53}$$

Los índices a, b denotan el sabor de los partones, $\{g, u, \bar{u}, d, \bar{d}, \dots\}$. La fórmula de factorización (2.53) involucra la convolución de la sección eficaz partónica $\hat{\sigma}_{ab}$ y las distribuciones de partones $f_{a/h}(x, Q^2)$ de los hadrones que colisionan. El término $\mathcal{O}\left((\Lambda_{QCD}/Q)^p\right)$ en el lado derecho de la Ec. (2.53) generalmente denota las contribuciones no perturbativas (efectos de hadronización, interacciones multipartones, contribuciones soft, contribuciones de *underlying-event*, etc).

El término de orden más bajo $\hat{\sigma}^{(LO)}$ da solo una estimación del orden de la sección eficaz generalmente. Puede citarse el caso de la producción de difotones, como ejemplo. En

[13] Por ejemplo: *rapidity* (y), momento transverso (Q_T) de H, variables angulares ($\Delta\phi$), etc.

esta sección eficaz, para ciertas condiciones cinemáticas la corrección a NNLO es un orden mayor que la sección eficaz LO. Por lo tanto, es necesario contar (al menos) con la predicción a NLO, que está disponible para casi todos los casos de interés.
La sección eficaz partónica $\hat{\sigma}_{ab}$ puede ser calculada como un desarrollo en potencias de la constante de acople $\alpha_s(Q)$ de QCD:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{ab}(p_1,p_2;Q,\{\dots\};\alpha_s(Q)) = \alpha_s^k(Q)\,\Big\{&\hat{\sigma}_{ab}^{(LO)}(p_1,p_2;Q,\{\dots\})\\ &+\alpha_s(Q)\;\hat{\sigma}_{ab}^{(NLO)}(p_1,p_2;Q,\{\dots\})\\ &+\alpha_s^2(Q)\;\hat{\sigma}_{ab}^{(NNLO)}(p_1,p_2;Q,\{\dots\})+\cdots\Big\}\;. \end{aligned} \tag{2.54}$$

La sección eficaz escrita en (2.53) aplica sólo para aquellos observables que no son sensibles a divergencias infrarojas (para una discusión detallada ver Capítulo 3).

En la Ec. (2.53) se integra sobre las fracciones de momento x_1 y x_2. Los valores de x_1 y x_2 que dominan la integral están controlados por la cinemática del proceso de la colisión *hard*. Para el caso de partículas pesadas de masa M y *rapidity* y, los valores dominantes de fracciones de momento son $x_{1,2} \sim (Me^{\pm y})/\sqrt{s}$, donde $s = (p_1 + p_2)^2$ es la energía al cuadrado del centro de masa de la colisión. Entonces variando M e y, a $\sqrt{s}$ fija, tenemos la sensibilidad de detectar partones con diferentes fracciones de momento. Si aumentamos $\sqrt{s}$, las PDFs son evaluadas en rangos cinemáticos donde Q adquiere grandes valores y x_1 y x_2 son pequeños.

Si la partícula que medimos en el estado final es un hadrón H deberemos también incluir una convolución con las correspondientes funciones de fragmentación $d_{a/H}(z, Q^2)$.

2.5.1. Las distribuciones de partones

Las distribuciones de partones PDFs son de gran importancia a la hora de hacer predicciones para el LHC. Estas funciones son no perturbativas, y no pueden ser calculadas por la teoría. Deben ser determinadas con la ayuda del experimento. Un breve resumen que discute los detalles a tener en cuenta para su determinación puede hallarse en la Sec.2 de [87] y en sus referencias. En particular es importante no sólo la determinación de estas funciones sino la estimación de las incertezas a causa de los métodos utilizados en su obtención.

Aunque las funciones de distribución $f_{a/h}(x, Q^2)$ a cualquier escala fija Q no pueden ser calculadas en teoría de perturbaciones, la dependencia de escala de las mismas puede ser descrita de manera perturbativa con las ecuación de evolución DGLAP [88, 89, 90, 91]

$$Q^2 \frac{d\, f_{a/h}(x, Q^2)}{dQ^2} = \sum_b \int_x^1 \frac{dz}{z}\, P_{ab}(\alpha_s(Q^2), z)\, f_{a/h}(x/z, Q^2)\;\;. \tag{2.55}$$

Habiendo determinado a $f_{a/h}(x, Q_0^2)$ a una dada escala de referencia $Q = Q_0$, la ecuación de evolución puede ser usada para calcular a las PDFs a una escala perturbativa diferente Q.
Los *kernels* en la Ec. (2.55) son las funciones de *splitting* de Altarelli-Parisi (AP) [90]. Éstas dependen de los sabores de los quarks a, b pero no del tipo de hadrón h que colisiona en

el estado inicial. Y en este sentido es que son independientes del proceso. Las funciones de splitting de AP pueden ser calculadas en teoría de perturbaciones, mediante una expansión en potencias de α_s:

$$P_{ab}(\alpha_s, z) = \alpha_s P_{ab}^{(LO)}(z) + \alpha_s^2 P_{ab}^{(NLO)}(z) + \alpha_s^3 P_{ab}^{(NNLO)}(z) + \mathcal{O}(\alpha_s^4) \ . \tag{2.56}$$

Los términos a LO y NLO ($P_{ab}^{(LO)}(z)$ y $P_{ab}^{(NLO)}(z)$) del desarrollo son conocidos [92, 93, 94, 95, 96, 97, 98]. Los primeros dos términos (su expresión explícita puede hallarse en las referencia [83]) son usados en la mayoría de los estudios de QCD. Cálculos a NNLO [99] del término $P_{ab}^{(NNLO)}(z)$ están también disponibles.
Al igual que en el caso de α_s, la definición y evolución de las PDFs depende de cuantos sabores de quarks estamos considerando livianos en el cálculo, en el cual las distribuciones de partones son usadas.

La factorización en el lado derecho de la Ec. (2.53) entre la sección eficaz partónica (de carácter perturbativo) y las PDFs (de carácter no perturbativo) involucra cierto grado de arbitrariedad, al que se conoce como dependencia en el esquema de factorización. Siempre podemos redefinir a las PDFs multiplicando a las mismas (convolucionando) con alguna función perturbativa independiente del proceso. Entonces es que tenemos que especificar el esquema de factorización utilizado, para definir a las PDFs de manera unívoca. El esquema más común y difundido es el $\overline{\text{MS}}$ [83]. Un esquema alternativo, llamado esquema de factorización DIS es a veces utilizado [15].
Como sabemos, las cantidades físicas no pueden depender de tales arbitrariedades. Lo que ocurre es que las correcciones perturbativas a la sección eficaz partónica que van mas allá del LO, y las funciones de splitting de AP son entonces dependientes también del esquema de factorización, para compensar la correspondiente dependencia de las PDFs. En la evaluación de las secciones eficaces hadrónicas a un dado orden perturbativo tal compensación puede no ser exacta. Y esto es debido a que estamos truncando la serie, omitiendo términos superiores. Estudios cuantitativos sobre la dependencia en este esquema de factorización pueden ser utilizados como un límite inferior para la estimación de las incertezas producto de la omisión de términos de orden superior en la sección eficaz.

La dependencia sobre el esquema de factorización, no es la única señal de incerteza relacionada con la fórmula de factorización en la Ec. (2.53). Truncar la serie a un dado orden conduce, como habíamos adelantado en las secciones anteriores, a una dependencia en las escalas de renormalización y factorización. La escala de renormalización μ_R es la escala a la que se evalúa a α_s. La escala de factorización es introducida para separar de la sección eficaz hadrónica, la parte perturbativa (sección eficaz partónica) de la no perturbativa (PDFs). En las Ecs. (2.53) y (2.54) tomamos $\mu_R = \mu_F = Q$. En términos físicos, estas escalas deben ser del orden de Q, pero su valor no puede ser fijado sin ambigüedad. En general el lado derecho de la Ec. (2.53) es modificado al introducir la dependencia explícita en μ_R y μ_F en la siguiente manera

$$\begin{gathered} f_{a/h_1}(x_1, Q^2)\ f_{a/h_2}(x_2, Q^2)\ \hat{\sigma}_{ab}(x_1 p_1, x_2 p_2; Q, \{\dots\}; \alpha_s(Q)) \\ \downarrow \\ f_{a/h_1}(x_1, \mu_F^2)\ f_{a/h_2}(x_2, \mu_F^2)\ \hat{\sigma}_{ab}(x_1 p_1, x_2 p_2; Q, \{\dots\}; \mu_R, \mu_F; \alpha_s(\mu_R)) \ . \end{gathered} \tag{2.57}$$

La sección eficaz física $\sigma(p_1, p_2; Q, \{\dots\})$ no depende de las escalas arbitrarias μ_R y μ_F pero las distribuciones partónicas y las secciones eficaces partónicas por separado sí lo hacen. La

dependencia en μ_R y μ_F aparece en el desarrollo perturvativo de la sección eficaz partónica y compensa la dependencia en μ_R de $\alpha_s(\mu_R)$ y la dependencia en μ_F de las PDFs. La compensación sería exacta si todo pudiera ser calculado a todo orden en teoría de perturbaciones. Sin embargo, cuando las cantidades que entran en la Ec. (2.57) son evaluadas a n-ésimo orden en teoría de perturbaciones el resultado exhibe una dependencia residual en μ_R y μ_F el cual es formalmente de orden $(n+1)$-ésimo. Esta dependencia refleja la ausencia de los términos que hemos omitido en el desarrollo perturbativo. Y por este motivo la variación de la sección eficaz en μ_R y μ_F es usada con frecuencia para estimar el tamaño de (al menos) algunos de los términos omitidos, y esto es un estimador de la incerteza teórica causada por el truncado de la serie.

Capítulo 3

El formalismo dipolar

Método de cálculo de secciones eficaces a NLO

Cuando calculamos las correcciones de QCD a una sección eficaz, generalmente debemos considerar las correcciones reales y las correcciones virtuales a un-loop. Por lo tanto debemos lidiar con diferentes tipos de singularidades. Las divergencias ultravioletas, presentes solo en las contribuciones virtuales, son removidas con las técnicas de renormalización. Las regiones de pequeño momento (*regiones soft*) y de ángulo pequeño (*regiones colineales*), en cambio producen divergencias en ambas contribuciones, reales y virtuales. Entonces es necesario definir de manera adecuada el observable de interés con el que estamos tratando. Es decir necesitamos definir a un observable hadrónico que sea libre de divergencias colineales (*collinear safe*) y libre de divergencias infra-rojas (*infrared safe*) y por este motivo su valor no deberá depender del número de partículas soft o colineales en el estado final (para una definición formal remitirse a la Seccción 3.3).
En el caso de tales observables hadrónicos, la suma coherente sobre diferentes (reales y virtuales) configuraciones partónicas soft y colineales en el estado final conduce a la cancelación de las divergencias soft. Las singularidades colineales restantes son factorizadas en las funciones de estructura y de fragmentación partónicas, conduciendo este hecho, a las conocidas violaciones de escala predichas por la teoría. Como resultado, la sección eficaz es finita (calculable) a nivel partónico, orden a orden en teoría de perturbaciones. Todas las demás dependencias físicas sobre escalas de larga distancia, o están incluidas dentro de las distribuciones de partones o en correcciones no perturbativas que están suprimidas por potencias inversas de (alto) momento transferido Q que controla el proceso de dispersión.

El uso de métodos numéricos requiere de técnicas altamente no triviales, ya que las divergencias soft y colineales presentes en los pasos intermedios del cálculo deben ser primero regularizadas. Esta tarea normalmente se logra empleando una continuación analítica del número de dimensiones del espacio-tiempo a $d = 4 - 2\epsilon$ dimensiones.

Existen dos tipos de algoritmos, básicamente, para realizar cálculos a NLO: uno está basado en el método de *phase-space slicing* y el otro está basado en el método de sustracción (*sustraction*)[1]. La diferencia principal entre estos dos algoritmos y la forma estándar (analítica) de proceder reside en el hecho de que solo una pequeña porción de los cálculos es realizada analíticamente; solo aquellos términos que dan lugar a divergencias. Una vez que las divergencias han sido canceladas uno podría continuar el cálculo de manera analítica integrando sobre las cuatro dimensiones del espacio-tiempo. Pero este enfoque carece de utilidad. Y

[1]Referimos al lector a la introducción de la Ref. [46] para una elemental descripción de las diferencias básicas entre estos dos métodos.

esto es debido a que las secciones eficaces que deseamos calcular, las debemos comparar con los datos del experimento. Experimento que impone cortes cinemáticos sobre las partículas intervinientes. Este hecho torna a la integración analítica en una empresa formidable o imposible. Sumado al hecho de que para cada observable requerido necesitaríamos de un nuevo cálculo integral.

Entonces en lugar de estos métodos se usan técnicas Monte-Carlo de integración. Y los métodos de phase-space slicing y de sustraction sientan las bases para realizar cálculos arbitrarios a NLO para cualquier proceso.

En este capítulo presentamos las ideas principales del formalismo dipolar como una generalización del método de sustracción. La generalidad de este formalismo es obtenido explotando las propiedades de factorización de las emisiones soft y colineales, siendo posible así, la introducción de un conjunto universal de contra-términos que pueden ser utilizados para cualquier cálculo de QCD.

En las secciones siguientes se relata brevemente las principales características del formalismo dipolar en el caso de aniquilación electrón positrón. La extensión de este formalismo para incluir partículas de QCD en el estado inicial puede ser deducida de lo aquí expuesto y se remite a la lectura del artículo fundacional [51] donde pueden hallarse todos los detalles.

Este capítulo constituye el paso previo a la elaboración de un método de sustracción a NNLO, ya que la versión del método de sustracción a NNLO que utilizan los códigos descritos en esta tesis y la versión final del método de sustracción a NNLO que se desarrolló en esta tesis se valen, en los pasos intermedios, del método de sustracción dipolar.

3.1. El procedimiento de sustracción

Supongamos que queremos calcular la sección eficaz σ a NLO

$$\sigma = \sigma^{LO} + \sigma^{NLO} \ . \tag{3.1}$$

Aquí la sección a LO (σ^{LO}) es obtenida integrando la sección eficaz exclusiva $d\sigma^B$ en la aproximación Born sobre el espacio de fases correspondiente. Supongamos también que este cálculo a LO involucra m partones (jets) en el estado final. Escribamos

$$\sigma^{LO} = \int_m d\sigma^B \ , \tag{3.2}$$

donde, en general, todas las cantidades (elementos de matriz y espacio de fases) están evaluadas en las $d = 4 - 2\epsilon$ dimensiones del espacio-tiempo. Sin embargo, por definición, la integración sobre el espacio de fases de esta sección eficaz a LO en la Eq. (3.2) es finita, de manera que todo el cálculo puede ser realizado de manera analítica o numérica en cuatro dimensiones.

Ahora vayamos a NLO. Tenemos que considerar a la sección eficaz exclusiva $d\sigma^R$ con $m+1$ partones en el estado final y la corrección a un-loop $d\sigma^V$, al proceso con m partones en el estado final:

$$\sigma^{NLO} \equiv \int d\sigma^{NLO} = \int_{m+1} d\sigma^R + \int_m d\sigma^V \ . \tag{3.3}$$

Las dos integrales del lado derecho de la Ec. (3.3) son divergentes por separado si $d = 4$, aunque su suma es finita. Por lo tanto, antes de cualquier cálculo numérico, estas dos

integrales tienen que ser regularizadas. Usando regularización dimensional, las divergencias se manifiestan como polos dobles, $1/\epsilon^2$ (soft y colineales) y simples $1/\epsilon$ (soft, colineales o ultravioletas). Supongamos que la regularización de las divergencias ultravioletas en $d\sigma^V$ ya ha sido realizada. Entonces la idea general del método de sustracción para ser utilizado en un programa de tipo Monte-Carlo es la siguiente

$$d\sigma^{NLO} = \left[d\sigma^R - d\sigma^A\right] + d\sigma^A + d\sigma^V \quad , \tag{3.4}$$

donde $d\sigma^A$ es la aproximación formal de $d\sigma^R$, en el sentido de que esta posee el mismo comportamiento singular en d dimensiones que $d\sigma^R$. De esta forma es que $d\sigma^A$ actúa como un contratérmino local para $d\sigma^R$. Si introducimos la integración en el espacio de fases

$$\sigma^{NLO} = \int_{m+1} \left[d\sigma^R - d\sigma^A\right] + \int_{m+1} d\sigma^A + \int_m d\sigma^V \quad , \tag{3.5}$$

podemos realizar sin inconvenientes, el límite $\epsilon \to 0$ bajo el signo de integral en el primer término del lado derecho de la Ec. (3.5). Por lo tanto este primer término puede ser integrado numéricamente en cuatro dimensiones. Todas las singularidades están ahora asociadas a los dos últimos términos del lado derecho de la Ec. (3.5). Si podemos integrar analíticamente a $d\sigma^A$ sobre el sub-espacio de fases de un partón, conduciendo esto a polos en ϵ, entonces es posible combinar estos polos con aquellos en $d\sigma^V$, cancelando todas las divergencias. Luego debemos tomar el límite $\epsilon \to 0$ y realizar la integración restante de forma numérica sobre el espacio de fases de m-partones. La estructura final de la fórmula es la siguiente

$$\sigma^{NLO} = \int_{m+1} \left[d\sigma^R_{\epsilon=0} - d\sigma^A_{\epsilon=0}\right] + \int_m \left[d\sigma^V + \int_1 d\sigma^A\right]_{\epsilon=0} \quad , \tag{3.6}$$

que podemos implementar fácilmente en un código de tipo Monte-Carlo, para generar los correspondientes eventos partónicos de $m+1$ y m partones en el estado final.

La potencia del formalismo dipolar, es la de proveer entonces una forma general para la expresión $d\sigma^A$. Necesitamos encontrar entonces una expresión para $d\sigma^A$, que verifique las siguientes condiciones: *i*) Para un proceso dado, $d\sigma^A$ deberá ser obtenida de forma independiente al proceso considerado; *ii*) debe poseer el comportamiento singular exacto de $d\sigma^R$ en d dimensiones; *iii*) su forma tiene que ser útil en cuanto a su utilización en códigos de tipo Monte-Carlo; *iv*) tiene que ser exactamente integrable analíticamente en d dimensiones sobre los sub-espacios de fases de partón único conduciendo a las divergencias soft y colineales.

Y esto lo podemos hacer explotando nuestro conocimiento físico de como deben comportarse los elementos de matriz de $m+1$-partones en los límites soft y colineal, que producen las divergencias, introduciendo fórmulas de factorización llamadas fórmulas dipolares (ver Sec. 3.2), las que nos van a permitir obtener de manera directa (ver Sec. 3.3) un contratérmino $d\sigma^A$ que satisfará todas las propiedades enumeradas más arriba.

3.2. Fórmulas de factorización dipolar

3.2.1. Notación

Utilizaremos regularización dimensional en $d = 4-2\epsilon$ dimensiones y consideraremos $d-2$ estados de helicidad para los gluones y 2 estados de helicidad para los quarks no masivos.

Esto define el esquema de regularización dimensional usual. La escala de regularización-dimensional, que está presente en los cálculos de los elementos de matriz es llamada μ. En los cálculos perturbativos de secciones eficaces físicas, luego de haber combinado los elementos de matriz renormalizados, la dependencia en μ cancela de forma exacta y es reemplazada por la dependencia en la escala de renormalización μ_R. Por lo tanto, para evitar notación innecesaria hacemos $\mu = \mu_R$.

Además con α_s entendemos $\alpha_s(\mu)$, que es la constante de acople fuerte a NLO evaluada a la escala de renormalización μ. El valor real de la constante de acople de QCD $\alpha_s(\mu)$ depende del esquema de renormalización usado para sustraer las divergencias ultravioletas de los elementos de matriz a un-loop (o, de manera equivalente, de $d\sigma^V$ en la Ec. (3.3)).

El espacio de fases d-dimensional, que involucra la integración sobre los momentos $\{p_1, ..., p_m\}$ de m partones en el estado final, será denotado

$$\left[\prod_{l=1}^{m} \frac{d^d p_l}{(2\pi)^{d-1}}\, \delta_+(p_l^2)\right] (2\pi)^d\, \delta^{(d)}(p_1 + ... + p_m - Q) \equiv d\phi_m(p_1, ..., p_m; Q) \quad . \tag{3.7}$$

En el caso de procesos sin partones de QCD en el estado inicial (procesos del tipo e^+e^-), el elemento de matriz árbol con m partones de QCD en el estado final tiene la siguiente estructura general [2]

$$\mathcal{M}_m^{c_1,...,c_m;s_1,...,s_m}(p_1, ..., p_m)\,, \tag{3.8}$$

donde $\{c_1, ..., c_m\}$, $\{s_1, ..., s_m\}$ y $\{p_1, .., p_m\}$ son respectivamente los índices de color ($a = 1, ..., N_c^2 - 1$ colores diferentes para cada gluón, $\alpha = 1, .., N_c$ colores diferentes para cada quark o anti-quark), índices de espín ($\mu = 1, ..., d$ para gluones, $s = 1, 2$ para fermiones no masivos) y momento.

Es útil introducir la base $\{|c_1, ..., c_m\rangle \otimes |s_1, ..., s_m\rangle\}$ en el espacio de color + helicidad de tal manera que

$$\mathcal{M}_m^{c_1,...,c_m;s_1,...,s_m}(p_1, ..., p_m) \equiv \Big(\langle c_1, ..., c_m| \otimes \langle s_1, ..., s_m|\Big)|1, ..., m >_m \quad . \tag{3.9}$$

Entonces $|1, ..., m >_m$ es un vector en el espacio de color + helicidad. De acuerdo con esta notación, el elemento de matriz cuadrado (sumado sobre el color y el espín del estado final) $\mathcal{M}m$ puede ser escrito

$$\mathcal{M}_m = {}_m< 1, ..., m|1, ..., m >_m \quad . \tag{3.10}$$

Definamos la amplitudes cuadrado de color a nivel árbol

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_m^{i,k}|^2 &\equiv {}_m< 1, ..., m|\, \boldsymbol{T}_i \cdot \boldsymbol{T}_k\, |1, ..., m >_m \\ &= \left[\mathcal{M}_m^{a_1..b_i...b_k...a_m}(p_1, ..., p_m)\right]^* T^c_{b_i a_i}\, T^c_{b_k a_k}\, \mathcal{M}_m^{a_1..a_i...a_k...a_m}(p_1, ..., p_m)\,, \end{aligned} \tag{3.11}$$

donde $T^a_{cb} \equiv i f_{cab}$ (matriz de carga de color en la representación adjunta), si la partícula que emite i es un gluón y $T^a_{\alpha\beta} \equiv t^a_{\alpha\beta}$ (matriz de carga de color en la representación fundamental) si la partícula que emite i es un quark (en el caso en el que es un antiquark que emite, $T^a_{\alpha\beta} \equiv \bar{t}^a_{\alpha\beta} = -t^a_{\beta\alpha}$). Es fácil constatar que el álgebra de color satisface

$$\boldsymbol{T}_i \cdot \boldsymbol{T}_j = \boldsymbol{T}_j \cdot \boldsymbol{T}_i \quad \text{if} \;\; i \neq j; \qquad \boldsymbol{T}_i^2 = C_i, \tag{3.12}$$

[2] También pueden, no ser partículas de QCD, por ejemplo $\gamma^*, Z^0, W^\pm, \ldots$, que poseen un momento total entrante Q_μ.

donde C_i es el operador de Casimir, que resulta $C_i = C_A = N_c$ si i es un gluón y $C_i = C_F = (N_c^2 - 1)/2N_c$ si i es un quark o un antiquark.

En esta notación, cada vector $|1, ..., m >_m$ es un singlete de color, tal que la conservación de color se manifiesta a través de la identidad

$$\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{T}_i |1, ..., m >_m = 0. \tag{3.13}$$

3.2.2. Fórmulas dipolares

La contribución real $d\sigma^R$ a la sección eficaz a NLO en la Ec. (3.3) es proporcional al elemento de matriz a nivel árbol $\mathcal{M}_{m+1}$ para la producción de $m+1$ partones en el estado final. La dependencia de $|\mathcal{M}_{m+1}|^2$ sobre el momento p_j de un partón en el estado final j es singular en dos regiones del espacio de fases: cuando el momento p_j se hace cero (región *soft*) y/o cuando éste se hace paralelo al momento p_i de otro partón en $\mathcal{M}_{m+1}$ (región *colineal*).

El comportamiento singular de $|\mathcal{M}_{m+1}|^2$ es conocido y universal [48, 90]. De hecho en los límites soft y colineales, $\mathcal{M}_{m+1}$ es esencialmente factorizable respecto de $\mathcal{M}_m$, la amplitud a nivel árbol con m partones, y el factor singular solo depende de los momentos y números cuánticos de los partones de QCD en $\mathcal{M}_m$.
Introduzcamos entonces la siguiente fórmula de factorización dipolar:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{m+1}(p_1, ..., p_{m+1})|^2 &= {}_{m+1}< 1, ..., m+1 || 1, ..., m+1 >_{m+1} \\ &= \sum_{k \neq i,j} \mathcal{D}_{ij,k}(p_1, ..., p_{m+1}) + \dots \end{aligned} \tag{3.14}$$

donde con ... entendemos términos que no son singulares en el límite $p_i \cdot p_j \to 0$ (i.e. cuando i y j se hacen colineales o cuando i o j son soft) y la contribución dipolar $\mathcal{D}_{ij,k}$ está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{ij,k}\,(p_1, ..., p_{m+1}) &= \frac{-1}{2p_i \cdot p_j} \\ &\cdot\ {}_m< 1, .., \widetilde{ij}, .., \widetilde{k}, .., m+1 | \frac{\boldsymbol{T}_k \cdot \boldsymbol{T}_{ij}}{\boldsymbol{T}_{ij}^2}\, \boldsymbol{V}_{ij,k}\, |1, .., \widetilde{ij}, .., \widetilde{k}, .., m+1 >_m \ . \end{aligned} \tag{3.15}$$

El elemento de matriz de m-partones del lado derecho de la Ec. (3.15) es obtenido del elemento de matriz de $m+1$-partones original, reemplazando a) los partones i y j con un partón simple $\widetilde{ij}$ (el cual juega el rol de *emisor*) y b) el partón k con el partón $\widetilde{k}$ (el cual juega el rol de *espectador*). Todos los números cuánticos (color, sabor) a excepción del momento son asignados de la siguiente forma: el partón espectador $\widetilde{k}$ tiene los mismos números cuánticos que k. Los números cuánticos del partón emisor $\widetilde{ij}$ son obtenidos de acuerdo a su conservación en el proceso de splitting $\widetilde{ij} \to i + j$ (es decir "cualquier cosa + gluón" da " cualquier cosa" y " quark + antiquark" da " gluon"). Al momento del emisor y del espectador se los define como

$$\widetilde{p}_{ij}^{\mu} = p_i^{\mu} + p_j^{\mu} - \frac{y_{ij,k}}{1 - y_{ij,k}}\, p_k^{\mu} \ , \quad \widetilde{p}_k^{\mu} = \frac{1}{1 - y_{ij,k}}\, p_k^{\mu} \ , \tag{3.16}$$

donde la variable adimensional $y_{ij,k}$ está dada por

$$y_{ij,k} = \frac{p_i p_j}{p_i p_j + p_j p_k + p_k p_i} \ . \tag{3.17}$$

En el bra-ket del lado derecho de la Ec. (3.15), $\boldsymbol{T}_{ij}$ y $\boldsymbol{T}_k$ son las cargas de color del emisor y espectador y $\boldsymbol{V}_{ij,k}$ son las matrices en el espacio de helicidad del emisor. Estas matrices, las que dependen de $y_{ij,k}$ y de las variables cinemáticas $\tilde{z}_i, \tilde{z}_j$,

$$\tilde{z}_i = \frac{p_i p_k}{p_j p_k + p_i p_k} = \frac{p_i \widetilde{p}_k}{\widetilde{p}_{ij} \widetilde{p}_k} \ , \quad \tilde{z}_j = \frac{p_j p_k}{p_j p_k + p_i p_k} = \frac{p_j \widetilde{p}_k}{\widetilde{p}_{ij} \widetilde{p}_k} = 1 - \tilde{z}_i \ , \tag{3.18}$$

son factores universales relacionados a las funciones de splitting de Altarelli-Parisi d-dimensionales [90]. Para la splitting de fermión + gluón tenemos (s y s' son los índices de espín del fermión $\widetilde{ij}$ en $\langle .., \widetilde{ij}, ..|$ y $|.., \widetilde{ij}, ..\rangle$ respectivamente)

$$\begin{aligned} \langle s | \boldsymbol{V}_{q_i g_j, k}(\tilde{z}_i; y_{ij,k}) | s' \rangle &= 8\pi \mu^{2\epsilon} \alpha_s \, C_F \left[\frac{2}{1 - \tilde{z}_i (1 - y_{ij,k})} - (1 + \tilde{z}_i) - \epsilon (1 - \tilde{z}_i) \right] \delta_{ss'} \\ &\equiv V_{q_i g_j, k} \, \delta_{ss'} \ . \end{aligned} \tag{3.19}$$

Para splitting de quark + antiquark y gluón + gluón tenemos (μ y ν son los índices de espín del gluón $\widetilde{ij}$ en $\langle .., \widetilde{ij}, ..|$ y $|.., \widetilde{ij}, ..\rangle$ respectivamente)

$$\langle \mu | \boldsymbol{V}_{q_i \bar{q}_j, k}(\tilde{z}_i) | \nu \rangle = 8\pi \mu^{2\epsilon} \alpha_s \, T_R \left[-g^{\mu\nu} - \frac{2}{p_i p_j} \left(\tilde{z}_i p_i^\mu - \tilde{z}_j p_j^\mu \right) \left(\tilde{z}_i p_i^\nu - \tilde{z}_j p_j^\nu \right) \right] \equiv V^{\mu\nu}_{q_i \bar{q}_j, k} \ , \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} \langle \mu | \boldsymbol{V}_{g_i g_j, k}(\tilde{z}_i; y_{ij,k}) | \nu \rangle &= 16\pi \mu^{2\epsilon} \alpha_s \, C_A \left[-g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{1 - \tilde{z}_i (1 - y_{ij,k})} \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{1 - \tilde{z}_j (1 - y_{ij,k})} - 2 \right) + (1 - \epsilon) \frac{1}{p_i p_j} \left(\tilde{z}_i p_i^\mu - \tilde{z}_j p_j^\mu \right) \left(\tilde{z}_i p_i^\nu - \tilde{z}_j p_j^\nu \right) \right] \equiv V^{\mu\nu}_{g_i g_j, k} \ . \end{aligned} \tag{3.21}$$

La fórmula de factorización en la Ec. (3.14) tiene estructura dipolar respecto de los índices de *color* y *espín* de los partones factorizados. En el elemento de matriz factorizado de m-partones ambos, el emisor $\widetilde{ij}$ y el espectador $\widetilde{k}$ están on-shell, ($\widetilde{p}_{ij}^2 = \widetilde{p}_k^2 = 0$) y haciendo el reemplazo $\{i, j, k\} \to \{\widetilde{ij}, \widetilde{k}\}$, la conservación del momento queda implementada de forma exacta:

$$p_i^\mu + p_j^\mu + p_k^\mu = \widetilde{p}_{ij}^\mu + \widetilde{p}_k^\mu \ . \tag{3.22}$$

La importancia de estas características cinemáticas es doble. Primero, la conservación de momento conduce a una interpolación suave entre los límites soft y colineales, evitándose así un doble conteo de superposición de estas dos divergencias. Segundo, la definición de (3.16) del momento del dipolo nos permite factorizar exactamente el espacio de fases de $m + 1$ partones en un sub-espacio de fase de m-partones multiplicado por otro de partón simple (ver Ecs. (3.31,3.32)). La primera propiedad nos permite construir el contra-término $d\sigma^A$ que produce una cancelación puntual de las singularidades de $d\sigma^R$ como en la Eq. (3.5). La segunda propiedad hace que este contratérmino sea integrable analíticamente sobre el subespacio de partón simple, evidenciando este hecho, la aparición de las divergencias soft y colineales.

3.3. El cálculo de secciones eficaces a NLO

El formalismo dipolar constituye la base de este algoritmo general para el cálculo de secciones eficaces arbitrarias a NLO. Primero definiremos las condiciones que debe cumplir la sección eficaz a orden más bajo. Luego introduciremos el término de sustracción que cancela todas las singularidades de los elementos de matriz reales, y mostraremos como puede lograrse la integración en d dimensiones para cancelar las singularidades de los elementos de matriz virtuales.

3.3.1. Orden más bajo y definición de jet

La sección eficaz a LO en la Ec. (3.2) tiene la siguiente expresión

$$d\sigma^B = \mathcal{N}_{in} \sum_{\{m\}} d\phi_m(p_1, ..., p_m; Q) \, \frac{1}{S_{\{m\}}} \, |\mathcal{M}_m(p_1, ..., p_m)|^2 \, F_J^{(m)}(p_1, ..., p_m) \ , \tag{3.23}$$

donde $\mathcal{N}_{in}$ incluye todos los factores que son independientes de QCD, $\sum_{\{m\}}$ denota la suma sobre todas las configuraciones con m partones, $d\phi_m$ es el espacio de fase partónico en la Ec. (3.7), $S_{\{m\}}$ es el factor de simetría de Bose para partones idénticos en el estado final y $\mathcal{M}_m$ es el elemento de matriz a nivel árbol.

La función $F_J^{(m)}(p_1, ..., p_m)$ define el observable jet en términos del momento de los m-partones del estado final. En general, F_J puede contener funciones Θ (Función de Heaviside), δ (Función delta de Dirac), factores numéricos y cinemáticos o cualquier combinación de los mismos. La propiedad esencial de $F_J^{(m)}$ es que el observable en el que estamos interesados tiene que estar libre de divergencias colineales e infrarrojas. Esto significa que tiene que estar experimentalmente (teóricamente) definido de tal forma que su valor sea independiente del número de hadrones (partones) colineales y soft producidos en el estado final. En particular, este valor tiene que ser el mismo en una dada configuración de m-partones y en todas las configuraciones de $m+1$-partones que son cinemáticamente degeneradas con éste. Estas propiedades pueden ser escritas explícitamente de la siguiente forma

$$F_J^{(n+1)}(p_1, .., p_j, .., p_{n+1}) \to F_J^{(n)}(p_1, ..., p_{n+1}) \qquad \text{si} \ \ p_j \to 0 \ , \tag{3.24}$$

$$F_J^{(n+1)}(p_1, .., p_i, .., p_j, .., p_{n+1}) \to F_J^{(n)}(p_1, .., p_i + p_j, .., p_{n+1}) \qquad \text{si} \ \ p_i \parallel p_j \ , \tag{3.25}$$

$$F_J^{(m)}(p_1, ..., p_m) \to 0 \qquad \text{si} \ \ p_i \cdot p_j \to 0 \ . \tag{3.26}$$

Las ecuaciones (3.24) y (3.25) garantizan que el observable está libre de divergencias infrarrojas y colineales respectivamente, para cualquier número n de partones finales, a cualquier orden en teoría de perturbaciones de QCD. La Ec. (3.26) define la sección eficaz a LO, es decir, asegura que la sección eficaz a orden más bajo $d\sigma^B$ en la Ec. (3.23) está bien definida (es decir, es finita luego de integrarla) en $d = 4$ dimensiones.

3.3.2. NLO: el término de sustracción

La contribución real $d\sigma^R$ a la sección eficaz a NLO en la Ec. (3.3) tiene la misma expresión que $d\sigma^B$ en la Ec. (3.23), más allá del reemplazo $m \to m+1$. La forma general para el contratérmino local $d\sigma^A$ en la Ec. (3.4) está provista por la fórmula de factorización dipolar (3.14):

$$\begin{aligned} d\sigma^A &= \mathcal{N}_{in} \sum_{\{m+1\}} d\phi_{m+1}(p_1, ..., p_{m+1}; Q) \, \frac{1}{S_{\{m+1\}}} \\ &\cdot \sum_{\substack{\text{pairs} \\ i,j}} \sum_{k \neq i,j} \mathcal{D}_{ij,k}(p_1, ..., p_{m+1}) \, F_J^{(m)}(p_1, ..\widetilde{p}_{ij}, \widetilde{p}_k, .., p_{m+1}) \ . \end{aligned} \tag{3.27}$$

Aquí, $\mathcal{D}_{ij,k}(p_1, ..., p_{m+1})$ es la contribución dipolar en la Ec. (3.15) y $F_J^{(m)}(p_1, ..\widetilde{p}_{ij}, \widetilde{p}_k, .., p_{m+1})$ es la función jet, que corresponde al estado de m-partones $\{p_1, ..\widetilde{p}_{ij}, \widetilde{p}_k, .., p_{m+1}\}$. Nótese que ésta es completamente independiente de p_i, y esto hace que sea posible integrar a $d\sigma^A$ analíticamente sobre el espacio de fases de i sin ninguna información sobre la forma de F_J. Podemos chequear que la definición (3.27) hace que la diferencia $d\sigma^R - d\sigma^A$ sea integrable en $d = 4$ dimensiones. Su expresión explícita es

$$\begin{aligned} d\sigma^R - d\sigma^A &= \mathcal{N}_{in} \sum_{\{m+1\}} d\phi_{m+1}(p_1, ..., p_{m+1}; Q) \, \frac{1}{S_{\{m+1\}}} \\ &\cdot \Big\{ |\mathcal{M}_{m+1}(p_1, ..., p_{m+1})|^2 \, F_J^{(m+1)}(p_1, ..., p_{m+1}) \\ &- \sum_{\substack{\text{pairs} \\ i,j}} \sum_{k \neq i,j} \mathcal{D}_{ij,k}(p_1, ..., p_{m+1}) \, F_J^{(m)}(p_1, ..\widetilde{p}_{ij}, \widetilde{p}_k, .., p_{m+1}) \Big\} \ . \end{aligned} \tag{3.28}$$

Cada término entre llaves es singular por separado en las regiones soft y colineal. Sin embargo en cada una de estas regiones los elementos de matriz $\mathcal{M}_{m+1}$ y el espacio de fase para la configuración de m-partones se comportan como la correspondiente contribución dipolar y el correspondiente espacio de fases dipolar:

$$|\mathcal{M}_{m+1}(p_1, ..., p_{m+1})|^2 \ \to \ \mathcal{D}_{ij,k}(p_1, ..., p_{m+1}) \ , \tag{3.29}$$

$$\{p_1, ..p_i, ..p_j, ..p_k, .., p_{m+1}\} \ \to \ \{p_1, ..\widetilde{p}_{ij}, \widetilde{p}_k, .., p_{m+1}\} \ . \tag{3.30}$$

Entonces, debido a las Ecs. (3.24) y (3.25), las singularidades del primer término entre llaves son canceladas por las correspondientes singularidades en el segundo término.

3.3.3. NLO: integración del término de sustracción

Habiendo discutido la cualidad de integrable de $(d\sigma^R - d\sigma^A)$, el paso final ahora, es considerar la cualidad de integrable de $d\sigma^A$ sobre el subespacio de fases de un partón en d dimensiones. Y cómo es que esta integración conduce a las divergencias soft y colineales.

La definición de (3.16) de los momentos dipolares nos habilita a factorizar de manera exacta el espacio de fase de los partones i, j, k en el espacio de fases dipolar multiplicado por el de un único partón,

$$d\phi_{m+1}(p_1, .., p_i, p_j, p_k, .., p_{m+1}; Q) = d\phi_m(p_1, .., \widetilde{p}_{ij}, \widetilde{p}_k, .., p_{m+1}; Q) \ [dp_i(\widetilde{p}_{ij}, \widetilde{p}_k)] \ , \tag{3.31}$$

donde

$$[dp_i(\widetilde{p}_{ij},\widetilde{p}_k)] = \frac{d^d p_i}{(2\pi)^{d-1}}\,\delta_+(p_i^2)\;\Theta(1-\tilde{z}_i)\,\Theta(1-y_{ij,k})\;\frac{(1-y_{ij,k})^{d-3}}{1-\tilde{z}_i}\;, \tag{3.32}$$

y las variables cinemáticas $y_{ij,k}$ y $\tilde{z}_i$ están definidas en las Ecs. (3.17,3.18).

Insertando la Ec. (3.31) y la expresión explícita (3.15) para $\mathcal{D}_{ij,k}$ en la Ec. (3.27), podemos factorizar completamente la dependencia en p_i y realizar la integración sobre la región del espacio de fase (3.32) con los m momentos partónicos $\{p_1,..,\widetilde{p}_{ij},\widetilde{p}_k,..,p_{m+1}\}$ fijos.

El resultado final para $\int_{m+1} d\sigma^A$ puede ser escrito en términos de una integral de m-partones de los elementos de matriz a LO por un factor [51]:

$$\begin{aligned}\int_{m+1} d\sigma^A = \int_m \left[\int_1 d\sigma^A\right] &= \int_m \mathcal{N}_{in}\sum_{\{m\}} d\phi_m(p_1,...,p_m;Q)\;\frac{1}{S_{\{m\}}} \\ &\cdot\;\; {}_m\!<1,...,m|\;\boldsymbol{I}(\epsilon)\;|1,...,m>_m\;\; F_J^{(m)}(p_1,...,p_m)\;\;. \end{aligned}\tag{3.33}$$

Comparando las Ecs. (3.33) y (3.23), vemos que la integración de $d\sigma^A$ sobre el subespacio de un partón que produce las singularidades soft y colineales, conduce a una expresión completamente análoga a $d\sigma^B$. Solo debemos reemplazar los elementos de matriz cuadrado $\mathcal{M}m = {}_m\!<1,...,m|1,...,m>_m$ en $d\sigma^B$ con

$${}_m\!<1,...,m|\;\boldsymbol{I}(\epsilon)\;|1,...,m>_m\;, \tag{3.34}$$

donde $\boldsymbol{I}(\epsilon)$ es un operador que depende de la carga de color y momento de los m partones del estado final. Su expresión es [51]:

$$\boldsymbol{I}(p_1,...,p_m;\epsilon) = -\frac{\alpha_s}{2\pi}\frac{1}{\Gamma(1-\epsilon)}\sum_i \frac{1}{\boldsymbol{T}_i^2}\;\mathcal{V}_i(\epsilon)\;\sum_{k\neq i}\boldsymbol{T}_i\cdot\boldsymbol{T}_k\;\left(\frac{4\pi\mu^2}{2p_i\cdot p_k}\right)^{\epsilon}\;, \tag{3.35}$$

donde los factores singulares $\mathcal{V}_i(\epsilon)$ tienen la siguiente expansión en ϵ [3]

$$\mathcal{V}_i(\epsilon) = \boldsymbol{T}_i^2\left(\frac{1}{\epsilon^2}-\frac{\pi^2}{3}\right)+\gamma_i\;\frac{1}{\epsilon}+\gamma_i+K_i+\mathcal{O}(\epsilon)\;\;, \tag{3.36}$$

con ($T_R = 1/2$ y N_f es el número de sabores):

$$\gamma_{i=q,\bar{q}} = \tfrac{3}{2}\,C_F\;,\quad \gamma_{i=g} = \tfrac{11}{6}\,C_A - \tfrac{2}{3}T_R N_f\;, \tag{3.37}$$

$$K_{i=q,\bar{q}} = \left(\tfrac{7}{2}-\tfrac{\pi^2}{6}\right)C_F\;,\quad K_{i=g} = \left(\tfrac{67}{18}-\tfrac{\pi^2}{6}\right)C_A - \tfrac{10}{9}T_R N_f\;. \tag{3.38}$$

La contribución virtual (renormalizada) en términos de los elementos de matriz a un-loop es la siguiente,

$$d\sigma^V = \mathcal{N}_{in}\sum_{\{m\}} d\phi_m(p_1,...,p_m;Q)\;\frac{1}{S_{\{m\}}}\;|\mathcal{M}_m(p_1,...,p_m)|^2_{(1-loop)}\;F_J^{(m)}(p_1,...,p_m)\;\;. \tag{3.39}$$

Como se discute en la Ref. [51], el agregado de esas dos contribuciones produce la cancelación de manera correcta de todos los polos en ϵ, posibilitando que la sección eficaz a NLO sea finita.

[3] La expresión exacta en cualquier número de dimensiones $d = 4-2\epsilon$ está dada en [51].

3.4. Resumen del método

Los resultados finales del algoritmo dipolar para el cálculo de secciones eficaces sin hadrones en el estado inicial, se detallan a continuación.

Si asumimos que el cálculo a LO involucra m partones en el estado final, la sección eficaz a LO está dada por

$$\sigma^{LO} = \int_m d\sigma^B = \int d\Phi^{(m)} \, |\mathcal{M}_m(p_1, ..., p_m)|^2 \, F_J^{(m)}(p_1, ..., p_m) \ , \tag{3.40}$$

donde $\mathcal{M}_m$ es el elemento de matriz de QCD a orden árbol, de la producción de m partones en el estado final y la función $F_J^{(m)}$ define el observable en particular en el que estamos interesados. El factor $d\Phi^{(m)}$ colecta todos los factores del espacio de fases relevantes. Todo el cálculo (la integración sobre el espacio de fase y la evaluación de los elementos de matriz) puede ser hecho en las cuatro dimensiones del espacio tiempo.

De acuerdo a la fórmula de sustracción (Ec. (3.6)), la sección eficaz a NLO es calculada en dos partes. Una contiene la cinemática de $m+1$ partones y la otra de m partones. La contribución para el término con cinemática de $m+1$ partones es la siguiente

$$\begin{aligned} \int_{m+1} \left[d\sigma^R_{\epsilon=0} - d\sigma^A_{\epsilon=0} \right] \ = \ & \int d\Phi^{(m+1)} \Big\{ \ |\mathcal{M}_{m+1}(p_1, ..., p_{m+1})|^2 \, F_J^{(m+1)}(p_1, ..., p_{m+1}) \\ & - \sum_{\substack{\text{pairs} \\ i,j}} \sum_{k \neq i,j} \mathcal{D}_{ij,k}(p_1, ..., p_{m+1}) \, F_J^{(m)}(p_1, ..\widetilde{p}_{ij}, \widetilde{p}_k, .., p_{m+1}) \ \Big\} \ , \end{aligned} \tag{3.41}$$

donde el término entre llaves es el mismo que en la Ec. (3.28): $\mathcal{M}_{m+1}$ es el elemento de matriz a orden árbol, $\mathcal{D}_{ij,k}$ es el factor dipolar en la Ec. (3.15) y $F_J^{(m)}$ es la función que define al observable.

La contribución a NLO con cinemática de m partones está dada por

$$\begin{aligned} & \int_m \left[d\sigma^V + \int_1 d\sigma^A \right]_{\epsilon=0} \\ & = \int d\Phi^{(m)} \left\{ |\mathcal{M}_m(p_1, ..., p_m)|^2_{(1-loop)} + {}_m\!< 1, ..., m| \, \boldsymbol{I}(\epsilon) \, |1, ..., m >_m \right\}_{\epsilon=0} F_J^{(m)}(p_1, ..., p_m) \ . \end{aligned} \tag{3.42}$$

El primer término entre las llaves es el elemento de matriz a un-loop cuadrado con cinemática de m partones en el estado final. El segundo término es obtenido insertando el operador de carga de color de la Ec. (3.35), en el elemento de matriz a orden árbol con cinemática de m partones en el estado final. Estos dos términos primero deben evaluarse en $d = 4 - 2\epsilon$ dimensiones. Luego hay que hacer la expansión en polos en ϵ, cancelando analíticamente (sumando simplemente) los polos y tomando el límite $\epsilon \to 0$. Luego de esto, la integración se realiza en las cuatro dimensiones del espacio tiempo.

Capítulo 4

El formalismo de sustracción a NNLO

En este capítulo trataremos otra de las extensiones del formalismo de sustracción. Esta vez, la extensión correspondiente para alcanzar la precisión NNLO. Éste es un método propuesto en su forma original por Stefano Catani y Massimiliano Grazzini [42][1], y fue completado para dar con su forma final y general con el trabajo realizado en esta tesis.

Como explicamos en capítulos anteriores, la dinámica de los procesos de colisiones a altas escalas de momento Q transferido, puede ser descrita con pQCD de manera satisfactoria. Gracias a la libertad asintótica, una sección eficaz para reacciones suficientemente inclusivas puede ser calculada como una expansión en serie en la constante de acople de QCD, $\alpha_s(Q^2)$. En el capítulo anterior sentamos las bases del formalismo dipolar, que permite alcanzar el NLO para cualquier tipo de colisión y de estado final. Aunque para un gran número de procesos el NLO es suficiente para una satisfactoria descripción de su fenomenología, existen algunos casos en los que es deseable contar con una descripción a NNLO. En particular, esta extensión es con certeza muy importante en dos situaciones: en aquellos procesos en los que la corrección a NLO es comparable al LO, y en aquellos procesos que son medidos con gran precisión experimental. Ya que de otra forma, la precisión de la información que se desee extraer de tales mediciones estaría limitada por la descripción teórica.

Esta variante del formalismo de sutracción, utiliza también las propiedades generales de los elementos de matriz en las regiones soft y colineales para alcanzar el NNLO. Así como opera el formalismo dipolar, generando contra-términos (llamados dipolos) para cancelar las divergencias que surgen en las etapas intermedias del cálculo, el formalismo a NNLO también provee de un conjunto de contra-términos (no-locales) que sirven para cancelar de manera numérica las singularidades que aparecen en los estados intermedios del cálculo. Tales contra-términos son calculados con la ayuda del programa de resumación en momento transverso q_T.

Además, el procedimiento requiere la inclusión de la parte finita de los elementos de matriz a un-loop y dos-loops del proceso bajo análisis. Parte del trabajo original de esta tesis consistió en elaborar un método para calcular de manera general estas contribuciones finitas, si se cuenta con los elementos de matrices a un-loop y dos-loops. Este método se detalla en los capítulos siguientes.

El procedimiento de sustracción a NNLO es presentado en la siguiente forma: primero se dan las nociones básicas del formalismo de resumación en momento transverso q_T, para

[1] Este método está basado en los resultados de la Ref. [100], propuestos por Catani, Grazzini, de Florian y Bozzi.

hallar el contratérmino a cada orden correspondiente (NLO y NNLO). Luego se utilizan estas nociones para proponer una fórmula de sustracción que sirve para calcular secciones eficaces cuyos estados finales no posean color a NLO y NNLO.

4.1. El formalismo de resumación en momento transverso

Consideramos ahora el siguiente proceso de hard-scattering

$$h_1(p_1) + h_2(p_2) \to F(M, q_T) + X \quad , \tag{4.1}$$

donde la colisión entre los dos hadrones h_1 y h_2 con momento p_1 y p_2 produce el estado final a ser detectado F, acompañado por un estado final arbitrario e indetectado X. Denotamos por $\sqrt{s}$ a la energía del centro de masa de los hadrones que colisionan ($s = (p_1+p_2)^2 \simeq 2p_1p_2$). El estado final F (a observar) es un sistema general de partículas (no-QCD) tal como *uno* o *más* bosones vectoriales ($\gamma^*, W, Z, \dots$), bosones de Higgs , pares de leptones de Drell–Yan (DY), etc. No es posible considerar un estado final F con color (hadrones, jets, quarks pesados, ...), ya que en este caso, el formalismo de resumación de logaritmos en momento transverso q_T, no está completamente desarrollado.

Nos limitamos a considerar el caso en el que sólo la masa invariante M y el momento transverso q_T del sistema F son medidos. De acuerdo con la fórmula de factorización (ver Ref. [86] y sus referencias), la sección eficaz diferencial en momento transverso[2] $d\hat{\sigma}_F/dq_T^2$ puede ser escrita en la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_F}{dq_T^2}(q_T, M, s) &= \sum_{a,b} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2\, f_{a/h_1}(x_1, \mu_F^2)\, f_{b/h_2}(x_2, \mu_F^2) \\ &\quad \times \frac{d\hat{\sigma}_{F\,ab}}{dq_T^2}(q_T, M, \hat{s}; \alpha_s(\mu_R^2), \mu_R^2, \mu_F^2) \ , \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde $f_{a/h}(x, \mu_F^2)$ ($a = q_f, \bar{q}_f, g$) son las densidades partónicas de los hadrones que colisionan a la escala de factorización μ_F, $d\hat{\sigma}_{F\,ab}/dq_T^2$ son las secciones eficaces partónicas, $\hat{s} = x_1x_2s$ es la energía partónica del centro de masa , y μ_R es la escala de renormalización.

En esta tesis se utilizan densidades partónicas definidas en el esquema de factorización $\overline{\text{MS}}$ y $\alpha_s(q^2)$ es la constante de acoplamiento fuerte de QCD, en el esquema de renormalización $\overline{\text{MS}}$. Como se explicó en los capítulos introductorios, la sección eficaz partónica puede ser calculada usando teoría de perturbaciones de QCD, como una expansión en series en α_s. Asumimos que a nivel partónico, el sistema F es producido con momento transverso q_T despreciable (es decir sin radiación en el estado final que lo acompañe) a orden más bajo, de manera que la sección eficaz correspondiente satisface $d\hat{\sigma}^{(0)}_{F\,c\bar{c}}/dq_T^2 \propto \delta(q_T^2)$. Ya que F no posee color, el subproceso partónico a orden más bajo, $c+\bar{c} \to F$ sólo puede ser aniquilación $q\bar{q}$ ($c = q$), como en el caso de producción de γ^*, W y Z, o fusión gg ($c = g$), en el caso de la producción del bosón de Higgs del SM.

Las correcciones perturbativas de orden mayor a la sección eficaz partónica $d\hat{\sigma}_{F\,ab}/dq_T^2$ contienen términos logarítmicos del tipo $\ln^m(M^2/q_T^2)$ que pueden ser grandes en la región

[2] Para precisar, cuando el sistema final F no es una única partícula *on-shell* de masa M, lo que denotamos por $d\hat{\sigma}_F/dq_T^2$ es realmente la sección eficaz diferencial $M^2 d\hat{\sigma}_F/dM^2dq_T^2$.

de momento transverso q_T pequeño ($q_T \ll M$). Por lo tanto, introducimos la siguiente descomposición de la sección eficaz partónica de la Ec. (4.2):

$$\frac{d\hat{\sigma}_{F\,ab}}{dq_T^2} = \frac{d\hat{\sigma}_{F\,ab}^{(\text{res.})}}{dq_T^2} + \frac{d\hat{\sigma}_{F\,ab}^{(\text{fin.})}}{dq_T^2} \,. \tag{4.3}$$

La distinción entre los dos términos del lado derecho es sólo teórica. El primer término (el término resumado), $d\hat{\sigma}_{F\,ab}^{(\text{res.})}$, sobre el lado derecho, contiene todas las contribuciones de los términos logarítmicos, $(\alpha_s^n/q_T^2)\,\ln^m(M^2/q_T^2)$, a pequeño q_T, y tiene que ser evaluada resumando a todo orden en α_s. El segundo término (el término finito), $d\hat{\sigma}_{F\,ab}^{(\text{fin.})}$, está libre de tales contribuciones, y puede ser computado truncando la serie perturbativa a un dado orden fijo.

4.1.1. La componente resumada

La componente resumada $d\hat{\sigma}_{F\,ab}^{(\text{res})}$ de la sección eficaz partónica no puede ser evaluada calculando todas las contribuciones logarítmicas en la serie perturbativa. Sin embargo estas contribuciones pueden ser sistemáticamente organizadas en clases de términos LL[3], NLL, ..., y entonces este desarrollo logarítmico puede ser tomado a un dado orden de precisión logarítmico.

El procedimiento de resumación tiene que ser realizado en el espacio del parámetro de impacto, para tener en cuenta los vínculos cinemáticos que fijan la conservación del momento transverso de manera correcta. La componente resumada de la sección eficaz en momento transverso en la Ec. (4.3), es entonces obtenida realizando la transformación inversa de Fourier (Bessel), respecto del parámetro de impacto b. Así es que escribimos[4]

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\sigma}_{F\,ab}^{(\text{res.})}}{dq_T^2}(\quad & q_T \quad , M, \hat{s}; \alpha_s(\mu_R^2), \mu_R^2, \mu_F^2) \\
&= \frac{M^2}{\hat{s}} \int \frac{d^2\mathbf{b}}{4\pi}\, e^{i\mathbf{b}\cdot q_T}\, \mathcal{W}_{ab}^F(b, M, \hat{s}; \alpha_s(\mu_R^2), \mu_R^2, \mu_F^2) \qquad (4.4)\\
&= \frac{M^2}{\hat{s}} \int_0^\infty db\, \frac{b}{2}\, J_0(bq_T)\, \mathcal{W}_{ab}^F(b, M, \hat{s}; \alpha_s(\mu_R^2), \mu_R^2, \mu_F^2)\,, \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

donde $J_0(x)$ es la función de Bessel de 0-orden. El factor perturbativo y dependiente del proceso $\mathcal{W}_{ab}^F$ incluye la dependencia a todo orden sobre las grandes contribuciones logarítmicas a grandes valores de b, las que corresponden, en el espacio de q_T, a términos del tipo $\ln M^2/q_T^2$, que pueden resultar muy grandes a pequeño q_T (el límite $q_T \ll M$ corresponde a $Mb \gg 1$, ya que b es la variable conjugada de q_T). La resumación de estos grandes logaritmos puede expresarse mejor definiendo los N-momentos[5] $\mathcal{W}_N$ de $\mathcal{W}$, respecto de $z = M^2/\hat{s}$, a fijo M:

$$\mathcal{W}_{ab,\,N}^F(b, M; \alpha_s(\mu_R^2), \mu_R^2, \mu_F^2) \equiv \int_0^1 dz\, z^{N-1}\, \mathcal{W}_{ab}^F(b, M, \hat{s} = M^2/z; \alpha_s(\mu_R^2), \mu_R^2, \mu_F^2)\,. \tag{4.6}$$

[3]De la frase en inglés: *Leading Logarithmic*, primer orden logarítmico. NLL corresponde a la frase en inglés: *Next-to-Leading-Logarithmic*, orden logarítmico siguiente al más bajo.

[4]El subíndice b, que etiqueta el sabor del partón, no deberá ser confundido con el parámetro de impacto b.

[5]Los N-momentos h_N para cualquier función $h(z)$ de la variable z se definen: $h_N = \int_0^1 dz\, z^{N-1}\, h(z)$.

Los términos logarítmicos incluidos en $\mathcal{W}^F_{ab,\,N}$ tienen su origen en la radiación de estado final de los partones que son soft o colineales respecto de los incidentes. Su resumación a todo orden puede ser organizada [101] de manera análoga a los casos de gluones-soft resumados para colisiones hadrónicas en procesos de colisiones hard [102, 103] y contribuciones umbral a las secciones eficaces hadrónicas [104].

Escribamos

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^F_N(b, M; \alpha_s(\mu_R^2), \mu_R^2, \mu_F^2) &= \mathcal{H}^F_N\left(M, \alpha_s(\mu_R^2); M^2/\mu_R^2, M^2/\mu_F^2, M^2/Q^2\right) \\ &\quad \times \exp\{\mathcal{G}_N(\alpha_s(\mu_R^2), L; M^2/\mu_R^2, M^2/Q^2)\} \ . \end{aligned} \tag{4.7}$$

La función $\mathcal{H}^F_N$ no depende del parámetro de impacto b y, por lo tanto, contiene todos los términos perturbativos que se comportan como constantes en el límite $b \to \infty$. La función $\mathcal{G}$ incluye la dependencia completa en b y, en particular contiene todos los términos que orden a orden en α_s son divergentes logarítmicamente cuando $b \to \infty$. Esta factorización entre términos constantes y logarítmicos involucra cierto grado de arbitrariedad, ya que el argumento de los grandes logarítmos siempre puede ser reescaleado como $\ln M^2 b^2 = \ln Q^2 b^2 + \ln M^2/Q^2$, dado que Q es independiente de b y que $\ln M^2/Q^2 = \mathcal{O}(1)$ cuando $bM \gg 1$. Para parametrizar esta arbitrariedad, sobre el lado derecho de la Ec. (4.7) hemos introducido la dependencia en la escala (de resumación) Q, tal que $Q \sim M$, y hemos definido el parámetro de expansión logarítmica L, como

$$L \equiv \ln \frac{Q^2 b^2}{b_0^2} \ , \tag{4.8}$$

donde el coeficiente $b_0 = 2e^{-\gamma_E}$ ($\gamma_E = 0{,}5772\ldots$ es el número de Euler) tiene su origen en la cinemática del proceso (el uso de b_0 en la Ec. (4.8) es puramente convencional: este simplifica la expresión algebráica de $\mathcal{G}$).

Todos los términos logarítmicos $\alpha_s^n L^m$ con $1 \leq m \leq 2n$ están incluidos en el factor de forma $\exp\{\mathcal{G}\}$. Mas aun, todas las contribuciones logarítmicas a $\mathcal{G}$ con $n+2 \leq m \leq 2n$ son nulas. Esta propiedad, que es llamada de exponenciación [105, 106], surge de la dinámica perturbativa de teorías de gauge (abelianas o no abelianas) y de la factorización cinemática en el espacio de parámetro de impacto. Así, el exponente $\mathcal{G}$ puede ser expandido sistemáticamente como

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_N(\alpha_s, L; M^2/\mu_R^2, M^2/Q^2) &= L\, g^{(1)}(\alpha_s L) + g_N^{(2)}(\alpha_s L; M^2/\mu_R^2, M^2/Q^2) \\ &\quad + \frac{\alpha_s}{\pi}\, g_N^{(3)}(\alpha_s L; M^2/\mu_R^2, M^2/Q^2) \\ &\quad + \sum_{n=4}^{+\infty} \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^{n-2} g_N^{(n)}(\alpha_s L; M^2/\mu_R^2, M^2/Q^2) \ , \end{aligned} \tag{4.9}$$

donde $\alpha_s = \alpha_s(\mu_R^2)$ y las funciones $g^{(n)}(\alpha_s L)$ están definidas tal que $g^{(n)} = 0$ cuando $\alpha_s L = 0$. Entonces el término $Lg^{(1)}$ incluye todas las contribuciones LL $\alpha_s^n L^{n+1}$; la función $g^{(2)}$ resuma las contribuciones NLL $\alpha_s^n L^n$; $g^{(3)}$; $g^{(3)}$ controla los términos NNLL $\alpha_s^n L^{n-1}$, y así. Cabe destacar que en el contexto de la aproximación de resumación, el parámetro $\alpha_s L$ está considerado de manera formal como de orden unidad. Entonces la razón de dos términos sucesivos en el desarrollo (4.9) es de orden $\mathcal{O}(\alpha_s)$. En este sentido el desarrollo logarítmico resumado en la Ec. (4.9) es tan sistemático como cualquier desarrollo de orden fijo en potencias de α_s.

La función $\mathcal{H}_N^F$ en la Ec. (4.7) no contiene grandes términos logarítmicos a ser resumados. Ésta puede ser expandida en términos de potencias de $\alpha_s = \alpha_s(\mu_R^2)$,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_N^F(M,\alpha_s;M^2/\mu_R^2,M^2/\mu_F^2,M^2/Q^2) = \sigma_F^{(0)}(\alpha_s,M)\Big[1 &+ \frac{\alpha_s}{\pi}\,\mathcal{H}_N^{F\,(1)}(M^2/\mu_R^2,M^2/\mu_F^2,M^2/Q^2)\\ &+ \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 \mathcal{H}_N^{F\,(2)}(M^2/\mu_R^2,M^2/\mu_F^2,M^2/Q^2) \qquad (4.10)\\ &+ \sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^n \mathcal{H}_N^{F\,(n)}(M^2/\mu_R^2,M^2/\mu_F^2,M^2/Q^2)\Big] \ ,\end{aligned}$$

donde $\sigma_F^{(0)} = \alpha_s^p\,\sigma_F^{(\mathrm{LO})}$ es la sección partónica de orden más bajo para el proceso de colisión hard de la Ec. (4.1).

En particular, ya que $\exp\{\mathcal{G}(\alpha_s,\widetilde{L})\} = 1$ a $b = 0$, usando las Ecs. (4.4) y (4.7) obtenemos la relación

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dq_T^2\,\frac{d\hat{\sigma}_F^{(\mathrm{res.})}}{dq_T^2}(q_T,M,\hat{s};\alpha_s(\mu_R^2),\mu_R^2,\mu_F^2,Q^2)\\ = \frac{M^2}{\hat{s}}\,\mathcal{H}^F\big(M,\hat{s},\alpha_s(\mu_R^2);M^2/\mu_R^2,M^2/\mu_F^2,M^2/Q^2\big) \ , \qquad (4.11)\end{aligned}$$

la cual simplemente se deduce del hecho de que el valor a $b = 0$ de la transformación de Fourier (en el espacio b) de la distribución en q_T, es igual a la integral sobre q_T de la distribución en q_T misma

El propósito del programa de resumación en momento transverso [105, 106] es evaluar explícitamente las funciones logarítmicas $g_N^{(n)}$ de la Ec. (4.9) en términos de unos pocos coeficientes que son calculables perturbativamente. Cómo se ilustrará en la Sec. 4.1.2, este fin es logrado mostrando que la fórmula de resumación a todo orden (4.9) tiene la siguiente representación integral:

$$\mathcal{G}_N(\alpha_s(\mu_R^2),L;M^2/\mu_R^2,M^2/Q^2) = -\int_{b_0^2/b^2}^{Q^2}\frac{dq^2}{q^2}\left[A(\alpha_s(q^2))\,\ln\frac{M^2}{q^2} + \widetilde{B}_N(\alpha_s(q^2))\right] \ , \qquad (4.12)$$

donde $A(\alpha_s)$ y $\widetilde{B}_N(\alpha_s)$ son funciones perturbativas

$$A(\alpha_s) = \frac{\alpha_s}{\pi}A^{(1)} + \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 A^{(2)} + \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^3 A^{(3)} + \sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^n A^{(n)} \ , \qquad (4.13)$$

$$\widetilde{B}_N(\alpha_s) = \frac{\alpha_s}{\pi}\widetilde{B}_N^{(1)} + \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 \widetilde{B}_N^{(2)} + \sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^n \widetilde{B}_N^{(n)} \ . \qquad (4.14)$$

Los coeficientes $A^{(n)}$ y $\widetilde{B}_N^{(n)}$ están relacionados con los coeficientes de los factores de forma de Sudakov y de la dimensión anómala partónica.

Usando la Ec. (4.4), la componente resumada $d\hat{\sigma}_F^{(\mathrm{res.})}/dq_T^2$ de la distribución en q_T está completamente determinada por las funciones $\mathcal{H}_N^F$ y $\mathcal{G}_N$ en la Ec. (4.7). Estas funciones están en cambio especificadas por los coeficientes perturbativos $\mathcal{H}_N^{F\,(n)}$ (ver Ec. (4.10)), $A^{(n)}$ y $\widetilde{B}_N^{(n)}$ (ver Ecs. (4.12)–(4.14)), los que pueden ser extraídos desde los términos logarítmicos en la expansión perturbativa de la distribución en q_T al orden relativo n-ésimo en α_s. Por lo tanto, el cálculo regular de orden fijo de la distribución en q_T es suficiente para obtener toda la información necesaria para realizar de manera explícita la resumación a la precisión logarítmica requerida.

4.1.2. Factor de forma de Sudakov

La técnica de resumación en el espacio b fue formalizada por Collins, Soper y Sterman [107, 108] en término de coeficientes perturbativos. Considerando el proceso genérico de colisión hard en la Ec. (4.1), la sección diferencial en momento transverso en la Ec. (5.1) puede ser escrita,

$$\frac{d\sigma_F}{dq_T^2}(q_T, M, s) = \frac{M^2}{s} \int_0^\infty db\, \frac{b}{2}\, J_0(bq_T)\, W^F(b, M, s) + \dots \ , \tag{4.15}$$

donde los puntos sobre el lado derecho de la ecuación significa la presencia de términos que no son grandes logarítmicamente a pequeño q_T (grandes valores de b). Cabe destacar que la Ec. (4.15) considera la sección eficaz hadrónica (y no la sección eficaz partónica en la Ec. (4.5)). Por lo tanto, la función $W^F(b, M, s)$ en el espacio b, la que incluye todos los términos logarítmicos que se vuelven grandes a pequeño momento transverso, depende de las PDFs de los hadrones que colisionan. La resumación a todo orden de los grandes logarítmos $\ln(M^2b^2)$ en la región $Mb \gg 1$ se logra mostrando que los N-momentos [6] $W_N(b, M)$ de $W(b, M, s)$ respecto de $z = M^2/s$ a fijo M pueden ser reescritos en la siguiente forma [108, 101]

$$\begin{aligned} W_N^F(b, M) = &\sum_c \sigma^{(0)}_{c\bar{c},\,F}(\alpha_s(M^2), M)\; H_c^F(\alpha_s(M^2))\; S_c(M, b) \\ &\times \sum_{a,b} C_{ca,\,N}(\alpha_s(b_0^2/b^2))\; C_{\bar{c}b,\,N}(\alpha_s(b_0^2/b^2))\; f_{a/h_1,\,N}(b_0^2/b^2)\; f_{b/h_2,\,N}(b_0^2/b^2) \ , \end{aligned} \tag{4.16}$$

donde $f_{a/h,\,N}(\mu^2)$ son los N-momentos de las PDFs $f_{a/h}(z, \mu^2)$, y $\sigma^{(0)}_{c\bar{c},\,F}$ es la sección eficaz a orden más bajo para el subproceso partónico $c + \bar{c} \to F$. La función $S_c(M, b)$ es el factor de forma de Sudakov del quark ($c = q, \bar{q}$) o del gluón ($c = g$), y éste tiene la siguiente expresión

$$S_c(M, b) = \exp\left\{ -\int_{b_0^2/b^2}^{M^2} \frac{dq^2}{q^2} \left[A_c(\alpha_s(q^2))\; \ln\frac{M^2}{q^2} + B_c(\alpha_s(q^2)) \right] \right\} \ . \tag{4.17}$$

Las funciones A, B, C y H^F en las Ecs. (4.16) y (4.17) son series perturbativas en α_s:

$$A_c(\alpha_s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^n A_c^{(n)} \ , \tag{4.18}$$

$$B_c(\alpha_s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^n B_c^{(n)} \ , \tag{4.19}$$

$$C_{ab}(\alpha_s, z) = \delta_{ab}\, \delta(1-z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^n C_{ab}^{(n)}(z) \ , \tag{4.20}$$

$$H_c^F(\alpha_s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^n H_c^{F\,(n)} \ . \tag{4.21}$$

Las funciones A_c, B_c y C_{ab} son independientes del proceso, mientras que H_c^F depende del específico proceso de colisión hard.

[6] En esta sección seguimos a la Ref. [109] en la definición (poco convencional) de los momentos $f(N) = \int_0^1 dz z^N f(z)$.

Las fórmulas de resumación (4.16) y (4.17) son invariantes bajo las siguientes transformaciones de 'esquema de resumación' [101]:

$$\begin{aligned} H_c^F(\alpha_s) &\rightarrow H_c^F(\alpha_s)\ [\,h(\alpha_s)\,]^{-1}\ , \\ B_c(\alpha_s) &\rightarrow B_c(\alpha_s) - \beta(\alpha_s)\ \frac{d\ln h(\alpha_s)}{d\ln\alpha_s}\ , \\ C_{ab}(\alpha_s, z) &\rightarrow C_{ab}(\alpha_s, z)\ [\,h(\alpha_s)\,]^{1/2}\ . \end{aligned} \tag{4.22}$$

La invarianza puede ser probada usando la siguiente identidad de grupo de renormalización,

$$h(\alpha_s(b_0^2/b^2)) = h(\alpha_s(M^2))\ \exp\left\{ -\int_{b_0^2/b^2}^{M^2} \frac{dq^2}{q^2}\ \beta(\alpha_s(q^2))\ \frac{d\ln h(\alpha_s(q^2))}{d\ln\alpha_s(q^2)} \right\}\ , \tag{4.23}$$

la que es válida para cualquier función perturbativa $h(\alpha_s)$.

Comparando las secciones eficaces partónica y hadrónica en las Ecs. (4.5) y (4.16), vemos que los factores resumados $\mathcal{W}_{ab}^F$ y $W^F(b, M)$ están relacionados por

$$W_N^F(b, M) = \sum_{a,b} \mathcal{W}_{ab,\,N}^F(b, M; \alpha_s(\mu_R^2), \mu_R^2, \mu_F^2)\ f_{a/h_1,\,N}(\mu_F^2)\ f_{b/h_2,\,N}(\mu_F^2)\ . \tag{4.24}$$

Para expresar la sección partónica resumada $\mathcal{W}_{ab}^F$ en término de los coeficientes perturbativos en las Ecs. (4.18)–(4.21), tenemos que usar la Ec. (4.16) y sustituir las PDFs $f_{a/h,\,N}(b_0^2/b^2)$ por las mismas densidades partónicas evaluadas a la escala μ_F. La sustitución puede ser hecha usando

$$f_{a/h,\,N}(\mu^2) = \sum_b\ U_{ab,\,N}(\mu^2, \mu_0^2)\ f_{b/h,\,N}(\mu_0^2)\ , \tag{4.25}$$

donde el operador de evolución $U_{ab,\,N}(\mu^2, \mu_0^2)$ satisface las ecuaciones de evolución

$$\frac{d\,U_{ab,\,N}(\mu^2, \mu_0^2)}{d\ln\mu^2} = \sum_c \gamma_{ac,\,N}(\alpha_s(\mu^2))\ U_{cb,\,N}(\mu^2, \mu_0^2)\ , \tag{4.26}$$

y $\gamma_{ab,\,N}(\alpha_s)$ son las dimensiones anómalas o, con mayor precisión, los N-momentos de las usuales funciones de splitting de Altarelli–Parisi [90] $P_{ab}(\alpha_s, z)$ [83]:

$$\gamma_{ab,\,N}(\alpha_s) = \int_0^1 dz\ z^{N-1}\ P_{ab}(\alpha_s, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^n \gamma_{ab,\,N}^{(n)}\ . \tag{4.27}$$

Finalmente obtenemos [101]

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{ab,\,N}^F(b, M; \alpha_s(\mu_R^2), \mu_R^2, \mu_F^2) \ =\ & \sum_c \sigma_{c\bar{c},\,F}^{(0)}(\alpha_s(M^2), M)\ H_c^F(\alpha_s(M^2))\ S_c(M, b) \\ & \times \sum_{a_1,\,b_1} C_{ca_1,\,N}(\alpha_s(b_0^2/b^2))\ C_{\bar{c}b_1,\,N}(\alpha_s(b_0^2/b^2)) \\ & \times\ U_{a_1a,\,N}(b_0^2/b^2, \mu_F^2)\ U_{b_1b,\,N}(b_0^2/b^2, \mu_F^2)\ , \end{aligned} \tag{4.28}$$

lo que relaciona la sección eficaz partónica resumada en la Ec. (4.5) con los coeficientes perturbativos en las Ecs. (4.18)–(4.21) y los coeficientes de las dimensiones anómalas en la Ec. (4.27).

En los sigueintes párrafos haremos explícito cómo la Ec. (4.28) está relacionada con la estructura exponencial de la Ec. (4.7) en el caso en el que se considera una sola especie de partones. El caso general con partones de sabores diferentes se discute en la Ref. [100]. Aquí sólo anticipamos que la generalización de la Ec. (4.7) al caso de multisabores[7] simplemente involucra una suma de términos exponenciales,

$$\mathcal{W}^F_{ab,\,N}(b,M;\alpha_s(\mu_R^2),\mu_R^2,\mu_F^2) = \sum_{\{I\}} \mathcal{H}^{\{I\},\,F}_{ab,\,N}\left(M,\alpha_s(\mu_R^2);M^2/\mu_R^2,M^2/\mu_F^2,M^2/Q^2\right) \times \exp\{\mathcal{G}_{\{I\},\,N}(\alpha_s(\mu_R^2),L;M^2/\mu_R^2,M^2/Q^2)\} \ , \tag{4.29}$$

donde el índice $\{I\}$ etiqueta el conjunto de índices de sabor.

Teniendo en cuenta sólo el caso de una única especie de partones, la sección eficaz resumada partónica en la Ec. (4.28) puede ser fácilmente reescrita en la forma exponencial factorizada de las Ecs. (4.7) y (4.12). Con este propósito primero hacemos uso de la identidad (4.23) con $h(\alpha_s) = C_N(\alpha_s)$ para reemplazar $C_N(\alpha_s(b_0^2/b^2))$ en la Ec. (4.28) en término de $C_N(\alpha_s(M^2))$. Entonces insertamos en la Ec. (4.28) la solución de la ecuación de evolución (4.26):

$$U_N(b_0^2/b^2,\mu_F^2) = \exp\left\{-\int_{b_0^2/b^2}^{\mu_F^2} \frac{dq^2}{q^2}\,\gamma_N(\alpha_s(q^2))\right\} \ . \tag{4.30}$$

Finalmente obtenemos la forma exponencial en la Ec. (4.12), donde la función perturbativa $A(\alpha_s)$ es exactamente la función perturbativa en la Ec. (4.18), y la función $\widetilde{B}_N(\alpha_s)$ está dada (como sigue), en término de las funciones perturbativas en las Ecs. (4.19), (4.20) y (4.27):

$$\widetilde{B}_N(\alpha_s) = B(\alpha_s) + 2\beta(\alpha_s)\,\frac{d\ln C_N(\alpha_s)}{d\ln\alpha_s} + 2\gamma_N(\alpha_s) \ . \tag{4.31}$$

La expresión de la función $\mathcal{H}^F_N$ en la Ec. (4.7) es

$$\mathcal{H}^F_N(M,\alpha_s(\mu_R^2);M^2/\mu_R^2,M^2/\mu_F^2,M^2/Q^2) = \sigma_F^{(0)}(\alpha_s(M^2),M)\;H^F(\alpha_s(M^2))\;C_N^2(\alpha_s(M^2)) \times \exp\left\{\int_{M^2}^{Q^2}\frac{dq^2}{q^2}\left[A(\alpha_s(q^2))\;\ln\frac{M^2}{q^2} + \widetilde{B}_N(\alpha_s(q^2))\right] + \int_{\mu_F^2}^{M^2}\frac{dq^2}{q^2}\;2\,\gamma_N(\alpha_s(q^2))\right\} \ . \tag{4.32}$$

El factor de forma $\exp\{\mathcal{G}\}$ no depende del sistema de estado final F producido en el proceso de colisión hard. De las Ecs. (4.12) y (4.31), esta indenpendencia es una simple consecuencia de la independencia de proceso de cada función perturbativa $A_c(\alpha_s)$, $B_c(\alpha_s)$, $C_{ab}(\alpha_s)$ y $\gamma_{ab,\,N}(\alpha_s)$.

La relación (4.31) también implica que el factor de forma $\exp\{\mathcal{G}\}$ no depende del esquema de resumación usado para expresar los numerosos factores en las fórmulas de resumación (4.16) y (4.17) (recordemos que el factor de forma de Sudakov usual $S_c(M,b)$ en la Ec. (4.17) no depende en cambio del esquema de resumación). Es simple mostrar que la función $\widetilde{B}_N(\alpha_s)$ en la Ec. (4.31) es invariante bajo las transformaciones de esquema de resumación en la Ec. (4.22).

[7] En el caso de multisabores la Ec. (4.7) aplica directamente a las componentes no-singletes de la sección eficaz resumada.

Si bien no es el caso para el factor de forma $\exp\{\mathcal{G}\}$, la función no-logarítmica $\mathcal{H}_N^F$ en la Ec. (4.32) depende explícitamente de la escala de factorización μ_F, en cuanto al esquema de factorización (a través de $C_{ab,\,N}(\alpha_s)$ y $\gamma_{ab,\,N}(\alpha_s)$) y sobre el sistema de estado final F (a través de $\sigma_F^{(0)}$ y H^F). Sin embargo, $\mathcal{H}_N^F$ no depende del esquema de resumación, ya que el factor $H^F(\alpha_s)C_N^2(\alpha_s)$ es invariante bajo las transformaciones de la Ec. (4.22).

La función universal (independiente del proceso y de los esquemas de factorización y resumación) perturbativa $A_c(\alpha_s)$ en las Ecs. (4.13) y (4.18) es conocida hasta orden $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$. Los coeficientes a LL y NLL $A_c^{(1)}$ y $A_c^{(2)}$ son [106, 110]

$$A_c^{(1)} = C_c \ , \qquad A_c^{(2)} = \frac{1}{2}\, C_c \left[\left(\frac{67}{18} - \frac{\pi^2}{6} \right) C_A - \frac{5}{9} N_f \right] \ , \tag{4.33}$$

donde $C_c = C_F$ si $c = q, \bar{q}$ y $C_c = C_A$ si $c = g$.

El coeficiente de primer orden $\widetilde{B}_{c,\,N}^{(1)}$ de la función perturbativa y universal $\widetilde{B}_N(\alpha_s)$ en las Ecs. (4.14) y (4.31) es

$$\widetilde{B}_{c,\,N}^{(1)} = B_c^{(1)} + 2\gamma_{cc,\,N}^{(1)} \ , \tag{4.34}$$

donde [106, 110]

$$B_q^{(1)} = B_{\bar{q}}^{(1)} = -\frac{3}{2}\, C_F \ , \qquad B_g^{(1)} = -\frac{1}{6}\,(11 C_A - 2N_f) \ . \tag{4.35}$$

Nótese que, ya que las dimensiones anómalas a LO $\gamma_{cc,\,N}^{(1)}$ son universales, los coeficientes a NLL $B_c^{(1)}$ en las Ecs. (4.35) son ellos mismo independientes de los esquemas de factorización y resumación.

El coeficiente universal de segundo orden $\widetilde{B}_{c,\,N}^{(2)}$ en la Ec. (4.31) es

$$\widetilde{B}_{c,\,N}^{(2)} = B_c^{(2)} - 2\beta_0\, C_{cc,\,N}^{(1)} + 2\gamma_{cc,\,N}^{(2)} \ , \tag{4.36}$$

o equivalentemente, realizando la transformación de Mellin en el espacio z:

$$\widetilde{B}_c^{(2)}(z) = \delta(1-z)\, B_c^{(2)} - 2\beta_0\, C_{cc}^{(1)}(z) + 2P_{cc}^{(2)}(z) \ . \tag{4.37}$$

El valor del coeficiente del quark $\widetilde{B}_q^{(2)}$ puede ser obtenido usando los resultados de la Ref. [109] para los coeficientes $B_q^{(2)}$ y $C_{qq}^{(1)}(z)$ del proceso de DY.

De los resulatdos de la Ref. [111] obtenemos el valor del coeficiente en el caso del gluón $\widetilde{B}_g^{(2)}$, y podemos también constatar de forma explícita la universalidad de ambos $\widetilde{B}_q^{(2)}$ y $\widetilde{B}_g^{(2)}$. Para escribir la expresión de $\widetilde{B}_c^{(2)}$, recordemos que el término de segundo orden $P_{cc}^{(2)}(z)$ de las funciones de splitting de Altarelli–Parisi [90] $P_{cc}(\alpha_s, z)$ tiene la siguiente dependencia general en z:

$$P_{cc}^{(2)}(z) = \frac{1}{(1-z)_+}\, A_c^{(2)} + \delta(1-z)\, \frac{1}{2}\, \gamma_c^{(2)} + P_{cc}^{(2)\mathrm{reg}}(z) \ , \tag{4.38}$$

donde $A_c^{(2)}$ es el coeficiente en la Ec. (4.33), $1/(1-z)_+$ es la usual distribución "más" y $P_{cc}^{(2)\mathrm{reg}}(z)$ denota todas las contribuciones restantes y menos singulares (cuando $z \to 1$) a $P_{cc}^{(2)}(z)$. Las expresiones explícitas de $P_{cc}^{(2)\mathrm{reg}}(z)$ y de las constantes $\gamma_c^{(2)}$ pueden ser halladas en la literatura (ver por ejemplo Ref. [83]).

Usando la notación de la Ec. (4.38), el coeficiente universal a NNLL $\widetilde{B}_c^{(2)}$ es [111]

$$\widetilde{B}_c^{(2)}(z) = \frac{2}{(1-z)_+}\, A_c^{(2)} + \delta(1-z)\, \beta_0 C_c \frac{\pi^2}{6} + 2P_{cc}^{(2)\mathrm{reg}}(z) + 2\beta_0 \hat{P}_{cc}^{\epsilon}(z) \ , \tag{4.39}$$

donde

$$\hat{P}^{\epsilon}_{qq}(z) = -\frac{1}{2}\, C_F\,(1-z) \ , \qquad \hat{P}^{\epsilon}_{gg}(z) = 0 \ . \tag{4.40}$$

Los coeficientes de primer orden $C^{(1)}_{qg}$ y $C^{(1)}_{gq}$ en la Ec. (4.20) no dependen del proceso y del esquema de resumación, y fueron obtenidos por primera vez en las Refs. [109, 112], respectivamente. Sus expresiones en el esquema de factorización $\overline{\text{MS}}$ son

$$C^{(1)}_{qg}(z) = C^{(1)}_{\bar{q}g}(z) = \frac{1}{2}\, z(1-z) \ , \qquad C^{(1)}_{gq}(z) = C^{(1)}_{g\bar{q}}(z) = \frac{1}{2}\, C_F\, z \ . \tag{4.41}$$

Los coeficientes de primer orden, diagonales en sabor $C^{(1)}_{qq}$ y $C^{(1)}_{gg}$ y los coeficientes $H^{F\,(1)}_{q}$ y $H^{F\,(1)}_{g}$ dependen del esquema de resumación. La dependencia en el esquema de resumación se cancela en los coeficientes perturbativos de la función de hard $\mathcal{H}^{F}_{N}$. Por ejemplo expandiendo la Ec. (4.32) en potencias de $\alpha_s(\mu_R^2)$, $\mathcal{H}^{F\,(1)}_{N}$ de la Ec. (4.10):

$$\mathcal{H}^{F\,(1)}_{N}(M^2/\mu_R^2, M^2/\mu_F^2, M^2/Q^2) = H^{F\,(1)} + 2C^{(1)}_{N} - p\beta_0\ell_R + 2\gamma^{(1)}_{N}\ell_F - \left(\frac{1}{2}A^{(1)}\ell_Q + \widetilde{B}^{(1)}_{N}\right)\ell_Q \ , \tag{4.42}$$

donde hemos definido

$$\ell_R = \ln\frac{M^2}{\mu_R^2} \ , \quad \ell_F = \ln\frac{M^2}{\mu_F^2} \ , \quad \ell_Q = \ln\frac{M^2}{Q^2} \ . \tag{4.43}$$

El coeficiente $\mathcal{H}^{F\,(1)}_{N}$ depende del proceso y se lo conoce explícitamente para diversos procesos (ver Ref. [111] y sus referencias).

El programa de resumación a NNLL adquiere su forma final con la expresión analítica general del coeficiente $\mathcal{H}^{F\,(2)}_{N}$, trabajo original de esta tesis, que se detalla en el Capítulo 6.

4.1.3. El desarrollo a orden fijo

El truncado a orden fijo $\left[d\hat{\sigma}^{(\text{res.})}_{F\,ab}\right]_{\text{f.o.}}$ de la componente resumada es obtenido expandiendo perturbativamente a la componente resumada $d\hat{\sigma}^{(\text{res.})}_{ab}$ en la Ec. (4.5). Con este propósito es que definimos los coeficientes $\widetilde{\Sigma}^{(n)}$ a continuación:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^{F}_{ab}(b, M, \hat{s}; \alpha_s, \mu_R^2, \mu_F^2, Q^2) = &\sum_{c} \sigma^{(0)}_{c\bar{c},\,F}(\alpha_s, M)\Big\{\delta_{ca}\,\delta_{\bar{c}b}\,\delta(1-z) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^{n}\left[\widetilde{\Sigma}^{F\,(n)}_{c\bar{c}\leftarrow ab}\left(z, \widetilde{L}; \frac{M^2}{\mu_R^2}, \frac{M^2}{\mu_F^2}, \frac{M^2}{Q^2}\right)\right. \\ &\left. + \mathcal{H}^{F\,(n)}_{c\bar{c}\leftarrow ab}\left(z; \frac{M^2}{\mu_R^2}, \frac{M^2}{\mu_F^2}, \frac{M^2}{Q^2}\right)\right]\Big\} \ ,\end{aligned} \tag{4.44}$$

donde $z = M^2/\hat{s}$, $\alpha_s = \alpha_s(\mu_R^2)$, $\sigma^{(0)}_{c\bar{c},\,F}(\alpha_s, M) = \alpha_s^{p_{cF}}\,\sigma^{(\text{LO})}_{c\bar{c},\,F}(M)$ y, en general, el super-índice F indica dependencias en el sub-proceso partónico a orden más bajo $c + \bar{c} \to F$. En la Ec. (4.44), $\mathcal{W}^{F}_{ab}$ es la sección eficaz resumada del lado derecho de la Ec. (4.5).

Nótese, sin embargo, que la Ec. (4.44) depende de la escala de resumación Q^2. El coeficiente perturbativo $\widetilde{\Sigma}^{(n)}$ sobre el lado derecho de la Ec. (4.44) es un polinomio de grado $2n$ en la variable logarítmica $\widetilde{L}$ definida como

$$\widetilde{L} \equiv \ln\left(\frac{Q^2 b^2}{b_0^2} + 1\right) \ . \tag{4.45}$$

Los coeficientes $\widetilde{\Sigma}^{(n)}$ son cero por definición cuando $\widetilde{L} = 0$ (por ejemplo cuando $b = 0$), y la parte independiente de b, de $\mathcal{W}^{F}_{ab,\,N}(b, M)$, está incluida en los coeficientes $\mathcal{H}^{(n)}$. Los coeficientes $\widetilde{\Sigma}^{(n)}$ tienen la siguiente expansión en serie:

$$\widetilde{\Sigma}^{F\,(1)}_{c\bar{c}\leftarrow ab}(z, \widetilde{L}) = \Sigma^{F\,(1;2)}_{c\bar{c}\leftarrow ab}(z)\ \widetilde{L}^2 + \Sigma^{F\,(1;1)}_{c\bar{c}\leftarrow ab}(z)\ \widetilde{L}\ , \tag{4.46}$$

$$\widetilde{\Sigma}^{F\,(2)}_{c\bar{c}\leftarrow ab}(z, \widetilde{L}) = \Sigma^{F\,(2;4)}_{c\bar{c}\leftarrow ab}(z)\ \widetilde{L}^4 + \Sigma^{F\,(2;3)}_{c\bar{c}\leftarrow ab}(z)\ \widetilde{L}^3 + \Sigma^{F\,(2;2)}_{c\bar{c}\leftarrow ab}(z)\ \widetilde{L}^2 + \Sigma^{F\,(2;1)}_{c\bar{c}\leftarrow ab}(z)\ \widetilde{L}\ , \tag{4.47}$$

donde la dependencia en las razones de escalas $M^2/\mu_R^2, M^2/\mu_F^2$ y M^2/Q^2 se sobreentiende. La extensión de la Ec. (4.46) a términos de orden más alto $\widetilde{\Sigma}^{F\,(n)}_{c\bar{c}\leftarrow ab}(z, \widetilde{L})$ con $n \geq 2$, puede realizarse con facilidad. Los coeficientes independientes de b, $\Sigma^{F\,(1;k)}(z)$ y $\mathcal{H}^{F\,(1)}(z)$ pueden ser presentados de manera más simple considerando sus N-momentos con respecto a la variable z. Así es que tenemos

$$\Sigma^{F\,(1;2)}_{c\bar{c}\leftarrow ab,\,N} = -\,\frac{1}{2} A_c^{(1)}\ \delta_{ca}\delta_{\bar{c}b}\ , \tag{4.48}$$

$$\Sigma^{F\,(1;1)}_{c\bar{c}\leftarrow ab,\,N}(M^2/Q^2) = -\left[\delta_{ca}\delta_{\bar{c}b}\ \left(B_c^{(1)} + A_c^{(1)}\,\ell_Q\right) + \delta_{ca}\gamma^{(1)}_{\bar{c}b,\,N} + \delta_{\bar{c}b}\gamma^{(1)}_{ca,\,N}\right]\ , \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{F\,(1)}_{c\bar{c}\leftarrow ab,\,N}\left(\frac{M^2}{\mu_R^2}, \frac{M^2}{\mu_F^2}, \frac{M^2}{Q^2}\right) &= \delta_{ca}\delta_{\bar{c}b}\left[H_c^{F\,(1)} - \left(B_c^{(1)} + \frac{1}{2}A_c^{(1)}\ell_Q\right)\ell_Q - p_{cF}\beta_0\ell_R\right] \\ &+ \delta_{ca}C^{(1)}_{\bar{c}b,\,N} + \delta_{\bar{c}b}C^{(1)}_{ca,\,N} \\ &+ \left(\delta_{ca}\gamma^{(1)}_{\bar{c}b,\,N} + \delta_{\bar{c}b}\gamma^{(1)}_{ca,\,N}\right)(\ell_F - \ell_Q)\ ,\end{aligned} \tag{4.50}$$

$$\Sigma^{F\,(2;4)}_{c\bar{c}\leftarrow ab,\,N} = \frac{1}{8}\left(A_c^{(1)}\right)^2\ \delta_{ca}\delta_{\bar{c}b}\ , \tag{4.51}$$

$$\Sigma^{F\,(2;3)}_{c\bar{c}\leftarrow ab,\,N}(M^2/Q^2) = -\,A_c^{(1)}\left[\frac{1}{3}\,\beta_0\ \delta_{ca}\delta_{\bar{c}b} + \frac{1}{2}\,\Sigma^{F\,(1;1)}_{c\bar{c}\leftarrow ab,\,N}(M^2/Q^2)\right]\ , \tag{4.52}$$

$$\begin{aligned}\Sigma^{F\,(2;2)}_{c\bar{c}\leftarrow ab,\,N}\left(\frac{M^2}{\mu_R^2}, \frac{M^2}{\mu_F^2}, \frac{M^2}{Q^2}\right) &= -\,\frac{1}{2}\,A_c^{(1)}\left[\mathcal{H}^{F\,(1)}_{c\bar{c}\leftarrow ab,\,N}\left(\frac{M^2}{\mu_R^2}, \frac{M^2}{\mu_F^2}, \frac{M^2}{Q^2}\right) - \beta_0\ \delta_{ca}\delta_{\bar{c}b}\,(\ell_R - \ell_Q)\right] \\ &- \frac{1}{2}\sum_{a_1,b_1}\Sigma^{F\,(1;1)}_{c\bar{c}\leftarrow a_1b_1,\,N}(M^2/Q^2)\left[\delta_{a_1a}\gamma^{(1)}_{b_1b,\,N} + \delta_{b_1b}\gamma^{(1)}_{a_1a,\,N}\right] \\ &- \frac{1}{2}\Big(A_c^{(2)}\ \delta_{ca}\delta_{\bar{c}b} + \Big(B_c^{(1)} + A_c^{(1)}\,\ell_Q \\ &- \beta_0\Big)\,\Sigma^{F\,(1;1)}_{c\bar{c}\leftarrow ab,\,N}(M^2/Q^2)\Big)\ ,\end{aligned} \tag{4.53}$$

$$\begin{aligned}\Sigma^{F\,(2;1)}_{c\bar{c}\leftarrow ab,\,N}\left(\frac{M^2}{\mu_R^2}, \frac{M^2}{\mu_F^2}, \frac{M^2}{Q^2}\right) &= \Sigma^{F\,(1;1)}_{c\bar{c}\leftarrow ab,\,N}(M^2/Q^2)\,\beta_0\,(\ell_Q - \ell_R) \\ &- \sum_{a_1,b_1}\mathcal{H}^{F\,(1)}_{c\bar{c}\leftarrow a_1b_1,\,N}\left(\frac{M^2}{\mu_R^2}, \frac{M^2}{\mu_F^2}, \frac{M^2}{Q^2}\right) \\ &\times \left[\delta_{a_1a}\delta_{b_1b}\left(B_c^{(1)} + A_c^{(1)}\,\ell_Q\right) + \delta_{a_1a}\gamma^{(1)}_{b_1b,\,N} + \delta_{b_1b}\gamma^{(1)}_{a_1a,\,N}\right] \\ &- \left[\delta_{ca}\delta_{\bar{c}b}\ \left(B_c^{(2)} + A_c^{(2)}\,\ell_Q\right) - \beta_0\left(\delta_{ca}C^{(1)}_{\bar{c}b,\,N} + \delta_{\bar{c}b}C^{(1)}_{ca,\,N}\right) + \delta_{ca}\gamma^{(2)}_{\bar{c}b,\,N} + \delta_{\bar{c}b}\gamma^{(2)}_{ca,\,N}\right]\ ,\end{aligned} \tag{4.54}$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}^{F\,(2)}_{c\bar{c}\leftarrow ab,\,N}\left(\frac{M^2}{\mu_R^2},\frac{M^2}{\mu_F^2},\frac{M^2}{Q^2}\right) = \delta_{ca}\delta_{\bar{c}b}\,H_c^{F\,(2)} + \delta_{ca}\,C^{(2)}_{\bar{c}b,\,N} + \delta_{\bar{c}b}\,C^{(2)}_{ca,\,N} + C^{(1)}_{ca,\,N}\,C^{(1)}_{\bar{c}b,\,N} \\
&+\; H_c^{F\,(1)}\left(\delta_{ca}\,C^{(1)}_{\bar{c}b,\,N} + \delta_{\bar{c}b}\,C^{(1)}_{ca,\,N}\right) \\
&+\; \frac{1}{6}\,A_c^{(1)}\,\beta_0\,\ell_Q^3\;\delta_{ca}\delta_{\bar{c}b} + \frac{1}{2}\left[A_c^{(2)}\;\delta_{ca}\delta_{\bar{c}b} + \beta_0\,\Sigma^{F\,(1;1)}_{c\bar{c}\leftarrow ab,\,N}(M^2/Q^2)\right]\ell_Q^2 \\
&-\; \left[\delta_{ca}\delta_{\bar{c}b}\;\left(B_c^{(2)} + A_c^{(2)}\,\ell_Q\right) - \beta_0\left(\delta_{ca}C^{(1)}_{\bar{c}b,\,N} + \delta_{\bar{c}b}C^{(1)}_{ca,\,N}\right) + \delta_{ca}\gamma^{(2)}_{\bar{c}b,\,N} + \delta_{\bar{c}b}\gamma^{(2)}_{ca,\,N}\right]\ell_Q \\
&+\; \frac{1}{2}\,\beta_0\;\left(\delta_{ca}\gamma^{(1)}_{\bar{c}b,\,N} + \delta_{\bar{c}b}\gamma^{(1)}_{ca,\,N}\right)\ell_F^2 + \left(\delta_{ca}\gamma^{(2)}_{\bar{c}b,\,N} + \delta_{\bar{c}b}\gamma^{(2)}_{ca,\,N}\right)\ell_F \\
&-\; \mathcal{H}^{F\,(1)}_{c\bar{c}\leftarrow ab,\,N}\left(\frac{M^2}{\mu_R^2},\frac{M^2}{\mu_F^2},\frac{M^2}{Q^2}\right)\beta_0\ell_R \\
&+\; \frac{1}{2}\sum_{a_1,b_1}\left[\mathcal{H}^{F\,(1)}_{c\bar{c}\leftarrow a_1b_1,\,N}\left(\frac{M^2}{\mu_R^2},\frac{M^2}{\mu_F^2},\frac{M^2}{Q^2}\right) + \delta_{ca_1}\delta_{\bar{c}b_1}\,H_c^{F\,(1)} + \delta_{ca_1}\,C^{(1)}_{\bar{c}b_1,\,N} + \delta_{\bar{c}b_1}\,C^{(1)}_{ca_1,\,N}\right] \\
&\times\; \left[\left(\delta_{a_1a}\gamma^{(1)}_{b_1b,\,N} + \delta_{b_1b}\gamma^{(1)}_{a_1a,\,N}\right)(\ell_F - \ell_Q) - \delta_{a_1a}\delta_{b_1b}\left(\left(B_c^{(1)} + \frac{1}{2}\,A_c^{(1)}\,\ell_Q\right)\ell_Q + p_{cF}\,\beta_0\,\ell_R\right)\right] \\
&-\; \delta_{ca}\delta_{\bar{c}b}\,p_{cF}\left(\frac{1}{2}\,\beta_0^2\,\ell_R^2 + \beta_1\,\ell_R\right)\quad . \qquad (4.55)
\end{aligned}
$$

donde se ha definido

$$
\ell_R = \ln\frac{M^2}{\mu_R^2}\quad,\quad \ell_F = \ln\frac{M^2}{\mu_F^2}\quad,\quad \ell_Q = \ln\frac{M^2}{Q^2}\quad . \qquad (4.56)
$$

Insertando la Ec. (4.44) en la Ec (4.5), realizando la integral sobre el parámetro de espacio b, y removiendo las contribuciones proporcionales a $\delta(q_T^2)$ (por ejemplo, todas las contribuciones que vienen de $\mathcal{H}^{F\,(n)}_{c\bar{c}\leftarrow ab}$ en la Ec. (4.44)), obtenemos las siguientes expresiones para las contribuciones de orden fijo $\left[d\hat{\sigma}^{(\mathrm{res.})}_{F\,ab}\right]_{\mathrm{f.o.}}$:

$$
\begin{aligned}
\left[\;\frac{d\hat{\sigma}^{(\mathrm{res.})}_{F\,ab}}{dq_T^2}(q_T, M, \hat{s} = \frac{M^2}{z}; \alpha_s(\mu_R^2), \mu_R^2, \mu_F^2, Q^2)\;\right]_{\mathrm{LO}} &= \frac{\alpha_s(\mu_R^2)}{\pi}\;\frac{z}{Q^2}\;\sum_c \sigma^{(0)}_{c\bar{c},\,F}(\alpha_s(\mu_R^2), M)\;, \\
&\times\left[\Sigma^{F\,(1;2)}_{c\bar{c}\leftarrow ab}(z)\;\widetilde{I}_2(q_T/Q) + \Sigma^{F\,(1;1)}_{c\bar{c}\leftarrow ab}\left(z;\frac{M^2}{Q^2}\right)\;\widetilde{I}_1(q_T/Q)\right]\;. \qquad (4.57)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left[\;\frac{d\hat{\sigma}^{(\mathrm{res.})}_{F\,ab}}{dq_T^2}(q_T, M, \hat{s} = \frac{M^2}{z}; \alpha_s(\mu_R^2), \mu_R^2, \mu_F^2, Q^2)\;\right]_{\mathrm{NLO}} = \\
&= \left[\;\frac{d\hat{\sigma}^{(\mathrm{res.})}_{F\,ab}}{dq_T^2}(q_T, M, \hat{s}; \alpha_s(\mu_R^2), \mu_R^2, \mu_F^2, Q^2)\;\right]_{\mathrm{LO}} \\
&\quad + \left(\frac{\alpha_s(\mu_R^2)}{\pi}\right)^2\;\frac{z}{Q^2}\;\sum_c \sigma^{(0)}_{c\bar{c},\,F}(\alpha_s(\mu_R^2), M)\sum_{k=1}^{4}\Sigma^{F\,(2;k)}_{c\bar{c}\leftarrow ab}\left(z;\frac{M^2}{\mu_R^2},\frac{M^2}{\mu_F^2},\frac{M^2}{Q^2}\right)\;\widetilde{I}_k(q_T/Q)\;,
\end{aligned}
\qquad (4.58)
$$

Sobre el lado derecho de las Ecs. (4.57) y (4.58), la dependencia en q_T está completamente incluida en las funciones $\widetilde{I}_n(q_T/Q)$, las que son obtenidas a partir de la siguiente transformación de Bessel:

$$
\widetilde{I}_n(q_T/Q) = Q^2\int_0^\infty db\;\frac{b}{2}\,J_0(bq_T)\;\ln^n\left(\frac{Q^2b^2}{b_0^2} + 1\right)\;. \qquad (4.59)
$$

4.1.4. Secciones eficaces a NLO y NNLO

Los anteriores conceptos proponen un método de trabajo para lidiar con las divergencias que aparecen en las etapas intermedias del cálculo, cuando queremos obtener una sección eficaz a NLO o NNLO.

Para ilustrar estos conceptos, consideremos la sección eficaz total $\hat{\sigma}^{\rm tot}_{F\,ab}$, a nivel partónico,

$$\hat{\sigma}^{\rm tot}_{F\,ab}(M,\hat{s};\alpha_s(\mu_R^2),\mu_R^2,\mu_F^2) = \int_0^\infty dq_T^2\ \frac{d\hat{\sigma}_{F\,ab}}{dq_T^2}(q_T,M,\hat{s};\alpha_s(\mu_R^2),\mu_R^2,\mu_F^2)\ , \tag{4.60}$$

y evaluemos el espectro en q_T del lado derecho de acuerdo con la descomposición en término de las componentes 'resumada' y 'finita' (ver Ec. (4.3)). Luego al integrar la componente resumada sobre la variable q_T, obtenemos

$$\hat{\sigma}^{\rm tot}_{F\,ab} = \frac{M^2}{\hat{s}}\ \mathcal{H}^F_{ab} + \int_0^\infty dq_T^2\ \frac{d\hat{\sigma}^{\rm (fin.)}_{F\,ab}}{dq_T^2}\ . \tag{4.61}$$

Esta expresión es válida orden a orden en teoría de perturbaciones de QCD. Una vez que los coeficientes perturbativos de las expansiones a orden fijo de $\hat{\sigma}^{\rm tot}_{F\,ab}$, $\mathcal{H}^F_{ab}$ y $d\hat{\sigma}^{\rm (fin.)}_{F\,ab}/dq_T^2$ son todos conocidos, la relación (4.61) tiene que ser considerada una identidad, la que puede ser comprobada de manera explícita.

Notemos sin embargo, ya que el truncado a orden fijo $\left[d\hat{\sigma}^{\rm (fin.)}_{F\,ab}/dq_T^2\right]_{\rm f.o.}$ no contiene ninguna contribución proporcional a $\delta(q_T^2)$, $\left[d\hat{\sigma}^{\rm (fin.)}_{F\,ab}/dq_T^2\right]_{\rm LO}$ no depende explícitamente del coeficiente $\mathcal{H}^{F\,(1)}_{ab}$ (ver Ec. (4.57)). De manera análoga, $\left[d\hat{\sigma}^{\rm (fin.)}_{F\,ab}/dq_T^2\right]_{\rm NLO}$ no depende explícitamente del coeficiente $\mathcal{H}^{F\,(2)}_{ab}$ (ver Ec. (4.58)), y así en lo sucesivo.

Por ejemplo a NLO la Ec. (4.61) nos provee de nuestra fórmula maestra:

$$\begin{aligned}\left[\hat{\sigma}^{\rm tot}_{F\,ab}(M,\hat{s};\alpha_s,\mu_R^2,\mu_F^2)\right]_{\rm NLO} &= \frac{\alpha_s}{\pi}\ \frac{M^2}{\hat{s}}\sum_c \sigma^{(0)}_{c\bar{c},\,F}(\alpha_s,M)\ \ \mathcal{H}^{F\,(1)}_{c\bar{c}\leftarrow ab}\left(\frac{M^2}{\hat{s}};\frac{M^2}{\mu_R^2},\frac{M^2}{\mu_F^2},\frac{M^2}{Q^2}\right)\\ &+ \left[\hat{\sigma}^{\rm tot}_{F\,ab}(M,\hat{s};\alpha_s)\right]_{\rm LO}\\ &+ \int_0^\infty dq_T^2\left[\frac{d\hat{\sigma}^{\rm (fin.)}_{F\,ab}}{dq_T^2}(q_T,M,\hat{s};\alpha_s,\mu_R^2,\mu_F^2,Q^2)\right]_{\rm LO}\ ,\end{aligned} \tag{4.62}$$

donde $\alpha_s = \alpha_s(\mu_R^2)$ y además hemos usado

$$\left[\hat{\sigma}^{\rm tot}_{F\,ab}(M,\hat{s};\alpha_s)\right]_{\rm LO} = \delta(1-M^2/\hat{s})\ \sum_c \sigma^{(0)}_{c\bar{c},\,F}(\alpha_s,M)\ \delta_{ca}\ \delta_{\bar{c}b}\ . \tag{4.63}$$

A NNLO la Ec. (4.61) resulta

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2\ \frac{M^2}{\hat{s}}\sum_c \sigma^{(0)}_{c\bar{c},\,F}(\alpha_s,M)\ \mathcal{H}^{F\,(2)}_{c\bar{c}\leftarrow ab}\left(\frac{M^2}{\hat{s}};\frac{M^2}{\mu_R^2},\frac{M^2}{\mu_F^2},\frac{M^2}{Q^2}\right)\\ &= \left\{\left[\hat{\sigma}^{\rm tot}_{F\,ab}\right]_{\rm NNLO} - \left[\hat{\sigma}^{\rm tot}_{F\,ab}\right]_{\rm NLO}\right\} - \int_0^\infty dq_T^2\left\{\left[\frac{d\hat{\sigma}^{\rm (fin.)}_{F\,ab}}{dq_T^2}\right]_{\rm NLO} - \left[\frac{d\hat{\sigma}^{\rm (fin.)}_{F\,ab}}{dq_T^2}\right]_{\rm LO}\right\}\ ,\end{aligned} \tag{4.64}$$

y su generalización a órdenes aun más altos n ($n > 2$) es

$$\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^n \frac{M^2}{\hat{s}} \sum_c \sigma^{(0)}_{c\bar{c},\,F}(\alpha_s, M)\, \mathcal{H}^{F\,(n)}_{c\bar{c}\leftarrow ab} = \left\{ \left[\hat{\sigma}^{\rm tot}_{F\,ab}\right]_{\rm N^nLO} - \left[\hat{\sigma}^{\rm tot}_{F\,ab}\right]_{\rm N^{n-1}LO} \right\} - \int_0^\infty dq_T^2 \left\{ \left[\frac{d\hat{\sigma}^{\rm (fin.)}_{F\,ab}}{dq_T^2}\right]_{\rm N^{n-1}LO} - \left[\frac{d\hat{\sigma}^{\rm (fin.)}_{F\,ab}}{dq_T^2}\right]_{\rm N^{n-2}LO} \right\}. \tag{4.65}$$

Las expresiones precedentes implican:

- NLO. Si conocemos la corrección *real* a NLO (emisión real) del proceso F a LO, y si somos capaces de extraer la componente finita del elemento de matriz virtual[8] (la corrección a un-loop del proceso F a LO) entonces podemos obtener la sección eficaz a NLO para el proceso final F.

- NNLO. A este orden necesitamos conocer las correcciones de doble emisión real, las correcciones de emisión real a un-loop, y las correcciones a dos-loops al proceso F. Mientras que el método general que permite extraer al coeficiente $\mathcal{H}^{F\,(1)}_{c\bar{c}\leftarrow ab}$ es conocido, a NNLO se desarrolló en esta tesis un método general que permite extraer al coeficiente $\mathcal{H}^{F\,(2)}_{c\bar{c}\leftarrow ab}$, dados los elementos de matriz a dos-loops.

  Para ser más precisos, las correcciones doble-real y la emisión real a un-loop, constituyen, o pueden ser entendidas como otro tipo de proceso. Éstas pueden ser entendidas como la producción del estado final F asociado con un jet a NLO. Es decir, necesitamos un código de tipo Monte Carlo, que nos permita obtener la sección eficaz a NLO para la producción del estado final $F + 1$ *jet*. Y como esta sección eficaz a NLO posee una partícula con color en el estado final,no podemos utilizar este formalismo de sustracción para este propósito. En cambio, podemos utilizar el método de los dipolos de Catani-Seymour.

  Como corolario, entonces podemos decir, que este método de sustracción a NNLO, siempre es acompañado por otro método que permita abordar estados finales que posean un partón en el estado final, y así poder obtener la sección eficaz a NLO para la producción del estado final $F + 1$ *jet*, paso intermedio siempre necesario.

De la teoría de regularización dimensional[9] sabemos que los polos en ϵ que aparecen en los elementos de matriz son universales[10] y se cancelan cuando sumamos las contribuciones reales y virtuales de un dado proceso.

Los coeficientes $\widetilde{\Sigma}^{F\,(n)}_{c\bar{c}\leftarrow ab}(z, \widetilde{L})$ pueden ser interpretados como la manifestación de aquellos polos, pero en el espacio de momento transverso y son universales. Cuando los sumamos a las contribuciones reales (a NLO o NNLO) las divergencias se cancelan numéricamente. Es decir hay una correspondencia directa entre las potencias de los polos en ϵ y la potencia de los términos logarítmicos divergentes que aparecen en estos coeficientes.

[8] El coeficiente $\mathcal{H}^{F\,(1)}_{c\bar{c}\leftarrow ab}$.

[9] Recordemos que en regularización dimensional trabajamos en un espacio $d = 4 + 2\,\epsilon$ dimensional, y luego de cancelar todas las divergencias es que tomamos el límite $\epsilon \to 0$.

[10] Sólo dependen del estado inicial (por ejemplo $q\bar{q}, qg, gg$), pero no del estado final$F$.

4.2. Método de sustracción en q_T

Con la ayuda del programa de resumación en momento transverso calculamos las herramientas necesarias para elaborar el formalismo de sustracción en momento transverso. Ahora escribiremos un resumen del mismo, los puntos centrales que son consecuencia de las secciones previas, y las conclusiones que se desprenden de las secciones anteriores.

Hemos considerado la reacción de hard-scattering inclusiva

$$h_1 + h_2 \to F(Q) + X, \tag{4.66}$$

donde la colisión de los dos hadrones h_1 y h_2 producen en estado final F a detectar. El estado final F se compone de una o más partículas sin color (leptones, fotones, bosones vectoriales, bosones de Higgs, ...) con momento q_i y masa total invariante Q ($Q^2 = (\sum_i q_i)^2$). Notemos que, ya que F no posee color, el estado inicial LO, puede ser aniquilación $q\bar{q}$, como en el caso de Drell-Yan o la producción de difotones, o fusión gg, como en el caso de la producción del bosón de Higgs.

A NLO, dos tipos de correcciones contribuyen: i) correcciones *reales*, donde un partón retrocede en contra de F[11]; ii) correcciones virtuales de *un-loop* al LO. Ambas contribuciones son IR divergentes si las consideramos por separado, pero estas divergencias cancelan en la suma. A NNLO, debemos considerar tres tipos de correciones: i) correcciones *doble reales*, donde dos partones retroceden en contra de F; ii) correcciones *reales-virtuales* donde un partón retrocede en contra de F, a un-loop; iii) correcciones a *dos-loops virtuales* al LO. Por separado estas tres contribuciones son divergentes, y entonces el cálculo (numérico o analítico) debe estar organizado de tal manera, que uno pueda alcanzar la cancelación de tales divergencias.

El método propuesto [42] está basado en una generalización (independiente del proceso y del observable) del procedimiento utilizado para el cálculo específico a NNLO de la Ref. [113].

Notemos primero que a LO, el momento transverso $\mathbf{q}_T = \sum_i \mathbf{q}_{Ti}$ del estado final detectado F es exactamente cero. Como consecuencia, cuando $q_T \neq 0$, las contribuciones (N)NLO están dadas por las contribuciones a (N)LO del estado final F + jet(s). Entonces podemos escribir

$$d\sigma^F_{(N)NLO}|_{q_T\neq 0} = d\sigma^{F+\text{jets}}_{(N)LO} \quad . \tag{4.67}$$

Esto implica que, cuando $q_T \neq 0$, las divergencias IR en nuestro cálculo a NNLO, son aquellas en $d\sigma^{F+\text{jets}}_{NLO}$, y pueden ser tratadas y canceladas usando las formulaciones disponibles a NLO del método de sustracción. Las únicas singularidades remanentes a NNLO son las asociadas al límite $q_T \to 0$, y las tratamos con una sustracción adicional. La propiedad a ser tenida en cuenta es que el comportamiento singular de $d\sigma^{F+\text{jets}}_{(N)LO}$ cuando $q_T \to 0$ es bien conocido: lo conocemos del programa de resumación [87] de las contribuciones logarítmicas a las distribuciones en momento transverso. Así, para realizar la sustracción adicional, seguimos el formalismo usado en la Ref. [100, 114, 115] para combinar los cálculos resumados y de orden fijo. Entonces, a continuación, presentamos de forma ilustrativa, el método que con abundancia de detalles describimos en la sección anterior. Utilizamos, también una notación abreviada de la notación detallada presentada en la sección anterior, que se puede comprender sin ambigüedades.

[11] En la jerga correspondiente, y en inglés, el partón extra y el estado final F están $back-to-back$.

Definamos al contratérmino de sustracción[12]

$$d\sigma^{CT} = d\sigma^F_{LO} \otimes \Sigma^F(q_T/Q)\, d^2\mathbf{q}_T. \tag{4.68}$$

La función $\Sigma^F(q_T/Q)$ incluye el comportamiento singular de $d\sigma^{F+\text{jets}}$ cuando $q_T \to 0$. En este límite, ésta puede ser expresada en término de coeficientes $\Sigma^{F(n;k)}$ independientes de q_T:

$$\Sigma^F(q_T/Q) \xrightarrow[q_T\to 0]{} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^n \sum_{k=1}^{2n} \Sigma^{F(n;k)} \frac{Q^2}{q_T^2} \ln^{k-1}\frac{Q^2}{q_T^2} \quad . \tag{4.69}$$

La extensión de la Ec. (4.67) para incluir la contribución a $q_T = 0$ es finalmente:

$$d\sigma^F_{(N)NLO} = \mathcal{H}^F_{(N)NLO} \otimes d\sigma^F_{LO} + \left[d\sigma^{F+\text{jets}}_{(N)LO} - d\sigma^{CT}_{(N)LO}\right] \quad . \tag{4.70}$$

Comparando con el lado derecho de la Ec. (4.67), hemos sustraído el truncado de la Ec. (4.68) a (N)LO y sumado la contribución a $q_T = 0$ necesaria para obtener la sección eficaz total. El coeficiente $\mathcal{H}^F_{(N)NLO}$ no depende de q_T y es obtenido por el truncado a (N)NLO de la función perturbativa

$$\mathcal{H}^F = 1 + \frac{\alpha_s}{\pi}\mathcal{H}^{F(1)} + \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 \mathcal{H}^{F(2)} + \dots \quad . \tag{4.71}$$

En lo que sigue, algunos comentarios finales.

- El contratérmino de la Ec. (4.68) regulariza la singularidad de $d\sigma^{F+\text{jets}}$ cuando $q_T \to 0$: el término en el bracket del lado derecho de la Ec. (4.70) está entonces libre de divergencias infrarrojas (es decir, integrable en q_T). Nótese que a NNLO, $d\sigma^{CT}_{(N)LO}$ actúa como un contratérmino para la suma de las dos contribuciones a $d\sigma^{F+\text{jets}}$: la contribución *doble real* más la *real-virtual*. Una vez que $d\sigma^{F+\text{jets}}$ ha generado un 'evento' pesado, $d\sigma^{CT}_{(N)LO}$ genera un contratérmino correspondiente con cinemática a LO (es decir con $q_T = 0$) y con peso $\Sigma^F(q_T/Q)$, donde q_T es el momento transverso de F en el 'evento'.

- La forma explícita del contratérmino en la Ec. (4.68) tiene algunos grados de arbitrariedad. El único vínculo o requisito que debe cumplirse, es que la cinemática del contratérmino aproxime a la del 'evento' cuando $q_T \to 0$. La función contratérmino $\Sigma^F(q_T/Q)$ puede ser definida de diferentes formas: pero a q_T pequeño, ésta debe tener la forma dada en la Ec. (4.69).

  Nótese que los coeficientes perturbativos $\Sigma^{F(n;k)}$ son universales[13]: ellos sólo dependen del tipo de partones (quarks o gluones) involucrados en el subproceso a LO (aniquilación $q\bar{q}$ o fusión gg).

  Los contratérminos de este método son no-locales, en el sentido de que las divergencias sólo resultan canceladas luego de la integración en momento transverso de la suma entre las contribuciones reales y estos términos (Ver Apéndice D para una discusión de los detalles de tal integración).

[12] El símbolo $\otimes$ significa convoluciones sobre las fracciones de momento y suma sobre los índices de sabor de los partones.

[13] Con mayor precisión, los coeficientes a NNLO $\Sigma^{F(2;1)}$ y $\Sigma^{F(2;2)}$ tienen una contribución no universal, la que es proporcional al coeficiente a NLO $\mathcal{H}^{F(1)}$.

- La simplicidad del subproceso a LO, es tal que los partones del estado final sólo aparecen en el término $d\sigma^{F+\text{jets}}$, sobre el lado derecho de la Ec. (4.70). Por lo tanto, cortes arbitrarios sobre los jets a (N)NLO pueden efectuarse directamente sobre el cálculo a (N)LO. Debido a esta característica, nuestra extensión del formalismo de sustracción, es independiente del observable.

- A NLO (NNLO), la información física de la corrección a *un-loop (dos-loops) virtual* al proceso a LO está contenida en los coeficientes $\mathcal{H}^{(1)}$ ($\mathcal{H}^{(2)}$).

  Una vez que la forma explícita de la Ec. (4.68) es elegida, los coeficientes hard $\mathcal{H}^{F(n)}$ quedan unívocamente determinados (una diferente elección correspondería a un diferente $\mathcal{H}^{F(n)}$).

De acuerdo con la Ec. (4.70), el cálculo a NLO de $d\sigma^F$ requiere el conocimiento de $\mathcal{H}^{F(1)}$ y del cálculo a LO de $d\sigma^{F+\text{jets}}$. La forma general (independiente del proceso) del coeficiente $\mathcal{H}^{F(1)}$ es conocida: la relación precisa entre $\mathcal{H}^{F(1)}$ y la parte finita IR de la corrección a un-loop a un subproceso a LO genérico es deducida en la Ref. [111].

A NNLO, son necesarios también los coeficientes $\mathcal{H}^{F(2)}$, junto con el cálculo a NLO de $d\sigma^{F+\text{jets}}$. En el capítulo 6 se deduce un método que permite hallar al coeficiente $\mathcal{H}^{F(2)}$, para cualquier observable F de forma general.

Capítulo 5

El coeficiente $\mathcal{H}^{DY}$

El método de sustracción a NNLO, expuesto en el Capítulo 4, requiere dos ingredientes. El contratérmino al orden deseado, para cancelar de manera numérica las singularidades que aparecen en las etapas intermedias del cálculo; y el coeficiente $\mathcal{H}^F$, que contiene la parte finita de las correcciones virtuales al proceso Born F, al orden de precisión requerido. En este capítulo se presenta el método de extracción del coeficiente $\mathcal{H}^F$, correspondiente para la producción de bosones vectoriales (Drell–Yan, $F = DY$). A grandes rasgos, existen dos métodos de extracción del coeficiente $\mathcal{H}^F$. Uno requiere el conocimiento analítico de la sección eficaz total y la sección diferencial en momento transverso, para el proceso deseado. En este sentido, podría argumentarse, que es un método particular, pues para cada proceso F, se requiere realizar todo el cálculo que se presenta a continuación. Y esto presenta un problema: la sección eficaz total no es conocida para todos los procesos, más aún a NNLO. De manera que como método, carece de utilidad, ya que es imposible su generalización sin contar con las secciones eficaces totales correspondientes. Deberá entonces entenderse este método propuesto aquí, como el paso intermedio hacia la obtención de un método de extracción general y universal, él que se propone en el capítulo siguiente. El método general de extracción, no requiere de la sección eficaz total para cada proceso, pero requiere de ciertos ingredientes que en las próximas secciones de este capítulo se detallan.

La necesidad entonces del coeficiente $\mathcal{H}^{DY\ (2)}$ es doble. Se lo requiere para hallar la sección eficaz a NNLO para la producción de bosones vectoriales, que hemos logrado con el código `DYNNLO` [35]. Y se lo requiere, como paso intermedio a la obtención de un método de extracción general para el coeficiente $\mathcal{H}^F$, que se detalla en el Capítulo 6.
El alcance de la utilidad de este coeficiente va más allá de lo presentado en esta tesis, siendo necesario en aquellos cálculos que deseen implementar un Born de tipo DY, como por ejemplo en el caso la la producción asociada WH del bosón de Higgs [34] a NNLO y en aquellos cálculos que deseen implementar resumación con un Born del mismo tipo.
Este trabajo original de tesis fue publicado en la Ref. [65].

5.1. Preliminares

Las distribuciones en momento transverso q_T de sistemas con alta masa invariante M (tal como pares de leptones de Drell–Yan, pares de fotones, bosones vectoriales, bosones de Higgs, etc) producidas en colisiones hadrónicas pueden ser calculadas usando pQCD. Sin embargo, en la región de pequeño momento transverso q_T ($q_T \ll M$), la convergencia de la expansión perturbativa a orden fijo en potencias de la constante de acoplamiento de QCD α_s,

se ve arruinada por la presencia de grandes términos logarítmicos del tipo $\ln^n(M^2/q_T^2)$. La predictividad de la pQCD puede ser recuperada a través de la resumación de estos términos logarítmicos a todo orden en α_s [116, 117, 118, 105]. La estructura del cálculo resumado puede ser organizada en una forma independiente del proceso [107, 119, 108, 101, 120], en la que las contribuciones logarítmicas están controladas por un conjunto de funciones perturbativas, usualmente denotadas como $A(\alpha_s), B(\alpha_s), C(\alpha_s)$ y $\mathcal{H}(\alpha_s)$ (ver, por ejemplo, Ecs. (5.7) y (5.16)). Estas funciones y, por lo tanto, sus coeficientes perturbativos (por ejemplo el coeficiente $A^{(n)}$ de la contribución del n-ésimo orden, $A^{(n)}\alpha_s^n$ a $A(\alpha_s)$), no tienen dependencia explícita de la razón q_T/M.

Los coeficientes perturbativos, una vez conocidos, pueden ser insertados en las fórmulas, independientes del proceso, que sistemáticamente resuman, de forma explícita, las contribuciones logarítmicas a LO, NLO, NNLO (y órdenes siguientes) a la distribución en momento transverso.

En este sentido el programa de resumación en momento transverso, tiene analogías formales[1] con el estudio de las violaciones de escala logarítmicas (de origen colineal o ultravioleta), donde la resumación de los términos logarítmicos es realizada mediante el cálculo de funciones perturbativas, tales como coeficientes de corta distancia y dimensiones anómalas.

La mayoría de los coeficientes de resumación en momento transverso q_T son conocidos, desde hace algún tiempo [106, 109, 110, 66], hasta el segundo orden en α_s. El coeficiente de tercer orden $A^{(3)}$ fue obtenido en Ref. [121].

El programa de resumación en momento transverso q_T a segundo orden perturbativo requiere del cálculo de la función coeficiente[2] $\mathcal{H}^{(2)}(z)$ (ver Ec. (5.19)), la que incluye partes dependientes del proceso. El cálculo de los coeficientes $\mathcal{H}^{(2)}$ fue realizado explícitamente para dos procesos de gran interés: producción de bosones de Higgs y para el proceso de Drell–Yan, y los correspondientes resultados fueron obtenidos y utilizados en Ref. [42] y [35], respectivamente. Siendo el caso de Drel–Yan que nos ocupa, parte del trabajo original de esta tesis, y además aplicado [122] al espectro en q_T del bosón Z, realizando explícitamente resumación en momento transverso a NNLL (orden siguiente, al orden siguiente al primer orden logarítmico no nulo).

Estos resultados tienen una importancia doble. Por un lado, permiten realizar resumación en q_T a NNLL [122] como se explicó en la oración anterior. Por otro, pueden ser usados para organizar las correcciones a NNLO [123] a la producción de bosones vectoriales en un cálculo completamente exclusivo [35].

El punto anterior merece algunos comentarios adicionales. En la referencia [42] se propuso un método para realizar cálculos a NNLO completamente exclusivos, para una clase de procesos específica, la producción de sistemas de alta masa en colisiones hadrónicas.

El método explota el comportamiento singular de las distribuciones asociadas a pequeño q_T.

Los coeficientes presentados en este capítulo son precisamente aquellos requeridos para la implementación del formalismo mencionado más arriba, para la producción de bosones vectoriales, y fueron usados en los códigos numéricos de las referencias [35] [3].

[1]Estas analogías pueden esconder diferencias técnicas, conceptuales y físicas, las que se discuten en la literatura de la resumación en momento transverso.

[2]El símbolo $\mathcal{H}^{(2)}$, en esta introducción es una abreviatura, ya que el símbolo $\mathcal{H}^{(2)}$ refiere, en realidad, a un conjunto de funciones coeficientes.

[3]Más allá de la producción de Higgs [42, 37] y bosones vectoriales [35],el formalismo fue aplicado a la producción aplicada de Higgs al bosón W [34], y producción de difotones [39].

5.2. El método

Consideremos la producción de un bosón vectorial V en colisiones hadrónicas. Usemos la aproximación *narrow width* y consideremos que el bosón vectorial V es una partícula en capa de masa (*on-shell*) M. La expresión de QCD para la sección eficaz en momento transverso[4] es

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{dq_T^2}(q_T, M, s) &= \sum_{a,b} \int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2\, f_{a/h_1}(z_1, M^2)\, f_{b/h_2}(z_2, M^2) \\ &\quad \times \frac{d\hat{\sigma}_{ab}}{dq_T^2}(q_T, M, \hat{s} = z_1 z_2 s; \alpha_s(M^2)) \ , \end{aligned} \tag{5.1}$$

donde $f_{a/h_i}(x, \mu_F^2)$ $(a = q_f, \bar{q}_f, g)$ son las distribuciones de partones de los hadrones que colisionan (h_1 y h_2) a la escala de factorización μ_F, y $d\hat{\sigma}_{ab}/dq_T^2$ son las secciones eficaces partónicas. La energía de centro de masa de los dos hadrones que colisionan es denotada con s y $\hat{s}$ es la energía de centro de masa partónica. En la Ec. (5.1) y por el resto del capítulo, las escalas arbitrarias de factorización μ_F y renormalización μ_R son tomadas iguales a la masa del bosón vectorial M. La sección eficaz partónica $d\hat{\sigma}_{ab}/dq_T^2$ es computable en pQCD. Estamos interesados en las contribuciones perturbativas que resultan grandes en la región de pequeño momento transverso q_T ($q_T \ll M$), y eventualmente, singulares en el límite $q_T \to 0$.

Para presentar explícitamente la estructura perturbativa de estos términos grandes a q_T pequeño, seguimos la notación y conceptos desarrollados en la Ref. [64], e introducimos la sección eficaz partónica

$$\int_0^{Q_0^2} dq_T^2\, \frac{d\hat{\sigma}_{ab}}{dq_T^2}(q_T, M, \hat{s} = M^2/z; \alpha_s(M^2)) \equiv z\, \sigma_V^{(0)}\, \hat{R}_{ab}(z, M/Q_0; \alpha_s(M^2)) \ , \tag{5.2}$$

donde la normalización de la función $\hat{R}_{ab}$ está definida respecto de $\sigma_V^{(0)}$, la que es la sección eficaz a LO, para el proceso partónico $q\bar{q} \to V$. La función partónica $\hat{R}$ tiene la siguiente expansión perturbativa

$$\hat{R}_{ab}(z, M/Q_0; \alpha_s) = \delta_{qa}\, \delta_{\bar{q}b}\, \delta(1-z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^n \hat{R}_{ab}^{(n)}(z, M/Q_0) \ . \tag{5.3}$$

Las contribuciones a NLO y NNLO a la sección eficaz en la Ec. (5.2) están determinadas por las funciones $\hat{R}^{(1)}$ y $\hat{R}^{(2)}$, respectivamente.

La región de pequeño q_T de la sección eficaz $d\hat{\sigma}_{ab}/dq_T^2$ puede explorarse tomando el límite $Q_0 \ll M$ en la Ec. (5.2). En este límite, las funciones a NLO y NNLO, $\hat{R}^{(1)}$ y $\hat{R}^{(2)}$ tienen el siguiente comportamiento

$$\hat{R}_{ab}^{(1)}(z, M/Q_0) = l_0^2\, \hat{R}_{ab}^{(1;2)}(z) + l_0\, \hat{R}_{ab}^{(1;1)}(z) + \hat{R}_{ab}^{(1;0)}(z) + \mathcal{O}(Q_0^2/M^2) \ , \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}\hat{R}_{ab}^{(2)}(z, M/Q_0) &= l_0^4\, \hat{R}_{ab}^{(2;4)}(z) + l_0^3\, \hat{R}_{ab}^{(2;3)}(z) + l_0^2\, \hat{R}_{ab}^{(2;2)}(z) \\ &\quad + l_0\, \hat{R}_{ab}^{(2;1)}(z) + \hat{R}_{ab}^{(2;0)}(z) + \mathcal{O}(Q_0^2/M^2) \ , \end{aligned} \tag{5.5}$$

[4] Cuando el bosón vectorial V no es una partícula on-shell de masa M, la sección en momento transverso $d\sigma/dq_T^2$ tiene que ser reemplazada por la distribución diferencial doble $M^2 d\sigma/dM^2 dq_T^2$.

donde $l_0 = \ln(M^2/Q_0^2)$. En las Ecs. (5.4) y (5.5), las potencias de los grandes logaritmos l_0 son producidas por el comportamiento singular (aunque integrable) de $d\hat{\sigma}_{ab}/dq_T^2$ a pequeños valores de q_T. Los coeficientes $\hat{R}^{(1;m)}$ (con $m \leq 2$) y $\hat{R}^{(2;m)}$ (con $m \leq 4$) de los grandes logaritmos son independientes de Q_0; estos coeficientes dependen de la energía de centro de masa partónica $\hat{s}$ y, con mayor precisión, son funciones de la fracción $z = M^2/\hat{s}$.

En los párrafos que siguen, calcularemos la sección eficaz a NNLO en la Ec. (5.2). El cálculo partónico es realizado de forma analítica, pero despreciando términos de $\mathcal{O}(Q_0^2/M^2)$ en el límite $Q_0 \ll M$. Por lo tanto, determinamos las funciones coeficientes $\hat{R}^{(n;m)}(z)$ en las Ecs. (5.4) y (5.5). Antes de presentar los resultados, recordemos como es que estas funciones están relacionadas con los coeficientes perturbativos de la fórmula de resumación en momento transverso, para la producción de bosones vectoriales [108, 114]

La sección eficaz partónica $d\hat{\sigma}_{ab}/dq_T^2$ en la Ec. (5.1) puede ser descompuesta en la forma $d\hat{\sigma}_{ab} = d\hat{\sigma}_{ab}^{(\mathrm{sing})} + d\hat{\sigma}_{ab}^{(\mathrm{reg})}$. La componente singular, $d\hat{\sigma}_{ab}^{(\mathrm{sing})}$, contiene todas las contribuciones que se vuelven grandes a pequeño q_T. Estas contribuciones son proporcionales a $\delta(q_T^2)$ o a grandes logaritmos del tipo $1/q_T^2 \ln^m(M^2/q_T^2)$. La componente restante, $d\hat{\sigma}_{ab}^{(\mathrm{reg})}$, de la sección eficaz partónica es regular, orden a orden en α_s, según $q_T \to 0$: la integración de $d\hat{\sigma}_{ab}^{(\mathrm{reg})}/dq_T^2$ sobre el rango $0 \leq q_T \leq Q_0$ conduce a resultados, que a cada orden fijo en α_s, *son nulos* en el límite $Q_0 \to 0$. Por lo tanto, $d\hat{\sigma}_{ab}^{(\mathrm{reg})}$ solo contribuye a los términos de $\mathcal{O}(Q_0^2/M^2)$ sobre el lado derecho de las Ecs. (5.4) y (5.5).

Consideremos la componente q_T singular de la sección eficaz de producción de bosón vectorial a valor fijo de la rapidity y del bosón vectorial (la rapidity se define en el centro de masa de los hadrones que colisionan). La fórmula de resumación en momento transverso es [108, 114]

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma^{(\mathrm{sing})}}{dy\, dq_T^2}(y, q_T, M, s) &= \frac{M^2}{s}\, \sigma_V^{(0)} \int_0^{+\infty} db\, \frac{b}{2}\, J_0(bq_T)\, S_q(M, b) \\ &\times \sum_{a_1,a_2} \int_{x_1}^1 \frac{dz_1}{z_1} \int_{x_2}^1 \frac{dz_2}{z_2}\, \left[H^F C_1 C_2\right]_{q\bar{q};\, a_1 a_2} \\ &\times\ f_{a_1/h_1}(x_1/z_1, b_0^2/b^2)\, f_{a_2/h_2}(x_2/z_2, b_0^2/b^2)\ ,\end{aligned} \tag{5.6}$$

donde las variables cinemáticas x_i $(i = 1, 2)$ son $x_1 = e^{+y}M/\sqrt{s}$ y $x_2 = e^{-y}M/\sqrt{s}$. La variable de integración b es el parámetro de impacto, $J_0(bq_T)$ es la función de Bessel de orden cero, y $b_0 = 2e^{-\gamma_E}$ ($\gamma_E = 0{,}5772\ldots$ es la constante de Euler) es un coeficiente numérico. El símbolo $\left[H^F C_1 C_2\right]_{q\bar{q};\, a_1 a_2}$ denota a la siguiente función de las fracciones longitudinales de momento z_1 y z_2:

$$\left[H^{DY} C_1 C_2\right]_{q\bar{q};\, a_1 a_2} = H_q^{DY}(\alpha_s(M^2))\ \ C_{q\,a_1}(z_1; \alpha_s(b_0^2/b^2))\ \ C_{q\,a_2}(z_2; \alpha_s(b_0^2/b^2))\ , \tag{5.7}$$

donde $H_q^{DY}(\alpha_s)$ y $C_{q\,a}(z; \alpha_s)$ son las funciones perturbativas de α_s (ver Ecs. (5.8)–(5.9)). El factor de forma de quark $S_q(M, b)$, de la Ec. (5.6) es una cantidad independiente del proceso [108, 110, 101]. Su dependencia en M y b está controlada por dos funciones perturbativas, a las que usualmente se denota con $A_q(\alpha_s)$ y $B_q(\alpha_s)$. Sus correspondientes coeficientes perturbativos a N-ésimo orden son $A_q^{(n)}$ y $B_q^{(n)}$. Los coeficientes $A_q^{(1)}$, $B_q^{(1)}$, $A_q^{(2)}$ [106] y $B_q^{(2)}$ [109] son conocidos, y determinan completamente la expresión perturbativa de $S_q(M, b)$ hasta $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$.

La cantidad $\left[H^F C_1 C_2\right]$ en la Ec. (5.6) depende de dos funciones perturbativas H_q^{DY} y $C_{q\,a}$. Notemos que la función $H_q^{DY}(\alpha_s)$ es dependiente del proceso, estando directamente

relacionada al mecanismo de producción del bosón vectorial. Por otro lado, las funciones partónicas $C_{q\,a}$ son independientes del proceso, como consecuencia de las propiedades universales de la radiación colineal.

Notemos que las funciones $H_q^{DY}(\alpha_s), C_{q\,a}(\alpha_s)$ y la función perturbativa $B_q(\alpha_s)$ del factor de forma del quark, no son pueden ser calculadas por separado y sin ambigüedad. De hecho estas funciones están relacionadas por la simetría del grupo de renormalización [101] que se vincula con la estructura de factorización en el espacio b de las Ecs. (5.6) y (5.7).

La definición de estas tres funciones sin ninguna ambigüedad, requiere entonces, de la especificación[5] de un *esquema de resumación* [101]. Notemos, sin embargo, que considerando la expansión perturbativa[6] de la Ec. (5.6) (por ejemplo, la expansión perturbativa de la componente singular de la sección eficaz en q_T), la dependencia en el esquema de resumación cancela de forma exacta orden a orden en α_s.

La expansión perturbativa de las dos funciones sobre el lado derecho de la Ec. (5.7) se define

$$C_{q\,a}(z;\alpha_s) = \delta_{q\,a}\,\delta(1-z) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^n C_{q\,a}^{(n)}(z) \quad , \tag{5.8}$$

$$H_q^{DY}(\alpha_s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^n H_q^{DY(n)} \, . \tag{5.9}$$

Ya que las funciones partónicas $C_{q\,a}$ son independientes del proceso, se satisfacen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} C_{q_f\,q_f}(z;\alpha_s) &= C_{\bar{q}_f\,\bar{q}_f}(z;\alpha_s) \equiv C_{q\,q}(z;\alpha_s) \quad , \\ C_{q_f\,q_{f'}}(z;\alpha_s) &= C_{\bar{q}_f\,\bar{q}_{f'}}(z;\alpha_s) \equiv C_{q\,q'}(z;\alpha_s) \quad , \end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned} C_{q_f\,\bar{q}_f}(z;\alpha_s) &= C_{\bar{q}_f\,q_f}(z;\alpha_s) \equiv C_{q\,\bar{q}}(z;\alpha_s) \quad , \\ C_{q_f\,\bar{q}_{f'}}(z;\alpha_s) &= C_{\bar{q}_f\,q_{f'}}(z;\alpha_s) \equiv C_{q\,\bar{q}'}(z;\alpha_s) \quad , \end{aligned} \tag{5.11}$$

$$C_{q_f\,g}(z;\alpha_s) = C_{\bar{q}_f\,g}(z;\alpha_s) \equiv C_{q\,g}(z;\alpha_s) \quad , \tag{5.12}$$

las que son una consecuencia de la invarianza ante conjugación de carga y la simetría de sabor de QCD. La dependencia de $C_{q\,a}$ en la etiqueta partónica a es entonces completamente especificada por $C_{q\,q}$, $C_{q\,q'}$, $C_{q\,\bar{q}}$, $C_{q\,\bar{q}'}$ y $C_{q\,g}$.

La función coeficiente de primer orden $C_{q\,g}^{(1)}(z)$ es también independiente del esquema de resumación; su expresión es [109]

$$C_{q\,g}^{(1)}(z) = \frac{1}{2}\,z\,(1-z) \quad . \tag{5.13}$$

Los coeficientes de primer orden $C_{q\,q'}^{(1)}(z)$, $C_{q\,\bar{q}}^{(1)}(z)$ y $C_{q\,\bar{q}'}^{(1)}(z)$ son nulos

$$C_{q\,q'}^{(1)}(z) = C_{q\,\bar{q}}^{(1)}(z) = C_{q\,\bar{q}'}^{(1)}(z) = 0 \quad , \tag{5.14}$$

mientras que los coeficientes $H_q^{DY(1)}$ y $C_{q\,q}^{(1)}(z)$ satisfacen la siguiente relación [109]:

$$C_{q\,q}^{(1)}(z) + \frac{1}{2}\,H_q^{DY(1)}\,\delta(1-z) = \frac{C_F}{2}\left(\left(\frac{\pi^2}{2}-4\right)\delta(1-z) + 1 - z\right) \quad . \tag{5.15}$$

[5] El lector no interesado en las dificultades del esquema de resumación, simplemente puede asumir que $H_q^{DY}(\alpha_s) \equiv 1$ en este capítulo.

[6] La dependencia en el esquema de resumación también se cancela expandiendo consistentemente la Ec. (5.6) en término de las contribuciones logarítmicas resumadas (a LO, NLO, etc) [114].

La determinación separada de $C^{(1)}_{q\,q}(z)$ y $H^{DY(1)}_q$ requiere la especificación del esquema de resumación. Por ejemplo, considerando el esquema de resumación en el que el coeficiente $H^{DY(1)}_q$ es cero, el lado derecho de la Ec. (5.15) da el valor de $C^{(1)}_{q\,q}(z)$, y el correspondiente valor del coeficiente de factor de forma del quark $B^{(2)}_q$, calculado explícitamente en la Ref. [109].

El cálculo de los coeficientes de segundo orden $C^{(2)}_{q\,q}$, $C^{(2)}_{q\,q'}$, $C^{(2)}_{q\,\bar{q}}$, $C^{(2)}_{q\,\bar{q}'}$, $C^{(2)}_{q\,g}$ y $H^{DY(2)}_q$ es el propósito del método que estamos describiendo.

Definimos ahora unas funciones coeficiente, ya que se requerirá su uso más adelante

$$\mathcal{H}^{DY}_{q\bar{q}\leftarrow ab}(z;\alpha_s) \equiv H^{DY}_q(\alpha_s)\int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2\, \delta(z-z_1 z_2)\, C_{q\,a}(z_1;\alpha_s)\, C_{q\,b}(z_2;\alpha_s)\,, \tag{5.16}$$

las que están relacionadas directamente a la función coeficiente en la Ec. (5.7). La función $\mathcal{H}^{DY}$ depende sólo de la fracción de energía z, y surge cuando se integra a la fórmula de resumación en la Ec. (5.6) sobre la rapidity del bosón vectorial.

Notemos que $\mathcal{H}^{DY}$ es dependiente del proceso, pero definido sin ambigüedad, siendo independiente del esquema de resumación [101]. La expansión perturbativa de la función $\mathcal{H}^{DY}$ directamente se sigue de las Ecs. (5.8)–(5.9). Tenemos:

$$\mathcal{H}^{DY}_{q\bar{q}\leftarrow ab}(z;\alpha_s) = \delta_{q\,a}\,\delta_{\bar{q}\,b}\,\delta(1-z) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^n \mathcal{H}^{DY(n)}_{q\bar{q}\leftarrow ab}(z)\ \ , \tag{5.17}$$

donde las contribuciones a primer y segundo orden son

$$\mathcal{H}^{DY(1)}_{q\bar{q}\leftarrow ab}(z) = \delta_{q\,a}\,\delta_{\bar{q}\,b}\,\delta(1-z)\,H^{DY(1)}_q + \delta_{q\,a}\,C^{(1)}_{\bar{q}\,b}(z) + \delta_{\bar{q}\,b}\,C^{(1)}_{q\,a}(z)\ \ , \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{DY(2)}_{q\bar{q}\leftarrow ab}(z) &= \delta_{q\,a}\,\delta_{\bar{q}\,b}\,\delta(1-z)\,H^{DY(2)}_q + \delta_{q\,a}\,C^{(2)}_{\bar{q}\,b}(z) + \delta_{\bar{q}\,b}\,C^{(2)}_{q\,a}(z)\\ &\quad + H^{DY(1)}_q\left(\delta_{q\,a}\,C^{(1)}_{\bar{q}\,b}(z) + \delta_{\bar{q}\,b}\,C^{(1)}_{q\,a}(z)\right) + \left(C^{(1)}_{q\,a}\otimes C^{(1)}_{\bar{q}\,b}\right)(z)\ \ .\end{aligned} \tag{5.19}$$

En la Ec. (5.19) y en lo siguiente, el símbolo $\otimes$ denota la convolución bajo signo de integral (por ejmplo, definimos $(g\otimes h)(z) \equiv \int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2\, \delta(z-z_1 z_2)\, g(z_1)\, h(z_2)$).

La expansión perturbativa de la sección eficaz perturbativa en la Ec. (5.2) puede ser directamente relacionada a los coeficientes de resumación. Las funciones a NLO y NNLO $\hat{R}^{(1)}_{ab}$ y $\hat{R}^{(2)}_{ab}$ tienen la siguiente expresión:

$$\hat{R}^{(1)}_{ab}(z, M/Q_0) = l_0^2\,\Sigma^{DY(1;2)}_{q\bar{q}\leftarrow ab}(z) + l_0\,\Sigma^{DY(1;1)}_{q\bar{q}\leftarrow ab}(z) + \mathcal{H}^{DY(1)}_{q\bar{q}\leftarrow ab}(z) + \mathcal{O}(Q_0^2/M^2)\ \ , \tag{5.20}$$

$$\begin{aligned}\hat{R}^{(2)}_{ab}(z, M/Q_0) &= l_0^4\,\Sigma^{DY(2;4)}_{q\bar{q}\leftarrow ab}(z) + l_0^3\,\Sigma^{DY(2;3)}_{q\bar{q}\leftarrow ab}(z) + l_0^2\,\Sigma^{DY(2;2)}_{q\bar{q}\leftarrow ab}(z)\\ &+ l_0\Big(\Sigma^{DY(2;1)}_{q\bar{q}\leftarrow ab}(z) - 16\zeta_3\Sigma^{DY(2;4)}_{q\bar{q}\leftarrow ab}(z)\Big)\\ &+ \Big(\mathcal{H}^{DY(2)}_{q\bar{q}\leftarrow ab}(z) - 4\zeta_3\,\Sigma^{DY(2;3)}_{q\bar{q}\leftarrow ab}(z)\Big) + \mathcal{O}(Q_0^2/M^2)\,,\end{aligned} \tag{5.21}$$

donde hemos usado la misma notación que en la Ref. [114]. Las expresiones explícitas de las funciones coeficiente $\Sigma^{DY(n;m)}_{q\bar{q}\leftarrow ab}(z)$ en término de los coeficientes de resumación están dados en las Ecs.. (63),(64),(66)–(69) de la Ref. [114] (tenemos que imponer $\mu_R = \mu_F = Q = M$,

donde μ_R, μ_F y Q son las escalas auxiliares de la Ref. [114]) y no se las vuelve a escribir aquí. Los términos de primer orden $\Sigma^{DY(1;2)}_{q\bar{q}\leftarrow ab}$ y $\Sigma^{DY(1;1)}_{q\bar{q}\leftarrow ab}$ dependen del factor de forma del quark $S_q(M,b)$. Los términos de segundo orden $\Sigma^{DY(2;m)}_{q\bar{q}\leftarrow ab}$ dependen de $\mathcal{H}^{DY(1)}_{q\bar{q}\leftarrow ab}$ y del factor de forma del quark $S_q(M,b)$ hasta $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$. El coeficiente numérico $\zeta_3 \simeq 1{,}202\ldots$ (ζ_k es la función ζ de Riemann) sobre el lado derecho de la Ec. (5.21) se origina desde las transformaciones de Bessel (véase, por ejemplo, Ecs. (B.18) y (B.30) en el Apéndice B de la Ref. [114]).

Concluimos esta sección precisando el método que empleamos para obtener la sección eficaz de la expresión de la Ec. (5.2).

El cálculo partónico a NNLO, tiene que ser realizado usando regularización dimensional para evaluar las amplitudes de scattering de QCD y su integración sobre el espacio de fase.

Las correspondientes amplitudes de scattering son conocidas y fueron usadas en dos relevantes cálculos: la sección eficaz total a NNLO $\hat{\sigma}^{(\mathrm{tot})}_{ab}$ [123] y la sección eficaz diferencial a NLO $d\hat{\sigma}_{ab}/d\hat{y}\,dq_T^2$ a grandes valores de q_T [124, 21].

Entonces para realizar nuestro cálculo a NNLO es que tomamos ventaja de estos resultados: ambos observables están calculados a orden α_s^2 respecto de la sección eficaz Born $\sigma^{(0)}_{DY}(\alpha_s)$. Reescribamos la integración en q_T en la Ec. (5.2) de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\int_0^{Q_0^2} dq_T^2\,\frac{d\hat{\sigma}_{ab}}{dq_T^2}(q_T,M,\hat{s};\alpha_s) &\equiv \int_0^{+\infty} dq_T^2\,\frac{d\hat{\sigma}_{ab}}{dq_T^2}(q_T,M,\hat{s};\alpha_s) - \int_{Q_0^2}^{+\infty} dq_T^2\,\frac{d\hat{\sigma}_{ab}}{dq_T^2}(q_T,M,\hat{s};\alpha_s)\\ &= \hat{\sigma}^{(\mathrm{tot})}_{ab}(M,\hat{s};\alpha_s) - \int_{Q_0^2}^{\infty} dq_T^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\hat{y}\,\frac{d\hat{\sigma}_{ab}}{d\hat{y}\,dq_T^2}(\hat{y},q_T,M,\hat{s};\alpha_s)\ .\end{aligned} \tag{5.22}$$

La sección eficaz sobre el rango de momento transverso $0 < q_T < Q_0$ está entonces obtenida por la sustracción en acuerdo con la Ec. (5.22): comenzamos a partir de la sección eficaz total [123] $\hat{\sigma}^{(\mathrm{tot})}_{ab}$ y sustraemos la contribución debida a la sección eficaz en q_T, en la región donde q_T adquiere grandes valores[7] ($q_T > Q_0$). La sección eficaz diferencial $d\hat{\sigma}_{ab}/d\hat{y}\,dq_T^2$ en el integrando del lado derecho de la Ec. (5.22) es presentado en las Refs. [124, 21] de forma completamente analítica: usamos directamente esta forma y realizamos la integral sobre $\hat{y}$ y q_T. Ya que $q_T > Q_0$ estas integraciones pueden ser realizadas en las cuatro dimensiones del espacio tiempo, sin el uso de regularización dimensional.

A NLO, la sección eficaz partónica, puede ser computada de forma analítica y explícita para valores arbitrarios de Q_0. A NNLO, nos limitamos a computar la sección eficaz de forma analítica en el límite $Q_0 \ll M$, es decir despreciando términos de $\mathcal{O}(Q_0^2/M^2)$, en el lado derecho de las Ecs. (5.5) or (5.21).

5.3. Detalles de cálculo

Como se argumentó en la sección anterior, la ecuación maestra para la extracción del coeficiente $\mathcal{H}^{F(2)}$ es la expresión (5.22): En el caso que nos ocupa en este capítulo (Drell–Yan) $\hat{\sigma}^{(\mathrm{tot})}_{ab}$ puede extraerse (hasta NNLO) de la Ref.[123] y el integrando del segundo término de la parte derecha en la Ec. (5.22) puede extraerse de la Ref. [124] o [21]. El lado izquierdo en la Ec. (5.22) se da explícitamente en las Ecs. (5.20), (5.21), (5.2).

La dificultad en esta labor de extracción del coeficiente $\mathcal{H}^{F(2)}$ radica en la integral del

[7] Basta con tomar valores de q_T distintos de cero.

segundo término de la parte derecha en la Ec. (5.22):

$$\int_{Q_0^2}^{\infty} dq_T^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\hat{y}\ \frac{d\hat{\sigma}_{ab}}{d\hat{y}\, dq_T^2}(\hat{y}, q_T, M, \hat{s}; \alpha_s)\ . \tag{5.23}$$

En lo que resta de esta sección daremos los detalles principales en la tarea de realizar la integral de la expresión (5.23), siguiendo la notación de la Ref. [124].

En el caso del proceso de Drell–Yan (que es el que nos ocupa aquí), consideremos la reacción inclusiva de colisión hard

$$h_1(P1) + h_2(P2) \to V(Q) + X, \tag{5.24}$$

donde h_i,$i = 1, 2$ son los hadrones no polarizados con momentos P_i, y V es un bosón vectorial on-shell ($V = Z, W^+, W^-$) con momento transverso q_T de orden $Q^2 = M_V^2$ o un fotón virtual con q_T del orden de $Q^2 \gg M_h ad^2$.

De acuerdo al teorema de factorización de QCD (ver Ref. [86] y sus referencias) podemos escribir la siguiente sección eficaz inclusiva para el proceso (5.24)

$$\frac{d\sigma}{d^3Q} = \sum_{a_1,a_2} \int_0^1 dx_1 dx_2\ f_{a1}^{h_1}(x_1, M^2) f_{a2}^{h_2}(x_2, M^2) \frac{d\sigma^{a_1,a_2}}{d^3Q}(x_1, P_1, x_2, P_2, M^2)\,. \tag{5.25}$$

Aquí a y b son los sabores de los quarks, antiquarks o gluones, $f_a^h(x, M^2)$ son las PDFs a la escala M^2, y $\sigma^{a,b}(p_1, p_2, M^2)$ es la sección eficaz partónica del proceso

$$a(p_1) + b(p_2) \to V(Q) + X\ . \tag{5.26}$$

Para establecer la notación y convención que utilizaremos especificaremos a continuación de que forma $\sigma^{a,b}$ depende de las variables de integración. Definamos los invariantes de Mandelstam hadrónicos y partónicos

$$\begin{aligned} &S = (P_1 + P_2)^2, \quad T = (P_1 - Q)^2, \quad U = (P_2 - Q)^2\ , \\ &s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - Q)^2, \quad u = (p_2 - Q)^2\ , \\ &S_2 = S + T + U - Q^2, \qquad s_2 = s + t + u - Q^2\,. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Aquí S_2 y s_2 son las masas invariantes del sistema que retrocede en contra de V a nivel hadrónico y partónico respectivamente. Las distribuciones *más* que aparecerán en las expresiones de σ^{ab} (debidas a las singularidades asociadas al límite $s_2 \to 0$) son los remanentes de la cancelación entre singularidades no integrables a causa de emisiones de gluones soft y las singularidades infrarrojas que surgen del intercambio de gluones virtuales,

$$\begin{aligned} &\int_0^A ds_2\ f(s_2) \left[\frac{1}{s_2}\right]_{A+} = \int_0^A ds_2\ \frac{f(s_2) - f(0)}{s_2}\ , \\ &\int_0^A ds_2\ f(s_2) \left[\frac{\ln(s_2)}{s_2}\right]_{A+} = \int_0^A ds_2\ \frac{(f(s_2) - f(0))\ln(s_2)}{s_2}\ . \end{aligned} \tag{5.28}$$

Subprocesos partónicos

Antes de enumerar las diferentes contribuciones de cada canal partónico a la sección eficaz en la expresión (5.25), definiremos la constantes de acoplamiento y parámetros que se utilizarán con frecuencia. El vértice que describe la emisión de un bosón electrodébil V por un quark con sabor $f_1 = u, d, s, c, b, ...$, el cual luego cambia su sabor a f_2 está descrito por la regla de Feyman

$$-ie\gamma^\mu \left[\mathbf{L}_{f_2 f_1} \frac{1-\gamma_5}{2} + \mathbf{R}_{f_2 f_1} \frac{1+\gamma_5}{2} \right] \tag{5.29}$$

donde los acoples *izquierdos* $\mathbf{L}$ y *derecho* $\mathbf{R}$ son

$$\begin{aligned}
W^- : \quad & \mathbf{L}_{f_2 f_1} = \frac{1}{\sqrt{2}\sin\theta_W} (\tau_+)_{f_2 f_1} \mathbf{U}_{f_2 f_1} \ , \quad \mathbf{R}_{f_2 f_1} = 0 \ , \\
W^+ : \quad & \mathbf{L}_{f_2 f_1} = \frac{1}{\sqrt{2}\sin\theta_W} (\tau_-)_{-\ f_2 f_1} \mathbf{U}^\dagger_{f_2 f_1} \ , \quad \mathbf{R}_{f_2 f_1} = 0 \ , \\
Z^0 : \quad & \mathbf{L}_{f_2 f_1} = \frac{1}{\sin 2\theta_W} (\tau_3)_{f_2 f_1} - \delta_{f_2 f_1} e_{f_1} \tan\theta_W \ , \quad \mathbf{R}_{f_2 f_1} = -\delta_{f_2 f_1} e_{f_1} \tan\theta_W \ , \\
\text{Fotón} : & \mathbf{L}_{f_2 f_1} = \mathbf{R}_{f_2 f_1} = \delta_{f_2 f_1} \ ,
\end{aligned} \tag{5.30}$$

donde θ_W es el ángulo de mezcla electrodébil, e_f es la carga eléctrica del quark ($e_f = 2/3$ para u,c,t y $-1/3$ para d,s,b), $\tau_\pm = (\tau_1 \pm i\tau_2)/2$ son las matrices de Pauli de isospín, y $\mathbf{U}$ es la matriz de mezcla unitaria de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa. Se utilizan también las siguientes abreviaciones: $\mathbf{L}_{f_2 f_1} = L_{12}$, etc. El acople de un quark a un gluón está descrito por la regla de Feynman

$$-ig\gamma^\mu t_c \ , \tag{5.31}$$

donde las matrices de color t_c y el número de colores N_c (en QCD $N_c = 3$) están relacionados a C_F y C_A.

La sección eficaz partónica inclusiva para el subproceso $qg \to V + X$ adquiere la forma

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma^{qg}}{d^3Q} = \frac{\alpha\alpha_s(\mu^2)C_F}{s(N_c^2-1)} \Bigg[& \delta(s_2)\mathbf{A}^{qg}(s,t,u,Q^2) \sum_{f<} \left(|\mathbf{L}_{f1}|^2 + |\mathbf{R}_{f1}|^2 \right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \\
& \times \Bigg\{ \Bigg[\delta(s_2) \left(\mathbf{B}_1^{qg}(s,t,u,Q^2) + \mathbf{B}_2^{qg}(s,t,u,Q^2) \sum_{f'<} (1) + \mathbf{C}_1^{qg}(s,t,u,Q^2) \right) \\
& + \mathbf{C}_2^{qg}(s,t,u,Q^2) \Bigg] \sum_{f<} \left(|\mathbf{L}_{f1}|^2 + |\mathbf{R}_{f1}|^2 \right) \\
& + \delta(s_2)\mathbf{B}_3^{qg}(s,t,u,Q^2) \big(\mathbf{L}_{11} + \mathbf{R}_{11} \big) \sum_{f<} \big(\mathbf{L}_{ff} + \mathbf{R}_{ff} \big) \Bigg\} \Bigg] \ ,
\end{aligned} \tag{5.32}$$

donde las funciones $\mathbf{A}^{qg}$ (representa la contribución a LO), $\mathbf{B}_i^{qg}(i = 1,2,3)$ y $\mathbf{C}_i^{qg}(i = 1,2)$ (ambas representan las contribuciones a NLO) se detallan en el Apéndice A y en la Ref. [124], y donde μ y M se refieren a las escalas de renormalización y factorización respectivamente.

Las secciones eficaces para tres procesos relacionados estrechamente con el canal qg pueden ser obtenidos con el apropiado cruce de *patas* externas, considerando también los

siguientes reemplazos:

$$\begin{aligned} gq \to V + X \ : &\qquad t \leftrightarrow u \ , f_1 \to f_2 \\ \bar{q}g \to V + X \ : &\qquad \mathbf{L} \leftrightarrow -\mathbf{R}^\dagger \\ g\bar{q} \to V + X \ : &\qquad t \leftrightarrow u \ , f_1 \to f_2 \ , \quad \mathbf{L} \leftrightarrow -\mathbf{R}^\dagger \ . \end{aligned} \tag{5.33}$$

La sección eficaz partónica inclusiva para el subproceso $gg \to V + X$ adquiere la forma

$$\frac{d\sigma^{gg}}{d^3Q} = \frac{\alpha\alpha_s(\mu^2)N_cC_F}{s(N_c^2-1)^2}\left(\frac{\alpha_s}{2\pi}\right)\left\{\mathbf{C}^{gg}(s,t,u,Q^2) + \mathbf{C}^{gg}(s,u,t,Q^2)\right\}\sum_{f<}\sum_{f'<}\left(|\mathbf{L}_{\mathbf{ff'}}|^2 + |\mathbf{R}_{\mathbf{ff'}}|^2\right) . \tag{5.34}$$

La función $\mathbf{C}^{gg}$ está dadas en el Apéndice A y en la Ref. [124].

En cuanto al subproceso $q\bar{q} \to V + X$ (hasta $(O)(\alpha_s^2)$) la sección eficaz diferencial partónica adquiere la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{q\bar{q}}}{d^3Q} = \frac{\alpha\alpha_s(\mu^2)C_F}{sN_c}\Bigg[&\delta(s_2)\mathbf{A}^{q\bar{q}}(s,t,u,Q^2)\left(|\mathbf{L}_{21}|^2 + |\mathbf{R}_{21}|^2\right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \\ &\times\Bigg\{\Bigg[\delta(s_2)\Bigg(\mathbf{B}_1^{q\bar{q}}(s,t,u,Q^2) + \mathbf{C}_1^{q\bar{q}}(s,t,u,Q^2) \\ &+ \left\{\mathbf{B}_2^{q\bar{q}}(s,t,u,Q^2) + \mathbf{D}_{aa}^{(0)}(s,t,u,Q^2)\right\}\sum_{f<}1\Bigg) + \mathbf{C}_2^{q\bar{q}}(s,t,u,Q^2) + \mathbf{C}_2^{q\bar{q}}(s,u,t,Q^2) \\ &+ \left[\mathbf{D}_{aa}(s,t,u,Q^2) + \mathbf{D}_{aa}(s,u,t,Q^2)\right]\sum_{f<}1\Bigg]\left(|\mathbf{L}_{21}|^2 + |\mathbf{R}_{21}|^2\right) \\ &+ \Big[\delta(s_2)\mathbf{B}_3^{q\bar{q}}(s,t,u,Q^2) + \mathbf{D}_{ab}(s,t,u,Q^2) \\ &+ \mathbf{D}_{ab}(s,u,t,Q^2)\Big]\delta_{12}(\mathbf{L}_{11} - \mathbf{R}_{11})\sum_{f<}\left(\mathbf{L}_{ff} + \mathbf{R}_{ff}\right) \\ &+ \left[\mathbf{D}_{bb}(s,t,u,Q^2) + \mathbf{D}_{bb}(s,u,t,Q^2)\right]\delta_{12}\sum_{f<}\sum_{f'<}\left(|\mathbf{L}_{ff'}|^2 + |\mathbf{R}_{ff'}|^2\right) \\ &+ \left[\mathbf{D}_{ac}(s,t,u,Q^2) + \mathbf{D}_{ad}(s,t,u,Q^2)\right]\left(|\mathbf{L}_{21}|^2 + |\mathbf{R}_{21}|^2\right) \\ &+ \left[\mathbf{D}_{bc}(s,t,u,Q^2)\delta_{12} + \mathbf{D}_{cc}(s,t,u,Q^2)\right]\sum_{f<}\left(|\mathbf{L}_{f1}|^2 + |\mathbf{R}_{f1}|^2\right) \\ &+ \left[\mathbf{D}_{bd}(s,t,u,Q^2)\delta_{12} + \mathbf{D}_{dd}(s,t,u,Q^2)\right]\sum_{f<}\left(|\mathbf{L}_{2f}|^2 + |\mathbf{R}_{2f}|^2\right) \\ &+ \left[\mathbf{D}_{cd}^{LL}(s,t,u,Q^2)\delta_{12} + \mathbf{D}_{cd}^{LL}(s,u,t,Q^2)\right]\left(\mathbf{L}_{11}\mathbf{L}_{22} + \mathbf{R}_{11}\mathbf{R}_{22}\right) \\ &+ \left[\mathbf{D}_{cd}^{LR}(s,t,u,Q^2)\delta_{12} + \mathbf{D}_{cd}^{LR}(s,u,t,Q^2)\right]\left(\mathbf{L}_{11}\mathbf{L}_{22} + \mathbf{R}_{11}\mathbf{R}_{22}\right)\Bigg\}\Bigg] \ , \end{aligned} \tag{5.35}$$

donde

$$\mathbf{A}^{q\bar{q}}(s,t,u,Q^2) = -\mathbf{A}^{qg}(u,t,s,Q^2) \ , \tag{5.36}$$

y las funciones $\mathbf{D}$ están dadas en el Apéndice A y en la Ref. [124]. La sección eficaz para el proceso $\bar{q}q \to V + X$ puede obtenerse a partir de la expresión (5.35) realizando el siguiente cambio

$$\bar{q}q \to V + X \ : \qquad \mathbf{L} \leftrightarrow -\mathbf{R}^\dagger \ . \tag{5.37}$$

Finalmente el último subproceso que nos ocupa es el $qq \to V + X$, para el que la sección eficaz adquiere la forma

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma^{q\bar{q}}}{d^3Q} &= \frac{\alpha\alpha_s(\mu^2)C_F}{sN_c}\left(\frac{\alpha_s}{2\pi}\right) \\
&\frac{1}{2}\Bigg[\big[\mathbf{E}_{aa}(s,t,u,Q^2)+\mathbf{E}_{cc}(s,t,u,Q^2)\big]\sum_{f<}\big(|\mathbf{L}_{f1}|^2+|\mathbf{R}_{f1}|^2\big) \\
&\big[\mathbf{E}_{bb}(s,t,u,Q^2)+\mathbf{E}_{dd}(s,t,u,Q^2)\big]\sum_{f<}\big(|\mathbf{L}_{2f}|^2+|\mathbf{R}_{2f}|^2\big) \\
&+\mathbf{E}_{ac}(s,t,u,Q^2)\big(|\mathbf{L}_{21}|^2+|\mathbf{R}_{21}|^2\big) \\
&+\mathbf{E}_{bd}(s,t,u,Q^2)\big(|\mathbf{L}_{12}|^2+|\mathbf{R}_{12}|^2\big) \\
&+\big[\mathbf{E}_{ad}(s,t,u,Q^2)+\mathbf{E}_{bc}(s,t,u,Q^2)\big]\delta_{12}\sum_{f<}\big(|\mathbf{L}_{f1}|^2+|\mathbf{R}_{f1}|^2\big) \\
&+\big[\mathbf{E}^{LL}_{ab}(s,t,u,Q^2)+\mathbf{E}^{LL}_{ab}(s,u,t,Q^2)\big]\big(\mathbf{L}_{11}\mathbf{L}_{22}+\mathbf{R}_{11}\mathbf{R}_{22}\big) \\
&+\big[\mathbf{E}^{LR}_{ab}(s,t,u,Q^2)+\mathbf{E}^{LR}_{ab}(s,u,t,Q^2)\big]\big(\mathbf{L}_{11}\mathbf{R}_{22}+\mathbf{R}_{11}\mathbf{L}_{22}\big) \\
&+\big[\mathbf{E}^{LL}_{cd}(s,t,u,Q^2)+\mathbf{E}^{LL}_{cd}(s,u,t,Q^2)\big]\big(\mathbf{L}_{11}\mathbf{L}_{22}+\mathbf{R}_{11}\mathbf{R}_{22}\big) \\
&+\big[\mathbf{E}^{LR}_{cd}(s,t,u,Q^2)+\mathbf{E}^{LR}_{ab}(s,u,t,Q^2)\big]\big(\mathbf{L}_{11}\mathbf{R}_{22}+\mathbf{R}_{11}\mathbf{L}_{22}\big)\Bigg] \,. \qquad (5.38)
\end{aligned}$$

Las funciones $\mathbf{E}^{gg}$ están dadas en el Apéndice A y en la Ref. [124].

La sección eficaz para el proceso $\bar{q}\bar{q} \to V + X$ puede ser obtenida a partir de la expresión (5.38) realizando el cambio

$$\bar{q}\bar{q} \to V + X \;\; : \qquad \mathbf{L} \leftrightarrow -\mathbf{R}^\dagger \,. \qquad (5.39)$$

Las Ecs. (5.32), (5.34), (5.35) y (5.38) contienen toda la información necesaria para realizar la integral en la Ec. (5.23). Tal integral en dos variables debe realizarse canal por canal $(q\bar{q}, qq, qg, gg)$ y escogiendo el par de variables más adecuado según los siguientes criterios

1. La integral de la Ec. (5.23) (tenga solución analítica).

2. El comportamiento divergente del resultado del la integral Ec. (5.23) en el límite $Q_0 \to 0$ se manifieste como $\log^n Q_0$.

El requisito 1. es evidente; el requisito 2. tiene su origen en la expansión de las Ecs. (5.20), (5.21). Éstas son series en potencias de logaritmos de la variable Q_0, de manera de que para cancelar término a término las singularidades asociadas al límite $Q_0 \to 0$ en la Ec. (5.22) las bases deben ser las mismas. Éste hecho dista de ser trivial, ya que la mayor parte de las integrales tiene solución analítica en función de series Hipergeométricas en Q_0, lo que dificulta, sino imposibilita la tarea de expresar el resultado en potencia de logaritmos de la variable Q_0.

No existe *a priori* un conjunto de variables más adecuado para realizar las integrales. Sin embargo, elegir el conjunto de variables de Mandelstam u, t varias veces simplificó la tarea. El verbo simplificar es engañoso aquí; debe interpretarse como sinónimo de posibilitó, ya que los resultados de las integrales (con un par de términos $\mathbf{A}$ o $\mathbf{B}$, por ejemplo, en el

integrando) constan normalmente de cientos (o miles) de términos, siendo necesario luego, simplificar las expresiones hasta llegar a la base de logaritmos deseada.

Siempre la integral que presenta mayores inconvenientes es la que se realiza en último lugar o turno. Como las integrales en momento transverso q_T están tabuladas (ver Apéndice B) es un buen ejercicio dejar en último lugar esta integración; aunque aquí la dificultad entonces, reside en "re-agrupar" los términos que resultan de la primera integración, de manera de reconocer los integrandos que están tabulados y son conocidos.

A continuación se escriben los cambios de variables, jacobianos y los límites de integración (que se notan agrupados con llaves) respectivos que se utilizaron en la tarea de integrar la sección eficaz de la expresión (5.23).

Definamos los diferenciales: $d\phi \equiv dq_T^2\ dy$, donde $y = 1/2 \ln q_+/q_-$ y $q_\pm = E \pm p_z$. Los cambios de variables que disponemos pueden escribirse de la siguiente manera:

1.
$$d\phi = \frac{2}{\pi}\ d^4q\ \delta_+(q^2 - M^2) = \frac{d^3q}{\pi E_q}\ , \qquad E_q = \sqrt{q^2 + M^2} \tag{5.40}$$

2.
$$d\phi = dq_T^2\ dy$$
$$\begin{cases} 1 - \frac{M^2}{s} \geq \frac{2q_+}{\sqrt{s}} \\ y_- = -y_+ \leq y \leq y_+ \\ e^{y_+} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{s}}{M_T}\left\{1 + \frac{M^2}{s} + \sqrt{\left(1 - \frac{M^2}{s}\right)^2 - \frac{4q_T^2}{s}}\right\} \end{cases}$$

3.
$$d\phi = \frac{1}{s}\ dt\ du$$
$$\begin{cases} (t - M^2)(u - M^2) \geq M^2 s \quad , \qquad t = M^2 - M_T\sqrt{s}e^y \\ s - M^2 \geq (-t - u) \geq 0 \quad , \qquad u = M^2 - M_T\sqrt{s}e^{-y} \end{cases}$$

4.
$$d\phi = dq_T^2 \frac{d(-u)}{M^2 - u}$$
$$t - M^2 = \frac{M_T^2 s}{u - M^2}$$
$$\begin{cases} 1 - \frac{M^2}{s} \geq \frac{2q_T}{\sqrt{s}} \\ \frac{1}{2}\left[s - M^2 + \sqrt{(s - M^2)^2 - 4sq_T^2}\right] \geq (-u) \geq \frac{1}{2}\left[s - M^2 - \sqrt{(s - M^2)^2 - 4sq_T^2}\right] \end{cases}$$

5.
$$d\phi = dq_T^2 \frac{2ds_2}{\sqrt{f(s_2)}} d|t - u| \left[\frac{1}{2}\delta(t - u - \sqrt{f(s_2)}) + \frac{1}{2}\delta(t - u + \sqrt{f(s_2)})\right]$$

$$f(s_2) = \left(s + M^2 - s_2\right)^2 - 4M_T^2 s$$
$$t + u = s_2 - \left(s - M^2\right)$$
$$M_T s = (t - M^2)(u - M^2)$$

$$\begin{cases} 1-\frac{M^2}{s} \geq \frac{2q_T}{\sqrt{s}} \\ (s_2)_- = s+M^2-2M_T\sqrt{s} \geq s_2 \geq 0 \end{cases}$$

O bien

$$\begin{cases} \sqrt{s}-M \geq \sqrt{s_2} \geq 0 \\ (s+M^2-s_2)^2-4M^2s \geq 4q_T^2 s \end{cases}$$

6.

$$d\phi = dq_T^2 \frac{dz_2}{z_2} \frac{1}{\sqrt{(z_2 s - M^2)^2 - 4z_2 s q_T^2}} (-t) d|t| \Big[\delta(t-t_+) + \delta(t-t_-)\Big]$$

$$u = -(s - M^2 + \frac{t}{z_2}) \ , \qquad 1 - z_2 = \frac{s_2}{s_2 - t} \left(s_2 = -t \frac{1-z_2}{z_2} \right)$$

$$t_\pm = -\frac{1}{2}\Big[z_2 s - M^2 \pm \sqrt{(z_2 s - M^2)^2 - 4z_2 s q_T^2}\Big]$$

$$\begin{cases} 1-\frac{M^2}{s} \geq \frac{2q_T}{\sqrt{s}} \\ 1 \geq z_2 \geq \frac{(M_T+q_T)^2}{s} \end{cases}$$

O bien

$$\begin{cases} 1 \geq z_2 \geq \frac{M^2}{s} \\ 1-\frac{M^2}{z_2 s} \geq \frac{2q_T}{\sqrt{z_2 s}} \end{cases}$$

Donde $M_T^2 = M^2 + q_T^2$.

La realización de la integral de la Ec. (5.23) utilizando todas las contribuciones de todos los subprocesos partónicos detalladas en las Ecs. (5.38), (5.34), (5.35) y (5.32) sobre alguno de los espacio de fase enumerados en el párrafo anterior, requirió varios meses de cálculo (alrededor de ocho para el canal $q\bar{q}$ y otros ocho para el canal qg). Tales integrales fueron calculadas en el código `Mathematica` (Wolfram). La integral de unos pocos términos, de alguna de las Ecs. (5.38), (5.34), (5.35) o (5.32) (del orden de uno o dos términos) puede arrojar un resultado cuya magnitud en modo texto (sólo caracteres `ASCII`) ocupe cientos de Mb[8] (incluso $\sim 1/2$ Gb). El manejo (claramente no trivial), reducción y simplificación de tales resultados se logró con un vasto conjunto de igualdades entre polilogaritmos y logaritmos que debían ser impuestas al resultado de la integral una a una. Los resultados finales, luego de toda esta labor de integración y simplificación, se detallan en la sección siguiente.

5.4. Expresión explícita de los coeficientes

En esta sección se presentan los resultados obtenidos a partir de la implementación del método propuesto en la sección anterior, a partir de las sección eficaz a NNLO, que permiten extraer $\Sigma^{DY(n;m)}$ y $\mathcal{H}^{DY(n)}$ a $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$.

El resultado explícito de la función a NLO $\hat{R}_{ab}^{(1)}(z)$ confirma las expresiones de $\Sigma_{q\bar{q}\leftarrow ab}^{DY(1;2)}(z)$, $\Sigma_{q\bar{q}\leftarrow ab}^{DY(1;1)}(z)$ y $\mathcal{H}_{q\bar{q}\leftarrow ab}^{DY(1)}(z)$, como es predicho por los coeficientes de resumación a $\mathcal{O}(\alpha_s)$. A NNLO, el conocimiento actual [106, 109] de los coeficientes de resumación en q_T a $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ predicen las expresiones de los términos $\Sigma_{q\bar{q}\leftarrow ab}^{DY(2;m)}(z)$, con $m = 1, 2, 3, 4$. Nuestro resultado

[8] Del orden de centenas de carillas A4.

para la función a NNLO $\hat{R}^{(2)}_{ab}(z)$ confirma esta predicción, y esta nos permite extraer la expresión explícita de la función coeficiente a segundo orden $\mathcal{H}^{DY(2)}_{q\bar{q}\leftarrow ab}(z)$.

Obtenemos entonces:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}^{DY(2)}_{q\bar{q}\leftarrow q\bar{q}}(z) = C_A C_F \Bigg\{ & \left(\frac{7\zeta_3}{2} - \frac{101}{27}\right)\left(\frac{1}{1-z}\right)_+ + \left(\frac{59\zeta_3}{18} - \frac{1535}{192} + \frac{215\pi^2}{216} - \frac{\pi^4}{240}\right)\delta(1-z) \\
& + \frac{1+z^2}{1-z}\Bigg(- \frac{\mathrm{Li}_3(1-z)}{2} + \mathrm{Li}_3(z) \\
& - \frac{\mathrm{Li}_2(z)\log(z)}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{Li}_2(z)\log(1-z) - \frac{1}{24}\log^3(z) \\
& - \frac{1}{2}\log^2(1-z)\log(z) + \frac{1}{12}\pi^2\log(1-z) - \frac{\pi^2}{8}\Bigg) \\
& + \frac{1}{1-z}\Bigg(- \frac{1}{4}\left(11-3z^2\right)\zeta_3 \\
& - \frac{1}{48}\left(-z^2+12z+11\right)\log^2(z) - \frac{1}{36}\left(83z^2-36z+29\right)\log(z) + \frac{\pi^2 z}{4}\Bigg) \\
& + (1-z)\left(\frac{\mathrm{Li}_2(z)}{2} + \frac{1}{2}\log(1-z)\log(z)\right) + \frac{z+100}{27} + \frac{1}{4}z\log(1-z)\Bigg\} \\
& + C_F n_F \Bigg\{ \frac{14}{27}\left(\frac{1}{1-z}\right)_+ + \frac{1}{864}\left(192\zeta_3 + 1143 - 152\pi^2\right)\delta(1-z) \\
& + \frac{(1+z^2)}{72(1-z)}\log(z)(3\log(z)+10) + \frac{1}{108}(-19z-37)\Bigg\} \\
& + C_F^2 \Bigg\{ \frac{1}{4}\left(-15\zeta_3 + \frac{511}{16} - \frac{67\pi^2}{12} + \frac{17\pi^4}{45}\right)\delta(1-z) \\
& + \frac{1+z^2}{1-z}\Bigg(\frac{\mathrm{Li}_3(1-z)}{2} - \frac{5\mathrm{Li}_3(z)}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{Li}_2(z)\log(1-z) + \frac{3\mathrm{Li}_2(z)\log(z)}{2} \\
& + \frac{3}{4}\log(z)\log^2(1-z) + \frac{1}{4}\log^2(z)\log(1-z) - \frac{1}{12}\pi^2\log(1-z) + \frac{5\zeta_3}{2}\Bigg) \\
& + (1-z)\left(-\mathrm{Li}_2(z) - \frac{3}{2}\log(1-z)\log(z) + \frac{2\pi^2}{3} - \frac{29}{4}\right) + \frac{1}{24}(1+z)\log^3(z) \\
& + \frac{1}{1-z}\Bigg(\frac{1}{8}\left(-2z^2+2z+3\right)\log^2(z) + \frac{1}{4}\left(17z^2-13z+4\right)\log(z)\Bigg) \\
& - \frac{z}{4}\log(1-z)\Bigg\} \\
& + C_F \Bigg\{ \frac{1}{z}(1-z)\left(2z^2-z+2\right)\left(\frac{\mathrm{Li}_2(z)}{6} + \frac{1}{6}\log(1-z)\log(z) - \frac{\pi^2}{36}\right) \\
& + \frac{1}{216z}(1-z)\left(136z^2-143z+172\right) - \frac{1}{48}\left(8z^2+3z+3\right)\log^2(z) \\
& + \frac{1}{36}\left(32z^2-30z+21\right)\log(z) + \frac{1}{24}(1+z)\log^3(z)\Bigg\}\,,
\end{aligned}
\tag{5.41}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}^{DY(2)}_{q\bar{q}\leftarrow qg}(z) = C_A\Bigg\{ & -\frac{1}{12z}(1-z)\left(11z^2-z+2\right)\mathrm{Li}_2(1-z) \\
& + \left(2z^2-2z+1\right)\left(\frac{\mathrm{Li}_3(1-z)}{8} - \frac{1}{8}\mathrm{Li}_2(1-z)\log(1-z) + \frac{1}{48}\log^3(1-z)\right) \\
& + \left(2z^2+2z+1\right)\left(\frac{3\mathrm{Li}_3(-z)}{8} + \frac{\mathrm{Li}_3\left(\frac{1}{1+z}\right)}{4} - \frac{\mathrm{Li}_2(-z)\log(z)}{8} - \frac{1}{24}\log^3(1+z)\right. \\
& \left. + \frac{1}{16}\log^2(z)\log(1+z) + \frac{1}{48}\pi^2\log(1+z)\right) + \frac{1}{4}z(1+z)\mathrm{Li}_2(-z) + z\mathrm{Li}_3(z) \\
& - \frac{1}{2}z\mathrm{Li}_2(1-z)\log(z) - z\mathrm{Li}_2(z)\log(z) - \frac{3}{8}\left(2z^2+1\right)\zeta_3 - \frac{149z^2}{216} \\
& - \frac{1}{96}\left(44z^2-12z+3\right)\log^2(z) \\
& + \frac{1}{72}\left(68z^2+6\pi^2z-30z+21\right)\log(z) + \frac{\pi^2 z}{24} + \frac{43z}{48} \\
& + \frac{43}{108z} + \frac{1}{48}(2z+1)\log^3(z) - \frac{1}{2}z\log(1-z)\log^2(z) - \frac{1}{8}(1-z)z\log^2(1-z) \\
& + \frac{1}{4}z(1+z)\log(1+z)\log(z) + \frac{1}{16}(3-4z)z\log(1-z) - \frac{35}{48}\Bigg\} \\
& + C_F\Bigg\{\left(2z^2-2z+1\right)\left(\zeta_3 - \frac{\mathrm{Li}_3(1-z)}{8} - \frac{\mathrm{Li}_3(z)}{8} + \frac{1}{8}\mathrm{Li}_2(1-z)\log(1-z)\right. \\
& + \frac{\mathrm{Li}_2(z)\log(z)}{8} - \frac{1}{48}\log^3(1-z) \\
& \left. + \frac{1}{16}\log(z)\log^2(1-z) + \frac{1}{16}\log^2(z)\log(1-z)\right) \\
& - \frac{3z^2}{8} - \frac{1}{96}\left(4z^2-2z+1\right)\log^3(z) + \frac{1}{64}\left(-8z^2+12z+1\right)\log^2(z) \\
& + \frac{1}{32}\left(-8z^2+23z+8\right)\log(z) + \frac{5}{24}\pi^2(1-z)z + \frac{11z}{32} + \frac{1}{8}(1-z)z\log^2(1-z) \\
& - \frac{1}{4}(1-z)z\log(1-z)\log(z) - \frac{1}{16}(3-4z)z\log(1-z) - \frac{9}{32}\Bigg\}\,,
\end{aligned}
\tag{5.42}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}^{DY(2)}_{q\bar{q}\leftarrow q\bar{q}'}(z) = C_F\Bigg\{ & \frac{1}{12z}(1-z)\left(2z^2-z+2\right)\left(\mathrm{Li}_2(z) + \log(1-z)\log(z) - \frac{\pi^2}{6}\right) \\
& + \frac{1}{432z}(1-z)\left(136z^2-143z+172\right) + \frac{1}{48}(1+z)\log^3(z) \\
& - \frac{1}{96}\left(8z^2+3z+3\right)\log^2(z) + \frac{1}{72}\left(32z^2-30z+21\right)\log(z)\Bigg\}\,,
\end{aligned}
\tag{5.43}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}^{DY(2)}_{q\bar{q}\leftarrow qq}(z) = C_F \left(C_F - \frac{1}{2}C_A\right) \Bigg\{ & \frac{1+z^2}{1+z}\left(\frac{3\mathrm{Li}_3(-z)}{2} + \mathrm{Li}_3(z) + \mathrm{Li}_3\left(\frac{1}{1+z}\right)\right. \\
& - \frac{\mathrm{Li}_2(-z)\log(z)}{2} \\
& - \frac{\mathrm{Li}_2(z)\log(z)}{2} - \frac{1}{24}\log^3(z) - \frac{1}{6}\log^3(1+z) + \frac{1}{4}\log(1+z)\log^2(z) \\
& \left. + \frac{\pi^2}{12}\log(1+z) - \frac{3\zeta_3}{4}\right) + (1-z)\left(\frac{\mathrm{Li}_2(z)}{2} + \frac{1}{2}\log(1-z)\log(z) + \frac{15}{8}\right) \\
& - \frac{1}{2}(1+z)\big(\mathrm{Li}_2(-z) + \log(z)\log(1+z)\big) \\
& + \frac{\pi^2}{24}(z-3) + \frac{1}{8}(11z+3)\log(z)\Bigg\} \\
& + C_F\Bigg\{\frac{1}{12z}(1-z)\left(2z^2 - z + 2\right)\left(\mathrm{Li}_2(z) + \log(1-z)\log(z) - \frac{\pi^2}{6}\right) \\
& + \frac{1}{432z}(1-z)\left(136z^2 - 143z + 172\right) - \frac{1}{96}\left(8z^2 + 3z + 3\right)\log^2(z) \\
& + \frac{1}{72}\left(32z^2 - 30z + 21\right)\log(z) + \frac{1}{48}(1+z)\log^3(z)\Bigg\} \,,
\end{aligned}
\tag{5.44}
$$

$$
\mathcal{H}^{DY(2)}_{q\bar{q}\leftarrow qq'}(z) = \mathcal{H}^{DY(2)}_{q\bar{q}\leftarrow q\bar{q}'}(z) \,, \tag{5.45}
$$

$$
\mathcal{H}^{DY(2)}_{q\bar{q}\leftarrow gg}(z) = -\frac{z}{2}\left(1 - z + \frac{1}{2}(1+z)\,\log(z)\right) \,, \tag{5.46}
$$

donde $\mathrm{Li}_k(z)$ $(k = 2, 3)$ son las usuales funciones polilogarítmicas

$$
\mathrm{Li}_2(z) = -\int_0^z \frac{dt}{t}\,\ln(1-t) \;, \qquad \mathrm{Li}_3(z) = \int_0^1 \frac{dt}{t}\,\ln(t)\,\ln(1-zt) \;. \tag{5.47}
$$

Es necesario hacer algunos comentarios sobre los resultados en el caso de Drell–Yan en las Ecs. (5.41)–(5.46) y de la consiguiente determinación de los coeficientes a segundo orden $C^{(2)}_{q\,q}$, $C^{(2)}_{q\,q'}$, $C^{(2)}_{q\,\bar{q}}$, $C^{(2)}_{q\,\bar{q}'}$, $C^{(2)}_{q\,g}$ y $H^{DY(2)}_q$ en las Ecs. (5.8) y (5.9).

El elemento de matriz $\mathcal{H}^{DY(2)}_{q\bar{q}\leftarrow ab}$ está completamente especificado por las Ecs. (5.41)–(5.46): las funciones quark–quark $\mathcal{H}^{DY(2)}_{q\bar{q}\leftarrow q\bar{q}}$, $\mathcal{H}^{DY(2)}_{q\bar{q}\leftarrow q\bar{q}'}$, $\mathcal{H}^{DY(2)}_{q\bar{q}\leftarrow qq}$, $\mathcal{H}^{DY(2)}_{q\bar{q}\leftarrow qq'}$, la función quark–gluon $\mathcal{H}^{DY(2)}_{q\bar{q}\leftarrow qg}$ y la función gluón–gluón $\mathcal{H}^{DY(2)}_{q\bar{q}\leftarrow gg}$.

Usando la Ec. (5.19), en el canal gluón–gluón, tenemos

$$
\mathcal{H}^{DY(2)}_{q\bar{q}\leftarrow gg}(z) = \left(C^{(1)}_{q\,g} \otimes C^{(1)}_{q\,g}\right)(z) \;. \tag{5.48}
$$

Vemos que la función coeficiente de segundo orden $\mathcal{H}^{DY(2)}_{q\bar{q}\leftarrow gg}(z)$ queda completamente determinada por los coeficientes de resumación en q_T a $\mathcal{O}(\alpha_s)$. Usando el valor de $C^{(1)}_{q\,g}$ en la Ec. (5.13), la expresión del lado derecho de la Ec. (5.48) esta en completo acuerdo con el resultado de la Ec. (5.46). Por lo tanto, nuestro cálculo explícito de la función partónica a NNLO $\hat{R}^{(2)}_{gg}$ representa un check de consistencia a la fórmula de factorización (5.7).

Considerando el canal quark–gluón, la Ec. (5.19) puede ser reescrita en la siguiente forma

$$C^{(2)}_{q\,g}(z) + \frac{1}{2}\,H_q^{DY(1)}\,C^{(1)}_{q\,g}(z) = \mathcal{H}^{DY(2)}_{q\bar{q}\leftarrow qg}(z) - \frac{1}{2}\left(\mathcal{H}^{DY(1)}_{q\bar{q}\leftarrow q\bar{q}} \otimes C^{(1)}_{q\,g}\right)(z) \quad , \tag{5.49}$$

donde hemos usado $\mathcal{H}^{DY(1)}_{q\bar{q}\leftarrow q\bar{q}}(z) = H_q^{DY(1)}\,\delta(1-z) + 2\,C^{(1)}_{q\,q}(z)$ (ver Ec. (5.18)). La relación (5.49) puede ser usada para determinar $C^{(2)}_{q\,g}(z)$ de $\mathcal{H}^{DY(2)}_{q\bar{q}\leftarrow qg}$ y de los coeficientes de resumación en q_T a $\mathcal{O}(\alpha_s)$.

Insertando los resultados a primer orden de las Ecs. (5.13)–(5.15) en la Ec. (5.49), es que tenemos explícitamente

$$C^{(2)}_{q\,g}(z) + \frac{1}{4}\,H_q^{DY(1)}\,z\,(1-z) = \mathcal{H}^{DY(2)}_{q\bar{q}\leftarrow qg}(z) - \frac{C_F}{4}\left[z\log(z) + \frac{1}{2}\,(1-z^2) + \left(\frac{\pi^2}{2} - 4\right) z\,(1-z)\right] \,, \tag{5.50}$$

donde $\mathcal{H}^{DY(2)}_{q\bar{q}\leftarrow qg}$ está dada en la Ec. (5.42). Notemos que el lado derecho de la Ec. (5.49) (o la Ec. (5.50)) es independiente del esquema de resumación. De forma análoga a la Ec. (5.15), la dependencia de $C^{(2)}_{q\,g}$, sobre el esquema de resumación es entonces parametrizado por el coeficiente de primer orden $H_q^{DY(1)}$ en el lado derecho de la Ec. (5.50).

Las funciones coeficiente independientes del proceso $C^{(2)}_{q\,q}(z)$, $C^{(2)}_{q\,q'}(z)$ $C^{(2)}_{q\,\bar{q}}(z)$ y $C^{(2)}_{q\,\bar{q}'}(z)$ son obtenidas en forma análoga a $C^{(2)}_{q\,g}(z)$. Considerando el canal diagonal quark–quark, la Ec. (5.19) nos permite obtener

$$\begin{aligned} 2\,C^{(2)}_{q\,q}(z) + \delta(1-z)\left[H_q^{DY(2)} - \frac{3}{4}\left(H_q^{DY(1)}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\,H_q^{DY(1)}\,\mathcal{H}^{DY(1)}_{q\bar{q}\leftarrow q\bar{q}}(z) \\ = \mathcal{H}^{DY(2)}_{q\bar{q}\leftarrow q\bar{q}}(z) - \frac{1}{4}\left(\mathcal{H}^{DY(1)}_{q\bar{q}\leftarrow q\bar{q}} \otimes \mathcal{H}^{DY(1)}_{q\bar{q}\leftarrow q\bar{q}}\right)(z) \quad , \end{aligned} \tag{5.51}$$

donde el lado derecho de la Ec. (5.51) está expresado en término de funciones independientes del esquema de resumación. Insertando las Ecs. (5.13)–(5.15) en la Ec. (5.51), obtenemos de forma explícita

$$\begin{aligned} 2\,C^{(2)}_{q\,q}(z) + \delta(1-z)\left[H_q^{DY(2)} - \frac{3}{4}\left(H_q^{DY(1)}\right)^2 + \frac{C_F}{4}\,(\pi^2-8)\,H_q^{DY(1)}\right] + \frac{1}{2}C_F\,H_q^{DY(1)}(1-z) \\ = \mathcal{H}^{DY(2)}_{q\bar{q}\leftarrow q\bar{q}}(z) - \frac{C_F^2}{4}\left[\delta(1-z)\frac{(\pi^2-8)^2}{4} + \left(\pi^2-10\right)(1-z) - (1+z)\ln z\right] \quad , \end{aligned} \tag{5.52}$$

donde $\mathcal{H}^{DY(2)}_{q\bar{q}\leftarrow q\bar{q}}$ está dado en la Ec. (5.41). Observemos que $C^{(2)}_{q\,q}(z)$ incluye la parte dependiente del esquema de resumación, que es proporcional a $\delta(1-z)$. Esta parte depende de $H_q^{DY(1)}$ y $H_q^{DY(2)}$. También recordemos que la invarianza del esquema de resumación [101] relaciona $C^{(2)}_{q\,q}$, $H_q^{DY(2)}$ y el coeficiente de tercer orden del factor de forma del quark. Considerando el término fuera de la diagonal del canal quark–quark en la Ec. (5.19) obtenemos:

$$C^{(2)}_{q\,q'}(z) = \mathcal{H}^{DY(2)}_{q\bar{q}\leftarrow q\bar{q}'}(z) \quad , \quad C^{(2)}_{q\,\bar{q}}(z) = \mathcal{H}^{DY(2)}_{q\bar{q}\leftarrow qq}(z) \quad , \quad C^{(2)}_{q\,\bar{q}'}(z) = \mathcal{H}^{DY(2)}_{q\bar{q}\leftarrow qq'}(z) \quad . \tag{5.53}$$

donde $\mathcal{H}^{DY(2)}_{q\bar{q}\leftarrow q\bar{q}'}$, $\mathcal{H}^{DY(2)}_{q\bar{q}\leftarrow qq}$, y $\mathcal{H}^{DY(2)}_{q\bar{q}\leftarrow qq'}$ están dados en las Ecs. (5.43)–(5.45). Observemos que de la Ec. (5.45) tenemos que $C^{(2)}_{q\,q'}(z) = C^{(2)}_{q\,\bar{q}'}(z)$ y que los coeficientes extra-diagonal de segundo orden $C^{(2)}_{q\,q'}(z)$, $C^{(2)}_{q\,\bar{q}}(z)$ y $C^{(2)}_{q\,\bar{q}'}(z)$ son independientes del esquema de resumación.

5.5. Comentarios finales y conclusiones

La secciones anteriores fueron escritas tratando de lograr la mayor claridad expositiva, donde el objetivo final es presentar el método y hacerlo entendible. Y el logro de este enfoque es justamente ese, prescindir de detalles que opaquen el sentido detrás de las ecuaciones. Para presentar el método es el mejor enfoque; para dar una noción certera de las herramientas necesarias, el tiempo de cálculo requerido no es suficiente.

Realizar la integral de la Ec. (5.22) requirió ocho meses de trabajo. La dificultad radica en la gran cantidad de términos a integrar y en el tamaño del resultado de tal integral, donde es común obtener resultados que ocupen 50 carillas A4, para una simple integral que posee del orden de uno o dos términos en el integrando. La "artesanía" si se permite la expresión, radica en escoger el conjunto de variables más conveniente para realizar la integral en el menor tiempo posible, y donde el resultado sea el más escueto en longitud.

Capítulo 6

Método general de extracción de los coeficientes $\mathcal{H}^F$ a NNLO

En el Capítulo 5 presentamos un método para calcular los coeficientes $\mathcal{H}^F$ a NNLO. Tal método requiere el uso de la sección eficaz total partónica y la sección diferencial partónica en momento transverso q_T, al orden de precisión requerido para el proceso final F. Pero habíamos notado que el alcance de este método es limitado, ya que al nivel NNLO de precisión, no están disponibles para todos los procesos finales F, las secciones eficaces citadas con anterioridad. Y además, se requiere realizar integrales, cuya complejidad dista ampliamente de la trivial, siendo necesarios varios meses de trabajo para la extracción de un único coeficiente para un dado proceso.

El hecho de que $\mathcal{H}^F$ dependa de cada proceso final F hace que debamos considerarlo y calcularlo en cada caso. Sin embargo, podemos notar que, aun en este coeficiente $\mathcal{H}^F$ dependiente del proceso, siguen habiendo términos universales. Siguen presentándose términos que, de ser posible su identificación, podrían ser calculados una sola vez. Éste es el propósito de este método general: la identificación de tales términos, la extracción de los mismos de los coeficientes $\mathcal{H}^{Higgs}$ [64] y $\mathcal{H}^{DY}$ [65], calculados con anterioridad, y la presentación de una fórmula general de longitud acotada, dependiente del proceso F, y de gran utilidad práctica, evitando así tiempos de cálculo elevados. Nuevamente, esta tarea, es posible explotando las propiedades universales de los elementos de matriz en la región infrarroja.

Este método fue necesario para obtener el coeficiente hard $\mathcal{H}^{\gamma\gamma(2)}$ en el caso de producción de difotones a NNLO, ya que no se conoce a la sección eficaz total a NNLO en este caso.

Este capítulo comienza con las nociones preliminares necesarias para entender la estructura de las correcciones logarítmicas de los elementos de matriz a pequeño momento transverso q_T. Esta introducción muestra los pasos necesarios para extraer el coeficiente $\mathcal{H}^{F(1)}$ a partir de los elementos de matriz de QCD a un-loop y constituye el método general de extracción a NLO elaborado por de Florian y Grazzini [66]. Luego, explotando el comportamiento divergente de los elementos de matriz de QCD a dos-loops [125], se lo generaliza a NNLO en las secciones que le siguen.

6.1. La estructura de las correcciones logarítmicas a pequeño momento transverso q_T

Consideremos que la colisión entre dos hadrones h_1 y h_2, con momento p_1 y p_2 respectivamente,

$$h_1(p_1) + h_2(p_2) \to F(Q^2, q_T; \phi) + X \quad , \tag{6.1}$$

produce el estado final a ser detectado F, acompañado por un estado final arbitrario e indetectado X. Denotamos por $\sqrt{s}$ a la energía del centro de masa de los hadrones que colisionan ($s = (p_1 + p_2)^2 \simeq 2p_1p_2$). La variable adicional ϕ denota la posible dependencia sobre la cinemática de las partículas del estado final en F (rapidity, momento transverso individuales de las partículas, etc).

Asumimos que a nivel partónico el sistema final F es producido con momento transverso nulo (ya que no hay radiación que lo acompañe) a LO. Cuando el momento transverso del estado final F, q_T^2, es del orden de su masa invariante Q^2 el cálculo a orden fijo es posible[1]. En la región donde $q_T^2 \ll Q^2$, es en la que aparecen las grandes correcciones logarítmicas del tipo $\alpha_s^n/q_T^2 \log^{2n-1} Q^2/q_T^2$, que arruinan la convergencia de los cálculos perturbativos a orden fijo. Los términos logarítmicos tienen que ser evaluados a órdenes perturbativos mayores, y posiblemente, resumados a todo orden en α_s. El formalismo de resumación a todo orden fue elaborado en los años ochenta [116, 105, 118, 126, 107, 106, 108, 127, 110, 109].

La estructura de la distribución resumada está dada en términos de un factor de forma en momento transverso y de contribuciones dependientes del proceso. Los coeficientes que controlan la resumación de las grandes contribuciones logarítmicas para un dado proceso en (6.1) pueden ser calculadas a un dado orden, si es que contamos con el cálculo analítico a gran q_T, al mismo nivel de precisión.

A primer orden en α_s, se sabe que la estructura de las grandes contribuciones logarítmicas es universal y depende sólo del canal en el que el sistema es producido en la aproximación a LO. A segundo orden relativo en α_s, solo unos pocos cálculos analíticos existen y están disponibles, como el trabajo pionero para la producción de pares de leptones de Drell–Yan, de Ellis, Martinelli y Petronzio de la Ref. [128]. Usando los resultados de la Ref. [128], Davies y Stirling [109] (ver también [129]) fueron capaces de obtener la estructura completa de las correcciones logarítmicas a $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ para aquel proceso.

El análisis realizado por Davies y Stirling está lejos de ser trivial, ya que requiere de la integración analítica de la distribución en q_T en el límite de q_T pequeño. Más aun, el cálculo no puede decirnos nada de la dependencia de estos coeficientes sobre el proceso particular de la Ec. (6.1) y podría ser, en principio, repetido para cada proceso.

Aquí mostraremos un método completamente general e independiente. La observación básica nuevamente, es que las grandes correcciones logarítmicas son de naturaleza infrarroja (soft o colineal), y entonces su forma puede ser predicha de forma general de manera independiente del proceso.

La estructura de las contribuciones logarítmicas a $\mathcal{O}(\alpha_s^n)$ está controlada por el límite in-

[1] Se asume que todos los demás invariantes dimensionales son del mismo orden, Q^2.

frarrojo de las amplitudes relevantes de QCD al mismo orden. El comportamiento infrarrojo de las amplitudes de QCD a $\mathcal{O}(\alpha_s)$ es conocido [48], como así también las singularidades soft y colineales que aparecen a orden árbol [130, 131] y un-loop [132, 133, 134, 135] en las amplitudes de QCD a orden $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$.

Usando estos conocimientos y explotando la simple cinemática del proceso (6.1), construiremos la aproximación general de los elementos de matriz de QCD que son capaces de controlar todas las regiones singulares correspondientes a $q_T \to 0$ evitando un doble conteo.

La universalidad de este método se debe al hecho de que la fórmula de factorización infrarroja que usamos depende solo del canal ($q\bar{q}$ o gg) en el que el sistema F es producido a LO y no de los detalles de F.

6.1.1. Fórmula de resumación

La distribución en momento transverso para el proceso en la Ec. (6.1) puede ser escrita de la siguiente forma

$$\frac{d\sigma_F}{dQ^2\, dq_T^2\, d\phi} = \left[\frac{d\sigma_F}{dQ^2\, dq_T^2\, d\phi}\right]_{\text{res.}} + \left[\frac{d\sigma_F}{dQ^2\, dq_T^2\, d\phi}\right]_{\text{fin.}} \quad . \tag{6.2}$$

Ambos términos del lado derecho son obtenidos como una convolución entre la sección eficaz partónica y las distribuciones de partones $f_{a/h}(x, Q^2)$ ($a = q_f, \bar{q}_f, g$ es la etiqueta del partón) de los hadrones que colisionan.

La sección eficaz partónica que entra en la parte resumada (el primer término del lado derecho en la Ec. (6.2)) contiene todas las contribuciones logarítmicas del tipo $\alpha_s^n/q_T^2 \log^m Q^2/q_T^2$. Entonces, esta parte debe ser evaluada resumando los términos logarítmicos a todo orden en teoría de perturbaciones. Por otro lado, la sección eficaz partónica del segundo término del lado derecho de la Ec. (6.2), es finita (o al menos integrable) orden a orden en teoría de perturbaciones cuando $q_T \to 0$. Ésta puede ser calculada, por lo tanto, truncando el desarrollo perturbativo a un dado orden fijo en α_s.

Ya que estamos interesados en el límite de q_T pequeño, nos concentramos sólo en el primer término de la Ec. (6.2). La componente resumada es [2]

$$\begin{aligned}\left[\frac{Q^2\, d\sigma_F}{dQ^2\, dq_T^2\, d\phi}\right]_{\text{res.}} = &\sum_{a,b} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_0^\infty db\, \frac{b}{2}\, J_0(bq_T)\, f_{a/h_1}(x_1, b_0^2/b^2)\, f_{b/h_2}(x_2, b_0^2/b^2) \\ &\cdot s\, W_{ab}^F(x_1 x_2 s; Q, b, \phi) \quad .\end{aligned} \tag{6.3}$$

La función de Bessel $J_0(bq_T)$ y el coeficiente $b_0 = 2e^{-\gamma_E}$ (donde $\gamma_E = 0{,}5772\ldots$ es el número de Euler) tienen un origen cinemático. Para tener en cuenta los vínculos cinemáticos que fuerzan la conservación del momento transverso, el procedimiento de resumación tiene que ser llevado a cabo en el espacio del parámetro de impacto b [3].

[2] Esta expresión puede ser generalizada de manera de contar con la dependencia explícita en las escalas de renormalización y factorización, μ_R y μ_F, respectivamente (ver por ejemplo la Ref. [101]).

[3] El parámetro de impacto b es la variable conjugada de q_T.

El coeficiente resumado W^F_{ab} es:

$$W^F_{ab}(s;Q,b,\phi) = \sum_c \int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2\, C^F_{ca}(\alpha_s(b_0^2/b^2),z_1)\, C^F_{\bar{c}b}(\alpha_s(b_0^2/b^2),z_2)\, \delta(Q^2 - z_1 z_2 s) \cdot \frac{d\sigma^{(LO)\,F}_{c\bar{c}}}{d\phi}\, S^F_c(Q,b) \ . \tag{6.4}$$

donde $d\sigma^{(LO)}_{c\bar{c}}/d\phi$ corresponde a la sección eficaz a LO para la producción de un sistema de gran masa invariante F en el canal $c\bar{c}$, con c representando un quark q o un gluón g.

Como anticipamos en la introducción, la forma directa de obtener los coeficientes en las Ecs. (4.18-4.19) a un dado orden involucra el cálculo de la sección eficaz diferencial $d\sigma/dq_T^2 dQ^2 d\phi$ a pequeño q_T al mismo orden. Una comparación con el desarrollo en α_s del resultado resumado en la Ec. (6.3) nos permite extraer el coeficiente que controla la resumación de los grandes términos logarítmicos. Sin embargo, como mostraron Davies y Stirling, tomar los N-momentos en $z = Q^2/s$ de la sección eficaz, hace a los cálculos más simples de manejar[4]

$$\Sigma(N) = \int_0^{1-2q_T/Q} dz\, z^N \frac{Q^2 q_T^2}{d\sigma_0/d\phi} \frac{d\sigma}{dq_T^2 dQ^2 d\phi} \ . \tag{6.5}$$

Nótese que hemos normalizado a la sección eficaz Σ respecto de la contribución partónica de orden más bajo $d\sigma_0/d\phi$ y multiplicado por q_T^2 para cancelar su comportamiento singular en $1/q_T^2$ en el límite $q_T \to 0$. El límite superior de integración $z = 1 - 2q_T/Q(\sqrt{1+q_T^2/Q^2} - q_T/Q) \sim 1 - 2q_T/Q$ ha sido aproximado a primer orden en la expansión en potencias de q_T/Q y corresponde a la cinemática de la emisión de partículas soft (por ejemplo cuando la energía del centro de masa s es sólo suficiente para producir al sistema con masa invariante Q y momento transverso q_T). Trabajando con N-momentos es que evitamos complicadas integrales de convolución, implícitas en (6.3) y hace posible factorizar las distribuciones de partones de la sección eficaz partónica. Así es que la fórmula resumada se escribe

$$\Sigma(N) = \sum_{i,j} f_{i/h_1}(N,\mu_F^2) f_{j/h_2}(N,\mu_F^2)\, \Sigma_{ij}(N) \tag{6.6}$$

donde

$$\Sigma_{ij}(N) = \sum_{a,b} \int_0^\infty b\, db \frac{q_T^2}{2}\, J_0(bq_T)\, C^F_{ca}\left(N,\alpha_s\left(b_0^2/b^2\right)\right) C^F_{\bar{c}b}\left(N,\alpha_s\left(b_0^2/b^2\right)\right) \cdot \exp\left\{ -\int_{b_0^2/b^2}^{Q^2} \frac{dq^2}{q^2}\left[A_c(\alpha_s(q^2))\, \log\frac{Q^2}{q^2} + B_c^F(\alpha_s(q^2))\right] - \int_{b_0^2/b^2}^{\mu_F^2} \frac{dq^2}{q^2}\, (\gamma_{ai}+\gamma_{bj})\,(N,\alpha_s(q^2)) \right\}. \tag{6.7}$$

Notemos que el término extra que involucra la dimensión anómala γ_{ab} en la exponencial en (6.7) se debe a la evolución de las distribuciones de partones desde su escala original b_0^2/b^2, en (6.3), a la escala de factorización arbitraria μ_F a la cual están ahora evaluadas.

[4]En esta sección seguimos a la Ref. [109] en la definición (poco convencional) de los momentos $f(N) = \int_0^1 dz z^N f(z)$.

Para extraer los coeficientes de resumación, podemos estudiar directamente la contribución partónica Σ_{ij}. Sólo podemos tener $q_T \neq 0$ si al menos un gluón fue emitido y por lo tanto, el desarrollo perturbativo de $\Sigma_{c\bar{c}}$ comienza a $\mathcal{O}(\alpha_s)$

$$\Sigma_{c\bar{c}}(N) = \frac{\alpha_s}{2\pi}\,\Sigma_{c\bar{c}}^{(1)}(N) + \left(\frac{\alpha_s}{2\pi}\right)^2 \Sigma_{c\bar{c}}^{(2)}(N) + \cdots\,. \tag{6.8}$$

Del desarrollo de la fórmula resumada (6.7) es posible obtener la expresión de los dos primeros coeficientes en (6.8) [5]

$$\Sigma_{c\bar{c}}^{(1)}(N) = A_c^{(1)} \log\frac{Q^2}{q_T^2} + B_c^{(1)} + 2\gamma_{cc}^{(1)}(N) \tag{6.9}$$

y

$$\begin{aligned}
\Sigma_{c\bar{c}}^{(2)}(N) &= \log^3\frac{Q^2}{q_T^2}\left[-\frac{1}{2}\left(A_c^{(1)}\right)^2\right] \\
&+ \log^2\frac{Q^2}{q_T^2}\left[-\frac{3}{2}\left(B_c^{(1)} + 2\gamma_{cc}^{(1)}(N)\right)A_c^{(1)} + \beta_0 A_c^{(1)}\right] \\
&+ \log\frac{Q^2}{q_T^2}\Big[A_c^{(2)} + \beta_0\left(B_c^{(1)} + 2\gamma_{cc}^{(1)}(N)\right) - \left(B_c^{(1)} + 2\gamma_{cc}^{(1)}(N)\right)^2 \\
&\qquad + 2A_c^{(1)}C_{cc}^{(1)F}(N) - 2\sum_{j\neq c}\gamma_{cj}^{(1)}(N)\gamma_{jc}^{(1)}(N)\Big] \\
&+ B_c^{(2)F} + 2\gamma_{cc}^{(2)}(N) + 2\left(B_c^{(1)} + 2\gamma_{cc}^{(1)}(N)\right)C_{cc}^{(1)F}(N) + 2\zeta(3)(A_c^{(1)})^2 \\
&- 2\beta_0 C_{cc}^{(1)F}(N) + 2\sum_{j\neq c}\left[C_{cj}^{(1)F}(N)\gamma_{jc}^{(1)}(N)\right]\,.
\end{aligned} \tag{6.10}$$

El cálculo de $\Sigma_{c\bar{c}}^{(1)}(N)$ puede proveer información sobre el coeficiente de primer orden $A_c^{(1)}$ (el término logarítmico en (6.9)) y $B_c^{(1)}$ (el término constante en (6.9)) como así también sobre la dimensión anómala a un-loop $\gamma_{cc}^{(1)}(N)$ (el término dependiente de N en (6.9) [6]).

De la misma forma, los coeficientes $A_c^{(2)}$ y $B_c^{(2)F}$ pueden ser extraídos del resultado de segundo orden (6.10). A este orden, también las funciones coeficientes $C_{ij}^{(1)F}(N)$ contribuyen a términos logarítmicos y constantes, y por lo tanto, deberían conocerse para así ser posible la extracción de $A_c^{(2)}$ y $B_c^{(2)F}$. Afortunadamente, hay otra cantidad relacionada, la que permite obtener a las funciones coeficiente $C_{ij}^{(1)F}(N)$ de un cálculo a primer orden. Ésta es la sección eficaz integrada en q_T, y se escribe

$$R_{i\bar{c}} = \int_0^{p_T^2}\frac{dq_T^2}{q_T^2}\Sigma_{i\bar{c}}\,. \tag{6.11}$$

Cuando $p_T^2 \ll Q^2$ el desarrollo perturbativo a $\mathcal{O}(\alpha_s)$ se escribe (despreciando de nuevo términos que son nulos cuando $p_T \to 0$)

$$\begin{aligned}
\int_0^{p_T^2}\frac{dq_T^2}{q_T^2}\Sigma_{c\bar{c}} &= \frac{\alpha_s}{2\pi}\left[-\frac{1}{2}A_c^{(1)}\log^2\frac{Q^2}{p_T^2} - (B_c^{(1)} + 2\gamma_{cc}^{(1)}(N))\log\frac{Q^2}{p_T^2} + 2C_{cc}^{(1)F}(N)\right] \\
\int_0^{p_T^2}\frac{dq_T^2}{q_T^2}\Sigma_{i\bar{c}} &= \frac{\alpha_s}{2\pi}\left[-\gamma_{ci}^{(1)}(N)\log\frac{Q^2}{p_T^2} + C_{ci}^{(1)F}(N)\right] \qquad i \neq c\,.
\end{aligned} \tag{6.12}$$

[5] Por simplicidad, tomamos a las escalas de factorización y renormalización: $\mu_F^2 = \mu_R^2 = Q^2$.

[6] Notemos que todos los momentos menos uno pueden ser extraídos. El restante puede ser obtenido imponiendo reglas de conservación al número de quark y momento.

La integración sobre q_T añade otra potencia en el logaritmo.

En el canal quark ($c = q$), para comparar con el cálculo hecho en la Ref. [109] nos concentramos en la contribución *no-singlete* a la sección eficaz definida de la siguiente forma

$$\sigma^{\rm NS} = \sum_{ff'} \left(\sigma_{q_f \bar{q}_{f'}} - \sigma_{q_f q_{f'}} \right) . \tag{6.13}$$

En lo que sigue, la etiqueta NS, se sobrentiende siempre en $\Sigma_{q\bar{q}}$.

6.1.2. El cálculo a $\mathcal{O}(\alpha_s)$

A este orden sólo un gluón extra de momento k puede ser radiado y la cinemática para el proceso $c\bar{c} \to g + F$ es (ver Fig. 6.1)

$$p_1 + p_2 \to k + q \, . \tag{6.14}$$

Denotemos al elemento de matriz correspondiente por $\mathcal{M}^{(0)}_{c\bar{c}\to g\,F}(p_1, p_2, k, \phi)$ y los invariantes usuales son definidos como

$$s = (p_1 + p_2)^2 \quad u = (p_2 - k)^2 \quad t = (p_1 - k)^2 \quad z = Q^2/s \, . \tag{6.15}$$

La sección eficaz diferencial se escribe

$$\frac{d\sigma_{c\bar{c}\to g\,F}}{dq_T^2 dQ^2 d\phi} = \int \frac{|\mathcal{M}^{(0)}_{c\bar{c}\to g\,F}(p_1, p_2, k, \phi)|^2}{8s(2\pi)^2} \frac{(4\pi)^\epsilon q_T^{-2\epsilon}}{\Gamma(1-\epsilon)} \frac{du}{u} \, \delta\left(\frac{1}{u}(u - u_{max})(u - u_{min}) \right) , \tag{6.16}$$

donde las dos raíces de la ecuación $(p_1 + p_2 - q)^2 = 0$ están dadas por

$$u_{min} = Q^2 \, \frac{z - 1 - \sqrt{(1-z)^2 - 4z\, q_T^2/Q^2}}{2z} \qquad u_{max} = Q^2 \, \frac{z - 1 + \sqrt{(1-z)^2 - 4z\, q_T^2/Q^2}}{2z} \, . \tag{6.17}$$

Para regularizar las divergencias infrarrojas y ultravioletas trabajamos en el esquema de regularización dimensional (CDR) con $4 - 2\epsilon$ dimensiones espacio-temporales, considerando dos estados de helicidad por cada quark no masivo y $2-2\epsilon$ estados de helicidad para gluones. La sección eficaz a orden más bajo (a $q_T = 0$) necesaria para construir Σ en la Ec. (6.5)

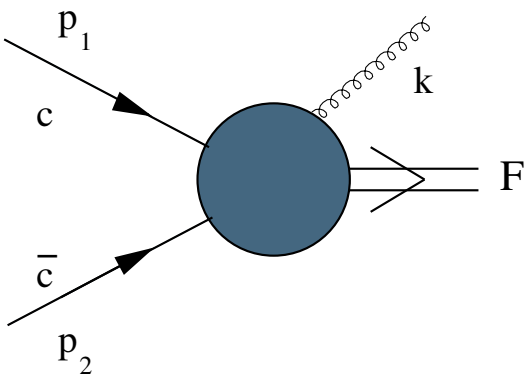

Figura 6.1: *Contribución de $\mathcal{O}(\alpha_s)$ al proceso 6.1.*

está dada por

$$\frac{d\sigma_0}{d\phi} = \frac{|\mathcal{M}^{(0)}_{c\bar{c}\to F}\,(p_1, p_2, \phi)\,|^2}{2s}\,, \tag{6.18}$$

en términos del elemento de matriz Born $|\mathcal{M}^{(0)}_{c\bar{c}\to F}\,(p_1, p_2, \phi)\,|^2$.

Como se ha mencionado, deseamos obtener a $\Sigma^{(1)}_{c\bar{c}}$ usando nuestro conocimiento del comportamiento de los elementos de matriz de QCD en las regiones soft y colineales a $\mathcal{O}(\alpha_s)$.

Notemos que, cuando q_T^2 es pequeño, el gluón adicional está restringido a ser colineal o uno de los partones iniciales soft. Entonces hay tres regiones singulares de $\mathcal{M}^{(0)}_{c\bar{c}\to F}\,(p_1, p_2, k, \phi)$ en el límite $q_T \to 0$:

- primera región colineal: $p_1.k \to 0$
- segunda región colineal: $p_2.k \to 0$
- región soft: $k \to 0$.

Está claro que,ya que q_T^2 es pequeño pero no nulo, estas regiones no producen una singularidad real, polos en ϵ por ejemplo, pero son responsables de la aparición de las grandes contribuciones logarítmicas. Cuando $p_1 k \to 0$, los elementos de matriz cuadrados factorizan de la siguiente forma

$$|\mathcal{M}^{(0)}_{c\bar{c}\to g\,F}\,(p_1, p_2, k, \phi)\,|^2 \simeq \frac{4\pi\alpha_s\mu^{2\epsilon}}{z_1 p_1 k}\hat{P}_{cc}(z_1, \epsilon)|\mathcal{M}^{(0)}_{c\bar{c}\to F}\,(z_1\,p_1, p_2, \phi)\,|^2\,, \tag{6.19}$$

donde

$$\hat{P}_{qq}(z, \epsilon) = C_F\left[\frac{1+z^2}{1-z} - \epsilon(1-z)\right] \tag{6.20}$$

$$\hat{P}_{gg}(z, \epsilon) = 2C_A\left[\frac{z}{1-z} + \frac{1-z}{z} + z(1-z)\right] \tag{6.21}$$

son los kernels (núcleos en alemán) de Altarelli–Parisi (AP) dependientes de ϵ en el esquema CDR. En el lado izquierdo de la Ec. (6.19) el elemento de matriz cuadrado es obtenido reemplazando a los dos partones colineales c y g por un partón c con momento $z_1 p_1$. Notemos que en el canal del gluón, hay contribuciones adicionales con correlaciones de espín y la Ec. (6.19) es estrictamente válida sólo luego de la integración azimutal. Ya que aquí y en lo siguiente, siempre estaremos interesados en cantidades integradas en el ángulo azimutal, la Ec. (6.19) puede ser usada sin problemas para el canal del gluón.

En el límite $p_2 k \to 0$ el comportamiento singular es en cambio

$$|\mathcal{M}^{(0)}_{c\bar{c}\to g\,F}\,(p_1, p_2, k, \phi)\,|^2 \simeq \frac{4\pi\alpha_s\mu^{2\epsilon}}{z_2 p_2 k}\hat{P}_{cc}(z_2, \epsilon)|\mathcal{M}^{(0)}_{c\bar{c}\to F}\,(p_1, z_2\,p_2, \phi)\,|^2\,. \tag{6.22}$$

Consideremos ahora el límite en el cual el gluón se vuelve soft. Como se sabe, la fórmula de factorización soft con frecuencia involucra correlaciones de color, que hacen que se mezclen íntimamente color y cinemática. En general las correlaciones de color vinculan cada par de momento de partones hard en los elementos de matriz Born. En este caso, los partones de momento hard son solo dos y la conservación del color puede ser explotada para obtener

$$|\mathcal{M}^{(0)}_{c\bar{c}\to g\,F}\,(p_1, p_2, k, \phi)\,|^2 \simeq 4\pi\alpha_s\mu^{2\epsilon}\,C_c\,4\,\mathcal{S}_{12}(k)|\mathcal{M}^{(0)}_{c\bar{c}\to F}\,(p_1, p_2, \phi)\,|^2\,, \tag{6.23}$$

donde

$$\mathcal{S}_{12}(k) = \frac{p_1 p_2}{2p_1 k\, p_2 k} \tag{6.24}$$

es el factor eikonal usual y hemos definido

$$C_q = C_F \qquad C_g = C_A\,. \tag{6.25}$$

En la Ec. (6.23) las correlaciones de color están ausentes y la factorización es exacta.

Para cada una de las regiones singulares discutidas más arriba, las Ecs. (6.19), (6.22) y (6.23) proveen una aproximación del elemento de matriz exacto que puede ser usado para calcular la sección eficaz en el límite de pequeño q_T.

Es posible constatar, si identificamos las fracciones de momento z_1 y z_2 con z, que la fórmula de factorización colineal en las Ecs. (6.19,6.22) contiene el límite soft correcto en la Ec. (6.23). Por lo tanto, la unificación de los límites soft y colineales es simple: la fórmula usual de factorización colineal ya contiene a ambos.

Además, podemos usar la simetría en los estados iniciales para realizar la integración en la Ec. (6.16) sólo sobre la mitad del espacio de fase (por ejemplo tomando sólo $u = u_{max}$) y multiplicando el resultado por dos. En este sentido sólo una configuración colineal es posible y puede ocurrir y la Ec. (6.19) provee la aproximación necesaria para el elemento de matriz.

A este orden es aun posible escribir una fórmula de factorización general, para las tres configuraciones, que muestra explícitamente la singularidad en $1/q_T^2$ para el elemento de matriz cuadrado

$$|\mathcal{M}^{(0)}_{c\bar{c}\to g\,F}\,(p_1,p_2,k,\phi)\,|^2 \to \frac{4\pi\mu^{2\epsilon}\alpha_s}{q_T^2}\frac{2(1-z)}{z}\hat{P}_{cc}(z,\epsilon)|\mathcal{M}^{(0)}_{c\bar{c}\to F}\,(\phi)\,|^2\,, \tag{6.26}$$

donde hemos usado la invarianza de Lorentz para escribir $|\mathcal{M}^{(0)}_{c\bar{c}\to F}(\phi)|^2$ sólo como función de la cinemática del estado final. Ahora, podemos usar esta fórmula para calcular el comportamiento a pequeño q_T de $\Sigma_{c\bar{c}}(N)$ en una forma completamente independiente del proceso.

De hecho, la dependencia en el proceso, dada por el elemento de matriz Born, está completamente factorizada y cancela en Σ. Reemplazando la Ec. (6.26) en la Ec. (6.16) y usando la definición de Σ obtenemos (quedándonos con la dependencia en ϵ):

$$\begin{aligned}\Sigma^{(1)}_{c\bar{c}}(N,\epsilon) &= \frac{1}{\Gamma(1-\epsilon)}\left(\frac{4\pi\mu^2}{q_T^2}\right)^{\epsilon}\int_0^{1-2q_T/Q} dz\, z^N \frac{2(1-z)\hat{P}_{cc}(z,\epsilon)}{\sqrt{(1-z)^2-4z\,q_T^2/Q^2}}\\ &\equiv \frac{1}{\Gamma(1-\epsilon)}\left(\frac{4\pi\mu^2}{q_T^2}\right)^{\epsilon} C_c\,\mathcal{F}_{c\bar{c}}(N,\epsilon)\,.\end{aligned} \tag{6.27}$$

Si reemplazamos ϵ por 0 de forma explícita, tenemos

$$\begin{aligned}\Sigma^{(1)}_{q\bar{q}}(N) &= 2C_F\,\log\frac{Q^2}{q_T^2} - 3C_F + 2\gamma^{(1)}_{qq}(N)\\ \Sigma^{(1)}_{gg}(N) &= 2C_A\log\frac{Q^2}{q_T^2} - 2\beta_0 + 2\gamma^{(1)}_{gg}(N)\,,\end{aligned} \tag{6.28}$$

para los canales de quark y gluones. Comparando con la Ec. (6.9) vemos que $A_c^{(1)} = 2C_c$ es el coeficiente de la singularidad $1/(1-z)$ a orden dominante en las funciones de splitting de

AP, mientras que $B_c^{(1)} = -2\gamma_c^{(1)}$ está dado por el coeficiente de la función delta en los kernels de AP regularizados

$$\gamma_q^{(1)} = \frac{3}{2}C_F \qquad \gamma_g^{(1)} = \beta_0 \,. \tag{6.29}$$

Finalmente, para obtener el coeficiente $C_{ab}^{(1)}$, tenemos que evaluar las integrales en la Ec. (6.11) y comparar con los resultados de las Ecs. (6.12). También debemos tener en cuenta la corrección a un-loop de la sección eficaz a LO. Correcciones que son formalmente proporcionales a $\delta(q_T^2)$. La interferencia entre la amplitud a un-loop normalizada, y la amplitud a orden más bajo depende, obviamente, del proceso. Aun así, su estructura singular es universal y esto nos permite escribir

$$\mathcal{M}^{(0)\dagger}_{c\bar{c}\to F}\mathcal{M}^{(1)}_{c\bar{c}\to F} + \text{c.c.} = \frac{\alpha_s}{2\pi}\left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^{\epsilon}\frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)}\left(-\frac{2C_c}{\epsilon^2} - \frac{2\gamma_c}{\epsilon} + \mathcal{A}_c^F(\phi)\right)|\mathcal{M}^{(0)}_{c\bar{c}\to F}|^2. \tag{6.30}$$

La parte *finita* $\mathcal{A}_c^F$ depende (en general) de la cinemática del estado final y del proceso particular que estamos considerando. En el caso de Drell–Yan tenemos [15]:

$$\mathcal{A}_q^{DY} = C_F\left(-8 + \frac{2}{3}\pi^2\right) , \tag{6.31}$$

mientras que para la producción de Higgs en el límite $m_{top} \to \infty$ la contribución es [6]:

$$\mathcal{A}_g^H = 5C_A + \frac{2}{3}C_A\pi^2 - 3C_F \equiv 11 + 2\pi^2 \,. \tag{6.32}$$

El término diagonal en la Ec. (6.11) puede ser evaluado integrando la Eq. (6.27), de 0 a p_T^2, teniendo en cuenta la contribución de la Eq. (6.30) y sustrayendo el siguiente contratérmino de factorización en el esquema $\overline{\text{MS}}$:

$$R_{c\bar{c}}^{(FCT)}(N) = -\frac{2}{\epsilon}\frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)}\left(\frac{4\pi\mu^2}{\mu_F^2}\right)^{\epsilon}\gamma_{cc}^{(1)}(N) \,. \tag{6.33}$$

Para las contribuciones no-diagonales, necesitamos $\Sigma_{i\bar{c}}(N)$, que puede ser calculada, de manera análoga a la Ec. (6.27), de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\Sigma_{i\bar{c}}(N) &= \frac{1}{\Gamma(1-\epsilon)}\left(\frac{4\pi\mu^2}{q_T^2}\right)^{\epsilon}\int_0^{1-2q_T/Q} dz\, z^N \frac{(1-z)\hat{P}_{ci}(z,\epsilon)}{\sqrt{(1-z)^2 - 4z\, q_T^2/Q^2}} \\ &\to \frac{1}{\Gamma(1-\epsilon)}\left(\frac{4\pi\mu^2}{q_T^2}\right)^{\epsilon}\int_0^1 dz\, z^N \hat{P}_{ci}(z,\epsilon)\end{aligned} \tag{6.34}$$

donde las funciones $\hat{P}_{ci}(z,\epsilon)$ son los kernels de AP no diagonales

$$\hat{P}_{gq}(z,\epsilon) = C_F\left[\frac{1+(1-z)^2}{z} - \epsilon z\right] \tag{6.35}$$

$$\hat{P}_{qg}(z,\epsilon) = T_R\left[1 - \frac{2z(1-z)}{1-\epsilon}\right] , \tag{6.36}$$

y la ausencia de singularidades cuando $z \to 1$ ha sido explotada para imponer $q_T \to 0$ en la integral.

El contratérmino de factorización a ser sustraído en este caso es

$$R_{i\bar{c}}^{(FCT)}(N) = -\frac{1}{\epsilon}\frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)}\left(\frac{4\pi\mu^2}{\mu_F^2}\right)^{\epsilon}\gamma_{ci}^{(1)}(N)\,. \tag{6.37}$$

Comparando los resultados totales con las Ecs. (6.12) obtenemos para $C_{ab}^{(1)}$:

$$C_{ab}^{(1)F}(z) = -\hat{P}_{ab}^{\epsilon}(z) + \delta_{ab}\,\delta(1-z)\left(C_a\,\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\mathcal{A}_a^F(\phi)\right)\,, \tag{6.38}$$

donde $\hat{P}_{ab}^{\epsilon}(z)$ representa el término de $\mathcal{O}(\epsilon)$ en los kernels de AP, $\hat{P}_{ab}(z,\epsilon)$, en la Ecs. (6.20, 6.21, 6.35, 6.36) y están dados por:

$$\begin{aligned}
\hat{P}_{qq}^{\epsilon}(z) &= -C_F\,(1-z)\\
\hat{P}_{gq}^{\epsilon}(z) &= -C_F\,z\\
\hat{P}_{qg}^{\epsilon}(z) &= -2T_R\,z(1-z)\\
\hat{P}_{gg}^{\epsilon}(z) &= 0\,.
\end{aligned} \tag{6.39}$$

Como podemos observar, la función coeficiente contiene a ambos, a la contribución *hard* dependiente del proceso (proporcional a $\mathcal{A}_a^F(\phi)$) originada en la corrección a un-loop, como así también la contribución *colineal 'residual'* proporcional a la parte dependiente de ϵ de las funciones de splitting. Contribución ésta última, que tiene origen en las particularidades del esquema $\overline{\text{MS}}$ donde sólo la componente $\epsilon = 0$ (y no toda) de las funciones de splitting es factorizada. La expresión general en la Ec. (6.38) reproduce correctamente al coeficiente $C_{ab}^{(1)}$ calculado para el caso de Drell–Yan [109], producción de Higgs en el límite $m_{top} \to \infty$ [112], y producción de $\gamma\gamma$ [136] y ZZ.

Concluyendo esta sección, que presenta el método de extracción a $\mathcal{O}(\alpha_s)$, podemos decir que los coeficientes $A_c^{(1)}$ y $B_c^{(1)}$, quedan completamente determinados por las propiedades *universales* de la emisión soft y colineal. La función $C_{ab}^{(1)}$ depende ,en cambio, del proceso a través de las correcciones a un-loop. Finalmente el coeficiente finito a NLO dependiente del proceso está contenido en $\mathcal{A}_c^F$.

6.2. La relación entre los elementos de matriz QCD multi-loop y el coeficiente de resumación hard - virtual

Sí bien el coeficiente $\mathcal{H}^{(n)\ F}$ depende del proceso, por depender explícitamente de la componente finita de la corrección virtual a n-loops del proceso Born F, aun así contiene términos que son universales en el sentido de que no dependen de F. Para mostrar como se manifiesta esta propiedad a NLO en procesos iniciados con aniquilación $q\bar{q}$ (la extensión al canal gg es inmediata) partimos de la integral de la sección eficaz de la expresión (6.5) en momento transverso (ver Ec. 6.11):

$$R_{q\bar{q}} = \int_0^{p_T^2}\frac{dq_T^2}{q_T^2}\Sigma_{q\bar{q}}\ . \tag{6.40}$$

Por simplicidad todas las escalas se eligen iguales a Q^2. De las fórmulas de resumación (6.12) sabemos que

$$R^{(1)}_{q\bar{q}} = \frac{\alpha_s}{2\pi}\left[-\frac{1}{2}A^{(1)}_c \log^2\frac{p_T^2}{Q^2} + (B^{(1)}_c + 2\gamma^{(1)}_{cc}(N))\log\frac{p_T^2}{Q^2} + \mathcal{H}^{(1)}_{q\bar{q}}\right] \quad . \tag{6.41}$$

Esta cantidad recibe contribución de tres diferentes procesos

1. Diagramas de emisiones reales: corresponden a la emisión de un gluón desde un quark q o $\bar{q}$. Ya que estamos interesados en el régimen cinemático correspondiente a momentos transversos pequeños, el gluón debe ser colineal al quark o antiquark o soft, tal como se explicó en la sección 6.1.2. Esta contribución sólo contiene términos que son universales.

   Integrando la expresión (6.27) en momento transverso obtenemos

$$R^{(1)(Real)}_{q\bar{q}} = \frac{\alpha_s}{2\pi}\frac{e^{\gamma_E}}{\Gamma(1-\epsilon)}\left[\frac{2C_F}{\epsilon^2}+\frac{3C_F - 2\gamma^{(1)}_{q\bar{q}}}{\epsilon} - 2\gamma^{\epsilon(1)}_{q\bar{q}}\right.$$
$$\left. - C_F\log^2\frac{p_T^2}{Q^2} + (-3C_F + 2\gamma^{(1)}_{q\bar{q}})\log\frac{p_T^2}{Q^2}\right] \quad , \tag{6.42}$$

   donde $\gamma^{\epsilon(1)}_{q\bar{q}}$ es la componente ϵ de la dimensión anómala.

2. Diagramas virtuales: esta contribución es la que es dependiente del proceso, aunque posee también una estructura que es universal

$$R^{(1)(Virt)}_{q\bar{q}} = \frac{\alpha_s}{2\pi}\frac{e^{\gamma_E}}{\Gamma(1-\epsilon)}\left[-\frac{2C_F}{\epsilon^2} - \frac{3C_F}{\epsilon} + C_F\pi^2 + \mathcal{F}^{(1\times 0)}_{inite\ q\bar{q}}\right] \quad . \tag{6.43}$$

   La parte dependiente del proceso está incluida en $\mathcal{F}^{(1\times 0)}_{inite}$ y que por haber partido de la ecuación (6.5) en este caso los términos finitos $\mathcal{F}^{(n\times m)}_{inite}$ están normalizados al Born; normalización que se hereda de la Eq. (6.27).

3. Término de factorización: a este orden puede ser escrito:

$$R^{(1)(Fact)}_{q\bar{q}} = \frac{\alpha_s}{2\pi}\frac{e^{\gamma_E}}{\Gamma(1-\epsilon)}\frac{2\gamma^{(1)}_{q\bar{q}}}{\epsilon} \quad . \tag{6.44}$$

Al sumar las tres contribuciones encontramos que los polos cancelan y que podemos extraer los coeficientes que se detallaron en la sección 6.1.2

$$\begin{aligned} A^{(1)}_q &= 2C_F \\ B^{(1)}_q &= -3C_F \\ \mathcal{H}^{(1)}_{q\bar{q}} &= -22\gamma^{\epsilon(1)}_{q\bar{q}} + C_F\pi^2 + \mathcal{F}^{(1\times 0)}_{inite\ q\bar{q}} \ . \end{aligned} \tag{6.45}$$

Notemos que si conocemos la expresión del coeficiente $\mathcal{H}^{(1)}_{q\bar{q}}$ para un dado proceso, por ejemplo Drell–Yan, podemos obtener de inmediato al coeficiente $\mathcal{H}^{(1)}_{q\bar{q}}$ para otro proceso $'X'$ realizando la siguiente operación

$$\mathcal{H}^{(1)\ 'X'}_{q\bar{q}} = \mathcal{H}^{(1)\ 'DY'}_{q\bar{q}} - \mathcal{F}^{(1\times 0)\ 'DY'}_{inite\ q\bar{q}} + \mathcal{F}^{(1\times 0)\ 'X'}_{inite\ q\bar{q}} \quad . \tag{6.46}$$

Conociendo un coeficiente $\mathcal{H}^{(1)}_{q\bar{q}}$ para un dado proceso, podemos obtener el correspondiente para otro proceso, si conocemos la contribución virtual de los diagramas a un-loop, sin tener en consideración por los términos independientes del proceso que surgen de la emisión real (Ec. (6.42)) y que cancelan en la diferencia $\mathcal{H}^{(1)\ 'X'}_{q\bar{q}} - \mathcal{H}^{(1)\ 'DY'}_{q\bar{q}}$.

En el caso a NNLO (dos-loops) la dificultad del cálculo del coeficiente $R^{(2)}_{q\bar{q}}$ aumenta, pero si notamos que (teniendo en cuenta la última aseveración) es posible concentrarse sólo en las componentes dependientes del proceso, la dificultad queda acotada. Así, notaremos con un tilde las cantidades que sólo incluyen términos dependientes del proceso. Realizando la misma tarea que para el caso a NLO, enumeramos las distintas contribuciones que recibe $\tilde{R}^{(2)}_{q\bar{q}}$:

1. Doble emisión real: Esta contribución sólo aporta términos universales (de la misma forma que sucede con el caso a NLO), de manera que

$$\tilde{R}^{(2)(Doble-Real)}_{q\bar{q}} = 0 \ . \tag{6.47}$$

2. Emisión real a un-loop: El comportamiento singular de las amplitudes a un-loop puede ser separado en dos términos; un término surge del producto de la amplitud a un-loop (sin la presencia del gluón extra) con la función de *splitting* de Altarelli-Parisi a orden más bajo ($\hat{P}^{(0)}_{q\bar{q}}(z,\epsilon)|\mathcal{M}^{(1)}_{q\bar{q}\to X} \times \mathcal{M}^{(0)}_{q\bar{q}\to X}|$) y la otra del producto de la función de *splitting* a un-loop con el elemento de matriz Born ($\hat{P}^{(1)}_{q\bar{q}}(z,\epsilon)|\mathcal{M}^{(0)}_{q\bar{q}\to X}|^2$). La última contribución es independiente del proceso mientras que la primera depende del proceso a través del elemento de matriz a un-loop

$$\begin{aligned}
\tilde{R}^{(2)(real,un-loop)}_{q\bar{q}} &= R^{(1)(Real)}_{q\bar{q}} \left[|\mathcal{M}^{(1)}_{q\bar{q}\to X} \times \mathcal{M}^{*(0)}_{q\bar{q}\to X}| + |\mathcal{M}^{*(1)}_{q\bar{q}\to X} \times \mathcal{M}^{(0)}_{q\bar{q}\to X}| \right] / |\mathcal{M}^{(0)}_{q\bar{q}\to X}|^2 \\
&= \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{e^{\gamma_E}}{\Gamma(1-\epsilon)} \left[\frac{2C_F}{\epsilon^2} + \frac{3C_F - 2\gamma^{(1)}_{q\bar{q}}}{\epsilon} - 2\gamma^{\epsilon(1)}_{q\bar{q}} \right. \\
&\left. - C_F \log^2 \frac{p_T^2}{Q^2} + (-3C_F + 2\gamma^{(1)}_{q\bar{q}}) \log \frac{p_T^2}{Q^2} \right] \times \frac{\alpha_s}{2\pi} \mathcal{F}^{(1\times 0),\epsilon}_{inite\ q\bar{q}} \ .
\end{aligned} \tag{6.48}$$

La última identidad es válida ya que nos interesan sólo los términos dependientes del proceso y es así que se satisface la siguiente igualdad

$$\left[\left\{ |\mathcal{M}^{(1)}_{q\bar{q}\to X} \times \mathcal{M}^{*(0)}_{q\bar{q}\to X}| + |\mathcal{M}^{*(1)}_{q\bar{q}\to X} \times \mathcal{M}^{(0)}_{q\bar{q}\to X}| \right\} / |\mathcal{M}^{(0)}_{q\bar{q}\to X}|^2 \right]_{\text{Depend.Proceso}} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \mathcal{F}^{(1\times 0),\epsilon}_{inite\ q\bar{q}} \ . \tag{6.49}$$

La notación aquí puede ser un tanto confusa; con $\mathcal{F}^{(1\times 0),\epsilon}_{inite\ q\bar{q}}$ queremos significar que estamos considerando también aquellos términos de $\mathcal{O}(\epsilon, \epsilon^2)$, ya que es mejor hacerlos tender a cero, sólo después de que la cancelación de polos haya tenido lugar.

3. Contribuciones virtuales a dos-loops: aquí también por simplicidad separamos la contribución en dos términos. Una contribución es la que resulta del producto entre la amplitud a dos-loops y el Born y la otra del producto entre el elemento de matriz a un-loop elevado al cuadrado. Ambos contienen términos dependientes del proceso que pueden ser aislados utilizando la expansión singular de los elementos de matriz a dos-loops presentada por Catani [125].

a) Amplitud un-loop al cuadrado. Aquí la parte dependiente del proceso nos permite escribir

$$\tilde{R}^{(2)(un-loop^2)}_{q\bar{q}} = 2\mathcal{R}e\big[\mathbf{I}^{(1)}(\epsilon)\mathcal{M}^{(1)}_{q\bar{q}\to X}\times\mathcal{M}^{*(0)}_{q\bar{q}\to X}\big]/|\mathcal{M}^{(0)}_{q\bar{q}\to X}|^2+\left(\frac{\alpha_s}{2\pi}\right)^2\mathcal{F}^{(1\times1)}_{inite\ q\bar{q}} \quad (6.50)$$

donde aquí el operador $\mathbf{I}^{(1)}$ adquiere la forma

$$\mathbf{I}^{(1)}(\epsilon) = -\frac{1}{2}(-1)^{\epsilon}\frac{e^{\gamma_E}}{\Gamma(1-\epsilon)}C_F\left\{\frac{2}{\epsilon}+\frac{3}{\epsilon}\right\} . \quad (6.51)$$

b) Amplitud a dos-loops.

$$\tilde{R}^{(2)(dos-loops)}_{q\bar{q}} = 2\mathcal{R}e\big[\mathbf{I}^{(1)}(\epsilon)\mathcal{M}^{(1)}_{q\bar{q}\to X}\times\mathcal{M}^{*(0)}_{q\bar{q}\to X}\big]/|\mathcal{M}^{(0)}_{q\bar{q}\to X}|^2+\left(\frac{\alpha_s}{2\pi}\right)^2\mathcal{F}^{(2\times0)}_{inite\ q\bar{q}} \quad (6.52)$$

La suma de ambos términos resulta en la contribución virtual a dos-loops total (sólo la parte dependiente del proceso)

$$\tilde{R}^{(2)(Virt)}_{q\bar{q}} = \left(\frac{\alpha_s}{2\pi}\right)^2\left[\frac{e^{\gamma_E}}{\Gamma(1-\epsilon)}C_F\left\{\frac{2}{\epsilon}+\frac{3}{\epsilon}\right\}(-1)^{\epsilon}\mathcal{F}^{(1\times0),\epsilon}_{inite\ q\bar{q}}+\mathcal{F}^{(1\times1)}_{inite\ q\bar{q}}+\mathcal{F}^{(2\times0)}_{inite\ q\bar{q}}\right] . \quad (6.53)$$

4. Término de factorización: a este orden pude ser escrito

$$\tilde{R}^{(2)(Fact)}_{q\bar{q}} = \left(\frac{\alpha_s}{2\pi}\right)^2\frac{e^{\gamma_E}}{\Gamma(1-\epsilon)}\frac{2\gamma^{(0)}_{qq}}{\epsilon}\mathcal{F}^{(1\times0),\epsilon}_{inite\ q\bar{q}} . \quad (6.54)$$

Luego de sumar todas las contribuciones, los polos cancelan y entonces podemos hacer tender a cero los términos que poseen potencias positivas de ϵ (por ejemplo $\mathcal{F}^{(1\times0),\epsilon}_{inite\ q\bar{q}} \to \mathcal{F}^{(1\times0)}_{inite\ q\bar{q}}$), y así es que obtenemos

$$\begin{aligned}\tilde{R}^{(2)}_{q\bar{q}} = \left(\frac{\alpha_s}{2\pi}\right)^2\Bigg[&(-2\gamma^{\epsilon(0)}_{qq}+C_F\pi^2)\mathcal{F}^{(1\times0)}_{inite\ q\bar{q}}+\mathcal{F}^{(1\times1)}_{inite\ q\bar{q}}+\mathcal{F}^{(2\times0)}_{inite\ q\bar{q}}\\ &\left(-C_F\log^2\frac{p_T^2}{Q^2}+(-3C_F+2\gamma^{(0)}_{qq})\log\frac{p_T^2}{Q^2}\right)\mathcal{F}^{(1\times0)}_{inite\ q\bar{q}}\Bigg] . \end{aligned} \quad (6.55)$$

Considerando ahora la expresión de $\tilde{R}^{(2)}_{q\bar{q}}$ obtenida desde las fórmulas de resumación podemos escribir

$$\tilde{R}^{(2)}_{q\bar{q}} = \left(\frac{\alpha_s}{2\pi}\right)^2\left[-\frac{1}{2}A^{(1)}_q\tilde{\mathcal{H}}^{(1)}_{q\bar{q}}\log^2\frac{p_T^2}{Q^2}+(B^{(1)}_q+2\gamma^{(0)}_{qq})\tilde{\mathcal{H}}^{(1)}_{q\bar{q}}\log\frac{p_T^2}{Q^2}+\tilde{\mathcal{H}}^{(2)}_{q\bar{q}}\right] , \quad (6.56)$$

donde (cabe destacar otra vez) las cantidades con tilde sólo contienen términos dependientes del proceso.

De la comparación entre las ecuaciones (6.55) y (6.56) es que obtenemos

$$\tilde{\mathcal{H}}^{(2)}_{q\bar{q}} = (-2\gamma^{\epsilon(0)}_{qq}+C_F\pi^2)\mathcal{F}^{(1\times0)}_{inite\ q\bar{q}}+\mathcal{F}^{(1\times1)}_{inite\ q\bar{q}}+\mathcal{F}^{(2\times0)}_{inite\ q\bar{q}} . \quad (6.57)$$

Entonces podemos operar de la misma forma que empleamos para el caso a NLO. Del conocimiento del coeficiente $\mathcal{H}^{(2)\ 'DY'}_{q\bar{q}}$ para el caso de Drell–Yan, podemos obtener los coeficientes para otros procesos $'X'$ (iniciados por aniquilación $q\bar{q}$ [7])

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{(2)\ 'X'}_{q\bar{q}} &= \mathcal{H}^{(2)\ 'DY'}_{q\bar{q}} - (-2\gamma^{\epsilon(0)}_{qq} + C_F\pi^2)\mathcal{F}^{(1\times0)'DY'}_{inite\ q\bar{q}} - \mathcal{F}^{(1\times1)'DY'}_{inite\ q\bar{q}} - \mathcal{F}^{(2\times0)'DY'}_{inite\ q\bar{q}} \\ &+ (-2\gamma^{\epsilon(0)}_{qq} + C_F\pi^2)\mathcal{F}^{(1\times0)'X'}_{inite\ q\bar{q}} + \mathcal{F}^{(1\times1)'X'}_{inite\ q\bar{q}} + \mathcal{F}^{(2\times0)'X'}_{inite\ q\bar{q}} \ . \end{aligned} \tag{6.58}$$

Es decir, nuevamente hemos cancelado los términos universales por "sustracción", obteniendo así el coeficiente $\mathcal{H}^{(2)\ 'X'}_{q\bar{q}}$ para el proceso $'X'$, lo que ofrece la fórmula maestra para el cálculo de cualquier coeficiente $\mathcal{H}^{(2)\ 'X'}_{q\bar{q}}$.

6.3. El coeficiente $\mathcal{H}^{(2)}$ para producción de par de fotones

Sabemos como extraer la parte proporcional a $\delta(1-z)$ del coeficiente $\mathcal{H}^{(2)}$ para el subproceso partónico $q\bar{q} \to \gamma\gamma$ usando las amplitudes virtuales a dos-loops calculadas en [137]. Los invariantes de Mandelstam $\hat{s}$,$\hat{u}$ y $\hat{t}$ para el proceso $q(p_1)\bar{q}(p_2) \to \gamma(p_3)\gamma(p_4)$ se definen

$$\hat{s} = (p_1+p_2)^2, \qquad \hat{s} = (p_2-p_3)^2, \qquad \hat{t} = (p_1-p_3)^2 \tag{6.59}$$

Para lograr que el coeficiente $\mathcal{H}^{(0)}$ sea igual a la unidad en la Ec. (4.71), normalizamos a la función $\mathcal{H}$ con la contribución Born $\mathcal{A}^{LO}$ [8]. Expresamos el resultado en término de la variable $v = -\hat{u}/\hat{s}$

$$\mathcal{A}^{LO} = \mathcal{M}^{(0)*}\mathcal{M}^{(0)} = 24\left(\frac{\hat{u}}{\hat{t}} + \frac{\hat{t}}{\hat{u}}\right) = 24\frac{1-2v+2v^2}{v(1-v)}; \tag{6.60}$$

$$\mathcal{H}_{\gamma\gamma\ q\bar{q}}(v,\alpha_s(\mu_R^2)) = 1 + \frac{\alpha_s(\mu_R^2)}{2\pi}\mathcal{H}^{(1)}_{\gamma\gamma\ q\bar{q}}(v) + \left(\frac{\alpha_s(\mu_R^2)}{2\pi}\right)^2\mathcal{H}^{(2)}_{\gamma\gamma\ q\bar{q}} + \mathcal{O}(\alpha_s^3(\mu_R^2)); \tag{6.61}$$

con

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{(1)}_{\gamma\gamma\ q\bar{q}}(v) &= \frac{1}{\mathcal{A}^{LO}}\mathcal{F}^{0\times1}_{inite,q\bar{q}\gamma\gamma;\hat{s}} + 6\zeta_2 C_F \\ &= C_F\Big((\pi^2-7) + \frac{1}{(1-v)^2+v^2}\big(\big((1-v^2)+1\big)\log^2(1-v) + v(v+2)\log(1-v) \\ &+ (v^2+1)\log^2 v + (1-v)(3-v)\log v\big)\Big), \end{aligned} \tag{6.62}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{(2)}_{\gamma\gamma\ q\bar{q}}(v) &= \frac{1}{\mathcal{A}^{LO}}\left[\mathcal{F}^{0\times2}_{inite,q\bar{q}\gamma\gamma;\hat{s}} + \mathcal{F}^{1\times1}_{inite,q\bar{q}\gamma\gamma;\hat{s}}\right] + 6\zeta_2 C_F\mathcal{H}^{(1)}_{\gamma\gamma\ q\bar{q}}(v) \\ &+ C_F^2\big(-45\zeta_4 + \frac{3}{4}(1-8\zeta_2+16\zeta_3)\log\mu_R^2/\hat{s}\big) \\ &+ \frac{C_F C_A}{648}(4856 + 21258\zeta_2 - 3366\zeta_3 - 8505\zeta_4 \\ &+ 6(-245 + 1809\zeta_2 - 1404\zeta_3)\log\mu_R^2/\hat{s}) \\ &- \frac{C_F N_f}{162}(164 + 873\zeta_2 - 153\zeta_3 + 15(-5+27\zeta_2)\log\mu_R^2/\hat{s}); \end{aligned} \tag{6.63}$$

[7] Y también para los iniciados por fusión gg (utilizando los resultados correspondientes a la producción del bosón de Higgs).

[8] La amplitud Born cuadrado está normalizada como en la Ref. [137], donde se utiliza el factor de normalización $16\pi^2\alpha$.

donde $\mathcal{F}^{0\times 2}_{inite,q\bar{q}\gamma\gamma;\hat{s}}$ y $\mathcal{F}^{1\times 1}_{inite,q\bar{q}\gamma\gamma;\hat{s}}$ están definidos respectivamente en las Ecs. (4.6) y (5.3) de la Ref. [137] y se detallan a continuación

$$\mathcal{F}^{0\times 2}_{inite,q\bar{q}\gamma\gamma;\,c} = 2C_A\left[\left(\sum_q Q_q^2\right)T_R C_F A_c + C_F^2 B_c + C_F C_A D_{2;c} + N_f C_F E_{3;c}\right]. \quad (6.64)$$

$$\mathcal{F}^{1\times 1}_{inite,q\bar{q}\gamma\gamma;\,c} = C_A C_F^2 G_{1;c} \quad (6.65)$$

El subíndice $c = s, u$ denota el canal. Q_q hace referencia a la carga de cada uno de los quarks activos y sin masa, que participan en el proceso. Los valores de A_c, B_c, $D_{i;c}$, $E_{i;c}$, y $G_{i;c}$ son presentados en el Apéndice C para el canal s y u, en función de una base de logaritmos y polilogaritmos[9] con argumentos x, $1-x$ y $(x-1)/x$, donde

$$x = -\frac{t}{s}, \qquad y = -\frac{u}{s} = 1-x, \qquad z = -\frac{u}{t} = \frac{x-1}{x}. \quad (6.67)$$

En la región física ($s > 0$ y $t, u < 0$) todas nuestras funciones base son reales. Sólo con fines prácticos, introducimos los siguientes logaritmos

$$X = \log\left(\frac{-t}{s}\right), \qquad Y = \log\left(\frac{-u}{s}\right), \qquad S = \log\left(\frac{s}{\mu^2}\right), \qquad U = \log\left(\frac{-u}{\mu^2}\right), \quad (6.68)$$

donde μ es la escala de renormalización.

El coeficiente $\mathcal{H}^{(1)}_{\gamma\gamma\ q\bar{q}}$ en la Ec. (6.62) está en acuerdo con el coeficiente calculado en la Ref. [136] (Ec. (11)), una vez que tomamos los mismos factores de normalización. Y en cuanto al coeficiente $\mathcal{H}^{(2)}_{\gamma\gamma\ q\bar{q}}$ se ha constatado que los términos logaritmicos que aparecen en la expresión (6.63) sean los correctos.

6.4. Conclusiones

Hemos generalizado el método de extracción de coeficientes finitos a NNLO [10]. Así, el método de sustracción en momento transverso q_T [42] (detallado en el Capítulo 4) adquiere su forma final y es posible utilizarlo entonces, en el cálculo de la producción de un sistema final F genérico sin color a NNLO. Este es otro de los aportes originales de esta tesis, dar la forma final al método de sustracción en momento transverso q_T.

En particular, y como se ha detallado en la Sección 6.3, el método general ha sido aplicado para hallar al coeficiente $\mathcal{H}^{(2)}_{\gamma\gamma}$ cuando el estado final F está compuesto de dos fotones. Esto fue necesario para poder calcular la sección eficaz de producción de difotones directos en colisiones hadrónicas a NNLO (ver Capítulo 9) y constituye otro de los aportes originales de esta tesis.

[9] Como se acostumbra, los polilogaritmos $\mathrm{Li}_n(w)$ se definen

$$\begin{aligned} \mathrm{Li}_n(w) &= \int_0^w \frac{dt}{t}\mathrm{Li}_{n-1}(t) \qquad \text{para } n = 3, 4, 5, \cdots \\ \mathrm{Li}_2(w) &= -\int_0^w \frac{dt}{t}\log(1-t). \end{aligned} \quad (6.66)$$

[10] Generalización del método propuesto en el Capítulo 5.

Capítulo 7

Producción de bosones vectoriales en colisiones hadrónicas a NNLO en teoría de perturbaciones de QCD

La producción de los bosones W y Z en colisiones hadrónicas, a través del mecanismo de Drell–Yan (DY) [138], posee una alta importancia en los estudios de la física de los colisionadores hadrónicos, y fue el primer proceso, donde las ideas del modelo partónico desarrollado para el proceso de colisión profunda entre un hadrón y un leptón (*Deep inelastic scattering*, DIS) fue aplicado a colisiones hadrónicas, lo que derivó en el descubrimiento de los bosones Z y W [139, 140].

Estos procesos tienen una tasa de producción muy elevada, y ofrecen una señal limpia, dando a lugar a (en el estado final) al menos un lepton de alto momento transverso. Estudios sobre la producción del bosón W en el Tevatron (Fermilab), condujeron a determinaciones precisas de la masa del bosón W y de su ancho [141]. El proceso de DY, también es usado para extraer información relevante desde los datos experimentales en la tarea de obtener las PDFs [142, 143, 144, 145] (algunas de las citas en las que se usa directamente nuestro código `DYNNLO` [55, 35], para las comparaciones con los datos). Y también ha sido utilizado, como un proceso de referencia durante las primeras corridas del LHC.

Por todas estas razones, es esencial contar con una descripción teórica precisa para la producción de bosones vectoriales y sus distribuciones asociadas. Como siempre, ésta es una tarea complicada, ya que se requieren las correcciones radiativas al orden de precisión requerido. Las correcciones a la sección eficaz total [123, 8] y a las distribuciones en rapidity [61] del bosón vectorial son conocidas a NNLO en la constante de acoplamiento fuerte α_s. El cálculo completo a NNLO, también fue concluido hace algunos años [146, 147]. Y las correcciones electrodébiles fueron calculadas a $\mathcal{O}(\alpha)$ para la producción de ambos, W [148, 149] y Z [150, 151].

En este capítulo se presentan las correcciones a NNLO para la producción de bosones vectoriales en colisiones hadrónicas [35], usando el formalismo de sustracción en momento transverso presentado en el Capítulo 4. Este cálculo incluye la interferencia $\gamma - Z$, efectos de ancho-finito en el decaimiento leptónico de los bosones vectoriales, y las correspondientes correlaciones de espín. Nuestro cálculo es implementado en el código de tipo Monte Carlo `DYNNLO` [55]. El programa permite al usuario aplicar cortes cinemáticos arbitrarios sobre el estado final de los leptones y la actividad del jet asociado, como así también, calcular las correspondientes distribuciones en la forma de histogramas.

7.1. Preliminares

La evaluación de las correcciones de QCD de orden superior a los procesos de hard-scattering es una tarea complicada, ya que están presentes en los pasos intermedios del cálculo, las divergencias infrarrojas (IR) que evitan una implementación directa de las técnicas numéricas. Con este objeto es que este cálculo se basa en el formalismo de sustracción en momento transverso para alcanzar el orden de precisión NNLO.

Consideremos la reacción inclusiva de hard-scattering

$$h_1 + h_2 \to V(q) + X, \tag{7.1}$$

donde la colisión de los dos hadrones h_1 y h_2 produce el bosón vectorial V ($V = Z/\gamma^*, W^+$ o W^-), con cuadrimomento q y alta masa invariante $\sqrt{q^2}$. A NLO, dos tipos de correcciones contribuyen: i) correcciones *reales* (ver Figura (7.2)), donde un partón retrocede en contra de F; ii) correcciones virtuales de *un-loop* (ver Figura (7.3)) al LO [1]. Ambas contribuciones son IR divergentes si las consideramos por separado, pero estas divergencias cancelan en la suma. A NNLO, debemos considerar tres tipos de correcciones: i) correcciones *doble reales* (ver Figuras (7.4, 7.5, 7.6, 7.7)), donde dos partones retroceden en contra de F; ii) correcciones *reales-virtuales* (ver Figura (7.8)) donde un partón retrocede en contra de F, a un-loop; iii) correcciones virtuales a *dos-loops* (ver Figura (7.9)) al LO. Por separado estas tres contribuciones son divergentes, y entonces el cálculo (numérico o analítico) debe estar organizado de tal manera, que uno pueda alcanzar la cancelación de tales divergencias.

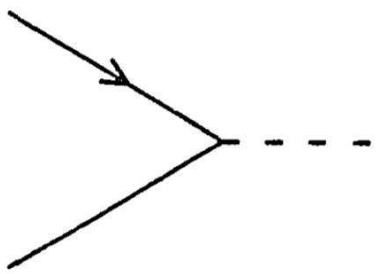

Figura 7.1: *La contribución born al subproceso $q + \bar{q} \to V$.*

Para tratar las divergencias que surgen en las etapas intermedias de todo cálculo a NNLO utilizamos el formalismo de sustracción en momento transverso descrito en el Capítulo 4. De acuerdo con la Ec. (4.70), el cálculo NLO de $d\sigma^V$ requiere del coeficiente $\mathcal{H}^{V(1)}$ y el cálculo a LO de $d\sigma^{V+\text{jets}}$. La forma general del coeficiente $\mathcal{H}^{(1)}$ (que depende del proceso final) es conocida. La relación precisa entre $\mathcal{H}^{(1)}$ y la parte finita de la corrección a un-loop para un proceso general puede hallarse en la Ref. [111] y se detalla en el Capítulo 6.

A NNLO, se necesita también el coeficiente $\mathcal{H}^{V(2)}$, junto con el cálculo de $d\sigma^{V+\text{jets}}$ a NLO. La tarea de calcular $\mathcal{H}^{V(2)}$ formó parte del trabajo original de esta tesis y se detalla en el Capítulo 5, para el caso específico del proceso de Drell-Yan y fue publicada en la Ref. [65].

Entonces, con toda esta información, tenemos todos los elementos necesarios para escribir un código de tipo Monte Carlo que alcance la precisión NNLO, en el que puedan ser

[1] Proceso que se detalla en la Figura (7.1)

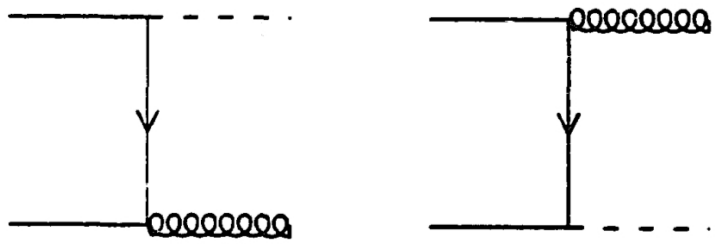

Figura 7.2: *Diagramas que contribuyen al subproceso* $q + \bar{q} \to V + g$. *Los diagramas que corresponden a los subprocesos* $q(\bar{q}) + g \to V + q(\bar{q})$ *pueden ser obtenidos de estos mismos, realizando el cruce de líneas externas correspondiente.*

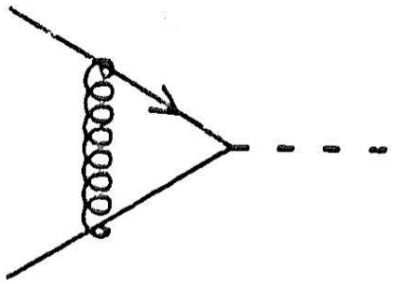

Figura 7.3: *La corrección a un-loop a* $q + \bar{q} \to V$.

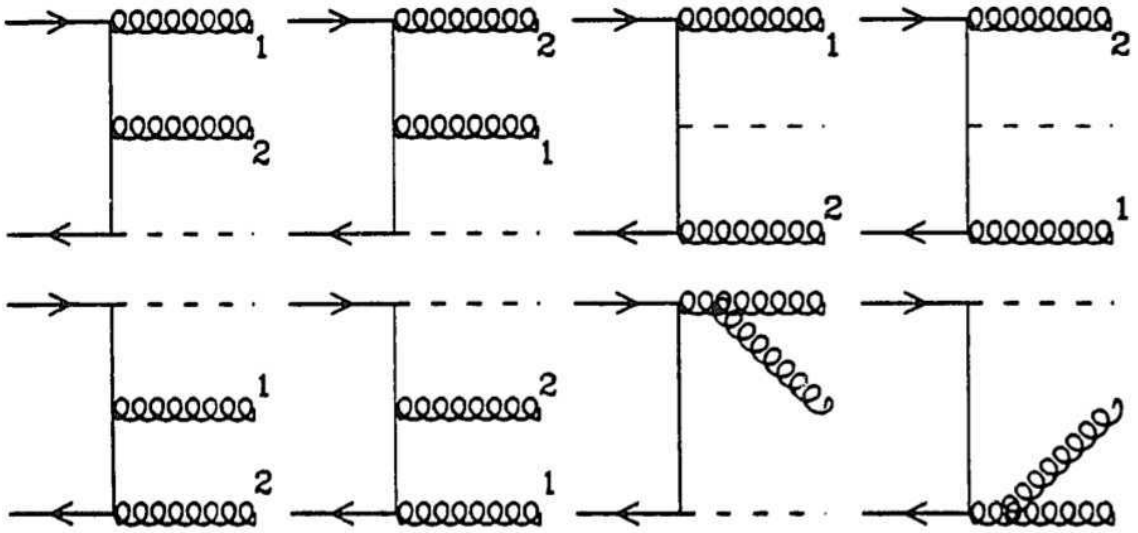

Figura 7.4: *Diagramas que contribuyen al subproceso* $q + \bar{q} \to V + g + g$. *Los diagramas correspondientes al subproceso* $q(\bar{q}) + g \to V + q(\bar{q}) + g$ *pueden ser obtenidos de estos mismos, realizando el cruce de líneas externas correspondiente. Si se realiza el cruce de dos líneas externas, se pueden obtener los diagramas correspondientes al subproceso* $g + g \to V + q + \bar{q}$.

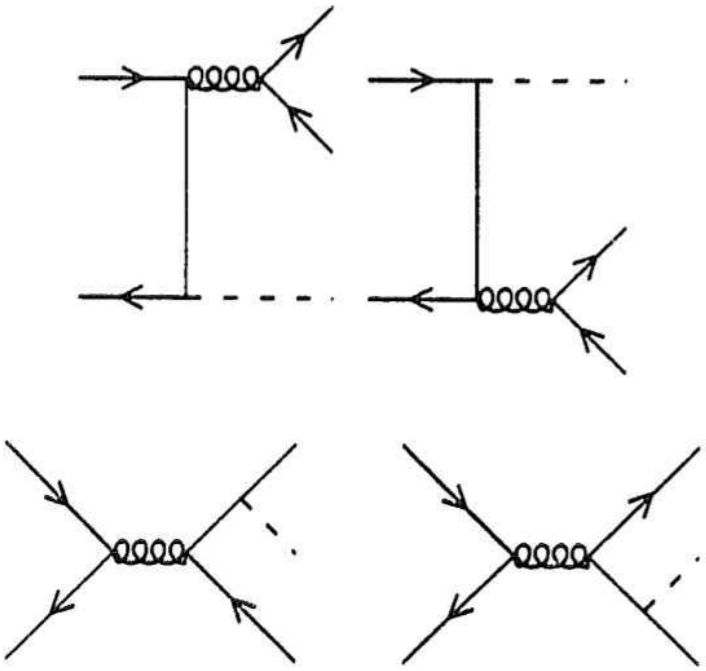

Figura 7.5: *Diagramas de aniquilación que contribuyen al subproceso* $q + \bar{q} \to V + q + \bar{q}$.

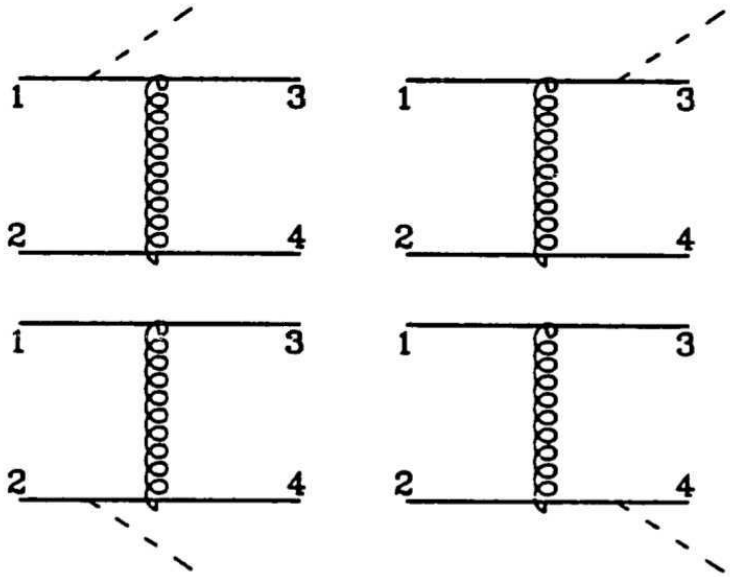

Figura 7.6: *Diagramas que contribuyen a los subprocesos* $q + \bar{q} \to V + q + \bar{q}$ *y* $q(\bar{q}) + q(\bar{q}) \to V + q(\bar{q}) + q(\bar{q})$.

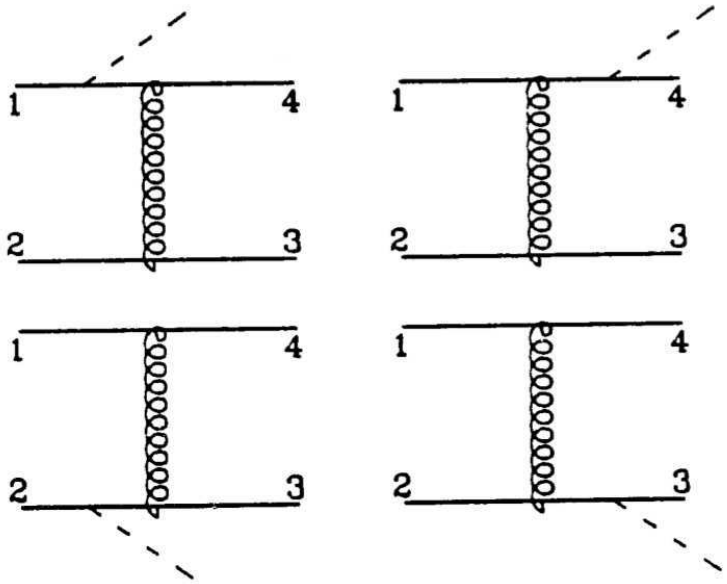

Figura 7.7: *Diagramas que contribuyen a los subprocesos* $q(\bar{q}) + q(\bar{q}) \to V + q(\bar{q}) + q(\bar{q})$ *con quarks idénticos en el estado inicial y/o final.*

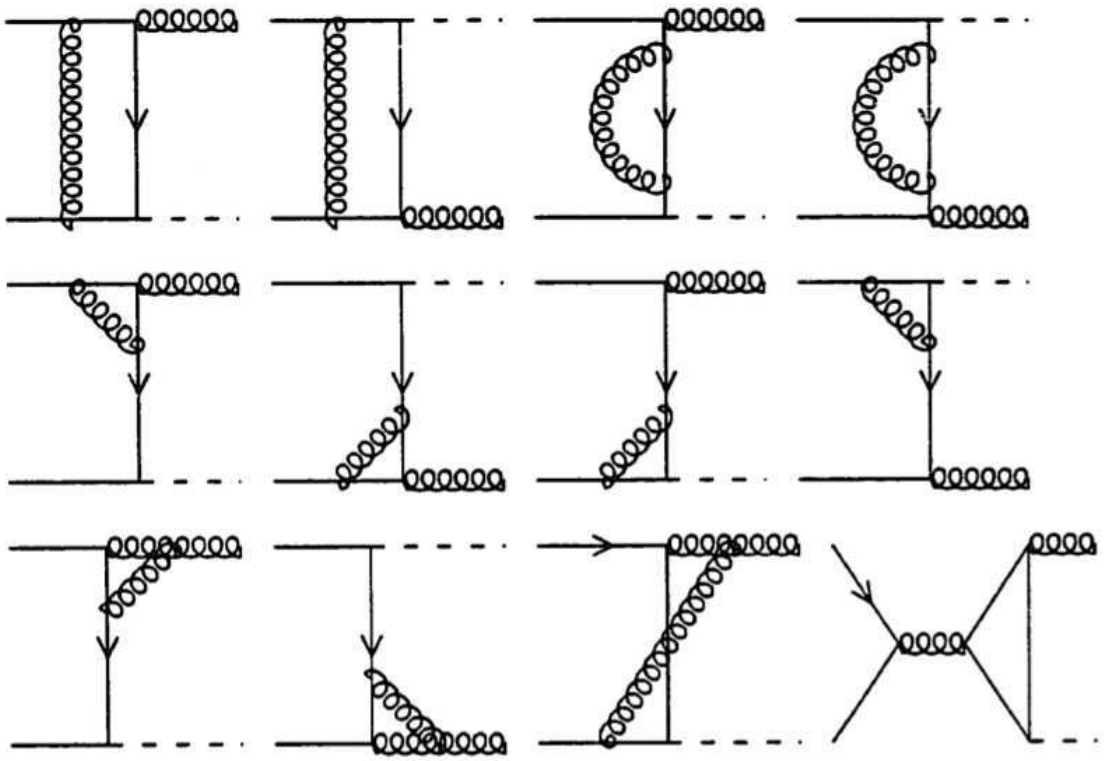

Figura 7.8: *Correcciones a un-loop al proceso* $q + \bar{q} \to V + g$. *Los diagramas correspondientes a las correcciones a un-loop al subproceso* $q(\bar{q}) + g \to V + q(\bar{q})$ *pueden ser obtenidos haciendo el correspondiente cruce de líneas externas.*

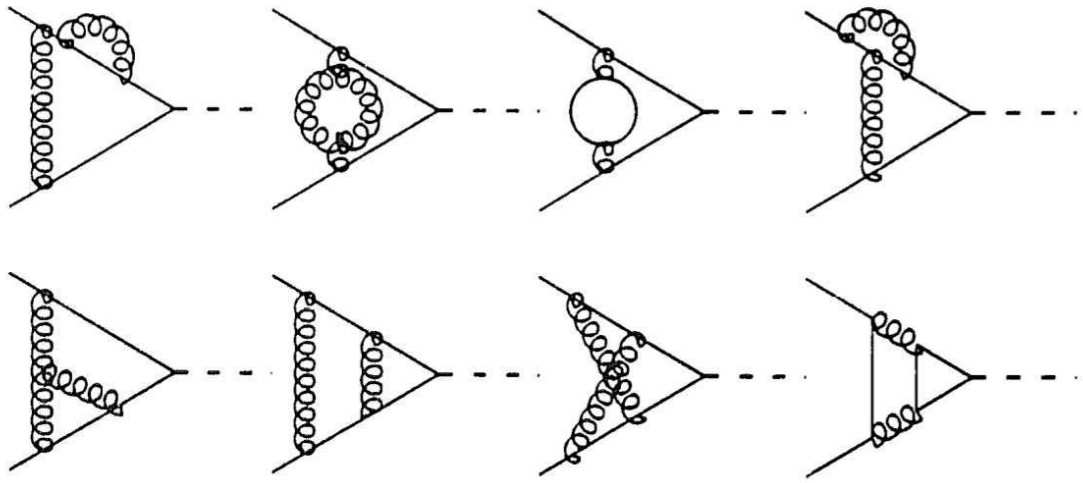

Figura 7.9: *Correcciones a dos-loops al proceso* $q + \bar{q} \to V$.

implementados cortes arbitrarios sobre los leptones del estado final y la actividad de jet asociada.

7.2. Resultados

Presentamos ahora una selección ilustrativa de resultados numéricos para la producción de bosones Z y W en el Tevatron y en el LHC.

Consideramos los siguientes quarks en el estado inicial: u, d, s, c, b. En el caso de la producción del bosón $W^{\pm}$, usamos los elementos de la matriz CKM unitaria $V_{ud} = 0{,}97419$, $V_{us} = 0{,}2257$, $V_{ub} = 0{,}00359$, $V_{cd} = 0{,}2256$, $V_{cs} = 0{,}97334$, $V_{cb} = 0{,}0415$ [152]. En el caso de la producción del bosón Z, necesitamos tener en cuenta los diagramas de Feynman adicionales de los *triángulos leptónicos*. Su contribución se cancela para cada multiplete de isospin cuando consideramos quarks sin masa. El efecto de considerar una masa finita para el quark top, en la tercera generación, ha sido considerada en la literatura y se halló que ésta es muy pequeña [153]. De manera que la despreciamos en nuestro cálculo. Para los acoples electrodébiles usamos el llamado esquema G_μ, donde los parámetros básicos son G_F , m_Z, m_W. En particular usamos los valores $G_F = 1{,}16637 \times 10^{-5}$ GeV^{-2}, $m_Z = 91{,}1876$ GeV, $\Gamma_Z = 2{,}4952$ GeV, $m_W = 80{,}398$ GeV y $\Gamma_W = 2{,}141$ GeV.

Utilizamos distribuciones de partones MSTW2008 [154], con densidades y α_s evaluadas a cada correspondiente orden[2]. Las escalas de factorización y renormalización están fijas al valor $\mu_R = \mu_F = m_V$, donde m_V es la masa del bosón vectorial.

Empecemos la presentación de nuestros resultados considerando la producción inclusiva de pares e^+e^- del decaimiento on-shell del bosón Z en el LHC. En la Fig. 7.10 (lado izquierdo) mostramos la distribución en rapidity de los pares e^+e^- a LO, NLO y NNLO, calculada usando PDFs MSTW2008. Las correspondientes secciones eficaces[3] son $\sigma_{LO} = 1{,}761 \pm 0{,}001$ nb,

[2]Es decir, usamos α_s a $(n+1)$-loops a N^{n}LO, con $n = 0, 1, 2$.

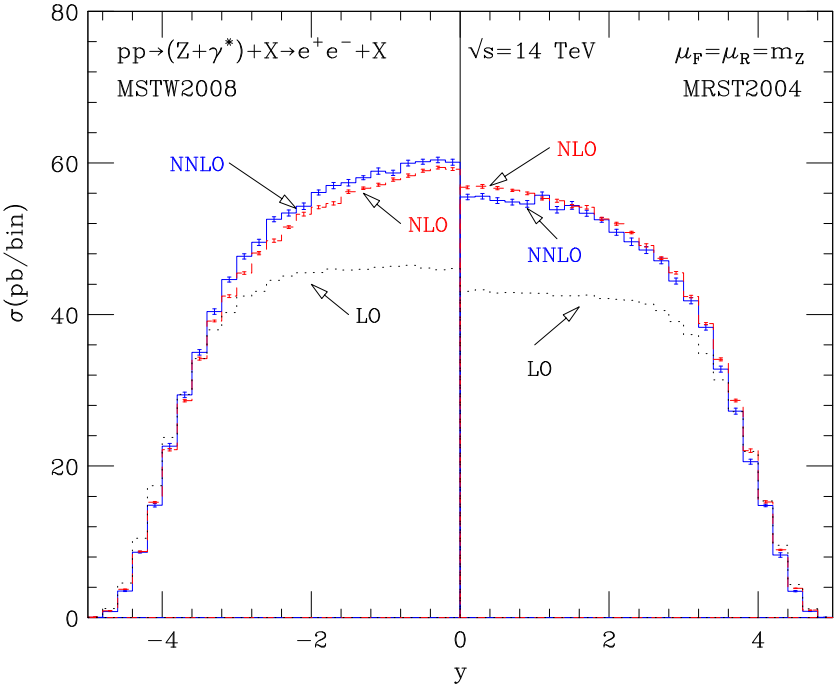

Figura 7.10: *Distribución en rapidity de un bosón Z on-shell en el LHC. Resultados obtenidos usando PDFs MSTW2008 (lado izquierdo) y MRST2004 (lado derecho).*

$\sigma_{NLO} = 2{,}030 \pm 0{,}001$ nb y $\sigma_{NNLO} = 2{,}089 \pm 0{,}003$ nb.

La sección eficaz total aumenta un 3 % cuando vamos del NLO al NNLO. En la Fig. 7.10 (lado derecho) también mostramos los resultados obtenidos usando las distribuciones de partones MRST2002 LO [155] y MRST2004 [156]. Las correspondientes secciones eficaces son $\sigma_{LO} = 1{,}629 \pm 0{,}001$ nb, $\sigma_{NLO} = 1{,}992 \pm 0{,}001$ nb y $\sigma_{NNLO} = 1{,}954 \pm 0{,}003$ nb. En este caso la sección eficaz total decrece alrededor del 2 % cuando vamos del NLO al NNLO.

Ahora consideremos la producción de pares e^+e^- desde bosones Z/γ^* en el Tevatron. Para cada evento, clasificamos el momento transverso del leptón de acuerdo a sus valores máximos y mínimos, $p_{t\ max}$ y $p_{t\ min}$, respectivamente. Los leptones deben poseer un momento transverso mínimo de 20 GeV y pseudorapidity $|\eta| < 2$. Su masa invariante debe pertenecer al rango de masas 70 GeV $< m_{e^+e^-} <$ 110 GeV. La secciones eficaces aceptadas son $\sigma_{LO} = 103{,}37 \pm 0{,}04$ pb, $\sigma_{NLO} = 140{,}43 \pm 0{,}07$ pb y $\sigma_{NNLO} = 143{,}86 \pm 0{,}12$ pb. En la Fig. 7.11 enseñamos las distribuciones en $p_{t\ min}$ y $p_{t\ max}$ a LO, NLO, y NNLO. Notemos que a LO las distribuciones en $p_{t\ min}$ y $p_{t\ max}$ están cinemáticamente limitadas por $p_T \leq Q_{\max}/2$, donde $Q_{\max} = 110$ GeV es la máxima masa invariante permitida para los pares e^+e^-.

Las correcciones a NNLO tienen un visible impacto en la forma de las distribuciones en $p_{t\ min}$ y $p_{t\ max}$ y hacen a la distribución en $p_{t\ min}$, *softer* y a la distribución en $p_{t\ max}$, *harder* [4].

Finalmente consideremos la producción de un leptón cargado (y su momento transverso

[3]En este capítulo, los errores a los valores de la sección eficaz y las barras de error en los gráficos se refieren a una estimación de los errores numéricos en la integración de tipo Monte Carlo.

[4]Por este motivo es que nos referiremos, como si se tratasen de sinónimos, a la distribución en $p_{t\ min}$ ($p_{t\ max}$) como la distribución en $p_{t\ softer}$ ($p_{t\ harder}$).

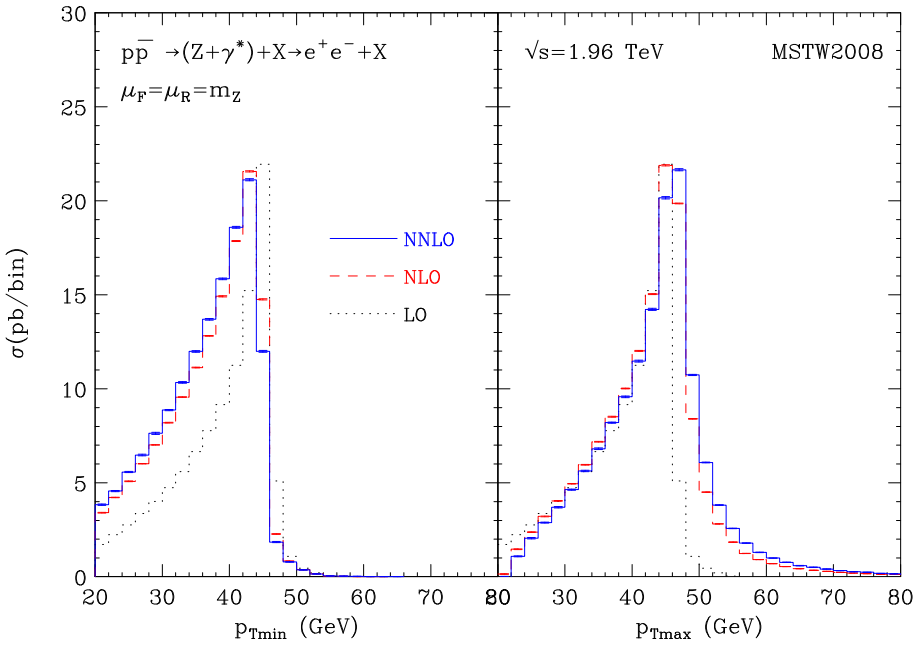

Figura 7.11: *Distribuciones en $p_{t\ min}$ y $p_{t\ max}$ para la producción del bosón Z en el Tevatron.*

asociado p_T^l) y el momento transverso $p_T^{\rm miss}$ sin detectar del decaimiento de un bosón W ($W = W^+, W^-$), en el Tevatron. El leptón cargado es seleccionado si su momento transverso satisface $p_T > 20$ GeV y $|\eta| < 2$ y el momento transverso no detectado del evento debe ser mayor a 25 GeV. Definimos la masa transversa del evento como $m_T = \sqrt{2p_T^l p_T^{\rm miss}(1-\cos\phi)}$, donde ϕ es el ángulo entre el p_T del leptón cargado y el p_T no detectado. Las secciones eficaces aceptadas son $\sigma_{LO} = 1{,}161 \pm 0{,}001$ nb, $\sigma_{NLO} = 1{,}550 \pm 0{,}001$ nb y $\sigma_{NNLO} = 1{,}586 \pm 0{,}002$ nb.

En la Fig. 7.12 mostramos la distribución en m_T a LO, NLO y NNLO. Notemos que a LO, la distribución tiene el límite inferior en $m_T = 50$ GeV. Esto se debe al hecho de que a LO, los Ws son producidos con momento transverso nulo, por lo tanto el vínculo $p_T^{\rm miss} > 25$ GeV se satisface a $m_T \geq 50$ GeV. Alrededor de la región donde $m_T = 50$ GeV, hay inestabilidades perturbativas si vamos del LO al NLO y del NLO al NNLO. El origen de estas inestabilidades perturbativas es bien conocido [157]: ya que el espectro a LO está limitado por $m_T \geq 50$ GeV, cada orden superior perturbativo produce singularidades logarítmicas (integrables) en las vecindades del inicio de la distribución a LO (en nuestro caso $m_T = 50$ GeV). Notemos también que en la región de masas transversas menores $m_T = 50$ GeV, las correcciones a NNLO de la sección eficaz a NLO son grandes, alrededor del $+40\,\%$ a $m_T \sim 30$ GeV. Lo cual no representa un resultado inesperado, ya que esa región de masas transversas, el resultado $\mathcal{O}(\alpha_s)$ corresponde al cálculo a primer orden perturbativo no nulo en esa región, y por lo tanto, nuestro resultado a $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ es en realidad la primera corrección no nula en esa región, por lo que es una corrección efectiva a NLO, en verdad.

Consideremos ahora, la producción de un bosón W^+ on-shell en el Tevatron. Cuando no se aplican cortes nuestro código nos permite obtener un cálculo independiente para la distribución en rapidity para un bosón vectorial a NNLO [61]. Para comparar con la Ref. [61], en la Fig. (7.13) mostramos la distribución en rapidity del bosón W^+ obtenida usando PDFs MRST2001 [158, 159]. Los histogramas azules representan la predicción a NNLO; en rojo la banda a NLO obtenida al variar ambas escalas $\mu_F = \mu_R$ entre $1/2m_W$ y $2m_W$. La curva

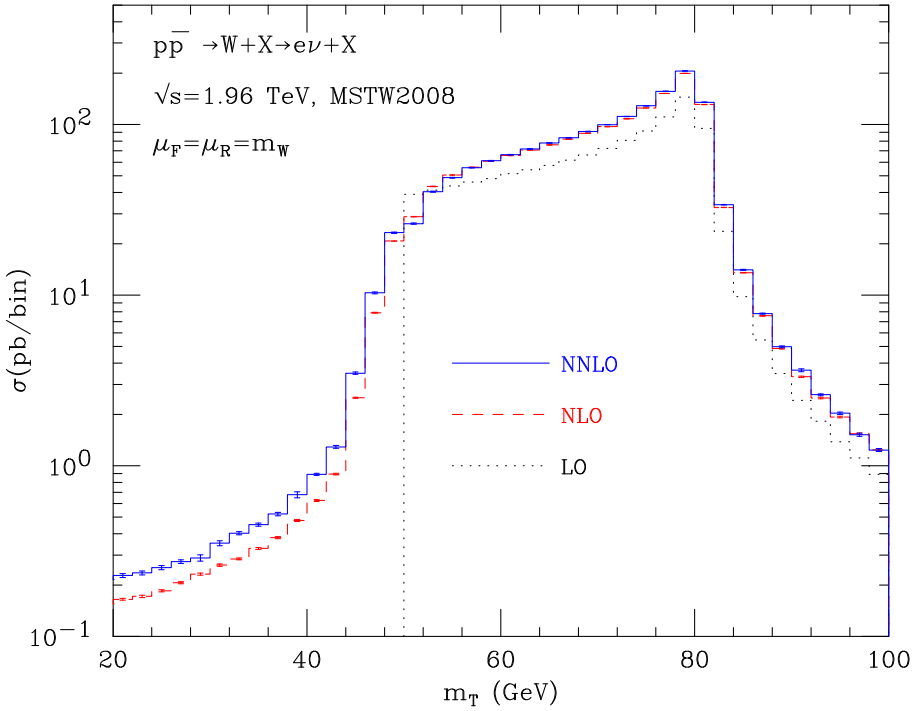

Figura 7.12: *Distribución en masa transversa para la producción de bosones W en el Tevatron.*

sólida es la predicción a NNLO extraída de la Fig. (10) de la Ref. [61]. Ambos resultados están en buen acuerdo numérico.

Hemos ilustrado el cálculo de la sección eficaz a NNLO para la producción de bosones W y Z en pQCD. Existe en la literatura un cálculo análogo [147]. Nuestro cálculo utiliza un método completamente independiente al de [147], pero los resultados están en completo acuerdo numérico al nivel de las incertezas numéricas obtenidas.

Nuestro programa (`DYNNLO` [55, 35]) produce resultados significativamente estables a NNLO, para secciones eficaces y distribuciones asociadas. Por ejemplo, el tamaño típico de las barras de error en los resultados a NNLO en los gráficos de las Figuras (7.10-7.12) está a nivel porcentual (1 %). Precisiones numéricas aun mayores, pueden ser logradas en distribuciones integradas y secciones eficaces. La versión pública del programa `DYNNLO` puede descargarse desde [55].

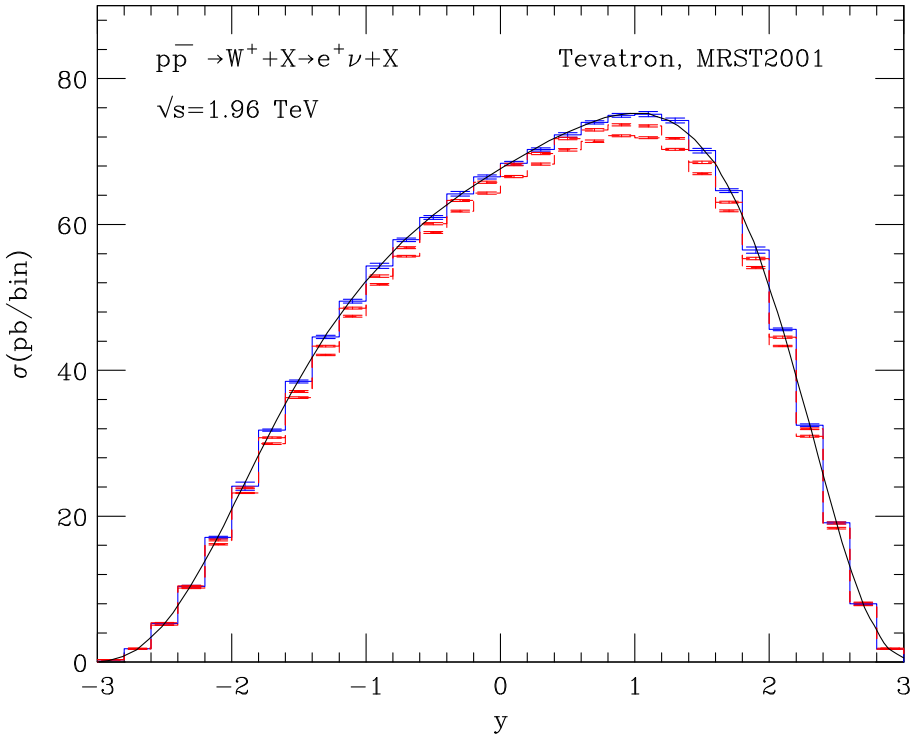

Figura 7.13: *Distribución en rapidity para la producción de bosones W^+ en el Tevatron. El resulatdo a NNLO (azul) es comparado con la banda calculada a NLO (roja) y a la predicción NNLO de la Ref. [61].*

Capítulo 8

Introducción a la fenomenología de la producción de difotones en colisiones hadrónicas

La producción de difotones en colisiones hadrónicas es un proceso muy relevante para la física de los colisionadores hadrónicos. Constituye una señal clásica dentro del SM y un background muy importante (principal) en cuanto a búsquedas del bosón de Higgs y de nueva física. El origen de la simetría electro-débil está siendo investigado en la actualidad en el LHC, buscando al bosón de Higgs y eventualmente estudiando sus propiedades. Resultados recientes del LHC indican la observación de una nueva partícula como resultado de búsquedas del bosón de Higgs del SM [4, 3]. La nueva partícula observada es un bosón neutro de masa $M \sim 125$ GeV en acuerdo con las propiedades del SM del bosón de Higgs. Por lo tanto, la motivación en búsquedas y estudios anteriores, basados en el hecho de que el bosón de Higgs debía ser liviano se renueva con esta nueva espectacular observación. Y por lo tanto, como en previos estudios y búsquedas el canal principal involucra a la producción del bosón de Higgs *via* fusión de gluones y su decaimiento en un par de fotones.

En este capítulo se presentan las nociones básicas de la fenomenología de la producción de difotones en colisiones hadrónicas; los resultados experimentales más recientes y su interpretación, con la ayuda de las herramientas teóricas disponibles a NLO en teoría de perturbaciones de QCD. Finalmente, se enseñan y discuten las discrepancias que quedan en evidencia cuando se comparan los datos con las descripciones teóricas a NLO en pQCD. Discrepancias que evidencian la falta de una descripción teórica de orden mayor para la completa comprensión de la fenomenología que ofrecen los datos.

En el capítulo siguiente (Capítulo 9) se presenta la descripción de la fenomenología de producción de difotones a NNLO en pQCD.

8.1. Introducción

La medición de la sección eficaz de producción de dos fotones energéticos y aislados (difotones) en colisiones hadrónicas de alta energía constituye un test muy importante a las predicciones del SM en el dominio de búsquedas de partículas a descubrir y de nueva física.

Entender los mecanismos que rigen estas complicadas condiciones es un desafío para los cálculos de pQCD. Los fotones originados en colisiones hadrónicas ("directos" o "prompt") constituyen un test ideal a tales cálculos ya que no interactúan con ninguna otra partícula del estado final y sus energías y direcciones pueden ser medidas con alta precisión en los calorímetros modernos. Estos estudios incluyen tests a la teoría de perturbaciones en la aproximación colineal [69, 54] y la factorización en k_T [160] como así también de las técnicas de resumación de logaritmos asociados a la emisión de gluones soft [68].

La producción de difotones aislados no es sólo relevante a estudios de la teoría de QCD. La producción de difotones "prompt" crea un background irreducible al decaimiento del bosón de Higgs en un par de fotones, despreciando su relativa baja fracción de *branching* (ver Fig. (8.1)), ya que este canal goza de una señal limpia [1]. Por lo tanto un entendimiento cuantitativo de este background es relevante para estimar con certeza la significancia esperada $S/\sqrt{B}$ (siendo S y B, el número de eventos esperados para el bosón de Higgs y su background, respectivamente). Entonces conocer con detalle el background del SM puede ayudar a desarrollar poderosas estrategias de búsqueda y estudio para esta partícula.

Además la producción de difotones es también background en búsqueda de física más allá del SM. Por ejemplo la teoría de dimensiones extras universales predice una producción de difotones asociados con una pérdida significativa de energía transversa [161, 162]. Otros modelos de dimensiones extra como el de Randall-Sundrum [163] predicen la producción de gravitones, lo que podrían decaer en dos fotones con un ancho estrecho. También la producción de difotones constituye un background importante en búsquedas de nuevas resonancias pesadas [164] y decaimientos en cascada de nuevas partículas pesadas [165].

Para concluir con esta enumeración de hechos que evidencian la importancia de la señal de difotones, citamos la producción de par de fotones asociados a un jet. Nuevamente sirve como test a pQCD dentro del marco del SM y también porque podría ser utilizado como un canal ($pp \to H + jet \to \gamma\gamma + jet$) para observar al bosón de Higgs. Cuando un jet con alto momento transverso está presente en el estado final, los fotones entonces son más energéticos que en el caso inclusivo, siendo posible entonces, mediante la reconstrucción del jet una determinación precisa del vértice de interacción [53]. Esta señal puede ser generada también con nuestro código 2γ`NNLO` (ver Capítulo 9) como así también por `NLOjet++` [53].

8.2. Producción de fotones en colisiones hadrónicas

Cuando tratamos con fotones que son el producto de una colisión hadrónica[2] éstos pueden ser entendidos como el resultado directo de la colisión hard (componente directa) en la que se transfieren grandes cantidades de momento (ver Fig. 8.2 (izquierda)), o como el resultado de la fragmentación colineal[3] (ver Fig. 8.2 (derecha)) de un partón (quark o gluón) en un

[1] Limpia en el sentido de que todas las partículas del estado final son medidas, y en oposición al caso del canal WW en el que están presentes en el estado final neutrinos.

[2] Lo mismo vale para colisiones e^+e^- y DIS, teniendo en cuenta las diferencias entre un leptón y un quark, obviamente.

[3] La descripción teórica de este fenómeno requiere que el proceso sea exactamente colineal. En la naturaleza puede ocurrir que la fragmentación suceda sin darse la colinealidad exacta. Esto introduce una diferencia importante. Si teóricamente prohibimos la presencia de fotones colineales, estamos suprimiendo la

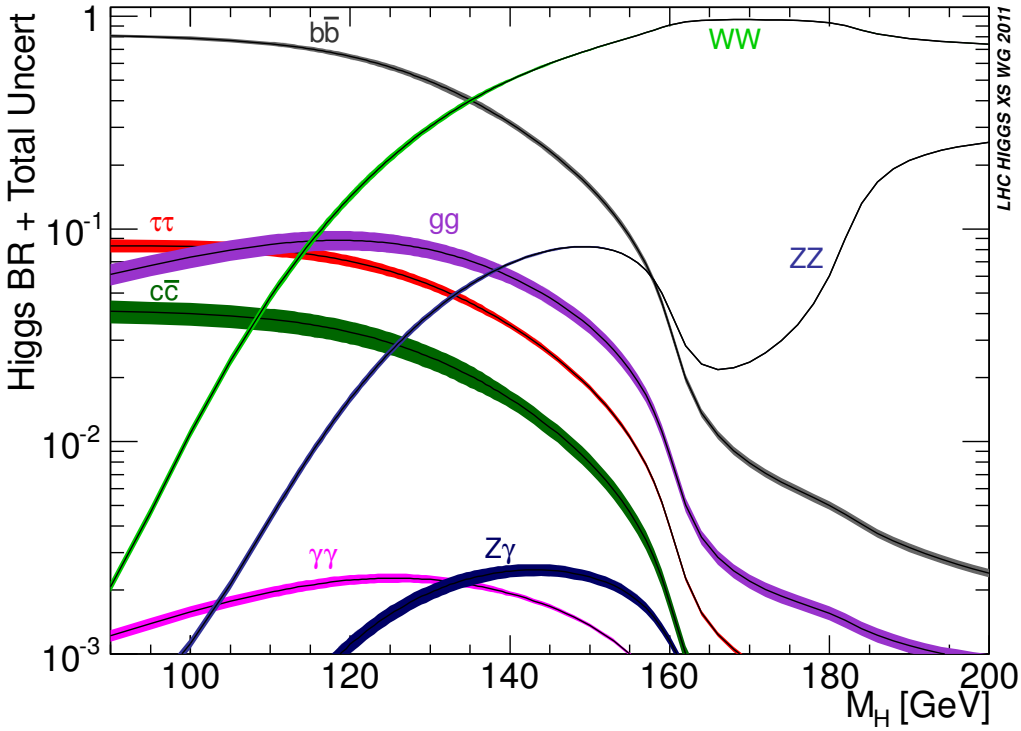

Figura 8.1: *Razón de branching para los principales decaimientos del bosón de Higgs del SM, incluyendo interzas [77].*

fotón (componente de fragmentación), a la escala de la masa hadrónica típica. Fenómeno éste último de naturaleza no perturbativa, y que requiere del uso de funciones de fragmentación D_γ universales, a las que le asignamos toda nuestra ignorancia del fenómeno, y pueden (deben) ser extraídas del experimento ya que no es posible calcularlas en pQCD, tal como no es posible calcular a las PDFs. A los fotones de fragmentación se les pide que verifiquen un requisito adicional: éstos deben estar alejados en cierta medida (que luego se precisará) de toda actividad hadrónica en el evento.

Los fotones que verifican estas propiedades entran en lo que llamamos señal o fotones *prompt*[4]. Experimentalmente podríamos decir que los fotones directos son aquellos que están bien aislados de los hadrones del estado final y los fotones de fragmentación son aquellos que yacen dentro de los jets hadrónicos. Aunque experimentalmente la distinción esté clara, no es el caso para la teoría. Las secciones eficaces partónicas que se corresponden con cada uno de estos procesos (directo o de fragmentación), no quedan unívocamente definidas dentro de la teoría. Más aun, por separado carecen de significado físico ya que son divergentes orden a orden en teoría de perturbaciones de QCD; sólo su suma posee significado físico y está libre de tales divergencias.

Pero en este tipo de colisiones los fotones pueden ser obtenidos y medidos como el resultado de otro tipo de fenómeno. Los fotones son producidos copiosamente, también, desde

componente de fragmentación en su totalidad, descripción que podría alejarse del fenómeno físico real.

[4]Palabra que en inglés significa "rápido". Es notorio que a veces, en la literatura, se utilice este término también para llamar a los fotones hard, los que provienen de la componente directa. En esta tesis se lo utilizará en el sentido de que no provienen de decaimientos secundarios y es así, que son llamados *señal*.

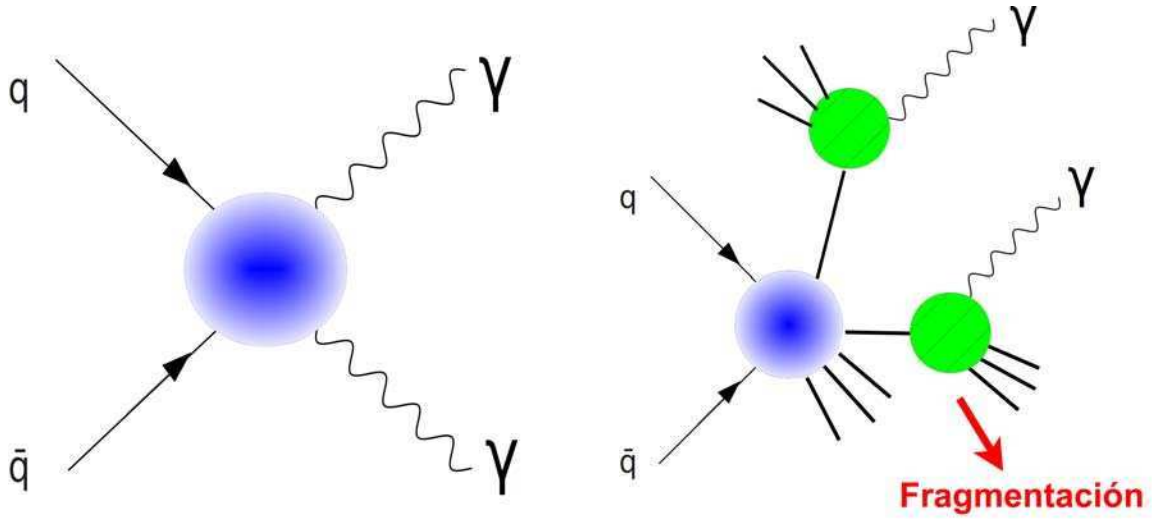

Figura 8.2: *(Izquierda) Esquema de la producción de fotones directos, desde la parte "hard" de la interacción. (Derecha) Esquema de la producción de fotones de fragmentación.*

decaimientos secundarios hadrónicos (especialmente de decaimientos de π^0). Estos fotones, que no son ni de fragmentación, ni son directos, son producidos luego de la hadronización de un hadrón neutral y su posterior decaimiento o por decaimiento radiativo de otras partículas. Es de vital importancia entonces, distinguir los fotones que provienen de estos decaimientos hadrónicos, caracterizados por estar acompañados de una actividad hadrónica elevada en sus vecindades, de los que provienen de la señal. Esto es a lo que llamamos background reducible, ya que podemos reducir su relación respecto de la señal, aplicando criterios de aislación a los fotones. Es decir podemos aumentar la razón señal-background pidiendo que el fotón medido esté los suficientemente lejos de todo hadrón energético. Este mismo criterio de aislación, usado en un principio para rechazar al background reducible, sirve también para reducir la relación entre los fotones directos y de fragmentación.

Desde un punto de vista teórico y completamente técnico, la componente de fragmentación emerge del cálculo de las correcciones de orden más alto a la componente directa en teoría de perturbaciones de QCD. A órdenes más altos, múltiples singularidades colineales aparecen en cualquier subproceso en el que un partón de alto momento transverso de tipo k (quark o gluón) se someta a la cascada de sucesivas emisiones colineales, terminando con la emisión de un fotón. Estas singularidades son factorizadas a todo orden en α_s de acuerdo al teorema de factorización y son absorbidas en las funciones de fragmentación de un partón k en un fotón ($D_{\gamma/k}(z, M_F)$) definida en algún esquema de fragmentación arbitrario, a la escala de fragmentación arbitraria M_F. El acople puntual del fotón a los quarks es el responsable del comportamiento anómalo de $D_{\gamma/k}(z, M_F)$, que a grandes rasgos es $\alpha_{em}/\alpha_s(M_F)$, cuando la escala de fragmentación M_F, elegida del orden de la escala hard del subproceso, es mucho mayor que $\mathcal{O}(1)$ GeV.

La contribución a orden más bajo en pQCD está dada por el proceso Born $q\bar{q} \to \gamma\gamma$ (ver Fig. 8.3, diagrama a). El cálculo de las correcciones a NLO ($\mathcal{O}(\alpha_s)$) incluye los subprocesos $q\bar{q} \to \gamma\gamma g$, $gq(\bar{q}) \to \gamma\gamma q(\bar{q})$ y las correspondientes contribuciones virtuales (ver Fig. 8.3, diagramas b y c). De las consideraciones expresadas en el párrafo anterior existe otra con-

tribución que tiene magnitud comparable al del Born, en lo que al conteo en potencias de α_s se refiere. Ésta es la contribución de fragmentación (ver Fig. 8.4, diagrama d) al subproceso $qg \to \gamma\gamma q$. A energías del LHC y en el rango de masas (80 GeV $\leq$ $M_{\gamma\gamma} \leq$ 140 GeV), estás contribuciones con un sólo fotón de fragmentación dominan la producción inclusiva y se las llama, con frecuencia, de fragmentación simple.

A órdenes más altos ($\mathcal{O}(\alpha_s)$), correcciones a las contribuciones mencionadas en el párrafo anterior deben ser calculadas (ver Fig. 8.4, diagramas e y f). A este orden ($\mathcal{O}(\alpha_s)$) aparece un nuevo mecanismo, aparecen las llamadas contribuciones de doble fragmentación (ver Fig. 8.5, diagrama g). En este caso ambos fotones resultan de la fragmentación colineal de un partón hard. Si es el objeto realizar un cálculo a NLO, para ser consistentes deberíamos incluir las correcciones a NLO para esta contribución (ver Fig. (8.5)-Diagramas h e i).

Cada una de estas contribuciones (de fragmentación y directa) carece de significado físico por separado, y su definición, como adelantamos, es ambigua. La diferencia técnica que tenemos en cuenta para asignarle un nombre, proviene de la aparición de las singularidades colineales que aparecen en los estados finales entre un partón y un fotón. Tales singularidades son factorizadas en las funciones de fragmentación a una escala[5] arbitraria de fragmentación M_F. Es así que las dos contribuciones dependen de la escala ficticia M_F, y tal dependencia se cancela sólo en la suma. De manera que sólo la adición de las componentes de fragmentación y directa posee significado físico y constituyen así, un observable.

Como debemos truncar la serie perturbativa en potencias de α_s, tal cancelación en la dependencia de M_F es solo parcial, quedando un vínculo residual que disminuye orden a orden en la expansión en potencias de α_s.

Notar que hasta ahora no hemos hablado de la implementación de los criterios de aislación, sólo de su necesidad. Es decir, si somos capaces de generar un código de tipo Monte Carlo, con todas estas contribuciones que hemos detallado en las Figs. 8.3, 8.4 y 8.5, estaríamos calculando la sección eficaz inclusiva para la producción de difotones a NLO en pQCD, en la que dominaría la contribución de fragmentación a energías del LHC, tal como explicamos en los párrafos anteriores. Como desde el punto de vista experimental estamos obligados a imponer cortes, para reducir el background debido a fotones de decaimientos hadrónicos secundarios, en la próxima sección exponemos las ideas principales y los diferentes tipos de criterios utilizados en tal empresa.

8.3. Criterios de aislación (I)

Los experimentos como el Tevatron, el LHC no miden fotones inclusivos [6]. La tasa de producción inclusiva de π^0,η,ω con alto momento transverso, o de pares de $\pi^0\pi^0$ o $\gamma\pi^0$, etc, con alta masa invariante, es varios órdenes de magnitud mayor que para fotones directos. Para rechazar este background copioso de fotones secundarios producidos en los decaimientos de estos mesones, la selección experimental de eventos de fotones directos (difotones, como así también fotones simples) requiere del uso de criterios de aislación. Tal requerimiento en el caso del LHC, por ejemplo, es obligatorio ya que en el rango de masas para la búsqueda del bosón de Higgs (90 GeV $\leq$ $M_{\gamma\gamma} \leq$ 140 GeV), el background esperado es alrededor de ocho

[5]De manera general, la definición de las funciones de fragmentación requiere la elección de un esquema de factorización como por ejemplo el $\overline{\text{MS}}$.

[6]No es el caso de PHENIX en RHIC.

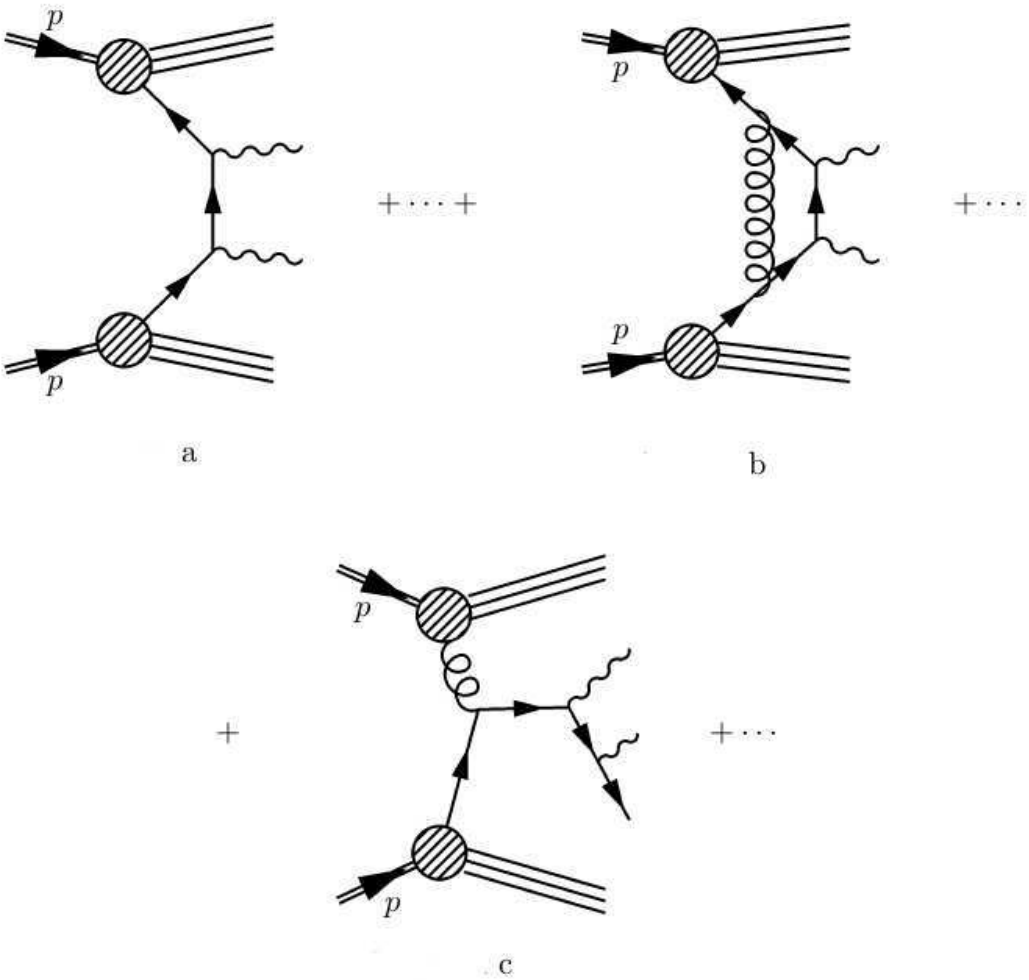

Figura 8.3: *Distintos diagramas correspondientes a la producción de difotones (contribución directa). Diagrama a: Subproceso Born* $q\bar{q} \to \gamma\gamma$. *Diagrama b: Corrección virtual al proceso Born* $q\bar{q} \to \gamma\gamma$. *Diagrama c: Subproceso* $gq(\bar{q}) \to \gamma\gamma q(\bar{q})$.

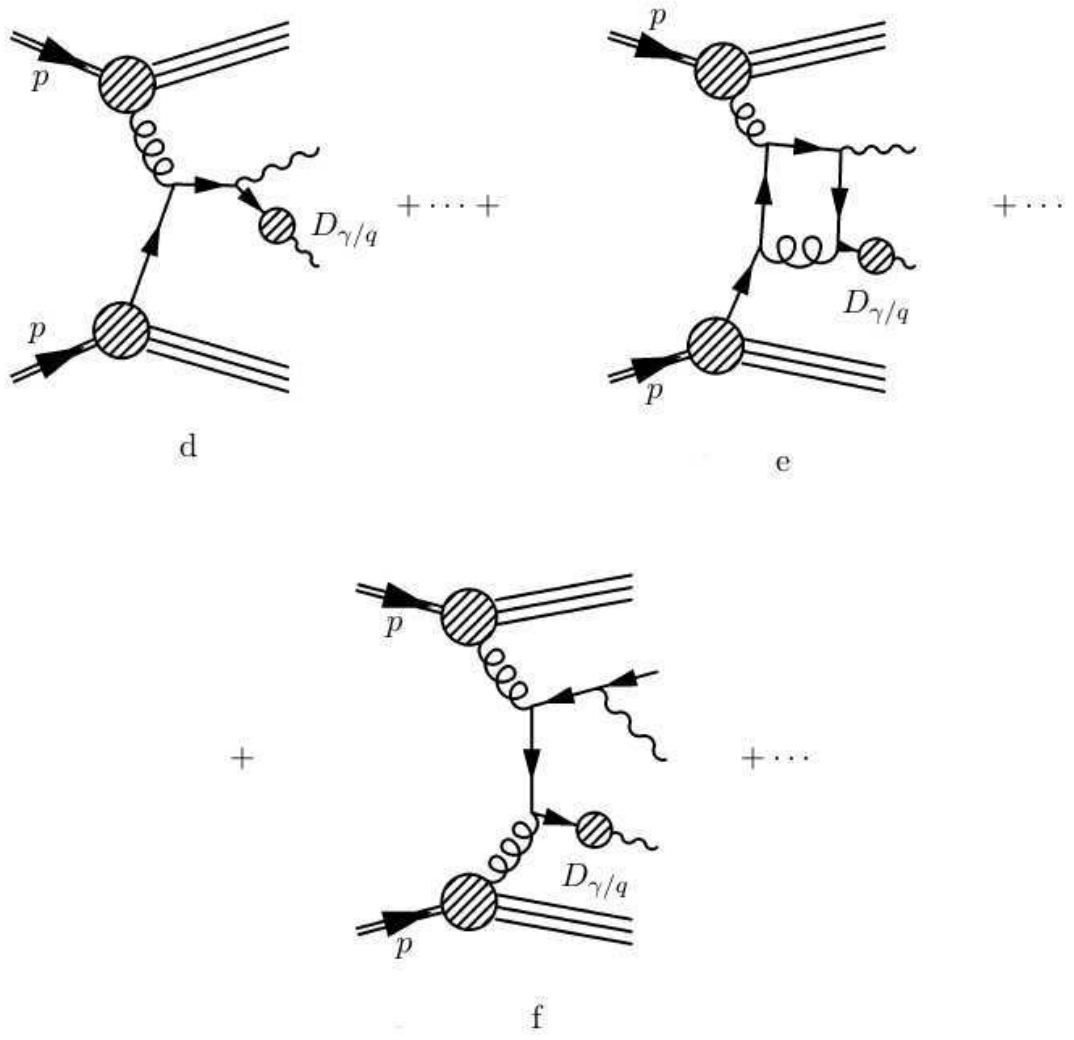

Figura 8.4: *Subprocesos de fragmentación (simple) para el canal qg (Diagramas d y e) y para el canal gg (Diagrama f).*

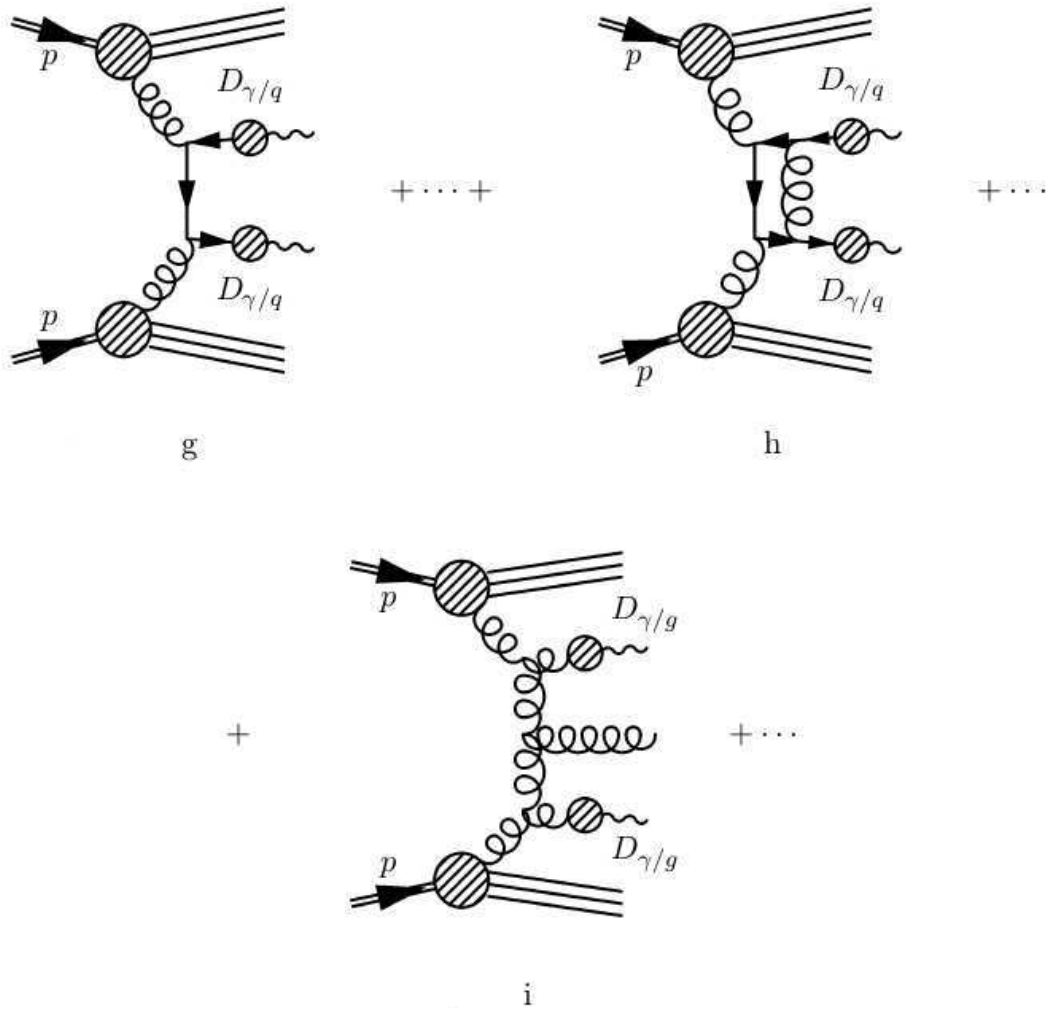

Figura 8.5: *Mecanismo de fragmentación doble para el canal gg ($\mathcal{O}(\alpha_s)$).*

órdenes de magnitud mayor que la señal, antes de que cualquier corte haya sido aplicado. Este es otro de los motivos por el que se ha estudiado en detalle a los criterios de aislación: un entendimiento cuantitativo del background es relevante para estimar la significancia esperada $S/\sqrt{B}$ (siendo S y B, el número de eventos esperados para el bosón de Higgs y su background, respectivamente).

Básicamente existen tres tipos de criterios de aislación impuestos por el experimento, que detallaremos a continuación. La idea que los aúna es la siguiente: reducir la actividad hadrónica en las inmediaciones del fotón.

8.3.1. Criterio (del cono) estándar

Un fotón se dice que está aislado, si dentro de un cono de radio R centrado alrededor de la dirección del fotón (en el plano que forman la rapidity y el ángulo azimutal) la cantidad de energía hadrónica transversa E_T^{had} depositada es menor que alguna cota[7] $E_{T\ max}$ fijada por el experimento:

$$\left.\begin{array}{rcl} (y-y_\gamma)^2+(\phi-\phi_\gamma)^2 & \leq & R^2 \\ E_T^{had} & \leq & E_{T\,max} \end{array}\right\} \tag{8.1}$$

Este criterio [166, 167, 168, 169, 170] ha sido discutido en la literatura ampliamente, especialmente para el caso de producción de fotones aislados en colisiones hadrónicas. Como adelantamos, no solo rechaza los fotones secundarios del background, sino que también ayuda a reducir los fotones que provienen de fragmentación. Esto implica que no estamos tratando más con cantidades inclusivas.

Se ha estudiado de manera extensiva si al imponer estas restricciones, desde el punto de vista teórico, la factorización de las singularidades colineales sigue siendo válida, para las secciones eficaces basadas en este criterio, como así también si las funciones de fragmentación usadas en estas secciones eficaces son las mismas que las definidas para el caso inclusivo. También las dificultades que involucran las divergencias infrarrojas de los gluones soft, en estos casos. Todas estas cuestiones han sido clarificadas en las Refs. [171, 168, 172, 173]. La propiedad de factorización de las singularidades colineales sigue siendo válida[8], y los efectos de la aislación son tenidos en cuenta, de manera consistente, en los términos que rigen la física de escalas pequeñas. Aun así, las secciones eficaces definidas con este criterio pueden tener divergencias infrarrojas (o inestabilidades, dependiendo de la inclusividad del observable considerado) localizadas en algún punto crítico aislado dentro del espectro físico de algunos de los observables que se pueden calcular a orden fijo y a NLO. Esto significa que las vecindades de estos puntos críticos son sensibles a efectos de múltiples gluones soft, los que deberán ser tenidos en cuenta de manera adecuada para arribar a predicciones correctas.

Aunque la contribución de fragmentación se ve reducida con el uso de estos cortes, no es nula. Lo que implica que siguen siendo válidas las consideraciones de los párrafos anteriores: debemos sumar las contribuciones de fragmentación y directa para obtener una sección eficaz

[7] Aunque no es usada por las colaboraciones en la actualidad (ATLAS, CMS, CDF, D0), existe una variante de este método, en la que $E_{T\ max} = p_T^\gamma \epsilon$, donde p_T^γ es el momento transverso del fotón, y ϵ un número comprendido entre cero y uno.

[8] El hecho de que consideremos energías transversas para este criterio en cuanto a colisiones hadrónicas es crucial. La factorización se vería violada si consideráramos energías en vez de las energías transversas [69].

que posea significado físico, es decir para cancelar las singularidades que aparecen cuando un partón se vuelve colineal con un fotón.

Los experimentos actuales, ATLAS, CMS, CDF y D0, utilizan todos el criterio estándar de aislación.

8.3.2. Criterio de aislación de Frixione

Stefano Frixione en 1998 [174] propuso un nuevo método que permite eliminar la componente de fragmentación en una forma libre de divergencias infrarrojas.

Consideremos primero que deseamos eliminar la componente de fragmentación de forma *naive*, es decir, eliminando de la vecindad del fotón toda componente hadrónica. Para ello dibujemos un cono alrededor de la dirección del fotón e impongamos que no se pueda hallar ningún quark o gluón dentro del cono. Con esta definición, las configuraciones donde el partón es colineal al fotón son rechazadas, y por lo tanto, la contribución al proceso de fragmentación es exactamente cero. Desafortunadamente esta prescripción no está libre de divergencias infrarrojas: los gluones soft no pueden ser emitidos dentro del cono, arruinando este hecho la cancelación de las singularidades infrarrojas. Uno puede relajar esta definición permitiendo una pequeña cantidad de energía hadrónica dentro del cono. Esto restablece la correcta cancelación de las divergencias, pero al mismo tiempo introduce la dependencia en las funciones de fragmentación, ya que las contribuciones colineales ya no están prohibidas. Otro enfoque que solo funciona a NLO, es permitir que sólo los gluones puedan estar dentro del cono, es decir ningún quark. Esta prescripción es no-física y por lo tanto no puede ser comparada con resultado experimental alguno.

Así, para definir una sección eficaz libre de divergencias infrarrojas, no deberá haber ninguna región del espacio de fase en la que se prohíba radiación, mientras que para eliminar la dependencia en las funciones de fragmentación tal región debería existir. Ambas condiciones parecen irreconciliables. Sin embargo Frixione, en 1998 mostró que pueden ser reconciliadas en un único criterio que a partir de este párrafo expondremos, para el caso de colisiones e^+e^-.

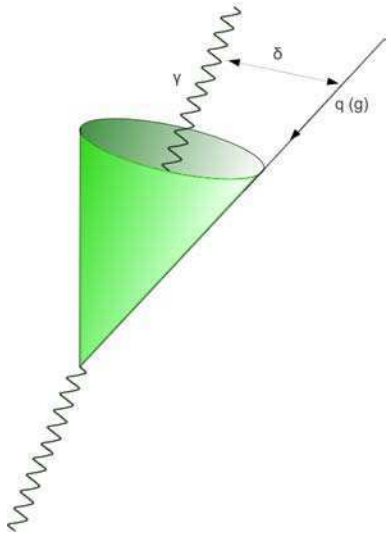

Figura 8.6: *Esquema del cono situado alrededor de la dirección del fotón.*

El mecanismo de fragmentanción en QCD (su descripción teórica) es un fenómeno completamente colineal. Así para eliminar su contribución a la sección eficaz basta con eliminar todas las configuraciones colineales. En la práctica esto puede lograrse en la siguiente forma: dibujemos un cono (fijo) de ángulo δ_0 alrededor de la dirección del fotón (ver Fig. 8.6). Entonces para todo $\delta \leq \delta_0$, la cantidad total de energía $E_{tot}(\delta)$ almacenada dentro del cono de ángulo mitad δ, situado alrededor de la dirección del fotón debe satisfacer

$$E_{tot}(\delta) \;\leq\; \mathcal{K}\,\delta^2, \tag{8.2}$$

donde $\mathcal{K}$ es alguna escala de energía[9]. De acuerdo con la Ec. (8.2) un gluón soft puede estar arbitrariamente cerca del fotón. Y por otro lado, la misma Ec. (8.2) implica que la energía de un partón emitido exactamente colineal al fotón debe ser nula. Por lo tanto la contribución de fragmentación ahora está restringida al conjunto de medida cero $z = 1$.

Esta es la idea "madre" del método. Expliquemos en detalle por qué esta elección produce una sección eficaz libre de divergencias infrarrojas.

Consideremos ahora el caso de secciones eficaces en las que se emite un solo fotón asociado con jets en el estado final. Los jets (hadrones), son etiquetados con índices i, y poseen un cuadrimomento k_i. Los fotones poseen cuadrimomento k_γ. Asumimos que estamos en el régimen donde las masas de los hadrones son pequeñas si las comparamos con sus energías transversas. También en una situación experimental real, podemos pensar que k_i es el cuadrimomento depositado en la i-ésima celda del calorímetro, en vez del cuadrimomento del i-ésimo hadrón. Fijemos al parámetro δ_0, el que define el cono de aislación, y apliquemos a cada evento el siguiente procedimiento o receta:

1. Para cada i, evaluar la distancia angular $R_{i\gamma}$, entre i y el fotón. La distancia angular está definida, en el caso de colisiones e^+e^- como:

$$R_{i\gamma} = \delta_{i\gamma}, \tag{8.3}$$

   donde $\delta_{i\gamma}$ es el ángulo entre el momento en tres dimensiones de i y γ. En el caso de colisiones hadrónicas se define en cambio

$$R_{i\gamma} = \sqrt{(\eta_i - \eta_\gamma)^2 + (\varphi_i - \varphi_\gamma)^2}, \tag{8.4}$$

   donde η y φ son la pseudorapidity y el ángulo azimutal respectivamente.

2. Rechazar los eventos a menos que la siguiente condición se satisfaga:

$$\sum_i E_i\,\theta(\delta - R_{i\gamma}) \;\leq\; \mathcal{X}(\delta) \qquad \text{para todo} \qquad \delta \leq \delta_0, \tag{8.5}$$

   donde E, es la energía del hadrón i y, debido a la presencia de $\theta(\delta - R_{i\gamma})$, la suma recibe contribución solo de aquellos hadrones cuya distancia angular desde el fotón sea menor o igual a δ. La función $\mathcal{X}$, la cual juega el rol de $\mathcal{K}\delta^2$ en la Ec. (8.2), está fija y será dada en los párrafos siguientes. La función $\mathcal{X}$ debe ser nula cuando su argumento tiende a cero ($\mathcal{X}(\delta) \to 0$ para $\delta \to 0$). En colisionadores hadrónicos la energía transversa E_{iT} debe ser usada en lugar de E_i.

[9] La forma de $\mathcal{K}\delta^2$ se elige aquí con propósitos ilustrativos.

3. Aplicar el algoritmo de jet a los hadrones del evento (por lo tanto, el fotón es excluido). Esto resultará en un conjunto de $m+m'$ hadrones bien colimados, que denotamos como candidatos a jets. m (m') es el número de candidatos a jets que yacen fuera (dentro) del cono de aislación, en el sentido de la distancia angular definida en la Ec. (8.3) o (8.4).

4. Aplicar cualquier otro corte adicional al fotón y a los m candidatos a jets que yacen afuera del cono (por ejemplo, el corte sobre la energía transversa mínima observable (transversa) debe ser aplicado aquí).

Un evento que no es rechazado después de que ha sido aplicado el corte, es por definición un evento de *fotón aislado en asociación con m jets.*

Definamos

$$\mathcal{X}(\delta) = E_\gamma \epsilon_\gamma \left(\frac{1-\cos\delta}{1-\cos\delta_0} \right)^n , \tag{8.6}$$

donde E_γ es la energía del fotón (en el caso de colisiones hadrónicas, E_γ deberá ser reemplazada por la energía transversa del fotón, $E_{\gamma T}$). Usaremos

$$\epsilon_\gamma = 1, \quad n = 1. \tag{8.7}$$

La razón de esta elección se discutirá en los siguientes párrafos. Aquí, haremos énfasis en que esta elección es arbitraria. La principal característica de esta función $\mathcal{X}$ es que

$$\lim_{\delta\to 0} \mathcal{X}(\delta) = 0. \tag{8.8}$$

En QCD, cualquier sección eficaz de jet puede escribirse fácilmente en términos de funciones de medida [46]. Dada una configuración de N-partones $\{k_i\}_{i=1}^N$, la aplicación de un algoritmo de jet resulta en un conjunto de M jets con momentos $\{q_a\}_{a=1}^M$. Esto puede ser formalmente expresado por la función de medida

$$\mathcal{S}_N \left(\{q_a\}_{a=1}^M ; \{k_i\}_{i=1}^N \right) , \tag{8.9}$$

la que incluye la definicón del cuadrimomento en términos del cuadrimomento del partón. Se puede mostrar [175, 51] que a NLO para un tipo arbitratrio de colisión, requerir que la sección eficaz debe estar libre de divergencias infrarrojas puede ser expresado en término de funciones de medida $\mathcal{S}_N$ para diferentes N. Estas condiciones pueden ser extendidas sin ninguna dificultad a órdenes perturbativos más altos. Aquí, enfatizamos que la función de medida en la Ec. (8.9) es una definición de sección eficaz libre de divergencias infrarrojas, la cual aplica a los partones que acompañan al fotón en un evento candidato de fotón aislado. Etiquetando a los partones de forma que

$$R_{i\gamma} \geq R_{j\gamma} \qquad \text{si} \qquad i > j, \tag{8.10}$$

definimos

$$\mathcal{S}_{\gamma,N} \left(k_\gamma, \{q_a\}_{a=1}^M ; \{k_i\}_{i=1}^N \right) = \mathcal{S}_N \left(\{q_a\}_{a=1}^M ; \{k_i\}_{i=1}^N \right) \times \prod_{i=1}^N \mathcal{I}_i , \tag{8.11}$$

$$\mathcal{I}_i = \theta\Big(\mathcal{X}(\text{mín}(R_{i\gamma}, \delta_0)) - \sum_{j=1}^i E_j \, \theta(\delta_0 - R_{j\gamma}) \Big). \tag{8.12}$$

Se puede ver que la Ec. (8.11) es equivalente a los cortes de aislación definidos párrafos más arriba. En particular, la cantidad $\prod_{i=1}^N \mathcal{I}_i$ es equivalente al paso 2. Por lo tanto, $\mathcal{S}_{\gamma,N}$ es la función medida relevante para la sección eficaz de fotón aislado más jet: esta es nula cuando es aplicada a aquellas configuraciones donde el fotón no está aislado.

Comentarios finales

Es ilustrativo investigar el comportamiento de la sección eficaz cuando uno o más partones están dentro del cono. Observemos, en primer lugar que para un partón soft ($E \to 0$) el cono de aislación no existe en absoluto (ver Ec. (8.12)). Esto asegura que la cancelación de divergencias infrarrojas se dará como es usual en la secciones eficaces de jets, libres de tales divergencias. Además las Ecs. (8.5) y (8.8) implican que cuanto más cerca está un partón del fotón más soft se vuelve: un partón exactamente colineal es necesariamente soft. Entonces cuando un quark está exactamente colineal al fotón, la atenuación asociada con la energía del quark que tiende a cero cancela las divergencias colineales, las suprime. Por lo tanto, ya no es necesario un contratérmino para la singularidad colineal del estado final.

En el caso de colisiones e^+e^- podemos ilustrar en la siguiente forma: consideremos que un quark del estado final está dentro del cono de aislación. El comportamiento asintótico de la sección eficaz partónica dominante es $1/(1-y)$, donde y es el coseno del ángulo entre el quark y el fotón. La contribución a la sección eficaz de fotón aislado, debida a la zona interior del cono [10] es por lo tanto

$$\sigma_{cono} \sim \int_{\cos\delta_0}^{1} dy \int_0 dE\, E\, \frac{\theta(\mathcal{X}(\delta(y)) - E)}{1-y}, \tag{8.13}$$

donde el factor E tiene su origen en el espacio de fase, y la condición de la Ec. (8.5) es impuesta aquí con la función Theta. El límite superior de integración en E es irrelevante y lo despreciamos. Usando la Ec. (8.6) obtenemos

$$\sigma_{cono} \sim \frac{E_\gamma^2 \epsilon_\gamma^2}{2} \int_{\cos\delta_0}^{1} dy\, \frac{1}{1-y} \left(\frac{1-y}{1-\cos\delta_0} \right)^{2n} = \frac{E_\gamma^2 \epsilon_\gamma^2}{4n}, \tag{8.14}$$

siempre que $n \geq 1/2$. Es decir si $n < 1/2$, dentro de la integral no se puede alcanzar la cancelación de las divergencias que introduce el propagador del quark $(1-y)$, aunque el integrando resulte integrable. Si n adquiere valores muy chicos ($n \sim 0{,}1$) el tamaño de σ_{cono} puede hacer que la sección eficaz aislada resulte con un valor que carezca de sentido físico como se discute y se muestra en el Capítulo 9. Como hemos anticipado la atenuación asociada a la energía del quark que se vuelve soft cancela los efectos de las divergencias colineales para elecciones razonables de $\mathcal{X}$. El hecho de que no es necesario ningún contratérmino para el estado final, para cancelar las divergencias colineales que aparecen cuando un partón es colineal a un fotón es consistente con el hecho de que la contribución de fragmentación es nula ahora; ya que en QCD la fragmentación es un fenómeno puramente colineal.

Si ahora es un gluón el que está dentro del cono de aislación, el comportamiento dominante de la sección eficaz partónica cuadrada es $1/E^2$. Usando el método de sustracción[11], la contribución a la parte finita de la sección eficaz (de nuevo, dentro del cono de aislación) será

$$\sigma_{cono} \sim \int_{\cos\delta_0}^{1} dy \int_0 dE\, \frac{\theta(\mathcal{X}(\delta(y)) - E) - 1}{E}. \tag{8.15}$$

[10] Notemos que fuera del cono de aislación al integrar $1/(1-y)$ se obtiene un término proporcional a $\log(1-\cos\delta_0)$, como es lo esperado para la producción de fotones aislados.

[11] Con el método de sustracción, la parte divergente de la sección eficaz es evaluada, de forma estricta, en el límite soft, $E = 0$. Como hemos hecho hincapié previamente, el cono de aislación no limita el espacio de fase de los partones soft, y por lo tanto, esta parte divergente será cancelada con las correspondientes contribuciones virtuales, como es usual en pQCD.

Usando la Eq. (8.6) encontramos

$$\sigma_{cono} \sim \int_{\cos\delta_0}^{1} dy \log\left(E_\gamma \epsilon_\gamma \left(\frac{1-y}{1-\cos\delta_0}\right)^n\right) = (1-\cos\delta_0)(\log(E_\gamma\epsilon_\gamma) - n). \tag{8.16}$$

El caso de las colisiones hadrónicas es un poco más complicado. La función θ en las Ecs. (8.13) y (8.15) es ahora

$$\theta(\mathcal{X}(R(y)) - E_T). \tag{8.17}$$

Está función claramente limita la energía del partón, ya que $E = E_T \cosh\eta(y)$, donde hemos indicado que la pseudorapidity del partón depende explícitamente de y. Para no arruinar las conclusiones de las Ecs. (8.14) y (8.16), deberemos tener $E \to 0$ cuando $y \to 1$, o lo que es equivalente, $\cosh\eta(y)$ deberá tender a una constante finita cuando $y \to 1$ (notemos que $1-\cos R(y)$ tiende a cero con la misma velocidad que $1-y$ para $y \to 1$). Este es de hecho el caso, ya que para cada definición de y se obtiene $\cosh\eta(y) \to \cosh\eta_\gamma$. En la producción de fotones aislados, el fotón es observado en la región central del detector, y $\cosh\eta_\gamma$ es del orden de la unidad.

8.3.3. El criterio democrático

En este criterio [176], el fotón es tratado como cualquier otro hadrón y es agrupado simultáneamente con los otros hadrones en los jets. Como consecuencia uno de los jets en el estado final contiene un fotón y es etiquetado como "*jet fotónico*" si la fracción de energía electromagnética dentro del jet es lo suficientemente grande,

$$z = \frac{E_{EM}}{E_{EM} + E_{HAD}} > z_{corte}, \tag{8.18}$$

con z_{corte} determinada por las condiciones del experimento [177]. Se dice que este fotón está aislado si porta más de una cierta fracción (típicamente el 95 %) de la energía del jet y diremos que no está aislado en otro caso. Nótese que esta separación está hecha estudiando la distribución experimental de z y es usualmente tal, que los efectos de hadronización (los que tienden a reducir z) son minimizados. La sección eficaz definida usando este criterio, recibe entonces, contribuciones no despreciables desde la parte directa y la de fragmentación.

Es un criterio que fue usado por la colaboración ALEPH en el CERN para el análisis de eventos de dos jets en colisiones e^+e^-, en los que un jet contiene un fotón muy energético [178]. Y es el más adecuado para extraer las funciones de fragmentación de los datos. Este es el punto de vista que se adopta en la Ref. [176].

8.4. Herramientas de cálculo a NLO en pQCD

Las correcciones a NLO para la producción de fotones fue implementada en varios códigos de tipo Monte Carlo. A continuación se los describe brevemente citando sus características principales.

8.4.1. DIPHOX

El código `DIPHOX` [69] incorpora la completa descripción fenomenológica de la producción de difotones a NLO. Incorpora la contribución directa a NLO (ver Fig. (8.3)) y la de fragmentación a NLO también (ver Figs. (8.4) y (8.5)). Es el único código que cuenta con tal

descripción a NLO. En este sentido, es que es la única herramienta disponible para hallar la sección eficaz inclusiva[12] a NLO. Las demás herramientas o usan contratérminos en lugar de funciones de fragmentación o usan la contribución de fragmentación a LO. Este código incorpora además la llamada contribución *box*, $gg \to \gamma\gamma$, que aunque formalmente pertenece al NNLO, y posee un loop de quarks (ver Fig. (8.7)- a) la gran luminosidad del canal gluónico en el LHC, compensa el $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ y la hace comparable (en magnitud) al LO $q\bar{q} \to \gamma\gamma$. Varios de los códigos han incorporado esta contribución porque además de significar un aporte de gran magnitud a la sección eficaz, fue la primera contribución a NNLO con la que se contó [179].

Al poseer la descripción completa de la fenomenología del proceso a NLO se pueden aplicar cualesquiera de los criterios de aislación enumerados en los párrafos precedentes.

Este código utiliza una variante del método de *Phase space slicing* [50], para tratar también las divergencias del estado final. De forma precisa, es una combinación entre éste método y el de sustracción [69] que posee algunas modificaciones respecto de la primera versión [69].

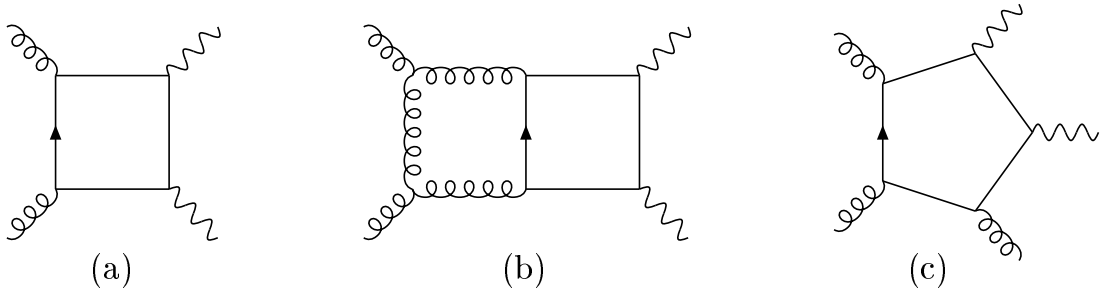

Figura 8.7: *Diagrama a: Subproceso de la contribución box $gg \to \gamma\gamma$, para el canal gg. Diagrama b: Corrección virtual al proceso $gg \to \gamma\gamma$ a un-loop. Diagrama c: Correcciones pentágono ($gg \to \gamma\gamma g$) al box que constituyen la corrección real a $gg \to \gamma\gamma$.*

8.4.2. gamma2MC

Este código [54] incorpora sólo la contribución a NLO de la parte directa. No incorpora ninguna componente de fragmentación, por lo que es obligatorio utilizar el criterio de aislación de Frixione para aislar a los fotones y así cancelar las divergencias colineales que aparecen en las contribuciones directas cuando un partón se vuelve colineal con un fotón.

Al igual que `DIPHOX`, incorpora la contribución box, y algunos términos que son correcciones de orden mayor a ésta. Tales términos son de $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ e incluyen las correcciones virtuales a la contribución box $gg \to \gamma\gamma$: diagramas a dos-loops como el de la Fig. (8.7-b), y los efectos de *bremsstrahlung* del gluón, a través de la amplitud a un-loop para el subproceso $gg \to \gamma\gamma g$, que entran como las amplitudes pentágono de la Fig. (8.7-c). Ambas correcciones fueron calculadas en el límite de masa nula para los quarks, que es una excelente aproximación para el rango de masas de interés en cuanto a la búsqueda del bosón de Higgs en el LHC [54].

Pero este código no incorpora todas las contribuciones al canal gg a $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$, las que en principio podrían ser comparables en magnitud, con subprocesos como $gg \to \gamma\gamma$. Diagramas

[12] Aquella sección eficaz sobre la que no se impone ningún criterio de aislación sobre los fotones.

como los detallados en la Fig. (8.8) no están incluidos en el código `gamma2MC` y deberán ser tenidos en cuenta si es que se quiere dar una descripción completa de la fenomenología de la producción de difotones a NNLO ($\mathcal{O}(\alpha_s^2)$), para la contribución directa. Todas las contribuciones a $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ se incluyen por vez primera en nuestro código `2γNNLO`.

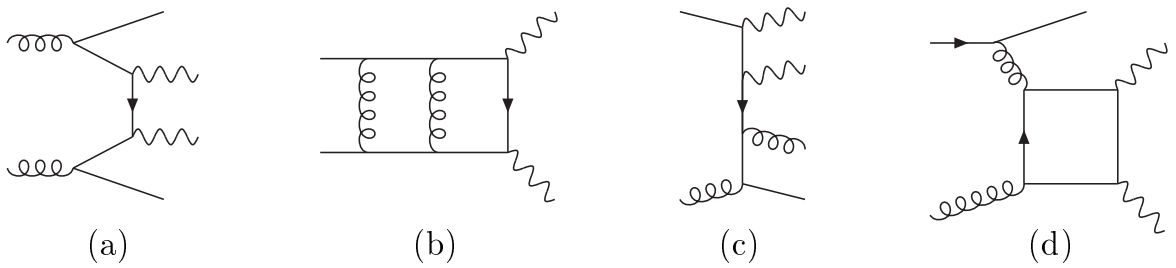

Figura 8.8: *Diagramas que contribuyen a la producción de difotones a $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ y que no son tenidas en cuenta en cualesquiera de los códigos previos al nuestro `2γNNLO`. Diagrama a: Subproceso a orden árbol $gg \to \gamma\gamma q\bar{q}$. Diagrama b: Corrección virtual al proceso $gg \to \gamma\gamma$ a dos-loops. Diagrama c: Doble radiación real al proceso $q\bar{q} \to \gamma\gamma$ correspondiente al canal qg. Diagrama d: Subproceso $qg \to \gamma\gamma q$ (corrección real a un-loop).*

Para incluir en el código todas estas correcciones se utilizó el formalismo dipolar de Catani-Seymour [51], que detallamos en el Capítulo 3.

8.4.3. MCFM

Este código [52] incorpora la contribución directa a NLO y la contribución de fragmentación a LO. Así es que se deben emplear contratérminos para cancelar las divergencias que aparecen a NLO, cuando un partón se hace colineal a un fotón. Además incluye la contribución box, y las correcciones al box que fueron incorporadas por vez primera en el código `gamma2MC` [54]. Es posible aplicar los tres criterios de aislación descritos en la sección anterior ya que se cuenta con las dos contribuciones.

8.4.4. Resbos

Incorpora la contribución directa a NLO y una serie de contratérminos para cancelar las divergencias colineales, ya que no utilizan la componente de fragmentación. Además es la única herramienta [136] que cuenta con resumación en momento transverso para la parte directa, solucionando así los problemas que poseen los códigos de orden fijo (todos los anteriores enumerados) en la distribución en momento transverso del par de fotones (cuando éste tiende a cero $p_T^{\gamma\gamma} \to 0$). Es posible aplicar los tres criterios de aislación descritos en la sección anterior ya que se cuenta con las dos contribuciones. Además incluye la contribución box, y las correcciones al box que fueron incorporadas por vez primera en el código `gamma2MC`.

8.5. Fenomenología a NLO

En esta sección describiremos brevemente las comparaciones entre los datos tomados por las colaboraciones ATLAS, CMS, CDF y D0 para la señal de difotones y los respectivos resultados que ofrecen las herramientas teóricas que hemos descrito en la sección anterior.

Generalmente en los trabajos experimentales, para confrontar teoría y experimento, se usa al código `DIPHOX` que posee la descripción completa de la fenomenología del problema, junto con las correcciones de $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ que han calculado Bern, Dixon y Schmidt [54], y que son implementadas en `gamma2MC` [13]. Y para las distribuciones en momento transverso para el par de fotones, también se utiliza al código `Resbos` pues implementa resumación en momento transverso.

Los datos, que son tomados haciendo uso del criterio estándar de aislación, muestran un razonable acuerdo con la descripción teórica a NLO[14] que pueden ofrecer las cuatro herramientas que hemos descrito más arriba. Sin embargo, existen ciertas zonas de las distribuciones cinemáticas, en las que pueden hallarse discrepancias manifiestas entre la descripción a NLO y los datos. La soluciones a estos problemas que provee nuestro código `2γNNLO` se dejan para el capítulo siguiente. Aquí solo se comentan las discrepancias halladas y lo que las colaboraciones suponían que eran los motivos.

Consideremos primero la distribución respecto de la masa invariante del par de fotones, que se define

$$M_{\gamma\gamma} = \sqrt{2p^{\mu}_{\gamma^1} p^{\gamma^2}_{\mu}}. \tag{8.19}$$

En el caso de los datos tomados recientemente por la colaboración CDF [74], los resultados se hallan en acuerdo razonable con los datos, dentro de las incertezas, excepto en la región 6 GeV$< M_{\gamma\gamma} <$ 32 GeV, bajo el pico de masa (ver Fig. (8.9)). Las tres descripciones teóricas que se presentan en el gráfico subestiman los datos en esa región. En el caso de la colaboración D0 [72] se presentan discrepancias similares (ver Fig. (8.12)), para la zona $M_{\gamma\gamma} <$ 50 GeV. El acuerdo en la región 50 GeV$< M_{\gamma\gamma} <$ 80 GeV es aceptablemente bueno. Y en la región $M_{\gamma\gamma} >$ 80 GeV es bueno.

Es notable que en ambos trabajos [72, 74] se argumente que las discrepancias se deben a la falta de términos de orden superior para el subproceso $gg \to \gamma\gamma$, ya que se sabe que el canal que es dominante a NLO es el qg [69, 54]. En ambos trabajos se nota que el efecto de estas discrepancias puede aumentar en el caso del LHC. Ya que si son observadas en un colisionador como el Tevatron, en el que el mecanismo principal de producción de difotones es el $q\bar{q} \to \gamma\gamma$, en el LHC el efecto sería mucho peor, debido a la alta luminosidad del canal de gluón.

En el caso de ATLAS [71] y CMS [70] podemos ver en las Figs. (8.10) y (8.11) nuevamente las discrepancias entre la teoría y los datos. Como el tamaño del bin es distinto que en los casos anteriores, no es posible una comparación directa. Los cuatro trabajos coinciden en que las discrepancias son el fruto de no tener en cuenta los efectos de los gluones soft que deberían ser resumados a todo orden y de la omisión de términos de orden superior al canal gg. Sin embargo, la descripción a NNLO para la parte directa va a solucionar la mayor parte

[13] Cuando en los gráficos de datos versus teoría se lee "`DIPHOX` + `gamma2MC`", éste es el caso.

[14] Considerando además la contribución box y sus correcciones. Llamaremos a esta descripción NLO, aunque tenga términos parciales de orden mayor.

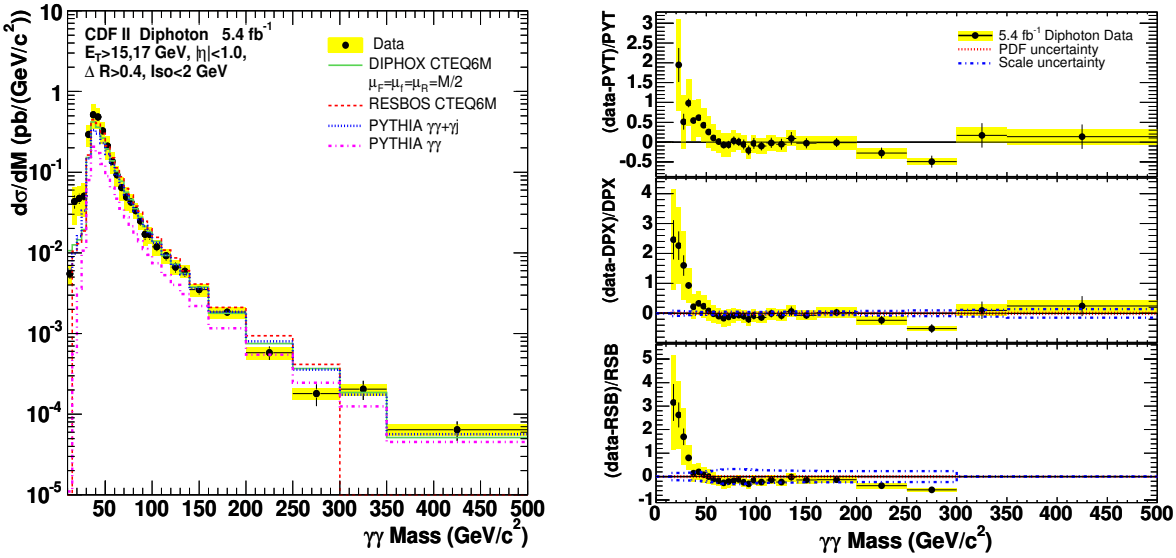

Figura 8.9: *(Izquierda) Sección eficaz en función de la masa invariante de los difotones (colaboración CDF [74]).(Derecha) La razón entre la sección eficaz diferencial y* `Resbos`*,* `DIPHOX` *y* `PYTHIA`*.*

de esta discrepancia. En el caso de la distribución en momento transverso del par de fotones

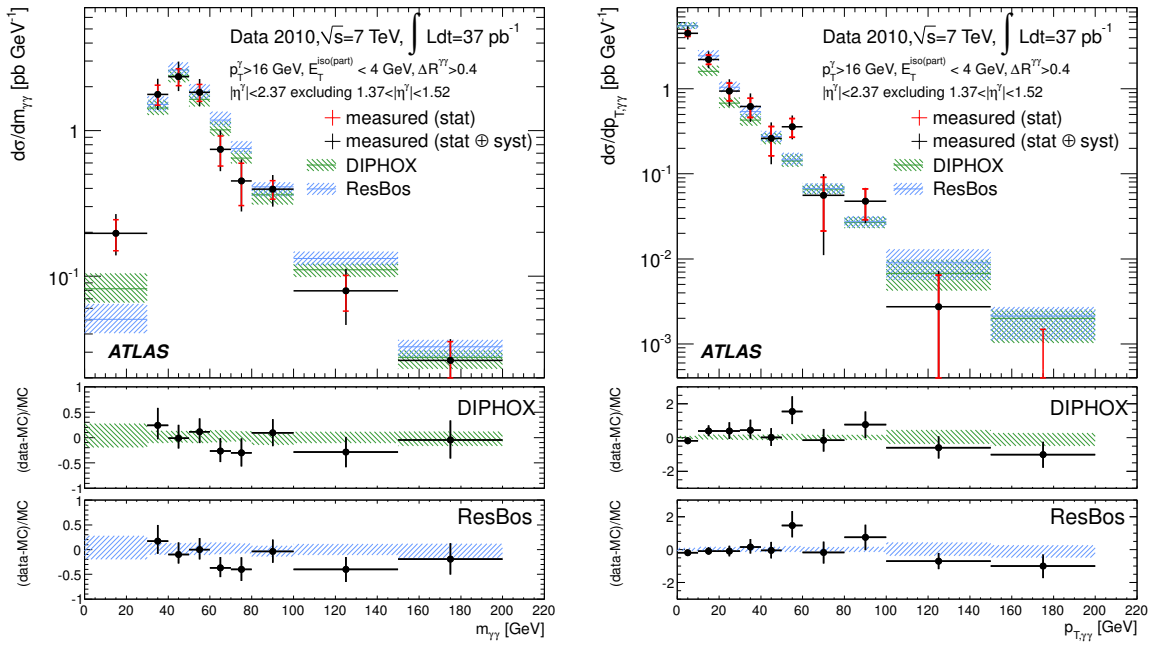

Figura 8.10: *(Izquierda) Sección eficaz diferencial en función de la masa invariante del par de fotones (ATLAS) [71]. Los círculos sólidos muestran los datos. Las bandas rayadas muestran los cálculos a NLO, utilizando* `Resbos` *y* `DIPHOX`*. Los paneles de abajo muestran la diferencia relativa entre la medición y las predicciones a NLO. El punto dato/teoría en el bin* 0 *GeV*$< M_{\gamma\gamma} <$ 30 *GeV yace fuera y hacia arriba de los marcos. (Derecha) Ídem panel izquierdo pero para la distribución en momento transverso de los difotones.*

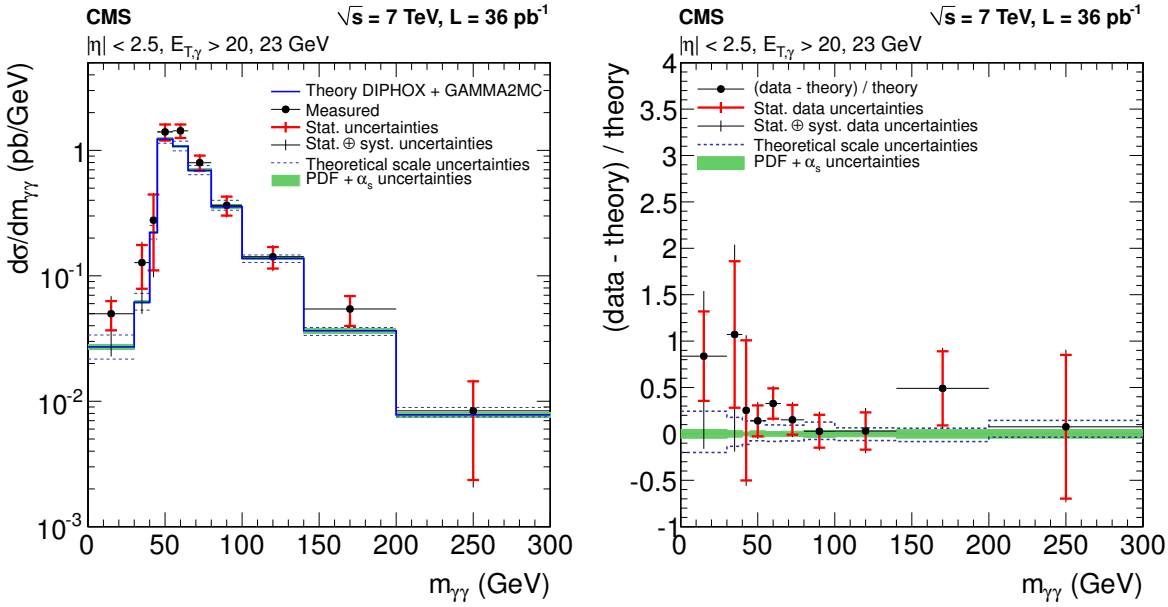

Figura 8.11: *(Izquierda) Sección eficaz diferencial en función de la masa invariante del par de fotones. Los círculos sólidos muestran los datos. Las líneas sólidas muestran los cálculos a NLO. El panel de la derecha muestra la diferencia relativa entre la medición y las predicciones a NLO.*

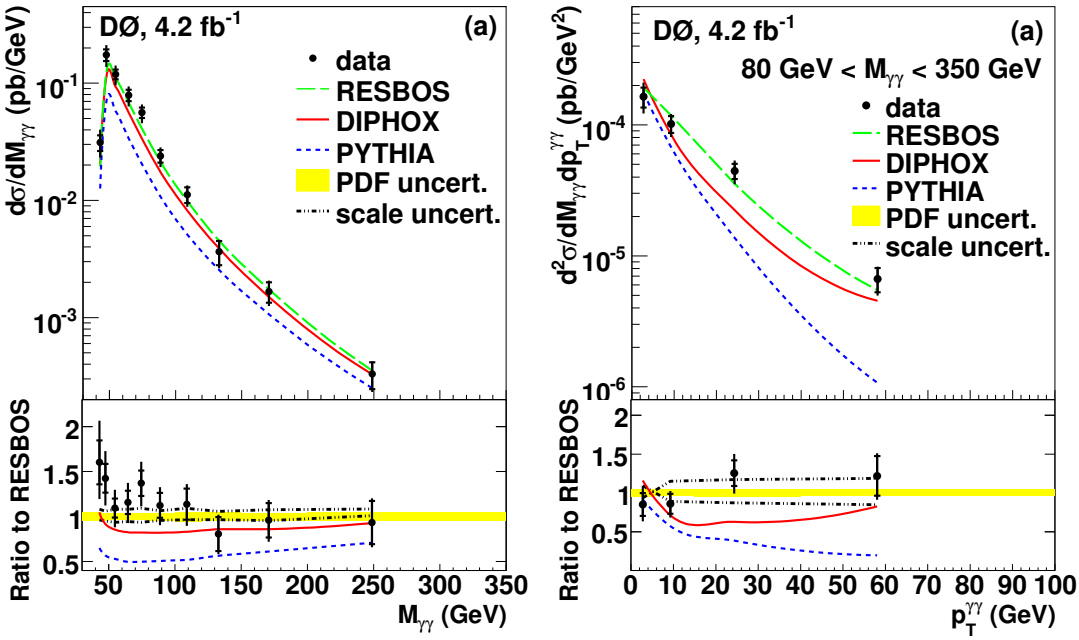

Figura 8.12: *(Izquierda) Sección eficaz en función de la masa invariante de los difotones (colaboración D0 [72]). Los datos son comparados con las predicciones teóricas de* `Resbos`*,* `DIPHOX` *y* `PYTHIA`*. La razón entre la sección eficaz diferencial y* `Resbos` *se enseña el el gráfico de abajo. (Derecha) Ídem panel izquierdo pero para la distribución en momento transverso de los difotones.*

$p_T^{\gamma\gamma}$, la situación es similar. Pero aquí hay que distinguir entre dos casos o zonas. La zona

$p_T^{\gamma\gamma} \sim 0$, en la que es necesaria la resumación a todo orden de las contribuciones logarítmicas a bajo $p_T^{\gamma\gamma}$, presenta las discrepancias usuales entre todas las herramientas de orden fijo y los datos. Pero estas son diferencias esperadas, propias de las herramientas de orden fijo. Lejos de $p_T^{\gamma\gamma} \sim 0$ ($p_T^{\gamma\gamma} > 10$ GeV) el efecto de la emisión múltiple de gluones soft desaparece y las discrepancias entre datos y teoría se debe a otras circunstancias. Nuevamente mostramos los datos de ATLAS [71], CMS [70], CDF [74] y D0 [72] (ver Figs. (8.10), (8.14), (8.13) y (8.12) respectivamente), y las comparaciones respectivas con las herramientas de cálculo a NLO.

El exceso de los datos sobre la descripción teórica en la distribución de masa invariante $M_{\gamma\gamma}$ (en la zona de masas menores al pico de la distribución) se refleja también en el espectro en $p_T^{\gamma\gamma}$. En el caso de CDF (ver Fig. (8.13)) esto sucede en la zona 20 GeV$< P_T^{\gamma\gamma} <$ 50 GeV, en la que se muestra un "hombro" (llamado "de Guillet") alrededor de $P_T^{\gamma\gamma} = p_{T\gamma^1}^{min} + p_{T\gamma^2}^{min} =$ 32 GeV . El trabajo de la colaboración CDF se lo atribuye al hecho de que $p_{T\gamma^2}^{min}$ yace dentro de la región física a NLO, potenciando así las contribuciones de fragmentación (colineales) que son sin embargo suprimidas por $\Delta R(\gamma\gamma)$. La predicción de `Resbos` está en acuerdo (dentro de las incertezas) con los datos exceptuando esta región. La predicción de `DIPHOX` subestima los datos además en la región $P_T^{\gamma\gamma} < 20$ GeV, como es lo usual para herramientas de orden fijo, zona en la que se pone de manifiesto los efectos de la resumación implementada por `Resbos`. La predicción de `PYTHIA` subestima los datos solo por debajo de $P_T^{\gamma\gamma} < 20$ GeV poniendo en evidencia que la resumación a LL de la lluvia de partones es menos precisa que la resumación a NLL[15] de `Resbos`. Consideraciones similares pueden expresarse para el resto de las colaboraciones. Conviene observar al "hombro de Guillet" para los datos tomados por CMS (ver Fig. (8.14), ya que el haber tomado al eje de las abcisas en escala logarítmica, evidencia aun más las discrepancias en esta zona.

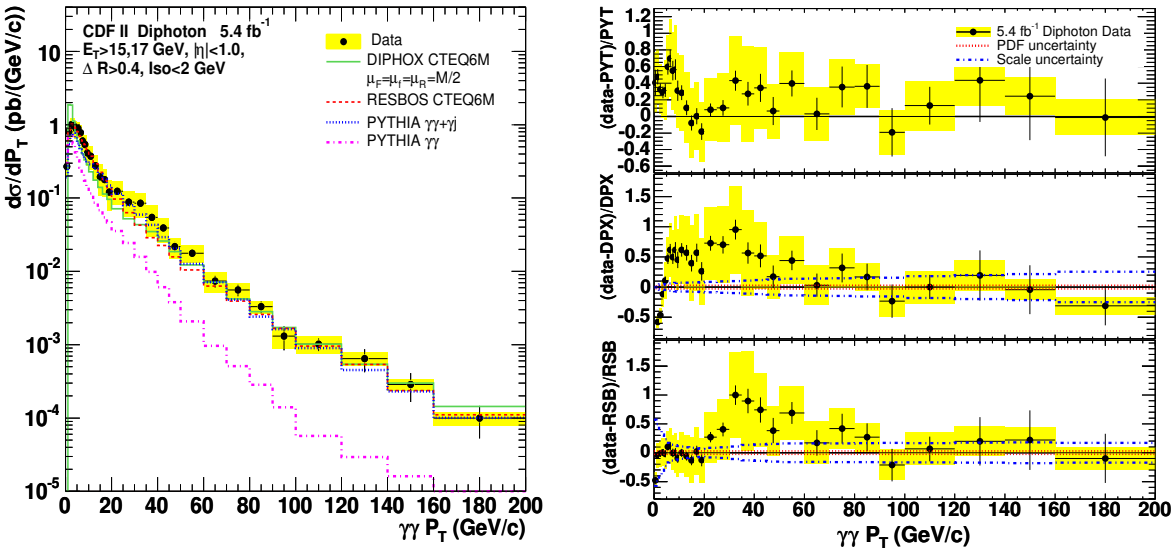

Figura 8.13: *(Izquierda) Sección eficaz en función del momento transverso de los difotones (colaboración CDF [74]).(Derecha) La razón entre la sección eficaz diferencial y* `Resbos`*,* `DIPHOX` *y* `PYTHIA`*.*

[15]Para `Resbos` el calificativo de NNLL es solo parcial. No presenta una resumación completa a orden NNLL como se asegura en los manuales correspondientes.

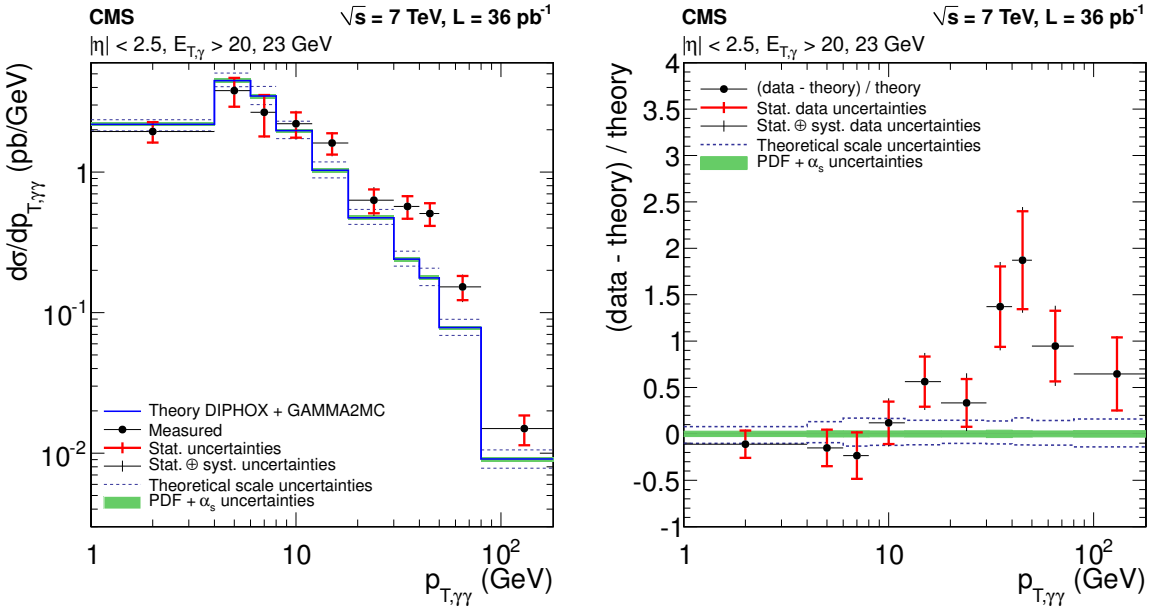

Figura 8.14: *(Izquierda) Sección eficaz diferencial en función del momento transverso del par de fotones. Los círculos sólidos muestran los datos. Las líneas sólidas muestran los cálculos a NLO. El panel de la derecha muestra la diferencia relativa entre la medición y las predicciones a NLO.*

Ahora consideremos el caso de las distribuciones en rapidity de los difotones. En general es la distribución en la que se puede encontrar el mejor acuerdo con los datos. La rapidity del par de fotones se define de la siguiente manera

$$Y_{\gamma\gamma} = \tanh^{-1} \frac{p_{\mathrm{T}\gamma 1} \sinh y_{\gamma 1} + p_{\mathrm{T}\gamma 2} \sinh y_{\gamma 2}}{p_{\mathrm{T}\gamma 1} \cosh y_{\gamma 1} + p_{\mathrm{T}\gamma 2} \cosh y_{\gamma 2}} \ , \tag{8.20}$$

donde $y_{\gamma i}$ es la rapidity del fotón i, y la comparación de los datos tomados por CDF con la descripción teórica puede verse en la Fig. (8.15). El caso más patológico resulta, el de la distribución en ángulo azimutal del par de fotones $\Delta\phi_{\gamma\gamma}$. Esta cantidad se define

$$\Delta\phi = |\phi_{\gamma 1} - \phi_{\gamma 2}| \quad \text{mód } \pi \ , \tag{8.21}$$

para el par de fotones en sistema de laboratorio [16].

La predicción en cuanto a los datos de ATLAS para la distribución en $\Delta\phi_{\gamma\gamma}$ (ver Fig. (8.18), lado izquierdo) falla tanto en el caso de `DIPHOX` como `Resbos`: son vistos muchos más eventos de difotones en la zona de pequeño $\Delta\phi_{\gamma\gamma}$ que los predichos, mientras que el cálculo teórico favorece ampliamente la zona back-to-back ($\Delta\phi_{\gamma\gamma} \sim \pi$). Esto se debe a que la zona $\Delta\phi_{\gamma\gamma} \sim \pi$ es la que se corresponde con $p_T^{\gamma\gamma} \sim 0$ GeV, donde ambos fotones están back-to-back[17] y donde los efectos de la resumación de los gluones soft es necesaria para contar con una descripción confiable.

[16]El detector CDF II usa un sitema de coordenadas cilíndricas en el que ϕ es el ángulo azimutal, θ es el ángulo polar respecto del haz de protones, r es el radio desde el haz nominal de protones, y z apunta a la dirección del haz de protones, con el origen en el centro del detector. El plano transverso r-ϕ, o el plano x-y, es el plano perpendicular al eje z. La pseudorapidity, η, está definida como $-\ln(\tan(\theta/2))$. Para los fotones, que tienen masa cero, esta es idéntica a la rapidity y=$\tanh^{-1}(p_z/E)$, donde p_z=$p \cdot \cos\theta$ es el momento paralelo al haz [77]. La energía transversa de una partícula es E_T=$E \cdot \sin\theta$. El momento transverso de la partícula está definido como p_T=$p \cdot \sin\theta$.

[17]Configuración propia de la cinemática Born.

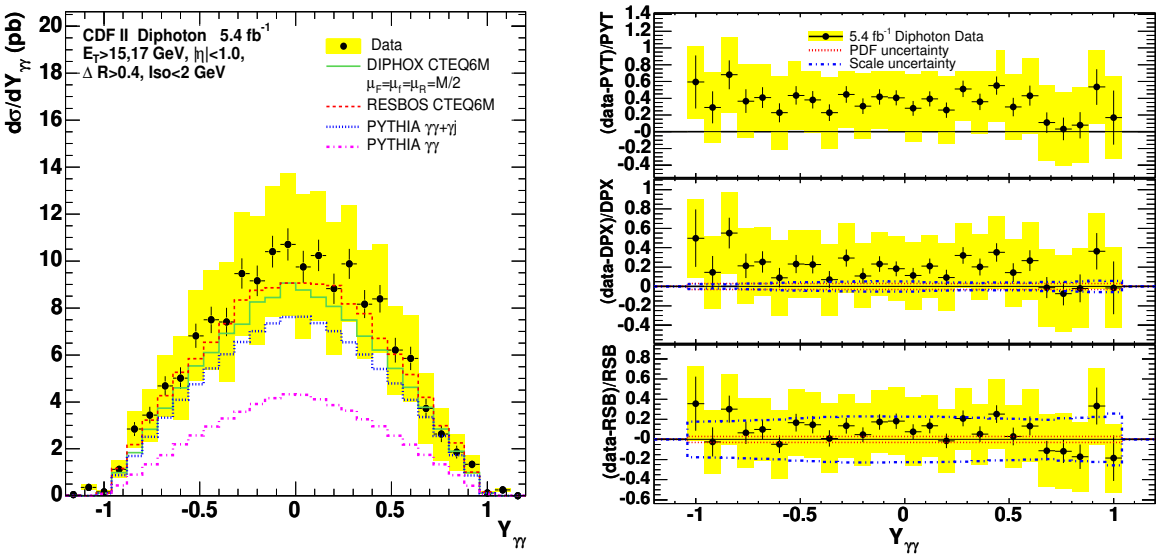

Figura 8.15: *(Izquierda) Sección eficaz en función de la rapidity de los difotones (colaboración CDF [74]).(Derecha) La razón entre la sección eficaz diferencial y* `Resbos`*,* `DIPHOX` *y* `PYTHIA`*.*

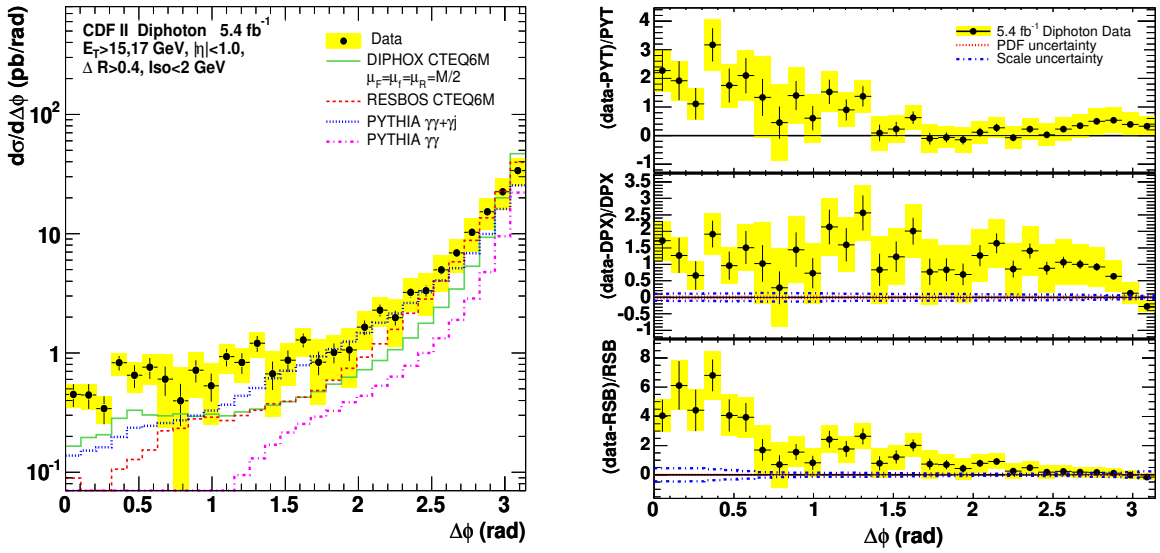

Figura 8.16: *(Izquierda) Sección eficaz en función de* $\Delta\phi_{\gamma\gamma}$ *(colaboración CDF [74]).(Derecha) La razón entre la sección eficaz diferencial y* `Resbos`*,* `DIPHOX` *y* `PYTHIA`*.*

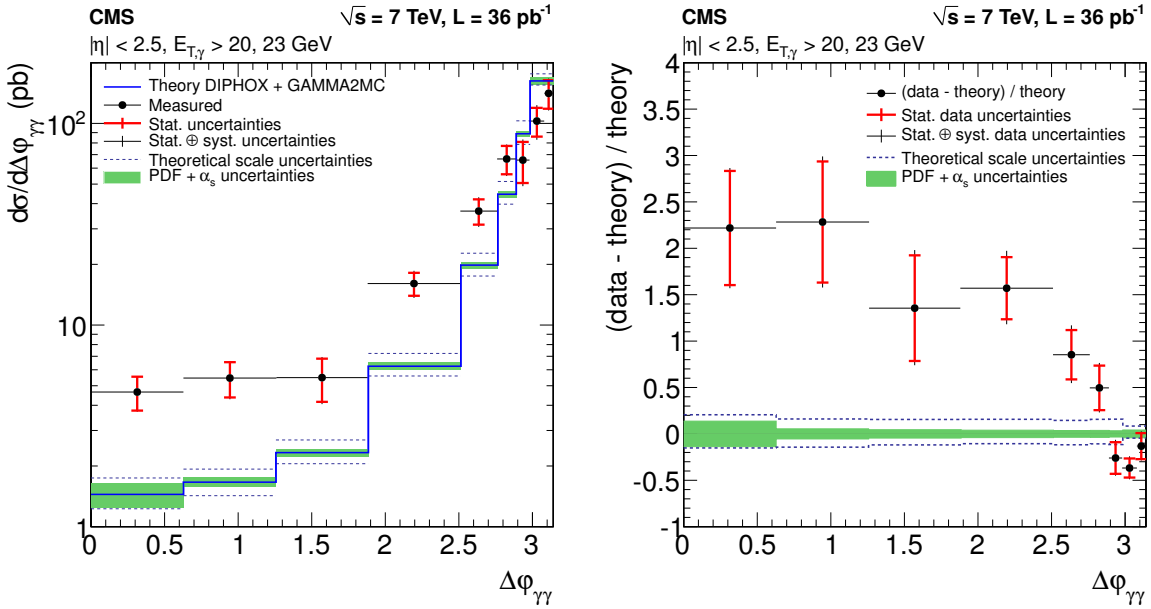

Figura 8.17: *(Izquierda) Sección eficaz diferencial en función de $\Delta\phi_{\gamma\gamma}$ del par de fotones. Los círculos sólidos muestran los datos. Las líneas sólidas muestran los cálculos a NLO. El panel de la derecha muestra la diferencia relativa entre la medición y las predicciones a NLO.*

En el caso de CMS (ver Fig. (8.17)) la contribución para $\Delta\phi_{\gamma\gamma} \lesssim 2{,}8$ combinada con los requerimientos de $E_T > 20$ y 23 GeV sobre los dos fotones, es responsable del hombro alrededor de 40 GeV en la distribución en p_T de la Fig. (8.14). Esta contribución también es la que puebla la región de masas menores a 30 GeV en la distribución de masa invariante (ver Fig. (8.11)). En estas dos regiones del espectro de $p_T^{\gamma\gamma}$ y $M^{\gamma\gamma}$, la sección eficaz teórica es menor que la medida, siendo consistente este hecho con el déficit para $\Delta\phi_{\gamma\gamma} \lesssim 2{,}8$ [70].

En el caso de D0 y CDF las conclusiones son exactamente las mismas que para ATLAS y CMS (ver Figs. (8.18), lado derecho y (8.16)).

8.5.1. Discusión y conclusiones

Las discrepancias entre los datos y los resultados de las herramientas teóricas observadas en la sección anterior son atribuidas a una descripción deficiente del modelo de fragmentación [74] y la relación entre la componente de fragmentación y el criterio de aislación de fotones impuesto a los partones, en lugar de hadrones.

Sin embargo, podemos notar que tales discrepancias están todas íntimamente relacionadas. Las regiones donde se producen las diferencias citadas están todas alejadas de la zona en donde ambos fotones están back-to-back, es decir, alejadas de la configuración Born. Estas zonas sólo reciben contribución de eventos en los que los fotones están acompañados de un partón extra (como estamos a NLO, sólo un partón extra). Es decir reciben contribución sólo de los elementos de matriz reales. En este sentido, y en estas regiones, la corrección a NLO es, de manera efectiva, una contribución a LO, porque recibe eventos por primera vez a NLO.

En el caso especial de la distribución en $\Delta\phi_{\gamma\gamma}$, todas las contribuciones (teóricas) a la sección eficaz, a excepción de la real, pueden poblar únicamente la región $\Delta\phi_{\gamma\gamma} = \pi$, pues

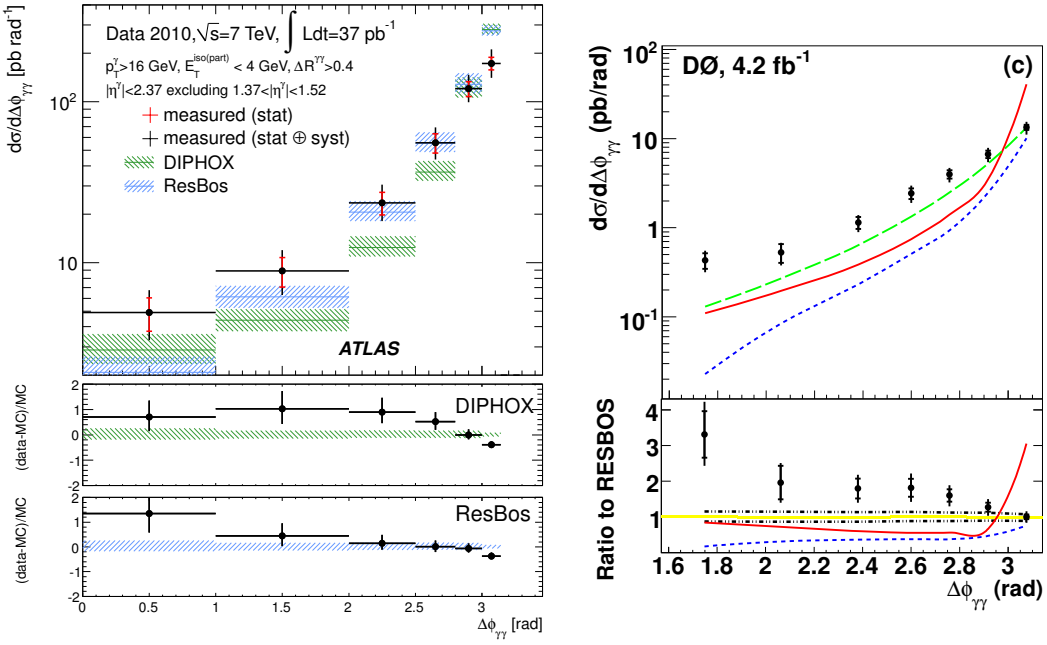

Figura 8.18: *(Izquierda) Sección eficaz diferencial en función de $\Delta\phi_{\gamma\gamma}$ del par de fotones (ATLAS) [71]. Los círculos sólidos muestran los datos. Las bandas rayadas muestran los cálculos a NLO, utilizando* `Resbos` *y* `DIPHOX`*. Los paneles de abajo muestran la diferencia relativa entre la medición y las predicciones a NLO. (Derecha) Sección eficaz en función de $\Delta\phi_{\gamma\gamma}$ de los difotones (colaboración D0 [72]). Los datos son comparados con las predicciones teóricas de* `Resbos`*,* `DIPHOX` *y* `PYTHIA`*. La razón entre la sección eficaz diferencial y* `Resbos` *se enseña el el gráfico de abajo.*

todas poseen cinemática Born, en la que los fotones están back-to-back y su separación es exactamente un ángulo llano.

En el caso de la distribución en masa invariante, la zona de masa pequeña, que es aquella región que verifica $M_{\gamma\gamma} < 2 \times p_{T\ min\ \gamma}^{Harder}$ [18] también recibe contribución por primera vez a NLO, y por ende está relacionada directamente con la región $\Delta\phi_{\gamma\gamma} \neq \pi$ en la distribución en ángulo azimutal. Ambas discrepancias, en sendas distribuciones entonces están íntimamente relacionadas. Y lo mismo sucede, como ya hemos explicado en la sección anterior, con la zona del "hombro" en la distribución en momento transverso $p_T^{\gamma\gamma}$ para el par de fotones.

Es ilustrativo el análisis que ha hecho CDF [74] al considerar dos condiciones extra en la presentación de sus datos. Ha presentado dos conjuntos más de datos exigiendo dos condiciones adicionales: $p_T^{\gamma\gamma} > M_{\gamma\gamma}$ y $p_T^{\gamma\gamma} < M_{\gamma\gamma}$. Ambas contribuciones sumadas resultan en los gráficos presentados en la sección precedente.

Lo interesante de este seccionamiento del espacio de fase es lo siguiente: cuando se considera el caso $p_T^{\gamma\gamma} > M_{\gamma\gamma}$ lo único que se hace es eliminar las contribuciones de cinemática Born, las contribuciones back-to-back (en cuanto al análisis teórico). Y esto es porque la masa invariante de los difotones $M_{\gamma\gamma}$ nunca es cero, de manera que $p_T^{\gamma\gamma}$ tampoco. Es decir, en cuanto a la descripción teórica concierne, la condición $p_T^{\gamma\gamma} > M_{\gamma\gamma}$ solo hace que sobreviva la contribución real, en la que hay un partón extra en el estado final (a NLO). Y nuevamente podemos concluir lo mismo, todas las distribuciones que resulten de esta condición

[18] Donde $p_{T\ min\ \gamma}^{Harder}$ es el corte mayor para en el momento transverso de los fotones.

van a ser contribuciones efectivas a LO, ya que reciben eventos por primera vez a NLO. Y lo que podemos ver en las Figs. (8.19) y (8.21) es lo esperado: las discrepancias entre los datos y la predicción teórica son mayores, ya que ahora todas las zonas de las distribuciones son efectivamente LO. Incluso, en el caso de la rapidity, que es la única distribución en la que el acuerdo es bueno, ahora las discrepancias son notorias. En el caso de la distribución en ángulo azimutal $\Delta\phi_{\gamma\gamma}$ el corte $p_T^{\gamma\gamma} > M_{\gamma\gamma}$ lo único que hace es remover las contribuciones a $\Delta\phi_{\gamma\gamma} = \pi$. Para el resto del espectro ($\Delta\phi_{\gamma\gamma} \neq \pi$) la distribución con $p_T^{\gamma\gamma} > M_{\gamma\gamma}$ (ver Fig. (8.20)) presenta discrepancias similares (prácticamente las mismas) para valores de ángulo azimutal que satisfacen $\Delta\phi_{\gamma\gamma} < 1{,}5$. Para tal región ($\Delta\phi_{\gamma\gamma} < 1{,}5$) el corte $p_T^{\gamma\gamma} > M_{\gamma\gamma}$ no ha empeorado la descripción ya que no hay contribuciones Born a las que el requisito $p_T^{\gamma\gamma} > M_{\gamma\gamma}$ pueda afectar. Para valores de $\Delta\phi_{\gamma\gamma} > 1{,}5$ la falta de estadística en los datos previene una análisis detallado.

Estos resultados apoyan la conclusión de que las discrepancias observadas se deben a la falta de correcciones de orden mayor en α_s, y no a una deficiente descripción del modelo de fragmentación o a una mala implementación del criterio de aislación de parte de las herramientas teóricas, ya que tratan con partones y no con hadrones.

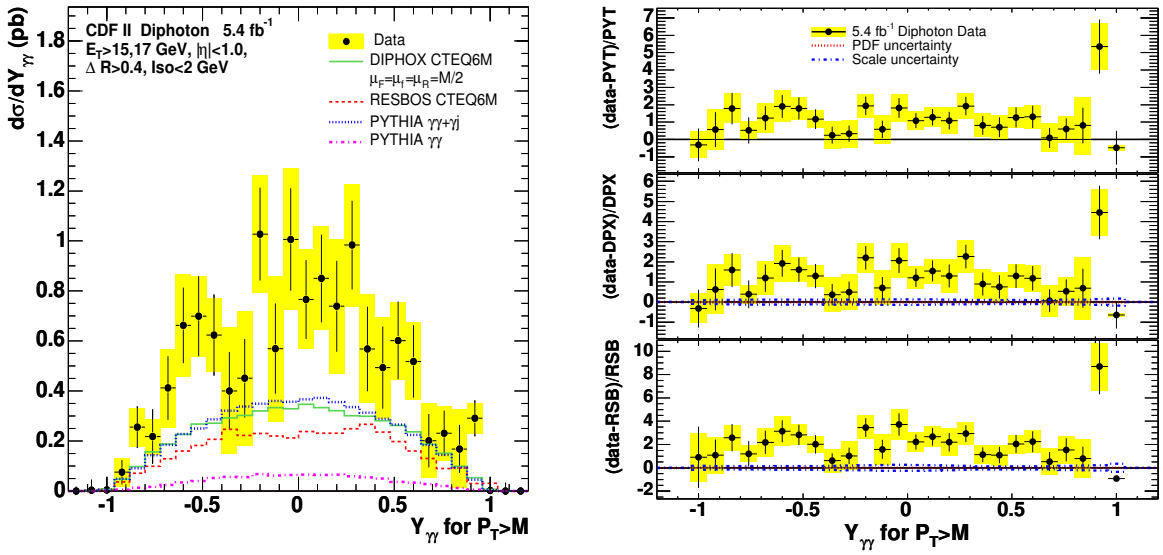

Figura 8.19: *(Izquierda) Sección eficaz en función de la rapidity de los difotones (colaboración CDF [74]) con la condición extra $p_T^{\gamma\gamma} > M_{\gamma\gamma}$.(Derecha) La razón entre la sección eficaz diferencial y* `Resbos`, `DIPHOX` *y* `PYTHIA`.

El análisis relacionado con el corte $p_T^{\gamma\gamma} > M_{\gamma\gamma}$ está directamente relacionado con la fenomenología de los datos de la parte restante del espacio de fase $p_T^{\gamma\gamma} < M_{\gamma\gamma}$. El corte $p_T^{\gamma\gamma} < M_{\gamma\gamma}$ favorece las emisiones con cinemática Born y suprime parcialmente las contribuciones a $p_T^{\gamma\gamma} \neq 0$ de las correcciones a NLO y NNLO, de manera que la comparación entre los datos y la teoría presenta un mejor acuerdo, incluso reduce las discrepancias del caso en el que no se ligan mutuamente a $p_T^{\gamma\gamma}$ y $M_{\gamma\gamma}$ (ver Figs. 8.16, 8.13, 8.9 y 8.15).

Cabe notar que la condición $p_T^{\gamma\gamma} < M_{\gamma\gamma}$ ha eliminado casi en su totalidad al hombro de Guillet de la distribución en momento transverso del par de fotones. Hombro que las

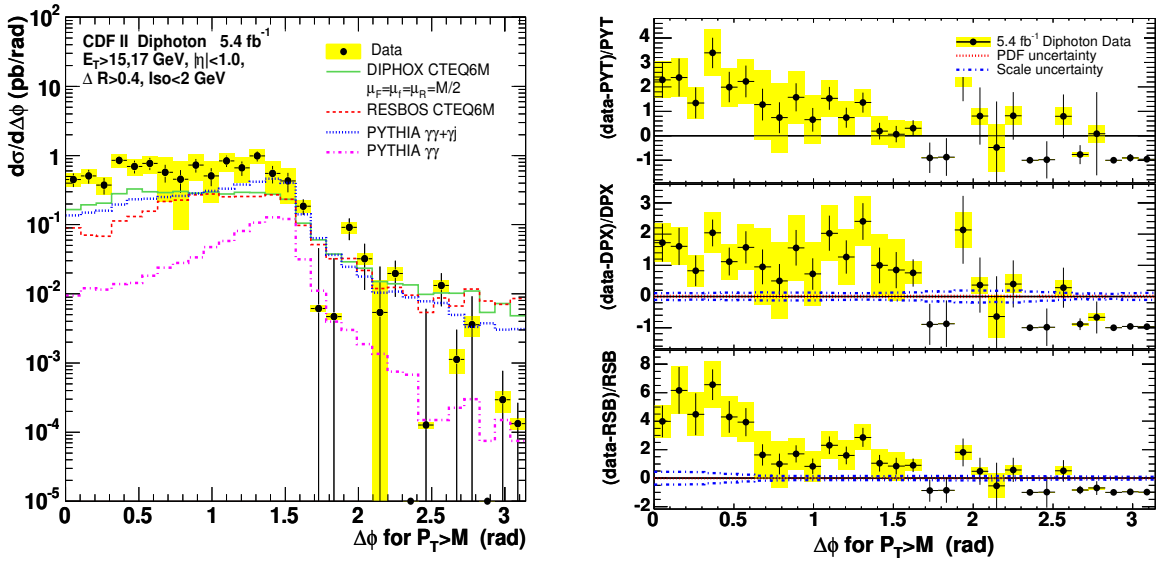

Figura 8.20: *(Izquierda) Sección eficaz en función de $\Delta\phi_{\gamma\gamma}$ (colaboración CDF [74]) con la condición extra $p_T^{\gamma\gamma} > M_{\gamma\gamma}$. (Derecha) La razón entre la sección eficaz diferencial y* `Resbos`, `DIPHOX` *y* `PYTHIA`.

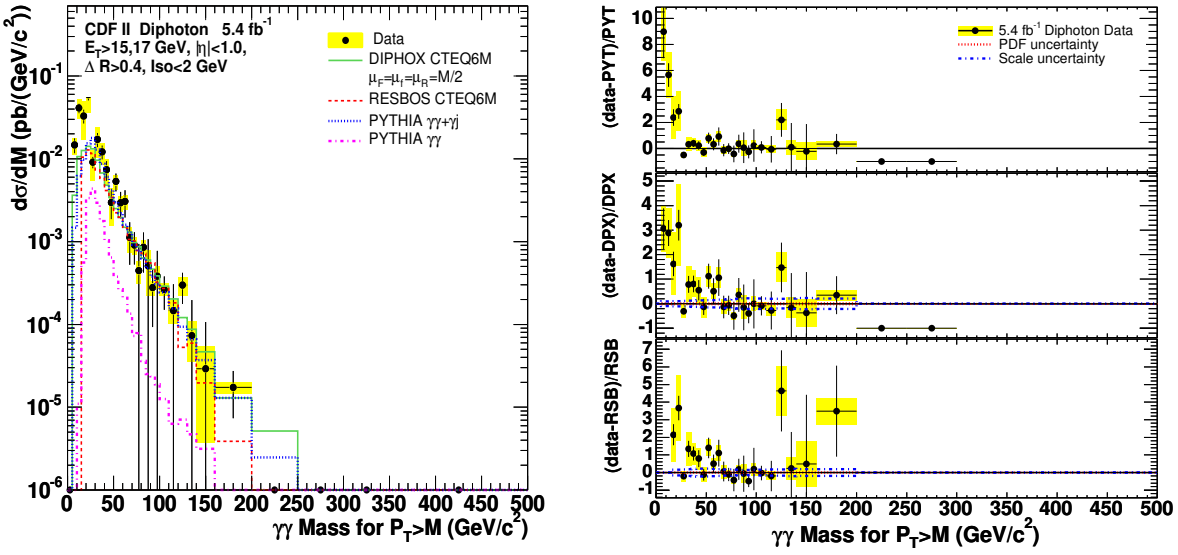

Figura 8.21: *(Izquierda) Sección eficaz en función de la masa invariante de los difotones (colaboración CDF [74]) con la condición extra $p_T^{\gamma\gamma} > M_{\gamma\gamma}$. (Derecha) La razón entre la sección eficaz diferencial y* `Resbos`, `DIPHOX` *y* `PYTHIA`.

herramientas de orden fijo a NLO no pueden reproducir de manera satisfactoria[19]. Esto apoya la siguiente afirmación: el hombro de Guillet se debe a correcciones de orden superior (NNLO, N^{3}LO, etc) que no estamos teniendo en cuenta, que pueden ser grandes (como veremos en el próximo capítulo) y que provienen de la región del espacio de fase abierta a NLO; es decir de radiación hard: mayor el orden de la serie (NLO, NNLO, N^{3}LO, etc), más radiación de este tipo contribuye a la sección eficaz.

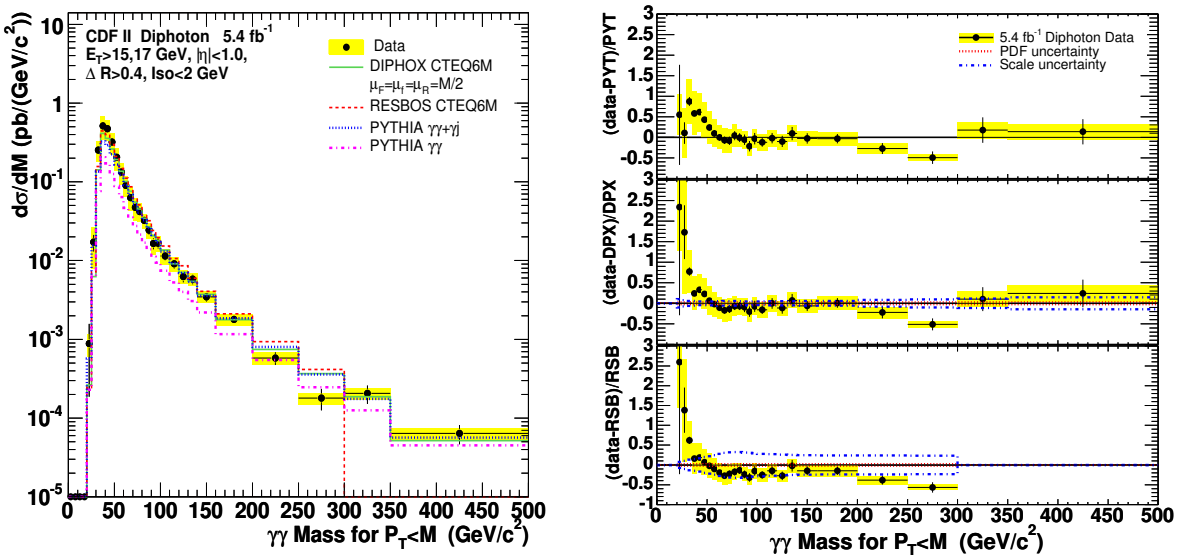

Figura 8.22: *(Izquierda) Sección eficaz en función de la masa invariante de los difotones (colaboración CDF [74]) con la condición extra $p_T^{\gamma\gamma} < M_{\gamma\gamma}$. (Derecha) La razón entre la sección eficaz diferencial y* `Resbos`, `DIPHOX` *y* `PYTHIA`.

En el caso de la distribución en ángulo azimutal el espectro queda suprimido para ángulos que satisfacen $\Delta\phi_{\gamma\gamma} < 1{,}5$ que es la zona donde las correcciones de orden superior [20], con cinemática distinta a la del Born, se manifiestan con mayor amplitud. Este hecho apoya nuevamente la conclusión que las discrepancias se deben a la falta de correcciones de orden superior.

[19] Sólo `SHERPA` puede reproducir la forma del hombro, aunque no predice el valor de la sección eficaz total.
[20] Veremos en el capítulo siguiente que este es el caso para las correcciones a NNLO.

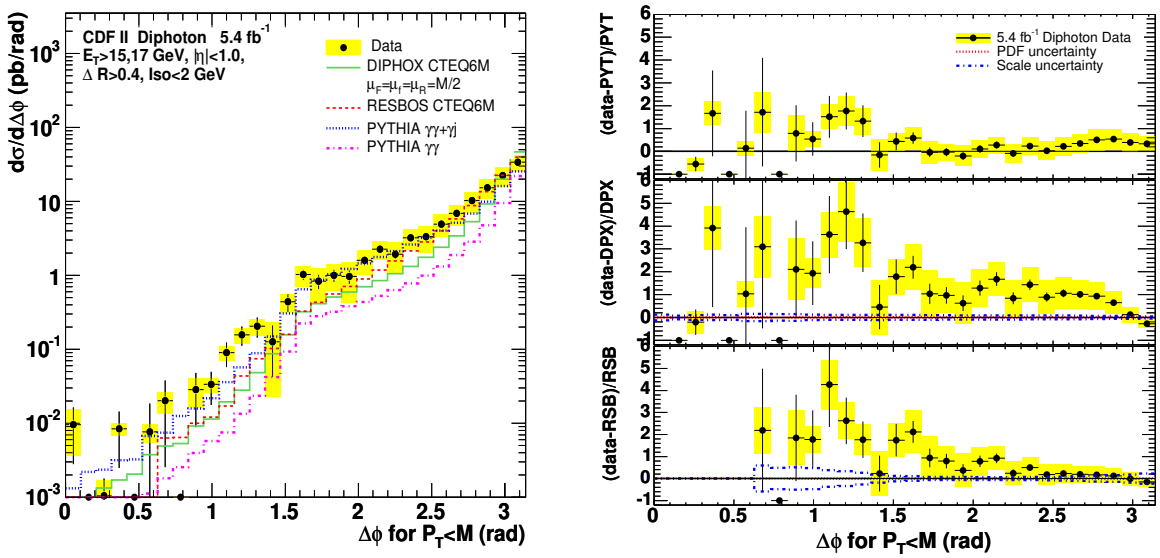

Figura 8.23: *(Izquierda) Sección eficaz en función de $\Delta\phi_{\gamma\gamma}$ (colaboración CDF [74]) con la condición extra $p_T^{\gamma\gamma} < M_{\gamma\gamma}$. (Derecha) La razón entre la sección eficaz diferencial y* `Resbos`, `DIPHOX` *y* `PYTHIA`.

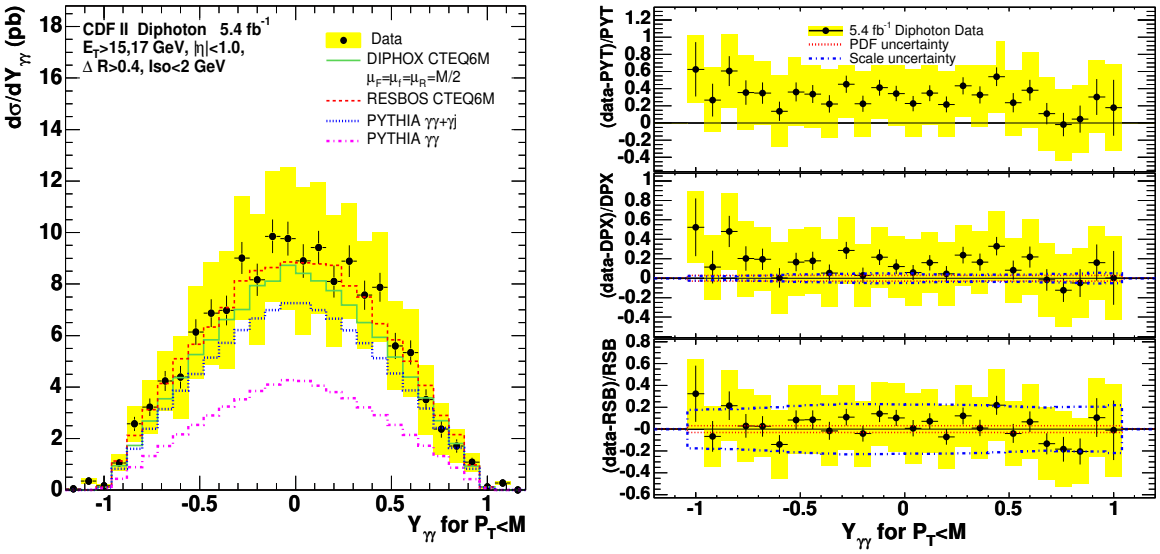

Figura 8.24: *(Izquierda) Sección eficaz en función de la rapidity de los difotones (colaboración CDF [74]) con la condición extra $p_T^{\gamma\gamma} < M_{\gamma\gamma}$.(Derecha) La razón entre la sección eficaz diferencial y* `Resbos`, `DIPHOX` *y* `PYTHIA`.

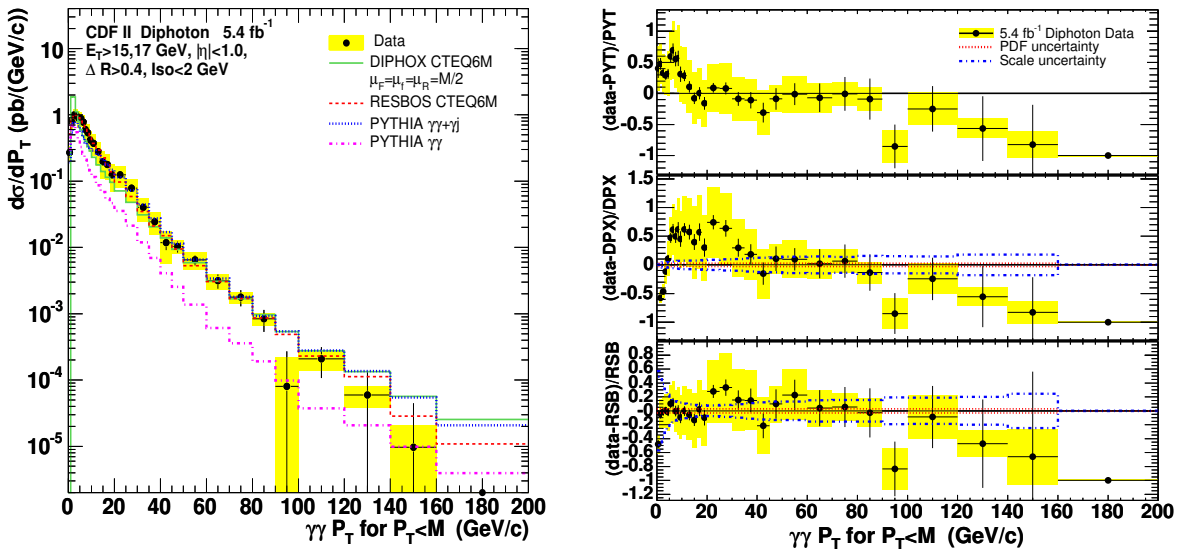

Figura 8.25: *(Izquierda) Sección eficaz en función del momento transverso de los difotones (colaboración CDF [74]) con la condición extra* $p_T^{\gamma\gamma} < M_{\gamma\gamma}$*.(Derecha) La razón entre la sección eficaz diferencial y* `Resbos`*,* `DIPHOX` *y* `PYTHIA`*.*

Capítulo 9

Producción de difotones en colisiones hadrónicas a NNLO en pQCD

En el Capítulo 8 presentamos los preliminares de la fenomenología relacionada a la producción de difotones en colisiones hadrónicas. También presentamos las comparaciones entre los datos y los resultados teóricos a NLO en pQCD, observando que tal descripción no es suficiente para una satisfactoria descripción de la fenomenología del proceso [1] de interés.

Este capítulo comienza con un análisis detallado de los criterios de aislación presentados en el capítulo anterior. En los siguientes párrafos se compararán las secciones eficaces que se obtienen al implementar los criterios de aislación estándar y de Frixione para la producción de difotones a NLO. Además se analizan sendos criterios en detalle, a la luz de sus limitaciones.

Finalmente presentamos el estudio completo de la fenomenología a NNLO (utilizando nuestro código 2γ`NNLO`), observando las mejoras que introduce este nivel de precisión en la comparación teoría vs. datos. Nuestro código constituye la primera implementación de un proceso con dos partículas en el estado final calculado a NNLO.

9.1. Criterios de aislación (II)

En esta sección haremos un análisis detallado de los criterios de aislación disponibles en cuanto al experimento y a las herramientas teóricas. Describiremos sus limitaciones y dificultades tanto en su uso ligado al experimento como en su implementación en los códigos de tipo Monte Carlo.

9.1.1. Preliminares

Esta sección completa las nociones sobre los criterios que se introdujeron en el Capítulo 8.

Estamos interesados en la producción de fotones *prompt*, aquellos fotones que no provienen del decaimiento de hadrones, tales como π^0, η, etc., que son producidos con alto momento transverso. Habíamos visto en el Capítulo 8 que tales fotones pueden ser producidos de acorde a dos mecanismos distintos, siendo uno de ellos, el mecanismo de fragmentación.

[1] Ver Capítulo 8 para una enumeración de todas las dificultades y discrepancias (con los datos) de las herramientas a NLO.

Mientras que la contribución de fragmentación es pequeña (menor al 10 %) en experimentos de blanco fijo, se vuelve dominante en cambio, en la producción de fotones *prompt* inclusivos en los colisionadores hadrónicos como el LHC o el Tevatron. Para precisar aun más, tales experimentos (ATLAS, CMS, CDF, D0) no realizan mediciones *inclusivas* de fotones. El background de fotones secundarios que provienen de los decaimientos de π^0, η, etc. satura la señal por varios órdenes de magnitud. Para rechazar este background es que se implementan los criterios de aislación.

Los experimentos (ATLAS, CMS, CDF, D0) utilizan el criterio de aislación estándar que, esquemáticamente adquiere la forma siguiente [2]

$$\sum_{had} E_T^{had} \leq E_T^{max} \qquad \text{, dentro del cono} \qquad (y-y_\gamma)^2 + (\phi-\phi_\gamma)^2 \leq R^2 \,, \tag{9.1}$$

donde E_T^{max} es un límite impuesto por el experimento y donde E_T^{had} es la energía transversa del hadrón [3] que yace dentro del cono dibujado alrededor de la dirección del fotón. La suma en la Ec. (9.1) atañe a todos los hadrones que yacen dentro del cono [4].

El criterio que enseña la Ec. (9.1) además de rechazar el background de fotones secundarios, también afecta la sección eficaz de producción de fotones prompt en si misma, en particular reduciendo los efectos de fragmentación.

Existe una alternativa al criterio de aislación estándar (como vimos en el Capítulo 8), el criterio de aislación de Frixione o del cono suave [5], propuesto en la Ref. [174], el cual es estudiado en la Ref. [180] y en la sección 6.3 de la Ref. [87], e implementado experimentalmente por la colaboración OPAL [181]. Este criterio modifica al de la Ec. (9.1) en la siguiente forma

$$\sum_{had} E_T^{had} \leq E_T^{max}\, \chi(r) \qquad \text{, dentro del cono} \qquad (y-y_\gamma)^2 + (\phi-\phi_\gamma)^2 \leq R^2 \,, \tag{9.2}$$

para una adecuada elección de la función $\chi(r)$, en el sentido de que esta función tiene que anularse suavemente cuando su argumento, r tiende a cero,

$$\chi(r) \to 0 \quad \text{, dentro del cono} \quad r \to 0 \,. \tag{9.3}$$

Y verifica las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} \chi(r) &= 0 \qquad \text{si} \qquad r = 0 \\ \chi(R) &= 1 \qquad \text{si} \qquad r = R \\ 0 < \chi(r) &< 1 \qquad \text{si} \qquad 0 < r < R \,. \end{aligned} \tag{9.4}$$

Una posible elección es [6],

$$\chi(r) = \left(\frac{1-\cos(r)}{1-\cos R}\right)^n , \tag{9.5}$$

[2] Para una definición detallada ver Capítulo 8.

[3] Para el experimento es un hadrón y para las herramientas que estamos usando, será un partón. Ya que estamos siempre integrando sobre las variables del jet (es decir, en el estado final hay dos fotones) no hay diferencia entre esta distinción partón-hadrón.

[4] Desde el punto de vista experimental esta consideración no merece aclaración alguna. Desde el punto de vista teórico decimos: a LO no es necesario ningún criterio de aislación ya que ambos fotones (con cinemática Born) están en configuración back-to-back, lo que manifiesta que no hay ningún partón extra en el estado final. A NLO se considera la radiación de un partón extra en el estado final, por lo que como máximo puede haber, dentro del cono, un partón. A NNLO, como máximo dos y así.

[5] Por su nombre en inglés: *Smooth cone* isolation criterion.

[6] En las secciones que siguen veremos que pueden elegirse otras definiciones para esta función $\chi(r)$, siendo posible así, obtener resultados que están en total acuerdo con aquellos obtenidos por esta función presentada en el paper original [174].

donde $n > 0$ y se lo elige típicamente igual a uno. Esto significa que a medida que nos acercamos cada vez más al fotón, menos actividad hadrónica es permitida dentro del cono de radio R. En $r = 0$, cuando el partón y el fotón están colineales de manera exacta, la energía depositada dentro del cono deberá ser exactamente igual a cero, y la componente de fragmentación [7] por lo tanto es nula. Este criterio tiene la ventaja de no prohibir ninguna región del espacio de fase, por lo que la cancelación de las divergencias infrarrojas se da en la forma usual. Esta es la ventaja y el punto central de este criterio: aniquila toda la componente de fragmentación en una forma libre de divergencias infrarrojas.

De la sola inspección y comparación de las Ecs. (9.1) y (9.2) podemos concluir que el criterio de aislación de Frixione es más restrictivo que el criterio de aislación estándar [8] y esto se debe a la presencia en la Ec. (9.2) de la función $\chi(r)$. Y por este motivo esperamos obtener secciones eficaces menores usando el criterio de Frixione que utilizando el criterio estándar. Esto es tanto en su implementación en las herramientas teóricas como en su hipotética implementación por el experimento, en la que, de poder implementarse, contaríamos menos eventos utilizando Frixione que utilizando el cono estándar,

$$\sharp \text{ Eventos (Frixione)} < \sharp \text{ Eventos (Estandar)} \ . \tag{9.6}$$

Es interesante notar que en el caso del criterio de ailación estándar tenemos un único cono fijo de radio R, mientras que para el criterio del cono suave tenemos un conjunto continuo de conos empezando desde $r = R$ (radio en el que ambos criterios coinciden) hacia su interior, hasta $r = 0$. Esta última característica del criterio de Frixione constituye el principal obstáculo de su implementación en el experimento. Primero por que los calorímetros usados poseen celdas de ancho finito para medir a la lluvia electromagnética, y entonces el criterio de Frixione sólo podría ser aplicado más allá de una distancia aproximada $r \sim 0{,}1$ (en el plano $\{\Delta\eta, \Delta\phi\}$). Esto permite que sobreviva una componente de fragmentación, luego de ser aplicado el criterio, y debería chequearse cuan grande es su contribución. Además la energía transversa depositada en el cono de aislación experimental es hecha en celdas discretas de tamaño finito, por lo que el criterio de continuidad inicialmente propuesto por Frixione tiene que ser reemplazado por una versión discretizada (en lo que concierne al experimento) en la que se cuenta con un conjunto finito de conos de radios R_i (todos con el mismo origen) y las correspondientes energías transversas máximas E_i permitidas dentro de cada cono i.

Implementar entonces el criterio de Frixione tal como figura en la Ec. (9.5) para el análisis de datos ocasionaría que no se pueda eliminar la componente de fragmentación en la forma de Frixione, transformándose el criterio en una modificación del criterio estándar [9]. Además, como ya se sabe, el criterio a implementar debe estar libre de divergencias infrarrojas, de manera que su implementación en un código de tipo Monte Carlo tenga sentido físico.

9.1.2. Criterio de Frixione vs. criterio estándar

En esta sección compararemos las secciones eficaces obtenidas utilizando estos dos criterios diferentes:

[7] Fenómeno que en pQCD se manifiesta de forma exclusivamente colineal.

[8] Se entiende que usamos en ambos criterios los mismos parámetros: el mismo radio exterior R y la misma energía máxima hadrónica permitida E_T^{max} dentro del cono.

[9] Llamados éstos, criterios de Frixione discretizados [182].

Criterio estándar

Para obtener secciones eficaces utilizando al criterio estándar se usó el código `DIPHOX` [10], que implementa las correcciones a NLO, tanto para la componente de fragmentación, como directa.

Hemos implementado en `DIPHOX` las dos versiones del criterio estándar: la que usa una energía fija como límite (ver Ec. (9.1)) y la que implementa una fracción del momento transverso del fotón como dicho límite,

$$\sum_{had} E_T^{had} \leq \epsilon p_T^{\gamma} \qquad \text{, dentro del cono} \qquad (y - y_\gamma)^2 + (\phi - \phi_\gamma)^2 \leq R^2 \,, \tag{9.7}$$

donde ϵ es un número real que satisface: $0 < \epsilon \leq 1$.

Llamaremos (en lo que concierne al uso del código `DIPHOX`) "directa" a la contribución dada por el término Born y las correcciones de orden mayor, de las que se ha sustraído las singularidades colineales del estado final de acuerdo con el esquema de factorización $\overline{\text{MS}}$. Las partes restantes son llamadas de fragmentación en involucran funciones de fragmentaciones de un partón en un fotón, definidas en el mismo esquema $\overline{\text{MS}}$. La contribución de fragmentación tiene dos ingredientes: i) fragmentación simple, en la que sólo un fotón proviene de la fragmentación de un partón en un fotón; ii) y fragmentación doble en la que ambos fotones son producidos con este mecanismo. En nuestros cálculos utilizamos las funciones de fragmentación de la Ref. [183].

Recalquemos nuevamente que la distinción hecha en el párrafo precedente, entre los dos mecanismos, no tiene significado físico más allá del LO. Desde un punto de vista teórico la distinción es definida por una arbitraria elección. Esta surge de la necesidad de factorizar las singularidades del estado final y absorberlas en las funciones de fragmentación. Esta factorización requiere la introducción de una escala arbitraria de fragmentación M_F, la que constituye un parámetro no físico.

Criterio de Frixione

Para la implementación de este criterio podemos utilizar cualesquiera de los códigos presentados en el Capítulo 8, como así también a nuestro código 2γ`NNLO` a NLO. Se utilizaron `DIPHOX`, `gamma2MC` y 2γ`NNLO` y todos los resultados coinciden al 0,1 % de precisión.

Aquí (y siempre que el criterio del cono suave sea utilizado) llamaremos "directa" a todas aquellas contribuciones que no involucren la fragmentación de un partón en un fotón y sobre las que no se han utilizado ningún tipo de contratérminos para cancelar las divergencias colineales del estado final, cuando la distancia entre partón y fotón es cero.

Resultados

Todo el análisis que conduce a los resultados de la Tabla (9.1) fue realizado con los cortes implementados por CMS en un análisis sobre la producción de difotones en colisiones pp con

[10] También podríamos haber utilizado `Resbos`, pero no incluye funciones de fragmentación, sino una serie de contratérminos que las aproximan. O `MCFM`, pero sólo incluye la contribución de fragmentación a LO.

una energía $\sqrt{s} = 7$ TeV [70], según los rangos de masa de interés en recientes búsquedas del bosón de Higgs. Tales cortes implican que los momentos trasversos mínimos deben ser $p_T^{hard} \geq 40$ GeV, para el fotón *hard*, mientras que para el restante imponemos $p_T^{soft} \geq 30$ GeV. La rapidity de ambos fotones debe satisfacer $|y_\gamma| \leq 2{,}5$. Finalmente restringimos la masa invariante de ambos fotones al rango $100\,\text{GeV} \leq M_{\gamma\gamma} \leq 160\,\text{GeV}$. Y simulamos los *cracks* del detector CMS, en la rapidity de los fotones imponiendo $1{,}442 \leq y_\gamma \leq 1{,}556$. Todas las secciones eficaces se obtuvieron usando las distribuciones de partones CTEQ6M exceptuando unos pocos casos en los que las distribuciones de partones se especifican en detalle. Los resultados, además, se obtuvieron prescindiendo de la contribución box, como así también cualquier corrección de orden superior a la misma.

De la Tabla (9.1) podemos ver en primer lugar que en los procesos con alta contribución de fragmentación (más del 14 %), el criterio de Frixione ofrece un límite inferior para la sección eficaz calculada con el criterio de aislación estándar, en la que están presentes las tres contribuciones [11]: directa, de fragmentación simple y de doble fragmentación [12]. Ambos criterios coinciden en el cono exterior ($r = R$, $\chi(R) = 1$), y debido a la presencia (para el criterio de Frixione) de la función $\chi(r)$ que verifica $0 \leq \chi(r) \leq 1$, el criterio del cono suave es más restrictivo que el estándar.

En los casos en los que la componente de fragmentación es menor al 14 % de la sección eficaz total, la comparación entre las secciones eficaces obtenidas utilizando el criterio estándar y el de Frixione muestran un acuerdo, entre ambos casos [13], al 1 % de precisión[14]. Este acuerdo a NLO dentro del 1 % de precisión es lo que nos permite argumentar fenomenológicamente que la predicción a NNLO (utilizando el criterio de Frixione) ofrezca un acuerdo satisfactorio entre teoría y datos, tal como se enseña en las secciones siguientes.

Además para aquellos casos en los que la componente de fragmentación es menor al 14 % [15], notamos la siguiente propiedad: los valores de las secciones eficaces obtenidas utilizando los cortes fijos para la máxima energía permitida dentro del cono ($E_{T\ max}, R$) son comparables con aquellos obtenidos usando la fracción de momento transverso (ver Fig. (9.1)).

Según relajamos la restricción en la energía hadrónica permitida dentro del cono, la contribución de fragmentación se hace más grande, y entonces, las diferencias entre las secciones eficaces obtenidas con ambos criterios comienzan a hacerse evidentes y distinguibles.

La sección eficaz inclusiva, sobre la que no se aplica criterio de aislación alguno, se muestra en el caso g de la Tabla (9.1). Esta satisface la siguiente desigualdad [16],

$$\sigma_{Frix}\{\epsilon, E_{T\ max}\} \leq \sigma_{Estnd}\{\epsilon, E_{T\ max}\} \leq \sigma_{incl}. \tag{9.8}$$

Más aun, nuestra sección eficaz a NNLO (usando 2γNNLO) es aun menor que la sección eficaz

[11] Ver por ejemplo los casos (*d,m*) y (*f,i*).

[12] Para más detalles sobre estas contribuciones y sobre el código DIPHOX ver la sección correspondiente 8.4.1.

[13] Ver por ejemplo los casos (*a,j*), (*b,k*), (*c,l*) o (*e,h*).

[14] Esta incerteza es estimada al variar los parámetros no físicos en los códigos de tipo Monte Carlo: número de iteraciones, número de eventos por iteración, $p_{T\ min}^{\gamma\gamma}$ en el caso de 2γNNLO o PTM y R_{th} si es que usamos DIPHOX. La incerteza estadística que estima el integrador es siempre menor y ronda el 0,5 %.

[15] a,b,c,e,h,j,k,l.

[16] Como estamos escribiendo en una misma desigualdad a las secciones eficaces obtenidas utilizando el criterio estándar y de Frixione, en ambos casos estamos considerando los mismos parámetros.

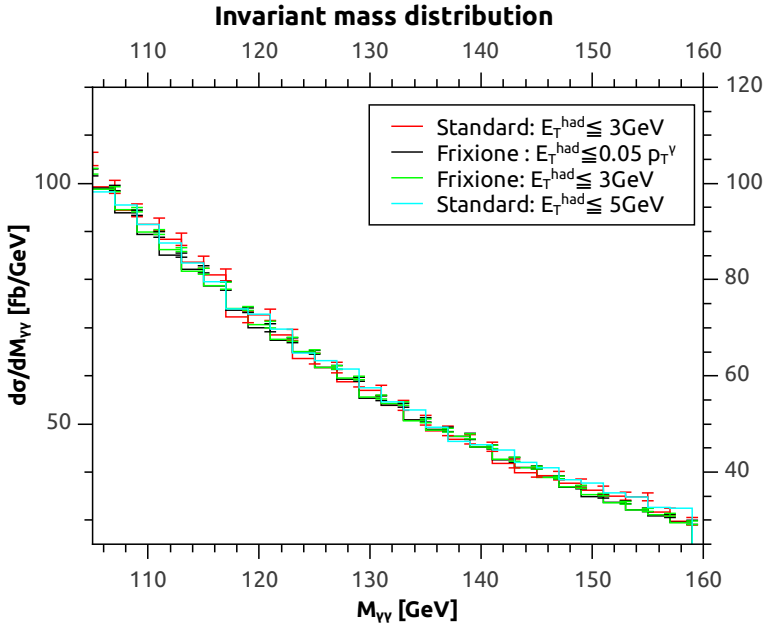

Figura 9.1: *Distribuciones en la masa invariante de los difotones $M_{\gamma\gamma}$ para el LHC a NLO. Los cortes aplicados por CMS son descritos en el texto. En rojo el caso c de la Tabla (9.1). En negro el caso h. En verde el caso k. En azul el caso d.*

	Código	$\sum E_T^{had} \leq$	σ_{total}^{NLO}(fb)	σ_{dir}^{NLO}(fb)	σ_{onef}^{NLO}(fb)	σ_{twof}^{NLO}(fb)	Criterio	Notas
a	DIPHOX	2GeV	3731	3501	227	3	estándar	CTEQ6M
b	DIPHOX	3GeV	3755	3389	360	6	estándar	CTEQ6M
c	DIPHOX	4GeV	3777	3288	478	11	estándar	CTEQ6M
d	DIPHOX	5GeV	3825	3214	596	17	estándar	CTEQ6M
e	DIPHOX	0,05 p_T^{γ}	3734	3424	307	2	estándar	CTEQ6M
f	DIPHOX	0,5 p_T^{γ}	4490	2150	2116	224	estándar	CTEQ6M
g	DIPHOX	*incl*	6584	1186	3930	1468	sin criterio	CTEQ6M
h	2γNNLO	0,05 p_T^{γ} $\chi(r)$	3747	3747	0	0	Frixione	CTEQ6M
i	2γNNLO	0,5 p_T^{γ} $\chi(r)$	4043	4043	0	0	Frixione	CTEQ6M
j	2γNNLO	2GeV $\chi(r)$	3724	3724	0	0	Frixione	CTEQ6M
k	2γNNLO	3GeV $\chi(r)$	3747	3747	0	0	Frixione	CTEQ6M
l	2γNNLO	4GeV $\chi(r)$	3769	3769	0	0	Frixione	CTEQ6M
m	2γNNLO	5GeV $\chi(r)$	3784	3784	0	0	Frixione	CTEQ6M
n	2γNNLO	0,05 p_T^{γ} $\chi(r)$	5720	5720	0	0	Frixione	$R = 0{,}04$
o	2γNNLO	0,05 p_T^{γ} $\chi(r)$	3879	3879	0	0	Frixione	MSTW2008

Tabla 9.1: *Secciones eficaces para el proceso $pp \to \gamma\gamma + X$ en el LHC. Los cortes aplicados se especifican en el texto. Todos estos valores tienen una incerteza estadística del 1 % o menor.*

a NLO inclusiva [17]:

$$\sigma_{Frix}^{NNLO} = (5452 \pm 50)\text{fb}\,. \tag{9.9}$$

9.1.3. La función $\chi(R)$

En su forma original, la función $\chi(R)$ (ver Ec. (9.5)) permite la libre variación del parámetro n que solo debe verificar en principio $n > 0$ [18]. Sin embargo este parámetro n no está libre; su uso está supeditado al valor de la sección eficaz obtenida con el criterio de aislación estándar[19], el que impone el límite físico para la sección eficaz cuando se utiliza el criterio de Frixione.

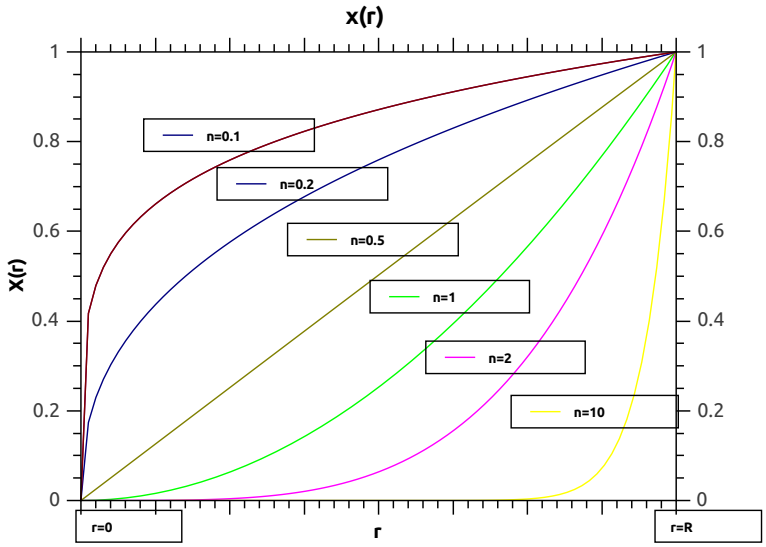

Figura 9.2: $\chi(r) = ((1-\cos(r))/(1-\cos(R)))^n$ *en función de* r *para diferentes valores de* n.

En la Fig. (9.2) se muestran diferentes formas para $\chi(r)$ en función de n. Cuando n va a cero, el impacto de la función $\chi(r)$ es reducido (a $n = 0$ recobramos la forma de escalón que posee el criterio estándar). Esto significa que cuando reducimos el valor de n estamos relajando el efecto de la aislación y obtenemos por lo tanto secciones eficaces mayores que para el caso $n = 1$. Este comportamiento de $\chi(r)$ en función de n puede ser usado en principio, para compensar las diferencias entre la secciones eficaces obtenidas con el criterio estándar y el de Frixione cuando la componente de fragmentación es mayor al 14 % de la sección eficaz total. Sin embargo, con este proceder podemos obtener secciones eficaces mayores que la correspondiente usando al criterio estándar. Estos resultados son entonces carentes de sentido físico y están directamente relacionados a los problemas que aparecen cuando usamos aislaciones con conos muy pequeños ($R \sim 0{,}1$) donde el peso de correcciones logarítmicas en la forma de $\ln(R)$ revela la necesidad de incluir contribuciones no perturbativas [171]. Así, el

[17] Usamos en este caso las distribuciones de partones de Martin-Stirling-Thorne-Watt (MSTW)2008 [154], con densidades y α_s evaluadas a cada orden correspondiente.

[18] En el paper original, y como se enseña en la Sección 8.3.2, $n \geq 1/2$, ya que de otra manera, dentro de la integral de la Ec. 8.14 no se cancelaría la divergencia del propagador del quark (aunque sea una divergencia integrable). Sin embargo recientes implementaciones y análisis de la versión discretizada de Frixione van más allá de este límite ($n \sim 0{,}1$) y por esta razón proponemos $n > 0$, para abarcar también estos estudios.

[19] Siempre que se comparen ambos criterios será con los mismos parámetros.

valor de n al cual obtenemos una sección eficaz que no tiene significado físico es una función del parámetro $E_{T\ max}$, a fijo R. Pero considerando 2GeV$\leq E_{T\ max} \leq$ 5GeV el valor al de n al que obtenemos un resultado no físico es aproximadamente $n \sim 0{,}5$, el valor al cual la forma de $\chi(r)$ cambia su comportamiento de convexo a cóncavo, y es justamente el valor más allá del cual no estaríamos cancelando las divergencias del propagador del quark en el integrando de la Ec. (8.14).

En la Fig. (9.3) mostramos los valores de las secciones eficaces obtenidas como función de n para dos valores de $E_{T\ max}$: 2GeV y 5GeV. Según n tiende a cero podemos observar la región a la que comenzamos a obtener resultados no-físicos. A grandes valores de n, el efecto de la aislación es más fuerte y obtenemos por lo tanto secciones eficaces menores cuyos valores comienzan a independizarse de $E_{T\ max}$. En este punto nos podemos preguntar

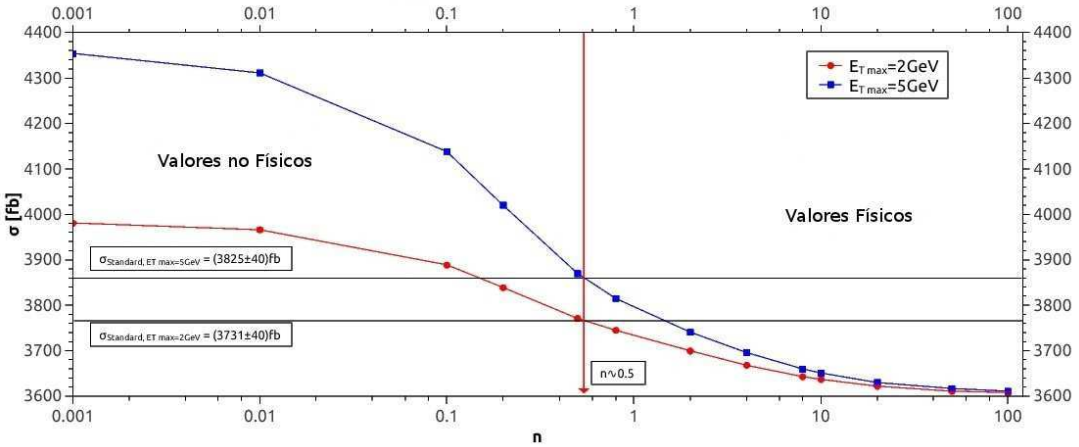

Figura 9.3: *Secciones eficaces en función de n obtenidas usando el criterio de aislación de Frixione. Los cortes aplicados por CMS se describen en el texto.*

acerca de la universalidad de la función $\chi(r)$ de la Ec. (9.5). En la tarea de responder a la pregunta anterior proponemos un set nuevo de funciones $\chi(r)$, que verifican las propiedades de las Ecs. (9.4) y (9.3). Los resultados son condensados en la Tabla (9.2), y son comparados con los respectivos resultados obtenidos usando al criterio estándar y aquel obtenido con la forma original de $\chi(r)$ (ver Ec. (9.5)). Todos los resultados están en acuerdo excepto por el caso *ii*, para el que el peso de las grandes correcciones logarítmicas se vuelve dominante obteniendo así un resultado no-físico. Cabe destacar, que en el caso *iii* el criterio de Frixione dista de ser "suave", ya que la pendiente de la función $\chi(r)$ cuando $r \to 0$ es igual a $1/R$. No obstante la convergencia de los cálculos teóricos, como así también el valor de la sección eficaz total enseñan que es posible utilizar este tipo de función $\chi(r) = r/R$, aunque se trate de un caso límite. Este caso es directamente comparable con el de la función $\chi(r)$ propuesta en el trabajo original de Frixione con la elección del parámetro $n = 1/2$.

	Isolation	$\sum E_T^{had} \leq$	$\chi(r)$	σ_{total}^{NLO}(fb)
i	Frixione	2 GeV	$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi r}{R})\right)$	3760
ii	Frixione	2 GeV	$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi r}{R})\right)^{0,5}$	3921
iii	Frixione	2 GeV	r/R	3769
iv	Frixione	2 GeV	$(r/R)^2$	3731
v	Frixione	2 GeV	$\left(\frac{1-\cos(r)}{1-\cos(R)}\right)$	3724
v	Standard	2 GeV	1	3731

Tabla 9.2: *Secciones eficaces obtenidas para el proceso $pp \to \gamma\gamma + X$ en el LHC a NLO. Los cortes aplicados son descritos en el texto. Mostramos una comparación entre las secciones eficaces obtenidas usando diferentes tipos de funciones $\chi(r)$.*

9.1.4. Incertezas y estabilidad numérica

Las incertezas estadísticas en la sección eficaz son menores al 1 %, pero si cambiamos los parámetros no-físicos en los códigos [20], podemos ver que las incertezas en este caso son del orden del 1 %, y en los peores casos, como sucede con `DIPHOX`, alguna elección de estos parámetros puede causar variaciones en la sección eficaz del orden del 3 %.

Si variamos las escalas a NLO de manera asimétrica [21] como una estimación de las incertezas, obtenemos variaciones del orden del 8 %.

También si se implementan diferentes sets de PDFs [22] tenemos que considerar variaciones del orden del 4 % en la sección eficaz total, como podemos ver de los casos *o* y *h*.

Finalmente queremos remarcar el siguiente hecho. Hay un efecto conocido cuando estamos tratando con secciones eficaces aisladas. Si un corte yace dentro del espacio de fase, dentro de la región física, cuando vamos de LO a NLO aparecen términos logarítmicos en la sección eficaz, que pueden arruinar la confiabilidad de los cálculos [157, 171]. Es decir los valores que obtenemos pueden transformarse en no-físicos. Es interesante notar que las contribuciones de orden más alto a la sección eficaz (NLO) tanto para la componente directa, como para la de fragmentación, incrementan su valor según R decrece. Si implementamos un valor de R muy chico ($R \leq 0{,}1$) podemos obtener entonces un crecimiento desmesurado en la sección eficaz que puede llegar a dar un valor mayor al inclusivo. Es decir un valor de una sección eficaz aislada que es mayor a una que no está aislada. Este es el hecho más evidente de la presencia de tales logaritmos, y es obviamente un resultado no-físico que impone límites en el uso de tales herramientas teóricas. Precisando, podemos entender a este efecto como la aparición de un término logarítmico proporcional a $\ln R$ restando a la sección eficaz no aislada,

$$\sigma_{Aislada} \sim \sigma_{inclusiva} - \sigma_0 \, (\frac{5}{2} + \ln(R)), \tag{9.10}$$

donde σ_0 es alguna constante positiva (ver Ecs. (5.2) y (5.11) de la Ref. [171] [23]). Ya que $\ln(R)$ es negativo cuando $R < 1$, las contribuciones de orden más alto a la sección eficaz aislada pueden resultar mayores al caso inclusivo a valores pequeños de R. Este efecto se

[20] Por ejemplo ${p_T^{\gamma\gamma}}_{min}$ en el caso de `2γNNLO` o PTM y R_{th} si es que usamos `DIPHOX`. También el número de llamadas o las iteraciones de la rutina integradora del código Monte Carlo.

[21] Una sección eficaz obtenida eligiendo: $\mu_R = 2\, M_{\gamma\gamma}$ y $\mu_f = 0{,}5\, M_{\gamma\gamma}$, y la otra $\mu_R = 0{,}5\, M_{\gamma\gamma}$ y $\mu_f = 2\, M_{\gamma\gamma}$.

[22] Con la correspondiente implementación de α_s.

[23] En este artículo se describe la producción de fotones prompt a NLO, pero el análisis que se ha hecho, aplica incluso, a la producción de difotones.

puede remediar realizando la resumación de estos términos logarítmicos a todo orden en α_s para restablecer la confiabilidad del cálculo.

Para investigar como se comporta nuestro código (2γNNLO) en un caso extremo ($R = 0{,}04$, sin correlato experimental) observemos que el criterio de Frixione es menos sensitivo a estos términos logarítmicos[24],

$$\sigma^{NLO}_{Frix,\ R=0{,}04,\ \epsilon=0{,}05} = (5720 \pm 14)\text{fb}, \tag{9.11}$$

valor que sigue siendo menor al caso inclusivo.

Esta sensibilidad menor de parte de las secciones eficaces calculadas con el criterio de Frixione a estos términos logarítmicos junto con el hecho discutido más arriba, de que hay cierto rango de parámetros en el que ambos criterios, estándar y de Frixione, coinciden, sugiere que una futura implementación de la versión discretizada del criterio de Frixione sea posible con resultados aceptables y físicos. Esto se lograría implementando al criterio de Frixione discretizado desde el radio exterior hasta el radio mínimo del detector ($R = 0{,}1$) y luego el criterio de Frixione para cancelar las divergencias colineales hasta $r = 0$.

9.1.5. Conclusiones

Este es un resumen y una enumeración de las conclusiones que han sido expuestas de manera clara en las secciones anteriores.

1. Para energías del LHC, y para rangos de masa destinados a las búsqueda del bosón de Higgs, los criterios de aislación estándar y de Frixione permiten obtener secciones eficaces que coinciden (dentro de las incertezas) si no superamos energías máximas depositadas dentro del cono cercanas a valores del tipo $E_{T\ max} = 5GeV$.

2. Una sección eficaz obtenida con el criterio de aislación de Frixione **siempre será una cota inferior** para aquella sección eficaz obtenida utilizando el criterio de aislación estándar (con los mismos parámetros de aislación). La cota inferior se aproxima al valor de la sección eficaz estándar cuanto más cercano esté el valor de la energía máxima permitida dentro del cono $E_{T\ max}$, al rango de energías fijado en la conclusión (1) del punto anterior ($E_{T\ max} \leq 5GeV$).

3. En cuanto a las herramientas de cálculo actuales: El valor de radio de separación $R = 0{,}1$ impone un valor mínimo, que por debajo del mismo, las inestabilidades numéricas debidas a la presencia de grandes logaritmos comienzan a arruinar la confiabilidad de las predicciones teóricas.

Es decir, la comparación entre una sección eficaz obtenida en forma teórica utilizando el criterio de Frixione y una sección eficaz producto de la toma de datos con el criterio estándar **tiene sentido físico**. No es necesario, que ambas secciones eficaces utilicen el mismo criterio de aislación (estándar o de Frixione); ambas seciones eficaces utilizando sendos criterios de aislación están en acuerdo a NLO (dentro de las incertezas) y en la sección siguiente utilizaremos el criterio de Frixione en todos los cálculos a NNLO.

[24] En la Ref. [171] se muestra que utilizando al criterio estándar en JetPHOX (producción de fotones más jet), el valor límite al que es posible llegar sin caer en un resultado no físico es $R = 0{,}1$. JetPHOX utiliza el mismo formalismo que DIPHOX.

9.2. El código 2γNNLO

Consideremos la reacción inclusiva de colisión hard

$$h_1 + h_2 \to \gamma\gamma + X \quad , \tag{9.12}$$

donde la colisión de los dos hadrones h_1 y h_2 produce en el estado final el sistema de difotones $F \equiv \gamma\gamma$ con masa invariante $M_{\gamma\gamma}$. La evaluación de las correcciones a NNLO al proceso de la Ec. (9.12) requiere el conocimiento de las amplitudes partónicas con $X = 2$ partones (a orden árbol [184]), $X = 1$ partón (hasta nivel un-loop [185]) y sin partones adicionales (hasta dos-loops [137]) en el estado final. Como habíamos adelantado en los capítulos anteriores, para introducir todas estas contribuciones en un código de tipo Monte Carlo es necesario algún esquema que permita lidiar con las divergencias infrarrojas (IR) que aparecen en las etapas intermedias del mismo.

Nuestro código está basado en el formalismo de sustracción en momento transverso [42] q_T que explicamos en el Capítulo 4, y que permite cancelar tales divergencias hasta el NNLO. Cabe recordar, que tal formalismo sólo aplica a estados finales F de gran masa, que no posean color.

El método de sustracción requiere los elementos de matriz que permitan describir la producción del estado final F asociado a un jet a NLO. En nuestro caso (producción de difotones asociados a un jet a NLO $d\sigma_{NLO}^{\gamma\gamma+\text{jets}}$) contamos con el código `NLOjet++` de la Ref. [53]. Este código describe un estado final que contiene un jet (un partón, una partícula con color) y entonces no es posible implementar el formalismo de sustracción en q_T. En cambio, utiliza el formalismo de sustracción dipolar de Catani-Seymour. En este sentido hablábamos en el Capítulo 4, de que el formalismo de sustracción en q_T a NNLO, se apoya también en otro formalismo que permita tratar estados finales con color a NLO.

El cálculo a NLO de $d\sigma^F$ requiere del conocimiento de $\mathcal{H}^{F(1)}$, y el cálculo a NNLO también requiere $\mathcal{H}^{F(2)}$. Antes de esta tesis sólo contábamos con un método general (independiente del proceso final F) para obtener al coeficiente $\mathcal{H}^{F(1)}$ [66]. En el Capítulo 6, como trabajo original se desarrolló un método para obtener al coeficiente $\mathcal{H}^{F(2)}$ para un estado final general sin color F, contando sólo con las correcciones a dos-loops para el proceso Born. En este sentido es que el programa de sustracción en momento transverso q_T, adquiere luego de esta tesis, su forma final y general. Entonces explotando las ventajas de este nuevo método es que determinamos la forma explícita de $\mathcal{H}^{F(2)}$ para el caso de producción de difotones.

Hemos realizado nuestro cálculo completamente diferencial a NNLO de acuerdo a la Ec. (4.70). El cómputo a NNLO está escrito en un programa de tipo Monte Carlo, en el que se pueden implementar cortes arbitrarios libres de divergencias infrarrojas sobre el estado final de los difotones y sobre la actividad de los jets asociados.

Como la versión actual del formalismo de sustracción en q_T no admite partículas con color en el estado final F, no podemos tratar con estados finales que presenten fragmentación, ya que F entonces, contendría uno o dos partones con color que fragmentan. Además de no poseer un método capaz de describir estados finales con color, no están disponibles los elementos de matriz necesarios para describir el proceso de fragmentación asociado a difotones a NNLO. Es decir no poseemos (esto abarca a toda la comunidad) las herramientas necesarias para hacer este tipo de cálculo.

Es así que debemos concentrarnos en la producción de difotones directos, sin contribución de fragmentación, y en este sentido es que "debemos" usar el criterio de aislación de Frixione. Aquí es necesario *echar luz* sobre el verbo utilizado en la oración anterior, que

denota una imposibilidad ante la elección de otro criterio de aislación. En rigor podríamos utilizar contratérminos definidos en algún esquema de sustracción como el $\overline{\text{MS}}$ para cancelar las divergencias del estado final y así poder implementar el criterio de aislación estándar. De los valores de las contribuciones directas que ofrece el código `DIPHOX` en la Tabla 9.1, vemos que tal elección no es una buena opción. Es decir, como aproximación es mucho peor, que utilizar el criterio de Frixione sólo para la parte directa.

Luego de lo estudiado en la sección anterior, donde se concluye que utilizar al criterio de Frixione para calcular secciones eficaces, u ofrece una sección eficaz que está en acuerdo con aquella obtenida utilizando al criterio estándar (dentro de las incertezas) o representa un límite inferior, preferimos esta opción en lugar de la de los contratérminos.

Consideramos en conjunto las PDFs y la correspondiente implementación de α_s pertenecientes ambas a alguno de los conjuntos: MSTW2008, MRST2002, CTEQ6M, etc. Ambas evaluadas a cada orden correspondiente (usamos α_s a $(n+1)$1-loop a N^{n}LO, con $n = 0, 1, 2$), y consideramos cinco sabores de quarks no masivos ($N_f = 5$) y gluones en el estado inicial. Las escalas por defecto de renormalización (μ_R) y factorización (μ_F) se eligen al valor de la masa invariante del sistema de difotones $\mu_R = \mu_F = M_{\gamma\gamma}$. La constante de acople de QED α queda fija a $\alpha = 1/137$.

9.2.1. Especificaciones y versiones

- La primera versión de 2γ`NNLO` utilizaba dos códigos por separado. Uno que calculaba todo excepto $d\sigma_{NLO}^{\gamma\gamma+\text{jets}}$, y el `NLOjet++` que calculaba esa parte. El tiempo de cálculo empleado en obtener histogramas para las secciones eficaces de interés por el `NLOjet++` es de aproximadamente 20 días trabajando sobre 7 *cores* INTEL *i*7. Y más aun si se desean secciones eficaces a NNLO cuya incerteza estadística esté por debajo del nivel porcentual. El código `NLOjet++` utiliza un integrador basado en *Monte Carlo Weight Optimization* [186] (MCWOP), mientras que la parte restante utilizaba VEGAS [187].

- La segunda versión incorporó todos los elementos de matriz del código `NLOjet++` en la parte restante que usaba al integrador VEGAS. En esta versión ya todas las contribuciones están incorporadas en un solo código.

- La tercera versión (que constituye la versión *beta* actual), incorpora algunas de las librerías del `NLOjet++` para la descripción del evento: cuadri-momentos y productos vectoriales. El tiempo total de cálculo ahora, con todas las mejoras hasta el momento implementadas ronda los cinco días (pero para la sección eficaz total y trabajando en un solo *core*) habiéndose reducido en un factor cuatro el tiempo de cálculo [25].

  Esta versión está escrita en dos lenguajes diferentes: `FORTRAN` y `C++`. Y al implementar los elementos de matriz necesarios para describir $d\sigma_{NLO}^{\gamma\gamma+\text{jets}}$, podemos reproducir la fenomenología también del proceso $pp \to \gamma\gamma + jet$ a NLO, que coincide y está en acuerdo con el código `NLOjet++`.

  Las incertezas también se redujeron al cambiar el integrador MCWOP por VEGAS. Mientras que utilizando `NLOjet++` la incerteza mínima a la que se podía alcanzar era del orden del 2 % (trabajando a 7 cores 20 días), con la nueva versión del 2γ`NNLO` alcanzamos en tan solo 2 días trabajando en un sólo core, incertezas menores al 0,2 %.

[25] Si consideramos que antes trabajábamos en siete *cores*, la reducción de tiempo ronda un factor 28.

El método de sustracción en momento transverso cancela las divergencias que se manifiestan en las contribuciones reales, integrando en q_T tales contribuciones junto con contratérminos que sustraen las divergencias asociadas al límite $q_T \to 0$. Numéricamente no es posible incluir la región $q_T = 0$, y en lugar de ello se usa un corte (numérico) en el espacio de momento transverso (ver Apéndice D para una discusión detallada). Este corte debe estar alejado de la escala de energía inicial hadrónica $\sqrt{s}$ ($500/\sqrt{s} \sim q_T^{\gamma\gamma}{}_{min}$ o valores menores). Es una característica de los cálculos a bajo momento transverso: cuanto menor es el momento transverso mayor es el tiempo de cálculo. Los 20 días (cinco días en la versión actual) citados son requeridos al uso de momentos transversos mínimos del orden de 0,08 GeV.

9.3. Resultados

9.3.1. Primeros resultados

En este caso aplicamos los cortes que eran tomados por las colaboraciones ATLAS y CMS hace un par de años [188, 189] en sus búsquedas del bosón de Higgs. Requerimos que el fotón harder tenga un momento transverso $p_T^{\text{harder}} \geq 40$ GeV, mientras que para el fotón softer imponemos $p_T^{\text{softer}} \geq 25$ GeV. La rapidity de ambos fotones se restringe al intervalo $|y_\gamma| \leq 2{,}5$, y la masa invariante del sistema de difotones está confinada en el rango $20\,\text{GeV} \leq M_{\gamma\gamma} \leq 250\,\text{GeV}$. Utilizamos las distribuciones de partones de Martin-Stirling-Thorne-Watt (MSTW) 2008 [154], y las demás especificaciones que se detallan en la sección 9.2.

σ (fb)	LO	NLO	NNLO
$\mu_F = \mu_R = M_{\gamma\gamma}/2$	5045 ± 1	26581 ± 23	45588 ± 97
$\mu_F = \mu_R = M_{\gamma\gamma}$	5712 ± 2	26402 ± 25	43315 ± 54
$\mu_F = \mu_R = 2M_{\gamma\gamma}$	6319 ± 2	26045 ± 24	41794 ± 77

Tabla 9.3: *Secciones eficaces para* $pp \to \gamma\gamma + X$ *en el LHC* ($\sqrt{s} = 14$ TeV). Los cortes aplicados se definen en el texto.

Comenzamos la presentación de nuestros resultados considerando la producción de difotones en el LHC ($\sqrt{s} = 14$ TeV). En la Tabla 9.3, mostramos los resultados de las secciones eficaces aceptadas a LO, NLO y NNLO. Hemos fijado $\mu_F = \mu_R = \mu$ y hemos considerado los tres valores de $\mu/M_{\gamma\gamma}$ ($\mu/M_{\gamma\gamma} = 1/2, 1, 2$). Los errores numéricos estiman la incerteza en la integración Monte Carlo. Notemos que los valores de la sección eficaz se incrementan notablemente con el orden de la expansión perturbativa. Este incremento se debe en primer lugar al uso de cortes *muy* asimétricos (desbalanceados) para los momentos transversos de los dos fotones. A LO, las restricciones cinemáticas imponen que ambos fotones sean emitidos con momento transverso igual (back-to-back) y así ambos deberán tener $p_T^\gamma \geq 40$ GeV. Por este motivo la sección eficaz a LO recibe contribuciones a partir de $M_{\gamma\gamma} \geq 80$ GeV, en la distribución de masa invariante de la Fig. (9.4). Pero a órdenes perturbativos mayores, la radiación de estado final de los partones adicionales abre una nueva porción del espacio de fase, aquella porción comprendida entre 40 GeV $\geq p_T^{\text{softer}} \geq 25$ GeV. Ya que los fotones pueden ser producidos copiosamente con momento transverso pequeño (ver también la Fig. (9.6) y la discusión relacionada a esta figura), la sección eficaz recibe contribuciones significativas de la

nueva porción de espacio de fase abierta. Este efecto además se ve reforzado por la apertura a cada orden perturbativo (NLO y NNLO) de un nuevo canal con gran luminosidad. Por ejemplo a NLO abre el canal qg que contribuye con el 80 % del incremento de la sección eficaz (ver Fig. (9.5)). Por lo tanto es de esperar que el análisis *naive* de la variación de las escalas (como el presentado en la Tabla 9.3) subestime el tamaño de las correcciones de orden más alto.

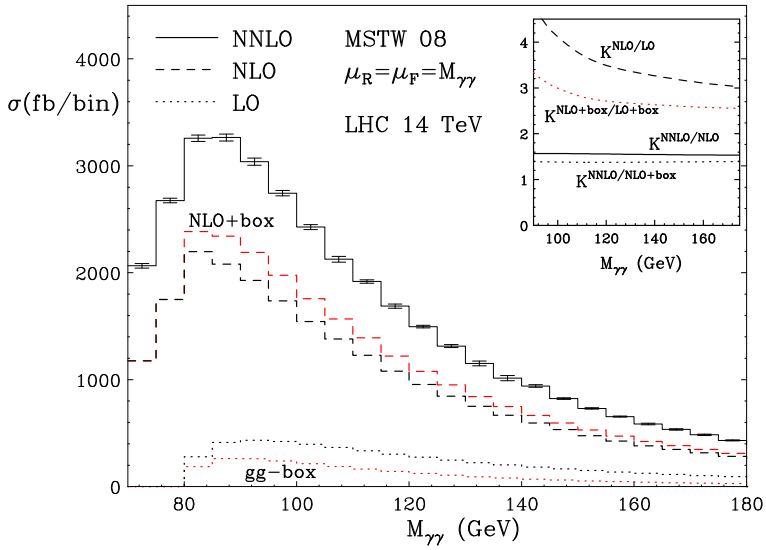

Figura 9.4: *Distribución de masa invariante de los difotones en el LHC* ($\sqrt{s}$ = 14 TeV): resultados LO (puntos), NLO (línea a trazos) y NNLO (línea sólida). También presentamos el resultado de la contribuciones box y NLO+box. El gráfico dentro del marco muestra los correspondientes factores K.

En la Fig. 9.4 comparamos las distribuciones en masa invariante a LO, NLO, y NNLO a la escala tomada por defecto. También graficamos la *contribución box* de gluones (calculada con distribuciones de partones a NNLO) y su suma con el resultado completo a NLO. El gráfico insertado dentro de la Fig. 9.4 muestra los factores K definidos como la razón entre las secciones eficaces a dos órdenes perturbativos subsecuentes. Notemos que $K^{NNLO/NLO}$ es sensiblemente mas pequeño que $K^{NLO/LO}$, y este hecho indica una mejora en la convergencia de la serie perturbativa. En particular el impacto de las correcciones a NNLO comienza a parecer razonablemente moderado si observamos el factor K definido como la razón entre el NNLO y la distribución NLO+box: K $\simeq$ 1,35.

Encontramos que alrededor del 30 % de las correcciones a NNLO se deben al canal gg (la *contribución box* es responsable de más de la mitad de ésta), mientras que casi el 60 % sigue siendo de las correcciones de orden siguiente al canal qg. Los cálculos a NNLO incluyen las correcciones perturbativas de todo el espacio de fase (todas las regiones; en particular, las correcciones de orden siguiente al canal dominante qg) y las contribuciones de todos los posibles canales partónicos (en particular un tratamiento totalmente consistente de la *contribución box* al canal gg [26]). Obedeciendo a estas razones es que entendemos a nuestro cálculo a NNLO como una predicción confiable para la producción de difotones directos.

[26] El cálculo de las correcciones gluónicas de orden siguiente a la *contribución box* calculadas en la Ref. [54] indican un incremento, del resultado a NNLO, en menos del 10 % si $M_{\gamma\gamma} \gtrsim 100$ GeV.

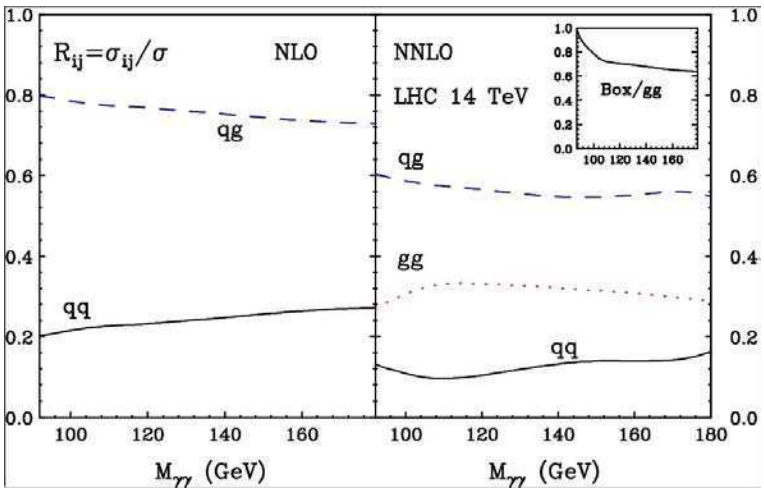

Figura 9.5: *Contribución de los canales a cada orden de precisión (NLO y NNLO) en el cálculo de la sección eficaz de producción de difotones para el caso de la Fig. (9.4).*

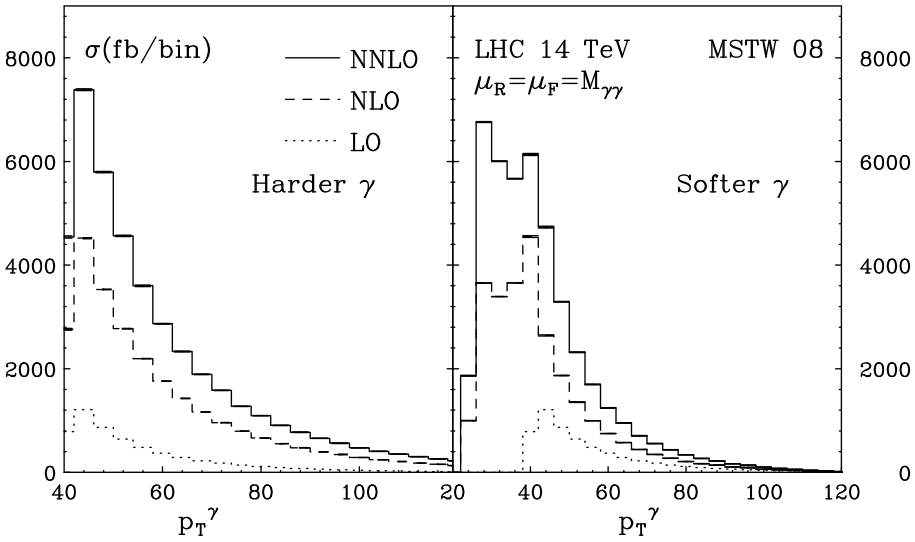

Figura 9.6: *Distribución en momento transverso de los fotones harder (izquierda) y softer (derecha) en el LHC* ($\sqrt{s} = 14$ TeV).

En la Fig. 9.6 mostramos los resultados sobre observables más exclusivos: la distribuciones en momento transverso p_T de cada fotón (harder a la izquierda y softer derecha). Los errores estadísticos de la integración Monte Carlo están a nivel porcentual y son difíciles de distinguir en la Fig. 9.6. Como anticipamos previamente, el gráfico de la parte derecha muestra que la sección eficaz recibe contribuciones significativas desde la región del espacio de fase comprendida entre 25 GeV $\leq p_T^{\rm softer} \leq$ 40 GeV, que a LO está cinemáticamente prohibida, debido esto al uso de cortes asimétricos en los momentos transversos de los fotones.

En la región de momento transverso p_T pequeño, el mecanismo de producción del fotón softer está reforzado dinámicamente (la probabilidad de producción es proporcional a $\alpha_s \times (p_T^{\rm harder}/p_T^{\rm softer}) \ln(p_T^{\rm harder}/p_T^{\rm softer})$, si $p_T^{\rm softer}/p_T^{\rm harder} \sim (p_T^{\rm softer}/M_{\gamma\gamma})^2 \ll 1$), y esto es responsable del crecimiento significativo de las demás distribuciones también, como por ejemplo la de la Fig. 9.4, como así también de los crecimientos observados cuando aumentamos el orden perturbativo en la Tabla 9.3 en la sección eficaz total, y en la distribución del fotón harder.

Comparando las distribuciones del fotón softer o harder en la región de alto momento transverso p_T ($p_T \gtrsim 50$ GeV), también observamos que la distribución del fotón softer recibe correcciones de orden más alto que son sensiblemente más pequeñas. Este decrecimiento es esperable: si ambos fotones tienen alto momento transverso p_T, el efecto de los cortes muy asimétricos se ve reducido.

También debemos comentar la zona de la distribución en momento transverso del fotón softer cercana (alrededor) del umbral a LO ($p_T^{\rm softer} \sim 40$ GeV). Aquí el resultado a LO tiene un comportamiento del tipo escalón, y este necesariamente produce [157] singularidades logarítmicas integrables a cada orden perturbativo subsecuente. El pico en las distribuciones a NLO y NNLO en $p_T^{\rm softer} \sim 40$ GeV es un artificio de estas inestabilidades perturbativas. Esta inestabilidad puede curarse realizando resumación a todo orden, la cual conduciría eventualmente a una distribución en p_T más suave con un comportamiento de tipo "hombro" [157] en la vecindad del umbral LO. Este comportamiento físico puede aproximarse (imitarse) en los cálculos a NLO y NNLO integrando la distribución (considerando un bin simplemente) sobre un bin (de tamaño suficientemente grande) centrado alrededor de $p_T^{\rm softer} \sim 40$ GeV.

En la Figura 9.7, presentamos la distribución en masa invariante para la producción de difotones en el Tevatron ($\sqrt{s}$ = 1,96 TeV). Requerimos que el fotón harder y softer tengan momento transverso mayor a 17 GeV y 15 GeV, respectivamente. La rapidity de ambos fotones está restringida a $|y_\gamma| \leq 1$. Notemos que el incremento de LO a NLO es considerablemente menor que el de la Fig. 9.4: esto se debe mayormente al uso de cortes casi simétricos en los momentos transversos de los fotones. En la región donde $M_{\gamma\gamma} \gtrsim 80$ GeV, el impacto relativo de la *contribución box* es más pequeño que en el LHC: esto es una consecuencia de los altos valores de las fracciones de momento partónicas, x, que son investigadas en el Tevatron. Aun así, las correcciones a NNLO (las que están dominadas por las correcciones de orden siguiente del canal qg) incrementan el resultado del orden previo (NLO) por un factor del 30 %.

9.3.2. Predicciones teóricas recientes para el Tevatron y el LHC

Resultados recientes del LHC [71, 70] y del Tevatron [74, 72] muestran discrepancias entre los datos y las predicciones teóricas a NLO para la producción de pares de fotones. Habíamos mostrado en el Capítulo 8 que estas discrepancias están íntimamente relacionadas y que se manifiestan en aquellas regiones cinemáticas de las distribuciones en las que los cálculos a

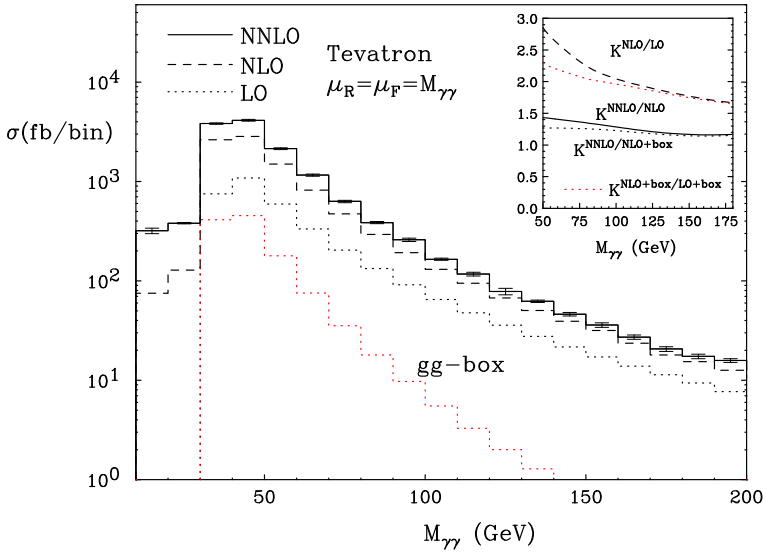

Figura 9.7: *Idem a lo presentado en la Fig. 9.4, pero para la cinemática del Tevatron (la que se describe en el texto).*

NLO son cálculos efectivos a LO, ya que pueblan tales zonas por primera vez a NLO. Esto se debe a que la radiación de estado final, debida a la aparición de un partón adicional, abre una nueva región en el espacio de fases, aquella región comprendida entre el valor mínimo permitido al momento transverso del fotón softer $p_{T\ min}^{softer}$ y el correspondiente al fotón harder $p_{T\ min}^{harder}$ [27]. De esta forma las correcciones a NNLO en tales zonas, alejadas del back-to-back, son efectivas NLO y por lo tanto, se espera que introduzcan grandes correcciones mejorando así, las descripciones actuales de los datos medidos. En particular se enseña en esta sección la comparación entre la descripción teórica a NNLO y los datos en los casos de las colaboraciones CDF y CMS, quedando en evidencia que el NNLO es necesario para entender la fenomenología contenida en los datos.

Predicciones teóricas en el caso de CMS

La Figura (9.8) (ver también Figura (8.17)) muestra una medición reciente realizada por CMS [70] ($\sqrt{s}$ = 7 TeV) de la sección eficaz diferencial de producción de difotones en función del ángulo azimutal $\Delta\phi_{\gamma\gamma}$ entre los dos fotones. Los datos son comparados con nuestra predicción teórica a NLO y NNLO. Los cortes implementados en este análisis requieren que los momentos transversos de los fotones verifiquen: $p_T^{harder} \geq 40$ GeV y $p_T^{softer} \geq 30$ GeV; la rapidity de ambos fotones debe satisfacer $|y_\gamma| \leq 2{,}5$, y la masa invariante del par de fotones debe pertenecer al intervalo 80 GeV$\leq M_{\gamma\gamma}$. Los parámetros de aislación quedan fijados a los valores $\epsilon_\gamma = 0{,}05$, $n = 1$ y $R = 0{,}4$. Notemos primero que los datos de CMS son seleccionados utilizando el criterio del cono estándar de aislación (ver sección 8.3.1) mientras que nuestro cálculo utiliza al criterio de Frixione. Según lo expuesto en la sección 9.1.2 una sección eficaz calculada utilizando el criterio de Frixione constituye una cota inferior para aquella calculada utilizando el criterio del cono estándar; más aun, a NLO es equivalente utilizar un criterio

[27] Cuanto mayor es esta región (cuanto más asimétricos son los cortes) mayores son las correcciones a la sección eficaz de un orden al otro.

o el otro[28] dentro de ciertos límites en el espacio de parámetros de aislación[29] ($E_{T\ max} \leq 5$ GeV o $\epsilon_\gamma \leq 0{,}1$ para $R = 0{,}4$).

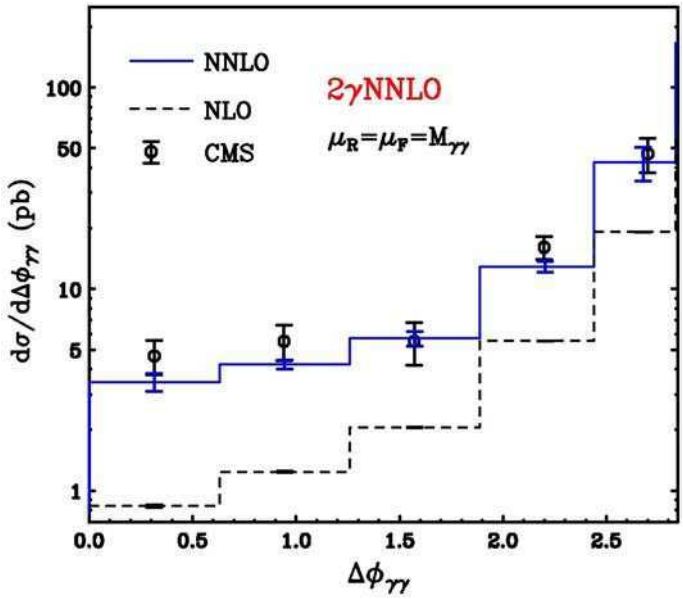

Figura 9.8: *Sección eficaz de producción de difotones en función del ángulo azimutal entre los dos fotones. Los datos de CMS [70]* ($\sqrt{s} = 7$ TeV) son comparados con el cálculo a NNLO [39].

Los histogramas de la Fig. (9.8) muestran que los resultados a NNLO en pQCD mejoran notablemente la descripción teórica de los datos de CMS en todo el rango de $\Delta\phi_{\gamma\gamma}$ enseñado[30]. Los resultados ilustrados en la Fig. (9.8) muestran que la descripción a NNLO de la producción de difotones es esencial para entender la fenomenología asociada a este proceso y por lo tanto los cálculos a NNLO en este caso constituyen una herramienta relevante para describir el background principal del bosón de Higgs.

Este análisis (la Fig. (9.8)) ha sido publicado en el "Handbook of LHC Higgs Cross Sections" [190] y en [191, 192] y en numerosas charlas y presentaciones a congresos.

Fenomenología en el caso de CDF

El análisis presentado a continuación es el resultado de una colaboración directa con CDF.

En este caso hemos calculado la sección eficaz diferencial a NNLO para la producción de difotones en el Tevatron ($\sqrt{s} = 1{,}96$ TeV) en el caso de CDF. Se utilizaron las distribuciones de partones MSTW2008 [154] con densidades y α_s evaluadas a cada orden correspondiente. Los cortes cinemáticos a imponer fueron los siguientes: los momentos transversos de los

[28] Las discrepancias entre ambos casos no supera el 3 % en el peor de los casos ($E_{T\ max} = 5$ GeV).

[29] Utilizar $\epsilon_\gamma = 0{,}05$ es equivalente a aplicar una cota fija ($E_{T\ max}$) para la energía hadrónica dentro del intervalo 2 GeV $\leq E_{T\ max} \leq 5$ GeV.

[30] Ver Fig. (8.17) para una comparación entre este mismo conjunto de datos con los cálculos teóricos obtenidos con `DIPHOX+gamma2MC` (NLO+box+términos(N^3LO)).

fotones harder y softer deben satisfacer $p_T^{harder} \geq 17$ GeV y $p_T^{softer} \geq 15$ GeV respectivamente; la rapidity de ambos fotones debe estar restringida al intervalo $|y_\gamma| \leq 1$ y los parámetros de aislación deben ser fijados a $E_{T\ max} = 2$ GeV, $n = 1$, $R = 0{,}4$ y $R_{\gamma\gamma} = 0{,}4$.

Los resultados se enseñan en las Figs. (9.9), (9.10), (9.11), y (9.12) donde se comparan los datos más recientes de CDF[31] (9,5 fb^{-1}) [193] con las predicciones teóricas de `MCFM`, `SHERPA` y `2γNNLO`. Nótese que los resultados a NNLO mejoran notablemente la descripción de los datos de CDF, en especial la mejora se da en las zonas cinemáticas conflictivas en la que la descripción a NLO es una descripción "efectiva" a LO:

I La zona de masas pequeñas ($M_{\gamma\gamma} < 2 \times p_{T\ min}^{harder} = 34$ GeV) de la distribución de masa invariante (ver Fig. (9.10)).

II La región cinemática alejada de $\Delta\phi_{\gamma\gamma} = \pi$ en la distribución en el ángulo azimutal del par de fotones (ver Fig. (9.12)).

III El "hombro" de Guillet en la distribución en momento transverso del par de fotones (ver Fig. (9.9)). La mejora en esta región de debe al gran incremento que recibe la sección eficaz a NNLO desde la nueva zona del espacio de fase disponible a NLO (15 GeV$\leq p_T^{softer} \leq$ 17 GeV). Además de nuestro código sólo `SHERPA` describe la forma del "hombro", aunque el valor total de la sección eficaz utilizando estas herramientas (`SHERPA`,`PYTHIA`, etc) deba ser reescaleado por un factor global para que la curva se ajuste a los datos.

IV La región cinemática $|y_\gamma| \sim 1$ para la distribución en rapítidy (ver Fig. (9.10)).

V La zona $\cos\theta^* \sim 1$ en la distribución en función del $\cos\theta^*$ (ver Fig. (9.11)).

Ahora comenzamos con la presentación y análisis de los resultados concernientes a los casos $p_T^{\gamma\gamma} > M_{\gamma\gamma}$ y $p_T^{\gamma\gamma} < M_{\gamma\gamma}$. El estudio de la fenomenología correspondiente a estos casos en relación a las herramientas teóricas a NLO se efectuó en la sección 8.5.

En el Capítulo 8 se había adelantado la siguiente conclusión: el corte $p_T^{\gamma\gamma} > M_{\gamma\gamma}$ elimina las componentes con cinemática Born (ya que $p_T^{\gamma\gamma} > M_{\gamma\gamma} \neq 0$) lo que implica que los cálculos a NLO sean ahora cálculos efectivos a LO en todos los rangos cinemáticos para todas las distribuciones[32], empeorando la calidad de la descripción y favoreciendo este hecho las discrepancias con los datos. Por este motivo esperamos que las correcciones a NNLO (efectivas NLO) introduzcan grandes correcciones y posibiliten una reducción de las discrepancias citadas previamente. Esto es los que se observa en las Figs. (9.13), (9.14), y (9.15), el NNLO reduce las discrepancias entre la teoría a NLO y los datos.

Así es posible entender estas diferencias entre la teoría a NLO y los datos como la carencia de correcciones de orden superior y no una descripción teórica deficiente de los criterios de aislación o de la componente de fragmentación.

[31] Este nuevo conjunto de datos de CDF (9,5 fb^{-1}) está en total acuerdo con el conjunto previo de menor estadística [74] (5,4 fb^{-1}).

[32] Como lo son de manera natural las regiones de masas pequeñas ($M_{\gamma\gamma} < 2 \times p_{T\ min}^{harder}$) y de ángulo azimutal $\Delta\phi_{\gamma\gamma} \neq \pi$.

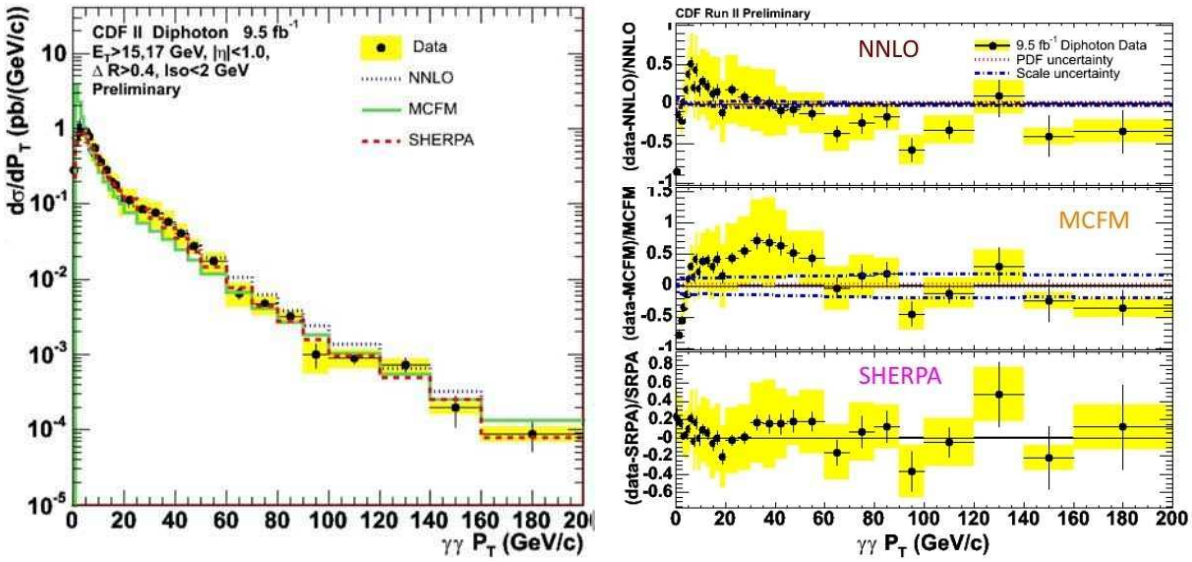

Figura 9.9: *(Izquierda) Sección eficaz en función del momento transverso de los difotones (colaboración CDF [193]) y la comparación con los resultados teóricos de* `2γNNLO`*,* `MCFM` *y* `SHERPA`*.(Derecha) La razón de la diferencia entre la sección eficaz diferencial y* `2γNNLO`*,* `MCFM` *y* `SHERPA`*, y el valor teórico.*

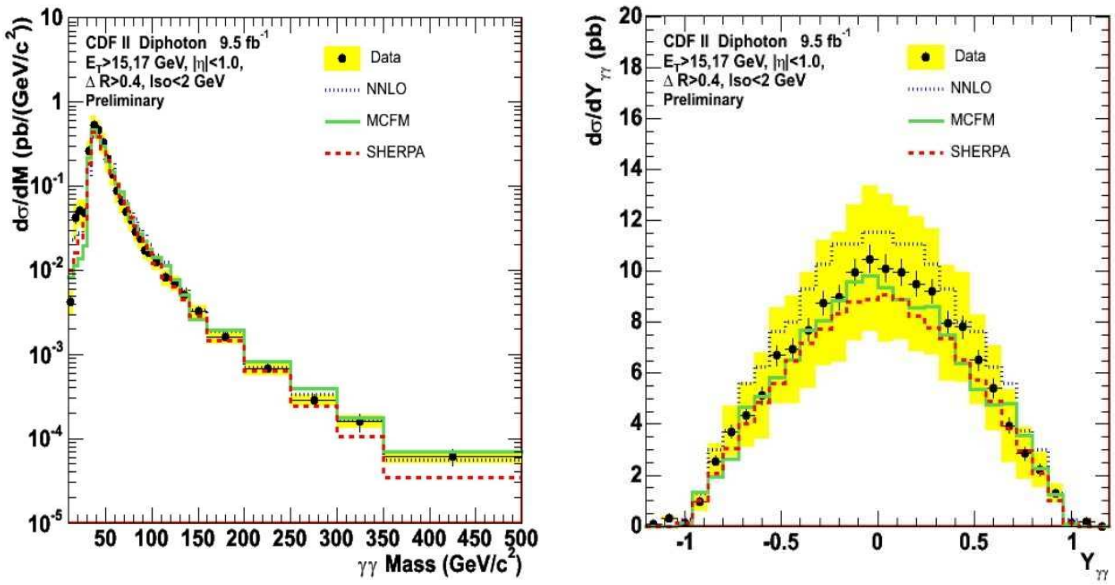

Figura 9.10: *(Izquierda) Sección eficaz en función de la masa invariante de los difotones (colaboración CDF [193]) y la comparación con los resultados teóricos de* `2γNNLO`*,* `MCFM` *y* `SHERPA`*.(Derecha) Sección eficaz en función de la rapidity de los difotones (colaboración CDF [193]) y la comparación con los resultados teóricos de* `2γNNLO`*,* `MCFM` *y* `SHERPA`*.*

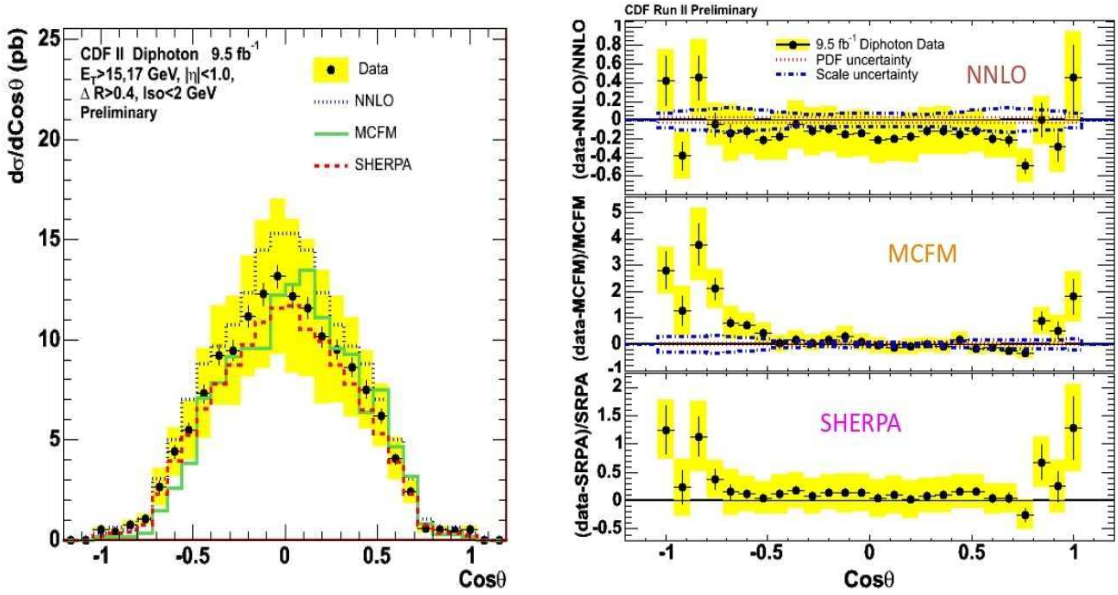

Figura 9.11: *(Izquierda) Sección eficaz en función de* $\cos\theta^*$ *(colaboración CDF [193]) y la comparación con los resultados teóricos de* `2γNNLO`*,* `MCFM` *y* `SHERPA`*.(Derecha) La razón de la diferencia entre la sección eficaz diferencial y* `2γNNLO`*,* `MCFM` *y* `SHERPA`*, y el valor teórico.*

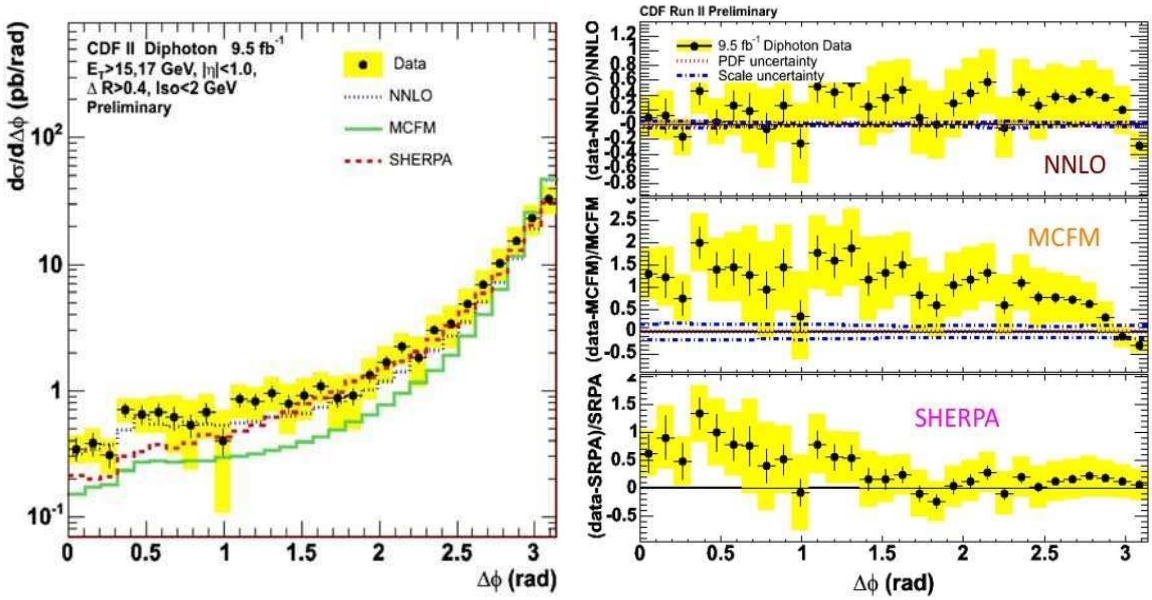

Figura 9.12: *(Izquierda) Sección eficaz en función del ángulo azimutal* ($\Delta\phi_{\gamma\gamma}$) *entre los dos fotones (colaboración CDF [193]) y la comparación con los resultados teóricos de* `2γNNLO`*,* `MCFM` *y* `SHERPA`*.(Derecha) La razón de la diferencia entre la sección eficaz diferencial y* `2γNNLO`*,* `MCFM` *y* `SHERPA`*, y el valor teórico.*

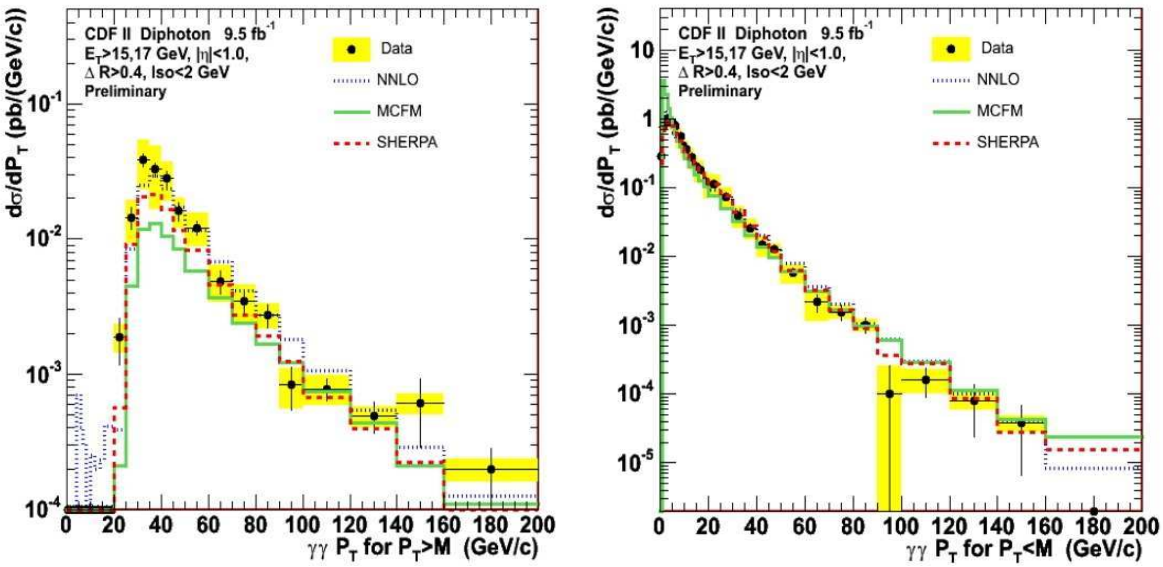

Figura 9.13: *(Izquierda) Sección eficaz en función del momento transverso de los difotones (colaboración CDF [193]) y la comparación con los resultados teóricos de* `2γNNLO`*,* `MCFM` *y* `SHERPA` *con el corte adicional* $p_T^{\gamma\gamma} > M_{\gamma\gamma}$*.(Derecha) Sección eficaz en función del momento transverso de los difotones (colaboración CDF [193]) y la comparación con los resultados teóricos de* `2γNNLO`*,* `MCFM` *y* `SHERPA` *con el corte adicional* $p_T^{\gamma\gamma} < M_{\gamma\gamma}$

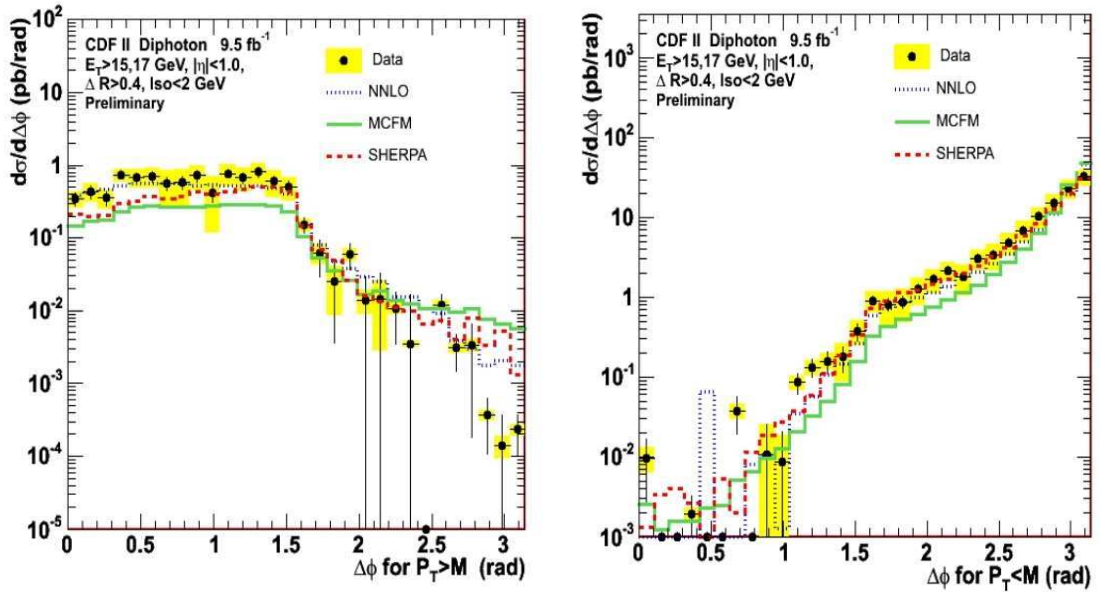

Figura 9.14: *(Izquierda) Sección eficaz en función del ángulo azimutal* ($\Delta\phi_{\gamma\gamma}$) *entre los dos fotones (colaboración CDF [193]) y la comparación con los resultados teóricos de* `2γNNLO`*,* `MCFM` *y* `SHERPA` *con el corte adicional* $p_T^{\gamma\gamma} > M_{\gamma\gamma}$*.(Derecha) Sección eficaz en función del ángulo azimutal* ($\Delta\phi_{\gamma\gamma}$) *entre los dos fotones (colaboración CDF [193]) y la comparación con los resultados teóricos de* `2γNNLO`*,* `MCFM` *y* `SHERPA` *con el corte adicional* $p_T^{\gamma\gamma} < M_{\gamma\gamma}$*.*

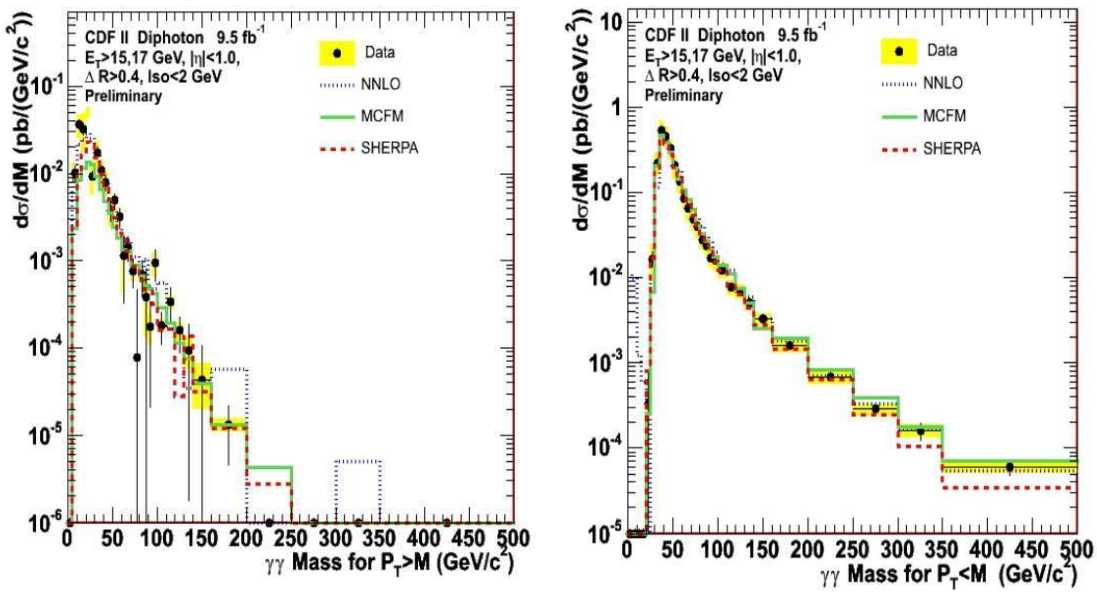

Figura 9.15: *(Izquierda) Sección eficaz en función de la masa invariante de los difotones (colaboración CDF [193]) y la comparación con los resultados teóricos de* `2γNNLO`*,* `MCFM` *y* `SHERPA` *con el corte adicional* $p_T^{\gamma\gamma} > M_{\gamma\gamma}$*.(Derecha) Sección eficaz en función de la masa invariante de los difotones (colaboración CDF [193]) y la comparación con los resultados teóricos de* `2γNNLO`*,* `MCFM` *y* `SHERPA` *con el corte adicional* $p_T^{\gamma\gamma} < M_{\gamma\gamma}$*.*

Fenomenología para ATLAS

Este análisis corresponde al conjunto de datos a publicar por ATLAS [194] ($\sqrt{s} = 7$ TeV) y que fue realizado en colaboración directa con este grupo.

En este caso los cortes impuestos requieren: $p_T^{harder} \geq 25$ GeV y $p_T^{softer} \geq 22$ GeV respectivamente; la rapidity de ambos fotones debe estar restringida al intervalo $|y_\gamma| \leq 2{,}37$ (respetando las zonas "muertas" del detector: $1{,}37 < |y_\gamma| < 1{,}52$) y los parámetros de aislación deben ser fijados a $E_{T\ max} = 5$ GeV, $n = 1$, $R = 0{,}4$ y $R_{\gamma\gamma} = 0{,}4$.

En la Tabla 9.4 se enseña el valor de la sección eficaz total calculada a NNLO y se la compara con el valor de la correspondiente sección eficaz total calculada con `DIPHOX+gamma2MC`[33]. Las incertezas están estimadas mediante la variación de las escalas de forma asimétrica ($\mu_f = M_{\gamma\gamma}/2; \mu_R = 2M_{\gamma\gamma}$ y viceversa) y los errores estadísticos que resultan de la estimación de la incerteza por parte del integrador Monte Carlo. El NNLO presenta respecto del caso `DIPHOX+gamma2MC` un incremento del 36 % en cuanto a la sección eficaz total. Notar que ésta estimación de las incertezas en el caso de `DIPHOX+gamma2MC` no es suficiente para poner de manifiesto la falta de correcciones de orden superior (NNLO, etc).

La distribución en masa invariante se enseña en la Fig. (9.16), donde se comparan el cálculo obtenido con el `2γNNLO` y el correspondiente con `DIPHOX+gamma2MC`. El incremento en la zona de baja masa ($M_{\gamma\gamma} < 2 \times p_{T\ min}^{harder} = 50$ GeV) debido al NNLO respecto de `DIPHOX+gamma2MC` es del 124 % para cada uno de los bines centrados en 25 GeV y 35 GeV

[33]Con `DIPHOX+gamma2MC` ponemos de manifiesto que estamos considerando la parte directa y de fragmentación a NLO, la contribución box y los términos parciales de orden N^{3}LO que son correcciones al box.

	2γNNLO	DIPHOX+gamma2MC
σ (fb)	47519^{+6402}_{-5580}	34836^{+5180}_{-3843}

Tabla 9.4: *Secciones eficaces para el proceso $pp \to \gamma\gamma + X$ en el LHC (ATLAS) ($\sqrt{s} = 7$ TeV).* Los cortes aplicados por ATLAS se describen en el texto y las incertezas fueron calculadas con la variación de las escalas (contienen los errores estadísticos estimados por el integrador Monte Carlo).

en la distribución de masa invariante.

La distribución en momento transverso (ver Fig. (9.16)) muestra un incremento del NLO (`DIPHOX+gamma2MC`) al NNLO, notoriamente mayor que en el caso de CDF, en especial en aquellas regiones de la distribución que satisfacen $p_T^{\gamma\gamma} > 2 \times p_{T\ min}^{harder}$ (zona en la que inicia el hombro de Guillet). Notar que este incremento sería aun mayor si no se considerasen las correcciones a N^{3}LO (sin `gamma2MC`).

En el caso de la distribución en ángulo azimutal (ver Fig. (9.17)), los incrementos del NNLO por sobre el NLO (`DIPHOX+gamma2MC`) están dentro de los esperado, aunque el efecto es mayor que en el caso de CDF, debido a la gran luminosidad del canal de gluón en el LHC.

La distribución en función del $\cos\theta^*$ (ver Fig. (9.17)) muestra un incremento del NNLO por sobre el NLO (`DIPHOX+gamma2MC`) en todo el espectro, no solo en las zonas cercanas a $\cos\theta^* = \pm 1$, que son las zonas alejadas de la configuración Born y es donde se espera que predominen.

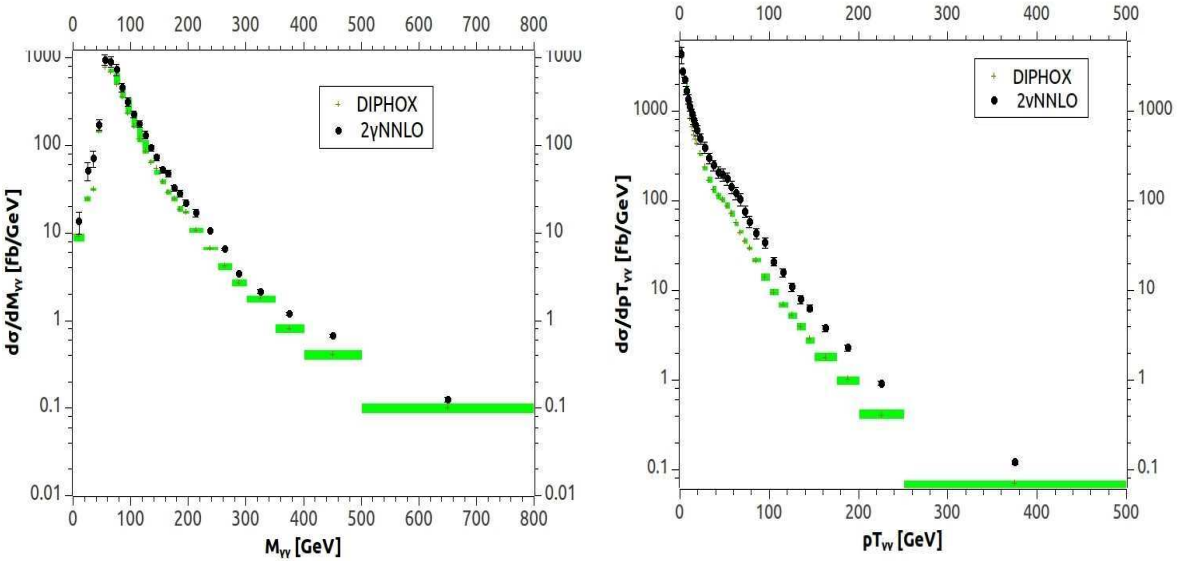

Figura 9.16: *(Izquierda) Sección eficaz en función de la masa invariante de los difotones. Comparación entre los resultados teóricos de* `2γNNLO` *y* `DIPHOX`*.(Derecha) Sección eficaz en función del momento transverso de los difotones. Comparación entre los resultados teóricos de* `2γNNLO` *y* `DIPHOX`*. Las incertezas para ambos cálculos son estimadas mediante la variación de las escalas.*

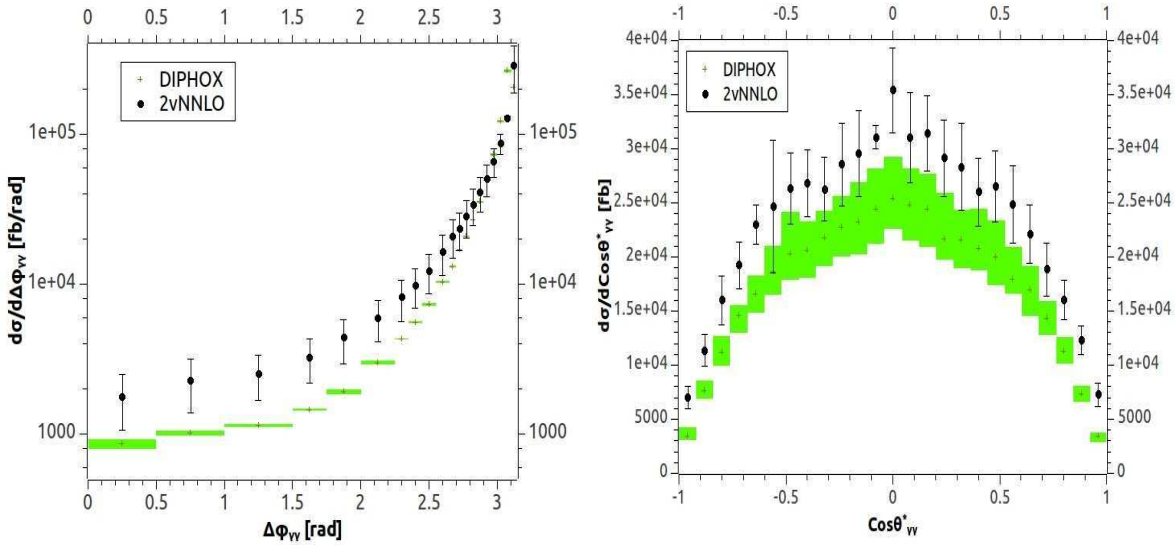

Figura 9.17: *(Izquierda) Sección eficaz en función del ángulo azimutal entre los difotones. Comparación entre los resultados teóricos de* `2γNNLO` *y* `DIPHOX`*.(Derecha) Sección eficaz en función de* $\cos\theta^*$*. Comparación entre los resultados teóricos de* `2γNNLO` *y* `DIPHOX`*. Las incertezas para ambos cálculos son estimadas mediante la variación de las escalas.*

La producción de difotones como background principal del bosón de Higgs

En este caso empleamos los cortes cinemáticos de una reciente búsqueda del bosón de Higgs por parte de la colaboración CMS ($\sqrt{s} = 7$ TeV). Se requiere que los momentos transversos de los fotones verifiquen: $p_T^{harder} \geq 40$ GeV y $p_T^{softer} \geq 30$ GeV; la rapidity de ambos fotones debe estar restringida al intervalo $|y_\gamma| \leq 2{,}5$ (respetando las zonas "muertas" del detector $1{,}442 < |y_\gamma| < 1{,}566$) y los parámetros de aislación deben ser fijados a $\epsilon_\gamma = 0{,}05$, $n = 1$, $R = 0{,}4$. La masa invariante del par de fotones debe satisfacer: 100 GeV$\leq M_{\gamma\gamma} \leq$ 160 GeV.

En la Fig. (9.18) se enseña la distribución en masa invariante a NNLO, NLO y LO. Para cada orden la banda en azul (a rayas) representa la variación de las escalas de forma asimétrica ($\mu_f = M_{\gamma\gamma}/2; \mu_R = 2M_{\gamma\gamma}$ y viceversa), mientras que en verde se enseñan los porcentajes de dichas variaciones respecto del valor central ($\mu_f = \mu_R = M_{\gamma\gamma}$). Solo se enseña el valor central para el caso NNLO (línea sólida negra). En la parte inferior del gráfico la curva en color rojo (sólido) es la predicción teórica de la señal del bosón de Higgs a NNLO en pQCD decayendo en dos fotones [195] en función de la masa invariante del par de fotones. La línea sólida roja, dentro de la banda azul a NNLO, enseña las correcciones parciales[34] al canal gg de orden N^{3}LO [54] (sumadas al valor central a NNLO). El hecho de que estos términos a N^{3}LO, que constituyen las primeras correcciones al canal gg, sumados al valor central a NNLO (línea sólida negra) resulten contenidas dentro de la banda de variación de las escalas en forma asimétrica, pone de manifiesto que a este orden (donde todos los canales ya han abierto) tal variación de las escalas es una estimación de la ignorancia de las correcciones de orden superior que no se están teniendo en cuenta dentro del cálculo. A NLO es evidente que la variación de las escalas subestima la ignorancia de los términos de orden

[34]Son las correcciones que aporta el código `gamma2MC`.

superior (NNLO,N^{3}LO, etc) ya que las bandas azules no se tocan con las del NNLO, pero a este orden no todos los canales están abiertos (sólo $q\bar{q}$ y qg) y entonces es esperable que esto suceda.

En la Fig. (9.19) se enseña la distribución en ángulo azimutal $\Delta\phi_{\gamma\gamma}$ para el par de fotones. Nótese que aunque la zona de masas pequeñas ($M_{\gamma\gamma} < 2 \times p_{T\ min}^{harder} = 80$ GeV) está excluida por los cortes cinemáticos de búsqueda del bosón de Higgs, la distribución en $\Delta\phi_{\gamma\gamma}$ muestra un incremento del NLO al NNLO tal que hace ineludible el concluir[35] que las correcciones a NNLO son necesarias para la descripción completa de la fenomenología de este proceso.

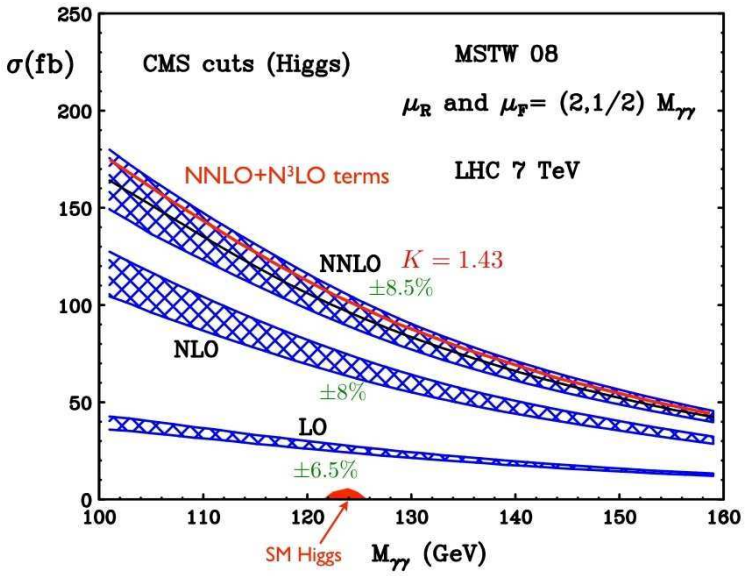

Figura 9.18: *Sección eficaz en función de la masa invariante de los difotones calculada utilizando cortes empleados en la búsqueda del bóson de Higgs (CMS). Los detalles de esta figura se explican en el texto.*

[35]La distribución en masa invariante de la Fig. (9.18) apoya la misma conclusión.

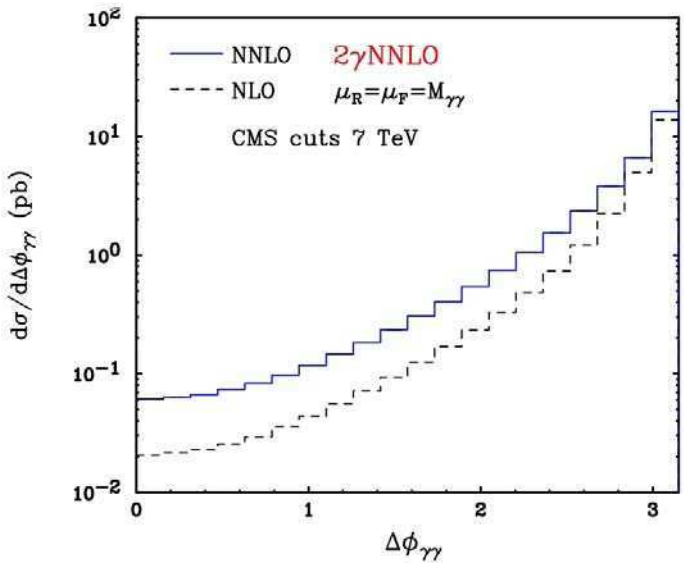

Figura 9.19: *Sección eficaz en función del ángulo azimutal entre los difotones calculada utilizando cortes empleados en la búsqueda del bosón de Higgs (CMS). Los detalles de esta figura se explican en el texto.*

Capítulo 10

Conclusiones

Si bien cada capítulo contiene sus propias conclusiones, utilizaremos este espacio para enumerar los aportes originales que introduce esta tesis y la importancia de los mismos.

En el Capítulo 5 se calculó el coeficiente $\mathcal{H}^{DY\ (2)}$. La importancia inmediata es la de posibilitar el cálculo de la producción de bosones vectoriales (DY) a NNLO. Sin embargo, la utilidad de este coeficiente se extiende a ser requerido en cada cálculo a NNLO cuyo proceso Born es del tipo DY; por ejemplo producción asociada WH del bosón de Higgs a NNLO [34], como así también en cálculos que empleen resumación que dependan de $\mathcal{H}^{DY\ (2)}$ [196].
Los resultados del Capítulo 5 han sido publicados en la Ref. [65].

En el Capítulo 6 se generalizó el método de extracción de los coeficientes $\mathcal{H}^{F\ (2)}$ del Capítulo 5. El método general sólo requiere de los elementos de matriz de las correcciones a dos-loops al proceso F en vez de las sección eficaz total a NNLO. La ventaja es doble: no sólo se reduce el tiempo de extracción (el método anterior requiere de meses de trabajo) sino que las secciones eficaces totales a NNLO se conocen para unos pocos procesos. En el caso particular de la producción de difotones es imposible obtener una expresión analítica para la sección eficaz total debido a las componentes de fragmentación del estado final. En el caso de considerar sólo la contribución directa la integración que conduciría a la sección eficaz total a NNLO resulta casi imposible (sino imposible) de ser realizada en la presencia de un criterio de aislación.
Más allá de las ventajas de un método sobre el otro, el poseer una prescripción de extracción general para los coeficientes $\mathcal{H}^{F\ (2)}$ le confiere al método de sustracción en momento transverso q_T su forma final.
A estas bondades se le suman las importancias marcadas para el Capítulo 5 pero ahora para cada proceso final F, en vez de uno sólo.
Como corolario se utiliza este método general para obtener al coeficiente $\mathcal{H}^{\gamma\gamma\ (2)}$.
Los resultados de este capítulo serán publicados en breve.

En el Capítulo 7 se presentó el cálculo de producción de bosones vectoriales (DY) a NNLO en pQCD. El trabajo publicado fruto de este cálculo cuenta hasta la fecha con 119 citas (Inspires). La importancia de esta herramienta es la de proveer cálculos de precisión

requeridos para la extracción de PDFs, calibración de detectores, tests al Modelo Estándar, etc.
Los resultados de este capítulo fueron publicados en la Ref. [35] (y en numerosos congresos) y el código de tipo Monte Carlo que calcula la producción de bosones vectoriales a NNLO puede descargarse desde [55].

En el Capítulo 9 se presenta el cálculo de la producción de difotones a NNLO en pQCD. Es el primer cálculo a este orden de precisión (NNLO) que posee dos partículas en el estado final. La importancia de este capítulo es doble: la de proveer tal herramienta de cálculo y la de estudiar a los criterios de aislación disponibles, reconciliando teoría y experimento en cuanto al uso de criterios de aislación distintos (Frixione vs. Estándar).
Las correcciones a NNLO solucionan las discrepancias que pueden hallarse cuando se comparan los datos con las herramientas de cálculo a NLO, de manera que las correcciones a NNLO son esenciales para comprender de manera completa la fenomenología asociada a este proceso. Este proceso además recibe interés por constituir el background principal para el decaimiento del bosón de Higgs en dos fotones.
Durante los meses pasados se trabajó en la producción de resultados para CDF, D0, CMS y ATLAS, grupos con los que se colabora de manera directa. Esto es en cuanto a la señal de difotones.
Recientemente estamos colaborando en forma directa con ATLAS en cuanto a la búsqueda (estudios) del nuevo bosón hallado en el LHC, es decir la señal de difotones como background para estas búsquedas, como así también en estudios para los planes futuros del LHC.
El trabajo expuesto en este capítulo resultó en la publicación de las Refs. [39, 190], y fue presentado en numerosos congresos. En breve será publicado un estudio detallado de la fenomenología relacionada a este proceso.

Apéndice A

Coeficientes de DY a NNLO

$$d_t=\frac{1}{s_2-t},\quad d_u=\frac{1}{s_2-u},\quad d_{st}=\frac{1}{s+t-s_2}\ ,$$

$$d_{su}=\frac{1}{s+u-s_2},\quad d_s=\frac{1}{s+Q^2-s_2}\ , \tag{A1}$$

$$d_{tu}=\frac{1}{tu-s_2Q^2},\quad \lambda=\sqrt{(u+t)^2-4s_2Q^2}\ ,$$

$$f_s=\ln\left[\frac{s}{Q^2}\right],\quad f_t=\ln\left[\frac{-t}{Q^2}\right],\quad f_u=\ln\left[\frac{-u}{Q^2}\right],\qquad f_{stu}=\ln\left[\frac{sQ^2}{(s_2-t)(s_2-u)}\right],$$

$$f_{s_2}=\ln\left[\frac{s_2}{Q^2}\right],\quad f_{M^2}=\ln\left[\frac{M^2}{Q^2}\right],\quad f_{\mu^2}=\ln\left[\frac{\mu^2}{Q^2}\right],\qquad f_{tu}=\ln\left[\frac{tu-s_2Q^2}{(s_2-t)(s_2-u)}\right],$$

$$f_A=\ln\left[\frac{A}{Q^2}\right],\quad f_{st}=\ln\left[\frac{st^2}{Q^2(s_2-t)^2}\right],\qquad f_{\lambda t}=\ln\left[\frac{sQ^2(s_2-t)^2}{[s_2(2Q^2-u)-Q^2t]^2}\right],$$

$$f_{su}=\ln\left[\frac{su^2}{Q^2(s_2-u)^2}\right],\quad f_\lambda=\ln\left[\frac{s+Q^2-s_2+\lambda}{s+Q^2-s_2-\lambda}\right],\qquad f_{\lambda u}=\ln\left[\frac{sQ^2(s_2-u)^2}{[s_2(2Q^2-t)-Q^2u]^2}\right],$$

$$f_{1t}=\mathrm{Li}_2\left[\frac{Q^2}{Q^2-t}\right]+\frac{1}{2}\ln^2\left[\frac{Q^2}{Q^2-t}\right],$$

$$f_{2t}=\mathrm{Li}_2\left[\frac{Q^2}{s}\right]+\frac{1}{2}f_s^2+f_s\ln\left[\frac{-t}{s-Q^2}\right],$$

$$f_{1u}=\mathrm{Li}_2\left[\frac{Q^2}{Q^2-u}\right]+\frac{1}{2}\ln^2\left[\frac{Q^2}{Q^2-u}\right], \tag{A2}$$

$$f_{2u}=\mathrm{Li}_2\left[\frac{Q^2}{s}\right]+\frac{1}{2}f_s^2+f_s\ln\left[\frac{-u}{s-Q^2}\right],$$

$$\mathrm{Li}_2(z) = -\int_0^z dz' \frac{\ln(1-z')}{z'} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} ,$$

$$|z| \leq 1 . \qquad \text{(A3)}$$

$$\begin{aligned}
B_1^{qG}(s,t,u,Q^2) = A^{qG}(s,t,u,Q^2) \Bigg[& -\frac{2C_F + C_A}{\omega^2} + \frac{1}{\omega}[3C_F - 2C_F f_u + \tfrac{11}{6}C_A + C_A(f_u - f_s - f_t)] - 8C_F - C_F f_u^2 \\
& - \frac{\pi^2}{3}(C_F - C_A) + \tfrac{1}{2}C_A(f_u^2 - f_s^2 - f_t^2) + C_A(\tfrac{11}{6}f_{\mu^2} + f_{1t} - f_{2t}) \Bigg] \\
& + C_F \left[\frac{u}{t+u} + \frac{u}{s+u} + \frac{u+t}{s} + \frac{u+s}{t} \right] + \left[C_F \frac{4u^2 + 2ut + 4su + st}{(s+u)^2} + C_A \frac{t}{s+u} \right] f_t \\
& + \left[C_F \frac{4u^2 + 2su + 4ut + ts}{(t+u)^2} + C_A \frac{s}{t+u} \right] f_s \\
& + (2C_F - C_A) \Bigg[2 \left[\frac{u^2}{(s+t)^2} + \frac{2u}{s+t} \right] f_u - \frac{Q^2}{st} \left[\frac{s^2+t^2}{s+t} \right] \\
& \qquad + \frac{u^2 + (u+s)^2}{st} \left[f_{1t} + f_{1u} - f_t f_u + \frac{\pi^2}{2} \right] + \frac{u^2 + (t+u)^2}{st}(f_{1u} - f_{2u}) \Bigg] ,
\end{aligned} \qquad \text{(A4)}$$

$$B_2^{qG}(s,t,u,Q^2) = A^{qG}(s,t,u,Q^2) \frac{1}{3} \left[-\frac{1}{\omega} - f_{\mu^2} \right] , \qquad \text{(A5)}$$

$$B_3^{qG}(s,t,u,Q^2) = \left[\frac{u+Q^2}{u-Q^2} \right] \left[1 - \frac{Q^2}{u-Q^2} f_u \right] . \qquad \text{(A6)}$$

$$\begin{aligned}
B_1^{q\bar{q}}(s,t,u,Q^2) = A^{q\bar{q}}(s,t,u,Q^2) \Bigg[& -\frac{2C_F + C_A}{\omega^2} + \frac{1}{\omega}[3C_F - 2C_F f_s + \tfrac{11}{6}C_A + C_A(f_s - f_u - f_t)] - 8C_F - C_F f_s^2 \\
& + \frac{\pi^2}{6}(4C_F - C_A) + \tfrac{1}{2}C_A[f_s^2 - (f_t + f_u)^2] + C_A(\tfrac{11}{6}f_{\mu^2} + f_{1t} + f_{1u}) \Bigg] \\
& + C_F \left[\frac{s}{s+t} + \frac{s}{s+u} + \frac{s+t}{u} + \frac{s+u}{t} \right] + \left[C_F \frac{4s^2 + 2st + 4su + ut}{(s+u)^2} + C_A \frac{t}{s+u} \right] f_t \\
& + \left[C_F \frac{4s^2 + 2su + 4st + tu}{(s+t)^2} + C_A \frac{u}{s+t} \right] f_u \\
& + (2C_F - C_A) \Bigg[2 \left[\frac{s^2}{(u+t)^2} + \frac{2s}{u+t} \right] f_s - \frac{Q^2}{ut} \left[\frac{u^2+t^2}{u+t} \right] + \frac{s^2 + (s+u)^2}{ut}(f_{1t} - f_{2t}) \\
& \qquad + \frac{s^2 + (s+t)^2}{ut}(f_{1u} - f_{2u}) \Bigg] ,
\end{aligned} \qquad \text{(A7)}$$

$$B_2^{q\bar{q}}(s,t,u,Q^2) = A^{q\bar{q}}(s,t,u,Q^2) \frac{1}{3} \left[-\frac{1}{\omega} - f_{\mu^2} \right] , \qquad \text{(A8)}$$

$$B_3^{q\bar{q}}(s,t,u,Q^2) = -\left[\frac{s+Q^2}{s-Q^2} \right] \left[1 - \frac{Q^2}{s-Q^2} f_s \right] . \qquad \text{(A9)}$$

$$C_1^{qG}(s,t,u,Q^2)=A^{qG}(s,t,u,Q^2)\left[\frac{2C_F+C_A}{\omega^2}-\frac{1}{\omega}[3C_F-2C_Ff_u+\tfrac{11}{6}C_A+C_F(f_u-f_s-f_t)]\right.$$
$$+C_F[\tfrac{7}{2}+2f_{M^2}(f_u-f_A)+f_A^2-\tfrac{3}{2}(f_{M^2}+f_A)]$$
$$+C_A\left[\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{2}(f_s-f_t-f_u)^2+2f_t(f_{M^2}-f_A)\right.$$
$$\left.\left.+2f_A(f_s-f_u-f_{M^2}+f_A)-\tfrac{11}{6}f_{M^2}\right]\right], \tag{A10}$$

$$C_2^{qG}(s,t,u,Q^2)=A^{qG}(s,t,u,Q^2)\frac{1}{3}\left[\frac{1}{\omega}+f_{M^2}\right]. \tag{A11}$$

$$C_3^{qG}(s,t,u,Q^2)=\left[-\frac{s}{t}-\frac{t}{s}-\frac{2uQ^2}{st}\right]\left\{\left[\frac{f_{s_2}}{s_2}\right]_{A+}(2C_F+4C_A)\right.$$
$$+\left[\frac{1}{s_2}\right]_{A+}\left[C_F\left[-\frac{3}{2}+f_{su}+2f_{tu}-2f_{M^2}+\frac{t+u}{\lambda}f_\lambda\right]\right.$$
$$\left.\left.+C_A\left[2f_{stu}+\frac{f_{st}-f_{su}}{2}-f_{tu}-2f_{M^2}\right]\right]\right\}$$
$$+\frac{1}{s_2}\left[C_F-\frac{C_A}{2}\right]\left[\frac{s+2u}{t}\left[\frac{t+u}{\lambda}f_\lambda+f_{su}\right]+\frac{2t+4u}{s}f_{tu}\right]$$
$$+\frac{f_\lambda}{\lambda^3}\left\{C_F\left[\frac{3s}{4\lambda^2}(s+Q^2-s_2)(u^2-t^2)\left[1-\frac{u}{t}\right]+(u^2-t^2)\left[\frac{Q^2-s_2}{4s}+\frac{11}{4}+\frac{s_2}{t}-\frac{u}{2t}\right]\right.\right.$$
$$\left.-2s\left[t+\frac{u^2}{t}\right]-\frac{s}{2}(s-s_2)\left[\frac{u}{t}-3\right]+4s_2(t-u)+5su\right]$$
$$\left.+C_A\left[1-\frac{u}{t}\right]\left[\frac{t+u}{4}(s+Q^2-s_2)+s(s-s_2)\right]\right\}$$
$$+\frac{f_\lambda}{\lambda}\left\{C_F\left[\frac{t-u-2s_2}{4s}+\frac{11s-2u-4s_2}{4t}+\frac{2}{s}\left[1+\frac{u}{t}\right](5Q^2+s_2)-\frac{16Q^2s_2}{st}\right]\right.$$
$$\left.-\frac{C_A}{2}\left[\frac{t+u}{2t}+5\left[\frac{u}{s}-\frac{u+s_2}{t}\right]-\frac{7}{t}\left[s+\frac{us_2}{s}\right]+\frac{3}{s}(t-3s_2)+\frac{2}{st}(u^2+3s_2^2)\right]\right\}$$
$$+\frac{1}{\lambda^2}\left\{C_F\left[\frac{3s}{2\lambda^2}(t-u)^2\left[1+\frac{u}{t}\right]+\frac{s}{2t}(u-3t)+\left[1-\frac{u}{t}\right]\left[s_2-\frac{7u}{4}\right]\right.\right.$$
$$\left.\left.+(t-u)\left[\frac{11}{4}+\frac{3t+3u}{2s}-\frac{2s_2}{s}\right]\right]+C_A\left[\frac{u}{t}-1\right](s+s_2)\right\}$$
$$+2d_t^3st[4C_F-3C_A-(C_F-C_A)(f_{s_2}-f_{M^2})]$$
$$+d_t^2\{C_F(3s-8t-4u)-C_A(9s-4t+4u)+2(f_{s_2}-f_{M^2})[C_F(t+u)+C_A(3s+2u)]\}$$

$$
\begin{aligned}
&+d_t\Bigg\{\Bigg[C_F(f_{s_2}-f_{M^2})-C_A\left[f_{s_2}-f_{M^2}+\frac{f_{stu}+f_{s_2}-f_{tu}}{2}+\frac{f_{st}+f_{\lambda t}}{4}\right]\Bigg]\\
&\quad\times\left[4\left[1+\frac{u}{s}\right]\left[1-\frac{u}{t}\right]-2\left[\frac{s}{t}+\frac{t}{s}\right]\right]-C_F(f_{s_2}-f_{M^2})\frac{s+2u}{t}\\
&\quad+C_A\left[(2f_{\lambda t}+2f_{st})\frac{u+s}{t}+2(f_{s_2}-f_{M^2})\left[\frac{5s+4u}{t}-2\right]\right]\\
&\quad-C_F\left[4+\frac{s-2u}{t}+\frac{2u-3t}{s}-\frac{u^2}{st}\right]+C_A\left[7-\frac{3s+2u}{t}\right]\Bigg\}\\
&+d_u\left[2C_F\left[f_{M^2}-f_{s_2}-\frac{s}{t}\right]+C_A\left[\frac{s}{t}-1\right]\right]\\
&+d_{st}C_F(f_{su}-2f_{tu}-f_{\lambda t})\left[1-\frac{s_2}{t}\right]\frac{s_2^2-2u(s_2-u)}{s^2}\\
&+d_{tu}C_F\Bigg\{2(f_{M^2}-f_{s_2}-f_{tu})\Bigg[\frac{2s}{t}(Q^2+2u)+t-s_2+\frac{4u}{t}(2u-s_2)\\
&\qquad\qquad+\frac{2}{s}(u-s_2)\left[t-2u+\frac{2u^2}{t}\right]\Bigg]+s_2-t+4u\left[\frac{Q^2}{t}+\left[1-\frac{u}{t}\right]\frac{t-Q^2}{s}\right]\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+C_F\Bigg\{\frac{1}{st}\left[\frac{2u(s_2-u)-s_2^2}{s}-s_2\right](f_{su}-2f_{tu}-f_{\lambda t})-2\left[\frac{1}{t}-\frac{2}{s}+\frac{4u}{st}\right]f_{tu}\\
&\quad+\frac{u-3s_2+5Q^2}{st}f_{\lambda t}+\left[\frac{5}{s}+\frac{1}{u}\left[1+\frac{2t}{s}-\frac{3s_2}{s}\right]-\frac{s_2Q^2}{su^2}\right]f_{su}\\
&\quad+\left[\frac{8}{s}+\frac{3}{t}+\frac{1}{u}-\frac{4u}{st}+\frac{2t-3s_2}{su}-Q^2\left[\frac{1}{t^2}+\frac{s_2}{su^2}\right]\right](f_{s_2}-f_{M^2})\\
&\quad-\frac{2}{s}+\frac{3}{4t}-\frac{1}{u}+\frac{3u}{st}-\frac{t+s_2}{su}+Q^2\left[\frac{s_2}{su^2}-\frac{1}{2t^2}\right]\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+C_A\Bigg\{2(f_{s_2}-f_{M^2})\left[\frac{6}{s}-\frac{2}{t}-\frac{2Q^2}{st}-\frac{3s_2}{st}\right]+\left[\frac{15}{2s}-\frac{9s_2}{2st}-\frac{2Q^2}{t^2}\right]f_{st}\\
&\quad+2\left[\frac{1}{t^2}\left[s+\frac{s_2^2}{s}\right]+\frac{2s_2Q^2}{t^3}-\frac{4Q^2}{st}\left[1-\frac{Q^2}{t}\right]+\frac{2s_2Q^2}{st^2}\left[1-\frac{s_2}{t}\right]\left[1-\frac{Q^2}{t}\right]\right](f_{s_2}-f_{M^2}+f_{st})\\
&\quad+\frac{1}{s}\left[4-\frac{2u}{t}-\frac{s_2}{t}\right]\left[f_{s_2}+f_{stu}-\frac{f_{st}+f_{su}}{2}\right]+\frac{1}{s}\left[1-\frac{u}{t}\right]f_{su}\\
&\quad+\frac{1}{s}\left[\frac{2u}{t}-1\right]f_{tu}-2\left[\frac{3}{t}+\frac{1}{s}+\frac{2}{st}(u-s_2)\right]f_{\lambda t}-\frac{1}{s}-\frac{1}{t}+\frac{2s_2}{st}\\
&\quad+\frac{1}{t^2}\left[3Q^2+4s_2\left[1-\frac{3Q^2}{t}\right]\right]-\frac{2}{t^2}\left[s+\frac{s_2^2}{s}\right]\\
&\quad+\frac{2Q^2}{st}\left[1-\frac{Q^2}{t}\right]-\frac{12s_2Q^2}{st^2}\left[1-\frac{s_2}{t}\right]\left[1-\frac{Q^2}{t}\right]\Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{A12}
$$

$$
\begin{aligned}
C^{GG}(s,t,u,Q^2) = {} & C_A \frac{d_s f_\lambda}{\lambda} \left[\frac{t^2}{\lambda^2} \left[\frac{3}{2\lambda^2}(2s-t-u)(u^2-t^2)+2s-3t+u+\frac{t^2-u^2}{s} \right] - \frac{3s}{2} - t\left[\frac{9}{2}+\frac{5t}{s}+\frac{3u}{s}\right]\right] \\
& + C_A \frac{f_\lambda}{\lambda} \left[\frac{t^2}{\lambda^2} \left[\frac{3}{2\lambda^2}(u^2-t^2)+1 \right] \frac{Q^2-s_2}{s} - \frac{11}{4s}(Q^2-s_2) - 4\left[1+\frac{t}{s}\right]\right] \\
& + C_F \frac{f_\lambda}{\lambda}[2d_s(t+u-2s)+6] + C_A \frac{t}{\lambda^2} \left[\frac{3(t-u)^2}{\lambda^2}\left[1+\frac{t+u}{2s}-2sd_s\right]\right. \\
& \qquad + d_s(2s-3t+3u) - 1 - \frac{u}{s} + \frac{s_2(t-u)}{s^2} \\
& \qquad \left. + \left[d_s - \frac{1}{2s}\right]\frac{(t-u)^2}{s}\right] \\
& + 4C_F d_{tu} \left\{ (f_{s_2} - f_{M^2} + f_{tu}) \left[\frac{s}{2} + 2t\left[1+\frac{t}{s}\right]\right] - t\left[1+\frac{t+u}{s}\right]\right\} \\
& + 2d_s \left\{ (C_A - 2C_F)\frac{d_t t^2}{s}(f_{st}+f_{\lambda t}) + C_F d_{st}(f_{su} - f_{\lambda t} - 2f_{tu})\left[s+2u\left[1+\frac{u}{s}\right]\right]\right\} \\
& + d_s \left\{ 2C_F \left[f_{st} - \left[3+\frac{4(t+u)}{s}\right] f_{\lambda t} - \left[4+\frac{8t}{s}\right] f_{tu}\right] + \frac{C_A}{2}\left[(f_{st}+f_{\lambda t})\left[2+\frac{u+3t}{s}\right]\right.\right. \\
& \qquad \left.\left. + 1 + \frac{t(t-u)}{s^2}\right]\right\} \\
& + 2C_F d_{st}(2f_{tu}+f_{\lambda t}-f_{su})\left[2+\frac{t+u}{s}\right] + 8td_t^2[C_F(1-f_{s_2}+f_{M^2})+C_A] \\
& + (4C_F - 2C_A) d_t d_u \frac{tu}{s}(f_{s_2} - f_{tu} + f_{stu}) \\
& + d_t \left\{ (C_A - 2C_F)\left[\left[2+\frac{t+u}{s}\right](f_{st}+f_{\lambda t}) + \frac{2}{s}(u-t)(f_{s_2}+f_{stu}-f_{tu})\right]\right. \\
& \qquad \left. - 8C_F(f_{s_2} - f_{M^2} - 1) + 4C_A\left[2+\frac{u-t}{s}\right]\right\} \\
& + C_F \left\{ 2(f_{s_2} - f_{M^2})\left[\frac{2}{s} - \frac{2}{t} - \frac{1}{st}\left[u+\frac{s_2 Q^2}{t}\right]\right] + \frac{4}{s}(f_{s_2}+f_{stu}) - \frac{2}{t}\left[2+\frac{1}{s}\left[u+\frac{s_2Q^2}{t}\right]\right] f_{st}\right. \\
& \qquad \left. + \frac{1}{st}\left[4Q^2\left[1+\frac{s_2}{t}\right] - 2u\right]\right\} - \frac{C_A}{s}\left[2(f_{s_2}+f_{stu}) + \frac{f_{st}}{2} + \frac{5}{2}f_{\lambda t} + \frac{15}{4}\right]. \qquad \text{(A13)}
\end{aligned}
$$

$$C_1^{q\bar{q}}(s,t,u,Q^2)=A^{q\bar{q}}(s,t,u,Q^2)\left[\frac{1}{\omega^2}(2C_F+C_A)-\frac{1}{\omega}[3C_F-2C_Ff_s+\tfrac{11}{6}C_A+C_A(f_s-f_u-f_t)]\right.$$
$$+C_A(\tfrac{67}{18}-\tfrac{11}{6}f_A+f_A^2)+C_F(2f_t+2f_u-4f_A-3)f_{M^2}$$
$$\left.+\left[C_F-\frac{C_A}{2}\right]\left[\frac{\pi^2}{3}+(2f_A+f_s-f_t-f_u)^2\right]\right], \tag{A14}$$

$$C_2^{q\bar{q}}(s,t,u,Q^2)=\frac{1}{2}\left[\frac{u}{t}+\frac{t}{u}+\frac{2Q^2s}{tu}\right]\left[\left[\frac{f_{s_2}}{s_2}\right]_{A+}(8C_F-2C_A)\right.$$
$$\left.+\left[\frac{1}{s_2}\right]_{A+}[-\tfrac{11}{6}C_A+2C_F(f_{tu}-2f_{M^2})+(2C_F-C_A)(2f_{stu}-f_{tu})]\right]$$
$$+C_F\left[sd_t^2+2d_t-\frac{s}{tu}+d_{tu}\left[s_2+\frac{2Q^2(u-s_2)}{t}\right]-2d_tQ^2\left[\frac{1}{u}-\frac{1}{t}\right]\right]$$
$$+C_A\left[-\frac{11}{6}\frac{s}{tu}+\frac{d_t^2s^2}{u}\left[\frac{3s_2}{2t}-2\right]+\frac{2d_ts}{u}+\frac{Q^2}{3t^2}\right]$$
$$+(2C_F-C_A)\left[\frac{d_t}{u}(Q^2-u)^2\left[d_u-\frac{1}{t}\right](f_{stu}+f_{s_2}-f_{tu})+\frac{s-Q^2}{tu}(f_{stu}+f_{s_2})\right]$$
$$+f_{tu}\left[C_Fd_{tu}\left[\frac{4Q^2}{tu}(Q^2-t)^2+2(Q^2+s)-s_2\right]+C_F\frac{s_2-2s}{tu}-C_A\frac{Q^2}{tu}\right]$$
$$+C_F(f_{M^2}-f_{s_2})\left[d_{tu}\left[4(u-Q^2)-s_2-\frac{4Q^2}{tu}(u-Q^2)^2\right]+d_t^2(Q^2-u)-\frac{d_t}{t}(2Q^2-u)\right.$$
$$\left.-\frac{2}{t}+\frac{Q^2}{t^2}+\frac{4Q^2}{tu}\right]. \tag{A15}$$

$$D_{aa}^{(0)}(s,t,u,Q^2)=A^{q\bar{q}}(s,t,u,Q^2)\left[\frac{1}{3}\left[\frac{1}{\omega}+f_A-\frac{5}{3}\right]\right], \tag{A16}$$

$$D_{aa}(s,t,u,Q^2)=\frac{1}{2}\left[\frac{u}{t}+\frac{t}{u}+\frac{2sQ^2}{tu}\right]\frac{1}{3}\left[\frac{1}{s_2}\right]_{A+}+\frac{1}{3}\left[\frac{s}{tu}-\frac{Q^2}{t^2}\right]. \tag{A17}$$

$$D_{ab}(s,t,u,Q^2)=\frac{1}{2}\left\{\frac{f_\lambda Q^2}{\lambda t}\left[\frac{2s+t+u}{\lambda^2}\left[\frac{3s(t-u)^2}{\lambda^2}+u-t-s\right]-1\right]\right.$$
$$\left.+\frac{2s+t+u}{2\lambda^2t}\left[-\frac{3}{\lambda^2}(s+Q^2-s_2)(t-u)^2+3t-u+2s-2s_2\right]\right\}. \tag{A18}$$

$$
\begin{aligned}
D_{bb}(s,t,u,Q^2)=\frac{1}{2}\Bigg\{&\frac{d_s}{2}\left[\frac{u}{s}-1\right]-\frac{5}{4s}+\frac{1}{\lambda^2}\left[ud_s\left[-2s+\frac{3u}{2s}(t-u)+4u-2t\right]+\frac{u}{2s}(2s+2s_2+t-u)\right]\\
&+\frac{3u^2}{\lambda^4}(u-t)\left[d_s(2s-u-t)-\frac{s+s_2}{s}\right]+\frac{f_\lambda}{\lambda}\left[d_s\left[\frac{2u^2}{s}+\frac{5u}{2}+\frac{3s}{2}\right]+\frac{3}{4}+\frac{u}{s}-\frac{s_2}{2s}\right]\\
&+\frac{f_\lambda}{\lambda^3}\left[u^2d_s\left[3u-t-\frac{u^2}{s}+\frac{t^2}{s}-2s\right]+\frac{u}{s}\left[2s_2t-ut-2s_2^2+4us_2-3u^2+2ss_2-us\right]\right]\\
&+\frac{f_\lambda}{\lambda^5}\left[3d_su^2(u^2-t^2)(s-Q^2)+\frac{3u^2Q^2}{s}(u-t)(u+t-2s_2)\right]\Bigg\}, \qquad \text{(A19)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{ac}(s,t,u,Q^2)=\left[C_F-\frac{C_A}{2}\right]\Bigg\{&\frac{f_\lambda}{\lambda}\left[\frac{3s^2Q^2}{\lambda^4}(t-u)^2\left[\frac{1}{t}+\frac{1}{u}\right]+\frac{sQ^2}{\lambda^2}\left[\frac{5s}{t}-\frac{7s}{u}+\frac{4u}{t}-4\right]\right.\\
&\left.+\frac{1}{s_2}\left[\frac{2s^2}{u}+\frac{Q^2(2s+u)-us}{t}\right]+\frac{2s_2-u}{t}-2\right]\\
&+\frac{3sQ^2}{\lambda^4tu}(2s_2-u-t)(t-u)^2+\frac{1}{\lambda^2}\left[s(s-s_2)\left[\frac{7}{u}-\frac{5}{t}\right]\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}\left[\frac{t}{u}-\frac{u}{t}\right](10s+t+3u-2s_2)+2s-2s_2\left[1-\frac{u}{t}\right]\right]\\
&+\frac{d_ts^2}{u}\left[d_t+\frac{3}{t}\right]+\frac{f_{st}}{t}\left[\frac{1}{s_2}\left[\frac{2s^2}{u}+2s+u\right]-\frac{2Q^2}{t}\right]\\
&-\frac{1}{2u}+\frac{3}{2t}-\frac{3Q^2}{t^2}\Bigg\}. \qquad \text{(A20)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{bc}(s,t,u,Q^2)=\left[C_F-\frac{C_A}{2}\right]\Bigg[&\frac{f_\lambda}{\lambda}\Bigg[\frac{6ss_2Q^2}{\lambda^4t}(t-u)^2\\
&+\frac{1}{\lambda^2}\Bigg\{2su+\left[s_2\left[1+\frac{t}{s}\right]-\frac{t}{2s}(t+u)\right](t+u)\left[1-\frac{u}{t}\right]+\frac{3s}{2}(t-u)\left[1-\frac{u}{t}\right]\\
&-4s_2Q^2\left[1+\frac{s-u}{t}\right]\Bigg\}+d_s\left[6s+2u+\frac{t^2-u^2}{2s}\right]-1\\
&+\frac{s+4u-2s_2}{2t}+\frac{3t+2u-6s_2}{s}+\frac{u^2-2us_2+4s_2^2}{st}\Bigg]\\
&+\frac{3s_2}{\lambda^4}(t-u)^2\left[1+\frac{u}{t}-\frac{2Q^2}{t}\right]+\frac{1}{\lambda^2}\left[-\frac{t}{2}+3u+s_2+\frac{t^2-u^2}{s}-\frac{u}{2t}(u+6s_2)\right]\\
&+2d_t+d_s(f_{st}+f_{\lambda t})\left[\frac{2(s+u)}{t}+\frac{1}{2s}\left[t+\frac{u^2}{t}\right]\right]\\
&+\frac{f_{st}}{2}\left[\frac{2}{t}+\frac{3}{s}+\frac{u-2s_2}{st}\right]+\frac{f_{\lambda t}}{2}\left[-\frac{2}{t}+\frac{1}{s}-\frac{u+2s_2}{st}\right]\\
&+\frac{1}{2t}-\frac{1}{s}+\frac{1}{st}\left[2u-\frac{4s_2Q^2}{t}\right]\Bigg], \qquad \text{(A21)}
\end{aligned}
$$

$$D_{ad}(s,t,u,Q^2)=D_{ac}(s,u,t,Q^2)\,, \qquad \text{(A22)}$$

$$D_{bd}(s,t,u,Q^2)=D_{bc}(s,u,t,Q^2)\,. \qquad \text{(A23)}$$

$$D_{cc}(s,t,u,Q^2)=\frac{1}{2}\left\{\frac{f_\lambda}{\lambda}\left[\frac{s}{\lambda^2 t}(u^2-t^2)+\frac{3s+2u}{t}\right]+\frac{t+u-2s_2}{\lambda^2}\left[1-\frac{u}{t}\right]+d_t(f_{s_2}-f_{M^2})\left[sd_t+\frac{4s}{t}+\frac{2u}{t}\right]\right.$$
$$+(f_{st}-f_{M^2}+f_{s_2})\left[\frac{(s+s_2-Q^2)^2}{st^2}+\frac{1}{s}\left[\frac{u}{t}-\frac{2s_2Q^2}{t^2}\right]^2+\frac{4}{t}\left[\frac{Q^2}{t}-1\right]\right]+\frac{2f_{st}}{t}\left[1-\frac{Q^2}{t}\right]$$
$$\left.-d_t\left[sd_t-1-\frac{u}{t}\right]+\frac{2}{t}\left[\frac{u}{t}+s_2\left[\frac{1}{t}+\frac{1}{s}-\frac{s_2}{st}\right]\right]+\frac{1}{t}\left[\frac{Q^2}{t}-1\right]+\frac{12s_2Q^2}{st^3}\left[u-\frac{s_2Q^2}{t}\right]\right\}, \tag{A24}$$

$$D_{dd}(s,t,u,Q^2)=D_{cc}(s,u,t,Q^2)\ . \tag{A25}$$

$$D_{cc}(s,t,u,Q^2)=\frac{1}{2}\left\{\frac{f_\lambda}{\lambda}\left[\frac{s}{\lambda^2 t}(u^2-t^2)+\frac{3s+2u}{t}\right]+\frac{t+u-2s_2}{\lambda^2}\left[1-\frac{u}{t}\right]+d_t(f_{s_2}-f_{M^2})\left[sd_t+\frac{4s}{t}+\frac{2u}{t}\right]\right.$$
$$+(f_{st}-f_{M^2}+f_{s_2})\left[\frac{(s+s_2-Q^2)^2}{st^2}+\frac{1}{s}\left[\frac{u}{t}-\frac{2s_2Q^2}{t^2}\right]^2+\frac{4}{t}\left[\frac{Q^2}{t}-1\right]\right]+\frac{2f_{st}}{t}\left[1-\frac{Q^2}{t}\right]$$
$$\left.-d_t\left[sd_t-1-\frac{u}{t}\right]+\frac{2}{t}\left[\frac{u}{t}+s_2\left[\frac{1}{t}+\frac{1}{s}-\frac{s_2}{st}\right]\right]+\frac{1}{t}\left[\frac{Q^2}{t}-1\right]+\frac{12s_2Q^2}{st^3}\left[u-\frac{s_2Q^2}{t}\right]\right\}, \tag{A24}$$

$$D_{dd}(s,t,u,Q^2)=D_{cc}(s,u,t,Q^2)\ . \tag{A25}$$

$$E_{aa}(s,t,u,Q^2)=E_{cc}(s,t,u,Q^2)=D_{cc}(s,t,u,Q^2)\ , \tag{A28}$$
$$E_{bb}(s,t,u,Q^2)=E_{dd}(s,t,u,Q^2)=D_{dd}(s,t,u,Q^2)\ . \tag{A29}$$

$$E_{aa}(s,t,u,Q^2)=E_{cc}(s,t,u,Q^2)=D_{cc}(s,t,u,Q^2)\ , \tag{A28}$$
$$E_{bb}(s,t,u,Q^2)=E_{dd}(s,t,u,Q^2)=D_{dd}(s,t,u,Q^2)\ . \tag{A29}$$

$$E_{ac}(s,t,u,Q^2)=\left[C_F-\frac{C_A}{2}\right]\left\{(f_{st}+f_{\lambda t})\left[\frac{4d_td_ss^2}{t}-2d_t\left[1-\frac{u}{t}\right]-\frac{4}{t}\right]+\frac{4Q^2}{t^2}f_{st}\right\}, \tag{A32}$$

$$E_{ad}(s,t,u,Q^2)=\left[C_F-\frac{C_A}{2}\right]\left\{\frac{1}{s}(2f_{s_2}-f_{st}-f_{su}+2f_{stu})\left[-2-\frac{u}{t}-\frac{t}{u}+\frac{2s_2}{tu}(Q^2-s)\right]\right.$$
$$\left.-\frac{2}{s}\left[2+\frac{u}{t}+\frac{t}{u}-2s_2Q^2\left[\frac{1}{t^2}+\frac{1}{u^2}\right]\right]\right\}, \tag{A33}$$

$$E_{bc}(s,t,u,Q^2)=E_{ad}(s,u,t,Q^2)\ , \tag{A34}$$
$$E_{bd}(s,t,u,Q^2)=E_{ac}(s,u,t,Q^2)\ . \tag{A35}$$

Apéndice B

Integrales maestras en q_T

En este Apéndice detallamos las integrales maestras en momento transverso q_T y que fueron necesarias para realizar la integral de la Ec. (5.23) en la tarea de extraer al coeficiente $\mathcal{H}^{F(2)}$.

El tipo de integral que deseamos calcular se escribe a continuación

$$\lim_{Q_0\to 0}\int_{Q_0^2}^{\infty}\frac{dq_T^2}{q_T^2}\frac{\Theta(s,q_T,M)}{\sqrt{(s-M^2)^2-4sq_T^2}}\ s\ \ F(s,q_T,M)\ \ \equiv\int_{Q_0}(F)\ . \tag{B.1}$$

El término del lado derecho en la ecuación anterior está escrito como notación para simplificar los pasos futuros. Introduzcamos las siguientes convenciones

$$l_0\equiv\ln\left(\frac{M^2}{Q_0^2}\right) \tag{B.2}$$

$$1\geq z=\frac{M^2}{s}\geq 0 \tag{B.3}$$

$$l_n\equiv\ln(1-z)^{(1+n)}\ ,\qquad (n=1,2,3,...)\ . \tag{B.4}$$

Utilizando la notación precedente, las integrales de primer orden, donde la función F puede tomar los valores

$$F=\left\{1\ ;\ \frac{q_T^2}{M^2}\ ;\ \left(\frac{q_T^2}{M^2}\right)^2\right\}\ , \tag{B.5}$$

adquieren la siguiente forma:

$$\int_{Q_0}(1)=2\left[\frac{\ln(1-z)}{1-z}\right]_+-\frac{\ln z}{1-z}+\left[\frac{1}{1-z}\right]_+ l_0+\left(\frac{1}{4}l_0^2-\frac{1}{2}\zeta_2\right)\delta(1-z)\ , \tag{B.6}$$

$$\int_{Q_0}\frac{q_T^2}{M^2}=\frac{1-z}{2z}\ , \tag{B.7}$$

$$\int_{Q_0}\left(\frac{q_T^2}{M^2}\right)^2=\frac{1-z}{2z}\frac{(1-z)^2}{6z}\ , \tag{B.8}$$

donde $\zeta_2 = \pi^2/6$ y en general ζ_i es la función zeta de Riemann de argumento $\zeta_i = \zeta(i)$.

Las integrales de segundo orden, en las que la función F puede tomar los valores

$$F = \left\{ \left(\ln \frac{q_T^2}{M^2}\right)^2 \; ; \; \ln \frac{q_T^2}{M^2} \; ; \; \left(\frac{q_T^2}{M^2}\right) \ln \frac{q_T^2}{M^2} \; ; \; \left(\frac{q_T^2}{M^2}\right)^2 \ln \frac{q_T^2}{M^2} \; ; \right.$$
$$\left. \frac{1}{s}\sqrt{(s-M^2)^2 - 4sq_T^2} \; \ln \left(\frac{s - M^2 + \sqrt{(s-M^2)^2 - 4sq_T^2}}{s - M^2 - \sqrt{(s-M^2)^2 - 4sq_T^2}} \right) \right\} , \quad \text{(B.9)}$$

se especifican a continuación.

$$\int_{Q_0} \left(\ln \frac{q_T^2}{M^2}\right)^2 = \left[\frac{1}{1-z}\right]_+ \left(\frac{1}{3}\, l_0^3\right) - \frac{\ln z}{1-z}\left(l_1^2 - l_1 \ln z + \frac{1}{3}\ln^2 z - 2\zeta_2\right)$$
$$+ \left[\frac{1}{1-z}\left(\frac{1}{3}l_1^3 - 2\zeta_2\, l_1 + 4\zeta_3\right)\right]_+ + \delta(1-z)\left\{\frac{1}{8}l_0^4 + \frac{1}{2}\left(\zeta_2^2 - 7\zeta_4\right)\right\} \quad \text{(B.10)}$$

$$\int_{Q_0} \ln \frac{q_T^2}{M^2} = \left[\frac{1}{1-z}\right]_+ \left(-\frac{1}{2}l_0^2\right) - \frac{\ln z}{1-z}\left(l_1 - \frac{1}{2}\ln z\right)$$
$$+ \left[\frac{1}{1-z}\left(\frac{1}{2}l_1^2 - \zeta_2\right)\right]_+ + \delta(1-z)\left[-\frac{1}{6}l_0^3 + \zeta_3\right] \quad \text{(B.11)}$$

$$\int_{Q_0} \left(\frac{q_T^2}{M^2}\right) \ln \frac{q_T^2}{M^2} = \frac{1-z}{2z}\left[\ln\left(\frac{(1-z)^2}{z}\right) - 2\right] \quad \text{(B.12)}$$

$$\int_{Q_0} \left(\frac{q_T^2}{M^2}\right)^2 \ln \frac{q_T^2}{M^2} = \frac{1-z}{2z}\;\frac{(1-z)^2}{6z}\left[\ln \frac{(1-z)^2}{z} - \frac{5}{3}\right] \quad \text{(B.13)}$$

$$\int_{Q_0} \frac{1}{s}\sqrt{(s-M^2)^2 - 4sq_T^2} \; \ln \left(\frac{s - M^2 + \sqrt{(s-M^2)^2 - 4sq_T^2}}{s - M^2 - \sqrt{(s-M^2)^2 - 4sq_T^2}} \right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\ln \frac{(1-z)^2}{z} + l_0\right)^2 - \zeta_2 \quad \text{(B.14)}$$

donde $\zeta_4 = \pi^4/90$.

Apéndice C

Coeficientes Finitos a NNLO

En este Apéndice escribimos las contribuciones finitas para los elementos de matriz a un-loop y dos-loops, para el canal s y u según lo requerido por las Ecs. (6.64) y (6.65).

C.1. Contribuciones finitas a dos-loops

C.1.1. Canal s

$$
\begin{aligned}
A_s \;=\; & \Bigg[128\,\mathrm{Li}_4(z) - 128\,\mathrm{Li}_4(x) + 128\,\mathrm{Li}_4(y) + \left(-\frac{64}{3} + 128\,Y\right)\mathrm{Li}_3(x) \\
& + \left(\frac{64}{3}\,X - \frac{64}{3}\,\pi^2\right)\mathrm{Li}_2(x) + \frac{16}{3}\,X^4 - \frac{64}{3}\,X^3\,Y + \left(-16 + \frac{32}{3}\,\pi^2 + 32\,Y^2\right)X^2 \\
& + \left(-\frac{64}{3}\,\pi^2\,Y + 48 + \frac{160}{9}\,\pi^2\right)X + \frac{64}{3}\,\zeta_3 + \frac{224}{45}\,\pi^4 - 128\,Y\,\zeta_3\Bigg]\,\frac{t}{u} \\
& + \Bigg[\frac{32}{3}\,\mathrm{Li}_3(x) - \frac{32}{3}\,\mathrm{Li}_3(y) + \left(-\frac{32}{3}\,X - \frac{32}{3}\,Y\right)\mathrm{Li}_2(x) \\
& + \left(-\frac{32}{3}\,Y^2 - \frac{80}{9}\,\pi^2 - \frac{64}{3}\right)X + \left(\frac{64}{3} + \frac{32}{3}\,\pi^2\right)Y\Bigg]\,\frac{t^2}{s^2} + 24\,X^2\,\frac{t^2}{u^2} \\
& + \Bigg[\frac{416}{3}\,\mathrm{Li}_3(x) + 64\,\mathrm{Li}_3(y)\,X - \frac{416}{3}\,\mathrm{Li}_2(x)\,X + \left(8\,Y^2 + 16\right)X^2 \\
& + \left(-\frac{8}{3}\,Y + \frac{80}{3} + \frac{112}{9}\,\pi^2 - 64\,\zeta_3 - 64\,Y^2\right)X - \frac{416}{3}\,\zeta_3 - \frac{148}{9}\,\pi^2 + \frac{44}{45}\,\pi^4\Bigg] \\
& + \Big\{t \leftrightarrow u\Big\}
\end{aligned}
\tag{C.1}
$$

$$
\begin{aligned}
B_s \;=\; & \Bigg(-112\,\mathrm{Li}_4(z) - 88\,\mathrm{Li}_4(y) + \Bigg(-128\,Y + 48\,X - 64 \Bigg)\,\mathrm{Li}_3(x) \\
& + \Bigg(-16\,Y - 16\,X + 12 \Bigg)\,\mathrm{Li}_3(y) + \Bigg(12\,Y - 4\,Y^2 + 8\,X^2 - 8\,\pi^2 + 64\,X \Bigg)\,\mathrm{Li}_2(x) \\
& + \frac{2}{3}\,X^4 + \frac{56}{3}\,X^3\,Y + \Bigg(44\,Y - 4\,\pi^2 + 2 - 32\,Y^2 \Bigg)\,X^2 \\
& + \Bigg(-4\,Y^3 - 8 - 32\,\zeta_3 - \frac{80}{3}\,\pi^2 + 6\,Y^2 + \frac{56}{3}\,\pi^2\,Y \Bigg)\,X \\
& + Y^4 + 6\,Y^3 + \Bigg(-\frac{10}{3}\,\pi^2 - 5 \Bigg)\,Y^2 + \Bigg(-39 - 18\,\pi^2 + 144\,\zeta_3 \Bigg)\,Y \\
& + 3\,S + \frac{187}{4} - 4\,\pi^2\,S + \frac{4}{45}\,\pi^4 - 5\,\pi^2 - 20\,\zeta_3 + 48\,\zeta_3\,S \Bigg)\,\frac{t}{u} \\
& + \Bigg(-12\,X^2 + \Bigg(24\,Y + 24 \Bigg)\,X - 12\,Y^2 - 24\,Y - 12\,\pi^2 \Bigg)\,\frac{t^2}{s^2} + 8\,X^2\,\frac{t^2}{u^2} \\
& + \Bigg(-80\,\mathrm{Li}_4(y) + 32\,X\,\mathrm{Li}_3(x) + \Bigg(-128\,X - 152 \Bigg)\,\mathrm{Li}_3(y) + 152\,\mathrm{Li}_2(x)\,X \\
& + 8\,Y^2\,\mathrm{Li}_2(y) + \Bigg(-16\,Y^2 - 24 \Bigg)\,X^2 + \Bigg(60\,Y^2 + \Bigg(28 + \frac{32}{3}\,\pi^2 \Bigg)\,Y - 58 \Bigg)\,X \\
& + \frac{14}{3}\,Y^4 + \frac{44}{3}\,Y^3 + \frac{8}{3}\,Y^2\,\pi^2 + \Bigg(96\,\zeta_3 - \frac{32}{3}\,\pi^2 \Bigg)\,Y + \frac{32}{45}\,\pi^4 + 16\,\zeta_3 - \frac{86}{3}\,\pi^2 - 2 \Bigg) \\
& + \Bigg\{ t \leftrightarrow u \Bigg\}
\end{aligned}
\tag{C.2}
$$

$$
\begin{aligned}
C_s \;=\; & \Bigg[-20\,\mathrm{Li}_4(z) + 28\,\mathrm{Li}_4(x) + \Bigg(-28\,Y - 10\,X + \frac{1}{3} \Bigg)\,\mathrm{Li}_3(x) \\
& + \Bigg(6\,X^2 + \Bigg(-\frac{1}{3} - 4\,Y \Bigg)\,X - 2\,Y^2 + \frac{58}{3}\,Y + \frac{4}{3}\,\pi^2 \Bigg)\,\mathrm{Li}_2(x) \\
& + \Bigg(\frac{58}{3} - 12\,X - 12\,Y \Bigg)\,\mathrm{Li}_3(y) - \frac{1}{6}\,X^4 + \Bigg(\frac{10}{3}\,Y + \frac{13}{9} \Bigg)\,X^3 \\
& + \Bigg(-9\,Y^2 - \frac{1}{3}\,\pi^2 + \frac{4}{9} + \frac{11}{2}\,S + 13\,Y \Bigg)\,X^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(-\frac{8}{3}Y^3+\frac{50}{3}Y^2+\left(\frac{17}{3}\pi^2-\frac{28}{3}+11\,S\right)Y-\frac{563}{27}-\frac{233}{36}\pi^2+\frac{55}{3}S\right)X\\
&+\left(-\frac{2}{3}\pi^2+\frac{80}{9}\right)Y^2+\left(-\frac{284}{27}-\frac{299}{36}\pi^2+26\,\zeta_3+\frac{55}{3}S\right)Y-\frac{209}{36}\pi^2\,S\\
&-2\,\zeta_3\,S+\frac{121}{12}S^2-13\,S-\frac{1142}{81}-\frac{197}{360}\pi^4+\frac{461}{36}\pi^2-\frac{55}{18}\zeta_3\Bigg]\frac{t}{u}\\
&+\left[-\frac{5}{4}X^2+\left(\frac{5}{2}+\frac{5}{2}Y\right)X-\frac{5}{4}Y^2-\frac{5}{2}Y-\frac{5}{4}\pi^2\right]\frac{t^2}{s^2}+\frac{1}{2}X^2\,\frac{t^2}{u^2}\\
&+\Bigg[24\,\mathrm{Li}_4(y)-20\,X\,\mathrm{Li}_3(x)+\left(-40\,X-22\right)\mathrm{Li}_3(y)+22\,\mathrm{Li}_2(x)\,X+8\,Y^2\,\mathrm{Li}_2(y)\\
&+\frac{4}{3}X^3\,Y+\left(-6\,Y^2-\frac{575}{36}\right)X^2+\left(\frac{46}{3}Y^2+\left(\frac{73}{12}+4\,\pi^2\right)Y-\frac{637}{18}\right)X\\
&+\frac{1}{3}Y^4+\frac{59}{9}Y^3+\left(\frac{2}{3}\pi^2+11\,S\right)Y^2+\left(44\,\zeta_3-\frac{4}{9}\pi^2+11\,S\right)Y\\
&-\frac{38}{45}\pi^4+\frac{77}{72}\pi^2+2\,\zeta_3\Bigg]+\Big\{t\leftrightarrow u\Big\}
\end{aligned}
\tag{C.3}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{1;s}\;=\;&\Bigg[96\,\mathrm{Li}_4(z)-48\,\mathrm{Li}_4(x)+52\,\mathrm{Li}_4(y)+\left(124\,Y-8\,X+46\right)\mathrm{Li}_3(x)\\
&+\left(-16\,X^2+\left(-46+8\,Y\right)X+6\,Y^2-30\,Y+\frac{4}{3}\pi^2\right)\mathrm{Li}_2(x)\\
&+\left(-30+28\,Y+36\,X\right)\mathrm{Li}_3(y)+\frac{1}{2}X^4+\left(-\frac{56}{3}Y-\frac{100}{9}\right)X^3\\
&+\left(-\frac{125}{3}Y+39\,Y^2+\frac{214}{9}+3\,\pi^2-22\,S\right)X^2\\
&+\left(\frac{14}{3}Y^3-\frac{73}{3}Y^2+\left(-24\,\pi^2+4\right)Y+\frac{155}{9}\pi^2+\frac{148}{3}\right)X\\
&-\frac{74}{9}Y^3+\left(\frac{10}{3}\pi^2-\frac{55}{9}-11\,S\right)Y^2+\left(-33\,S+\frac{136}{9}\pi^2-140\,\zeta_3+\frac{241}{3}\right)Y\\
&-\frac{43417}{324}+\frac{23}{6}\pi^2\,S-52\,\zeta_3\,S-\frac{173}{18}\pi^2+\frac{227}{180}\pi^4+\frac{1834}{27}S+\frac{515}{9}\zeta_3\Bigg]\frac{t}{u}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left[14\,X^2+\left(-28-28\,Y\right)X+14\,Y^2+28\,Y+14\,\pi^2\right]\frac{t^2}{s^2}-5\,X^2\,\frac{t^2}{u^2}\\
&+\Bigg[-8\,\mathrm{Li}_4(y)+24\,X\,\mathrm{Li}_3(x)+\left(144\,X+120\right)\mathrm{Li}_3(y)-120\,\mathrm{Li}_2(x)\,X-20\,Y^2\,\mathrm{Li}_2(y)\\
&-\frac{8}{3}\,X^3\,Y+\left(20\,Y^2+\frac{472}{9}\right)X^2+\left(-\frac{182}{3}\,Y^2+\left(-\frac{40}{3}\,\pi^2-\frac{104}{3}\right)Y+\frac{898}{9}\right)X\\
&-3\,Y^4-\frac{184}{9}\,Y^3+\left(-22\,S-\frac{8}{3}\,\pi^2\right)Y^2+\left(-22\,S+\frac{56}{9}\,\pi^2-136\,\zeta_3\right)Y\\
&+\frac{4}{3}\,\pi^4+\frac{148}{9}\,\pi^2+2-12\,\zeta_3\Bigg]+\left\{t\leftrightarrow u\right\}
\end{aligned}
\tag{C.4}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{1;s} \;=\;&\Bigg[\frac{22}{9}\,X^3+\left(-\frac{76}{9}+4\,S+\frac{2}{3}\,Y\right)X^2+\left(\frac{1}{3}\,Y^2+Y+\frac{16}{9}\,\pi^2-\frac{7}{3}\right)X\\
&+\frac{11}{9}\,Y^3+\left(\frac{7}{9}+2\,S\right)Y^2+\left(6\,S+\frac{8}{9}\,\pi^2-\frac{37}{3}\right)Y\\
&+\frac{19}{9}\,\pi^2-\frac{328}{27}\,S+\frac{3401}{162}-\frac{2}{9}\,\zeta_3-\frac{1}{3}\,\pi^2\,S\Bigg]\frac{t}{u}\\
&+\Bigg[-\frac{46}{9}\,X^2+\left(\frac{2}{3}\,Y+\frac{2}{3}\,Y^2-\frac{76}{9}\right)X\\
&+\frac{22}{9}\,Y^3+4\,Y^2\,S+\left(\frac{16}{9}\,\pi^2+4\,S\right)Y+\frac{8}{9}\,\pi^2\Bigg]+\left\{t\leftrightarrow u\right\}
\end{aligned}
\tag{C.5}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{2;s} \;=\;&\Bigg[-\frac{4}{3}\,\mathrm{Li}_3(x)-\frac{4}{3}\,\mathrm{Li}_3(y)+\left(-\frac{4}{3}\,Y+\frac{4}{3}\,X\right)\mathrm{Li}_2(x)\\
&-\frac{11}{18}\,X^3+\left(-\frac{1}{2}\,Y+\frac{5}{6}-S\right)X^2\\
&+\left(-\frac{5}{3}\,Y^2+\left(\frac{10}{9}-2\,S\right)Y-\frac{1}{9}\,\pi^2+\frac{37}{9}-\frac{31}{6}\,S\right)X\\
&-\frac{41}{18}\,Y^2+\left(\frac{5}{9}\,\pi^2+\frac{43}{9}-\frac{31}{6}\,S\right)Y+\frac{65}{81}+\frac{19}{18}\,\pi^2\,S-\frac{11}{3}\,S^2\\
&-\frac{13}{9}\,\zeta_3+\frac{206}{27}\,S-\frac{275}{108}\,\pi^2\Bigg]\frac{t}{u}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left[-X^2+\left(2\,Y+2\right)X-Y^2-2\,Y-\pi^2\right]\frac{t^2}{s^2}\\
&+\left[\frac{14}{9}\,X^2+\left(\frac{2}{3}\,Y-\frac{1}{3}\,Y^2+\frac{38}{9}\right)X-\frac{11}{9}\,Y^3-2\,Y^2\,S\right.\\
&\left.-\frac{17}{18}\,\pi^2+\left(-\frac{8}{9}\,\pi^2-2\,S\right)Y\right]+\left\{t\leftrightarrow u\right\}
\end{aligned}
\tag{C.6}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{1;s} \;=\;& \left[\frac{5}{36}\,X^2+\left(-\frac{10}{27}+\frac{1}{3}\,S+\frac{1}{18}\,Y\right)X+\frac{5}{36}\,Y^2+\left(-\frac{10}{27}+\frac{1}{3}\,S\right)Y\right.\\
&\left.+\frac{1}{3}\,S^2+\frac{1}{54}\,\pi^2-\frac{20}{27}\,S\right]\frac{t}{u}+\left\{t\leftrightarrow u\right\}
\end{aligned}
\tag{C.7}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{2;s} \;=\;& \left[48\,\mathrm{Li}_4(z)-16\,\mathrm{Li}_4(x)+24\,\mathrm{Li}_4(y)+\left(56\,Y-8\,X+20\right)\mathrm{Li}_3(x)\right.\\
&+\left(8\,X-12+16\,Y\right)\mathrm{Li}_3(y)+\left(\frac{16}{3}\,\pi^2-20\,X-12\,Y-8\,X^2+4\,Y^2\right)\mathrm{Li}_2(x)\\
&+\frac{1}{3}\,X^4+\left(-8\,Y-\frac{70}{9}\right)X^3+\left(-4\,\pi^2+\frac{286}{9}-16\,Y+14\,Y^2-\frac{44}{3}\,S\right)X^2\\
&+\left(-\frac{22}{9}\,\pi^2+4\,Y^3-8\,\pi^2\,Y-6\,Y^2\right)X-\frac{44}{9}\,Y^3+\left(-\frac{4}{3}\,\pi^2+\frac{35}{9}-\frac{22}{3}\,S\right)Y^2\\
&+\left(57-\frac{26}{9}\,\pi^2-72\,\zeta_3-22\,S\right)Y+\frac{479}{9}\,\zeta_3+\frac{19}{60}\,\pi^4-52\,\zeta_3\,S+\frac{1141}{27}\,S-\frac{215}{18}\,\pi^2\\
&\left.-\frac{43417}{324}+\frac{23}{6}\,\pi^2\,S\right]\frac{t}{u}\\
&+\left[6\,X^2+\left(-12-12\,Y\right)X+6\,Y^2+12\,Y+6\,\pi^2\right]\frac{t^2}{s^2}-6\,X^2\,\frac{t^2}{u^2}\\
&+\left[16\,\mathrm{Li}_4(y)+48\,\mathrm{Li}_3(x)\,Y+64\,\mathrm{Li}_3(y)-8\,Y^2\,\mathrm{Li}_2(y)-64\,\mathrm{Li}_2(x)\,X\right.\\
&-\frac{4}{3}\,X^4+\left(-\frac{20}{3}\,\pi^2+6\,Y^2\right)X^2+\left(-24\,Y^2+\left(-\frac{16}{3}\,\pi^2-14\right)Y-\frac{148}{9}\,\pi^2\right)X\\
&\left.-\frac{112}{9}\,Y^3+\left(-\frac{44}{3}\,S+\frac{298}{9}\right)Y^2+\left(\frac{538}{9}-48\,\zeta_3-\frac{44}{3}\,S\right)Y-8\,\zeta_3-\frac{1}{3}\,\pi^4+\frac{61}{9}\,\pi^2\right]\\
&+\left\{t\leftrightarrow u\right\}
\end{aligned}
\tag{C.8}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{3;s} \;=\; & \Bigg[\frac{16}{9}\,X^3 + \left(-\frac{76}{9} + \frac{8}{3}\,S\right) X^2 + \frac{16}{9}\,\pi^2\,X \\
& + \frac{8}{9}\,Y^3 + \left(\frac{4}{3}\,S - \frac{2}{9}\right) Y^2 + \left(\frac{8}{9}\,\pi^2 + 4\,S - 10\right) Y \\
& - \frac{1}{3}\,\pi^2\,S - \frac{202}{27}\,S + \frac{19}{9}\,\pi^2 - \frac{2}{9}\,\zeta_3 + \frac{3401}{162}\Bigg]\,\frac{t}{u} \\
& + \Bigg[\frac{16}{9}\,\pi^2\,X + \frac{16}{9}\,Y^3 + \left(\frac{8}{3}\,S - \frac{52}{9}\right) Y^2 \\
& + \left(-\frac{76}{9} + \frac{8}{3}\,S\right) Y + \frac{8}{9}\,\pi^2\Bigg] + \Big\{t \leftrightarrow u\Big\}
\end{aligned}
\tag{C.9}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{4;s} \;=\; & \Bigg[\frac{16}{9}\,Y^3 - \frac{4}{9}\,Y^2 + \frac{16}{3}\,Y^2\,S - 20\,Y + \frac{64}{9}\,\pi^2\,Y + 16\,Y\,S \\
& + \frac{32}{9}\,X^3 - \frac{152}{9}\,X^2 + \frac{32}{3}\,X^2\,S + \frac{128}{9}\,\pi^2\,X \\
& - \frac{2}{3}\,\pi^2\,S + \frac{110}{9}\,\pi^2 + \frac{3401}{81} - \frac{908}{27}\,S - \frac{4}{9}\,\zeta_3\Bigg]\,\frac{t}{u} \\
& + \Bigg[\frac{32}{9}\,X^3 - \frac{104}{9}\,X^2 + \frac{32}{3}\,X^2\,S - \frac{152}{9}\,X + \frac{32}{3}\,X\,S \\
& + \frac{128}{9}\,\pi^2\,X + \frac{64}{9}\,\pi^2\Bigg] + \Big\{t \leftrightarrow u\Big\}
\end{aligned}
\tag{C.10}
$$

$$
F_{2;s} \;=\; \left[-\frac{92}{27}\,\pi^2 + \frac{32}{9}\,S^2 - \frac{160}{27}\,S\right]\frac{t}{u} + \Big\{t \leftrightarrow u\Big\}
\tag{C.11}
$$

C.1.2. Canal u

$$
\begin{aligned}
A_u \;=\; & \left[24\,\pi^2 - 48\,X\,Y + 24\,Y^2 + 24\,X^2\right]\frac{t^2}{s^2} + 24\,Y^2\,\frac{s^2}{t^2} \\
& + \Bigg[\left(64\,Y + \frac{32}{3}\right)\mathrm{Li}_3(x) + 64\,\mathrm{Li}_3(y)\,X - \frac{32}{3}\,\mathrm{Li}_2(x)\,X + \left(-8 + 16\,Y^2\right) X^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\left(-\frac{64}{3}\pi^2+16\right)Y-\frac{16}{9}\pi^2+24-64\,\zeta_3+\frac{32}{3}Y^3-\frac{32}{3}Y^2\right)X+\frac{64}{9}Y^3\\
&+\left(-48+64\,\zeta_3+\frac{32}{9}\pi^2\right)Y+\left(-\frac{16}{3}\pi^2-16\right)Y^2-\frac{16}{3}Y^4-8\,\pi^2+\frac{32}{3}\zeta_3\\
&+\frac{88}{45}\pi^4\Bigg]\frac{t^2+s^2}{st}\\
&+\Bigg[-128\,\mathrm{Li}_4(x)-128\,\mathrm{Li}_4(y)+128\,\mathrm{Li}_4(z)+\left(64\,Y+\frac{32}{3}\right)\mathrm{Li}_3(x)\\
&+\left(128\,Y+\frac{64}{3}-64\,X\right)\mathrm{Li}_3(y)+\left(-\frac{32}{3}X+\frac{64}{3}Y+\frac{64}{3}\pi^2\right)\mathrm{Li}_2(x)\\
&+\frac{16}{3}X^4-\frac{64}{3}X^3\,Y+\left(16\,Y^2-8+\frac{32}{3}\pi^2\right)X^2\\
&+\left(\frac{32}{3}Y^2+\frac{32}{3}Y^3+64\,\zeta_3-\frac{16}{9}\pi^2+24+16\,Y\right)X+\frac{88}{15}\pi^4-\frac{32}{3}\zeta_3\\
&+\left(-\frac{32}{9}\pi^2-64\,\zeta_3\right)Y+16\,Y^2\,\pi^2-8\,\pi^2\Bigg]\frac{t^2-s^2}{st}\\
&+\Bigg[-\frac{32}{3}\mathrm{Li}_3(x)-\frac{64}{3}\mathrm{Li}_3(y)+\left(\frac{32}{3}X-\frac{64}{3}Y\right)\mathrm{Li}_2(x)\\
&+\left(-\frac{32}{3}Y^2-\frac{64}{3}+\frac{16}{9}\pi^2\right)X+\frac{32}{9}\pi^2\,Y+\frac{32}{3}\zeta_3\Bigg]\frac{t^2-s^2}{u^2}\\
&+\Bigg[\left(64\,Y-\frac{416}{3}\right)\mathrm{Li}_3(x)+64\,\mathrm{Li}_3(y)\,X+\frac{416}{3}\mathrm{Li}_2(x)\,X+\left(64\,Y+16+16\,Y^2\right)X^2\\
&+\left(-\frac{160}{3}Y^2+\frac{32}{3}Y^3+\left(-\frac{80}{3}-\frac{64}{3}\pi^2\right)Y+\frac{208}{9}\pi^2-64\,\zeta_3+\frac{80}{3}\right)X+\frac{320}{9}Y^3\\
&+\left(-\frac{160}{3}+\frac{160}{9}\pi^2+64\,\zeta_3\right)Y+\left(-\frac{16}{3}\pi^2+\frac{80}{3}\right)Y^2-\frac{16}{3}Y^4+\frac{88}{45}\pi^4-\frac{200}{9}\pi^2\\
&-\frac{416}{3}\zeta_3\Bigg]
\end{aligned}
\tag{C.12}
$$

$$
\begin{aligned}
B_u \;=\;& -12\,X^2\,\frac{t^2+s^2}{u^2}+24\,X\,\frac{t^2-s^2}{u^2}\\
&+8\,Y^2\,\frac{s^2}{t^2}+\Bigg[-16\,X\,Y+8\,Y^2+8\,\pi^2+8\,X^2\Bigg]\frac{t^2}{s^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\Bigg[44\,\mathrm{Li}_4(z)+44\,\mathrm{Li}_4(y)+\Bigg(-16\,X-56\,Y+26\Bigg)\,\mathrm{Li}_3(x)-88\,\mathrm{Li}_3(y)\,X\\
&+\Bigg(-6\,X^2+\Bigg(12\,Y-26\Bigg)\,X-6\,\pi^2\Bigg)\,\mathrm{Li}_2(x)+5\,X^4+\Bigg(-20\,Y+3\Bigg)\,X^3\\
&+\Bigg(-\frac{3}{2}+\frac{10}{3}\,\pi^2-28\,Y+Y^2\Bigg)\,X^2+\Bigg(-\frac{28}{3}\,Y^3+40\,Y^2+\Bigg(\frac{20}{3}\,\pi^2+3\Bigg)\,Y\\
&-\frac{1}{3}\,\pi^2-\frac{47}{2}+72\,\zeta_3\Bigg)\,X+\frac{14}{3}\,Y^4-\frac{80}{3}\,Y^3+\Bigg(-3-\frac{10}{3}\,\pi^2\Bigg)\,Y^2\\
&+\Bigg(47-56\,\zeta_3-\frac{28}{3}\,\pi^2\Bigg)\,Y-\frac{13}{2}\,\pi^2-46\,\zeta_3-4\,\pi^2\,U-\frac{28}{9}\,\pi^4\\
&+3\,U+48\,\zeta_3\,U+\frac{187}{4}\Bigg]\,\frac{t^2+s^2}{st}\\
&+\Bigg[-44\,\mathrm{Li}_4(z)+44\,\mathrm{Li}_4(y)+112\,\mathrm{Li}_4(x)\\
&+\Bigg(-32\,X+38-24\,Y\Bigg)\,\mathrm{Li}_3(x)+\Bigg(24\,X-48\,Y+76\Bigg)\,\mathrm{Li}_3(y)\\
&+\Bigg(-2\,X^2+\Bigg(-38+4\,Y\Bigg)\,X+76\,Y-4\,Y^2+6\,\pi^2\Bigg)\,\mathrm{Li}_2(x)\\
&+\frac{1}{3}\,X^4+\Bigg(-\frac{4}{3}\,Y-3\Bigg)\,X^3+\Bigg(-6\,\pi^2-Y^2+\frac{7}{2}-16\,Y\Bigg)\,X^2\\
&+\Bigg(-8\,Y^3+54\,Y^2+\Bigg(12\,\pi^2-7\Bigg)\,Y-\frac{7}{3}\,\pi^2-56\,\zeta_3+\frac{31}{2}\Bigg)\,X\\
&-\frac{4}{3}\,Y^2\,\pi^2+\Bigg(24\,\zeta_3-\frac{86}{3}\,\pi^2\Bigg)\,Y-\frac{206}{45}\,\pi^4-38\,\zeta_3+\frac{7}{2}\,\pi^2\Bigg]\,\frac{t^2-s^2}{st}\\
&+\Bigg[80\,\mathrm{Li}_4(z)+80\,\mathrm{Li}_4(y)+\Bigg(-96\,Y-32\,X+152\Bigg)\,\mathrm{Li}_3(x)-160\,\mathrm{Li}_3(y)\,X\\
&+\Bigg(-8\,X^2+\Bigg(-152+16\,Y\Bigg)\,X-8\,\pi^2\Bigg)\,\mathrm{Li}_2(x)+8\,X^4+\Bigg(\frac{44}{3}-32\,Y\Bigg)\,X^3\\
&+\Bigg(\frac{16}{3}\,\pi^2-4\,Y^2-104\,Y-24\Bigg)\,X^2+\Bigg(-16\,Y^3+72\,Y^2+\Bigg(16\,\pi^2-8\Bigg)\,Y\\
&+\frac{4}{3}\,\pi^2+128\,\zeta_3-58\Bigg)\,X+8\,Y^4-48\,Y^3+\Bigg(8-\frac{8}{3}\,\pi^2\Bigg)\,Y^2\\
&+\Bigg(116-\frac{56}{3}\,\pi^2-96\,\zeta_3\Bigg)\,Y-4-\frac{76}{3}\,\pi^2-120\,\zeta_3-\frac{24}{5}\,\pi^4\Bigg]
\end{aligned}
\tag{C.13}
$$

$$
\begin{aligned}
C_u \;=\; & \left[-X\,Y + \frac{1}{2}\,\pi^2 + \frac{1}{2}\,Y^2 + \frac{1}{2}\,X^2 \right] \frac{t^2}{s^2} + \frac{1}{2}\,Y^2\,\frac{s^2}{t^2} \\
& - \frac{5}{4}\,X^2\,\frac{t^2+s^2}{u^2} + \frac{5}{2}\,X\,\frac{t^2-s^2}{u^2} \\
& + \Bigg[-14\,\mathrm{Li}_4(y) - 14\,\mathrm{Li}_4(z) + \left(-\frac{59}{6} + 11\,X - 31\,Y \right) \mathrm{Li}_3(x) - 9\,\mathrm{Li}_3(y)\,X \\
& + \left(-4\,X^2 + \left(\frac{59}{6} + 8\,Y \right) X - 4\,\pi^2 \right) \mathrm{Li}_2(x) - \frac{1}{4}\,X^4 + \left(\frac{4}{3}\,Y + \frac{13}{18} \right) X^3 \\
& + \left(-\frac{7}{2}\,Y^2 - \frac{22}{3}\,Y - \frac{5}{2}\,\pi^2 + \frac{11}{4}\,U + \frac{14}{3} \right) X^2 \\
& + \left(-\frac{4}{3}\,Y^3 + \frac{55}{2}\,Y^2 + \left(\frac{35}{6}\,\pi^2 - \frac{33}{2}\,U \right) Y + 2\,\zeta_3 + \frac{55}{3}\,U - \frac{847}{54} + \frac{1}{18}\,\pi^2 \right) X \\
& + \frac{2}{3}\,Y^4 - \frac{55}{3}\,Y^3 + \left(-\frac{1}{2}\,\pi^2 + \frac{33}{2}\,U \right) Y^2 + \left(\frac{847}{27} - \frac{28}{9}\,\pi^2 + 5\,\zeta_3 - \frac{110}{3}\,U \right) Y \\
& - \frac{1142}{81} + \frac{61}{9}\,\zeta_3 - 13\,U - \frac{166}{9}\,\pi^2 + \frac{47}{360}\,\pi^4 - 2\,\zeta_3\,U + \frac{143}{18}\,\pi^2\,U + \frac{121}{12}\,U^2 \Bigg] \frac{t^2+s^2}{st} \\
& + \Bigg[20\,\mathrm{Li}_4(x) + 14\,\mathrm{Li}_4(y) - 14\,\mathrm{Li}_4(z) + \left(-7\,Y + \frac{19}{2} - X \right) \mathrm{Li}_3(x) \\
& + \left(-14\,Y + 7\,X + 19 \right) \mathrm{Li}_3(y) + \left(-2\,X^2 - \frac{19}{2}\,X + \frac{2}{3}\,\pi^2 + 19\,Y \right) \mathrm{Li}_2(x) \\
& - \frac{1}{4}\,X^4 + \left(\frac{2}{3}\,Y + \frac{13}{18} \right) X^3 + \left(-\frac{3}{2}\,Y^2 - \frac{38}{9} - \frac{3}{2}\,\pi^2 - 10\,Y + \frac{11}{4}\,U \right) X^2 \\
& + \left(-\frac{4}{3}\,Y^3 + \frac{39}{2}\,Y^2 + \left(\frac{76}{9} + \frac{13}{6}\,\pi^2 - \frac{11}{2}\,U \right) Y + \frac{77}{36}\,\pi^2 - \frac{31}{6} - 12\,\zeta_3 \right) X \\
& - \frac{3}{2}\,Y^2\,\pi^2 + \left(7\,\zeta_3 - \frac{79}{6}\,\pi^2 \right) Y - \frac{19}{2}\,\zeta_3 - \frac{38}{9}\,\pi^2 - \frac{5}{6}\,\pi^4 + \frac{11}{4}\,\pi^2\,U \Bigg] \frac{t^2-s^2}{st} \\
& + \Bigg[-24\,\mathrm{Li}_4(y) - 24\,\mathrm{Li}_4(z) + \left(22 - 60\,Y + 20\,X \right) \mathrm{Li}_3(x) - 20\,\mathrm{Li}_3(y)\,X \\
& + \left(-8\,X^2 + \left(-22 + 16\,Y \right) X - 8\,\pi^2 \right) \mathrm{Li}_2(x) - \frac{2}{3}\,X^4 + \left(\frac{4}{3}\,Y + \frac{59}{9} \right) X^3 \\
& + \left(-35\,Y - \frac{4}{3}\,\pi^2 - \frac{575}{36} - 6\,Y^2 + 11\,U \right) X^2 + \Bigg(-\frac{8}{3}\,Y^3 + \frac{131}{3}\,Y^2 \\
& + \left(\frac{26}{3}\,\pi^2 - 22\,U + \frac{178}{9} \right) Y + 11\,U - \frac{637}{18} + 24\,\zeta_3 + \frac{53}{9}\,\pi^2 \Bigg) X
\end{aligned}
$$

$$+\frac{4}{3}\,Y^4-\frac{262}{9}\,Y^3+\left(-\frac{178}{9}+\frac{2}{3}\,\pi^2+22\,U\right)Y^2+\left(\frac{637}{9}-28\,\zeta_3-\frac{67}{9}\,\pi^2-22\,U\right)Y$$
$$-18\,\zeta_3+\frac{2}{45}\,\pi^4+11\,\pi^2\,U-\frac{71}{3}\,\pi^2\Bigg] \tag{C.14}$$

$$\begin{aligned}
D_{1;u} \;=\;& \Bigg[10\,X\,Y-5\,\pi^2-5\,Y^2-5\,X^2\Bigg]\frac{t^2}{s^2}-5\,Y^2\,\frac{s^2}{t^2}\\
&+14\,X^2\,\frac{t^2+s^2}{u^2}-28\,X\,\frac{t^2-s^2}{u^2}\\
&+\Bigg[-2\,\mathrm{Li}_4(y)-2\,\mathrm{Li}_4(z)+\left(-8-10\,X+90\,Y\right)\mathrm{Li}_3(x)+70\,\mathrm{Li}_3(y)\,X\\
&+\left(11\,X^2+\left(8-22\,Y\right)X+11\,\pi^2\right)\mathrm{Li}_2(x)-\frac{11}{6}\,X^4+\left(\frac{28}{3}\,Y-\frac{29}{3}\right)X^3\\
&+\left(-\frac{33}{2}\,U+\frac{53}{6}+47\,Y+\frac{13}{2}\,Y^2\right)X^2+\left(\frac{22}{3}\,Y^3-75\,Y^2+\left(-\frac{65}{3}-15\,\pi^2+33\,U\right)Y\right.\\
&\left.+\frac{389}{6}-60\,\zeta_3-\frac{31}{3}\,\pi^2-\frac{33}{2}\,U\right)X-\frac{11}{3}\,Y^4+50\,Y^3+\left(\frac{8}{3}\,\pi^2+\frac{65}{3}-33\,U\right)Y^2\\
&+\left(50\,\zeta_3+\frac{29}{3}\,\pi^2-\frac{389}{3}+33\,U\right)Y+\frac{587}{9}\,\zeta_3+\frac{326}{9}\,\pi^2-52\,\zeta_3\,U+\frac{61}{36}\,\pi^4\\
&+\frac{1834}{27}\,U-\frac{43417}{324}-\frac{38}{3}\,\pi^2\,U\Bigg]\frac{t^2+s^2}{st}\\
&+\Bigg[-96\,\mathrm{Li}_4(x)-50\,\mathrm{Li}_4(y)+50\,\mathrm{Li}_4(z)+\left(18\,X+26\,Y-38\right)\mathrm{Li}_3(x)\\
&+\left(52\,Y-26\,X-76\right)\mathrm{Li}_3(y)+\left(5\,X^2+\left(-2\,Y+38\right)X-76\,Y+2\,Y^2-\frac{13}{3}\,\pi^2\right)\mathrm{Li}_2(x)\\
&+\frac{1}{3}\,X^4+\left(-\frac{2}{3}\,Y-\frac{13}{9}\right)X^3+\left(\frac{269}{18}+6\,\pi^2-\frac{11}{2}\,U+28\,Y+\frac{7}{2}\,Y^2\right)X^2\\
&+\left(\frac{20}{3}\,Y^3-66\,Y^2+\left(-\frac{269}{9}-\frac{31}{3}\,\pi^2+11\,U\right)Y+\frac{8}{9}\,\pi^2+52\,\zeta_3+\frac{33}{2}\,U-\frac{31}{2}\right)X\\
&+\frac{11}{3}\,Y^2\,\pi^2+\left(-26\,\zeta_3+\frac{122}{3}\,\pi^2\right)Y+38\,\zeta_3+\frac{178}{45}\,\pi^4+\frac{269}{18}\,\pi^2-\frac{11}{2}\,\pi^2\,U\Bigg]\frac{t^2-s^2}{st}\\
&+\Bigg[8\,\mathrm{Li}_4(y)+8\,\mathrm{Li}_4(z)+\left(-120+168\,Y-24\,X\right)\mathrm{Li}_3(x)+120\,\mathrm{Li}_3(y)\,X\\
&+\left(20\,X^2+\left(120-40\,Y\right)X+20\,\pi^2\right)\mathrm{Li}_2(x)-\frac{8}{3}\,X^4+\left(\frac{40}{3}\,Y-\frac{184}{9}\right)X^3
\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{472}{9}+14\,Y^2+122\,Y-22\,U\right)X^2+\left(\frac{40}{3}\,Y^3-\frac{370}{3}\,Y^2+\left(-\frac{76}{3}\,\pi^2+44\,U-\frac{320}{9}\right)Y\right.$$
$$\left.-\frac{112}{9}\,\pi^2+\frac{898}{9}-112\,\zeta_3-22\,U\right)X-\frac{20}{3}\,Y^4+\frac{740}{9}\,Y^3+\left(\frac{320}{9}-44\,U\right)Y^2$$
$$\left.+\left(44\,U+\frac{218}{9}\,\pi^2+104\,\zeta_3-\frac{1796}{9}\right)Y+96\,\zeta_3+\frac{104}{45}\,\pi^4+4-22\,\pi^2\,U+60\,\pi^2\right] \qquad \text{(C.15)}$$

$$\begin{aligned}
E_{1;u} \;=\; & \left[\frac{11}{6}\,X^3+\left(3\,U-\frac{23}{6}-6\,Y\right)X^2+\left(7\,Y^2+\left(-6\,U+\frac{20}{3}\right)Y+\frac{11}{6}\,\pi^2-\frac{22}{3}+3\,U\right)X\right.\\
& -\frac{14}{3}\,Y^3+\left(-\frac{20}{3}+6\,U\right)Y^2+\left(-6\,U+\frac{44}{3}+\frac{4}{3}\,\pi^2\right)Y\\
& \left.-\frac{2}{9}\,\zeta_3+\frac{8}{3}\,\pi^2\,U-\frac{121}{18}\,\pi^2+\frac{3401}{162}-\frac{328}{27}\,U\right]\frac{t^2+s^2}{st}\\
& +\left[\frac{11}{18}\,X^3+\left(-\frac{83}{18}+U-2\,Y\right)X^2+\left(2\,Y^2+\left(\frac{83}{9}-2\,U\right)Y-3\,U+5+\frac{11}{18}\,\pi^2\right)X\right.\\
& \left.-2\,\pi^2\,Y+\frac{1}{18}\,\pi^2\left(-83+18\,U\right)\right]\frac{t^2-s^2}{st}\\
& +\left[\frac{22}{9}\,X^3+\left(-\frac{46}{9}+4\,U-8\,Y\right)X^2+\left(\frac{28}{3}\,Y^2+\left(\frac{80}{9}-8\,U\right)Y+\frac{22}{9}\,\pi^2-\frac{76}{9}+4\,U\right)X\right.\\
& \left.-\frac{56}{9}\,Y^3+\left(-\frac{80}{9}+8\,U\right)Y^2+\left(\frac{152}{9}-8\,U+\frac{16}{9}\,\pi^2\right)Y+2\,\pi^2\left(-5+2\,U\right)\right] \qquad \text{(C.16)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{2;u} \;=\; & \left[\frac{4}{3}\,\mathrm{Li}_3(x)-\frac{4}{3}\,\mathrm{Li}_2(x)\,X-\frac{11}{36}\,X^3+\left(\frac{4}{3}\,Y-\frac{13}{18}-\frac{1}{2}\,U\right)X^2\right.\\
& +\left(-\frac{7}{2}\,Y^2+\left(\frac{1}{3}+3\,U\right)Y+\frac{1}{36}\,\pi^2-\frac{31}{6}\,U+\frac{40}{9}\right)X\\
& +\frac{7}{3}\,Y^3+\left(-\frac{1}{3}-3\,U\right)Y^2+\left(\frac{31}{3}\,U-\frac{5}{9}\,\pi^2-\frac{80}{9}\right)Y\\
& \left.-\frac{25}{9}\,\zeta_3-\frac{13}{9}\,\pi^2\,U-\frac{11}{3}\,U^2+\frac{206}{27}\,U+\frac{65}{81}+\frac{487}{108}\,\pi^2\right]\frac{t^2+s^2}{st}\\
& +\left[-\frac{11}{36}\,X^3+\left(\frac{14}{9}-\frac{1}{2}\,U+Y\right)X^2+\left(-Y^2+\left(-\frac{28}{9}+U\right)Y-\frac{11}{36}\,\pi^2-\frac{1}{3}\right)X\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\pi^2\,Y-\frac{1}{18}\,\pi^2\,\Bigg(-28+9\,U\Bigg)\Bigg]\,\frac{t^2-s^2}{st}\\
&-X^2\,\frac{t^2+s^2}{u^2}+2\,X\,\frac{t^2-s^2}{u^2}\\
&+\Bigg[-\frac{11}{9}\,X^3+\Bigg(\frac{14}{9}-2\,U+4\,Y\Bigg)\,X^2\\
&+\Bigg(-\frac{14}{3}\,Y^2+\Bigg(-\frac{40}{9}+4\,U\Bigg)\,Y+\frac{38}{9}-2\,U-\frac{11}{9}\,\pi^2\Bigg)\,X+\Bigg(-\frac{76}{9}+4\,U-\frac{8}{9}\,\pi^2\Bigg)\,Y\\
&+\frac{28}{9}\,Y^3+\Bigg(\frac{40}{9}-4\,U\Bigg)\,Y^2-\pi^2\,\Bigg(-5+2\,U\Bigg)\Bigg]
\end{aligned}
\tag{C.17}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{1;u} \;=\;& \Bigg[\frac{5}{36}\,X^2+\Bigg(\frac{1}{3}\,U-\frac{10}{27}-\frac{1}{3}\,Y\Bigg)\,X+\frac{1}{3}\,Y^2+\Bigg(\frac{20}{27}-\frac{2}{3}\,U\Bigg)\,Y\\
&-\frac{20}{27}\,U-\frac{13}{108}\,\pi^2+\frac{1}{3}\,U^2\Bigg]\,\frac{t^2+s^2}{st}
\end{aligned}
\tag{C.18}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{2;u} \;=\;& \Bigg[-6\,\pi^2-6\,Y^2+12\,X\,Y-6\,X^2\Bigg]\,\frac{t^2}{s^2}-6\,Y^2\,\frac{s^2}{t^2}\\
&+6\,X^2\,\frac{t^2+s^2}{u^2}-12\,X\,\frac{t^2-s^2}{u^2}\\
&+\Bigg[-4\,\mathrm{Li}_4(y)-4\,\mathrm{Li}_4(z)+\Bigg(-4-4\,X+36\,Y\Bigg)\,\mathrm{Li}_3(x)+28\,\mathrm{Li}_3(y)\,X\\
&+\Bigg(6\,X^2-12\,X\,Y+6\,\pi^2+4\,X\Bigg)\,\mathrm{Li}_2(x)+20\,Y^3+\Bigg(\frac{107}{3}+3\,X^2-22\,U-30\,X\Bigg)\,Y^2\\
&+\Bigg(4\,X^3+24\,X^2+\Bigg(-4\,\pi^2+22\,U-\frac{107}{3}\Bigg)\,X-57+36\,\zeta_3+22\,U-\frac{2}{3}\,\pi^2\Bigg)\,Y\\
&-X^4-\frac{19}{3}\,X^3+\Bigg(-11\,U+\frac{107}{6}+\frac{1}{3}\,\pi^2\Bigg)\,X^2+\Bigg(-11\,U-32\,\zeta_3+\frac{57}{2}-\frac{20}{3}\,\pi^2\Bigg)\,X\\
&-\frac{43417}{324}-\frac{43}{6}\,\pi^2\,U-52\,\zeta_3\,U+\frac{515}{9}\,\zeta_3+\frac{251}{9}\,\pi^2+\frac{1141}{27}\,U+\frac{65}{36}\,\pi^4\Bigg]\,\frac{t^2+s^2}{st}\\
&+\Bigg[-20\,\mathrm{Li}_4(y)-48\,\mathrm{Li}_4(x)+20\,\mathrm{Li}_4(z)+\Bigg(12\,Y-16+12\,X\Bigg)\,\mathrm{Li}_3(x)\\
&+\Bigg(4\,Y^2+\Bigg(-4\,X-32\Bigg)\,Y+2\,X^2+16\,X-\frac{10}{3}\,\pi^2\Bigg)\,\mathrm{Li}_2(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(-12\,X+24\,Y-32\right)\mathrm{Li}_3(y)+4\,Y^3\,X+\left(-\frac{94}{3}\,X+X^2+\frac{4}{3}\,\pi^2\right)Y^2\\
&+\left(\frac{46}{3}\,X^2+\left(-\frac{20}{3}\,\pi^2+\frac{22}{3}\,U-\frac{251}{9}\right)X-12\,\zeta_3+\frac{62}{3}\,\pi^2\right)Y\\
&-\frac{13}{9}\,X^3+\left(\frac{251}{18}+3\,\pi^2-\frac{11}{3}\,U\right)X^2+\left(-\frac{16}{9}\,\pi^2+24\,\zeta_3-\frac{57}{2}+11\,U\right)X\\
&+16\,\zeta_3+\frac{251}{18}\,\pi^2-\frac{11}{3}\,\pi^2\,U+\frac{94}{45}\,\pi^4\Bigg]\frac{t^2-s^2}{st}\\
&+\Bigg[-16\,\mathrm{Li}_4(y)-16\,\mathrm{Li}_4(z)+\left(-64+48\,Y\right)\mathrm{Li}_3(x)+48\,\mathrm{Li}_3(y)\,X\\
&+\left(-16\,X\,Y+64\,X+8\,X^2+8\,\pi^2\right)\mathrm{Li}_2(x)+\frac{272}{9}\,Y^3\\
&+\left(4\,X^2+\frac{344}{9}-\frac{136}{3}\,X-\frac{88}{3}\,U\right)Y^2+\left(8\,X^3+\frac{184}{3}\,X^2+\left(\frac{88}{3}\,U-\frac{344}{9}-\frac{16}{3}\,\pi^2\right)X\right.\\
&\left.+\frac{88}{3}\,U+\frac{32}{9}\,\pi^2+48\,\zeta_3-\frac{1076}{9}\right)Y-2\,X^4-\frac{112}{9}\,X^3+\left(-\frac{44}{3}\,U+\frac{298}{9}\right)X^2\\
&+\left(-\frac{76}{9}\,\pi^2-\frac{44}{3}\,U+\frac{538}{9}-48\,\zeta_3\right)X+48\,\pi^2+48\,\zeta_3-\frac{44}{3}\,\pi^2\,U+\frac{92}{45}\,\pi^4\Bigg]
\end{aligned}
\tag{C.19}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{3;u}\;=\;&\Bigg[-\frac{8}{3}\,Y^3+\left(4\,U-\frac{26}{3}+4\,X\right)Y^2+\left(-4\,X^2+\left(\frac{26}{3}-4\,U\right)X+\frac{4}{3}\,\pi^2+10-4\,U\right)Y\\
&+\frac{4}{3}\,X^3+\left(2\,U-\frac{13}{3}\right)X^2+\left(\frac{4}{3}\,\pi^2+2\,U-5\right)X\\
&-\frac{2}{9}\,\zeta_3+\frac{5}{3}\,\pi^2\,U+\frac{3401}{162}-\frac{56}{9}\,\pi^2-\frac{202}{27}\,U\Bigg]\frac{t^2+s^2}{st}\\
&+\Bigg[\frac{4}{3}\,Y^2\,X+\left(-\frac{4}{3}\,X^2+\left(-\frac{4}{3}\,U+\frac{74}{9}\right)X-\frac{4}{3}\,\pi^2\right)Y+\frac{4}{9}\,X^3+\left(-\frac{37}{9}+\frac{2}{3}\,U\right)X^2\\
&+\left(-2\,U+5+\frac{4}{9}\,\pi^2\right)X+\frac{1}{9}\,\pi^2\left(-37+6\,U\right)\Bigg]\frac{t^2-s^2}{st}\\
&+\Bigg[-\frac{32}{9}\,Y^3+\left(\frac{16}{3}\,U+\frac{16}{3}\,X-\frac{104}{9}\right)Y^2+\left(-\frac{16}{3}\,X^2+\left(-\frac{16}{3}\,U+\frac{104}{9}\right)X\right.\\
&\left.+\frac{152}{9}-\frac{16}{3}\,U+\frac{16}{9}\,\pi^2\right)Y+\frac{16}{9}\,X^3+\left(\frac{8}{3}\,U-\frac{52}{9}\right)X^2+\left(\frac{8}{3}\,U-\frac{76}{9}+\frac{16}{9}\,\pi^2\right)X\\
&+\frac{4}{3}\,\pi^2\left(2\,U-7\right)\Bigg]
\end{aligned}
\tag{C.20}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{4;u} \;=\; & \Bigg[\frac{8}{3}X^3 + \left(8\,U - \frac{26}{3} - 8\,Y\right)X^2 + \left(8\,Y^2 + \left(\frac{52}{3} - 16\,U\right)Y + 8\,U + \frac{8}{3}\pi^2 - 10\right)X \\
& -\frac{16}{3}Y^3 + \left(-\frac{52}{3} + 16\,U\right)Y^2 + \left(\frac{8}{3}\pi^2 - 16\,U + 20\right)Y \\
& -\frac{112}{9}\pi^2 - \frac{908}{27}U - \frac{4}{9}\zeta_3 + \frac{22}{3}\pi^2\,U + \frac{3401}{81}\Bigg]\frac{t^2+s^2}{st} \\
& +\Bigg[\frac{8}{9}X^3 + \left(\frac{8}{3}U - \frac{74}{9} - \frac{8}{3}Y\right)X^2 \\
& +\left(\frac{8}{3}Y^2 + \left(-\frac{16}{3}U + \frac{148}{9}\right)Y + \frac{8}{9}\pi^2 + 10 - 8\,U\right)X \\
& -\frac{8}{3}\pi^2\,Y + \frac{2}{9}\pi^2\left(12\,U - 37\right)\Bigg]\frac{t^2-s^2}{st} \\
& +\Bigg[\frac{32}{9}X^3 + \left(-\frac{104}{9} - \frac{32}{3}Y + \frac{32}{3}U\right)X^2 \\
& +\left(\frac{32}{3}Y^2 + \left(-\frac{64}{3}U + \frac{208}{9}\right)Y - \frac{152}{9} + \frac{32}{3}U + \frac{32}{9}\pi^2\right)X \\
& -\frac{64}{9}Y^3 + \left(-\frac{208}{9} + \frac{64}{3}U\right)Y^2 + \left(-\frac{64}{3}U + \frac{304}{9} + \frac{32}{9}\pi^2\right)Y \\
& +\frac{8}{3}\pi^2\left(-7 + 4\,U\right)\Bigg]
\end{aligned}
\tag{C.21}
$$

$$
F_{2;u} \;=\; \left[\frac{4}{27}\pi^2 + \frac{32}{9}U^2 - \frac{160}{27}U\right]\frac{t^2+s^2}{st} \tag{C.22}
$$

C.2. Contribuciones finitas a un-loop

C.2.1. Canal s

$$
\begin{aligned}
G_{1;s} \;=\; & \Big[14\,X^4 + 28\,X^3 + 8\,X^2\,Y^2 + 56\,X^2\,\pi^2 - 48\,X^2 + 12\,X^2\,Y + 32\,X\,Y\,\pi^2 + 80\,\pi^2\,X \\
& +2\,Y^4 + 12\,Y^3 - 10\,Y^2 + 8\,Y^2\,\pi^2 + 26\,\pi^2 + 24\,\pi^2\,Y - 84\,Y + 102\Big]\frac{t}{u}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+8\,X\left[X^3+X^2+4\,\pi^2\,X+2\,\pi^2\right]\frac{t^2}{u^2}+2\,X^2\left[X^2+4\,\pi^2\right]\frac{t^3}{u^3}\\
&+\Bigg[32\,X^3+8\,X^2\,Y^2+80\,\pi^2\,X+32\,X\,Y\,\pi^2+8\,Y^2\,X\\
&+8\,Y^4+32\,Y^2\,\pi^2-32\,Y^2-4-56\,Y+24\,\pi^2\Bigg]+\left\{t\leftrightarrow u\right\}
\end{aligned}
\tag{C.23}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{2;s} \;=\; &\Bigg[-10\,X^4-\frac{106}{3}\,X^3-8\,X^3\,Y-2\,X^2\,Y^2-52\,X^2\,\pi^2-\frac{44}{3}\,X^2\,S+6\,X^2-\frac{40}{3}\,X^2\,Y\\
&-4\,Y^3\,X-\frac{56}{3}\,Y^2\,X-32\,X\,Y\,\pi^2+8\,X\,Y-80\,\pi^2\,X+\frac{140}{3}\,X-\frac{20}{3}\,Y^3-\frac{22}{3}\,Y^2\,S\\
&-20\,Y^2-6\,Y^2\,\pi^2-18\,\pi^2\,Y-22\,Y\,S+\frac{140}{3}\,Y-4+\frac{154}{3}\,S-40\,\pi^2\Bigg]\frac{t}{u}\\
&-8\,X\left[X^3+X^2+4\,\pi^2\,X+2\,\pi^2\right]\frac{t^2}{u^2}-2\,X^2\left[X^2+4\,\pi^2\right]\frac{t^3}{u^3}\\
&+\Bigg[-8\,X^3\,Y-32\,X^3+4\,X^2\,\pi^2-4\,X^2\,Y^2-\frac{52}{3}\,X^2\,Y-8\,Y^2\,X-\frac{40}{3}\,X\,Y\\
&-32\,X\,Y\,\pi^2-76\,\pi^2\,X-\frac{44}{3}\,X\,S-4\,Y^4+\frac{8}{3}\,Y^3+\frac{8}{3}\,Y^2-\frac{44}{3}\,Y^2\,S-32\,Y^2\,\pi^2\\
&+28\,Y+4-24\,\pi^2\Bigg]+\left\{t\leftrightarrow u\right\}
\end{aligned}
\tag{C.24}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{3;s} \;=\; &\Bigg[2\,X^4+2\,X^3\,Y+\frac{22}{3}\,X^3+\frac{11}{3}\,X^2\,S+2\,X^2\,Y^2+10\,X^2\,Y+\frac{68}{9}\,X^2+13\,X^2\,\pi^2\\
&+\frac{20}{3}\,Y^2\,X+6\,X\,Y\,\pi^2+\frac{100}{9}\,X\,Y+\frac{22}{3}\,X\,Y\,S+\frac{110}{9}\,X\,S+\frac{50}{3}\,\pi^2\,X+\frac{50}{9}\,Y^2\\
&+2\,Y^2\,\pi^2+\frac{8}{3}\,\pi^2\,Y+\frac{110}{9}\,Y\,S+2+\frac{121}{18}\,S^2-\frac{11}{3}\,\pi^2\,S+\frac{1}{2}\,\pi^4+\frac{13}{2}\,\pi^2\Bigg]\frac{t}{u}\\
&+2\,X\left[X^3+X^2+4\,\pi^2\,X+2\,\pi^2\right]\frac{t^2}{u^2}+\frac{1}{2}\,X^2\left[X^2+4\,\pi^2\right]\frac{t^3}{u^3}\\
&+\Bigg[4\,X^3\,Y+8\,X^3-2\,X^2\,\pi^2+\frac{26}{3}\,X^2\,Y+2\,Y^2\,X+8\,X\,Y\,\pi^2+\frac{20}{3}\,X\,Y+\frac{22}{3}\,X\,S\\
&+18\,\pi^2\,X-\frac{4}{3}\,Y^3+\frac{20}{3}\,Y^2+\frac{22}{3}\,Y^2\,S+8\,Y^2\,\pi^2+6\,\pi^2\Bigg]+\left\{t\leftrightarrow u\right\}
\end{aligned}
\tag{C.25}
$$

$$X_{1;s} = \frac{2}{3}\left(3\,Y + Y^2 - 7 + 2\,X^2\right)\left(2\,S + Y + X\right)\frac{t}{u} + \left(\frac{4}{3}\,X^2\,Y + \frac{8}{3}\,X\,S + \frac{4}{3}\,X\,Y + \frac{4}{3}\,Y^3 + \frac{4}{3}\,Y^2 + \frac{8}{3}\,Y^2\,S\right) + \left\{t \leftrightarrow u\right\} \quad \text{(C.26)}$$

$$X_{2;s} = -\frac{1}{9}\left(2\,S + Y + X\right)\left(11\,S + 3\,X^2 + 6\,X\,Y + 10\,Y + 10\,X - 3\,\pi^2\right)\frac{t}{u} + \left(-\frac{2}{3}\,X\,Y - \frac{2}{3}\,Y^2 - \frac{2}{3}\,X^2\,Y - \frac{4}{3}\,Y^2\,S - \frac{4}{3}\,X\,S - \frac{2}{3}\,Y^3\right) + \left\{t \leftrightarrow u\right\} \quad \text{(C.27)}$$

$$X_{3;s} = \frac{1}{18}\left(2\,S + Y + X\right)^2\frac{t}{u} + \left\{t \leftrightarrow u\right\} \quad \text{(C.28)}$$

$$X_{4;s} = \left(-\frac{32}{3}\,Y\,\pi^2 + \frac{32}{3}\,S\,X^2 + 16\,S\,Y - \frac{64}{3}\,X\,\pi^2 - 16\,\pi^2 + \frac{16}{3}\,S\,Y^2 - \frac{112}{3}\,S\right)\frac{t}{u} + \left(\frac{32}{3}\,S\,X^2 + \frac{32}{3}\,S\,Y - \frac{64}{3}\,X\,\pi^2 - \frac{32}{3}\,\pi^2\right) + \left\{t \leftrightarrow u\right\} \quad \text{(C.29)}$$

$$X_{5;s} = \left(\frac{32}{9}\,S^2 + \frac{32}{9}\,\pi^2\right)\frac{t}{u} + \left\{t \leftrightarrow u\right\} \quad \text{(C.30)}$$

C.2.2. Canal u

$$\begin{aligned}
G_{1;u} = {} & \Bigg[8\,X^4 + \left(-32\,Y + 8\right)X^3 + \left(48\,Y^2 - 24\,Y + 16\,\pi^2\right)X^2 \\
& + \left(-32\,Y^3 + 24\,Y^2 - 32\,\pi^2\,Y + 8\,\pi^2\right)X \\
& + 8\,Y^4 - 8\,Y^3 + 16\,Y^2\,\pi^2 - 8\,\pi^2\,Y + 8\,\pi^4\Bigg]\frac{t^2}{s^2} \\
& + \left[8\,Y^4 - 8\,Y^3 + 32\,\pi^2\,Y^2 - 16\,\pi^2\,Y\right]\frac{s^2}{t^2} \\
& + \Bigg[2\,X^4 - 8\,X^3\,Y + \left(4\,\pi^2 + 12\,Y^2\right)X^2 + \left(-8\,Y^3 - 8\,\pi^2\,Y\right)X \\
& + 2\,Y^4 + 4\,Y^2\,\pi^2 + 2\,\pi^4\Bigg]\frac{t^3}{s^3} + \left[2\,Y^4 + 8\,\pi^2\,Y^2\right]\frac{s^3}{t^3} \\
& + \Bigg[8\,X^4 + \left(-32\,Y + 20\right)X^3 + \left(16\,\pi^2 + 56\,Y^2 - 66\,Y - 29\right)X^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\Bigg(-48\,Y^3+78\,Y^2+\Bigg(58-32\,\pi^2\Bigg)\,Y-42+20\,\pi^2\Bigg)\,X \\
&+24\,Y^4-52\,Y^3+\Bigg(56\,\pi^2-58\Bigg)\,Y^2+\Bigg(-66\,\pi^2+84\Bigg)\,Y \\
&+102+8\,\pi^4-29\,\pi^2\Bigg]\,\frac{t^2+s^2}{st} \\
&+\Bigg[6\,X^4+\Bigg(-24\,Y+8\Bigg)\,X^3+\Bigg(36\,Y^2-19-30\,Y+12\,\pi^2\Bigg)\,X^2 \\
&+\Bigg(-24\,Y^3+30\,Y^2+\Bigg(38-24\,\pi^2\Bigg)\,Y+8\,\pi^2+42\Bigg)\,X \\
&-12\,Y^2\,\pi^2+2\,\pi^2\,Y+3\,\pi^2\,\Bigg(2\,\pi^2-3\Bigg)\Bigg]\,\frac{t^2-s^2}{st} \\
&+\Bigg[8\,X^4+\Bigg(32-32\,Y\Bigg)\,X^3+\Bigg(-104\,Y+64\,Y^2-32+16\,\pi^2\Bigg)\,X^2 \\
&+\Bigg(-64\,Y^3+120\,Y^2+\Bigg(-32\,\pi^2+64\Bigg)\,Y-56+32\,\pi^2\Bigg)\,X \\
&+32\,Y^4-80\,Y^3+64\,\Bigg(\pi-1\Bigg)\,\Bigg(\pi+1\Bigg)\,Y^2 \\
&+\Bigg(-104\,\pi^2+112\Bigg)\,Y-8+8\,\pi^4-32\,\pi^2\Bigg]
\end{aligned}
\tag{C.31}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{2;u} \;=\; &\Bigg[-8\,X^4+\Bigg(32\,Y-8\Bigg)\,X^3+\Bigg(-48\,Y^2+24\,Y-16\,\pi^2\Bigg)\,X^2 \\
&+\Bigg(32\,Y^3-24\,Y^2+32\,\pi^2\,Y-8\,\pi^2\Bigg)\,X \\
&-8\,Y^4+8\,Y^3-16\,Y^2\,\pi^2+8\,\pi^2\,Y-8\,\pi^4\Bigg]\,\frac{t^2}{s^2} \\
&-\Bigg[8\;Y^4-8\,Y^3+32\,\pi^2\,Y^2-16\,\pi^2\,Y\Bigg]\,\frac{s^2}{t^2} \\
&+\Bigg[-2\,X^4+8\,X^3\,Y+\Bigg(-4\,\pi^2-12\,Y^2\Bigg)\,X^2+\Bigg(8\,Y^3+8\,\pi^2\,Y\Bigg)\,X \\
&-2\,Y^4-4\,Y^2\,\pi^2-2\,\pi^4\Bigg]\,\frac{t^3}{s^3}-\Bigg[2\,Y^4+8\,\pi^2\,Y^2\Bigg]\,\frac{s^3}{t^3} \\
&+\Bigg[-5\,X^4+\Bigg(-21+26\,Y\Bigg)\,X^3+\Bigg(-11\,U-7-50\,Y^2-13\,\pi^2+79\,Y\Bigg)\,X^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(48\,Y^3-111\,Y^2+\left(6+44\,\pi^2+22\,U\right)Y+\frac{140}{3}-30\,\pi^2-11\,U\right)X\\
&-24\,Y^4+74\,Y^3+\left(-6-56\,\pi^2-22\,U\right)Y^2+\left(-\frac{280}{3}+85\,\pi^2+22\,U\right)Y\\
&+\frac{154}{3}\,U-4+7\,\pi^2-11\,\pi^2\,U-8\,\pi^4\Bigg]\frac{t^2+s^2}{st}\\
&+\Bigg[-5\,X^4+\left(22\,Y-\frac{43}{3}\right)X^3+\left(\frac{121}{3}\,Y-11\,\pi^2-36\,Y^2+13-\frac{11}{3}\,U\right)X^2\\
&+\left(24\,Y^3-\frac{121}{3}\,Y^2+\left(-26+\frac{22}{3}\,U+20\,\pi^2\right)Y-\frac{52}{3}\,\pi^2+11\,U\right)X\\
&+12\,Y^2\,\pi^2-5\,\pi^2\,Y-\frac{1}{3}\,\pi^2\left(18\,\pi^2+11\,U-3\right)\Bigg]\frac{t^2-s^2}{st}\\
&+\Bigg[-4\,X^4+\left(-\frac{88}{3}+24\,Y\right)X^3+\left(-\frac{44}{3}\,U+\frac{8}{3}-56\,Y^2-12\,\pi^2+\frac{340}{3}\,Y\right)X^2\\
&+\left(64\,Y^3-164\,Y^2+\left(\frac{64}{3}+48\,\pi^2+\frac{88}{3}\,U\right)Y+28-\frac{124}{3}\,\pi^2-\frac{44}{3}\,U\right)X\\
&-32\,Y^4+\frac{328}{3}\,Y^3+\left(-\frac{64}{3}-64\,\pi^2-\frac{88}{3}\,U\right)Y^2+\left(-56+\frac{364}{3}\,\pi^2+\frac{88}{3}\,U\right)Y\\
&+8+\frac{8}{3}\,\pi^2-\frac{44}{3}\,\pi^2\,U-8\,\pi^4\Bigg]
\end{aligned}
\tag{C.32}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{3;u} \;=\;&\Bigg[2\,X^4+\left(-8\,Y+2\right)X^3+\left(12\,Y^2-6\,Y+4\,\pi^2\right)X^2\\
&+\left(-8\,Y^3+6\,Y^2-8\,\pi^2\,Y+2\,\pi^2\right)X\\
&+2\,Y^4-2\,Y^3+4\,Y^2\,\pi^2-2\,\pi^2\,Y+2\,\pi^4\Bigg]\frac{t^2}{s^2}\\
&+\Bigg[2\,Y^4-2\,Y^3+8\,\pi^2\,Y^2-4\,\pi^2\,Y\Bigg]\frac{s^2}{t^2}\\
&+\Bigg[\frac{1}{2}\,X^4-2\,X^3\,Y+\left(\pi^2+3\,Y^2\right)X^2+\left(-2\,Y^3-2\,\pi^2\,Y\right)X\\
&+\frac{1}{2}\,Y^4+Y^2\,\pi^2+\frac{1}{2}\,\pi^4\Bigg]\frac{t^3}{s^3}+\Bigg[\frac{1}{2}\,Y^4+2\,\pi^2\,Y^2\Bigg]\frac{s^3}{t^3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\Bigg[X^4+\left(\frac{11}{3}-5\,Y\right)X^3+\left(\frac{11}{6}\,U+\frac{59}{9}+11\,Y^2+\frac{9}{2}\,\pi^2-\frac{58}{3}\,Y\right)X^2\\
&+\left(-12\,Y^3+36\,Y^2+\left(-14\,\pi^2-\frac{218}{9}-11\,U\right)Y+\frac{110}{9}\,U+\frac{41}{3}\,\pi^2\right)X\\
&+6\,Y^4-24\,Y^3+\left(11\,U+\frac{218}{9}+14\,\pi^2\right)Y^2+\left(-26\,\pi^2-\frac{220}{9}\,U\right)Y\\
&+\frac{121}{18}\,U^2+2\,\pi^4+\frac{11}{2}\,\pi^2\,U+\frac{59}{9}\,\pi^2+2\Bigg]\,\frac{t^2+s^2}{st}\\
&+\Bigg[X^4+\left(\frac{11}{3}-5\,Y\right)X^3+\left(1-\frac{38}{3}\,Y+\frac{5}{2}\,\pi^2+9\,Y^2+\frac{11}{6}\,U\right)X^2\\
&+\left(-6\,Y^3+\frac{38}{3}\,Y^2+\left(-4\,\pi^2-\frac{11}{3}\,U-2\right)Y+\frac{11}{3}\,\pi^2\right)X\\
&-3\,Y^2\,\pi^2+2\,\pi^2\,Y+\frac{1}{6}\,\pi^2\left(9\,\pi^2+11\,U-6\right)\Bigg]\,\frac{t^2-s^2}{st}\\
&+\Bigg[\left(\frac{20}{3}-4\,Y\right)X^3+\left(12\,Y^2-\frac{92}{3}\,Y+\frac{20}{3}+\frac{22}{3}\,U+2\,\pi^2\right)X^2\\
&+\left(-16\,Y^3+52\,Y^2+\left(-\frac{44}{3}\,U-\frac{80}{3}-16\,\pi^2\right)Y+\frac{22}{3}\,U+\frac{38}{3}\,\pi^2\right)X\\
&+8\,Y^4-\frac{104}{3}\,Y^3+\left(16\,\pi^2+\frac{80}{3}+\frac{44}{3}\,U\right)Y^2+\left(-\frac{104}{3}\,\pi^2-\frac{44}{3}\,U\right)Y\\
&+\frac{2}{3}\,\pi^2\left(3\,\pi^2+10+11\,U\right)\Bigg]
\end{aligned}
\tag{C.33}
$$

$$
\begin{aligned}
X_{1;u} \;=\;& \Bigg[X^3+\left(2\,U-4\,Y+1\right)X^2+\left(6\,Y^2+\left(-4-4\,U\right)Y+\pi^2+2\,U-\frac{14}{3}\right)X\\
&-4\,Y^3+\left(4+4\,U\right)Y^2+\left(-4\,U+\frac{28}{3}-4\,\pi^2\right)Y+2\,\pi^2\,U-\frac{28}{3}\,U+\pi^2\Bigg]\,\frac{t^2+s^2}{st}\\
&+\Bigg[\frac{1}{3}\,X^3+\left(-\frac{4}{3}\,Y-1+\frac{2}{3}\,U\right)X^2+\left(\frac{4}{3}\,Y^2+\left(-\frac{4}{3}\,U+2\right)Y+\frac{1}{3}\,\pi^2-2\,U\right)X\\
&+\frac{1}{3}\,\pi^2\left(2\,U+3\right)\Bigg]\,\frac{t^2-s^2}{st}\\
&+\Bigg[\frac{4}{3}\,X^3+\left(-\frac{16}{3}\,Y+\frac{8}{3}\,U+\frac{4}{3}\right)X^2+\left(8\,Y^2+\left(-\frac{16}{3}\,U-\frac{16}{3}\right)Y+\frac{4}{3}\,\pi^2+\frac{8}{3}\,U\right)X\\
&-\frac{16}{3}\,Y^3+\left(\frac{16}{3}+\frac{16}{3}\,U\right)Y^2+\left(-\frac{16}{3}\,U-\frac{16}{3}\,\pi^2\right)Y+\frac{4}{3}\,\pi^2\left(2\,U+1\right)\Bigg]
\end{aligned}
\tag{C.34}
$$

$$
\begin{aligned}
X_{2;u} \;=\; & \Bigg[-\frac{1}{6}\,X^3 + \left(-\frac{1}{3}\,U + \frac{4}{3}\,Y - \frac{10}{9} \right) X^2 + \left(-3\,Y^2 + \left(2\,U + \frac{40}{9} \right) Y - \frac{7}{6}\,\pi^2 - \frac{31}{9}\,U \right) X \\
& + 2\,Y^3 + \left(-2\,U - \frac{40}{9} \right) Y^2 + \left(2\,\pi^2 + \frac{62}{9}\,U \right) Y - \frac{22}{9}\,U^2 - \pi^2\,U - \frac{10}{9}\,\pi^2 \Bigg] \frac{t^2+s^2}{st} \\
& + \Bigg[-\frac{1}{6}\,X^3 + \left(\frac{2}{3}\,Y - \frac{1}{3}\,U \right) X^2 + \left(-\frac{2}{3}\,Y^2 - \frac{1}{6}\,\pi^2 + \frac{2}{3}\,Y\,U \right) X - \frac{1}{3}\,\pi^2\,U \Bigg] \frac{t^2-s^2}{st} \\
& + \Bigg[-\frac{2}{3}\,X^3 + \left(\frac{8}{3}\,Y - \frac{4}{3}\,U - \frac{2}{3} \right) X^2 + \left(-4\,Y^2 + \left(\frac{8}{3}\,U + \frac{8}{3} \right) Y - \frac{2}{3}\,\pi^2 - \frac{4}{3}\,U \right) X \\
& + \frac{8}{3}\,Y^3 + \left(-\frac{8}{3} - \frac{8}{3}\,U \right) Y^2 + \left(\frac{8}{3}\,U + \frac{8}{3}\,\pi^2 \right) Y - \frac{2}{3}\,\pi^2 \left(2\,U + 1 \right) \Bigg]
\end{aligned}
\tag{C.35}
$$

$$
X_{3;u} \;=\; \left[\frac{1}{18}\,X^2 + \left(-\frac{2}{9}\,Y + \frac{2}{9}\,U \right) X - \frac{4}{9}\,Y\,U + \frac{1}{18}\,\pi^2 + \frac{2}{9}\,U^2 + \frac{2}{9}\,Y^2 \right] \frac{t^2+s^2}{st} \tag{C.36}
$$

$$
\begin{aligned}
X_{4;u} \;=\; & \frac{32}{3}\,U \left[X + X^2 - 2\,Y - 2\,Y\,X + 2\,Y^2 + \pi^2 \right] \\
& + \frac{8}{3}\,U \left[3\,\pi^2 - 6\,Y - 6\,Y\,X - 14 + 3\,X^2 + 6\,Y^2 + 3\,X \right] \frac{t^2+s^2}{st} \\
& - \frac{8}{3}\,U \left[-\pi^2 + 2\,Y\,X - X^2 + 3\,X \right] \frac{t^2-s^2}{st}
\end{aligned}
\tag{C.37}
$$

$$
X_{5;u} \;=\; \frac{32}{9}\,U^2\,\frac{t^2+s^2}{st} \tag{C.38}
$$

Apéndice D

Análisis corte inferior en q_T

El formalismo de sustracción en momento transverso (ver Capítulo 4) cancela las divergencias entre las contribuciones reales y las virtuales mediante un contra-término (CT) que posee el mismo comportamiento singular que las emisiones reales a cada orden correspondiente. Tal cancelación es efectuada en el espacio del momento transverso del par de fotones $q_T^{\gamma\gamma}$ mediante una integral de ambas contribuciones en tal variable. Numéricamente es imposible alcanzar el límite $q_T^{\gamma\gamma} \to 0$. Lo que se hace es implementar un corte en el valor de $q_T^{\gamma\gamma}$ ($(q_T^{\gamma\gamma})_{min}$) de manera de volver posible la tarea de integrar numéricamente ambas contribuciones. Los criterios a tener en cuenta en la elección de tal corte inferior son los siguientes:

1. La razón entre las contribuciones reales y su correspondiente contra-término debe tender a la unidad en el límite $q_T^{\gamma\gamma} \to 0$. Es decir, la contribución del CT debe operar como tal en el citado límite.

2. El valor de $(q_T^{\gamma\gamma})_{min}$ depende de la energía de los hadrones iniciales ($500/\sqrt{s} \sim q_{T\ min}$) y también de los momentos transversos mínimos de los fotones. El valor citado con anterioridad es válido dentro del rango 15 GeV $\leq p_T^{\gamma} \leq$ 40 GeV para cada fotón.

3. Hay un juego íntimo entre el valor mínimo $(q_T^{\gamma\gamma})_{min}$ y la estabilidad numérica del código y las incertezas de la sección eficaz total. Cuanto menor es el valor de $(q_T^{\gamma\gamma})_{min}$ tanto las emisiones reales, como el CT correspondiente, ven aumentado en valor absoluto la magnitud de sus contribuciones, mientras que el valor de la sección eficaz total permanece constante (como debe suceder). Esto lo que significa no es otra cosa que el aumento de las incertezas de la sección eficaz total, ya que estas se heredan de la diferencia, de la cancelación entre las "divergencias" de ambas contribuciones: reales y CT. La conclusión es la siguiente: disminuir el valor de $(q_T^{\gamma\gamma})_{min}$ desmesuradamente garantiza la confiabilidad del método (el CT se comporta como tal) pero podría aumentar desmesuradamente también las incertezas del resultado final. Éste es el compromiso.

En las Figuras (D.1) y (D.2) se enseñan las distribuciones en $q_T^{\gamma\gamma}$ de las contribuciones reales, y del CT, a NLO y NNLO respectivamente, para la producción de difotones en el LHC[1] (panel izquierdo). En sendas distribuciones, en el panel derecho, se enseña la razón entre ambas contribuciones.

[1] Los cortes cinemáticos son los mismos que los utilizados por CMS ($\sqrt{s} = 7$ TeV) en una reciente búsqueda del bosón de Higgs, y se detallan en el Capítulo 9.

Que la razón se mantenga estable alrededor de la unidad da testimonio de la confiabilidad del método. Es decir el valor de la sección eficaz es independiente de tal corte mínimo $(q_T^{\gamma\gamma})_{min}$ dentro de cierto intervalo.

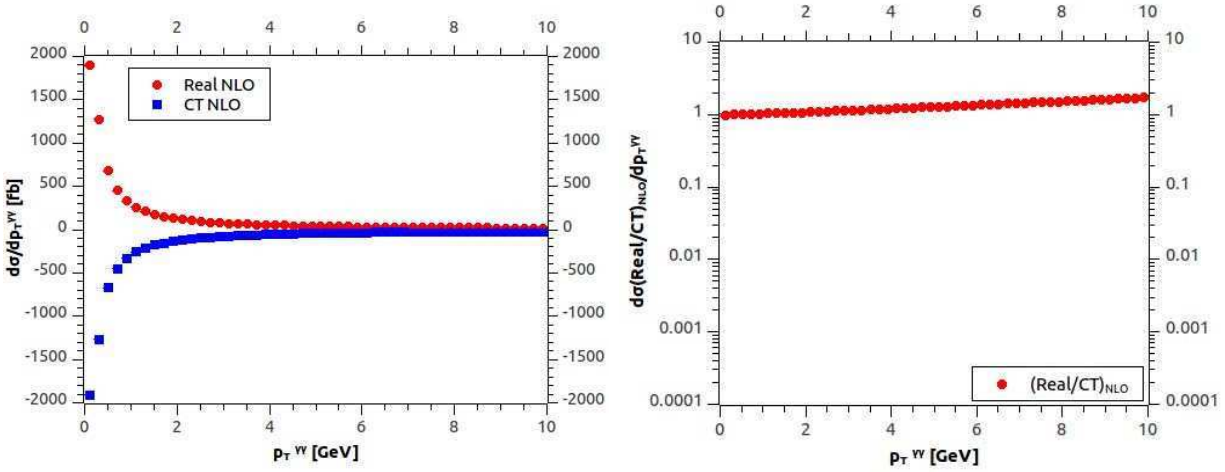

Figura D.1: *Distribuciones en momento transverso. Izquierda: Contribución de emisión real a la sección eficaz de producción de difotones a NLO y su correspondiente contra-término (CT) para remover las singularidades asociadas al límite $q_T^{\gamma\gamma} \to 0$. Derecha: La razón entre ambas contribuciones. Ésta se aproxima a la unidad cuando $q_T^{\gamma\gamma} \to 0$, lo que manifiesta que el contra-término se comporta como tal.*

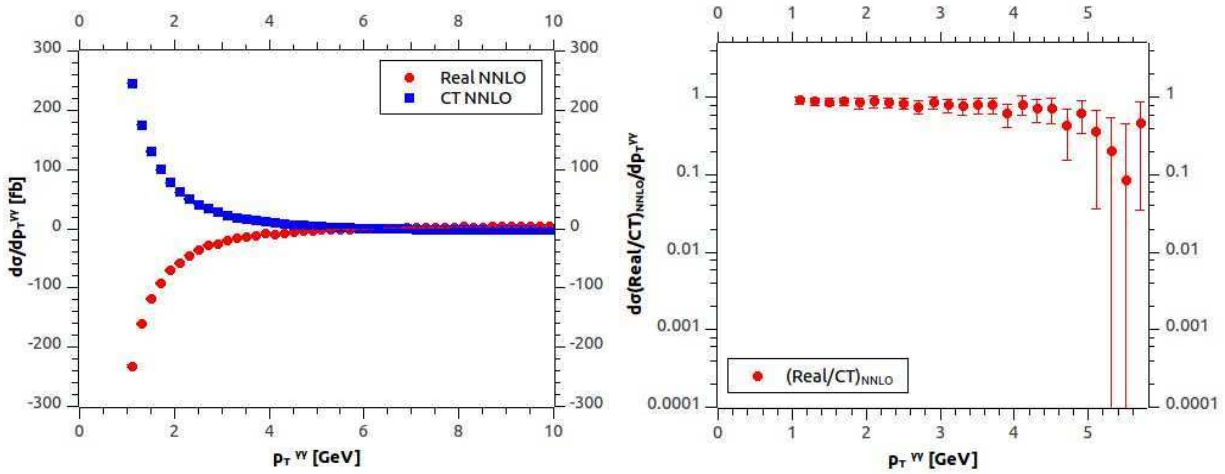

Figura D.2: *Distribuciones en momento transverso. Izquierda: Contribución de emisión real a la sección eficaz de producción de difotones a NNLO y su correspondiente contra-término (CT) para remover las singularidades asociadas al límite $q_T^{\gamma\gamma} \to 0$. Derecha: La razón entre ambas contribuciones. Ésta se aproxima a la unidad cuando $q_T^{\gamma\gamma} \to 0$, lo que manifiesta que el contra-término se comporta como tal.*

Cabe destacar también que el signo de las contribuciones reales y de los contra-términos en las Figuras (D.1) y (D.2) varía de orden a orden (este es un efecto conocido[2]). A NLO la contribución real es mayor que cero mientras que el CT es negativo, mientras a NNLO es al revés. Este comportamiento se alterna de orden en orden: por ejemplo a N^3LO otra vez tendríamos la contribución real positiva y el CT negativo, y así.

La dispersión en la región cercana a $q_T^{\gamma\gamma} \sim 6$ GeV en el panel derecho de la Fig. (D.2) se debe a que en esa zona las distribuciones (ambas) cruzan el cero y la razón deja de estar bien definida.

[2]Es una consecuencia de la exponenciación y del posterior desarrollo en serie, de tal exponencial en el formalismo de resumación en momento transverso.

Bibliografía

[1] S. Catani, "QCD and jets (theory)," p. 771, 1993.

[2] B. Webber, "Proc. of the 27th int. conf. on high energy physics," (Institute of Physics, Bristol), 1995.

[3] G. Aad *et al.*, "Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC," *Phys.Lett.B*, 2012.

[4] S. Chatrchyan *et al.*, "Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC," *Phys.Lett.B*, 2012.

[5] G. P. Salam, "Perturbative QCD for the LHC," *PoS*, vol. ICHEP2010, p. 556, 2010. * Temporary entry *.

[6] S. Dawson, "Radiative corrections to Higgs boson production," *Nucl.Phys.*, vol. B359, pp. 283–300, 1991.

[7] A. Djouadi, M. Spira, and P. Zerwas, "Production of Higgs bosons in proton colliders: QCD corrections," *Phys.Lett.*, vol. B264, pp. 440–446, 1991.

[8] R. V. Harlander and W. B. Kilgore, "Next-to-next-to-leading order Higgs production at hadron colliders," *Phys.Rev.Lett.*, vol. 88, p. 201801, 2002.

[9] R. Ellis and S. Veseli, "Strong radiative corrections to W b anti-b production in p anti-p collisions," *Phys.Rev.*, vol. D60, p. 011501, 1999.

[10] F. Febres Cordero, L. Reina, and D. Wackeroth, "NLO QCD corrections to W boson production with a massive b-quark jet pair at the Tevatron p anti-p collider," *Phys.Rev.*, vol. D74, p. 034007, 2006.

[11] C. W. Bauer and B. O. Lange, "Scale setting and resummation of logarithms in $pp \to V + jets$," 2009.

[12] A. Denner, S. Dittmaier, T. Kasprzik, and A. Muck, "Electroweak corrections to W + jet hadroproduction including leptonic W-boson decays," *JHEP*, vol. 0908, p. 075, 2009.

[13] M. Rubin, G. P. Salam, and S. Sapeta, "Giant QCD K-factors beyond NLO," *JHEP*, vol. 1009, p. 084, 2010.

[14] G. Aad *et al.*, "Search for supersymmetry using final states with one lepton, jets, and missing transverse momentum with the ATLAS detector in sqrts = 7 TeV pp," *Phys.Rev.Lett.*, vol. 106, p. 131802, 2011.

[15] G. Altarelli, R. Ellis, and G. Martinelli, "Large Perturbative Corrections to the Drell-Yan Process in QCD," *Nucl.Phys.*, vol. B157, p. 461, 1979.

[16] P. Aurenche, R. Baier, A. Douiri, M. Fontannaz, and D. Schiff, "Scheme Invariant Higher Order QCD Predictions for Large p(t) Photoproduction Reactions," *Nucl.Phys.*, vol. B286, p. 553, 1987.

[17] F. Aversa, P. Chiappetta, M. Greco, and J. Guillet, "QCD Corrections to Parton-Parton Scattering Processes," *Nucl.Phys.*, vol. B327, p. 105, 1989.

[18] P. Nason, S. Dawson, and R. Ellis, "The Total Cross-Section for the Production of Heavy Quarks in Hadronic Collisions," *Nucl.Phys.*, vol. B303, p. 607, 1988.

[19] G. Altarelli, M. Diemoz, G. Martinelli, and P. Nason, "Total Cross-Sections for Heavy Flavor Production in Hadronic Collisions and QCD," *Nucl.Phys.*, vol. B308, p. 724, 1988.

[20] W. Beenakker, H. Kuijf, W. van Neerven, and J. Smith, "QCD Corrections to Heavy Quark Production in p anti-p Collisions," *Phys.Rev.*, vol. D40, pp. 54–82, 1989.

[21] P. B. Arnold, R. Ellis, and M. Reno, "High p(t) W and Z Production at the Tevatron," *Phys.Rev.*, vol. D40, p. 912, 1989.

[22] W. Giele, E. Glover, and D. A. Kosower, "Higher order corrections to jet cross-sections in hadron colliders," *Nucl.Phys.*, vol. B403, pp. 633–670, 1993.

[23] Z. Nagy, "Three jet cross-sections in hadron hadron collisions at next-to-leading order," *Phys.Rev.Lett.*, vol. 88, p. 122003, 2002.

[24] J. M. Campbell and R. Ellis, "Next-to-leading order corrections to W+ 2 jet and Z+ 2 jet production at hadron colliders," *Phys.Rev.*, vol. D65, p. 113007, 2002.

[25] R. Ellis, K. Melnikov, and G. Zanderighi, "W+3 jet production at the Tevatron," *Phys.Rev.*, vol. D80, p. 094002, 2009.

[26] C. Berger, Z. Bern, L. J. Dixon, F. Febres Cordero, D. Forde, *et al.*, "Next-to-Leading Order QCD Predictions for W+3-Jet Distributions at Hadron Colliders," *Phys.Rev.*, vol. D80, p. 074036, 2009.

[27] C. Berger, Z. Bern, L. J. Dixon, F. Febres Cordero, D. Forde, *et al.*, "Next-to-Leading Order QCD Predictions for $Z, gamma + 3 - Jet$ Distributions at the Tevatron," *Phys.Rev.*, vol. D82, p. 074002, 2010.

[28] A. Bredenstein, A. Denner, S. Dittmaier, and S. Pozzorini, "NLO QCD corrections to $pp \to t\bar{t}b\bar{b} + X$ at the LHC," *Phys.Rev.Lett.*, vol. 103, p. 012002, 2009.

[29] G. Bevilacqua, M. Czakon, C. Papadopoulos, R. Pittau, and M. Worek, "Assault on the NLO Wishlist: $pp \to t\bar{t}b\bar{b}$," *JHEP*, vol. 0909, p. 109, 2009.

[30] G. Bevilacqua, M. Czakon, C. Papadopoulos, and M. Worek, "Dominant QCD Backgrounds in Higgs Boson Analyses at the LHC: A Study of $pp \to t\bar{t} + 2jets$ at Next-To-Leading Order," *Phys.Rev.Lett.*, vol. 104, p. 162002, 2010.

[31] T. Melia, K. Melnikov, R. Rontsch, and G. Zanderighi, "Next-to-leading order QCD predictions for $W^+W^+ + jj$ production at the LHC," *JHEP*, vol. 1012, p. 053, 2010.

[32] A. Denner, S. Dittmaier, S. Kallweit, and S. Pozzorini, "NLO QCD corrections to WWbb production at hadron colliders," *Phys.Rev.Lett.*, vol. 106, p. 052001, 2011.

[33] G. Bevilacqua, M. Czakon, A. van Hameren, C. G. Papadopoulos, and M. Worek, "Complete off-shell effects in top quark pair hadroproduction with leptonic decay at next-to-leading order," *JHEP*, vol. 1102, p. 083, 2011.

[34] G. Ferrera, M. Grazzini, and F. Tramontano, "Associated WH production at hadron colliders: a fully exclusive QCD calculation at NNLO," *Phys.Rev.Lett.*, vol. 107, p. 152003, 2011. 7 pages, 2 figures.

[35] S. Catani, L. Cieri, G. Ferrera, D. de Florian, and M. Grazzini, "Vector boson production at hadron colliders: A Fully exclusive QCD calculation at NNLO," *Phys.Rev.Lett.*, vol. 103, p. 082001, 2009.

[36] C. Anastasiou, K. Melnikov, and F. Petriello, "Fully differential Higgs boson production and the di-photon signal through next-to-next-to-leading order," *Nucl.Phys.*, vol. B724, pp. 197–246, 2005.

[37] M. Grazzini, "NNLO predictions for the Higgs boson signal in the $H \to WW \to l\nu l\nu$ and $H \to ZZ \to 4l$ decay channels," *JHEP*, vol. 0802, p. 043, 2008.

[38] R. Gavin, Y. Li, F. Petriello, and S. Quackenbush, "FEWZ 2.0: A code for hadronic Z production at next-to-next-to-leading order," *Comput.Phys.Commun.*, vol. 182, pp. 2388–2403, 2011.

[39] S. Catani, L. Cieri, D. de Florian, G. Ferrera, and M. Grazzini, "Diphoton production at hadron colliders: a fully-differential QCD calculation at NNLO," *Phys.Rev.Lett.*, vol. 108, p. 072001, 2012. 7 pages, 3 figures.

[40] P. Bolzoni, F. Maltoni, S.-O. Moch, and M. Zaro, "Higgs production via vector-boson fusion at NNLO in QCD," *Phys.Rev.Lett.*, vol. 105, p. 011801, 2010.

[41] T. Han, G. Valencia, and S. Willenbrock, "Structure function approach to vector boson scattering in p p collisions," *Phys.Rev.Lett.*, vol. 69, pp. 3274–3277, 1992.

[42] S. Catani and M. Grazzini, "An NNLO subtraction formalism in hadron collisions and its application to Higgs boson production at the LHC," *Phys.Rev.Lett.*, vol. 98, p. 222002, 2007.

[43] T. Gehrmann, "Status of QCD," *PoS*, vol. DIS2010, p. 004, 2010.

[44] K. Fabricius, I. Schmitt, G. Kramer, and G. Schierholz, "Higher Order Perturbative QCD Calculation of Jet Cross-Sections in e+ e- Annihilation," *Z.Phys.*, vol. C11, p. 315, 1981.

[45] G. Kramer and B. Lampe, "Jet Cross-Sections in e+ e- Annihilation," *Fortsch.Phys.*, vol. 37, p. 161, 1989.

[46] Z. Kunszt and D. E. Soper, "Calculation of jet cross-sections in hadron collisions at order alpha-s**3," *Phys.Rev.*, vol. D46, pp. 192–221, 1992.

[47] R. Ellis, D. Ross, and A. Terrano, "The Perturbative Calculation of Jet Structure in e+ e- Annihilation," *Nucl.Phys.*, vol. B178, p. 421, 1981.

[48] A. Bassetto, M. Ciafaloni, and G. Marchesini, "Jet Structure and Infrared Sensitive Quantities in Perturbative QCD," *Phys.Rept.*, vol. 100, pp. 201–272, 1983.

[49] Y. L. Dokshitzer, V. A. Khoze, A. H. Mueller, and S. Troian, "Basics of perturbative QCD," 1991.

[50] W. Giele and E. Glover, "Higher order corrections to jet cross-sections in e+ e- annihilation," *Phys.Rev.*, vol. D46, pp. 1980–2010, 1992.

[51] S. Catani and M. Seymour, "A General algorithm for calculating jet cross-sections in NLO QCD," *Nucl.Phys.*, vol. B485, pp. 291–419, 1997.

[52] J. M. Campbell, R. Ellis, and C. Williams, "Vector boson pair production at the LHC," *JHEP*, vol. 1107, p. 018, 2011.

[53] V. Del Duca, F. Maltoni, Z. Nagy, and Z. Trocsanyi, "QCD radiative corrections to prompt diphoton production in association with a jet at hadron colliders," *JHEP*, vol. 0304, p. 059, 2003.

[54] Z. Bern, L. J. Dixon, and C. Schmidt, "Isolating a light Higgs boson from the diphoton background at the CERN LHC," *Phys.Rev.*, vol. D66, p. 074018, 2002.

[55] Massimiliano Grazzini, "Dynnlo." `http://theory.fi.infn.it/grazzini/dy.html`, 2008. Parton level Monte Carlo program that computes the cross sections for vector boson production in pp and ppbar collisions up to NNLO in QCD perturbation theory.s.

[56] S. Catani and M. Grazzini, "HNNLO: A Monte Carlo program to compute Higgs boson production at hadron colliders," *PoS*, vol. RADCOR2007, p. 046, 2007.

[57] F. Krauss, R. Kuhn, and G. Soff, "AMEGIC++ 1.0: A Matrix element generator in C++," *JHEP*, vol. 0202, p. 044, 2002.

[58] T. Gleisberg and F. Krauss, "Automating dipole subtraction for QCD NLO calculations," *Eur.Phys.J.*, vol. C53, pp. 501–523, 2008.

[59] T. Binoth and G. Heinrich, "An Automatized algorithm to compute infrared divergent multiloop integrals," *Nucl.Phys.*, vol. B585, pp. 741–759, 2000.

[60] T. Binoth and G. Heinrich, "Numerical evaluation of phase space integrals by sector decomposition," *Nucl.Phys.*, vol. B693, pp. 134–148, 2004.

[61] C. Anastasiou, L. J. Dixon, K. Melnikov, and F. Petriello, "High precision QCD at hadron colliders: Electroweak gauge boson rapidity distributions at NNLO," *Phys.Rev.*, vol. D69, p. 094008, 2004.

[62] A. Gehrmann-De Ridder, T. Gehrmann, and E. Glover, "Antenna subtraction at NNLO," *JHEP*, vol. 0509, p. 056, 2005. Erratum added online, 8/18/06.

[63] M. Czakon, "A novel subtraction scheme for double-real radiation at NNLO," *Phys.Lett.*, vol. B693, pp. 259–268, 2010.

[64] S. Catani and M. Grazzini, "Higgs Boson Production at Hadron Colliders: Hard-Collinear Coefficients at the NNLO," *Eur.Phys.J.*, vol. C72, p. 2013, 2012.

[65] S. Catani, L. Cieri, D. de Florian, G. Ferrera, and M. Grazzini, "Vector boson production at hadron colliders: hard-collinear coefficients at the NNLO," 2012.

[66] D. de Florian and M. Grazzini, "The Structure of large logarithmic corrections at small transverse momentum in hadronic collisions," *Nucl.Phys.*, vol. B616, pp. 247–285, 2001.

[67] S. Catani, L. Cieri, D. de Florian, G. Ferrera, and M. Grazzini, "Diphoton production at hadron colliders: hard-collinear coefficients at the NNLO," 2011. * En preparación*.

[68] C. Balazs, E. L. Berger, P. M. Nadolsky, and C.-P. Yuan, "Calculation of prompt diphoton production cross-sections at Tevatron and LHC energies," *Phys.Rev.*, vol. D76, p. 013009, 2007.

[69] T. Binoth, J. Guillet, E. Pilon, and M. Werlen, "A Full next-to-leading order study of direct photon pair production in hadronic collisions," *Eur.Phys.J.*, vol. C16, pp. 311–330, 2000.

[70] S. Chatrchyan *et al.*, "Measurement of the Production Cross Section for Pairs of Isolated Photons in pp collisions at sqrt(s) = 7 TeV," *JHEP*, vol. 1201, p. 133, 2012.

[71] G. Aad *et al.*, "Measurement of the isolated di-photon cross-section in pp collisions at sqrt(s) = 7 TeV with the ATLAS detector," *Phys.Rev.*, vol. D85, p. 012003, 2012.

[72] V. Abazov *et al.*, "Measurement of direct photon pair production cross sections in $p\bar{p}$ collisions at $\sqrt{s} = 1{,}96$ TeV," *Phys.Lett.*, vol. B690, pp. 108–117, 2010.

[73] T. Aaltonen *et al.*, "Measurement of the Cross Section for Prompt Isolated Diphoton Production in $p\bar{p}$ Collisions at $\sqrt{s} = 1{,}96$ TeV," *Phys.Rev.Lett.*, vol. 107, p. 102003, 2011.

[74] T. Aaltonen *et al.*, "Measurement of the Cross Section for Prompt Isolated Diphoton Production in $p\bar{p}$ Collisions at $\sqrt{s} = 1{,}96$ TeV," *Phys.Rev.*, vol. D84, p. 052006, 2011.

[75] J. Collins, "Foundations of perturbative QCD," 2011.

[76] S. Catani, "Introduction to QCD," *Lecture series for postgraduate students*, 1998.

[77] K. Nakamura *et al.*, "Review of particle physics," *J.Phys.G*, vol. G37, p. 075021, 2010.

[78] R. E. Taylor, "Deep inelastic scattering: The Early years," *Rev.Mod.Phys.*, vol. 63, pp. 573–595, 1991.

[79] H. W. Kendall, "Deep inelastic scattering: Experiments on the proton and the observation," *Rev.Mod.Phys.*, vol. 63, pp. 597–614, 1991. Reprint.

[80] J. I. Friedman, "Deep inelastic scattering: Comparisons with the quark model," *Rev.Mod.Phys.*, vol. 63, pp. 615–629, 1991. Reprint.

[81] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, "An Introduction to quantum field theory," 1995.

[82] P. Ramond, "FIELD THEORY. A MODERN PRIMER," *Front.Phys.*, vol. 51, pp. 1–397, 1981.

[83] R. K. Ellis, W. J. Stirling, and B. Webber, "QCD and collider physics," *Camb.Monogr.Part.Phys.Nucl.Phys.Cosmol.*, vol. 8, pp. 1–435, 1996.

[84] T. van Ritbergen, J. Vermaseren, and S. Larin, "The Four loop beta function in quantum chromodynamics," *Phys.Lett.*, vol. B400, pp. 379–384, 1997.

[85] S. Bethke, "The 2009 World Average of alpha(s)," *Eur.Phys.J.*, vol. C64, pp. 689–703, 2009.

[86] J. C. Collins, D. E. Soper, and G. F. Sterman, "Factorization of Hard Processes in QCD," *Adv.Ser.Direct.High Energy Phys.*, vol. 5, pp. 1–91, 1988. To be publ. in 'Perturbative QCD' (A.H. Mueller, ed.) (World Scientific Publ., 1989).

[87] S. Catani, M. Dittmar, D. Soper, W. J. Stirling, S. Tapprogge, *et al.*, "QCD," 2000.

[88] V. Gribov and L. Lipatov, "Deep inelastic e p scattering in perturbation theory," *Sov.J.Nucl.Phys.*, vol. 15, pp. 438–450, 1972.

[89] V. Gribov and L. Lipatov, "e+ e- pair annihilation and deep inelastic e p scattering in perturbation theory," *Sov.J.Nucl.Phys.*, vol. 15, pp. 675–684, 1972.

[90] G. Altarelli and G. Parisi, "Asymptotic Freedom in Parton Language," *Nucl.Phys.*, vol. B126, p. 298, 1977.

[91] Y. L. Dokshitzer, "Calculation of the Structure Functions for Deep Inelastic Scattering and e+ e- Annihilation by Perturbation Theory in Quantum Chromodynamics.," *Sov.Phys.JETP*, vol. 46, pp. 641–653, 1977.

[92] E. Floratos, D. Ross, and C. T. Sachrajda, "Higher Order Effects in Asymptotically Free Gauge Theories: The Anomalous Dimensions of Wilson Operators," *Nucl.Phys.*, vol. B129, pp. 66–88, 1977.

[93] E. Floratos, D. Ross, and C. T. Sachrajda, "Higher Order Effects in Asymptotically Free Gauge Theories. 2. Flavor Singlet Wilson Operators and Coefficient Functions," *Nucl.Phys.*, vol. B152, p. 493, 1979.

[94] A. Gonzalez-Arroyo, C. Lopez, and F. Yndurain, "Second Order Contributions to the Structure Functions in Deep Inelastic Scattering. 1. Theoretical Calculations," *Nucl.Phys.*, vol. B153, pp. 161–186, 1979.

[95] A. Gonzalez-Arroyo and C. Lopez, "Second Order Contributions to the Structure Functions in Deep Inelastic Scattering. 3. The Singlet Case," *Nucl.Phys.*, vol. B166, p. 429, 1980.

[96] G. Curci, W. Furmanski, and R. Petronzio, "Evolution of Parton Densities Beyond Leading Order: The Nonsinglet Case," *Nucl.Phys.*, vol. B175, p. 27, 1980.

[97] W. Furmanski and R. Petronzio, "Singlet Parton Densities Beyond Leading Order," *Phys.Lett.*, vol. B97, p. 437, 1980.

[98] E. Floratos, C. Kounnas, and R. Lacaze, "Higher Order QCD Effects in Inclusive Annihilation and Deep Inelastic Scattering," *Nucl.Phys.*, vol. B192, p. 417, 1981.

[99] S. Moch, J. Vermaseren, and A. Vogt, "The Three loop splitting functions in QCD: The Nonsinglet case," *Nucl.Phys.*, vol. B688, pp. 101–134, 2004.

[100] G. Bozzi, S. Catani, D. de Florian, and M. Grazzini, "The q(T) spectrum of the Higgs boson at the LHC in QCD perturbation theory," *Phys.Lett.*, vol. B564, pp. 65–72, 2003.

[101] S. Catani, D. de Florian, and M. Grazzini, "Universality of nonleading logarithmic contributions in transverse momentum distributions," *Nucl.Phys.*, vol. B596, pp. 299–312, 2001.

[102] S. Catani, G. Turnock, B. Webber, and L. Trentadue, "Thrust distribution in e+ e- annihilation," *Phys.Lett.*, vol. B263, pp. 491–497, 1991.

[103] A. Banfi, G. P. Salam, and G. Zanderighi, "Resummed event shapes at hadron - hadron colliders," *JHEP*, vol. 0408, p. 062, 2004.

[104] S. Catani, M. L. Mangano, P. Nason, and L. Trentadue, "The Resummation of soft gluons in hadronic collisions," *Nucl.Phys.*, vol. B478, pp. 273–310, 1996.

[105] G. Parisi and R. Petronzio, "Small Transverse Momentum Distributions in Hard Processes," *Nucl.Phys.*, vol. B154, p. 427, 1979.

[106] J. Kodaira and L. Trentadue, "Summing Soft Emission in QCD," *Phys.Lett.*, vol. B112, p. 66, 1982.

[107] J. C. Collins and D. E. Soper, "Back-To-Back Jets in QCD," *Nucl.Phys.*, vol. B193, p. 381, 1981.

[108] J. C. Collins, D. E. Soper, and G. F. Sterman, "Transverse Momentum Distribution in Drell-Yan Pair and W and Z Boson Production," *Nucl.Phys.*, vol. B250, p. 199, 1985.

[109] C. Davies and W. J. Stirling, "Nonleading Corrections to the Drell-Yan Cross-Section at Small Transverse Momentum," *Nucl.Phys.*, vol. B244, p. 337, 1984.

[110] S. Catani, E. D'Emilio, and L. Trentadue, "The gluon form-factor to higher orders: gluon gluon annihilation at small q-transverse," *Phys.Lett.*, vol. B211, pp. 335–342, 1988.

[111] D. de Florian and M. Grazzini, "Next-to-next-to-leading logarithmic corrections at small transverse momentum in hadronic collisions," *Phys.Rev.Lett.*, vol. 85, pp. 4678–4681, 2000.

[112] R. Kauffman, "Higher order corrections to Higgs boson p(T)," *Phys.Rev.*, vol. D45, pp. 1512–1517, 1992.

[113] S. Catani, D. de Florian, and M. Grazzini, "Direct Higgs production and jet veto at the Tevatron and the LHC in NNLO QCD," *JHEP*, vol. 0201, p. 015, 2002.

[114] G. Bozzi, S. Catani, D. de Florian, and M. Grazzini, "Transverse-momentum resummation and the spectrum of the Higgs boson at the LHC," *Nucl.Phys.*, vol. B737, pp. 73–120, 2006.

[115] M. Grazzini, "Soft-gluon effects in WW production at hadron colliders," *JHEP*, vol. 0601, p. 095, 2006.

[116] Y. L. Dokshitzer, D. Diakonov, and S. Troian, "Hard Processes in Quantum Chromodynamics," *Phys.Rept.*, vol. 58, pp. 269–395, 1980.

[117] Y. L. Dokshitzer, D. Diakonov, and S. Troian, "On the Transverse Momentum Distribution of Massive Lepton Pairs," *Phys.Lett.*, vol. B79, pp. 269–272, 1978.

[118] G. Curci, M. Greco, and Y. Srivastava, "Qcd jets from coherent states," *Nucl.Phys.*, vol. B159, p. 451, 1979.

[119] J. C. Collins and D. E. Soper, "Back-To-Back Jets: Fourier Transform from B to K-Transverse," *Nucl.Phys.*, vol. B197, p. 446, 1982.

[120] S. Catani and M. Grazzini, "QCD transverse-momentum resummation in gluon fusion processes," *Nucl.Phys.*, vol. B845, pp. 297–323, 2011.

[121] T. Becher and M. Neubert, "Drell-Yan production at small q_T, transverse parton distributions and the collinear anomaly," *Eur.Phys.J.*, vol. C71, p. 1665, 2011.

[122] G. Bozzi, S. Catani, G. Ferrera, D. de Florian, and M. Grazzini, "Production of Drell-Yan lepton pairs in hadron collisions: Transverse-momentum resummation at next-to-next-to-leading logarithmic accuracy," *Phys.Lett.*, vol. B696, pp. 207–213, 2011.

[123] R. Hamberg, W. van Neerven, and T. Matsuura, "A Complete calculation of the order $\alpha - s^2$ correction to the Drell-Yan K factor," *Nucl.Phys.*, vol. B359, pp. 343–405, 1991.

[124] R. J. Gonsalves, J. Pawlowski, and C.-F. Wai, "Qcd radiative corrections to electroweak boson production at large transverse momentum in hadron collisions," *Phys.Rev.*, vol. D40, p. 2245, 1989.

[125] S. Catani, "The Singular behavior of QCD amplitudes at two loop order," *Phys.Lett.*, vol. B427, pp. 161–171, 1998.

[126] A. Bassetto, M. Ciafaloni, and G. Marchesini, "Inelastic Distributions and Color Structure in Perturbative QCD," *Nucl.Phys.*, vol. B163, p. 477, 1980.

[127] G. Altarelli, R. K. Ellis, M. Greco, and G. Martinelli, "Vector Boson Production at Colliders: A Theoretical Reappraisal," *Nucl.Phys.*, vol. B246, p. 12, 1984.

[128] R. K. Ellis, G. Martinelli, and R. Petronzio, "Lepton Pair Production at Large Transverse Momentum in Second Order QCD," *Nucl.Phys.*, vol. B211, p. 106, 1983.

[129] C. Davies, B. Webber, and W. J. Stirling, "Drell-Yan Cross-Sections at Small Transverse Momentum," *Nucl.Phys.*, vol. B256, p. 413, 1985.

[130] J. M. Campbell and E. N. Glover, "Double unresolved approximations to multiparton scattering amplitudes," *Nucl.Phys.*, vol. B527, pp. 264–288, 1998.

[131] S. Catani and M. Grazzini, "Infrared factorization of tree level QCD amplitudes at the next-to-next-to-leading order and beyond," *Nucl.Phys.*, vol. B570, pp. 287–325, 2000.

[132] Z. Bern, L. J. Dixon, D. C. Dunbar, and D. A. Kosower, "One loop n point gauge theory amplitudes, unitarity and collinear limits," *Nucl.Phys.*, vol. B425, pp. 217–260, 1994.

[133] Z. Bern, V. Del Duca, and C. R. Schmidt, "The Infrared behavior of one loop gluon amplitudes at next-to-next-to-leading order," *Phys.Lett.*, vol. B445, pp. 168–177, 1998.

[134] D. A. Kosower and P. Uwer, "One loop splitting amplitudes in gauge theory," *Nucl.Phys.*, vol. B563, pp. 477–505, 1999.

[135] S. Catani and M. Grazzini, "The soft gluon current at one loop order," *Nucl.Phys.*, vol. B591, pp. 435–454, 2000.

[136] C. Balazs, E. L. Berger, S. Mrenna, and C. Yuan, "Photon pair production with soft gluon resummation in hadronic interactions," *Phys.Rev.*, vol. D57, pp. 6934–6947, 1998.

[137] C. Anastasiou, E. N. Glover, and M. Tejeda-Yeomans, "Two loop QED and QCD corrections to massless fermion boson scattering," *Nucl.Phys.*, vol. B629, pp. 255–289, 2002.

[138] S. Drell and T.-M. Yan, "Massive Lepton Pair Production in Hadron-Hadron Collisions at High-Energies," *Phys.Rev.Lett.*, vol. 25, pp. 316–320, 1970.

[139] G. Arnison *et al.*, "Experimental Observation of Isolated Large Transverse Energy Electrons with Associated Missing Energy at s**(1/2) = 540-GeV," *Phys.Lett.*, vol. B122, pp. 103–116, 1983.

[140] M. Banner *et al.*, "Observation of Single Isolated Electrons of High Transverse Momentum in Events with Missing Transverse Energy at the CERN anti-p p Collider," *Phys.Lett.*, vol. B122, pp. 476–485, 1983.

[141] T. E. W. Group, "2012 Update of the Combination of CDF and D0 Results for the Mass of the W Boson," 2012.

[142] R. Thorne, A. Martin, W. Stirling, and G. Watt, "The Effects of combined HERA and recent Tevatron $W \to l\nu$ charge asymmetry data on the MSTW PDFs," *PoS*, vol. DIS2010, p. 052, 2010.

[143] G. Watt, "MSTW PDFs and impact of PDFs on cross sections at Tevatron and LHC," *Nucl.Phys.Proc.Suppl.*, vol. 222-224, pp. 61–80, 2012.

[144] G. Watt and R. Thorne, "Study of Monte Carlo approach to experimental uncertainty propagation with MSTW 2008 PDFs," 2012.

[145] M. Ubiali, "NNLO analysis of the LHC W lepton charge asymmetry data," 2011.

[146] K. Melnikov and F. Petriello, "The W boson production cross section at the LHC through $O(\alpha_s^2)$," *Phys.Rev.Lett.*, vol. 96, p. 231803, 2006.

[147] K. Melnikov and F. Petriello, "Electroweak gauge boson production at hadron colliders through O(alpha(s)**2)," *Phys.Rev.*, vol. D74, p. 114017, 2006.

[148] S. Dittmaier and . Kramer, Michael, "Electroweak radiative corrections to W boson production at hadron colliders," *Phys.Rev.*, vol. D65, p. 073007, 2002.

[149] U. Baur and D. Wackeroth, "Electroweak radiative corrections to $p\bar{p} \to W^{\pm} \to \ell^{\pm}\nu$ beyond the pole approximation," *Phys.Rev.*, vol. D70, p. 073015, 2004.

[150] U. Baur, O. Brein, W. Hollik, C. Schappacher, and D. Wackeroth, "Electroweak radiative corrections to neutral current Drell-Yan processes at hadron colliders," *Phys.Rev.*, vol. D65, p. 033007, 2002.

[151] C. Carloni Calame, G. Montagna, O. Nicrosini, and A. Vicini, "Precision electroweak calculation of the production of a high transverse-momentum lepton pair at hadron colliders," *JHEP*, vol. 0710, p. 109, 2007.

[152] C. Amsler *et al.*, "Review of Particle Physics," *Phys.Lett.*, vol. B667, pp. 1–1340, 2008.

[153] D. A. Dicus and S. S. Willenbrock, "Radiative corrections to the ratio of Z and W boson production," *Phys.Rev.*, vol. D34, p. 148, 1986.

[154] A. Martin, W. Stirling, R. Thorne, and G. Watt, "Parton distributions for the LHC," *Eur.Phys.J.*, vol. C63, pp. 189–285, 2009.

[155] A. Martin, R. Roberts, W. Stirling, and R. Thorne, "Uncertainties of predictions from parton distributions. 1: Experimental errors," *Eur.Phys.J.*, vol. C28, pp. 455–473, 2003.

[156] A. Martin, R. Roberts, W. Stirling, and R. Thorne, "Physical gluons and high E(T) jets," *Phys.Lett.*, vol. B604, pp. 61–68, 2004.

[157] S. Catani and B. Webber, "Infrared safe but infinite: Soft gluon divergences inside the physical region," *JHEP*, vol. 9710, p. 005, 1997.

[158] A. D. Martin, R. Roberts, W. Stirling, and R. Thorne, "MRST2001: Partons and α_s from precise deep inelastic scattering and Tevatron jet data," *Eur.Phys.J.*, vol. C23, pp. 73–87, 2002.

[159] A. Martin, R. Roberts, W. Stirling, and R. Thorne, "NNLO global parton analysis," *Phys.Lett.*, vol. B531, pp. 216–224, 2002.

[160] V. Saleev, "Diphoton production at Tevatron in the quasi-multi-Regge-kinematics approach," *Phys.Rev.*, vol. D80, p. 114016, 2009.

[161] T. Appelquist, H.-C. Cheng, and B. A. Dobrescu, "Bounds on universal extra dimensions," *Phys.Rev.*, vol. D64, p. 035002, 2001.

[162] G. Aad *et al.*, "Search for Diphoton Events with Large Missing Transverse Energy in 7 TeV Proton-Proton Collisions with the ATLAS Detector," *Phys.Rev.Lett.*, vol. 106, p. 121803, 2011.

[163] L. Randall and R. Sundrum, "A Large mass hierarchy from a small extra dimension," *Phys.Rev.Lett.*, vol. 83, pp. 3370–3373, 1999.

[164] S. Mrenna and J. D. Wells, "Detecting a light Higgs boson at the Fermilab Tevatron through enhanced decays to photon pairs," *Phys.Rev.*, vol. D63, p. 015006, 2001.

[165] G. Giudice and R. Rattazzi, "Theories with gauge mediated supersymmetry breaking," *Phys.Rept.*, vol. 322, pp. 419–499, 1999.

[166] H. Baer, J. Ohnemus, and J. Owens, "A next-to-leading logarithm calculation of direct photon production," *Phys.Rev.*, vol. D42, pp. 61–71, 1990.

[167] P. Aurenche, R. Baier, and M. Fontannaz, "Prompt Photon Production at Colliders," *Phys.Rev.*, vol. D42, pp. 1440–1449, 1990.

[168] Z. Kunszt and Z. Trocsanyi, "QCD corrections to photon production in association with hadrons in e+ e- annihilation," *Nucl.Phys.*, vol. B394, pp. 139–168, 1993.

[169] E. L. Berger and J.-w. Qiu, "Calculations of prompt photon production in QCD," *Phys.Rev.*, vol. D44, pp. 2002–2024, 1991.

[170] L. Gordon and W. Vogelsang, "Polarized and unpolarized isolated prompt photon production beyond the leading order," *Phys.Rev.*, vol. D50, pp. 1901–1916, 1994.

[171] S. Catani, M. Fontannaz, J. Guillet, and E. Pilon, "Cross-section of isolated prompt photons in hadron hadron collisions," *JHEP*, vol. 0205, p. 028, 2002.

[172] S. Catani, M. Fontannaz, and E. Pilon, "Factorization and soft gluon divergences in isolated photon cross-sections," *Phys.Rev.*, vol. D58, p. 094025, 1998.

[173] E. L. Berger, X.-f. Guo, and J.-w. Qiu, "Isolated prompt photon production in hadronic final states of e+ e- annihilation," *Phys.Rev.*, vol. D54, pp. 5470–5495, 1996.

[174] S. Frixione, "Isolated photons in perturbative QCD," *Phys.Lett.*, vol. B429, pp. 369–374, 1998.

[175] S. Frixione, Z. Kunszt, and A. Signer, "Three jet cross-sections to next-to-leading order," *Nucl.Phys.*, vol. B467, pp. 399–442, 1996.

[176] A. Gehrmann-De Ridder, T. Gehrmann, and E. N. Glover, "Radiative corrections to the photon + 1 jet rate at LEP," *Phys.Lett.*, vol. B414, pp. 354–361, 1997.

[177] A. Gehrmann-De Ridder and E. N. Glover, "A Complete O (alpha alpha-s) calculation of the photon + 1 jet rate in e+ e- annihilation," *Nucl.Phys.*, vol. B517, pp. 269–323, 1998.

[178] D. Buskulic *et al.*, "First measurement of the quark to photon fragmentation function," *Z.Phys.*, vol. C69, pp. 365–378, 1996.

[179] D. A. Dicus and S. S. Willenbrock, "Photon pair production and the intermediate mass Higgs boson," *Phys.Rev.*, vol. D37, p. 1801, 1988.

[180] S. Frixione and W. Vogelsang, "Isolated photon production in polarized *pp* collisions," *Nucl.Phys.*, vol. B568, pp. 60–92, 2000.

[181] G. Abbiendi *et al.*, "Measurement of isolated prompt photon production in photon photon collisions at s(ee)**(1/2) = 183 GeV - 209-GeV," *Eur.Phys.J.*, vol. C31, pp. 491–502, 2003.

[182] J. Andersen *et al.*, "The SM and NLO Multileg Working Group: Summary report," pp. 21–189, 2010.

[183] L. Bourhis, M. Fontannaz, and J. Guillet, "Quarks and gluon fragmentation functions into photons," *Eur.Phys.J.*, vol. C2, pp. 529–537, 1998.

[184] V. D. Barger, T. Han, J. Ohnemus, and D. Zeppenfeld, "Pair production of $W^{\pm}$, γ and Z in association with jets," *Phys.Rev.*, vol. D41, p. 2782, 1990.

[185] Z. Bern, L. J. Dixon, and D. A. Kosower, "One loop corrections to two quark three gluon amplitudes," *Nucl.Phys.*, vol. B437, pp. 259–304, 1995.

[186] R. Kleiss and R. Pittau, "Weight optimization in multichannel Monte Carlo," *Comput.Phys.Commun.*, vol. 83, pp. 141–146, 1994.

[187] G. P. Lepage, "A New Algorithm for Adaptive Multidimensional Integration," *J.Comput.Phys.*, vol. 27, p. 192, 1978.

[188] ATLAS collaboration, "Atlas detector and physics performance, technical design report." CERN/LHCC 99-15, ATLAS-TDR-15.

[189] CMS collaboration, "Cms: The electromagnetic calorimeter, technical design report." CERN/LHCC 97-33, CMS-TDR-4.

[190] S. Dittmaier, S. Dittmaier, C. Mariotti, G. Passarino, R. Tanaka, *et al.*, "Handbook of LHC Higgs Cross Sections: 2. Differential Distributions," 2012.

[191] J. M. Butterworth, G. Dissertori, and G. P. Salam, "Hard Processes in Proton-Proton Collisions at the Large Hadron Collider," 2012.

[192] G. P. Salam, "QCD in hadron collisions," 2012.

[193] Vellidis, Constantinos, "Photons/diphotons at the tevatron." "`https://indico.cern.ch/getFile.py/access?contribId=19&sessionId=7&resId=1&materialId=slides&confId=178103`", Talk given at QCD@LHC 2012, Michigan State University.

[194] Marchiori, Giovanni, "private communication.." ATLAS collaboration.

[195] G. Bozzi, S. Catani, D. de Florian, and M. Grazzini, "Higgs boson production at the LHC: Transverse-momentum resummation and rapidity dependence," *Nucl.Phys.*, vol. B791, pp. 1–19, 2008.

[196] T. Gehrmann, T. Lubbert, and L. L. Yang, "Transverse parton distribution functions at next-to-next-to-leading order: the quark-to-quark case," 2012.