

## Tesis Doctoral

# Escenarios cosmológicos en expansión acelerada

Forte, Mónica

2011

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Forte, Mónica. (2011). Escenarios cosmológicos en expansión acelerada. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

Cita tipo Chicago:

Forte, Mónica. "Escenarios cosmológicos en expansión acelerada". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2011.

**EXACTAS** UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



**UBA**

Universidad de Buenos Aires



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Física

# ESCENARIOS COSMOLÓGICOS EN EXPANSIÓN ACELERADA

Trabajo de Tesis para optar por el título de  
Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Físicas

Por: **Lic. Mónica Forte**

Director de Tesis: **Dr. Luis P. Chimento**

Lugar de Trabajo: Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. U.B.A

Fecha: 2011

# ESCENARIOS COSMOLÓGICOS EN EXPANSIÓN ACELERADA

## RESUMEN

Estudiamos escenarios de expansión acelerada en cosmologías de Bianchi I (BI) y Friedmann-Robertson-Walker (FRW) con distintos componentes. En la métrica de BI encontramos modelos de universos con  $K$  esencia que disipaban la anisotropía primordial y modelos que eludían la singularidad inicial. Encontramos soluciones exactas para diversas fuentes y vimos que la  $K$  esencia impulsada por un potencial cuadrático inverso y la quintaesencia impulsada por un potencial exponencial compartían la misma geometría. En la métrica de FRW, la  $K$  esencia permitió construir modelos que interpolaban entre una era dominada por materia oscura, y una era de expansión acelerada. Introdujimos el  $N$ -quintom que generalizaba el quintom construido con quintaesencia y campo fantasma. Estudiamos la dualidad, la estabilidad de las soluciones ley de potencias y obtuvimos la solución general del  $N$ -quintom impulsado por un potencial exponencial. Para otros potenciales investigamos modelos en espacios internos bi y tridimensionales. Asociamos una representación escalar a un sistema de dos fluidos interactivos que modificó la ecuación de Friedmann, denominada “quintaesencia exótica”. Ajustamos estadísticamente los parámetros del modelo exótico, estimamos cuando el universo comenzaba a acelerarse, calculamos su edad, estudiamos las perturbaciones lineales y encontramos la solución general con tres fluidos. Finalmente, analizamos modelos con materia bariónica conservada y con interacciones del sector oscuro limitadas a cocientes asintóticamente estables de las densidades de energías oscuras.

**Palabras Claves:**  $K$  esencia, Quintaesencia,  $N$ -Quintom, Interacciones, Bianchi I, FRW.

# COSMOLOGICAL SCENARIOS IN ACCELERATED EXPANSION

## ABSTRACT

In this thesis we study cosmological scenarios in the metrics of Bianchi I (BI) and Friedmann-Robertson-Walker (FRW) with different contents. In the BI metric we investigate a universe with K essence and find some models that dissipate the primary anisotropy and others that avoid the initial singularity. We find exact solutions with various sources and find that the K essence driven by an inverse square potential and a quintessence driven by exponential potential share the same geometry. In the FRW metric we see that the K essence allows us to build transient models representing universes that interpolate between a non-accelerated expansion era dominated by dark matter, and a stage of accelerated expansion, dominated by dark energy. Alternatively, we introduce the N-quintom model with an internal structure that generalizes different realizations of quintom based on quintessence and ghost fields. We study the duality and show that the power-law type solutions are stable when the N-quintom is driven by an exponential potential, for which we obtain the general solution. Also, we consider models with other potentials and solve for the two and three-dimensional internal spaces. We present the problem of interacting fluids and define a scalar representation of the interaction called "exotic quintessence". This led us to a modified Friedmann equation with which we model a universe with baryonic matter, dark matter and dark energy contents. We made statistical adjustment of the parameters of this exotic model. In addition to this, we calculated the age of the universe and the redshift when it begins to accelerate, and also made a study of linear perturbations. Moreover we exactly solve the modified Einstein equation obtained in the exotic case with three fluids. Finally, we analyze models with conserved baryonic matter and dark matter in interaction with dark energy, where interaction is limited to produce ratios of energy densities of both dark components, asymptotically stable.

**Key words:** K essence, exotic quintessence, N-quintom, cosmological interactions, Bianchi I, FRW.

## AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecer muy especialmente a mi director de Tesis, el Dr. Luis Pascual Chimento por su innegable generosidad y paciencia, por su calidad científica y humana y por las enriquecedoras discusiones de física, donde nunca falta el buen humor. Como investigadora y como persona he crecido enormemente al poder interactuar con una persona de su valía, que es un ejemplo de integridad moral e intelectual y de increíble valor científico. A mi querido Martín Richarte por compartir sus conocimientos científicos conmigo y sus riquísimos y engordadores postres. A Fabiola Arévalo por toda su colaboración y buena onda. A Iván Sánchez por sus increíbles preguntas. Al Dr. Gilberto Kremer, por sus charlas termodinámicas, sus libros, sus apuros por no dejarme pagar ningún almuerzo y por hacerme sentir tan cómoda en mi estancia en Curitiba. Gracias por los paseos con Raquel a Morretes y Antonina y por el barreado. A todos los docentes y ayudantes de esta facultad que nunca me hicieron sentir que era demasiado grande para la tarea. A Marta Pedernera por su calidez y disposición para resolver dudas y problemas. Al Dr. Laciana por haberme ayudado en lo que pudo para que no abandonara la Física y por haberme hecho ver que mi doctorado no era tan imposible. Fuera de la Física, quiero agradecer a mi familia, a mi hermosa e increíble familia, de la que estoy orgullosa. Este esfuerzo intelectual que desemboca en el doctorado es sólo, nada más y nada menos, que la frutillita de la torta que la vida me ha servido. A Hugo, mi exo-esqueleto en el que apoyo el tejido de mi vida, y el amor de siempre con el que conseguí todo lo que quería en ella. A mis hijos que me han hecho crecer y madurar, y cuyo bienestar y felicidad son mi felicidad. Robando palabras ajenas: son los mejores papers de mi vida, Andrés, Nadia, Bruno y Lila, en orden de publicación, pero gemelos en calidad. A Pichi por soportarme y a Sandra por darme el nieto más hermoso del mundo, Martín Andrés. A mis viejos, que me enseñaron a ser.

*A mi adorada familia.*

Imagina dónde estás, en este momento. Imagina quién eres.  
Eres simplemente una cámara oscura cuyo diafragma se abre a la negrura  
de la noche.

URANIA

J.M.G.Le Clézio

# INTRODUCCIÓN

El modelo cosmológico estándar, que describe ajustadamente la evolución de nuestro universo, está basado en el espacio tiempo homogéneo e isótropo de Friedmann, Lemaître, Robertson y Walker (FRW)[1]. Esta isotropía y homogeneidad globales de nuestro universo, invocadas por el Principio Cosmológico y avaladas por una multitud de observaciones astronómicas a distancias mayores a los 100 Mpc, han sido revisadas desde un punto de vista teórico en [2] y las referencias que allí se indican. En ese trabajo se argumenta que si sobre su cono de luz pasado, un observador cómovil con la materia obtiene resultados isotrópicos en sus mediciones de la distribución de la materia, de las velocidades del grueso de las galaxias y cúmulos de galaxias que se alejan de nosotros a través de la expansión universal, de las distancias por diámetro angular, y del efecto de lente gravitacional para los objetos a gran escala como cúmulos galácticos, entonces, el espacio tiempo es isótropo sobre la línea del universo de ese observador. En el mismo trabajo se concluye que sin adoptar la presunción extra del Principio Copernicano, nuestra principal fuente de información, la radiación de microondas del fondo cósmico (CMB) no puede por sí sola decidir sobre la isotropía de la geometría del espacio tiempo. Por otra parte, elegir la isotropía como condición inicial de nuestro universo restringe excesivamente el estudio de los posibles modos de evolución del mismo. Por estos motivos comenzamos esta tesis considerando una métrica más general, conocida como del tipo Bianchi I (BI), que usamos para estudiar modelos de evolución cosmológica en donde la anisotropía inicial se disipa con la expansión del universo terminando en modelos de FRW. En algunos de esos modelos la anisotropía inicial no se disipa, pero en cambio, logran evitar la singularidad inicial conocida como gran explosión, inherente a la métrica FRW, mediante un rebote en el mínimo valor no nulo del factor de escala promedio de la métrica de BI. En otro orden de cosas, resulta que hay consenso generalizado sobre la planitud [3] de nuestro espacio tiempo (Véanse las Figuras 1 y 2), así como también sobre la aceleración o superaceleración del mismo [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13]. Luego, es necesario que la fuente de las ecuaciones de Einstein, considerada como un fluido perfecto, tenga presión negativa y de magnitud tal que permita pasar de universo acelerado a súper acelerado. Entonces elegimos para nuestros modelos de BI un campo escalar denominado K esencia [14], que se usó por primera vez para describir la inflación inicial del universo en FRW, [15]. La falta de teorías físicas concluyentes sobre la naturaleza de la materia oscura, necesaria para compatibilizar la cantidad de materia concordante con la planitud observada de nuestro universo y a la vez, sobre la naturaleza de

la energía oscura que impulsa la aceleración, ha permitido especular con que ambos elementos sean sólo dos aspectos de una misma fuente. Esta especulación ha generado modelos transitorios en los que a tiempos tempranos de la evolución cosmológica, un fluido se comporta como materia oscura permitiendo la aglutinación y formación de estructuras cosmológicas y a tiempos tardíos es responsable de la expansión acelerada. En el Capítulo 2 mostramos en el marco de la métrica FRW, que los modelos de K esencia con funciones cinéticas que admiten una raíz simple identifican una etapa de materia oscura no relativista (polvo), y terminan con comportamientos acelerados en las etapas tardías. Estos modelos tienen un orden de ajuste al comportamiento tipo polvo, superior al de los modelos que exigen un extremo de la función cinética[16].

Los modelos cosmológicos que admiten el cruce de universo acelerado a súper acelerado, comportamiento favorecido por evidencias observacionales [17],[18],[19], han sido modelados con un campo escalar y un campo fantasma, con espinores donde el cambio de signo proviene de la parte negativa del campo de Dirac, y también en el marco de la cosmología de cuerdas, entre otras descripciones. En el Capítulo 3 consideramos una descripción generalizada que incluye a estos modelos, a la que hemos llamado  $N$ -quintom. Consiste en un espacio de vectores de  $N$  dimensiones, cuyas componentes son campos escalares sujetos a una métrica interna constante  $Q_{ik}$  y que están impulsados por un potencial escalar. Esta generalización incluye la descripción de universos superacelerados, de quintaesencia y de universos con singularidades futuras a tiempo finito. Además, extiende el número de modos de generar transformaciones de dualidad [20].

Muchos trabajos han tratado modelos cosmológicos con interacciones, no sólo para explicar la naturaleza de la materia oscura [21] o de la aceleración del universo sino también para tratar de resolver el problema de la igualdad en el orden de magnitud de las componentes oscuras, o problema de la coincidencia cósmica, [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29]. Nuestra propuesta para este tema, descrita en el Capítulo 4, consiste en un universo de FRW, modelado con dos fluidos perfectos interactivos donde introducimos el concepto de quintaesencia exótica para describir la representación escalar de la interacción. Ésta es fijada por medio de un ecuación de estado efectiva satisfecha por uno de los dos fluidos, que queda de ese modo asociado a un potencial exponencial e identificado con la energía oscura. La denominación exótica da cuenta de que la ecuación que satisface no es la de Klein Gordon que caracteriza a una quintaesencia. En este planteo, la ecuación de evolución para el factor de escala, luce como una ecuación de Einstein modificada debido a un término proporcional al factor de Hubble. Hacemos una interpretación

de los tres términos de la ecuación de evolución asociándolos con materia bariónica, con materia oscura y con energía oscura. El modelo nos permite calcular el corrimiento al rojo correspondiente al momento de la transición entre el comportamiento no acelerado y el acelerado de nuestro universo, y la edad probable del mismo. Encontramos la solución exacta del modelo con quintaesencia exótica aún considerando un fluido adicional no interactivo.

Finalmente, indiquemos que entre las distintas formas de interacción descritas en la literatura, algunas están motivadas por consideraciones de la física de partículas de altas energías [22] y otras están construídas de tal modo que el cociente final entre materia y energía oscura sea estable frente a las perturbaciones [24], [25]. Dentro de esta línea, en el Capítulo 5 proponemos un modelo de tres fluidos, uno conservado que representa a la materia bariónica y los otros dos, asociados a materia y energía oscuras que se encuentran en interacción. Describimos allí dos tipos de interacción mediante funciones del cociente entre las densidades de energía de las componentes oscuras y comparamos sus ajustes observacionales.

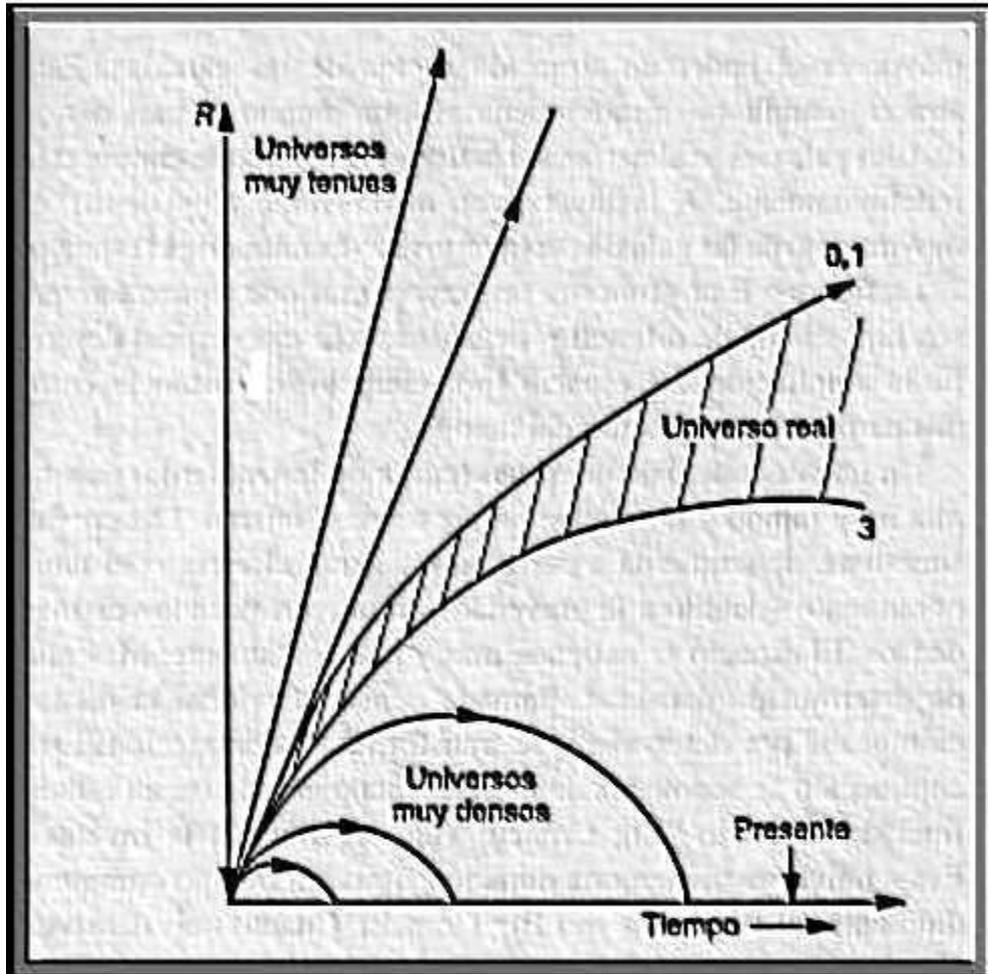


Figura 1: El universo abierto y cerrado. El eje vertical da la distancia entre dos puntos del espacio. Las diferentes curvas describen la expansión en función del tiempo; se refieren a universos hipotéticos de diversas densidades. En un universo con poca materia, estos puntos se alejarían rápidamente (curva de la izquierda). Las curvas que se originan de izquierda a derecha, reflejan el freno gravitatorio ocasionado por un universo cada vez más denso. Las densidades están expresadas en unidades de densidad crítica. Consignemos que la densidad crítica es aquella que es lo suficientemente importante como para que los cuerpos que se han alejado, después de un tiempo, se frenen y regresen unos hacia otros, mientras que la temperatura vuelve a alcanzar los valores del comienzo del Big Bang. A la “Gran Explosión” le sigue entonces una “Gran Implosión”. El área rayada corresponde a los valores compatibles con nuestro Universo plano.

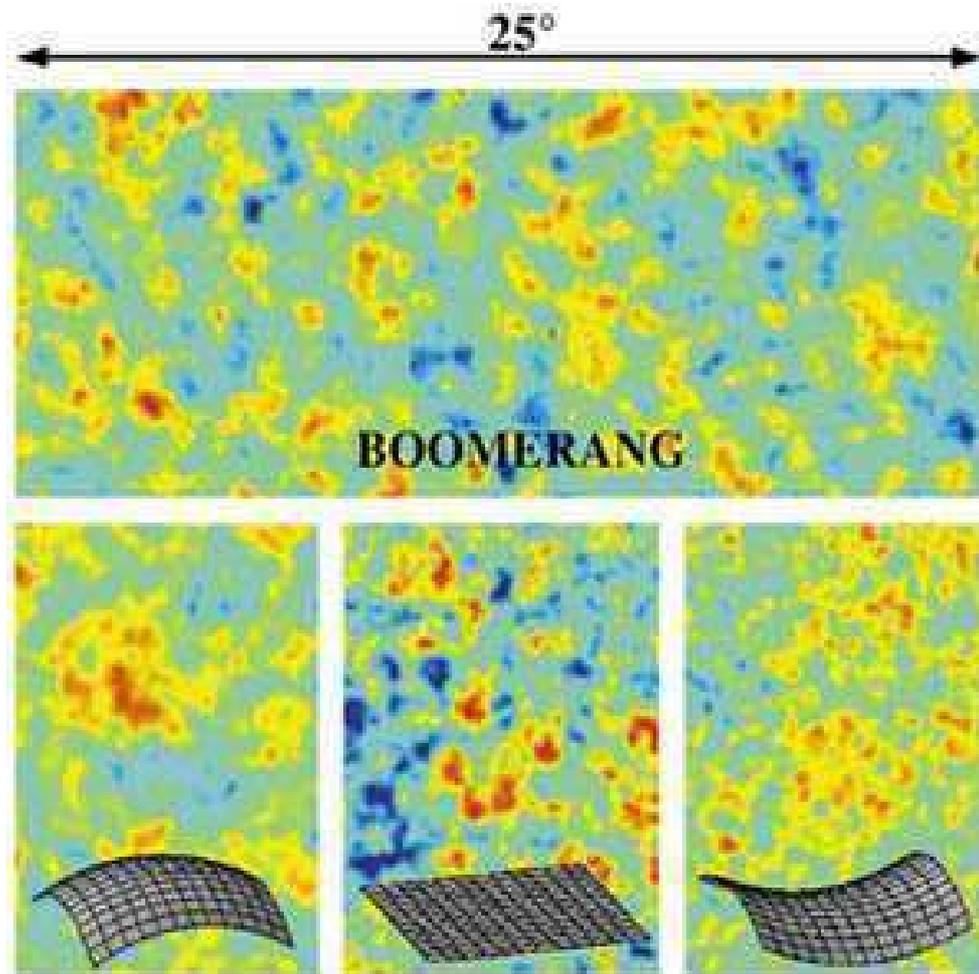


Figura 2: Las imágenes del experimento BOOMERanG permiten determinar la geometría del espacio observando en ellas el tamaño característico de los puntos calientes y fríos. Si nuestro universo tiene una geometría plana, entonces las imágenes de BOOMERanG estarán dominadas por puntos calientes y fríos con tamaños de alrededor de 1 grado (panel inferior central). Por otro lado, si la geometría del espacio es curvo, la curvatura de la luz generada por esta curvatura del espacio distorsiona las imágenes. Si convergen las líneas paralelas porque el universo es cerrado, en promedio se ampliarán las estructuras visibles hasta 1.5 grados (panel izquierdo abajo). En el caso de universo abierto las estructuras en las imágenes aparecerán más pequeñas, de alrededor de 0.5 grados porque las líneas paralelas divergen (panel inferior derecho). La comparación con la imagen BOOMERanG (arriba) indica que el espacio es casi plano. [3]



# Capítulo 1

## Cosmologías BI con K esencia

### 1.1 Introducción

Por el año 1999 Armendáriz-Picón, Damour y Mukhanov [14], presentaron una nueva forma de modelar la inflación del universo temprano [15] a través de lagrangianos con términos cinéticos no necesariamente cuadráticos. Esta inflación estaba dirigida sólo por el término cinético, sin la ayuda de términos de potencial, por lo cual se la conoció como inflación K o inflación cinética. Partía de condiciones iniciales muy generales, desarrollándose lentamente desde una fase inicial de gran curvatura hasta una fase de baja curvatura. Salía de la inflación y terminaba en una era de dominación material ultrarelativista o dominación radiativa. Más adelante el mismo tipo de fluido se aplicó para tratar los temas de la expansión acelerada del universo y de la coincidencia cosmológica, descartando el ajuste fino en las condiciones iniciales o en los parámetros de masa y dejando de lado la necesidad del principio antrópico [30]. Por otra parte, en [2] se identificaron cuatro observables, independientes y suficientes, para determinar exactamente la geometría del espacio tiempo y se estableció que la casi isotropía de las observaciones de la radiación de microondas del fondo cósmico a lo largo de una línea de universo no llevaban por sí mismas a una geometría isotrópica. La posible existencia de fases anisotrópicas y la necesidad de evitar la presunción de condiciones iniciales especiales, implícitas en la elección de la métrica de FRW, nos llevaron al estudio de modelos más generales, como por ejemplo los universos de BI, que incluyen FRW. En ellos hemos encontrado las condiciones bajo las cuales, la anisotropía inicial existente se disipaba con la expansión para que los modelos terminaran asintóticamente en universos FRW.

## 1.2 Ecuaciones de Einstein en BI

En el espacio tiempo de BI, cada una de las tres direcciones espaciales tiene asociado un factor de escala  $a_i$  y el elemento de línea está descrito por

$$ds^2 = g^{ij} dx_i dx_j = dt^2 - \sum_{i=1}^3 a_i^2 dx_i^2, \quad (1.1)$$

En él, las ecuaciones de Einstein para un fluido perfecto de densidad de energía  $\rho$  y presión isotrópica  $p$ , están dadas por (ver Apéndice A, pág.109)[31]

$$3H^2 = \rho + \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (1.2)$$

$$-2\dot{H} = p + \rho + \sigma^2 \quad (1.3)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (1.4)$$

$$\vec{\sigma} \cdot (\dot{\vec{\sigma}} + 3H\vec{\sigma}) = 0 \quad (1.5)$$

donde el vector de la deformación  $\vec{\sigma}$  tiene componentes  $\sigma_i = H_i - H$  y  $H$  es el promedio de las velocidades de expansión individuales  $H_1 = \dot{a}_1/a_1$ ,  $H_2 = \dot{a}_2/a_2$ ,  $H_3 = \dot{a}_3/a_3$ . Esto es

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{3}(H_1 + H_2 + H_3), \quad (1.6)$$

mientras que el factor de escala promedio  $a$  está definido como

$$a = (-g)^{1/6} = (a_1 a_2 a_3)^{1/3}. \quad (1.7)$$

El punto significa siempre derivación respecto del tiempo cosmológico  $t$  y las unidades utilizadas son tales que el valor de la constante gravitacional es fijado por  $8\pi G = 1$  y  $c = 1$ .

La ecuación (1.5) se integra directamente dando  $\vec{\sigma}^2 = \vec{\sigma}_0^2/a^6$  con  $\vec{\sigma}_0$  un vector constante arbitrario y por lo tanto

$$\sigma_i = H_i - H = \frac{\sigma_{i0}}{a^3}. \quad (1.8)$$

De la propia definición de  $\sigma_i$  resulta que las tres constantes  $\sigma_{i0}$  satisfacen que

$$\sigma_{10} + \sigma_{20} + \sigma_{30} = 0 \quad \text{y} \quad \sigma_{10}^2 + \sigma_{20}^2 + \sigma_{30}^2 = \sigma_0^2. \quad (1.9)$$

La ecuación (1.8) puede escribirse como  $\sigma_i = d\ln(a_i/a)/dt = \sigma_{i0}/a^3$  y esto sugiere la definición de una función  $m$  tal que

$$\frac{\dot{m}}{m} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\sigma_0}{a^3}, \quad (1.10)$$

que permite expresar los factores de escala individuales  $a_i$  como

$$a_i = a_{i0} \left( \frac{3\sigma_0^2}{2} \right)^{1/6} \frac{m^{s_i}}{\dot{m}^{1/3}}. \quad (1.11)$$

Las constantes de integración  $a_{i0}$  satisfacen la condición  $a_{10}a_{20}a_{30} = 1$  y el factor  $\sqrt{3/2}$  en (1.10) es tal que los parámetros  $s_i$  satisfacen las restricciones de Kasner para todo fluido perfecto isótropo [32].

$$s_1 + s_2 + s_3 = 1 \quad \text{y} \quad s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1.$$

En este espacio tiempo anisotrópico consideramos una fuente de fluido perfecto isotrópico asociado con un campo de K esencia  $\phi$  y consignamos ante todo, que nuestros modelos fueron deducidos de Lagrangianos factorizables

en la forma  $L = -V(\phi)F(x)$  [33], donde el potencial  $V(\phi)$  es una función definida positiva que sólo depende del campo de K esencia  $\phi$  y  $F(x)$  es una función del término cinético  $x = g^{ik}\phi_i\phi_k$ , con  $\phi_i = \partial\phi/\partial x^i$ . La forma de este Lagrangiano fue sugerida a los autores de [33] por el Lagrangiano de Born-Infeld asociado a taquiones,  $L = -V(\phi)\sqrt{1+x}$ , proveniente a su vez de los cálculos de la teoría límite de cuerdas [34]. Este tipo de Lagrangiano fue encontrado también en la teoría de cuerdas bosónicas abiertas [35] y en la teoría efectiva D-branas [36].

Asociar el tensor de energía momento del campo de K esencia con el de un fluido perfecto, implica que las expresiones de la densidad  $\rho$ , de la presión  $p$  y del índice barotrópico  $\gamma_\phi \equiv 1 + p/\rho$  (que sólo depende del término cinético), son

$$\rho = V(\phi)[F - 2xF_x], \quad (1.12)$$

$$p = -V(\phi)F, \quad (1.13)$$

$$\gamma_\phi = -\frac{2xF_x}{F - 2xF_x}, \quad F_x = dF/dx. \quad (1.14)$$

La dinámica del campo de K esencia en el espacio tiempo de BI es obtenida insertando la densidad de energía (1.12) y la presión (1.13) en las ecuaciones (1.2)-(1.5) y (1.14), que se transforman en

$$3H^2 = V(F - 2xF_x) + \frac{\sigma_0^2}{2a^6}, \quad (1.15)$$

$$-2\dot{H} = -2VxF_x + \frac{\sigma_0^2}{a^6}, \quad (1.16)$$

$$[F_x + 2xF_{xx}]\ddot{\phi} + 3HF_x\dot{\phi} + \frac{V'}{2V}[F - 2xF_x] = 0, \quad (1.17)$$

$$\gamma_\phi = -\frac{2\dot{H} + \sigma_0^2/a^6}{3H^2 - \sigma_0^2/2a^6}. \quad (1.18)$$

Las ecuaciones (1.17) y (1.18) muestran que tanto  $\phi$  como la ecuación de estado del campo de K esencia  $w_\phi = \gamma_\phi - 1$  son sensibles a la evolución de la geometría promedio.

### 1.3 Disipación de la anisotropía

La evidencia observacional sobre la actual homogeneidad a gran escala del universo hace suponer que ha sido altamente isotrópico desde la era de la recombinación. Las observaciones de la radiación de microondas del fondo cósmico revelan que nuestro universo es marcadamente uniforme y eso resulta ser una condición muy especial. La disipación de la anisotropía, en universos que se expanden aceleradamente como el nuestro, podría resolver este problema si el modelo realista con fase inicial anisotrópica tendiera a la isotropía final independientemente de las condiciones iniciales. La investigación sobre este aspecto aumentó desde que se mostró en [37] que la creación de partículas escalares podía disipar la anisotropía de los universos expansivos. Según [38] esa forma de disipación es sólo una de las posibles y otro de los modos que llevan al mismo resultado está relacionado con el índice barotrópico, como veremos que es también nuestro caso. La disipación de anisotropía en un universo de BI es particularmente interesante dado que es el modelo más simple que contiene al universo isotrópico de FRW. Consideraremos modelos con fluidos de K esencia con o sin potencial.

Para estudiar la disipación de la anisotropía inicial debida a la expansión, introducimos una magnitud positiva  $D$ , definida como el cociente entre la contribuciones de la densidad de energía de la deformación  $\sigma^2/2$  y de la densidad de energía del campo de K esencia  $\rho_\phi$ . Entonces, diferenciando  $D = \sigma^2/2\rho_\phi$  con respecto al tiempo cosmológico  $t$  y usando las ecuaciones (1.4)-(1.5) y (1.14), obtenemos la ecuación de evolución para el cociente  $D$

$$\dot{D} + 3H(2 - \gamma_\phi)D = 0. \quad (1.19)$$

Para una cosmología en expansión promedio ( $H > 0$ ), la solución  $D = 0$  de esta última ecuación, es estable asintóticamente toda vez que  $D$  es una cantidad definida positiva y  $\gamma_\phi < 2$ . En este régimen asintótico, el fluido domina con respecto a la deformación.

La condición sobre  $\gamma_\phi$  se puede escribir como una condición sobre las funciones cinéticas  $F$  si se recuerda que  $\rho_\phi = V(\phi)(F - 2xF_x) > 0$  y se observa a

partir de la ecuación(1.18) que  $F \gtrsim xF_x$  cada vez que  $F - 2xF_x \gtrsim 0$ . Por lo tanto, los modelos de K esencia generados por funciones cinéticas  $F$  que satisfacen la condición

$$\frac{F - xF_x}{F - 2xF_x} > 0, \quad (1.20)$$

devienen isotrópicos a tiempos tardíos y la geometría tiende a la de FRW, cualquiera sea el potencial usado.

Por otra parte, usando la misma condición  $\gamma_\phi < 2$  en las ecuaciones (1.14)-(1.16) obtenemos la relación  $\dot{H} + 3H^2 > 0$  la cual, combinada con las ecuaciones (1.2) y (1.3), nos da  $\rho > p$ . Esto quiere decir que los fluidos que satisfacen la condición de energía dominante (CED) disipan la anisotropía inicial sin seleccionar ninguna condición inicial particular.

Por el contrario cuando  $\gamma_\phi > 2$ , la deformación es más importante que la contribución del fluido perfecto, la CED es violada y la magnitud  $D$  crece asintóticamente.

Como ejemplo de estas consideraciones de tipo general veamos los campos taquiónicos extendidos generados en [39] con función cinética

$$F_r^\mp = [1 \mp (-x)^r]^{1/2r}, \quad (1.21)$$

que tienen índice barotrópico  $\gamma_{\phi,r}^\mp = \pm(-x)^r$  y velocidad del sonido en el medio  $c_s^2 = (1 - \gamma_\phi)/(2r - 1)$ .

En las figuras 1.1 y 1.2 mostramos los índices barotrópicos correspondientes a las funciones  $F_r^\mp$  para todos los valores de  $r$ . Por ejemplo, en la figura 1.1, que se ocupa de los valores positivos de  $r$ , se puede ver que los modelos que siempre terminarán isotrópicos corresponden a la función  $F_r^+$  siempre que  $0 < r < 1/2$  (verde) o bien  $r > 1/2$  (rojo). Las otras curvas, pertenecientes a la  $F_r^-$  con  $0 < r < 1/2$  (celeste) o  $r > 1/2$  (amarillo), y ambas ramas con  $r = 1/2$  disiparán la anisotropía siempre y cuando la evolución del campo de K esencia no sea muy rápida, esto es, cuando no estemos demasiado lejos del eje de simetría del dibujo.

En la figura 1.2, que corresponde a los valores negativos de  $r$ , el comportamiento es bastante más diverso. Las ramas  $F_r^+$  con  $r < -1/2$  (verde) y con  $-1/2 < r < 0$  (magenta) culminan siempre en universos isótropos, mientras que las ramas  $F_r^-$  con  $r < -1/2$  (azul) y con  $-1/2 < r < 0$  (naranja) sólo se acomodan a las observaciones actuales si la evolución del campo es lo suficientemente rápida. Esto quiere decir que debemos fijarnos en abscisas del gráfico lo suficientemente alejadas del eje de simetría del mismo. Más notablemente todavía, las ramas con  $r = -1/2$  funcionan adecuadamente si la K esencia disminuye ( $\dot{\phi} < 0$ ) o por el contrario aumenta rápidamente,  $\dot{\phi} > 0$  y grande, (es el caso de  $F_r^-$ , en rojo) o bien, el campo crece o decrece más rápidamente que cierto límite inferior (que es el caso de  $F_r^+$ , líneas en marrón).

Las funciones (1.21) generalizan el campo taquiónico originado por la función cinética  $F_1^-$ , mientras que los modelos generados por  $F_r^+$  representan K esencias con presión negativa y con índice barotrópico negativo identificables con materia fantasma. El conjunto de los campos taquiónicos extendidos (1.21) verifican la condición (1.20) y disipan la anisotropía inicial a lo largo de la evolución del universo en expansión.

Otro caso interesante es provisto por la función cinética polinomial [33]

$$F_{\gamma_p}^{\pm}(x) = \pm(-x)^{\gamma_p/2(\gamma_p-1)}, \quad \gamma_p \neq 1, \quad (1.22)$$

que corresponde al índice barotrópico constante  $\gamma_\phi = \gamma_p$  y a la densidad de energía  $\rho_\phi \propto 1/a^{3\gamma_p}$ , generalizando los fluidos perfectos. El conjunto de fluidos con  $\gamma_p < 2$  satisface la condición (1.20) y los modelos cosmológicos generados por  $F_{\gamma_p}^{\pm}$  tienen la etapa final isotrópica.

## 1.4 Universos rebotantes

Consideremos ahora el problema de las singularidades que pueden surgir en las etapas finales de un universo en contracción. Para un universo lleno de materia que obedece las condiciones de energía, se espera una singularidad como consecuencia de la contracción. Sin embargo, los campos clásicos escalares podrían violar esas condiciones de energía evitando la singularidad final a través de un rebote regular, o sea  $a(t_{rebote}) > 0$ .

Diferentes ejemplos de modelos cosmológicos libres de singularidades, con mínimo no nulo del factor de escala promedio, fueron considerados en [40]-

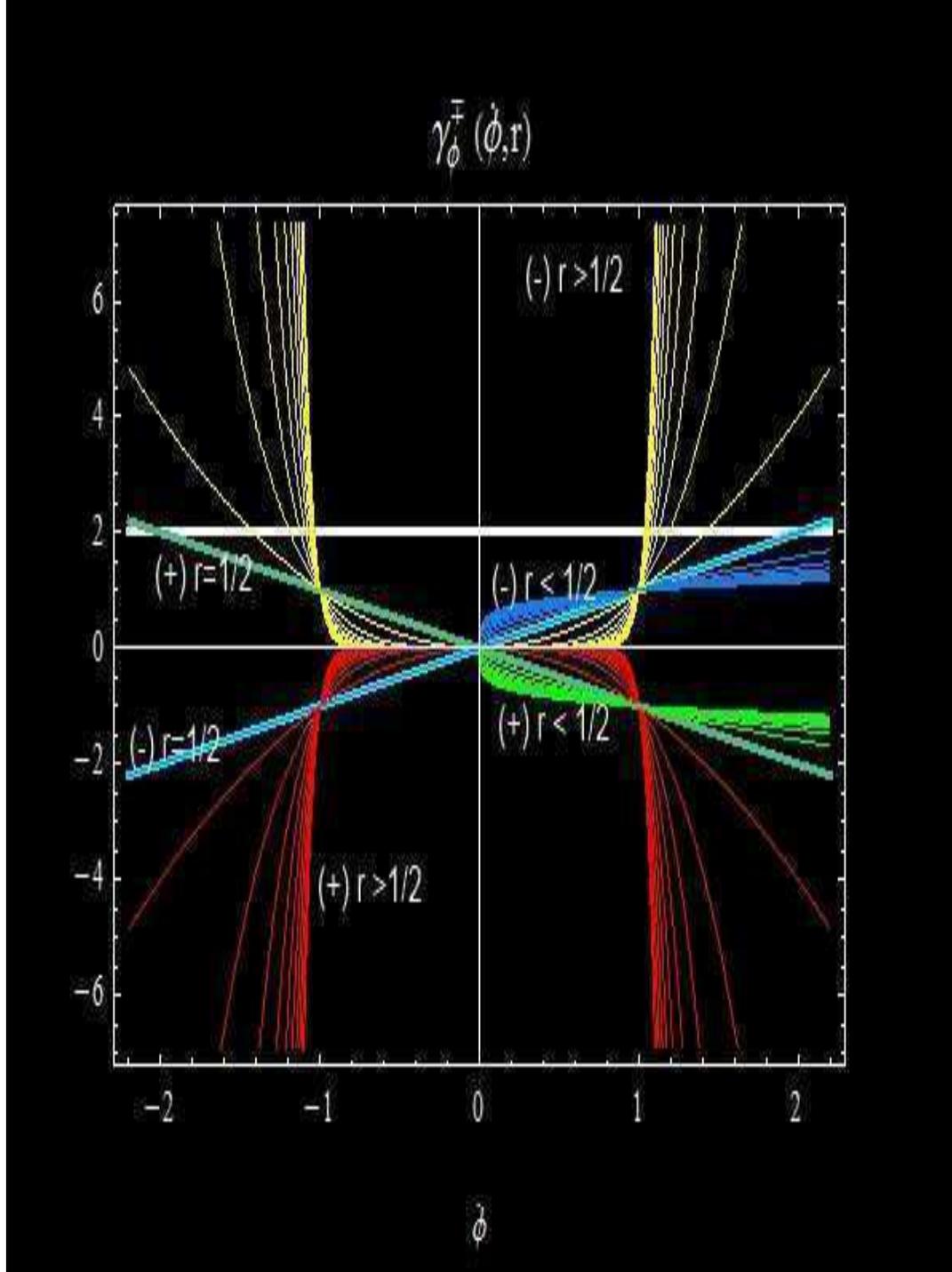


Figura 1.1: Índices barotrópicos  $\gamma_{\phi,r}^{\mp} = \pm(-x)^r$  para las K esencias que representan campos taquiónicos extendidos asociados con las funciones  $F_r^{\mp} = [1 \mp (-x)^r]^{1/2r}$ . Las curvas en amarillo corresponden a las  $F_r^-$  para  $r > 1/2$  que están bien definidas para todos los valores de  $\dot{\phi}$  del mismo modo que las curvas en rojo exhiben las originadas con  $F_r^+$  para  $r > 1/2$ . Las curvas de color celeste (-) y de color verde (+) corresponden a  $0 < r < 1/2$  y sólo están bien definidas para K esencias crecientes. Se grafican además las dos rectas con  $r = 1/2$  y se puede comparar todo el conjunto con el valor límite para obtener la disipación de la anisotropía  $\gamma_{\phi} = 2$ .

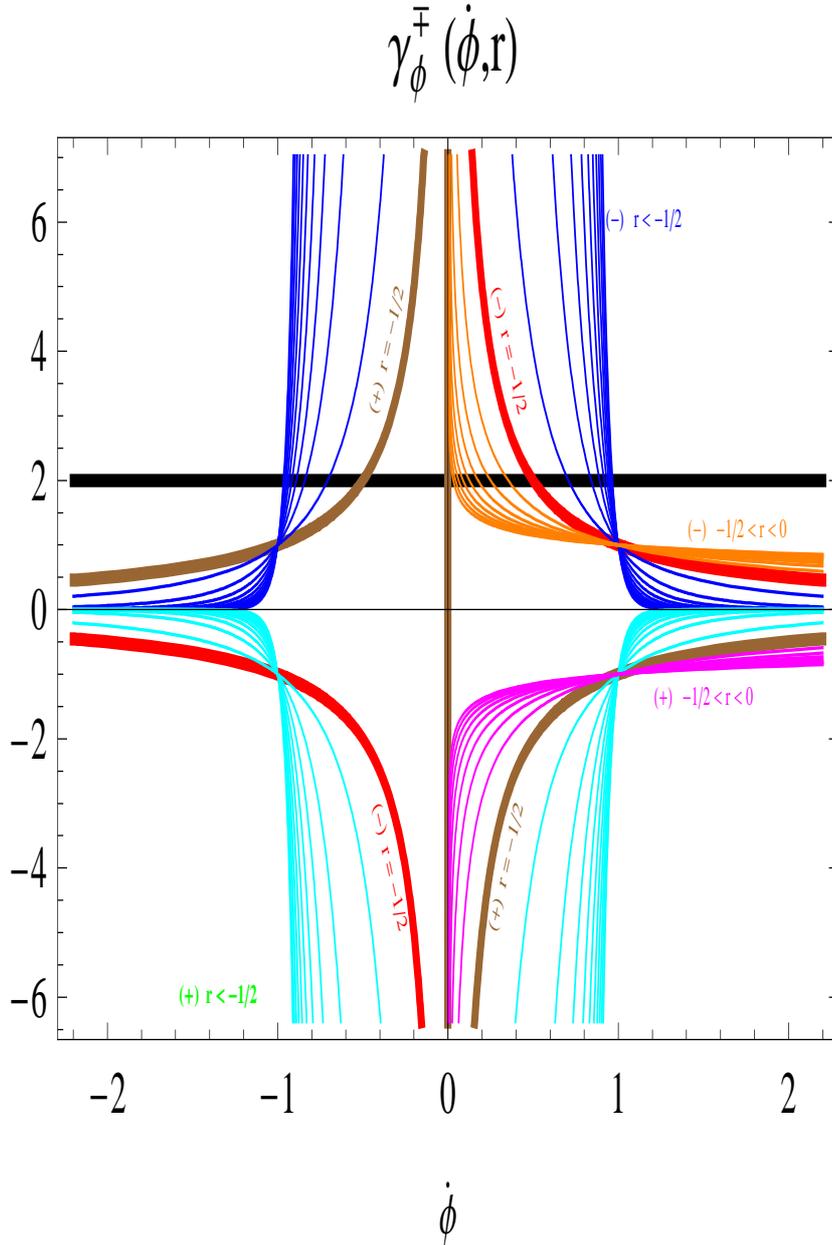


Figura 1.2: Índices barotrópicos  $\gamma_{\phi,r}^{\mp} = \pm(-x)^r$  para las  $K$  esencias que representan campos taquiónicos extendidos asociados con las funciones  $F_r^{\mp} = [1 \mp (-x)^r]^{1/2r}$  para valores negativos de  $r$ . Las curvas en azul corresponden a las  $F_r^-$  para  $r < -1/2$  que están bien definidas para todos los valores de  $\dot{\phi}$  del mismo modo que las curvas en verde exhiben las originadas con  $F_r^+$  para  $r < -1/2$ . Las curvas de color naranja (-) y de color magenta (+) corresponden a  $-1/2 < r < 0$  y sólo están bien definidas para  $K$  esencias crecientes. Se grafican además las dos rectas con  $r = -1/2$  y se puede comparar todo el conjunto con el valor límite para obtener la disipación de la anisotropía  $\gamma_{\phi} = 2$ .

[41], por lo que pareció razonable profundizar en este problema considerando su estudio en modelos cosmológicos con fuentes de K esencia.

Para un espacio tiempo de BI ocurre un rebote promedio en un cierto instante  $t = t_0$ , cuando se anula la velocidad de expansión promedio  $H(t_0) = 0$ , el factor de escala promedio es estacionario  $\dot{a}(t_0) = 0$  y  $a(t_0) \neq 0$  [42]. Por ello deducimos de la ecuación (1.15) que la densidad de energía del campo de K esencia es negativa durante un intervalo de tiempo finito alrededor de  $t_0$  y en  $t_0$  satisface la condición

$$V(F - 2xF_x) = -\frac{\sigma^2}{2}. \quad (1.23)$$

El factor de escala promedio tiene un mínimo en el rebote con lo cual  $\ddot{a}(t_0) > 0$  y  $\dot{H}(t_0) > 0$ . Entonces, de las ecuaciones (1.16) y (1.23), se obtiene

$$VF > \frac{\sigma^2}{2}. \quad (1.24)$$

Las restricciones sobre la densidad de energía y sobre la presión del campo de K esencia, expresadas en las ecuaciones (1.23) y (1.24), dan el límite inferior  $\gamma_\phi > 2$  y

$$F > 0, \quad F_x < 0, \quad (1.25)$$

$$xF_x < F < 2xF_x. \quad (1.26)$$

Las condiciones (1.25) y (1.26) son satisfechas por la rama  $F_{\gamma_p}^+$  en (1.22) con  $\gamma_p > 2$ .

En la sección siguiente encontraremos la solución general de las ecuaciones(1.15)-(1.17) para las dos ramas (1.22) y mostraremos que la rama  $F_{\gamma_p}^+$  genera un factor de escala promedio con comportamiento oscilatorio. La existencia de un rebote promedio, definido por las condiciones  $H = 0$  y  $\dot{H} > 0$ , está ligada a fluidos perfectos con  $\gamma_\phi > 2$ . Esta condición es un problema que superamos dentro del marco de la K esencia. Sin embargo, notamos que en el rebote promedio la relación entre la densidad de energía de la deformación

y la densidad de energía del campo de K esencia se mantiene constante en el valor  $D = -1$ . En estos casos, podemos alcanzar un rebote cosmológico evitando la singularidad final por contracción, pero queda una anisotropía residual y la magnitud  $D$  se vuelve inestable.

Las condiciones sobre la energía son restricciones invariantes de coordenadas que se aplican a los tensores de energía-momento para eliminar arbitrariedades en sus definiciones que provoquen que la fuente descrita por ellos sea físicamente irreal [43],[44]. En particular, cuando el tensor elegido representa un fluido perfecto, como ocurre en este caso, la CED se traduce en la expresión  $\rho_\phi \geq |p_\phi|$ . Vemos entonces que la incompatibilidad entre disipación de la anisotropía y rebote promedio es debida al requisito  $\gamma_p > 2$ . El rebote promedio existe si la densidad de energía y por lo tanto  $D$ , pueden volverse negativas y satisfacer (1.23).

## 1.5 K esencias cinéticas

Aquí consideramos un potencial constante  $V = V_0$  e investigamos en un fondo BI las cosmologías que llamaremos puramente cinéticas. Como ejemplos de esta clase tenemos: a) el gas generalizado de Chaplygin, derivado de un Lagrangiano que contiene términos de energía cinética no estándares y que fue propuesto como materia oscura unificada, y b) los gases de Chaplygin modificados y extendidos que fueron sugeridos como alternativas a ese modelo [39].

Para un potencial constante  $V = V_0$ , la ecuación de conservación para el campo de K esencia (1.17), se reduce a la expresión

$$(F_x + 2xF_{xx})\ddot{\phi} + 3HF_x\dot{\phi} = 0, \quad (1.27)$$

que vamos a integrar en forma directa. Consideremos la magnitud  $u \equiv \gamma_\phi/\dot{\phi}$  y tomemos su derivada temporal teniendo en cuenta que  $u = 2\sqrt{-x}F_x/[F - 2xF_x]$  y  $\dot{x} = -2\dot{\phi}\ddot{\phi}$ .

Esto nos conduce a la expresión  $\dot{u} + 3H(1 - \gamma_\phi)u = 0$ , o sea

$$\left(\frac{\gamma_\phi}{\dot{\phi}}\right)' + 3H\left(\frac{\gamma_\phi}{\dot{\phi}}\right)(1 - \gamma_\phi) = 0. \quad (1.28)$$

Por ser  $V = V_0$  una constante,  $d \ln \rho / dt = d \ln [F - 2xF_x] / dt = \dot{\phi} [F_x + 2xF_{xx}] \ddot{\phi} / [F - 2xF_x] = -3H\gamma_\phi$ , usando (1.27). Todos estos pasos se resumen en  $d \ln (ua^3\rho) / dt = 0$ , que considerando la expresión (1.2) y la definición de  $u$  nos da la primera integral general

$$\left( \frac{\gamma_\phi}{\dot{\phi}} \right) = \frac{c}{a^3(3H^2 - \sigma_0^2/2a^6)}, \quad (1.29)$$

para cualquier función  $F$  y cualquier constante de integración  $c$ .

Usando la última expresión de (1.18) para  $\gamma_\phi$  en la ecuación (1.29) y reordenando, ésta se transforma en

$$\dot{\phi} = -\frac{a^3}{c} \left( 2\dot{H} + \frac{\sigma_0^2}{a^6} \right) = \frac{a^3}{c} \gamma_\phi \rho_\phi, \quad (1.30)$$

o

$$a^3 \dot{\phi} F_x = \frac{c}{2V_0}, \quad (1.31)$$

después de reemplazar  $\gamma_\phi \rho_\phi = 2V_0 \dot{\phi}^2 F_x$ .

El problema original se ha simplificado considerablemente puesto que le hemos bajado el orden a la ecuación de Klein Gordon para la K esencia y ahora trabajamos con dos ecuaciones diferenciales de primer orden con respecto al tiempo, (1.2) y (1.31).

A partir de las ecuaciones (1.14), (1.30) y (1.31), el índice barotrópico  $\gamma_\phi$  asociado con esta K esencia puramente cinética resulta ser

$$\gamma_\phi = \left( 1 + \frac{2V_0^2 \sigma_0^2 F F_x}{c^2 \sigma^2} \right)^{-1}. \quad (1.32)$$

El resultado (1.32) aplicado a modelos de universos en expansión, generados por el conjunto de funciones cinéticas que satisfacen la condición  $FF_x/\sigma^2 \ll 1$  a tiempos primordiales permite deducir un comportamiento general de los mismos. Por ejemplo, que en promedio parecen estar dominados por materia

no relativista en las primeras etapas, esto es,  $\gamma_\phi \approx 1$ ,  $p_\phi \approx 0$  y  $\rho_\phi \approx a^{-3}$ . Además, que disipan la anisotropía inicial pues  $\gamma_\phi < 2$  y que terminan en un escenario de expansión acelerada. Estos modelos transitorios se asemejan a los modelos cuyas fuentes son gases de Chaplygin generalizados, modificados y extendidos, esto es, interpolan entre materia oscura en épocas tempranas y energía oscura a tiempos tardíos.

## 1.6 Soluciones que asintóticamente son del tipo ley de potencias

Vamos a explorar las soluciones del factor de escala promedio que tienen la forma de una ley de potencias del tiempo cosmológico  $t$ ,  $a(t) \sim t^n$ , porque aportan descripciones del modelo altamente valoradas por su simplicidad y corresponden a las situaciones en las que a su vez, el factor de Hubble se expresa como una función del factor de escala, en particular  $H(a) \sim a^{1/n}$ .

Así como en las cosmologías FRW con  $K$  esencias existen dos formas distintas de obtener soluciones de este tipo para el factor de escala, también sucede lo propio para el factor de escala promedio en el fondo anisotrópico BI.

En la primera forma, el campo de  $K$  esencia depende linealmente del tiempo cosmológico  $t$ , esto es  $\phi = \phi_0 t$ , y por lo tanto  $x = -\dot{\phi}^2 = -\phi_0^2 = x_0$  es una constante. Ello significa que  $F(x_0) \equiv f$  y  $F_x(x_0) \equiv f'$  son constantes para cualquier función  $F$ , mientras que el potencial resulta ser de la forma  $V = V_0/\phi^2$ . Este caso no produce soluciones aceleradas porque el único exponente compatible de  $t$  en estas condiciones es  $n = 1/3$  y entonces  $\ddot{a}/a = -2/(3t)^2 < 0$ .

Un análisis un poco más detallado nos dice que las ecuaciones de Einstein, (1.15)-(1.17) se escriben

$$3H^2 = \frac{V_l f}{1 - \gamma_l} + \frac{\sigma_0^2}{2a^6}, \quad (1.33)$$

$$-2\dot{H} = 2V_l \phi_0^2 f' + \frac{\sigma_0^2}{a^6}, \quad (1.34)$$

$$3\gamma_l H + \frac{V_l'}{V_l} \phi_0 = 0, \quad (1.35)$$

donde hemos usado el índice barotrópico (1.14) calculado para el campo de K esencia lineal,

$$\gamma_l = \frac{2\phi_0^2 f'}{f + 2\phi_0^2 f'}. \quad (1.36)$$

Como aquí  $\dot{\phi} = \phi_0$  es una constante, multiplicamos por ella la ecuación (1.35) y se obtiene la diferencial exacta  $d \ln(a^{3\gamma_l \phi_0} V_l^{\phi_0})/dt = 0$ . Integramos la misma y obtenemos

$$\rho_{\phi_l} = \frac{V_l f}{1 - \gamma_l} = \frac{\lambda_l}{a^{3\gamma_l}}, \quad (1.37)$$

donde,  $\lambda_l$  es otra constante de integración. Por lo tanto para el caso lineal, escribimos la ecuación (1.33) como

$$3H^2 = \frac{\lambda_l}{a^{3\gamma_l}} + \frac{\sigma_0^2}{2a^6}. \quad (1.38)$$

En la segunda forma, se impone que el índice sea una constante, esto es  $\gamma_\phi \equiv \gamma_p$ , de modo que la ecuación (1.14) se transforma en la ecuación diferencial  $2(-x)F_x(\gamma_p - 1) + \gamma_p F = 0$  para  $F$ , cuyas soluciones están dadas por las funciones polinomiales (1.22). En este segundo caso, integramos la ecuación de conservación obteniendo una restricción que vincula el potencial  $V_p$  con  $F_{\gamma_p}^\pm$  y con el factor de escala promedio mediante la expresión

$$\rho_{\phi_p} = \frac{V_{\gamma_p} F_{\gamma_p}^\pm}{1 - \gamma_p} = \frac{\lambda_p}{a^{3\gamma_p}}, \quad (1.39)$$

donde  $\lambda_p$  es una constante de integración.

Para esas funciones  $F_{\gamma_p}^\pm$  obtenemos la dinámica del factor de escala promedio insertando la densidad de energía (1.39) dentro de la ecuación (1.15), de modo que

1.6. SOLUCIONES QUE ASINTÓTICAMENTE SON DEL TIPO LEY DE POTENCIAS 15

$$3H^2 = \frac{\lambda_p}{a^{3\gamma_p}} + \frac{\sigma_0^2}{2a^6}. \quad (1.40)$$

Aquí resolvemos exactamente las ecuaciones (1.38) y (1.40) con ayuda del cambio de variable  $v = a^3 = \sqrt{-g}$  que las transforma en

$$v'^2 = 1 + \frac{2\lambda}{\sigma_0^2} v^{2-\gamma}, \quad (1.41)$$

donde la prima indica diferenciación con respecto a un tiempo adimensional  $T = \sqrt{3/2}\sigma_0 t$  y  $(\lambda, \gamma) = (\lambda_l, \gamma_l)$  o  $(\lambda_p, \gamma_p)$  respectivamente.

La solución general de la ecuación (1.41) para el factor de escala promedio depende del signo de la constante de integración  $\lambda$ , siendo de tipo hiperbólica para  $\lambda > 0$  y de tipo oscilatorio si  $\lambda < 0$ . Para cada clase de soluciones de dicho factor de escala promedio resolvemos la ecuación (1.10) para obtener la función  $m$  correspondiente al caso y con ella los factores de escala según las tres direcciones espaciales.

Existen tres tipos de soluciones:

1.  $\gamma = 2$

$$a^3 = \sqrt{3 \left( \lambda + \frac{\sigma_0^2}{2} \right)} t, \quad (1.42)$$

$$a_i = a_{0i} \left[ 3 \left( \lambda + \frac{\sigma_0^2}{2} \right) \right]^{1/6} t^{1/3 + (s_i - 1/3) / \sqrt{1 + 2\lambda/\sigma_0^2}} \quad (1.43)$$

2.  $\lambda > 0$

$$a^{3(2-\gamma)} = \frac{\sigma_0^2}{2\lambda} \sinh^2 \tau, \quad t = t_0^+ \int (\sinh \tau)^{\gamma/(2-\gamma)} d\tau, \quad (1.44)$$

$$a_i = a_{0i} \left( \frac{2\sigma_0^2}{\lambda} \right)^{1/3(2-\gamma)} \left[ \cosh \frac{\tau}{2} \right]^{4/3(2-\gamma)} \left[ \tanh \frac{\tau}{2} \right]^{2s_i/(2-\gamma)} \quad (1.45)$$

3.  $\lambda < 0$

$$a^{3(2-\gamma)} = \frac{\sigma_0^2}{-2\lambda} \sin^2 \tau, \quad t = t_0^- \int (\sin \tau)^{\gamma/(2-\gamma)} d\tau, \quad (1.46)$$

$$a_i = a_{0i} \left( \frac{2\sigma_0^2}{-\lambda} \right)^{1/3(2-\gamma)} \left[ \cos \frac{\tau}{2} \right]^{4/3(2-\gamma)} \left[ \tan \frac{\tau}{2} \right]^{2s_i/(2-\gamma)} \quad (1.47)$$

donde  $t_0^\pm = 2^{3/2} (\pm \sigma_0^2 / 2\lambda)^{1/(2-\gamma)} [\sqrt{3}\sigma_0(2-\gamma)]^{-1}$ .

A partir de la ecuación (1.38), expresamos el campo de K esencia lineal como una función del factor de escala promedio

$$\phi_l = \frac{\sqrt{6} \phi_0}{\sigma_0} \int \frac{a^2 da}{\sqrt{1 + 2\lambda_l a^{3(2-\gamma)} / \sigma_0^2}}. \quad (1.48)$$

Además, para  $0 < \gamma_l < 2$ , la ecuación (1.44) muestra que  $t$  y  $\tau$  tienen los mismos límites asintóticos. En este caso, esta última ecuación (1.48) es apropiada para investigar la relación entre  $\phi_l$  and  $V_l$  en los dos regímenes asintóticos.

En el primer régimen,  $a^{3(2-\gamma)} < \sigma_0^2 / 2\lambda$ , la deformación predomina sobre la acción del fluido perfecto y  $\phi_l \propto a^3$ . Entonces, (según muestra la ecuación (1.37)) el potencial se transforma en  $V_l \propto \phi^{-\gamma_l}$  y cualitativamente, el universo corresponde a un escenario de Kasner.

En el segundo régimen, que comienza a partir de algún tiempo característico donde  $a^{3(2-\gamma)} > \sigma_0^2 / 2\lambda$ , la acción del fluido se hace dominante y  $\phi \propto a^{3\gamma_l/2}$ . Esto lleva asintóticamente a un potencial de cuadrado inverso  $V_l \propto \phi^{-2}$  y obedeciendo a la isotropía espacial del tensor de energía esfuerzo, el modelo

anisotrópico de BI evoluciona hacia una cosmología de FRW. La anisotropía de este modelo se disipa a medida que el universo se expande.

En el caso de la función polinomial, el factor de escala tiende asintóticamente a una solución del tipo ley de potencias. En particular, para  $\gamma_p = 2$ , conocido como fluido duro, obtenemos el factor de escala (1.42)). Como contraste para un espacio tiempo FRW, el mismo modelo resulta en soluciones exactas con forma de ley de potencias, a todo tiempo. Usando las ecuaciones (1.22), (1.39), (1.42), (1.44) y (1.46), encontramos las siguientes relaciones entre  $V_{\gamma_p}$  y el tiempo  $\tau$

$$\int d\phi V_{\gamma_p}^{(\gamma_p-1)/\gamma_p} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sigma_o}{\lambda_p(2-\gamma_p)} |\lambda_p(1-\gamma_p)|^{(\gamma_p-1)/\gamma_p} \zeta(\tau), \quad \gamma_p \neq 2, \quad (1.49)$$

$$\int d\phi \sqrt{V_{\gamma_p}} = \frac{1}{\sqrt{|-3(1+\sigma_0^2/2\lambda_p)|}} \ln t, \quad \gamma_p = 2, \quad (1.50)$$

donde  $\zeta(\tau) = \cosh \tau$  para  $\lambda_p > 0$  o bien  $\zeta(\tau) = \cos \tau$  para  $\lambda_p < 0$ . Para modelos de K esencias puramente cinéticas,  $\phi$  resulta proporcional a  $\zeta(\tau)$ , o a  $\ln t$  de acuerdo a si  $\gamma_p \neq 2$  o  $\gamma_p = 2$ .

## 1.7 El potencial cuadrático inverso

Para el potencial cuadrático inverso, la ecuación del campo de K esencia tiene primera integral cualquiera sea la función cinética F. Para mostrarlo usamos las ecuaciones (1.12) y (1.14) y reescribimos el campo de K esencia de la ecuación (1.17) como

$$\left(\frac{\gamma_\phi}{\dot{\phi}}\right)' + 3H \left(\frac{\gamma_\phi}{\dot{\phi}}\right) (1 - \gamma_\phi) + \frac{V'}{V} (1 - \gamma_\phi) = 0, \quad (1.51)$$

donde  $V' = dV/d\phi$ . Sustituyendo en la última ecuación

$$\gamma_\phi = -\frac{\dot{V}}{V} \left( \frac{H}{\rho_\phi} + L \right), \quad (1.52)$$

para una función arbitraria  $L$  y usando las ecuaciones (1.14)-(1.16), llegamos a la expresión

$$\dot{L} + 3HL(1 - \gamma_\phi) + \left[ \frac{1}{2} + \left( \frac{V}{V'} \right)' \right] \gamma_\phi = 0. \quad (1.53)$$

Para el potencial cuadrático inverso

$$V = V_0/\phi^2, \quad (1.54)$$

el tercer término de (1.53) se anula y se produce una separación entre las partes que dependen de la geometría y las que dependen del campo. La (1.53) queda reducida a una ecuación diferencial con cantidades geométricas cuya solución general es

$$L = -\frac{3c}{2a^3} \left( 3H^2 - \frac{\sigma_0^2}{2a^6} \right)^{-1}, \quad (1.55)$$

donde  $c$  es una constante de integración y hemos usado la definición (1.18) de  $\gamma_\phi$ .

Finalmente, escribimos la primera integral del campo de K esencia, ecuaciones (1.17) o (1.51), de tres modos diferentes como

$$\left( \frac{\dot{\gamma}_\phi}{\dot{\phi}} \right) \phi = \frac{H^2}{(3H^2 - \sigma_0^2/2a^6)} \left( \frac{2}{H} + \frac{3c}{a^3 H^2} \right), \quad (1.56)$$

$$\dot{\phi} F_x - \left( H + \frac{3c}{2a^3} \right) \frac{\phi}{V_0} = 0, \quad (1.57)$$

$$-V_0 F_x \left( \dot{H} + \frac{\sigma_0^2}{2a^6} \right) = \left( H + \frac{3c}{2a^3} \right)^2, \quad (1.58)$$

de manera que la ecuación de conservación del campo de K esencia impulsado por (1.54), para cualquier función  $F$ , deviene una ecuación diferencial de primer orden para el campo.

### 1.7.1 K esencia con función cinética lineal y potencial cuadrático inverso

En [39] se ha demostrado que en un espacio tiempo de FRW, las K esencias impulsadas por un potencial cuadrático inverso y generadas por una función  $F = 1 + mx$ , para  $m$  constante, son cinemáticamente equivalentes a quintaesencias impulsadas por un potencial exponencial, lo cual significa que comparten el mismo factor de escala. Vamos a verificar que este resultado de la cosmología FRW se reobtiene en BI.

Cuando ponemos  $F = 1 + mx$  en la ecuación (1.58), obtenemos para el factor de escala promedio la ecuación

$$s'' + s^\alpha s' + \left( \frac{1}{4} + \frac{mV_0\sigma_0^2}{18c^2} \right) s^{2\alpha+1} = 0, \quad (1.59)$$

donde hicimos uso de las nuevas variables  $s$  y  $\xi$  definidas por

$$s = a^{-3/\alpha}, \quad \xi = \frac{3ct}{mV_0}, \quad (1.60)$$

con  $\alpha = -3mV_0$ . La ecuación (1.59) es un caso particular de una ecuación más general investigada y resuelta en [45](ver Apéndice B, pág.113). Siguiendo esta referencia, introducimos el cambio de variables

$$z = \frac{s^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \alpha \neq -1, \quad (1.61)$$

$$z = \ln s, \quad \alpha = -1, \quad (1.62)$$

$$\eta = \int s^\alpha d\xi, \quad (1.63)$$

en la ecuación (1.59), que se transforma en dos ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, una para  $\alpha \neq -1$  y la otra para  $\alpha = -1$ .

$$\frac{d^2 z}{d\eta^2} + \frac{dz}{d\eta} + (\alpha + 1) \left( \frac{1}{4} - \frac{\alpha \sigma_0^2}{54c^2} \right) z = 0, \quad \alpha \neq -1, \quad (1.64)$$

$$\frac{d^2 z}{d\eta^2} + \frac{dz}{d\eta} + \left( \frac{1}{4} + \frac{\sigma_0^2}{54c^2} \right) z = 0, \quad \alpha = -1, \quad (1.65)$$

Las soluciones implícitas son:

1.  $\alpha > 0$

$$a(\eta) = \left[ \sqrt{B} e^{-\eta/2} \sin(\sqrt{\mu} \eta + \eta_0) \right]^{-\alpha/3(\alpha+1)}, \quad (1.66)$$

$$a_i = a_{0i} \frac{e^{-(\beta + \sigma_0 \alpha s_i / \sqrt{6} c) \eta / 3}}{\left[ \sqrt{B} \sin(\sqrt{\mu} \eta + \eta_0) \right]^{\alpha/3(\alpha+1)}}. \quad (1.67)$$

2.  $-1 < \alpha < 0$

$$a(\eta) = \left[ \sqrt{B} e^{-\eta/2} \cosh(\sqrt{-\mu} \eta + \eta_0) \right]^{-\alpha/3(\alpha+1)}, \quad (1.68)$$

$$a_i = a_{0i} \frac{e^{-(\beta + \sigma_0 \alpha s_i / \sqrt{6} c) \eta / 3}}{\left[ \sqrt{B} \cosh(\sqrt{-\mu} \eta + \eta_0) \right]^{\alpha/3(\alpha+1)}}. \quad (1.69)$$

3.  $\alpha = -1$

$$a(t) = a_0 e^{-(1/2 + \sigma_0^2/27c^2)\eta/6 + V_0 e^{-\eta}/81\phi_0^2 c^2}, \quad (1.70)$$

$$a_i = a_{0i} a_0 e^{-((1/2 + \sigma_0/3\sqrt{6}c)^2 + \sigma_0 s_i/\sqrt{6}c)\eta/3 + V_0 e^{-\eta}/81\phi_0^2 c^2}. \quad (1.71)$$

4.  $\alpha < -1$

$$a(\eta) = \left[ \sqrt{-B} e^{-\eta/2} \sinh(\sqrt{-\mu} \eta + \eta_0) \right]^{-\alpha/3(\alpha+1)}, \quad (1.72)$$

$$a_i = a_{0i} \frac{e^{-(\beta + \sigma_0 \alpha s_i/\sqrt{6}c)\eta/3}}{\left[ \sqrt{-B} \sinh(\sqrt{-\mu} \eta + \eta_0) \right]^{\alpha/3(\alpha+1)}}, \quad (1.73)$$

donde  $a_{01} a_{02} a_{03} = 1$  y

$$\mu = \frac{\alpha}{2} \left[ \frac{1}{2} - \frac{\sigma_0^2}{27c^2} (\alpha + 1) \right], \quad (1.74)$$

$$B = \frac{4(\alpha + 1)V_0}{\phi_0^2 [27c^2 - 2(\alpha + 1)\sigma_0^2]}, \quad (1.75)$$

$$\beta = -\alpha \left[ \frac{1}{2(\alpha + 1)} + \frac{\sigma_0}{3\sqrt{6}c} \right]. \quad (1.76)$$

En la Figura. 1.3 se muestran los factores de escala promedios correspondientes a los distintos valores posibles de  $\alpha$ . Todas las curvas corresponden a universos con aceleración no nula:  $0 < \alpha$  (negro) describe universos que experimentan un rebote regular (mínimo) para cierto valor finito no nulo del factor de escala;  $-1 < \alpha < 0$  (verde) produce universos acelerados en expansión mientras que  $\alpha < -1$  (naranja) da universos expansivos que son

desacelerados ( $\ddot{a} < 0$ ) en los primeros tiempos para luego acelerarse. Finalmente el caso  $\alpha = -1$  (amarillo) describe universos en contracción.

En las expresiones anteriores, hemos usado la función  $\phi$  obtenida por integración de la ecuación (1.57) que se muestra en la Figura 1.4 para las distintas formas funcionales de  $a(\eta)$ .

$$\phi = \phi_0 a^{-3/\alpha} e^{\eta/2}. \quad (1.77)$$

### 1.7.2 Quintaesencia con potencial exponencial

Ahora, consideramos un modelo cosmológico de BI con un campo de quintaesencia  $\varphi$ , que está impulsado por el potencial  $U(\varphi)$  y tiene densidad de energía  $\rho_\varphi$  y presión  $p_\varphi$  dadas por

$$\rho_\varphi = \frac{q}{2} \dot{\varphi}^2 + U(\varphi), \quad p_\varphi = \frac{q}{2} \dot{\varphi}^2 - U(\varphi), \quad (1.78)$$

donde  $q$  es una constante. Para  $q < 0$  tenemos un campo fantasma mientras que para  $q > 0$  se tiene el campo escalar. Las ecuaciones de Einstein (1.2)-(1.5) ahora se escriben

$$3H^2 = \frac{q}{2} \dot{\varphi}^2 + U(\varphi) + \frac{\sigma_0^2}{2a^6}, \quad (1.79)$$

$$-2\dot{H} = q\dot{\varphi}^2 + \frac{\sigma_0^2}{a^6}, \quad (1.80)$$

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{dU}{d\varphi} = 0. \quad (1.81)$$

Cuando el campo de quintaesencia  $\varphi$  está impulsado por un potencial de tipo exponencial como

$$U = U_0 e^{-qA\varphi}, \quad (1.82)$$

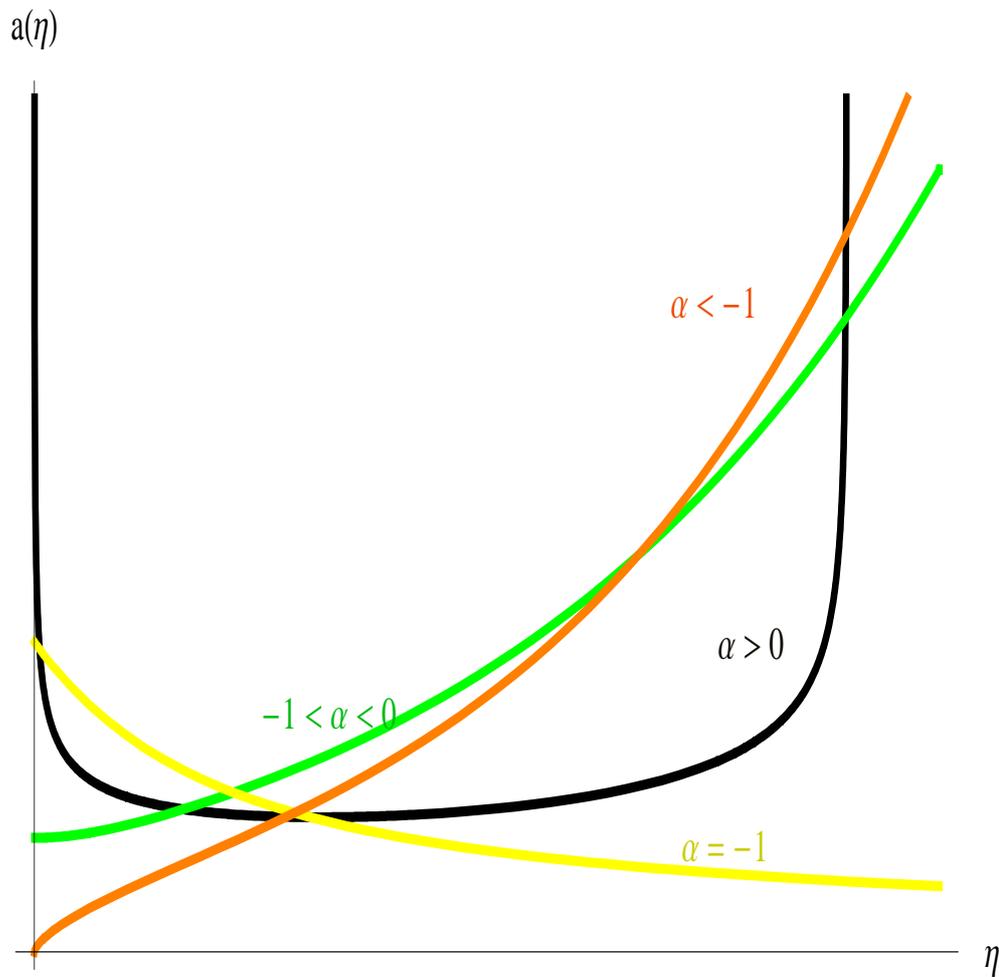


Figura 1.3: Factor de escala  $a(\eta)$  para los distintos valores de  $\alpha$ .  $0 < \alpha$  (acelerado con rebote),  $-1 < \alpha < 0$  (expansión acelerada),  $\alpha = -1$  (contracción acelerada),  $\alpha < -1$  (expansión desacelerada temprana, acelerada tardía).

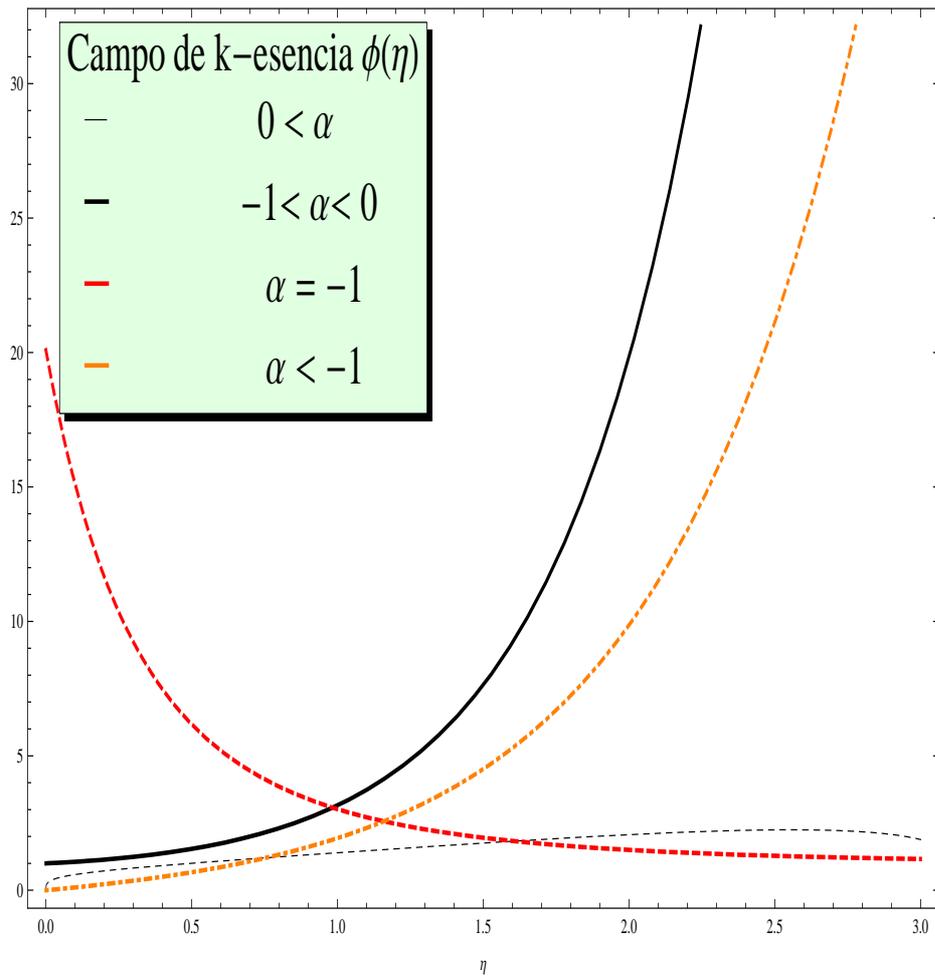


Figura 1.4: Campo de k-esencia  $\phi(\eta)$  para los distintos casos posibles del valor de  $\alpha$  en unidades arbitrarias.  $0 < \alpha$  (punteado en negro),  $-1 < \alpha < 0$  (negro),  $\alpha = -1$  (rojo),  $\alpha < -1$  (naranja).

con  $A$  constante, obtenemos una primera integral de la ecuación de Klein-Gordon (1.81)

$$\dot{\varphi} = AH + \frac{b}{a^3}, \quad (1.83)$$

donde  $b$  es una constante de integración.

Por otra parte, a partir de las ecuaciones (1.80) y (1.83) obtenemos una ecuación de segundo orden para el factor de escala promedio

$$-2\dot{H} = A^2 H^2 + 2bA \frac{H}{a^3} + \frac{b^2 + \sigma_0^2}{a^6}. \quad (1.84)$$

que debe ser compatible con la ecuación de Friedmann de primer orden (1.79). Después de introducir las nuevas variables

$$s = a^{-3/\nu}, \quad \zeta = qbAt, \quad \nu = -\frac{6}{qA^2}, \quad (1.85)$$

se tiene la ecuación final

$$s'' + s^\nu s' + \left( \frac{1}{4} + \frac{\sigma_0^2}{4qb^2} \right) s^{2\nu+1} = 0. \quad (1.86)$$

Formalmente, las ecuaciones (1.59) y (1.86) son similares, de modo que haciendo las identificaciones

$$mV_0 = \frac{2}{qA^2} \quad \text{y} \quad \frac{3c}{2} = \frac{b}{A}, \quad (1.87)$$

entre los parámetros de ambas, resultan ser la misma. Esto significa que ambos modelos son descriptos por el mismo factor de escala promedio y son geoméricamente equivalentes.

Volviendo a las ecuaciones (1.2) y (1.3) obtenemos

$$3H^2 + \dot{H} = \frac{\rho - p}{2}, \quad (1.88)$$

donde  $\rho$  y  $p$  son la densidad de energía y la presión de la K esencia o de la quintaesencia. Para la quintaesencia  $(\rho - p)/2$  siempre es el potencial, y para la K esencia definida por  $F(x) = (1 + mx)$ , ocurre lo propio. Por este motivo, la ecuación (1.88) puede escribirse como

$$3H^2 + \dot{H} = U(\varphi) = V(\phi), \quad (1.89)$$

la cual lleva a

$$U(\varphi(t)) = U_0 e^{-qA\varphi} = V(\phi(t)) = \frac{V_0}{\phi^2}, \quad (1.90)$$

y a la relación entre los campos de K esencia  $\phi$  y de quintaesencia  $\varphi$

$$\phi = \sqrt{\frac{V_0}{U_0}} e^{qA\varphi/2}. \quad (1.91)$$

Poner, por ejemplo, el campo de K esencia (1.77) en esta relación, nos permite encontrar el campo de quintaesencia  $\varphi$ ,

$$\varphi = \frac{6}{qA\alpha} \ln(a_0/a) + \frac{\eta}{qA}. \quad (1.92)$$

La característica interesante del modelo de la K esencia en Bianchi I es que puede soportar correctamente las observaciones cosmológicas cuando el índice barotrópico asociado tiene una cota superior,  $\gamma_\phi < 2$ , pues entonces la anisotropía inicial se disipa en una evolución expansiva obteniéndose al final un modelo de universo de FRW.

# Capítulo 2

## Cosmologías FRW con K esencia

### 2.1 Introducción

La evidencia astrofísica acumulada en los últimos años dice que la evolución actual del universo está dominada por una energía oscura de presión negativa y que además, contiene una materia oscura, fría, no relativista, que hace que nuestro espacio tiempo parezca tener curvatura nula (ver [46] para una revisión del tema) y que domina la etapa temprana del mismo. Sin embargo se conoce poco sobre el posible origen de cada una de estas dos componentes que cumplen roles bien diferentes: la componente no relativista debe ser responsable del aglutinamiento de la materia y de la generación de las estructuras a gran escala, mientras que la componente de presión negativa debe dar cuenta de la expansión acelerada. Se permite entonces la especulación sobre la existencia de una única componente que actúe como materia oscura en las primeras épocas del universo y como energía oscura, en épocas más cercanas a la actual. En este capítulo nos enfocaremos en el uso de campos de K esencia como alternativa al gas de Chaplygin y al campo taquiónico, que fueron los primeros modelos propuestos para dicha unificación [47], [48], [49]. El gas de Chaplygin es la versión correspondiente a potencial constante del campo taquiónico  $T(t)$  siendo este último descrito por un lagrangiano de la forma  $L = V(T)\sqrt{1 - \dot{T}^2}$ , [50], [51], [52]. De acuerdo con lo anterior, el campo taquiónico  $T$  impulsado por un potencial  $V(T)$  se obtiene como una K esencia generada por la función cinética  $F_T(x) = \sqrt{1 + x}$ , [53] y por lo tanto, el gas de Chaplygin corresponde a esa K esencia libre con  $V$  constante. En [16] se demostró que para modelos de K esencia derivados de Lagrangianos

que dependían sólo de las derivadas del campo, era posible hacer transitar al universo desde una etapa dominada por materia oscura a otra etapa dominada por energía oscura. En esta clase de K esencia, la existencia de un extremo en la presión para cierto valor de la derivada del campo, permitía que la densidad de energía del modelo pudiera considerarse como la suma de una componente de materia no relativista y una componente del tipo constante cosmológica. En este Capítulo mostraremos que se obtienen los mismos efectos en campos de K esencias con sólo pedir que exista un punto donde la presión se anule y daremos dos ejemplos sencillos. En ellos, los parámetros del modelo pueden elegirse de modo que la velocidad del sonido en el fluido sea muy pequeña y éste se comporte como materia oscura sin presión.

## 2.2 Ecuaciones de Einstein con K esencia

Las ecuaciones necesarias para nuestra descripción a gran escala del universo con K esencias en la métrica FRW, son

$$3H^2 = \rho = V(\phi)[F - 2xF_x], \quad (2.1)$$

$$\dot{H} = Vx F_x = -(\rho + p)/2, \quad (2.2)$$

$$\gamma_\phi = -2xF_x/(F - 2xF_x), \quad (2.3)$$

$$(\gamma_\phi/\dot{\phi})' + 3H(1 - \gamma_\phi)(\gamma_\phi/\dot{\phi}) + V'(1 - \gamma_\phi)/V = 0. \quad (2.4)$$

Además necesitamos que la velocidad del sonido efectiva [54]

$$c_s^2 = p_x/\rho_x = F_x(F_x + 2xF_{xx})^{-1}, \quad (2.5)$$

sea positiva, como condición necesaria (aunque no suficiente [55]) para la estabilidad de la teoría con respecto a perturbaciones de longitud de onda

pequeña. En lo que sigue la unificación de materia y energía se plantea con K esencias cinéticas, o sea, con potenciales constantes.

## 2.3 Potencial constante

Los primeros modelos de K esencia se describieron en el marco de una métrica de FRW y como el comportamiento inflacionario descrito por ellos tuvo un origen netamente cinético se los apodó inflación K [56],[57]. En esas cosmologías la inflación era del tipo polo, donde el factor de escala evolucionaba como una potencia negativa del tiempo. Esto ocurría también en el marco teórico previo de la cosmología de cuerdas [58] donde los modelos usaban un campo escalar (dilatón) para explicar la aceleración cinética previa a la gran explosión[59].

En FRW la primera integral de (2.4) para potencial constante es

$$a^3 F_x \dot{\phi} = \frac{c}{2V_0}, \quad (2.6)$$

mientras que (2.2) y (2.3) se reescriben como

$$\dot{H} = -\frac{c\dot{\phi}}{2a^3}, \quad (2.7)$$

y

$$\gamma_\phi = (1 + 2V_0^2 a^6 F F_x / c^2)^{-1}. \quad (2.8)$$

A partir de (2.8) y del mismo modo que sucedía para las cosmologías BI, resulta que existe un conjunto de modelos que describen universos dominados por materia no relativista en las primeras etapas, esto es,  $\gamma \approx 1$  o equivalentemente  $p \approx 0$ , lo cual implica que  $\rho \approx a^{-3}$ . Estos modelos son los generados por el conjunto de funciones  $F$  que a tiempos tempranos ( $a \propto 0$ ) satisfacen la condición  $a^6 F F_x \ll 1$ .

En la construcción de estas cosmologías se usan las funciones cinéticas que admiten una expansión en potencias de  $x$  de la forma

$$F(x) = F_0 + F_1(x - x_0) + F_2(x - x_0)^2 + \dots, \quad (2.9)$$

gracias a la cual la expresión del índice barotrópico (2.8), muestra que hay dos modos de obtener una cosmología dominada por materia no relativista en un entorno de  $x_0$ , aún cuando  $a \neq 0$ : una es hacer  $F(x_0) = 0$ , o lo que es lo mismo, tomar  $F_0 = 0$ , para  $x_0 = x(t_0)$ , y la otra es tomar  $F_x(x_0) = 0$  [16], que es equivalente a tomar  $F_1 = 0$ .

Para estudiar el primer modo de conseguir ese comportamiento, definimos la cantidad pequeña  $\epsilon$  como  $x = x_0(1 + \epsilon)$ . Luego, usando las ecuaciones (2.1), (2.6) y a orden cero en  $\epsilon$ , se obtiene

$$\rho \approx \frac{c\sqrt{-x_0}}{a^3}. \quad (2.10)$$

Notablemente, se tiene un comportamiento de la densidad de energía del tipo polvo (materia no relativista), sin haber hecho ninguna suposición sobre las constantes  $F_1$  y  $F_2$ .

La velocidad del sonido en el fluido a orden cero en  $\epsilon$  es  $c_s^2 \approx F_1/(F_1 + 4x_0F_2)$  y esta magnitud sí depende de los valores de  $F_1$  y de  $F_2$ . Pero sólo hay que imponer que  $4x_0F_2 \gg F_1$  para tener que  $c_s^2 \approx 0$ , esto es, para poder describir a la materia concentrada por acción gravitatoria.

Además, se desprende de las ecuaciones (2.1) y (2.2) que

$$F_x(x_0) = -\frac{3H^2(x_0)}{2x_0V_0} \quad (2.11)$$

$$\dot{H}(x_0) = -\frac{3}{2}H^2(x_0). \quad (2.12)$$

Para decidir cuál de los modos es mejor, vamos a comparar nuestros resultados con los correspondientes a una evolución del tipo  $a = t^{2/3}$ , para la cual es  $H = 2/3t$  y  $\dot{H} = -3H^2/2$ .

En  $x(t_0) = x_0$  resulta de (2.11) que  $t_0^2 = 2/3(-x_0)V_0F_1$ . Para nuestra elección  $F(x_0) = 0$ , la función  $F$  conduce a una densidad de energía  $\rho \propto a^{-3}$  según (2.10) y por lo tanto a un factor de escala que concuerda con  $a = t^{2/3}$  por lo menos hasta la segunda derivada en un  $t_0$ . Éste puede ser elegido arbitrariamente fijando algún valor para  $F_1$ .

En la opción  $F_x(x_0) = 0$ , en cambio, encontramos que a orden cero en  $\epsilon$ ,  $F_0 = 3H^2/V_0$ ,  $\dot{H}(x_0) = 0$  y  $t_0^2 = 4/3V_0F_0$ . Esto muestra que la principal

diferencia con respecto a nuestra opción es que el factor de escala concuerda con  $a = t^{2/3}$  sólo hasta la primera derivada en el punto  $x_0$ . Por lo tanto, las funciones cinéticas que tienen una raíz  $x_0$  son las que mejor se ajustan a describir materia no relativista.

Ilustraremos las principales características descritas con dos modelos sencillos que se pueden resolver exactamente.

### 2.3.1 Un modelo resoluble

En este primer modelo usamos la función cuadrática  $F(x)$

$$F = \frac{b}{6} + x - \frac{x^2}{2b}, \quad (2.13)$$

que se anula en  $x = b(1 \pm 2/\sqrt{3})$  y tiene un extremo en  $x = b$ , donde  $b$  es un parámetro libre del modelo.

Insertando la ecuación (2.13) en la ecuación (2.1) llegamos a

$$\dot{\phi}^2 = -b/3 \pm \sqrt{2b/V_0} H. \quad (2.14)$$

Reemplazando esta última en la ecuación (2.7) obtenemos por integración la expansión relativa:

$$H = \pm \left[ \sqrt{bV_0/18} + 9c^2 \sqrt{2b/V_0} \eta^2 \right], \quad (2.15)$$

donde hemos introducido una nueva variable  $\eta = \int dt/a^3$  y además, ajustamos la constante de integración arbitraria en la definición de  $\eta$  de modo que la expresión del factor de escala coincidiera asintóticamente a tiempos  $t$  grandes, con la correspondiente solución de de Sitter.

Ahora, combinando las últimas dos ecuaciones tenemos

$$\dot{\phi}^2 = 18c^2 b \eta^2 / V_0, \quad (2.16)$$

y el factor de escala sale de integrar la ecuación (2.15) dando

$$a^3 = - \left( \sqrt{bV_0/2} \eta + 9c^2 \sqrt{2b/V_0} \eta^3 \right)^{-1} \quad \text{para} \quad \eta \leq 0, \quad (2.17)$$

con la singularidad fijada en  $\eta = -\infty$ . La ecuación de estado y la velocidad del sonido en este modelo resoluble son, respectivamente

$$p = -4bV_0/9 + \rho/3 + \sqrt{8b/27V_0} \rho^{1/2}, \quad (2.18)$$

$$c_s^2 = dp/d\rho = 1/3 + \sqrt{2bV_0/27} \rho^{-1/2}. \quad (2.19)$$

Si hacemos un corrimiento de la escala de tiempos en  $\eta$  de modo que  $\eta = \delta - \delta_0$  con  $\delta > 0$ , es posible concordar con (2.17) en la forma

$$a^3 = - \left( a_0 + a_1\delta + a_2\delta^2 + a_3\delta^3 \right)^{-1}, \quad (2.20)$$

donde  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  son constantes.

En las cercanías de la singularidad (esto es,  $\delta \rightarrow \infty$ ) es  $a^3 \propto \delta^{-3}$ , y teniendo en cuenta que  $d\eta = d\delta = dt/a^3$  resulta que  $t \propto \delta^{-2}$  y el universo comienza como  $a \propto t^{1/2}$ . Si nos alejamos de la singularidad y estamos próximos a  $x_0$ , entonces  $a^3 \propto \delta^{-2}$ , lo cual implica que  $t \propto \delta^{-1}$ , y el factor de escala satisface  $a \propto t^{2/3}$ , como corresponde a un universo de materia no relativista.

Finalmente, alejándose más aún de la singularidad hasta llegar a la última época del universo, es  $a^3 \propto \delta^{-1}$  y también  $t \propto -\ln \delta$ , con lo cual el factor de escala satisface  $\propto \exp \sqrt{bV_0/18} t$ , tendiendo asintóticamente a la solución de de Sitter.

En la figura 2.1 pueden verse los comportamientos descritos para el caso particular  $b = V_0/2$ ,  $V_0 = 1$  y  $9c^2 = 1$ .

La ecuación de estado dice que inicialmente tenemos un fluido de radiación  $p \approx \rho/3$  (para energías altas), pero a medida que el modelo evoluciona hacia el régimen asintótico la presión tiende a un valor constante  $p = -\rho = -bV_0/6$ , de modo que el fluido actúa como una constante cosmológica. La K esencia

interpola entre estos dos límites y pasa por una época dominada por materia no relativista cuando  $p$  se anula. Por la definición de  $p$  como función de  $F$  y recordando que  $x < 0$ , esto ocurre cuando  $x = x_0 = b(1 - 2/\sqrt{3})$  para  $b > 0$ . En lo concerniente a la velocidad del sonido en este medio, observamos que inicialmente toma el valor correspondiente a radiación  $c_s^2 = 1/3$ . A partir de allí crece monótonamente hasta que alcanza el límite superior  $c_s^2 = 1$ . En esta última etapa la evolución es asintóticamente tipo de Sitter ( $H = \text{constante}$ ) y la densidad de energía toma su valor límite  $\rho = bV_0/6$ . Otra manera de deducir este resultado es notar que, a partir de combinar las ecuaciones (2.16) y (2.17) obtenemos que  $x \propto a^{-6}$  en el límite  $\eta \rightarrow 0$  y la ecuación de Einstein (2.1) se reduce a la de un campo escalar libre, esto es, nuestra K esencia se comporta como un fluido duro con  $c_s^2 \approx 1$ . Este modelo es interesante porque muestra la posibilidad de tener K esencia comportada como polvo aún cuando la presión no tiene un extremo.

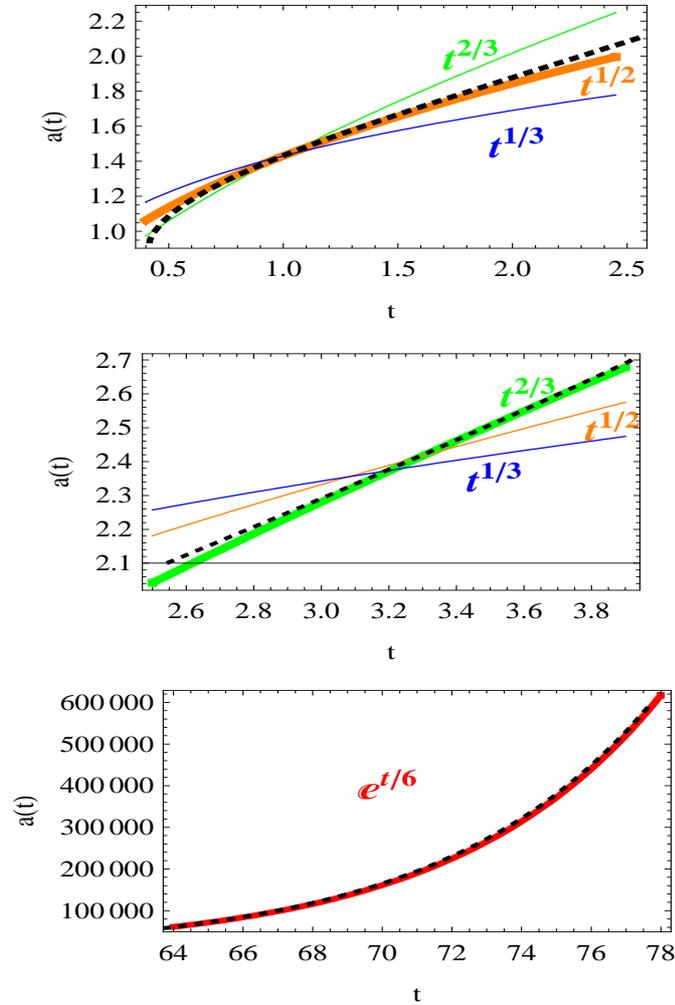


Figura 2.1: Comportamiento asintótico del factor de escala para  $b = V_0/2$ ,  $V_0 = 1$  y  $9c^2 = 1$  en el modelo transitorio de K esencia con función cuadrática. Cerca de la singularidad inicial (esquema superior), el factor de escala del modelo (línea cortada negra) se comporta como radiación, proporcional a  $t^{1/2}$ . En etapas posteriores, pero aún tempranas de la evolución (esquema medio), se mimetiza con el comportamiento de materia oscura proporcional a  $t^{2/3}$ . Finalmente (esquema inferior), el modelo culmina en una etapa tipo de Sitter, que para los valores de las constantes usados al hacer los gráficos corresponde a  $e^{t/6}$ .

### 2.3.2 Modelo Chimento

Como segundo ejemplo veamos el modelo Chimento[16] de K esencia introducido en [57] que es generado por la función  $F$

$$F = \frac{1}{V_0(2\alpha - 1)} \left( 2\alpha\alpha_0\sqrt{-x} - (-x)^\alpha \right), \quad (2.21)$$

donde  $\alpha$  y  $\alpha_0$  son dos constantes reales. La densidad de energía y la ecuación de estado del campo de K esencia son calculados con las ecuaciones (2.1) y (2.21)

$$\rho = (-x)^\alpha, \quad p = \frac{1}{(2\alpha - 1)} \left( \rho - 2\alpha\alpha_0\rho^{1/2\alpha} \right), \quad (2.22)$$

y la correspondiente velocidad del sonido en este medio es

$$c_s^2 = \frac{1}{(2\alpha - 1)} \left( 1 - \alpha_0\rho^{-1+1/2\alpha} \right). \quad (2.23)$$

La ecuación de conservación (2.4), nos permite obtener la densidad de energía en términos de  $a$

$$\rho = \left( \alpha_0 + c_0/a^3 \right)^{2\alpha/(2\alpha-1)}, \quad (2.24)$$

donde  $c_0$  es una redefinición de la constante de integración  $c$ .

Ahora aplicamos los resultados obtenidos en la última sección y expandimos la función  $F$  en potencias alrededor de  $x_0 = (2\alpha\alpha_0)^{2/(2\alpha-1)}$  donde  $F$ , y por lo tanto  $p$ , se anulan. Evaluamos  $\rho(x_0)$  usando la ecuación (2.22) y calculamos la velocidad del sonido con la ecuación (2.23). El resultado es  $c_s^2 = 1/2\alpha$  mientras que para el índice barotrópico obtenemos  $\gamma(x_0) = 1$ . Entonces, para  $\alpha$  grande, el modelo corresponde a dominación de materia oscura en  $x = x_0$ , con velocidad del sonido aproximadamente nula,  $c_s^2 \approx 0$ , mientras que de la ecuación (2.24) la densidad de energía de esta K esencia transitoria es  $\rho \approx \alpha_0 + c_0/a^3$ .

Para fijar ideas y mostrar que el comportamiento es el predicho hacemos un ajuste de parámetros con datos cosmológicos obtenidos de la función  $H(z)$  según datos de Verde et all [60]. El significado y el método de este ajuste se explican en el Apéndice C. Los valores mejor ajustados para este modelo son  $H_0 = 73.482$ ,  $\alpha_0/c_0 = 2.76358$  y  $\alpha = 1.1896 \cdot 10^6$  con un mínimo  $\chi^2 = 7.65924$  o  $\chi_{pg}^2 = 0.957405$  por grado de libertad.

Con esos guarismos fueron hechas las integraciones numéricas que se muestran en las figuras 2.2, 2.3 y 2.4, basadas en la colección de relaciones

$$\Delta\phi(z) = \sqrt{3} \int_z^\infty \frac{(\alpha_0 + c_0(1+z')^3)^{(1-\alpha)/(2\alpha-1)}}{(1+z')} dz', \quad (2.25)$$

$$\rho(z) = (\alpha_0 + c_0(1+z)^3)^{2\alpha/(2\alpha-1)}, \quad (2.26)$$

$$t(z) = \sqrt{3} \int_z^\infty \frac{dz'}{(1+z')(\alpha_0 + c_0(1+z')^3)^{\alpha/(2\alpha-1)}}, \quad (2.27)$$

$$a(z) = (1+z)^{-1}, \quad (2.28)$$

$$\omega(z) = \gamma(z) - 1 = \frac{1}{(2\alpha-1)} \left[ 1 - \frac{2\alpha\alpha_0/c_0}{\alpha_0/c_0 + (1+z)^3} \right]. \quad (2.29)$$

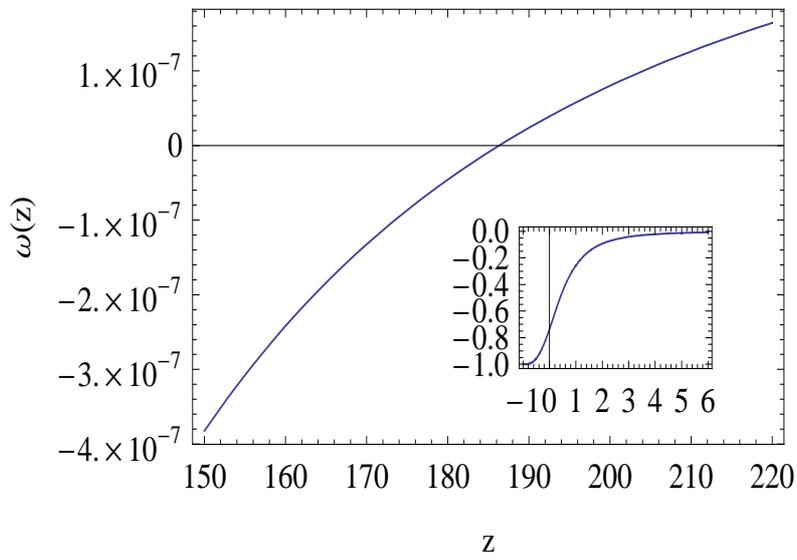


Figura 2.2: Ecuación de estado en función del corrimiento al rojo  $z$  en el modelo Chimento [57],[16]. Se observa el comportamiento tipo polvo  $\omega(z_p) = 0$  para  $z_p \approx 186.3$ . El gráfico corresponde a  $c_0 = 1$  y a los valores más ajustados a los datos observacionales  $\alpha = 1.1896 \cdot 10^6$ ,  $H_0 = 73.482$ ,  $\alpha_0 = 2.76358$ .

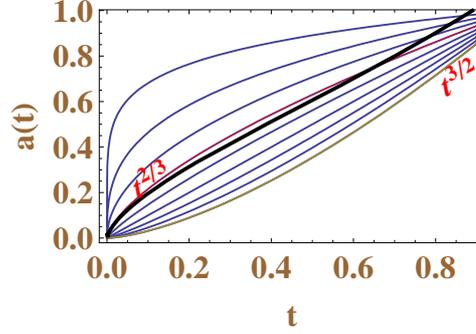


Figura 2.3: Factor de escala para el modelo Chimento [57],[16],(curva gruesa negra), como función del tiempo (en unidades de  $H_0^{-1}$ ) para  $c_0 = 1$  y los valores más ajustados a los datos observacionales  $\alpha = 1.1896 \cdot 10^6$ ,  $H_0 = 73.482$ ,  $\alpha_0 = 2.76358$ . Comparando con las curvas finas que representan funciones  $t^{n/6}$  para enteros  $1 \leq n \leq 9$  se observa el comportamiento tipo polvo ( $t^{2/3}$ ) para los tiempos primigenios  $t < 0.1$  y el comienzo de la aceleración para  $t \approx 0.5$ .

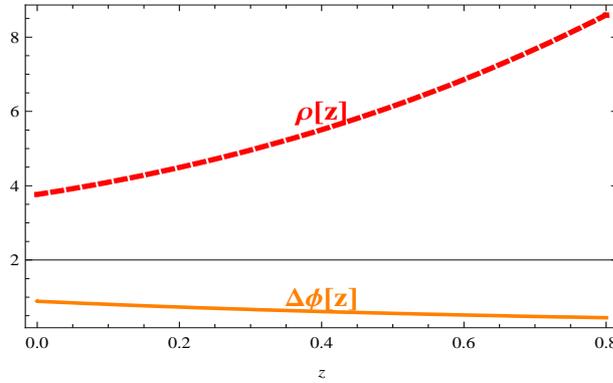


Figura 2.4: Densidad de energía y campo de K esencia en función del corrimiento al rojo  $z$  para  $c_0 = 1$  y los valores más ajustados a los datos observacionales  $\alpha = 1.1896 \cdot 10^6$ ,  $H_0 = 73.482$ ,  $\alpha_0 = 2.76358$ , en el modelo Chimento [57],[16]. Se observan comportamientos inversos en  $\rho$  y en el campo  $\Delta\phi$  como era de esperar, debido a que la relación directa se verifica entre  $\rho$  y la variación temporal del campo  $\dot{\phi} = -(1+z)Hd\phi/dz$ .

# Capítulo 3

## $N$ -quintom

### 3.1 Introducción

El paradigma de la cosmología quintom fue motivado por los registros observacionales que favorecían la transición desde una etapa acelerada del universo a otra superacelerada[17],[18],[19].

Por otra parte, la existencia de un teorema de imposibilidad de realización de ese paradigma usando un único fluido perfecto o un único campo escalar, mínimamente acoplado a la gravedad de Einstein en la métrica FRW, [61],[62],[63],[64],[65],[66], condujo al más simple de los modelos quintom, constituido por un campo escalar de quintaesencia y un campo fantasma con término cinético negativo[67]. En este capítulo introducimos una generalización de esta forma de implementar el quintom, proponiendo  $N$  campos escalares  $\phi_i$ , con  $i = 1\dots N$  y  $N \geq 2$ , con términos cinéticos positivos y negativos, considerados como componentes de un vector de un espacio interno  $N$ -dimensional, dotado de una métrica interna constante  $Q_{ik}$ .

### 3.2 Cosmologías con $N$ campos escalares

Cada realización del modelo  $N$ -quintom, es un vector de dimensión  $N$ , impulsado por un potencial escalar  $V(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)$ , que tiene definido un producto escalar  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \equiv Q_{ik}u_iw_k$  para dos vectores cualesquiera  $u_i$  y  $w_k$  pertenecientes a ese espacio interno. La norma del  $N$ -vector resulta ser entonces  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \equiv w^2 = Q_{ik}w_iw_k$ . En las expresiones siguientes usamos índices latinos para el espacio interno con la convención de suma para índices repetidos. El lagrangiano que describe el modelo es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}Q_{ik}\partial_\mu\phi_i(x)\partial^\mu\phi_k(x) - V(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N), \quad (3.1)$$

donde  $V(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)$  es un potencial escalar dependiente sólo de las componentes  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ . Obtenemos el tensor de energía momento  $T_{\mu\nu}$  asociado con este lagrangiano del  $N$ -campo (3.1) como siempre a través del procedimiento de variar el lagrangiano con perturbaciones de la métrica gravitatoria. La definición  $T_{\mu\nu} = 2\delta\mathcal{L}/\delta g^{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\mathcal{L}$ , nos da la expresión de este tensor

$$T_{\mu\nu} = Q_{ik}\partial_\mu\phi_i\partial^\mu\phi_k - g_{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}Q_{ik}\partial_\rho\phi_i\partial^\rho\phi_k - V\right]. \quad (3.2)$$

En el marco de las cosmologías FRW espacialmente planas, la densidad de energía y la presión de este fluido de energía oscura adoptan las formas

$$\rho = \frac{1}{2}Q_{ik}\dot{\phi}_i\dot{\phi}_k + V, \quad p = \frac{1}{2}Q_{ik}\dot{\phi}_i\dot{\phi}_k - V, \quad (3.3)$$

donde hemos supuesto que los campos  $\phi_i = \phi_i(t)$  son espacialmente homogéneos. La evolución de un universo provisto de esta configuración de varios campos, mínimamente acoplados a la gravedad e interactivos con un potencial  $V$  está gobernada por las ecuaciones

$$3H^2 = \frac{1}{2}Q_{ik}\dot{\phi}_i\dot{\phi}_k + V, \quad (3.4)$$

$$\ddot{\phi}_i + 3H\dot{\phi}_i + Q_{ik}^{-1}\frac{\partial V}{\partial\phi_k} = 0, \quad (3.5)$$

que se combinan para dar

$$-\dot{H} = \frac{1}{2}Q_{ik}\dot{\phi}_i\dot{\phi}_k. \quad (3.6)$$

El propósito de la extensión generada con el espacio interno es proveer una estructura más rica que la de las cosmologías quintom con dos campos escalares, incluyéndolas. La propuesta es más abarcativa dado que no sólo se

recupera el modelo quintom usual, para la elección  $Q_{ik} = \text{diag}(1, -1)$ , sino que además, las métricas internas  $Q_{ik} = \text{diag}(1, 0)$  y  $Q_{ik} = \text{diag}(0, -1)$  se identifican con las cosmologías de quintaesencia y fantasma respectivamente.

### 1. La dualidad

En lo que respecta a las transformaciones de dualidad que ligan cosmologías contractivas y expansivas convencionales, el paradigma  $N$ -quintom permite hablar de una dualidad más amplia. Esto se observa a partir de las ecuaciones de Einstein (3.4) y (3.6) pues la transformación de dualidad  $a \rightarrow 1/a$  que implica  $H \rightarrow -H$ , tiene dos modos alternativos de llevarse a cabo dejándolas invariantes:

- Caso 1

$$\dot{\phi}_k \rightarrow i\dot{\phi}_k, \quad V \rightarrow Q_{ik}\dot{\phi}_i\dot{\phi}_k + V(\phi_i) \quad (3.7)$$

- Caso 2

$$Q_{ik} \rightarrow -Q_{ik}, \quad V \rightarrow Q_{ik}\dot{\phi}_i\dot{\phi}_k + V(\phi_i) \quad (3.8)$$

La realización de la dualidad en ambos casos requiere que la densidad total de energía permanezca invariante ante la transformación de los campos  $\dot{\phi}_k \rightarrow i\dot{\phi}_k$ . Podemos afirmar que existe una dualidad entre las cosmologías fantasmas caracterizadas por una singularidad futura que se produce en un tiempo finito y las cosmologías con una gran implosión final y viceversa.

### 2. Soluciones tipo ley de potencias

Las soluciones del factor de escala que tienen la forma de una potencia del tiempo cosmológico han sido siempre apreciadas por su simplicidad en la descripción de cada modelo cosmológico. Vamos a hacer un modelo que admita este tipo de soluciones, para lo cual estudiamos la ecuación de estado  $w$  del fluido que alimenta al modelo, para descubrir la naturaleza de los potenciales que las permiten. Con las definiciones anteriores y las ecuaciones de Einstein (3.4) y (3.6) se obtiene la ecuación dinámica para  $w$ ,

$$\dot{w} = (w - 1) \left( 3H(w + 1) + \frac{\dot{V}}{V} \right). \quad (3.9)$$

La solución  $w = 1$  de esta ecuación representa un punto de equilibrio  $a \propto t^{1/3}$  y corresponde a una expansión no acelerada. Como en general cualquier otro modelo cosmológico de interés tiene  $w < 1$ , se requiere que la ecuación (3.9) admita otro punto de equilibrio  $w \equiv w_0$  constante, con  $w_0 < 1$ , esto es, una solución con  $a \propto t^{2/3(w_0+1)}$ . En el caso en que  $w_0 < -1$  resulta  $\dot{H}$  positivo, o sea,  $\ddot{a} > H^2 a = H_0^2 a^{-2-3w_0}$  obteniéndose una súper aceleración.

La existencia de ese punto de equilibrio  $w_0$ , restringe la forma funcional del potencial  $V(\phi_i)$ . Esto se observa al analizar la estabilidad estructural de la ecuación de evolución de  $w$  ya que pedir que el segundo paréntesis se anule para algún  $w_0$  es equivalente a imponer sobre el potencial la condición  $\dot{V} + 3(1 + w_0)HV = 0$ . Podemos integrar esa condición obteniendo  $V = V_0 a^{-3(1+w_0)}$  con  $V_0$  una constante de integración positiva. Con este potencial,  $w$  está gobernado por la ecuación

$$\dot{w} = 3H(w - 1)(w - w_0). \quad (3.10)$$

La estabilidad de la solución  $w = 1$  en (3.10) se dirime reformulando dicha ecuación en términos de  $w = 1 - \epsilon$ . Expandiendo el lado derecho de la misma a primer orden en  $\epsilon$ , resulta que para universos en expansión ( $H > 0$ ), la solución  $w = 1$  es un repulsor. Un análisis similar para el caso  $w = w_0 \neq -1$ , pero ahora definiendo  $w = w_0 - \epsilon$  muestra que la solución  $w = w_0$  es un atractor siempre que sea  $w_0 < 1$ .

Por completitud y aunque no resulta en soluciones ley de potencia, indiquemos que la solución  $w_0 = -1$  de (3.9) corresponde a la prescripción  $\dot{V}/V = 0$ , esto es,  $V = V_0$  una constante. El análisis de estabilidad con  $w = -1 - \epsilon$  reemplazado en (3.10) concluye que la solución tipo de Sitter ( $H = H_0$ ) es asintóticamente estable.

En los casos  $w = w_0 \neq -1$ , el factor de escala es  $a = t^{2/3(1+w_0)}$  de modo que el cálculo de  $V$  y  $H$  como funciones de  $t$  a partir de las ecuaciones (3.4) y (3.6) nos permite inferir que

$$V = \frac{V_0}{t^2}, \quad V_0 = \frac{2(1-w_0)}{3(1+w_0)^2} \quad \text{y} \quad \phi = \phi_0 \ln t. \quad (3.11)$$

El análisis hecho hasta aquí no ha necesitado incluir la estructura interna que estamos proponiendo. El modelo comienza a mostrarse cuando tratamos de expresar el potencial como función del  $N$ -campo.

La dependencia del potencial con respecto al  $N$ -campo es la forma exponencial con el exponente escrito como  $\phi = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\phi}_0 \log t$  con  $\boldsymbol{\alpha}$  y  $\boldsymbol{\phi}_0$  vectores constantes en el espacio interno. Cada elección del vector constante  $\boldsymbol{\alpha}$  del espacio interno identifica una combinación lineal de componentes del  $N$ -campo que satisface la forma de  $V$  obtenida en (3.11). El resultado es el potencial exponencial

$$V = V_0 e^{-\phi}, \quad (3.12)$$

donde se ha fijado que  $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\phi}_0 = 2$  y que verifica que

$$\boldsymbol{\phi}_0 = \frac{2\boldsymbol{\alpha}}{\alpha^2} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha} = \alpha^2 = 3(1+w_0). \quad (3.13)$$

Por construcción, cualesquiera sean la dimensión  $N$  y la métrica interna  $Q_{ik}$ , la solución atractora queda redefinida como

$$a = t^{2/\alpha^2}, \quad (3.14)$$

pero ahora, debido a la estructura del espacio interno del modelo  $N$ -quintom, el exponente en (3.14) puede tener cualquier signo, de modo que están disponibles tanto las soluciones fantasmas como las no fantasmas para los factores de escala del tipo ley de potencias.

### 3.3 Solución general para el potencial exponencial

Vamos a obtener la solución general para el modelo *N*-quintom impulsado por el potencial exponencial (3.12), en el espacio tiempo FRW espacialmente plano, resolviendo el sistema no lineal acoplado de (*N* + 1) ecuaciones diferenciales (3.4)-(3.5), para el factor de escala  $a(t)$  y el *N*-campo escalar  $\phi_i(t)$ . Para un campo escalar no fantasma impulsado por un potencial exponencial y un campo escalar libre, la solución general del sistema de ecuaciones (3.4)-(3.5) fue encontrada en [68].

Una primera integral de las ecuaciones de Klein-Gordon para cada componente  $\phi_k$  puede conseguirse como sigue. De la forma del potencial (3.12) se deduce que  $\partial V/\partial\phi_k = -Q_{lk}\alpha_l V = -Q_{lk}\alpha_l(3H^2 - \frac{1}{2}Q_{lk}\dot{\phi}_l\dot{\phi}_k) = -Q_{lk}\alpha_l(3H^2 + \dot{H})$ , tomando en cuenta las ecuaciones (3.4) y (3.6). Este resultado, reemplazado en (3.5) lleva a

$$\ddot{\phi}_i + 3H\dot{\phi}_i - Q_{ik}^{-1}Q_{lk}\alpha_l(3H^2 + \dot{H}) = \ddot{\phi}_i + 3H\dot{\phi}_i - \delta_{il}\alpha_l(3H^2 + \dot{H}) = 0$$

Reacomodando los términos de modo conveniente tenemos  $(\dot{\phi}_i - \alpha_i H) + 3H(\dot{\phi}_i - \alpha_i H) = 0$  y por lo tanto la primera integral de (3.5) es

$$\dot{\phi}_k = \alpha_k H + \frac{c_k}{a^3}, \quad (3.15)$$

con  $c_k$  un vector constante en el espacio interno.

Reemplazamos con esta primera integral las expresiones que contienen  $\dot{\phi}_i$  en la ecuación (3.6) y obtenemos

$$2\dot{H} + \alpha^2 H^2 + 2\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{c} \frac{H}{a^3} + \frac{c^2}{a^6} = 0. \quad (3.16)$$

que con el cambio de variables

$$s = a^{-3/n}, \quad \tau = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{c} t, \quad n = -\frac{6}{\alpha^2}, \quad (3.17)$$

se transforma en una ecuación diferencial no lineal de segundo orden para  $s(\tau)$

### 3.3. SOLUCIÓN GENERAL PARA EL POTENCIAL EXPONENCIAL 45

$$\ddot{s} + s^n \dot{s} + \frac{1}{4 \cos^2 \theta} s^{2n+1} = 0. \quad (3.18)$$

El punto significa derivación con respecto a  $\tau$  y

$$\cos \theta = \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{c}}{\alpha c}. \quad (3.19)$$

El signo del parámetro  $n$  depende exclusivamente de la métrica interna  $Q_{ik}$ . En particular, para una métrica interna euclídea este parámetro resulta negativo, independientemente de la dimensión  $N$ .

Después de calcular la nueva variable  $s$ , se obtiene el factor de escala en términos del tiempo cósmico  $t$  usando las ecuaciones (3.17).

Por otra parte, insertar la primera integral (3.15) en la ecuación de Friedmann (3.4), nos lleva a una ecuación cuadrática en el factor de Hubble  $H$  que tiene soluciones reales sólo cuando su discriminante es definido positivo. Esta condición se escribe  $(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{c})^2 + (6 - \alpha^2)(c^2 + 2a^6V) > 0$  y da la relación entre las constantes de integración y el exponente del potencial exponencial.

Podemos simplificar notablemente la resolución de (3.18) aplicándole una transformación no local de variables perteneciente al grupo que deja invariante la forma de la ecuación, de modo similar a lo realizado en el Capítulo 1 [45] y que se describe en el Apéndice B (pág.113). En este caso, el cambio no local de variables

$$h = \int s^n ds, \quad \eta = \int s^n dt, \quad (3.20)$$

transforma la ecuación no lineal (3.18) en

$$\frac{d^2 h}{d\eta^2} + \frac{dh}{d\eta} + \nu(n)h + \delta(n) = 0, \quad (3.21)$$

ecuación lineal típica del oscilador armónico amortiguado, que escrita de este modo engloba los dos casos distintos que aparecen de acuerdo con el valor de  $n = -6/\alpha^2$ .

- $n \neq -1$ ,  $\delta(n) = 0$ ,  $\nu(n) = \frac{(n+1)}{4 \cos^2 \theta}$
- $n = -1$ ,  $\nu(-1) = 0$ ,  $\delta(-1) = \frac{1}{4 \cos^2 \theta}$

**Solución explícita para  $n \neq -1$  o  $n \neq -2$  y  $\nu = \frac{(n+1)}{(n+2)^2}$**

En este caso se pueden encontrar soluciones explícitas dependientes de  $\tau$  introduciendo la función  $v(\tau)$  (para más detalle ver [68]) y haciendo la sustitución

$$s^n = \left( \frac{n+2}{n} \right) \frac{v^n}{k_1 + \int v^n d\tau}, \quad (3.22)$$

en la ecuación (3.18), que se reduce a  $\ddot{v} = 0$ , con solución  $v(\tau) = k_2 + k_3\tau$ . Después de insertar la solución  $v$  en la ecuación (3.22), integrar y sustituir en la primera de las (3.17), obtenemos el factor de escala

$$a(v) = \left[ \frac{n}{(n+1)(n+2)} \right]^{1/3} [v + k|v|^{-n}]^{1/3}, \quad (3.23)$$

donde la constante  $k$  fue expresada en términos de la anterior.<sup>1</sup> Finalmente, obtenemos las componentes  $\phi^i$  del *N*-campo  $\phi$  integrando la ecuación (3.15)

$$\frac{d\phi_k}{dv} = \alpha_k \frac{d \ln a}{dv} + \frac{c_k a^{-3}}{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{c}}. \quad (3.24)$$

Con este fin, reescribimos el segundo término de la ecuación (3.24) usando la definición dada en la ecuación (3.17) como

$$a^{-3} = \frac{n+2}{n} \frac{d}{dv} \left[ \ln \left( k_1 + \int v^n d\tau \right) \right]. \quad (3.25)$$

Insertando la última en la ecuación (3.24) obtenemos  $\phi_i(v)$

---

<sup>1</sup>La constante  $k_3$  puede ser fijada igual a la unidad cambiando de escala la variable tiempo. También se elige  $k_2 = -\tau_0$ , luego  $v = \Delta\tau = \tau - \tau_0$ .

### 3.3. SOLUCIÓN GENERAL PARA EL POTENCIAL EXPONENCIAL 47

$$\Delta\phi_i = \alpha_i \ln |a| + \frac{(n+2)c_i}{n(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{c})} \ln \left| \frac{n+2}{n} v^n a^3 \right|, \quad (3.26)$$

donde  $\Delta\phi_i(v) = \phi_i(v) - \phi_{0i}$  y las  $\phi_{0i}$  son  $N$  constantes de integración <sup>2</sup>.

Como hemos integrado la ecuación diferencial de segundo orden para el factor de escala (3.6), en vez de la ecuación de Friedmann original (3.4), tenemos que circunscribir las constantes de integración haciéndolas consistentes con el problema inicial. Para ello y a partir de las ecuaciones (3.4) y (3.6), obtenemos  $3H^2 + \dot{H} = V$ , que puede reescribirse en términos de la variable  $u = a^3$  como

$$\frac{d^2u}{dv^2} = \frac{3uV}{(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{c})^2}. \quad (3.27)$$

Después de reemplazar las soluciones  $u(v)$  y  $\phi(v)$  en la ecuación (3.27) desaparece la dependencia con la variable  $v$  y obtenemos que las constantes de integración cumplen la relación

$$k = -\frac{V_0}{2c^2|\phi_0|\cos^2\theta} \text{signo} \left[ \frac{n+2}{n} \right]. \quad (3.28)$$

De este modo, el factor de escala (3.23) y el  $N$ -campo (3.26) cuyas constantes de integración verifican la relación de consistencia (3.28), son soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein-Klein-Gordon (3.4)-(3.5).

#### Solución explícita para $n = -1$ y $\nu = 0$

Siguiendo los mismos pasos que en el caso anterior, para  $n = -1$  tenemos

$$a = \left( |v| |b_1 + \ln |v|| \right)^{1/3}, \quad (3.29)$$

---

<sup>2</sup>Sin pérdida de generalidad podemos elegir  $\phi_{0i} \rightarrow \frac{\alpha_i}{\alpha^2} \log |\phi_0|$  donde  $\phi_0$  es una constante arbitraria.

$$\Delta\phi_i = \frac{\alpha_i}{3} \ln |v| |b_1 + \ln |v|| - \frac{c_i}{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{c}} \ln |b_1 + \ln |v||, \quad (3.30)$$

donde  $b_1$  es una constante de integración. Insertando las ecuaciones (3.29)-(3.30) en la ecuación (3.27) encontramos la relación  $V_0 = 2|\phi_0|c^2 \cos^2 \theta$ , donde  $\alpha^2 = 6$  y la constante  $\phi_0$  ha sido redefinida apropiadamente.

### Solución implícita

Para cualquier valor de  $n$  se puede encontrar la solución general implícita de la ecuación (3.18) resolviendo la ecuación (3.21) y usando las ecuaciones (3.17) y (3.20). En este caso tenemos dos conjuntos distintos de soluciones de acuerdo con el valor de  $n$ . Para  $n \neq -1$ ,  $\delta = 0$ , y el factor de escala está dado por

$$a(\eta) = \left[ \sqrt{(n+1)} (b_1 \exp \lambda_- \eta + b_2 \exp \lambda_+ \eta) \right]^{\frac{-n}{3(n+1)}}, \quad (3.31)$$

donde  $\lambda_{\pm} = (-1 \pm \sqrt{1-4\nu})/2$  son las raíces del polinomio característico de la ecuación (3.21). A partir de la ecuación (3.15) encontramos que cada componente del  $N$ -campo es

$$\phi_i(\eta) = \phi_{i0} + \alpha_i \ln a(\eta) + \frac{c_i}{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{c}} \eta, \quad (3.32)$$

donde las  $\phi_{i0}$  son constantes de integración. Ahora, insertando las ecuaciones (3.31) y (3.32) en la ecuación de Friedmann (3.27) las constantes de integración son restringidas por

$$b_1 b_2 = \frac{V_0}{2(1-4\nu)c^2 |\phi_0| \cos^2 \theta}. \quad (3.33)$$

Finalmente, cuando  $n = -1$ ,  $\nu = 0$  y  $\delta = (4 \cos^2 \theta)^{-1}$  tenemos

$$a(\eta) = \exp \left[ \frac{1}{3} (b_2 - \delta \eta + b_1 e^{-\eta}) \right], \quad (3.34)$$

$$\phi_i(\eta) = \phi_{i0} + \alpha_i \ln a(\eta) + \frac{c_i}{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{c}} \eta, \quad (3.35)$$

$$b_1 = \frac{V_0}{2|\phi_0|c^2 \cos^2 \theta}. \quad (3.36)$$

Para  $\theta = 0$  recuperamos la fórmula estándar para dos campos escalares gobernados por un potencial exponencial [69].

## 3.4 Espacios internos bidimensionales

### 3.4.1 Solución con singularidad futura a tiempo finito

Los modelos 2-quintom para potencial exponencial  $V = V_0 e^{-\boldsymbol{\alpha} \cdot \phi}$  y métrica interna

$$Q_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

tienen como rasgo nuevo la indefinición del signo del término cinético, con lo cual resulta posible una transición suave entre escenarios de quintaesencia y fantasma.

Por ejemplo, para  $\boldsymbol{\alpha}^2 < 0$  el factor de escala tiene dos ramas, (ver figura 3.1 para el caso particular  $\boldsymbol{\alpha}^2 = -1$ ). En la rama  $\Delta\tau < 0$  el universo comienza su evolución en una singularidad y luego de una breve etapa transitoria experimenta una expansión súper acelerada que culmina en una singularidad futura a tiempo finito.

Inicialmente el universo parece dominado por una quintaesencia de energía cinética positiva y ecuación de estado  $w > -1$ . Después evoluciona hacia una etapa dominada por energía oscura fantasma con energía cinética negativa y  $w < -1$ , hasta que ocurre la singularidad futura a tiempo finito. Allí  $\Delta\tau \rightarrow 0^-$  y  $a \rightarrow \infty^+$ . El punto donde el término cinético cambia de signo corresponde al punto de inflexión del factor de escala. En cambio, la rama  $\Delta\tau > 0$  representa un universo con un mínimo absoluto no nulo del factor de escala, al que ha llegado de forma acelerada, para ingresar luego en una débil expansión.

La relación entre  $\boldsymbol{\alpha}$  y la solución particular  $\mathbf{c}$  que se elige para el  $N$ -campo,

expresada a través del  $\cos^2 \theta$ , tiene el efecto de suavizar el comportamiento general y alargar los tiempos de cada etapa a medida que estos dos vectores se alejan del valor máximo  $\cos^2 \theta = 1$ .

La figura 3.1 exhibe el comportamiento del factor de escala descrito en (3.23) para distintos valores del  $\cos^2 \theta$  entre 0.01 (curva fina en naranja) y 1 (curva gruesa en azul). En ella, el valor de  $k$  fijado por la ecuación (3.28), se tomó positivo con las constantes elegidas de modo tal que  $-V_0/2c^2|\phi_0| = 1$ . Nótese que dado que esta métrica no es euclídea, esa elección siempre es posible, (sólo es necesario pedir que la solución elegida tenga  $c^2 = 2c_1c_2 < 0$ ). Cuando las métricas internas usadas son euclídeas, resulta posible obtener el mismo comportamiento descrito en la Fig. 3.1 acotando  $n$  (que entonces sería negativo) de modo que  $-2 < n < 0$  y  $k$  en (3.28) resulte positivo.

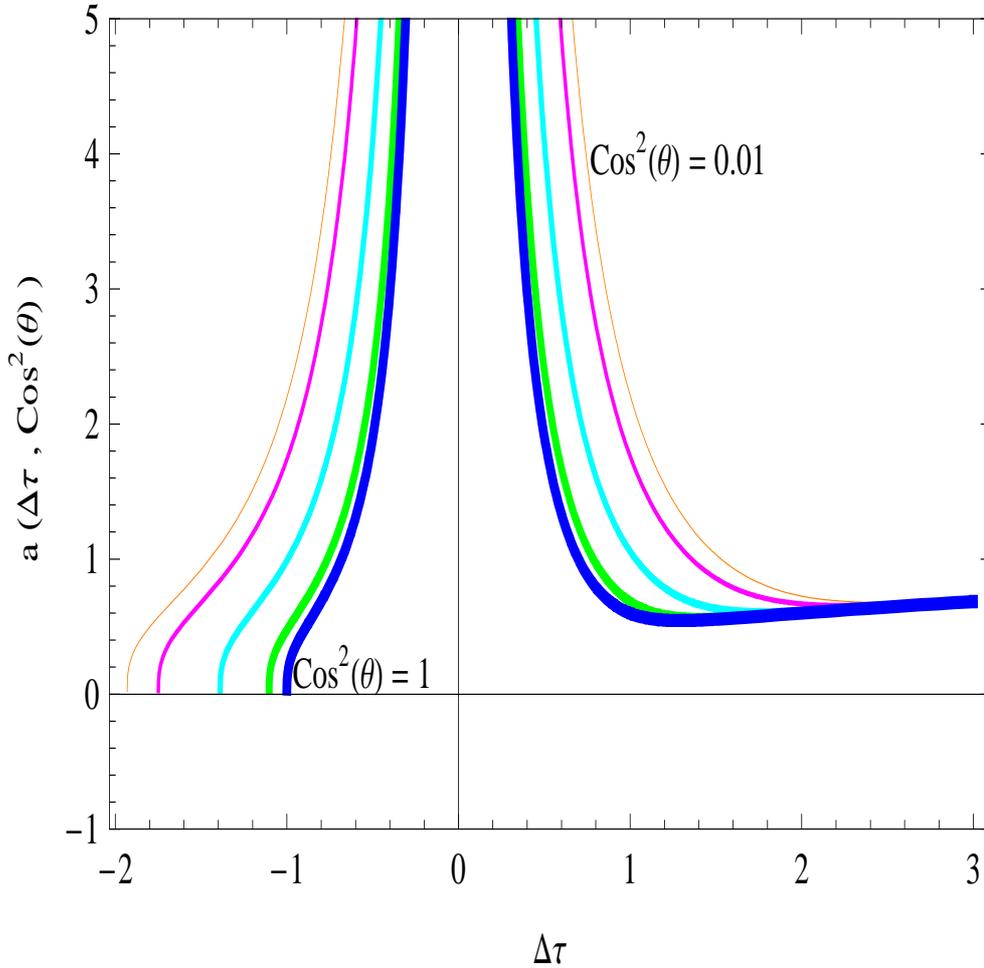


Figura 3.1: Comportamiento general del factor de escala en función de  $\Delta\tau$  para métricas no euclídeas. El gráfico corresponde a  $\alpha^2 = -1$  para distintos valores del  $\cos^2\theta$  entre 0.01 (curva fina en naranja) y 1 (curva gruesa en azul). En la ecuación (3.28), el valor de  $k$  se tomó positivo con las constantes elegidas de modo tal que  $-V_0/2c^2|\phi_0| = 1$ . El comportamiento similar proveniente de métricas euclídeas obliga a acotar  $n = -6/\alpha^2$  de modo que el signo de  $(n+2)/n$  sea  $-1$ , esto es  $\alpha^2 > 3$ .

### 3.4.2 Quintom

Consideremos el modelo quintom estándar con la métrica interna  $Q_{ik} = \text{diag}(1, -1)$  y supongamos que los campos escalares  $\phi_1$  y  $\phi_2$  están acoplados a través del potencial  $V(\phi_1, \phi_2)$ . De este modo las ecuaciones de Einstein se escriben como

$$3H^2 = \frac{1}{2}(\dot{\phi}_1^2 - \dot{\phi}_2^2) + V(\phi_1, \phi_2), \quad (3.38)$$

$$-2\dot{H} = \dot{\phi}_1^2 - \dot{\phi}_2^2, \quad (3.39)$$

donde  $\phi_1$  representa la quintaesencia y  $\phi_2$  el campo fantasma. El sistema se completa con una ecuación de Klein-Gordon para cada campo.

$$\ddot{\phi}_1 + 3H\dot{\phi}_1 + \partial_{\phi_1} V(\phi_1, \phi_2) = 0, \quad (3.40)$$

$$\ddot{\phi}_2 + 3H\dot{\phi}_2 - \partial_{\phi_2} V(\phi_1, \phi_2) = 0. \quad (3.41)$$

Escribimos el potencial como,

$$V = V_0 + \frac{\sigma}{2}\dot{\phi}_1^2 + \frac{\beta}{2}\dot{\phi}_2^2, \quad (3.42)$$

con  $\sigma$  y  $\beta$  constantes y  $V_0 > 0$ . Esta propuesta resulta más sencilla para llevar adelante los cálculos y la forma  $V(\phi_1, \phi_2)$  se recobra en cada caso al final de los mismos, cuando ya tenemos las expresiones de cada  $\dot{\phi}_i$  en función de los  $\phi_i$ .

La derivada total respecto del tiempo de la ecuación (3.42)  $\dot{V} = \partial_{\phi_1} V \dot{\phi}_1 + \partial_{\phi_2} V \dot{\phi}_2 = \sigma \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_1 + \beta \dot{\phi}_2 \dot{\phi}_2$  nos dice que

$$\partial_{\phi_1} V = \sigma \ddot{\phi}_1, \quad \partial_{\phi_2} V = \beta \ddot{\phi}_2, \quad (3.43)$$

donde hemos supuesto que el potencial es separable  $V(\phi_1, \phi_2) = V(\phi_1) + V(\phi_2)$ . De este modo, las ecuaciones (3.40)-(3.41) se integran directamente para dar

$$\dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_{01} a^{-3/(1+\sigma)} \quad \text{y} \quad \dot{\phi}_2 = \dot{\phi}_{02} a^{-3/(1-\beta)}, \quad (3.44)$$

con  $\dot{\phi}_{01}$  y  $\dot{\phi}_{02}$  constantes de integración.

Combinando las ecuaciones (3.38), (3.42), (3.44), la ecuación de Friedmann toma la expresión

$$3H^2 = V_0 + \frac{1}{2} \frac{(\sigma + 1)\dot{\phi}_{01}^2}{a^{6/(1+\sigma)}} + \frac{1}{2} \frac{(\beta - 1)\dot{\phi}_{02}^2}{a^{6/(1-\beta)}}. \quad (3.45)$$

Por otra parte, el índice barotrópico efectivo  $\gamma$  de esta mezcla

$$\gamma = \frac{\dot{\phi}_{01}^2 a^{-6/(1+\sigma)} - \dot{\phi}_{02}^2 a^{-6/(1-\beta)}}{\rho}, \quad (3.46)$$

muestra la ocurrencia de una transición suave desde un régimen acelerado a uno súper acelerado o viceversa, dependiendo esto esencialmente de la relación entre  $\sigma$  y  $\beta$ . La transición se produce cuando  $\gamma(a_f) = 0$ , que corresponde a

$$a_f = (\dot{\phi}_{02}/\dot{\phi}_{01})^{(1-\beta)(1+\sigma)/3(\sigma+\beta)}.$$

Esto se parece a un universo modelado con una mezcla de materia oscura y de energía oscura donde el primer componente tiene el poder de aglutinarse y el último es responsable de la presente aceleración.

#### Caso I: $\sigma = 1$ y $\beta = 3$

En el caso  $\sigma = 1$  y  $\beta = 3$ , asociamos el segundo término de la ecuación de Friedmann (3.45) con la componente atractiva  $\rho_m = \dot{\phi}_{01}^2/a^3$ , la cual incluye tanto a la materia bariónica como a la oscura, con la ecuación de estado  $p_m \approx 0$  mientras que los dos términos restantes constituyen la componente de energía oscura  $\rho_{de} = V_0 + \dot{\phi}_{02}^2 a^3$ . La ecuación (3.45) con  $\dot{\phi}_{02}^2 = V_0$  y  $\dot{\phi}_{01}^2 = V_0/4$  se resuelve con el cambio de variable  $a = v^{2/3}$ . Con este cambio

se transforma en la ecuación  $4\dot{v} = \pm\sqrt{3V_0}(1 + 2v^2)$ , cuyas soluciones dan el factor de escala

$$a = \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \tan \frac{\sqrt{6V_0}\Delta t}{4} \right]^{2/3}, \quad (3.47)$$

en términos de  $\Delta t = t - t_0$ . Los campos escalares  $\phi_1$  and  $\phi_2$  se obtienen después de integrar la ecuación (3.44),

$$\phi_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \left[ \sin \frac{\sqrt{6V_0}\Delta t}{4} \right], \quad (3.48)$$

$$\phi_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \ln \left[ \cos \frac{\sqrt{6V_0}\Delta t}{4} \right]. \quad (3.49)$$

La solución (3.47) representa un universo que comienza como dominado por polvo con el campo escalar  $\phi_1$  y con  $a \approx \Delta t^{2/3}$ . Después se expande y termina en una singularidad futura a tiempo finito cuando  $\phi_2$  diverge.

Finalmente usando la ecuación (3.44) obtenemos el potencial (3.42)

$$V(\phi_1, \phi_2) = \frac{V_0}{4} \left[ e^{-\sqrt{3}\phi_1} + 3e^{\sqrt{3}\phi_2} \right], \quad (3.50)$$

como suma de dos potenciales separados, cada uno de los cuales depende solamente del campo correspondiente  $V(\phi_1, \phi_2) = V_1(\phi_1) + V_2(\phi_2)$ .

Esto está de acuerdo con el modelo precursor quintom propuesto en la literatura[70].

**Caso degenerado:**  $\beta = -\sigma < 0$

El caso degenerado  $\beta = -\sigma$  con  $\sigma > 0$ , puede producir soluciones singulares o rebotantes además de un final tipo de Sitter. La correspondiente ecuación de Friedmann(3.45) es

$$3H^2 = V_0 + \frac{\sigma + 1}{2} \left( \dot{\phi}_{01}^2 - \dot{\phi}_{02}^2 \right) a^{-\frac{6}{1+\sigma}}. \quad (3.51)$$

Aquí, la degeneración existe porque las contribuciones de ambos campos son proporcionales. Cuando  $\dot{\phi}_{01}^2 > \dot{\phi}_{02}^2$ , se recupera el modelo cosmológico  $\Lambda$ CDM para  $\sigma = 1$  y el de cuerda cósmica para  $\sigma = 2$ . Cuando  $\dot{\phi}_{01}^2 < \dot{\phi}_{02}^2$ , la solución muestra un rebote donde la densidad de energía total se anula.

Al resolver la ecuación de Friedmann (3.51), se obtienen las soluciones

$$a^+ = \left[ \sqrt{b} \sinh \omega \Delta t \right]^{\frac{\sigma+1}{3}}, \quad b > 0, \quad (3.52)$$

$$a^- = \left[ \sqrt{-b} \cosh \omega \Delta t \right]^{\frac{\sigma+1}{3}}, \quad b < 0, \quad (3.53)$$

donde  $\omega^2 = 3V_0/(1 + \sigma)^2$  y  $b = (\sigma + 1)(\dot{\phi}_{01}^2 - \dot{\phi}_{02}^2)/2V_0$ .

El factor de escala (3.52) evoluciona como  $a \propto t^{(\sigma+1)/3}$  próximo a la singularidad, exhibiendo una fase inflacionaria para  $\sigma > 2$  y culminando en una etapa de Sitter.

La solución con mínimo no nulo del factor de escala (3.53) comienza y termina con fases similares a de Sitter.

Con las ecuaciones (3.44), (3.52)-(3.53), después de integrar, encontramos los campos en términos del tiempo cosmológico.

$$\phi_1^+ = \dot{\phi}_{01} \phi^+, \quad \phi_2^+ = \dot{\phi}_{02} \phi^+, \quad (3.54)$$

$$\phi_1^- = \dot{\phi}_{01} \phi^-, \quad \phi_2^- = \dot{\phi}_{02} \phi^-, \quad (3.55)$$

con

$$\phi^+ = \frac{1}{\omega \sqrt{b}} \ln \tanh \frac{\omega \Delta t}{2}, \quad \phi^- = \frac{1}{\omega \sqrt{-b}} \tan^{-1} e^{\omega \Delta t}. \quad (3.56)$$

De este modo, a partir de (3.42) obtuvimos los potenciales correspondientes al modelo de quintaesencia

$$V = V_0 \left[ 1 + \frac{\sigma}{1 + \sigma} \sinh^2(\sqrt{b} \omega \phi^+) \right], \quad (3.57)$$

y al modelo fantasma

$$V = V_0 \left[ 1 - \frac{\sigma}{1 + \sigma} \sin^2(\sqrt{-b} \omega \phi^-) \right]. \quad (3.58)$$

No existe aquí una transición entre los regímenes acelerado y súper acelerado porque el índice barotrópico tiene signo definido.

En la figura 3.2 mostramos los factores de escala como funciones del tiempo cosmológico  $t$  en unidades arbitrarias, para tres modelos de 2-quintom considerando los mismos valores fijos  $\dot{\phi}_{02}^2 = V_0 = 1$  y  $\dot{\phi}_{01}^2 = V_0/4 = 1/4$ . La convención  $a_0 = 1$  para el factor de escala actual permite comparar las edades del universo resultantes en cada uno de los ejemplos. En el primer caso,  $(\sigma = 1, \beta = 3)$ (curva verde), el universo comienza en una singularidad y evoluciona frenándose hasta que alrededor de la mitad de la historia cosmológica comienza a acelerarse y culmina en otra singularidad, ahora infinita en un tiempo futuro finito. Este ejemplo es el que provee la edad mayor. El caso degenerado  $(\sigma = 1, \beta = -1)$ (curva roja), es el que corresponde al universo más joven y resulta ser muy similar al quintom libre ( $V = \text{constante}$ ,  $\sigma = \beta = 0$ )(curva marrón) aunque bastante más acelerado.

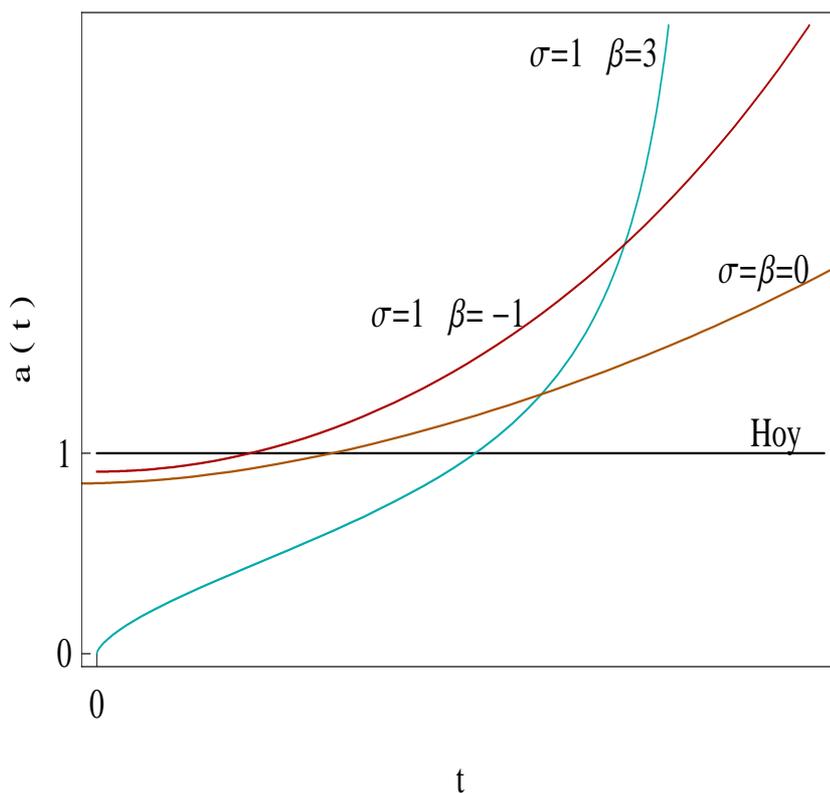


Figura 3.2: Factor de escala como función del tiempo cosmológico  $t$  en modelos 2-quintom con potencial separable  $V = V_0 + \frac{\sigma}{2}\dot{\phi}_1^2 + \frac{\beta}{2}\dot{\phi}_2^2$  para los casos  $(\sigma = 1, \beta = 3)$ (curva verde),  $(\sigma = 1, \beta = -1)$ (curva roja) y el caso del quintom libre, ( $V = \text{constante}, \sigma = \beta = 0$ )(curva marrón). En todas las curvas se han considerado los mismos valores  $\dot{\phi}_{02}^2 = V_0 = 1$  y  $\dot{\phi}_{01}^2 = V_0/4 = 1/4$ . Por convención, se toma el factor de escala actual como la unidad,  $a_0 = 1$ , a fin de comparar cuál de los modelos da el universo más joven (curva roja) y cuál da el más viejo (curva verde).

### 3.5 Espacio interno tridimensional

El modelo 3-quintom que se ajusta a la métrica interna

$$Q_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.59)$$

representa una configuración en donde la dimensión del espacio interno asociado con el sector de quintaesencia  $N_q$  excede la dimensión del respectivo sector fantasma  $N_f$ ,  $N_q > N_f$ . El caso inverso, donde el sector fantasma domina a la componente de quintaesencia  $N_f > N_q$  se obtiene simplemente cambiando el signo de la métrica  $Q_{ik} \rightarrow -Q_{ik}$ .

Cuando el 3-campo está impulsado por el potencial

$$V(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = V_0 + \frac{1}{2}\dot{\phi}_2^2 - \frac{1}{2}\dot{\phi}_3^2, \quad (3.60)$$

la ecuación de Friedmann se escribe como

$$3H^2 = V_0 + \frac{\dot{\phi}_{10}^2}{a^6} + \frac{\dot{\phi}_{20}^2}{a^3} - \frac{\dot{\phi}_{30}^2}{a^3}. \quad (3.61)$$

Los cuatro términos de la densidad de energía total puede ser acomodados como una mezcla de dos fluidos, con densidades de energía positivas que se conservan por separado.

$$\rho_b = \frac{\dot{\phi}_{20}^2}{a^3} \quad \text{y} \quad \rho_{de} = V_0 + \frac{\dot{\phi}_{10}^2}{a^6} - \frac{\dot{\phi}_{30}^2}{a^3}, \quad (3.62)$$

$$\dot{\rho}_b + 3H\rho_b = 0 \quad \text{y} \quad \dot{\rho}_{de} + 3H\gamma_{de}\rho_{de} = 0, \quad (3.63)$$

donde

$$\gamma_{de} = \frac{2\dot{\phi}_{10}^2 - \dot{\phi}_{30}^2 a^3}{\dot{\phi}_{10}^2 - \dot{\phi}_{30}^2 a^3 + V_0 a^6} \quad (3.64)$$

$$\text{y } \dot{\phi}_{30}^4 \leq 4V_0 \dot{\phi}_{10}^2.$$

Las densidades  $\rho_b$  y  $\rho_{de}$  se han identificado con las densidades bariónica y de energía oscura. La última componente agrupa la densidad de energía de vacío  $V_0$ , un término de fluido duro  $\rho_s = \dot{\phi}_{10}^2/a^6$  y un tipo de fluido perfecto sin presión con densidad de energía negativa  $\rho_D = -\dot{\phi}_{30}^2/a^3$ . Este último término imita la parte negativa del campo de Dirac clásico [71]. De este modo, el espacio interno permite alternativamente, incorporar la parte negativa del campo de Dirac como una fuente de la ecuación Einstein.

La solución general de la ecuación de Friedmann (3.61) toma la forma

$$a^3 = \sqrt{\frac{\dot{\phi}_{10}^2}{V_0}} \sinh \sqrt{3V_0} t + \frac{\dot{\phi}_{20}^2 - \dot{\phi}_{30}^2}{2V_0} \left[ \cosh \sqrt{3V_0} t - 1 \right], \quad (3.65)$$

donde la singularidad inicial se ha fijado en  $t = 0$ . La energía oscura permite el cruce universo acelerado a súper acelerado en  $a_f = (2\dot{\phi}_{10}^2/\dot{\phi}_{30}^2)^{1/3}$  cuando alcanza su valor mínimo  $\rho_{dec} = V_0 - \dot{\phi}_{30}^4/4\dot{\phi}_{10}^2$ . Básicamente, el cruce se realiza gracias al término que contiene al parámetro  $\dot{\phi}_{30}^2$  [71] a cuya existencia se debe la violación de la CED. Cuando este término está ausente, la ecuación de estado de la energía oscura  $w_{de}$  permanece siempre en el rango  $[-1, 1]$  (ver figura 3.3), satisfaciendo la CED.

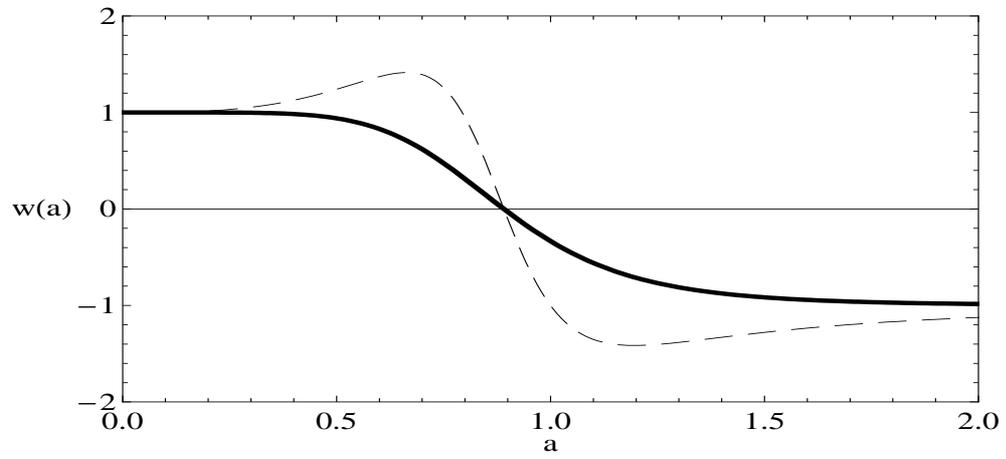


Figura 3.3: El parámetro de estado  $w_{de}$  como función del factor de escala. La línea punteada corresponde al caso que incluye el término de Dirac y la línea sólida al caso en que esto no ocurre.

# Capítulo 4

## Quintaesencia exótica

### 4.1 Introducción

En los capítulos anteriores trabajamos con una única fuente, la K esencia, o bien con los  $N$  campos que constituían el  $N$ -quintom. Estos campos generaron universos acelerados además de comportarse como materia oscura o como energía oscura en distintas oportunidades sin interactuar más que con el fondo gravitatorio. Sin embargo, el análisis de los modelos donde las componentes evolucionaban independientemente, a través de los datos de SNIa y de WMAP, no permitía distinguir cuáles eran los mejores. Con un nivel de confianza bastante grande [74], los modelos mejor concordantes con los datos de un conjunto estaban descartados por el otro. De modo que analizar si con una interacción, dos fluidos cualesquiera mejoraban el ajuste a los datos estadísticos constituyó el siguiente paso. Por otra parte, el campo escalar de quintaesencia espacialmente homogéneo  $\varphi(t)$ , ha sido utilizado en una enorme cantidad de modelos cosmológicos como fuente de la evolución cósmica dentro de las ecuaciones de Einstein. Su dinámica está gobernada por la ecuación de Klein Gordon, que en la métrica de FRW e impulsado por un potencial  $V(\varphi)$  se escribe

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} = 0. \quad (4.1)$$

Las expresiones de la densidad de energía  $\rho_\varphi$  y la presión  $p_\varphi$  de este fluido de quintaesencia

$$\rho_\varphi = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V \quad \text{y} \quad p_\varphi = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - V, \quad (4.2)$$

muestran que mientras los potenciales considerados sean positivos  $V > 0$ , la presión resulta negativa sólo si la magnitud del potencial es de mayor importancia que su energía cinética. Aquí, la propuesta de utilizar la quintaesencia como una representación escalar de la interacción cosmológica entre dos fluidos ha sido muy interesante y nos llevó a ampliar el concepto de quintaesencia. En este capítulo definimos una forma de interacción que apodamos quintaesencia exótica, reducible a la quintaesencia típica bajo ciertas condiciones.

## 4.2 Quintaesencia exótica

Describimos un modelo cosmológico de dos fluidos en interacción con un tensor de energía-momento  $T_{ik} = T_{ik}^{(1)} + T_{ik}^{(2)}$ , con  $T_{ik}^{(n)} = (\rho_n + p_n)u_i u_k + p_n g_{ik}$ , donde  $\rho_n$  y  $p_n$  identifican a la densidad de energía y a la presión de equilibrio del fluido  $n$  y  $u^i$  es la cuadrivelocidad. Al interactuar ambos fluidos en un universo espacialmente plano, homogéneo e isotrópico descrito por la métrica de FRW, encontramos que las ecuaciones de Einstein se reducen a dos ecuaciones independientes

$$3H^2 = \rho_1 + \rho_2, \quad (4.3)$$

$$\dot{\rho}_1 + \dot{\rho}_2 + 3H((1 + w_1)\rho_1 + (1 + w_2)\rho_2) = 0, \quad (4.4)$$

donde  $H(t) = \dot{a}/a$  es el factor de Hubble de la expansión y  $a(t)$  es el factor de escala de la métrica FRW.

La ecuación de conservación completa (4.4) muestra que existe interacción entre las componentes del modelo con intercambio mutuo de energía y momento. Entonces, planteamos una descripción efectiva del modelo introduciendo un fluido perfecto efectivo con ecuación de estado,  $w = p/\rho = -2\dot{H}/3H^2 - 1$ , donde  $p = p_1 + p_2$  y  $\rho = \rho_1 + \rho_2$ .

De este modo, a partir de las ecuaciones (4.3) y (4.4) tenemos

$$-2\dot{H} = (1 + w_1)\rho_1 + (1 + w_2)\rho_2 = (1 + w)\rho. \quad (4.5)$$

Definimos la representación escalar con un campo de quintaesencia exótica  $\psi(t)$  como

$$\dot{\psi}^2 = (1 + w_1)\rho_1 + (1 + w_2)\rho_2, \quad (4.6)$$

con  $\dot{\psi}^2 = -2\dot{H}$ . Las ecuaciones de estado constantes para cada componente son  $w_n = p_n/\rho_n$   $n = 1, 2$ , y  $\rho_1 > 0$  y  $\rho_2 > 0$ .

La ecuación dinámica para el campo escalar que se obtiene de la ecuación de conservación (4.4) después de reemplazar con (4.6) es

$$\ddot{\psi} + \frac{3}{2}(1 + w_1)H\dot{\psi} + \frac{w_1 - w_2}{2} \frac{\dot{\rho}_2}{\dot{\psi}} = 0. \quad (4.7)$$

Esta ecuación de conservación es integrable cuando fijamos la interacción entre los dos fluidos por medio de la condición de integrabilidad

$$\dot{\rho}_2 + A\dot{\psi}\rho_2 = 0, \quad (4.8)$$

donde  $A$  es un nuevo parámetro constante del modelo.

Mediante la integración de la ecuación (4.8) asociamos a la densidad de energía del segundo fluido con un potencial exponencial  $V(\psi)$

$$\rho_2 = \rho_{20}H_0^2 e^{-A(\psi - \psi_0)} = V(\psi), \quad (4.9)$$

donde  $\rho_{20}$  es una constante de integración positiva y  $H_0$ ,  $\psi_0$  son los valores actuales del parámetro de Hubble y del campo escalar  $\psi$ .

A partir de las ecuaciones (4.6), (4.7) y (4.9) obtuvimos la densidad de energía total, la presión de la mezcla de fluidos y la ecuación dinámica para el campo escalar exótico

$$\rho = \frac{\dot{\psi}^2}{1+w_1} + \frac{w_1-w_2}{1+w_1} V, \quad (4.10)$$

$$p = w_1 \frac{\dot{\psi}^2}{1+w_1} - \frac{w_1-w_2}{1+w_1} V, \quad (4.11)$$

$$\ddot{\psi} + \frac{3}{2}(1+w_1)H\dot{\psi} + \frac{w_1-w_2}{2} \frac{dV}{d\psi} = 0, \quad (4.12)$$

con  $\rho + p = \dot{\psi}^2$ .

Estas ecuaciones, diferentes de las que usualmente satisfacen las quintaesencias (4.2), justifican la denominación de quintaesencia exótica para el campo  $\psi$  y son las que usamos para describirlo.

Cuando el sistema de dos fluidos interactivos está relacionado con el campo escalar en la forma  $\rho_1 = \dot{\psi}^2/2$  y  $\rho_2 = V(\psi)$ , con ecuaciones de estado  $p_1 = \rho_1$  y  $p_2 = -\rho_2$ , correspondientes a  $w_1 = 1$  (fluido duro) y  $w_2 = -1$  (energía de vacío), el campo escalar exótico se reduce a la quintaesencia. Luego, debido a la interacción entre ambas componentes, la conservación del tensor energía momento del sistema como un todo, es equivalente a la ecuación de Klein-Gordon (4.1). En cualquier otro caso, el modelo cosmológico contiene una quintaesencia exótica  $\psi$  impulsada por un potencial exponencial.

Encontramos una primera integral de la ecuación (4.7) procediendo del siguiente modo. Usamos la condición de integrabilidad (4.8) en la ecuación del campo (4.7) y considerando la descripción del mismo en términos de la combinación lineal (4.6) encontramos la expresión

$$\ddot{\psi} + \frac{3}{2}(1+w_1)H\dot{\psi} - \frac{A}{2} \left( 3H^2(1+w_1) - \dot{\psi}^2 \right) = 0. \quad (4.13)$$

Como  $\dot{\psi}^2 = -2\dot{H}$ , al reacomodar (4.13) resulta  $d \ln \left( (\dot{\psi} - AH) a^{3(1+w_1)/2} \right) / dt = 0$ . Esto es, el argumento del logaritmo es una constante, digamos  $cH_0$ , con la que podemos escribir la primera integral de  $\psi$  como

$$\dot{\psi} = AH + cH_0 a^{-3(1+w_1)/2}, \quad (4.14)$$

Una vez conocido el factor de escala en función del tiempo cosmológico  $a(t)$ , la integración directa de (4.14) describe completamente la quintaesencia exótica

$$\psi = \psi_0 - A \ln(1+z) - cH_0 \int_0^z \frac{(1+z)^{(1+3w_1)/2}}{H} dz, \quad (4.15)$$

donde  $z = -1 + a_0/a$  es el parámetro de corrimiento al rojo,  $c$  es la constante de integración arbitraria que proviene de la primera integral y  $a_0$  es el factor de escala actual. El modelo se completa cuando la ecuación (4.14) se inserta en la densidad de energía (4.10) [75].

Así, la ecuación de Friedmann (4.3) se escribe

$$3H^2 = \frac{[6cAH_0H(1+z)^{3(1+w_1)/2} + 3(w_1 - w_2)\rho_2 + 3c^2H_0^2(1+z)^{3(1+w_1)}]}{3(1+w_1) - A^2}. \quad (4.16)$$

Como consecuencia de la presencia del término lineal en el factor de Hubble  $H$ , esta ecuación puede ser vista como una ecuación de Friedmann modificada, pero de modo diferente a los modelos Cardassianos [76] o de Brana [77]. Su solución da el factor de escala y el modelo de quintaesencia exótica queda resuelto.

Como la quintaesencia exótica impulsada por el potencial exponencial admite soluciones tipo ley de potencias, resulta interesante estudiar su estabilidad para describir los comportamientos asintóticos del modelo. Para esto vamos a estudiar la ecuación de evolución para  $w$ . A partir de la definición  $w = -2\dot{H}/3H^2 - 1 = \dot{\psi}^2/\rho - 1$ , resulta que  $\dot{w} = 3H(1+w)^2 + 2\dot{\psi}\ddot{\psi}/\rho$ . Luego, usando la ecuación de Klein Gordon para la quintaesencia (4.13) y la definición de  $w$ , tenemos la ecuación de evolución para la ecuación de estado efectiva

$$\dot{w} = -3H(w - w_1) \left( \sqrt{\frac{A^2}{3} (1+w)} - (1+w) \right), \quad (4.17)$$

para estudiar su estabilidad.

Esta ecuación (4.17) tiene dos soluciones estacionarias  $w_1$  y  $A^2/3 - 1$ . Suponiendo que  $A^2 < 3(1 + w_1)$ , encontramos que  $w_1$  es una solución inestable a diferencia de  $A^2/3 - 1$  que es estable asintóticamente.

Gracias a estos resultados y como la evolución de la geometría está dictada por  $w$ , podemos decir que el universo temprano comienza a evolucionar a partir de una fase inestable, dominado por el primer fluido y mostrando un comportamiento  $a \approx t^{2/3(1+w_1)}$ , y termina en una fase de expansión estable  $a \approx t^{2/A^2}$ , dominado por el potencial exponencial. Esta culminación es una fase acelerada cuando el parámetro  $A$ , es tal que se satisface la desigualdad  $A^2 < 2$ .

### 4.3 Dinámica de las componentes bariónica y oscuras

Consideramos la condición de integrabilidad (4.8) como una ecuación de conservación efectiva para el segundo fluido. Esto nos permite identificar a  $\rho_2$  con la densidad de energía de la componente de energía oscura y a  $w_{de} = -1 + A\dot{\psi}/3H$  con su ecuación de estado efectiva. En términos de esta última, la ecuación de estado efectiva  $w$  tiene la expresión

$$w = -1 + \frac{3}{A^2}(1 + w_{de})^2. \quad (4.18)$$

Por conveniencia escribimos  $\rho_2 = \rho_{20}H_0^2(1 + z)^{3\lambda}$  con

$$\lambda = -A \frac{(\psi - \psi_0)}{3 \ln(1 + z)}. \quad (4.19)$$

El término lineal en  $H$  en la ecuación (4.16) es adecuado para describir la componente de materia oscura no relativista, no bariónica cuyo tensor de energía momento es aproximadamente tipo polvo. Esta deducción surge de observar que para  $w_{de}$  constante, el factor de Hubble tiene una expresión  $AcH_0(1 + z)^{3(1+w_1)/2}/(3(1 + w_{de}) - A^2)$ . Por lo tanto, fijar  $w_1 = 0$  en la ecuación (4.16) no sólo introduce la identificación de materia bariónica (en el tercer término) sino también la de la materia oscura no relativista (en

### 4.3. DINÁMICA DE LAS COMPONENTES BARIÓNICA Y OSCURAS 67

el término lineal en  $H$ ). Considerando estas identificaciones, la ecuación de Friedmann modificada (4.16) se transforma en

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{dm}(1+z)^{3/2} \frac{H}{H_0} + \Omega_{de}(1+z)^{3\lambda} + \Omega_b(1+z)^3, \quad (4.20)$$

donde

$$\Omega_{dm} = \frac{2cA}{3 - A^2}, \quad (4.21)$$

$$\Omega_{de} = \frac{-w_2\rho_{20}}{3 - A^2}, \quad (4.22)$$

$$\Omega_b = \frac{c^2}{3 - A^2}, \quad (4.23)$$

son los parámetros actuales de densidad de materia oscura, energía oscura y materia bariónica respectivamente. Como estos parámetros están vinculados por la relación  $\Omega_{dm} + \Omega_{de} + \Omega_b = 1$ , concluimos que

$$(c + A)^2 - w_2\rho_{20} = 3, \quad (4.24)$$

y además se encuentra que las condiciones  $A^2 < 3$  y  $cA > 0$  son consistentes con el requisito de tener parámetros de densidad positivos.

Durante la época acelerada del universo  $\ddot{a} > 0$ , la condición fuerte sobre la energía es violada y  $\rho + 3p = \rho_1 + (1 + 3w_2)\rho_2 < 0$ . Esto conduce a  $-1 < w_2 < -1/3$ , si se recuerda la restricción considerada antes, de no permitir la transición universo acelerado a súper acelerado.

La quintaesencia exótica se basa esencialmente en la condición de integrabilidad (4.8) gracias a la cual obtenemos una primera integral de la ecuación del campo exótico (4.7). Realmente, a partir de la condición anterior  $cA > 0$  y de (4.14), se tiene que  $A\dot{\psi} > 0$  siempre que el universo esté en expansión. Luego,  $\rho_2$  es una función de Liapunov y la solución  $\rho_2 = 0$ , de la ecuación

(4.8), es asintóticamente estable. Además, de las ecuaciones (4.6), (4.9) y (4.14) resulta que la densidad de energía del primer fluido tiene límite nulo en el futuro remoto.

Con las ecuaciones (4.21) y (4.23) podemos expresar el parámetro  $A$  y la constante de integración  $c$  en términos de los parámetros de densidad actuales  $\Omega_b$ ,  $\Omega_{dm}$  y  $\Omega_{de}$ .

$$A = \frac{\pm \sqrt{3} \Omega_{dm}}{\sqrt{\Omega_{dm}^2 + 4\Omega_b}}, \quad (4.25)$$

$$c = \frac{\pm 2\sqrt{3} \Omega_b}{\sqrt{\Omega_{dm}^2 + 4\Omega_b}} \quad (4.26)$$

y además,

$$-w_2\rho_{20} = \frac{12\Omega_{de}\Omega_b}{\Omega_{dm}^2 + 4\Omega_b}. \quad (4.27)$$

Finalmente, el problema original que consistía en una mezcla de dos fluidos interactivos gobernados por el sistema de ecuaciones (4.3)-(4.4) resulta equivalente a un modelo efectivo de tres fluidos con ecuaciones de conservación separadas. De este modo, las ecuaciones dinámicas efectivas de nuestro modelo son

$$3H^2 = \rho_{dm} + \rho_{de} + \rho_b, \quad (4.28)$$

$$\dot{\rho}_{dm} + 3H(1 + w_{dm})\rho_{dm} = 0, \quad (4.29)$$

$$\dot{\rho}_{de} + 3H(1 + w_{de})\rho_{de} = 0, \quad (4.30)$$

$$\dot{\rho}_b + 3H\rho_b = 0, \quad (4.31)$$

### 4.3. DINÁMICA DE LAS COMPONENTES BARIÓNICA Y OSCURAS 69

donde

$$\rho_{dm} = 3H_0\Omega_{dm}(1+z)^{3/2}H, \quad (4.32)$$

$$\rho_{de} = 3H_0^2\Omega_{de}(1+z)^{3(1+\lambda)}, \quad (4.33)$$

$$\rho_b = 3H_0^2\Omega_b(1+z)^3, \quad (4.34)$$

son las densidades efectivas de energías de las componentes bariónica y oscuras y

$$w_{de} = \frac{2\Omega_b}{\Omega_{dm}^2 + 4\Omega_b} \left[ -2 + \frac{\Omega_{dm}H_0}{H}(1+z)^{3/2} \right], \quad (4.35)$$

es la ecuación de estado efectiva de la energía oscura. También encontramos la relación

$$w_{dm} = \frac{1}{2} \left[ -1 + \frac{3}{A^2}(1+w_{de})^2 \right], \quad (4.36)$$

entre las ecuaciones de estado efectivas de las componentes oscuras. De este modo, el conocimiento de una ellas determina la restante, y eso incluye a  $w$ .

Para obtener las ecuaciones efectivas dinámicas del modelo hemos tomado en cuenta que  $\rho_{de} \propto \rho_2$ . De allí, identificamos la ecuación de conservación (4.8) con (4.30) para expresar, luego de usar (4.10), la  $w_{de}$  efectiva para la energía oscura en términos de los parámetros de densidad observados, del factor de Hubble presente  $H_0$  y del corrimiento al rojo  $z$ .

En nuestro modelo, las soluciones estacionarias  $w^e = 0$  a tiempos tempranos y  $w^l = w_{de}^l = -1 + A^2/3$  a tiempos finales, junto con las ecuaciones (4.18) y (4.36), llevan a las soluciones estacionarias  $w_{de}^e = -1 + A/\sqrt{3}$ ,  $w_{de}^l = -1 + A^2/3$  y  $w_{dm}^e = 0$ ,  $w_{dm}^l = (-1 + A^2/3)/2$ . Como los parámetros de densidad observados verifican la condición  $\Omega_{dm}^2 < 8\Omega_b$ , usando la ecuación

(4.25) deducimos que se cumple  $A^2 < 2$ . En este caso, encontramos que  $w_{de}^e$  es una solución inestable en tiempos tempranos y  $w_{de}^l$  se hace finalmente estable de modo asintótico. Aquí, la evolución de la geometría representa un universo que comienza dominado por la materia en los tiempos tempranos y termina en una fase acelerada dominada por la componente de energía oscura.

La época acelerada comienza cuando  $\ddot{a} = 0$  o  $w = -1/3$ , en cuyo instante se satisface que  $-\dot{H}(z_{acc}) = H^2(z_{acc}) = -\dot{\psi}^2(z_{acc})/2$ . El correspondiente corrimiento al rojo  $z_{acc}$  de este evento se obtiene al combinar esa relación con  $w(z_{acc})\rho = w_2\rho_{de} = -H^2(z_{acc})$  y está dado por la expresión

$$z_{acc} = -1 + \left[ \frac{\Omega_b}{\Omega_{de}(\sqrt{2} - A)^2} \right]^{1/3w_{de}(z_{acc})}, \quad (4.37)$$

donde  $w_{de}(z_{acc}) = \lambda(z_{acc}) - 1 = \sqrt{2}A/3 - 1$ , y se usó la primera integral (4.14) para  $\dot{\psi}(z_{acc})$ .

Por otra parte, reemplazar (4.18) y (4.25) en la ecuación (4.35) nos permite calcular el tiempo transcurrido  $t_0$  desde la creación

$$t_0 = \frac{\Omega_{dm}}{3\Omega_b H_0} \left[ \frac{\sqrt{3}}{A} - 1 \right], \quad (4.38)$$

donde usamos que el factor de escala se comporta como  $a \approx a_0(t/t_0)^{2/3}$ , en los primeros tiempos.

## 4.4 Restricciones observacionales

El modelo de la quintaesencia exótica, en su interpretación de tres fluidos con ecuaciones de conservación separadas, depende de los valores de los parámetros  $H_0$ ,  $\Omega_{dm}$ ,  $\Omega_{de}$ ,  $\Omega_b$  y  $\lambda$ , que pueden ajustarse estadísticamente mediante la maximización de una función de probabilidad dependiente de dichos parámetros como se explica en el Apéndice C (pág. 115)[78].

Hemos considerado un espacio-tiempo plano, de modo que  $\Omega_{de} = 1 - \Omega_{dm} - \Omega_b$  y siguiendo a [79] se adoptó el valor a priori  $\Omega_b = 0.05$ . Esto redujo el número de parámetros a determinar a tres,  $\Omega_{dm}$ ,  $H_0$  y  $\lambda$ .

Minimizamos[80]

$$\chi^2(\Omega_{dm}, H_0, \lambda) = \sum_{i=1}^{12} \frac{[H_{th}(\Omega_{dm}, H_0, \lambda; z_i) - H_{ob}(z_i)]^2}{\sigma^2(z_i)} \quad (4.39)$$

donde

$$H_{th}(\Omega_{dm}, H_0, \lambda; z_i) = H_0(1 + z_i)^{3/2} \times \left[ \frac{\Omega_{dm}}{2} + \sqrt{\left(1 - \frac{\Omega_{dm}}{2}\right)^2 + (0.95 - \Omega_{dm}) [(1 + z_i)^{3(\lambda-1)} - 1]} \right] \quad (4.40)$$

es el valor predicho para el factor de Hubble, obtenido con la ecuación (4.20).

Con este procedimiento obtuvimos un  $\lambda_0 = 0.36$  y  $\Omega_{dm}^{(0)} = 0.2898$  que corresponden a un mínimo local  $\chi_{min}^2 = 7.43826$ . Según las expresiones (4.25) y (4.37), estos valores llevarían a que el universo comenzara su aceleración en un  $z_{ac}^{(0)} = 0.9$ .

Sin embargo,  $\lambda$  en la expresión (4.40) es realmente una función del corrimiento al rojo  $z$ . Está definida implícitamente a través de (4.15) y (4.19) como

$$\lambda(z, \Omega_{dm}, \Omega_b, \Omega_{de}) = \frac{\Omega_{dm}^2}{\Omega_{dm}^2 + 4\Omega_b} + \frac{2\Omega_{dm}\Omega_b}{(\Omega_{dm}^2 + 4\Omega_b) \ln(1+z)} \int_0^z \frac{\sqrt{1+u}}{H(u, \lambda)/H_0} du \quad (4.41)$$

Por esta razón, en primer lugar se llevó a cabo el ajuste de parámetros considerando a la variable  $\lambda$  como una constante y con ese valor constante  $\lambda_0$  a orden cero, insertado en  $H(u, \lambda)$  se procedió a aplicar la optimización descrita pero ahora con  $H(u, \lambda_0) = H(u)$ .

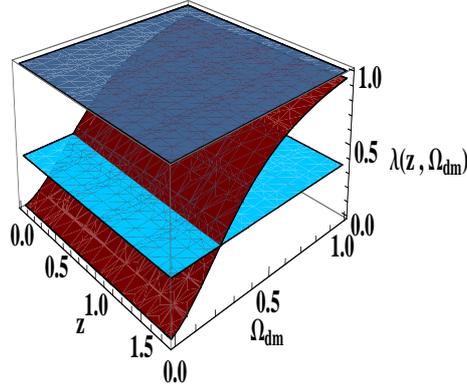


Figura 4.1: Ecuación de estado para la energía oscura  $\lambda(z, \Omega_{dm})$  considerando una métrica FRW plana y  $\Omega_b = 0.05$  [79].

Este paso previo era imprescindible porque, como puede observarse en la figura 4.1, el comportamiento de esta variable  $\lambda(z, \Omega_{dm})$  (superficie en rojo), para espacio-tiempo plano y  $\Omega_b = 0.05$  [79], dista mucho de ser el de un parámetro constante. El valor a orden cero de esta ecuación de estado (plano celeste en el dibujo), no resulta ser una buena opción en el proceso de ajuste de parámetros porque la dependencia con  $\Omega_{dm}$  es fuerte comparada con la dependencia respecto del corrimiento al rojo.

El mínimo local así obtenido es  $\chi_{min}^2 = 7.32219$  para  $a_{1bf} \equiv \Omega_{dmma} = 0.27$ ,  $a_{2bf} \equiv \Omega_{dema} = 0.678$  y  $a_{3bf} \equiv H_{0ma} = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ . Esto corresponde a un buen ajuste con  $\chi_{gr}^2 = 0.915 < 1$  por grado de libertad.

En la figura 4.2 se pueden apreciar las dos regiones de confianza  $1\sigma$  y  $2\sigma$  dentro de las cuales suelen encontrarse los valores observados de los parámetros

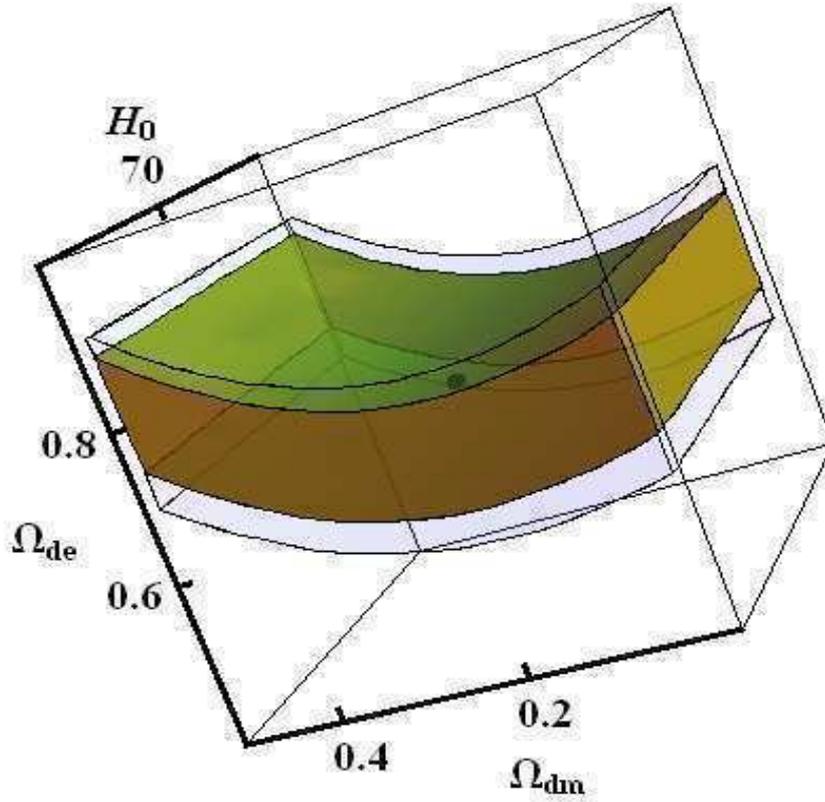


Figura 4.2: Regiones de confianza  $1\sigma$  y  $2\sigma$  para los parámetros  $\Omega_{dm}$ ,  $\Omega_{de}$  y  $H_0$  obtenidas a partir de los datos en [60], considerando una métrica FRW plana y con el valor apriori  $\Omega_b = 0.05$  [79]. La esfera negra indica el punto cuyas coordenadas  $(0.27, 0.68, 70)$ , corresponden a los valores mejor ajustados a las observaciones  $(\Omega_{dmma}, (\Omega_{dema}$  y  $H_{0ma})$ .

$\Omega_{dm}$ ,  $\Omega_{de}$  y  $H_0$ , con frecuencias del 68.3% y 95.4% respectivamente. La esfera negra indica el punto cuyas coordenadas (0.27, 0.68, 70), corresponden a los valores mejor ajustados a las observaciones ( $\Omega_{dmma}$ ,  $\Omega_{dema}$  y  $H_{0ma}$ ).

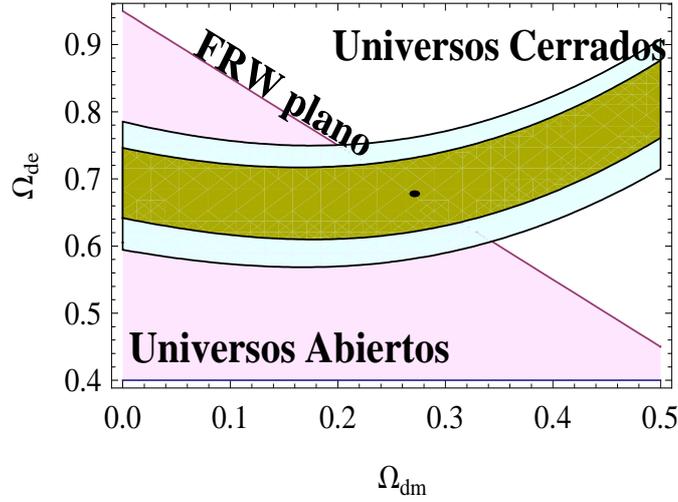


Figura 4.3: Corte de la figura 4.2, correspondiente al valor mejor ajustado del parámetro de Hubble  $H_{0ma} = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ . Si bien el ajuste fue considerado para un universo FRW plano, en un 94.5% de los conjuntos de datos puede hallarse compatibilidad con universos abiertos o cerrados.

La figura 4.3 es un corte de la figura 4.2 tomado para el valor mejor ajustado del parámetro de Hubble  $H_{0ma} = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ .

En la figura 4.4 se indican los puntos observacionales  $H(z)$  extraídos de [60], con sus correspondientes barras de error así como también la curva teórica (4.20) especializada en los valores mejor ajustados a los datos  $\Omega_{dm} = 0.27$ ,  $\Omega_{de} = 0.678$  y  $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ .

La figura 4.5 muestra que la curva de la aceleración, calculada para el modelo mejor ajustado a los datos observados, comienza a hacerse positiva alrededor de  $z_{acel} \sim 1.11$ . Este punto de transición gráfico coincide con el valor

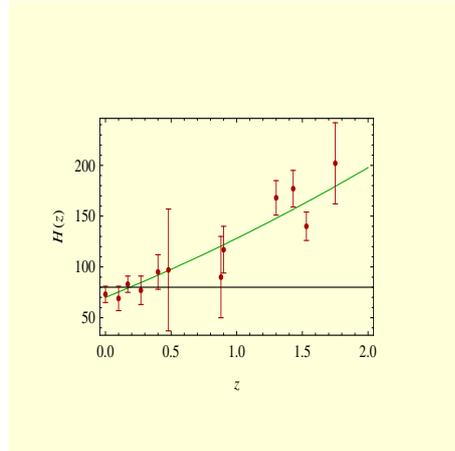


Figura 4.4: Función de Hubble  $H(z)$  para los valores mejor ajustados de los parámetros,  $\Omega_{dm} = 0.27$ ,  $\Omega_{de} = 0.678$  y  $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  obtenidos a partir de los datos consignados en [60], considerando una métrica FRW plana y con el valor a priori  $\Omega_b = 0.05$  [81]. Dichos valores observados también están indicados en esta figura a los fines de comparación.

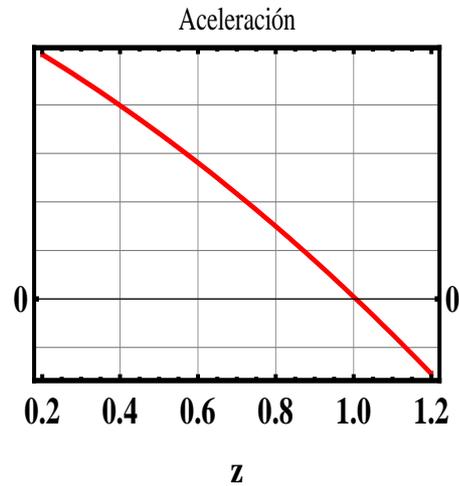


Figura 4.5: Aceleración vs. corrimiento al rojo para el modelo mejor ajustado.

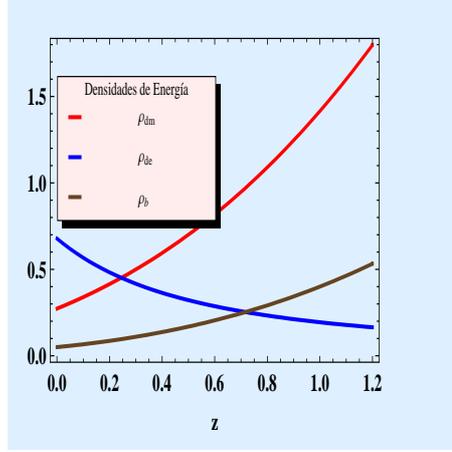


Figura 4.6: Densidades de energía (en unidades de  $3H_0^2$ ) vs. corrimiento  $z$ .

teórico obtenido mediante la expresión (4.37) para los valores mejor ajustados  $\Omega_{dm} = 0.27$  y  $\Omega_{de} = 0.678$ . La curva está calculada considerando que, a orden cero, la ecuación de estado para la energía oscura es una constante  $\lambda_0 = 0.36$ , valor que es usado en la expresión correcta de  $\lambda(z)$  (4.19) y que tiene influencia en el ritmo de variación  $\lambda'(z)$ .

El efecto de la corrección, esto es pasar de  $z_{accel}^{(0)} \sim 0.9$  a  $z_{accel} \sim 1.11$  concuerda notablemente con [82], en donde mediante un simple método numérico se obtienen los corrimientos al rojo de la transición aceleración negativa-aceleración positiva, en forma independiente del modelo cosmológico considerado y del parámetro de la ecuación de estado  $w$ . En la figura 9 de dicho trabajo se puede ver que para modelos con ecuaciones de estado que no hacen el cruce universo acelerado a súper acelerado, esto es  $w > -1$  siempre, los  $z_{accel}$  se alejan más de la época presente  $z = 0$  cuanto menor es el parámetro de densidad de materia  $\Omega_{dm}$ .

En la figura 4.6 mostramos las densidades de energía (en unidades de  $3H_0^2$ ) en función del corrimiento al rojo  $z$  y en la figura 4.7 graficamos las ecuaciones de estado para la materia bariónica, la materia oscura  $w_{dm}$ , la energía oscura  $w_{de}$ , el fluido efectivo  $w$  y la constante cosmológica  $w_\Lambda$ . De acuerdo con las predicciones del análisis de estabilidad previo basado en (4.17), resulta que el comportamiento asintótico de la ecuación de estado efectiva varía entre  $w \sim 0$  (cercano a un comportamiento de materia fría) en el pasado lejano y  $w = -1 + A^2/3 = -(1 + \Omega_{dm}^2/4\Omega_b)^{-1} \sim -0.733$  en el futuro lejano (comportamiento de energía oscura).

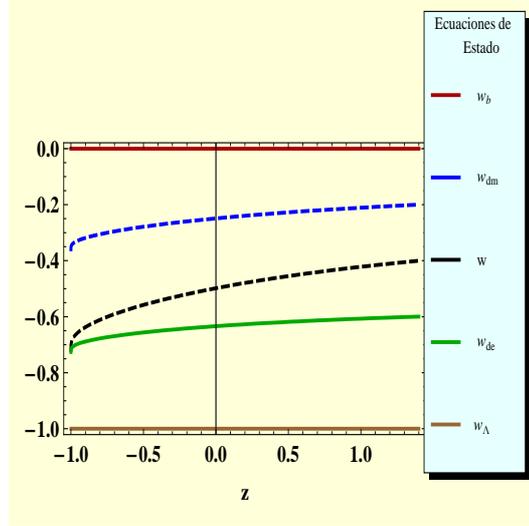


Figura 4.7: Evolución de las ecuaciones de estado para materia bariónica  $w_b$ , materia oscura  $w_{dm}$ , energía oscura  $w_{de}$ , fluido efectivo  $w$  y constante cosmológica  $w_\Lambda$ .

La unidad de tiempo usada en la Fig. 4.8 es  $H_0^{-1}$  y por lo tanto depende de como se la haya calculado. En este gráfico se está usando el valor  $H_0^{-1} = 1.41943 \times 10^{10}$  años que se corresponde con el valor mejor ajustado del modelo a los datos observacionales,  $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ . Este valor es ligeramente superior al derivado de usar  $H_0 = 72 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ ,  $H_0^{-1} = 1.38 \times 10^{10}$  años que es el usado generalmente para calibrar las edades estelares. En esta figura 4.8, están graficadas las curvas de tiempo transcurrido (en unidades de  $H_0^{-1}$ ), desde la singularidad inicial hasta los días presentes para el modelo de quintaesencia exótica y para el modelo  $\Lambda$ CDM, como una función de la densidad de materia oscura. Es importante observar que hay cota inferior para la edad del Universo fundada en la existencia de objetos estelares de edad considerable. Objetos muy antiguos, como la radio galaxia LBDS 53W091, ( $z = 1.55$  [83]) con una antigüedad estimada en  $3.5 \times 10^9$  años, la radio galaxia LBDS 53W069, ( $z = 1.43$  [84]) con  $4.0 \times 10^9$  años, y el quázar APM 08279+5255 ( $z = 3.91$ [85]) de unos  $2.1 \times 10^9$  años, así lo exigen. El dibujo se ha realizado considerando la estrella más antigua, descubierta en 2007 que se identifica como HE1523 – 0901 (parte del catálogo Hamburg/ESO Survey) y de la que se ha determinado que tiene una antigüedad de  $1.32 \times 10^{10}$  años. (o unos 0.929951 en las unidades del gráfico). Para un mismo parámetro de densidad de materia oscura, la edad del universo en este escenario exótico tiende a ser mucho mayor comparada

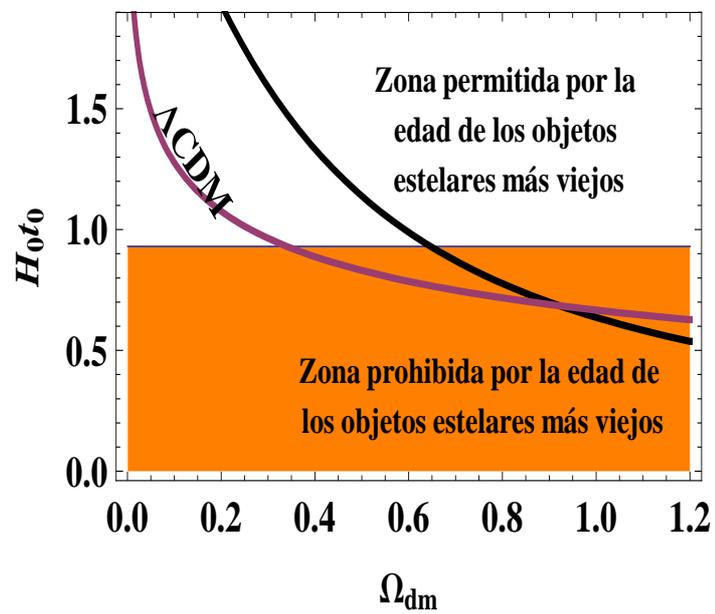


Figura 4.8: Edad del Universo (en unidades de  $H_0^{-1}$ ). La línea en color negro corresponde a nuestro modelo y la línea en bordó representa la edad de un modelo  $\Lambda$ CDM. La zona en color naranja corresponde a universos muy jóvenes que no son compatibles con la existencia de objetos estelares de mayor edad.

con los casos sin interacción [86].

## 4.5 Perturbaciones lineales

Los modelos cosmológicos con dos fluidos interactivos han sido investigados con el propósito de describir la evolución de las componentes oscuras. En ellos los tensores de energía momento de las componentes interactivos no se conservan separadamente. Usualmente estos modelos son presentados con especies materiales interactivas que tienen una ecuación de estado no constante [87] o bien con energía oscura de ecuación de estado constante acoplada a materia oscura [88],[89]. En nuestro modelo la interacción se fijó mediante la ecuación (4.8) y con esta elección obtuvimos la primera integral de la ecuación de conservación del campo. Veamos cómo evoluciona la perturbación de la densidad.

Para ello elegimos la medida sincrónica donde el elemento de línea se expresa como

$$ds^2 = a^2(\tau)[-d\tau^2 + (\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j], \quad (4.42)$$

donde la coordenada comóvil está relacionada con el tiempo propio  $t$  y la posición  $\mathbf{r}$  por  $d\tau = dt/a$ ,  $d\mathbf{x} = d\mathbf{r}/a$ , y  $h_{ij}$  es la perturbación de la métrica.

El modo escalar de  $h_{ij}$  está descrito por los dos campos  $h(\mathbf{k}, \tau)$  y  $\eta(\mathbf{k}, \tau)$  en el espacio de Fourier,

$$h_{ij}(\mathbf{x}, \tau) = \int d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left[ \hat{\mathbf{k}}_i \hat{\mathbf{k}}_j \mathbf{h} + (\hat{\mathbf{k}}_i \hat{\mathbf{k}}_j - \frac{1}{3}\delta_{ij})\eta \right]. \quad (4.43)$$

con  $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{k}}$ .

Las ecuaciones de Einstein a orden lineal en el espacio  $\mathbf{k}$ , expresadas en términos de  $h$  y  $\eta$ , están dadas por las cuatro ecuaciones siguientes [90]:

$$k^2\eta - \frac{1}{2}\frac{a'}{a}h' = 4\pi G a^2 \delta T_0^0, \quad (4.44)$$

$$k^2\eta' = 4\pi G a^2(\rho + p)\theta, \quad (4.45)$$

$$h'' + 2\frac{a'}{a}h' - 2k^2\eta = -8\pi Ga^2\delta T_i^i, \quad (4.46)$$

$$h'' + 6\eta'' + 2\frac{a'}{a}(h' + 6\eta') - 2k^2\eta = -24\pi Ga^2(\rho + p)\sigma. \quad (4.47)$$

Aquí, las cantidades  $\theta$  y  $\sigma$  están definidas como  $(\rho + p)\theta = ik^j\delta T_j^0$ ,  $(\rho + p)\sigma = -(\mathbf{k}_i\mathbf{k}_j - \delta_{ij}/3)\Sigma_j^i$  y  $\Sigma_j^i = T_j^i - \delta_j^i T_k^k/3$  describe la componente sin traza del tensor  $T_j^i$ . Además,  $\theta$  es la divergencia de la velocidad del fluido  $\theta = ik^j v_j$  y  $'$  significa  $d/d\tau$ .

Consideremos un fluido que se mueve con una pequeña velocidad coordinada  $v^i = dx^i/d\tau$ . Entonces,  $v^i$  puede ser tratada como una perturbación del mismo orden que las perturbaciones de la densidad de energía, de la presión y de la métrica. De aquí que, a orden lineal en las perturbaciones, el tensor de energía momento, con perturbación de arrastre anisotrópico nulo  $\Sigma_j^i$ , esté dado por

$$T_0^0 = -(\rho + \delta\rho), \quad (4.48)$$

$$T_i^0 = (\rho + p)v_i = -T_0^i, \quad (4.49)$$

$$T_j^i = (p + \delta p)\delta_j^i. \quad (4.50)$$

Para un fluido con ecuación de estado  $p = w\rho$ , las partes perturbadas de las ecuaciones de conservación del tensor de energía momento  $T_{;\mu}^{\mu\nu} = 0$  en el espacio de fase  $k$  conducen a las ecuaciones

$$\delta' = -(1+w)(\theta + \frac{h'}{2}) - 3\mathcal{H}(\frac{\delta p}{\delta\rho} - w)\delta, \quad (4.51)$$

$$\theta' = -\mathcal{H}(1-3w)\theta - \frac{w'}{1+w}\theta + \frac{\delta p/\delta\rho}{1+w}k^2\delta, \quad (4.52)$$

donde  $\delta = \delta\rho/\rho$  y  $\mathcal{H} = a'/a = aH = \dot{a}$ .

Por otra parte, con las ecuaciones (4.44), (4.46), (4.48) y (4.50) encontramos que

$$h'' + \mathcal{H}h' + 3\mathcal{H}^2 \left(1 + 3\frac{\delta p}{\delta\rho}\right) \delta = 0. \quad (4.53)$$

Antes asociamos nuestro modelo de dos fluidos interactivos con la descripción de un fluido perfecto efectivo basada en una ecuación de estado efectiva  $w = (w_1\rho_1 + w_2\rho_2)/(\rho_1 + \rho_2)$ . De ese modo, investigamos los regímenes asintóticos a tiempos tempranos y tardíos suponiendo ecuaciones de estado aproximadamente constantes  $w \approx w^e = 0$  y  $w \approx w^l = -1 + A^2/3$  respectivamente.

A tiempos tempranos, cuando el fluido efectivo tiene  $w \approx 0$ , las perturbaciones del fluido efectivo evolucionan de modo similar a las del polvo ordinario con  $\dot{\theta} = \theta = 0$ , y a partir de las ecuaciones (4.51) - (4.53) obtenemos

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - \frac{3}{2}H^2\delta = 0 \quad (4.54)$$

y  $\delta = c_1 t^{-1} + c_2 t^{2/3}$ , con  $c_1$  y  $c_2$  constantes de integración arbitrarias.

En esta era dominada por polvo la perturbación crece como  $\delta \approx a$  mostrando una fase inicial inestable compatible con la observación de que el universo primordial tuvo leves perturbaciones que constituyeron la semilla de la formación posterior de estructuras.

Para los tiempos tardíos, queremos encontrar la evolución de las perturbaciones lineales escalares de cada modo  $k$ . A este fin escribimos la ecuación diferencial de segundo orden para la perturbación de la densidad  $\delta$  y la ecuación diferencial de primer orden para la divergencia de la velocidad del fluido  $\theta$ , evaluándolas en el valor asintóticamente estable de la ecuación de estado  $w \approx w^l$ . En este caso, a partir de las ecuaciones (4.51) - (4.53) tenemos:

$$\begin{aligned} \delta'' + \mathcal{H}\delta' + \left(w^l k^2 - \frac{3}{2}(1 + w^l)(1 + 3w^l)\mathcal{H}^2\right)\delta \\ + 3w^l(1 + w^l)\mathcal{H}\theta = 0, \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\theta' = -\mathcal{H}(1 - 3w^l)\theta + \frac{w^l}{1 + w^l}k^2\delta. \quad (4.56)$$

Tomando en cuenta que en el régimen de tiempos tardíos el factor de escala se comporta como  $a \propto t^{2/3(1+w^l)}$  podemos calcular el tiempo conforme  $\tau$ ,  $a$  y  $\mathcal{H} = a'/a$

$$\tau \propto t^{(1+3w^l)/3(1+w^l)} \quad (4.57)$$

$$a \propto \tau^{2/(1+3w^l)} \quad (4.58)$$

$$\mathcal{H} = \frac{2}{(1 + 3w^l)\tau}. \quad (4.59)$$

Con las ecuaciones (4.55) y (4.56) vemos que la evolución de la perturbación resulta dependiente del modo con el término  $k^2/\mathcal{H}^2$ , y para los modos de baja energía sus soluciones pueden obtenerse suponiendo una dependencia tipo ley de potencias de las perturbaciones con el factor de escala,  $\delta \propto a^n$  y  $\theta \propto a^s$ . En este caso las soluciones aproximadas para  $w^l = -1 + A^2/3 = -0.63$  están dadas por

$$\theta \approx \frac{\theta_0}{a^{2.89}} \quad (4.60)$$

$$\delta \approx \frac{\delta_1}{a^{0.55}} + \frac{\delta_2}{a^{0.89}} + \frac{\theta_1}{a^{3.33}}, \quad (4.61)$$

donde  $\theta_0$ ,  $\delta_1$  y  $\delta_2$  son constantes de integración mientras que  $\theta_1$  es una función de  $\theta_0$  y  $w^l$ .

Esto muestra que el acoplamiento a  $\theta$  en la ecuación (4.55) puede ser despreciado a todas las escalas de interés. Finalmente, expresando la ecuación (4.55) en términos del tiempo conforme se tiene

$$\delta'' + \frac{2}{1 + 3w^l} \frac{\delta'}{\tau} + \left( wk^2 - 6 \frac{1 + w^l}{1 + 3w^l} \frac{1}{\tau^2} \right) \delta = 0. \quad (4.62)$$

La solución general de la última ecuación en términos de las funciones de Bessel es

$$\delta = \tau^b \left[ c_1 J_\nu(k\sqrt{w^l}\tau) + c_2 J_{-\nu}(k\sqrt{w^l}\tau) \right], \quad (4.63)$$

con

$$b = \frac{-1 + 3w^l}{2(1 + 3w^l)}, \quad \nu = \pm \frac{5 + 9w^l}{2(1 + 3w^l)}. \quad (4.64)$$

Para tiempos grandes, puede ser aproximada por los dos primeros términos de la ecuación (4.61) mostrando que la perturbación de la densidad de energía decrece para tiempo cosmológicamente largos si los modos satisfacen la condición  $k^2/\mathcal{H}^2 \ll 1$ . Para los modos de energía grande,  $k^2/\mathcal{H}^2 \gg 1$ , la perturbación

$$\delta \approx \frac{1}{a^{0.5}}, \quad (4.65)$$

disminuye, aunque más lentamente que la de los modos de baja energía. Estos resultados pueden comprenderse mejor escribiendo la ecuación (4.55) como la ecuación de movimiento de un sistema mecánico disipativo usando la analogía con el problema clásico del potencial

$$\frac{d}{d\tau} \left[ \frac{\delta'^2}{2} + \mathcal{V}(\delta) \right] = -D(\delta, \delta'), \quad (4.66)$$

donde

$$\mathcal{V}(\delta) = w^l k^2 \left( 1 - \frac{\mathcal{H}^2}{\mathcal{H}_0^2} \right) \frac{\delta^2}{2}, \quad (4.67)$$

$$D(\delta, \delta') = \mathcal{H}\delta'^2 + \frac{3}{2}(1 + w^l)(1 + 3w^l)\mathcal{H}\mathcal{H}'\delta^2, \quad (4.68)$$

$$\mathcal{H}_0^2 = \frac{2w^l k^2}{3(1+w^l)(1+3w^l)}. \quad (4.69)$$

El potencial  $\mathcal{V}$  tiene un extremo en  $\delta = 0$ , que corresponde a un máximo para  $\mathcal{H} < \mathcal{H}_0$  o a un mínimo para  $\mathcal{H} > \mathcal{H}_0$ . Por otra parte, suponiendo que la perturbación depende del factor de escala en la forma  $\delta \propto a^n$ , encontramos que  $D \approx 0.08\mathcal{H}^3\delta^2 > 0$ . De aquí se ve que para cualquier modo  $k$ , la perturbación comienza a crecer al comienzo de la evolución si  $\mathcal{H} < \mathcal{H}_0$ , mientras que a tiempos tardíos para  $\mathcal{H} > \mathcal{H}_0$ , la función dentro del paréntesis cuadrado en la ecuación (4.66) es una función de Liapunov y la perturbación decrece asintóticamente llegando a  $\delta = 0$  en el límite  $t \rightarrow \infty$ .

## 4.6 Cosmología exótica con tres fluidos

El paradigma de la quintaesencia exótica está descrito por la ecuación (4.6) y la (4.8) que describe el potencial exótico  $V(\psi)$ . Un problema más realista, es aquél que toma en cuenta un fluido adicional con ecuación de estado  $w_3$  que no participa de la interacción y se conserva por separado. El conjunto de ecuaciones para esta generalización es

$$3H^2 = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3, \quad (4.70)$$

$$\dot{\rho}_1 + \dot{\rho}_2 + 3H((1 + w_1)\rho_1 + (1 + w_2)\rho_2) = 0, \quad (4.71)$$

$$\dot{\rho}_3 + 3H((1 + w_3)\rho_3) = 0, \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned} -2\dot{H} &= (1 + w_1)\rho_1 + (1 + w_2)\rho_2 + (1 + w_3)\rho_3 \\ &= \dot{\psi}^2 + (1 + w_1)\rho_3 \\ &= (1 + w)\rho, \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$\ddot{\psi} + \frac{3}{2}(1 + w_1)H\dot{\psi} + \frac{w_1 - w_2}{2} \frac{\dot{\rho}_2}{\dot{\psi}} = 0, \quad (4.74)$$

$$\dot{\rho}_2 + A\dot{\psi}\rho_2 = 0. \quad (4.75)$$

Seguimos los mismos pasos que en la sección 3.2 (pág.64), nos permitieron llegar a la primera integral de la ecuación (4.74), y llegamos a

$$\frac{d}{dt}(\dot{\psi} - AH) + \frac{3}{2}H(1 + w_1)(\dot{\psi} - AH) = \frac{A}{2}(w_3 - w_1)\rho_3 a^{-3(1+w_3)}.$$

Cuando consideramos el caso en que las ecuaciones de estado son las mismas para  $\rho_1$  y  $\rho_3$ , esto es  $w_3 = w_1$ , reobtenemos la expresión (4.14).

Sin embargo, la presencia del fluido adicional genera un pequeño cambio. Ahora la ecuación de segundo orden para el factor de escala, altamente no lineal, se escribe como

$$2\dot{H} + A^2 H^2 + 2AcH_0 H a^{-3(1+w_1)/2} + \left(c^2 H_0^2 + \rho_{03}(1+w_1)\right) a^{-3(1+w_1)} = 0 \quad (4.76)$$

Antes de aplicarnos a la resolución de (4.76) debemos observar que, entre todas las soluciones posibles, sólo podemos elegir aquéllas que mantienen real el factor de Hubble  $H$ . Esto surge de la ecuación (4.16) que ahora se escribe

$$3H^2 \left(3(1+w_1) - A^2\right) - 6cAH_0 H (1+z)^{3(1+w_1)/2} - 3(w_1 - w_2)\rho_2 - 3 \left(c^2 H_0^2 - \rho_{03}(1+w_1)\right) (1+z)^{3(1+w_1)} = 0, \quad (4.77)$$

y muestra una ecuación cuadrática en  $H$  cuyas dos raíces deben ser reales para todo valor del factor de escala. Entonces, el discriminante debe satisfacer que

$$\left(3(1+w_1) - A^2\right)(w_1 - w_2) V a^{3(1+w_1)} + (1+w_1) \left(3c^2 H_0^2 + \rho_{03} \left(3(1+w_1) - A^2\right)\right) \geq 0. \quad (4.78)$$

Cuando el valor del factor de escala es tan grande que sólo subsiste el primer término de (4.78), es necesario pedir que se cumpla alguna de las dos opciones siguientes:

- $3(1+w_1) > A^2$     y     $w_1 > w_2$
- $3(1+w_1) < A^2$     y     $w_1 < w_2$

En la interpretación del problema equivalente de tres fluidos con ecuaciones de conservación separadas, los requisitos  $w_1 = 0$  ( para identificar la materia bariónica) y  $A^2 < 2$  (universo acelerado), determinan que sólo se considere la primera de esas dos opciones. Para ese problema en particular, se debe tomar  $A^2 < 6$  y  $w_2 < 0$ .

### 4.6.1 Soluciones implícitas

Es conveniente el cambio de variables

$$a = s^{2/A^2} \quad y \quad \tau = Act$$

que permite escribir la ecuación (4.76) de modo más simple como

$$s'' + s' s^n + \beta s^{2n+1} = 0 \quad (4.79)$$

donde

$$n \equiv -3(1 + w_1)/A^2, \quad \beta \equiv (c^2 H_0^2 + \rho_{03}(1 + w_1))/4c^2 H_0^2$$

y las derivadas son relativas a  $\tau$ .

Para linealizar esta complicada ecuación (4.79) vamos a usar transformaciones no locales de variables que pertenecen al grupo de simetrías de forma de esta ecuación como se explica en el Apéndice B (pág.113). En este caso, las transformaciones adecuadas son  $z = \int f(s)ds$  y  $\eta = \int f(s)d\tau$  para  $f(s) = s^n$ .

En el caso  $3(1 + w_1) = A^2$ , (equivalente a  $n = -1$ ), es

$$z = \ln(s), \quad \frac{d\eta}{d\tau} = s^{-1}, \quad (4.80)$$

$$\overset{\circ}{z} + \overset{\circ}{z} + \beta = 0, \quad (4.81)$$

mientras que si  $-3(1 + w_1) \neq A^2$ , es

$$z = \frac{s^{n+1}}{n+1}, \quad \frac{d\eta}{d\tau} = s^n, \quad (4.82)$$

$$\ddot{z} + \dot{z} + \beta(n+1)z = 0, \quad (4.83)$$

con  $\circ = d/d\eta$ .

**Factor de escala y quintaesencia exótica**  
( $3\gamma_1 = A^2$ )

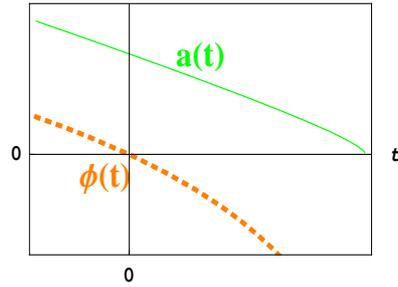


Figura 4.9: Factor de escala  $a(t)$  y quintaesencia exótica  $\psi(t)$  para el caso en que  $A^2 = 3(1 + w_1) = 3$ , en unidades arbitrarias y fijando el tiempo actual como  $\eta_0 = t_0 = 0$ .

Las soluciones implícitas son

- $3(1 + w_1) = A^2$

$$a(\eta) = a_0 e^{\frac{-2\beta}{A^2}(\eta - \eta_0) + \frac{2}{A^2}(e^{-\eta} - e^{-\eta_0})}, \quad (4.84)$$

$$\psi(\eta) = \psi_0 + \frac{1 - 2\beta}{A}(\eta - \eta_0) + \frac{2}{A}(e^{-\eta} - e^{-\eta_0}), \quad (4.85)$$

$$t(\eta) = t_0 + \frac{1}{AcH_0} \int_{\eta_0}^{\eta} e^{-\beta\nu + e^{-\nu}} d\nu. \quad (4.86)$$

Como  $d\eta/dt = e^{-z}/AcH_0$ , los tiempos  $\eta$  y  $t$  corren en el mismo sentido para  $AcH_0 > 0$ , de modo que la descripción corresponde a un universo que se contrae, siempre con aceleración negativa, y tiene una singularidad en el futuro donde termina colapsando en una gran implosión.

Este comportamiento del factor de escala se muestra en la figura 4.9 así como también la evolución temporal del campo de quintaesencia exótica para el caso  $A^2 = 3\gamma_1 = 3$  considerando que el tiempo actual es  $\eta_0 = t_0 = 0$ .

•  $3(1 + w_1) \neq A^2$

Acá se presentan dos situaciones diferentes según que el parámetro

$$\alpha = \frac{3(1 + w_1)}{4A^2} + \frac{(1 + w_1)\rho_{03}(3(1 + w_1) - A^2)}{4c^2 H_0^2 A^2}$$

sea positivo o negativo

1.  $\alpha \equiv \mu^2 > 0$

$$\left( \frac{a(\eta)}{a_0} \right)^{\frac{(A^2 - 3(1 + w_1))}{2}} = \left( \cosh(\mu(\eta - \eta_0)) + B \sinh(\mu(\eta - \eta_0)) \right) e^{\frac{-(\eta - \eta_0)}{2}} \quad (4.87)$$

$$(\psi - \psi_0) = n(\eta - \eta_0)/A(1 + n) + \ln \left( \cosh(\mu(\eta - \eta_0)) + B \sinh(\mu(\eta - \eta_0)) \right)^{2/A(1 + n)} \quad (4.88)$$

$$t(\eta) - t_0 = (n + 1)^{\frac{-n}{n+1}} \times \int_{\eta_0}^{\eta} d\bar{\eta} \frac{e^{\left(\frac{n}{2(n+1)}(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0)\right)}}{AcH_0} \left[ \cosh(\mu(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0)) + B \sinh(\mu(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0)) \right]^{\frac{-n}{(n+1)}} \quad (4.89)$$

2.  $\alpha \equiv -\nu^2 < 0$

$$\left(a(\eta)/a_0\right)^{\frac{(A^2-3(1+w_1))}{2}} = \left(\cos(\nu(\eta - \eta_0)) + B \sin(\nu(\eta - \eta_0))\right) e^{\frac{-(\eta-\eta_0)}{2}} \quad (4.90)$$

$$(\psi - \psi_0) = n(\eta - \eta_0)/A(1+n) + \ln \left( \cos \nu(\eta - \eta_0) + B \sin \nu(\eta - \eta_0) \right)^{2/A(1+n)} \quad (4.91)$$

$$t(\eta) - t_0 = (n+1)^{\frac{-n}{n+1}} \times \int_{\eta_0}^{\eta} d\bar{\eta} \frac{e^{\left(\frac{n}{2(n+1)}(\bar{\eta}-\bar{\eta}_0)\right)}}{AcH_0} \left[ \cos(\nu(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0)) + B \sin(\nu(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0)) \right]^{\frac{-n}{(n+1)}} \quad (4.92)$$

donde

$$B = \frac{\dot{\psi}_0(n+1)^{1/(n+1)} + cH_0 - (n+1)}{2|\alpha|cH_0}.$$

Los comportamientos de  $a(t)$  y de  $\psi(t)$  para el caso  $w_2 < w_1$  son distintos de los correspondientes al caso  $w_1 < w_2$  como se puede apreciar en las figuras 4.10 y 4.11.

**Factor de escala y quintaesencia exótica**  
 ( $\alpha > 0$ )

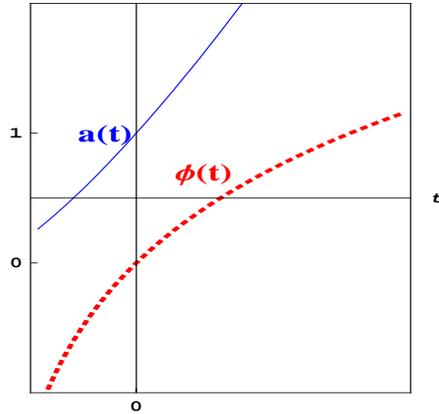


Figura 4.10: Factor de escala  $a(t)$  y quintaesencia exótica  $\psi(t)$  para el caso en que  $\alpha > 0$ , en unidades arbitrarias y fijando el tiempo actual como  $\eta_0 = t_0 = 0$ .

**Factor de escala y quintaesencia exótica**  
 ( $\alpha < 0$ )

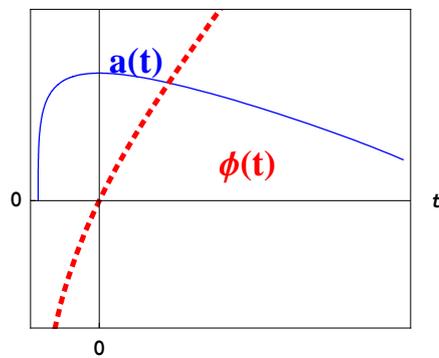


Figura 4.11: Factor de escala  $a(t)$  y quintaesencia exótica  $\psi(t)$  para el caso en que  $\alpha < 0$ , en unidades arbitrarias y fijando el tiempo actual como  $\eta_0 = t_0 = 0$ .

## Capítulo 5

# Modelos de materia oscura en interacción con energía oscura

### 5.1 Introducción

En general muchos trabajos han propuesto que la materia oscura y la energía oscura estuvieran en interacción [91],[22]. El acoplamiento ha estado motivado por consideraciones de la física de partículas de altas energías [22] o construido mediante el requisito de que el cociente final entre materia y energía oscura fuera constante [24], [25]. Dentro de esta última línea de trabajo, usamos dos fluidos interactivos con índices barotrópicos constantes para modelar el sector oscuro y encontramos el conjunto de las interacciones que conducen a soluciones estables para el cociente materia oscura-energía oscura y satisfacen el comportamiento esperado desde la era dominada por materia hasta hoy.

### 5.2 Modelo oscuro interactivo

Consideramos un universo modelado con una mezcla de tres constituyentes: materia y energía oscuras en interacción y bariones libres. Las ecuaciones de Friedmann y de conservación de la energía son

$$3H^2 = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3, \quad (5.1)$$

$$\dot{\rho}_1 + \dot{\rho}_2 + 3H(\rho_1 + p_1 + \rho_2 + p_2) = 0, \quad (5.2)$$

$$\dot{\rho}_3 + 3H(\rho_3 + p_3) = 0. \quad (5.3)$$

respectivamente. Los subíndices 1 y 2 se refieren a materia oscura y energía oscura respectivamente, mientras que el subíndice 3 identifica a los bariones. Hemos supuesto que la materia bariónica es una componente que no interactúa con la materia oscura ni con la energía oscura de modo que se conserva por separado. Además, considerando a los bariones como materia sin presión ( $p_3 = 0$ ), integramos la ecuación (5.3) obteniendo  $\rho_3 = \rho_3^0 (a_0/a)^3$ . En esa expresión  $\rho_3^0$  y  $a_0$  denotan el valor presente de la densidad de energía y el factor de escala cósmico, respectivamente. Por lo tanto, la ecuación (5.2) ahora expresa la interacción entre materia y energía oscuras permitiendo el mutuo intercambio de energía y momento. Luego, no existe conservación local de la energía-momento para ambos fluidos oscuros por separado. No obstante, podemos separar la ecuación (5.2) en dos ecuaciones de conservación efectivas

$$\dot{\rho}_1 + 3H\gamma_1^e \rho_1 = 0, \quad (5.4)$$

y

$$\dot{\rho}_2 + 3H\gamma_2^e \rho_2 = 0. \quad (5.5)$$

En las ecuaciones anteriores se introdujeron índices barotrópicos efectivos  $\gamma_i^e$  ( $i = 1, 2$ ) definidos por

$$\gamma_1^e = \gamma_1 + \frac{\gamma_2}{r} + \frac{\dot{\rho}_2}{3H\rho_1}, \quad (5.6)$$

$$\gamma_2^e = \gamma_2 + \gamma_1 r + \frac{\dot{\rho}_1}{3H\rho_2}, \quad (5.7)$$

donde  $r = \rho_1/\rho_2$  es el cociente entre las densidades de energía y los  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ) representan los índices barotrópicos de los fluidos interactivos.

Además tenemos la relación

$$(\gamma_1^e - \gamma_1)r + (\gamma_2^e - \gamma_2) = 0, \quad (5.8)$$

y la ecuación dinámica para el cociente  $r$ ,

$$\dot{r} = -3Hr\Delta\gamma^e, \quad \Delta\gamma^e = \gamma_1^e - \gamma_2^e. \quad (5.9)$$

Suponemos que el índice barotrópico efectivo de la energía oscura está dado por  $\gamma_2^e = \gamma_2 - F(r)$ , donde  $F(r)$  es una función que depende del cociente  $r$ , de modo que se tiene

$$\Delta\gamma^e = \Delta\gamma + F(r) \left(1 + \frac{1}{r}\right), \quad \Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2. \quad (5.10)$$

Tomando en cuenta la representación anterior para  $\gamma_2^e$ , las ecuaciones (5.4) y (5.5) se pueden escribir como

$$\dot{\rho}_1 + 3H\rho_1\gamma_1 = -3H\rho_2F(r), \quad (5.11)$$

$$\dot{\rho}_2 + 3H\rho_2\gamma_2 = 3H\rho_2F(r). \quad (5.12)$$

Ahora es posible identificar el lado derecho de cada una de las ecuaciones anteriores con la transferencia de energía entre materia oscura y energía oscura, mientras que la función  $F$  define la interacción.

Para hacer el estudio asintótico del cociente de densidades  $r$  dado por la ecuación (5.9) junto con la ecuación (5.10), buscamos las condiciones para que las soluciones estacionarias  $r = r_s$ , representan una etapa estable del universo. De acuerdo con este planteo y con la ecuación (5.9), eso significa que  $\Delta\gamma^e(r_s) = 0$  y que las soluciones constantes  $r_s$  serán asintóticamente estables siempre que  $(d\Delta\gamma^e/dr)_{r=r_s} > 0$ . En términos de la ecuación (5.9), ese requisito conduce a la condición de estabilidad

$$r_s (1 + r_s) \left( \frac{dF}{dr} \right)_{r=r_s} - F(r_s) > 0, \quad (5.13)$$

donde se ha supuesto que los índices barotrópicos  $\gamma_i$  de los dos fluidos son constantes. Nótese que una función  $F$  constante y negativa satisface la última condición.

### 5.2.1 $F(r) = \text{constante} < 0$

Elegimos la función  $F(r)$  como

$$F(r) = -\frac{r_\infty}{1 + r_\infty} \Delta\gamma, \quad (5.14)$$

donde  $r_\infty$  es un valor constante del cociente entre densidades de energía en el límite  $a \rightarrow \infty$ . Entonces integramos la ecuación (5.9) para  $r$  como así también las ecuaciones de conservación efectivas (5.11) y (5.12) para las densidades de energía. Obtuvimos así que

$$\rho_1 = \rho_2^0 \left\{ r_\infty + (r_0 - r_\infty) \left( \frac{a_0}{a} \right)^{3\alpha} \right\} \left( \frac{a_0}{a} \right)^\beta, \quad (5.15)$$

$$\rho_2 = \rho_2^0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^\beta, \quad (5.16)$$

donde  $a_0$  y  $r_0$  son los valores actuales del factor de escala cósmico y del cociente de las densidades de energía, mientras que

$$\alpha = \frac{\Delta\gamma}{1 + r_\infty}, \quad \beta = 3 \frac{r_\infty \gamma_1 + \gamma_2}{1 + r_\infty}. \quad (5.17)$$

Como es usual, se introduce el corrimiento al rojo  $z = 1/a - 1$  y los parámetros de densidad a tiempo presente  $z_0 = 0$ ,

$$\Omega_1^0 = r_0 \Omega_2^0, \quad \Omega_2^0 = \frac{\rho_2^0}{3H_0^2}, \quad \Omega_3^0 = \frac{\rho_3^0}{3H_0^2}, \quad (5.18)$$

con  $\Omega_1^0 + \Omega_2^0 + \Omega_3^0 = 1$ . Una vez conocida la dependencia explícita con  $z$  de las densidades de energía pudimos reescribir la ecuación de Friedmann (5.1), gracias a (5.15) y (5.16), como

$$H^2 = H_0^2 \left( \Omega_2^0 (1 + r_\infty)(1 + z)^\beta + \Omega_3^0 (1 + z)^3 + [1 - \Omega_3^0 - (1 + r_\infty)\Omega_2^0] (1 + z)^{3\gamma_1} \right),$$

la cual da la dependencia del factor de Hubble  $H$  con respecto al corrimiento al rojo  $z$ .

### 5.2.2 $F(r)$ variable

Para el caso variable elegimos la función  $F(r)$

$$F(r) = -\frac{(1-r)r_\infty^2}{r(1-r_\infty^2)} \Delta\gamma, \quad (5.19)$$

donde  $r_\infty$  tiene el mismo significado que en el caso previo. En este caso la solución de las ecuaciones (5.11) y (5.12) están dadas por

$$\rho_1 = \rho_2^0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^{3\epsilon} \sqrt{r_\infty^2 + (r_0^2 - r_\infty^2) \left( \frac{a_0}{a} \right)^\nu} \left[ \frac{(1-r/r_\infty)(1+r_0/r_\infty)}{(1-r_0/r_\infty)(1+r/r_\infty)} \right]^{\frac{r_\infty}{2}}, \quad (5.20)$$

$$\rho_2 = \rho_2^0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^{3\epsilon} \left[ \frac{(1-r/r_\infty)(1+r_0/r_\infty)}{(1-r_0/r_\infty)(1+r/r_\infty)} \right]^{\frac{r_\infty}{2}}, \quad (5.21)$$

donde

$$\nu = \frac{6\Delta\gamma}{1-r_\infty^2}, \quad \epsilon = \gamma_2 - \frac{\Delta\gamma r_\infty^2}{1-r_\infty^2}. \quad (5.22)$$

Además el parámetro de Hubble  $H$  puede ser expresado como función del corrimiento al rojo obteniéndose

$$\begin{aligned} \frac{H^2}{H_0^2} &= \Omega_2^0 (1+z)^{3\epsilon} \left[ \frac{(1-r/r_\infty)(1+r_0/r_\infty)}{(1-r_0/r_\infty)(1+r/r_\infty)} \right]^{\frac{r_\infty}{2}} \\ &\times \left\{ 1 + \sqrt{r_\infty^2 + (r_0^2 - r_\infty^2)(1+z)^\nu} \right\} + \Omega_3^0 (1+z)^3. \end{aligned} \quad (5.23)$$

### 5.3 Restricciones observacionales

En esta sección ajustamos los valores de los parámetros  $(r_\infty, \beta)$  para el caso  $F(r)$  constante y  $(r_\infty, \gamma_2)$  para el caso  $F(r)$  variable. Estos parámetros, denotados genéricamente por  $\pi_i$ , son establecidos mediante los datos de la función  $H(z)$  como se explica en el Apéndice C (ver pág. 115). Los valores a priori considerado fueron  $H_0 = 72 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  (valor medio de los resultados del Hubble Space Telescope key project),  $\Omega_1^0 = 0.25$ ,  $\Omega_2^0 = 0.70$  y  $\Omega_3^0 = 0.05$  [92]. Además supusimos un universo espacialmente plano con materia oscura no relativista (polvo),  $\gamma_1 = 1$ . Los parámetros incluidos en las expresiones teóricas del factor de Hubble  $H_{th}$  fueron  $\pi_1 = r_\infty$ ,  $\pi_2 = \beta$  en el caso  $F$  constante y  $\pi_1 = r_\infty$  y  $\pi_2 = \gamma_2$ , para el caso  $F$  variable.

Las regiones de confianza que se explican en el Apéndice C, son aquí bidimensionales y están delimitadas por curvas elípticas. La región  $1\sigma$  comprende los puntos de los espacios de parámetros  $\beta$  vs.  $r_\infty$  o bien  $r_\infty$  vs.  $\gamma_2$ , que en el 68% de los conjuntos aleatorios de datos darán una  $\chi^2$  tal que

$$\chi^2(\pi_1, \pi_2) - \chi^2(\pi_{1bf}, \pi_{2bf}) \leq 2.3. \quad (5.24)$$

Similarmente, la región  $2\sigma$  alberga los puntos que en el 95.4% de los conjuntos aleatorios de datos darán valores de  $\chi^2$  tales que

$$\chi^2(\pi_1, \pi_2) - \chi^2(\pi_{1bf}, \pi_{2bf}) \leq 6.17. \quad (5.25)$$

Las dos inecuaciones tienen como frontera curvas elípticas en el espacio de los parámetros a ajustar y encierran el punto cuyas coordenada son los valores

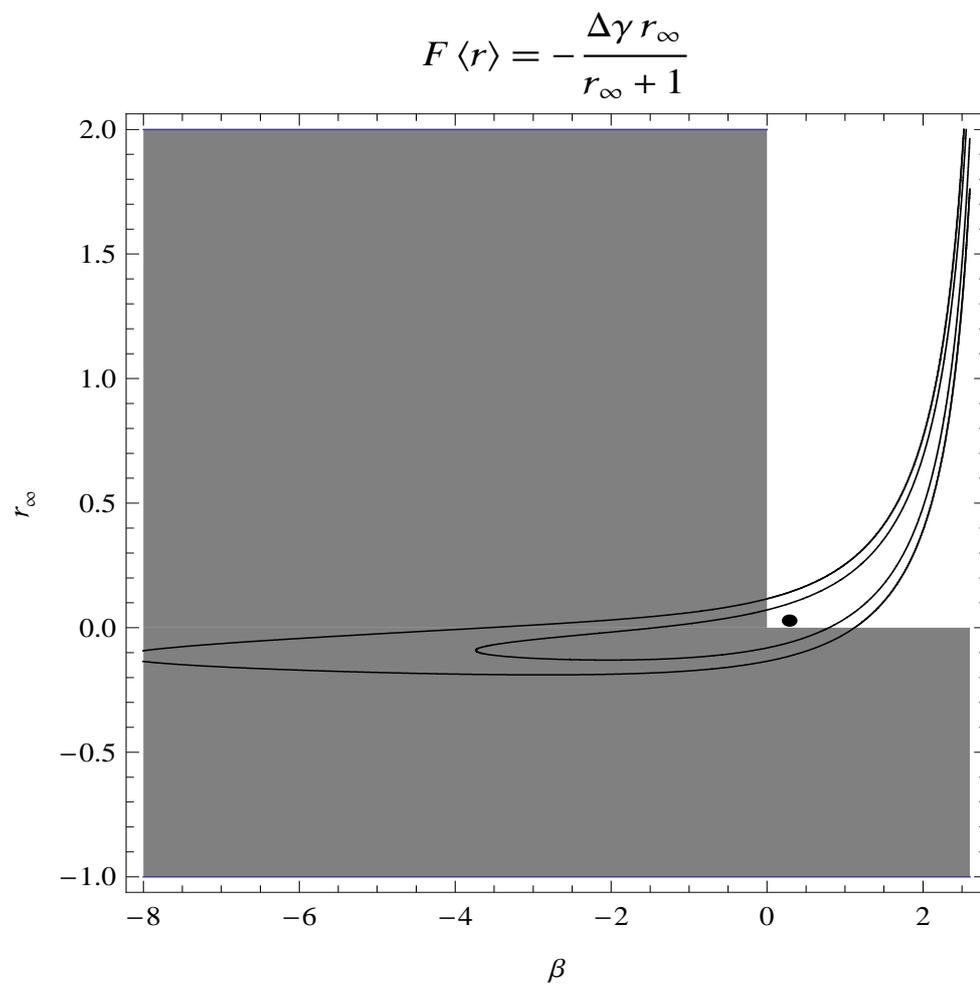


Figura 5.1: Regiones de confianza  $1\sigma$  y  $2\sigma$  en el espacio de parámetros  $\beta$  vs.  $r_\infty$  para el caso  $F$  constante.

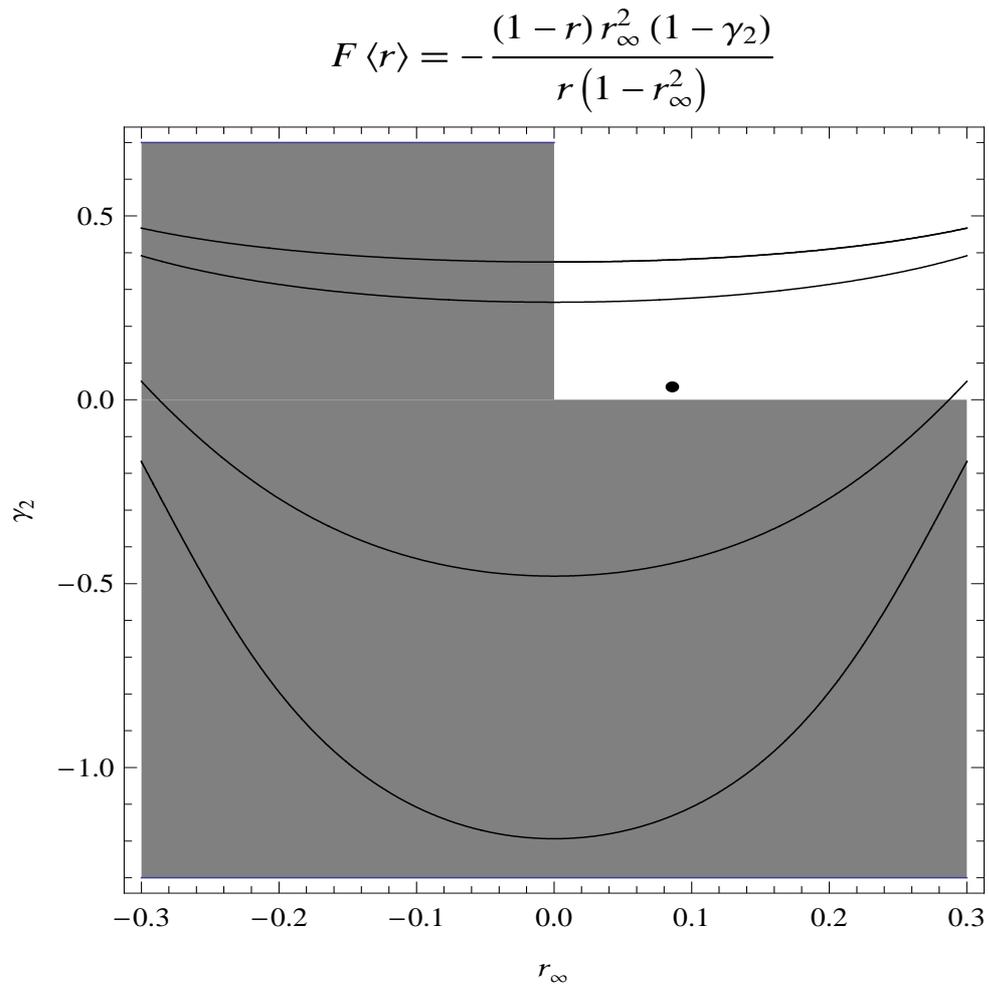


Figura 5.2: Regiones de confianza  $1\sigma$  y  $2\sigma$  en el espacio de parámetros  $r_{\infty}$  vs.  $\gamma_2$  para el caso  $F$  variable.

mejor ajustados por esa base de datos.

El mínimo local en el caso de la función  $F$  constante es  $\chi^2 = 9.02445$  para  $r_\infty = 0.0230767$  y  $\beta = 0.302457$ . De allí se sigue con  $\gamma_1 = 1$  en la ecuación (5.17), que  $\gamma_2 = 0.0800689$  y  $\alpha = 0.899181$ .

En el caso  $F$  variable, el mínimo es  $\chi^2 = 9.03738$  para  $r_\infty = 0.0851298$  y  $\gamma_2 = 0.0328392$ .

En las figuras 5.1 y 5.2 se han dibujado las regiones de confianza, esto es, las secciones de las curvas elípticas, en los planos  $\beta$  vs.  $r_\infty$  para  $F$  constante y  $r_\infty$  vs.  $\gamma_2$  para  $F$  variable, respectivamente. Los puntos de las regiones interiores a las elipses internas y aquéllos de las regiones interiores a las elipses externas identifican los valores de los parámetros que se encuentran un 68.3% o un 95.4% de las veces, respectivamente, al usar esa base de datos. En ambas figuras, se representa con un punto el valor mejor ajustado para cada modelo, mientras que las zonas sombreadas representan los valores negativos, que están prohibidos.

## 5.4 Soluciones numéricas

En esta sección mostramos soluciones numéricas de los ejemplos propuestos en las secciones previas. Primero analizamos los parámetros de densidad que están graficados como funciones del corrimiento al rojo en el esquema superior de la figura 5.3. Las líneas enteras corresponden a  $F(r)$  constante, mientras que las líneas cortadas identifican el caso  $F(r)$  variable. De esta figura se puede inferir que la transferencia de energía desde la materia oscura a la energía oscura es más pronunciada para el caso variable, dado que el crecimiento del parámetro de densidad de la energía oscura y el correspondiente descenso de la materia oscura para este caso son más marcados que para el caso constante. Este comportamiento también puede verificarse en el esquema inferior de la figura 5.3 que representa la evolución del cociente entre ambas densidades de energía  $r = \rho_1/\rho_2$  con el corrimiento al rojo. Esta última figura también muestra que en el futuro, esto es, para valores negativos del corrimiento al rojo, no existen diferencias entre ambos casos. Ambos tienden a valores pequeños indicando el predominio futuro de la energía oscura. En la figura 5.4 se dibuja el parámetro de desaceleración  $q = 1/2 + 3p/2\rho$  para ambos casos. El valor presente del parámetro de desaceleración  $q(0)$  y el valor del corrimiento al rojo  $z_t$  donde se produce la transición del régimen no acelerado al acelerado son: (i)  $q(0) \approx -0.47$  y  $z_t \approx 0.72$  para  $F$  constante y (ii)  $q(0) \approx -0.52$  y  $z_t \approx 0.68$  para  $F$  variable.

Estos valores tienen el mismo orden de magnitud de los valores experimentales:  $q(0) = -0.74 \pm 0.18$  (ver [93]) y  $z_t = 0.46 \pm 0.13$  (ver [94]).

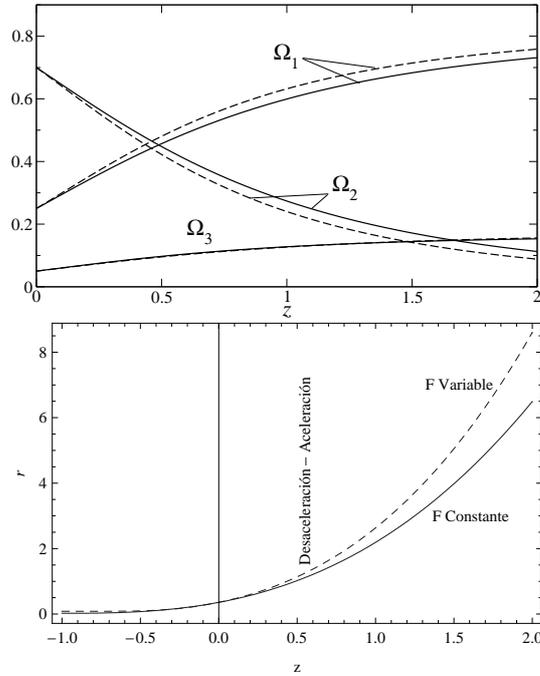


Figura 5.3: Superior: Parámetros de densidad como funciones del corrimiento al rojo; Inferior: cociente entre materia oscura y energía oscura como función del corrimiento al rojo. Línea entera –  $F$  constante; Líneas cortadas - -  $F$  variable.

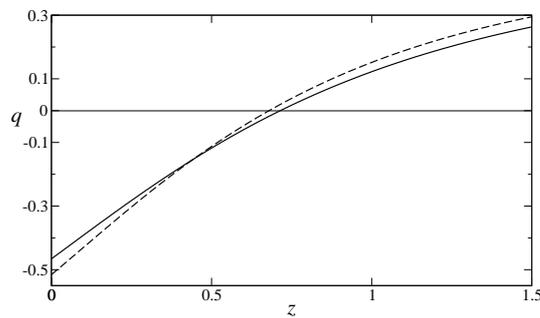


Figura 5.4: Parámetro de desaceleración como función del corrimiento al rojo. Línea entera –  $F$  constante; Líneas cortadas - -  $F$  variable.

Las ecuaciones de estado para la materia oscura y la energía oscura pueden escribirse en términos de los parámetros efectivos  $w_1^e = \gamma_1^e - 1$  y  $w_2^e = \gamma_2^e - 1$  como

$$p_1 = w_1^e \rho_1, \quad p_2 = w_2^e \rho_2, \quad (5.26)$$

respectivamente. En la figura 5.5 hemos graficado los parámetros efectivos  $w_1^e$  y  $w_2^e$  como funciones del corrimiento al rojo  $z$ . Para el caso variable observamos que en el rango  $-1 \leq z \leq 2$  los parámetros efectivos toman valores entre:  $-0.89 \lesssim w_1^e \lesssim 7.2 \times 10^{-4}$  y  $-0.89 \lesssim w_2^e \lesssim -0.97$ . Entonces, en este modelo la ecuación de estado efectiva del componente de materia oscura se comporta como un fluido prácticamente sin presión para  $z > 0$  y como una quintaesencia para  $z < 0$ . En ese mismo rango la energía oscura se comporta siempre como quintaesencia. En la figura 5.6 se representa la diferencia entre las magnitudes aparente  $m$  y absoluta  $M$  de una fuente, denotada por  $\mu_0$  y cuya expresión es

$$\mu_0 = m - M = 5 \log \left\{ (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right\} + 25, \quad (5.27)$$

La cantidad entre paréntesis representa la distancia por luminosidad en Mpc. Los círculos en la figura 5.6 son datos experimentales para supernovas del tipo Ia tomados de [95]. Es interesante notar que las curvas  $\mu_0$  – correspondientes a cada caso analizado en nuestro modelo y la correspondiente al modelo  $\Lambda$ CDM prácticamente coinciden. La diferencia entre ellas se advierte en los valores altos del corrimiento al rojo y el ajuste de estas curvas con los datos experimentales es bueno.

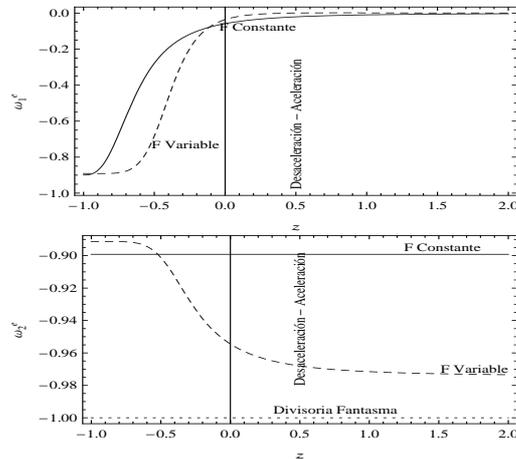


Figura 5.5:  $w_1^e$  y  $w_2^e$  como funciones del corrimiento al rojo  $z$ . Superior:  $w_1^e$ ; Inferior:  $w_2^e$ .

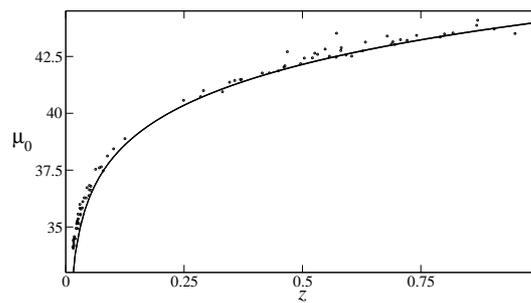


Figura 5.6:  $\mu_0$  como función del corrimiento al rojo  $z$ .

# Capítulo 6

## Conclusiones

En esta tesis estudiamos la disipación de la anisotropía primordial y la aceleración tardía que sufre el universo desarrollando para ello distintos modelos cosmológicos. Esto nos llevó a generar e investigar nuevos conceptos como los escenarios transitorios, la quintaesencia exótica y el paradigma  $N$ -quintom. Comenzamos investigando un espacio tiempo de BI con  $K$  esencia separable, distribuida en forma isótropa y homogénea, y encontramos que la anisotropía primordial se disipaba cuando el índice barotrópico de la  $K$  esencia verificaba la condición  $\gamma_\phi < 2$ . Este rango incluía cosmologías con un escenario final acelerado. En ciertos casos vimos que el universo tenía un rebote y evitaba la singularidad final cuando  $\gamma_\phi > 2$ . Ambos casos se ejemplificaron con un conjunto de funciones cinéticas  $F(x)$  que incluyeron las polinómicas, ampliamente estudiadas por su interés en las métricas de FRW, y las que generaban los taquiones extendidos. Hacemos notar que la ecuación de campo de la  $K$  esencia cinética se integra para toda función  $F(x)$ , reduciéndose a una ecuación diferencial de primer orden. Hallamos los factores de escala promedio y direccionales, para un campo de  $K$  esencia lineal en el tiempo y para índice barotrópico constante. Por otra parte resolvimos las ecuaciones de Einstein para una  $K$  esencia impulsada por un potencial cuadrático inverso y para una quintaesencia impulsada por un potencial exponencial. Así mostramos que ambos modelos conducían al mismo factor de escala promedio.

Disipada la anisotropía primordial, empezamos a modelar cosmologías aceleradas en un espacio tiempo de FRW a través de distintos mecanismos. Estudiamos un modelo transitorio impulsado por una  $K$  esencia cinética que interpolaba entre materia tipo polvo en la etapa temprana del universo y un escenario acelerado dominado por energía oscura en su etapa tardía. Este modelo con  $F(x_0) = 0$ , describió mejor la materia no relativista que el desa-

rollado anteriormente, con  $F_x(x_0) = 0$  [16]. También incluimos dos modelos transitorios simples que tienen solución exacta.

Introdujimos un modelo de quintom extendido, generado por  $N$  campos escalares impulsados por un potencial escalar  $V(\phi_1, \dots, \phi_N)$  en un espacio interno  $N$ -dimensional con métrica constante  $Q_{ik}$ . Este modelo amplió la dualidad entre cosmologías en contracción y cosmologías en expansión de manera que siempre es posible generar escenarios acelerados y súper acelerados. En efecto, encontramos la solución general de las ecuaciones de Einstein-Klein-Gordon para un potencial exponencial y verificamos la existencia de aquellos escenarios. Dentro del paradigma N-quintom encontramos soluciones que tenían una singularidad futura a tiempo finito, representaban un universo fantasma y se comportaban como las descritas en [73]. Con un potencial separable, el N-quintom condujo a universos que evitaban la singularidad inicial y a una cosmología con cuerda cósmica y constante cosmológica. En la figura 3.1 se muestra un modelo 2-quintom con singularidad futura a tiempo finito, obtenido con una métrica interna no euclídea. A una configuración tridimensional con mayor número de campos de quintaesencia que fantasmas, le asignamos un 3-campo a cuyas componentes identificamos con fluido duro, polvo y polvo con densidad de energía negativa. Encontramos que la ecuación de estado del 3-campo pasaba del régimen acelerado al súper acelerado mientras que la tercer componente jugaba el mismo rol que la parte negativa de un campo de Dirac clásico [71].

Asociamos una representación escalar (4.6) que denominamos quintaesencia exótica a dos fluidos en interacción. Esta interacción se fijó con la ecuación de conservación efectiva (4.8) de uno de los fluidos y definimos así el potencial que impulsaba la quintaesencia exótica. En este modelo el universo evolucionaba a partir de una fase inestable y finalizaba en un escenario con ley de potencia estable para el factor de escala siempre que el parámetro  $A$  del potencial satisficiera  $A^2 < 2$ . Obtuvimos la primera integral de la ecuación de Klein-Gordon, la cual condujo a una ecuación de Einstein modificada e identificamos sus tres términos con materia bariónica, materia oscura y energía oscura. Ajustamos todos los parámetros del modelo con los datos observacionales y estimamos la edad del universo en  $t_{edad} = 2.3884 \times 10^{10}$  años y la transición del régimen no acelerado al acelerado en un corrimiento al rojo de  $z_{accel} \sim 1.1$ . Estudiamos las perturbaciones lineales en la medida sincrónica y vimos que el crecimiento de las inestabilidades iniciales en el universo primordial permitiría la formación de las estructuras del universo mientras que a tiempos tardíos se anulaban asintóticamente. También encontramos las soluciones exactas para la quintaesencia exótica con un fluido adicional conservado.

Propusimos un modelo cosmológico cuyos constituyentes eran materia bariónica

conservada y componentes oscuras en interacción. Allí estudiamos las interacciones que conducían a un cociente asintóticamente estable entre las densidades de materia y energía oscuras. Los parámetros incluidos en la interacción fueron ajustados con los datos observados de la función de Hubble para dos ejemplos. En el primero, el comportamiento del parámetro  $\mu_0$  (relacionado con la distancia por luminosidad) como función del corrimiento al rojo mostró un excelente ajuste a los valores experimentales y lo mismo ocurrió con los valores presentes del parámetro de desaceleración y del valor del corrimiento al rojo de la transición entre los regímenes no acelerado y acelerado. En el segundo caso, la ecuación de estado de la energía oscura se comportaba como la de quintaesencia mientras que la materia oscura era prácticamente un fluido sin presión cuando  $z > 0$ . Las ventajas de este modelo muy sencillo sugirió el estudio de otras interacciones, lo cual será implementado en trabajos futuros.

En síntesis, es posible que el universo lleno de K-esencia disipe su anisotropía primordial, se vuelva isótropo y sufra una aceleración tardía con este mismo componente o a través de otros escenarios como los de los modelos transitorios, o del paradigma del N-quintom, o de la quintaesencia exótica y los de componentes oscuras en interacción.



# Apéndice A

A partir del elemento de línea

$$ds^2 = g^{ij} dx_i dx_j = dt^2 - \sum_{i=1}^3 a_i^2 dx_i^2, \quad (\text{A-1})$$

identificamos las componentes del tensor métrico que corresponde a un modelo cosmológico del tipo Bianchi I y obtenemos los únicos elementos no nulos de la conexión afín  $\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma$  para esta métrica,  $\Gamma_{i0}^i = H_i$ ,  $\Gamma_{ii}^0 = a_i \dot{a}_i$  para  $i = 1, 2, 3$  sin convención de suma.

Todos ellos dependen únicamente del tiempo, por lo cual, cuando se los introduce en la definición del tensor de curvatura de Riemann-Christoffel  $R_{\mu\nu\kappa}^\lambda$ , al que se contrae con el tensor métrico una vez para obtener el tensor de Ricci  $R_{\mu\kappa} \equiv R_{\mu\lambda\kappa}^\lambda$  y dos veces para conseguir el escalar de Ricci  $R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa}$  nos llevan a las únicas expresiones no nulas:

$$R_0^0 = - \left( \dot{H}_1 + \dot{H}_2 + \dot{H}_3 + H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 \right)$$

$$R_i^i = - \left( \dot{H}_i + H_i(H_1 + H_2 + H_3) \right), \quad i = 1, 2, 3$$

$$R = 2 \left( R_0^0 - (H_1 H_2 + H_2 H_3 + H_1 H_3) \right).$$

Usando las expresiones anteriores, la componente cero-cero de las ecuaciones de Einstein en la métrica de BI tiene la forma

$$R_0^0 - \frac{1}{2} g_0^0 R = T_0^0 = \rho = H_1 H_2 + H_1 H_3 + H_2 H_3. \quad (\text{A-2})$$

Con las definiciones  $\sigma_i = H_i - H$  y  $H = (H_1 + H_2 + H_3)/3$  tenemos  $\sigma^2 \equiv \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma} = H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 - 3H^2$  y

$$H^2 = (H_1 + H_2 + H_3)^2/9 = (3H^2 + \sigma^2 + 2(H_1H_2 + H_1H_3 + H_2H_3))/9$$

y entonces llegamos a la conclusión de que

$$3H^2 = \rho + \frac{\sigma^2}{2}, \quad (\text{A-3})$$

y la (1.2) es correcta.

Debe tenerse en cuenta que, si bien la métrica es anisótropa, se ha especificado que el fluido que se introduce es homogéneo e isótropo. Por esta razón, cada una de las componentes espaciales del tensor de energía esfuerzo tiene el mismo valor  $p_i = p$  para  $i = 1, 2, 3$ .

Con el mismo procedimiento que antes calculamos las componentes espaciales,

$$-p = T_i^i = R_i^i - \frac{1}{2}g_i^i R = -(\dot{H}_i + 3HH_i) - \frac{1}{2}R. \quad (\text{A-4})$$

Una vez sumadas las tres ecuaciones (A-4) llegamos a una expresión del tipo

$$p = \dot{H} + 3H^2 + \frac{1}{2}R = \dot{H} + 3H^2 - (3\dot{H} + \sigma^2 + 3H^2 + \rho),$$

de la que, reemplazando con (A-3) y reacomodando, obtenemos

$$-2\dot{H} = p + \rho + \sigma^2, \quad (\text{A-5})$$

o sea, la ecuación (1.3).

La ecuación (1.4) describe la conservación de la energía-momento en la métrica Bianchi I a través de la componente cero de la cuatridivergencia nula de ese tensor. La expresión de esta derivada covariante nula es

$$\begin{aligned} T_{;\mu}^{\mu 0} &\equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{\mu 0} + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T^{\lambda 0} + \Gamma_{\mu\nu}^0 T^{\mu\nu} \\ &= \partial_t \rho + (H_1 + H_2 + H_3)\rho + (a_1 \dot{a}_1 \frac{p}{a_1} + a_2 \dot{a}_2 \frac{p}{a_2} + a_3 \dot{a}_3 \frac{p}{a_3}) \\ &= \dot{\rho} + 3H\rho + 3Hp = 0 \end{aligned} \quad (\text{A-6})$$

como queríamos demostrar

Finalmente, derivar respecto del tiempo la ecuación (A-3) y aplicarle (A-5) nos conduce a

$$(-3H)(-2\dot{H}) = \dot{\rho} + \vec{\sigma}\dot{\vec{\sigma}} = -3H(\rho + p + \vec{\sigma}^2)$$

y reordenando, a

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) + \vec{\sigma}(\dot{\vec{\sigma}} + 3H\vec{\sigma}) = 0.$$

Aplicarle ahora la condición (A-6) nos permite escribir

$$\vec{\sigma}(\dot{\vec{\sigma}} + 3H\vec{\sigma}) = 0 \tag{A-7}$$

o sea, la ecuación (1.5).



# Apéndice B

Las descripciones de muchos problemas físicos interesantes nos conducen a la ecuación ordinaria no lineal de segundo orden

$$\ddot{s} + \alpha f(s)\dot{s} + \beta f(s) \int f(s)ds + \gamma f(s) = 0 \quad (\text{B-1})$$

donde  $s = s(t)$ ,  $f(t)$  es una función real, el punto significa derivación respecto de  $t$ , y los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son constantes. Entre ellos, nos resultan particularmente cercanos los modelos cosmológicos homogéneos, isotrópicos y espacialmente planos, con o sin constante cosmológica, [96], [97], [98], [99], [100], [101], o con una constante cosmológica temporalmente variable [102] o incluso en métricas del BI [103], con una variedad de fuentes, donde las ecuaciones pueden reducirse a casos particulares de dicha ecuación.

Con la ecuación (B-1), importante no sólo por los ejemplos dados, vamos a introducir la invariancia de forma o simetría de forma de las ecuaciones diferenciales, representada por un grupo de transformaciones no locales  $f, \bar{f}$ . Por ejemplo, hagamos la transformación no local, que nos lleva de las variables  $(s, t)$  a las variables  $(\bar{s}, \bar{t})$

$$f(s)ds = \bar{f}(\bar{s})d\bar{s}, \quad (\text{B-2})$$

$$f(s)dt = \bar{f}(\bar{s})d\bar{t}. \quad (\text{B-3})$$

La primera igualdad puede ser integrada y multiplicada por algún parámetro  $\beta$ , o bien dividida por la segunda, y esta última también puede escribirse como igualdad entre operadores  $\frac{d}{f dt} = \frac{d}{\bar{f} d\bar{t}}$ . De este modo, siempre es lícito escribir las relaciones

$$\beta \int f(s)ds = \beta \int \bar{f}(\bar{s})d\bar{s}, \quad (\text{B-4})$$

$$\alpha \frac{ds}{dt} = \alpha \dot{s} = \alpha \frac{d\bar{s}}{d\bar{t}} = \alpha \bar{s}', \quad (\text{B-5})$$

$$\frac{\ddot{s}}{f} = \frac{d^2s}{f dt^2} = \frac{d^2\bar{s}}{f d\bar{t}^2} = \frac{\bar{s}''}{f}. \quad (\text{B-6})$$

Por lo tanto, sumando (B-4), (B-5) y (B-6) escribimos el invariante ante las transformaciones no locales (B-2) y (B-3)

$$\frac{\ddot{s}}{f(s)} + \alpha\dot{s} + \beta \int f(s)ds + \gamma = \frac{\bar{s}''}{\bar{f}(\bar{s})} + \alpha\bar{s}' + \beta \int \bar{f}(\bar{s})d\bar{s} + \gamma. \quad (\text{B-7})$$

Cuando la ecuación (B-7) se anula, podemos reescribirla como

$$\begin{aligned} \ddot{s} + \alpha f(s)\dot{s} + \beta f(s) \int f(s)ds + \gamma f(s) = \\ \bar{s}'' + \alpha \bar{f}(\bar{s})\bar{s}' + \beta \bar{f}(\bar{s}) \int \bar{f}(\bar{s})d\bar{s} + \gamma \bar{f}(\bar{s}) = 0. \end{aligned} \quad (\text{B-8})$$

Anulando (B-7) lo que hacemos es fijar el valor del invariante de la ecuación (B-1). Con ello, la transformación (B-2)-(B-3) queda bien definida. Este grupo de invariancia de forma nos permite linealizar la ecuación (B-1), porque si se eligen,  $\bar{f}(\bar{s}) = 1$ , en (B-4)-(B-8), obtenemos

$$\frac{\ddot{s}}{f(s)} + \alpha\dot{s} + \beta \int f(s)ds + \gamma = \bar{s}'' + \alpha\bar{s}' + \beta\bar{s} + \gamma = 0, \quad (\text{B-9})$$

$$\bar{s} = \int f(s)ds, \quad \bar{t} = \int f(s)dt, \quad (\text{B-10})$$

Y esto es lo realmente interesante, ya que si consideramos nulas las constantes de integración a cada lado, la difícil ecuación original (B-1), queda expresada como una ecuación diferencial ordinaria, lineal, de segundo orden con coeficientes constantes,

$$\bar{s}'' + \alpha\bar{s}' + \beta\bar{s} + \gamma = 0. \quad (\text{B-11})$$

# Apéndice C

Los parámetros de un modelo cosmológico, genéricamente denotados como  $\{\pi_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$  tienen una distribución de probabilidad  $\chi^2$

$$P(\pi_1, \dots, \pi_n) = \mathcal{N} e^{-\chi^2(\pi_1, \dots, \pi_n)/2}, \quad (\text{C-1})$$

para

$$\chi^2(\pi_1, \dots, \pi_n) = \sum \frac{[H_{th}(\pi_1, \dots, \pi_n; z_i) - H_{obs}(z_i)]^2}{\sigma(z_i)^2},$$

donde  $\mathcal{N}$  es una constante de normalización,  $H_{obs}(z_i)$  es el valor observado del factor de Hubble  $H(z)$  para un corrimiento al rojo  $z_i$ ,  $\sigma(z_i)$  es la correspondiente incerteza  $1\sigma$  para ese valor, y la suma se realiza sobre todos los puntos observacionales  $H_{obs}(z_i)$  de los que se disponga.

Por ejemplo, en la referencia [104] se ha usado la tabla de valores de la función de Hubble  $H(z)$  para determinados corrimientos al rojo  $z$  [105], extraídos a partir de diferenciales de edad de galaxias que evolucionaron pasivamente. Esto es interesante, entre otras razones, porque la función no está integrada en ningún momento, a diferencia de las distancias por luminosidad con candelas estándar o de las distancias por diámetro angular con reglas estándar. Como el factor de Hubble depende de la diferencial de edad del Universo como una función de  $z$  en la forma  $H(z) = -(1+z)^{-1} dz/dt$ , puede ser medido directamente a través de la determinación de  $dz/dt$ . En el proceso de calcular las diferenciales de edad, Simon et al. emplearon los datos del Gemini Deep Deep Survey [106] y datos de archivo [107], [108] para determinar 9 valores numéricos de  $H(z)$  en el rango  $0 < z < 1.8$ , y sus errores. La versión ampliada y corregida de estos datos, Tabla C-1 puede verse en [60].

$z$	$H(z)$ ( $kms^{-1}Mpc^{-1}$ )	$1\sigma$ <i>incerteza</i>
0.00	73	$\pm 8$
0.10	69	$\pm 12$
0.17	83	$\pm 8$
0.27	77	$\pm 14$
0.40	95	$\pm 17$
0.48	97	$\pm 60$
0.88	90	$\pm 40$
0.90	117	$\pm 23$
1.30	168	$\pm 17$
1.43	177	$\pm 18$
1.53	140	$\pm 14$
1.75	202	$\pm 40$

Tabla C-1: Parámetro de Hubble vs. Corrimiento al rojo[60].

Los valores mejor ajustados, que son los que maximizan (C-1),  $\pi_{1bf}, \dots, \pi_{nbf}$  son obtenidos de modo tal que  $\chi_{min}^2(\pi_{1bf}, \dots, \pi_{nbf})$  corresponde al mínimo de  $\chi^2(\pi_1, \dots, \pi_{nbf})$ . Si  $\chi_{gr}^2 = \chi_{min}^2(\pi_{1bf}, \dots, \pi_{nbf})/(N - n) \leq 1$  el ajuste se considera bueno y el modelo  $H(z; \pi_{1bf}, \dots, \pi_{nbf})$  es consistente con los datos observados. Aquí, N es la longitud del conjunto de datos usados y n es el número de parámetros [78].

La variable  $\chi^2$  es una variable aleatoria en el sentido de que depende del conjunto aleatorio de datos utilizado. Su distribución de probabilidad es una distribución  $\chi^2$  para  $N - n$  grados de libertad. En el caso  $n = 3$ , ello implica que el 68.3% de los conjuntos aleatorios de datos darán una  $\chi^2$  tal que

$$\chi^2(\pi_1, \pi_2, \pi_3) - \chi_{min}^2(\pi_{1bf}, \pi_{2bf}, \pi_{3bf}) \leq 3.53 \quad (C-2)$$

Esta ecuación define una región acotada por una superficie cerrada alrededor del punto  $(\pi_{1bf}, \pi_{2bf}, \pi_{3bf})$  en el espacio tridimensional de parámetros. El correspondiente rango  $1\sigma$  del parámetro  $\pi_i$  es el rango de valores de  $\pi_i$  para los puntos contenidos dentro de dicha región acotada. Similarmente, se puede ver que el 95.4% de los conjuntos aleatorios de datos dará una  $\chi^2$  tal que

$$\chi^2(\pi_1, \pi_2, \pi_3) - \chi_{min}^2(\pi_{1bf}, \pi_{2bf}, \pi_{3bf}) \leq 8.02 \quad (C-3)$$

Nuevamente, esta última ecuación define una región acotada por una superficie cerrada en el espacio tridimensional de parámetros, ahora más grande que la anterior, y el correspondiente rango  $2\sigma$  del parámetro  $\pi_i$  es el rango de valores de  $\pi_i$  para los puntos contenidos dentro de dicha región acotada. La cota varía de acuerdo al valor de  $n$  y del porcentaje de probabilidad que se requiera. Por ejemplo para  $n = 2$ , la región  $1\sigma$  implica  $\Delta\chi^2 \leq 2.3$  y la región  $2\sigma$  está acotada por  $\Delta\chi^2 \leq 6.17$  (ver [78]).

$\Delta\chi^2$ como función del nivel de confianza $p$ y de los grados de libertad						
$p$	$\nu$					
	1	2	3	4	5	6
68.3%	1.00	2.30	3.53	4.72	5.89	7.04
90%	2.71	4.61	6.25	7.78	9.24	10.6
95.4%	4.00	6.17	8.02	9.70	11.3	12.8
99%	6.63	9.21	11.3	13.3	15.1	16.8
99.73%	9.00	11.8	14.2	16.3	18.2	20.1
99.99%	15.1	18.4	21.1	23.5	25.7	27.8

Figura C-1: valores de  $\chi^2$  para algunos porcentajes de probabilidad  $p$  y para los primeros 6 grados de libertad  $\nu \equiv n = 1, \dots, 6$ .

La figura C-1 muestra los valores de  $\chi^2$  para algunos niveles de confianza  $p$  y para los primeros 6 grados de libertad  $\nu \equiv n = 1, \dots, 6$ .



# Bibliografía

- [1] H. P. Robertson, *Rev. Mod. Phys.* **5** (1933) 62; H. P. Robertson, *ApJ* **82**(1935), 284 .
- [2] R. Maartens, <http://arxiv.org/abs/1104.1300>.
- [3] [wmap.gsfc.nasa.gov/universe/uni\\_shape.html](http://wmap.gsfc.nasa.gov/universe/uni_shape.html)
- [4] V. M. Slipher, *Lowell Observatory Bulletin* **2** (1913), pp. 57-56.
- [5] E. P. Hubble, *Astrophys. J.* **64**, 321 (1926).
- [6] H.S. Leavitt, *H. Shapley Annals Astron Obser Harvard College* 1930; 85, no.8, Cambridge, MA: The Observatory, pages 157-168; E.C. Pickering, H.S. Leavitt, *ApJ* **19**(1904), 289-295.
- [7] S. Perlmutter *et al.* [Supernova Cosmology Project Collaboration], *Astrophys. J.* **517** (1999) 565 [http://arxiv.org/PS\\_cache/astro-ph/pdf/9812/9812133v1.pdf](http://arxiv.org/PS_cache/astro-ph/pdf/9812/9812133v1.pdf) [arXiv:astro-ph/9812133].
- [8] A. G. Riess *et al.* [Supernova Search Team Collaboration], *Astron. J.* **116**, 1009 (1998) <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9805201>.
- [9] E. Komatsu *et al.*, <http://arxiv.org/abs/1001.4538>.
- [10] N. Jarosik *et al.*, <http://arxiv.org/abs/1001.4744>.
- [11] E. L. Turner, J. P. Ostriker and J. R. I. Gott, *Astrophys. J.* **284**, 1 (1984).
- [12] T. P. Walker, G. Steigman, D. N. Schramm, K. A. Olive and H. S. Kang, *Astrophys. J.* **376**, 51 (1991).
- [13] M. Davis, G. Efstathiou, C. S. Frenk and S. D. M. White, *Astrophys. J.* **292**, 371 (1985).

- [14] C. Armendariz-Picon, T. Damour and V. F. Mukhanov, Phys. Lett. B **458** (1999) 209 <http://arxiv.org/abs/hep-th/9904075>.
- [15] A. H. Guth, MIT-CTP-**2179**, (Nov 1992). Presented at Colloquium on Physical Cosmology, Irvine, CA, Mar 27-28, 1992.
- [16] R. J. Scherrer, Phys. Rev. Lett. **93**, 011301 (2004). <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0402316>
- [17] S. Hannestad and E. Mortsell, JCAP **0409** (2004) 001 <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0407259>.
- [18] E. Komatsu *et al.* [WMAP Collaboration], Astrophys. J. Suppl. **180** (2009) 330 <http://arxiv.org/abs/0803.0547>.
- [19] J. Q. Xia, H. Li, G. B. Zhao and X. Zhang, Phys. Rev. D **78** (2008) 083524 <http://arxiv.org/abs/0807.3878>.
- [20] L. P. Chimento and W. Zimdahl, Int. J. Mod. Phys. D **17** (2008) 2229 <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0609104>.
- [21] G. Gelmini and P. Gondolo, Phys. Rev. D **64** (2001) 023504 <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0012315>.
- [22] L. Amendola, Phys. Rev. D **62**, 043511 (2000); <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9908023>. L. Amendola and D. Tocchini-Valentini, Phys. Rev. D **64**, 043509 (2001); <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0011243>. L. Amendola and D. Tocchini-Valentini, Phys. Rev. D **66**, 043528 (2002); <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0111535>. L. Amendola, C. Quercellini, D. Tocchini-Valentini and A. Pasqui, Astrophys. J. **583**, L53 (2003). <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0205097>.
- [23] D. Tocchini-Valentini and L. Amendola, Phys. Rev. D **65**, 063508 (2002); <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0108143>.
- [24] W. Zimdahl, D. Pavon, Phys. Lett. **B521** (2001) 133-138. <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0105479>
- [25] L. P. Chimento, A. S. Jakubi, D. Pavon, W. Zimdahl, Phys. Rev. **D67**, 083513 (2003). <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0303145>.
- [26] G. R. Farrar and P. J. E. Peebles, Astrophys. J. **604**, 1 (2004); <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0307316>.

- [27] B. M. Hoffman, [arXiv:astro-ph/9397359]; G. Huey, B. D. Wandelt, Phys. Rev. **D74** (2006) 023519. <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0407196>.
- [28] G. Mangano, G. Miele, V. Pettorino, Mod. Phys. Lett. **A18** (2003) 831-842. <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0212518>.
- [29] R. -G. Cai, A. Wang, JCAP **0503** (2005) 002. <http://arxiv.org/abs/hep-th/0411025>.
- [30] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **59**, 2607 (1987).
- [31] B. Saha, T. Boyadjiev, Phys. Rev. **D69** (2004) 124010. <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0311045>.
- [32] L. P. Chimento, Phys. Rev. D **68**, 023504 (2003) <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0304033>.
- [33] L. P. Chimento and A. Feinstein, Mod. Phys. Lett. A **19**, 761 (2004) <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0305007>.
- [34] A.A. Gerasimov and S.L. Shatashvili, JHEP **0010**, 034 (2000); D. Kutasov, M. Marino and G. Moore, JHEP **0010**, 045 (2000); S. Sugimoto and S. Terashima, JHEP **0207**, 025 (2002).
- [35] E.S. Fradkin and A.A. Tseytlin, Phys. Lett. B **163**, 123 (1985).
- [36] R.G. Leigh, Mod. Phys. Lett. A **4**, 2767 (1989).
- [37] B. L. Hu and L. Parker, Phys. Rev. D **17**, 933 (1978) [Erratum-ibid. D **17**, 3292 (1978)].
- [38] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, Gravitation, W. H. Freeman and Co.(1973).
- [39] L. P. Chimento, <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0311613>.
- [40] M. A. Markov Ann. Phys. 155, 333, 1984
- [41] M. A. Markov and V. F. Mukhanov Nuovo Cimento 868, 97, 1985
- [42] V.P. Frolov, E. Gunzig and N. Van der Bergh, Class.Quant.Grav. **8**,L125-L131 (1991)); J.P.Mimoso and D.Wands, Phys.Rev. D52,5612 (1995), <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9501039>
- [43] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.

- [44] S. M. Carroll, San Francisco, USA: Addison-Wesley (2004) 513 p.
- [45] L. P. Chimento *J. Math. Phys.* **38**, 2565 (1997)
- [46] V. Sahni, *Lect. Notes Phys.* **653**, 141 (2004)  
<http://arxiv.org/abs/astro-ph/0403324>.
- [47] A. Y. Kamenshchik, U. Moschella, V. Pasquier, *Phys. Lett.* **B511**, 265-268 (2001). <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0103004>.
- [48] V. Gorini, A. Kamenshchik, U. Moschella, *Phys. Rev.* **D67**, 063509 (2003). <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0209395>
- [49] R. Colistete, Jr., J. C. Fabris, S. V. B. Goncalves, P. E. de Souza,  
<http://arxiv.org/abs/gr-qc/0210079>.
- [50] A. Sen, *JHEP* **0204**, 048 (2002).  
<http://arxiv.org/abs/hep-th/0203211>.
- [51] A. Sen, *JHEP* **0207**, 065 (2002).  
<http://arxiv.org/abs/hep-th/0203265>.
- [52] A. Sen, *Mod. Phys. Lett.* **A17**, 1797-1804 (2002).  
<http://arxiv.org/abs/hep-th/0204143>.
- [53] G. W. Gibbons, *Phys. Lett.* **B537** (2002) 1-4.  
<http://arxiv.org/abs/hep-th/0204008>.
- [54] J. Garriga and V.F. Mukhanov, *Phys. Lett. B* **458**, 219 (1999).
- [55] S. M. Carroll, M. Hoffman, M. Trodden, *Phys. Rev.* **D68** (2003) 023509.  
<http://arxiv.org/abs/astro-ph/0301273>.
- [56] C. Armendáriz-Picón, T. Damour, and V. Mukhanov; *Phys. Lett. B* **458**, 209 (1999)
- [57] L.P. Chimento, *Phys. Rev. D* **69**, 123517 (2004).
- [58] G. Veneziano, *Phys. Lett. B* **265**, 287 (1991); K. A. Meissner and G. Veneziano, *Phys. Lett. B* **267**, 33(1991); *Mod. Phys. Lett. A* **6**, 3397 (1991); M. Gasperini and G. Veneziano, *Astropart. Phys.* **1**, 317 (1993); J.E. Lidsey, D. Wands, and E. Copeland, *Phys. Rept.* **337**, 343 (2000).
- [59] J. Levin, *Phys. Rev. D* **51**, 462 (1995).

- [60] D. Stern, R. Jimenez, L. Verde, M. Kamionkowski and S. A. Stanford, *JCAP* **1002**, 008 (2010) <http://arxiv.org/abs/0907.3149>.
- [61] J. Q. Xia, Y. F. Cai, T. T. Qiu, G. B. Zhao and X. Zhang, *Int. J. Mod. Phys. D* **17** (2008) 1229 <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0703202>.
- [62] A. Vikman, *Phys. Rev. D* **71** (2005) 023515 <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0407107>.
- [63] W. Hu, *Phys. Rev. D* **71** (2005) 047301 <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0410680>.
- [64] R. R. Caldwell and M. Doran, *Phys. Rev. D* **72** (2005) 043527 <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0501104>.
- [65] G. B. Zhao, J. Q. Xia, M. Li, B. Feng and X. Zhang, *Phys. Rev. D* **72** (2005) 123515 <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0507482>.
- [66] M. Kunz and D. Sapone, *Phys. Rev. D* **74**, 123503 (2006) <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0609040>.
- [67] Z. -K. Guo, Y. -S. Piao, X. -M. Zhang, Y. -Z. Zhang, *Phys. Lett.* **B608** (2005) 177-182. <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0410654>.
- [68] L. P. Chimento, *Class. Quant. Grav.* **15** (1998) 965.
- [69] L. P. Chimento, *J. Math. Phys.* **38**, 2565 (1997); L. P. Chimento, A. E. Cossarini and N. A. Zuccala, *Class. Quantum. Grav.* **15**, 17 (1998); L. P. Chimento, *Class. Quantum. Grav.* **15**, 965 (1998).
- [70] J-Q. Xia, G-B. Zhao, B. Feng and X. Zhang, *JCAP* **0609**, 015 (2006) <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0603393>; G-B. Zhao, J-Q. Xia, B. Feng, X. Zhang, *Int. J. Mod. Phys.D* **16**, 1229 (2007) <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0603621>; J-Q. Xia, B. Feng and X. Zhang, *Mod. Phys. Lett. A* **20**, 2409 (2005); B. Feng, M. Li , Y-S. Piao and X. Zhang, *Phys. Lett. B* **634**, 101 (2006); M. R. Setare, *Phys. Lett. B* **641**, 130 (2006); M. R. Setare, J. Sadeghi, and A. R. Amani, *Phys. Lett. B* **660**, 299 (2008).
- [71] M.Cataldo and L.P.Chimento, <http://arxiv.org/abs/0710.4306>.
- [72] L. P. Chimento, *Phys. Rev. D* **69**, 123517 (2004), <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0311613>.
- [73] Y. H. Wei, <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0502077>.

- [74] H. K. Jassal, J. S. Bagla, T. Padmanabhan, Phys. Rev. **D72** (2005) 103503. <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0506748>.
- [75] L.P. Chimento Class. and Quantum Grav. **15**, 965-974 (1998).
- [76] K. Freese, New Astron. Rev. **49** (2005) 103 <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0501675>.
- [77] R. Maartens, Phys. Rev. D **62** (2000) 084023 <http://arxiv.org/abs/hep-th/0004166>.
- [78] W.H. Press et al., *Numerical Recipes* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).
- [79] P. Astier et al. Astron. Astrophys. **447**, 31 (2006). <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0510447>.
- [80] H. Wei and S. N. Zhang, Phys. Lett. B **644** (2007) 7 <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0609597>.
- [81] P. -S. Corasaniti, T. Giannantonio, A. Melchiorri, Phys. Rev. **D71** (2005) 123521. <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0504115>.
- [82] R. A. Daly, S. G. Djorgovski, Astrophys. J. **597** (2003) 9-20. <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0305197>
- [83] J. Dunlop, J. Peacock, H. Spinrad, A. Dey, R. Jimenez, D. Stern and R. Windhorst, Nature **381** (1996) 581.
- [84] H. Spinrad, A. Dey, D. Stern, J. Dunlop, J. Peacock, R. Jimenez and R. Windhorst, Astrophys. J. **484** (1997) 581 <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9702233>.
- [85] G. Hasinger, N. Schartel and S. Komossa, Astrophys. J. **573** (2002) L77 <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0207005>.
- [86] U. Franca and R. Rosenfeld, Phys. Rev. D **69**, 063517 (2004) <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0308149>.
- [87] T. Koivisto, Phys. Rev. **D 72**, 043516 (2005).
- [88] W. Zimdahl, D. Pavon, and L. P. Chimento, Phys. Lett. **B521**, 133 (2001); L. P. Chimento, A. S. Jakubi, D. Pavon, and W. Zimdahl, Phys. Rev. **D 67**, 083513 (2003).

- [89] G. Olivares, F. Atrio-Barandela, and D. Pavon, Phys. Rev. D **74**, 043521 (2006).
- [90] C. P. Ma and E. Bertschinger, Astrophys. J. **455**, 7 (1995).
- [91] J. B. Binder and G. M. Kremer, Gen. Rel. Grav. **38**, 857 (2006); <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0601105>. D. Tocchini-Valentini and L. Amendola, Phys. Rev. D **65**, 063508 (2002); <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0108143>. G. R. Farrar and P. J. E. Peebles, Astrophys. J. **604**, 1 (2004); <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0307316>. G. M. Kremer, Gen. Rel. Grav. **39**, 965-972 (2007); <http://arxiv.org/abs/0704.0371>; G. Huey and B. D. Wandelt, Phys. Rev. D **74**, 023519 (2006); <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0407196>. G. Mangano, G. Miele and V. Pettorino, Mod. Phys. Lett. A **18**, 831 (2003); <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0212518>. L. P. Chimento and M. Forte, <http://arxiv.org/abs/0706.4142>; R. G. Cai and A. Wang, JCAP **0503**, 002 (2005). <http://arxiv.org/abs/hep-th/0411025>.
- [92] W. L. Freedman *et al.*, Astrophys. J. **553** (2001) 47 <http://arxiv.org/abs/astro-ph/00123s76>.
- [93] J. M. Virey *et al.* Phys. Rev. D **72**, 061302 (2005).
- [94] A. G. Riess *et al.* Astrophys. J. **607**, 665 (2004).
- [95] A. G. Riess *et al.* Astrophys. J. **659** 98 (2007).
- [96] L. Chimento and A. S. Jakubi, Class. Quant. Grav. **10** (1993) 2047.
- [97] L. P. Chimento, *Proceedings of the First Mexican School on Gravitation and Mathematical Physics, Guanajuato, Mexico, 12-16 Dec 1994. World Scientific, 366 (1996)*
- [98] L. P. Chimento and A. S. Jakubi, *Proceedings of the First Mexican School on Gravitation and Mathematical Physics, Guanajuato, Mexico, 12-16 Dec 1994. World Scientific, 316 (1996)*
- [99] L. P. Chimento and A. S. Jakubi, Phys. Lett. A. **212** (1996) 320 <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9601033>.
- [100] L. P. Chimento and A. S. Jakubi, Class. Quant. Grav. **14**, 1811 (1997) <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9703069>.

- [101] L. P. Chimento, A. S. Jakubi and V. Mendez, *Int. J. Mod. Phys. D* **7**, 177 (1998) <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9705045>.
- [102] M. Reuter and C. Wetterich, *Phys. Lett. B* **188**, 38 (1987).
- [103] J. M. Aguirregabiria and L. P. Chimento, *Class. Quant. Grav.* **13**, 3197 (1996).
- [104] R. Lazkoz and E. Majerotto, <http://arxiv.org/abs/0704.2606>
- [105] J. Simon, L. Verde and R. Jimenez, *Phys. Rev. D* **71**, 123001 (2005). <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0412269>.
- [106] R. G. Abraham et al., *Astron. J.* **127**, 2455 (2004). <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0402436>.
- [107] T. Treu, M. Stiavelli, P. Moller, S. Casertano and G. Bertin, "The properties of field elliptical galaxies at intermediate redshift. II: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **326**, 221 (2001) <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0104177>.
- [108] P. L. Nolan, W. F. Tompkins, I. A. Grenier and P. F. Michelson, *Astrophys. J.* **597**, 615 (2003) <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0307188>.
- [109] J. Q. Xia, Y. F. Cai, T. T. Qiu, G. B. Zhao and X. Zhang, <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0703202>.

# Indice

INTRODUCCIÓN . . . . .	i
<b>1 Cosmologías BI con K esencia</b>	<b>1</b>
1.1 Introducción . . . . .	1
1.2 Ecuaciones de Einstein en BI . . . . .	2
1.3 Disipación de la anisotropía . . . . .	5
1.4 Universos rebotantes . . . . .	7
1.5 K esencias cinéticas . . . . .	11
1.6 Soluciones que asintóticamente son del tipo ley de potencias .	13
1.7 El potencial cuadrático inverso . . . . .	17
1.7.1 K esencia con función cinética lineal y potencial cuadrático inverso	19
1.7.2 Quintaesencia con potencial exponencial . . . . .	22
<b>2 Cosmologías FRW con K esencia</b>	<b>27</b>
2.1 Introducción . . . . .	27
2.2 Ecuaciones de Einstein con K esencia . . . . .	28
2.3 Potencial constante . . . . .	29
2.3.1 Un modelo resoluble . . . . .	31
2.3.2 Modelo Chimento . . . . .	35
<b>3 <math>N</math>-quintom</b>	<b>39</b>
3.1 Introducción . . . . .	39
3.2 Cosmologías con $N$ campos escalares . . . . .	39
3.3 Solución general para el potencial exponencial . . . . .	44
3.4 Espacios internos bidimensionales . . . . .	49
3.4.1 Solución con singularidad futura a tiempo finito . . . . .	49
3.4.2 Quintom . . . . .	52
3.5 Espacio interno tridimensional . . . . .	58
<b>4 Quintaesencia exótica</b>	<b>61</b>
4.1 Introducción . . . . .	61
4.2 Quintaesencia exótica . . . . .	62

4.3	Dinámica de las componentes bariónica y oscuras . . . . .	66
4.4	Restricciones observacionales . . . . .	71
4.5	Perturbaciones lineales . . . . .	80
4.6	Cosmología exótica con tres fluidos . . . . .	86
4.6.1	Soluciones implícitas . . . . .	88
<b>5</b>	<b>Modelos de materia oscura en interacción con energía oscura</b>	<b>93</b>
5.1	Introducción . . . . .	93
5.2	Modelo oscuro interactivo . . . . .	93
5.2.1	$F(r) = \text{constante} < 0$ . . . . .	96
5.2.2	$F(r)$ variable . . . . .	97
5.3	Restricciones observacionales . . . . .	98
5.4	Soluciones numéricas . . . . .	101
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>105</b>
	<b>Apéndice A</b>	<b>109</b>
	<b>Apéndice B</b>	<b>113</b>
	<b>Apéndice C</b>	<b>115</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>119</b>