

Tesis Doctoral

Aspectos de soluciones solitónicas en teorías de Chern-Simons

Sourrouille, Lucas

2011

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Sourrouille, Lucas. (2011). Aspectos de soluciones solitónicas en teorías de Chern-Simons. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

Cita tipo Chicago:

Sourrouille, Lucas. "Aspectos de soluciones solitónicas en teorías de Chern-Simons". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2011.

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires



Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

Aspectos de soluciones solitónicas en teorías de Chern-Simons

Trabajo de Tesis para optar por el título de
Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Físicas

por Lucas Sourrouille

Director y Consejero: Dr. Gustavo Lozano
Lugar de trabajo: Departamento de Física, FCEyN, UBA

Fecha Octubre 2011

Resumen

En esta tesis doctoral, estudiaremos diversos aspectos de soluciones solitónicas y supersimetría en teorías donde la dinámica del campo de gauge esta dictada por un término de Chern-Simons. Analizaremos el modelo de Jackiw-Pi en espacio no-conmutativo. Mostraremos que es posible elegir las constantes de acoplamiento de la teoría de forma tal que el modelo presente una extensión supersimétrica y ecuaciones de auto-dualidad. Estudiaremos a continuación modelos supersimétricos en $(1+1)$ -dimensiones (discutidos originalmente en el contexto de átomos fríos) y mostraremos que pueden ser obtenidos por reducción dimensional de la extensión supersimétrica del modelo de Jackiw-Pi. Calcularemos las cargas supersimétricas, su álgebra y finalmente obtendremos las ecuaciones de auto-dualidad del modelo. Por último discutiremos la existencia de solitones en modelos tipo Chern-Simons-CP(1) y mostraremos que este modelo no soporta soluciones solitónicas en \mathbf{R}^2 contrariamente a lo anunciado en otros trabajos.

Palabras claves: Chern-Simons, Supersimetría, Soluciones Solitónicas, Gases Ultrafríos, Teorías CP(N).

Aspects of soliton solutions in Chern-Simons theories

Abstract

In this Doctoral thesis we will study several aspects of soliton solutions and supersymmetry in theories where the dynamics of the gauge fields is dictated by a ChernSimons term. We analyze the Jackiw-Pi model in non-commutative space. We show that it is possible to choose the coupling constants in such a way that the model has an extended supersymmetry and self-dual equations. We also study supersymmetric models in (1+1)-dimensions (discussed originally in the context of cold atoms) and we show that these models can be obtained by dimensional reduction of the supersymmetric extension of the Jackiw-Pi model. In addition, we identify the supercharges, their algebra and self-dual equations of the model. Finally we discuss the existence of soliton solutions in a type of Chern-Simons-CP(1) models, we show that these models cannot support soliton solutions in \mathbf{R}^2 , in contrast to earlier claims in the literature.

Keywords: Chern-Simons, Supersymmetry, Soliton Solutions, Ultracold gases, CP(N) theories.

Agradecimientos

En primer lugar a Gustavo Lozano por haber aceptado dirigir mi tesis, por su apoyo y por haberme enseñado a trabajar. A Fidel Schaposnik, también, por guiarme en mi formación doctoral.

A un montón de gente y compañeros, en especial a Diego P. D. por contestar siempre mis infinitas preguntas de computación y a Jerónimo por aceptar discutir mil veces lo mismo.

Por último a la chicos del voluntariado educativo de la UBA y La Red y a toda mi familia.

Índice general

| | |
|--|-----------|
| 1. Introducción | 1 |
| 2. Soluciones tipo vórtice en teorías de Chern-Simons-Higgs | 6 |
| 2.1. Introducción | 6 |
| 2.2. El modelo de Higgs abeliano y los vórtices de Abrikosov-Nielsen-Olesen . . . | 8 |
| 2.3. Vórtices en los modelos de Chern-Simons-Higgs | 13 |
| 2.3.1. Vórtices de Chern-Simons-Higgs relativistas | 13 |
| 2.3.2. Vórtices de Chern-Simons-Higgs no-relativistas: El modelo de Jackiw-Pi | 19 |
| 2.4. Supersimetría en los modelos de Chern-Simons-Higgs | 22 |
| 2.4.1. Supersimetría en el modelo de Chern-Simons-Higgs relativista | 22 |
| 2.4.2. Extensión supersimétrica del modelo de Jackiw-Pi | 27 |
| 3. Supersimetría y solitones en teorías de campos en espacios no conmutati- vos | 32 |
| 3.1. Producto Moyal | 33 |
| 3.1.1. Propiedades del producto Moyal | 34 |
| 3.2. Teorías de gauge en espacio no-conmutativo | 35 |
| 3.2.1. Acción invariante de gauge | 38 |
| 3.3. Solitones | 39 |
| 3.4. Supersimetrías no-relativistas en espacio no-conmutativo | 47 |
| 4. Supersimetría Galileana en (1+1)-dimensiones | 56 |
| 4.1. Reducción dimensional de los modelos de Chern-Simons | 57 |

| | |
|---|-----------|
| 4.2. Supersimetría en gases ultra-fríos | 60 |
| 4.2.1. Reducción dimensional del modelo de Jackiw-Pi supersimétrico | 62 |
| 4.2.2. Supersimetría en (1+1) a partir de un modelo de Chern-Simons-Maxwell | |
| 68 | |
| 5. Solitones en la teoría Chern-Simons-CP(1) | 79 |
| 5.1. Propiedades de los modelos CP(N) | 80 |
| 5.2. Soluciones solitónicas en un modelo Chern-Simons-CP(1) sin potencial | 85 |
| 6. Conclusiones | 95 |

Capítulo 1

Introducción

Desde los primeros desarrollos en Teoría Cuántica de Campos, la utilización de métodos semiclásicos ha jugado un papel central para el análisis de diversos efectos no perturbativos. En este esquema, el estudio de soluciones no triviales de las ecuaciones de movimiento (distintas del vacío trivial sobre el cual se monta la teoría de perturbaciones) representa el puntapié inicial[1]-[5].

Estas soluciones suelen ser designadas como solitones e instantones, dependiendo que sean estas correspondientes a una teoría definida en espacio de Minkowski o Euclideo. Aunque de interpretación diversa, ambos tipos de soluciones están asociadas a una estructura no trivial del “vacío”. Las soluciones tipo solitones (de la cual nos ocuparemos en esta Tesis) se presentan por lo general en teorías con ruptura espontánea de la simetría de gauge, y su existencia y estabilidad puede ser ligadas con distintas propiedades topológicas. Reciben los nombres de (en orden dimensionalidad creciente) de kinks o paredes de dominio, vórtices y monopolos. Típicamente, los solitones son soluciones localizadas en el espacio. En otras palabras esto quiere decir que su densidad de energía se encuentra concentrada en una región bien definida del espacio. Fuera de esta región los campos decaen rápidamente a su valor de expectativa de vacío, valor de expectativa no nulo que rompe algunas de las simetrías de la teoría. Es decir, los solitones pueden ser asociados con “defectos” en el mecanismo de ruptura de la simetría.

El mecanismo de ruptura de simetría también es frecuente en varias Teorías efectivas

de la Materia Condensada por lo que no es de extrañar que este tipo de soluciones también tengan relevancia en esta área, y de hecho, en algunos casos, discutidas con anterioridad. Paredes de dominio en ferromagnetos, vórtices en superconductores y superfluidos y hasta los recientemente discutidos monopolos en la teoría del "hielo de espin" son algunos ejemplos [6]-[8].

Entre las soluciones solitónicas, el caso mas relevante para los temas de esta Tesis es el de los vórtices magnéticos discutidos originalmente por Abrikosov en la Teoría de Ginzburg Landau de la superconductividad y por Nielsen y Olesen en el modelo Abelian de Higgs. Estas son soluciones axialmente simétricas que pueden ser asociadas con un tubo de flujo "magnético" (en el caso de teorías de partículas o teorías efectivas el campo no necesariamente es el del electromagnetismo) alrededor del cual la fase del parámetro de orden (o el campo de Higgs) cambia en un múltiplo de 2π .

Debido a la simetría cilíndrica, los vórtices también pueden ser considerados como soluciones no triviales en teorías definidas en un espacio $2 + 1$ dimensional. En esta dimensionalidad, es posible considerar, además del término de Maxwell, para la dinámica de los campos de gauge, un término de Chern-Simons [9, 10]. En un principio las teorías de Chern-Simons llamaron la atención por que proveen un mecanismo de generación de masa para bosones vectoriales, distinto del de Higgs, dando lugar a lo que se conoce como masa topológica. Más tarde se mostró que también pueden jugar un papel relevante en la descripción de procesos que están confinados al plano espacial tales como el problema de Landau, los efectos Bhom-Aharonov y Hall, y la superconductividad a temperatura crítica. El lagrangeano de Chern-Simons en $(2+1)$ -dimensiones y en su versión abeliana se escribe

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho, \quad (1.1)$$

Acoplado el término de Chern-Simons (combinado también con un término de Maxwell) a la dinámica de los campos de materia es posible construir una variedad de teorías que presentan interesantes soluciones tipo vórtice. A diferencia de los vórtices de Nielsen Olesen, estos tienen también carga eléctrica y pueden poseer estadística fraccionaria.

Un punto importante en el estudio de soluciones no triviales está dado por la existencia de ecuaciones de autodualidad. Estas son ecuaciones que existen en algunas teorías y para valores particulares de parámetros, cuyas soluciones también son soluciones de las ecuaciones de movimiento de Euler Lagrange. Mas aún, varias propiedades de las soluciones (como por ejemplo su energía) pueden ser inferidas sin la necesidad de resolver las ecuaciones y las propiedades de estabilidad pueden ser derivadas de propiedades topológicas. Otro aspecto interesante relacionado con las ecuaciones de autodualidad es que por lo general, el valor de los parámetros para los cuales la teoría presenta estas ecuaciones coincide con la condición sobre los parámetros impuestas por la existencia de una extensión supersimétrica.

En esta tesis nos ocuparemos de distintos aspectos relacionados con la existencia y propiedades de soluciones clásicas no triviales en teorías $2 + 1$ dimensionales.

Se presentarán trabajos originales, que describen teorías de Chern-Simons acopladas a campos de Higgs no relativistas y campos $CP(1)$, tanto en espacio ordinario como no-conmutativo.

Comenzaremos, en el capítulo 2, por hacer una introducción a las teorías de Higgs y Chern-Simons-Higgs, estudiando las soluciones tipo vórtice que allí se presentan y su relación con la extensión supersimétrica de estos modelos. Más específicamente, en la primer sección estudiaremos el modelo de Higgs y mostraremos que imponiendo condiciones de borde para energía finita se obtiene, como solución a las ecuaciones de campo, vórtices topológicos, los cuales además son auto-duales. Luego veremos que las teorías de Chern-Simons-Higgs, tanto relativista como no relativista (modelo de Jackiw-Pi), son también auto-duales y soportan vórtices topológicos. En la parte final analizaremos como esta teorías de Chern-Simons se extienden supersimétricamente en el punto de auto-dualidad.

El capítulo 3 está dedicado a las teorías de campos en espacios no-conmutativos. En el comienzo se estudian aspectos generales del producto Moyal y la formulación de teorías de gauge en espacio no-conmutativo. Se analizarán también resultados ya conocidos como la generalización a espacio no-conmutativo del modelo abeliano de Higgs y de Jackiw-Pi. En la última parte se presenta el primer trabajo original de los que se constituye esta tesis. Aquí,

exploraremos la posibilidad de extender al caso no-conmutativo el modelo supersimétrico de Jackiw-Pi. Se encontrarán las supersimetrías y se comprobará que la teoría supersimétrica es auto-dual. Por último construiremos las cargas supersimétricas y su álgebra.

El estudio de soluciones solitónicas supersimétricas en $(1 + 1)$ -dimensiones, es tratado en el capítulo 4. Allí se verá que la reducción de una dimensión espacial en el modelo de Jackiw-Pi conduce a una teoría que es auto-dual en el caso estático y en el dinámico queda gobernada por una ecuación no lineal de Schrödinger. Estas ecuaciones se resolverán en forma analítica y mostraremos que en ambos casos las soluciones son solitones. La segunda parte de este capítulo esta dedicada a dos trabajos originales. Estos tratan sobre solitones supersimétricos en un modelo que describe gases ultra-fríos. El primero de ellos es un estudio de la reducción en una dimensión espacial del modelo de Jackiw-Pi supersimetrizado. Mediante este proceso se logrará identificar las supersimetrías correctas del modelo de gases ultra-fríos. Además mostraremos que la teoría obtenida a partir de la reducción dimensional es auto-dual. El segundo de los trabajos comienza por analizar la extensión supersimétrica de un modelo de Maxwell-Chern-Simons no-relativista, para luego estudiar su reducción en una dimensión espacial. Luego, usando las cargas calculadas en el primero de los trabajos, se mostrará como obtener el álgebra completa de la teoría. Para finalizar, mostraremos la existencia de ecuaciones solitónicas originales y construiremos su solución para el caso bosónico.

El capítulo que cierra la parte de investigación de la tesis es dedicado al estudio de solitones en la teoría Chern-Simons- $CP(1)$. Una introducción al modelo $CP(N)$ es presentada en el comienzo del capítulo 5. La parte final esta abocada al estudio de un modelo de Chern-Simons- $CP(1)$ sin término de potencial y es parte original de la investigación realizada. Contrariamente a lo creído, mostraremos en forma analítica y también numérica que este modelo no soporta soluciones solitónicas en \mathbf{R}^2 .

La tesis finaliza, en el capítulo 6, con una breve discusión de los resultados obtenidos en los capítulos anteriores.

Resultados parciales contenidos en esta tesis han sido publicados en:

1. Gustavo S. Lozano, Olivier Piguet, Fidel A. Schaposnik, Lucas Sourrouille, Phys. Lett. B **630**, 108 (2005).
2. Gustavo S. Lozano, Oliver Piguet, Fidel A. Schaposnik and Lucas Sourrouille, Phys. Rev. A **75**, 023608 (2007) [arXiv:cond-mat/0609553].
3. Lucas Sourrouille, Phys. Rev. D **83**, 045016 (2011), [arXiv:hep-th/1010.6277].
4. L. Sourrouille, A. Caso and G. S. Lozano, [hep-th/1002.4847], Mod. Phys. Lett. A **26**, 637 (2011)

Capítulo 2

Soluciones tipo vórtice en teorías de Chern-Simons-Higgs

2.1. Introducción

Los vórtices son soluciones axialmente simétricas localizadas de acción finita (por unidad de longitud) de las ecuaciones clásicas de movimiento de una teoría de campos. Estas soluciones toman la forma de cuerdas o líneas de flujo magnético localizadas. Este tipo de soluciones juegan un rol central en el análisis de aspectos no perturbativos en teorías de gauge. Fueron por primera vez considerados en el área de materia condensada por Abrikosov[11] y más tarde redescubiertos en el contexto de la física de altas energías por Nielsen y Olesen [12]. En su trabajo, Nielsen y Olesen lograron mostrar que una teoría abeliana de Higgs admite soluciones tipo vórtice en analogía con las encontradas en los superconductores tipo II. La existencia de estos vórtices fue originalmente discutida en relación a las cuerdas duales de Nambu[13] pero cobraron relevancia años más tarde en un contexto cosmológico. Los vórtices son soluciones "topológicamente" no triviales pues su existencia y estabilidad esta relacionada como discutiremos más adelante con propiedades topológicas del vacío. Existen diversos tipos de soluciones topológicas no triviales, quizá una de la más interesantes de estas es la descubierta por 't Hooft[14] y Polyakov[15], quienes en forma independiente mostraron la existencia de monopolos magnéticos en una teoría no-abeliana de Higgs en $(3 + 1)$ -dimensiones. La existencia y propiedades de vórtices, monopolos (y paredes de do-

minio) han sido ampliamente discutida en diversos aspectos no perturbativos. También en los años 70 y 80 su estudio fue muy intenso en el contexto de modelos Gran Unificados. En un contexto cosmológico, estos modelos presentan diversas transiciones de fase, entre una era de alta temperatura (con un vacío simétrico) y una era actual de baja temperatura (con simetría rota). En las sucesivas transiciones de fase, la aparición de defectos como paredes, vórtices y monopolos es posible[16].

En el contexto de las teorías de Chern-Simons, soluciones tipo vórtices fueron discutidas a mediados de la década de los 80 en trabajos realizados por De Vega y Schaposnik[17, 18] y por Paul y Khare[19]. Este tipo de soluciones cobraron particular relevancia hacia fines de los 80 principalmente en el contexto de teorías efectivas en Materia Condensada pues el término de Chern-Simons aparece en forma natural en la descripción del efecto Hall fraccionario y se especuló que podría cumplir un rol en la superconductividad de alta temperatura crítica.

Hacia comienzos de los años 90 la existencia de ecuaciones de auto-dualidad en teorías de Chern Simons fue discutida por primera vez en trabajos de Jackiw y Weinberg[20] y de Hong, Kim y Pac[21], quienes mostraron la existencia de dichas soluciones en el modelo abeliano de Chern-Simons-Higgs. Poco tiempo después Jackiw y Pi propusieron una teoría de Chern-Simons no relativista[22] y mostraron la existencia de vórtices auto-duales en la misma. Por último vale la pena destacar, como una característica notable, la posibilidad de extender supersimetricamente las teorías que presentan soluciones auto-duales. Este hecho fue notado por primera vez por Witten y Olive[23] y más tarde extendido para los vortices de Chern-Simons-Higgs en las referencias [24, 25]. Así, pues, en este capítulo nos proponemos resumir las características fundamentales de los vórtices tanto en los modelos de Higgs como de Chern-Simons-Higgs. Para el caso de las teorías de Chern-Simons presentaremos también su extensión supersimétrica y su conexión con la teoría auto-dual.

2.2. El modelo de Higgs abeliano y los vórtices de Abrikosov-Nielsen-Olesen

El modelo abeliano de Higgs describe campos escalares cargados interactuando con campos de gauge $U(1)$. En (2+1) dimensiones este modelo esta caracterizado por la siguiente acción

$$S_{AH} = \int d^3x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_\mu\phi|^2 - \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - v^2)^2 \right) \quad (2.1)$$

Aquí $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ ($\mu = 0, 1, 2$) es la derivada covariante y el tensor $F_{\mu\nu}$ es el tensor electromagnético dado por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.2)$$

La constante v es positiva, λ es una constante de acoplamiento y la signatura es $(1, -1, -1)$.

Las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} D_\mu D^\mu \phi &= \frac{\lambda}{2} \phi (|\phi|^2 - v^2) \\ \partial^\mu F_{\mu\nu} &= j_\nu \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde

$$j_\nu = ie[\phi\partial_\nu\phi^* - \phi^*\partial_\nu\phi] + 2e^2|\phi|^2A_\nu \quad (2.4)$$

Eligiendo el gauge $A_0 = 0$, la energía para una configuración estática de los campos es

$$E_{AH} = \int d^2x \left(\frac{1}{2}B^2 + |D_i\phi|^2 + \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - v^2)^2 \right) \quad (2.5)$$

donde $B = F_{12}$ y $i = (1, 2)$. Para que la energía del sistema sea finita, su densidad debe tender a cero asintóticamente en infinito. Es decir se deben satisfacer las siguientes condiciones de contorno

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow \infty} B &= 0 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} D_i \phi &= 0 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} |\phi|^2 &= v^2\end{aligned}\tag{2.6}$$

Estas condiciones determinan el comportamiento asintótico de los campos, de manera tal que estos deben satisfacer

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow \infty} \phi &= v e^{i\alpha(\theta)} \\ \lim_{r \rightarrow \infty} A_i &= \frac{i}{e} \partial_i (\log \phi)\end{aligned}\tag{2.7}$$

Aquí $\alpha(\theta)$ es una fase que no queda fijada por las condiciones de borde en infinito. Este hecho permite establecer un mapa entre los puntos del círculo espacial infinito, que denotamos como S^1_∞ , y los puntos del círculo que define el factor de fase mencionado. Así las configuraciones de campo para energía finita tienen asociado un mapa $S^1_\infty \rightarrow S^1$. Para que el campo ϕ sea continuo, α debe variar en $2\pi N$ cuando θ varía en 2π , donde N es un número entero conocido como *winding number* o vorticidad del campo. Puesto que solo puede tomar valores enteros, el *winding number* no cambia ante deformaciones continuas en los campos. De esta forma el *winding number* resulta ser una cantidad conservada que no proviene de una simetría de la acción, sino de consideraciones puramente topológicas. Estas consideraciones implican además otra consecuencia importante, la cuantización del flujo magnético

$$\Phi = \int d^2x B = \oint_{|x|=\infty} A_i dx^i = -\frac{(\alpha(2\pi) - \alpha(0))}{e} = -\frac{2\pi N}{e}\tag{2.8}$$

En búsqueda de una solución a las ecuaciones de movimiento señaladas en la formula (2.3), Nielsen y Olesen propusieron el siguiente ansatz con simetría cilíndrica

$$\phi(\theta, r) = f(r)e^{iN\theta}, \quad A_\theta(r) = a(r), \quad A_r = 0 \quad (2.9)$$

Sustituyendo este ansatz en las condiciones de borde (2.7), obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} f(r) &= v \\ \lim_{r \rightarrow \infty} a(r) &= -\frac{N}{re}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

mientras que las ecuaciones de movimiento escritas en términos de este ansatz son

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} f(r) \right) + \left[\left(\frac{N}{r} + ea(r) \right)^2 + \lambda(f^2(r) - v^2) \right] f(r) &= 0 \\ -\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ra(r)) \right) + \left(e^2 a(r) + \frac{Ne}{r} \right) f^2(r) &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

La solución a estas ecuaciones no se conoce en forma analítica. Sin embargo resulta relativamente sencillo obtener una aproximación cuando r es arbitrariamente grande. En este caso las soluciones deberían aproximar a las condiciones de borde (2.10) en forma exponencial. Sustituyendo v por $f(r)$ en la segunda de las ecuaciones de movimiento (2.11) obtenemos que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} a(r) = -\frac{N}{re} + c \frac{\exp(-e\sqrt{2}vr)}{\sqrt{r}}, \quad (2.12)$$

donde c es una constante. Insertando esta última expresión en la primera de las ecuaciones (2.11) obtenemos la forma asintótica para $f(r)$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = v + ce^{-\sqrt{\lambda}vr} \quad (2.13)$$

(En realidad el argumento anterior es solo valido para $\lambda/e^2 < 4$, ver [26]). Las magnitudes $m_g = e\sqrt{2}v$ y $m_s = \sqrt{\lambda}v$ también son las masas de los campos de gauge y de materia asociadas a la fase de Higgs que presenta la acción (2.1). Numéricamente[27] ha sido mostrado que dos vórtices se repelen si $m_s > m_g$ y se atraen si $m_s < m_g$. Cuando las masas son iguales

$$m_s = m_g, \quad (2.14)$$

la fuerza entre los vórtices desaparece y es posible encontrar configuraciones de vórtices estables. En la teoría de superconductores, este punto crítico corresponde a la interfase entre superconductividad tipo I y II[28]. Desde el punto de vista del modelo abeliano de Higgs este punto coincide con el punto de auto-dualidad, donde

$$\lambda = 2e^2 \quad (2.15)$$

Cuando esta relación, entre la carga e y la constante de acoplamiento λ ocurre, el modelo de Higgs presenta particulares características matemáticas y físicas. Entre ellas las principales son la ya mencionada posibilidad de extender el modelo supersimétricamente[23] y la reducción de las ecuaciones de movimiento (2.3) a ecuaciones de primer orden en las derivadas[29, 30]. En el punto crítico, $\lambda = 2e^2$, la energía (2.5) puede ser reescrita como la suma de términos positivos más un término topológico proporcional al winding number. En efecto, podemos ver que usando la identidad

$$|D_i\phi|^2 = |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 \mp eB|\phi|^2 \pm \epsilon^{ij}\partial_i j_j \quad (2.16)$$

la formula (2.5) para la energía toma la siguiente expresión

$$E_{AH} = \int d^2x \left[\frac{1}{2} \left(B \mp e(|\phi|^2 - v^2) \right)^2 + |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 + \left(\frac{\lambda}{4} - \frac{e^2}{2} \right) \left(|\phi|^2 - v^2 \right)^2 \mp ev^2 B \pm \epsilon^{ij}\partial_i j_j \right] \quad (2.17)$$

donde puede comprobarse fácilmente, usando el teorema de Stokes y la formula (2.7), que el valor de la última integral es cero. En el punto de auto-dualidad esta última expresión se reduce a

$$E_{AH} = \int d^2x \left[\frac{1}{2} \left(B \mp e(|\phi|^2 - v^2) \right)^2 + |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 \right] \mp ev^2\Phi \quad (2.18)$$

de donde se deduce, entonces, que la energía esta acotada inferiormente por un múltiplo del flujo magnético (el signo $-$ se elije si el flujo es negativo y el $+$ si el flujo es positivo)

$$E_{AH} \geq ev^2|\Phi| \quad (2.19)$$

La cota es saturada cuando los cuadrados presentes en la formula (2.18) se anulan, conduciéndonos a la llamas ecuaciones de Bogomolnyi o de auto-dualidad

$$\begin{aligned} (D_1 \pm iD_2)\phi &= 0 \\ B &= \pm e(|\phi|^2 - v^2) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Los configuraciones de campos que satisfacen estas ecuaciones son automáticamente un mínimo de energía y por lo tanto solución también de las ecuaciones de movimiento (2.3). En efecto, partiendo de la primera de las ecuaciones (2.20) tenemos

$$(D_1 - iD_2)(D_1 + iD_2)\phi = 0 \quad (2.21)$$

desarrollando este producto y usando la segunda ecuación de Bogogomolnyi, obtenemos la primera de las ecuaciones (2.3)

$$(D_1D_1 + D_2D_2)\phi = -i[D_1, D_2]\phi = eB\phi = \pm e^2(|\phi|^2 - v^2)\phi = \pm \frac{\lambda}{2}(|\phi|^2 - v^2)\phi \quad (2.22)$$

La segunda ecuación de movimiento se obtiene al derivar la expresión de B en las ecuaciones (2.20)

$$\partial_1 B = \pm e \partial_1 (|\phi|^2 - v^2) = \pm e (\phi^* D_1 \phi + (D_1 \phi)^* \phi) = -ie (\phi^* D_2 \phi - (D_2 \phi)^* \phi) \quad (2.23)$$

En forma similar puede mostrarse que $\partial_2 B = ie (\phi^* D_1 \phi - (D_1 \phi)^* \phi)$, lo que finalmente constituye la segunda de las ecuaciones (2.3). También puede probarse que las configuraciones de campo que satisfacen las ecuaciones de movimiento (2.3) son solución de las ecuaciones de Bogomolnyi, aunque esta demostración conlleva mayor dificultad[31]. Estudios más profundos sobre las ecuaciones de Bogomolnyi y sus implicancias, principalmente en la dinámica del moduli space, han sido llevados a cabo y pueden consultarse en las referencias [31, 32], aunque no es el objetivo de esta tesis adentrarnos en este tipo de estudio.

2.3. Vórtices en los modelos de Chern-Simons-Higgs

2.3.1. Vórtices de Chern-Simons-Higgs relativistas

Como nos hemos referido ya en la introducción a este capítulo, los primeras soluciones solitónicas encontradas en teorías de Chern-Simons fueron vórtices no auto-duales. En esas primeras investigaciones se analizó la posibilidad de incorporar un término de Chern-Simons a modelos conocidos, que presentaban soluciones tipo vórtices, como las teorías de Higgs. Paul y Khare[19] examinaron esta posibilidad para el modelo abeliano de Higgs, mientras que De Vega y Schaposnik[17, 18] lo hicieron para la teoría no abelina. En ambos casos el resultado principal fue que las teorías admitían como solución vórtices con carga eléctrica. Esta es una característica relevante de estas soluciones que no está presente en las teorías de Maxwell-Higgs. Como veremos esta característica es propia de la introducción de un término de Chern-Simons y prevalece aún en modelos que no tienen término de Maxwell o Yang-Mills, como los que trataremos a lo largo de esta tesis.

Así, comencemos por presentar una generalización natural del modelo de Higgs antes estudiado, que consiste en pensar que los campos de gauge están gobernados por un Lagran-

geano de Chern-Simons en lugar de uno de Maxwell. En tal caso el modelo se denomina Chern-Simons-Higgs relativista y queda caracterizado por la siguiente acción

$$S_{RCS} = \int d^3x \left(\frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho + |D_\mu \phi|^2 - V(|\phi|) \right) \quad (2.24)$$

Aquí κ es una constante de acoplamiento para los campos de gauge regidos por el término de Chern-Simons, el simbolo $\epsilon^{\mu\nu\rho}$ es antisimétrico elegido de manera que $\epsilon^{012} = 1$ y el término $V(|\phi|)$ es el potencial escalar que será especificado luego. En lo que sigue, por comodidad, consideraremos el acoplamiento $e = 1$ de forma tal que la derivada covariante este definida como

$$D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu, \quad (\mu = 0, 1, 2) \quad (2.25)$$

Con estas consideraciones las ecuaciones de movimiento para esta teoría son las siguientes

$$\begin{aligned} D_\mu D^\mu \phi &= \frac{\partial V}{\partial \phi^*} \\ F_{\mu\nu} &= \frac{1}{\kappa} \epsilon_{\mu\nu\rho} j^\rho \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde la expresión de j^ρ esta dada por la formula (2.4). La componente temporal de la segunda ecuación

$$B = \frac{1}{\kappa} j^0 \quad (2.27)$$

es la ley de Gauss de este modelo. Integrando esta ecuación en el plano se obtiene una importante consecuencia que establece que todo objeto con carga $Q = \int d^2x j_0$ lleva con sigo un flujo magnético $\Phi = \int B d^2x$ [33].

La energía correspondiente a la acción (2.24) es

$$E_{RCS} = \int d^2x \left(|D_0\phi|^2 + |D_i\phi|^2 + V(|\phi|) \right) \quad (2.28)$$

Con el objetivo de encontrar una expresión para $V(|\phi|)$ que permita obtener ecuaciones de auto-dualidad, Jackiw y Weinberg notaron que combinando la identidad (2.16) usada antes con la ley de Gauss (2.27) se obtiene

$$|D_i\phi|^2 = |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 \pm \frac{i}{\kappa} |\phi|^2 (\phi^* D_0\phi - (D_0\phi)^* \phi) \pm \epsilon^{ij} \partial_i j_j \quad (2.29)$$

Donde el hecho importante aquí es la introducción de la derivada covariante $D_0\phi$ en la expresión de $|D_i\phi|^2$. Esto les permitió conjeturar la posibilidad de reescribir la energía (2.28) como una suma de cuadrados más un término topológico, en analogía con lo que sucede para los vórtices de Abrikosov-Nielsen-Olesen. Introduciendo entonces la expresión (2.29) en la energía (2.28) y teniendo en cuenta además la siguiente relación

$$|D_0\phi \mp \frac{i}{\kappa} (|\phi|^2 - v^2)\phi|^2 = |D_0\phi|^2 \pm \frac{i}{\kappa} (|\phi|^2 - v^2) [\phi^* D_0\phi - (D_0\phi)^* \phi] + \frac{1}{\kappa} (|\phi|^2 - v^2)^2 |\phi|^2 \quad (2.30)$$

no resulta difícil mostrar que la energía toma la siguiente forma

$$E_{RCS} = \int d^2x \left(|D_0\phi \mp \frac{i}{\kappa} (|\phi|^2 - v^2)\phi|^2 + |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 - \frac{1}{\kappa} (|\phi|^2 - v^2)^2 |\phi|^2 + V(|\phi|) \mp v^2 B \right) \quad (2.31)$$

De aquí resulta claro que

$$V(|\phi|) = \frac{1}{\kappa} (|\phi|^2 - v^2)^2 |\phi|^2 \quad (2.32)$$

es la expresión buscada para el potencial si se quiere obtener ecuaciones de auto-dualidad. En este caso la energía esta acotada inferiormente por un múltiplo del flujo magnético, tal como ocurre en los vórtices de Abrikosov-Nielsen-Olesen

$$E_{RCS} \geq v^2 |\Phi| \quad (2.33)$$

La cota es saturada cuando los campos satisfacen las ecuaciones de primer orden

$$\begin{aligned} (D_1 \pm iD_2)\phi &= 0 \\ D_0\phi &= \pm \frac{i}{\kappa} (|\phi|^2 - v^2)\phi \end{aligned} \quad (2.34)$$

Para el caso en que los campos se presentan en una configuración estática, estas ecuaciones se transforman en las de Bogomolnyi o auto-dualidad

$$\begin{aligned} (D_1 \pm iD_2)\phi &= 0 \\ B &= \pm \frac{2}{\kappa^2} (|\phi|^2 - v^2)|\phi|^2 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Al igual que en el modelo de Higgs, no se conoce una solución analítica para las ecuaciones de Bogomolnyi aquí presentadas, sin embargo ha sido posible demostrar su existencia[34]. Una comparación a primera vista entre las ecuaciones de auto-dualidad (2.20) del modelo de Higgs y las obtenidas en (2.35) muestra una diferencia en la segunda ecuación de los dos sistemas, mientras la primera de las ecuaciones permanece igual. Esta diferencia se debe a que el potencial de auto-dualidad (2.32) es de orden sexto en los campos en lugar del de orden cuarto del modelo de Higgs. Una consecuencia de esta diferencia es que los vórtices de Chern-Simons-Higgs no presentan flujo magnético en los ceros de ϕ , o dicho en otra palabras tienen forma de anillos. Otra observación interesante respecto del potencial de auto-dualidad (2.32) es que el requerimiento de energía finita establece dos posibles tipos de comportamiento asintótico para las configuraciones de campo[35]. Uno es similar al de los vórtices de Abrikosov-Nielsen-Olesen

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow \infty} \phi &= v e^{i\alpha(\theta)} \\ \lim_{r \rightarrow \infty} A_i &= i\partial_i(\log \phi),\end{aligned}\tag{2.36}$$

denominándose topológicas a las soluciones que cumplen esta condición. El otro tipo de solución satisface la siguiente condición de borde

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi = 0\tag{2.37}$$

y se conoce como no topológica. Como en el caso de los vórtices de Abrikosov-Nielsen-Olesen, es conveniente, para estudiar estas soluciones, introducir un ansatz con simetría cilíndrica

$$\phi(\theta, r) = f(r)e^{iN\theta}, \quad A_\theta(r) = a(r), \quad A_r = 0\tag{2.38}$$

donde con N denotamos nuevamente el *winding number*. Sustituyendo este ansatz en las condiciones de borde (2.36), obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) &= v \\ \lim_{r \rightarrow \infty} a(r) &= -\frac{N}{r},\end{aligned}\tag{2.39}$$

En similitud a lo ocurrido en el modelo de Higgs, y por los mismos argumentos allí expuestos, los vórtices topológicos tienen flujo magnético cuantizado

$$\Phi = \int d^2x B = \oint_{|x|=\infty} A_i dx^i = -(\alpha(2\pi) - \alpha(0)) = -2\pi N\tag{2.40}$$

Como consecuencia de esta relación y de la ecuación (2.27) resulta que los vórtices de esta teoría poseen carga eléctrica, la cual también está cuantizada

$$Q = -2\pi N\kappa \quad (2.41)$$

Como se mencionó en el primer párrafo de esta sección esta es una característica propia de los vórtices presentes en las teorías de Chern-Simons y marca una diferencia importante con los vórtices neutros del modelo de Higgs. De acuerdo con la formula (2.31) la energía para este tipo de soluciones es

$$E_{RCS} = v^2|\Phi| = 2\pi Nv^2 \quad (2.42)$$

donde solo consideramos $N > 0$.

Para el caso de los vórtices no topológicos es interesante observar que la condición (2.37) es suficiente para garantizar que la energía (2.31) sea finita. Este hecho otorga cierta libertad al comportamiento asintótico del campo de gauge. Las condiciones de borde para el ansatz (2.38) pueden entonces ser establecidas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} f(r) &= 0 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} a(r) &= -\frac{(N + \beta)}{r}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

donde β es una constante real arbitraria. Con estas condiciones el flujo magnético toma la siguiente expresión

$$\int B dx^2 = 2\pi \int_0^\infty dr r B = 2\pi \int_0^\infty dr r \frac{\partial_r(ra)}{r} = 2\pi ra|_0^\infty = -2\pi(N + \beta) \quad (2.44)$$

donde hemos supuesto que $\lim_{r \rightarrow 0} ra(r) = 0$. Mientras la carga eléctrica y la energía toman la forma

$$\begin{aligned} Q &= -2\pi(N + \beta)\kappa \\ E_{AH} &= v^2|\Phi| = 2\pi(N + \beta)v^2 \end{aligned} \quad (2.45)$$

Puesto que β puede variar continuamente resulta claro que la energía de los vórtices también cambiará de la misma forma.

2.3.2. Vórtices de Chern-Simons-Higgs no-relativistas: El modelo de Jackiw-Pi

Una característica notable del término de Chern-Simons es que es un invariante topológico. Como consecuencia de ello es invariante ante transformaciones de Lorentz pero también ante transformaciones de Galileo. Por ello, en ausencia de un término de Maxwell, es posible construir una teoría invariante no relativista. La acción propuesta por Jackiw y Pi[22] para describir un modelo de Chern-Simons no relativista es la siguiente:

$$S_{JP} = \int d^3x \left(\frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho + i\phi^* D_0 \phi - \frac{1}{2m} |D_i \phi|^2 + \lambda |\phi|^4 \right) \quad (2.46)$$

donde la derivada covariante y la signatura son las mismas que para los modelos anteriores. El subíndice i es tal que ($i = 1, 2$), m es la masa del campo escalar y λ una constante de acoplamiento. Las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes a este Lagrangeano son

$$\begin{aligned} iD_0 \phi &= -\frac{1}{2m} |D_i \phi|^2 + \frac{g}{2} |\phi|^4 \\ B &= \frac{1}{\kappa} \rho \\ E^i &= -\frac{1}{\kappa} \epsilon^{ji} j_i \end{aligned} \quad (2.47)$$

En donde $\rho = |\phi|^2$ y $j^i = -\frac{i}{2m} (\phi^* D^i \phi - (D^i \phi)^* \phi)$.

Como vimos en la sección anterior la segunda de estas ecuaciones es la ley de Gauss en la dinámica de Chern-Simons. De aquí se desprende que el flujo magnético es proporcional a la carga eléctrica

$$\Phi = \frac{1}{\kappa} Q \quad (2.48)$$

tal como ocurriera en la teoría relativista.

Podemos ahora usar la ley de Gauss para encontrar la expresión de la energía correspondiente a la acción (2.46) para una configuración de campo estática

$$E_{JP} = \int d^3x \left(\frac{1}{2m} |D_i \phi|^2 - \lambda |\phi|^4 \right) \quad (2.49)$$

Usando la identidad (2.16) y nuevamente la ley de Gauss, es posible llevar la expresión (2.49) a la siguiente forma

$$E_{JP} = \int d^3x \left(\frac{1}{2m} |D_{\pm} \phi|^2 + (-\lambda \mp \frac{1}{2m\kappa}) |\phi|^4 \right) \quad (2.50)$$

Aquí la constante de acoplamiento λ puede ser elegida como

$$\lambda = \mp \frac{1}{2m\kappa} \quad (2.51)$$

de forma tal que la energía resulta positiva

$$E_{JP} \geq 0 \quad (2.52)$$

La energía, entonces, alcanza su valor mínimo cuando se satisfacen las siguientes ecuaciones de auto-dualidad

$$\begin{aligned} (D_1 \pm iD_2)\phi &= 0 \\ B &= \frac{1}{\kappa}\rho \end{aligned} \quad (2.53)$$

En contraste con lo que ocurre para la teoría relativista, las ecuaciones de Bogomolnyi de este modelo presentan una solución analítica. Para verificar esto escribamos el campo ϕ de la siguiente manera

$$\phi = e^{-i\omega} \sqrt{\rho} \quad (2.54)$$

donde ω es una fase arbitraria. Introduciendo ahora la forma de ϕ en la primera de las ecuaciones (2.53) se deduce que las componentes espaciales del campo de gauge tienen que satisfacer la siguiente igualdad

$$A_i = \partial_i \omega \mp \frac{1}{2} \epsilon^{ij} \partial_j \log \rho \quad (2.55)$$

Finalmente si se introduce esta ecuación en la segunda de las ecuaciones de Bogomolnyi se llega a la relación

$$\nabla^2 \log \rho = \pm \frac{2}{\kappa} \quad (2.56)$$

Esta ecuación (Liouville[36]), tiene como solución

$$\rho = \kappa \nabla^2 \log(1 + |f|^2), \quad (2.57)$$

donde $f = f(z)$ es una función holomorfa de $z = x + iy$. Tomando $f(z) = \left(\frac{z_0}{z}\right)^N$ se obtiene una solución con simetría radial

$$\rho = \frac{4\kappa N^2}{r_0^2} \frac{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2(N-1)}}{\left(1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2N}\right)^2} \quad (2.58)$$

Con esta solución el campo de gauge (2.55) toma la siguiente forma en el origen

$$A_i \sim \partial_i \omega \mp (N-1) \epsilon^{ij} \frac{x^j}{r^2} \quad (2.59)$$

La singularidad que este presenta en el origen puede ser evitada si se elije

$$\omega = \pm(N-1)\theta \quad (2.60)$$

Así el campo de auto-dualidad ϕ es

$$\phi = \frac{2N\sqrt{\kappa}}{r_0} \left(\frac{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{N-1}}{1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2N}} \right)^{2N} e^{\pm i(N-1)\theta} \quad (2.61)$$

Para que ϕ sea monovaluada N debe ser un entero y para que ρ tienda a cero en infinito N debe ser positivo.

2.4. Supersimetría en los modelos de Chern-Simons-Higgs

2.4.1. Supersimetría en el modelo de Chern-Simons-Higgs relativista

La existencia de una relación entre los modelos de auto-dualidad y su extensión supersimétrica fue puesta de manifiesto por primera vez en un trabajo de Witten y Olive[23]. En ese trabajo los autores notaron que para las teorías solitónicas extendidas supersimetricamente la carga central del álgebra supersimétrica esta relacionada con la cota de Bogomoniyi. En el contexto de las teorías de Chern-Simons esta idea fue desarrollada por C. Lee, K. Lee y Weinberg[24]. Ellos probaron que el requerimiento de extensión supersimétrica fija la forma del superpotencial, de manera tal que la parte bosónica de la teoría coincide con la expuesta en (2.24) con el potencial tomando su forma auto-dual (2.32).

Comencemos por considerar la generalización supersimétrica $N = 1$ del modelo (2.24). En el formalismo de supercampos los campos de materia están descriptos por un supercampo Φ que contiene un campo escalar ϕ , un espinor complejo ψ y un campo auxiliar F . Además hay un supercampo espinorial de gauge Γ_α , el cual contiene un campo de gauge A_μ y un espinor real λ_α . El supercampo Φ se expande de la forma

$$\Phi(x, \theta) = \phi(x) + \theta^\alpha \psi_\alpha(x) - \theta^2 F(x) \quad (2.62)$$

Aquí θ^α son las supercoordenadas y el campo espinorial transforma de la siguiente manera

$$\psi_\alpha = \psi^\beta C_{\beta\alpha}, \quad \psi^\alpha = C^{\alpha\beta} \psi_\beta \quad (2.63)$$

con

$$C_{\alpha\beta} = -C_{\beta\alpha} = -C^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

La super-derivada es definida como [37]

$$D_\alpha = \partial_\theta + i\theta^\beta (\tilde{\sigma}_\mu)_{\beta\alpha} \partial^\mu \quad (2.65)$$

donde $\tilde{\sigma}_\mu = (-1, \sigma_3, \sigma_1)$ y tomamos las matrices de Dirac γ de la forma

$$\gamma_\mu = \sigma_2 \tilde{\sigma}_\mu \quad (2.66)$$

En base a estos campos podemos escribir la siguiente acción en el super-espacio

$$S = \int d^3x d^2\theta \left(-\frac{\kappa}{4} \Gamma^\alpha W_\alpha - \frac{1}{2} (\nabla^\alpha \Phi)^* \nabla_\alpha \Phi + f(\Phi^* \Phi) \right) \quad (2.67)$$

donde

$$\nabla_\alpha = D_\alpha + i\Gamma_\alpha, \quad W_\alpha = \frac{1}{2} D^\beta D_\alpha \Gamma_\beta \quad (2.68)$$

y $f(\Phi^* \Phi)$ el superpotencial aún sin identificar. El primer término de esta acción es la versión supersimétrica del término de Chern-Simons[38]. Esta acción puede desarrollarse en términos de los campos corrientes para llegar a la siguiente expresión

$$\begin{aligned} S = \int d^3x \left(\frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho - |D_\mu \phi|^2 - i\psi^{*\alpha} (\gamma^\mu)_\alpha^\beta D_\mu \psi_\beta - \right. \\ \left. i(\psi^{*\alpha} \lambda_\alpha \phi - \lambda^\alpha \psi_\alpha \phi^*) + f'(|\phi|^2)(F^* \phi + F \phi^*) + \right. \\ \left. \frac{1}{2} f''(|\phi|^2)(\phi^2 \psi^{*\alpha} \psi_\alpha^* - \phi^{*2} \psi^\alpha \psi_\alpha) - \frac{\kappa}{2} \lambda^\alpha \lambda_\alpha + \right. \\ \left. \psi^{*\alpha} \psi_\alpha (f'(|\phi|^2) + |\phi|^2 f''(|\phi|^2)) + F^* F \right) \quad (2.69) \end{aligned}$$

donde aquí D_μ es la derivada covariante usual como la definimos anteriormente. Esta acción es invariante frente a la siguiente transformación supersimétrica

$$\begin{aligned}
\delta\phi &= -\eta^\alpha\psi_\alpha \\
\delta A_\mu &= -i\eta^\alpha(\gamma_\mu)_\alpha^\beta\lambda_\beta \\
\delta\lambda_\alpha &= \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho}(\gamma_\mu)_\alpha^\beta\eta_\beta \\
\delta F &= -i\eta^\alpha(\gamma_\mu)_\alpha^\beta D_\mu\psi_\beta + i\eta^\alpha\lambda_\alpha\phi \\
\delta\psi_\alpha &= -i(\gamma_\mu)_\alpha^\beta\eta_\beta D_\mu\phi + \eta_\alpha F
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Con η representamos un parámetro espinorial. Los campos λ_α , F y F^* son auxiliares y pueden ser eliminados mediante el uso de sus ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned}
\lambda_\alpha &= \frac{-i}{\kappa}(\psi_\alpha^*\phi - \psi_\alpha\phi^*) \\
F &= -\phi^*f'(|\phi|^2) \\
F^* &= -\phi f'(|\phi|^2)
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Teniendo esto en cuenta, la acción (2.69) y la transformación (2.70) se reescriben de la forma siguiente

$$\begin{aligned}
S = \int d^3x \left[\frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho - |D_\mu\phi|^2 - i\psi^{*\alpha}(\gamma^\mu)_\alpha^\beta D_\mu\psi_\beta + \right. \\
\left. \frac{1}{2}\left(f''(|\phi|^2) + \frac{1}{\kappa}\right)(\phi^2\psi^{*\alpha}\psi_\alpha^* - \phi^{*2}\psi^\alpha\psi_\alpha) + \right. \\
\left. \psi^{*\alpha}\psi_\alpha\left(f'(|\phi|^2) + |\phi|^2\left\{f''(|\phi|^2) - \frac{1}{\kappa}\right\}\right) - |\phi|^2(f'(|\phi|^2))^2 \right] \tag{2.72}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\phi &= -\eta^\alpha\psi_\alpha \\
\delta A_\mu &= -\frac{1}{\kappa}\left(\psi_\alpha^*(\gamma_\mu)_\alpha^\beta\eta_\beta\phi + \eta^\alpha(\gamma_\mu)_\alpha^\beta\psi_\beta\phi^*\right) \\
\delta\psi_\alpha &= -i(\gamma_\mu)_\alpha^\beta\eta_\beta D_\mu\phi - \eta_\alpha\phi f'(|\phi|^2)
\end{aligned} \tag{2.73}$$

Puede demostrarse que el requerimiento de una generalización supersimétrica $N = 2$, implica la conservación del número de fermiones. De esta forma el término que viola la conservación de fermiones en la acción (2.72) debe ser eliminado mediante una adecuada elección de la función superpotencial f . Esto implica

$$f'' = -\frac{1}{\kappa} \tag{2.74}$$

con lo cual el superpotencial debe ser

$$f(\Phi^*\Phi) = -\frac{1}{2\kappa}\left((\Phi^*\Phi) - v^2\right)^2 \tag{2.75}$$

Así, la acción (2.72) toma la forma

$$\begin{aligned}
S = \int d^3x \left[\frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho - |D_\mu\phi|^2 - i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - \right. \\
\left. \frac{1}{\kappa^2}|\phi|^2(|\phi|^2 - v^2)^2 - \frac{1}{\kappa}(3|\phi|^2 - v^2)\bar{\psi}\psi \right]
\end{aligned} \tag{2.76}$$

donde

$$i\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} = \phi^\dagger\gamma^0 \tag{2.77}$$

Resulta claro aquí, que la parte bosónica de la teoría coincide con la acción (2.24), con el potencial tomando la forma auto-dual (2.32). Así el requerimiento de que la teoría sea $N = 2$ supersimétrica fija el potencial de forma tal que su parte bosónica sea auto-dual.

Consideremos ahora las supercargas y su algebra. La supercarga spinorial Q que genera la transformación (2.73) es

$$Q = \int d^2x \left[\gamma^\mu \gamma^0 \phi D_\mu \phi^* + i \gamma^0 \psi \phi^* f'(|\phi|^2) \right] \quad (2.78)$$

Como consecuencia de las relaciones de conmutación canónicas entre los campos estas supercargas deben satisfacer un algebra

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}^\beta\} = (\gamma^\mu)^\beta_\alpha P_\mu - \delta_\alpha^\beta T \quad (2.79)$$

Donde P_μ es el generador del momento lineal y T es la carga central del algebra supersimétrica

$$T = \int d^2x \left[F_{12} |\phi|^2 - \frac{i}{\kappa} (|\phi|^2 - v^2) (\phi^* D_0 \phi - \phi (D_0 \phi)^* - i \bar{\psi} \gamma^0 \psi) \right] \quad (2.80)$$

Usando la ley de Gauss de la acción (2.76)

$$\kappa F_{12} = i(\phi^* D_0 \phi - \phi (D_0 \phi)^* - i \bar{\psi} \gamma^0 \psi) \quad (2.81)$$

encontramos que la carga central se puede reescribir como

$$T = v \int d^2x F_{12} \quad (2.82)$$

Así la carga central resulta proporcional al flujo magnético. Cuando $\alpha = \beta$ y $\mu = 0$ la conmutador (2.79) puede reescribirse como

$$\{Q_+, Q_+^\dagger\} + T = P_0 \quad (2.83)$$

donde $Q_+ = \frac{1}{2}(1 + \gamma^0)Q$. Esto significa que que la energía, P_0 , tiene una cota inferior dada por T , la cual coincide con la cota de Bogomolnyi. De esta forma se vuelve a poner de manifiesto la relación entre los modelos auto-duales y los supersimétricos.

2.4.2. Extensión supersimétrica del modelo de Jackiw-Pi

La posibilidad de extender supersimétricamente el modelo de Jackiw-Pi fue abordada por primera vez en un paper de Leblanc, Lozano y Min[25]. La idea aquí es tomar el límite no relativista para la acción (2.76). Así esta acción debe ser reemplazada por una nueva acción

$$\begin{aligned}
S = & \int d^3x \left(\frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho + i\phi^\dagger D_t \phi + i\psi^\dagger D_t \psi - \frac{1}{2m} (D_i \phi)^\dagger D_i \phi - \frac{1}{2m} (D_i \psi)^\dagger D_i \psi \right. \\
& \left. + \frac{1}{2m} \psi^\dagger F_{12} \psi + \lambda_1 (\phi^\dagger \phi \phi^\dagger \phi) + \lambda_2 (\phi^\dagger \phi \psi^\dagger \psi) \right)
\end{aligned} \tag{2.84}$$

Donde ϕ y ψ son ahora campos no relativistas y al igual que en el modelo relativista representan el campo bosónico y fermiónico respectivamente. La derivada covariante la elegimos de la manera

$$D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu \tag{2.85}$$

El valor de las constantes de acoplamiento (impuesto por la supersimetría) es

$$\lambda_1 = \frac{1}{2m\kappa}, \quad \lambda_2 = 3\lambda_1 \tag{2.86}$$

y las ecuaciones de campo correspondientes a la acción (2.84) son

$$\left(i(\partial_t + iA_0) + \frac{1}{2m} D^2 + 2\lambda_1 \rho_b + \lambda_2 \rho_f \right) \phi = 0 \tag{2.87}$$

$$\left(i(\partial_t + iA_0) + \frac{1}{2m} D^2 + \lambda_2 \rho_b + \frac{1}{2m} B \right) \psi = 0 \tag{2.88}$$

$$B = \frac{1}{\kappa} \rho \tag{2.89}$$

$$E^i = -\frac{1}{\kappa} \epsilon^{ij} j_i \tag{2.90}$$

donde

$$j_i = -\frac{i}{2m} \left(\phi^* D^i \phi - \phi (D^i \phi)^* + \psi^* D^i \psi - \psi (D^i \psi)^* \right) \quad (2.91)$$

y

$$\rho_b = |\phi|^2, \quad \rho_f = |\psi|^2, \quad \rho = \rho_b + \rho_f \quad (2.92)$$

Notar que la acción (2.84) posee un término de Pauli debido a la interacción entre los fermiones y el campo magnético. Como se ve en esta acción, tanto el campo bosónico como el fermiónico poseen idénticos términos cinéticos, con excepción del término de Pauli recién aludido. Esto, deja en evidencia que en este modelo la diferencia entre bosones y fermiones es menos relevante que en caso relativista. Así no resulta difícil imaginar la posibilidad de una simetría interna que intercambie fermiones con bosones. Tomando el límite no relativista de la ecuación (2.73), resulta

$$\begin{aligned} \delta_1 \phi &= \sqrt{2m} \eta_1^\dagger \psi, & \delta_1 \psi &= -\sqrt{2m} \eta_1 \phi, \\ \delta_1 \mathbf{A} &= 0, & \delta_1 A^0 &= \frac{1}{\sqrt{2m\kappa}} (\eta_1 \phi \psi^\dagger - \eta_1^\dagger \psi \phi^\dagger). \end{aligned} \quad (2.93)$$

Esta transformación es una simetría de la acción (2.84) con tal que se satisfaga

$$2\lambda_1 - \lambda_2 + \frac{1}{2m\kappa} = 0 \quad (2.94)$$

Es posible proponer una segunda transformación obtenida al considerar una aproximación a orden más alto en el límite no relativista de la ecuación (2.73)

$$\begin{aligned} \delta_2 \phi &= \frac{i}{\sqrt{2m}} \eta_2^\dagger D_+ \psi, & \delta_2 \psi &= -\frac{i}{\sqrt{2m}} \eta_2 D_- \phi, \\ \delta_2 A^+ &= \frac{2}{\sqrt{2m\kappa}} \eta_2 \phi \psi^\dagger, & \delta_2 A^- &= -\frac{2}{\sqrt{2m}} \eta_2^\dagger \psi \phi^\dagger, \\ \delta_2 A^0 &= \frac{i}{(2m)^{\frac{3}{2}} c \kappa} (\eta_2 \phi (D_+ \psi)^\dagger + \eta_2^\dagger (D_+ \psi) \phi^\dagger). \end{aligned} \quad (2.95)$$

Donde $D_{\pm} = \partial_{\pm} + iA_{\pm} = \partial_1 \pm i\partial_2 + i(A_1 \pm iA_2)$. Esta transformación es una simetría de la acción (2.84) con tal que se cumpla la condición (2.86). Así el valor de λ_1 fijado por esta supersimetría coincide con el valor que debe tomar la constante de acoplamiento, determinada en la sección (2.3.2), para que el modelo sea auto-dual.

A partir de las transformaciones (2.93) y (2.95) es posible obtener, por medio del teorema de Noether, las siguientes supercargas

$$\begin{aligned} Q_1 &= i\sqrt{2m} \int d^2r \quad \phi^* \psi \\ Q_2 &= \frac{1}{\sqrt{2m}} \int d^2r \quad \phi^* D_+ \psi \end{aligned} \quad (2.96)$$

Para poder desarrollar el álgebra generada por estas dos cargas es necesario definir el corchete de Poisson para funciones de los campos de materia

$$\{F, G\}_{PB} = i \int d^2r \left(\frac{\delta F}{\delta \phi^\dagger(r)} \frac{\delta G}{\delta \phi(r)} - \frac{\delta F}{\delta \phi(r)} \frac{\delta G}{\delta \phi^\dagger(r)} - \frac{\delta^r F}{\delta \psi^\dagger(r)} \frac{\delta^l G}{\delta \psi(r)} - \frac{\delta^r F}{\delta \psi(r)} \frac{\delta^l G}{\delta \psi^\dagger(r)} \right) \quad (2.97)$$

donde los índices r y l se refieren a la derivada a derecha e izquierda respectivamente. En particular se obtienen las siguientes relaciones que serán útiles en el cálculo de los conmutadores de las supercargas

$$\{\phi(x_1, t), \phi^*(x_2, t)\} = -i\delta(x_1 - x_2) \quad \{\psi(x_1, t), \psi^*(x_2, t)\} = -i\delta(x_1 - x_2) \quad (2.98)$$

Teniendo en cuenta esto, el álgebra supersimétrica adquiere la siguiente forma

$$\begin{aligned} \{Q_1, Q_1^*\} &= -2im \int d^2r \rho = -2iM \\ \{Q_2, Q_2^*\} &= -iH \\ \{Q_1, Q_2^*\} &= -iP_- \\ \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= \{Q_\alpha^*, Q_\beta^*\} = 0 \end{aligned} \quad (2.99)$$

Donde H y P_- son el hamiltoniano y el momento para una configuración estática de los campos

$$H = \int d^2r \left(\frac{1}{2m} |D_i \phi|^2 + \frac{1}{2m} |D_i \psi|^2 - \frac{1}{2m\kappa} \rho^2 \right) \quad (2.100)$$

$$P_- = \frac{1}{2i} \int d^2x (\phi^\dagger D_- \phi - (D_- \phi)^\dagger \phi + \psi^\dagger D_- \psi - (D_- \psi)^\dagger \psi) \quad (2.101)$$

Para finalizar, vale la pena detenerse brevemente en el análisis de las ecuaciones de auto-dualidad. Usando la ley de Gauss (2.89) la energía correspondiente a la acción (2.84) toma la forma

$$E = \int d^2r \left(\frac{1}{2m} |D_i \phi|^2 + \frac{1}{2m} |D_i \psi|^2 - \frac{1}{2m} B \rho_f - \lambda_1 \rho_b^2 - \lambda_2 \rho_b \rho_f \right) \quad (2.102)$$

Usando las siguientes identidades

$$\begin{aligned} |D_i \phi|^2 &= |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 \mp B|\phi|^2 \pm \epsilon^{ij} \partial_i j_b^j \\ |D_i \psi|^2 &= |(D_1 \pm iD_2)\psi|^2 \mp B|\psi|^2 \pm \epsilon^{ij} \partial_i j_f^j \end{aligned} \quad (2.103)$$

en donde

$$j_b^i = -\frac{i}{2m} \left(\phi^* D^i \phi - \phi (D^i \phi)^* \right), \quad j_f^i = -\frac{i}{2m} \left(\psi^* D^i \psi - \psi (D^i \psi)^* \right) \quad (2.104)$$

y la ley de Gauss (2.88), es posible reescribir la energía como sigue

$$\begin{aligned} E = \int d^3x \left(\frac{1}{2m} (|D_\pm \phi|^2 + |D_\pm \psi|^2) - (\lambda_1 \pm \frac{1}{2m\kappa}) \rho_b^2 - (\lambda_2 \pm \frac{1}{m\kappa} - \frac{1}{2m\kappa}) \rho_b \rho_f \pm \right. \\ \left. \epsilon^{ij} \partial_i (j_f^j + j_b^j) \right) \end{aligned} \quad (2.105)$$

Aquí, por los mismos argumentos que expusieramos en la sección (2.2) el último término de la integral es cero. Eligiendo

$$\lambda_1 = \mp \frac{1}{2m\kappa}, \quad \lambda_2 = (1 \mp 2) \frac{1}{2m\kappa} \quad (2.106)$$

la energía del sistema se reduce a

$$E = \frac{1}{2m} \int d^3x (|D_{\pm}\phi|^2 + |D_{\pm}\psi|^2) \quad (2.107)$$

cuyo valor mínimo es alcanzado cuando se satisfacen las siguientes ecuaciones de auto-dualidad

$$\begin{aligned} D_1\phi &= \mp i D_2\phi \\ D_1\psi &= \mp i D_2\psi \end{aligned} \quad (2.108)$$

Podemos notar que cuando elegimos el signo positivo en la ecuación (2.106), los valores de las constantes λ_1 y λ_2 coinciden con los valores de la ecuación (2.86). En otras palabras la teoría es auto-dual para los valores de λ_1 y λ_2 en la cual la teoría puede extenderse $N = 2$ supersimétricamente. Así, como en el caso relativista, el modelo de Jackiw-Pi se puede extender supersimétricamente en el punto de auto-dualidad.

Capítulo 3

Supersimetría y solitones en teorías de campos en espacios no conmutativos

La idea de que, a pequeñas escalas de longitud, la estructura del espacio-tiempo puede ser no-conmutativa fue sugerida originalmente por Heisenberg, motivado por la necesidad de controlar los infinitos que pueblan la teoría cuántica de campos. Esta idea fue formalizada años más tarde por Hartland Snyder en un artículo llamado *Quantized Space-Time*[40]. Sin embargo las teorías de campos definidas en espacios no-conmutativos no alcanzaron gran interés en física si no hasta finales de los años 1990. Este creciente interés durante los últimos años ha sido motivado por la relación que guardan las teorías de campos en espacio no-conmutativo con la teoría de cuerdas, que es considerada hoy día la principal candidata a una teoría cuántica de la gravedad. Estas similitudes fueron notadas en un principio en trabajos de Connes, Douglas y Schwarz[41], Douglas y Hull[42] y de Seiberg y Witten[43], donde se descubrieron diversos límites de bajas energías de la teoría de cuerdas y de la teoría M , que corresponden a teorías efectivas en espacios no-conmutativos.

Las teorías de campos no-conmutativas también han cobrado interés en el área de materia condensada. Como ejemplo podemos citar la dinámica de electrones en un campo magnético proyectados sobre el nivel de Landau más bajo. Este problema, considerado de relevancia en el estudio del efecto Hall cuántico, puede ser abordado como una teoría no-conmutativa[44]-[51].

Vemos entonces que las teorías no-conmutativas tienen una utilidad y un interés en

amplios campos de la física que van desde distintos aspectos de la física de altas energías hasta la descripción de modelos efectivos del efecto Hall cuántico en materia condensada.

En este capítulo presentaremos teorías de campos descritas en espacios no conmutativos. En primer lugar, estudiaremos los aspectos generales de las teorías que se formulan usando el producto Moyal. Como ejemplo mostraremos como se construyen soluciones clásicas tipo vórtice. Finalmente expondremos uno de los trabajos originales que conforman esta tesis, en el que se estudia la extensión supersimétrica del modelo de Jackiw-Pi en espacio no conmutativo.

Para formular teorías en espacios no-conmutativos sustituimos el producto ordinario por un producto estrella asociativo y no conmutativo,

$$(f * g)(x) = f(x)g(x) + \theta \frac{i}{2} \{f(x), g(x)\}_{PB} + O(\theta^2) \quad (3.1)$$

donde $\{.,.\}_{PB}$ representa cierta estructura de Poisson y θ es un parametro que controla la deformación, de manera tal que $\theta \rightarrow 0$ es el limite conmutativo. Al ser la aplicación bilineal de orden θ una estructura de Poisson, esta cumple con la identidad de Jacobi

$$\{f, \{g, h\}_{PB}\}_{PB} + \{g, \{h, f\}_{PB}\}_{PB} + \{h, \{f, g\}_{PB}\}_{PB} = 0 \quad (3.2)$$

Esto garantiza la asociatividad del producto a orden θ^2 . Los términos de orden superior en θ de la expresión (3.1) se establecen, a menos de redefiniciones lineales de las funciones[39], imponiendo la condición de asociatividad a todos los ordenes.

3.1. Producto Moyal

Consideremos un espacio-tiempo d -dimensional con coordenadas x^μ . A partir de la estructura de Poisson

$$\theta \{f, g\}_{PB} = \theta^{\mu\nu} \partial_\mu f \partial_\nu g, \quad (3.3)$$

y del producto estrella (3.1), se define el producto Moyal de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ sobre este espacio como sigue

$$\begin{aligned} f(x) * g(x) &= \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\mu}\right) f(x)g(x)|_{y=x} \\ &= f(x)g(x) + \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} \partial_\mu f \partial_\nu g - \frac{1}{8}\theta^{\mu\nu}\theta^{\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\alpha f \partial_\nu \partial_\beta g + \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde $\theta^{\mu\nu}$ es una matriz constante antisimétrica. Es importante notar que de la formula (3.4) resulta que el producto Moyal es no local. Usando este producto podemos definir el conmutador Moyal como sigue

$$[f, g]_* = f(x) * g(x) - g(x) * f(x) \quad (3.5)$$

En el caso particular donde $f(x) = x^\mu$ y $g(x) = x^\nu$ se desprende que

$$[x^\mu, x^\nu]_* = i\theta^{\mu\nu} \quad (3.6)$$

que es a lo que nos referimos al hablar de espacio no conmutativo.

3.1.1. Propiedades del producto Moyal

- Asociatividad

$$(f(x) * g(x)) * h(x) = f(x) * (g(x) * h(x)) \quad (3.7)$$

- Difiere del producto ordinario en una derivada total

$$f(x) * g(x) = f(x)g(x) + \partial_\mu \Lambda^\mu[f, g] \quad (3.8)$$

donde

$$\Lambda^\mu[f, g] = \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} f \partial_\nu g - \frac{1}{8}\theta^{\mu\nu}\theta^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\nu \partial_\beta g \quad (3.9)$$

- Propiedad cíclica bajo el signo de la integral

Por la propiedad anterior, la integral del producto Moyal de dos funciones difiere de la integral del producto ordinario en un término de superficie. En caso de tratarse de funciones de cuadrado integrable en \mathbf{R}^d o de funciones definidas en espacios sin borde (Por ej. sobre un toro), esta diferencia se anula. En integrales cuadráticas se obtiene

$$\int f(x) * g(x) d^d x = \int g(x) f(x) d^d x \quad (3.10)$$

En integrales de más factores puede reemplazarse uno de los productos Moyal por el producto ordinario y verificar la propiedad cíclica

$$\int f(x) * g(x) * h(x) d^d x = \int h(x) * f(x) * g(x) d^d x \quad (3.11)$$

- Regla de Leibnitz de la derivación

$$\partial_\mu(f(x) * g(x)) = \partial_\mu f(x) * g(x) + f(x) * \partial_\mu g(x) \quad (3.12)$$

- la conjugación compleja es una involución antilineal

$$\overline{(f(x) * g(x))} = \bar{g}(x) * \bar{f}(x) \quad (3.13)$$

donde $\bar{}$ se refiere a la conjugación compleja usual.

3.2. Teorías de gauge en espacio no-conmutativo

El primer paso hacia definir una teoría de gauge no-conmutativa, es establecer que tanto las componentes de los campos de materia como las componentes de la matriz de transformación, deben multiplicarse usando el producto Moyal. Una vez precisadas las leyes de transformación debe formularse una teoría invariante. Debido a la no-conmutatividad

del producto Moyal los campos de materia pueden definirse en distintas representaciones no equivalentes. Estas son las representaciones *fundamental*, *antifundamental* y *adjunta*.

$$\Phi(x) \rightarrow \begin{cases} g * \Phi & \text{rep. fundamental } f, \\ \Phi * g^{-1} & \text{rep. antifundamental } a, \\ g * \Phi * g^{-1} & \text{rep. adjunta } adj. \end{cases} \quad (3.14)$$

La inversa de g^{-1} de una transformación de gauge esta definida con relación al producto de Moyal, esto es $g^{-1} * g = 1$. Debe observarse que aún en el caso en que el grupo de gauge sea el $U(1)$ tiene sentido diferenciar las tres posibilidades, arriba mencionadas, para la regla de transformación.

Si escribimos $g = 1 + i\lambda$, donde λ es una matriz, obtenemos la siguiente forma infinitesimal de las transformaciones (3.14)

$$\delta\Phi(x) \rightarrow \begin{cases} i\lambda * \Phi & f, \\ i\Phi * \lambda & a, \\ i(\lambda * \Phi - \Phi * \lambda) & adj. \end{cases} \quad (3.15)$$

Por aplicación sucesiva de transformaciones infinitesimales podemos construir la siguiente transformación finita

$$g(x) = e_*^{i\lambda} \equiv 1 + i\lambda + \frac{i^2}{2}\lambda * \lambda + \dots, \quad (3.16)$$

$$g^{-1}(x) = e_*^{-i\lambda} \quad (3.17)$$

Debemos ver ahora como construir la correspondiente derivada covariante para los campos de materia en cada una de las representaciones existentes. Es decir, debemos definir una derivada que transforme de igual forma que los campos de materia en cada una de las representaciones existentes. Comencemos por ver como transforman las derivadas parciales de los campos en las tres representaciones. Dado que se cumple la regla de Leibnitz (3.12), se tiene que

$$\partial_\mu\Phi(x) \rightarrow \begin{cases} \partial_\mu g * \Phi + g * \partial_\mu\Phi & f, \\ \partial_\mu\Phi * g^{-1} + \Phi * \partial_\mu g^{-1} & a, \\ \partial_\mu g * \Phi * g^{-1} + g * \partial_\mu\Phi * g^{-1} + g * \Phi * \partial_\mu g^{-1} & adj. \end{cases} \quad (3.18)$$

Si queremos formular una teoría invariante bajo transformaciones de gauge locales¹, debemos introducir un campo de gauge para definir una derivada covariante. Al introducir el campo de gauge debemos tener en cuenta que los productos involucrados en (3.18) son Moyal y por lo tanto A_μ debe multiplicarse usando ese producto, tanto en la derivada covariante como en su regla de transformación. Definimos la regla de transformación para A_μ como

$$A_\mu \rightarrow g * A_\mu * g^{-1} - \frac{i}{e} \partial_\mu g * g^{-1}, \quad (3.19)$$

De aquí se deduce que las correctas derivadas covariantes en cada representación deben ser

$$D_\mu \Phi(x) = \begin{cases} \partial_\mu \Phi - ie A_\mu * \Phi & f, \\ \partial_\mu \Phi + ie \Phi * A_\mu & a, \\ \partial_\mu \Phi - ie [A_\mu, \Phi]_* & adj. \end{cases} \quad (3.20)$$

las cuales transforman de acuerdo con

$$D_\mu \Phi \rightarrow \begin{cases} g * D_\mu \Phi & \text{rep. fundamental } f, \\ D_\mu \Phi * g^{-1} & \text{rep. antifundamental } a, \\ g * D_\mu \Phi * g^{-1} & \text{rep. adjunta } adj. \end{cases} \quad (3.21)$$

Con la derivada covariante en la representación adjunta, encontramos una expresión para la curvatura del campo de gauge $F_{\mu\nu}$ en la teoría de gauge en espacio no-conmutativo

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie [A_\mu, A_\nu]_* \quad (3.22)$$

Nótese que debido a que los dos últimos términos en (3.22) involucran productos de Moyal, no se cancelan aún en el caso $U(1)$, por lo que la electrodinámica no-conmutativa es una teoría no lineal.

De la definición (3.22) se deduce la correspondiente ley de transformación

¹Por local debe interpretarse que las matrices de transformación dependen de las coordenadas. En rigor, las leyes de transformación de gauge (3.14) involucran infinitas derivadas de los campos y de las matrices de transformación, por lo que son claramente no locales, dependiendo de los valores que toman estas funciones en todo el espacio.

$$F_{\mu\nu} \rightarrow g * F_{\mu\nu} * g^{-1} \quad (3.23)$$

lo que muestra que la curvatura transforma en la representación adjunta. Incluso, en el caso $U(1)$ no es más invariante de gauge.

3.2.1. Acción invariante de gauge

Veamos ahora como construir la acción de una teoría de gauge no-conmutativa. En general las teorías de campos en espacio no-conmutativo son teorías en las que los campos son elementos del álgebra no-conmutativa $\mathcal{C}_\theta(\mathcal{M})$. Para construir una teoría no-conmutativa el procedimiento consiste simplemente en tomar la acción usual para los campos en espacio conmutativo y reemplazar todos los productos presentes por productos de Moyal. La idea entonces es aplicar esta receta para construir teorías de gauge en espacio no-conmutativo. Comencemos por una teoría simple, compuesta por un campo de materia escalar y complejo ϕ , un campo de gauge con grupo G y un espacio Minkoskiano con signatura $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$. La extensión no-conmutativa se obtiene aplicando la regla anterior al caso conmutativo para obtener

$$S^\theta = \frac{1}{2} \int d^d x \left((D_\mu \phi)^\dagger * (D_\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger * \phi + V_*(\phi, \phi^\dagger) \right), \quad (3.24)$$

donde D_μ es la derivada covariante en la representación fundamental (antifundamental). En el caso en que los campos estén en la representación adjunta, dado que los campos son matrices, es necesario tomar la traza en la acción (3.24).

De manera similar, para un campo espinorial en la representación fundamental (antifundamental) se tiene

$$S^\theta = \frac{1}{2} \int d^d x \bar{\psi} * (i\mathcal{D} - m)\psi. \quad (3.25)$$

Nuevamente, debemos notar que en el caso de que el campo este en la representación adjunta debe incluirse una traza matricial en la acción.

Es inmediato verificar que las acciones (3.24) y (3.25) son invariantes ante las transformaciones de gauge (3.14) y (3.19).

3.3. Solitones

La obtención de soluciones clásicas localizadas en distintas teorías de campos en espacio no-conmutativo ha sido una de las líneas de investigación más desarrolladas dentro de esta temática. Un trabajo pionero en esta área fue el de Nekrasov y Schwarz[55], en el cual se hallaron soluciones de tipo instantón en un espacio no-conmutativo R_θ^4 y para una teoría de gauge $U(1)$. Estas soluciones se obtienen extendiendo al caso no-conmutativo una técnica conocida como construcción ADHM[56]. Más tarde esta idea fue extendida para el grupo $U(N)$ [57]-[64].

Como ya hemos visto el modelo abeliano de Higgs presenta soluciones tipo vórtice. Comencemos, entonces, por ver como se construyen los vórtices para la teoría abeliana de Higgs cuando el espacio es no-conmutativo[65]-[73]. De acuerdo con la “receta” que hemos visto la acción abeliana de Higgs (2.1) escrita en espacio no-conmutativo será[73]

$$S = \int d^3x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu} + \overline{D_\mu\phi} * D^\mu\phi - \frac{1}{2}(\phi * \bar{\phi} - v^2)^2 \right) \quad (3.26)$$

Con el propósito de obtener las ecuaciones de Bogomolnyi, hemos supuesto que λ toma el valor para la cual la teoría se vuelve auto-dual, esto es $\lambda = 2$, además elegimos $e = 1$. El grupo de gauge es $U(1)$ y el campo escalar complejo transforma en la representación fundamental. Entonces la derivada covariante es

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - iA_\mu * \phi \quad (3.27)$$

Como los vórtices son soluciones en dos dimensiones espaciales, las únicas coordenadas relevantes serán x^1 y x^2 , las cuales satisfacen el álgebra no-conmutativa

$$[x^1, x^2]_* = i\theta^{\mu\nu} = i\epsilon^{\mu\nu}\theta, \quad \mu = 1, 2 \quad (3.28)$$

en donde θ es un parámetro real y $\epsilon^{\mu\nu}$ es el símbolo de Levi-Civita completamente anti-simétrico en $d = 2$. La analogía existente entre el álgebra de las coordenadas x^1 y x^2 con el álgebra de posición e impulso \hat{q} y \hat{p} de una partícula cuántica en un espacio de una dimensión, permite establecer un isomorfismo entre el producto Moyal de funciones y el producto de operadores en el espacio de Hilbert del sistema antes mencionado[74]. Resulta así conveniente introducir las variables complejas z y \bar{z}

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 + ix^2), \quad \bar{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 - ix^2) \quad (3.29)$$

y los operadores de creación y aniquilación \hat{a} y \hat{a}^\dagger

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\theta}}(X^1 + iX^2), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\theta}}(X^1 - iX^2) \quad (3.30)$$

Donde X^1 y X^2 son los operadores que se corresponden con las coordenadas x^1 y x^2 respectivamente. De esta forma el conmutador (3.28) puede expresarse en términos de los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger como

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (3.31)$$

Con estas convenciones, las derivadas se escriben

$$\partial_z = -\frac{1}{\sqrt{\theta}}[\hat{a}^\dagger,], \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{\sqrt{\theta}}[\hat{a},] \quad (3.32)$$

mientras que el tensor electromagnético toma la forma

$$\begin{aligned}
\hat{F}_{z\bar{z}} &= \partial_z \hat{A}_{\bar{z}} - \partial_{\bar{z}} \hat{A}_z - i[\hat{A}_z, \hat{A}_{\bar{z}}] \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\theta}}([\hat{a}^\dagger, \hat{A}_z] + [\hat{a}, \hat{A}_{\bar{z}}] + i\sqrt{\theta}[\hat{A}_z, \hat{A}_{\bar{z}}]) \\
&\equiv i\hat{B}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Siendo \hat{B} el campo magnético. En los que respecta a las derivadas covariantes tenemos

$$\begin{aligned}
D_z \hat{\phi} &= \partial_z \hat{\phi} + i\hat{A}_z \hat{\phi} = -\frac{1}{\sqrt{\theta}}[\hat{a}^\dagger, \hat{\phi}] + i\hat{A}_z \hat{\phi} \\
D_{\bar{z}} \hat{\phi} &= \partial_{\bar{z}} \hat{\phi} - i\hat{A}_{\bar{z}} \hat{\phi} = \frac{1}{\sqrt{\theta}}[\hat{a}, \hat{\phi}] - i\hat{A}_{\bar{z}} \hat{\phi}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

donde los operadores \hat{A}_z y $\hat{A}_{\bar{z}}$ están definidos como

$$\begin{aligned}
\hat{A}_z &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{A}_1 - i\hat{A}_2) \\
\hat{A}_{\bar{z}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{A}_1 + i\hat{A}_2).
\end{aligned} \tag{3.35}$$

En el caso estático, el funcional energía asociado al lagrangeano (3.26) se escribe en términos de los operadores introducidos como

$$E = 2\pi\theta \text{Tr} \left(\frac{1}{2} \hat{B}^2 + (D_z \hat{\phi})^\dagger D_z \hat{\phi} + (D_{\bar{z}} \hat{\phi})^\dagger D_{\bar{z}} \hat{\phi} + \frac{1}{2} (\hat{\phi} \hat{\phi}^\dagger - v^2)^2 \right) \tag{3.36}$$

Completando cuadrados a la Bogomolnyi obtenemos

$$E = 2\pi\theta \text{Tr} \left(\frac{1}{2} (\hat{B} \pm (\hat{\phi} \hat{\phi}^\dagger - v^2))^2 + 2(D_{\bar{z}} \hat{\phi})^\dagger D_z \hat{\phi} \pm (\pm \hat{T}^s + v^2 \hat{B}) \right) \tag{3.37}$$

Aquí \hat{T}^s esta definido por

$$\hat{T}^s = \partial_z \left((D_{\bar{z}} \hat{\phi})^\dagger \hat{\phi} \right) - \partial_{\bar{z}} \left((D_z \hat{\phi})^\dagger \hat{\phi} \right) \tag{3.38}$$

No es difícil probar que[66]

$$\text{Tr}(\hat{T}^a) = 0 \quad (3.39)$$

De esta manera la energía tiene una cota inferior que es flujo magnético, tal como ocurría en la teoría en espacio conmutativo. La cota es saturada cuando se satisfacen las ecuaciones de Bogomolnyi

$$\hat{B} = \eta^2 - \hat{\phi}\hat{\phi}, \quad D_{\bar{z}}\hat{\phi} = 0 \quad \text{ecuaciones auto-duales} \quad (3.40)$$

o

$$-\hat{B} = \eta^2 - \hat{\phi}\hat{\phi}, \quad D_z\hat{\phi} = 0 \quad \text{ecuaciones anti auto-duales} \quad (3.41)$$

Nótese que las soluciones a las ecuaciones (3.40) son configuraciones con flujo magnético positivo, mientras que las soluciones de (3.41) tienen flujo magnético negativo. Es importante remarcar que en el caso no-conmutativo, el parámetro θ rompe la invarianza ante transformaciones de paridad y la conexión entre los casos auto-duales y anti-auto duales no es inmediata como en el caso conmutativo.

En lo que sigue construiremos soluciones exactas a las ecuaciones de auto-dualidad (3.40) para valores arbitrarios de θ [73]. Para este propósito consideremos el siguiente ansatz

$$\hat{A}_z = \frac{i}{\sqrt{\theta}} \sum_n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2} + e_n) |n+1\rangle \langle n| \quad (3.42)$$

$$\hat{\phi} = v \sum_n f_n |n\rangle \langle n+1| \quad (3.43)$$

en donde $|n\rangle$ conforman la base de autoestados del operador número \hat{N} ,

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle \quad (3.44)$$

con $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ y la siguiente normalización

$$\begin{aligned} |m\rangle\langle n| &= \delta_{mn} \\ \hat{a}|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle \\ \hat{a}^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle \end{aligned} \quad (3.45)$$

con el estado de vacío $|n\rangle$ definido por

$$\hat{a}|n\rangle = 0 \quad (3.46)$$

Para determinar los coeficientes f_n y e_n introducimos las expresiones (3.42) y (3.43) en la ecuación (3.40), obteniéndose

$$\begin{aligned} \sqrt{(n+2)}(f_{n+1} - f_n) - e_n f_{n+1} &= 0 \\ 2\sqrt{(n+1)}e_{n-1} - e_{n-1}^2 - 2\sqrt{(n+2)}e_n + e_n^2 &= -\theta v^2(f_n^2 - 1) \end{aligned} \quad (3.47)$$

Este sistema de ecuaciones puede ser combinado para dar

$$\begin{aligned} f_1^2 &= \frac{2f_0^2}{1 + \theta v^2 - \theta v^2(f_0^2)} \\ f_{n+1}^2 &= \frac{(n+2)f_n^4}{f_n^2 - \theta v^2 f_n^2(f_n^2 - 1) + (n+1)f_{n-1}^2} \quad n > 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

Así dado un valor para f_0 es posible determinar todos los valores de los coeficientes f_n . El valor adecuado para f_0 debe ser elegido de forma que $f_n^2 \rightarrow 1$ asintóticamente de manera de satisfacer las condiciones de borde. Continuando con este procedimiento se pueden calcular también los coeficientes e_n . Una vez obtenidos los coeficientes uno puede calcular el campo magnético utilizando la fórmula

$$\hat{B} = v^2 \sum_{n=0}^{\infty} (1 - f_n^2) |n\rangle\langle n| \quad (3.49)$$

o usando la fórmula explícita para $|n\rangle\langle n|$ en el espacio de configuraciones[74]

$$B(r) = 2v^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1 - f_n^2) \exp\left(-\frac{r^2}{\theta}\right) L_n\left(2\frac{r^2}{\theta}\right) \quad (3.50)$$

donde L_n son los polinomios de Laguerre. Finalmente puede integrarse esta última ecuación y verificar que el flujo magnético Φ , da para la solución exacta

$$\Phi = 2\pi\theta \text{Tr} \hat{B} = 2\pi \quad (3.51)$$

De manera similar puede extenderse a espacios no-conmutativos las teorías de gauge cuya dinámica es dictada por un término de Chern-Simons[75]-[85]. Veamos a modo de ejemplo, y porque más tarde examinaremos el modelo supersimétrico de Jackiw-Pi en espacio no-conmutativo, qué sucede cuando analizamos el modelo de Jackiw-Pi en un espacio no-conmutativo[86].

Igual a como procediéramos con el modelo Higgs, reemplazamos en la acción los productos ordinarios por productos Moyal. Así la acción (2.46) del modelo de Jackiw-Pi se escribe en espacio no-conmutativo como

$$S = \int d^3x \left(L_{CS} + i\bar{\phi} * D_0\phi - \frac{1}{2m} \overline{D_i\phi} * D_i\phi + \lambda\phi * \bar{\phi} * \phi * \bar{\phi} \right) \quad (3.52)$$

siendo L_{CS} la densidad lagrangeana de Chern-Simons

$$L_{CS} = \kappa \varepsilon_{\mu\nu\alpha} \left(A_\mu * \partial_\nu A_\alpha - \frac{2i}{3} A_\mu * A_\nu * A_\alpha \right) \quad (3.53)$$

Notemos aquí que el término de Chern-Simons es distinto del término de Chern-Simons para una teoría $U(1)$ presente en los modelos abelianos. Donde el origen de la procedencia del término cúbico es totalmente análoga al caso de grupos de gauge no abelianos. La correspondiente energía asociada a la acción (3.52) para una configuración estática de los campos resulta de la siguiente forma

$$H = \int d^2x \left(\frac{1}{2m} \overline{D_i \phi} * D_i \phi - \lambda \phi * \bar{\phi} * \phi * \bar{\phi} \right) \quad (3.54)$$

esta expresión se puede reescribir de la forma

$$H = \int d^2x \left(-\frac{1}{2} \bar{\phi} (D_1 + i\alpha D_2) (D_1 - i\alpha D_2) \phi - \phi * \bar{\phi} * \left(\frac{\alpha}{2m} B + \lambda \phi * \bar{\phi} \right) \right) \quad (3.55)$$

donde $\alpha = \pm 1$. La versión no-conmutativa de la ley de Gauss, que se deriva a partir del lagrangeano (3.52), es

$$B = \frac{1}{\kappa} \phi * \bar{\phi} \quad (3.56)$$

Podemos entonces sustituir B en el Hamiltoniano (3.55)

$$H = \int d^2x \left(-\frac{1}{2} \bar{\phi} (D_1 + i\alpha D_2) (D_1 - i\alpha D_2) \phi - \left(\lambda + \frac{\alpha}{2m\kappa} \right) \phi * \bar{\phi} * \phi * \bar{\phi} \right) \quad (3.57)$$

Como en el caso conmutativo elegimos λ de manera de anular el término cuártico en los campos. Entonces

$$\lambda = \pm \frac{1}{2m\kappa} \quad (3.58)$$

En tal caso la energía alcanza su valor mínimo cuando se satisfacen las ecuaciones de auto-dualidad

$$\begin{aligned} (D_1 - i\alpha D_2) \phi &= 0, \\ B &= \frac{1}{\kappa} \phi * \bar{\phi} \end{aligned} \quad (3.59)$$

Al igual que en la teoría de Higgs no-conmutativa, las ecuaciones de Bogomolnyi pueden expresarse en el lenguaje de operadores

$$\begin{aligned}
D_{\bar{z}}\hat{\phi} &= 0 \\
B &= \frac{1}{\kappa}\hat{\phi}\hat{\phi}
\end{aligned}
\tag{3.60}$$

en el caso auto-dual y

$$\begin{aligned}
D_z\hat{\phi} &= 0 \\
B &= \frac{1}{\kappa}\hat{\phi}\hat{\phi}
\end{aligned}
\tag{3.61}$$

en el caso anti auto-dual. Para encontrar las soluciones se expanden los operadores en la base del operador número tal cual se hiciera antes para el caso del modelo de Higgs. Por ejemplo en el caso auto-dual se propone el siguiente ansatz

$$\hat{\phi} = \sqrt{\frac{2|\kappa|}{\theta}} \sum_{n=0}^{\infty} f_n |n\rangle \langle n+M-1|
\tag{3.62}$$

$$\hat{A}_z = \frac{i}{\sqrt{\theta}} \sum_{n=0}^{\infty} d_n |n+1\rangle \langle n|
\tag{3.63}$$

en donde f_n y d_n son funciones de perfil. Insertando el ansatz en las ecuaciones (3.60) se obtiene las siguientes fórmulas de recurrencia

$$\begin{aligned}
2\sqrt{p}d_{p-1} - d_{p-1}^2 - 2\sqrt{p+1}d_p + d_p^2 &= -\frac{|\kappa|}{\kappa}f_p^2 \\
d_p &= \sqrt{p+1} - \sqrt{p+M}\frac{f_p}{f_{p+1}}
\end{aligned}
\tag{3.64}$$

las cuales arrojan como solución la siguiente relación para los coeficientes f_n

$$\begin{aligned}
f_1^2 &= \frac{Mf_0^2}{1 - \frac{|\kappa|}{\kappa}f_0^2} \\
f_{p+1}^2 &= \frac{(p+M)f_p^2}{1 - \frac{|\kappa|}{\kappa}f_p^2 + (p+M-1)f_{p-1}^2/f_p^2}, \quad p \geq 1
\end{aligned}
\tag{3.65}$$

En el caso de las ecuaciones anti auto-duales se propone el siguiente ansatz

$$\begin{aligned}\hat{\phi} &= \sqrt{\frac{2|\kappa|}{\theta}} \sum_{n=0}^{\infty} f_n |n+M-1\rangle \langle n| \\ \hat{A}_z &= \frac{i}{\sqrt{\theta}} \sum_{n=0}^{\infty} d_n |n+1\rangle \langle n|\end{aligned}\quad (3.66)$$

Introduciendo este ansatz en las ecuaciones anti auto-dual (3.61), se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned}2\sqrt{p} d_{p-1} - d_{p-1}^2 - 2\sqrt{p+1} d_p + d_p^2 &= -\frac{|\kappa|}{\kappa} f_{p-1}^2 \\ d_{p+1} &= \sqrt{p+M} - \sqrt{p+1} \frac{f_{p+1}}{f_p}\end{aligned}\quad (3.67)$$

lo que produce finalmente las siguientes relaciones de recurrencia

$$\begin{aligned}f_1^2 &= \left(M - \frac{|\kappa|}{\kappa} f_0^2 \right) f_0^2 \\ f_{p+1}^2 &= \frac{1}{p+1} f_p^2 \left(-\frac{|\kappa|}{\kappa} f_p^2 + 1 + p \frac{f_p^2}{f_{p-1}^2} \right), \quad p \geq 1\end{aligned}\quad (3.68)$$

A partir de estas relaciones de recurrencia puede estudiarse el comportamiento numérico de las soluciones. Este comportamiento revela que la ecuación (3.64) tiene soluciones solo para $\kappa < 0$, mientras que la ecuación (3.67) presenta soluciones solo para $\kappa > 0$ [86].

3.4. Supersimetrías no-realtivistas en espacio no-conmutativo

Examinaremos aquí la posibilidad de extender supersimétricamente el modelo de Jackiw-Pi en un espacio no-conmutativo. Tal posibilidad fue investigada en la referencia [87] y conforma parte de los resultados originales de esta tesis. Comenzaremos proponiendo la siguiente acción

$$\begin{aligned}
S &= S_{CS} + \int d^3x \left(i\phi^\dagger * D_t\phi + i\psi^\dagger * D_t\psi - \frac{1}{2m}(D_i\phi)^\dagger * D_i\phi - \frac{1}{2m}(D_i\psi)^\dagger * D_i\psi \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2m}\psi^\dagger * B * \psi + V_*(\phi, \psi, \phi^\dagger, \psi^\dagger) \right)
\end{aligned} \tag{3.69}$$

en donde la métrica es $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$. La acción (3.69) es la generalización de la acción (2.84) en espacio no-conmutativo. Lo que hemos hecho es reemplazar en la acción (2.84) el producto ordinario por el Moyal en los términos de las derivadas covariantes y en el de Pauli, dejando sin especificar aún el término de potencial. En lo que respecta a el término S_{CS} , representa la acción de Chern-Simons (3.53). Es posible desarrollar este término para llevarlo a la siguiente forma,

$$S_{cs} = \kappa \int d^3x \left(A_2 * \partial_0 A_1 + A_0 * B_{12} \right) = \int d^3x \left(\frac{\kappa}{4i} [A_+ * \partial_0 A_- - A_- * \partial_0 A_+] + \kappa A_0 * B_{12} \right), \tag{3.70}$$

en donde hemos usado las coordenadas

$$V^\pm = V^1 \pm iV^2, \tag{3.71}$$

siendo V_1 y V_2 las componentes de un vector V del plano. El campo magnético escrito en estas componentes se reescribe como

$$B_{12} = \frac{1}{2i}(\partial_- A_+ - \partial_+ A_-) - \frac{1}{2}[A_+, A_-], \tag{3.72}$$

mientras que la derivada covariante en la representación fundamental toma la forma

$$D_\pm \phi = \partial_\pm \phi - iA_\pm * \phi, \quad D_0 \phi = \partial_0 \phi + iA_0 * \phi \tag{3.73}$$

Cuando analizamos el caso conmutativo vimos que en la acción (2.84) el potencial estaba constituido por dos términos. El primero de estos términos representaba la auto-interacción entre los campos bosónicos, cuya constante de acoplamiento denominamos λ_1 , el segundo representaba la interacción fermión-bosón y el acoplamiento estaba caracterizado por λ_2 . Cuando pasamos a un espacio no-conmutativo el orden de los campos es importante, así por ejemplo no es lo mismo definir el término de interacción bosón-fermión de la forma

$$V_{bf2} = \int d^3x \lambda_2 (\phi^\dagger * \phi * \psi^\dagger * \psi) \quad (3.74)$$

que de la forma

$$V_{bf3} = \int d^3x \lambda_2 (\phi * \phi^\dagger * \psi * \psi^\dagger) \quad (3.75)$$

Además tiene sentido escribir un término de auto-interacción fermiónica, esto es

$$V_f = \int d^3x \lambda_4 (\psi^\dagger * \psi * \psi^\dagger * \psi) \quad (3.76)$$

Así, en el caso no-conmutativo escribiremos el potencial de la siguiente forma

$$V_* = \int d^3x \left(\lambda_1 (\phi^\dagger * \phi * \phi^\dagger * \phi) + \lambda_2 (\phi^\dagger * \phi * \psi^\dagger * \psi) \right. \\ \left. + \lambda_3 (\phi * \phi^\dagger * \psi * \psi^\dagger) + \lambda_4 (\psi^\dagger * \psi * \psi^\dagger * \psi) \right) \quad (3.77)$$

en donde resulta claro, a partir de la formula (3.4) y de la anticonmutatividad de los campos fermiónicos, que cuando θ tiende a cero, $V_{bf2} = -V_{bf3}$, mientras que el potencial fermiónico V_f desaparece.

Veamos ahora como varía la acción (3.69) ante la versión no-conmutativa de la supersimetría (2.93), esto es

$$\begin{aligned}
\delta_1 \phi &= \sqrt{2m} \eta_1^\dagger \psi, & \delta_1 \psi &= -\sqrt{2m} \eta_1 \phi, \\
\delta_1 A &= 0, & \delta_1 A^0 &= \frac{1}{\sqrt{2m\kappa}} (\eta_1 \phi * \psi^\dagger - \eta_1^\dagger \psi * \phi^\dagger).
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Es fácil verificar que se satisface

$$\begin{aligned}
\delta_1 \int \left(-\frac{\kappa}{4i} ((\partial_t A)_+ * A_- - (\partial_t A)_- * A_+) + i\phi^\dagger * \partial_t \phi + i\psi^\dagger * \partial_t \psi \right) d^3x &= 0, \\
\delta_1 \int \left((D\phi)^\dagger * (D\phi) + (D\psi)^\dagger * (D\psi) \right) d^3x &= 0, \\
\delta_1 \int \left(\kappa A_0 * B_{12} + \frac{e}{2m} \psi^\dagger * B_{12} * \psi \right) d^3x &= 0
\end{aligned} \tag{3.79}$$

lo que reduce la variación de la acción a la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\delta_1 S &= \sqrt{2m} \int d^3x \left(\eta_1 \left[\left(-\frac{1}{2m\kappa} - 2\lambda_1 - \lambda_3 + \lambda_2 \right) \phi^\dagger * \phi * \psi^\dagger * \phi \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{1}{2m\kappa} - \lambda_3 + 2\lambda_4 - \lambda_2 \right) \psi^\dagger * \phi * \psi^\dagger * \psi \right] + h.c. \right).
\end{aligned} \tag{3.80}$$

De esta forma la transformación (3.78) es una simetría de la acción (3.69) si se satisface

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2m\kappa} + 2\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_2 &= 0, \\
\frac{1}{2m\kappa} - \lambda_3 + 2\lambda_4 - \lambda_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{3.81}$$

La primera de estas ecuaciones puede ser reescrita como la condición (2.94) que vimos en el caso conmutativo

$$\frac{e^2}{2m\kappa} + 2\lambda_1 - \lambda_{2c} = 0, \tag{3.82}$$

donde $\lambda_{2c} = \lambda_2 - \lambda_3$. La segunda de las relaciones es una peculiaridad del espacio no-conmutativo y no presenta una analogía en el caso conmutativo. Su origen proviene del

segundo término de la variación (3.80) que en el caso conmutativo es cero debido a la anti-conmutatividad de los campos fermiónicos.

Podemos examinar también como varia la acción (3.69) ante la versión no-conmutativa de la transformación (2.95)

$$\begin{aligned}
\delta_2\phi &= \frac{i}{\sqrt{2m}}\eta_2^\dagger D_+\psi, & \delta_2\psi &= -\frac{i}{\sqrt{2m}}\eta_2 D_-\phi, \\
\delta_2A^+ &= \frac{2}{\sqrt{2m\kappa}}\eta_2\phi * \psi^\dagger, & \delta_2A^- &= -\frac{2}{\sqrt{2m}}\eta_2^\dagger\psi * \phi^\dagger, \\
\delta_2A^0 &= \frac{i}{(2m)^{\frac{3}{2}}\kappa}(\eta_2\phi * (D_+\psi)^\dagger + \eta_2^\dagger(D_+\psi) * \phi^\dagger).
\end{aligned} \tag{3.83}$$

La variación de los términos cinéticos resulta nuevamente cero

$$\delta \int \left(-\frac{\kappa}{4i}((\partial_t A)_+ * A_- - (\partial_t A)_- * A_+) + i\phi^\dagger * \partial_t\phi + i\psi^\dagger * \partial_t\psi \right) d^3x = 0. \tag{3.84}$$

Los restantes términos de la acción (3.69) los podemos escribir como

$$S_r = S_1 + V_* \tag{3.85}$$

donde

$$\begin{aligned}
S_1 &= \int d^3x \left(-\frac{1}{2m}(D_i\phi)^\dagger * D_i\phi - \frac{1}{2m}(D_i\psi)^\dagger * D_i\psi + \kappa A_0 * B \right. \\
&\quad \left. -(\phi^\dagger * A_0 * \phi + \psi^\dagger * A_0 * \psi) + \frac{1}{2m}\psi^\dagger * B * \psi \right)
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Así la variación de cada uno de estos términos es

$$\begin{aligned}
\delta_2S_1 &= \frac{i}{(2m)^{\frac{3}{2}}\kappa} \int d^3x \left(-2(D_+\phi)^\dagger\phi\psi^\dagger\phi - \phi^\dagger(D_-\phi)\psi^\dagger\phi - \right. \\
&\quad \left. \psi^\dagger\phi(D_+\psi)^\dagger\psi + 2(D_+\psi)^\dagger\phi\psi^\dagger\psi \right)
\end{aligned} \tag{3.87}$$

$$\begin{aligned}
\delta_2 V_* = \frac{i}{\sqrt{2m}} \eta_2 \int d^3x \Big(& -2\lambda_1 ((D_+\phi)^\dagger \phi \psi^\dagger \phi + \phi^\dagger (D_-\phi) \psi^\dagger \phi - \\
& \psi^\dagger (D_-\phi) \phi^\dagger \phi) + \lambda_2 ((D_+\psi)^\dagger \phi \psi^\dagger \psi + \phi^\dagger \phi \psi^\dagger D_-\phi) + \\
& \lambda_3 (\psi^\dagger \phi (D_+\psi)^\dagger \psi - \phi^\dagger (D_-\phi) \psi^\dagger \phi) - \\
& 2\lambda_4 (\psi^\dagger \phi (D_+\psi)^\dagger \psi + \psi^\dagger \phi \psi^\dagger (D_-\psi) + (D_+\psi)^\dagger \phi \psi^\dagger \psi) \Big) \quad (3.88)
\end{aligned}$$

Aquí hemos supuesto que el producto entre los campos es Moyal, aunque por comodidad no lo hemos escrito con el símbolo $*$. En lo que sigue mantendremos esta notación para el producto Moyal. Si sumamos las dos variaciones y luego igualamos a cero obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m\kappa} - 2\lambda_1 &= 0, \\
\frac{1}{2m\kappa} - 2\lambda_1 - \lambda_3 &= 0, \\
-2\lambda_1 + \lambda_2 &= 0, \quad (3.89)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2m\kappa} + \lambda_3 - 2\lambda_4 &= 0, \\
\lambda_4 &= 0, \\
-\frac{1}{m\kappa} + \lambda_2 - 2\lambda_4 &= 0. \quad (3.90)
\end{aligned}$$

Resolviendo este sistema tenemos los valores de las constantes de acoplamiento para las cuales la transformación (3.83) es una supersimetría de la acción (3.69)

$$\lambda_1 = \frac{1}{2m\kappa}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{m\kappa}, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2m\kappa}, \quad \lambda_4 = 0, \quad (3.91)$$

Es fácil verificar que esta solución satisface también el sistema (3.81). Cuando tomamos el límite conmutativo de la teoría, el producto Moyal se transforma en el producto ordinario y el potencial V_* puede expresarse como

$$V_* = \int d^3x \left(\lambda_1 \phi^\dagger \phi \phi^\dagger \phi + (\lambda_2 - \lambda_3) \phi^\dagger \phi \psi^\dagger \psi \right) \quad (3.92)$$

De acuerdo con la ecuación (3.91), $\lambda_2 - \lambda_3 = \frac{3}{2m\kappa}$, lo que coincide con el valor de λ_2 en la formula (2.86) del caso conmutativo. Esto muestra también que la condición (3.82) impuesta por la primera de las supersimetrías se transforma en el límite conmutativo en la condición (2.94) que deben satisfacer las constantes de acoplamiento en el caso conmutativo. Así en el límite conmutativo recuperamos el modelo de Jackiw-Pi supersimétrico que estudiáramos en la sección (2.4.2) .

Analícemos ahora la conexión entre supersimetría y ecuaciones BPS para este modelo. Escribamos entonces la ley de Gauss correspondiente

$$B = \frac{1}{\kappa} (\phi \phi^\dagger - \psi \psi^\dagger) , \quad (3.93)$$

y usemos este vínculo para derivar el funcional energía para la acción (3.69)

$$E = \int d^2x \left(\frac{1}{2m} (D_i \phi)^\dagger D_i \phi + \frac{1}{2m} (D_i \psi)^\dagger D_i \psi - \frac{1}{2m} \psi^\dagger B \psi + V(\phi, \psi) \right) , \quad (3.94)$$

donde

$$V(\phi, \psi) = -\lambda_1 \phi^\dagger \phi \phi^\dagger \phi - \lambda_2 \phi^\dagger \phi \psi^\dagger \psi - \lambda_3 \phi \phi^\dagger \psi \psi^\dagger - \lambda_4 \psi^\dagger \psi \psi^\dagger \psi . \quad (3.95)$$

Al igual que en los casos conmutativos podemos desarrollar los términos cinéticos de la acción como sigue

$$\begin{aligned} (D_i \phi)^\dagger (D_i \phi) &= ((D_1 \pm iD_2) \phi)^\dagger ((D_1 \pm iD_2) \phi) \mp \phi^\dagger B \phi \pm \epsilon^{ij} \partial_i j_b^j \\ (D_i \psi)^\dagger (D_i \psi) &= ((D_1 \pm iD_2) \psi)^\dagger ((D_1 \pm iD_2) \psi) \mp \psi^\dagger B \psi \pm \epsilon^{ij} \partial_i j_f^j \end{aligned} \quad (3.96)$$

donde

$$j_b^i = -\frac{i}{2m} \left(\phi^\dagger D^i \phi - \phi (D^i \phi)^\dagger \right) , \quad j_f^i = -\frac{i}{2m} \left(\psi^\dagger D^i \psi - \psi (D^i \psi)^\dagger \right) \quad (3.97)$$

Insertando estas expresiones en la energía (3.94) y usando nuevamente la ley de Gauss obtenemos

$$\begin{aligned}
E = \int d^2x & \left(\frac{1}{2m} (D_{\pm}\phi)^{\dagger} D_{\pm}\phi + \frac{1}{2m} (D_{\pm}\psi)^{\dagger} D_{\pm}\psi - (\lambda_1 \mp \frac{1}{2m\kappa}) \phi^{\dagger} \phi \phi^{\dagger} \phi \right. \\
& - \lambda_2 \phi^{\dagger} \phi \psi^{\dagger} \psi + (-\lambda_3 \mp \frac{1}{m\kappa} + \frac{1}{2m\kappa}) \phi \phi^{\dagger} \psi \psi^{\dagger} + \\
& \left. (-\lambda_4 \mp \frac{1}{2m\kappa} + \frac{1}{2m\kappa}) \psi^{\dagger} \psi \psi^{\dagger} \psi \right) . \tag{3.98}
\end{aligned}$$

Para el sector puramente bosónico tenemos

$$E = \int d^2x \left(\frac{1}{2m} (D_{\pm}\phi)^{\dagger} D_{\pm}\phi - (\lambda_1 \mp \frac{1}{2m\kappa}) \phi^{\dagger} \phi \phi^{\dagger} \phi \right) \tag{3.99}$$

Eligiendo el signo $-$ y teniendo en cuenta que $\lambda_1 = \frac{1}{2m\kappa}$, la energía se reduce a la siguiente expresión

$$E = \int d^2x \frac{1}{2m} (D_{-}\phi)^{\dagger} D_{-}\phi \tag{3.100}$$

En este caso la energía alcanza su mínimo cuando se satisface

$$D_{-}\phi = 0 \tag{3.101}$$

Con el objetivo de desarrollar el álgebra supersimétrica de esta teoría podemos escribir las cargas derivadas de las transformaciones (3.78) y (3.83)

$$Q_1 = i\sqrt{2m} \int d^2x \phi^{\dagger} \psi , \tag{3.102}$$

$$Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \int d^2x (D_{-}\phi)^{\dagger} \psi . \tag{3.103}$$

En donde el producto entre los campos es Moyal pero su forma es idéntica a la que presentan las cargas conmutativas (2.96). Para calcular los conmutadores entre las cargas no-conmutativas definimos el corchete de Poisson de la siguiente forma

$$\{F, G\} = i \sum_j \int d^2x \left(\frac{\delta F}{\delta \Omega_j(x, t)} \frac{\delta G}{\delta \Pi_j(x, t)} - (-1)^{f_j} \frac{\delta F}{\delta \Pi_j(x, t)} \frac{\delta G}{\delta \Omega_j(x, t)} \right) , \tag{3.104}$$

en donde

$$\Omega = \left(\phi, \psi, \sqrt{\frac{\kappa}{2}} A_+ \right), \quad \Pi = \left(i\phi^\dagger, i\psi^\dagger, i\sqrt{\frac{\kappa}{2}} A_- \right), \quad f = (0, 1, 0). \quad (3.105)$$

Usando esta definición podemos obtener el algebra supersimétrica del modelo

$$\begin{aligned} \{Q_1, Q_1^\dagger\} &= 2M, \\ \{Q_2, Q_2^\dagger\} &= H, \\ \{Q_1, Q_2^\dagger\} &= P_-, \\ \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= \{Q_\alpha^*, Q_\beta^*\} = 0 \end{aligned} \quad (3.106)$$

siendo

$$P_- = \frac{1}{2i} \int d^2x (\phi^\dagger D_- \phi - (D_- \phi)^\dagger \phi + \psi^\dagger D_- \psi - (D_- \psi)^\dagger \psi) \quad (3.107)$$

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2m} \int d^2z \left((D_i \psi)^\dagger(z) D_i \psi(z) + (D_i \phi)^\dagger(z) D_i \phi(z) - \frac{2}{\kappa} \phi^\dagger \psi^\dagger \psi \phi \right. \\ \left. + \phi^\dagger B \phi - \psi^\dagger B \psi \right), \end{aligned} \quad (3.108)$$

De esta forma podemos reeditar el álgebra obtenida en (2.99) pero ahora en una versión no-conmutativa de los campos.

Si bien estos resultados fueron obtenidos para un grupo de gauge $U(1)$ no-conmutativo resultaría interesante examinar la posibilidad de extenderlos a un grupo $U(N)$ no-conmutativo tal como fuera hecho para el $SU(N)$ en espacio ordinario[88].

Capítulo 4

Supersimetría Galileana en $(1+1)$ -dimensiones

Como mencionamos anteriormente, en teorías cuánticas no relativistas, existe una invarianza de supersimetría trivial, cuyo origen se remonta al hecho de que fermiones y bosones satisfacen las mismas ecuaciones de movimiento (la ecuación de Schrödinger). La existencia de una supersimetría no trivial, discutida en el capítulo 2 está en cambio íntimamente relacionada con la presencia de campos de gauge cuya dinámica esta regida por un término de Chern Simons. Notemos de paso, que son las cargas asociadas a esta segunda supersimetría las que reproducen el Hamiltoniano, una propiedad central del álgebra supersimétrica.

Dado que el término de Chern Simons es característico de teorías tridimensionales, (puede generalizarse a algunas dimensiones mayores) una pregunta interesante que surge es si es posible construir teorías supersimétricas galileanas en otras dimensiones. En [89], un modelo supersimétrico no relativista en $d = 1 + 1$ fue presentado en el contexto de modelos de átomos fríos. El análisis de los resultados presentados en el paper [89] inmediatamente muestran la existencia de un serio problema, ya que el álgebra discutida por estos autores carece de una de las propiedades más elementales que debe cumplir un álgebra supersimétrica, a saber, que el Hamiltoniano total de la teoría, debe poder escribirse como el anticonmutador de las cargas supersimétricas.

En este capítulo discutiremos como resolver este problema. Veremos que la reducción dimensional del modelo de Jackiw-Pi, discutido en el capítulo 2, lleva directamente al modelo

presentado en [89], haciendo posible identificar la supersimetría en forma sencilla y directa. La versión bosónica de estos modelos ya había sido discutida en varios trabajos en conexión a la posibilidad de realizar estadística fraccionaria en (1+1)-dimensiones.

4.1. Reducción dimensional de los modelos de Chern-Simons

Describiremos aquí la reducción de una dimensión espacial en el modelo de Jackiw-Pi. En el plano, con coordenadas (x, y) , suprimimos toda dependencia de la coordenada y y renombramos A_y como B . Entonces la acción (2.46) del modelo de Jackiw-Pi se reduce a la siguiente forma

$$S = S_{rcs} + \int dxdt \left\{ i\phi^\dagger D_0 \phi - \frac{1}{2m} (D_x \phi)^\dagger D_x \phi - \frac{1}{2m} B^2 \rho + \lambda \rho^2 \right\} \quad (4.1)$$

donde S_{rcs} es el término de Chern-Simons reducido o también llamado término “BF”

$$S_{rcs} = \kappa \int dxdt (B \partial_0 A_1 + A_0 \partial_1 B) = \kappa \int dxdt B F_{01} \quad (4.2)$$

Aquí $F_{01} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0$ y hemos introducido además la notación $\rho = \phi^\dagger \phi$. La acción (4.1) puede reescribirse de la forma

$$S = \int dxdt \left\{ \kappa B \partial_0 A_x + i\phi^\dagger \partial_0 \phi + A_0 (\kappa \partial_x B - \rho) - \frac{1}{2m} (D_x \phi)^\dagger D_x \phi - \frac{1}{2m} B^2 \rho + \lambda \rho^2 \right\} \quad (4.3)$$

El campo A_0 es un multiplicador de Lagrange el cual impone la siguiente igualdad

$$\partial_x B = \frac{1}{\kappa} \rho \quad (4.4)$$

o equivalentemente

$$B(x) = \frac{1}{2\kappa} \int dz \epsilon(x-z) \rho(z) \quad (4.5)$$

en donde $\epsilon(x) = \theta(x) - \theta(-x)$ es la función escalón.

El campo A_x puede ser eliminado de la acción (4.3) mediante una transformación de gauge en el campo de materia $\phi(x)$

$$\phi(x) \rightarrow e^{-i\alpha(x)} \phi(x) \quad (4.6)$$

con

$$\alpha(x) = \frac{1}{2} \int dz \epsilon(x-z) A_x(z) \quad (4.7)$$

Así la acción (4.3) se reduce a

$$S = \int dx dt \{ A_0 (\kappa \partial_x B - \rho) + i \phi^\dagger \partial_0 \phi - \frac{1}{2m} (\partial_x \phi)^\dagger \partial_x \phi + \lambda \rho^2 - \frac{1}{2m} B^2 \rho \} \quad (4.8)$$

o equivalentemente

$$S = \int dx dt \quad \left\{ A_0 (\kappa \partial_x B - \rho) + i \phi^\dagger \partial_0 \phi - \frac{1}{2m} (\partial_x \phi \pm B \phi)^\dagger (\partial_x \phi \pm B \phi) \mp \frac{1}{2m} \rho \partial_x B + \lambda \rho^2 \right\} \quad (4.9)$$

Finalmente luego de usar la ley de Gauss (4.4) obtenemos

$$S = \int dx dt \quad \left\{ i \phi^\dagger \partial_0 \phi - \frac{1}{2m} (\partial_x \phi \pm B \phi)^\dagger (\partial_x \phi \pm B \phi) + \left(\mp \frac{1}{2m\kappa} + \lambda \right) \rho^2 \right\} \quad (4.10)$$

Aquí podemos elegir $\lambda = \pm \frac{1}{2m\kappa}$ (notar que los valores de λ son los mismos que en (2.51) para el modelo de Jackiw-Pi, que nos condujo a las ecuaciones estáticas de Bogomolnyi), entonces, para una configuración de campos estática, la teoría queda gobernada por el Hamiltoniano

$$H = \int dx \quad \left\{ \frac{1}{2m} (\partial_x \phi \pm B\phi)^\dagger (\partial_x \phi \pm B\phi) \right\} \quad (4.11)$$

lo que nos conduce a las ecuaciones de Bogomolnyi

$$\partial_x \phi \pm B\phi = 0 \quad (4.12)$$

cuya solución es de la forma

$$\phi(x) = \text{fase} \times \frac{\alpha \sqrt{|\kappa|}}{\cosh(\alpha x)} \quad (4.13)$$

donde $\pm\kappa$ es tomada como positiva y α es una constante de integración.

Por otro lado la acción (4.8) en el caso de una configuración de campos estática se puede reescribir como

$$S = \int dx \left\{ -\frac{1}{2m} (\partial_x \phi)^\dagger \partial_x \phi + \lambda \rho^2 - \frac{1}{2m} B^2 \rho \right\} \quad (4.14)$$

Aquí el último término es una constante de movimiento

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \int dx_1 B^2(x_1) \rho(x_1) &= \frac{1}{8m\kappa^2} \int dx_1 dx_2 dx_3 \epsilon(x_1 - x_2) \epsilon(x_1 - x_3) \rho(x_1) \rho(x_2) \rho(x_3) = \\ \frac{1}{24m\kappa^2} \int dx_1 dx_2 dx_3 \rho(x_1) \rho(x_2) \rho(x_3) &= \frac{N^3}{24m\kappa^2} \end{aligned} \quad (4.15)$$

siendo $N = \int dx \rho(x)$, y donde hemos hecho uso de la relación

$$\epsilon(x_1 - x_2) \epsilon(x_1 - x_3) + \epsilon(x_2 - x_3) \epsilon(x_2 - x_1) + \epsilon(x_3 - x_1) \epsilon(x_3 - x_2) = 1. \quad (4.16)$$

De esta forma este término puede ser eliminado de la teoría y el Hamiltoniano se reescribe de la forma

$$H = \int dx \left\{ \frac{1}{2m} (\partial_x \phi)^\dagger \partial_x \phi - \lambda \rho^2 \right\}. \quad (4.17)$$

que se corresponde con el Hamiltoniano de la ecuación no lineal de Schrödinger

$$i\partial_t \psi = -\frac{1}{2m} \partial_x^2 \psi + \lambda \rho \psi \quad (4.18)$$

Así a partir de una teoría $B-F$ dos-dimensional, derivada del modelo de Chern-Simons, podemos arribar a una formulación para la ecuación no-lineal de Schrödinger.

4.2. Supersimetría en gases ultra-fríos

Los gases cuánticos ultra-fríos no solo son interesantes por la física que ellos presentan por si mismos, si no también por la posibilidad de modelar a través de estos, sistemas de otras ramas de la física. Así, por ejemplo, átomos bosónicos confinados en tubos uno-dimensionales, por medio de una red óptica dos-dimensional, mostraron la simulación de un gas de Lieb-Liniger[90]-[91]. También, el régimen unitario para interacciones fuertes fue alcanzado usando resonancias de Feshbach para controlar la longitud de scattering[92]-[96]. En el área de la física de altas energías, condensados de Bose-Einstein con interacción ferromagnética fueron estudiados[97]-[98]. Propuestas para el estudio de fraccionalización de carga en una dimensión[99] y para la creación de campos de gauge no-abelianos[100]-[101] fueron también realizadas. Siguiendo esta línea de trabajo Snoek, Vandoren y Stoof[102]-[89] sugirieron que combinando adecuadamente una línea de vórtice en una red óptica uno-dimensional con un gas fermiónico, es posible crear una cuerda supersimétrica no relativista. De acuerdo con estos autores esta propuesta resulta muy interesante pues podría verificar en forma experimental ciertos aspectos referentes tanto a la teoría de cuerdas como a las teorías supersimétricas. Desde el punto de vista teórico el modelo consiste en una combinación de campos bosónicos y fermiónicos cuya dinámica es dictada por una acción con términos

cinéticos no relativistas y términos de interacción cuadrados y cuárticos en los campos. Más concretamente la acción que describe al modelo es

$$S_{(1+1)} = \int d^2x \left(i(\phi^\dagger \partial_t \phi + \psi^\dagger \partial_t \psi) - \frac{1}{2m} (\partial_x \phi)^\dagger \partial_x \phi - \frac{1}{2m} (\partial_x \psi)^\dagger \partial_x \psi + \lambda_1 (\rho_b - 1)^2 + \lambda_2 (\rho_b - 1) \rho_f \right) \quad (4.19)$$

En donde hemos mantenido la misma notación que en el modelo de Jackiw-Pi supersimétrico, esto es, ϕ representa el campo bosónico y ψ el fermiónico. Además $\rho_b = \phi^\dagger \phi$ y $\rho_f = \psi^\dagger \psi$. En su artículo los autores estudiaron la estructura supersimétrica del modelo (4.19), obteniendo expresiones para los generadores y calculando su álgebra. Así las cargas supersimétricas propuestas por ellos, para la construcción del álgebra de super-Galileo fueron las siguientes

$$Q = -i\sqrt{2m} \int dx \psi^\dagger \phi$$

$$R = -\frac{1}{\sqrt{2m}} \int dx \psi^\dagger \partial_x \phi . \quad (4.20)$$

A partir de estas cargas y usando las relaciones de conmutación entre los campos pudieron construir el álgebra dictada por las relaciones

$$\{Q, Q^\dagger\} \equiv -2iN$$

$$\{Q, R^\dagger\} \equiv -P$$

$$\{R, R^\dagger\} \equiv H_{Libre} \quad (4.21)$$

Donde

$$N = m \int dx \rho \quad (4.22)$$

$$P = \int d^2x (\phi^\dagger \partial_x \phi + \psi^\dagger \partial_x \psi) \quad (4.23)$$

$$H_{Libre} = \frac{-1}{2m} \int dx \quad (\phi^\dagger \partial_x^2 \phi + \psi^\dagger \partial_x^2 \psi) \quad (4.24)$$

Sin embargo aquí H_{Libre} se refiere al Hamiltoniano correspondiente a la teoría "libre", es decir la teoría sin interacciones. Este hecho contrasta con una de las características básicas de las teorías supersimétricas que indica que el Hamiltoniano completo de la teoría es generado por el álgebra de las súper-cargas.

El problema de encontrar las correctas propiedades supersimétricas del teoría, fue abordado en los trabajos [103] y [104]. Allí se trato el tema desde un punto de vista original, que consiste en obtener el modelo de los gases ultra-fríos, antes expuesto, mediante la reducción dimensional de modelos de Chern-Simons. En el primero de los trabajos se estudió la reducción dimensional del modelo supersimétrico de Jackiw-Pi, se identificó las supersimetrías correctas de la acción (4.19) y sus cargas asociadas. En el segundo de los trabajos, se utilizaron los resultados del primero y se mostró que combinando las cargas supersimétricas es posible obtener un álgebra que genere también los términos de potencial químico presentes en la acción (4.19). Además este trabajo mostró la existencia de soluciones solitónicas originales desprendidas de la reducción dimensional de un modelo de Chern-Simons propuesto por Manton[105]. En lo que sigue expondremos en detalle estos trabajos poniendo hincapié en la correcta identificación de las cargas supersimétricas y en la construcción de su álgebra.

4.2.1. Reducción dimensional del modelo de Jackiw-Pi supersimétrico

Como hiciéramos con el modelo de Jackiw-Pi en la sección anterior, podemos eliminar una dimensión espacial y renombrar el campo A_y como B . Así el modelo de Jackiw-Pi supersimétrico, representado por la acción (2.84), se reduce a

$$\begin{aligned}
S &= S_{rcs} + \int dxdt \left\{ i\phi^\dagger D_t \phi + i\psi^\dagger D_t \psi - \frac{1}{2m} (D_x \phi)^\dagger D_x \phi - \frac{1}{2m} (D_x \psi)^\dagger D_x \psi \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2m} \partial_x B \rho_f - \frac{1}{2m} B^2 \rho + \lambda_1 \rho_b^2 + \lambda_2 \rho_b \rho_f \right\}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Esta acción es la versión supersimétrica de la expuesta en (4.1), mientras que la ley de Gauss y su solución toman la misma forma que en el caso bosónico, es decir

$$\partial_x B = \frac{1}{\kappa} \rho \tag{4.26}$$

$$B(x) = \frac{1}{2\kappa} \int dz \epsilon(x-z) \rho(z) \tag{4.27}$$

pero en donde ahora $\rho = \rho_b + \rho_f$. La acción (4.25) es invariante frente a la transformación

$$\begin{aligned}
\delta_1 \phi &= \sqrt{2m} \eta_1^\dagger \psi, & \delta_1 \psi &= -\sqrt{2m} \eta_1 \phi, \\
\delta_1 A_1 = \delta_1 B &= 0, & \delta_1 A^0 &= \frac{1}{\sqrt{2m\kappa}} (\eta_1 \phi \psi^\dagger - \eta_1^\dagger \psi \phi^\dagger).
\end{aligned} \tag{4.28}$$

con tal que se satisfaga la relación

$$\frac{1}{2m\kappa} + 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0. \tag{4.29}$$

Notese, que la transformación (4.28) es la supersimetría (2.93) del modelo de Jackiw-Pi. El modelo es también invariante ante una segunda transformación

$$\begin{aligned}
\delta_2 \phi &= \frac{i}{\sqrt{2m}} \eta_2^\dagger (D_x \psi - eB\psi) & \delta_2 \psi &= -\frac{i}{\sqrt{2m}} \eta_2 (D_x \phi + eB\phi) \\
\delta_2 A_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2m\kappa}} (\eta_2 \phi \psi^\dagger - \eta_2^\dagger \psi \phi^\dagger) & \delta_2 B &= \frac{1}{\sqrt{2m\kappa}} (\eta_2 \phi \psi^\dagger + \eta_2^\dagger \psi \phi^\dagger) \\
\delta_2 A_0 &= \frac{i}{(2m)^{\frac{3}{2}} \kappa} (\eta_2 \phi (D_x \psi - eB\psi)^\dagger + \eta_2^\dagger (D_x \psi - eB\psi) \phi^\dagger).
\end{aligned} \tag{4.30}$$

siempre que se cumpla la relación

$$\lambda_1 = \frac{1}{2m\kappa}, \quad \lambda_2 = 3\lambda_1 \quad (4.31)$$

En donde resulta claro que esta última supersimetría es la reducción dimensional de la escrita en la fórmula (2.95). Al igual que en el caso bosónico, podemos eliminar el campo A_x de la acción mediante una transformación de gauge en los campos de materia

$$\phi(x) \rightarrow e^{-i\alpha(x)}\phi(x), \quad \psi(x) \rightarrow e^{-i\alpha(x)}\psi(x) \quad (4.32)$$

con

$$\alpha(x) = \frac{1}{2} \int dz \epsilon(x-z) A_x(z) \quad (4.33)$$

y usando la forma explícita para B dada por la fórmula (4.27) llegamos a la forma simplificada

$$\begin{aligned} S = \int dx dt \{ & i\phi^\dagger \partial_t \phi + i\psi^\dagger \partial_t \psi - \frac{1}{2m} (\partial_x \phi)^\dagger \partial_x \phi - \frac{1}{2m} (\partial_x \psi)^\dagger \partial_x \psi - \frac{1}{2m\kappa} \rho \rho_f \\ & + \lambda_1 \rho_b^2 + \lambda_2 \rho_b \rho_f - \frac{1}{2m} B^2 \rho \} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Como ya hemos visto el último término de esta acción es una constante de movimiento y puede ser eliminado. Así la acción puede ser reescrita de la forma

$$S = \int dx dt \{ i\phi^\dagger \partial_t \phi + i\psi^\dagger \partial_t \psi - \frac{1}{2m} (\partial_x \phi)^\dagger \partial_x \phi - \frac{1}{2m} (\partial_x \psi)^\dagger \partial_x \psi + \lambda_1 \rho^2 \}. \quad (4.35)$$

Que no es más que la acción (4.19) de teoría de los gases ultrafríos sin los términos de potencial químico. Las supersimetrías correspondientes a esta acción son

$$\delta_1 \phi = \sqrt{2m\eta_1} \psi, \quad \delta_1 \psi = -\sqrt{2m\eta_1} \phi \quad (4.36)$$

y

$$\delta_2\phi = \frac{i}{\sqrt{2m}}\eta_2^\dagger(\partial_x\psi - eB\psi) + i\delta_2\alpha\phi, \quad \delta_2\psi = -\frac{i}{\sqrt{2m}}\eta_2(\partial_x\phi + eB\phi) + i\delta_2\alpha\psi, \quad (4.37)$$

La última variación se corresponde con la (4.30), y se deriva de esta mediante el proceso de eliminación de los campos de gauge que hemos descripto. Si bien la acción (4.35) difiere de la (4.19) en que no posee términos de potencial químico, veremos más tarde que una combinación de las cargas asociadas a las transformaciones (4.36) y (4.37) generan el Hamiltoniano completo de la teoría (4.19).

Comencemos por calcular el álgebra de las cargas (4.20) propuestas en el trabajo de Snoek et. al.[89]

$$Q_1 = -i\sqrt{2m} \int dx\psi^\dagger\phi$$

$$R = -\frac{1}{\sqrt{2m}} \int dx\psi^\dagger\partial_x\phi. \quad (4.38)$$

Es importante notar que aquí Q_1 es el generador asociado a la supersimetría (4.36) y es el mismo que apareciera en la formula (2.96) correspondiente a los generadores del modelo supersimétrico de Jackiw-Pi. Para poder desarrollar el álgebra de los generadores utilizamos el corchete de Poisson definido en la sección (2.4.2)

$$\{F, G\}_{PB} = i \int dr \left(\frac{\delta F}{\delta\phi^\dagger(r)} \frac{\delta G}{\delta\phi(r)} - \frac{\delta F}{\delta\phi(r)} \frac{\delta G}{\delta\phi^\dagger(r)} - \frac{\delta^r F}{\delta\psi^\dagger(r)} \frac{\delta^l G}{\delta\psi(r)} - \frac{\delta^r F}{\delta\psi(r)} \frac{\delta^l G}{\delta\psi^\dagger(r)} \right) \quad (4.39)$$

Así resulta

$$\{Q_1, Q_1^\dagger\} = -2im \int dx\rho \equiv -2iM. \quad (4.40)$$

$$\{R, R^\dagger\} = -iH_{Libre} = \frac{i}{2m} \int dx (\phi^\dagger\partial_x^2\phi + \psi^\dagger\partial_x^2\psi) \quad (4.41)$$

que son los conmutadores calculados en [89] para la teoría libre. Para obtener una expresión de la carga asociada a la transformación (4.37) tomamos el generador Q_2 que obtuviéramos en

la formula (2.96), reducimos una dimensión y eliminamos el campo A_x tal como lo hiciéramos con los modelos anteriormente estudiados en este capítulo. Esto nos conduce a

$$\begin{aligned} Q_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2m}} \int dx \psi^\dagger (\partial_x + B) \phi \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2m}} \int dx \psi^\dagger(x) \left(\partial_x + \frac{1}{2\kappa} \int dz \epsilon(x-z) \rho(z) \right) \phi(x) \end{aligned} \quad (4.42)$$

Podemos ahora calcular el conmutador entre Q_2 y Q_2^\dagger usando la definición de corchete de Poisson

$$\begin{aligned} \{Q_2, Q_2^\dagger\} &= -\frac{i}{2m} \int dx \left((\partial_x - B) \psi^\dagger (\partial_x - B) \psi + \right. \\ &\quad \left. (\partial_x + B) \phi^\dagger (\partial_x + B) \phi - \frac{2}{\kappa} \phi^\dagger \phi \psi^\dagger \psi \right), \end{aligned} \quad (4.43)$$

desarrollando más esta expresión obtenemos

$$\begin{aligned} \{Q_2, Q_2^\dagger\} &= -\frac{i}{2m} \int dx \left(\partial_x \psi^\dagger \partial_x \psi + \partial_x \phi^\dagger \partial_x \phi + B^2 \rho \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\kappa} \rho_f \rho_b - \partial_x B \rho_b + \partial_x B \rho_f \right). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Finalmente usando la ley de Gauss y eliminando el término constante $\int dx B^2 \rho$, la formula (4.44) puede ser reducida a

$$\{Q_2, Q_2^\dagger\} = -\frac{i}{2m} \int dx \left(\partial_x \psi^\dagger \partial_x \psi + \partial_x \phi^\dagger \partial_x \phi - \frac{2}{\kappa} \rho_f \rho_b - \frac{1}{\kappa} \rho_b^2 \right) = -iH. \quad (4.45)$$

En donde H es el Hamiltoniano asociado a la acción (4.35) para una configuración estática de los campos. El álgebra es completa con el siguiente conmutador

$$\begin{aligned} \{Q_1, Q_2^\dagger\} &= -\frac{1}{2} \int d^2x \left(\phi^\dagger (\partial_x - B) \phi - ((\partial_x - B) \phi)^\dagger \phi + \psi^\dagger (\partial_x - B) \psi - ((\partial_x - B) \psi)^\dagger \psi \right) \\ &= -\frac{1}{2} \int d^2x \left(\phi^\dagger \partial_x \phi - \partial_x \phi^\dagger \phi + \psi^\dagger \partial_x \psi - \partial_x \psi^\dagger \psi \right) = -iP_1, \end{aligned} \quad (4.46)$$

siendo aquí P_1 el momento lineal y en donde hemos hecho uso de la relación

$$\int dx B(x) \rho = \frac{1}{2\kappa} \int dx dz \epsilon(x-z) \rho(x) \rho(z) = 0 \quad (4.47)$$

El resto de los posibles conmutadores es cero. De esta forma, el álgebra completa de la teoría (4.35), que resulta de reducir dimensionalmente el modelo de Jackiw-Pi supersimétrico, se obtiene a partir de los generadores Q_1 y Q_2 y se representa de la forma

$$\begin{aligned} \{Q_1, Q_1^\dagger\} &= -2im \int dx \rho = -2iM \\ \{Q_2, Q_2^\dagger\} &= -iH \quad \{Q_1, Q_2^\dagger\} = -iP_1 \\ \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= \{Q_\alpha^\dagger, Q_\beta^\dagger\} = 0 \end{aligned} \quad (4.48)$$

En el análisis de la ecuaciones de auto-dualidad se puede proceder de la misma forma que lo hiciéramos con el modelo de Jackiw-Pi reducido. Así la acción (4.34) puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} S &= \int dx dt \left\{ i\phi^\dagger \partial_t \phi + i\psi^\dagger \partial_t \psi - \frac{1}{2m} |\partial_x \phi \pm B\phi|^2 - \frac{1}{2m} |\partial_x \psi \pm B\psi|^2 \right. \\ &\quad \mp \frac{1}{2m} \rho_b \partial_x B \mp \frac{1}{2m} \rho_f \partial_x B - \frac{1}{2m\kappa} \rho \rho_f + \lambda_1 \rho_b^2 + \lambda_2 \rho_b \rho_f \left. \right\} \end{aligned} \quad (4.49)$$

y usando la ley de Gauss obtenemos

$$\begin{aligned} S &= \int dx dt \left\{ i\phi^\dagger \partial_t \phi + i\psi^\dagger \partial_t \psi - \frac{1}{2m} |\partial_x \phi \pm B\phi|^2 - \frac{1}{2m} |\partial_x \psi \pm B\psi|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\mp \frac{2}{2m\kappa} - \frac{1}{2m\kappa} + \lambda_2 \right) \rho_b \rho_f + \left(\mp \frac{1}{2m\kappa} + \lambda_1 \right) \rho_b^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.50)$$

Esto nos conduce al siguiente Hamiltoniano para una configuración estática de los campos

$$\begin{aligned} H &= \int dx \left\{ \frac{1}{2m} |\partial_x \phi \pm B\phi|^2 + \frac{1}{2m} |\partial_x \psi \pm B\psi|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\pm \frac{2}{2m\kappa} + \frac{1}{2m\kappa} - \lambda_2 \right) \rho_b \rho_f + \left(\pm \frac{1}{2m\kappa} - \lambda_1 \right) \rho_b^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.51)$$

La elección

$$\lambda_1 = \pm \frac{1}{2m\kappa}, \quad \lambda_2 = (1 \pm 2) \frac{1}{2m\kappa} \quad (4.52)$$

reduce el Hamiltoniano a una forma definida positiva, la cual se anula cuando los campos ϕ y ψ satisfacen las ecuaciones de auto-dualidad

$$(\partial_x \pm B)\phi = 0 \quad (4.53)$$

$$(\partial_x \pm B)\psi = 0 \quad (4.54)$$

Escogiendo el signo $+$ en la formula (4.52), los valores de las constantes λ_1 y λ_2 coinciden con los expuestos en la formula (4.31). De esta manera la teoría se vuelve supersimétrica en el punto de auto-dualidad al igual que se manifestase con el modelo en $(2+1)$ -dimensiones. Notemos también que los valores en (4.52) para los cuales la teoría es auto-dual coinciden con los expresados en (2.106) para el modelo en $(2+1)$ -dimensiones. Por último mencionemos que el estudio de las soluciones a las ecuaciones (4.53) y (4.54) fue abordado en los trabajos [106] y [107].

4.2.2. Supersimetría en $(1+1)$ a partir de un modelo de Chern-Simons-Maxwell

En 1997 Manton propuso un modelo de Chern-Simons no relativista para la descripción de la dinámica de vórtices en películas delgadas superconductoras[105]. Este modelo, en $(2+1)$ -dimensiones, consiste básicamente en una combinación de un modelo de Chern-Simons con uno de Landau-Ginzburg. En su trabajo Manton estudió la dinámica de los vórtices mediante técnicas de aproximación en el moduli space de la teoría, pero no será nuestro objetivo aquí concentrarnos en este tipo de estudio. Hassaine, Horvathy y Yera, en un trabajo más emparentado con el tema de esta tesis, mostraron luego la existencia de soluciones auto-duales en este modelo[108]. Más recientemente, en uno de los trabajos originales que componen esta tesis[104], se estudió la extensión supersimétrica del modelo de Manton y su reducción

dimensional. Veremos, en esta sección, que el modelo de los gases ultra-fríos (4.19) puede obtenerse fácilmente reduciendo dimensionalmente la extensión supersmétrica del modelo de Manton y mostraremos también que combinando las cargas Q_1 y Q_2 encontradas en la sección anterior[103], puede obtenerse el Hamiltoniano con los términos de potencial químico, ausentes en el conmutador (4.45). Comencemos, entonces, por presentar el modelo y sus características fundamentales. La acción propuesta en el trabajo original de Manton es la siguiente

$$S_{(2+1)} = \int d^3x \left(-\frac{1}{2}B^2 + i\gamma(\phi^\dagger \partial_t \phi + iA_0|\phi|^2) - \frac{1}{2m}(D_i \phi)^\dagger D_i \phi + \kappa(A_0 B + A_2 \partial_0 A_1) + \gamma A_0 + \lambda(|\phi|^2 - 1)^2 - A_i J_i^T \right) \quad (4.55)$$

en donde γ , κ y λ son constantes reales y el campo ϕ , que describe la materia, es escalar complejo. La derivada covariante esta definida como $D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu$ ($\mu = 0, 1, 2$) y $B = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$ es el campo magnético. Este modelo se diferencia del de Jackiw-Pi en que posee términos adicionales, tales como $\frac{1}{2}B^2$, γA_0 y $A_i J_i^T$. El primero de estos es parte del término de Maxwell. Aquí la ausencia del término eléctrico $\frac{1}{2}E^2$ es justificada en [105] por la invarianza no relativista del resto del Lagrangeano. Respecto de los otros dos términos; γA_0 esta relacionado con la posibilidad de un condensado en el estado de vacío[109] ($\phi = 1$) y $A_i J_i^T$ sirve para recomponer la invarianza de Galileo rota por la introducción de γA_0 . Para sostener tal invarianza, la corriente de transporte J_i^T debe transformar ante un boost de Galileo como $J_i^T \rightarrow J_i^T + \gamma v_i$ [105, 108]. Además otra diferencia con el modelo de Jackiw-Pi es que el término de potencial presenta aquí ruptura espontánea de simetría en el estado de vacío. En particular siempre podemos elegir un sistema de referencia en el cual $J_i^T = 0$. En este sistema las ecuaciones de movimiento correspondientes a la acción (4.55) son

$$\begin{aligned}
i\gamma D_0\phi &= -\frac{1}{2}D_i D_i\phi - 2\lambda(|\phi|^2 - 1)\phi \\
\epsilon_{ij}\partial_j B &= J_i + \kappa\epsilon_{ij}E_j \\
\kappa B &= \gamma(|\phi|^2 - 1)
\end{aligned} \tag{4.56}$$

donde $E_i = \partial_i A_0 - \partial_0 A_i$ es el campo eléctrico y J_i la corriente eléctrica definida por

$$J_i = -\frac{i}{2}\left(\phi^\dagger D_i\phi - \phi(D_i\phi)^\dagger\right) \tag{4.57}$$

La primera de estas ecuaciones es la ecuación no lineal de Schrödinger, la segunda representa la ley de Ampère en dos dimensiones y la última es la ley de Gauss.

La energía del sistema para una configuración estática de los campos es

$$E = \int d^2x \left(\frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{2m}(D_i\phi)^\dagger D_i\phi - \lambda(|\phi|^2 - 1)^2 \right) \tag{4.58}$$

Usando la identidad $|D_i\phi|^2 = |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 \mp B|\phi|^2 \pm \epsilon^{ij}\partial_i J_j$, y la ley de Gauss es posible reescribir la energía de la siguiente manera

$$E = \int d^2x \left(\frac{1}{2m}|(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 + \left(\mp \frac{\gamma}{2\kappa m} + \frac{\gamma^2}{2\kappa^2} - \lambda\right)(|\phi|^2 - 1)^2 \mp \frac{1}{2m}B \right) \tag{4.59}$$

Eligiendo

$$\lambda = \mp \frac{\gamma}{2\kappa m} + \frac{\gamma^2}{2\kappa^2} \tag{4.60}$$

la expresión anterior se simplifica y toma la forma

$$E = \int d^2x \left(\frac{1}{2m}|(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 \right) \mp \frac{1}{2m}\Phi \tag{4.61}$$

Resulta entonces, al igual que en los vórtices relativistas antes estudiados, que la energía está acotada inferiormente por un múltiplo del flujo magnético. Esto ocurre siempre que tomemos $-\Phi$ si el flujo es negativo y $+\Phi$ si el flujo es positivo. De esta forma resulta que la cota es saturada cuando los campos satisfacen

$$\begin{aligned} (D_1 \pm iD_2)\phi &= 0 \\ \kappa B &= \gamma(|\phi|^2 - 1) \end{aligned} \quad (4.62)$$

Que son las ecuaciones de Bogomolnyi de la teoría

Con el objetivo de obtener, vía reducción dimensional, el modelo (4.19) de gases ultrafríos, consideremos ahora la extensión supersimétrica del modelo de Manton. Tal extensión puede ser llevada a cabo incluyendo el campo fermiónico no relativista ψ . Así proponemos la siguiente acción en $(2 + 1)$ -dimensiones

$$\begin{aligned} S &= \int d^3x \left(-\frac{1}{2}B^2 + i\gamma(\phi^\dagger \partial_t \phi + \psi^\dagger \partial_t \psi + iA_0[|\phi|^2 + |\psi|^2]) - \frac{1}{2m}(D_i \phi)^\dagger D_i \phi - \frac{1}{2m}(D_i \psi)^\dagger D_i \psi \right. \\ &\quad \left. + \kappa(A_0 B + A_2 \partial_0 A_1) + \gamma A_0 - \frac{1}{2m}\psi^\dagger B \psi + \lambda_1(|\phi|^2 - 1)^2 + \lambda_2(|\phi|^2 - 1)|\psi|^2 \right) \end{aligned} \quad (4.63)$$

donde el valor de las constantes de acoplamiento es

$$\lambda_1 = \frac{\gamma}{2m\kappa} + \frac{\gamma^2}{2\kappa^2}, \quad \lambda_2 = \frac{3\gamma}{2m\kappa} + \frac{\gamma^2}{\kappa^2} \quad (4.64)$$

Notemos que como ocurriera en la extensión supersimétrica del modelo de Jackiw-Pi, aquí también hemos incluido un término de Pauli como consecuencia de la interacción entre el campo magnético y los fermiones.

La acción (4.63) es invariante frente a la siguiente variación

$$\begin{aligned} \delta_1 \phi &= \sqrt{2m}\eta_1^\dagger \psi, & \delta_1 \psi &= -\sqrt{2m}\eta_1 \phi, \\ \delta_1 \mathbf{A} &= 0, & \delta_1 A^0 &= \frac{1}{\sqrt{2m\kappa}}(\eta_1 \phi \psi^\dagger - \eta_1^\dagger \psi \phi^\dagger). \end{aligned} \quad (4.65)$$

con el requerimiento que se satisfaga la relación

$$\frac{\gamma}{2m\kappa} + 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \quad (4.66)$$

Procedamos ahora como antes y suprimamos la dependencia de la coordenada y en la acción (4.63) y renombremos A_y como B . La nueva acción obtenida en $(1+1)$ -dimensiones es

$$\begin{aligned} S = & \int d^2x \left(-\frac{1}{2}(\partial_x B)^2 + i\gamma(\phi^\dagger \partial_t \phi + \psi^\dagger \partial_t \psi + iA_0 \rho) - \frac{1}{2m}(D_x \phi)^\dagger D_x \phi - \frac{1}{2m}B^2 \rho \right. \\ & \left. - \frac{1}{2m}(D_x \psi)^\dagger D_x \psi + \kappa(A_0 \partial_x B + B \partial_0 A_1) + \gamma A_0 + \lambda_1(\rho_b - 1)^2 + \lambda_2(\rho_b - 1)\rho_f \right) \end{aligned} \quad (4.67)$$

La ley de Gauss para esta acción resulta

$$\partial_x B = \frac{\gamma}{\kappa}(\rho - 1) \quad (4.68)$$

la cual es resuelta por

$$B(x) = \frac{\gamma}{2\kappa} \int dz \epsilon(x-z)(\rho(z) - 1) \quad (4.69)$$

Notemos que la ley de Gauss (4.68) difiere de la presentada en (4.26), para la reducción dimensional del modelo de Jackiw-Pi supersimétrico, en un término constante. Usando la expresión para el campo magnético (4.69) y la ley de Gauss en la acción (4.67) obtenemos

$$\begin{aligned} S = & \int d^2x \left(i\gamma(\phi^\dagger \partial_t \phi + \psi^\dagger \partial_t \psi) - \frac{1}{2m}(D_x \phi)^\dagger D_x \phi - \frac{1}{2m}(D_x \psi)^\dagger D_x \psi - \frac{1}{2m}B^2 \rho \right. \\ & \left. + \kappa \left(\frac{\gamma}{2\kappa} \int dz \epsilon(x-z)(\rho(z) - 1) \right) \partial_0 A_1 + \lambda'_1(\rho_b - 1)^2 + \lambda'_2(\rho_b - 1)\rho_f \right) \end{aligned} \quad (4.70)$$

en donde hemos definido nuevas constantes de acoplamiento como

$$\lambda'_1 = \lambda_1 - \frac{\gamma^2}{2\kappa^2} = \frac{\gamma}{2m\kappa}, \quad \lambda'_2 = \lambda_2 - \frac{\gamma^2}{\kappa^2} - \frac{\gamma}{2m\kappa} = \frac{\gamma}{m\kappa} \quad (4.71)$$

Nuevamente el campo de gauge A_1 puede ser eliminado de la acción por medio de la transformación (4.32) en los campos de materia:

$$S = \int d^2x \left(i\gamma(\phi^\dagger \partial_t \phi + \psi^\dagger \partial_t \psi) - \frac{1}{2m}(\partial_x \phi)^\dagger \partial_x \phi - \frac{1}{2m}(\partial_x \psi)^\dagger \partial_x \psi + \lambda'_1(\rho_b - 1)^2 + \lambda'_2(\rho_b - 1)\rho_f - \frac{1}{2m}B^2\rho \right) \quad (4.72)$$

siendo el último término de la acción una constante de movimiento

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \int dx_1 B^2(x_1)\rho(x_1) &= \frac{\gamma^2}{8m\kappa^2} \int dx_1 dx_2 dx_3 \epsilon(x_1 - x_2)\epsilon(x_1 - x_3)(\rho(x_1) - 1) \\ (\rho(x_2) - 1)\rho(x_3) &= \frac{\gamma^2}{24m\kappa^2} \int dx_1 dx_2 dx_3 (\rho(x_1) - 1)(\rho(x_2) - 1)\rho(x_3) = \\ \frac{(N^3 - 2N^2 + N)\gamma^2}{24m\kappa^2} & \end{aligned} \quad (4.73)$$

Podemos entonces eliminar este término para obtener

$$S = \int d^2x \left(i\gamma(\phi^\dagger \partial_t \phi + \psi^\dagger \partial_t \psi) - \frac{1}{2m}(\partial_x \phi)^\dagger \partial_x \phi - \frac{1}{2m}(\partial_x \psi)^\dagger \partial_x \psi + \lambda'_1(\rho_b - 1)^2 + \lambda'_2(\rho_b - 1)\rho_f \right), \quad (4.74)$$

que es el modelo mostrado en la formula (4.19) y expuesto en el trabajo de Snoek, Vandoren y Stoof ya mencionado.

La acción (4.74) presenta las siguientes supersimetrías

$$\delta_1 \phi = \sqrt{2m}\eta_1^\dagger \psi, \quad \delta_1 \psi = -\sqrt{2m}\eta_1 \phi, \quad (4.75)$$

y

$$\delta_2 \phi = \frac{i}{\sqrt{2m}}\eta_2^\dagger (\partial_x \psi - B_1 \psi) + i\delta_2 \alpha \phi, \quad \delta_2 \psi = -\frac{i}{\sqrt{2m}}\eta_2 (\partial_x \phi + B_1 \phi) + i\delta_2 \alpha \psi, \quad (4.76)$$

siendo

$$\begin{aligned}
B_1(x) &= \frac{\gamma}{2\kappa} \int dz \epsilon(x-z) \rho(z) \\
\delta_2 \alpha &= \frac{-\gamma}{2\kappa\sqrt{2m}} \int dz \epsilon(x-z) \left(\eta_2 \phi \psi^\dagger - \eta_2^\dagger \psi \phi^\dagger \right)
\end{aligned} \tag{4.77}$$

Notemos que las transformaciones (4.75) y (4.76) son las mismas supersimetrías que presenta la reducción dimensional del modelo supersimétrico de Jackiw-Pi.

En busca de obtener el álgebra completa de la teoría propongamos los siguientes generadores de las supersimetrías (4.75) y (4.76)

$$\begin{aligned}
Q_1 &= -i\sqrt{2m} \int dx \psi^\dagger \phi \\
\tilde{Q}_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2m}} \int dx \psi^\dagger (\partial_x + B_1) \phi + \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\kappa m}} \int dx \psi^\dagger \phi
\end{aligned} \tag{4.78}$$

La primera de estas cargas, como vimos en la sección anterior, esta asociada a la transformación (4.75). La segunda es una combinación lineal de la carga Q_2 , asociada a la transformación (4.76), y de la carga Q_1 . En forma similar a como calculáramos los conmutadores en la sección anterior podemos llegar a la siguiente expresión para el conmutador entre \tilde{Q}_2 y \tilde{Q}_2^\dagger .

$$\begin{aligned}
\left\{ \tilde{Q}_2, \tilde{Q}_2^\dagger \right\} &= -\frac{i}{2m} \int dx \left((\partial_x \phi)^\dagger \partial_x \phi + (\partial_x \psi)^\dagger \partial_x \psi - \right. \\
&\quad \left. \frac{2\gamma}{\kappa} \rho_f \rho_b - \frac{\gamma}{\kappa} \rho_b^2 + \frac{2\gamma}{\kappa} \rho \right) = -iH
\end{aligned} \tag{4.79}$$

El último término de este Hamiltoniano se refiere al potencial químico. Este es el término ausente en el Hamiltoniano encontrado en la formula (4.45) de la sección anterior. De esta forma resulta ser \tilde{Q}_2 la súper-carga que genera el hamiltoniano completo de la teoría (4.19).

El restante conmutador no nulo del álgebra de las cargas Q_1 y \tilde{Q}_2 es el siguiente

$$\begin{aligned} \{Q_1, \tilde{Q}_2^\dagger\} &= -\frac{1}{2} \int d^2x \left(\phi^\dagger \partial_x \phi - \partial_x \phi^\dagger \phi + \psi^\dagger \partial_x \psi - \partial_x \psi^\dagger \psi \right) \\ &\quad - \sqrt{\frac{2\gamma}{\kappa}} \int dx \rho \end{aligned} \quad (4.80)$$

El primer renglón de este desarrollo coincide con el conmutador calculado en (4.46), es decir, es esencialmente el momento lineal del modelo (4.35) encontrado en la sección anterior. Puesto que la corriente de Noether esta determinada a menos de un término cuya derivada es una derivada total, se puede redefinir la corriente de Noether asociada al momento lineal de manera de poder abarcar también al término que aparece en el segundo renglón. Así finalmente obtenemos

$$P = \int j^0 dx = -i\gamma \{Q_1, Q_2^\dagger\} \quad (4.81)$$

Consideremos ahora la derivación de las ecuaciones de auto-dualidad y sus soluciones. Reescribimos, haciendo uso de la ley de Gauss, la acción (4.72) de forma tal de llegar a la expresión

$$\begin{aligned} S &= \int d^2x \left(i\gamma \{ \phi^\dagger \partial_t \phi + \psi^\dagger \partial_t \psi \} - \frac{1}{2m} |(\partial_x \pm B)\phi|^2 - \frac{1}{2m} |(\partial_x \pm B)\psi|^2 + \right. \\ &\quad \left. (\lambda'_1 \mp \frac{\gamma}{2m\kappa})(\rho_b - 1)^2 + (\lambda'_2 \mp \frac{\gamma}{m\kappa})(\rho_b - 1)\rho_f \mp \frac{1}{2m} \partial_x B \right), \end{aligned} \quad (4.82)$$

La elección

$$\lambda'_1 = \frac{\pm\gamma}{2m\kappa}, \quad \lambda'_2 = \frac{\pm\gamma}{m\kappa}, \quad (4.83)$$

implica, en el caso de una configuración estática, el Hamiltoniano

$$H = \int dx \left(\frac{1}{2m} |(\partial_x \pm B)\phi|^2 + \frac{1}{2m} |(\partial_x \pm B)\psi|^2 \pm \frac{1}{2m} \partial_x B \right) \quad (4.84)$$

Aquí el último término puede ser eliminado puesto que el B se anula en los extremos de integración. El Hamiltoniano alcanza entonces su mínimo cuando los campos satisfacen las ecuaciones de auto-dualidad

$$(\partial_x \pm B)\phi = 0 \quad (4.85)$$

$$(\partial_x \pm B)\psi = 0 \quad (4.86)$$

Notemos aquí que si bien la forma de las ecuaciones de auto-dualidad es la misma que las escritas en (4.53) y (4.54), para el caso de la reducción dimensional de la teoría supersimétrica de Jackiw-Pi, las ecuaciones son distintas puesto que B es distinto en cada caso. Así, pues, las ecuaciones (4.85) y (4.86) resultan originales y fueron expuestas en la referencia [104]. Al igual que en las teorías anteriormente estudiadas, podemos chequear aquí, que tomando el signo $+$ en la formula (4.83) los valores de las constantes λ_1 y λ_2 coinciden con los expuestos en (4.71) para los cuales la teoría se extiende supersimetricamente. De esta forma la teoría se vuelve supersimétrica en el punto de auto-dualidad.

En cuanto a las soluciones de las ecuaciones de auto dualidad, dediquémonos, por simplicidad, a estudiar el caso bosónico solamente. En tal caso las ecuaciones (4.85) y (4.86) se reducen a una única ecuación

$$\partial_x \phi(x) + \frac{\zeta \gamma}{2\kappa} \int dz \epsilon(x-z)(\rho_b(z) - 1)\phi(x) = 0 \quad (4.87)$$

Aquí hemos introducido $\zeta = \pm$ y además usado la expresión de B expuesta en (4.69). Asumiendo la solución de la forma $\phi = \sqrt{\rho_b}$ llegamos a la expresión

$$\frac{1}{2} \partial_x (\log \rho_b(x)) + \frac{\zeta \gamma}{2\kappa} \int dz \epsilon(x-z)(\rho_b(z) - 1) = 0 \quad (4.88)$$

y diferenciando respecto de x esta última formula arribamos a una ecuación de tipo Liouville uno-dimensional

$$\frac{1}{2}\partial_x^2(\log \rho_b(x)) + \frac{\zeta\gamma}{2\kappa}(\rho_b(x) - 1) = 0 \quad (4.89)$$

Finalmente renombrando ρ_b como ρ y desarrollando la derivada de la ecuación anterior obtenemos

$$-(\partial_x \rho)^2 + (\partial_x^2 \rho)\rho + v\rho^2(\rho - 1) = 0 \quad (4.90)$$

en donde $v = \frac{\zeta\gamma}{\kappa}$. La solución a esta ecuación fue propuesta en el trabajo original [104] y tiene la forma

$$\rho = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sech}^n(bx) \quad (4.91)$$

Aclaremos, en este punto, que los a_n son coeficientes reales de la serie y que b es una constante real. Resta entonces determinar los valores de estas constantes. Para ello se introduce la expresión de la solución (4.91) en la ecuación (4.90). Después de algo de álgebra el resultado que se obtiene es el siguiente

$$\begin{aligned} & \sum_{n,m=1}^{\infty} \left[-a_n a_m m n b^2 + n^2 a_n a_m b^2 + 2v a_n a_m \right] \operatorname{sech}^{n+m}(bx) + \\ & \sum_{n,m=1}^{\infty} \left[a_n a_m n m b^2 - n^2 a_n a_m b^2 - n a_n a_m b^2 \right] \operatorname{sech}^{n+m+2}(bx) - \\ & \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + n) a_n b^2 \operatorname{sech}^{2+n}(bx) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[n^2 a_n b^2 + v a_n \right] \operatorname{sech}^n(bx) + \\ & v \sum_{n,i,m=1}^{\infty} a_n a_m a_i \operatorname{sech}^{n+m+i}(bx) = 0, \end{aligned} \quad (4.92)$$

donde para obtener esta expresión hemos usado la relación $\tanh^2(bx) = 1 - \operatorname{sech}^2(bx)$. Así tenemos una expansión en serie de potencias de $\operatorname{sech}(bx)$ la cual debe ser igual a cero. Esto significa que los coeficientes de cada potencia deben ser cero separadamente. Entonces

tenemos infinitas ecuaciones de las que podemos ir determinando todos los coeficientes. Por ejemplo de los coeficientes de $\operatorname{sech}(bx)$ obtenemos

$$b^2 = -v \quad (4.93)$$

de los de $\operatorname{sech}^2(bx)$ y $\operatorname{sech}^3(bx)$ tenemos

$$a_2 = \frac{2}{3}a_1^2 \quad (4.94)$$

y

$$a_3 = \frac{3a_1^3 + 2a_1}{8} \quad (4.95)$$

y así se puede continuar determinando el resto de los coeficientes. Cabe aclarar que el coeficiente a_1 no queda determinado de esta forma y puede tomar un valor arbitrario.

Capítulo 5

Solitones en la teoría Chern-Simons-CP(1)

Los modelos $CP(N)$ fueron introducidos a finales de los años 70[110]-[112] como modelos simplificados donde fuera posible estudiar efectos relacionados con el acoplamiento fuerte similar al que aparece en teorías más complicadas como QCD como libertad asintótica, confinamiento, ruptura de simetría quiral, anomalías, solitones y expansión a grandes N [113]-[116]. Los modelos $CP(N)$, (al igual que QCD) presentan invarianza de escala. Al nivel de soluciones tipo solitones esta invarianza se manifiesta en la ausencia de un tamaño característico para los mismos, o equivalentemente, existen solitones de tamaño arbitrario. Esta característica fue notada por primera vez para el modelo $CP(1)$ o equivalentemente el $O(3)$ en un trabajo de Belavin y Polyakov[117].

A diferencia de lo que sucede en las teorías no relativistas discutidas anteriormente, el término de Chern Simons introduce en teorías relativistas un parámetro con dimensiones. Dzyaloshinsky, Polyakov y Wiegmann[118] sugirieron que este parámetro podría jugar algún rol fijando una escala característica para los solitones en una teoría $CP(1)$ en $2 + 1$ dimensiones. Dicha proposición fue considerada en el marco de la teoría de perturbaciones en [119], donde se mostró que al nivel más bajo de perturbación, las soluciones tienen tamaño infinito. Poco tiempo después el problema fue analizado de manera no perturbativa mediante un análisis numérico de las ecuaciones de movimiento en [120], donde se concluyó que efectivamente la introducción de un término de Chern Simons estabilizaba las soluciones en un

tamaño característico.

Mostraremos en este capítulo que las conclusiones de este último trabajo no fueron correctas. Así, en esta sección estudiaremos las soluciones solitónicas, a nivel clásico, que presenta la teoría Chern-Simons-CP(1) [121].

5.1. Propiedades de los modelos CP(N)

El modelo $CP(N)$ consiste de $N + 1$ campos escalares complejos $n_a(x)$ con $a = 1, \dots, N + 1$. Denotaremos colectivamente a los campos como $\mathbf{n}(x) = \{n_a(x)\}$ y trabajaremos en un espacio de dos dimensiones $x = \{x_1, x_2\}$. Los campos $CP(N)$ tienen modulo uno, es decir están sujetos al siguiente vínculo

$$\mathbf{n}^\dagger(x) \cdot \mathbf{n}(x) = \sum_{a=1}^{N+1} n_a^\dagger(x) n_a(x) = 1 \quad (5.1)$$

La teoría esta gobernada por la siguiente densidad Lagrangeana

$$\mathcal{L}(x) = \partial_\mu \mathbf{n}^\dagger \cdot \partial_\mu \mathbf{n} + (\mathbf{n}^\dagger \cdot \partial_\mu \mathbf{n})(\mathbf{n}^\dagger \cdot \partial_\mu \mathbf{n}) \quad (5.2)$$

con $\mu = 1, 2$.

Consideremos ahora la siguiente transformación en los campos

$$n_a(x) \rightarrow n_a(x) \exp(i\alpha(x)) \quad (5.3)$$

donde $\alpha(x)$ es una fase que no depende del índice a . Así, los $N + 1$ campos están multiplicados por la misma fase y obtenemos

$$\begin{aligned} \partial_\mu \mathbf{n} &\rightarrow (\partial_\mu \mathbf{n} + i\partial_\mu \alpha \mathbf{n}) e^{i\alpha} \\ \mathbf{n}^\dagger \cdot \partial_\mu \mathbf{n} &\rightarrow \mathbf{n}^\dagger \cdot \partial_\mu \mathbf{n} + i\partial_\mu \alpha \end{aligned} \quad (5.4)$$

lo que conlleva la invarianza de gauge del Lagrangeano bajo la transformación $U(1)$. La invarianza de gauge se vuelve más evidente introduciendo un campo auxiliar $A_\mu(x)$ y reescribiendo, entonces, el lagrangeano como

$$\mathcal{L}(x) = \partial_\mu \mathbf{n}^\dagger \cdot \partial_\mu \mathbf{n} + A_\mu^2 - 2A_\mu (i\mathbf{n}^\dagger \cdot \partial_\mu \mathbf{n}) \quad (5.5)$$

De la ecuación de movimiento para A_μ se desprende la relación

$$A_\mu = i(\mathbf{n}^\dagger \cdot \partial_\mu \mathbf{n}) \quad (5.6)$$

Entonces el campo A_μ queda enteramente determinado en términos de los campos \mathbf{n} . Cuando (5.6) es insertada en el Lagrangeano (5.5) se obtiene el Lagrangeano (5.2), resultando de esta forma ambos Lagrangeanos equivalentes. Notemos aquí que $\mathbf{n}^\dagger \cdot \partial_\mu \mathbf{n}$ es imaginario puro de manera tal que la expresión de A_μ resulta real. Este hecho se pone de manifiesto derivando el vínculo (5.1)

$$\mathbf{n}^\dagger \cdot \partial_\mu \mathbf{n} + \partial_\mu \mathbf{n}^\dagger \cdot \mathbf{n} = 2\text{Re}(\mathbf{n}^\dagger \cdot \partial_\mu \mathbf{n}) = 0 \quad (5.7)$$

El Lagrangeano (5.5) puede ser escrito en una forma más compacta

$$\mathcal{L}(x) = (D_\mu \mathbf{n})^\dagger \cdot (D_\mu \mathbf{n}) \quad (5.8)$$

siendo $D_\mu \mathbf{n} = (\partial_\mu + iA_\mu)\mathbf{n}$. Bajo la transformación (5.3) tenemos

$$D_\mu \mathbf{n} \rightarrow (D_\mu \mathbf{n})e^{i\alpha} \quad (5.9)$$

Así la invarianza de gauge del Lagrangeano escrito en la forma (5.8) resulta ahora transparente y similar a la de la electrodinámica escalar.

Las ecuaciones de campo se obtienen extremizando la acción

$$S = \int d^2x (D_\mu \mathbf{n})^\dagger \cdot (D_\mu \mathbf{n}) \quad (5.10)$$

con respecto de $\mathbf{n}(x)$ sujeto al vínculo (5.1). Este vínculo es introducido en el proceso variacional como un multiplicador de Lagrange. Esto quiere decir que debemos extremizar

$$S + \int d^2x \lambda(x) (\mathbf{n}^\dagger \cdot \mathbf{n} - 1) \quad (5.11)$$

De esta forma la ecuación de campo resultante es

$$D_\mu D_\mu \mathbf{n} + \lambda \mathbf{n} = 0. \quad (5.12)$$

El multiplicador de Lagrange es eliminado usando

$$\lambda = \lambda \mathbf{n}^\dagger \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{n}^\dagger \cdot D_\mu D_\mu \mathbf{n} \quad (5.13)$$

para producir

$$D_\mu D_\mu \mathbf{n} - (\mathbf{n}^\dagger \cdot D_\mu D_\mu \mathbf{n}) \mathbf{n} = 0. \quad (5.14)$$

Los solitones que estamos buscando son soluciones de acción finita para esta ecuación. Veamos entonces cuales son las posibles configuraciones de campo para una acción finita. La condición para que la acción (5.10) sea finita requiere que cuando $r \equiv |\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, se cumpla

$$D_\mu \mathbf{n} \equiv \partial_\mu \mathbf{n} + iA_\mu \mathbf{n} = 0. \quad (5.15)$$

Tomando cada componente $n_a \equiv |n_a| e^{i\phi_a}$ separadamente, obtenemos

$$iA_\mu = \frac{\partial_\mu n_a}{n_a} = \frac{\partial_\mu |n_a|}{|n_a|} + i\partial_\mu \phi_a. \quad (5.16)$$

De acuerdo con la formula (5.6), A_μ debe ser real e independiente del índice a , lo que implica (i) $\partial_\mu |n_a| = 0$ y (ii) ϕ_a independiente del índice a . De esta manera el campo \mathbf{n} en infinito se comporta como

$$\mathbf{n}(x) \rightarrow \mathbf{n}^0 e^{i\phi(\theta)} \quad (5.17)$$

donde \mathbf{n}^0 es un vector complejo y contante en sus componentes y satisface la condición $(\mathbf{n}^0)^\dagger \cdot \mathbf{n}^0 = 1$. La fase ϕ depende de la coordenada angular espacial θ , produciéndose así un mapa que podemos representar como $S_1^{(fis)} \rightarrow S_1^{(int)}$, donde $S_1^{(fis)}$ es el círculo espacial de radio infinito descrito por la coordenada θ y $S_1^{(int)}$ es el círculo interno descrito por ϕ . Como ya explicamos en el primer capítulo de esta tesis, estos tipos de mapas están caracterizados por un número topológico o *winding number* que denotaremos aquí como $Q_{CP(N)}$. La expresión del *winding number* viene dada por

$$Q_{CP(N)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{d\phi}{d\theta} \quad (5.18)$$

Esta expresión puede ponerse en términos de A_μ , teniendo en cuenta que

$$A_\theta = \frac{i}{r} \mathbf{n}^\dagger \cdot \partial_\theta \mathbf{n} = -\frac{1}{r} \frac{d\phi}{d\theta} \quad (5.19)$$

por lo tanto

$$Q_{CP(N)} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta r A_\theta = -\frac{1}{2\pi} \int d\mathbf{l} \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{2\pi} \int d^2x \epsilon_{ij} \partial_i A_j \quad (5.20)$$

con $(i, j = 1, 2)$. Usando la relación (5.6) se obtiene la siguiente igualdad

$$\epsilon_{ij}\partial_i A_j = i\epsilon_{ij}\partial_i(\mathbf{n}^\dagger\partial_j\mathbf{n}) = i\epsilon_{ij}(D_i\mathbf{n})^\dagger \cdot (D_j\mathbf{n}) \quad (5.21)$$

con lo cual la carga topológica $Q_{CP(N)}$ se reescribe

$$Q_{CP(N)} = -\frac{i}{2\pi} \int d^2x \epsilon_{ij} (D_i\mathbf{n})^\dagger \cdot (D_j\mathbf{n}) \quad (5.22)$$

Veamos ahora, que a partir de esta expresión, resulta fácil mostrar que $Q_{CP(N)}$ es una cota topológica de la acción (5.10) y que dicha cota es saturada cuando se satisfacen relaciones de auto-dualidad. Para esto consideremos la desigualdad

$$\int d^2x (D_i\mathbf{n} \pm i\epsilon_{ij}D_j\mathbf{n})^\dagger \cdot (D_i\mathbf{n} \pm i\epsilon_{ij}D_j\mathbf{n}) \geq 0. \quad (5.23)$$

Esta al ser desarrollada se convierte en

$$2 \int d^2x \left((D_i\mathbf{n})^\dagger \cdot (D_i\mathbf{n}) \pm i\epsilon_{ij}(D_i\mathbf{n})^\dagger \cdot (D_j\mathbf{n}) \right) \geq 0. \quad (5.24)$$

La primera de las integrales que compone esta fórmula es la acción (5.10) para el caso de campos estáticos, la segunda es proporcional a la carga $Q_{CP(N)}$. Entonces resulta

$$S \geq 2\pi|Q_{CP(N)}|. \quad (5.25)$$

Donde hemos considerado que el signo $+$ se toma cuando $Q_{CP(N)}$ es positiva y el $-$ cuando es negativa. La acción alcanza su mínimo cuando se cumple la igualdad en la formula (5.23), es decir cuando se satisface la condición

$$D_i\mathbf{n} \pm i\epsilon_{ij}D_j\mathbf{n} = 0. \quad (5.26)$$

que es la ecuación de auto dualidad para la teoría $CP(N)$.

5.2. Soluciones solitónicas en un modelo Chern-Simons-CP(1) sin potencial

Analizaremos aquí, desde un punto de vista clásico y no perturbativo, un modelo propuesto en las referencias [119, 120]. Tal modelo consiste en campos $CP(1)$ interactuando con campos $U(1)$ de gauge en donde la dinámica de estos últimos esta dictada por un término de Chern-Simons. Veremos que este modelo no soporta soluciones solitónicas en R^2 , contrariamente a lo que había sido señalado en [120]. El modelo esta gobernado por la siguiente acción

$$S = S_{cs} + \int_D d^3x |D_\mu n|^2 \quad (5.27)$$

Siendo aquí $n(x)$ el campo $CP(1)$ compuesto de dos componentes. La signatura correspondiente es ahora Minkoskiana, es decir $(1, -1, -1)$ y la derivada covariante esta definida como $D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu$ ($\mu = 0, 1, 2$). El subíndice D denota que la región de integración es un disco de radio R . De esta forma, R se introduce como un nuevo parámetro en la teoría, capaz de regular el área de integración. Cabe aclarar que la idea de introducir un parámetro que regule la región de integración es propia del artículo original de esta tesis [121] y no esta presente en los trabajos [119, 120]. El término de Chern-Simons representado por S_{cs} es

$$S_{cs} = \kappa \int_D d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho = 2\kappa \int_D d^3x (A_0 F_{12} + A_2 \partial_0 A_1) \quad (5.28)$$

donde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (5.29)$$

Es importante mencionar, llegado este punto, que la acción (5.27) no posee un término de potencial. La razón de esto se debe, como se mencionó en la introducción de este capítulo, a que los trabajos [119, 120] fueron inspirados en el argumento de Dzyaloshinsky, Polyakov y Wiegmann por el cual la invarianza de escala que presenta la teoría $CP(1)$ se rompe introduciendo un término de Chern-Simons en su acción.

Las ecuaciones de campo correspondientes a esta acción son

$$D_\mu D^\mu n = (n^\dagger D_\mu D^\mu n)n \quad (5.30)$$

$$\kappa \epsilon_{\mu\nu\rho} F^{\nu\rho} = -J_\mu = i[n^\dagger D_\mu n - n(D_\mu n)^\dagger] \quad (5.31)$$

La componente temporal de esta última ecuación

$$2\kappa F_{12} = -J_0 \quad (5.32)$$

es la ley de Gauss en la dinámica de Chern-Simons. Integrando esta ecuación sobre el disco D obtenemos la relación

$$\Phi = -\frac{1}{2\kappa} Q \quad (5.33)$$

que relaciona, como ya habíamos visto para el modelo de Chern-Simons-Higgs, el flujo magnético con la carga eléctrica. El tensor de densidad energía-momento de la teoría es

$$T_\mu^\nu = (D_\mu n^\dagger \cdot D^\nu n + D^\nu n^\dagger \cdot D_\mu n) - g_\mu^\nu D_\lambda n^\dagger \cdot D^\lambda n \quad (5.34)$$

con $(\lambda = 0, 1, 2)$. Entonces la componente puramente temporal del tensor se escribe

$$T_0^0 = D_0 n^\dagger \cdot D^0 n + D_i n^\dagger \cdot D^i n, \quad (5.35)$$

lo que nos conduce, en el caso estático, a que la energía sea

$$E = \int_D d^2x \left(\kappa^2 B^2 + |D_i n|^2 \right), \quad i = 1, 2. \quad (5.36)$$

Veamos ahora que la energía esta acotada inferiormente por la carga topológica $Q_{CP(1)}$. En el análisis de esta cuestión, no resulta difícil obtener expresiones para A_1 y A_2 a partir de la ecuación (5.31) para luego insertarlas en la expresión del campo magnético. Así encontramos

$$B = \epsilon_{ij} \partial_i A_j = i \epsilon_{ij} \partial_i (\mathbf{n}^\dagger \partial_j \mathbf{n}) - \kappa \left[\partial_1 F_{01} + \partial_2 F_{02} \right]. \quad (5.37)$$

Recordando las ecuaciones (5.21) y (5.22) se advierte que el primer término de esta ecuación es la corriente topológica del modelo $CP(1)$, mientras que los restantes términos conforman la divergencia del campo eléctrico. Reacomodando, entonces, podemos reescribir esta ecuación de la forma siguiente

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2\kappa^2} J_0 + \frac{2\pi}{\kappa} J_0^{CP(1)} \quad (5.38)$$

En donde hemos usado la ley de Gauss $B = \frac{-1}{2\kappa} J_0$, siendo J_0 la corriente eléctrica y $J_0^{CP(1)}$ la corriente topológica. Esto nos muestra que la divergencia del campo eléctrico depende tanto de la corriente eléctrica como de la corriente topológica del $CP(1)$. Para encontrar una expresión del flujo magnético integramos esta última ecuación, usando la relación $2\kappa \nabla \cdot \mathbf{E} = -(\partial_1 J_2 - \partial_2 J_1) = -\nabla \times \mathbf{J}$, lo que nos conduce a

$$\Phi = \int_D B \, d^2x = 2\pi \int_D J_0^{CP(1)} \, d^2x + \frac{1}{2} \int_{\partial D} J_i dx^i \quad (5.39)$$

en donde notamos que la relación entre el flujo magnético y la carga topológica $CP(1)$ conlleva un término de superficie relacionado a la corriente eléctrica. Teniendo en cuenta esta expresión para el flujo magnético y la relación $|D_i n|^2 = |(D_1 \pm i D_2) n|^2 \mp B \pm \frac{\epsilon^{ij}}{2} \partial_i J_j$, la expresión de la energía (5.36) se reescribe

$$E = \int_D d^2x \left(\kappa^2 B^2 + |(D_1 \pm i D_2) n|^2 \right) \mp 2\pi Q_{CP(1)} \quad (5.40)$$

De aquí resulta que la energía esta acotada inferiormente por un múltiplo de la carga topológica $Q_{CP(1)}$,

$$E \geq 2\pi \int_D d^2x J_{CP(1)}^0 = 2\pi |Q_{CP(1)}| \quad (5.41)$$

donde como en los casos anteriores tomamos siempre el signo positivo correspondiendo a $Q_{CP(1)}$ positiva el negativo cuando $Q_{CP(1)}$ es negativa.

Como hemos ya escrito antes la teoría ha sido formulada en un disco de radio arbitrario R . Mientras este radio se mantenga finito no tenemos porque imponer condiciones para los campos en infinito, puesto que la energía se mantendrá acotada independientemente de como sean los campos en la frontera. Sin embargo, si el radio tiende a infinito las condiciones de borde deben estar determinadas de manera que la energía se mantenga finita. Por eso, es conveniente imponer tales condiciones de más allá de que el radio pueda ser o no infinito. Así, las condiciones en R quedan fijadas del siguiente modo

$$\lim_{r \rightarrow R} n(x) = n^0 e^{-i\alpha(\phi)}, \quad \lim_{r \rightarrow R} A_i = \partial_i \alpha \quad (5.42)$$

Para buscar las soluciones de las ecuaciones de campo (5.30) y (5.31) en forma numérica, consideremos el siguiente ansatz[119, 120]

$$n(\phi, r) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta(r)}{2}) e^{iN\phi} \\ \sin(\frac{\theta(r)}{2}) \end{pmatrix}, \quad A_\phi(r) = a(r), \quad A_r = 0 \quad (5.43)$$

Introduciendo este ansatz en la ecuación de la energía (5.36) obtenemos

$$E = 2\pi \int_0^R r dr \left(\kappa^2 \left(\frac{a(r)}{r} + \partial_r a(r) \right)^2 + \frac{1}{4} (\partial_r \theta(r))^2 + \left(\frac{N^2}{r^2} + \frac{2Na(r)}{r} \right) \cos^2\left(\frac{\theta(r)}{2}\right) + a^2(r) \right) \quad (5.44)$$

Las condiciones de borde en el origen que implican la regularidad de los campos allí, son

$$\lim_{r \rightarrow 0} \theta(r) = \pi, \quad \lim_{r \rightarrow 0} a(r) = 0 \quad (5.45)$$

Las condiciones en el borde sobre el disco son las que aparecen la formula (5.42), que en términos del ansatz se leen

$$\lim_{r \rightarrow R} \theta(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow R} a(r) = -\frac{N}{R} \quad (5.46)$$

Con el objeto de eliminar la constante κ de la energía (5.44), introducimos las siguientes variables adimensionales

$$A = \kappa a, \quad s = \frac{r}{\kappa} \quad (5.47)$$

Así, la energía se reescribe

$$\begin{aligned} E(S) = 2\pi \int_0^S s ds & \left(\left(\frac{A}{s} + \partial_s A \right)^2 + \frac{1}{4} (\partial_s \theta)^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{N^2}{s^2} + \frac{2NA}{s} \right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + A^2 \right) \end{aligned} \quad (5.48)$$

Las ecuaciones de movimiento, que resultan de extremizar esta expresión de la energía, son

$$\partial_s^2 A + \frac{\partial_s A}{s} - \frac{A}{s^2} - A = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{N}{s} \quad (5.49)$$

$$s \partial_s (s \partial_s \theta) + N^2 \sin(\theta) = -2NsA \sin(\theta) \quad (5.50)$$

Las condiciones de borde, en términos de la nueva variable s se escriben

$$\lim_{s \rightarrow 0} \theta = \pi, \quad \lim_{s \rightarrow 0} A = 0 \quad (5.51)$$

$$\lim_{s \rightarrow S} \theta = 0, \quad \lim_{s \rightarrow S} A = -\frac{N}{S} \quad (5.52)$$

Las ecuaciones (5.49) y (5.50) fueron resueltas en forma numérica en la referencia [120]. Allí se utilizó, para su resolución, un método conocido como “shooting” [122]. Este consiste esencialmente en imponer una condición de prueba en uno de los bordes, para reproducir, luego de integrar numéricamente (por el método de Euler o Runge-Kutta), el valor esperado en el otro borde. La utilidad de este método, es sin embargo limitada en problemas con soluciones exponencialmente divergentes como este. Esto se debe a que un pequeño error en la condición inicial exponentia un comportamiento erróneo en el otro borde. De esta forma existe un radio máximo R , más allá del cual resulta difícil obtener una solución utilizando este método. Más específicamente en la referencia [120] se procede del siguiente modo: Se elige primero una función de prueba

$$\theta^{(0)}(s) = 2 \arctan\left(\frac{1}{s}\right) \quad (5.53)$$

y se la reemplaza en la ecuación (5.49). Entonces se integra para obtener una función $A^{(0)}(s)$, con esta solución se va a la ecuación (5.50) y se vuelve a integrar para obtener $\theta^{(1)}(s)$. Así, se puede seguir con este método iterativo obteniéndose los $A^{(i)}(s), \theta^{(i)}(s)$ correspondientes para cada paso. En particular en este paper los autores lograron obtener una solución para $N = 1$ y $S = 30$.

Existe, sin embargo, otro método numérico conocido como método de relajación [122], el cual resulta más adecuado para el análisis de este problema. Este método consiste en alcanzar una convergencia global partiendo de un “guess” inicial para la solución definida en todo el intervalo. Aquí el intervalo puede ser de tamaño arbitrario. En otras palabras el método de relajación puede ser usado para analizar el comportamiento de la solución como función del radio S del disco. Este fue el procedimiento abordado en el trabajo original [121]. Allí se resolvió las ecuaciones (5.49) y (5.50) sujetas a las condiciones de borde (5.51) y (5.52). Primero se las resolvió usando el método de relajación y luego se contrastó sus

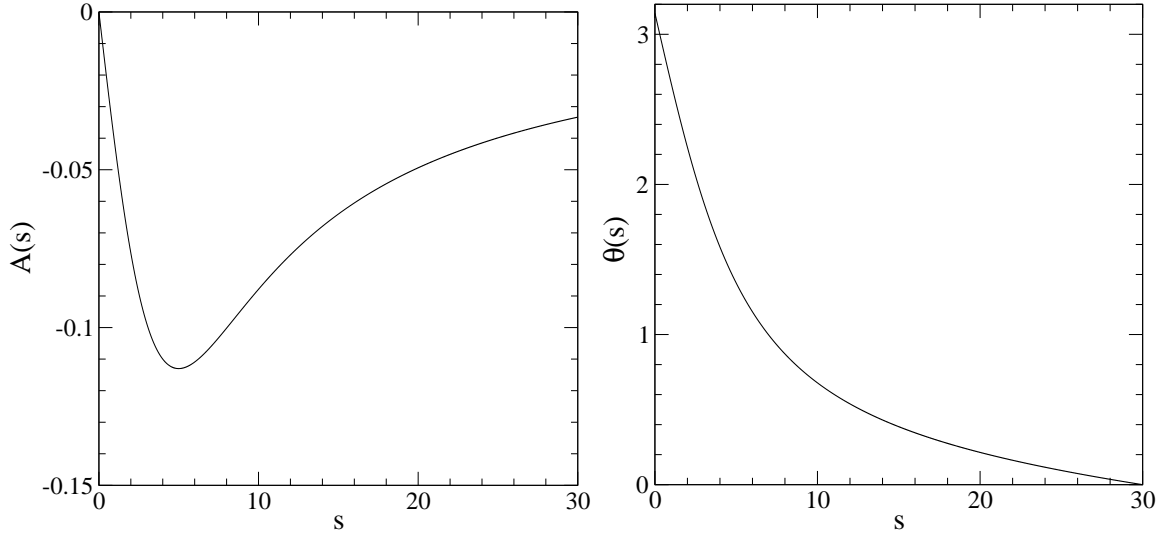


Figura 5.1: Las funciones de perfil $A(s)$ (izquierda) y $\theta(s)$ (derecha) para un disco de tamaño $S = 30$ and $N = 1$.

soluciones con las obtenidas por método “shooting”, en ambos caso para $N = 1$ y $S = 30$, y se comprobó una perfecta coincidencia entre ambas. En la Figura 5,1 se muestra las soluciones obtenidas por ambos métodos, que coinciden con las encontradas en la referencia [120].

Usando el método de relajación se calculó también el campo magnético como función del radio S . En la Figura 5,2 se muestra el comportamiento del modulo del campo magnético para diversos tamaños del disco. Lo que se observa es que con el incremento del tamaño del disco la solución se aproxima cada vez más a la solución trivial. Este hecho fue inadvertido en la referencia [120] en donde, como ya hemos señalado, se utilizó el método *shooting*, lo que solo les permitió obtener soluciones para $N = 1$ y $S = 30$. Esto los condujo a proclamar la existencia de soluciones solitónicas estables en R^2 . Veamos en forma analítica que efectivamente la solución tiende a la trivial cuando S se vuelve arbitrariamente grande. Comencemos por considerar la siguiente configuración definida en el intervalo λS

$$\tilde{A}_{\lambda S}(s) = \frac{A_S(\frac{s}{\lambda})}{\lambda}, \quad \tilde{\theta}_{\lambda S}(s) = \theta_S(\frac{s}{\lambda}) \quad (5.54)$$

Aquí suponemos que $A_S(s)$ y $\theta_S(s)$ son las soluciones de las ecuaciones de movimiento (5.49) y (5.50) en el disco de radio S y satisfacen las condiciones de borde (5.51) y (5.52). El

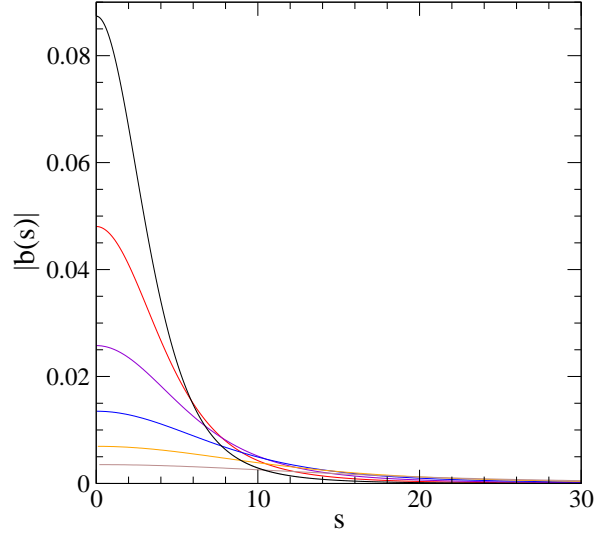


Figura 5.2: (Color online) ‘ El perfil del campo magnético como función coordenada radial s para difentes discos, de arriba hacia abajo, $S = 30, 60, 120, 240, 480, 960$

parámetro λ es real y esta sujeto a la condición $\lambda > 1$. De acuerdo con (5.51) y (5.52) esta configuración debe satisfacer las siguientes condiciones de borde

$$\lim_{s \rightarrow 0} \tilde{\theta}_{\lambda S}(s) = \pi, \quad \lim_{s \rightarrow 0} \tilde{A}_{\lambda S}(s) = 0 \quad (5.55)$$

$$\lim_{s \rightarrow \lambda S} \tilde{\theta}_{\lambda S}(s) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow \lambda S} \tilde{A}_{\lambda S}(s) = \frac{A_S(S)}{\lambda} = -\frac{N}{\lambda S} \quad (5.56)$$

Podemos ahora evaluar el funcional energía (5.48) para la configuración (5.54) en el intervalo λS

$$\begin{aligned} \tilde{E}(\lambda S) = 2\pi \int_0^{\lambda S} s ds & \left(\left(\frac{\tilde{A}_{\lambda S}(s)}{s} + \partial_s \tilde{A}_{\lambda S}(s) \right)^2 + \frac{1}{4} (\partial_s \tilde{\theta})^2 \right) \\ & + \left(\frac{N^2}{s^2} + \frac{2N \tilde{A}_{\lambda S}(s)}{s} \right) \cos^2 \left(\frac{\tilde{\theta}}{2} + \tilde{A}_{\lambda S}^2(s) \right) \end{aligned} \quad (5.57)$$

Denotemos las soluciones de las ecuaciones de campo (5.49) y (5.50) correspondientes a el intervalo λS como $A_{\lambda S}(s)$ y $\theta_{\lambda S}(s)$. Estas soluciones deben satisfacer las condiciones

$$\lim_{s \rightarrow 0} \theta_{\lambda S} = \pi, \quad \lim_{s \rightarrow 0} A_{\lambda S} = 0 \quad (5.58)$$

$$\lim_{s \rightarrow \lambda S} \theta_{\lambda S} = 0, \quad \lim_{s \rightarrow \lambda S} A_{\lambda S} = -\frac{N}{\lambda S} \quad (5.59)$$

en donde resulta claro que estas condiciones de borde son las generalización de (5.51) y (5.52) para un intervalo λS . De esta forma $A_{\lambda S}(s)$ y $\theta_{\lambda S}(s)$ satisfacen las mismas condiciones de borde en el intervalo λS que la configuración (5.54). Esto implica la siguiente relación

$$E(\lambda S) \leq \tilde{E}(\lambda S) \quad (5.60)$$

siendo aquí $E(\lambda S)$ la energía correspondiente a las soluciones $A_{\lambda S}(s)$ y $\theta_{\lambda S}(s)$ en el intervalo λS . Bajo la transformación $s = x\lambda$ el funcional (5.57) se reescribe

$$\begin{aligned} \tilde{E}(\lambda S) = 2\pi \int_0^S x dx & \left(\frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{A_S(x)}{x} + \partial_x A_S(x) \right)^2 + \frac{1}{4} (\partial_x \theta)^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{N^2}{x^2} + \frac{2NA_S(x)}{x} \right) \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + A_S^2(x) \right) \end{aligned} \quad (5.61)$$

Esta última expresión difiere de $E(S)$ solo en el factor $\frac{1}{\lambda^2}$, por lo tanto

$$\tilde{E}(\lambda S) < E(S) \quad (5.62)$$

Comparando esta desigualdad con la obtenida en (5.60) llegamos a la relación

$$E(\lambda S) < E(S) \quad (5.63)$$

Lo que demuestra que la energía decrece con el aumento del radio del disco. Más aún, puesto que la energía es definida positiva podemos concluir que la energía tiende a cero (y por lo tanto la solución tiende ser trivial) cuando S tiende a infinito. En la Figura 3 se muestra

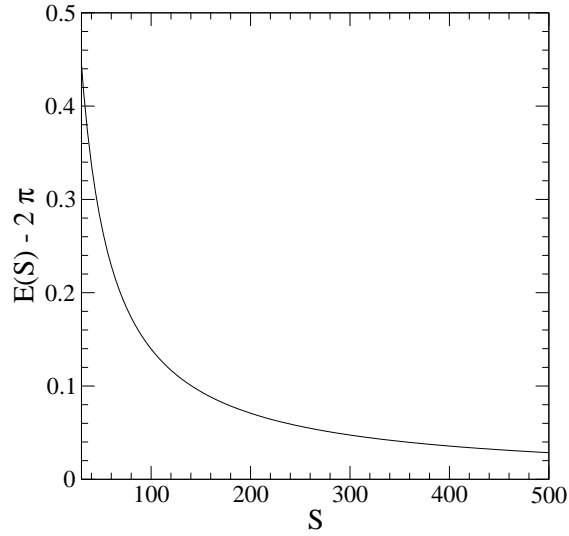


Figura 5.3: La energía de la solución como función del tamaño del disco S , for $N = 1$

el comportamiento de la energía como función del tamaño del disco. Por último vale pena mencionar que la introducción de un término de potencial en la teoría da lugar a soluciones solitónicas estables[123, 124, 125, 126, 127, 128], [129]. En particular, al realizar este trabajo, chequeamos los resultados numéricos de la referencia [129] utilizando el método de relajación y comprobamos la estabilidad de las soluciones.

Capítulo 6

Conclusiones

En esta tesis hemos analizado diversos aspectos relacionados con la presencia del término de Chern-Simons en teorías de gauge. En primer lugar en el capítulo 3 hemos tratado de responder a la pregunta sobre la posibilidad de construir una extensión supersimétrica del modelo de materia no relativista con Chern-Simons (modelo de Jackiw-Pi) en espacio no-conmutativo. Las teorías de campos en espacios no-conmutativos surgieron hacia fines de los años 1990 como teorías efectivas de bajas energías de las teorías de cuerdas y también se especuló sobre su aplicación en modelos efectivos de materia condensada. La existencia de la supersimetría no-relativista en este modelo en espacio conmutativo, había sido ya discutida por Leblanc, Lozano y Min en la referencia [25]. La supervivencia de esta supersimetría en espacio no-conmutativo, no resulta a priori evidente ya que la introducción de la no-conmutatividad rompe en forma manifiesta varias simetrías de la teoría (por ejemplo la invarianza de escala). En la referencia [87] discutida en el capítulo 3 hemos sido capaces de demostrar que es posible construir una extensión supersimétrica y hemos discutido también la relación de la existencia de esta supersimetría con ecuaciones de auto-dualidad.

En el capítulo 4 nuestro estudio se focalizó en teorías en (1+1)-dimensiones. En este caso nuestro interés se originó a partir del trabajo [89], que proclamaba la existencia de un modelo supersimétrico y no relativista, de potencial interés en el estudio de átomos fríos. Sin embargo el análisis de los resultados presentados en el paper [89] inmediatamente muestran la existencia de un serio problema, ya que el álgebra discutida por estos autores carece

de una de las propiedades más elementales que debe cumplir un álgebra supersimétrica, a saber, que el Hamiltoniano total de la teoría, debe poder escribirse como el anticonmutador de las cargas supersimétricas. En la referencia [103] discutida en el capítulo 4, nosotros hemos podido presentar las verdaderas transformaciones supersimétricas asociadas con esta teoría. Sorprendentemente estas transformaciones supersimétricas pueden fácilmente ser relacionadas con las transformaciones supersimétricas de la teoría de materia no relativista más Chern-Simons discutida en [25], invocando un mecanismo de reducción dimensional. Como vimos en el paper [104] estas supersimetrías también pueden ser relacionadas con el modelo de Manton[105].

Por último en el capítulo 5 nuestro interés se concentró en el estudio de solitones en teorías $CP(N)$ (relativistas) con términos de Chern-Simons. En este tipo de teorías no ha sido posible encontrar ecuaciones de auto-dualidad y la existencia de solitones requiere el análisis de las ecuaciones de Euler-Lagrange del modelo. En este contexto la presencia del término de Chern-Simons fue invocado originalmente por dos motivos: por un lado se espera que la presencia del término de Chern-Simons introduzca en la teoría fenómenos relacionados con la estadística fraccionaria y por otro se argumentó como vimos (erróneamente) que su presencia, podía ayudar a estabilizar soluciones solitónicas que ya se sabían inestables en el $CP(N)$ puro. En la referencia [121] hemos sido capaces de demostrar mediante un análisis numérico sencillo pero detallado que la presencia del término de Chern-Simons no es suficiente para garantizar la estabilidad de estas soluciones en R^2 . Sin embargo las soluciones están bien definidas en un disco de radio finito y varias de sus propiedades fueron discutidas en [121].

Existen distintos temas relacionados con esta tesis que merecen consideración, por ejemplo en la referencia [130], que no hemos discutido en esta tesis, hemos analizado la teoría $CP(1)$ en espacio no-conmutativo con y sin término de Chern-Simons. Se mostro allí que cuando estas teorías son transformadas a espacio conmutativo por medio de un mapa de Seiberg-Witten su solución es trival, es decir se obtiene el mismo resultado que obtuviéramos en la referencia [121] para el modelo Chern-Simons- $CP(1)$ en espacio conmutativo. Finalmente en la referencia [131] hemos mostrado que el modelo $CP(1)$ mas Chern-Simons,

antes estudiado, puede admitir una solución no trivial y singular si la teoría se define en $\mathbb{R}^2 \setminus D(0, \epsilon)$, donde $D(0, \epsilon)$ es un disco centrado en el origen y con un radio arbitrario ϵ . Varias generalizaciones de estos resultados son imaginables y esperamos reportar nuestros resultados en el futuro.

Tesista Lic. Lucas Sourrouille

Director Dr. Gustavo Lozano

Bibliografía

- [1] K. Cahill, Phys. Lett. B **53**, 174 (1974).
- [2] R. F. Dashen, B. Hasslacher, A. Neveu, Phys. Rev. D **10**, 4130 (1974).
- [3] J. Goldstone, R. Jackiw, Phys. Rev. D **11**, 1486 (1975)
- [4] A. Polyakov, Pisma v. Zh. E.T.F **20**, 430 (1975)
- [5] N. H. Christ, T. D. Lee, Phys. Rev. D **12**, 1606 (1975)
- [6] N. D. Mermin, Rev. Mod. Phys. **51**, 591 (1979)
- [7] V. Ponaru, G. Toulouse, Journal de Physique **38**, 887 (1977).
- [8] David J. Thouless, Topological Quantum Numbers in Nonrelativistic Physics, World Scientific Publishing (1998)
- [9] J. Schonfeld, Nucl. Phys. B **185**, 157 (1981)

- [10] S. Deser, R. Jackiw, S. Templeton, Phys. Rev. Lett. **48**, 975 (1982)
- [11] A.A. Abrikosov, Sov. Phys. JETP **5** 1174 (1957).
- [12] H.B. Nielsen, P. Olesen, Nucl. Phys. B **61** 45 (1973).
- [13] Y. Nambu, Lectures prepared for the Copenhagen Summer Symposium (1970), unpublished; T. Goto, Prog. Theor. Phys. **46**, 1560 (1971).
- [14] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **79** 276 (1974).
- [15] A. M. Polyakov, JETP Lett. **20** 194 (1974).
- [16] T.W.B. Kibble, Symmetry breaking and defects, cond-mat/0211110
- [17] H. J. de Vega and F. A. Schaposnik, Phys. Rev. Lett. **56**, 2564 (1986).
- [18] H. J. de Vega and F. A. Schaposnik, Phys. Rev. D **34**, 3206 (1986).
- [19] S. K. Paul and A. Khare, Phys. Lett. B **174**, 420 (1986) [Erratum-ibid. **177B**, 453 (1986)].
- [20] R. Jackiw and E. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **64** 2334 (1990)

- [21] J. Hong, Y. Kim and P-Y. Pac, Phys. Rev. Lett. **64** 2330 (1990)
- [22] R. Jackiw and S. Y. Pi, Phys. Rev. Lett. **64**, 2969 (1990). R. Jackiw and S. Y. Pi, Phys. Rev. D **42**, 3500 (1990) [Erratum-ibid. D **48**, 3929 (1993)].
- [23] E. Witten and D. Olive, Phys. Lett. B **78** 97(1978).
- [24] C. Lee, K. Lee and E.J. Weinberg, Phys. Lett. **253** B (1990) 105.
- [25] M. Leblanc, G. Lozano and H. Min, Annals Phys. **219**, 328 (1992) [arXiv:hep-th/9206039].
- [26] Leandros Perivolaropoulos, Phys. Rev. D 48, 59615962 (1993)
- [27] L. Jacobs and C. Rebbi, Phys. Rev. B**19**, 4486 (1979).
- [28] V. L. Ginzburg and L. D. Landau, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **20**, 1064 (1950).
- [29] E. Bogomolyi, Sov. J. Nucl. Phys **24**, 449 (1976).
- [30] H. de Vega and F .A. Schaposnik, Phys. Rev. D **14**, 1100,(1976)
- [31] A. M. Jaffe and C. Taubes, Vortices And Monopoles. Structure Of Static Gauge Theories, Birkhiuser, Boston, (1980).

- [32] C. H. Taubes, Commun. Math. Phys. **72**, 277, (1980); C. H. Taubes, Commun. Math. Phys. **75**, 207, (1980); T. M. Samols, Commun. Math. Phys. **145**, 149, (1992).
- [33] J. Schonfeld, Nucl. Phys. B **185**, 157 (1981); S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, Phys. Rev. Lett. **48**, 975 (1982); S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, Ann. Phys.(N.Y.) **140**, 372 (1982).
- [34] R. Wang, Comm. Math. Phys. **137**, 587 (1991); J. Schiff, J. Math. Phys. **32**, 753 (1991).
- [35] R. Jackiw, K. Lee and E. Weinberg, Phys. Rev. D **42**, 3488 (1990).
- [36] J. Liouville, Journ. Math. Pures Appl. **18**, 71 (1853).
- [37] S. J. Gates, M. Grisarll, M. Rocek and W. Siegel, Superespace (Belljamine/ Cummings 1983).
- [38] W. Siegel, Nucl. Phys. B **156**, 135 (1979).
- [39] L. Castellani, Class. Quant. Grav. **17**, 3377 (2000).
- [40] H. S. Snyder, Phys. Rev. **71**, 38 (1947). Phys. Rev. **72**, 68 (1947)
- [41] A. Connes, M. R. Douglas and A. Schwarz, JHEP **9802**, 003 (1998).

- [42] M. R. Douglas and C. M. Hull, JHEP **9802**, 008 (1998).
- [43] N. Seiberg and E. Witten, JHEP **9909**, 032 (1999).
- [44] L. Susskind, [hep-th/0101029].
- [45] S. S. Gubser and M. Rangamani, JHEP **0105**, 041 (2001).
- [46] A. P. Polychronakos, JHEP **0104**, 011 (2001).
- [47] S. Hellerman and M. van Raamsdonk, JHEP **0110**, 039 (2001).
- [48] B. Lee, K. moon and C. Rim, Phys. Rev. D **64**, 085014 (2001).
- [49] B. Morariu and A. P. Polychronakos, JHEP **0107**, 006 (2001).
- [50] C. Duval and P. A. Horvathy, J. Phys. A **34**, 10097 (2001).
- [51] S. Hellerman and L. Susskind, [hep-th/0107200].
- [52] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov, Rev. Mod. Phys. **73**, 977 (2001). [hep-th/0106048]
- [53] M. Chaichian, P. Presnajder, M. M. Sheikh-Jabbari and A. Tureanu, [hep-th/0107037].

- [54] I. Bars, M. M. Sheikh-Jabbari and M. A. Vasiliev, Phys. Rev. D **64**, 086004 (2001).
- [55] N. Nekrasov and A. Schwarz, Commun. Math. Phys. **198**, 689 (1998).
- [56] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, V. G. Drinfeld and Y. I. Manin, Phys. Lett. A **65** 185 (1978).
- [57] K. Furuuchi, Prog. Theor. Phys. **103** 1043 (2000).
- [58] K. Furuuchi, Commun. Math. Phys. **217** 579 (2001).
- [59] K. Furuuchi, Talk at APCTP, August 2000, Seoul, [hep-th/0010006].
- [60] N. Nekrasov, [hep-th/0010017]
- [61] N. Nekrasov, [hep-th/0011095]
- [62] K. Kim, B. Lee and H. S. Yang, J. Korean Phys. Soc. **41**, 290 (2002), [hep-th/0003093]
- [63] K. Lee, D. Tong and S. Yi, Phys. Rev. D **63**, 065017 (2001).
- [64] A. Schwarz, Commun. Math. Phys. **221**, 433 (2001).
- [65] A. Polychronakos, Phys. Lett. B **495**, 407 (2000).

- [66] D. P. Jatkar, G. Mandal and S. R. Wadia, JHEP **0009**, 018 (2000).
- [67] D. Bak, Phys. Lett. B **495**, 251 (2000).
- [68] J. A. Harvey, P. Kraus and F. Larsen, JHEP **0012**, 024 (2000).
- [69] D. J. Gross, N. A. Nekrasov, JHEP **0103**, 044 (2001).
- [70] M. Hamanaka and S. Terashima, JHEP **0103**, 034 (2001).
- [71] K. Hashimoto, JHEP **0012**, 023 (2000).
- [72] D. Bak, K. M. Lee and J. H. Park, Phys. Rev. D **63**, 125010 (2001).
- [73] G. S. Lozano, E. F. Moreno and F. A. Schaposnik, Phys. Lett. B **504** 117 (2001).
- [74] R. Gopakumar, S. Minwalla and A. Strominger, JHEP **0005**, 020 (2000).
- [75] Chong-Sun Chu, Nucl.Phys.B **580**, 352 (2000)
- [76] A.A. Bichl, J.M. Grimstrup, V. Putz, M. Schweda, JHEP **0007**, 046 (2000).
- [77] Sunil Mukhi, Nemani V. Suryanarayana, JHEP **0011**, 006 (2000).

- [78] N.E. Grandi, G.A. Silva, Phys.Lett. B **507**, 345 (2001).
- [79] Alexios P. Polychronakos, JHEP **0011**, 008 (2000).
- [80] J. Kluson, Phys .Lett. B **505**, 243 (2001).
- [81] Avinash Khare, manu B. Paranjepe, JHEP **0104** 002 (2001).
- [82] D. Bak, S. K. Kim, K-S. Soh, Jae H. Yee, Phys. Rev. D **64**, 025018 (2001).
- [83] V. P. Nair, A.P. Polychronakos, Phys. Rev. Lett. **87**, 030403 (2001).
- [84] D.Bak K-M. Lee, J-H. Park, Phys. Rev. Lett. **87**, 030402 (2001).
- [85] D. J. Gross, V. Periwal, JHEP **0108**, 008 (2001).
- [86] G. S. Lozano, E. F. Moreno and F. A. Schaposnik, JHEP **0102**, 036 (2001).
- [87] Gustavo S. Lozano, Olivier Piguet, Fidel A. Schaposnik, Lucas Sourrouille, Phys. Lett. B **630**, 108 (2005).
- [88] D. Bak, R. Jackiw and S. Y. Pi, Phys. Rev. D **49**, 6778 (1994). [arXiv:hep-th/9402057].

- [89] Michiel Snoek, S. Vandoren, H.T.C. Stoof, Phys. Rev. A **74**, 033607 (2006) [arXiv:cond-mat/0604671].
- [90] B. Paredes, A. Widera, V. Murg, O. Mandel, S. Fölling, I. Cirac, G. V. Shlyapnikov, T. W. Hansch and I. Bloch, Nature **429**, 277 (2004).
- [91] T. Kinoshita, T. Weninger and D. S. Weiss, Science **305**, 1125 (2004).
- [92] C. A. Regal, M. Greiner, and D. S. Jin, Phys. Rev. Lett. **92**, 040403 (2004)
- [93] M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, A. J. Kerman, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **92**, 120403 (2004)
- [94] J. Kinast, S. L. Hemmer, M. E. Gehm, A. Turlapov, and J. E. Thomas, Phys. Rev. Lett. **92**, 150402 (2004)
- [95] M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, S. Jochim, C. Chin, J. Hecker Denschlag, and R. Grimm, Phys. Rev. Lett. **92**, 120401 (2004).
- [96] T. Bourdel, L. Khaykovich, J. Cubizolles, J. Zhang, F. Chevy, M. Teichmann, L. Tarruell, S. J. J. M. F. Kokkelmans, and C. Salomon, Phys. Rev. Lett. **93**, 050401 (2004).
- [97] U. Al Khawaja and H. T. C. Stoof, Nature **411**, 918 (2001).

- [98] J. Ruostekoski and J. R. Anglin, Phys. Rev. Lett. **86**, 3934 (2001).
- [99] J. Ruostekoski, G. V. Dunne, and J. Javanainen, Phys. Rev. Lett. **88**, 180401 (2002).
- [100] K. Osterloh, M. Baig, L. Santos, P. Zoller, and M. Lewenstein, Phys. Rev. Lett. **95**, 010403 (2005).
- [101] J. Ruseckas, G. Juzeliunas, P. Öhberg, and M. Fleischhauer, Phys. Rev. Lett. **95**, 010404 (2005).
- [102] M. Snoek, M. Haque, S. Vandoren, and H. T. C. Stoof Phys. Rev. Lett. **95**, 250401 (2005).
- [103] Gustavo S. Lozano, Oliver Piguet, Fidel A. Schaposnik and Lucas Sourrouille, Phys. Rev. A **75**, 023608 (2007) [arXiv:cond-mat/0609553].
- [104] Lucas Sourrouille, Phys. Rev. D **83**, 045016 (2011), [arXiv:hep-th/1010.6277].
- [105] N. S. Manton, Annals of Physics **256** 114 (1997).
- [106] P. Oh and C. Rim, Phys. Lett. B **404**, 89 (1997) [arXiv:hep-th/9612028].
- [107] H. c. Kao, K. M. Lee and T. Lee, Phys. Rev. D **55**, 6447 (1997) [arXiv:hep-th/9612183].

- [108] M. Hassaine, P. A. Horvathy and J. C. Yera, *Annals of Physics* **263** 276 (1998)
- [109] I. V. Barashenkov and A. O. Harin, *Phys. Rev. Lett.* **72** 1575 (1994)
- [110] H. Eichenherr, *Nucl. Phys. B* **146** (1978) 215 [Erratum-ibid. B 155 (1979) 544].
- [111] V. L. Golo and A. M. Perelomov, *Lett. Math. Phys.* 2, 477 (1978); *Phys. Lett. B* **79**, 112 (1978).
- [112] E. Cremmer and J. Scherk, *Phys. Lett. B* **74**, 341 (1978).
- [113] A. D'Adda, M. Luscher and P. Di Vecchia, *Nucl. Phys. B* **146**, 63 (1978).
- [114] A. D'Adda, P. Di Vecchia and M. Luscher, *Nucl. Phys. B* **152**, 125 (1979).
- [115] E. Witten, *Nucl. Phys. B* **149**, 285 (1979).
- [116] R. Rajaraman, *Solitons and instantons*, Elsevier Science, Amsterdam, (1987). ISBN 0-444-87047-4
- [117] A.A. Belavin and A.M. Polyakov, *JETP Lett.* **22**, 245 (1975)
- [118] I.E. Dzyaloshiskii, A.M. Polyakov and P.B. Wiegmann, *Phys. Lett. A* **127**, 112 (1988)

- [119] P. Voruganti, Phys. Lett. B **223**, 181 (1989) .
- [120] M.A. Mehta, J.A. Davis and I.J.R. Aitchison, Phys. Lett. B **281**, 86 (1992).
- [121] L. Sourrouille, A. Caso and G. S. Lozano, [hep-th/1002.4847], Mod. Phys. Lett. A **26**, 637 (2011)
- [122] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, Numerical Recipes in Fortran, Cambridge University Press, 1992.
- [123] D.H. Tchrakian and K. Arthur, Phys. Lett. B **352** (1995) 327;
- [124] B.J. Schroers, Phys. Lett. B **356** (1995) 291;
- [125] P.K. Ghosh and S.K. Ghosh, Phys. Lett. B **366** (1996) 199;
- [126] K. Kimm, K. Lee, T. Lee, Phys. Rev. D **53** (1996) 4436;
- [127] K. Arthur, D.H. Tchrakian, Y. Yang, Phys. Rev. D **54** (1996) 5245;
- [128] K. Kimm, K. Lee, T. Lee, Phys. Lett. B **380** (1996) 303.
- [129] B.M.A.G. Piette, D.H. Tchrakian, W.J. Zakrzewski, Phys. Lett. B **339** (1994) 95.

[130] Lucas Sourrouille, *On the energy crisis in noncommutative CP(1) model*, Nuclear Physics B **834**:471-484,(2010), [arXiv:hep-th/1001.5064]

[131] Lucas Sourrouille, *Singular soliton solution in the Chern-Simons-CP(1) model*, [arXiv:hep-th/1104.5045], a ser publicado en Modern Physics Letters A.