

Tesis Doctoral

# Interpretación Modal Hamiltoniana en términos de la teoría de grupos y su extensión a la mecánica cuántica relativista

Ardenghi, Juan Sebastián

2011

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Ardenghi, Juan Sebastián. (2011). Interpretación Modal Hamiltoniana en términos de la teoría de grupos y su extensión a la mecánica cuántica relativista. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

Cita tipo Chicago:

Ardenghi, Juan Sebastián. "Interpretación Modal Hamiltoniana en términos de la teoría de grupos y su extensión a la mecánica cuántica relativista". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2011.

**EXACTAS** UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



**UBA**

Universidad de Buenos Aires



**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

**Interpretación Modal-Hamiltoniana en términos de la teoría de grupos  
y su extensión a la mecánica cuántica relativista**

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área de  
Ciencias Físicas.

**Juan Sebastián Ardenghi**

Director de Tesis: Dr. Mario Alberto Castagnino.  
Consejero de Estudios: Dr. Rafael Ferraro.

Lugar de Trabajo: Instituto de Astronomía y Física del Espacio I.A.F.E.

Buenos Aires, 2011



# INTERPRETACIÓN MODAL-HAMILTONIANA EN TÉRMINOS DE LA TEORÍA DE GRUPOS Y SU EXTENSIÓN A LA MECÁNICA CUÁNTICA RELATIVISTA

**Resumen:** La interpretación modal-Hamiltoniana de la mecánica cuántica sostiene que los sistemas, en el ámbito de la realidad cuántica, son haces de propiedades posibles, sin sustancia subyacente. Las propiedades que se hacen actuales, es decir aquéllas que adquieren valor definido instante a instante, no pueden ser todas, ya que esto llevaría a inconsistencias, como lo muestra el Teorema de Kochen-Specker. Esto implica que debemos elegir un contexto de actualización, esto es, un subconjunto de todo el conjunto de propiedades posibles, cuyas propiedades adquieren valores definidos. En este sentido, la interpretación modal-Hamiltoniana elige como contexto de actualización la descomposición atómica del espacio de Hilbert en autosubespacios del Hamiltoniano y todas las composiciones de éstos. Esto permite explicar satisfactoriamente varios problemas interpretativos de la mecánica cuántica: el problema de la medición, el problema de la contextualidad, el problema de la indistinguibilidad y el problema de la no-localidad, como también permite describir adecuadamente un conjunto de ejemplos físicos típicos de la práctica de la física. Durante el trabajo de esta tesis doctoral, se desarrolló una reformulación de la interpretación modal-Hamiltoniana de la mecánica cuántica. Para ello se aplicaron ideas de la teoría de grupos, con el fin de asegurar la invariancia del contexto de actualización ante el cambio de sistema de referencia. De modo natural, entonces, se definió el contexto de actualización como aquel identificado por los operadores de Casimir del grupo de simetría de la mecánica cuántica: el grupo de Galileo extendido centralmente. Posteriormente se estudió la posibilidad de extender estas ideas al ámbito de la teoría cuántica relativista, donde el grupo de simetría es el de Poincaré y algún otro grupo de simetría interna compacto. Finalmente, con el fin de asegurar que los observables con valores actuales en las teorías relativistas y no relativistas estuviesen correctamente relacionados a través de un límite adecuado, se empleó una contracción de Inönü-Wigner del grupo de Poincaré extendido trivialmente al grupo de Galileo extendido centralmente. De este modo, los operadores de Casimir de ambos grupos quedaron correctamente relacionados y se pudo definir la regla de actualización correspondiente al ámbito relativista.

Palabras claves: Hamiltoniano - Interpretación - Actualización - Invariancia - Simetría

# MODAL-HAMILTONIAN INTERPRETATION IN TERMS OF GROUP THEORY AND ITS EXTENSION TO RELATIVISTIC QUANTUM MECHANICS

**Abstract:** The modal-Hamiltonian interpretation of quantum mechanics states that systems in the quantum realm, are bundles of potential properties without underlying substance. The properties with actual values, i.e. those that acquire a definite value instant by instant, cannot be all, because this would lead to inconsistencies, as shown by the Kochen-Specker theorem. This implies that we must choose an actualization context, that is, a subset of the full set of possible properties, which acquire definite values. In this sense, the modal-Hamiltonian interpretation choose as an actualization context the decomposition of the Hilbert space in terms of eigensubspaces of the Hamiltonian operator and the respective composition of this eigensubspaces. This allows to explain correctly several interpretative problems of quantum mechanics: the measurement problem, the problem of contextuality, the problem of indistinguishability and the problem of non-locality, an also allow to describe adequately a set of typical physical examples of physics. During the work of this thesis, a reformulation of modal-Hamiltonian interpretation was developed. This was achieved by using the group theory in order to ensure the invariance of the actualization context when a change of reference system has been done. Naturally, the actualization context was defined by means of the Casimir operators of the symmetry group of quantum mechanics: the centrally extended Galileo group. Subsequently, the extension of these ideas to relativistic quantum mechanics was studied, where the symmetry group is the Poincare group and some other compact internal symmetry group. Finally, in order to ensure that the actual valued observables in relativistic and nonrelativistic theories were correctly related by an appropriate limit, we used an Inönü-Wigner contraction of the trivially extended Poincare group to the centrally extended Galileo group. Thus, the Casimir operators of both groups were correctly related and a definition of the actualization rule in the relativistic realm could be done.

Key words: Hamiltonian - Interpretation - Actualization - Invariance - Symmetry

## **Agradecimientos**

En primer lugar quisiera agradecer a mi director de Doctorado, Mario Castagnino, por su dedicación, apertura y visión de la física, la cual me ha permitido introducirme en aspectos de la física que de otro modo no lo podría haber hecho.

A todos los que conforman el grupo de investigación del cual formo parte.

Al Instituto de Astronomía y Física del Espacio y al departamento de Física de la Universidad de Buenos Aires por adoptarme durante todo este tiempo y brindarme todos los elementos necesarios para poder desarrollar la tesis.

A Daniela Rolando, por su inmenso cariño e infinita paciencia para tolerar todas mis inquietudes terrenales y no terrenales.

A mis amigos, Gonzalo Iparraguirre y Hector Fazio, por recordarme una y otra vez la otra sintaxis.

A mis viejos, por enseñarme a pensar, vivir y reflexionar la vida.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>4</b>
<b>2. Interpretación modal-Hamiltoniana</b>	<b>6</b>
2.1. Problemas interpretativos . . . . .	7
2.2. Estructura y contenido de la mecánica cuántica . . . . .	8
2.2.1. Estructura formal . . . . .	9
2.2.2. Postulados de la mecánica cuántica . . . . .	9
2.2.3. Contenido físico . . . . .	11
2.3. Interpretación modal-Hamiltoniana . . . . .	14
2.3.1. Propiedades, sistemas y subsistemas . . . . .	14
2.3.2. Hechos posibles y propensiones . . . . .	17
2.3.3. Hechos actuales . . . . .	18
2.3.4. Regla de actualización . . . . .	20
2.4. Interpretación geométrica de la IMH . . . . .	25
2.4.1. Esquema general geométrico de la IMH . . . . .	30
2.5. Relevancia física de la interpretación . . . . .	33
2.5.1. Partícula libre . . . . .	33
2.5.2. Partícula libre con spin . . . . .	36
2.5.3. Oscilador armónico . . . . .	37
2.5.4. Átomo de hidrógeno y átomos genéricos . . . . .	38
2.5.5. Efecto Zeeman . . . . .	41
2.5.6. Estructura fina . . . . .	42
2.5.7. Aproximación de Born-Oppenheimer . . . . .	43
2.6. El problema de la medición cuántica . . . . .	48
2.6.1. Mediciones ideales . . . . .	49
2.6.2. Mediciones no ideales . . . . .	54
2.6.3. El experimento de Stern-Gerlach . . . . .	56
2.6.4. Colas infinitas . . . . .	60
2.6.5. Definición de medición . . . . .	62
2.6.6. Ensamblajes y mediciones de estado . . . . .	64



<b>3. Interpretación modal-Hamiltoniana y covariancia Galileana de la mecánica cuántica</b>	<b>67</b>
3.1. Covariancia e invariancia . . . . .	68
3.2. El grupo de Galileo en mecánica cuántica . . . . .	70
3.2.1. Invariancia de la ecuación de Schrödinger . . . . .	73
3.2.2. Covariancia de la ecuación de Schrödinger . . . . .	76
3.2.3. Transformación galileana de observables . . . . .	78
3.3. La interpretación modal-Hamiltoniana a la luz del grupo de Galileo	80
3.3.1. Transformación de sistemas . . . . .	80
3.3.2. Transformación de la Regla de Actualización . . . . .	84
3.3.3. Versión invariante de la Regla de Actualización . . . . .	85
3.4. Ejemplos físicos . . . . .	88
3.4.1. Oscilador armónico . . . . .	88
3.4.2. Átomo de hidrógeno . . . . .	89
3.4.3. Sistema de tres cuerpos . . . . .	89
3.4.4. Sistema con campos externos . . . . .	91
3.4.5. Efecto Zeeman . . . . .	93
<b>4. Interpretación modal de la mecánica cuántica relativista</b>	<b>96</b>
4.1. El grupo de Poincaré y sus límites . . . . .	97
4.1.1. El límite no relativista tradicional . . . . .	98
4.1.2. Contracción generalizada de Inönü-Wigner . . . . .	100
4.2. Límite de los operadores de Casimir del grupo de Poincaré . . . . .	102
4.2.1. Mecánica cuántica relativista . . . . .	104
4.3. Sistema de muchas partículas . . . . .	108
<b>5. Conclusiones finales</b>	<b>110</b>
<b>A. Formulación algebraica de la mecánica cuántica</b>	<b>112</b>
A.0.1. Sistemas cuánticos con muchos grados de libertad . . . . .	112
A.0.2. Formulación algebraica de la teoría cuántica . . . . .	114
A.0.3. Álgebra de operadores . . . . .	116
A.0.4. Contrucción GNS. . . . .	116
A.1. Teoría de grupos . . . . .	119
A.1.1. Representaciones proyectivas y extensión de un grupo . . . . .	119
A.1.2. Representaciones reducibles e irreducibles . . . . .	121
A.1.3. Álgebras de Lie . . . . .	121
A.1.4. Grupos cinemáticos relativista y no relativista: Galileo y Poincaré . . . . .	123
A.1.5. Operadores de Casimir . . . . .	125
A.1.6. Contracción generalizada de Inönü-Wigner . . . . .	126
A.2. Decoherencia autoinducida y límite clásico . . . . .	128
A.2.1. Decoherencia autoinducida . . . . .	128
A.2.2. El límite clásico . . . . .	132
A.2.3. Interpretación modal-Hamiltoniana del límite clásico . . . . .	133
A.2.4. Aplicaciones a la cosmología: entropía del universo . . . . .	136

A.2.5. Decoherencia en el universo cerrado . . . . .	138
A.2.6. Entropía condicional del universo . . . . .	145
A.2.7. Las entropías termodinámica y de Gibbs . . . . .	146

# Capítulo 1

## Introducción

La física suele considerarse una ciencia “madura”, que ha logrado un fuerte consenso en la comunidad de especialistas acerca de sus temáticas relevantes y de los medios teóricos y experimentales para abordar sus problemas científicos. La existencia de tal consenso y la amplia ramificación de la disciplina en subáreas con sus propios objetivos específicos tiende a opacar un hecho central: todas las teorías físicas, aun las más ampliamente aceptadas en la comunidad científica, plantean problemas de fundamentación relacionados con cuestiones de interpretación y de articulación interteórica. Dichos problemas, en muchos casos de naturaleza interpretativa, suelen ser ignorados en la práctica cotidiana de la física, dirigida al logro de fines específicos y a la ampliación del campo de aplicabilidad de las teorías vigentes. Por ello es necesario que existan disciplinas científicas activas que se hagan cargo de las cuestiones de fundamentación de la física desde una perspectiva que combine conocimientos generales de la teoría y sus conexiones con las demás, como también un conocimiento exhaustivo y detallado del formalismo matemático utilizado. La fundamentación de la física se presenta como un ámbito de investigación multidisciplinario, que requiere la colaboración de especialistas en distintas áreas para su desarrollo fructífero.

La presente tesis doctoral se ubica precisamente en el marco de las interpretaciones de las teorías científicas, en este caso particular, de la mecánica cuántica. Profundizando los trabajos originales iniciados dentro del grupo de investigación, el objetivo más general consistió en estudiar y analizar la interpretación modal-Hamiltoniana de la mecánica cuántica y reformularla a partir de principios de simetría e invariancia. En particular, la tesis se organizó en torno a tres núcleos temáticos generales, cada uno de ellos con su propio objetivo general:

- Interpretación de la mecánica cuántica: En esta primer parte se desarrolló la formulación modal-Hamiltoniana de la mecánica cuántica y se mostró cómo funciona en ejemplos típicos, como también la resolución que da a problemas interpretativos.
- Covariancia e invariancia de la interpretación: En esta segunda parte, se

estudió la relevancia que tiene el concepto de simetría e invariancia dentro de la mecánica cuántica, permitiendo reformular la interpretación de manera formal por medio de la teoría de grupos.

- Interpretación modal-Hamiltoniana relativista: En esta última parte se estudió la extensión de la interpretación al ámbito relativista, utilizando las conclusiones halladas en la segunda parte de la tesis.

En el marco de las revistas nacionales e internacionales, la interpretación modal-Hamiltoniana, junto con la contribución de esta tesis doctoral, ha tenido una aceptación considerable, tanto en el ámbito de la física como también en el ámbito de la fundamentación de la física a través de las siguientes publicaciones: [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12]. A su vez, se ha publicado un capítulo de un libro [13] y también un libro completo sobre esta temática [14].

De manera general, con los resultados de la presente tesis doctoral se pretende contribuir al conocimiento y a la reflexión acerca de los fundamentos de la física y en particular, de la mecánica cuántica. A su vez, la tesis se propone como paso intermedio para el proyecto a largo plazo que implica el futuro desarrollo de una interpretación modal de la Teoría Cuántica de Campos (un primer borrador se puede ver en [15]), como también del modelo standard de partículas elementales.

## Capítulo 2

# Interpretación modal-Hamiltoniana

Desde un punto de vista realista, el propósito de interpretar una teoría científica es describir cómo sería la realidad si la teoría fuese verdadera. Más allá del éxito empírico que tiene la mecánica cuántica, su interpretación, es decir, la comprensión de las entidades que habitan el ámbito microscópico cuántico, es un problema abierto en el campo científico y filosófico. Durante un largo período posterior a la primera formulación de la mecánica cuántica, el marco interpretativo ortodoxo estuvo vinculado fuertemente a sus lecturas instrumentalistas, lo que significó que las cuestiones concernientes a la mecánica cuántica sólo fuesen discutidas en términos de los posibles resultados en las mediciones de los experimentos. En las últimas décadas, la postura tradicional instrumentalista comenzó a perder su fuerza original, y por ello se propusieron varias interpretaciones realistas de la mecánica cuántica. En este contexto, el objetivo de las interpretaciones modales es asignar propiedades a sistemas físicos basándose en el formalismo de la teoría, sin atribuir un papel especial a la medición. Esto implica concebir las mediciones cuánticas como meras interacciones físicas y sus resultados como propiedades de los aparatos de medición, que son sistemas cuánticos. Por lo tanto, las interpretaciones modales son interpretaciones realistas, donde no es necesaria la hipótesis del colapso de la función de onda y donde el estado cuántico de un sistema sólo describe las posibles propiedades de un sistema en lugar de las propiedades que actualmente posee.

Las interpretaciones modales pueden ser vistas como una familia, cuyos miembros difieren entre sí en la regla específica que selecciona las propiedades actuales de los sistemas cuánticos. En la primera sección de esta tesis se introducirá un nuevo miembro de esta familia, la *Interpretación modal-Hamiltoniana* (IMH) ([1], [2]), donde se da preponderancia al operador Hamiltoniano en la definición de un sistema y subsistema cuántico y en la selección de las propiedades actuales.

Los orígenes de las interpretaciones modales pueden encontrarse en los trabajos de Bas van Fraassen ([16], [17], [18]), donde se hace una distinción entre

*estado cuántico* y *estado-valor* del sistema: el estado cuántico nos dice cuáles son las propiedades físicas que el sistema podría poseer y el estado-valor representa las propiedades físicas que actualmente posee. La relación entre el estado cuántico y el estado-valor es probabilística. Por lo tanto, el estado cuántico es la base de las proposiciones modales, esto es, proposiciones acerca de lo que es posible o actual.

En particular, todas las interpretaciones modales coinciden en los siguientes puntos (para un resumen claro ver [19], sección 1):

1. La interpretación está basada en el formalismo estándar de la mecánica cuántica.
2. La interpretación es realista, esto es, su objetivo es describir como sería la realidad si la mecánica cuántica fuese verdadera.
3. La mecánica cuántica es una teoría fundamental, que no sólo debe describir partículas elementales sino también objetos macroscópicos.
4. La mecánica cuántica describe sistemas únicos: el estado cuántico se refiere a un único sistema, no a un ensamble de sistemas.
5. El estado cuántico del sistema (estado puro o mezcla) describe las posibles propiedades del sistema y sus correspondientes probabilidades, y no sus propiedades actuales. La relación entre el estado cuántico y las propiedades actuales del sistema es probabilística.
6. Los sistemas cuánticos poseen propiedades actuales en todo momento, aun si no se ha efectuado una medición sobre ellos.
7. Una medición cuántica es una interacción física ordinaria. No hay colapso de la función de onda: el estado cuántico siempre evoluciona unitariamente de acuerdo con la ecuación de Schrödinger.
8. La ecuación de Schrödinger describe la evolución temporal de las probabilidades, no de las propiedades actuales.

La diferencia más importante entre la propuesta de la IMH y las versiones modales previas consiste en el papel que cumple el Hamiltoniano del sistema cuántico en la selección de las propiedades actuales.

## 2.1. Problemas interpretativos

Los problemas de interpretación de la mecánica cuántica se pueden agrupar de la siguiente manera:

*El problema de la contextualidad:* En los inicios de la teoría, algunos autores mantenían la esperanza de interpretar el formalismo cuántico del mismo modo en que se interpretaba la mecánica estadística clásica, donde el estado representaba la situación de un “ensamble” de sistemas similares y las probabilidades tenían

un significado exclusivamente gnoseológico. Esta esperanza se vio frustrada por el teorema de Kochen y Specker [20], que demuestra la contextualidad cuántica: el formalismo de la teoría impide asignar, de un modo consistente, un valor preciso a cada uno de los observables del sistema que se encuentra en un cierto estado cuántico. Por lo tanto, sólo podemos afirmar la ocurrencia de ciertas propiedades en un contexto, y de ciertas otras en otro contexto diferente. Cada conjunto de propiedades parece corresponder a un objeto, pero no es posible pensar en una entidad individual que subyace a todas las propiedades en la medida en que no es admisible predicar todas las propiedades simultáneamente.

*El problema de la medición:* Un sistema cuántico puede encontrarse en un estado de superposición respecto de los valores de un cierto observable, de modo tal que la teoría no asigna un valor definido a tal observable. Este hecho se torna particularmente grave cuando las superposiciones se transfieren al plano macroscópico a través de la medición, tal como lo muestra el famoso caso del gato de Schrödinger. Para afrontar este problema, la interpretación de Copenhague postuló un proceso físico, el colapso de la función de onda: durante la medición, el estado de superposición “colapsaría” indeterminísticamente hacia uno de los elementos de la superposición, donde el observable macroscópico adquiere un valor definido.

*El problema de la no-localidad:* Ya en la década del '30, a través de su famoso experimento mental, Einstein, Podolsky y Rosen [21] pusieron de manifiesto la no-localidad cuántica: luego de interactuar, dos sistemas adoptan un estado entrelazado por el cual sus propiedades se mantienen correlacionadas aun cuando la interacción haya concluido y los dos sistemas se encuentren separados por cualquier distancia. La explicación de tales correlaciones, en términos de acción instantánea a distancia, implicaría una violación de las restricciones relativistas.

*El problema de la indistinguibilidad:* Los sistemas cuánticos, considerados en agregados, no responden a la estadística clásica (Maxwell-Boltzmann), sino a estadísticas peculiares (Fermi-Dirac y Bose-Einstein), las cuales ponen en crisis la interpretación de los sistemas como individuos en un sentido filosófico del concepto. En efecto, las “partículas” cuánticas resultan absolutamente indistinguibles, de modo tal que no es posible reidentificarlas a través del tiempo o del espacio.

## **2.2. Estructura y contenido de la mecánica cuántica**

El primer paso para describir la IMH es la presentación explícita de lo que se considera como la estructura formal y el contenido físico de la mecánica cuántica. Esto es así, ya que si queremos construir una interpretación, entonces hay que ser claro con respecto a las cuestiones formales y teóricas. La IMH en principio adopta un formalismo algebraico de la mecánica cuántica. Más aún, dado que se argumentará la relevancia física de nuestra propuesta, se debe mostrar cómo la estructura formal de la teoría adquiere un significado físico.

En primer lugar, se debe distinguir entre el lenguaje matemático (operadores auto-adjuntos, funcionales, autoestados y autovalores de operadores, etc) y el lenguaje físico (observables, estados, valores de los observables, etc): cada término del lenguaje matemático debe referirse a un ítem físico cuyo nombre pertenezca al lenguaje físico. Es esta interpretación física del formalismo matemático lo que lo convierte en el formalismo de una teoría física.

### 2.2.1. Estructura formal

De acuerdo con el formalismo algebraico desarrollado en el apéndice A (ver [22]), dada una  $*$ -álgebra  $\mathcal{A}$  de operadores, (i) el conjunto de operadores autoadjuntos de  $\mathcal{A}$  es el espacio  $\mathcal{O}$  cuyos elementos representan observables,  $O \in \mathcal{O}$  y (ii) los estados quedan representados por funcionales lineales en  $\mathcal{O}$ , esto es, por elementos del espacio dual  $\mathcal{O}'$ ,  $\rho \in \mathcal{O}'$ . En este marco teórico, los observables son los elementos básicos de la teoría y los estados son elementos secundarios, definidos en términos de los primeros.

Adoptaremos una  $C^*$ -álgebra de operadores para formular los postulados de la mecánica cuántica. Esta  $C^*$ -álgebra puede ser representada mediante un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  (construcción GNS, ver [23]) y en este caso particular,  $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$ , por lo tanto,  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{O}'$  están representados en  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ .

### 2.2.2. Postulados de la mecánica cuántica

En primer lugar se presentará la definición de sistema cuántico:

**Postulado 1** *Un sistema cuántico  $S$  está definido por el par  $(\mathcal{O} \subseteq \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}, H)$  donde: (i) los observables  $O \in S$  están representados por operadores autoadjuntos pertenecientes al espacio de observables  $\mathcal{O}$ ,  $O \in \mathcal{O} \subseteq \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ , y (ii)  $H$  es un observable particular llamado Hamiltoniano de  $S$ ,  $H \in \mathcal{O} \subseteq \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ .*

La definición de sistema cuántico, si bien correspondiendo aquí con una  $C^*$ -álgebra, puede ser reescrito para diferentes  $*$ -álgebras bajo las condiciones necesarias de la representación del álgebra.<sup>1</sup>

**Postulado 2** *Dado un sistema cuántico  $S : (\mathcal{O} \subseteq \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}, H)$  y un observable  $O = \sum_i o_i P_i$  donde  $o_i \neq o_j$  para  $i \neq j$  y los  $P_i \in \mathcal{O}$  son operadores de proyección, cada autovalor  $o_i$  de  $\mathcal{O}$  es uno de los posibles valores de  $O$ .*

**Postulado 3** *Dado un sistema cuántico  $S : (\mathcal{O} \subseteq \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}, H)$ , su estado inicial  $\rho_0$  está representado por un funcional lineal autoadjunto perteneciente a  $\mathcal{O}'$  (el espacio dual de  $\mathcal{O}$ ) incluido en  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ ,  $\rho_0 \in \mathcal{O}' \subseteq \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ , tal que (i)  $\text{Tr}(\rho_0) = 1$  (condición de normalización), y (ii)  $\langle u | \rho_0 | u \rangle \geq 0$  para cualquier  $|u\rangle \in \mathcal{H}$  (condición de no negatividad).*

<sup>1</sup>Por ejemplo, a través de la generalización del teorema GNS [23] se puede probar que un álgebra nuclear puede ser representada por un espacio de Hilbert equipado.



**Postulado 4 (Postulado Dinámico)** Dado un sistema cuántico  $S : (\mathcal{O} \subseteq \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}, H)$  con estado inicial  $\rho_0 \in \mathcal{O}'$ , el estado de  $S$  en un tiempo  $t$ ,  $\rho(t) \in \mathcal{O}'$  está dado por la ecuación de Schrodinger:  $\rho(t) = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} \rho_0 e^{\frac{iHt}{\hbar}}$ .

La regla de Born introduce el ingrediente probabilístico en la teoría. En la interpretación instrumentalista de la mecánica cuántica, la regla se concibe como la asignación de probabilidades a los resultados de la medición; esto requiere que la medición sea concebida como un concepto primitivo de la teoría. En cambio, desde la perspectiva de la IMH, y por lo tanto de esta tesis, la medición es una interacción física ordinaria que debe ser definida por la teoría con su interpretación. Desde nuestra perspectiva, entonces, la regla de Born adquiere un contenido realista: asigna probabilidades a eventos en los cuales los observables adquieren valores definidos. Podemos denotar con el símbolo  $(A : a_k)$  al evento en el cual el observable  $A$  adquiere el valor  $a_k$ ; de este modo la regla de Born puede ser expresada de la siguiente manera:

**Postulado 5** Dado un sistema cuántico  $S : (\mathcal{O} \subseteq \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}, H)$  con estado inicial  $\rho_0 \in \mathcal{O}'$ , y considerando un observable  $A = \sum_i a_i P_i = \sum_i a_i \sum_{\mu_i} |i, \mu_i\rangle \langle i, \mu_i| \in \mathcal{O}$ , donde  $a_i \neq a_j$  para  $i \neq j$ , la probabilidad de Born  $P_B$  del evento  $(A : a_k)$  en el tiempo  $t$  puede ser escrita como

$$P_B(A : a_k, \rho(t)) = Tr(\rho(t)P_k) = \sum_{\mu_k} \langle k, \mu_k | \rho(t) | k, \mu_k \rangle \quad (2.1)$$

donde  $P_k \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$  es un autoprojector de  $A$  que proyecta en el subespacio generado por todos los vectores  $|k, \mu_k\rangle$  correspondientes al autovalor  $a_k$ .

En particular, dado que los proyectores  $P \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ , ( $P^2 = P$ ) representan observables con autovalores  $p_1 = 1$  y  $p_2 = 0$ , la probabilidad de Born del evento  $(P : 1)$  es

$$P_B(P : 1, \rho(t)) = Tr(\rho(t)P) \quad (2.2)$$

Si la probabilidad de Born  $P_B$  se calcula sobre todos los observables proyectores  $P \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ , la función resultante no satisface la definición de probabilidad de Kolmogorov, dado que esa definición se aplica a álgebras booleanas, mientras que el conjunto de eventos correspondientes a los proyectores  $P$  no tiene una estructura booleana. Por esta razón, algunos autores definen una función de probabilidad generalizada (no Kolmogoroviana) sobre la ortoálgebra de eventos cuánticos ([24], [25]). Si, por el otro lado, queremos preservar el carácter Kolmogoroviano de la probabilidad, debemos definir diferentes funciones de probabilidad en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Por lo tanto, se puede definir un *contexto* como un *conjunto completo de proyectores ortogonales* (CCPO)  $\{\Pi_\alpha\}$ , con  $\alpha = 1$  a  $M$ , tal que

$$\sum_{\alpha=1}^M \Pi_\alpha = I \quad \text{y} \quad \Pi_\alpha \Pi_\beta = \delta_{\alpha\beta} \Pi_\alpha \quad (2.3)$$

donde  $I$  es el operador identidad en  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ .<sup>2</sup> Todos los proyectores de la forma  $P = \sum_J \Pi_J$ , donde  $\Pi_J \in CCPO \{\Pi_\alpha\}$  y  $J \subset \{1, 2, \dots, M\}$ , definen un algebra booleana  $B^\alpha = (\mathcal{P}^\alpha, \cap, \cup, 0, 1)$ , donde  $\mathcal{P}^\alpha = \{x/x = \cup_J \{\Pi_J\}\}$ . Entonces, a través de la regla de Born, un estado  $\rho \in \mathcal{O}'$  define sobre  $\mathcal{P}^\alpha$  una función probabilidad  $f_\rho^\alpha : \mathcal{P}^\alpha \rightarrow [0, 1]$  que satisface los axiomas de Kolmogorov:

- $f_\rho^\alpha(\mathcal{U}) = 1$
- $f_\rho^\alpha(\emptyset) = 0$
- Si  $X, Y \in \mathcal{P}^\alpha$  y  $X \cap Y = \emptyset$ , entonces  $f_\rho^\alpha(X \cup Y) = f_\rho^\alpha(X) + f_\rho^\alpha(Y)$ .

Como consecuencia, dado un CCPO  $\{\Pi_\alpha\}$  y los proyectores  $P = \sum_J \Pi_J$ :

- La probabilidad  $f_\rho^\alpha(P : 1)$  asociada al evento  $(P : 1)$  se calcula con la regla de Born como

$$f_\rho^\alpha(P : 1) = P_B(P : 1, \rho) = Tr(\rho P) \quad (2.4)$$

- Para un observable  $A = \sum_i a_i P_i$ , la probabilidad  $f_\rho^\alpha(A : a_k)$  asociada al evento  $(A : a_k)$  se identifica con la probabilidad  $f_\rho^\alpha(P_k : 1)$  asociada al evento  $(P_k : 1)$ :

$$f_\rho^\alpha(A : a_k) = f_\rho^\alpha(P_k : 1) = Tr(\rho P_k) \quad (2.5)$$

Resumiendo, entonces, dado que la booleanidad se retiene en cada contexto, podemos decir que el estado  $\rho$  define una función probabilidad  $f_\rho^\alpha$  diferente en cada contexto identificado por  $\alpha$ , y que cada una de estas funciones de probabilidad satisface las definiciones de Kolmogorov.

### 2.2.3. Contenido físico

Como se dijo antes, desde una perspectiva realista, interpretar una teoría implica decir como sería la realidad si la teoría fuese verdadera. Como sostiene Ballentine [26], aunque la estructura matemática es necesaria para la formulación de la teoría, dicha estructura no tiene contenido físico. Cuando se tiene que resolver problemas físicos concretos, es indispensable identificar los observables relevantes que tienen un significado físico claro. Estos observables están relacionados con las transformaciones espacio-temporales, en particular, con el grupo de Galileo (ver ec.(A.66) del apéndice A.1).

Una transformación continua  $g$  actuando sobre el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  se representa mediante un operador local unitario  $U_s(g)$  que depende de algún parámetro  $s$ . Esta transformación actúa sobre otros observables y estados como se ve en la ec.(A.37), que volveremos a escribir en un lenguaje matemático más simple:

<sup>2</sup>Está claro que, si  $\{|\alpha\rangle\}$  es una base de  $\mathcal{H}$ , entonces el conjunto  $\{\Pi_\alpha = |\alpha\rangle\langle\alpha|\}$  es un CCPO.

$$A \rightarrow A' = U_s A U_s^{-1} \quad |\Psi\rangle \rightarrow |\Psi'\rangle = U_s |\Psi\rangle \quad (2.6)$$

Si estas transformaciones son continuas en sus parámetros, entonces se pueden expandir en una serie de potencias, y se puede ver que sucede con ellas cuando se aproximan a la transformación identidad (ver A.1). Entonces estos operadores unitarios infinitesimales  $U_s$  se pueden expresar, mediante la exponenciación (ver [27]), como:

$$U_s = e^{isT_s} \quad (2.7)$$

donde  $T_s$  es el generador de la transformación  $U_s(g)$ . A su vez, cuando un vector de estado se representa como una función de las coordenadas espaciales y temporal, hay una relación inversa entre las transformaciones del espacio de funciones y la transformación de las coordenadas:

$$\Psi(x) = U_s \Psi(x') \quad (2.8)$$

Como es sabido, a cada teoría física le corresponde un grupo de simetría, en el sentido de que la ley dinámica de la teoría es covariante ante las transformaciones del grupo (el concepto de covariancia será detalladamente estudiado en el Capítulo III). En particular, el grupo de simetría correspondiente a la mecánica cuántica no relativista es el grupo de Galileo con extensión central (ver ec. (A.66)). Este grupo se compone de once generadores asociados con diez parámetros correspondientes a la transformación de coordenadas y un parámetro asociado a la estructura proyectiva de la representación del grupo en el espacio de Hilbert: los primeros diez parámetros se corresponden con un desplazamiento temporal  $b$ , tres desplazamientos espaciales  $\vec{a}$ , tres rotaciones espaciales contenidas en la matriz antisimétrica  $R$  y tres velocidades  $\vec{v}$ , y el parámetro  $m$  que se asocia al grado de libertad que aparece cuando el grupo de simetría es representado en el espacio de Hilbert (representaciones proyectivas, ver A.1). Estos generadores de simetría representan los observables físicos básicos de la teoría: la energía  $H$  asociada al desplazamiento temporal, los tres momentos  $P_i$  asociados con los desplazamientos espaciales  $\vec{a}$ , el momento angular  $J_i$  asociado a las rotaciones espaciales codificadas en la matriz  $R$ , los tres boosts  $G_i$  asociados a la velocidad  $\vec{v}$  y  $M$  la masa del sistema cuántico. Mediante las relaciones de conmutación entre estos generadores es posible despejar uno de otros; en particular se puede mostrar fácilmente que la forma funcional del Hamiltoniano, en términos de los demás observables del grupo, tiene el siguiente aspecto:

$$H = \frac{P^2}{2M} + wI \quad (2.9)$$

donde  $w$  es una constante con unidades de energía.

Como ya dijimos, existe una relación inversa entre las transformaciones del espacio de funciones y la transformación de las coordenadas (ver ec.(2.8)). En el caso de desplazamiento temporal, la transformación es  $t' = t + b$  y  $U_s$  es  $U_b = e^{ibH}$  dado que el Hamiltoniano  $H$  es el generador de la transformación:

$$|\Psi(t_0 + b)\rangle = e^{ibH} |\Psi(t_0)\rangle \quad (2.10)$$

Haciendo  $t_0 = 0$  y  $b = t$  se obtiene

$$|\Psi(t)\rangle = e^{itH} |\Psi(0)\rangle \quad (2.11)$$

que tiene la forma de ecuación de Schrödinger. Sin embargo, se debe notar que la ec. (2.11) puede ser obtenida sólo cuando el Hamiltoniano  $H$  es independiente del tiempo: si  $H$  es función de  $t$ , no se puede concebir como generador de desplazamientos temporales (ver [26], pág. 89). Esto significa que la independencia temporal del Hamiltoniano es lo que brinda a la ecuación de Schrödinger un sentido físico preciso (es decir, el sentido físico de expresar un desplazamiento temporal) y, al mismo tiempo, lo que hace que la ecuación de Schrödinger sea sólo aplicable a *sistemas cerrados*. Este resultado es el que se encuentra implícitamente a la base de la formulación ortodoxa de la mecánica cuántica, donde el sistema cuántico se concibe como cerrado, con energía constante, que evoluciona unitariamente de acuerdo con la ecuación de Schrödinger; el Hamiltoniano (la energía del sistema) sólo cambia en el tiempo como resultado de la interacción con otros sistemas, descrita por medio de un Hamiltoniano de interacción. La IMH estará basada en esta versión ortodoxa de la teoría.

Aunque en un sistema cerrado el Hamiltoniano  $H$  es independiente del tiempo y por lo tanto invariante ante desplazamientos temporales, podría no ser invariante con respecto a las demás transformaciones espacio-temporales. Decir que el Hamiltoniano es invariante ante cierta transformación con un generador  $K$  y parámetro  $s$  significa que (ver ec.(2.6)):

$$e^{isK} H e^{-isK} = H \quad \text{entonces} \quad [K, H] = 0 \quad (2.12)$$

Esto implica que, cuando  $H$  es invariante ante cierta transformación continua, el generador de tal transformación es una constante de movimiento del sistema: cada simetría del Hamiltoniano define una cantidad conservada. Por ejemplo, la invariancia de  $H$  ante desplazamientos espaciales en cualquier dirección implica que el momento  $P$  es una constante de movimiento; la invariancia de  $H$  ante rotaciones espaciales en cualquier dirección implica que el momento angular total  $J$  es una constante de movimiento.

A su vez, sabemos que la invariancia ante transformaciones espacio-temporales se sigue de las propiedades mismas del espacio y el tiempo: la invariancia ante desplazamientos temporales expresa la homogeneidad del tiempo, la invariancia ante desplazamientos espaciales expresa la homogeneidad del espacio, la invariancia ante rotaciones espaciales expresa la isotropía del espacio. También se sabe que la ecuación de Schrödinger es covariante ante el grupo de Galileo (esto se detallará en el Capítulo III). La covariancia de la ecuación de Schrödinger ante desplazamientos temporales está garantizada por la independencia temporal del Hamiltoniano, y esto expresa la homogeneidad del tiempo. Sin embargo, en la mecánica cuántica, los campos no están cuantizados; ellos son tratados como campos clásicos que actúan sobre los sistemas cuánticos rompiendo la homogeneidad e isotropía del espacio. Pero, a pesar de esto, la ley dinámica de la

teoría,  $|\Psi(t)\rangle = e^{itH} |\Psi(0)\rangle$  debe permanecer covariante ante desplazamientos espaciales y rotaciones espaciales.

Por lo tanto, la ruptura de la homogeneidad y de la isotropía del espacio debida a la acción de un campo en un sistema cuántico debe estar contenida en la forma funcional del Hamiltoniano: la no homogeneidad del espacio implica la no invariancia de  $H$  ante desplazamientos espaciales y, su vez, el hecho de que  $P$  (o alguna de sus componentes) no sea una constante de movimiento; la no isotropía del espacio implica la no invariancia de  $H$  ante rotaciones espaciales y, a su vez, el hecho de que  $J$  no sea una constante de movimiento. Resumiendo, el status privilegiado del Hamiltoniano proviene de su papel en la ecuación de Schrödinger:  $H$  debe contener las asimetrías espaciales en cada caso particular con el fin de preservar la covariancia de la ley dinámica de la teoría.

Como se ha visto, el estudio de las transformaciones de simetría espacio-temporales cumple un doble propósito: la identificación de las magnitudes físicas fundamentales de la teoría, y la explicación del papel central que juega el Hamiltoniano en la selección de las constantes de movimiento del sistema.

## 2.3. Interpretación modal-Hamiltoniana

En general, los físicos coinciden en el uso del lenguaje físico, pero aún así no es evidente cuál es la relación entre este lenguaje y la realidad: las teorías físicas no proveen sus propias interpretaciones. Por lo tanto, si se quiere formular una interpretación de la mecánica cuántica, se debe brindar los postulados interpretativos que definirán la relación unívoca entre los elementos de la realidad y cada uno de los elementos teóricos introducidos en los postulados de la mecánica cuántica. En otras palabras, debemos identificar qué clase de objetos, propiedades, hechos, etc. están representados por cada término físico en los postulados (sistemas, observables, estados, etc). De esta manera se podrá decir qué clase de entidades habitan la realidad de la mecánica cuántica.

En esta sección se introducirá la IMH sin discutir sus ventajas sobre otras interpretaciones. Los argumentos que la apoyan se harán claros en las secciones siguientes.

### 2.3.1. Propiedades, sistemas y subsistemas

El primer paso consiste en identificar los elementos básicos que habitan la realidad cuántica por medio de proposiciones interpretativas.

**Proposición 1** *Dado un sistema cuántico  $S : (\mathcal{O} \subseteq \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}, H)$ , los observables  $O \in \mathcal{O}$  representan propiedades-tipo  $[O]$ , y sus correspondientes autovalores  $o_i$  representan propiedades-caso  $[O : o_i]$  de la propiedad-tipo  $[O]$ . En particular, los proyectores  $P \in \mathcal{O}$  son observables que representan propiedades-tipo  $[P]$  con propiedades-caso  $[P : 1]$  y  $[P : 0]$ .*

Cualquier sistema cuántico puede ser descompuesto en partes de diferentes maneras; no obstante, no cualquier descomposición conduce a partes que son

sistemas cuánticos. Esto sucede cuando el comportamiento de cada parte es dinámicamente independiente de la otra, y esta independencia dinámica tendrá su origen en la no interacción entre las partes (ver [28] y [29]). Con esta idea, podemos adoptar las siguientes proposiciones interpretativas.

**Proposición 2 (Descomposición de Sistemas)** *Un sistema cuántico  $S : (\mathcal{O} \subseteq \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}, H)$  con estado inicial  $\rho_0 \in \mathcal{O}'$ , es compuesto cuando pueden definirse dos sistemas cuánticos  $S^1 : (\mathcal{O}^1 \subseteq \mathcal{H}^1 \otimes \mathcal{H}^1, H^1)$  y  $S^2 : (\mathcal{O}^2 \subseteq \mathcal{H}^2 \otimes \mathcal{H}^2, H^2)$  tal que*

1.  $\mathcal{O} = \mathcal{O}^1 \otimes \mathcal{O}^2 \subseteq \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ , donde  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \otimes \mathcal{H}^2$  y
2.  $H = H^1 \otimes I^2 + I^1 \otimes H^2 \in \mathcal{O}$ , donde  $I^1$  y  $I^2$  son operadores identidad en  $\mathcal{H}^1 \otimes \mathcal{H}^1$  y  $\mathcal{H}^2 \otimes \mathcal{H}^2$  respectivamente.

En este caso, los estados iniciales  $\rho_o^1 \in \mathcal{O}^{1'}$  y  $\rho_o^2 \in \mathcal{O}^{2'}$  de  $S^1$  y  $S^2$  respectivamente se obtienen como  $\rho_o^1 = Tr_{(2)}\rho_0$  y  $\rho_o^2 = Tr_{(1)}\rho_0$ , donde  $Tr_{(i)}\rho_0$  es la traza parcial de  $\rho_0$ . En este caso se dice que  $S^1$  y  $S^2$  son *subsistemas* del sistema compuesto  $S = S^1 \cup S^2$ . Cuando un sistema cuántico no es compuesto, se dice que es *elemental*. Por lo tanto, la proposición de Descomposición de Sistemas (Proposición 2) provee un criterio preciso para distinguir entre sistemas elementales y sistemas compuestos, y tal criterio está basado en el Hamiltoniano del sistema.

Cabe aclarar que la definición del sistema compuesto no implica que el estado inicial  $\rho_0$  de  $S$  sea el producto tensorial  $\rho_o^1 \otimes \rho_o^2$ : este estado factorizado o no correlacionado es un estado muy particular, usado en la práctica para describir sistemas preparados independientemente. Por el contrario, en general un estado inicial es un estado correlacionado o entrelazado  $\rho_0 \in \mathcal{O}'$ ; no obstante, dado que no hay interacción entre  $S^1$  y  $S^2$ ,  $[H^1 \otimes I^2, I^1 \otimes H^2] = 0$  y, entonces,

$$e^{\frac{-iHt}{\hbar}} = e^{\frac{-iH^1 t}{\hbar}} e^{\frac{iH^2 t}{\hbar}} \quad (2.13)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \rho^1(t) &= Tr_{(2)}\rho(t) = Tr_{(2)} \left[ e^{\frac{-iHt}{\hbar}} \rho_0 e^{\frac{iHt}{\hbar}} \right] \\ &= e^{\frac{iH^1 t}{\hbar}} [Tr_{(2)}\rho_0] e^{\frac{-iH^2 t}{\hbar}} = e^{\frac{iH^1 t}{\hbar}} \rho_o^1 e^{\frac{-iH^2 t}{\hbar}} \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \rho^2(t) &= Tr_{(1)}\rho(t) = Tr_{(1)} \left[ e^{\frac{-iHt}{\hbar}} \rho_0 e^{\frac{iHt}{\hbar}} \right] \\ &= e^{\frac{iH^2 t}{\hbar}} [Tr_{(1)}\rho_0] e^{\frac{-iH^1 t}{\hbar}} = e^{\frac{iH^2 t}{\hbar}} \rho_o^2 e^{\frac{-iH^1 t}{\hbar}} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Esto significa que, aun habiendo correlaciones, los subsistemas  $S^1$  y  $S^2$ , son dinámicamente independientes: cada uno de ellos evoluciona bajo la acción de su propio Hamiltoniano.

Harsman y Wickramasekara ([28] y [29]) llaman *estructura de producto tensorial* (TPS<sup>3</sup>) a cualquier partición de la totalidad del sistema  $S$ , representado en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ , en partes representadas en  $\mathcal{H}^A$  y  $\mathcal{H}^B$ . En esos trabajos se muestra que los sistemas cuánticos admiten una variedad de TPSs, cada uno de los cuales conduce a diferentes entrelazamientos entre sus partes: separabilidad y entrelazamiento son TPS-dependientes. Sin embargo, también se muestra que hay un TPS particular que es dinámicamente invariante y, en consecuencia, el entrelazamiento resultante también es dinámicamente invariante: ese TPS particular corresponde a nuestra descomposición del sistema compuesto en subsistemas. Por lo tanto, cuando  $S^1$  y  $S^2$  son subsistemas del sistema compuesto  $S$  y dinámicamente independientes, tenemos una noción robusta de entrelazamiento: a pesar de que  $\rho_0$  evoluciona en el tiempo, su entrelazamiento permanece invariante.

**Proposición 3 (Composición de Sistemas)** *Dados dos sistemas cuánticos  $S^1 : (\mathcal{O}^1 \subseteq \mathcal{H}^1 \otimes \mathcal{H}^1, H^1)$  y  $S^2 : (\mathcal{O}^2 \subseteq \mathcal{H}^2 \otimes \mathcal{H}^2, H^2)$ , con estados iniciales  $\rho_o^1 \in \mathcal{O}^{1'}$  y  $\rho_o^2 \in \mathcal{O}^{2'}$  respectivamente, siempre puede definirse un sistema cuántico  $S : (\mathcal{O} \subseteq \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}, H)$  con estado inicial  $\rho_0 \in \mathcal{O}'$ , tal que*

1.  $\mathcal{O} = \mathcal{O}^1 \otimes \mathcal{O}^2 \subseteq \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ , donde  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \otimes \mathcal{H}^2$ ,
2.  $H = H^1 \otimes I^2 + I^1 \otimes H^2 + H_{int} \in \mathcal{O}$ , donde  $H_{int}$  es usualmente llamado Hamiltoniano de interacción, y
3.  $\rho_0 = \rho_o^1 \otimes \rho_o^2 \in \mathcal{O}'$ .

En esta última proposición se pueden distinguir dos casos:

- Si  $H_{int} = 0$  ( $S^1$  y  $S^2$  no interactúan),  $S^1$  y  $S^2$  son subsistemas del sistema compuesto  $S = S^1 \cup S^2$ : ellos satisfacen la proposición de la Descomposición de Sistemas. En este caso, los estados iniciales  $\rho_0^1 = Tr_{(2)}\rho_0 = Tr_{(2)}(\rho_o^1 \otimes \rho_o^2)$  y  $\rho_0^2 = Tr_{(1)}\rho_0 = Tr_{(1)}(\rho_o^1 \otimes \rho_o^2)$  evolucionan unitariamente de acuerdo con la ecuación de Schrödinger, como se requiere por el Postulado Dinámico (Postulado 4, ver ec. (2.14), (2.15)).
- Si  $H_{int} \neq 0$  ( $S^1$  y  $S^2$  interactúan), a partir del instante  $t_0$  cuando la interacción comienza,  $S^1$  y  $S^2$  no son subsistemas del sistema  $S$ : éstos no satisfacen la proposición de Descomposición de Sistemas. En efecto, los estados iniciales  $\rho_0^1 = Tr_{(2)}\rho_0$  y  $\rho_0^2 = Tr_{(1)}\rho_0$  no evolucionan unitariamente. Por lo tanto, estrictamente hablando, en  $t_0$ ,  $S^1$  y  $S^2$  no son sistemas cuánticos, ya que ellos no satisfacen el Postulado Dinámico (Postulado 4).

**Proposición 4** *Dado un sistema cuántico compuesto  $S = S^1 \cup S^2 : (\mathcal{O} \subseteq \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}, H)$ , donde  $S^1 : (\mathcal{O}^1 \subseteq \mathcal{H}^1 \otimes \mathcal{H}^1, H^1)$  y  $S^2 : (\mathcal{O}^2 \subseteq \mathcal{H}^2 \otimes \mathcal{H}^2, H^2)$  y dados los observables  $A^1 \in \mathcal{O}^1$  de  $S^1$ ,  $A^2 \in \mathcal{O}^2$  de  $S^2$ , y los observables  $A = A^1 \otimes I^2 \in \mathcal{O}$  y  $A^f = f(A^1 \otimes I^2, I^1 \otimes A^2) \in \mathcal{O}$  de  $S$ , donde  $f$  es una función analítica, entonces*

<sup>3</sup>Las siglas TPS significan *Tensor Product Structure* en inglés.

1. *Los observables  $A$  y  $A^1$  representan la misma propiedad-tipo  $[A] = [A^1]$  con las mismas propiedades-caso  $[A : a_i^1] = [A^1 : a_i^1]$  donde  $a_i^1$  son los autovalores de ambos observables  $A$  y  $A^1$ .*
2. *El observable  $A^f$  representa la propiedad-tipo  $[A^f]$  con propiedades-caso  $[A^f : f(a_i^1, a_j^2)]$ , donde  $a_i^1$  y  $a_j^2$  son autovalores de  $A^1$  y  $A^2$  respectivamente;  $[A^f]$  es equivalente a la combinación entre  $[A^1 \otimes I^2]$  y  $[I^1 \otimes A^2]$ , representada por la función  $f$ .*

Esta última proposición interpretativa expresa la hipótesis de que el observable  $A^1$  del subsistema  $S^1$  y el observable  $A = A^1 \otimes I^2$  del sistema compuesto  $S = S^1 \cup S^2$  representan la misma propiedad-tipo. Por el otro lado, esta proposición establece la necesaria conexión entre las propiedades del sistema compuesto y las propiedades de sus subsistemas. Este tipo de conexiones no es una característica propia de la mecánica cuántica, sino también es usual en la mecánica clásica donde se considera la energía de un sistema compuesto de dos partículas como una combinación particular (expresado por las sumas) de las energías de los subsistemas componentes.

### 2.3.2. Hechos posibles y propensiones

Hasta aquí se han identificado las propiedades de los sistemas cuánticos. Pero estas propiedades no son hechos: propiedades y hechos pertenecen a diferentes categorías de la realidad. En nuestro caso, los hechos posibles serán definidos como posibles ocurrencias de ciertas propiedades-caso, y las probabilidades serán aplicadas a ellos.

**Proposición 5** *Dado un sistema cuántico  $S : (\mathcal{O} \subset \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}, H)$ ,*

1. *Si  $P \in \mathcal{O}$  es un observable proyector, el hecho posible  $P_F [P]$  es la ocurrencia posible de la propiedad-caso  $[P : 1]$  correspondiente a la propiedad-tipo  $[P]$ .*
2. *Si  $A = \sum_i a_i P_i \in \mathcal{O}$ , donde  $a_i \neq a_j$  para  $i \neq j$  y los  $P_i \in \mathcal{O}$  son los autoproyectores de  $A$ , el hecho posible  $P_F [A : a_k]$  es la ocurrencia posible de la propiedad-caso  $[A : a_k]$  correspondiente a la propiedad-tipo  $[A]$ .*

**Proposición 6** *Dado un sistema cuántico elemental  $S : (\mathcal{O} \subset \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}, H)$ , un CCPO (ver ec.(2.3))  $\{\Pi_\alpha\}$  con  $\alpha = 1, \dots, M$ , y los proyectores  $P = \sum_J \Pi_J \in \mathcal{O}$ , donde  $\Pi_J \in \{\Pi_J\}$  y  $J \in j = \{1, \dots, M\}$  entonces*

1. *El hecho posible  $P_F [P]$  es equivalente a la disyunción de los hechos posibles  $P_F [\Pi_J]$ :*

$$P_F [P] = \vee_J P_F [\Pi_J] \quad (2.16)$$

*donde el símbolo  $\vee_J$  es la disyunción.*



2. Si  $A = \sum_i a_i P_i \in \mathcal{O}$ , donde  $a_i \neq a_j$  para  $i \neq j$  y  $P_i \in \mathcal{O}$  son autoproyectores de  $A$ , el hecho posible  $P_F[A : a_k]$  es equivalente al hecho posible  $P_F[P_k]$ :

$$P_F[A : a_k] = P_F[P_k] \quad (2.17)$$

Es claro que, dado un CCPO  $\{\Pi_\alpha\}$ , los observables proyectores  $P = \sum_J \Pi_J \in \mathcal{O}$  nos conduce al conjunto de hechos posibles  $\mathcal{P}_F^\alpha = \{x/x = P_F[P]\}$  que es isomorfo al conjunto  $\mathcal{P}^\alpha = \{x/x = \cup_J \{\Pi_J\}\}$ ; entonces  $\mathcal{P}_F^\alpha$  también define un álgebra booleana. Como consecuencia, en cada sistema cuántico elemental, la función probabilidad  $f_\rho^\alpha$ , definida por el estado  $\rho$  sobre el conjunto  $\mathcal{P}^\alpha$ , puede ser interpretada como una medida Kolmogoroviana de una propensión o tendencia definida por el estado  $\rho$  sobre el conjunto  $\mathcal{P}_F^\alpha$ .

**Proposición 7** *Dado un sistema cuántico elemental  $S : (\mathcal{O} \subset \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}, H)$  en un estado  $\rho \in \mathcal{O}'$ , y el conjunto de hechos posibles  $\mathcal{P}_F^\alpha$  definido por CCPO  $\{\Pi_\alpha\}$ , con  $\alpha = 1$  a  $M$ , la función de probabilidad  $f_\rho^\alpha : \mathcal{P}^\alpha \rightarrow [0, 1]$  representa una medida de la propensión o tendencia a la actualización de los correspondientes hechos posibles,  $p_\rho^\alpha : \mathcal{P}_F^\alpha \rightarrow [0, 1]$ , una medida que satisface los axiomas de Kolmogorov expresado en términos de los conectivos lógicos booleanos  $\vee$ ,  $\wedge$  y  $\neg$ .*

En consecuencia, dado un CCPO  $\{\Pi_\alpha\}$  y los proyectores  $P = \sum_J \Pi_J$ :

- Para un hecho posible  $P_F[P]$  (ver ec. (2.4)):

$$p_\rho^\alpha(P_F[P]) = f_\rho^\alpha(P : 1) = \text{Tr}(\rho P) \quad (2.18)$$

- Para un hecho posible  $P_F[A : a_k] = P_F[P_k]$  (ver ec. (2.5)):

$$p_\rho^\alpha(P_F[A : a_k]) = f_\rho^\alpha(A : a_k) = \text{Tr}(\rho P_k) \quad (2.19)$$

Por último:

**Proposición 8** *Dado un sistema cuántico elemental  $S : (\mathcal{O} \subset \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}, H)$ , su estado  $\rho \in \mathcal{O}'$ , codifica las propensiones a la actualización de los hechos posibles correspondientes a las propiedades de  $S$ , y la evolución temporal de  $\rho$  dada por la ecuación de Schrödinger representa la evolución temporal de esas propensiones.*

### 2.3.3. Hechos actuales

Hasta este punto sólo se ha hablado de los hechos posibles con sus correspondientes propensiones a la actualización. Ahora se introducirá la categoría correspondiente a los hechos actuales que resultan de la actualización de los hechos posibles.

**Proposición 9** *El hecho actual  $A_F [P]$  (o  $A_F [A : a_k]$ ) resulta de la actualización de los hechos posibles  $P_F [P]$  (o  $P_F [A : a_k]$ ) y, por lo tanto, es la ocurrencia actual de la propiedad-caso  $[P : 1]$  (o  $[A : a_k]$ ) correspondiente a la propiedad-tipo  $[P]$  (o  $[A]$ ).*

Con esta terminología, tenemos que:

- $A_F [\cdot]$ : el hecho posible  $P_F [\cdot]$  es actual.
- $\neg A_F [\cdot]$ : el hecho posible  $P_F [\cdot]$  no es actual.

El teorema de Kochen-Specker ([20]) demuestra que, en un dado instante  $t$ , la actualización de los hechos posibles pertenecientes al conjunto  $\mathcal{P}_F^\alpha$ , definido por todos los CCPO del sistema, no está permitida en la teoría. Por lo tanto, la actualización debe ser restringida de alguna manera; debemos introducir tal restricción a través de alguna proposición interpretativa.

**Proposición 10** *Dado un sistema cuántico elemental  $S : (\mathcal{O} \subseteq \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}, H)$  tal que  $H_{int} \neq 0$ ,<sup>4</sup> existe un contexto preferido, esto es, un CCPO preferido  $\{\Pi_\alpha^p\}$  que determina un conjunto preferido de hechos posibles  $P_F^\alpha = \{x/x = P_F [P]\}$  (con  $P = \sum_J \Pi_J^p \in \mathcal{O}$ ,  $\Pi_J^p \in \{\Pi_\alpha^p\}$  y  $J \in j = \{1, \dots, M\}$ ) donde la actualización ocurre, en el sentido de que*

1. *uno y sólo un hecho posible  $P_F [\Pi_\alpha^p] \in P_F^\alpha$ , o sea,  $P_F [\Pi_\Omega^p]$ , es también un hecho actual  $A_F [\Pi_\Omega^p]$ .*
2. *si  $A_F [\Pi_\Omega^p]$ , entonces todos los hechos posibles  $P_F [P] = \bigvee_J P_F [\Pi_J^p] \in P_F^\alpha$  (ver Proposición 6.1) tal que  $\Pi_\Omega^p$  es uno de los  $\Pi_J^p$ , también son hechos actuales  $A_F [P]$ .*
3. *si  $A_F [P_k]$ , entonces los hechos posibles  $P_F [A : a_k] = P_F [P_k] \in P_F^\alpha$  (ver Proposición 6.2) es también un hecho actual  $A_F [A : a_k]$ .*

Dado que la mecánica cuántica es una teoría probabilística, en general no determina cuáles son los hechos posibles que devienen actuales. La actualización o no actualización de los hechos posibles pertenecientes al conjunto preferido  $\mathcal{P}_F^\alpha$  está determinado sólo cuando la medida de la propensión a la actualización del tal hecho es 1 o 0, respectivamente.

**Proposición 11** *Dado un sistema cuántico elemental  $S : (\mathcal{O} \subset \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}, H)$  y el conjunto preferido  $P_F^\alpha$  de hechos posibles, si en el instante  $t$  el estado  $\rho$  atribuye una propensión a la actualización con medida 1 (medida 0) al hecho posible  $P_F [\cdot] \in P_F^\alpha$ , entonces tal hecho posible es (no es) actual:*

- *Si  $p_\rho^p(P_F [\cdot]) = 1$ , entonces  $A_F [\cdot]$ .*
- *Si  $p_\rho^p(P_F [\cdot]) = 0$ , entonces  $\neg A_F [\cdot]$ .*

<sup>4</sup>El Hamiltoniano igual a cero o igual a un múltiplo del operador identidad  $H = kI$  son situaciones físicamente equivalentes, dado que sólo difieren en un desplazamiento temporal, que sólo modifica la fase del vector de estado. Por lo tanto, por simplicidad sólo se mencionará el caso  $H = 0$  sobre la base de esa equivalencia.

### 2.3.4. Regla de actualización

En las proposiciones interpretativas 10 y 11, el contexto preferido ha sido presupuesto. Ahora se debe suministrar una regla para identificarlo: esta tarea es usualmente el paso más delicado para cualquier interpretación modal. De hecho, dado que la mecánica cuántica no da cuenta de la actualización debido a su naturaleza probabilística, la regla no puede ser inferida del formalismo, sino que debe introducirse como una hipótesis interpretativa. Por lo tanto, la definición de la Regla de Actualización debe ser evaluada a la luz de su relevancia física y su habilidad para resolver los problemas de interpretación de la teoría. Pero antes de introducir la regla, debemos discutir las motivaciones conceptuales que nos conducen a ella.

Durante las últimas décadas, la investigación de las propiedades matemáticas de la estructura formal de la mecánica cuántica ha mostrado grandes avances: se han obtenido muchos resultados, desconocidos por los fundadores de la teoría, y estos trabajos han mejorado la comprensión de los obstáculos que cualquier interpretación debe encarar. Sin embargo, el interés en estas cuestiones formales ha llevado a olvidar el contenido físico de la teoría: en los últimos tiempos, los argumentos usualmente descansan en resultados matemáticos y las discusiones se centran en torno a los modelos formales de la medición cuántica. Pero la mecánica cuántica es una teoría física que se aplica a un gran número de sistemas conocidos y de los cuales se tiene una enorme cantidad de evidencia experimental. Por lo tanto, una buena interpretación de la mecánica cuántica no debería encarar sólo los desafíos interpretativos tradicionales de la teoría, sino también mostrar que da cuenta de la práctica ortodoxa de la física. En este sentido, la propuesta en esta tesis se aleja de la tendencia actual, al introducir en el núcleo mismo de la interpretación un elemento con un sentido físico muy claro, el Hamiltoniano del sistema: el contenido de la Regla de Actualización se basará en la estructura del Hamiltoniano.

Aunque en las secciones previas sólo hemos considerado invariancias ante transformaciones del espacio-tiempo, el Hamiltoniano podría tener otras simetrías. Precisamente, el grupo matemático llamado *grupo de Schrödinger* es el grupo de transformaciones que dejan al Hamiltoniano invariante [30]. Dado que cada simetría del Hamiltoniano implica una degeneración en la energía ([31], pag. 110-114), gran parte de la información relevante del espectro de energía del sistema puede ser obtenida al aplicar todas las herramientas de la teoría de grupos al estudio de las simetrías del Hamiltoniano (ver Apéndice A.1). En efecto, si  $H$  es invariante bajo una transformación de simetría con generador  $K$ , entonces  $[H, K] = 0$  (ver ec.(2.12)). Por lo tanto, si  $H|n\rangle = \omega_n|n\rangle$ ,

$$KH|n\rangle = K\omega_n|n\rangle \rightarrow HK|n\rangle = \omega_n K|n\rangle \quad (2.20)$$

Esto significa que cualquier vector de la forma  $K|n\rangle$  que se obtiene de aplicar el operador  $K$  al autovector  $|n\rangle$  es también un autovector de  $H$  con el mismo autovalor  $\omega_n$ . Si  $H$  se expresa como  $H = \sum_n \omega_n P_n$ , donde  $P_n$  es el autoprojector correspondiente al autovalor  $\omega_n$ , podemos escribir explícitamente el índice  $k_n$

correspondiente a la degeneración de  $\omega_n$  de tal manera que

$$H |n, k_n\rangle = \omega_n |n, k_n\rangle \quad \rightarrow \quad H = \sum_n \omega_n \sum_{k_n} |n, k_n\rangle \langle n, k_n| \quad (2.21)$$

$$K |n, k_n\rangle = \kappa_{k_n} |n, k_n\rangle \quad \rightarrow \quad K = \sum_n \kappa_{k_n} \sum_{k_n} |n, k_n\rangle \langle n, k_n| \quad (2.22)$$

Las degeneraciones con origen en simetrías se llaman *normales* [30] o *sistemáticas* [32]. Por el contrario, las degeneraciones que no tienen un origen obvio en simetrías se llaman *accidentales*. Sin embargo, estudios más profundos muestran que las degeneraciones accidentales no siempre son exactas, o que alguna simetría escondida puede explicar la degeneración.<sup>5</sup> Por esta razón se asume que, una vez que todas las simetrías del Hamiltoniano han sido consideradas, se obtiene una base del espacio de Hilbert del sistema y “los números cuánticos relevantes” quedan bien definidos. Esta estrategia es la que subyace a la aproximación de la mecánica cuántica por medio de la teoría de grupos, donde las características físicas de los sistemas cuánticos son estudiadas mediante el análisis de propiedades de simetría del Hamiltoniano ([30],[34], [35], [36]).<sup>6</sup>

Ahora tenemos todos los elementos conceptuales necesarios para introducir la Regla de Actualización. La idea básica puede ser expresada por la máxima clásica latina “*Ubi lex non distinguit, nec nos distinguere debemus*”: donde la ley no distingue, tampoco nosotros debemos distinguir. El Hamiltoniano del sistema, con sus simetrías, es lo que rige la actualización; entonces, ningún observable cuyos autovalores distinguen entre los diferentes autovectores correspondientes a un autovalor único degenerado del Hamiltoniano podrá adquirir valor definido, dado que la actualización de cualquier hecho posible correspondiente a ese observable introduciría en el sistema una asimetría no contenida en el Hamiltoniano. Una vez que esta idea básica se comprende, la Regla de Actualización puede ser formulada de una manera simple:

**Proposición 12 (Regla de Actualización, RA)** *Dado un sistema cuántico elemental  $S : (\mathcal{O} \subset \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}, H)$ ,*

1. *Si  $H = 0$ , no hay actualización, esto es, ninguno hecho posible se hace actual.*

<sup>5</sup>Un ejemplo clásico es la degeneración, en el átomo de hidrógeno, de los estados de diferente momento angular  $l$  pero con mismo número cuántico principal  $n$ , por ejemplo, los estados  $2s$  y  $2p$ . En este caso, Fock [33] mostró que la degeneración aparece por una simetría rotacional en cuatro dimensiones del Hamiltoniano en el espacio de momentos.

<sup>6</sup>En general, la teoría de grupos otorga nuevas estrategias matemáticas para identificar las simetrías del Hamiltoniano. Precisamente, el sistema cuántico es definido por un grupo  $G$  generado por el algebra de observables  $\mathcal{A}$ . Si la cadena de subgrupos  $S^\alpha = G_1^\alpha \supset G_2^\alpha \supset \dots \supset G_n^\alpha$  del grupo  $G$  esta definida, las simetrías del Hamiltoniano estan manifestadas por el hecho de que  $H$  puede ser expresado en término de los operadores de Casimir  $C_{k_i}^\alpha$  de cualquier subgrupo de la cadena, donde  $C_{k_i}^\alpha$  es el  $i$ -esimo operador de Casimir del subgrupo  $G_k^\alpha$  de la cadena  $S^\alpha$  ([37],[38]).

2. Si  $H = \sum_n \omega_n P_n$ , el contexto preferido CCPO  $\{\Pi_\alpha^p\}$  es  $\{P_n\}$ , donde cada  $P_n$  es un autoprojector de  $H$ , que proyecta en el subespacio expandido por los autovectores correspondientes a  $\omega_n$ .

En otras palabras, dado que las degeneraciones del Hamiltoniano definen una “base de grano grueso” del espacio de Hilbert, la actualización no debe introducir una discriminación más fina, que rompa las simetrías del Hamiltoniano.

En las interpretaciones modales discutidas en la literatura, el problema de identificar el contexto de actualización usualmente se formula como el problema de decidir cuáles observables pueden adquirir valores definidos. Veamos cómo la Regla de Actualización funciona en estos términos, para diferentes casos:

- a) El Hamiltoniano  $H$  no tiene simetrías: es no degenerado. En este caso,

$$H |n\rangle = \omega_n |n\rangle \quad \text{con} \quad \omega_n \neq \omega_{n'} \quad (2.23)$$

donde  $\{|n\rangle\}$  es una base del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Dado que en este caso el contexto preferido CCPO es  $\{|n\rangle\langle n|\}$ , entonces podemos llamar a  $\{|n\rangle\}$  “la base preferida”. Por lo tanto,  $n$  es el único número cuántico: los observables con valor definido del sistema son  $H$  y todos los demás observables que conmutan con  $H$ .

- b) El Hamiltoniano  $H$  tiene ciertas simetrías internas que llevan a una degeneración en la energía. En este caso,  $H$  puede ser escrito como

$$H |n, i_n\rangle = \omega_n |n, i_n\rangle \quad \rightarrow \quad H = \sum_n \omega_n \sum_{i_n} |n, i_n\rangle \langle n, i_n| = \sum_n \omega_n P_n \quad (2.24)$$

donde  $\omega_n \neq \omega_{n'}$  y el índice  $i_n$  expresa la degeneración de los autovalores de energía  $\omega_n$ . Consideremos un observable de la forma

$$A = \sum_{n, i_n} a_n |n, i_n\rangle \langle n, i_n| = \sum_n a_n \sum_{i_n} |n, i_n\rangle \langle n, i_n| = \sum_n a_n P_n \quad (2.25)$$

donde  $a_n \neq a_{n'}$ . Queda claro que  $[H, A] = 0$ . Más aún,  $A$  tiene la misma degeneración que  $H$  dado que ambos tienen los mismos autoproyectores: el subespacio expandido por los autovectores degenerados correspondientes a  $a_n$  es el mismo que el expandido por los autovectores degenerados correspondientes a  $\omega_n$ . En otras palabras,  $A$  tiene las mismas simetrías que  $H$ . Por lo tanto, todos los observables  $A$  que conmuten con  $H$  y que tienen la forma de la ec. (2.25) adquieren valores definidos. Por el contrario, los observables de la forma

$$B = \sum_{n, i_n} |n, i_n\rangle \langle n, i_n| \quad (2.26)$$

a pesar de conmutar con  $H$ , no adquiere valores definidos, dado que cualquier hecho actual  $A_F [B : b_{n, i_n}]$  discriminaría entre los autovectores correspondientes a un autovalor degenerado  $\omega_n$  de  $H$ : esto es, se distinguiría donde el Hamiltoniano no lo hace.

- c) Un caso particularmente interesante aparece cuando todos los autovalores  $\omega_n$  tienen el mismo valor  $i$  de degeneración: el índice  $i$ , que expresa la degeneración en la energía, no es función del índice  $n$ . Entonces, en esta caso la ec.(2.24) resulta:

$$H |n, i\rangle = \omega_n |n, i\rangle \quad (2.27)$$

En consecuencia, el Hamiltoniano puede ser descompuesto como

$$H = \sum_n \omega_n \sum_i |n, i\rangle \langle n, i| = \sum_n \omega_n |n\rangle \langle n| \otimes \sum_i |i\rangle \langle i| = H^{ND} \otimes I^D \quad (2.28)$$

Esta descomposición expresa la partición del sistema original  $S$  en dos subsistemas no interactuantes  $S^{ND}$  y  $S^D$ :

- El sistema  $S^{ND}$  está representado por el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}^{ND}$ , con base  $\{|n\rangle\}$  y, el Hamiltoniano  $H^{ND}$  es no degenerado.
- El sistema  $S^D$  es representado en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}^D$ , con base  $\{|i\rangle\}$  y su Hamiltoniano es  $H^D = 0$ . Por lo tanto, el sistema original  $S$  es un sistema compuesto  $S = S^{ND} \cup S^D$  tal que

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{ND} \otimes \mathcal{H}^D, \quad H = H^{ND} \otimes I^D + I^{ND} \otimes H^D + H_{int} = H^{ND} \otimes I^D \quad (2.29)$$

donde  $H^D = H_{int} = 0$ . En consecuencia, la Regla de Actualización debe ser aplicada a cada subsistema elemental:

- En  $S^{ND}$  la base preferida es  $\{|n\rangle\}$ : los observables con valor definido son  $H^{ND}$  y todos los demás observables pertenecientes a  $\mathcal{H}^{ND} \otimes \mathcal{H}^{ND}$  y que conmutan con  $H^{ND}$ .
- En  $S^D$  no hay actualización porque  $H^D = 0$ : los observables de  $S^D$  no adquieren valores definidos.

Resumiendo, de forma general podemos decir que, de acuerdo con la Regla de Actualización, en un sistema cuántico los observables con valores definidos son el Hamiltoniano  $H$ , y los observables que conmutan con  $H$  y que tienen, al menos, las mismas simetrías que  $H$ . Queda claro que esta interpretación sigue la línea de las interpretaciones modales standard ya que no acepta el llamado “vínculo autoestado-autovalor” según el cual un observable posee valor definido si y sólo si el estado del sistema es un autovector de ese observable. En particular, las interpretaciones modales obedecen este vínculo hasta el “si” pero ya no el “sólo si”. Por lo tanto puede haber reglas que consideren que el contexto depende de los estados, como por ejemplo la interpretación modal de Kochen-Dieks [39] o la de Veermas-Dieks [40], donde la actualización es dependiente del estado cuántico, pero ya no por medio del vínculo autoestado-autovalor.

Hasta este punto, mediante la Regla de Actualización hemos identificado los observables que reciben valores definidos en sistemas cuánticos elementales.

Es fácil ver que, cuando un sistema elemental es un subsistema de un sistema compuesto, los observables con valores definidos del sistema compuesto también pueden ser identificados. De hecho, de acuerdo con la Proposición 4, dado un sistema cuántico compuesto  $S = S^1 \cup S^2$ , si el observable  $A^1 \in \mathcal{O}^1$  de  $S^1$  adquiere valor definido  $a_\Omega^1$ , lo mismo sucede para el observable  $A = A^1 \otimes I^2 \in \mathcal{O}$  de  $S$ , dado que  $A^1$  y  $A$  representan la misma propiedad-tipo  $[A^1] = [A]$  con las mismas propiedades-caso  $[A^1 : a_i^1] = [A : a_i^1]$ , donde los  $a_i^1$  son los autovalores de  $A^1$  y  $A$ . Más aún, también de acuerdo con la Proposición 4, si el observable  $A^1 \in \mathcal{O}^1$  de  $S^1$  adquiere el valor definido  $a_\Omega^1$  y el observable  $A^2 \in \mathcal{O}^2$  adquiere el valor definido  $a_\Omega^2$ , cualquier observable  $A^f = f(A^1 \otimes I^2, I^1 \otimes A^2) \in \mathcal{O}$  de  $S$ , que representa la propiedad-tipo  $[A^f]$  con propiedades-caso  $[A^f : f(a_i^1, a_j^2)]$ , también adquiere un valor definido  $f(a_\Omega^1, a_\Omega^2)$ .

En algunas interpretaciones modales ([39] y [40]), en general la regla de adscripción de propiedades o regla de actualización no asigna el mismo valor a  $A^1$  y  $A = A^1 \otimes I^2$ ; este hecho contradice la hipótesis física usual, basada en la indistinguibilidad observacional de  $A^1$  y  $A$ , de acuerdo con la cual ambos observables representan la misma propiedad-tipo. Este problema ha generado muchas discusiones ([40], pág.109-115), y diferentes estrategias para resolverlo (ver, por ejemplo, la versión perspectival de [43]). En la IMH el problema no aparece, dado que la hipótesis usual viene dada por la Proposición 4. Pero debe notarse que este postulado puede ser formulado porque tenemos un criterio preciso para distinguir entre sistemas elementales y sistemas compuestos. Sin ese criterio, la definición de subsistemas y sistemas compuestos sería relativa a una partición arbitraria (al particular TPS, en términos de [28] y [29]) elegido en cada caso; por lo tanto, la Regla de Actualización (o la regla de adscripción de propiedades en otras interpretaciones modales) debería ser aplicada a cualquier sistema cuántico, tanto subsistemas como sistemas compuestos, y la dificultad aparecería. En nuestro caso, por el contrario, el criterio preciso para distinguir entre sistemas elementales y sistemas compuestos está dado por la Proposición 2.3.1. Una vez que los sistemas cuánticos elementales han sido unívocamente identificados, no hay ningún problema en aplicarles la Regla de Actualización para obtener los observables con valores definidos del sistema compuesto.

Vale la pena destacar que, a diferencia de otras interpretaciones, el contexto preferido donde la actualización ocurre no es función del tiempo, dado que depende del Hamiltoniano: los observables con valores definidos siempre conmutan con el Hamiltoniano y, por lo tanto, son constantes de movimiento del sistema. En otras palabras, los observables que reciben valores definidos son los mismos durante toda la “existencia” del sistema cuántico como sistema cerrado: no es necesario de tener en cuenta la dinámica de las propiedades actuales (volveremos a este punto más adelante).

La Regla de Actualización de la IMH no está basada en resultados puramente matemáticos (como otras interpretaciones modales que usan, por ejemplo, el teorema de Schmidt, el teorema espectral); por el contrario, le otorga un papel central al Hamiltoniano del sistema. De hecho, la regla está inspirada en motivaciones físicas que se harán claras en las próximas secciones, donde se la

aplicará a modelos físicos muy conocidos.

A continuación se presenta una tabla que resume los conceptos matemáticos utilizados, su correspondiente sentido físico y también su correspondiente interpretación.

Matemática	Física	Realidad
Operadores autoadjuntos $O \in \mathcal{O} \subseteq \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$	Observables $O$	Propiedades-tipo $[O]$
Autovalores $o_i$ de $O$ $O i, \mu_i\rangle = o_i i, \mu_i\rangle$	Valores $o_i$ del observable $O$ $O$ puede adquirir el valor $o_i$	Propiedades-caso $[O : o_i]$ Hechos posibles $P_F [O : o_i]$
Función probabilidad correspondiente al CCPO $\{\Pi_\alpha\}$ $f_\rho^\alpha : \mathcal{P}^\alpha \rightarrow [0, 1]$	Probabilidad física de que el observable $O$ adquiera el valor $o_k$ : $f_\rho^\alpha(O : o_k)$	Propensión a la actualización del hecho posible $p_\rho^\alpha(P_F [O : o_k])$
Funcionales $\rho \in \mathcal{O}' \subseteq \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$	Estados $\rho$	Codificación de propensiones
La actualización no se describe en la teoría		Hecho actual $A_F [O : o_k]$

## 2.4. Interpretación geométrica de la IMH

En las secciones anteriores se ha introducido la interpretación modal-Hamiltoniana con sus proposiciones interpretativas. Entre ellas, las tres más importantes son la Proposición 1, que define los sistemas cuánticos, las Proposiciones 2 y 3 de descomposición y composición de sistemas y la Regla de Actualización. Todas ellas dependen del observable Hamiltoniano.

A continuación, presentaremos un análisis de estas proposiciones interpretativas en términos geométricos en el espacio de Hilbert (ver [41]). Como sabemos, todo observable se puede describir en términos de su descomposición espectral, donde cada proyector proyecta sobre un subespacio, que puede estar degenerado o no, en el cual el observable tiene un autovalor definido. Debido a que la IMH elige un observable como privilegiado, el Hamiltoniano, a su vez está privilegiando la descomposición del espacio de Hilbert en autosubespacios del Hamiltoniano.

Para introducir el análisis geométrico de un modo formal, se darán algunas definiciones básicas. Supongamos el espacio de observables que actúan sobre el espacio de Hilbert y tengamos en cuenta a uno de ellos, designado como  $A$ . Este observable puede ser escrito en términos de su descomposición espectral, pero para ello primero debemos encontrar sus autovalores y autovectores:

$$A|n, i_n\rangle = a_{n, i_n}|n, i_n\rangle \quad (2.30)$$

donde  $a_{n, i_n}$  es el autovalor asociado al autovector  $|n, i_n\rangle$  del observable  $A$ . El subíndice  $n$  indica el autovalor y el índice  $i_n$  indica la degeneración de ese autovalor. De esta manera, la descomposición espectral del observable  $A$  se



podrá escribir como:

$$A = \sum_{n, i_n} a_{n, i_n} |n, i_n\rangle \langle n, i_n| \quad (2.31)$$

Podemos proceder a definir una relación de equivalencia entre autovectores correspondientes a un mismo autovalor, esto es:

**Definición 1** *Dos vectores  $|a\rangle$  y  $|b\rangle$  se dicen equivalentes  $|a\rangle \underset{A}{\sim} |b\rangle$  respecto del observable  $A$ , si tenemos que  $A|a\rangle = a_{n, i_n}|a\rangle$  y  $A|b\rangle = a_{n, i_n}|b\rangle$ .*

Es decir,  $|a\rangle$  y  $|b\rangle$  son equivalentes respecto de  $A$  si son autovectores de un mismo autovalor de  $A$ . La clase de equivalencia  $\underset{A}{\sim}$  depende del índice  $A$  ya que éste indica el observable para la definición de la relación de equivalencia. En el caso de que este autovalor no esté degenerado, la única posibilidad que tenemos es que  $|a\rangle = c|b\rangle$ , es decir, que los vectores sean colineales. Por otro lado, si el autovalor está degenerado, entonces la relación de equivalencia nos está indicando que todos los vectores que conforman el subespacio invariante degenerado asociado a  $a_{n, i_n}$  son equivalentes.

Por medio de la relación de equivalencia quedan definidas las clases de equivalencias. Podemos entonces definir un vector que será el representante de la toda la clase de equivalencia:

**Definición 2** *La clase de equivalencia  $[A_n]$  se representa mediante un vector representativo del conjunto de vectores que cumplen con la relación de equivalencia  $\underset{A}{\sim}$  asociada al autovalor  $a_{n, i_n}$  del observable  $A$ , esto es  $[A_n] \equiv \left\{ |a\rangle / |a\rangle \underset{A}{\sim} |b\rangle \right\}$ .*

De aquí en adelante, utilizaremos  $[A_n]$  para nombrar la clase de equivalencia o su vector representativo indistintamente. Dada la clase  $[A_n]$ , puede definirse  $\neg[A_n]$  como el complemento ortogonal del subespacio correspondiente al autovalor  $a_{n, i_n}$ . De este modo, para cada autovalor  $a_{n, i_n}$ , el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  se puede descomponer en dos clases,  $[A_n]$  y  $\neg[A_n]$ , donde  $\neg[A_n]$  contendrá las clases de equivalencia de los restantes autovalores del observable  $A$ .

Como un caso particular podemos considerar un observable que tiene un único autovalor y, por lo tanto, es completamente degenerado. Con este autovalor aún se puede definir su clase de equivalencia, y resultará ser que todos los vectores equivalentes entre sí conformarán todo el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Claramente este observable es el observable identidad  $I$ , y la clase de equivalencia de aquellos vectores que no cumplen con la clase de equivalencia asociada a su autovalor es la clase vacía. A lo sumo se podría ampliar el espacio de Hilbert introduciendo algún subespacio ortogonal al original, y serán estos vectores los que conformen la clase de equivalencia  $\neg[I_n]$ . Dicho de otro modo, sobre todo espacio de Hilbert existe al menos un observable, la identidad, que tiene un sólo autovalor. En términos de propiedades, esto significa que existe una propiedad-tipo, la identidad, que sólo tiene una propiedad-caso, y esta propiedad-caso no puede distinguirse (por medio de la clase de equivalencia  $\neg[H_n]$ ) respecto de otra propiedad-caso. Para lograr la distinción debería ampliarse el espacio de

Hilbert, ya sea duplicándolo o multiplicándolo tensorialmente con otro espacio de Hilbert distinto; pero entonces el observable identidad dejaría de ser la identidad para pasar a ser un observable con dos propiedades-caso distintas.

Ahora supongamos que a partir del observable  $A$  se pueden definir dos clases de equivalencia asociadas a dos autovalores distintos del observable, esto es  $[A_n]$  y  $[A_m]$ , y que a su vez existe otro observable  $B$  que tiene un autovalor degenerado, cuyo autosubespacio invariante degenerado es la suma directa de los autosubespacios del observable  $A$  asociados a los autovalores  $a_{n,i_n}$  y  $a_{m,i_m}$ . Es decir, el observable  $B$  es tal que:

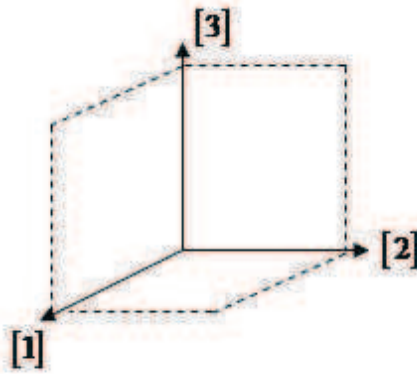
$$B |n, i_n\rangle = b |n, i_n\rangle \quad B |m, i_m\rangle = b |m, i_m\rangle \quad (2.32)$$

Se podría definir la relación de equivalencia respecto de  $B$  entre estos dos subespacios, ya que ambos tienen un mismo autovalor, es decir  $|n, i_n\rangle \sim |m, i_m\rangle$ , donde no se ha introducido ningún subíndice en la relación de equivalencia ya que, si bien el observable  $B$  puede tener más de un autovalor, sólo nos estamos enfocando en aquel autovalor que tiene como subespacio de degeneración a los autosubespacios del observable  $A$ . Pero entonces también se puede definir la clase de equivalencia de estos dos subespacios, es decir  $[B]$ . Esto significa que lo que eran dos propiedades-caso distintas para el observable  $A$  son dos propiedades-iguales y correspondientes a una misma propiedad-caso para el observable  $B$ . Esto es, donde discierne un observable, algún otro puede no hacerlo.

La interpretación modal-Hamiltoniana sigue la misma lógica, ya que define cuál es el observable que brinda la descomposición privilegiada del espacio de Hilbert. Esta descomposición será la definida por el Hamiltoniano. La regla de actualización se basa en el Hamiltoniano y todos los observables que conmutan con él y no le rompen la simetría. Esto significa que no se puede discernir dentro de los autosubespacios del Hamiltoniano y, por lo tanto, los vectores que pertenezcan a tales subespacios serán equivalentes entre sí. A su vez, las composiciones de los autosubespacios del Hamiltoniano serán las descomposiciones espectrales de los demás observables que se pueden actualizar.

A modo de ejemplo, podríamos considerar un espacio de Hilbert de tres dimensiones y suponer que existe un sistema cuántico cuyo Hamiltoniano  $H$  tiene tres autovalores distintos. En este caso habrá tres clases de equivalencia  $[H_1]$ ,  $[H_2]$  y  $[H_3]$ . Cada clase de equivalencia está asociada a uno de los autosubespacios del Hamiltoniano, que en este ejemplo son uni-dimensionales. Estos tres autosubespacios invariantes del Hamiltoniano se pueden componer entre sí para formar otros observables tales que tengan como descomposición espectral a estas composiciones.

Gráficamente, el espacio de Hilbert se podrá expandir en la base de autovectores del Hamiltoniano, que a su vez son los representantes de la clase de equivalencia:

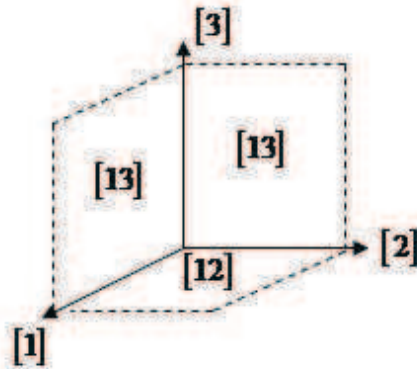


Descomposición del espacio de Hilbert en clases de equivalencia no degeneradas.

En la figura estamos nombrando las clases de equivalencia directamente con el número respectivo del autovalor al cual están asociadas. Si escribimos los proyectores que proyectan sobre cada subespacio invariante como  $|[1]\rangle\langle[1]| = \Pi_{[1]}$ ,  $|[2]\rangle\langle[2]| = \Pi_{[2]}$  y  $|[3]\rangle\langle[3]| = \Pi_{[3]}$ , la descomposición espectral del Hamiltoniano resulta:

$$H = \omega_1 \Pi_{[1]} + \omega_2 \Pi_{[2]} + \omega_3 \Pi_{[3]} \quad (2.33)$$

Podemos identificar también en la misma figura los observables que conmutan con  $H$  y tienen sólo dos autovalores distintos:



Descomposición del espacio de Hilbert con clases de equivalencia degeneradas.

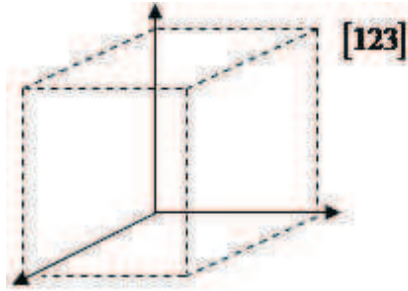
Las correspondientes descomposiciones espectrales de estos tres observables diferentes son:

$$A^{(1)} = a_{12}^{(1)} \Pi_{[12]} + a_3^{(1)} \Pi_{[3]} \quad (2.34)$$

$$A^{(2)} = a_{13}^{(2)} \Pi_{[13]} + a_2^{(2)} \Pi_{[2]} \quad (2.35)$$

$$A^{(3)} = a_{23}^{(3)} \Pi_{[23]} + a_1^{(3)} \Pi_{[1]} \quad (2.36)$$

donde hemos usado  $\Pi_{[ij]} = |[i]\rangle \langle [i]| + |[j]\rangle \langle [j]|$ . Por último, también podemos construir el observable identidad:



Descomposición del espacio de Hilbert con el observable identidad.

Este observable tendrá la siguiente descomposición:

$$A^{(4)} = a^{(4)} \Pi_{[123]} \quad (2.37)$$

que claramente es una identidad sobre el espacio de Hilbert de dimensión tres.

Lo que estamos viendo es que podemos combinar las propiedades básicas del Hamiltoniano para construir los otros posibles observables. Esto es, si partimos de

$$\{\Pi_{[1]}, \Pi_{[2]}, \Pi_{[3]}\} \quad (2.38)$$

podemos construir

$$\{\Pi_{[12]}, \Pi_{[13]}, \Pi_{[23]}\} \quad (2.39)$$

y también

$$\{\Pi_{[123]}\} \quad (2.40)$$

Dicho de otro modo, en (2.38) estamos viendo de cuántas formas podemos armar combinaciones de tres elementos tomados de a uno (tres). En la ecuación (2.39) estamos viendo de cuántas formas podemos armar combinaciones de tres elementos y tomados de a dos sin que se repitan (tres). Y por último, en (2.40) estamos viendo de cuántas maneras podemos armar combinaciones de tres elementos tomados de a tres (uno). Podemos encarar estos resultados desde un punto de vista general.

### 2.4.1. Esquema general geométrico de la IMH

Supongamos que tenemos definido el observable Hamiltoniano  $H$  y consideremos que tiene espectro discreto. Supongamos también que tiene  $M$  autovalores diferentes y, por lo tanto,  $M$  autosubespacios invariantes, que pueden estar degenerados o no. Designemos a la dimensión del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  donde actúa el Hamiltoniano con el valor  $N = \dim(\mathcal{H})$ . Podemos descomponer este espacio de Hilbert de  $C(N)$  formas según la siguiente ecuación:

$$N = 1f_1^{(N)}(n) + 2f_2^{(N)}(n) + \dots + Nf_N^{(N)}(n) = \sum_{j=1}^N jf_j^{(N)}(n) \quad (2.41)$$

donde  $j = 1, 2, \dots, N$  son las dimensiones de los diferentes autosubespacios invariantes del Hamiltoniano,  $f_j^{(N)}$  es el número de veces que aparece cada uno de estos subespacios invariantes y  $n$  denota las diferentes combinaciones de soluciones para la ecuación (2.41).

Veamos un ejemplo en cuatro dimensiones,  $N = 4$ :

$$4 = 1f_1^{(4)} + 2f_2^{(4)} + 3f_3^{(4)} + 4f_4^{(4)} \quad (2.42)$$

Hay cinco posibles soluciones para esta ecuación; por lo tanto,  $C(4) = 5$ . Si a cada solución  $i$ -ésima la denotamos como  $g^{(N)}(i)$ , entonces:

$$g^{(4)}(1) = \left\{ f_1^{(4)}(1) = 4 \quad f_2^{(4)}(1) = 0 \quad f_3^{(4)}(1) = 0 \quad f_4^{(4)}(1) = 0 \right\} \quad (2.43)$$

$$g^{(4)}(2) = \left\{ f_1^{(4)}(2) = 2 \quad f_2^{(4)}(2) = 1 \quad f_3^{(4)}(2) = 0 \quad f_4^{(4)}(2) = 0 \right\} \quad (2.44)$$

$$g^{(4)}(3) = \left\{ f_1^{(4)}(3) = 1 \quad f_2^{(4)}(3) = 0 \quad f_3^{(4)}(3) = 1 \quad f_4^{(4)}(3) = 0 \right\} \quad (2.45)$$

$$g^{(4)}(4) = \left\{ f_1^{(4)}(4) = 0 \quad f_2^{(4)}(4) = 2 \quad f_3^{(4)}(4) = 0 \quad f_4^{(4)}(4) = 0 \right\} \quad (2.46)$$

$$g^{(4)}(5) = \left\{ f_1^{(4)}(5) = 0 \quad f_2^{(4)}(5) = 0 \quad f_3^{(4)}(5) = 0 \quad f_4^{(4)}(5) = 1 \right\} \quad (2.47)$$

donde:

- $g^{(4)}(1)$  se corresponde con la descomposición del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  en cuatro subespacios invariantes no degenerados.

- $g^{(4)}(2)$  se corresponde con la descomposición del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  en dos subespacios invariantes no degenerados y uno degenerado de dos dimensiones.
- $g^{(4)}(3)$  se corresponde con la descomposición del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  en un subespacio invariante no degenerado y uno degenerado de tres dimensiones.
- $g^{(4)}(4)$  se corresponde con la descomposición del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  en dos subespacios invariantes degenerados de dos dimensiones cada uno.
- $g^{(4)}(5)$  se corresponde con la descomposición del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  en un subespacio invariante degenerado de cuatro dimensiones.

Cada descomposición  $g^{(N)}(i)$  tiene un número  $m(i) = \sum_{j=1}^N f_j^{(N)}(i)$  de subespacios invariantes. En el ejemplo de  $N = 4$  tenemos que  $m(g^{(4)}(1)) = 4$ ,  $m(g^{(4)}(2)) = 3$ ,  $m(g^{(4)}(3)) = 2$ ,  $m(g^{(4)}(4)) = 2$  y  $m(g^{(4)}(5)) = 1$ .

Suponiendo por el momento que los subespacios invariantes del Hamiltoniano son todos no degenerados, podemos preguntarnos entonces qué cantidad de observables  $Obs(N)$  se pueden construir, que conmuten con  $H$  y no le rompan su simetría. Para encontrar este valor podemos recordar que los grupos de permutación de  $N$  objetos, llamados  $S_N$ , se pueden escribir en términos de ciclos, donde un ciclo es una permutación cíclica de un subconjunto. Un elemento arbitrario tiene  $f_j^{(N)}(i)$ - $j$  ciclos y éstos cumplen con la ec.(2.41). A su vez, en estos grupos de permutación se pueden definir clases de conjugación, que dan justamente la estructura cíclica: tales clases están etiquetadas por los enteros  $f_j^{(N)}(i)$ . Podemos contar el número de elementos de grupo en cada clase de conjugación, y justamente este valor se corresponderá con el número de combinaciones posibles que se pueden hacer con las descomposiciones del Hamiltoniano. Si suponemos que cada clase de conjugación consta de permutaciones de la forma  $f_1^{(N)}(i)$ -1 ciclos,  $f_1^{(N)}(i)$ -2 ciclos, etc, satisfaciendo la ec.(2.41), el número de diferentes permutaciones en la clase de conjugación resulta  $\frac{N!}{\prod_j (j!)^{f_j^{(N)}(i)} f_1^{(N)}(i)!}$  (ver [42],

pág. 37, ec.(1.141)). Por lo tanto el número de observables que se actualizan debe ser la suma sobre todas las posibles descomposiciones:

$$Obs(N) = \sum_{i=1}^{C(N)} \frac{N!}{(Max(g^{(N)}(i)) - 1)! \left( \prod_{j=1}^N (j!)^{f_j^{(N)}(i)} f_j^{(N)}(i)! \right)} \quad (2.48)$$

donde se ha introducido el valor  $(Max(g^{(N)}(i)) - 1)!$ , donde  $Max(g^{(N)}(i))$  es la máxima dimensión de los subespacios de la descomposición  $g^{(N)}(i)$ . Este coeficiente se introduce ya que las permutaciones de orden cíclico dentro de una clase de conjugación no se deben contar.

Para comprobar esta última ecuación veamos cómo funciona. Para ello consideremos el ejemplo del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  con dimension  $N = 4$  suponiendo que todos los autovalores del Hamiltoniano son no degenerados; entonces,

$$\begin{aligned} Obs(4) &= \sum_{i=1}^5 \frac{4!}{(Max(g^{(4)}(i)) - 1)! \prod_{j=1}^4 (j!)^{f_j^{(4)}(i)} f_j^{(4)}(i)!} & (2.49) \\ &= \frac{4!}{4!} + \frac{4!}{2!2!} + \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{2!2!2!} + \frac{4!}{4!} = 1 + 6 + 4 + 3 + 1 = 15 \end{aligned}$$

Veamos como surgen todos estos observables. Para ello nombremos a los subespacios invariantes no degenerados del Hamiltoniano como  $\Pi_{[1]}$ ,  $\Pi_{[2]}$ ,  $\Pi_{[3]}$  y  $\Pi_{[4]}$ . Entonces:

- $g^{(4)}(1)$  se corresponde con los cuatro subespacios invariantes no degenerados del propio Hamiltoniano, es decir,  $H = \{\Pi_{[1]}, \Pi_{[2]}, \Pi_{[3]}, \Pi_{[4]}\}$ . Por lo tanto, para esta descomposición tenemos un observable, que justamente es el valor 1 de la ec. (2.49).
- $g^{(4)}(2)$  se corresponde con la composición de los autosubespacios del Hamiltoniano en dos subespacios invariantes no degenerados y uno degenerado de dos dimensiones, que se corresponden con seis observables distintos  $\{\Pi_{[1]}, \Pi_{[2]}, \Pi_{[34]}\}$ ,  $\{\Pi_{[1]}, \Pi_{[3]}, \Pi_{[24]}\}$ ,  $\{\Pi_{[1]}, \Pi_{[4]}, \Pi_{[23]}\}$ ,  $\{\Pi_{[2]}, \Pi_{[3]}, \Pi_{[14]}\}$ ,  $\{\Pi_{[2]}, \Pi_{[4]}, \Pi_{[13]}\}$ ,  $\{\Pi_{[3]}, \Pi_{[4]}, \Pi_{[12]}\}$ . Estos seis observables se corresponden con el valor 6 de la ec. (2.49).
- $g^{(4)}(3)$  se corresponde con la composición de los autosubespacios del Hamiltoniano en un subespacio invariante no degenerado y uno degenerado de tres dimensiones. Es decir, cuatro observables diferentes  $\{\Pi_{[1]}, \Pi_{[234]}\}$ ,  $\{\Pi_{[2]}, \Pi_{[134]}\}$ ,  $\{\Pi_{[3]}, \Pi_{[124]}\}$ ,  $\{\Pi_{[4]}, \Pi_{[123]}\}$  (valor 4 de la ec. (2.49)).
- $g^{(4)}(4)$  se corresponde con la composición de los autosubespacios del Hamiltoniano en dos subespacios invariantes degenerados de dos dimensiones cada uno. Es decir, tres observables distintos  $\{\Pi_{[12]}, \Pi_{[34]}\}$ ,  $\{\Pi_{[13]}, \Pi_{[24]}\}$ ,  $\{\Pi_{[14]}, \Pi_{[23]}\}$  (valor 3 de la ec. (2.49)).
- $g^{(4)}(5)$  se corresponde con la composición de los autosubespacios del Hamiltoniano en un subespacio invariante degenerado de cuatro dimensiones. Es decir, el único observable  $\{\Pi_{[1234]}\}$  que es la identidad (último valor 1 de la ec. (2.49)).

Podría ser el caso que el Hamiltoniano tuviera algún subespacio invariante degenerado, por ejemplo, que se correspondiera con el observable  $\{[1], [2], [34]\}$  en el ejemplo de cuatro dimensiones. En este caso, podríamos llamar  $\Pi_{[1]} \rightarrow \Pi'_{[1]}$ ,  $\Pi_{[2]} \rightarrow \Pi'_{[2]}$  y  $\Pi_{[34]} \rightarrow \Pi'_{[3]}$ , y esto sería equivalente a un espacio de Hilbert de tres dimensiones donde los mínimos subespacios invariantes vuelven a ser los del Hamiltoniano.

Cualquier vector del espacio de Hilbert se puede escribir como combinación lineal de  $N$  vectores linealmente independientes. No obstante, como venimos diciendo, aquellos estados que pertenecen a una misma clase de equivalencia dentro de los autosubespacios del Hamiltoniano se corresponden con una sola propiedad-caso, por lo tanto tendrán el mismo coeficiente que representa su propensión a actualizarse. Esto significa que cualquier estado se puede escribir como:

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^M a_i \Pi_{[i]} \quad (2.50)$$

donde los  $a_i$  son los coeficientes que acompañan a cada subespacio invariante, y se debe cumplir que:

$$\sum_{i=1}^M |a_i|^2 = 1 \quad (2.51)$$

Los autovalores del Hamiltoniano no deben cumplir la condición (2.51). En este sentido podríamos pensar que, en realidad, por la forma en que se escriben los estados, éstos no difieren de la forma con la que se escriben los observables que se actualizarán. Lo único que deben cumplir es la normalización, y esto justifica la aproximación algebraica de la mecánica cuántica usada en esta tesis, donde los estados son funcionales con la propiedad de que su traza es uno.

## 2.5. Relevancia física de la interpretación

Como hemos venido diciendo, una buena interpretación de la mecánica cuántica no sólo debe encarar los desafíos interpretativos tradicionales de la teoría, sino también debe estar de acuerdo con la práctica ortodoxa de la física. En esta sección se argumentará la relevancia física de la IMH al aplicarla a modelos muy conocidos y a resultados experimentales.

### 2.5.1. Partícula libre

El Hamiltoniano de una partícula libre es

$$H = \frac{P^2}{2m} = \frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}{2m} \quad (2.52)$$

donde  $P$  es el observable momento, con componentes  $P_x, P_y, P_z$ , y  $m$  es la masa de la partícula. La partícula se dice “libre” porque no hay campos externos actuando sobre ella: entonces, el espacio es homogéneo y, en consecuencia,  $H$  es invariante ante desplazamientos espaciales en cualquier dirección (un argumento análogo puede darse en términos de la isotropía del espacio). Las componentes  $P_x, P_y, P_z$  son los generadores de la simetría y, al mismo tiempo, constantes de movimiento del sistema. Por lo tanto, el Hamiltoniano está degenerado.



La solución más general de la ecuación de Schrödinger para el Hamiltoniano (2.52) en la representación de coordenadas es

$$\varphi(x, y, z) = (A_x e^{ik_x x} + B_x e^{-ik_x x})(A_y e^{ik_y y} + B_y e^{-ik_y y})(A_z e^{ik_z z} + B_z e^{-ik_z z}) \quad (2.53)$$

donde  $A_x, B_x, A_y, B_y, A_z$  y  $B_z$  son constantes que quedarán determinadas por las condiciones de contorno, al igual que los vectores de onda  $k_x, k_y$  y  $k_z \in \mathbb{R}$  y la energía resulta

$$E = \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \quad (2.54)$$

De aquí podemos concluir que el Hamiltoniano es degenerado puesto que  $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_x'^2 + k_y'^2 + k_z'^2$ . Dicho de otra manera, podemos tomar a la ec. (2.54) como la ecuación de una esfera en tres dimensiones con coordenadas  $k_x, k_y$  y  $k_z$  y con un radio  $R = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ . Todos los puntos  $k_x, k_y$  y  $k_z$  que sean solución de (2.54) se corresponderán con el mismo autovalor de energía. La cantidad de soluciones es infinita, ya que los vectores de onda son continuos, por lo tanto también lo será la degeneración de la energía. También podemos darnos cuenta de que cada autovalor distinto de la energía tendrá la misma degeneración, en particular si consideramos un valor de energía  $E'$  distinto de  $E$  con la siguiente ecuación:

$$E' = \frac{\hbar^2}{2m}(k_x'^2 + k_y'^2 + k_z'^2) \quad (2.55)$$

entonces el radio de la esfera será  $R' = \sqrt{\frac{2mE'}{\hbar^2}}$ . Si pudiésemos encontrar una correspondencia uno a uno entre los puntos de una esfera y la otra, entonces la cardinalidad de ambas soluciones será la misma y, por lo tanto, también la degeneración. Una correspondencia sencilla es la siguiente:

$$k_x' = \lambda k_x \quad k_y' = \lambda k_y \quad k_z' = \lambda k_z \quad (2.56)$$

entonces la energía en (2.54) resulta:

$$E' = \frac{\hbar^2}{2m}\lambda^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \quad (2.57)$$

Por lo tanto vemos que  $E' = \lambda^2 E$  y  $\frac{R'}{R} = \lambda$ .

Podemos considerar el siguiente caso de interés donde el sistema cuántico está confinado en una región acotada del espacio, en particular elegimos una caja tridimensional de lados  $a, b$  y  $c$ . En este caso la energía queda discretizada ya que los vectores de onda lo están:

$$E_{n,m,l} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left( \frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2} \right) \quad (2.58)$$

En este caso la degeneración  $E_{n,m,l} = E_{n',m',l'}$  equivale a las soluciones discretas de una elipsoide, donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son las longitudes de los semiejes. Por otro lado, si las dimensiones de la caja donde se encuentra nuestro sistema cuántico son iguales, es decir,  $a = b = c$ , entonces la energía resultará:

$$E_{n,m,l} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} (n^2 + m^2 + l^2) \quad (2.59)$$

La degeneración en este caso depende de los índices y tiene una estructura bastante compleja. A modo figurativo podemos ordenar los niveles de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} E_{1,1,1} &= \frac{3\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \\ E_{2,1,1} &= E_{1,2,1} = E_{1,1,2} = 2E_{1,1,1} \\ E_{2,2,1} &= E_{2,1,2} = E_{1,2,2} = 3E_{1,1,1} \\ E_{3,1,1} &= E_{1,3,1} = E_{1,1,3} = \frac{11}{3} E_{1,1,1} \\ E_{2,2,2} &= 4E_{1,1,1} \\ E_{1,2,3} &= E_{1,3,2} = E_{2,1,3} = E_{2,3,1} = E_{3,1,2} = E_{3,2,1} = \frac{7}{2} E_{1,1,1} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\quad (2.61)$$

Cada uno de estos autovalores diferentes define su propio subespacio invariante que denominaremos como [1], [2], [3],  $[\frac{11}{3}]$ , [4],  $[\frac{7}{2}]$  .... A su vez, el espacio de Hilbert se podrá descomponer como

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3 \otimes \mathcal{H}_{\frac{11}{3}} \otimes \mathcal{H}_4 \otimes \mathcal{H}_{\frac{7}{2}} \otimes \dots \quad (2.62)$$

Mediante la descomposición espectral, el Hamiltoniano se podrá escribir como

$$H = E_{1,1,1} [1] + 2E_{1,1,1} [2] + 3E_{1,1,1} [3] + \frac{11}{3} E_{1,1,1} \left[ \frac{11}{3} \right] + 4E_{1,1,1} [4] + \frac{7}{2} E_{1,1,1} \left[ \frac{7}{2} \right] + \dots \quad (2.63)$$

Volviendo a la forma (2.52) de  $H$ , si bien las tres componentes de  $P$  pueden ser usadas para la descripción teórica de la partícula libre ya que conmutan entre sí, es usual elegir dos componentes de las tres y añadirlas al Hamiltoniano para constituir un conjunto completo de observables que conmutan (CCOC),  $\{H, P_x, P_y\}$ ,  $\{H, P_x, P_z\}$  o  $\{H, P_y, P_z\}$  que define una base del espacio de Hilbert (dada la dependencia funcional entre las cuatro magnitudes, el CCOC  $\{P_x, P_y, P_z\}$  puede ser equivalentemente usado). Pero este hecho no significa que pueda suponerse que esos observables tienen que tener valores definidos. Por el contrario, la aplicación de la interpretación a este sistema está de acuerdo con la imposibilidad empírica de acceder a los valores  $P_x, P_y, P_z$  en la partícula libre. Esto se puede ver notando que los diferentes números cuánticos asociados a los

momentos están contenidos en un mismo subespacio degenerado del Hamiltoniano, como por ejemplo  $n = 1$ ,  $m = 1$ ,  $l = 2$  y las diferentes permutaciones de estos valores. Esta degeneración significa que, desde el punto de vista energético, una partícula libre moviéndose en la dirección  $x$  con momento  $\vec{p} = (\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a})$  es indiscernible de la misma partícula con momento  $\vec{p} = (\frac{2\pi}{a}, \frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a})$ . Una posible manera de que se pueda actualizar alguna de las componentes del momento es a través de un Hamiltoniano de interacción, por ejemplo:

$$H = \frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}{2m} + \omega_0 \delta(x - \frac{a}{2}) \quad (2.64)$$

donde se ha agregado una delta de Dirac en la mitad del recinto en la dirección  $x$ . En este caso los niveles de energía quedan:

$$E_{n,m,l} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} (n^2 + m^2 + l^2) + \frac{\hbar^2 \pi^2 n}{2ma^2} \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{8m\omega_0}{\hbar^2}} + \pi\omega_0 \quad (2.65)$$

De esta última ecuación podemos ver que los niveles de energía originalmente degenerados ya no lo están debido a la aparición del segundo término de la ec.(2.65) que depende del número cuántico  $n$ . Por otro lado, los momentos siguen formando un CCOC junto al Hamiltoniano para  $x \neq \frac{a}{2}$ . Esto es, una medición siempre involucra una interacción con el objeto medido, que rompe la simetría del sistema original al modificar el Hamiltoniano. Esto implica que, ante una medición, la partícula ya no es libre: la ruptura de la simetría introducida por la interacción con el aparato de medición es lo que permite tener acceso empírico a un observable que era un generador de simetría del sistema original.

### 2.5.2. Partícula libre con spin

El spin  $S$  es una contribución interna del momento angular total y, por lo tanto, agrega grados de libertad a la partícula: el espacio de Hilbert es ahora  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_f \otimes \mathcal{H}_s$ , donde  $\mathcal{H}_f$  es el espacio de Hilbert de la partícula libre y  $\mathcal{H}_s$  el espacio de Hilbert del spin. En este caso, el Hamiltoniano es

$$H = \frac{P^2}{2m} + kS^2 \quad (2.66)$$

donde  $k$  es una constante (ver [26]).

De acuerdo con la IMH, el sistema es compuesto, porque puede descomponerse en dos subsistemas no interactuantes (ver Proposición 2 de Descomposición de Sistemas): una partícula libre sin spin, representada en  $\mathcal{H}_f$  por  $H_f = \frac{P^2}{2m}$ , y la parte de spin, representada en  $\mathcal{H}_s$  por  $H_s = kS^2$ . Por lo tanto, la Regla de Actualización debe ser aplicada independientemente a cada subsistema elemental.

La regla se aplica al subsistema conformado por la partícula libre como fue señalado en el apartado anterior. Por otro lado, el subsistema conformado por la parte de spin  $H_s$  es invariante ante rotaciones en el espacio de spin: los generadores de esta simetría son las tres componentes  $S_x$ ,  $S_y$  y  $S_z$  del spin total  $S$ . En

este caso, el momento angular orbital es cero, por lo tanto el momento angular total es idéntico a  $S$ . Análogamente al caso de la partícula libre, de acuerdo con la Regla de Actualización, en este caso  $H_s$  adquiere valor definido y también  $S^2$ , dado que es proporcional a  $H_s$ ; no obstante,  $S_x$ ,  $S_y$  y  $S_z$  no adquieren valores definidos, dado que son generadores de la simetría del Hamiltoniano  $H_s = kS^2$ .

Nuevamente, esta conclusión está de acuerdo con el hecho de que no se tiene acceso empírico a las componentes de spin de la partícula libre con spin. Si queremos conocer los valores de esas componentes, debemos realizar una medición sobre el sistema: en particular, debemos introducir un campo magnético  $B$  en alguna dirección, por ejemplo en la dirección  $z$ , que inevitablemente romperá la isotropía del espacio y, en consecuencia, la simetría rotacional del sistema. Bajo la acción de  $B$ , el Hamiltoniano  $H_s$  ya no es invariante bajo rotaciones, porque ahora se incluye en él el término de interacción  $-\gamma |B| S_z$ , donde  $|B|$  es el módulo del campo magnético, que privilegia una dirección en el espacio, en este caso la dirección  $z$ . En otras palabras, podemos tener acceso experimental a la componente  $S_z$  del spin sólo por medio de una medición que rompa la simetría rotacional del Hamiltoniano original y, por lo tanto, logre que el sistema no sea más libre. Ésta es la forma usual en que una componente de spin se mide en un experimento de Stern-Gerlach (experimento que será descrito en detalle en la sección 2.6.3).

### 2.5.3. Oscilador armónico

Por definición, un oscilador armónico es un sistema con una energía potencial cuadrática en la posición, que produce una fuerza restauradora en contra del desplazamiento respecto de la posición de equilibrio. En una dimensión, el Hamiltoniano del sistema es:

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2 Q^2}{2} \quad (2.67)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia natural de oscilación del sistema. Se pueden introducir operadores momento y posición adimensionales por medio de la transformación  $q = (m\frac{\omega}{\hbar})^{\frac{1}{2}}Q$  y  $p = (\frac{1}{m\omega\hbar})^{\frac{1}{2}}P$  y reemplazando en (2.67) el Hamiltoniano se escribe:

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega(q^2 + p^2) \quad (2.68)$$

A su vez, se puede efectuar la transformación a los operadores de creación y destrucción  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip)$  y  $a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(q - ip)$  y, por medio del operador número de modos  $N = a^\dagger a$ , el Hamiltoniano resulta

$$H = \hbar\omega(N + \frac{1}{2}) \quad (2.69)$$

Como es bien sabido, en este caso los espectros de  $H$  y  $N$  pueden obtenerse algebraicamente como:

$$H |n\rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) |n\rangle \quad (2.70)$$

$$N |n\rangle = n |n\rangle \quad (2.71)$$

La no degeneración de  $H$  expresa el hecho de que no hay simetrías: el CCOC  $\{H\}$  define la base  $\{|n\rangle\}$  del espacio de Hilbert del sistema.

De acuerdo con la Regla de Actualización, dado que en este caso el Hamiltoniano es no degenerado, el contexto preferido CCPO es  $\{|n\rangle \langle n|\}$ : los observables con valor definido del sistema son  $H$  y todos los observables que conmutan con él. En particular, el número de modos  $N$  adquiere valor definido porque  $[H, N] = 0$ .

El oscilador armónico tiene una relevancia central en mecánica cuántica porque brinda un modelo para muchos sistemas vibrantes. En particular, el campo electromagnético puede ser descompuesto en términos de modos lineales independientes de vibración, cada uno de los cuales se comporta como un oscilador armónico al que usualmente se asocia una partícula: en este caso,  $N$  se concibe como el observable número de partículas. Es importante enfatizar que la representación de partículas del sistema, con un número definido de partículas, no es genérico: sólo puede ser retenido metafóricamente cuando el observable  $N$  cumple los requerimientos impuestos por la Regla de Actualización.

Otro punto importante a señalar es que en aquellos sistemas vibrantes que se pueden representar como osciladores armónicos, la energía del sistema y sus funciones (como  $N$ ) son las magnitudes físicas relevantes del sistema, cuyos valores se asumen como definidos. La IMH está de acuerdo con esa hipótesis usual, dado que selecciona el Hamiltoniano no degenerado como el observable que define la base de actualización.

#### 2.5.4. Átomo de hidrógeno y átomos genéricos

El átomo de hidrógeno se describe como un sistema de dos partículas, un electrón y un protón, que interactúan por medio de la interacción Coulombiana. En este caso, el Hamiltoniano es

$$H = \frac{P_e^2}{2m_e} + \frac{P_p^2}{2m_p} + \frac{e^2}{|Q_e - Q_p|} \quad (2.72)$$

donde los subíndices  $e$  y  $p$  refieren al electrón y protón respectivamente, y  $e$  es la carga del electrón. La estrategia usual para resolver la ecuación de autovalores en la energía en la representación de coordenadas es referir el Hamiltoniano al centro de masa del sistema por medio de una transformación canónica, y luego escribir la ecuación resultante en coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$ . Como se sabe, con esta estrategia la solución de la ecuación puede ser expresada como el producto de dos funciones, una dependiente de la coordenada radial y la otra dependiente de las coordenadas angulares:  $\Psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$ . Resolviendo las ecuaciones angular y radial, se obtienen los tres números cuánticos: el número cuántico principal  $n$ , el número cuántico del momento angular orbital  $l$

y el número cuántico magnético  $m_l$ . Estos números cuánticos se corresponden a los autovalores de los observables  $H$ ,  $L^2$  y  $L_z$  respectivamente, donde  $L$  es el momento angular orbital, y  $L_x$ ,  $L_y$ ,  $L_z$  sus componentes:

$$H |n, l, m_l\rangle = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2 n^2} |n, l, m_l\rangle \quad (2.73)$$

$$L^2 |n, l, m_l\rangle = l(l+1)\hbar |n, l, m_l\rangle \quad (2.74)$$

$$L_z |n, l, m_l\rangle = m_l \hbar |n, l, m_l\rangle \quad (2.75)$$

donde  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $l < n$  y  $-l \leq m_l \leq l$ ,  $\mu = (\frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_p})^{-1}$  es la masa reducida. Por lo tanto, el átomo de hidrógeno queda descrito en términos de la base  $\{|n, l, m\rangle\}$  definida por el CCOC  $\{H, L^2, L_z\}$ : los números cuánticos  $n$ ,  $l$  y  $m_l$  etiquetan la solución  $\Psi_{n,l,m_l}$  de la ecuación para los autovalores de la energía.

En este caso, el Hamiltoniano es degenerado debido a la invariancia ante rotaciones espaciales. En particular, esta degeneración para el nivel de energía  $E_n$  es

$$g_n = \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = \frac{2(n-1)n}{2} + n = n^2 \quad (2.76)$$

Por cada valor de  $n$  hay  $n$  valores de  $l$  correspondientes al número cuántico de momento angular orbital; a su vez, por cada uno de estos valores, hay  $(2l+1)$  valores del número cuántico magnético  $m_l$ ; de allí que la degeneración por cada nivel de energía  $E_n$  sea  $n^2$ . Sólo el estado fundamental es no degenerado. Las tres componentes del momento angular  $L_x$ ,  $L_y$ ,  $L_z$  son los generadores de simetría rotacional. Como consecuencia, aunque  $l$  y  $m_l$  son buenos números cuánticos, en el sentido de que colaboran en la definición de la base del espacio de Hilbert que usualmente se utiliza, los autovalores  $\omega_n$  del Hamiltoniano no dependen de ellos: dada la simetría de  $H$ , los valores de  $L^2$  y  $L_z$  diferencian sobre los autosubespacios de degeneración de la energía. De acuerdo con la Regla de Actualización, como resultado de la degeneración de  $H$ , los observables  $L^2$  y  $L_z$  no adquieren valores definidos: los únicos observables con valor definido del sistema son el Hamiltoniano  $H$  y todos los observables que tienen, al menos, la misma simetría rotacional (al menos, la misma degeneración) que  $H$ .

Como decíamos en la sección anterior, puede haber otras simetrías escondidas en un sistema cuántico. En el caso del átomo de hidrógeno existe otra simetría además de la rotación espacial, que actúa en dimensiones mayores que 3 como en el caso del momento angular. Esta simetría permite alterar las órbitas sin alterar el momento angular. El generador de esta simetría se denomina vector de Laplace-Runge-Lenz y tiene la siguiente forma:

$$A_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \{p_j, L_k\} - \frac{\mu e^2}{r} x_i \quad (2.77)$$

donde  $\{, \}$  es el anticonmutador. En particular,  $[H, A_i] = 0$  y por lo tanto  $A_i$  pertenece al contexto preferido definido por el Hamiltoniano. Esta simetría es equivalente a pensar al problema del átomo de hidrógeno como si fuese una partícula libre confinada en una esfera-unidad tridimensional en un espacio de cuatro dimensiones, esto es, la simetría  $SO(4)$ .

El hecho de que la interpretación no otorga valores definidos a  $L^2$  y  $L_z$  está de acuerdo con la evidencia experimental, en particular, con los datos que provienen de la espectroscopía. Veamos en detalle esto:

- a) En química cuántica, los estados  $\Psi_{n,l,m_l}$  del átomo (orbitales) están etiquetados como  $X\alpha$ , donde  $X$  es el número cuántico principal  $n$  y  $\alpha$  es reemplazado por  $s, p, d, f$ , etc., esto es, con letras correspondientes a los valores del momento angular orbital  $l$ :  $1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 3d$ , etc. Como se puede ver, el número cuántico magnético  $m_l$  no está incluido en esta descripción porque, aunque  $\Psi_{n,l,m_l}$  depende de los tres números cuánticos, la simetría rotacional del Hamiltoniano hace que la selección de  $L_z$  sea una decisión completamente arbitraria: dado que el espacio es isotrópico, podemos elegir también  $L_x$  o  $L_y$  para obtener una descripción legítima del átomo de hidrógeno. La arbitrariedad en la selección de la dirección  $z$  se manifiesta en la espectroscopía por el hecho de que las líneas espectrales no dan evidencia experimental sobre los valores de  $L_z$ : no se tiene acceso experimental al número cuántico  $m_l$ . En la IMH, no se asigna un valor definido a  $L_z$ , de acuerdo con los resultados experimentales. Análogamente al caso de la partícula libre con spin, si queremos conocer los valores de  $L_z$ , debemos introducir un campo magnético que rompe la isotropía del espacio.
- b) Por el contrario, los valores del número cuántico  $l$  están incluidos en la descripción de los orbitales tradicionales como  $s, p, d, f$ , etc. Más aún, los valores de  $l$  pueden ser inferidos de la observación del espectro de energía del átomo de hidrógeno, y juegan un papel en la explicación de las series espectrales más conocidas (Paschen, Balmer, Lyman, etc). Estos hechos podrían ser interpretados como un síntoma del valor definido del observable  $L^2$  en el átomo de hidrógeno. Sin embargo, la manifestación del valor  $l$  requiere la interacción entre el átomo y un campo electromagnético. La explicación usual es la siguiente. Dado que las transiciones de energía involucran la absorción y emisión de un fotón (que tiene spin 1), la conservación del momento angular fuerza al átomo a experimentar un cambio en el momento angular orbital  $l$ . Por esta razón, cuando un fotón es absorbido por un átomo en un orbital  $s$ , el átomo adquiere momento angular orbital y efectúa la transición a un orbital  $p$ ; cuando es absorbido por un átomo en un orbital  $p$ , el momento angular orbital se incrementa (transición  $p \rightarrow d$ ) o decrece (transición  $p \rightarrow s$ ), dependiendo en la orientación relativa del fotón y del momento angular del átomo. Pero las transiciones  $s \rightarrow d$  o  $p \rightarrow f$  están prohibidas. De esta explicación queda claro que la manifestación del valor  $l$  es el resultado de una interacción;

pero, entonces, el sistema ya no es un átomo de hidrógeno libre. El nuevo sistema tiene un Hamiltoniano de la forma

$$H = H_{at} + H_{em} + H_{int} \quad (2.78)$$

donde  $H_{at}$  es el Hamiltoniano del átomo de hidrógeno libre y  $H_{em}$  es el Hamiltoniano del campo electromagnético, que puede ser calculado como una suma infinita de osciladores armónicos independientes correspondientes a los diferentes modos de vibración del campo.  $H_{int}$  es el Hamiltoniano de interacción, que depende del momento dipolar del átomo (en primera aproximación) y del campo eléctrico (ver [26], pág. 548-549). La interacción rompe la simetría original en  $L^2$  y, en consecuencia, remueve la degeneración en la energía a través del número cuántico  $l$ : ahora los autovalores de energía  $\omega_{n,l}$  pasan a ser función de ambos números cuánticos  $n$  y  $l$ . Este hecho conduce a la manifestación del valor  $l$  en el espectro de energía, y permite que  $L^2$  se convierta en un observable con valor definido en el nuevo sistema.

El hecho de que  $L^2$  no sea un observable con valor definido en el átomo de hidrógeno libre no significa que nunca adquirirá un valor definido en él. Las características particulares del átomo de hidrógeno dependen fuertemente del potencial Coulombiano. En átomos más complejos, el potencial no es perfectamente Coulombiano, y esta asimetría elimina la degeneración en  $l$  del Hamiltoniano: los autovalores de la energía  $\omega_{n,l}$  son funciones de ambos números cuánticos  $n$  y  $l$  sin necesidad de interacción (ver [26], pág. 280). Esto significa que  $L^2$  ya no discrimina entre los diferentes autovectores correspondientes a un autovalor de energía degenerado, pero remueve la degeneración del caso Coulombiano simétrico. De acuerdo con la Regla de Actualización, esto implica que  $L^2$  es un observable con valor definido para átomos libres con potenciales no Coulombianos.

### 2.5.5. Efecto Zeeman

Como se sabe, cuando se aplica un campo magnético externo sobre un átomo, las líneas espectrales se dividen en múltiples líneas levemente separadas. Este efecto fue observado por primera vez por Zeeman en 1896 y por eso fue llamado efecto Zeeman.

En el apartado anterior vimos que, tanto en el caso de un potencial Coulombiano o no, el Hamiltoniano tiene una simetría rotacional que hace que los autovalores de energía sean independientes del número cuántico magnético  $m_l$ , esto es, que  $H$  sea degenerado en  $m_l$ . Es precisamente por esta simetría que la selección de  $L_z$  para completar la base del espacio de Hilbert es el resultado de una decisión arbitraria. La arbitrariedad de elegir la dirección  $z$  está de acuerdo con el hecho de que no hay evidencia experimental sobre el valor  $m_l$  en el espectro de energía.

Análogamente a la medición de una partícula libre con spin, un campo magnético  $B$  a lo largo del eje  $z$  rompe la isotropía del espacio y, en consecuencia,



la simetría rotacional del Hamiltoniano. En este caso, la ruptura de la simetría remueve la degeneración de la energía en  $m_l$ : ahora  $L_z$  no está arbitrariamente elegido ya que es seleccionado por ser la dirección del campo magnético. Pero, a su vez, esto implica que el átomo ya no es libre: el Hamiltoniano del nuevo sistema es aproximadamente (ver [26], pág. 326):

$$H = H_{at} + \frac{e}{2m_e c} BL \quad (2.79)$$

donde, nuevamente,  $H_{at}$  es el Hamiltoniano del átomo libre. Como consecuencia, la degeneración original del multiplete  $(2l + 1)$  para  $n$  y  $l$  fijo desaparece: los niveles de energía quedan desplazados por una cantidad:

$$\Delta\omega_{n,l,m_l} = \frac{e\hbar|B|}{2m_e c} m_l \quad (2.80)$$

Esto significa que el Hamiltoniano, con autovalores  $\omega$ , es ahora no degenerado, y constituye por sí mismo el CCOC  $\{H\}$  que define la base preferida  $\{|n, l, m_l\rangle\}$ . De acuerdo con la Regla de Actualización, en este caso  $H$  y todos los observables que conmutan con  $H$  tienen valores definidos: dado que éste es el caso para  $L^2$  y  $L_z$ , en las condiciones físicas que llevan al efecto Zeeman, ambos observables adquieren valores definidos.

### 2.5.6. Estructura fina

Cuando las líneas espectrales del átomo de hidrógeno correspondientes a  $n > 1$  se examinan con alta resolución, se encuentran dobletes muy cercanos entre sí. Esta división fue una de las primeras evidencias experimentales del spin del electrón. Este fenómeno se explica usualmente diciendo que los niveles de energía del átomo están afectados por el acoplamiento entre el spin del electrón  $S$  y el momento angular orbital  $L$ . En este caso el Hamiltoniano es

$$H = H_{at} + H_s + H_{s-o} \quad (2.81)$$

donde  $H_{at}$  es el Hamiltoniano del átomo de hidrógeno libre,  $H_s = kS^2$  es el Hamiltoniano del spin y  $H_{s-o}$  es el Hamiltoniano de la interacción spin-órbita que es función del producto  $L \cdot S$ .

Cuando la interacción spin-órbita no se tiene en cuenta ( $H_{s-o} \sim 0$ ), el sistema es compuesto (ver apartado 2.5.2, Partícula libre con spin) y puede ser descrito en términos de la base  $\{|n, l, m_l, s, m_s\rangle = |n, l, m_l\rangle \otimes |s, m_s\rangle\}$ , donde  $s(s + 1)\hbar^2$  son los autovalores de  $S^2$ , y  $m_s\hbar$  los autovalores de  $S_z$ . Cuando la interacción spin-órbita se tiene en cuenta, los observables  $L_z$  y  $S_z$  ya no conmutan con  $H$  y, entonces, ya no son constantes de movimiento del sistema: es usual decir que  $m_l$  y  $m_s$  ya no son buenos números cuánticos. No obstante, el Hamiltoniano es aún invariante ante rotaciones espaciales: las componentes  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z$  del momento angular total  $J$  son los generadores del grupo de simetría, y  $J^2$  es el operador de Casimir del grupo, con autovalores  $j(j + 1)\hbar$ . A su vez,  $J$  es la suma del momento orbital angular  $L$  y el momento angular del spin  $S$ :

$$J = L + S \quad m_j = m_l + m_s \quad (2.82)$$

donde  $m_j$  se corresponde con los autovalores de  $J_z$ . Podemos tomar el cuadrado de (2.82):

$$J^2 = (L + S)^2 \quad \rightarrow \quad L \cdot S = \frac{J^2 - L^2 - S^2}{2} \quad (2.83)$$

Esto significa que  $H_{s-o}$  es función de  $J^2$ ,  $L^2$  y  $S^2$  y los correspondientes autovalores  $j$ ,  $l$  y  $s$  son buenos números cuánticos. En consecuencia, los autovalores del Hamiltoniano total tienen la forma general:

$$\omega_{n,l,j,s} = \omega_{n,l} + \xi(n,l)(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)) \quad (2.84)$$

donde  $\omega_{n,l}$  representa los autovalores de la energía sin el acoplamiento spin-órbita, y  $\xi$  es una función de los números cuánticos  $n$  y  $l$  (ver [30], pág. 181-183). Entonces, la base  $\{|n, l, j, s, m_j\rangle\}$  del espacio de Hilbert del sistema está definida por el CCOC  $\{H, L^2, J^2, S^2, J_z\}$ .

Queda claro que el acoplamiento spin-órbita remueve la degeneración original de los autovalores  $\omega_{n,l}$  del átomo sin acoplamiento. Por lo tanto, en este caso, la Regla de Actualización selecciona  $L^2$ ,  $J^2$  y  $S^2$  como los observables con valor definido, porque todos ellos conmutan con  $H$  y tienen la misma degeneración en  $m_j$  que  $H$ . Pero la simetría rotacional sigue presente en el sistema y conduce a una degeneración en  $H$ , manifestada por el hecho de que los autovalores de energía  $\omega_{n,l,j,s}$  no dependen de  $m_j$ . Entonces, de acuerdo con la Regla de Actualización, aunque  $m_j$  es un buen número cuántico,  $J_z$  no adquiere valor definido, y este resultado está de acuerdo con la arbitrariedad de la elección en la dirección  $z$ .

Cuando un campo magnético se aplica sobre un átomo, las líneas espectrales se dividen de diferentes maneras. El efecto Zeeman “normal”, explicado en el apartado anterior, se observa en estados de spin cero; por lo tanto, el acoplamiento spin-órbita no tiene efecto. En los estados en los cuales el acoplamiento spin-órbita es efectivo, la acción del campo magnético produce otra división de los niveles de energía conocida como efecto Zeeman anómalo. No obstante, la explicación de este efecto anómalo es el mismo que el efecto normal: la acción del campo magnético a lo largo del eje  $z$  rompe la simetría rotacional del Hamiltoniano privilegiando la dirección  $z$ , y esto remueve la degeneración original del Hamiltoniano en el número cuántico  $m_j$  (en lugar del número cuántico  $m_l$  como ocurre en el efecto Zeeman normal). En este caso, la Regla de Actualización implica que  $J_z$  también tendrá valor definido.

### 2.5.7. Aproximación de Born-Oppenheimer

La Regla de Actualización adjudica al Hamiltoniano del sistema el papel de seleccionar el contexto preferido y, entonces, la energía del sistema siempre adquirirá un valor actual. Pero esto no significa que el momento es un observable

con valor definido en cualquier caso, dado que no siempre conmuta con el Hamiltoniano. De hecho, cuando un sistema está afectado por un campo externo, su Hamiltoniano tiene la siguiente forma general:

$$H = \frac{P^2}{2m} + V = T + V \quad (2.85)$$

Cuando la masa del sistema es pequeña, el término cinético prevalece sobre el término de energía potencial, y el Hamiltoniano aproximadamente conmuta con  $P^2$ . Por lo tanto, la Regla de Actualización implica la idea usual de que sistemas “pequeños” aproximadamente actualizan en momento pero no en una posición definida y por otro lado sistemas “grandes” actualizan aproximadamente en posición. En este sentido, la IMH concuerda con la hipótesis física de que los electrones tienen momento definido pero no posición definida y el núcleo tiene posición definida pero no momento definido. En general, esta regla explica el hecho de que los sistemas macroscópicos, con sus masas grandes, poseen aproximadamente un valor definido en posición. Para justificar lo dicho debemos comparar los operadores que conforman el Hamiltoniano en términos de la norma, definida para ellos dentro del álgebra a la que pertenecen. Recordemos la definición de norma de un operador:

$$\|A\| = \sup_{\Psi \in \mathcal{H}} \frac{\|A\Psi\|}{\|\Psi\|} \quad (2.86)$$

donde  $\Psi$  es un vector perteneciente al espacio de Hilbert. Podríamos reescribir la norma de la ecuación anterior de una manera más sencilla notando que  $\|\Psi\| \leq 1$ . Entonces:

$$\|A\| = \|A\Psi_1\| \quad (2.87)$$

donde  $\Psi_1$  es el vector que cumple con  $\|\Psi_1\| = 1$ . Lo que debemos comparar es la norma del operador  $T = \frac{P^2}{2m}$  con la norma del operador  $V$  para diferentes valores de  $m$ , esto es, debemos calcular los siguientes límites:

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ m \rightarrow 0}} \frac{\|V\|}{\|T\|} \quad (2.88)$$

Por lo tanto debemos calcular la norma por separado. Nótese que el Hamiltoniano ya no se puede diagonalizar simultáneamente con el momento, ya que el potencial depende de la posición y entonces  $[H, P] = i\frac{dV}{dQ} \neq 0$ . Si consideramos que  $\Psi_1$  es un autoestado del operador  $P$ , entonces  $T\Psi_1 = \frac{p^2}{2m}\Psi_1$ ; por lo tanto, la norma del potencial escalar  $V$  resulta

$$\|V\| = \|V\Psi_1\| = \|H\Psi_1 - T\Psi_1\| = \|H\| - \frac{p^2}{m} \langle H \rangle + \frac{p^4}{4m^2} \quad (2.89)$$

donde se ha usado que  $\langle \Psi_1 | \Psi_1 \rangle = 1$  y  $\langle H \rangle = \langle \Psi_1 | H | \Psi_1 \rangle$ . Entonces, la ec.(2.88) queda:

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ m \rightarrow 0}} \frac{\|V\|}{\|T\|} = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ m \rightarrow 0}} \left( \frac{4m^2}{p^4} \|H\| - \frac{4m}{p^2} \langle H \rangle + 1 \right) \quad (2.90)$$

El límite para  $m \rightarrow 0$  da como resultado el valor uno, y el límite para  $m \rightarrow \infty$  da como resultado infinito. Esto implica que, para masas muy livianas, la norma de la energía cinética es casi idéntica a la norma del potencial escalar y, además,  $\|H\| \sim \langle H \rangle \langle T \rangle$ . Para masas muy grandes, el módulo del potencial escalar es mucho mayor que el módulo de la energía cinética. Esto concuerda con la idea de que para masas muy grandes, se actualiza la posición, ya que  $[H, Q] = \left[ \frac{P^2}{2m}, Q \right] = -\frac{i}{m} P$  y entonces  $\lim_{m \rightarrow \infty} [H, Q] \rightarrow 0$ .

Este análisis es particularmente relevante en química molecular, donde la descripción de las moléculas está basada en la separación adiabática entre el electrón y los movimientos nucleares. Como es sabido, la aproximación de Born-Oppenheimer concibe al núcleo como partícula clásica, esto es, como un objeto localizado con precisión. Esta estrategia de aproximación que consiste en mantener al núcleo en reposo en una posición definida, se puede pensar que se origina al permitir que la masa del núcleo se haga infinita. Sin embargo, desde un punto de vista estrictamente cuántico, sin una regla que seleccione los observables con valores actuales del sistema, la hipótesis de masas nucleares infinitas no explica aún por qué los núcleos pueden ser tratados como si tuviesen una posición definida. Como Primas afirma: “Apenas comprendemos por qué la imagen de Born-Oppenheimer es compatible con los conceptos de la mecánica cuántica”. ([44], pág. 13, [45], [46]). En efecto, el Hamiltoniano total de la molécula es

$$H_{tot} = T_n(P_\alpha) + V_{nn}(R_\alpha) + T_e(p_i) + V_{ee}(r_i) + V_{en}(r_i, R_\alpha) \quad (2.91)$$

donde  $T_n$  es la energía cinética nuclear (función de los momentos nucleares  $P_\alpha$ ),  $V_{nn}$  es el potencial de interacción entre núcleos (que es función de la posición  $R_\alpha$ ),  $T_e$  es la energía cinética de los electrones (función de los momentos electrónicos  $p_i$ ),  $V_{ee}$  es el potencial de interacción entre electrones (función de las posiciones electrónicas  $r_i$ ) y  $V_{en}$  es el potencial de interacción entre los electrones y el núcleo (función de las posiciones de ambos,  $r_i$  y  $R_\alpha$ ). La aproximación de Born-Oppenheimer se efectúa en dos pasos:

- a) En el primer paso, la energía cinética nuclear se desprecia, esto es,  $T_n(P_\alpha)$  es sustraída del Hamiltoniano total  $H_{tot}$ . El Hamiltoniano electrónico resultante  $H_e$  queda

$$H_e = V_{nn}(R_\alpha) + T_e(p_i) + V_{ee}(r_i) + V_{en}(r_i, R_\alpha) \quad (2.92)$$

donde las posiciones nucleares  $R_\alpha$  pasan a ser parámetros. Entonces, el potencial nuclear  $V_{nn}(R_\alpha)$  es una función de los parámetros que sólo desplaza a los autovalores de  $H_e$  por un valor constante que depende de ellos. Entonces, la ecuación de Schrödinger electrónica resulta

$$H_e \Psi_e(r_i; R_\alpha) = E_e(R_\alpha) \Psi_e(r_i; R_\alpha) \quad (2.93)$$

Cuando esta última ecuación se resuelve, se encuentran los autovalores de energía  $E_e(R_\alpha)$  que dependen de los parámetros  $R_\alpha$ . Este paso se conoce como *aproximación de núcleo fijo*: la interacción de los electrones con los núcleos, representada por  $V_{en}$ , se concibe en términos de electrones en el potencial de Coulomb producido por los núcleos fijos en posiciones definidas. La sustracción de  $T_n(P_\alpha)$  está justificada si se asume que  $T_n \ll T_e$ , lo cual, a su vez, descansa sobre la hipótesis de que las masas nucleares son mucho más grandes que las masas electrónicas,  $M \gg m$ . En particular, si  $M/m \rightarrow \infty$ , entonces  $T_n(P_\alpha) \rightarrow 0$ .

- b) En el segundo paso, se reintroduce la energía cinética nuclear y la energía total  $E_{tot}$  se obtiene al resolver la ecuación de Schrödinger de los núcleos:

$$[T_n(P_\alpha) + E_e(R_\alpha)] \Psi_n(R_\alpha) = E_{tot} \Psi_n(R_\alpha) \quad (2.94)$$

Es claro que la aproximación crucial de la estrategia de Born-Oppenheimer se introduce en el primer paso, donde la relación  $M \gg m$  se aproxima a  $M/m \rightarrow \infty$ . Por supuesto, este límite nunca es estricto y, por lo tanto, los resultados obtenidos son meras aproximaciones. Supongamos ahora que las masas nucleares fueran efectivamente infinitas; de acuerdo con la lectura usual de la aproximación de Born-Oppenheimer, en este caso podríamos inferir que los núcleos están efectivamente fijos en posiciones definidas. La cuestión es por qué podemos hacer esta inferencia.

La respuesta acrítica se basa en las intuiciones que provienen de la mecánica clásica: un cuerpo con masa infinita  $M$  debería tener energía cinética nula y, en consecuencia, debería estar en reposo en una posición definida. Sin embargo, aquí no estamos en el ámbito clásico sino en un marco teórico cuántico donde, como bien se sabe, las intuiciones clásicas de poco sirven.

La respuesta cuántica usual es más adecuada que la anterior, porque descansa en conceptos cuánticos. Podemos ver que el Hamiltoniano total  $H_{tot}$  de la molécula puede ser expresado (ver ec. (2.91) y ec. (2.92))

$$H_{tot} = T_n(P_\alpha) + H_e(p_i, r_i, R_\alpha) \quad (2.95)$$

donde el Hamiltoniano electrónico  $H_e$  no es una función de los momentos nucleares  $P_\alpha$ . Cuando  $M/m \rightarrow \infty$  y por lo tanto  $T_n(P_\alpha) \rightarrow 0$ , ambos Hamiltonianos pueden considerarse iguales,  $H_{tot} = H_e(p_i, r_i, R_\alpha)$ . En consecuencia, dado que  $R_\alpha$  conmuta con  $H_e$ , cuando  $M/m \rightarrow \infty$ ,  $R_\alpha$  también conmuta con  $H_{tot}$ :

$$H_{tot} = H_e(p_i, r_i, R_\alpha) \quad \rightarrow \quad [H_{tot}, R_\alpha] = 0 \quad (2.96)$$

Desde este punto de vista, la respuesta es la siguiente: dado que la molécula está en un estado independiente del tiempo (esencialmente un axioma de la química cuántica), su estado es un autoestado de  $H_{tot}$  y, en consecuencia, tiene un valor actual de  $H_{tot}$  (su energía). Dado que la molécula tiene un valor actual de su Hamiltoniano  $H_{tot}$ , entonces la posición  $R_\alpha$ , al conmutar con  $H_{tot}$ , también tiene un valor definido, y esto significa que los núcleos están localizados en posiciones actuales.

Aunque es aparentemente razonable, esta explicación da por sentado el valor actual de  $H_{tot}$ , una cuestión que está lejos de ser clara desde el punto de vista de la mecánica cuántica. Cuando la respuesta se analiza con cuidado, no es difícil darse cuenta de que está basada en el tradicional vínculo autoestado-autovalor de acuerdo con el cual, cuando un sistema cuántico está en un estado  $|\Psi\rangle$ , algún observable  $A$  tiene valor actual, y éste será el que tenga al estado  $|\Psi\rangle$  como autovector. Ahora la respuesta parece convertirse en un argumento preciso:

- Dado que la molécula está en un estado estacionario, su estado  $|\Psi\rangle$  es un autovector de  $H_{tot}$ .
- Dado que  $|\Psi\rangle$  es un autovector de  $H_{tot}$ , de acuerdo con el vínculo autoestado-autovalor,  $H_{tot}$  tiene un valor actual.
- Dado que  $M/m \rightarrow \infty$ , entonces  $[H_{tot}, R_\alpha] = 0$ .
- Dado que  $|\Psi\rangle$  es un autovector de  $H_{tot}$  y  $[H_{tot}, R_\alpha] = 0$ , entonces  $|\Psi\rangle$  es un autovector de  $R_\alpha$ .
- Dado que  $|\Psi\rangle$  es un autovector de  $R_\alpha$ , de acuerdo con el vínculo autoestado-autovalor,  $R_\alpha$  tiene un valor actual, esto es, los núcleos están fijos en posiciones definidas.

El problema con este argumento es que el vínculo autoestado-autovalor no siempre funciona tan bien como se espera: sus deficiencias salen a la luz ya en el modelo atómico más simple. De hecho, en el átomo de hidrógeno libre cada vector  $|\Psi_{n,l,m_l}\rangle$  es un autovector de los tres observables del CCOC  $\{H, L^2, L_z\}$ . Por lo tanto, de acuerdo con el vínculo autoestado-autovalor, los tres observables del CCOC  $H, L^2$  y  $L_z$  deberían tener valores definidos. Sin embargo, como hemos visto, la simetría rotacional del sistema hace que la selección de una dirección espacial sea una decisión arbitraria: como el espacio es isotrópico, podríamos elegir diferentes direcciones y obtener descripciones igualmente legítimas del átomo libre.

La IMH brinda una respuesta a este problema conceptual. Para grandes masas, el Hamiltoniano es aproximadamente invariante ante transformaciones de boost y, por lo tanto, aproximadamente conmuta con la posición. En consecuencia, de acuerdo con la Regla de Actualización, el observable posición adquiere valor actual: esto brinda una justificación conceptual a la hipótesis de Born-Oppenheimer. Por supuesto, las masas nunca son infinitas: esto hace que la estrategia de Born-Oppenheimer sea una aproximación y no un método preciso. Pero en este sentido la IMH también está de acuerdo con la hipótesis usual: dado que el Hamiltoniano conmuta con la posición sólo en el caso de masa infinita, sólo en este límite podemos decir con absoluta precisión que la posición adquiere un valor actual. En situaciones reales, los observables con valor actual serán generalmente observables similares a la posición (en el sentido de la norma de operadores), pero que serán indistinguibles de la posición en la medida en que se incremente la masa.

## 2.6. El problema de la medición cuántica

En el modelo standard de von Neumann, una medición cuántica se concibe como una interacción entre un sistema  $S$  y un aparato de medición  $M$ . Antes de la interacción,  $M$  está preparado en un estado “listo para medir”  $|r_0\rangle$ , que es autovector del observable puntero  $R$  de  $M$ , y el estado de  $S$  es una superposición de autoestados  $|a_i\rangle$  de un observable  $A$  de  $S$ . La interacción introduce una correlación entre los autoestados  $|a_i\rangle$  de  $A$  y los autoestados  $|r_i\rangle$  de  $R$ :

$$|\Psi_0\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle \otimes |r_0\rangle \quad \rightarrow \quad |\Psi\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle \otimes |r_i\rangle \quad (2.97)$$

El problema consiste en explicar por qué, siendo el estado  $|\Psi\rangle$  una superposición de  $|a_i\rangle \otimes |r_i\rangle$ , el puntero  $R$  adquiere valor definido. En la interpretación ortodoxa del colapso, el estado puro  $|\Psi\rangle$  se asume que colapsa a una mezcla  $\rho^c$ :

$$\rho^c = \sum_i |c_i|^2 |a_i\rangle \otimes |r_i\rangle \langle a_i| \otimes \langle r_i| \quad (2.98)$$

donde las probabilidades  $|c_i|^2$  se interpretan por ignorancia. Entonces, en esta situación se supone que el aparato de medición está en uno de los autovectores  $|r_i\rangle$  de  $R$ , digamos  $|r_k\rangle$ , y por lo tanto  $R$  adquiere un valor definido  $r_k$ , que es el autovalor correspondiente al autovector  $|r_k\rangle$ , con probabilidad  $|c_k|^2$ . En las interpretaciones modales, el problema consiste en explicar la lectura definida del puntero con su probabilidad asociada, sin asumir la hipótesis del colapso. En este caso, la Regla de Actualización es la que debe llevar a cabo esta tarea.

Se debe comenzar el argumento ubicando el modelo de von Neumann en el contexto de las prácticas de medición. En efecto, dada la naturaleza probabilística de la mecánica cuántica, la máxima información acerca de un sistema cuántico se obtiene a través de la medición repetida del mismo sistema o de sistemas idénticos. Por lo tanto, es necesario distinguir entre:

- *Medición única:* Éste es un proceso único, en el cual se registra la lectura del puntero. Una medición única, considerada aisladamente, no provee información relevante sobre el estado del sistema  $S$ .
- *Medición de frecuencia:* Ésta es una repetición de mediciones únicas idénticas, cuyo propósito es obtener los valores  $|c_i|^2$  de acuerdo con las lecturas del puntero en las diferentes mediciones. Una medición de frecuencia provee información relevante sobre el estado de  $S$ , pero aún no es suficiente para identificar completamente tal estado.
- *Medición de estado:* Ésta es una colección de mediciones de frecuencia, cada una de las cuales se realiza con su propio arreglo experimental. Cada arreglo correlaciona el puntero  $R$  del aparato  $M$  con un observable  $A_i$  del sistema, de tal manera que los  $A_i$  no sólo son diferentes, sino que también pueden no conmutar entre ellos. La información obtenida por medio de

esta colección de mediciones de frecuencia es suficiente para reconstruir el estado de  $S$  (se volverá a este punto en los apartados siguientes).

El modelo de von Neumann apunta al problema de la medición cuántica en el marco de una medición única. Esto es completamente razonable en la medida en que, si no se tiene una explicación adecuada del caso único, no se puede dar cuenta de los resultados obtenidos por una repetición de casos idénticos. No obstante, aunque comenzaremos por analizar la medición en el caso único, no debemos olvidar que una medición aislada siempre es un elemento del proceso de medición por el cual, finalmente, se deben obtener frecuencias.

### 2.6.1. Mediciones ideales

En el modelo de von Neumann y, en general, en las discusiones acerca del problema de la medición cuántica, el Hamiltoniano implicado en el proceso en general no es tenido en cuenta. En la IMH, donde el Hamiltoniano juega un papel central, se debe dar un modelo más detallado del proceso de medición. Así, se debe decir que una medición única es un proceso de tres etapas:

- Etapa *I* ( $t \leq 0$ ): El sistema  $S$  y el aparato  $M$  no interactúan.
- Etapa *II* ( $0 < t < t_1$ ): Durante esta etapa,  $S$  y  $M$  interactúan, y la interacción establece una correlación entre ambos sistemas.
- Etapa *III* ( $t \geq t_1$ ): La interacción finaliza en  $t = t_1$ .

**Etapa I:** Supongamos que una medición única es un elemento de una medición de estado cuyo propósito es obtener los coeficientes del estado del sistema cuántico elemental  $S : (\mathcal{O}_S \subseteq \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_S, H_S)$ . También consideremos un observable no degenerado  $A \in \mathcal{O}_S$ :

$$A|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle \quad \text{donde} \quad \{|a_i\rangle\} \text{ es una base de } \mathcal{H}_S \quad (2.99)$$

En el instante  $t_0 = 0$ , el estado de  $S$  es<sup>7</sup>

$$|\Psi_S(t_0 = 0)\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle \in \mathcal{H}_S \quad (2.100)$$

Por simplicidad, asumiremos que el Hamiltoniano  $H_S \in \mathcal{O}_S$  de  $S$  es no degenerado:<sup>8</sup>

$$H_S |\omega_{S_i}\rangle = \omega_{S_i} |\omega_{S_i}\rangle, \quad \text{donde} \quad \{|\omega_{S_i}\rangle\} \text{ es una base de } \mathcal{H}_S \quad (2.101)$$

<sup>7</sup>Si el estado de  $S$  es preparado en el tiempo  $t < t_0 = 0$ , éste evolucionará hasta  $t_0 = 0$  bajo la acción del Hamiltoniano  $H_S$ ; entonces, no se estará midiendo el estado preparado, sino el estado en  $t_0 = 0$  resultante de la evolución. Si queremos medir el estado de  $S$  como fue originalmente preparado, el Hamiltoniano  $H_S$  debe ser cero o un múltiplo de la identidad y, por lo tanto, completamente degenerado.

<sup>8</sup>La explicación completa del proceso de medición, mostrará que la degeneración de  $H_S$  no modifica los resultados finales.



El aparato de medición es un sistema cuántico elemental  $M : (\mathcal{O}_M \subseteq \mathcal{H}_M \otimes \mathcal{H}_M, H_M)$ , que tiene un observable  $R \in \mathcal{O}_M$ , que posee diferentes autovalores macroscópicamente distinguibles, y que cumple el papel de puntero:

$$R|r_i\rangle = r_i|r_i\rangle, \quad \text{donde} \quad \{|r_i\rangle\} \text{ es una base de } \mathcal{H}_M \quad (2.102)$$

En el instante  $t_0 = 0$ , el aparato de medición  $M$  se prepara en el estado “listo para medir”  $|r_0\rangle$ , autovector de  $R$ :

$$|\Psi_M(t_0)\rangle = |r_0\rangle \in \mathcal{H}_M \quad (2.103)$$

Por simplicidad, asumiremos que el Hamiltoniano  $H_M \in \mathcal{H}_M$  de  $M$  es no degenerado:<sup>9</sup>

$$H_M|\omega_{M_i}\rangle = \omega_{M_i}|\omega_{M_i}\rangle, \quad \text{donde} \quad \{|\omega_{M_i}\rangle\} \text{ es una base de } \mathcal{H}_M \quad (2.104)$$

Para que la lectura del puntero sea posible, los autovectores  $|r_i\rangle$  de  $R$  deben ser estacionarios. Así, el aparato  $M$  se construye de tal manera que  $R$  conmute con  $H_M$ :

$$[H_M, R] = 0 \quad \rightarrow \quad |\omega_{M_i}\rangle = |r_i\rangle \quad \rightarrow \quad H_M|r_i\rangle = \omega_{M_i}|r_i\rangle \quad (2.105)$$

Entonces,

$$|\Psi_M(t_0 = 0)\rangle = |r_0\rangle = |\Psi_M(t_0 + \Delta t)\rangle = |\Psi_M\rangle \in \mathcal{H}_M \quad (2.106)$$

Por lo tanto, de acuerdo con la proposición de Composición de Sistemas (Proposición 3), en el instante  $t_0 = 0$  el estado del sistema compuesto  $S \cup M : (\mathcal{O} \subseteq \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}, H)$  será

$$|\Psi_I(t_0 = 0)\rangle = |\Psi_S(t_0 = 0)\rangle \otimes |\Psi_M\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle \otimes |r_0\rangle \in \mathcal{H} \quad (2.107)$$

donde  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_S \otimes \mathcal{O}_M$  y  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_M$ . Dado que durante la etapa  $I$  no hay interacción entre los sistemas  $S$  y  $M$ , entonces  $H_{int} = 0$  y el Hamiltoniano total de  $S \cup M$  es

$$H = H_S \otimes I_M + I_S \otimes H_M \in \mathcal{O} \quad (2.108)$$

De acuerdo con la proposición de Descomposición de Sistemas (Proposición 2), esto significa que  $S$  y  $M$  son subsistemas del sistema compuesto  $S \cup M$ .

**Etapa II :** En esta segunda etapa de interacción, los sistemas  $S$  y  $M$  interactúan a través de un Hamiltoniano de interacción  $H_{int}$ . Esto significa que el sistema compuesto  $S \cup M : (\mathcal{O} \subseteq \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}, H)$  se transforma en el sistema  $S_{II} : (\mathcal{O} \subseteq \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}, H_{II})$ , cuyo Hamiltoniano es

$$H_{II} = H_S \otimes I_M + I_S \otimes H_M + H_{int} = H + H_{int} \in \mathcal{O} \quad (2.109)$$

<sup>9</sup>Esta hipótesis se discutirá en el apartado 2.6.5, donde se presentarán en detalle las condiciones para una medición única.

A su vez, el estado  $|\Psi_I(t_0 = 0)\rangle$  de  $S \cup M$  en la etapa  $I$  no es más que el estado inicial  $|\Psi_{II}(t_0 = 0)\rangle$  de  $S_{II}$  en la etapa  $II$ . De acuerdo con el Postulado Dinámico (Postulado 4), ese estado evoluciona a un estado  $|\Psi_{II}(t_1)\rangle$  después de un tiempo  $\Delta t = t_1$ :

$$|\Psi_{II}(t_1)\rangle = e^{-\frac{iH_{II}t_1}{\hbar}} |\Psi_{II}(t_0 = 0)\rangle = e^{-\frac{iH_{II}t_1}{\hbar}} |\Psi_I(t_0 = 0)\rangle \in \mathcal{H} \quad (2.110)$$

Si el Hamiltoniano de interacción  $H_{int}$  es

$$H_{int} = \frac{-\lambda\hbar}{t_1}(A \otimes P^R) \quad (2.111)$$

donde  $\lambda$  es una constante y  $P^R$  es el observable conjugado al puntero  $R$ , o sea,  $[R, P^R] = i\hbar$ , entonces, el estado final de  $S_{II}$  en la etapa  $II$  resulta (ver [47]):

$$|\Psi_{II}(t_1)\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle \otimes |r_i\rangle \in \mathcal{H} \quad (2.112)$$

En efecto, si el estado inicial se encuentra en alguno de los autovectores del observable  $A$ , como es el caso, entonces el operador evolución que se obtiene de exponenciar el Hamiltoniano de interacción  $H_{int}$  se reducirá a  $\exp(-i\frac{\lambda\hbar}{t_1}a_i I \otimes P^R)$ . Esta expresión se puede reconocer como el operador traslación actuando sobre el sistema  $M$ , trasladando al puntero en un valor  $\lambda a_k$ , o sea, lo respectivo al autovalor del observable  $A$ . En particular, si el estado inicial es el de la ec. (2.107), por cada autovalor del observable  $A$ , el Hamiltoniano de interacción dejará como estado final a (2.112).

**Etapa III:** En el instante  $t = t_1$  la interacción finaliza: el sistema  $S_{II}$  deviene el sistema compuesto original  $S \cup M$ , cuyo Hamiltoniano es otra vez  $H = H_S \otimes I_M + I_S \otimes H_M \in \mathcal{O}$ . Dado que en esta etapa  $H_{int} = 0$ , de acuerdo con la proposición de Descomposición de Sistemas (Proposición 2),  $S$  y  $M$  vuelven a ser nuevamente subsistemas del sistema compuesto  $S \cup M$ . A su vez, el estado  $|\Psi_{II}(t_1)\rangle$  de  $S_{II}$  en la etapa  $II$  se transforma el estado inicial  $|\Psi_{III}(t_1)\rangle$  de  $S \cup M$  en la etapa  $III$ :

$$|\Psi_{III}(t_1)\rangle = |\Psi_{II}(t_1)\rangle \in \mathcal{H} \quad (2.113)$$

Dado que en esta etapa  $S$  y  $M$  son sistemas cuánticos (cada uno evoluciona bajo su correspondiente Hamiltoniano) y también son elementales, podemos aplicar la Regla de Actualización a cada uno de ellos:

- a El sistema  $S$  :  $(\mathcal{O}_S \subseteq \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_S, H_S)$ , con estado inicial  $\rho_S(t) = Tr_{(M)}\rho_{III}(t_1) = Tr_{(M)}|\Psi_{III}(t_1)\rangle\langle\Psi_{III}(t_1)|$ , evoluciona unitariamente bajo la acción de  $H_S$  de acuerdo con el Postulado Dinámico. Sin embargo, el contexto preferido CCPO  $\{|\omega_{S_i}\rangle\langle\omega_{S_i}|\}$  es invariante ante desplazamientos temporales, dado que está definido por los autovectores no degenerados de  $H_S$ .<sup>10</sup> Aquí hay que distinguir dos casos:

<sup>10</sup>Si  $H_S \neq 0$  fuese degenerado, entonces el contexto preferido CCPO de  $S$  sería  $\{P_{S_i}\}$ , donde

- **a.1** Si  $[H_S, A] = 0$ , entonces  $|\omega_{S_i}\rangle = |a_i\rangle$ . Esto significa que ambos  $H_S$  y  $A$  adquieren valores definidos.
- **a.2** Si  $[H_S, A] \neq 0$ , entonces  $|\omega_{S_i}\rangle \neq |a_i\rangle$ . En consecuencia, el observable  $A$  no tiene valor definido.

**b** El sistema  $M : (\mathcal{O}_M \subseteq \mathcal{H}_M \otimes \mathcal{H}_M, H_M)$ , con estado inicial  $\rho_M(t_1) = Tr_{(S)} \rho_{III}(t_1) = Tr_{(S)} |\Psi_{III}(t_1)\rangle \langle \Psi_{III}(t_1)|$ , evoluciona unitariamente bajo la acción de  $H_M$  de acuerdo con el Postulado Dinámico. Sin embargo, el contexto preferido CCPO es  $t$ -invariante dado que está definido por los autovectores del Hamiltoniano  $H_M$  no degenerado. A su vez,  $[H_M, R] = 0$  para que se garantice el carácter estacionario de  $|r_i\rangle$ . Por lo tanto, en el aparato  $M$ , el contexto preferido CCPO es  $\{|\omega_{M_i}\rangle \langle \omega_{M_i}| = |r_i\rangle \langle r_i|\}$ , y esto significa que tanto  $H_M$  como  $R$  tienen valores definidos.

Dada la perfecta correlación entre los  $|r_i\rangle$  y los  $|a_i\rangle$ , la medición cuántica ideal es usualmente interpretada como si la lectura de un valor particular  $r_\Omega$  del puntero  $R$  del aparato implicara la indicación unívoca de los valores correspondientes  $a_\Omega$  del observable  $A$  del sistema. Sin embargo, de acuerdo con la IMH, éste no es el caso en la situación (a.2), donde  $A$  no es un observable con valor definido. Este hecho, que puede sonar raro, se convierte en un resultado no problemático cuando se comprende claramente la diferencia entre una medición clásica y una medición cuántica. La interpretación tradicional de la medición cuántica ideal está modelada bajo el paradigma de la medición clásica, basada en la correlación entre los valores actuales del puntero del aparato de medición y el observable a medir. Pero en las mediciones cuánticas, el objetivo final no es descubrir el valor actual del observable del sistema, sino reconstruir el estado del sistema inmediatamente antes de comenzar el proceso de medición. Por lo tanto, el único hecho relevante es la lectura definida del puntero del aparato de medición: la tarea consiste en explicar cómo la repetición de mediciones únicas, donde el puntero tiene valores definidos, permite reconstruir el estado del sistema medido. Como se ha mostrado, de acuerdo con la IMH, no importa si el observable  $A$  del sistema adquiere o no valor definido, en cada medición el puntero del aparato siempre tiene valor definido. Ahora se mostrará cómo la repetición de mediciones aisladas en una medición de frecuencia brinda los coeficientes correctos del estado del sistema.

**Propensiones y actualización:** El contexto preferido CCPO  $\{|\omega_{M_i}\rangle \langle \omega_{M_i}| = |r_i\rangle \langle r_i|\}$  del aparato  $M$  define el conjunto de hechos posible  $\mathcal{P}_F^\alpha$ . Podemos calcular la medida de la propensión a la actualización de cada hecho posible  $P_F[|r_i\rangle \langle r_i|] \in \mathcal{P}_F^\alpha$  (ver Proposición 7):

$$p_{\rho_M(t_1)}^p(P_F[|r_i\rangle \langle r_i|]) = Tr(\rho_M(t_1) |r_i\rangle \langle r_i|) = \langle r_i | \rho_M(t_1) | r_i \rangle \quad (2.114)$$

los  $P_{S_i}$  son autoproyectores de  $H_S$ . Por lo tanto, los valores definidos de  $A$  requerirían que  $[H_S, A] = 0$  y que  $A$  tuviera, al menos, la misma degeneración que  $H_S$ ; entonces, si  $A$ , como se asume, es no degenerado, entonces no adquiere valor definido. En el caso de que  $H_S = 0$  (o un múltiplo de la unidad), no hay actualización en  $S$ .

donde el estado inicial  $\rho_M(t_1)$  de  $M$  en la etapa *III* está dado por (ver ec.(2.112) y (2.113))

$$\rho_M(t_1) = Tr_{(S)} |\Psi_{III}(t_1)\rangle \langle \Psi_{III}(t_1)| = \sum_i c_i c_j^* |r_i\rangle \langle r_j| \quad (2.115)$$

Entonces,

$$p_{\rho_M(t_1)}^p(P_F[|r_i\rangle \langle r_i|]) = |c_i|^2 \quad (2.116)$$

Dado que cada hecho posible  $P_F[|r_i\rangle \langle r_i|]$  es equivalente a los hechos posibles  $P_F[H_M : \omega_{M_i}]$  y  $P_F[R : r_i]$  (ver postulado 2.3.2), entonces

$$p_{\rho_M(t_1)}^p(P_F[H_M : \omega_{M_i}]) = |c_i|^2 \quad (2.117)$$

$$p_{\rho_M(t_1)}^p(P_F[R : r_i]) = |c_i|^2 \quad (2.118)$$

Como vemos, las medidas de las propensiones obtenidas están de acuerdo con las probabilidades asignadas a las diferentes lecturas del puntero por la interpretación por colapso. Más aún, esas mediciones son constantes en el tiempo, lo cual es un resultado razonable que garantiza la repetición de una medición aislada. Por supuesto, si se quiere obtener experimentalmente  $|c_i|^2$ , debemos repetir la medición única bajo las mismas condiciones para que las propensiones se manifiesten como frecuencias en la medición de frecuencia. Pero en cada medición única, uno y sólo un hecho posible  $P_F[|r_i\rangle \langle r_i|]$  se hará actual (ver Proposición 10), digamos  $P_F[|r_\Omega\rangle \langle r_\Omega|]$ . Entonces

- $A_F[H_M : \omega_{M_\Omega}]$ : la propiedad-caso  $[H_M : \omega_{M_\Omega}]$  correspondiente a la propiedad-tipo  $[H_M]$  actualmente ocurre (el Hamiltoniano  $H_M$  tiene actualmente el valor  $\omega_{m_\Omega}$ ).
- $A_F[R : r_\Omega]$ : la propiedad-caso  $[R : r_\Omega]$  correspondiente a la propiedad-tipo  $[R]$  actualmente ocurre (el puntero  $R$  tiene actualmente el valor  $r_\Omega$ ).

Más aún, en el sistema compuesto  $S \cup M$  (ver Proposición 4), la propiedad-caso  $[I_S \otimes R : r_\Omega]$  correspondiente a la propiedad-tipo  $[I_S \otimes R]$  ocurre actualmente, dado que  $[R] = [I_S \otimes R]$ . A su vez, por la misma razón, sabemos que  $[H_S \otimes I_M : \omega_{S_\Omega}]$  actualmente ocurre en  $S \cup M$  cuando  $[H_S : \omega_{S_\Omega}]$  actualmente ocurre en  $S$ , y que  $[I_S \otimes H_M : \omega_{S_\Omega}]$  actualmente ocurre en  $S \cup M$  cuando  $[H_M : \omega_{M_\Omega}]$  actualmente ocurre en  $M$ . Por lo tanto, en el sistema compuesto  $S \cup M$ , donde  $H = f(H_S \otimes I_M, I_S \otimes H_M) = H_S \otimes I_M + I_S \otimes H_M$ , la propiedad-caso  $[H : (\omega_{S_\Omega} + \omega_{M_\Omega})]$  correspondiente a la propiedad-tipo  $[H]$  también ocurre actualmente: el Hamiltoniano total tiene el valor  $(\omega_{S_\Omega} + \omega_{M_\Omega})$ . En otras palabras, la energía total del sistema compuesto es la suma de energías de los subsistemas componentes, como se asume en la práctica.

### 2.6.2. Mediciones no ideales

En la bibliografía se distinguen dos tipos de mediciones no ideales:

- *Mediciones imperfectas* (primer tipo):

$$\sum_i c_i |a_i\rangle \otimes |r_0\rangle \rightarrow \sum_{i,j} d_{ij} |a_i\rangle \otimes |r_j\rangle \quad \text{donde, en general } d_{ij} \neq 0 \text{ con } i \neq j \quad (2.119)$$

- *Mediciones que perturban* (segundo tipo):

$$\sum_i c_i |a_i\rangle \otimes |r_0\rangle \rightarrow \sum_i c_i |a_i^d\rangle \otimes |r_i\rangle \quad \text{donde, en general, } \langle a_i^d | a_j^d \rangle \neq \delta_{ij} \quad (2.120)$$

Sin embargo, las mediciones que perturban se pueden expresar como mediciones imperfectas por un cambio de base:

$$\sum_i c_i |a_i^d\rangle \otimes |r_0\rangle = \sum_{i,j} d_{ij} |a_i\rangle \otimes |r_j\rangle \quad (2.121)$$

En algunas interpretaciones modales ([39] y [40]), la regla para la asignación de propiedades, cuando se aplica a mediciones no ideales, conduce a resultados que están en desacuerdo con aquéllos obtenidos por la interpretación ortodoxa del colapso (ver [48] y [49]). Si las propiedades asignadas por una interpretación modal son diferentes de aquéllas asignadas por la interpretación por colapso, surge la pregunta sobre qué tan diferentes son. Para el caso de una medición imperfecta, puede esperarse que  $d_{ij} \neq 0$  con  $i \neq j$  sean pequeños (en relación a los coeficientes en la diagonal); entonces la diferencia también lo será. Pero en el caso de mediciones que perturban, los coeficientes  $d_{ij} \neq 0$  con  $i \neq j$  no necesariamente deben ser pequeños y, en consecuencia, el desacuerdo entre las propiedades asignadas por la interpretación modal y aquéllas asignadas por el colapso pueden ser inaceptables (ver una discusión completa en [50]). Este hecho ha sido considerado por Harvey Brown como la “bala de plata”<sup>11</sup> para destruir las interpretaciones modales (citado en [50]).

No distinguiremos aquí entre los dos tipos de mediciones no ideales, porque el resultado de la aplicación de la Regla de Actualización no depende de los valores  $d_{ij}$  fuera de la diagonal. Como veremos, de acuerdo con la IMH, el observable  $R$  que juega el papel de puntero del aparato de medición adquiere un valor definido en cualquier caso.

**Etapas I a II :** En una medición no ideal, la etapa I está caracterizada de la misma manera que en el caso ideal. La diferencia comienza en la etapa

---

<sup>11</sup>Silver bullet.

$II$ , donde la correlación introducida por el Hamiltoniano de interacción  $H_{int}$  no es perfecta. Por lo tanto, el estado final  $|\Psi_{II}(t_1)\rangle$  de la etapa  $I$ , que es el estado inicial  $|\Psi_{III}(t_1)\rangle$  de la etapa  $III$ , resulta

$$|\Psi_{III}(t_1)\rangle = |\Psi_{II}(t_1)\rangle = \sum_{i,j} d_{ij} |a_i\rangle \otimes |r_j\rangle \quad (2.122)$$

Dado que en la etapa  $III$ ,  $H_{int} = 0$ , de acuerdo con la proposición de Descomposición de Sistemas,  $S$  y  $M$  son nuevamente subsistemas del sistema compuesto  $S \cup M$ . Como hemos discutido en el caso de las mediciones ideales, no estamos interesados en los observables con valor definido de  $S$ ; por lo tanto, sólo analizaremos los resultados del proceso de medición en el aparato  $M$ .

El sistema  $M$  comienza la etapa  $III$  en un estado inicial

$$\begin{aligned} \rho_M(t_1) &= Tr_{(S)} \rho_{III}(t_1) = Tr_{(S)} |\Psi_{III}(t_1)\rangle \langle \Psi_{III}(t_1)| \\ &= \sum_n \langle a_n | \Psi_{III}(t_1)\rangle \langle \Psi_{III}(t_1) | a_n \rangle \end{aligned} \quad (2.123)$$

Entonces,

$$\rho_M(t_1) = \sum_{i,j} \rho_{M_{ij}} |r_i\rangle \langle r_j| \quad (2.124)$$

donde

$$\rho_{M_{ij}} = \sum_n d_{ni} d_{nj}^* \quad (2.125)$$

Aunque  $M$  evoluciona unitariamente bajo la acción de  $H_M$  de acuerdo con el Postulado Dinámico, el CCPO preferido es invariante ante traslaciones temporales, dado que está definido por los autoestados de  $H_M$ . A su vez, dado que  $H_M$  conmuta con  $R$ , el CCPO preferido es otra vez  $\{\omega_{M_i}\} \langle \omega_{M_i} | = |r_i\rangle \langle r_i|$  y esto significa que ambos  $H_M$  y  $R$  tienen valores definidos.

**Propensiones y actualización:** En este caso, la medida, invariante ante traslaciones temporales, de la propensión a la actualización de cada hecho posible  $P_F [|r_i\rangle \langle r_i|] \in \mathcal{P}_F^\alpha$  es

$$\begin{aligned} p_{\rho_M(t_1)}^P ([|r_i\rangle \langle r_i|]) &= Tr(\rho_M(t_1) |r_i\rangle \langle r_i|) = \rho_{M_{ii}} \\ &= \sum_n |d_{ni}|^2 = |d_{ii}|^2 + \sum_{n \neq i} |d_{ni}|^2 \end{aligned} \quad (2.126)$$

Como podemos ver, si los coeficientes  $d_{ni}$ , con  $n \neq i$ , de los términos no diagonales del estado inicial en la etapa  $III$  son cero (ver. ec. (2.119) o ec.(2.122)), estamos en el caso de las mediciones ideales, donde  $\rho_{M_{ii}} = |d_{ii}|^2 = |c_i|^2$ . Si los coeficientes  $d_{ni}$ , con  $n \neq i$ , no son cero, estamos entonces en el caso de las mediciones no ideales. Sin embargo, en este caso hay que distinguir dos situaciones:

- Si los coeficientes  $d_{ni}$ , con  $n \neq i$ , son pequeños en el sentido de que  $\sum_{n \neq i} |d_{ni}|^2 \ll |d_{ii}|^2$  (ver ec. (2.126)), entonces  $\rho_{M_{ii}} \simeq |d_{ii}|^2 \simeq |c_i|^2$ . Esto significa que, en una medición de frecuencia realizada por repetición de mediciones únicas, los coeficientes  $|c_i|^2$  pueden *aproximadamente obtenerse*.
- Si los coeficientes  $d_{ni}$ , con  $n \neq i$  no son pequeños, entonces  $\rho_{M_{ii}} \simeq |d_{ii}|^2$  ya no es cierto. Por lo tanto, el resultado obtenido por medio de las mediciones por frecuencia ya no será fiable.

No obstante, no importa si el resultado de las mediciones de frecuencia es fiable o no, en cada medición única uno y sólo un hecho posible  $P_F[|r_i\rangle\langle r_i|]$  se hará actual, digamos  $P_F[|r_\Omega\rangle\langle r_\Omega|]$ . Entonces, podemos garantizar que, en el aparato de medición  $M$ ,

$$A_F[H_M : \omega_{M_\Omega}] \quad \text{y} \quad A_F[R : r_\Omega] \quad (2.127)$$

Más aún, si  $A_F[H_S : \omega_{S_\Omega}]$  es un hecho actual en el sistema  $S$ , entonces en el sistema compuesto  $S \cup M$  se cumplen  $A_F[H : (\omega_{S_\Omega} + \omega_{M_\Omega})]$  y  $A_F[I_S \otimes R : r_\Omega]$  (ver el último párrafo del apartado sobre mediciones ideales).

Resumiendo, algunos autores ([48] y [49]) tienen razón al sostener que las mediciones ideales son situaciones que no pueden ser concretadas en la práctica: la interacción en la etapa  $II$  nunca introduce una correlación completamente perfecta; a pesar de ello, los físicos usualmente realizan mediciones exitosas. Nuestra propuesta del proceso de medición muestra claramente que la correlación perfecta no es una condición necesaria para realizar “buenas” mediciones: los coeficientes del estado del sistema, en el comienzo del proceso de medición, pueden ser aproximadamente obtenidos aun cuando la correlación no es perfecta, si la condición de fiabilidad de los términos no diagonales se satisface. No obstante, tanto en la medición de frecuencia fiable y como en la no fiable, en cada medición singular se obtiene al menos una lectura definida del puntero  $R$ : la IMH es inmune a la “bala de plata” de Brown.

### 2.6.3. El experimento de Stern-Gerlach

El experimento de Stern-Gerlach es el paradigma de la medición cuántica, por lo tanto es importante ver cómo todos los elementos del formalismo general de la medición se presentan en este ejemplo concreto.

El experimento se describe como sigue. Consideremos un sistema cuántico con spin, libre y neutro, con una velocidad constante en la dirección  $y$ , que atraviesa los polos de un imán que produce un campo magnético inhomogéneo, con componentes  $B_x = B'_0 x$ ,  $B_y = 0$  y  $B_z = B_0 - B'_0 z$ , el cual satisface que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ . El sistema cuántico se describe en el plano  $yz$  y en un sistema de referencia moviéndose uniformemente en la dirección  $y$ , de tal modo que  $P_y = 0$ .

El gradiente del campo magnético produce una fuerza que defleca la trayectoria del sistema en la dirección  $z$  y esta deflexión depende de la componente de spin en esa dirección. El espacio de Hilbert de este sistema es  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_S$  donde  $\mathcal{H}_R$  es el correspondiente a la parte espacial y  $\mathcal{H}_S$  al espacio de Hilbert del spin del sistema cuántico. El estado cuántico entonces se podrá escribir como  $|\Psi\rangle = |\varphi\rangle \otimes |\chi\rangle$  donde  $|\chi\rangle$  es un vector de dos componentes,  $|\chi\rangle = \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \chi_- \end{pmatrix}$ .

Para verlo con más detalle, la ecuación de Schrödinger del sistema cuántico en el momento en que está atravesando el campo magnético es:

$$H|\Psi\rangle = \left(\frac{P_z^2}{2m} \otimes I_S + I_P \otimes kS^2 \mp \mu_B(B'_0 x S_x \pm (B_0 - B'_0 z)S_z)\right)|\Psi\rangle \quad (2.128)$$

Efectuando la transformación  $|\Psi'\rangle = e^{\pm i \frac{\mu_B B_0 t}{\hbar}} |\Psi\rangle$  y asumiendo que  $B_0$  es mucho más grande que  $B_x$ , como ocurre habitualmente en estos experimentos, cualquier componente del momento magnético en el plano  $xy$  oscilará rápidamente con una frecuencia  $\omega = \frac{2\mu_B B_0}{\hbar}$  en torno al eje  $z$  y la fuerza en el sistema producida por  $B_x$  se promediará a cero. De este modo la ecuación (2.128) quedará como:

$$H|\Psi'\rangle = \left(\frac{P_z^2}{2m} \otimes I_S + I_P \otimes kS^2 \mp B'_0 z S_z\right)|\Psi'\rangle \quad (2.129)$$

Para ver cómo se aplica la descripción general del proceso de medición, podemos separar el experimento de Stern-Gerlach en tres etapas. En la primera de ellas tenemos un sistema compuesto con el siguiente Hamiltoniano:

$$H_I = \frac{P_z^2}{2m} \otimes I_S + I_P \otimes kS^2 \quad (2.130)$$

En la segunda etapa se introduce el Hamiltoniano de interacción  $H_{int} = B'_0 z \otimes S_z$ , que actúa en un  $\Delta t$  y, recordando la ecuación (2.111),  $S_z$  es el observable a medir y  $z$  es el observable conjugado a la variable puntero que será el momento en la dirección  $z$ ,  $P_z$ . Por lo tanto, el Hamiltoniano de la etapa II queda como en la ecuación (2.129). Finalmente, en la tercera etapa se vuelven a separar los sistemas y el Hamiltoniano  $H_{III}$  es igual al Hamiltoniano de la etapa I,  $H_{III} = H_I$ .

Podemos entonces considerar al Hamiltoniano  $H = \frac{P_z^2}{2m}$  como parte del aparato de medición, ya que como dijimos,  $P_z$  es el puntero. Entonces es necesario que  $[H_M, P_z] = 0$ . Esto garantiza que los autoestados de  $P_z$  sean estacionarios.

En la primera etapa, los autoestados del spin son

$$S_z \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \chi_- \end{pmatrix} = \pm \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \chi_- \end{pmatrix} \quad (2.131)$$

Si denotamos  $\begin{pmatrix} \chi_+ \\ 0 \end{pmatrix} = |\uparrow\rangle$  y  $\begin{pmatrix} 0 \\ \chi_- \end{pmatrix} = |\downarrow\rangle$ , entonces  $S_z |\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2} |\uparrow\rangle$  y  $S_z |\downarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2} |\downarrow\rangle$ . En esta misma etapa tenemos que el momento en la dirección  $z$ , que juega el papel de puntero, es tal que

$$P_z |+\rangle = p_+ |+\rangle \quad P_z |-\rangle = p_- |-\rangle \quad P_z |0\rangle = p_0 |0\rangle \quad (2.132)$$



donde  $\{|+\rangle, |-\rangle, |0\rangle\}$  es una base de  $\mathcal{H}_M$ .<sup>12</sup> Los estados iniciales de  $S$  y  $M$  son, respectivamente  $|\chi\rangle = c_1 |\uparrow\rangle + c_2 |\downarrow\rangle$  y  $|\Psi_M\rangle = |0\rangle$ ; entonces,

$$|\Psi_I(t=0)\rangle = c_1 |\uparrow\rangle \otimes |0\rangle + c_2 |\downarrow\rangle \otimes |0\rangle \quad (2.133)$$

El Hamiltoniano de  $S$  es  $H_S = kS^2$ , y el Hamiltoniano de  $M$  es tal que  $[H_M, P_z] = 0$ ; por lo tanto,

$$H_M |+\rangle = \omega_+ |+\rangle \quad H_M |-\rangle = \omega_- |-\rangle \quad H_M |0\rangle = \omega_0 |0\rangle \quad (2.134)$$

**Medición ideal:** En la etapa *II*, el Hamiltoniano total  $H_{II} = H_M + H_{int}$  introduce una correlación perfecta. Entonces, el estado inicial de  $S \cup M$  en la etapa *III* será:

$$|\Psi_{III}(t = \Delta t)\rangle = c_1 |\uparrow\rangle \otimes |+\rangle + c_2 |\downarrow\rangle \otimes |-\rangle \quad (2.135)$$

El estado inicial del subsistema  $S$  es:

$$\rho_M(\Delta t) = Tr_{(S)} |\Psi_{III}\rangle \langle \Psi_{III}| = |c_1|^2 |+\rangle \langle +| + |c_2|^2 |-\rangle \langle -| \quad (2.136)$$

El CCPO de  $M$  está dado por los autoestados del Hamiltoniano  $H_M$  y, entonces, es  $\{|+\rangle \langle +|, |-\rangle \langle -|, |0\rangle \langle 0|\}$ . Dado que  $[H_M, P_z] = 0$ , el Hamiltoniano  $H_M$  y  $P_z$  adquieren valores definidos. La medida de la propensión a la actualización de los posibles hechos correspondientes a  $P_z$  pueden calcularse como

$$p_{\rho_M(\Delta t)}^p(P_F(|+\rangle \langle +|)) = \langle + | \rho_M(\Delta t) | + \rangle = |c_1|^2 \quad (2.137)$$

$$p_{\rho_M(\Delta t)}^p(P_F(|-\rangle \langle -|)) = \langle - | \rho_M(\Delta t) | - \rangle = |c_2|^2 \quad (2.138)$$

$$p_{\rho_M(\Delta t)}^p(P_F(|0\rangle \langle 0|)) = \langle 0 | \rho_M(\Delta t) | 0 \rangle = 0 \quad (2.139)$$

Como podía esperarse, estas mediciones son invariantes ante desplazamientos temporales: no dependen del instante en el que se hace la lectura del valor del puntero, esto es, de la posición exacta donde el detector está ubicado en la etapa *III*. Si estas medidas de propensión dependieran del estado instantáneo del sistema, el resultado de la medición de frecuencia sería extremadamente sensible a la ubicación precisa de los detectores: cualquier perturbación imperceptible modificaría substancialmente las frecuencias obtenidas, haciendo a la medición por frecuencia imposible de realizar. A su vez, dado que los hechos posibles con medida nula no se hacen actuales (ver Proposición 11), sólo una de las dos situaciones siguientes se hará actual:

$$A_F [H_M : \omega_+] \quad \text{y} \quad A_F [P_z : p_+] \quad (2.140)$$

$$A_F [H_M : \omega_-] \quad \text{y} \quad A_F [P_z : p_-] \quad (2.141)$$

<sup>12</sup>Estamos asumiendo aquí que  $\{|+\rangle, |-\rangle, |0\rangle\}$  es una base de  $\mathcal{H}_M$  y que  $H_M$  es no degenerado por simplicidad. Estas hipótesis se discutirán más adelante.

**Mediciones no ideales:** En este caso,  $H_{II}$  no introduce una correlación perfecta. El estado inicial de  $S \cup M$  en la etapa *III* es entonces:

$$|\Psi_{III}\rangle = d_{11} |\uparrow\rangle \otimes |+\rangle + d_{12} |\uparrow\rangle \otimes |-\rangle + d_{21} |\downarrow\rangle \otimes |+\rangle + d_{22} |\downarrow\rangle \otimes |-\rangle \quad (2.142)$$

El estado inicial del subsistema  $M$  es:

$$\rho_M(\Delta t) = \rho_{M11} |+\rangle \langle +| + \rho_{M12} |+\rangle \langle -| + \rho_{M21} |-\rangle \langle +| + \rho_{M22} |-\rangle \langle -| \quad (2.143)$$

donde

$$\rho_{Mij} = \sum_{n=1}^2 d_{ni} d_{nj}^* \quad (2.144)$$

En otras palabras,

$$\rho_M(\Delta t) = \begin{pmatrix} |d_{11}|^2 + |d_{21}|^2 & d_{11}d_{12}^* + d_{21}d_{22}^* \\ d_{12}d_{11}^* + d_{22}d_{21}^* & |d_{12}|^2 + |d_{22}|^2 \end{pmatrix} \quad (2.145)$$

El CCPO de  $M$  está dado nuevamente por los autoestados de  $H_M$  y, dado que  $[H_M, P_z] = 0$ , el Hamiltoniano  $H_M$  y  $P_z$  tienen valores definidos. Pero ahora la medida de la propensión a la actualización de cada uno de estos hechos posibles es

$$p_{\rho_M(\Delta t)}^p(P_F(|+\rangle \langle +|)) = \langle + | \rho_M(\Delta t) | + \rangle = |d_{11}|^2 + |d_{21}|^2 \quad (2.146)$$

$$p_{\rho_M(\Delta t)}^p(P_F(|-\rangle \langle -|)) = \langle - | \rho_M(\Delta t) | - \rangle = |d_{12}|^2 + |d_{22}|^2 \quad (2.147)$$

$$p_{\rho_M(\Delta t)}^p(P_F(|0\rangle \langle 0|)) = \langle 0 | \rho_M(\Delta t) | 0 \rangle = 0 \quad (2.148)$$

En este caso no ideal, la medición de frecuencia resultante de la repetición de esta medición única será fiable si  $|d_{21}|^2 \ll |d_{22}|^2$  y  $|d_{12}|^2 \ll |d_{11}|^2$ ; si no lo es, la medición de frecuencia no brindará la información necesaria para la reconstrucción del estado original del sistema medido. No obstante, el observable  $P_z$  adquiere valor definido en cualquier caso, y ésta es la predicción que puede ser directamente testeada en cada medición única.

Este análisis del experimento de Stern-Gerlach nos permite señalar un hecho acerca de la medición cuántica que no puede ser advertido por los tratamientos formales de este proceso. En el modelo de von Neumann, el observable  $A$  del sistema  $S$  bajo medición está considerado en términos formales y privado de su contenido físico. Entonces, el único papel que cumple la interacción entre  $S$  y el aparato de medición  $M$  es introducir la correlación entre  $A$  y el puntero  $R$ . Sin embargo, las diversas situaciones físicas descritas en el apartado anterior muestran que no tenemos acceso empírico a los observables que son los generadores de simetría del Hamiltoniano del sistema: en el contexto de la medición,  $A$  puede ser uno de esos observables. Éste es precisamente el caso del experimento de Stern-Gerlach, donde  $S_z$  es un generador de la simetría rotacional del Hamiltoniano  $H_S = kS^2$ . Es la interacción con el campo magnético  $B = B_z$

lo que rompe la isotropía del espacio privilegiando la dirección  $z$  y, en consecuencia, rompe la simetría rotacional de  $H_S$ . Este hecho físico en la medición muestra que, cuando el observable  $A$  es un generador de simetría del Hamiltoniano  $H_S$  de  $S$ , la interacción con el aparato  $M$  rompe la simetría y, al mismo tiempo, establece una correlación entre  $A$  y  $R$ . Por lo tanto, desde un punto de vista físico, en estos casos la medición puede ser concebida como un proceso que rompe la simetría del sistema medido y, de esta manera, nos permite reconstruir el estado en términos de un observable empíricamente inaccesible que a su vez es un generador de la simetría rota.<sup>13</sup>

Podemos aclarar también que el hecho de que el aparato de medición tenga un Hamiltoniano, un observable puntero y un observable canónicamente conjugado significa que el espacio de Hilbert de este aparato de medición será, al menos, una representación irreducible de las relaciones de conmutación canónicas, donde se está suponiendo que el Hamiltoniano conmuta con el puntero.

#### 2.6.4. Colas infinitas

Un argumento que marca las dificultades introducidas en las mediciones no ideales es el propuesto por Elby [51] en el contexto del experimento de Stern-Gerlach. Este argumento apunta al hecho de que las funciones de onda en la variable  $z$  en general tienen “colas infinitas” que introducen términos cruzados distintos de cero; entonces, la cola de la función de onda de la parte inferior del haz puede producir una detección en el detector superior, preparado para detectar  $p_+$  y viceversa.

Para ello consideremos este nuevo argumento en detalle, suponiendo una imperfección dada por una colimación no perfecta del haz entrante. En este caso, con el campo magnético apagado, se obtendría una mancha difusa en vez de un punto bien definido sobre la pantalla. Por lo tanto, el estado listo para la medición  $|r_0\rangle = |0\rangle$  tiene que ser reemplazado por una función gaussiana  $|\varphi(z)\rangle$ . Como consecuencia, el proceso de medición se debe expresar como:

$$\begin{aligned} |\Psi_I\rangle &= (c_1 |\uparrow\rangle + c_2 |\downarrow\rangle) \otimes |\varphi(z)\rangle \rightarrow \\ |\Psi_{III}\rangle &= c_1 |\uparrow\rangle \otimes |\varphi_+(z)\rangle + c_2 |\downarrow\rangle \otimes |\varphi_-(z)\rangle \end{aligned} \quad (2.149)$$

donde ahora  $|\varphi_+(z)\rangle$  y  $|\varphi_-(z)\rangle$  son funciones gaussianas que no tienen por qué ser angostas como la inicial  $|\varphi(z)\rangle$ . Llamemos a las amplitudes de los detectores superior e inferior  $\Delta z_+$  y  $\Delta z_-$  respectivamente. Entonces, la larga cola de la función gaussiana  $|\varphi_+(z)\rangle$  llega a  $\Delta z_-$  y la larga cola de  $|\varphi_-(z)\rangle$  llega a  $\Delta z_+$ . Podemos calcular la probabilidad correspondiente a estos cuatro casos:

<sup>13</sup>La idea es que el modelo formal de von Neumann de medición cuántica puede ser complementado por un modelo físico en el cual la medición es una ruptura de simetría que transforma un generador de simetría del Hamiltoniano del sistema en un observable empíricamente accesible. Aunque esta idea parece plausible, debe ser apoyada por un posterior análisis del proceso de medición; este análisis está más allá de los objetivos de la tesis.

$$p(\uparrow, +) = |(\langle \uparrow | \otimes \langle \varphi_+(z) |) | \Psi_{III} \rangle|^2 = |c_1|^2 \int_{\Delta z_+} |\langle \varphi_+(z) | \varphi_+(z) \rangle|^2 dz = |c_{11}|^2 \quad (2.150)$$

$$p(\uparrow, -) = |(\langle \uparrow | \otimes \langle \varphi_-(z) |) | \Psi_{III} \rangle|^2 = |c_1|^2 \int_{\Delta z_-} |\langle \varphi_-(z) | \varphi_+(z) \rangle|^2 dz = |c_{12}|^2 \quad (2.151)$$

$$p(\downarrow, +) = |(\langle \downarrow | \otimes \langle \varphi_+(z) |) | \Psi_{III} \rangle|^2 = |c_2|^2 \int_{\Delta z_+} |\langle \varphi_+(z) | \varphi_-(z) \rangle|^2 dz = |c_{21}|^2 \quad (2.152)$$

$$p(\downarrow, -) = |(\langle \downarrow | \otimes \langle \varphi_-(z) |) | \Psi_{III} \rangle|^2 = |c_2|^2 \int_{\Delta z_-} |\langle \varphi_-(z) | \varphi_-(z) \rangle|^2 dz = |c_{22}|^2 \quad (2.153)$$

donde

$$p_{\rho_M(\Delta t)}^p(P_F(|+\rangle \langle +|)) = p(\uparrow, +) + p(\downarrow, +) = |c_{11}|^2 + |c_{21}|^2 \quad (2.154)$$

$$p_{\rho_M(\Delta t)}^p(P_F(|-\rangle \langle -|)) = p(\uparrow, -) + p(\downarrow, -) = |c_{22}|^2 + |c_{12}|^2 \quad (2.155)$$

De acuerdo al argumento de Elby, estos casos se pueden leer como sigue:

- $|c_{11}|^2$  es la probabilidad de que  $|\uparrow\rangle$  sea detectado por  $\Delta z_+$ .
- $|c_{12}|^2$  es la probabilidad de que  $|\uparrow\rangle$  sea detectado por  $\Delta z_-$  (cola).
- $|c_{21}|^2$  es la probabilidad de que  $|\downarrow\rangle$  sea detectado por  $\Delta z_+$  (cola).
- $|c_{22}|^2$  es la probabilidad de que  $|\downarrow\rangle$  sea detectado por  $\Delta z_-$ .

La IMH muestra que, si se satisface la condición de fiabilidad  $|c_{21}|^2 \ll |c_{11}|^2$  y  $|c_{12}|^2 \ll |c_{22}|^2$ , entonces la colimación, aun no siendo perfecta, es suficiente para efectuar una medición, dado que  $|c_{11}|^2 \simeq |c_1|^2$  y  $|c_{22}|^2 \simeq |c_2|^2$ . Si la función gaussiana original no es muy angosta, o la pantalla se coloca muy lejos del imán, la medición será no fiable dado que los  $c_{ij}$ , con  $i \neq j$ , no son pequeños. No obstante, de acuerdo con la Regla de Actualización, dado que el contexto preferido CCPO está definido por los autoestados de  $H_M$  y el puntero conmuta con  $H_M$ , se obtiene una lectura definida del puntero en  $\Delta z_+$  o  $\Delta z_-$ .

### 2.6.5. Definición de medición

Sobre la base de este análisis de la medición cuántica, podemos ahora formular explícitamente las condiciones que un proceso cuántico debe satisfacer para ser considerado una medición única:

- (i) Debe haber dos sistemas cuánticos: un sistema a medir,  $S : (\mathcal{O}_S \subseteq \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_S, H_S)$ , y un aparato de medición,  $M : (\mathcal{O}_M \subseteq \mathcal{H}_M \otimes \mathcal{H}_M, H_M)$  que no interactúan en un tiempo  $t < 0$ .
- (ii) El aparato  $M$  debe construirse de tal manera que tenga un observable  $R \in \mathcal{O}_M$  tal que  $[H_M, R] = 0$ , tenga, al menos, la misma degeneración que  $H_M$ , y sus autovalores sean diferentes y macroscópicamente distinguibles.
- (iii) Desde  $t = 0$  y durante el período  $\Delta t = t_1$ ,  $S$  y  $M$  deben interactuar a través de un Hamiltoniano de interacción  $H_{int} \in \mathcal{O}_S \otimes \mathcal{O}_M$ . La interacción tiene como objetivo a introducir una correlación entre un observable  $A \in \mathcal{O}_S$  de  $S$  y el observable  $R$  de  $M$ .

Nótese que no hemos incluido el requerimiento de correlación perfecta como una condición necesaria para la medición única. De hecho, aun si la correlación no es perfecta, en la etapa *III* la energía del sistema  $M$  siempre posee un valor definido y, en consecuencia, el puntero  $R$  también adquiere siempre un valor definido. Sin embargo, a pesar del hecho de que siempre se obtiene una lectura definida del puntero en cada medición única, la medición de frecuencia resultante de la repetición de estas mediciones únicas no siempre será fiable. Si el Hamiltoniano de interacción introduce una correlación imperfecta de tal manera que

$$|\Psi_I\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle \otimes |r_0\rangle \rightarrow |\Psi_{III}\rangle = \sum_{i,j} d_{ij} |a_i\rangle \otimes |r_j\rangle \quad (2.156)$$

entonces

- La medición de frecuencia será *fiable* sólo cuando los coeficientes  $d_{ij}$ , con  $i \neq j$ , sean suficientemente pequeños como para que  $|d_{ii}|^2 \simeq |c_i|^2$ .
- Cuando los coeficientes  $d_{ij}$ , con  $i \neq j$ , no son lo suficientemente pequeños, la medición por frecuencia será *no fiable*, porque las frecuencias obtenidas no nos darán el valor  $|c_i|^2$ .

No obstante, en ambos casos cada elemento de la medición de frecuencia es legítimamente una medición única, donde se obtiene una lectura definida del puntero.

Si bien en los apartados anteriores asumimos que el Hamiltoniano  $H_M$  es no degenerado, esta hipótesis puede relajarse de tal manera que

$$H_M = \sum_i \omega_{M_i} P_{M_i} \quad (2.157)$$

donde los autoproyectores  $P_{M_i}$  no necesitan ser de una dimensión. En este caso, el CCPO es  $\{P_{M_i}\}$ . Entonces que el puntero tenga valores definidos requiere que  $R$  tenga, al menos, la misma degeneración -las mismas simetrías- que  $H_M$  :

$$H_M = \sum_i r_i P_{M_i} \quad (2.158)$$

Sin embargo, en la práctica efectiva de la física, el aparato de medición es un sistema macroscópico, cuyo Hamiltoniano es el resultado de la interacción de un número inmenso de grados de libertad. Dado que en general las simetrías se rompen debido a las interacciones, la simetría del Hamiltoniano del aparato de medición decrecerá con el aumento de la complejidad del sistema. Entonces, un sistema macroscópico con un Hamiltoniano con simetrías es una situación altamente excepcional: en el caso genérico, la energía es la única constante de movimiento de un sistema macroscópico. Como consecuencia, en la práctica  $H_M$  es no degenerado, y  $\{|\omega_{M_i}\rangle\}$  es una base del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_M$  del aparato. Por otro lado, el puntero  $R$  no puede tener el mismo número de autovalores que  $H_M$ , porque el experimentador debe poder discriminar entre ellos (ver, por ejemplo,  $P_z$  en el experimento de Stern-Gerlach, con sus tres autovalores). Esto significa que, en general,  $R$  es un observable colectivo (ver [52], [53]), esto es,  $R$  es un observable altamente degenerado cuyos autoproyectores introducen una suerte de grano-grueso en  $\mathcal{H}_M$ . No obstante, dado que  $[H_M, R] = 0$ , y que  $R$  no tiene más degeneraciones que  $H_M$  (que a su vez, es no degenerado),  $R$  va a ser un observable con valor definido. Más aún, las medidas de propensión invariantes ante desplazamientos temporales de los hechos posibles  $P_F([R : r_i])$  puede calcularse en términos de los autoproyectores  $P_{M_i}$  de  $R$  (ver ec. (2.158)),  $p_{\rho_M}^p(P_F([R : r_i]) = Tr(\rho P_{M_i})$  (ver ec. (2.19)).

La discusión del punto previo a su vez nos permite clarificar ciertas cuestiones que todavía permanecen oscuras en la bibliografía actual acerca de la medición cuántica. Durante las últimas décadas, y bajo la influencia de los trabajos de Zurek y sus colaboradores (ver [54], [55]), la postura de que el aparato de medición necesariamente debe interactuar con el entorno ha sido ampliamente aceptada. Sin embargo, tal postura, que expresa la base fundamental del enfoque de decoherencia inducida por el entorno, enfrenta el desafío conceptual de dar una definición precisa de un sistema cuántico, un desafío que no ha podido ser resuelto en su contexto teórico. Se ha argumentado [56] que esta aproximación a la decoherencia es confusa, dado que no tiene en cuenta el hecho de que un sistema cuántico aislado, que evoluciona unitariamente, puede ser particionado de diferentes maneras sobre la base de los observables que son considerados relevantes e irrelevantes en cada caso (ver [28], [29] y [53]): cada partición lleva a partes que evolucionan no unitariamente, y que pueden o no decoherir. Por lo tanto, la decoherencia parece ser un fenómeno relativo al espacio de observables relevantes seleccionados en cada situación particular.

En contraste con la visión de Zurek, la IMH ofrece una definición de sistema cuántico que es precisa y, al mismo tiempo, no contradice el Postulado Dinámico de la mecánica cuántica. Con esta definición en mente, el aparato de medición no puede ser concebido como un dispositivo material y macroscópico rodeado

de un baño de partículas que interactúan con él. El aparato de medición es el sistema cuántico  $M$  completo que interactúa con el sistema a medir  $S$ : éste es el sistema que tiene un puntero  $R$  que conmuta con su Hamiltoniano, que en general, es no degenerado. Como hemos dicho, en el caso genérico,  $M$  es un sistema macroscópico con un enorme número de grados de libertad, y  $R$  debe ser un observable colectivo y empíricamente accesible que juega el papel de puntero; ésta es la razón por la cual la gran cantidad de grados de libertad correspondientes a la degeneración de  $R$  son concebidos como un entorno interno por el enfoque ortodoxo de la decoherencia (ver [52], [53]). A su vez, el requerimiento  $[H_M, R] = 0$  tiene un significado preciso: es esencial para garantizar el comportamiento estacionario de  $R$ . Si esto no sucediera debido a una interacción incontrolable entre el dispositivo macroscópico y un baño externo, la lectura de  $R$  cambiaría constantemente y la medición sería imposible. Es aquí donde las habilidades del físico experimental juegan un papel esencial: debe ser capaz de diseñar un arreglo experimental tal que los grados de libertad incontrolables del sistema completo que interactúa con el sistema medido no afecten significativamente al carácter estacionario del puntero. Este objetivo puede ser logrado por diferentes vías: construyendo un dispositivo macroscópico lo suficientemente cerrado, haciendo que el Hamiltoniano de este dispositivo sea mayor (en el sentido de su norma) que la suma de los Hamiltonianos correspondientes al entorno externo y al Hamiltoniano de interacción. Pero, en cualquier caso, la medición debe ser una situación controlada donde el comportamiento del observable  $R$  pueda ser usado para obtener información significativa acerca del sistema  $S$ .

### 2.6.6. Ensamblés y mediciones de estado

De acuerdo con la interpretación por ensambles de la mecánica cuántica, la teoría no describe sistemas aislados, sino ensambles de sistemas: la asignación de probabilidades sólo tiene sentido para los ensambles (ver [57]). Desde la perspectiva de la IMH, el estado cuántico, sea puro o mezcla, se refiere a un sistema único, y las probabilidades introducidas en la teoría miden la propensión a la actualización de los hechos posibles involucrados en un sistema único.

Sin embargo, queda claro que las predicciones probabilísticas sólo pueden testearse por medio de frecuencias o de una colección de sistemas idénticos, esto es, un ensamble: una medición de frecuencia, cuyo propósito es obtener los valores  $|c_i|^2$  del estado medido, es una repetición de mediciones únicas en un ensamble. En general, las predicciones estadísticas de la teoría, como valores medios de los observables en un dado estado, pueden ser empíricamente testeadas sólo en ensambles.

Cuando el concepto de ensamble se pone en juego, pueden comprenderse no sólo las mediciones de frecuencia, sino también las mediciones de estado. En efecto, hasta este punto hemos analizado sólo las mediciones únicas y de frecuencia, en el caso en que el sistema  $S$  está inicialmente en un estado puro  $|\Psi_S\rangle$ :

$$|\Psi_S\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle \quad (2.159)$$

En este caso, una medición de frecuencia, si es fiable, suministrará, al menos aproximadamente, los valores  $|c_i|^2$ . Pero el mismo análisis puede hacerse en el caso general, donde el estado inicial de  $S$  se expresa como  $\rho_S$  (estado puro o mezcla):

$$\rho_S = \sum_{i,j} \rho_{ij} |a_i\rangle \langle a_j| \quad (2.160)$$

En este caso, la medición de frecuencia, si es fiable, suministrará, al menos aproximadamente, los valores de los coeficientes  $\rho_{ii}$  de la diagonal de  $\rho_S$  en la base  $\{|a_i\rangle\}$  (donde  $\rho_{ii} = |c_i|^2$  si  $\rho_S = |\Psi_S\rangle \langle \Psi_S|$ ). Para este propósito, el observable  $A$  de  $S$  es:

$$A = \sum_i a_i |a_i\rangle \langle a_i| \quad (2.161)$$

y el aparato  $M$ , con su Hamiltoniano  $H_M$  y el puntero  $R$  tal que  $[H_M, R] = 0$ , interactúa con el sistema  $S$  a través del Hamiltoniano de interacción  $H_{int}$  :

$$H_{int} = -\frac{\lambda \hbar}{t_1} (A \otimes P^R) \quad (2.162)$$

Pero si también queremos saber, al menos aproximadamente, los restantes coeficientes  $\rho_{ij}$  con  $i \neq j$ , debemos efectuar mediciones de frecuencia, donde se usen los observables  $B_{ij}$  y  $C_{ij}$  de  $S$  (ver [26]):

$$B_{ij} = \frac{1}{2}(|a_i\rangle \langle a_j| + |a_j\rangle \langle a_i|) \quad C_{ij} = \frac{1}{2}(|a_i\rangle \langle a_j| - |a_j\rangle \langle a_i|) \quad (2.163)$$

dado que<sup>14</sup>

$$\langle B_{ij} \rangle_{\rho_S} = Tr(\rho_S B_{ij}) = \frac{1}{2}(\rho_{ij} + \rho_{ji}) = \text{Re}(\rho_{ij}) \quad (2.164)$$

$$\langle C_{ij} \rangle_{\rho_S} = Tr(\rho_S C_{ij}) = \frac{1}{2}(\rho_{ij} - \rho_{ji}) = \text{Im}(\rho_{ij}) \quad (2.165)$$

En este caso, todas las mediciones de frecuencia se efectúan sobre el mismo ensamble, esto es, sobre una colección de sistemas idénticos en el mismo estado  $\rho_S$ . Sin embargo, cada medición de frecuencia requiere su propio arreglo experimental. En particular, el aparato  $M$  debe ser construido de tal manera que su interacción con el sistema  $S$  se efectúe a través de un Hamiltoniano de interacción  $H_{int}^{B_{ij}}$  o  $H_{int}^{C_{ij}}$  tal que

<sup>14</sup>El cálculo de los coeficientes  $\rho_{ii}$  puede ser visto desde esta perspectiva, considerando al observable  $A$  de la ec. (2.161) como  $A = \sum_i a_i A_{ii}$ , donde  $A_{ii} = |a_i\rangle \langle a_i|$ . Entonces  $\langle A_{ii} \rangle_{\rho_S} = Tr(\rho_S A_{ii}) = \langle a_i | \rho_S | a_i \rangle = \rho_{ii}$ , es, un caso particular de la ec.(2.164).



$$H_{int}^{B_{ij}} = -\frac{\lambda\hbar}{t_1}(B_{ij} \otimes P^R) \quad H_{int}^{C_{ij}} = -\frac{\lambda\hbar}{t_1}(C_{ij} \otimes P^R) \quad (2.166)$$

Estos Hamiltonianos de interacción introducen las correlaciones deseadas entre los autoestados de los observables  $B_{ij}$  y  $C_{ij}$  de  $S$ , respectivamente, y los autoestados del observable puntero  $R$  de  $M$ .

Resumiendo, si queremos reconstruir el estado  $\rho_S$  de un sistema  $S$ , debemos efectuar una medición de estado sobre un ensamble de sistemas idénticos a  $S$ . Tal medición de estado consiste en una colección de mediciones de frecuencia, cada una de las cuales se basa en la correlación entre el observable puntero del aparato  $M$  y un observable particular del sistema  $S$ , donde los observables de  $S$  usados para este propósito no sólo son diferentes, sino que también conmutan con cada uno de los Hamiltonianos. La información obtenida por medio de esta medición de estado es suficiente para reconstruir el estado  $\rho_S$  de  $S$ .

Finalizando entonces con este capítulo, en las secciones previas se ha dado una descripción de la medición cuántica, en la cual el valor definido del puntero se explica en términos de la actualización de uno de los hechos posibles definidos por el contexto preferido del aparato. Una medición es una situación controlada, donde el físico experimental puede seleccionar el conjunto de hechos posibles en el cual la actualización ocurre, manipulando el aparato  $M$ , y en particular, su Hamiltoniano  $H_M$ . No obstante, en la naturaleza, ciertos hechos posibles se hacen actuales sin la intervención humana. Más aún, en ciertas situaciones los sistemas cuánticos tienen características que admiten una descripción clásica. Éste es el problema del límite clásico, es decir, de la búsqueda de la explicación de cómo y bajo qué condiciones una descripción clásica emerge a partir de una descripción cuántica subyacente.

Actualmente, hay un gran consenso acerca de la idea de que el comportamiento clásico proviene del proceso llamado *decoherencia*. De acuerdo con la postura ortodoxa, conocida como *decoherencia inducida por el entorno (EID)*, la decoherencia es el resultado de la interacción de un sistema cuántico abierto con su entorno, que selecciona los candidatos a estados clásicos ([54], [55]). En trabajos previos se ha presentado una propuesta diferente, llamada *decoherencia auto-inducida (SID)*, de acuerdo con la cual un sistema cuántico cerrado puede decoherir bajo ciertas condiciones bien definidas ([58], [59], [60], [61]). Desde esta perspectiva se ha desarrollado un formalismo preciso del límite clásico de la mecánica cuántica, que muestra que, si el sistema es lo suficientemente macroscópico, luego de la decoherencia auto-inducida puede ser descrito como un sistema clásico estadístico ([62], [63], [64], [65]). En el Apéndice se introduce la propuesta SID de la decoherencia (A.2), la relevancia del Hamiltoniano para su definición, el límite clásico y una aplicación directa en cosmología.

## Capítulo 3

# Interpretación modal-Hamiltoniana y covariancia Galileana de la mecánica cuántica

Como dijo alguna vez Levy-Leblond [66], aunque es usual leer que la mecánica cuántica no relativista es covariante, e incluso invariante, bajo las transformaciones de Galileo, este tema ha sido poco tratado en la bibliografía standard de la teoría. Por ejemplo, las relaciones de conmutación del grupo de Galileo ni siquiera son citadas en los libros de texto de la materia (una excepción es [26]). Este hecho tiene consecuencias no deseadas. Por un lado, los significados de los conceptos de invariancia y covariancia no están claramente elucidados. Por otro lado, queda muy poco claro en qué sentido la covariancia o invariancia pueden ser predicadas de la mecánica cuántica.

Esta situación tiene su contraparte en el campo de las interpretaciones de la mecánica cuántica: la relevancia del grupo de Galileo es raramente discutida en la inmensa cantidad de bibliografía sobre este tema. La premisa general que subyace a este capítulo es que la relación entre la interpretación y las transformaciones de Galileo necesita ser seriamente analizada: el hecho de que la teoría es covariante ante el grupo de Galileo no garantiza la misma propiedad para la interpretación dado que, en general, las interpretaciones agregan postulados interpretativos a la estructura formal de la teoría.

El objetivo primordial entonces es encarar esta cuestión analizando bajo qué condiciones la interpretación modal-Hamiltoniana satisface las restricciones físicas impuestas por el grupo de Galileo. Con este fin, se comenzará clarificando los conceptos de covariancia e invariancia y definiendo el problema en términos precisos. Desde este punto de vista, y teniendo en cuenta las principales propiedades del grupo de Galileo, se considerará en qué sentido la mecánica

cuántica es covariante y bajo qué condiciones es invariante ante las transformaciones del grupo. Este marco de trabajo conceptual nos proveerá de las herramientas para estudiar los resultados de la aplicación de las transformaciones de Galileo a los postulados interpretativos de la IMH (ver [3], [4], [5]).

### 3.1. Covariancia e invariancia

Como hemos señalado, la covariancia e, incluso, la invariancia (ver [26]) de la mecánica cuántica bajo las transformaciones de Galileo usualmente se asumen como un hecho bien conocido. No obstante, sólo en pocos casos estas suposiciones están basadas en elucidaciones conceptuales de las nociones implicadas: los significados de las palabras invariancia y covariancia se dan por sentado. Por lo tanto, es necesario e importante comenzar por clarificar estos conceptos.

Un ítem genérico se dice simétrico con respecto a cierta transformación cuando es invariante ante esa transformación. Sin embargo, esto no explica qué tipo de ítems pueden estar dotados de la propiedad de invariancia. Como se dice en [67], el primer paso es distinguir entre simetrías de los objetos (estados y operadores) y simetrías de las leyes: aunque ambas estén relacionadas, no deben confundirse. De hecho, como veremos, la simetría de las leyes no implica la simetría de los objetos (estados y operadores) contenidos en la ley.

En segundo lugar, es necesario decir algunas palabras acerca del concepto de covariancia. En la bibliografía no hay consenso acerca de lo que la covariancia significa. En general, el término invariancia sólo se aplica a objetos matemáticos y el término covariancia se aplica a ecuaciones o leyes. En esta tesis no se seguirá este camino, ya que los correspondientes conceptos deben ser entendidos de tal manera que la diferencia entre invariancia y covariancia de una ley tengan sentido. A grandes rasgos, veremos que una ley es covariante bajo ciertas transformaciones cuando su forma permanece sin cambios luego de la transformación (ver [67], [68]). Desde este punto de vista, podemos introducir las definiciones pertinentes.

Consideremos un conjunto  $\mathcal{X}$  de objetos matemáticos  $X_i \in \mathcal{X}$ , y un grupo  $G$  de transformaciones  $T_\alpha \in G$ , donde  $T_\alpha : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  actúa sobre  $X_i$  como  $X_i \rightarrow X'_i$ . Un objeto  $X_j \in \mathcal{X}$  es invariante ante la transformación  $T_\alpha$  si, para esa transformación,  $X'_j = X_j$ ; a su vez,  $X_j \in \mathcal{X}$  es invariante bajo el grupo  $G$  si es invariante bajo todas las transformaciones  $T_\alpha \in G$ . En las teorías físicas, los objetos a los cuales las transformaciones se aplican son usualmente estados  $s$ , observables  $O$  y operadores diferenciales  $D$ , y cada transformación actúa sobre ellos de una manera particular. Por ejemplo, en las leyes fundamentales de la mecánica Hamiltoniana -las ecuaciones de Hamilton-, los estados son  $s = (q, p)$ , el observable relevante  $O$  es el Hamiltoniano  $H$ , y los operadores diferenciales son  $D_1 = \frac{d}{dt}$ ,  $D_2 = \frac{\partial}{\partial p}$  y  $D_3 = \frac{\partial}{\partial q}$ . La transformación de inversión temporal, que actúa sobre la variable  $t$  como  $t \rightarrow -t$ , invierte todos los objetos cuya definición en función de  $t$  no es invariante bajo la transformación:

$$\begin{aligned}
s = (q, p) \rightarrow s' = (q', p') = (q, -p) & \quad O = H \rightarrow O' = H' & (3.1) \\
D_1 = \frac{d}{dt} \rightarrow D'_1 = \frac{d'}{dt'} = -\frac{d}{dt} & \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial p} \rightarrow D'_2 = \frac{\partial'}{\partial p'} = -\frac{\partial}{\partial p} \\
D_3 = \frac{\partial}{\partial q} \rightarrow D'_3 = \frac{\partial'}{\partial q'} = \frac{\partial}{\partial q}
\end{aligned}$$

En la ley fundamental de la mecánica newtoniana, la segunda ley de Newton, el estado es  $s = x$ , los observables relevantes son  $O_1 = F$  y  $O_2 = m$  y el operador diferencial es  $D = \frac{d^2}{dt^2}$ . Bajo la transformación de inversión temporal, estos objetos se transforman de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
s = x \rightarrow s' = x' = x & \quad D = \frac{d^2}{dt^2} \rightarrow D' = \frac{d^2}{dt'^2} = \frac{d^2}{dt^2} & (3.2) \\
O_1 = F \rightarrow O'_1 = F' & \quad O_2 = m \rightarrow O'_2 = m'
\end{aligned}$$

En física, estos objetos se combinan en ecuaciones que representan las leyes de la teoría. En particular, una ley dinámica se representa por una ecuación diferencial  $E(s, O_i, D_j) = 0$  que incluye el estado  $s$ , ciertos observables  $O_i$  y ciertos operadores diferenciales  $D_j$ . Cuando una transformación se aplica a estos objetos, la ley puede permanecer exactamente igual, esto es, su forma permanece invariante ante la transformación. También podría ser el caso que la ecuación permaneciera igual sólo cuando hemos cambiado los estados, y esto implica que la evolución de los estados no es afectada por la transformación. Siendo más precisos, sea  $L$  una ley representada por una ecuación diferencial  $E(s, O_i, D_j) = 0$  y sea  $G$  un grupo de transformaciones  $T_\alpha \in G$  actuando sobre los objetos implicados en la ecuación como  $s \rightarrow s'$ ,  $O_i \rightarrow O'_i$  y  $D_j \rightarrow D'_j$ ,  $L$  es covariante bajo la transformación  $T_\alpha$  si  $E(s', O'_i, D'_j) = 0$  y  $L$  es invariante bajo la transformación  $T_\alpha$  si  $E(s', O_i, D_j) = 0$ . A su vez,  $L$  es covariante -invariante- bajo el grupo  $G$  si es covariante -invariante- bajo todas las transformaciones  $T_\alpha \in G$ . Un grupo  $G$  de transformaciones se dice que es un grupo de simetría de la teoría si las leyes de la teoría son covariantes bajo el grupo  $G$ ; esto significa que las leyes preservan su validez aun cuando las transformaciones del grupo se aplican a los objetos implicados. Es fácil ver que las ecuaciones de Hamilton,  $\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}$  y  $\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}$ , son covariantes ante la inversión temporal cuando  $H' = H$ , condición que se cumple cuando  $H$  es independiente del tiempo; no obstante, estas ecuaciones no son invariantes ante la inversión temporal porque  $\frac{dp'}{dt'} \neq -\frac{\partial H}{\partial q}$ . A su vez, la segunda ley de Newton es covariante ante la inversión temporal cuando  $F' = F$ , condición que se cumple cuando  $F$  es independiente del tiempo, y también es invariante cuando  $\frac{d^2 x'}{dt'^2} = \frac{F}{m}$ .

Es claro que, cuando una ley es covariante ante una transformación, y los observables y operadores diferenciales contenidos en ella son invariantes ante la misma transformación, la ley también es invariante ante la transformación: éste es el caso de la segunda ley de Newton ante la inversión temporal. No obstante,

ésta no es la única manera de obtener la invariancia de una ley; volveremos sobre esto para el caso particular de la ecuación de Schrödinger más adelante.

Algunos autores prefieren hablar de simetría de una ley en vez de covariancia de una ley. Por ejemplo, en [69] se define simetría en el lenguaje de la teoría de modelos. Para ello consideremos  $\mathcal{M}$  como el conjunto de modelos de una cierta estructura matemática, y consideremos  $\mathcal{M}_L \subset \mathcal{M}$  como el subconjunto de modelos que satisfacen la ley  $L$ . La simetría de una ley  $L$  es un mapeo  $S: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  que preserva  $\mathcal{M}_L$ , esto es, para cualquier  $m \in \mathcal{M}_L$ ,  $m' = S(m) \in \mathcal{M}_L$ . En nuestro caso, donde  $L$  se representa con una ecuación diferencial  $E(s, O_i, D_j) = 0$ , cada modelo  $m \in \mathcal{M}_L$  corresponde a una solución  $s = F(O_i, s_o)$  de la ecuación, representando una posible evolución del sistema. Por lo tanto, la covariancia de  $L$  ante la transformación  $T$ , esto es,  $E(s', O'_i, D'_j) = 0$ , implica que  $s' = F'(O'_i, s_o)$  es también una solución de la ecuación y, que, entonces, esta corresponde a un modelo  $m' \in \mathcal{M}_L$ . Esto significa que la definición de covariancia dada en esta tesis y la definición de simetría en teoría de modelos son equivalentes.

Es interesante notar que la covariancia de una ley dinámica, representada por una ecuación diferencial, no implica la invariancia de todas las posibles evoluciones, representadas por las soluciones de la ecuación diferencial ([71], [70]). De hecho, la covariancia de  $L$  representada por  $E(s, O_i, D_j) = 0$  implica que  $s = F(O_i, s_o)$  y  $s' = F'(O'_i, s_o)$  son ambas soluciones de la ecuación, pero esto no implica que  $s = s'$ ; en el lenguaje de la teoría de modelos, la simetría de  $L$  no implica que  $m = m'$ . No obstante, dado que la invariancia de  $L$  significa que  $E(s', O_i, D_j) = 0$ , en este caso  $s = s' = F(O_i, s_o)$  o, en el lenguaje de la teoría de modelos,  $m = m'$ .

Sobre la base de estos conceptos, podemos ahora definir explícitamente las condiciones de covariancia e invariancia de las leyes fundamentales de la mecánica cuántica. Dado un grupo  $G$  cuyas transformaciones actúan sobre los estados, observables y operadores diferenciales como  $|\varphi\rangle \rightarrow |\varphi'\rangle$ ,  $O \rightarrow O'$  y  $\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{d'}{dt}$ , la ecuación de Schrödinger es covariante cuando

$$\frac{d'}{dt} |\varphi'\rangle = -i\hbar H' |\varphi'\rangle \quad (3.3)$$

y es invariante cuando

$$\frac{d}{dt} |\varphi'\rangle = -i\hbar H |\varphi'\rangle \quad (3.4)$$

A continuación se estudiará la forma en que cambia la ley de evolución de los estados cuánticos cuando se aplican las transformaciones de Galileo.

## 3.2. El grupo de Galileo en mecánica cuántica

Se sabe que las transformaciones de las coordenadas espacio-temporales admiten dos interpretaciones. Bajo la interpretación activa, la transformación corresponde a un cambio de un sistema cuántico a otro sistema cuántico; bajo la interpretación pasiva, la transformación consiste en un cambio en el punto de

vista, el sistema de referencia, desde el cual se describe el sistema (ver [67]). No obstante, en ambos casos la invariancia de la ley fundamental de la teoría bajo el grupo de simetría implica que el comportamiento del sistema no se altera por la aplicación de la transformación: en el lenguaje de la interpretación activa, el sistema original y el transformado son equivalentes; en el lenguaje de la interpretación pasiva, el sistema de referencia original y el transformado son equivalentes.

También se sabe que el grupo de Galileo es el grupo de simetría de la mecánica clásica y la mecánica cuántica no relativista. De acuerdo con el lenguaje de la interpretación pasiva, la invariancia de las leyes dinámicas implica la equivalencia entre sistemas de referencia inerciales, esto es, sistemas de referencia desplazados temporalmente, desplazados espacialmente, rotados espacialmente o trasladados uniformemente con respecto a otro sistema de referencia: la aplicación de las transformaciones de Galileo no introduce una modificación en la situación física, solamente expresa un cambio en la perspectiva desde la cual se describe el sistema. Por ejemplo, si una partícula clásica originalmente descrita en el sistema de referencia  $RF^1$  es a su vez descrita en un sistema de referencia diferente  $RF'$ , la invariancia de la segunda ley de Newton significa que la evolución temporal de la partícula no cambia cuando se la describe en el nuevo sistema de referencia.

El significado físico de la acción de las transformaciones de Galileo está bien entendido en mecánica clásica. Sin embargo, como se ha apuntado antes, este tema ha sido poco discutido en el campo de la mecánica cuántica, tal vez bajo la hipótesis de que este tópico es tan sencillo como en el caso clásico. Pero la mecánica cuántica resulta ser muy peculiar en estas cuestiones, en particular, las propiedades de la ecuación de Schrödinger bajo el grupo de Galileo tienen consecuencias relevantes para la interpretación. Como se afirma en [72], cualquier interpretación que selecciona el conjunto de observables con valor definido en un sistema cuántico en un dado estado, está comprometida a considerar cómo este conjunto se transforma bajo el grupo de Galileo. El estudio de estas cuestiones es particularmente importante en el caso de las interpretaciones realistas, pues conciben los observables con valores definidos como magnitudes físicas que objetivamente adquieren un valor actual entre todos sus posibles valores: la actualización de uno de los posibles valores debe ser un hecho objetivo. Por lo tanto, cuando la invariancia de la ley se cumple, el conjunto de observables con valor definido de un sistema debería permanecer invariante ante las transformaciones de Galileo: desde un punto de vista realista, sería inaceptable que ese conjunto cambiara como un mero resultado del cambio de perspectiva desde la cual se describe el sistema.

Por supuesto, para abordar este tema en un dado marco interpretativo, se requiere una definición precisa de la regla que asigna valores definidos a los observables: por ejemplo, el vínculo autoestado-autovalor [73], la regla de Kochen-Dieks basada en la descomposición biortogonal ([74], [75]), la regla de Vermaas-Dieks basada en la resolución espectral del operador densidad reducido ([76],

---

<sup>1</sup>Las siglas significan “reference frame”.

[77]), o la regla de la IMH basada en el Hamiltoniano del sistema [1]. Pero también se necesita una comprensión clara de la aplicación de las transformaciones de Galileo en mecánica cuántica. Por esta razón, procederemos a desarrollar este punto, ya que en la bibliografía no se encuentra completamente desarrollado.

El grupo de Galileo es un grupo de Lie cuya álgebra se puede representar en el espacio de Hilbert como un álgebra de operadores unitarios (ver Apéndice A). Esta representación es proyectiva, en el sentido de que admite una fase no trivial en los estados; por lo tanto, el álgebra tiene una extensión central no trivial dada por un generador abeliano del grupo  $U(1)$ . Este generador es la masa y dado que conmuta con todo el grupo de Galileo, por el segundo lema de Schur, debe ser proporcional a la identidad, esto es,  $M = mI$  [78]. Las relaciones de conmutación, entonces, son las siguientes:

$$\begin{aligned}
[P_i, P_j] &= 0 & (3,5_a) & & [K_i^{(G)}, P_j] &= i\delta_{ij}M & (3,5_f) \\
[K_i^{(G)}, K_j^{(G)}] &= 0 & (3,5_b) & & [P_i, H] &= 0 & (3,5_g) \\
[J_i, J_j] &= i\varepsilon_{ijk}J^k & (3,5_c) & & [J_i, H] &= 0 & (3,5_h) \\
[J_i, P_j] &= i\varepsilon_{ijk}P^k & (3,5_d) & & [K_i^{(G)}, H] &= iP_i & (3,5_i) \\
[J_i, K_j^{(G)}] &= i\varepsilon_{ijk}K^{(G)k} & (3,5_e) & & & & 
\end{aligned} \tag{3.5}$$

La extensión central no trivial del álgebra de Galileo tiene tres operadores de Casimir que conmutan con todos los generadores del grupo: ellos son el operador masa  $M$ , el operador  $S^2$  y el operador energía interna  $W = H - \frac{P^2}{2M}$ . Los autovalores de los operadores de Casimir etiquetan las representaciones irreducibles del grupo; por lo tanto, en cada representación irreducible, los operadores de Casimir son múltiplos de la identidad:  $M = mI$ ,  $S^2 = s(s+1)I$ , donde  $s$  es el autovalor del spin  $S$  y  $W = wI$ .

Teniendo en cuenta que por cada transformación del grupo de Galileo  $T_\alpha$  debe haber una transformación de los estados y de los observables (A.40), estamos en condiciones de considerar la covariancia e invariancia galileanas de la mecánica cuántica analizando cómo las transformaciones de Galileo afectan la ecuación de Schrödinger:

$$\frac{d|\varphi\rangle}{dt} = -iH|\varphi\rangle \tag{3.6}$$

Si premultiplicamos ambos miembros de la ecuación por  $U = e^{iKs}$ , usamos la propiedad  $UU^{-1} = I$ , y luego sumamos  $(\frac{dU}{dt})|\varphi\rangle$  a ambos miembros, se obtiene

$$U\frac{d|\varphi\rangle}{dt} + \frac{dU}{dt}|\varphi\rangle = -iUHU^{-1}U\frac{d|\varphi\rangle}{dt} + \frac{dU}{dt}|\varphi\rangle \tag{3.7}$$

Por lo tanto,

$$\frac{d(U|\varphi\rangle)}{dt} = -i[UHU^{-1} + i\frac{dU}{dt}U^{-1}]U|\varphi\rangle \tag{3.8}$$

Si recordamos la acción de las transformaciones de Galileo sobre estados y observables (ver Apéndice A.1), podemos escribir (3.8) como

$$\frac{d(|\varphi'\rangle)}{dt} = -i[H' + i\frac{dU}{dt}U^{-1}]|\varphi'\rangle \quad (3.9)$$

Teniendo en mente esta ecuación, analizaremos la invariancia y covariancia de la ecuación de Schrödinger separadamente.

### 3.2.1. Invariancia de la ecuación de Schrödinger

Como hemos visto, cuando no hay campos externos actuando sobre el sistema, el grupo de Galileo se define por las relaciones de conmutación (3.5). Sin embargo, hay una diferencia entre los generadores de boost  $K_i$  y los restantes generadores.

En un sistema cerrado y con energía constante, libre de campos externos, el Hamiltoniano  $H$  es independiente del tiempo y los generadores  $P_i$  y  $J_i$  son constantes de movimiento (ver ec.(3.5g,h)). Entonces, para los desplazamientos temporal, espaciales y las rotaciones, tenemos que  $\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}(e^{iKs}) = 0$ , donde  $K$  y  $s$  representan los distintos generadores y sus parámetros, menos el boost. Como consecuencia, la ecuación (3.9) resulta:

$$\frac{d|\varphi'\rangle}{dt} = -iH'|\varphi'\rangle \quad (3.10)$$

Además, para estas transformaciones  $H' = H$  pues :

$$\text{--Desplazamiento temporal: } H' = e^{iHt}He^{-iHt} = H \text{ dado que } [H, H] = 0 \quad (3.11)$$

$$\text{--Desplazamiento espacial: } H' = e^{iP_i a_i}He^{-iP_i a_i} = H \text{ dado que } [P_i, H] = 0 \quad (3.12)$$

$$\text{--Rotación espacial: } H' = e^{iJ_i \theta_i}He^{-iJ_i \theta_i} = H \text{ dado que } [J_i, H] = 0 \quad (3.13)$$

Aplicando estos resultados en la ecuación (3.10), se prueba la invariancia de la ecuación de Schrödinger ante desplazamientos temporales, desplazamientos espaciales y rotaciones espaciales cuando no hay campos externos actuando sobre el sistema, esto es:

$$\frac{d|\varphi'\rangle}{dt} = -iH|\varphi'\rangle \quad (3.14)$$

El caso de los boost es diferente a los casos previos, dado que el Hamiltoniano no es boost-invariante aun cuando el sistema está libre de campos externos (ver [79], lo mismo sucede en mecánica clásica, ver [80]). En efecto, ante la transformación de boost correspondiente a una velocidad  $v$ , el Hamiltoniano  $H$  cambia como:

$$H' = e^{iK_i v_i}He^{-iK_i v_i} \neq H \text{ dado que } [K_i, H] = iP_i \neq 0 \quad (3.15)$$



y el generador  $G_i$  es

$$K_i = MQ_i = M(Q_{oi} + V_it) = MQ_{oi} + P_it \quad (3.16)$$

Dado que  $G_i$  no es independiente del tiempo,  $\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}(e^{iK_iv_i}) \neq 0$  y la ec. (3.9) resulta ser:

$$\frac{d|\varphi'\rangle}{dt} = -i \left[ H' + i \frac{d}{dt}(e^{iK_iv_i})e^{-iK_iv_i} \right] |\varphi'\rangle \quad (3.17)$$

Para obtener el valor del corchete en el lado derecho de (3.17) debemos calcular ambos términos. Usando la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff,

$$e^B A e^{-B} = A + [B, A] + \frac{1}{2!} [B, [B, A]] + \frac{1}{3!} [B, [B, [B, A]]] + \dots \quad (3.18)$$

siempre que  $A$  y  $B$  conmuten con el conmutador  $[A, B]$ , el primer término del miembro derecho de (3.17) es:

$$H' = e^{iK_iv_i} H e^{-iK_iv_i} = H + [iK_iv_i, H] + \frac{1}{2!} [iK_iv_i, [iK_iv_i, H]] + \dots \quad (3.19)$$

Por la relación de conmutación (A.66g) tenemos que:

$$[iK_iv_i, H] = iv_i [K_i, H] = -v_i P_i \quad (3.20)$$

entonces

$$[iK_iv_i, [iK_iv_i, H]] = [iK_iv_i, -v_i P_i] = -iv_i^2 [K_i, P_i] \quad (3.21)$$

Por la relación de conmutación (A.66e) se obtiene que

$$-iv_i^2 [K_i, P_i] = v_i^2 M \quad (3.22)$$

El siguiente término en la fórmula (3.18) es el conmutador del boost con el resultado de (3.22) que es la identidad, entonces el resultado dará cero. Por lo tanto, la ec. (3.19) resulta

$$H' = H - v_i P_i + \frac{1}{2} M v_i^2 = H + T_B \quad (3.23)$$

donde  $T_B$  es la contribución del boost a la energía.

A su vez, por medio de la ecuación (3.18) y la relación de conmutación se puede demostrar que

$$P'_i = e^{iK_iv_i} P_i e^{-iK_iv_i} = P_i - M v_i \quad \rightarrow \quad P'_i = P_i + P_{Bi} \quad (3.24)$$

donde  $P_{Bi}$  es la contribución del boost al momento. Recordemos que, cuando no hay campos externos, la energía interna  $W$  es un operador de Casimir; por lo tanto, el Hamiltoniano puede ser descrito como

$$H = \frac{P^2}{2M} + W \quad (3.25)$$

Por medio de las ecuaciones (3.24) y (3.25), es fácil mostrar que el Hamiltoniano transformado puede expresarse como

$$H' = \frac{(P + P_B)^2}{2M} + W \quad (3.26)$$

Por el otro lado, debemos calcular la derivada temporal  $\frac{d}{dt}(e^{iK_i v_i})$  de la ecuación (3.17). Usando la identidad  $e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{[A,B]}{2}}$ , que vale también cuando  $A$  y  $B$  conmutan con el conmutador  $[A, B]$ , y aplicando la relación de conmutación general

$$[P_i, F(Q_j)] = -i \frac{\partial F}{\partial Q_j} \quad (3.27)$$

válida en el álgebra de Galileo por existir un operador posición, se puede demostrar que

$$\frac{d}{dt}(e^{iK_i v_i}) = -i(v_i P_i - \frac{1}{2} M v_i^2) e^{iK_i v_i} \quad (3.28)$$

ya que

$$e^{iK_i v_i} = e^{i(MQ_{oi} + P_i t)} = e^{iMQ_{oi} v_i} e^{-iP_i v_i t} e^{-\left(\frac{i}{2}\right) M v_i^2 t} \quad (3.29)$$

Entonces la derivada temporal se puede calcular sobre (3.29) quedando

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{iK_i v_i}) &= e^{iMQ_{oi} v_i} (-i) P_i v_i e^{-iP_i v_i t} e^{-\left(\frac{i}{2}\right) M v_i^2 t} \\ &+ e^{iMQ_{oi} v_i} e^{-iP_i v_i t} \left(-\frac{i}{2}\right) M v_i^2 e^{-\left(\frac{i}{2}\right) M v_i^2 t} \end{aligned} \quad (3.30)$$

El segundo término del segundo miembro de (3.30) es simplemente  $\left(-\frac{i}{2}\right) M v_i^2 e^{iK_i v_i}$ . Por el otro lado, la exponencial  $e^{iK_u v_i}$  no puede ser directamente reconstruida en el primer término ya que  $[e^{iMQ_{io} v_i}, P_i] \neq 0$ . Este conmutador se puede calcular usando (3.27); por lo tanto,

$$[e^{iMQ_{io} v_i}, P_i] = -[P_i, e^{iMQ_{io} v_i}] = i \frac{\partial}{\partial Q_{io}} (e^{iMQ_{io} v_i}) = -M v_i e^{iMQ_{io} v_i} \quad (3.31)$$

Esto significa que

$$e^{iMQ_{io} v_i} P_i = P_i e^{iMQ_{io} v_i} - M v_i e^{iMQ_{io} v_i} = (P_i - M v_i) e^{iMQ_{io} v_i} \quad (3.32)$$

De este modo, introduciendo (3.32) en (3.30) se obtiene:

$$\frac{d}{dt}(e^{iK_i v_i}) = -i \left[ (P_i - M v_i) v_i + \frac{1}{2} M v_i^2 \right] e^{iK_i v_i} \quad (3.33)$$

que finalmente resulta ser (3.28).

Cuando los resultados (3.23) y (3.28) se introducen en la ecuación (3.17), el término que se suma a  $H$  en  $H'$  se cancela con aquél que proviene del término que contiene la derivada temporal; entonces se puede probar la invariancia de la ecuación de Schrödinger también para las transformaciones de boost:

$$\frac{d|\varphi'\rangle}{dt} = -iH|\varphi'\rangle \quad (3.34)$$

Resumamos los resultados obtenidos hasta este momento. Cuando no hay campos externos actuando sobre el sistema, el Hamiltoniano es invariante ante desplazamientos espaciales, temporales y rotaciones espaciales, pero no ante transformaciones de boost. A pesar de este hecho, la ecuación de Schrödinger es completamente invariante ante el grupo de Galileo, y esto conceptualmente significa que el vector de estado  $|\varphi\rangle$  no “ve” los efectos de la transformación: las evoluciones de  $|\varphi\rangle$  y  $|\varphi'\rangle$  son idénticas. En otras palabras, el comportamiento temporal del sistema es independiente del sistema de referencia usado para la descripción.

Cuando el sistema está afectado por campos externos, la armonía de los resultados previos se pierde. De hecho, los campos modifican la evolución del sistema: por ejemplo, si el sistema estuviera sometido a la acción de un potencial anisótropo, ya no esperaríamos que su comportamiento permaneciera invariante cuando es rotado en el espacio. Pero en la mecánica cuántica no relativista los campos no están cuantizados: ellos no son sistemas cuánticos y, en consecuencia, su acción no puede ser concebida como una interacción entre sistemas. Entonces, el efecto de los campos en el sistema debe ser tenido en cuenta en el Hamiltoniano: los potenciales deberán modificar la forma del Hamiltoniano, porque éste es el único observable involucrado en la ley de evolución temporal. En consecuencia, en presencia de campos, el Hamiltoniano deja de ser el generador de traslaciones temporales: sólo retiene su papel de generador de la evolución dinámica (ver [81], [26]). Esto significa que debemos abandonar las relaciones de conmutación que involucran al Hamiltoniano en (3.5g, f, i): estas relaciones sólo valen con el generador de los desplazamientos temporales  $\frac{d}{dt}$  pero no con el Hamiltoniano :

$$[P_i, H] \neq 0 \quad [J_i, H] \neq 0 \quad [G_i, H] \neq iP_i \quad (3.35)$$

Por lo tanto, ya no podemos garantizar la independencia temporal de los generadores  $P_i$  y  $J_i$ , y el resultado (3.23) no puede ser obtenido sobre la base de la relación de conmutación  $[G_i, H] = iP_i$ . Como consecuencia, en general, la ecuación de Schrödinger pierde su invariancia galileana en presencia de campos externos.

### 3.2.2. Covariancia de la ecuación de Schrödinger

Para analizar la covariancia de la ecuación de Schrödinger, podemos reescribir la ec. (3.9) como

$$\frac{d|\varphi'\rangle}{dt} - \frac{dU}{dt}U^{-1}|\varphi'\rangle = -iH'|\varphi'\rangle \quad (3.36)$$

Es fácil ver que la covariancia se puede obtener cuando el operador diferencial se transforma como

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{d'}{dt} = \frac{d}{dt} - \frac{dU}{dt}U^{-1} \quad (3.37)$$

Esto significa que el operador diferencial transformado  $\frac{d'}{dt}$  es una derivada temporal covariante que denotaremos como  $\frac{D}{Dt}$ , y que hace que la ecuación de Schrödinger sea covariante ante las transformaciones de Galileo en el siguiente sentido:

$$\frac{d'|\varphi'\rangle}{dt} = \frac{D|\varphi'\rangle}{Dt} = -iH'|\varphi'\rangle \quad (3.38)$$

Como hemos visto en el apartado anterior, cuando no hay campos externos aplicados sobre el sistema,  $H$ ,  $P_i$  y  $J_i$  son independientes del tiempo y, en consecuencia,  $\frac{dU}{dt} = 0$ . Por lo tanto, de la ec. (3.37) podemos ver que la derivada temporal es invariante ante desplazamientos temporales, desplazamientos espaciales y rotaciones espaciales, esto es  $\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{d'}{dt} = \frac{d}{dt}$ . Pero para transformaciones de boost éste no es el caso: la covariancia de la ecuación de Schrödinger implica la transformación del operador diferencial como  $\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{D}{Dt}$ . Esto significa que la covariancia ante boost equivale a una especie de “no homogeneidad” del tiempo, que requiere un ajuste covariante de la derivada temporal. Esta conclusión no debe ser una sorpresa dado que, cuando el sistema está descrito en un sistema de referencia  $RF'$  en movimiento uniforme con respecto al sistema de referencia original  $RF$ , el estado transformado por boost depende de un generador que es función lineal en el tiempo (ver ec. (3.16)); entonces, si la ecuación de Schrödinger es válida en  $RF'$  donde el estado es  $|\varphi'\rangle$ , la derivada temporal transformada debe ajustarse para compensar la dependencia temporal de la transformación del estado.

El caso de las transformaciones de boost ilustra un hecho comentado en un apartado anterior: no hay una única manera de obtener la invariancia de la ley. Cuando el sistema está libre de campos externos, la ecuación de Schrödinger es invariante ante transformaciones de boost, a pesar del hecho que el Hamiltoniano y el operador diferencial  $\frac{d}{dt}$  no son objetos invariantes ante boost. Es decir, no sólo es posible que una ley sea invariante cuando es covariante y además todos los objetos involucrados son invariantes. El caso del boost ejemplifica un caso donde los objetos de la ley no son invariantes pero se compensan para dar una ley invariante.

Cuando hay campos externos aplicados al sistema, la ec. (3.38) es aún válida. Pero como ahora el Hamiltoniano incluye la acción de los campos, el Hamiltoniano transformado  $H' = UHU^{-1}$  debe ser calculado en cada caso particular. Las condiciones que deben satisfacer los potenciales externos para preservar la covariancia de la ecuación de Schrödinger pueden ser deducidas conociendo la

dependencia precisa del Hamiltoniano respecto de dichos campos (ver [72] y [82]). Sin embargo, éste no es el punto relevante de la discusión; para nuestros propósitos es suficiente ver cómo los operadores son transformados por el grupo de Galileo y en qué sentido la ecuación de Schrödinger es covariante bajo el grupo.

### 3.2.3. Transformación galileana de observables

Algunos autores han adoptado una estrategia diferente para encarar la cuestión de la covariancia galileana de la ecuación de Schrödinger. Asumiendo la invariancia galileana del operador diferencial  $\frac{d}{dt}$ , preservan la covariancia galileana de la ecuación de Schrödinger redefiniendo la acción de la transformación de boost sobre magnitudes dinámicas, en particular, sobre el Hamiltoniano.

En particular, una transformación de boost dada por  $U = e^{iG_i v_i}$  no actuaría sobre  $H$  como  $H' = UHU^{-1}$ , sino como (ver [72], [83]):

$$H \rightarrow \tilde{H} = UHU^{-1} + i\frac{dU}{dt}U^{-1} \quad (3.39)$$

mientras que los estados y los operadores diferenciales se transforman como

$$|\varphi\rangle \rightarrow |\tilde{\varphi}\rangle = U|\varphi\rangle \quad \frac{d}{dt} \rightarrow \frac{\tilde{d}}{dt} = \frac{d}{dt} \quad (3.40)$$

Dado que estas transformaciones fueron deliberadamente diseñadas para preservar la covariancia galileana de la ecuación de Schrödinger, al introducir (3.39) y (3.40) en (3.8), tal covariancia se obtiene automáticamente:

$$\frac{\tilde{d}}{dt}|\tilde{\varphi}\rangle = -i\tilde{H}|\tilde{\varphi}\rangle \quad (3.41)$$

Si consideramos  $\tilde{H}$  como el Hamiltoniano transformado por el boost, cuando no hay campos externos actuando en el sistema el Hamiltoniano es invariante ante transformaciones de boost, dado que  $\tilde{H} = H$  (introducir ec. (3.23) y (3.28) en (3.39)). Por lo tanto, la invariancia de la ecuación de Schrödinger ante boost se sigue de su covariancia, dada por la ec. (3.41), y la invariancia ante boost de los objetos involucrados en la ecuación,  $\frac{\tilde{d}}{dt} = \frac{d}{dt}$  y  $\tilde{H} = H$ . En este caso, la transformación de boost de  $H$  es unitaria, es la identidad, y la elección entre  $H'$  y  $\tilde{H}$  como Hamiltoniano transformado por boost parecería ser una cuestión de convención. Sin embargo, la preferencia de  $\tilde{H}$  sobre  $H'$  lleva a consecuencias no deseadas, tanto desde el punto de vista matemático como del físico.

Debemos notar que toda esta estrategia tiene un aspecto extraño. De hecho, la invariancia galileana de la ecuación de Schrödinger, más que un resultado, resulta ser una verdad *a priori*: no importa la forma particular que tiene esta ecuación, las transformaciones están específicamente definidas para preservar su covariancia. Pero el precio a pagar por la covariancia así obtenida es admitir que una dada transformación actúa de modo diferente según el observable a transformar. Precisamente, la transformación  $H \rightarrow \tilde{H}$  dada por la ec.(3.39), si bien

unitaria cuando no hay campos externos, se vuelve no unitaria la presencia de campos. Esto significa que algunos observables, en particular el Hamiltoniano, se transforman mediante una transformación no unitaria “sui generis”, como la nombran en [72]. Pero la no unitariedad rompe las propiedades básicas del grupo de Galileo. Las transformaciones no unitarias no preservan las relaciones de conmutación entre los observables transformados. En efecto, dados dos observables  $A$  y  $B$  tales que  $[A, B] = C$ , es fácil ver que la aplicación de la transformación representada por un operador unitario resulta en

$$[A, B] = C \rightarrow [A', B'] = [UAU^{-1}, UBU^{-1}] = UCU^{-1} = C' \quad (3.42)$$

Esta propiedad es la que preserva las relaciones de conmutación que definen el grupo de Galileo también para observables transformados; por ejemplo  $[P'_i, P'_j] = 0$  o  $[J'_i, K'_j] = i\varepsilon_{ijk}K'_k$ . Pero si usamos la transformación “sui generis” (3.39), esta propiedad se pierde. En particular, si  $A \rightarrow \tilde{A}$  y  $B \rightarrow \tilde{B}$ , con un poco de álgebra se obtiene

$$[\tilde{A}, \tilde{B}] = UCU^{-1} + i(U(B - A)\frac{dU^{-1}}{dt} + \frac{dU}{dt}(B - A)U^{-1}) \quad (3.43)$$

El lado derecho de esta ecuación no puede ser identificado ni con  $\tilde{C}$  ( $C$  transformado con la ecuación (3.39)) ni con  $C'$  ( $C$  transformado unitariamente). Por lo tanto, la adopción de una transformación no unitaria con el fin de preservar la covariancia galileana de la ecuación de Schrödinger parece tener un costo demasiado alto.

Desde el punto de vista físico, una transformación como la ecuación (3.39) también nos lleva a consecuencias no deseadas. De acuerdo con esta ecuación, cuando no hay campos externos el Hamiltoniano transformado por el boost es  $\tilde{H} = H$ . Esto significa que, si  $H$  es el Hamiltoniano del sistema cuando se describe en un sistema de referencia  $RF$ , entonces  $\tilde{H} = H$  es el Hamiltoniano del mismo sistema cuando se describe en el sistema de referencia  $RF'$  en movimiento uniforme con respecto a  $RF$ . Pero esta conclusión está en desacuerdo con el hecho físico de que la energía total del sistema cambia en un término cinético aditivo cuando se cambia la perspectiva de  $RF$  a  $RF'$ . Y este cambio en la energía total tiene manifestación empírica como un efecto Doppler en el espectro de energía (ver [32]), que no se puede explicar en la transformación de boost (3.39).

Resumiendo, si queremos preservar la estructura formal del grupo de Galileo y el significado físico de estas transformaciones, no tenemos la libertad de decidir la forma de estas transformaciones. El argumento de esta subsección muestra que la aplicación de las transformaciones de Galileo en mecánica cuántica no es una cuestión trivial: cualquier afirmación acerca de la covariancia galileana de la ecuación de Schrödinger debe estar basada en la adecuada transformación de los observables, en particular, del Hamiltoniano. Esta conclusión contribuye a la comprensión no sólo del papel del grupo de Galileo en mecánica cuántica, sino también de su relevancia para la interpretación, como veremos a continuación.

### 3.3. La interpretación modal-Hamiltoniana a la luz del grupo de Galileo

Como venimos viendo, la IMH de la mecánica cuántica pertenece a la familia modal: es una interpretación realista y sin colapso, de acuerdo con la cual el estado cuántico describe las posibles propiedades del sistema pero no sus propiedades actuales. Aquí sólo tendremos en cuenta las proposiciones interpretativas necesarias para la discusión.

A continuación analizaremos cómo la interpretación se comporta ante la acción del grupo de Galileo.

#### 3.3.1. Transformación de sistemas

De acuerdo con la Proposición 1 de la IMH, un sistema cuántico  $S$  está representado por un par  $(\mathcal{O}, H)$ . A su vez, cualquier transformación de Galileo  $T_\alpha \in G$  debe aplicarse a  $S$  de modo tal que  $S : (\mathcal{O}, H) \rightarrow S' : (\mathcal{O}', H')$ . Sin embargo, como vimos en un apartado anterior, un grupo  $G$  de transformaciones  $T_\alpha \in G$  es un automorfismo  $T_\alpha : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ ; entonces, el grupo de Galileo  $\mathcal{G}$  se aplica a los observables del sistema de tal manera que

$$\forall T_\alpha \in \mathcal{G}, \text{ si } O \in \mathcal{O} \text{ y } O \rightarrow O', \text{ entonces } O' \in \mathcal{O} \quad (3.44)$$

En otras palabras, el espacio de observables de un sistema cuántico es cerrado ante las transformaciones del grupo de Galileo,

$$\forall T_\alpha \in \mathcal{G}, \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}' \quad (3.45)$$

Este hecho es físicamente razonable, dado que no se esperaría que la mera aplicación de una transformación de Galileo sobre el sistema  $S$  modificara su identidad al modificar su espacio de observables  $\mathcal{O}$  (ver [42]). Por lo tanto, el resultado de la aplicación de las transformaciones de Galileo sobre un sistema cuántico sólo dependerá de la manera en que el Hamiltoniano se transforma:

$$\forall T_\alpha \in \mathcal{G}, S : (\mathcal{O}, H) \rightarrow S' : (\mathcal{O}, H') \quad (3.46)$$

donde  $H$  se transforma unitariamente como  $H' = U_\alpha H U_\alpha^{-1}$ , con  $U_\alpha = e^{iK_\alpha s_\alpha}$ , y  $K_\alpha$  es el generador de la transformación  $T_\alpha$ .

Como hemos visto, en presencia de campos externos, la ecuación de Schrödinger es covariante pero no invariante ante el grupo de Galileo. Físicamente esto significa que el sistema cambia su comportamiento cuando es desplazado espacialmente, temporalmente o rotado espacialmente: la covariancia de la ley se preserva por la transformación de los objetos involucrados en ella, en particular, el Hamiltoniano.

Cuando no hay campos externos, por el contrario, la cuestión de las transformaciones de Galileo debe ser tomada con precaución. En este caso, la ecuación de Schrödinger es invariante ante el grupo de Galileo, y esto significa que la aplicación de una transformación de Galileo no introduce una modificación en

la situación física, sino que expresa un cambio en la perspectiva desde la cual se describe el sistema. En el contexto de la IMH, la invariancia del sistema ante desplazamientos temporales, espaciales y rotaciones espaciales se deduce directamente de la invariancia del Hamiltoniano ante estas transformaciones (ver. ecs. (3.11), (3.12) y (3.13)):

$$S : (\mathcal{O}, H) \rightarrow S' : (\mathcal{O}, H') = S : (\mathcal{O}, H) \quad (3.47)$$

Pero esta situación es completamente diferente para las transformaciones boost: aunque la ecuación de Schrödinger es invariante, el Hamiltoniano no es invariante ante boost (ver. ec. (3.15)). Analizaremos este caso en detalle.

Consideremos un sistema cuántico que no está afectado por campos externos, representado por  $S : (\mathcal{O}, H)$ . En un sistema de referencia genérico  $RF$ , el Hamiltoniano es  $H = \frac{P^2}{2M} + W = K + W$ , donde  $K$  es la energía cinética y sólo depende del momento total relativo a  $RF$ , y la energía interna  $W$  no depende ni de la posición ni del momento relativo a  $RF$ , pero sólo depende de la diferencia de posiciones, y eventualmente de sus derivadas. Por lo tanto, se puede garantizar que  $[K, W] = 0$  y, en consecuencia,  $H$  puede ser expresado como

$$H = K + W = H_K \otimes I_W + I_K \otimes W \quad (3.48)$$

donde  $H_K$  es el Hamiltoniano cinético actuando en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_K$ ,  $H_W$  es el Hamiltoniano correspondiente a la energía interna actuando en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_W$ ,  $I_K$  y  $I_W$  son operadores identidad en los respectivos espacios producto tensorial (por ejemplo, en los modelos conocidos, ver [3]). De acuerdo con la Proposición 3 de la IMH, la ec.(3.48) implica que el sistema  $S$  es un sistema compuesto  $S = S_W \cup S_K$ , cuyo subsistemas elementales son:

- Un sistema representado por  $S_W : (\mathcal{O}_W, H_W)$ , donde  $\mathcal{O}_W$  es el espacio de observables actuando en  $\mathcal{H}_W$ , y  $H_W \in \mathcal{O}_W$  representa la energía interna.
- Un sistema representado por  $S_K : (\mathcal{O}_K, H_K)$ , donde  $\mathcal{O}_K$  es el espacio de observables actuando en  $\mathcal{H}_K$ , y  $H_K \in \mathcal{O}_K$  representa la energía cinética.

Si ahora se aplica un boost con velocidad  $v$  al sistema  $S = S_W \cup S_K$ , el Hamiltoniano transformado unitariamente es  $H' = H + T_B$  (ver. ec.(3.23)) y, entonces, puede expresarse como

$$H' = H + T_B = \frac{P^2}{2M} + W + T_B = K' + W \quad (3.49)$$

donde  $K'$  es la energía cinética transformada (ver. ec.(3.24) y (3.25)):

$$K = \frac{P^2}{2M} \rightarrow K' = K + T_B = \frac{P^2}{2M} + T_B = \frac{(P + P_B)^2}{2M} \quad (3.50)$$

Por la misma razón que antes,  $[K', W] = 0$ , y en consecuencia,  $H'$  puede ser escrito como:

$$H' = K' + W = H'_K \otimes I_W + I_K \otimes W \quad (3.51)$$



donde  $H'_K = H_K + H_B$  es la energía cinética transformada actuando sobre  $\mathcal{H}_K$ . En su descomposición espectral, estos observables se pueden escribir de la siguiente manera:

$$H_K = \int \omega_K |\omega_K\rangle \langle \omega_K| d\omega_K \quad W = \int \omega_W |\omega_W\rangle \langle \omega_W| d\omega_W \quad (3.52)$$

donde  $H_K \in \mathcal{H}_K \otimes \mathcal{H}_K$  y  $W \in \mathcal{H}_W \otimes \mathcal{H}_W$ . Entonces, si  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_K \otimes \mathcal{H}_W$ ,  $H \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$  resulta ser

$$H = \iint (\omega_K + \omega_W) |\omega_K, \omega_W\rangle \langle \omega_K, \omega_W| d\omega_K d\omega_W \quad (3.53)$$

donde los autovalores de  $H$  son  $\omega = \omega_K + \omega_W$ . Como dijimos antes, una transformación de boost sólo actúa sobre el Hamiltoniano de la energía cinética, por lo tanto  $H_K$  se transforma de la siguiente manera:

$$H_K \rightarrow H'_K = e^{iK_i v_i} H_K e^{-iK_i v_i} = \int \omega_K e^{iK_i v_i} |\omega_K\rangle \langle \omega_K| e^{-iK_i v_i} d\omega_K \quad (3.54)$$

entonces,

$$H'_K = \int \omega_K |\omega_K + \omega_B\rangle \langle \omega_K + \omega_B| d\omega_K \quad (3.55)$$

Por lo tanto, el sistema transformado por boost es otra vez un sistema compuesto  $S = S_W \cup S'_K$ , cuyos subsistemas elementales son el sistema original  $S_W$  y el sistema  $S'_K : (\mathcal{O}_K, H'_K)$ , definido ahora por la energía cinética  $H'_K$  que es la suma de la energía cinética  $H_B$  del boost más la energía cinética original  $H_K$ .

Este argumento muestra que, cuando no hay campos externos, una transformación de boost actúa sobre un sistema representado por  $S = S_W \cup S_K$  como

$$S = S_W \cup S_K \rightarrow S' = S_W \cup S'_K \quad (3.56)$$

Cuando, en particular,  $S$  se describe en el sistema de referencia en reposo con respecto al centro de masa,  $P = 0$ ; entonces  $S$  es un sistema elemental con Hamiltoniano  $H = W$ , sobre el cual el boost actúa de la siguiente manera

$$S = S_W \rightarrow S' = S_W \cup S'_K \quad (3.57)$$

donde el subsistema  $S'_K$  está ahora definido sólo por la energía cinética del boost. Por lo tanto, el subsistema  $S_W$ , que lleva la energía interna del sistema, es invariante ante boost, de acuerdo con el hecho de que la energía interna  $W$  es un operador de Casimir del grupo de Galileo (ver Apéndice A.1). La aplicación de la transformación de boost sólo afecta al subsistema  $S_K$  al sumar la energía cinética del boost al Hamiltoniano:

$$S_W \rightarrow S'_W = S_W \quad H'_W = H_W \quad (3.58)$$

$$S_K \rightarrow S'_K \quad H'_K = H_K + H_B \quad (3.59)$$

Entonces, por un lado, cuando no hay campos externos, la acción de una transformación de boost tiene una manifestación bien definida en el espectro de energía del sistema compuesto  $S = S_W \cup S_K$ : el boost produce un efecto Doppler en la energía de  $S$ . Pero también sabemos que la energía está definida a menos de una constante: la información relevante acerca del espectro de energía del sistema está contenida en su energía interna, y la energía cinética sólo introduce un desplazamiento de este espectro. Por lo tanto, el subsistema invariante ante boost  $S_W$  contiene la estructura físicamente significativa del espectro de energía y  $S_K$  representa el desplazamiento en esa energía que, aunque observable, no es físicamente relevante y sólo es relativo al sistema de referencia usado para la descripción. Por otro lado, incluso el carácter compuesto o elemental del sistema  $S$  depende de la elección particular del sistema de referencia. De hecho, en el sistema de referencia  $RF$  en reposo con respecto al centro de masa,  $S = S_W$  es un sistema elemental; cuando, a su vez, decidimos describir el sistema en un sistema de referencia  $RF'$  con movimiento uniforme con respecto a  $RF$ , el sistema pasa a ser compuesto,  $S = S_W \cup S_K$ .

Ambas consideraciones apuntan en la misma dirección: el contenido objetivo de la descripción está dado por la energía interna. En otras palabras, la descripción objetiva del sistema es  $S_W$ , esto es, la descripción en el sistema de referencia en reposo con respecto al centro de masa, donde  $H = W$ :  $S_W$  es completamente invariante ante el grupo de Galileo. Por el contrario,  $S_K$ , que contiene la energía cinética, es una suerte de “pseudo-sistema”, cuya identidad se modifica por un mero cambio en la perspectiva descriptiva, e incluso puede desaparecer como consecuencia de tal cambio.

Esta intuición acerca del vínculo entre invariancia y objetividad está enraizado en una idea natural: lo que es objetivo no debería depender de la perspectiva particular usada para la descripción; o, en términos del lenguaje de grupos, lo que es objetivo de acuerdo con la teoría es lo que permanece invariante ante el grupo de simetría de la teoría. Esta idea no es nueva, ya que fue profundamente discutida en el contexto de la relatividad especial y general con respecto al status del espacio-tiempo dentro de la teoría: “Henceforth space by itself, and time by itself, are doomed to fade away into mere shadows, and only a kind of union of the two will preserve an independent reality” [84].<sup>2</sup> La idea de que la objetividad significa invariancia también es la tesis central del libro de Weyl llamado “*Symmetry*” [85]. Recientemente, esta idea ha reaparecido en varios trabajos. Por ejemplo, en [86], se construye un concepto general de objeto fundado en la invariancia ante las transformaciones de simetría. A su vez, la hipótesis de que la invariancia tiene su raíz en la objetividad es el tema central de [87]. Nuestra conclusión acerca de la descripción objetiva de un sistema cuántico está en completo acuerdo con la idea general que subyace a estos trabajos: cuando el grupo

<sup>2</sup> “Entonces el espacio por sí mismo y el tiempo por sí mismo están condenados a desvanecerse en meras sombras, y sólo una especie de unión de los dos preservará una realidad independiente”.

de Galileo deja la ecuación de Schrödinger invariante, la descripción objetiva del sistema también es invariante y, en consecuencia, éste no es afectado por las transformaciones de Galileo.

### 3.3.2. Transformación de la Regla de Actualización

La Regla de Actualización ( $RA$ ) es una proposición interpretativa que se agrega al contenido de la teoría. Entonces, las cuestiones pertinentes acerca de la covariancia e invariancia tienen sentido también para esta regla. Si llamamos  $OVD(S)$  al conjunto de observables con valor definido del sistema cuántico elemental representado por  $S : (\mathcal{O}, H)$ , de acuerdo con  $RA$ ,  $OVD(S) = \{H, A_i\}$ , donde los  $A_i$  son observables que conmutan con  $H$  y tienen, al menos, las mismas simetrías que  $H$ . Aunque  $RA$  no es una ecuación diferencial, es fácil aplicarle los conceptos de covariancia e invariancia:

- $RA$  es covariante ante las transformaciones de Galileo si,  $\forall T_\alpha \in G$ , el conjunto  $OVD(S)$  se transforma como:

$$OVD(S) = \{H, A_i\} \rightarrow OVD(S') = \{H', A'_i\} \quad (3.60)$$

- $RA$  es invariante ante las transformaciones de Galileo si,  $\forall T_\alpha \in G$ , el conjunto  $OVD(S)$  se transforma como:

$$OVD(S) \rightarrow OVD(S') = OVD(S) \quad (3.61)$$

La covariancia de  $RA$  se sigue directamente de la unitariedad de las transformaciones de Galileo. De hecho, cada transformación de Galileo se puede considerar como una rotación definida de los autovectores de todos los observables  $O \in \mathcal{O}$  en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Esta rotación preserva las relaciones de conmutación, por lo tanto, si  $[H, A_i] = 0$ , entonces  $[H', A'_i] = 0$  (ver ec. (3.42)). Pero, como mera rotación, tal transformación preserva todas las demás relaciones entre los observables; en consecuencia, si  $A_i$  tiene, al menos las mismas simetrías que  $H$ , entonces  $A'_i$  tiene, al menos las mismas simetrías que  $H'$ . Por lo tanto, si  $RA$  selecciona  $H$  y los observables  $A_i$  como aquéllos con valor definido de  $S$ , cuando se los transforma se obtiene  $H'$  y  $A'_i$ , que son precisamente los observables seleccionados por  $RA$  aplicada al sistema  $S'$ .

Por otro lado, queda claro que, cuando no hay campos externos, la regla de actualización  $RA$  es invariante ante desplazamientos temporales, y ante desplazamientos y rotaciones espaciales, dado que el sistema es invariante ante estas transformaciones (ver ec.(3.47)):

$$S = S' \quad \rightarrow \quad OVD(S) = OVD(S') \quad (3.62)$$

La dificultad aparece otra vez por las transformaciones de boost, que no dejan al Hamiltoniano invariante. Dado que  $OVD(S)$  depende de  $H$ , cambia con el cambio de  $H$ , y esto parecería ser un problema muy serio para la IMH: como es una interpretación realista, el  $OVD$  seleccionado por la regla de asignación

de valores definidos no debería modificarse por un mero cambio del sistema de referencia, como el que representa el boost de un sistema libre de campos externos. Sin embargo, el aparente problema se disuelve cuando se considera el modo en el que el boost actúa sobre el sistema.

Como hemos visto en un apartado anterior, cuando no hay campos externos, el sistema representado por  $S : (\mathcal{O}, H)$  es, en general, un sistema compuesto  $S = S_W \cup S_K$ , donde el subsistema representado por  $S_W : (\mathcal{O}_W, H_W)$  lleva la energía interna y el subsistema representado por  $S_K : (\mathcal{O}_K, H_K)$  lleva la energía cinética. Por lo tanto, la *RA* se aplica a los subsistemas elementales independientemente:

- Dado que  $S_W$  es invariante ante boost,  $OVD(S'_W) = OVD(S_W)$ , esto es, el conjunto de observables con valor definido de  $S_W$  permanece inalterado ante esta transformación.
- Ante boost,  $S_K : (\mathcal{O}_K, H_K)$  se transforma como  $S'_K : (\mathcal{O}_K, H'_K)$ , donde  $H'_K = H_K + H_B$  (ver ec. (3.59)); entonces  $OVD(S_K) \neq OVD(S'_K)$ .

Sin embargo, como hemos argumentado, el sistema  $S_K$  no representa un objeto cuántico objetivo, ya que es un mero artefacto de la perspectiva descriptiva adoptada. En consecuencia, la descripción objetiva del sistema proviene de  $S_W$  y el resultado de la aplicación de *RA* sobre este sistema es invariante ante boost.

### 3.3.3. Versión invariante de la Regla de Actualización

En esta subsección nos enfocaremos sólo en la situación donde no hay campos externos; ésta es la situación en la que la ecuación de Schrödinger es invariante ante el grupo de simetría y, en consecuencia, podemos esperar tener una reformulación de la regla de actualización *RA* en una forma invariante ante las transformaciones de Galileo.

**Proposición 13 (Regla de Actualización *RA'*):** *Dado un sistema cuántico  $S : (\mathcal{O}, H) = S_W \cup S_K$  libre de campos externos, donde los subsistemas  $S_W$  y  $S_K$  están representados como  $S_W : (\mathcal{O}_W, H_W)$  y  $S_K : (\mathcal{O}_K, H_K)$ , el conjunto  $\mathcal{A}(S)$  de propiedades-tipo actuales de  $S$  es  $\mathcal{A}(S) = \mathcal{A}(S_W) = \{[W], [A_i]\}$  donde  $W$  es la energía interna  $W = H_W \otimes I_K$  y  $A_i$  son los observables que conmutan con  $W$  y tienen, al menos, las mismas simetrías que  $W$ .*

Bajo esta forma, la regla de actualización es explícitamente invariante ante las transformaciones de Galileo, dado que  $S$  y  $S_W$  son sólo diferentes nombres para el mismo sistema cuántico.

Esto muestra que la no invariancia de la versión original de la Regla de Actualización sólo es resultado del lenguaje descriptivo. A pesar del cambio en la representación física del sistema ante boost, cuando no hay campos externos actuando sobre el sistema, el conjunto de propiedades-tipo actuales es invariante ante todas las transformaciones de Galileo, debido precisamente a la invariancia del sistema. En otras palabras, la identidad y el comportamiento del sistema

cuántico real detrás de la descripción física no son modificados por un mero cambio en la perspectiva descriptiva, de acuerdo con el significado físico del grupo de Galileo.

Aunque  $RA'$  es conceptualmente significativa, debemos considerar la posibilidad de reformularla de tal manera que resulte invariante de Galileo ya en su forma matemática. La manera natural de lograr este objetivo es introducir los operadores de Casimir del grupo de Galileo: si la Regla de Actualización debe seleccionar un conjunto invariante como los observables con valor definido, tal conjunto debe depender de los operadores de Casimir, que son invariantes ante todas las transformaciones del grupo de Galileo. Esto es,

**Proposición 14 (Regla de Actualización  $RA''$ ):** *Dado un sistema cuántico libre de campos externos representado por  $S : (\mathcal{O}, H)$ , los observables con valor definido son los observables  $C_i$  representados por los operadores de Casimir en cualquier representación irreducible del grupo de Galileo, y todos los observables que conmutan con  $C_i$  y tienen, al menos, las mismas simetrías que  $C_i$ .*

Dado que los operadores de Casimir del grupo de Galileo son  $M$ ,  $S^2$  y  $W$ , esta reformulación de la regla  $RA''$  está de acuerdo con la Regla de Actualización original  $RA$  cuando se aplica a sistemas libres de campos externos:

- Los valores definidos de  $M$  y  $S^2$ , postulados por  $RA''$  se siguen de  $RA$ : estos observables conmutan con  $H$  y no le rompen su simetría, ya que son múltiplos de la unidad en cualquier representación irreducible del grupo de Galileo. El hecho de que  $M$  y  $S^2$  siempre adquieran valor definido es completamente natural desde un punto de vista físico, dado que la masa y el spin son propiedades que supuestamente todos los sistemas cuánticos tienen y que son medibles en cualquier situación física.
- El valor definido de  $W$  parece estar en conflicto con  $RA$  dado que  $W$  no es el Hamiltoniano: mientras  $W$  es invariante ante el grupo de Galileo,  $H$  cambia ante la acción de un boost. Sin embargo, como hemos visto, esto no es un obstáculo cuando se tienen en cuenta los subsistemas elementales donde  $RA$  se aplica.

Además de brindar una versión explícitamente invariante de la regla de asignación de valores definidos en el lenguaje físico,  $RA''$  nos lleva a una reflexión final. Como hemos visto, la identidad y el comportamiento de los sistemas físicos libres de campos externos son invariantes ante el grupo de Galileo. Por el otro lado, desde un punto de vista realista, el hecho de que ciertos observables adquieran valores definidos es un hecho objetivo en el comportamiento del sistema: por lo tanto, el conjunto de observables con valor definido seleccionado por una interpretación realista debe ser invariante ante el grupo de Galileo. Pero los observables invariantes ante el grupo de Galileo son siempre funciones de los operadores de Casimir del grupo. En consecuencia, se llega a la conclusión de que cualquier interpretación realista de la mecánica cuántica que intente preservar la objetividad de la actualización no puede encontrarse muy lejos de la interpretación modal-Hamiltoniana.

## Relación con el esquema geométrico de la IMH

En el apartado anterior se ha formulado la Regla de Actualización en términos de los operadores de Casimir del grupo de Galileo extendido. Esto significa que los observables que adquieren valores actuales son la masa, el spin y la energía interna. En una representación irreducible del grupo de Galileo, estos observables son múltiplos de la identidad y, por lo tanto, tienen un solo autovalor. Esto significa que estas propiedades tendrán sólo una propiedad-caso y, como dijimos antes, los vectores que conformen la clase de equivalencia construida a partir de los autovalores de estos observables será todo el espacio de Hilbert.

Queda claro entonces desde la IMH por qué deben ser identidades estos observables: si no lo fueran, se podría definir a la clase de equivalencia de los vectores que no cumplen con la clase de equivalencia de los autovalores de estos observables, y esto sería igual a decir que tienen al menos dos autovalores distintos. Como ocurre en el grupo de Galileo, el operador Casimir masa  $M$  debe tener sólo un autovalor si estamos representando una única partícula. No podría tener más que ese autovalor por que, en caso contrario, dejaría de ser un operador identidad. Lo que estaríamos haciendo entonces es poner un corte en el espacio de Hilbert, el corte equivalente a decir que la negación de la clase de equivalencia de todos los vectores que tienen mismo autovalor de  $M$  es la clase vacía.

Tenemos entonces dos direcciones para reconstruir los sistemas cuánticos dentro del espacio de Hilbert, una hacia “abajo”, es decir, ir descomponiendo al espacio de Hilbert, y una hacia “arriba”, ir componiéndolo.

Si asumimos que los sistemas cuánticos tienen al menos alguna propiedad que comparten todos y que esa propiedad no puede cambiar nunca, entonces estaríamos poniendo un “techo” a las posibles composiciones de los espacios de Hilbert. Es decir, estaríamos diciendo que la negación de la clase de equivalencia de esa propiedad es la clase vacía. O sea, estaríamos diciendo que existe algún observable identidad. Estos presupuestos básicos físicos son coherentes, ya que los sistemas cuánticos tienen ciertas propiedades definidas, por ejemplo masa o spin, o carga.

Nos podríamos preguntar, entonces, si es necesario un “piso” para las descomposiciones del espacio de Hilbert, es decir, si existe alguna propiedad tal que no se puede descomponer más allá de ella. Posiblemente podríamos suponer que sí existe un piso, ya que se cree que la materia no se puede seguir dividiendo en trozos más pequeños o que sus propiedades no se pueden descomponer indefinidamente en sub propiedades. En la propuesta de la IMH, la propiedad mínima, básica o atómica de la materia es la energía. Esto es, la propiedad mínima con la que se componen todas las demás propiedades es la propiedad de la energía.

Se podría pensar que el electromagnetismo introduce un peldaño más en las composiciones del espacio de Hilbert de los sistemas cuánticos, al permitir que exista la negación del espacio de Hilbert correspondiente a las cantidades cinemáticas del sistema. O sea, al introducir la carga eléctrica se está duplicando la representación irreducible del grupo de simetría cinemático. Es decir, se está

permitiendo que exista al menos algún observable que tenga dos subespacios invariantes degenerados y éstos sean dos copias exactas de una representación irreducible del grupo de simetría cinemático, el grupo de Galileo. En el electromagnetismo se le llama carga  $Q$  a esa propiedad-tipo, que tiene sólo dos propiedades-caso, que son sus dos posibles valores.

### 3.4. Ejemplos físicos

En esta subsección se presentarán los ejemplos físicos de la IMH analizados en [3]. En particular, se mostrará que los sistemas que no están afectados por campos externos se pueden describir de tal modo que su carácter compuesto se hace manifiesto. A su vez, en el caso de que haya campos externos, se considerarán las condiciones bajo las cuales el sistema aún se puede concebir como un sistema compuesto, y se explicitarán los subsistemas componentes.

#### 3.4.1. Oscilador armónico

Cuando se describe el Hamiltoniano del oscilador armónico de manera general, respecto de un sistema de referencia fijo  $RF$ , tiene la siguiente forma

$$H = \frac{P_1^2}{2m_1} + \frac{P_2^2}{2m_2} + k(Q_1 - Q_2)^2 \quad (3.63)$$

donde  $k$  mide la intensidad de la interacción.  $P_1$  y  $P_2$  son los momentos de los dos sistemas y  $Q_1$  y  $Q_2$  sus respectivas posiciones respecto del sistema de referencia  $RF$ . Se puede definir un cambio de coordenadas al centro de masa de la siguiente manera:

$$Q_C = \frac{m_1 Q_1 + m_2 Q_2}{m_1 + m_2} \quad Q_R = Q_1 - Q_2 \quad (3.64)$$

$$P_C = P_1 + P_2 \quad P_R = \frac{m_2 P_1 - m_1 P_2}{m_1 + m_2} \quad (3.65)$$

En este nuevo sistema de coordenadas, el Hamiltoniano se puede escribir como:

$$H = \frac{P_C^2}{2M} + \frac{P_R^2}{2\mu} + kQ_R^2 \quad (3.66)$$

donde  $M = m_1 + m_2$  y  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ .

De este modo,  $H$  se puede expresar como la suma de dos términos,  $H = H_0 + H_K$ , tal que

$$H_0 = W = H - \frac{P_C^2}{2M} = \frac{P_R^2}{2\mu} + kQ_R^2 \quad H_K = \frac{P_C^2}{2M} \quad (3.67)$$

Queda claro que  $H_0$  y  $H_K$  conmutan, dado que  $H_0$  sólo depende de las coordenadas relativas y  $H_K$  sólo depende de las coordenadas del centro de masa. Por lo tanto, el Hamiltoniano total puede ser escrito como

$$[H_0, H_K] = 0 \quad \rightarrow \quad H = H_0 \otimes I_K + I_0 \otimes H_K \quad (3.68)$$

En este caso es fácil ver que  $H$  es el Hamiltoniano del sistema compuesto  $S$ , cuyos subsistemas,  $S_0$  con Hamiltoniano  $H_0$  y  $S_K$  con Hamiltoniano  $H_K$ , no interactúan entre sí; por lo tanto, se actualizan independientemente. Esto significa que  $H_0$  (la energía interna) adquiere valor definido en  $S_0$ , y  $H_K$  (energía cinética) adquiere valor definido en  $S_K$ .

### 3.4.2. Átomo de hidrógeno

El Hamiltoniano original del átomo de hidrógeno es

$$H = \frac{P_e^2}{2m_e} + \frac{P_p^2}{2m_p} + \frac{e^2}{|Q_e - Q_p|} \quad (3.69)$$

Si se efectúa otra vez el cambio de coordenadas al centro de masa, ecs. (3.64) y (3.65), el Hamiltoniano queda

$$H = \frac{P_C^2}{2M} + \frac{P_R^2}{2\mu} - \frac{e^2}{|Q_R|} \quad (3.70)$$

donde podemos identificar  $H_0$  y  $H_K$  como

$$H_0 = W = H - \frac{P_C^2}{2M} = \frac{P_R^2}{2\mu} - \frac{e^2}{|Q_R|} \quad H_K = \frac{P_C^2}{2M} \quad (3.71)$$

Es claro entonces que

$$[H_0, H_K] = 0 \quad \rightarrow \quad H = H_0 \otimes I_K + I_0 \otimes H_K \quad (3.72)$$

Como en el caso anterior, el átomo de hidrógeno es un sistema compuesto que puede ser analizado como un subsistema  $S_0$ , definido por la energía interna  $H_0 = W$  y un subsistema  $S_K$ , definido por la energía cinética  $H_K$ . Y, de acuerdo con la Regla de Actualización de la IMH, ambos subsistemas actualizan independientemente.

### 3.4.3. Sistema de tres cuerpos

Los dos ejemplos previos fueron de dos cuerpos. Ahora se mostrarán las mismas conclusiones para sistemas de tres cuerpos con potenciales internos. Para ello consideremos un sistema de tres partículas que interactúan a través de un potencial general que depende de las posiciones relativas. El Lagrangiano de este sistema es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{Q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{Q}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{Q}_3^2 - V(|Q_1 - Q_2|) - V(|Q_2 - Q_3|) - V(|Q_1 - Q_3|) \quad (3.73)$$

Se puede definir el cambio de coordenadas generalizado al centro de masas:



$$Q_C = \frac{m_1 Q_1 + m_2 Q_2 + m_3 Q_3}{m_1 + m_2 + m_3} \quad (3.74)$$

$$Q_{12} = Q_1 - Q_2 \quad Q_{13} = Q_1 - Q_3 \quad Q_{23} = Q_2 - Q_3 \quad (3.75)$$

Pero, dado que  $Q_{12}$ ,  $Q_{13}$  y  $Q_{23}$  no son independientes ( $Q_{23} = Q_{12} + Q_{13}$ ), se seleccionará  $Q_C$ ,  $Q_{12}$  y  $Q_{13}$  como los verdaderos grados de libertad para expresar al Lagrangiano. Si definimos la masa total como  $M = m_1 + m_2 + m_3$  y las masas reducidas como  $\mu_{ij} = \frac{m_i m_j}{M}$ , el Lagrangiano en las nuevas coordenadas resulta

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M \dot{Q}_C^2 + \frac{1}{2} \mu_{12} \dot{Q}_{12}^2 + \frac{1}{2} \mu_{13} \dot{Q}_{13}^2 + \frac{1}{2} \mu_{23} (\dot{Q}_{12} - \dot{Q}_{13})^2 - V(|Q_{12}|) - V(|Q_{23}|) - V(|Q_{12} - Q_{13}|) \quad (3.76)$$

Para hallar el Hamiltoniano, debemos obtener los momentos conjugados a cada una de las coordenadas:

$$P_C = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_C} = M \dot{Q}_C \quad (3.77)$$

$$P_{12} = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_{12}} = -\mu_{23} (\dot{Q}_{12} - \dot{Q}_{13}) + \mu_{12} \dot{Q}_{12} \quad (3.78)$$

$$P_{13} = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_{13}} = \mu_{23} (\dot{Q}_{12} - \dot{Q}_{13}) + \mu_{13} \dot{Q}_{13} \quad (3.79)$$

Entonces, el Hamiltoniano total asociado con el Lagrangiano queda

$$\begin{aligned} H &= P_C \dot{Q}_C + P_{12} \dot{Q}_{12} + P_{13} \dot{Q}_{13} - L = \\ &= \frac{P_C^2}{2M} + \frac{P_{12}^2}{2m_2} + \frac{P_{13}^2}{2m_3} + \frac{(P_{12} + P_{13})^2}{2m_1} \\ &\quad - V(|Q_{12}|) - V(|Q_{23}|) - V(|Q_{12} - Q_{13}|) \end{aligned} \quad (3.80)$$

donde otra vez podemos identificar

$$H_0 = W = H - \frac{P_C^2}{2M} = \frac{P_{12}^2}{2m_2} + \frac{P_{13}^2}{2m_3} + \frac{(P_{12} + P_{13})^2}{2m_1} - V(|Q_{12}|) - V(|Q_{23}|) - V(|Q_{12} - Q_{13}|) \quad (3.81)$$

$$H_K = \frac{P_C^2}{2M} \quad (3.82)$$

tales que  $[H_0, H_K] = 0$ .

Este procedimiento puede ser fácilmente generalizado a un sistema de  $n$ -cuerpos, donde siempre se obtendrá un Hamiltoniano total como suma de dos términos no interactuantes: la energía interna  $H_0 = W$  sólo dependiente de las coordenadas relativas, y la energía cinética  $H_K = \frac{P^2}{2M}$ , sólo dependiente de la energía cinética del centro de masa. La posibilidad de descomponer el sistema de  $n$ -cuerpos en dos subsistemas está fuertemente asociado con la validez del grupo de Galileo (ya que éste introduce restricciones a la forma de los potenciales internos).

### 3.4.4. Sistema con campos externos

En los apartados previos se han analizado sistemas que no estaban afectados por campos externos, esto es, situaciones donde se puede garantizar la validez total del grupo de Galileo debido a la homogeneidad e isotropía del espacio. En esta sección se estudiará un sistema cuántico con campos externos, con el fin de ver cómo las conclusiones de las secciones anteriores pierden validez cuando el espacio y el tiempo pierden sus propiedades galileanas, pero aun así podemos aplicar la Regla de Actualización original.

Para ello consideremos un sistema cuántico sujeto a campos externos. La forma más general del Hamiltoniano cuando hay campos externos es:

$$H = \frac{1}{2M}(P - A(Q))^2 + V(Q) \quad (3.83)$$

donde  $A(Q)$  y  $V(Q)$  son cuatro funciones que dependen de la posición: las tres primeras conforman el vector  $A$  y la última  $V$ . Como se dijo anteriormente, dado que los campos externos rompen la homogeneidad y la isotropía del espacio, el grupo de Galileo ya no puede expresarse en términos de las variables dinámicas. Una simple inspección muestra que la regla de conmutación entre el Hamiltoniano y el momento es distinta de cero:

$$\begin{aligned} [H, P] &= \left[ \frac{1}{2M}(P - A(Q))^2, P \right] + [V(Q), P] \\ &= \frac{1}{2M}(P - A(Q)) [(P - A(Q)), P] \\ &\quad + \frac{1}{2M} [(P - A(Q)), P] (P - A(Q)) + [V(Q), P] \\ &= -\frac{1}{2M}(P - A(Q))i \frac{dA}{dQ} - \frac{1}{2M}i \frac{dA}{dQ}(P - A(Q)) + i \frac{dV}{dQ} \end{aligned} \quad (3.84)$$

Por lo tanto, la correspondiente regla de conmutación galileana ya no puede expresarse en términos de  $H$  y  $P$ . Esto significa que ya no podemos aplicar la Regla de Actualización invariante, y debemos retornar a la Regla de Actualización original, donde las propiedades que actualizan se definen como aquéllas que conmutan con  $H$  y no rompen sus simetrías. Si el Hamiltoniano (3.83) pudiese formar parte de algún conjunto de generadores que formen un grupo,

entonces quizá se podría dar una regla de actualización en términos de los operadores de Casimir de ese grupo. Pero sin contar con un poco más de información sobre las funciones  $A(X)$  y  $V(X)$ , la tarea puede llegar a ser casi imposible.

Los campos externos se pueden expandir en una serie de potencias en el operador posición:

$$A(Q) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q^n \quad V(Q) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n Q^n \quad (3.85)$$

Entonces, definiendo los observables en términos de los operadores momento y posición, se pueden calcular las relaciones de conmutación con el Hamiltoniano utilizando las expansiones (3.85).

Consideremos ahora un sistema de dos partículas interactuando a través de un potencial interno y afectadas por un potencial externo dependiente de sus posiciones absolutas con respecto a un sistema de referencia fijo. El Lagrangiano general será:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 \dot{Q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{Q}_2^2 - V_{12}(|Q_1 - Q_2|) - V_1(Q_1) - V_2(Q_2) \quad (3.86)$$

Si se introduce el mismo cambio de coordenadas que en el oscilador armónico (ver ecs.(3.64) y (3.65)), y luego se encuentran los momentos conjugados de los nuevos sistemas, el Hamiltoniano resulta:

$$H = \frac{P_C^2}{2M} + \frac{P_{12}^2}{2\mu} - V_{12}(|Q_{12}|) - V_1(Q_C + \frac{m_2}{M} Q_{12}) - V_2(Q_C + \frac{m_1}{M} Q_{12}) \quad (3.87)$$

En este Hamiltoniano podemos encontrar  $H_K$  como  $\frac{P_C^2}{2M}$  y  $H_0$  como los términos restantes, pero en este caso,  $H_0$  no es la energía interna  $W$  debido a la dependencia en las coordenadas  $Q_C$  del centro de masa. En otras palabras, en general  $[H_0, H_K] \neq 0$  y, en consecuencia, el sistema no puede ser descompuesto en subsistemas cuánticos como en los casos previos.

No obstante, el sistema es compuesto en casos particulares, cuando los potenciales  $V_1$  y  $V_2$  tienen alguna de las siguientes características:

1.  $V_1$  y  $V_2$  son ambas funciones lineales de la posición, es decir, en el caso de potenciales escalares de la forma  $V_i = \alpha Q_i + \beta$ . En este caso

$$V_1(Q_1) + V_2(Q_2) = \alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 + \beta_1 + \beta_2 \quad (3.88)$$

y, dado que el cambio de coordenadas es también lineal, los dos últimos términos de (3.87) quedan

$$V_1(Q_C, Q_{12}) + V_2(Q_C, Q_{12}) = (\alpha_1 + \alpha_2) Q_C + \frac{Q_{12}}{M} (\alpha_1 m_2 + \alpha_2 m_1) + \beta_1 + \beta_2 \quad (3.89)$$

Por lo tanto, la posición  $Q_C$  del centro de masa y la posición relativa  $Q_{12}$  quedan desacopladas, y el sistema puede ser descompuesto en dos subsistemas  $S_R$  y  $S_C$  con sus respectivos Hamiltonianos

$$H_R = \frac{P_{12}^2}{2\mu} - V_{12}(|Q_{12}|) - \frac{Q_{12}}{M}(\alpha_1 m_2 + \alpha_2 m_1) - \beta_1 - \beta_2 \quad (3.90)$$

$$H_C = \frac{P_C^2}{2M} + (\alpha_1 + \alpha_2)Q_C \quad (3.91)$$

En este caso, una transformación de boost sólo afectará al subsistema  $S_C$ , añadiendo una energía cinética de boost al Hamiltoniano  $H_C$ .

2.  $V_1$  y  $V_2$  son ambos no lineales en las posiciones, pero sus sumas cancelan los términos que cruzan las coordenadas  $Q_C$  y  $Q_{12}$ . De hecho, supongamos que

$$V_1(Q_1) + V_2(Q_2) = \alpha_1 Q_1^2 + \alpha_2 Q_2^2 \quad (3.92)$$

En este caso, los dos últimos términos de (3.87) resultan

$$\begin{aligned} V_1(Q_C, Q_{12}) + V_2(Q_C, Q_{12}) &= (\alpha_1 + \alpha_2)Q_C^2 \\ &+ \frac{Q_{12}^2}{M^2}(\alpha_1 m_2^2 + \alpha_2 m_1^2) + 2Q_C \frac{Q_{12}}{M}(\alpha_1 m_2 + \alpha_2 m_1) \end{aligned} \quad (3.93)$$

Es fácil ver que, si  $\alpha_1 m_2 = -\alpha_2 m_1$ , el término que incluye el producto entre  $Q_C$  y  $Q_{12}$  se cancela y, otra vez, el sistema queda descompuesto en dos subsistemas  $S_R$  y  $S_C$ , cuyos Hamiltonianos respectivos son

$$H_R = \frac{P_{12}^2}{2\mu} - V_{12}(|Q_{12}|) - \frac{Q_{12}^2}{M^2}(\alpha_1 m_2^2 + \alpha_2 m_1^2) \quad (3.94)$$

$$H_C = \frac{P_C^2}{2M} + (\alpha_1 + \alpha_2)Q_C^2 \quad (3.95)$$

y, nuevamente, una transformación de boost afectará sólo al subsistema  $S_C$ .

### 3.4.5. Efecto Zeeman

El Lagrangiano del efecto Zeeman es el siguiente:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{Q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{Q}_2^2 + |e|A \cdot \dot{Q}_1 - |e|A \cdot \dot{Q}_2 - V(|Q_1 - Q_2|) \quad (3.96)$$

donde  $Q_1(\dot{Q}_1)$  es la posición (velocidad) del protón y  $Q_2(\dot{Q}_2)$  es la posición (velocidad) del electrón.  $A$  es el potencial vector que depende de las coordenadas.

El signo opuesto del tercer y cuarto términos en (3.96) proviene del signo opuesto de las cargas del protón y el electrón.

Podemos proceder con el cambio de coordenadas (ver ecs.(3.64) y (3.65)), entonces el Lagrangiano (3.96) resulta:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{Q}_C^2 + \frac{m_1m_2}{M}\dot{Q}_R^2 + |e|A \cdot \dot{Q}_R - V(|Q_R|) \quad (3.97)$$

donde  $M = m_1 + m_2$ . Para obtener la formulación Hamiltoniana a partir de (3.97) debemos encontrar los momentos conjugados a las coordenadas; una vez hecho esto, el Hamiltoniano queda:

$$H = \frac{P_C^2}{2M} + \frac{M}{m_1m_2}(P_R - |e|A)^2 + V(|Q_R|) \quad (3.98)$$

Si el campo magnético es uniforme, el potencial vector puede ser escrito como  $A = \frac{1}{2}Q_R \times B$ . Entonces, el segundo término de (3.98) involucra  $P_R \cdot A$  que puede ser calculado como:

$$P_R \cdot A = -\frac{1}{2}P_R \cdot (Q_R \times B) = -\frac{1}{2}(Q_R \times P_R) \cdot B = -\frac{1}{2}L \cdot B \quad (3.99)$$

Por lo tanto, el Hamiltoniano puede ser escrito como

$$H = \frac{P_C^2}{2M} + \frac{P_R^2}{2\mu} + V(|Q_R|) - \frac{\mu_B}{\hbar}L \cdot B - \frac{|e|^2}{8\mu}(Q_R \times B)^2 \quad (3.100)$$

donde  $\mu_B = \frac{|e|\hbar}{2\mu}$  es el magnetón de Bohr y  $\mu = \frac{m_1m_2}{M}$ . En este Hamiltoniano es posible identificar las dos componentes que conmutan,  $H_R$  y  $H_C$ :

$$H_R = \frac{P_R^2}{2\mu} + V(|Q_R|) - \frac{\mu_B}{\hbar}L \cdot B - \frac{|e|^2}{8\mu}(Q_R \times B)^2 \quad H_C = \frac{P_C^2}{2M} \quad (3.101)$$

de tal modo que la energía interna resulta:

$$W = H - \frac{P_C^2}{2M} = H_R = \frac{P_R^2}{2\mu} + V(|Q_R|) - \frac{\mu_B}{\hbar}L \cdot B - \frac{|e|^2}{8\mu}(Q_R \times B)^2 \quad (3.102)$$

En este caso, a pesar del campo magnético, el Hamiltoniano del sistema total  $S$  es compuesto: el subsistema  $S_C$ , con el Hamiltoniano  $H_C$ , lleva la energía total de traslación; el Hamiltoniano del subsistema  $S_R$  es la energía interna  $W = H_R$ , y el conjunto de observables con valor definido de  $S_R$  es independiente de la energía cinética y, por lo tanto, invariante ante transformaciones de boost. En general, el término  $\frac{|e|^2}{8\mu}(Q_R \times B)^2 = \frac{|e|^2}{8\mu}A^2$  se desprecia y el Hamiltoniano se escribe como (ver [26], pag. 325, [32], pag. 835):

$$H = \frac{P_C^2}{2M} + \frac{P_R^2}{2\mu} + V(|Q_R|) - \frac{\mu_B}{\hbar}L \cdot B \quad (3.103)$$

Nuevamente, cuando el sistema se describe en el sistema de referencia en reposo con respecto al centro de masa,  $P_C = H_C = 0$  y  $H = H_R = W$ :

$$H = \frac{P_R^2}{2\mu} + V(|Q_R|) - \frac{\mu_B}{\hbar} L \cdot B = H_{at} - \frac{\mu_B}{\hbar} L \cdot B \quad (3.104)$$

## Capítulo 4

# Interpretación modal de la mecánica cuántica relativista

A pesar del gran éxito de la teoría cuántica, su interpretación continúa siendo un problema abierto. Como hemos dicho, la IMH de la mecánica cuántica es una interpretación realista, sin postulado del colapso, que define el contexto preferido del sistema (el conjunto de observables con valores actuales) en términos de su Hamiltoniano. En posteriores trabajos ([3], [4], [5]), también hemos mostrado que la regla interpretativa de adscripción de valores actuales puede ser formulada en términos invariantes a partir de los operadores de Casimir del grupo de Galileo.

Aunque estas conclusiones interpretativas fueron obtenidas a partir de la mecánica cuántica no relativista, la idea de extender la interpretación a la mecánica cuántica relativista reemplazando el grupo de simetría resulta natural. Es, entonces, el objetivo de esta sección, abrir el camino para la extensión de la IMH al ámbito relativista, estudiando el caso de un sistema cuántico acoplado a un campo electromagnético, cuyos grupos de simetría son el grupo de Poincaré y el grupo de simetría interna  $U(1)$ . En este contexto, se propondrá la regla interpretativa de acuerdo con la cual el contexto preferido se define por los operadores de Casimir del grupo de simetría de la teoría. Esta regla nos lleva a resultados físicamente razonables en el ámbito relativista, dado que los observables con valores actuales podrán ser considerados magnitudes objetivas, porque resultan invariantes ante los grupos relevantes. Sin embargo, también se esperaría una relación adecuada entre los resultados obtenidos en mecánica cuántica relativista y aquéllos obtenidos en mecánica cuántica no relativista. Se mostrará que las magnitudes que adquieren valor actual en el ámbito relativista y no relativista están correctamente relacionadas a través de diferentes límites (ver [6], [8]).

## 4.1. El grupo de Poincaré y sus límites

El álgebra de Poincaré está conformada por los generadores  $H, P_i, J_i, K_i^{(P)}$ , donde los  $K_i^{(P)}$  son las componentes del boost de Lorentz. Las relaciones de conmutación entre estos generadores puede ser formuladas en un espacio-tiempo de Lorentz de 4 dimensiones:

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0 & [M_{\mu\nu}, P_\rho] &= \eta_{\mu\rho}P^\nu - \eta_{\nu\rho}P^\mu \\ [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= \eta_{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}M^{\mu\rho} \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde  $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$ ,  $\eta_{\mu\nu}$  es el tensor métrico del espacio-tiempo de la relatividad especial, y

$$P_\mu = (H, P_i) \quad M_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & K_i^{(P)} \\ -K_i^{(P)} & J_{ij} \end{pmatrix} \quad J_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{kij}J^{ij} \quad (4.2)$$

Entonces, las ecs.(4.1) pueden ser reescritas del tal manera de poder ser comparadas con el caso del álgebra de Galileo:

$$\begin{aligned} [P_i, P_j] &= 0 & (4,3_a) & & [K_i^{(P)}, P_j] &= i\delta_{ij}H & (4,3_f) \\ [K_i^{(P)}, K_j^{(P)}] &= -i\varepsilon_{ijk}J^k & (4,3_b) & & [P_i, H] &= 0 & (4,3_g) \\ [J_i, J_j] &= i\varepsilon_{ijk}J^k & (4,3_c) & & [J_i, H] &= 0 & (4,3_h) \\ [J_i, P_j] &= i\varepsilon_{ijk}P^k & (4,3_d) & & [K_i^{(P)}, H] &= iP_i & (4,3_i) \\ [J_i, K_j^{(P)}] &= i\varepsilon_{ijk}K^{(P)k} & (4,3_e) & & & & \end{aligned} \quad (4.3)$$

A su vez, los operadores de Casimir del álgebra de Poincaré son (ver [88], ecs. (A.70), (A.71), (A.72) del Apéndice A.1)

$$\begin{aligned} C_2^P &= H^2 - P_iP^i \\ C_4^P &= H^2J_iJ^i + (P_iP^i)(K_i^{(P)}K^{(P)i}) - (J_iP^i)^2 - (P_iK^{(P)i})^2 - \\ & 2HJ^k\varepsilon_{ijk}P^iK^{(P)j} \end{aligned} \quad (4.4)$$

En el sistema de referencia en reposo con respecto al centro de masa, donde  $P_i = 0$  y  $H = E = m_0$ , estos operadores resultan ser

$$C_2^P = m_0^2I \quad C_4^P = m_0^2J_iJ^i = m_0^2S^2 \quad (4.5)$$

Si extrapolamos la Regla de Actualización invariante  $RA''$  de la IMH al caso relativista, debemos concluir que los operadores de Casimir  $C_2^P$  y  $C_4^P$  son operadores que definen observables con valores actuales en el sistema. Este resultado es físicamente razonable dado que la masa y el spin son propiedades que supuestamente todos los sistemas cuánticos elementales tienen (ver [89]); incluso, masa y spin son propiedades que contribuyen a la clasificación de las partículas elementales. Sin embargo, la incorporación de la interpretación al ámbito relativista no está garantizada todavía, dado que es necesario mostrar que los observables con valores actuales en las teorías relativista y no relativista



están correctamente relacionados a través de un límite adecuado. Esta tarea implica analizar las relaciones entre el grupo de Galileo y el grupo de Poincaré.

Como es sabido, el grupo de Galileo puede obtenerse del grupo de Poincaré a través de una contracción de Inönü-Wigner (ver [88]). Sin embargo, como hemos visto, el grupo físicamente significativo de la mecánica cuántica no es el grupo de Galileo, sino su extensión central. Por lo tanto, la cuestión es cómo el grupo de Galileo con extensión central puede obtenerse de una extensión central del grupo de Poincaré. La respuesta a esta pregunta no es sencilla, dado que el grupo de Poincaré no admite extensiones central no triviales ([90]).<sup>1</sup> Por esta razón, en las siguientes subsecciones se considerarán dos procedimientos para efectuar los límites. El primero, consistirá en el límite no relativista tradicional, que tiene un sentido físico bien claro pero no admite una representación directa en términos de grupos. El segundo límite consistirá en una contracción generalizada de Inönü-Wigner de la extensión trivial del grupo de Poincaré, que como se mostrará, nos dará la extensión central del grupo de Galileo.

#### 4.1.1. El límite no relativista tradicional

Recordemos entonces las transformaciones de coordenadas relativistas:

$$\vec{x}' = R\vec{x} + \frac{(\gamma - 1)}{\beta^2}(\vec{\beta} \cdot \vec{x})\vec{\beta} - \gamma ct\vec{\beta} + \vec{a} \quad (4.6)$$

$$ct' = \gamma(ct - \vec{\beta} \cdot \vec{x}) + c\tau \quad (4.7)$$

donde  $\vec{a}$  es el vector desplazamiento espacial,  $\tau$  es un desplazamiento temporal,  $R$  es una matriz de rotación, y  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$  con  $\vec{\beta} = \vec{v}/c$ . Estas transformaciones nos llevan al grupo de Poincaré dadas por las ec. (4.3), donde los parámetros correspondientes a cada generador son :  $\tau$  para  $H$ ,  $\vec{a}$  para los  $P_i$ ,  $R$  para los  $J_i$ , y  $\vec{\beta}$  para los  $K_i^{(P)}$ .

El límite relativista tradicional es el límite  $\beta \rightarrow 0$  ( $\gamma \rightarrow 1$ ). Esto significa que este límite afecta sólo a las transformaciones de boost, y no a las demás transformaciones. Este hecho también se puede notar al comparar la extensión central del grupo de Galileo en las ecs.(3.5) con el grupo de Poincaré en las ecs.(4.3): los dos grupos comparten una subálgebra separable  $ISO(3) \times \langle H \rangle$  con siete generadores, definida por las relaciones de conmutación (4.3a, c, d, g y h). En particular,  $\langle H \rangle$  es el grupo uniparamétrico que representa la traslación temporal generada por  $H$ , e  $ISO(3) = \langle T_i \rangle \times SO(3)$  es el grupo inhomogéneo de rotaciones en tres dimensiones, donde  $\langle T_i \rangle$  es el grupo de desplazamientos espaciales generado por  $P_i$  y  $SO(3)$  es el grupo de rotaciones espaciales generado por  $J_i$ . Por lo tanto, la diferencia entre los grupos de Galileo y Poincaré está confinada a las relaciones de conmutación que involucran los generadores de boost: el límite relativista debería transformar los generadores de boost  $K_i^{(P)}$  en los generadores de boost de Galileo  $K_i^{(G)}$ , y las relaciones de conmutación

<sup>1</sup>Una extensión trivial de un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  es una suma directa  $\mathfrak{g} \oplus M$ , donde  $M$  es un generador abeliano.

(4.3b, e, f y i) del grupo de Poincaré en las relaciones de conmutación (3.5b,e,f y i) del grupo de Galileo respectivamente.

Dado que en este caso estamos interesados sólo en los boost, podemos simplificar las transformaciones de coordenadas de las ecuaciones (4.6) y (4.7) haciendo  $\tau = 0$ ,  $\vec{r} = \vec{0}$  y  $R = I$ :

$$\vec{x}' = \vec{x} + \frac{(\gamma - 1)}{\beta^2} (\vec{\beta} \cdot \vec{x}) \vec{\beta} - \gamma ct \vec{\beta} \quad (4.8)$$

$$ct' = \gamma(ct - \vec{\beta} \cdot \vec{x}) \quad (4.9)$$

Consideremos también la energía, masa y momento, que tienen la siguiente forma

$$E = \gamma m_0 c^2 \quad m = \gamma m_0 \quad p_i = \gamma m_0 v_i \quad (4.10)$$

Como es sabido, el límite no relativista tradicional se da cuando  $\beta \rightarrow 0$  ( $\gamma \rightarrow 1$ ), obteniéndose

$$\vec{x}' = \vec{x} \quad t' = t \quad (4.11)$$

$$E = m_0 c^2 \quad m = m_0 \quad p_i = m_0 v_i \quad (4.12)$$

Por otra parte, los generadores de boost de Poincaré  $K_i^{(P)}$  pueden ser expresados como

$$K_i^{(P)} = X_i H - X_0 P_i \quad (4.13)$$

donde los  $X_i$  son los operadores de posición correspondientes a  $x_i$ ,  $H$  es el operador Hamiltoniano correspondiente a la energía  $E$ ,  $X_0$  se corresponde con  $ctI$ , y los  $P_i$  son los operadores momento correspondientes a  $p_i$ . Por lo tanto, al considerar las ecs.(4.11) y (4.12), el límite no relativista de los  $K_i^{(P)}$  es

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} K_i^{(P)} = X_i m_0 c^2 - ct P_i = K_i^{(\beta \rightarrow 0)} \quad (4.14)$$

Ahora, podemos calcular las relaciones de conmutación (4.3b, e, f y i) con los ya obtenidos  $K_i^{(\beta \rightarrow 0)}$ :

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} [K_i^{(P)}, K_j^{(P)}] = [K_i^{(\beta \rightarrow 0)}, K_j^{(\beta \rightarrow 0)}] = 0 \quad (4.15)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} [J_i^{(P)}, K_j^{(P)}] = [J_i^{(P)}, K_j^{(\beta \rightarrow 0)}] = i \varepsilon_{ijk} K^{(\beta \rightarrow 0)k} \quad (4.16)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} [K_i^{(P)}, P_j] = [K_i^{(\beta \rightarrow 0)}, P_j] = i \delta_{ij} M_0 c^2 \quad (4.17)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} [K_i^{(P)}, H] = [K_i^{(\beta \rightarrow 0)}, H] = i P_i \quad (4.18)$$

A su vez, haciendo  $c = 1$ , la ecuación (4.17) se convierte en

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} [K_i^{(P)}, P_j] = [K_i^{(\beta \rightarrow 0)}, P_j] = i \delta_{ij} M_0 \quad (4.19)$$

Finalmente, podemos comparar las ecuaciones (4.15), (4.16), (4.19), y (4.18) con las correspondientes relaciones de conmutación (3.5b, e, f y i) del grupo de Galileo: si los límites  $K_i^{(\beta \rightarrow 0)}$  de los boost de Poincaré se identifican con los boost galileanos  $K_i^{(G)}$ , y el operador de Poincaré  $M_0$  se identifica con el operador masa galileano  $M$ , la extensión central del grupo de Galileo puede ser considerada el límite no relativista del grupo de Poincaré.

#### 4.1.2. Contracción generalizada de Inönü-Wigner

El límite no relativista tradicional tiene un significado físico preciso y, por ello, es deseable expresarlo en términos de la teoría de grupos. Se sabe que la contracción de Inönü-Wigner mapea el grupo de Poincaré sobre el grupo de Galileo. Pero, dado que la masa ha sido agregada a este último como una extensión central, un mapeo análogo entre el grupo de Poincaré y el grupo de Galileo centralmente extendido no es posible, dado que ambos grupos tienen un número diferente de generadores. Por lo tanto, una manera natural de obtener el mapeo deseado es por medio de la extensión central del grupo de Poincaré. Ésta será la estrategia a seguir a continuación.

Para ello consideremos el grupo de Poincaré  $ISO(1,3)$ , con generadores  $\{H, P_i, J_i, K_i^{(P)}\}$ , y sus correspondientes relaciones de conmutación dadas por las ecuaciones (4.3). Recordemos que el grupo de Poincaré no admite extensiones no triviales; por lo tanto, podemos extenderlo trivialmente de tal forma que todos los generadores conmuten con una carga central  $M$ . En este caso, se obtiene un nuevo grupo  $ISO(1,3) \times \langle M \rangle$ , con generadores  $\{H, P_i, J_i, K_i^{(P)}, M\}$ , correspondientes a la extensión trivial del grupo de Poincaré. Ya que los generadores del grupo de Poincaré conforman la base de un espacio vectorial, se puede introducir un cambio en dicha base de la siguiente manera:

$$\bar{H} = H - M \quad (4.20)$$

En esta nueva base  $\{\bar{H}, P_i, J_i, K_i^{(P)}, M\}$ , las relaciones de conmutación dadas por las ecuaciones (4.3) preservan su forma, con la única excepción de la ec.(4.3f), que se transforma en

$$[K_i^{(P)}, P_j] = i\delta_{ij}H = i\delta_{ij}(\bar{H} + M) \quad (4.21)$$

Ahora la tarea es mostrar que la extensión trivial del grupo de Poincaré  $ISO(1,3) \times \langle M \rangle$  se contrae al grupo de Galileo con extensión central  $\mathcal{G} \times \langle M \rangle$ :

$$ISO(1,3) \times \langle M \rangle \longrightarrow \mathcal{G} \times \langle M \rangle \quad (4.22)$$

La contracción se obtiene al reescalar los generadores de la siguiente manera:

$$J'_i = J_i \quad P'_i = \varepsilon P_i \quad K_i^{(P)'} = \varepsilon K_i^{(P)} \quad \bar{H}' = \bar{H} \quad M' = \varepsilon^2 M \quad (4.23)$$

Las relaciones de conmutación dadas por las ecs. (4.3) permanecen sin cambios ante el reescalamiento, con excepción de la ec.(4.3b) y de la ec.(4.3f) ahora

reemplazada por la ec. (4.21):

$$\left[ K_i^{(P)'} , K_j^{(P)'} \right] = i\varepsilon_{ijk}\varepsilon^2 J^{tk} \quad (4.24)$$

$$\left[ K_i^{(P)'} , P_j' \right] = i\delta_{ij}(\varepsilon^2 \overline{H}' + M') \quad (4.25)$$

Para finalizar la contracción de Inönü-Wigner, la operación se completa al introducir el límite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , que transforma las ecs. (4.24) y (4.25) en

$$\left[ K_i^{(P)'} , K_j^{(P)'} \right] = 0 \quad \left[ K_i^{(P)'} , P_j' \right] = 0 \quad (4.26)$$

La contracción de Inönü-Wigner admite una interpretación física (ver [88]). El factor  $\varepsilon$  afecta los generadores de boosts  $K_i^{(P)'}$  y los generadores de traslaciones espaciales  $P_i'$ . En consecuencia, por medio de la exponenciación de estos generadores,  $\varepsilon$  también afecta las velocidades y los desplazamientos espaciales. Por lo tanto, al introducir el límite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , se está describiendo la situación donde las velocidades y los desplazamientos espaciales son “pequeños”. Las velocidades son pequeñas con respecto a la velocidad de la luz  $c$ , que aquí se normaliza como  $c = 1$ . Los desplazamientos espaciales son pequeños con respecto a  $c\tau$ , donde  $\tau$  es el desplazamiento temporal asociado con el Hamiltoniano  $H$ , que no es afectado por  $\varepsilon$ . Por estas razones, este tipo de contracción se conoce como “contracción de velocidad-espacio” ([88]).

Resumiendo, el resultado de la aplicación de la contracción generalizada de Inönü-Wigner a la extensión trivial del grupo de Poincaré es

$$\begin{aligned} [P_i', P_j] &= 0 & (4.27_a) & & [K_i^{(P)'}, P_j'] &= i\delta_{ij}M' & (4.27_f) \\ [K_i^{(P)'}, K_j^{(P)'}] &= 0 & (4.27_b) & & [P_i', \overline{H}'] &= 0 & (4.27_g) \\ [J_i', J_j'] &= i\varepsilon_{ijk}J^{kl} & (4.27_c) & & [J_i', \overline{H}'] &= 0 & (4.27_h) \\ [J_i', P_j'] &= i\varepsilon_{ijk}P^{kl} & (4.27_d) & & [K_i^{(P)'}, \overline{H}'] &= iP_i' & (4.27_i) \\ [J_i', K_j^{(P)'}] &= i\varepsilon_{ijk}K^{(P)kl} & (4.27_e) & & & & \end{aligned} \quad (4.27)$$

Podemos comparar estas ecuaciones (4.27) con las relaciones de conmutación dadas por las ecs. (3.5), que definen el grupo de Galileo con extensión trivial. Si la masa  $M'$  de la relación (4.27f) se identifica con la masa  $M$  de la relación (3.5f), y los boosts de Poincaré  $K_i^{(P)'}$  de las ecs. (4.27) se identifican con los boosts Galileanos  $K_i^{(G)}$  de las ec. (3.5), entonces se puede decir que la contracción generalizada de Inönü-Wigner de la extensión trivial del grupo de Poincaré nos lleva al grupo de Galileo con extensión central, como se pretendía originalmente (ver [6]).

## 4.2. Límite de los operadores de Casimir del grupo de Poincaré

Recordemos que el grupo físicamente significativo de la mecánica cuántica no relativista no es el grupo de Galileo, sino su extensión central, cuyos operadores de Casimir, expresados en un sistema de referencia en el centro de masa, son (ver ecs.(A.77), (A.78),(A.79) del Apéndice A.1):

$$C_1^G = M = mI \quad (4.28)$$

$$C_2^G = mW = mwI \quad (4.29)$$

$$C_4^G = m^2 J_i J^i = m^2 S^2 = m^2 s(s+1)I \quad (4.30)$$

A su vez, los operadores de Casimir del grupo de Poincaré, expresados en el sistema de referencia del centro de masa, son (ver ecs.(4.5))

$$C_2^P = m_0^2 I \quad (4.31)$$

$$C_4^P = m_0^2 J_i J^i = m_0^2 S^2 = m_0^2 s(s+1)I \quad (4.32)$$

Es claro que no existe límite que se pueda introducir entre los mapeos de los dos  $C_i^P$  y los tres  $C_j^G$ . No obstante, en el límite no relativista tradicional  $\beta \rightarrow 0$  ( $\gamma \rightarrow 1$ ),  $m = \gamma m_0$  se transforma en  $m_0$  y  $E = \gamma m_0 c^2$  se transforma en  $m_0 c^2$ . Por lo tanto, al hacer  $c = 1$ , en el límite no relativista, tanto la masa  $m$  como la energía interna  $E = w$  son  $m_0$ . Esto significa que, conceptualmente, el límite de  $C_4^P$  es  $C_4^G$ , pero el límite de  $C_2^P$  nos lleva a los dos operadores de Casimir restantes  $C_1^G$  y  $C_2^G$ , dado que en este límite  $m = w = m_0$  y, entonces,  $C_2^G = (C_1^G)^2$ :

$$C_4^P \longrightarrow C_4^G \quad C_2^P \longrightarrow C_2^G = (C_1^G)^2 \quad (4.33)$$

Por supuesto, este es un argumento conceptual que no puede ser expresado en el lenguaje de la teoría de grupos, en la medida que el límite relaciona un grupo no extendido con un grupo extendido centralmente. Entonces, deberíamos esperar que, al seguir la estrategia desarrollada en la sección previa, la contracción generalizada de Inönü-Wigner de los operadores de Casimir del grupo de Poincaré trivialmente extendido nos condujera a los operadores de Casimir del grupo de Galileo centralmente extendido.

Los operadores de Casimir del grupo de Poincaré extendido trivialmente  $ISO(1,3) \times \langle M \rangle$ , en la base  $\{\bar{H}, P_i, J_i, K_i^{(P)}, M\}$ , son

$$C_1^{PE} = M = mI \quad (4.34)$$

$$C_2^{PE} = -(P_i P^i) + \bar{H}^2 + M^2 + 2\bar{H}M \quad (4.35)$$

$$C_4^{PE} = (\bar{H} + M)^2 J_i J^i - (J_i P^i)^2 + (P_i P^i) \left( K_i^{(P)} K^{(P)i} \right) - \left( P_i K^{(P)i} \right)^2 - 2(\bar{H} + M) J^k \varepsilon_{ijk} P^i K^{(P)j} \quad (4.36)$$

Por medio de la base reescalada introducida en las ecs. (4.23), los operadores de Casimir resultan

$$\tilde{C}_1^{PE} = \varepsilon^{-2} M' \quad (4.37)$$

$$\tilde{C}_2^{PE} = -\varepsilon^{-2} (P'_i P'^i) + \bar{H}'^2 + \varepsilon^{-4} M'^2 + 2\varepsilon^{-2} \bar{H}' M' \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} C_4^{PE} &= (\bar{H}' + \varepsilon^{-2} M')^2 J'_i J'^i - \varepsilon^{-2} (J'_i P'^i)^2 + \quad (4.39) \\ &\varepsilon^{-4} (P'_i P'^i) (K_i^{(P)'} K^{(P)'}{}^i) - \varepsilon^{-4} (P'_i K^{(P)'}{}^i)^2 - \\ &2\varepsilon^{-2} (\bar{H}' + \varepsilon^{-2} M') J'^k \varepsilon_{ijk} P'^i K^{(P)'}{}^j \end{aligned}$$

Como es usual, los operadores de Casimir contraídos se obtienen al aplicar el límite  $\varepsilon \rightarrow 0$  a los operadores adecuadamente reescalados:

$$\hat{C}_1^{PE} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \tilde{C}_1^{PE} = M' \quad (4.40)$$

$$\hat{C}_2^{PE} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^4 \tilde{C}_2^{PE} = M'^2 \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} \hat{C}_4^{PE} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^4 C_4^{PE} = M'^2 J'_i J'^i + (P'_i P'^i) (K_i^{(P)'} K^{(P)'}{}^i) - \quad (4.42) \\ &-(P'_i K^{(P)'}{}^i)^2 - 2M' J'^k \varepsilon_{ijk} P'^i K^{(P)'}{}^j \end{aligned}$$

Comparemos las ecs.(4.40), (4.41) y (4.42) con las ecs.(A.77), (A.78) y (A.79), que expresan los operadores de Casimir del grupo de Galileo extendido centralmente en el sistema de referencia del centro de masa. Como en el caso de las relaciones de conmutación, si la masa  $M'$  del primer grupo de ecuaciones se identifica con la masa  $M$  del segundo grupo, y el boost de Poincaré  $K^{(P)'}{}^i$  se identifica con el boost galileano  $K_i^{(G)}$ , se puede decir que la contracción generalizada de Inönü-Wigner de los operadores de Casimir del grupo de Poincaré trivialmente extendido conduce a los operadores de Casimir del grupo de Galileo con extensión central.

Resumiendo, cuando la Regla de Actualización de la IMH se expresa en una formulación invariante ante el grupo de Galileo, esto nos lleva a un resultado físicamente razonable: los observables con valores actuales son aquéllos representados por los operadores de Casimir del grupo de Galileo con extensión central,  $M$ ,  $W$  y  $S^2$ , que adquieren sus valores actuales  $m$ ,  $w$  y  $s(s+1)$ . La estrategia natural es extrapolar la interpretación al dominio relativista al reemplazar el grupo de Galileo por el grupo de Poincaré. Pero cuando se tiene en cuenta que el grupo relevante de la mecánica cuántica no relativista no es el grupo de Galileo, sino su extensión central, el mero reemplazo del grupo relevante no es suficiente: se debe también mostrar que los observables con valores actuales en los casos relativista y no relativista están relacionados a través de un límite adecuado. En consecuencia, el grupo de Poincaré debe ser trivialmente extendido, para mostrar que el límite entre los operadores de Casimir correspondientes también es adecuado. Este resultado cuenta en favor de la extrapolación de la IMH a la mecánica cuántica relativista.

### 4.2.1. Mecánica cuántica relativista

Dado que el espíritu de la IMH es considerar los observables que representan invariancias como los observables con valores actuales del sistema, cuando esta interpretación se extrapola al dominio relativista deben considerarse todas las simetrías. En particular, en las teorías cuánticas relativistas, además de las simetrías espacio-temporales representadas por el grupo de Poincaré, los sistemas cuánticos tienen simetrías gauge internas. Por lo tanto, de acuerdo con la IMH, las magnitudes invariantes correspondientes a aquellas simetrías gauge deberían adquirir también valores actuales. Como ilustración de esta idea, en esta sección se analizará el caso de la simetría gauge  $U(1)$ .

#### Simetría interna

Consideremos un campo de Dirac libre  $\Psi$  cuyo Lagrangiano tiene la siguiente forma:

$$\mathcal{L}_D = \bar{\Psi} (i\hbar\partial_t - c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} - \beta m_o c^2) \Psi \quad (4.43)$$

donde  $\vec{\alpha}$  y  $\beta$  son las matrices de Dirac y  $\Psi$  es un espinor de cuatro componentes que está compuesto por dos espinores. Esto significa que el campo tiene la siguiente forma:  $\Psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$  (y la transpuesta conjugada es  $\Psi^\dagger = \begin{pmatrix} \phi^\dagger & \chi^\dagger \end{pmatrix}$ ), donde  $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$  y  $\chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$ . Por lo tanto, podemos escribir el Lagrangiano de la ec. (4.43) explícitamente en términos de los espinores como

$$\mathcal{L}_D(\phi, \chi) = \begin{pmatrix} \phi^\dagger & \chi^\dagger \end{pmatrix} \left[ i\hbar \begin{pmatrix} \partial_t \phi \\ \partial_t \chi \end{pmatrix} - c \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{p} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} - m_o c^2 \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \right] \quad (4.44)$$

donde  $\vec{\sigma}$  son las matrices de Pauli. Al calcular el producto interno, la ec. (4.44) resulta

$$\mathcal{L}_D(\phi, \chi) = i\hbar\phi^\dagger\partial_t\phi + i\hbar\chi^\dagger\partial_t\chi - \phi^\dagger c\vec{\sigma} \cdot \vec{p}\chi - \chi^\dagger c\vec{\sigma} \cdot \vec{p}\phi - m_o c^2\phi^\dagger\phi + m_o c^2\chi^\dagger\chi \quad (4.45)$$

Este Lagrangiano es invariante ante la simetría global gauge representada por el grupo de Lie Abelian  $U(1)$ , cuya representación en términos de los campos es

$$\Psi \rightarrow e^{-iQ\alpha}\Psi \quad \bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi}e^{iQ\alpha} \quad (4.46)$$

donde  $Q$  es el generador de la transformación y  $\alpha$  es una constante real. Como se sabe,  $\mathcal{L}_D$  no es invariante ante una transformación gauge local  $U(1)$  que transforma los campos de la siguiente manera

$$\Psi \rightarrow e^{-iQ\alpha(x)}\Psi \quad \bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi}e^{iQ\alpha(x)} \quad (4.47)$$

donde  $\alpha(x)$  es ahora una función real de la coordenada espacio-temporal  $x_\mu$ . Para recobrar la invariancia debe incluirse un campo  $A_\mu$  que se transforme como

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\alpha \quad (4.48)$$

y

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (4.49)$$

Entonces, el Lagrangiano invariante queda

$$\mathcal{L}_{D_f} = \bar{\Psi} \left( i\hbar(\partial_t - ieA_o) - c\vec{\alpha} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) - \beta m_o c^2 \right) \Psi + L_M \quad (4.50)$$

En este caso,  $Q$  es el único operador de Casimir trivial  $C_1^U$  del grupo de simetría interna  $U(1)$ .

Dado que la simetría gauge interna  $U(1)$  es una simetría de la teoría, de acuerdo con la IMH extrapolada a este caso, el único operador de Casimir  $C_1^U = Q$  de este grupo de simetría –invariante ante las correspondientes transformaciones– es un observable con valor actual del sistema. Otra vez, esto nos lleva a una situación física razonable dado que el operador  $Q$  del grupo de simetría interna gauge  $U(1)$  es el operador carga,  $Q = eI$ .

### El límite de la simetría interna

En la bibliografía es usual encontrar el límite no relativista de las ecuaciones de Euler-Lagrange, pero no del Lagrangiano. Con el fin de obtener este límite, podemos introducir el siguiente ansatz:

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = e^{-\frac{im_o c^2 t}{\hbar}} \begin{pmatrix} \phi_o \\ \chi_o \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

donde  $\phi_o$  y  $\chi_o$  todavía dependen de las coordenadas espacio-temporales. La ec. (4.51) expresa los espinores en términos de dos factores separados dependientes del tiempo: uno desconocido, dado por las funciones  $\phi_o$  y  $\chi_o$ , y el otro un factor oscilante con frecuencia  $\omega_o = \frac{m_o c^2}{\hbar}$ . Introduciendo la ec. (4.51) en la ec. (4.45), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_D(\phi_o, \chi_o) &= i\hbar\phi_o^\dagger \partial_t \phi_o + i\hbar\chi_o^\dagger \partial_t \chi_o - \phi_o^\dagger c \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi_o - \\ &\quad \chi_o^\dagger c \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \phi_o + 2m_o c^2 \chi_o^\dagger \chi_o \end{aligned} \quad (4.52)$$

que puede reacomodarse como

$$\mathcal{L}_D(\phi_o, \chi_o) = i\hbar\phi_o^\dagger \partial_t \phi_o - \phi_o^\dagger c \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi_o - \chi_o^\dagger c \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \phi_o + i\hbar\chi_o^\dagger (\partial_t + 2m_o c^2) \chi_o \quad (4.53)$$

Las derivadas temporales de los espinores  $\phi_o$  y  $\chi_o$  están relacionadas con la oscilación temporal con frecuencia  $\omega = E_o/\hbar$ .

Hasta este punto, no se ha introducido todavía ningún límite no relativista. Con el fin de efectuar tal límite, debemos notar que la energía total del espinor  $\phi_o$  es  $E_{\phi_o} = E_o$  y del espinor  $\chi_o$  es  $E_{\chi_o} = E_o + 2m_o c^2$ . Por lo tanto, si consideramos que  $E_o \ll m_o c^2$ , entonces

$$E_{\phi_o} = E_o \quad E_{\chi_o} = E_o + 2m_o c^2 \sim 2m_o c^2 \quad (4.54)$$



Estas dos relaciones implican que los dos últimos términos de la ec. (4.53) pueden ser escritos como

$$i\hbar\chi_o^\dagger(\partial_t + 2m_o c^2)\chi_o = i\hbar\chi_o^\dagger(E + 2m_o c^2)\chi_o \sim i\hbar\chi_o^\dagger 2m_o c^2\chi_o \quad (4.55)$$

y el límite no relativista del Lagrangiano resulta

$$\tilde{\mathcal{L}}_D(\phi_o, \chi_o) = i\hbar\phi_o^\dagger\partial_t\phi_o - \phi_o^\dagger c\vec{\sigma} \cdot \vec{p}\chi_o - \chi_o^\dagger c\vec{\sigma} \cdot \vec{p}\phi_o + i\hbar 2m_o c^2\chi_o^\dagger\chi_o \quad (4.56)$$

Con el fin de poder escribir el Lagrangiano de la ec. (4.56) en términos de uno de los espinores, digamos  $\phi_o$ , debemos comenzar por calcular la ecuación de Euler-Lagrange para  $\chi_o$ ,

$$\partial_t\left(\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}_D}{\partial(\partial_t\chi_o^\dagger)}\right) + \partial_i\left(\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}_D}{\partial(\partial_i\chi_o^\dagger)}\right) - \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}_D}{\partial\chi_o^\dagger} = 0 \quad (4.57)$$

que resulta

$$c\vec{\sigma} \cdot \vec{p}\phi_o - 2m_o c^2\chi_o = 0 \quad (4.58)$$

o, equivalentemente,

$$\chi_o = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}\phi_o}{2m_o c} \quad (4.59)$$

Si reemplazamos la ec. (4.59) en la ec. (4.56), se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_D(\phi_o, \chi_o) &= i\hbar\phi_o^\dagger\partial_t\phi_o - \phi_o^\dagger c\vec{\sigma} \cdot \vec{p}\left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}\phi_o}{2m_o c}\right) - \\ &- \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}\phi_o}{2m_o c}\right)^\dagger c\vec{\sigma} \cdot \vec{p}\phi_o + i\hbar 2m_o c^2\left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}\phi_o}{2m_o c}\right)^\dagger\left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}\phi_o}{2m_o c}\right) \end{aligned} \quad (4.60)$$

Dado que  $\left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}\phi_o}{2m_o c}\right)^\dagger = \frac{1}{2m_o c}\phi_o^\dagger(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^\dagger$ , la ec. (4.60) queda

$$\tilde{\mathcal{L}}_D(\phi_o) = i\hbar\phi_o^\dagger\partial_t\phi_o - \frac{1}{2m_o}\phi_o^\dagger p^2\phi_o \quad (4.61)$$

donde hemos usado que  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) = p^2$ . En particular, el último término de la ec. (4.61) puede escribirse como

$$\phi_o^\dagger p^2\phi_o = \hbar^2\phi_o^\dagger\nabla^2\phi_o = \hbar^2((\vec{\nabla}(\phi_o^\dagger\vec{\nabla}\phi_o) - \vec{\nabla}\phi_o^\dagger\vec{\nabla}\phi_o)) \quad (4.62)$$

El primer término del miembro izquierdo de la ec. (4.62) es una divergencia, que sólo contribuye en un término de superficie que se hace cero cuando la densidad Lagrangiana es integrada. Entonces, la ec. (4.61) finalmente queda

$$\mathcal{L}_{NR} = \tilde{\mathcal{L}}_D(\phi_o) = i\hbar\phi_o^\dagger\partial_t\phi_o - \frac{\hbar^2}{2m_o}\vec{\nabla}\phi_o^\dagger\vec{\nabla}\phi_o \quad (4.63)$$

que es el Lagrangiano no relativista deseado. A su vez, la ecuación de Euler-Lagrange no relativista queda

$$i\hbar\partial_t\phi_o = \frac{\hbar^2}{2m_o}\overrightarrow{\nabla}^2\phi_o \quad (4.64)$$

Por lo tanto se ha mostrado que el límite no relativista del Lagrangiano de Dirac nos lleva al Lagrangiano de la ecuación de Schrödinger.

### El grupo total de la mecánica cuántica relativista con grupo gauge $U(1)$

Respecto de las simetrías espacio-temporales, podemos ver que:

- El Lagrangiano relativista  $L_D$  de la ec. (4.43) es invariante ante el grupo de Poincaré  $ISO(1, 3)$ , y también ante la extensión trivial  $ISO(1, 3) \times \langle M \rangle$ .
- El Lagrangiano no relativista  $L_{NR}$  de la ec. (4.63) es invariante ante el grupo de Galileo  $\mathcal{G}$ , y también ante la extensión trivial  $\mathcal{G} \times \langle M \rangle$ , que, como hemos visto, puede ser obtenido por medio de la contracción de Inönü-Wigner de  $ISO(1, 3) \times \langle M \rangle$ .

Respecto de las simetrías internas, a su vez:

- El Lagrangiano relativista  $L_D$  de la ec. (4.43) es invariante ante la transformación global gauge  $U(1)$  actuando sobre los espinores. Si queremos preservar la invariancia ante transformaciones gauge locales, debemos introducir campos gauge, que no son más que los potenciales electromagnéticos regidos por las ecuaciones de Maxwell (ver [91]).
- El Lagrangiano de Schrödinger no relativista  $L_{NR}$  de la ec. (4.63) es también invariante ante una transformación gauge global  $U(1)$ , y también es invariante ante una transformación gauge local por medio de la introducción de campos gauge asociados a la simetría  $U(1)$  dentro de esta teoría (ver [82]). Si bien el grupo de simetría externa es diferente al caso relativista, es posible la inclusión de campos gauge electromagnéticos suponiendo ciertas condiciones para éstos.

El hecho de que el electromagnetismo pueda ser obtenido de una teoría no relativista puede sonar raro. Sin embargo, actualmente está claro que la estructura de las ecuaciones de Maxwell no está determinada por las propiedades de simetría del espacio-tiempo sino por las propiedades de las simetrías gauge. La única diferencia entre los casos relativista y no relativista es que, mientras que los potenciales gauge en el Lagrangiano relativista son estrictamente potenciales electromagnéticos, los potenciales gauge en el Lagrangiano no relativista son componentes de un campo vectorial galileano, y esto significa que se transforman como alguna representación irreducible de la extensión central del grupo de Galileo. En consecuencia, en el caso no relativista, los potenciales son el *límite magnético* o el *límite eléctrico* de los potenciales electromagnéticos (ver [92]).

Ahora la cuestión es preguntarnos cómo el grupo de Poincaré y el grupo de simetría interna se combinan entre sí para darnos un nuevo grupo de simetría, cuyos operadores de Casimir representen los observables con valor actual del sistema cuántico de acuerdo con la IMH. El punto es relevante ya que los operadores de Casimir del nuevo grupo podrían ser diferentes que los operadores de Casimir de los grupos componentes ( $M$  y  $S^2$  provenientes del grupo de Poincaré, y  $Q$  proveniente del grupo gauge). Afortunadamente, éste no es el caso: de acuerdo con el teorema de Coleman-Mandula ([93], para una explicación simple, ver [94], [95]), no existe unión no trivial del grupo de Poincaré con el grupo gauge. En otras palabras, la única posible combinación entre los dos grupos es el producto directo.

Resumiendo, el grupo total de la mecánica cuántica relativista con simetría gauge  $U(1)$  es

$$ISO(1,3) \times \langle M \rangle \times U(1) \quad (4.65)$$

cuyos operadores de Casimir son los de la extensión trivial del grupo de Poincaré —dados por la masa  $M$  y el spin  $S$ — y los del grupo de gauge  $U(1)$  —dado por la carga  $Q$ —. A su vez, el grupo total de la mecánica cuántica no relativista es

$$\mathcal{G} \times \langle M \rangle \times U(1) \quad (4.66)$$

cuyos operadores de Casimir son los de la extensión central del grupo de Galileo —dados por la masa  $M$ , la energía interna  $W$ , y el spin  $S$ — y los del grupo gauge  $U(1)$  —dado por la carga  $Q$ —. La contracción de Inönü-Wigner aplicada al grupo total de la mecánica cuántica relativista nos lleva al grupo total no relativista:

$$ISO(1,3) \times \langle M \rangle \times U(1) \rightarrow \mathcal{G} \times \langle M \rangle \times U(1) \quad (4.67)$$

En consecuencia, de acuerdo con la IMH, los observables con valores actuales de los sistemas cuánticos relativistas son  $M$ ,  $S^2$  y  $Q$ , con sus valores actuales: masa  $m_0$ , spin  $s$  y carga  $e$ . Éste es el resultado que se esperaría desde un punto de vista físico, dado que la masa, el spin y la carga son propiedades que supuestamente poseen todos los sistemas cuánticos y que son medibles en cualquier situación física, y sus valores son precisamente lo que define los diferentes tipos de partículas elementales de la teoría.

### 4.3. Sistema de muchas partículas

Como se sabe, el caso de muchas partículas no puede ser rigurosamente tratado por la mecánica cuántica relativista,<sup>2</sup> y este hecho nos lleva directamente al ámbito de la teoría cuántica de campos. También sabemos que, en general, el número de partículas no es una cantidad conservada en la teoría cuántica de campos y, por lo tanto, tampoco es un operador de Casimir del grupo de simetría relevante. No obstante, en los casos particulares de los estados “in” y “out” del proceso de scattering, se asume que el sistema puede ser

<sup>2</sup>Si bien la mecánica cuántica relativista es una teoría de muchas partículas.

modelado como una colección de  $N$  partículas no interactuantes (las partículas experimentalmente detectadas). Por lo tanto, en esos estadíos, el grupo relevante es el producto tensorial de  $N$  copias del grupo total  $ISO(1, 3) \times \langle M \rangle \times U(1)$ .<sup>3</sup> La representación de este  $N$ -producto tensorial puede ser expresada como el producto de las representaciones de los grupos factores, que están etiquetadas por  $N$  y por los operadores de Casimir del grupo  $ISO(1, 3) \times \langle M \rangle \times U(1)$ . Esto significa que, en los estadíos “in” y “out”, el operador número de partículas  $N$  se transforma en un operador de Casimir más a tener en cuenta.

Entonces consideremos un sistema cuántico etiquetado por los operadores de Casimir  $C_1^{PE} = M$ ,  $C_2^{PE} = M^2$  and  $C_4^{PE} = S^2$  del grupo de Poincaré extendido trivialmente –en el sistema de referencia del centro de masa– y el operador de Casimir  $C_1^U = Q$  del grupo gauge. Un estado de  $n$  partículas no interactuantes está dado por

$$|n\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes \dots |1\rangle = (a^\dagger \otimes a^\dagger \otimes \dots a^\dagger)|0\rangle = (a^\dagger)^n|0\rangle, \quad (4.68)$$

donde  $a^\dagger$  es el operador de creación de cada partícula, y

$$N|n\rangle = n|n\rangle,$$

es el número de partículas, que es aditivo. Podemos combinar ahora los operadores de Casimir conocidos, y definir los nuevos operadores de la colección de  $N$  partículas con la misma masa y spin:

$$\text{Masa} = (C_2^{PE})^{\frac{1}{2}} N, \quad \text{Spin} = (C_4^{PE})^{\frac{1}{2}}, \quad \text{Carga} = Q, \quad \text{Número de partículas} = N. \quad (4.69)$$

De acuerdo con la IMH, todos estos operadores representan observables con valores actuales del sistema de  $N$  partículas no interactuantes. Recordemos otra vez que este resultado no es general en teoría cuántica de campos, ya que ésta es una teoría de campos interactuantes y en estos casos no es posible definir operadores de creación y destrucción ni tampoco el operador número de partículas.<sup>4</sup> No obstante, el hecho de que  $N$  sea un observable con valor definido es razonable para los estadíos “in” y “out”, donde el número de partículas es siempre considerado una magnitud del sistema. A su vez, en la etapa de interacción,  $N$  no es un operador de Casimir, por lo tanto de acuerdo con la IMH, no es un observable con valor definido; y esto es razonable debido a que en esta etapa no se espera que haya un valor definido del número de partículas.

Desde el punto de vista de la teoría cuántica de campos estos resultados no son rigurosos, ya que en ningún momento se efectuó la segunda cuantificación. No obstante, los conceptos de simetría son válidos para los ámbitos relativistas y no relativistas, los cuales permiten elucidar sobre tierra firme los conceptos primitivos de una interpretación de la teoría cuántica de campos.

<sup>3</sup>Por simplicidad sólo consideramos colecciones de un único tipo de partícula elemental.

<sup>4</sup>En la teoría cuántica de campos interactuantes hay infinitas representaciones inequivalentes de las relaciones de conmutación canónicas, por lo tanto, o bien se debe elegir una o bien se debe dejar de considerar que los resultados experimentales de los procesos de scattering son fiables, ya que estos asumen que en  $t \rightarrow \pm\infty$ , los campos no interactuantes se pueden transformar unitariamente en campos de interacción.

## Capítulo 5

# Conclusiones finales

En la historia de las interpretaciones de la mecánica cuántica, el Hamiltoniano del sistema no ha tenido un papel preponderante. Esto suena extraño cuando recordamos el papel crucial que tiene en mecánica, tanto clásica como cuántica: por un lado el Hamiltoniano representa las magnitudes que se conservan y por otro lado es el elemento que gobierna la dinámica. No debe resultar sorprendente, entonces, que en la mecánica cuántica el Hamiltoniano juegue un papel decisivo en la selección del contexto de actualización y de los observables con valor definido.

En una primera parte de esta tesis, se ha tomado esta idea como el punto de partida para una interpretación que intenta dar una respuesta adecuada a los problemas tradicionales de la mecánica cuántica. En particular, se ha mostrado cómo la IMH propone la Regla de Actualización que unívocamente selecciona un contexto preferido independiente del tiempo, donde los hechos posibles pueden hacerse actuales. De este modo, la IMH ha probado ser efectiva en dos sentidos: (i) la aplicación de la Regla de Actualización a muchas situaciones físicas concretas parece estar de acuerdo con los compromisos teóricos y la evidencia empírica que provienen de la práctica científica, y (ii) cuando se aplica la Regla de Actualización al proceso de medición, la regla no sólo explica la lectura definida del puntero, tanto en el caso ideal como en el no ideal, sino que también tiene en cuenta la diferencia entre mediciones fiables y no fiables, de acuerdo con la práctica científica.

En una segunda etapa, se estudiaron las restricciones impuestas por la teoría de grupos en la interpretación. El interés se centró en la covariancia e invariancia de la ecuación de Schrödinger y la transformación Galileana de la Regla de Actualización. Se encontró que esta regla es covariante al igual que la ecuación de Schrödinger y de este modo se pudo asegurar que la definición de sistema es invariante ante las transformaciones de Galileo, en concordancia con la idea de que estas transformaciones expresan sólo un cambio de la perspectiva utilizada para describir el sistema. A su vez se reformuló la Regla de Actualización, haciéndola explícitamente invariante ante las transformaciones de Galileo al definirla en términos de los operadores de Casimir de este grupo de simetría.

Por último, considerando la relevancia de la teoría de grupos en la IMH, se extrapoló su idea central al ámbito relativista reemplazando el grupo de Galileo por el grupo de Poincaré. De este modo, los observables con valores definidos pasaron a ser la masa, el spin y el operador de Casimir de alguna simetría interna. En particular se mostró el caso de la simetría  $U(1)$ . A su vez, se probó que los contextos de actualización, en el ámbito relativista y no relativista, están correctamente relacionados por medio de un límite adecuado, que pudo ser expresado en términos de la teoría de grupos a partir de la contracción de Inönü-Wigner.

Es necesario considerar en estas conclusiones que hace falta introducir modificaciones en la IMH, en la cual por su naturaleza, se actualizan solo los estados en reposo, por una nueva versión donde se actualicen los estados en movimiento: los estados de la base puntero móvil. Estas modificaciones están siendo elaboradas.

Finalmente para tener una interpretación completa de la Teoría Cuántica de Campos tendremos que, eventualmente, introducir estas extensiones y probablemente sustituir el formalismo de renormalización, de muy difícil interpretación, por un formalismo de proyección que estamos desarrollando (ver [15]). Solo entonces el proyecto, del cual esta tesis es la primera parte, estará terminado.

## Apéndice A

# Formulación algebraica de la mecánica cuántica

En este apéndice se ofrecerá una breve explicación de los términos y conceptos matemáticos utilizados en el desarrollo de la tesis, siguiendo la estructura presentada en [22], obra que resume la formulación algebraica de la teoría cuántica de campos y que se puede utilizar con algunas variaciones para la mecánica cuántica.

### A.0.1. Sistemas cuánticos con muchos grados de libertad

#### Principio de superposición y sectores de superselección

En la formulación standard de la mecánica cuántica, los estados físicos se describen como vectores  $|\Phi\rangle$  de algún espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial complejo con un producto escalar definido positivo

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C} \quad (\text{A.1})$$

$$|\Phi\rangle, |\Psi\rangle \rightarrow \langle\Phi|\Psi\rangle \quad (\text{A.2})$$

que es antilineal por izquierda y lineal por derecha y mediante el cual se puede definir la siguiente norma:

$$\|\Phi\| = \langle\Phi|\Phi\rangle^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.3})$$

A su vez,  $\mathcal{H}$  se puede asumir como completo con respecto a esta norma, es decir, todas las sucesiones de Cauchy en  $\mathcal{H}$  convergen.

Los observables se corresponden con operadores autoadjuntos  $A$  en  $\mathcal{H}$ , es decir,  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  es un mapeo lineal continuo en  $\mathcal{H}$  que es acotado en la esfera unidad:

$$\langle\Phi|A\Psi\rangle = \langle A\Phi|\Psi\rangle \quad \text{para todo } \Phi, \Psi \in \mathcal{H} \quad (\text{A.4})$$

Todo mapeo lineal continuo en  $\mathcal{H}$  define una norma en el álgebra de operadores lineales continuos en  $\mathcal{H}$ .

En algunas aplicaciones se suelen usar operadores lineales no acotados. Ellos están usualmente definidos en un subespacio denso del espacio de Hilbert. Para incluirlos en el conjunto de observables se necesitan algunas sutilezas matemáticas que se evadirán en este apéndice.

A cada vector distinto de cero  $\Phi$  y a un conjunto de operadores autoadjuntos que conmutan entre ellos,  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  se le puede asociar una medida de probabilidad  $\mu_{\Phi, A_1, \dots, A_n}$ . Esta medida de probabilidad se define como:

$$\int d\mu_{\Phi, A_1, \dots, A_n} p(a_1, \dots, a_n) = \langle \Phi | p(A_1, \dots, A_n) \Phi \rangle \|\Phi\|^{-2} \quad (\text{A.5})$$

para todos los polinomios  $p$  en  $n$  variables  $a_1, \dots, a_n$ , que son los correspondientes autovalores de los observables  $A_i$ . Para una región  $G \subset \mathbb{R}^n$ , la probabilidad de que el conjunto de observables  $(A_1, \dots, A_n)$  adquieran el valor  $(a_1, \dots, a_n) \in G$  esta dada entonces por  $\mu_{\Phi, A_1, \dots, A_n}$ .

La distribución de probabilidad asociada a un vector  $\Phi$  depende solamente del rayo  $\{\lambda\Phi, \lambda \in \mathbb{C}\}$ . Pero en una superposición lineal

$$\Psi = \alpha\Phi_1 + \beta\Phi_2 \quad (\text{A.6})$$

las probabilidades descritas por  $\Psi$  dependen de la elección de los vectores  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  en sus respectivos rayos. La posibilidad de la superposición es la propiedad crucial de la teoría cuántica y es responsable de los efectos de interferencia.

Debido a la posibilidad de interferencia, los estados cuánticos son diferentes a los estados de la física clásica, donde un estado puede ser etiquetado por un punto en el espacio de fases, o como una distribución de probabilidad en el espacio de las fases.

Aun así, no todos los estados cuánticos pueden estar en superposición. Los vectores en el espacio de Hilbert se pueden combinar linealmente, pero puede suceder que la fase relativa entre dos vectores no pueda ser observada. Por ejemplo, considérese la superposición de un estado de una partícula con spin  $1/2$  con otra partícula con spin  $0$ :

$$\Psi = \alpha\Phi_{\frac{1}{2}} + \beta\Phi_0 \quad (\text{A.7})$$

Una rotación de  $2\pi$  cambia el estado de la partícula con spin  $1/2$  en un factor de  $-1$  y deja al estado de spin  $0$  inalterado. Por lo tanto,  $\Psi$  se transforma en

$$\Psi = -\alpha\Phi_{\frac{1}{2}} + \beta\Phi_0 \quad (\text{A.8})$$

Pero, como se sabe, una rotación de  $2\pi$  no tiene efectos observables, por lo tanto para todos los observables  $A$  se encuentran los mismos valores medios que antes. Esto implica que los elementos de matriz de un observable  $A$  entre un estado de spin  $1/2$  y un estado de spin  $0$  deben hacerse cero. Por lo tanto, el estado correspondiente a  $\Psi$  es equivalente a una matriz densidad



$$\rho = |\alpha|^2 \left| \Phi_{\frac{1}{2}} \right\rangle \left\langle \Phi_{\frac{1}{2}} \right| + |\beta|^2 \left| \Phi_0 \right\rangle \left\langle \Phi_0 \right| \quad (\text{A.9})$$

La no existencia de superposiciones coherentes lleva a una descomposición del espacio de estados del sistema físico en sectores de superselección.

El espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  puede ser descompuesto en una suma directa de subespacios mutuamente ortogonales

$$\mathcal{H} = \bigoplus_i \mathcal{H}_i \quad (\text{A.10})$$

Cada vector  $\Phi \in \mathcal{H}$  tiene una descomposición única  $\Phi = \sum_i \Phi_i$  con  $\Phi_i \in \mathcal{H}_i$ .

Las fases de los vectores  $\Phi_i$  no tienen significado físico. Los observables son operadores que dejan a los subespacios  $\mathcal{H}_i$  invariantes y pueden ser escritos en forma de matriz bloque diagonal

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

donde cada  $A_i$  es la restricción de  $A$  a  $\mathcal{H}_i$ . Sólo estados con el mismo sector de superselección pueden superponerse. En general, los sectores de superselección son definidos por los grupos de simetría por medio de sus representaciones irreducibles.

### A.0.2. Formulación algebraica de la teoría cuántica

El álgebra de observables  $\mathcal{U}$  consiste en la presencia de sectores de superselección de elementos de la forma  $A = \bigoplus_i A_i$  con operadores  $A_i$  en  $\mathcal{H}_i$  y norma  $\|A\| = \sup_i \|A_i\| < \infty$ . Este álgebra tiene centro no trivial  $Z = \{A \in \mathcal{U}, [A, B] = 0 \forall B \in \mathcal{U}\} = \bigoplus_i \lambda_i I_{\mathcal{H}_i}$ . Los subespacios  $\mathcal{H}_i$  son el conjunto de autosubespacios de los elementos del centro.

Un ejemplo sencillo es el álgebra generada por las componentes del operador momento angular. El centro de este álgebra está generado por el cuadrado absoluto del momento angular. Los sectores consisten en los estados con un número cuántico de momento angular asignado.

En la formulación de espacios de Hilbert de la mecánica cuántica, el álgebra de observables es el conjunto de operadores lineales en algún espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Un operador lineal se dice acotado si su norma

$$\|A\| = \sup_{\Phi \in \mathcal{H}, \|\Phi\|=1} \|A\Phi\| \quad (\text{A.12})$$

es finita.  $A^*$  es el operador autoadjunto (denotado también como  $A^\dagger$ ). Por definición, este operador autoadjunto satisface  $\langle \Phi | A^* \Psi \rangle = \langle A\Phi | \Psi \rangle$ ,  $\Phi, \Psi \in \mathcal{H}$ .

Si se comienza con el álgebra de operadores como objeto fundamental de la teoría, se necesita entonces una caracterización de los estados que sea independiente de la posible realización de los observables como operadores en el espacio de Hilbert.

Un estado asigna a un observable no sólo un valor, sino una distribución de probabilidades. En la formulación algebraica de la mecánica cuántica, se pueden identificar los estados a partir de los valores medios de funcionales aplicados sobre los elementos del álgebra de operadores. Por definición, éstos son funcionales lineales  $\omega$  en el álgebra de observables, que están normalizados ( $\omega(I) = 1$ ) y son positivos ( $\omega(A^*A) \geq 0$ ). Bajo ciertas condiciones ( $\sup |\omega(A^n)|^{\frac{1}{n}} < \infty$ ), tales funcionales  $\omega$  inducen, para cada elemento autoadjunto  $A$  del álgebra, una medida de probabilidad  $\mu_{\omega,A}$  unívocamente determinada con la siguiente propiedad:

$$\int a^n d\mu_{\omega,A}(a) = \omega(A^n), \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{A.13})$$

El espectro de un elemento  $A$  del álgebra puede también caracterizarse en términos puramente algebraicos. El espectro se define como el conjunto de todos los números complejos  $\lambda \in \mathbb{C}$  para los cuales  $A - \lambda$  no tiene inversa en  $\mathcal{U}$ . Los elementos del espectro de  $A$  son los posibles valores del observable  $A$ .

A su vez, este álgebra de observables es un álgebra de operadores en el espacio de Hilbert. Por lo tanto, cada vector  $\Phi$  del espacio de Hilbert con  $\|\Phi\| = 1$  induce un estado (en el sentido de la formulación algebraica) a través de

$$\omega_\Phi(A) = \langle \Phi | A \Phi \rangle \quad (\text{A.14})$$

Los estados pueden combinarse por medio de una combinación convexa

$$\omega = \sum \lambda_i \omega_i \quad (\text{A.15})$$

y esto es otra vez un estado.

Para estados  $\omega_i$  que están inducidos por vectores  $\Phi_i$  del espacio de Hilbert, los estados  $\omega$  pueden ser representados por matrices densidad

$$\rho = \sum \lambda_i |\Phi_i\rangle \langle \Phi_i| \quad (\text{A.16})$$

El valor medio está dado por

$$\omega(A) = \text{Tr}(\rho A) \quad (\text{A.17})$$

donde  $\text{Tr}$  es la traza de un operador.

La traza es invariante ante transformaciones unitarias,  $\text{Tr}(UAU^*) = \text{Tr}A$ , pero puede tener valor  $\infty$ . Las matrices densidad son operadores positivos por definición, con traza unidad. Los operadores que pueden escribirse como combinaciones lineales finitas de operadores positivos con traza finita se denominan “operadores de clase traza”. La traza puede ser extendida a un funcional lineal en todos los operadores de clase traza. A su vez, el conjunto de estos operadores forman un ideal de dos lados  $\mathcal{J}$  en el álgebra de operadores acotados en el espacio de Hilbert.

### A.0.3. Álgebra de operadores

Para un discusión general, el concepto más apropiado para estas álgebras, es el de  $C^*$ -álgebras, las cuales poseen una norma con la propiedad

$$\|A^*A\| = \|A\|^2 \quad (\text{A.18})$$

Esto se denomina una  $C^*$ -norma. A su vez, son espacios normados completos. Cada  $C^*$ -álgebra es isomorfa a un álgebra cerrada normada de operadores acotados en un espacio de Hilbert no necesariamente separable. Pero, en general, la representación de una  $C^*$ -álgebra por operadores en un espacio de Hilbert no es única.

Como ya vimos, un concepto que es significativo en el nivel del álgebra es el espectro de un elemento. El espectro de un elemento  $A$  de una  $C^*$ -álgebra permanece dentro del círculo con radio  $\|A\|$  alrededor del origen y es real para elementos autoadjuntos.

Dentro de las  $C^*$ -álgebras, una importante subclase son las álgebras de von Neumann (también llamadas  $W^*$ -álgebras). Éstas están caracterizadas por la propiedad de que cada red acotada de elementos positivos monotónicamente crecientes tienen un supremo. Estas álgebras de von Neumann son isomorfas al álgebra de los operadores del espacio de Hilbert que es cerrada en la topología de operadores débil.

### A.0.4. Contrucción GNS.

La formulación algebraica de la teoría cuántica está íntimamente relacionada con la formulación en espacios de Hilbert. Para describir esta conexión se necesita el concepto de representación: Una representación de un álgebra involutiva y con elemento unidad  $\mathcal{U}$  es un  $*$ -homomorfismo  $\pi$  en el álgebra de operadores lineales en un subespacio denso  $D$  del espacio de Hilbert.

Aquí un homomorfismo es un  $*$ -homomorfismo si

$$\langle \Phi | \pi(A)\Psi \rangle = \langle \pi(A^*)\Phi | \Psi \rangle \quad \forall \Phi, \Psi \in D \quad (\text{A.19})$$

Ya hemos visto que cualquier vector unidad  $\Phi \in D$  induce un estado del álgebra por medio de

$$\omega(A) = \langle \Phi | \pi(A)\Phi \rangle \quad (\text{A.20})$$

Sorpresivamente, la relación inversa también se cumple. Ésta es la famosa construcción de Gelfand, Naimark y Segal (GNS) (ver [23]):

*Teorema:* Sea  $\omega$  un estado de una álgebra involutiva  $\mathcal{U}$  con elemento unidad. Entonces existe una representación  $\pi$  del álgebra mediante operadores lineales en el subespacio denso  $D$  de algun espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  y vector unidad  $\Omega \in D$ , tal que

$$\omega(A) = \langle \Omega | \pi(A)\Omega \rangle \quad (\text{A.21})$$

y  $D = \{\pi(A)\Omega, A \in \mathcal{U}\}$ . La demostración de este teorema puede efectuarse de un modo simple. Primero se debe introducir un producto escalar en el álgebra por medio del estado  $\omega$  a través de

$$\langle A|B \rangle = \omega(A^*B) \quad (\text{A.22})$$

Este producto escalar tiene las propiedades de linealidad por derecha, antilinealidad por izquierda, hermiticidad y también es semidefinido positivo  $\langle A|A \rangle = \omega(A^*A) \geq 0$ . Se puede estudiar el conjunto

$$\mathcal{R} = \{A \in \mathcal{U}, \omega(A^*A) = 0\} \quad (\text{A.23})$$

Es crucial que  $\mathcal{R}$  sea un ideal izquierdo en  $\mathcal{U}$ . Debido a la desigualdad de Cauchy-Schwarz,  $\mathcal{R}$  es un subespacio de  $\mathcal{U}$ . Incluso, para  $A \in \mathcal{R}$  y  $B \in \mathcal{U}$  tenemos, otra vez por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\omega((BA)^*BA) = \omega(A^*B^*BA) = \langle B^*BA|A \rangle \leq \sqrt{\langle B^*BA|B^*BA \rangle} \sqrt{\langle A|A \rangle} = 0 \quad (\text{A.24})$$

Por lo tanto,  $BA \in \mathcal{R}$ . Se puede definir  $D$  como el espacio cociente  $\mathcal{U}/\mathcal{R}$ . Debido a que el producto escalar se define positivo en  $D$ , podemos completar  $D$  y obtener un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . La representación  $\pi$ , entonces, está inducida por la multiplicación por izquierda del álgebra:

$$\pi(A)(B + \mathcal{R}) = AB + \mathcal{R} \quad (\text{A.25})$$

De este modo,  $\pi$  está bien definido, dado que  $\mathcal{R}$  es un ideal izquierdo en  $\mathcal{U}$ . Finalmente,

$$\Omega = 1 + \mathcal{R} \quad (\text{A.26})$$

Se puede verificar que las condiciones del teorema se satisfacen. También se puede mostrar que la construcción no es única, a menos de una equivalencia unitaria. Esto es, sea  $(\pi', D', \mathcal{H}', \Omega')$  otro conjunto que satisface las condiciones del teorema, entonces podemos definir un operador  $U : D \rightarrow D'$  como

$$U\pi(A)\Omega = \pi'(A)\Omega' \quad (\text{A.27})$$

$U$  está bien definido, dado que  $\pi(A)\Omega = 0$  si y sólo si  $\omega(A^*A) = 0$ ; pero entonces también tenemos que  $\pi'(A)\Omega' = 0$ . Más aun,  $U$  preserva el producto escalar, también es invertible y tiene una extensión única como operador unitario de  $\mathcal{H}$  a  $\mathcal{H}'$ . Finalmente, las representaciones  $\pi$  y  $\pi'$  son unitariamente equivalentes:

$$\pi'(A) = U\pi(A)U^*, A \in \mathcal{U} \quad (\text{A.28})$$

## Simetrías

Un grupo  $G$  se dice un grupo de simetría si se puede aplicar mediante un automorfismo del álgebra  $\mathcal{U}$ , esto es:

$$g \in G \rightarrow \alpha_g \in \text{Aut}(U) \quad (\text{A.29})$$

donde  $\alpha_g$  es una transformación que actúa sobre  $\mathcal{U}$ .

Por otro lado, si  $\omega$  es un estado invariante, es decir, un funcional lineal, positivo y normalizado sobre  $\mathcal{U}$  que cumple

$$\omega(\alpha_g A) = \omega(A) \quad \forall g \in G, \quad A \in \mathcal{U} \quad (\text{A.30})$$

entonces en la representación GNS construida a partir de  $\omega$ , los automorfismos  $\alpha_g$  se pueden implementar. Denotando por  $(\Omega, \pi, \mathcal{H})$  el vector cíclico correspondiente a  $\omega$ , la representación  $\pi$  y el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  respectivamente donde actúa, la definición:

$$U(g)\pi(A)\Omega = \pi(\alpha_g A)\Omega \quad (\text{A.31})$$

suministra una representación unitaria  $g \rightarrow U(g)$  del grupo como operadores lineales actuando sobre el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ .

Para chequear que la representación del automorfismo sobre el álgebra efectivamente tiene la estructura de grupo, podemos efectuar una primera transformación  $g_1$ :

$$U(g_1)\pi(A)\Omega = \pi(\alpha_{g_1} A)\Omega \quad (\text{A.32})$$

Por otro lado,

$$U(g_2)\pi(B)\Omega = \pi(\alpha_{g_2} B)\Omega \quad (\text{A.33})$$

Si llamamos  $U(g_1)\pi(A) = \pi(B)$  y  $B = \alpha_{g_1} A$ , entonces la última ecuación queda:

$$U(g_2)U(g_1)\pi(A)\Omega = \pi(\alpha_{g_2}\alpha_{g_1} A)\Omega \quad (\text{A.34})$$

Pero  $\pi(\alpha_{g_2}\alpha_{g_1} A) = \pi(\alpha_{g_1 \cdot g_2} A)$ ; por lo tanto,

$$U(g_2)U(g_1)\pi(A)\Omega = \pi(\alpha_{g_2 \cdot g_1} A)\Omega = U(g_2 \cdot g_1)\pi(A)\Omega \quad (\text{A.35})$$

Entonces,

$$U(g_2)U(g_1) = U(g_2 \cdot g_1) \quad (\text{A.36})$$

De aquí en adelante dejaremos de lado por el momento la formulación algebraica de la mecánica cuántica y nos introduciremos en el ámbito de la teoría de grupos.

## A.1. Teoría de grupos

### A.1.1. Representaciones proyectivas y extensión de un grupo

Como ya hemos señalado en la sección anterior, mediante la representación GNS se puede establecer una correspondencia entre la representación de un álgebra abstracta  $\mathcal{A}$  y funcionales lineales que actúan sobre ésta.

También se mostró que esta representación es cíclica si existe un vector  $\Omega$ , tal que se cumple (A.21). En el caso de que se elija cualquier otro vector  $\Omega \in \mathcal{H}'$  para efectuar la representación, entonces la generalización adecuada será la ec. (A.27). No obstante, se puede ver que para volver a la representación de la ec. (A.21) debemos efectuar las siguientes transformaciones sobre los operadores y los estados:

$$\pi(A') = \pi(B^*AB) = \pi(B^*)\pi(A)\pi(B) \quad \pi(B)|\Omega\rangle = |\Psi\rangle \quad (\text{A.37})$$

De este modo se tiene que

$$\begin{aligned} \omega(A') &= \langle \Omega | \pi(A') | \Omega \rangle = \langle \Omega | \pi(B^*AB) | \Omega \rangle = \\ &= \langle \Omega | \pi(B^*)\pi(A)\pi(B) | \Omega \rangle = \langle \Psi | \pi(A) | \Psi \rangle = \omega_\Psi(A) \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Esto es,

$$\omega(A') = \omega_\Psi(A) \quad (\text{A.39})$$

lo que significa que, cuando se efectúa la transformación (A.37), entonces el valor medio queda invariante.

Si consideramos entonces que la representación  $\pi_\omega(B)$  del operador  $B$  es la representación unitaria de un elemento del grupo de simetría, entonces, la transformación (A.37) equivale a

$$\pi_\omega(\alpha_g A) = U(g)\pi_\omega(A)U^{-1}(g) \quad U(g)|\Omega\rangle = |\Psi\rangle \quad (\text{A.40})$$

Las transformaciones  $U(g)$  que conservan el valor medio son transformaciones lineales que actúan sobre los vectores, esto es, se pueden sumar entre sí. La transformación de estos vectores está determinada hasta una fase arbitraria (un número complejo arbitrario de módulo 1). Estas transformaciones, además, satisfacen alguna de las dos condiciones siguientes:

$$U(g)a|\Psi\rangle = aU(g)|\Psi\rangle \quad \text{o} \quad U(g)a|\Psi\rangle = \bar{a}U(g)|\Psi\rangle \quad (\text{A.41})$$

donde  $a$  es un número complejo y  $\bar{a}$  es su complejo conjugado. En el primer caso,  $U(g)$  es un operador lineal y unitario, en el segundo caso, es antilineal y antiunitario.

En el caso en que el grupo sea continuo, la posibilidad de operadores antiunitarios queda excluida debido a que cada elemento de grupo es el cuadrado de algún otro y el producto de dos operadores antiunitarios es unitario. De ello se concluye que la transformación  $U(g)$ , actuando sobre el espacio de Hilbert, está determinada hasta una fase  $e^{i\varphi}$ . La ley de multiplicación (A.36) se transforma en:

$$U(g_2)U(g_1) = \eta(g_1, g_2)U(g_2 \cdot g_1) \quad (\text{A.42})$$

donde  $\eta$  es una fase que podría depender de  $g_1$  y  $g_2$ . De este modo, se dice que  $U$  es una representación proyectiva del grupo de simetría  $G$  (ver [30]).

Ahora supongamos que, además, de tener el grupo  $G$ , tenemos otro grupo  $K$  y sea  $\mathcal{T}$  un subgrupo invariante de  $G$  (un subgrupo invariante o normal es aquél que es invariante ante una transformación de similitud con respecto a todos los elementos del grupo del cual es parte). Si se tiene un isomorfismo  $K \approx \frac{G}{\mathcal{T}}$ , entonces se dice que  $G$  es una extensión de  $K$  (ver [96]). Por lo tanto hay una correspondencia  $h : k \rightarrow c$  entre los elementos  $k \in K$  y los elementos  $c$  de el espacio cociente  $\frac{G}{\mathcal{T}}$ . De este modo, un elemento  $c \in \frac{G}{\mathcal{T}}$  puede ser escrito como  $c = h(k)$  y la ley de composición para el grupo resulta  $h(k_1) \cdot h(k_2) = \eta(k_1, k_2)h(k_1 \cdot k_2)$  donde  $\eta \in \mathcal{T}$ .

### Extensión central, trivial y escalar

Siguiendo con la sección anterior, cualquier elemento  $g \in G$  puede ser descompuesto únicamente como

$$g = \gamma \cdot h(k) \quad \text{con} \quad \gamma \in \mathcal{T} \quad \text{y} \quad h(k) \in \frac{G}{\mathcal{T}} \quad (\text{A.43})$$

La ley de composición de  $G$  entonces resulta

$$g_1 \cdot g_2 = \gamma_1 \cdot h(k_1) \cdot \gamma_2 [h(k_1)]^{-1} \cdot \omega(k_1, k_2) \cdot h(k_1, k_2) \quad (\text{A.44})$$

Notemos que, si  $\mathcal{T}$  es un grupo uni-dimensional (Abeliano)  $\mathcal{T}_1^\theta$ , entonces  $\omega(k_1, k_2)$  es sólo una fase. En este sentido se habla de una *extensión escalar*.

Supongamos ahora que, para cualquier  $h(k) \in \frac{G}{\mathcal{T}}$  (por lo tanto, para cualquier  $k \in K$ ) existe un cierto elemento  $\gamma_k \in \mathcal{T}$  tal que

$$h(k) \cdot \gamma_k \cdot [h(k)]^{-1} = \gamma_k \cdot \gamma \cdot \gamma_k \quad \text{para todo} \quad \gamma \in \mathcal{T} \quad (\text{A.45})$$

Entonces decimos que el grupo  $G$  es una extensión central de  $K$ . En particular, si  $\mathcal{T}$  es un grupo Abeliano  $\mathcal{T}_1^\theta$  que pertenece al centro de  $G$ , entonces se tiene que

$$h(k) \cdot \gamma \cdot [h(k)]^{-1} = \gamma \quad (\text{A.46})$$

es decir, (A.45) se cumple, y por lo tanto se tiene una extensión central  $G$  de  $K$  por medio de la fase  $\mathcal{T}_1^\theta$ . Estas son las extensiones que justamente ocurren en mecánica cuántica (ver la similitud con ec. (A.42)). La ec. (A.44) entonces revela que

$$G = \mathcal{T}_1^\theta \otimes K \quad (\text{A.47})$$

Si, en particular, el factor  $\omega(k_1, k_2)$  no sólo es una fase, sino que  $\omega(k_1, k_2) = 1$  para cada  $k_1$  y  $k_2$ , entonces la extensión central se transforma en una extensión trivial y se tiene el producto directo

$$G = \mathcal{T}_1^\theta \times K \quad (\text{A.48})$$

### A.1.2. Representaciones reducibles e irreducibles

Una vez representado el grupo de simetría en términos de operadores lineales actuando sobre un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , podría darse que éste contuviera algún subespacio  $\mathcal{H}_1$  que permaneciera invariante ante la acción del grupo, esto es, si  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_1$ , entonces  $U(g)|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_1$ . A estos subespacios se los llama *subespacios invariantes*. Un subespacio invariante se dice que es *propio* (o *mínimo*) si no contiene ningún subespacio invariante que no sea él mismo o el subespacio  $\{0\}$ , esto es, si no contiene ningún subespacio invariante no trivial.

Entonces, una representación del grupo sobre un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  se dice *irreducible* si  $\mathcal{H}$  no contiene ningún subespacio invariante no trivial con respecto a la representación; de otra manera se dice *reducible*. En el último caso, si el complemento ortogonal del subespacio invariante no trivial es también invariante ante la representación del grupo, entonces la representación pasa a ser totalmente reducible (ver [97]).

En este último caso, el espacio de Hilbert total  $\mathcal{H}$  será la suma directa de los subespacios invariantes  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  de cada representación:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \quad (\text{A.49})$$

Las dos representaciones irreducibles que conforman la representación completamente reducible pueden ser distintas o iguales y, por supuesto, esta forma de bloque diagonal puede ser continuada infinitamente incorporando representaciones adicionales o simplemente repitiendo las iniciales. En este tipo de construcciones no se está generando nada intrínsecamente nuevo, simplemente se están reproduciendo las propiedades de las representaciones conocidas.

### A.1.3. Álgebras de Lie

Continuando con la breve presentación de la teoría de grupos, consideremos ahora que el grupo  $G$  se encuentra definido a partir de un conjunto de parámetros continuos  $\theta$ . Esto significa que podemos definir un espacio paramétrico donde cada punto es un elemento del grupo. Este espacio paramétrico no necesariamente debe tener una estructura euclídea, que en general es una variedad. La suavidad de la dependencia funcional de los elementos del grupo con los parámetros implica que existe una noción de cercanía entre los elementos del grupo, tal que si dos elementos del grupo son cercanos (topológicamente), sus parámetros respectivos también lo son (ver [98]).

La clausura de la operación binaria tipo producto de dos elementos del grupo se escribirá de la siguiente manera:

$$G(\theta) \cdot G(\bar{\theta}) = G(f(\theta, \bar{\theta})) \quad (\text{A.50})$$



Podemos tomar  $\theta = 0$  como el elemento identidad, o sea  $G(\theta = 0) = I$ , y cada elemento del grupo quedará conectado con la identidad por algún camino sobre el espacio paramétrico. A partir de esta elección del elemento identidad, podemos ver algunas propiedades de la función  $f$ . Por ejemplo,

$$G(0) \cdot G(\bar{\theta}) = I \cdot G(\bar{\theta}) = G(\bar{\theta}) = G(f(0, \bar{\theta})) \quad (\text{A.51})$$

De esta última igualdad podemos ver entonces que  $f(0, \bar{\theta}) = \bar{\theta}$ . Podemos proceder de la misma manera para  $\bar{\theta} = 0$  y encontrar que  $f(\theta, 0) = \theta$ , como también  $f(0, 0) = 0$ .

Para ver cómo se manifiesta la estructura no conmutativa del grupo en un entorno finito y cercano a la identidad, podemos expandir en serie de potencias todos los elementos de la ecuación (A.50) y llamar al término  $\frac{\partial G}{\partial \theta_a} |_{\theta_a=0} = T_a$  *generador del grupo* y  $T_{ab} = \frac{\partial^2 G}{\partial \theta_a \partial \theta_b} |_{\theta_a=0, \theta_b=0}$ . Podemos efectuar este mismo procedimiento para  $G(\bar{\theta})$  y también para  $G(f(\theta, \bar{\theta}))$ , con la salvedad de que primero debemos expandir la función  $f(\theta, \bar{\theta})$  con las condiciones  $f(\theta, 0) = \theta$ ,  $f(0, \bar{\theta}) = \bar{\theta}$  y  $f(0, 0) = 0$ . Llamando a las derivadas cruzadas de esta función  $F_{bc}^a = \frac{\partial^2 f^a}{\partial \theta_b \partial \theta_c} |_{\theta_b=0, \theta_c=0}$  y expandiendo todas las funciones y  $G(f)$  hasta segundo orden en los parámetros, llegamos a que

$$T_a T_b \theta_a \bar{\theta}_b = T_a F_{bc}^a \theta_b \bar{\theta}_c + T_{ab} \theta_a \bar{\theta}_b \quad (\text{A.52})$$

Renombrando los índices y tomando factor común  $\theta_a \bar{\theta}_b$ , llegamos finalmente a

$$T_a T_b = T_c F_{ab}^c + T_{ab} \quad (\text{A.53})$$

A su vez, podemos intercambiar los índices en (A.53), y luego restando este resultado con (A.53) llegamos a

$$T_a T_b - T_b T_a = T_c (F_{ab}^c - F_{ba}^c) + T_{ab} - T_{ba} \quad (\text{A.54})$$

Recordemos que  $T_{ab} = \frac{\partial^2 G}{\partial \theta_a \partial \theta_b} |_{\theta_a=0, \theta_b=0}$  y  $T_{ba} = \frac{\partial^2 G}{\partial \theta_b \partial \theta_a} |_{\theta_b=0, \theta_a=0}$ , y como son derivadas segundas mixtas los resultados son iguales, esto es  $T_{ab} = T_{ba}$ . Por último, llamando  $(F_{ab}^c - F_{ba}^c) = iC_{ab}^c$ , (A.54) resulta

$$[T_a, T_b] = iC_{ab}^c T_c \quad (\text{A.55})$$

Los números  $C_{ab}^c$  se denominan *constantes de estructura* y contienen la información de la estructura local del grupo, a la cual se denomina álgebra de Lie. La relación de conmutación (A.55) es la única condición que se necesita para asegurar que la serie de potencias para  $G(\theta)$  puede continuarse, ya que tal serie puede calcularse por una sucesión infinita de relaciones como (A.55) conociendo el término de primer orden que son los generadores  $T_a$ . Esto no significa que los elementos del grupo  $G(\theta)$  no están únicamente determinados para todos los parámetros  $\theta_a$  si conocemos los generadores, pero esto sí significa que  $G(\theta)$  está únicamente determinado en al menos un entorno finito de la identidad.

### A.1.4. Grupos cinemáticos relativista y no relativista: Galileo y Poincaré

A continuación se detallará la construcción de los grupos de Poincaré (ver [98]) y de Galileo (ver [26]) por medio de las transformaciones de coordenadas correspondientes.

#### Grupo de Poincaré

La transformación de coordenadas relativistas que dejan invariante el intervalo tetra-dimensional son:

$$x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} + a^{\nu} \quad (\text{A.56})$$

donde  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ ,  $\Lambda_{\nu}^{\mu}$  es una matriz de  $4 \times 4$  con elementos reales y  $(\Lambda_0^0)^2 \geq 0$  y  $a^{\nu}$  es un cuadvectores desplazamiento.

Representando cada elemento del grupo de Poincaré como  $g_P(\Lambda_{\nu}^{\mu}, a^{\nu})$  y haciendo dos transformaciones sucesivas, la ley de composición del grupo resulta:

$$g_P(\Lambda_{\nu}^{\mu'}, a^{\nu'}) \cdot g_P(\Lambda_{\nu}^{\mu}, a^{\nu}) = g_P(\Lambda_{\eta}^{\mu'} \Lambda_{\nu}^{\eta}, \Lambda_{\eta}^{\mu'} a^{\eta} + a^{\mu'}) \quad (\text{A.57})$$

Esta relación es un caso particular de la ec. (A.50). Por lo tanto, desarrollando estos elementos de grupo en un entorno cercano a la identidad podemos encontrar las siguientes relaciones de conmutación que definen el álgebra de Poincaré:

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i\eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} + i\eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} + i\eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho} - i\eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} \quad (\text{A.58})$$

$$[M_{\mu\nu}, P_{\alpha}] = i\eta_{\mu\alpha} P_{\nu} - i\eta_{\nu\alpha} P_{\mu} \quad (\text{A.59})$$

$$[P_{\mu}, P_{\nu}] = 0 \quad (\text{A.60})$$

donde los  $M_{\mu\nu}$  son los generadores de la transformación  $\Lambda_{\nu}^{\mu}$  y los  $P_{\mu}$  son los generadores del desplazamiento  $a^{\mu}$ .

Para darle un aspecto más familiar al álgebra de Poincaré, podemos redefinir los generadores como

$$L_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} M_{jk} \quad K_i = M_{0i} \quad (\text{A.61})$$

donde los  $L_i$  son los generadores de rotaciones espaciales y los  $K_i$  son los boost. De este modo, las relaciones de conmutación pueden escribirse:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad [L_i, L_j] &= i\epsilon_{ijk} L_k & \text{(b)} \quad [L_i, K_j] &= i\epsilon_{ijk} K_k & \text{(c)} \quad [K_i, K_j] &= -i\epsilon_{ijk} L_k \\ \text{(d)} \quad [L_i, P_j] &= i\epsilon_{ijk} P_k & \text{(e)} \quad [K_i, P_j] &= i\delta_{ij} P_0 & \text{(f)} \quad [L_i, P_0] &= 0 \\ \text{(g)} \quad [K_i, P_0] &= iP_i & \text{(h)} \quad [P_i, P_j] &= 0 & \text{(i)} \quad [P_i, P_0] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

## Grupo de Galileo

Las transformaciones de Galileo, esto es, las transformaciones que forman el grupo de simetría del espacio-tiempo no relativista son:

$$\vec{x}' = R \cdot \vec{x} + \vec{v}t + \vec{a} \quad (\text{A.63})$$

$$t' = t + b \quad (\text{A.64})$$

Si representamos cada elemento del grupo de Galileo como  $g_G(b, \vec{a}, \vec{v}, R)$  y aplicamos dos transformaciones sucesivas, la ley de composición del grupo resulta

$$g_G(b', \vec{a}', \vec{v}', R') \cdot g_G(b, \vec{a}, \vec{v}, R) = g_G(b' + b, \vec{a}' + R' \cdot \vec{a} + b \vec{v}, \vec{v}' + R' \cdot \vec{v}, R'R) \quad (\text{A.65})$$

La representación del grupo de Galileo en mecánica cuántica debe ser extendida centralmente ya que -sin ser muy preciso matemáticamente- las representaciones de los grupos de simetría en el espacio de Hilbert de sistemas cuantizados son representaciones a menos de una fase, como ya dijimos antes. Para el caso particular del grupo de Galileo, las clases de las representaciones a menos de una fase no son equivalentes a las representaciones verdaderas (aquellas sin fase). Entonces, como existe una fase no trivial, los generadores del grupo están determinados a menos de una fase real y aditiva que se multiplica al operador identidad. Por medio de redefiniciones de los generadores y el uso de las identidades de Jacobi, es posible eliminar todos estos múltiplos aditivos, menos uno. Éste aparecerá en el conmutador entre los generadores de traslaciones espaciales y los boosts. Las relaciones de conmutación del álgebra de Galileo serán, entonces,

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad [L_i, L_j] &= i\epsilon_{ijk}L_k & \text{(b)} \quad [L_i, K_j] &= i\epsilon_{ijk}K_k & \text{(c)} \quad [K_i, K_j] &= 0 \\ \text{(d)} \quad [L_i, P_j] &= i\epsilon_{ijk}P_k & \text{(e)} \quad [K_i, P_j] &= i\delta_{ij}M & \text{(f)} \quad [L_i, H] &= 0 \\ \text{(g)} \quad [K_i, H] &= iP_i & \text{(h)} \quad [P_i, P_j] &= 0 & \text{(i)} \quad [P_i, H] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.66})$$

donde los  $L_i$  son los generadores de las rotaciones asociados con  $R$ , los  $K_i$  son los generadores de boost asociados a la velocidad  $\vec{v}$ , los  $P_i$  son los generadores de desplazamiento espacial asociados con  $\vec{a}$ ,  $H$  es el generador de desplazamientos temporales asociado al parámetro  $b$  y  $M$  es un generador del grupo Abelian  $U(1)$  que se interpreta como la masa del sistema. Como vimos antes, cuando un grupo de simetría se representa proyectivamente, aparecerá una fase (ver ec. (A.42)) que en el caso del grupo de Galileo tendrá el siguiente aspecto:

$$\eta(g_G(b', \vec{a}', \vec{v}', R'), g_G(b, \vec{a}, \vec{v}, R)) = e^{[i(\frac{1}{2}M)(\vec{a}' \cdot (R' \cdot \vec{v}) - \vec{v}' \cdot (R \cdot \vec{a}) + b \vec{v}' \cdot (R' \cdot \vec{v}))]} \quad (\text{A.67})$$

Es esta fase la que genera la regla de superselección en la masa, y esto significa que en mecánica cuántica no relativista no hay estados cuánticos con espectro

de masa y, por lo tanto, partículas inestables. Si se quisiese representar este tipo de partículas, deberíamos considerar representaciones del grupo de Galileo reducibles en la masa.

### A.1.5. Operadores de Casimir

Básicamente, los operadores de Casimir son operadores que conmutan con todos los generadores del grupo de simetría (ver [36]). Esta clase de operadores es útil para construir las representaciones irreducibles del grupo. El operador más simple que conmuta con todos los generadores debe ser al menos de segundo orden en estos generadores, ya que una combinación lineal de éstos claramente no conmutará con los restantes generadores. Por lo tanto, la combinación lineal más general de segundo orden en los operadores será

$$C = \sum_{i,j} c^{ij} T_j \quad (\text{A.68})$$

donde la matriz  $c_{ij}$  debe ser simétrica, dado que toda matriz puede ser escrita como la suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica, y por la ec.(A.55), la parte antisimétrica se reduce a una combinación lineal de los  $T_i$ . Podemos evaluar el conmutador de  $C$  con un generador arbitrario  $T_k$ :

$$\begin{aligned} [C, T_k] &= \sum_{i,j} c^{ij} [T_i T_j, T_k] \quad (\text{A.69}) \\ &= \sum_{i,j} c^{ij} \{T_i [T_j, T_k] + [T_i, T_k] T_j\} \\ &= \sum_{i,j} c^{ij} \sum_l \{T_i T_l C_{jk}^l + T_l C_{ik}^l T_j\} \\ &= \sum_{i,j} c^{ij} C_{jk}^l \{T_i T_l + T_l T_i\} \end{aligned}$$

El último paso usa el hecho de que  $c^{ij}$  es simétrica. Si se puede encontrar  $c^{ij}$  tal que  $\sum_j c^{ij} C_{jk}^l$  sea antisimétrica ante el intercambio  $i \leftrightarrow l$ , entonces  $C$  es el operador de Casimir.

En general, es posible construir operadores de Casimir de orden más alto, pero éstos se podrán escribir a partir de los operadores de Casimir del orden más bajo. Las representaciones irreducibles del grupo pueden ser etiquetadas por los autovalores de estos operadores de Casimir.

### Operadores de Casimir del grupo de Poincaré

Mediante la ecuación (A.69) y haciendo uso de las relaciones de conmutación del grupo de Poincaré (A.62), se pueden encontrar los siguientes operadores de Casimir:

$$C_2^P = H^2 - P_i P^i \quad (\text{A.70})$$

$$C_4^P = H^2 J_i J^i + (P_i P^i)(K_i^{(P)} K^{(P)i}) - (J_i P^i)^2 - (P_i K^{(P)i})^2 - 2H J^k \varepsilon_{ijk} P^i K^{(P)j} \quad (\text{A.71})$$

que, en el sistema de referencia del centro de masa resultan:

$$C_2^P = m_0^2 I \quad (\text{A.72})$$

$$C_4^P = m_0^2 J_i J^i = m_0^2 S^2 \quad (\text{A.73})$$

### Operadores de Casimir del grupo de Galileo

De la misma forma, los operadores de Casimir del grupo de Galileo centralmente extendido son:

$$C_1^G = M \quad (\text{A.74})$$

$$C_2^G = MH - \frac{P^2}{2} \quad (\text{A.75})$$

$$C_4^G = M^2 J_i J^i - (P_i P^i)(K_j^{(G)} K^{j(G)}) + (P_i K^{i(G)})^2 - 2M J_k \varepsilon^{ijk} P_i K_j^{(G)} \quad (\text{A.76})$$

que en el sistema del centro de masa resultan

$$C_1^G = M \quad (\text{A.77})$$

$$C_2^G = M^2 \quad (\text{A.78})$$

$$C_4^G = M^2 J_i J^i = M^2 S^2 \quad (\text{A.79})$$

### A.1.6. Contracción generalizada de Inönü-Wigner

La contracción de Inönü-Wigner es un procedimiento que conecta dos grupos de simetría mediante un límite (ver [99] y [88]). Este procedimiento fue novedoso ya que en su momento sólo se efectuaba sobre las representaciones de los grupos y no sobre el grupo mismo. Para realizar la contracción generalizada de Inönü-Wigner a segundo grado en los parámetros de contracción, podemos considerar la siguiente transformación de los  $n$  generadores del grupo de simetría :

$$\bar{T}_{1i} = T_{1i} \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{A.80})$$

$$\bar{T}_{2j} = \varepsilon T_{2j} \quad \text{para} \quad j = 1, 2, \dots, m_1 \quad (\text{A.81})$$

$$\bar{T}_{3k} = \varepsilon^2 T_{3k} \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \dots, n - r - m_1 \quad (\text{A.82})$$

La ec.(A.80) significa que hay  $r$  generadores del grupo de simetría que no se contraen. La ec. (A.81) significa que hay  $m_1$  generadores que se contraerán a través de la contracción del parámetro  $\varepsilon$ . La ec.(A.82) significa que los restantes generadores del grupo de simetría, esto es,  $n - r - m_1$  se contraerán a segundo orden en el parámetro de contracción. Recordemos el álgebra de Lie de los generadores (donde se incorpora la sumatoria por razones prácticas):

$$[T_i, T_j] = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k T_k \quad (\text{A.83})$$

Aplicando las transformaciones (A.80), (A.81) y (A.82) en (A.83), se obtiene una nueva álgebra:

$$\begin{aligned} [\bar{T}_{1i}, \bar{T}_{1j}] &= [T_{1i}, T_{1j}] = \\ &\sum_{k=1}^r C_{1i,1j}^{1k} \bar{T}_{1k} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\lambda=1}^{m_1} C_{1i,1j}^{2k} \bar{T}_{2k} + \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n-r-m_1} C_{1i,1j}^{3k} \bar{T}_{3k} \end{aligned} \quad (\text{A.84})$$

$$\begin{aligned} [\bar{T}_{1i}, \bar{T}_{2j}] &= \varepsilon [T_{1i}, T_{2j}] = \\ &\varepsilon \left( \sum_{k=1}^r C_{1i,2j}^{1k} \bar{T}_{1k} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{m_1} C_{1i,2j}^{2k} \bar{T}_{2k} + \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n-r-m_1} C_{1i,2j}^{3k} \bar{T}_{3k} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.85})$$

$$\begin{aligned} [\bar{T}_{1i}, \bar{T}_{3j}] &= \varepsilon^2 [T_{1i}, T_{3j}] = \\ &\varepsilon^2 \left( \sum_{k=1}^r C_{1i,3j}^{1k} \bar{T}_{1k} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{m_1} C_{1i,3j}^{2k} \bar{T}_{2k} + \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n-r-m_1} C_{1i,3j}^{3k} \bar{T}_{3k} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.86})$$

$$\begin{aligned} [\bar{T}_{2i}, \bar{T}_{2j}] &= \varepsilon^2 [T_{2i}, T_{2j}] = \\ &\varepsilon^2 \left( \sum_{k=1}^r C_{2i,2j}^{1k} \bar{T}_{1k} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{m_1} C_{2i,2j}^{2k} \bar{T}_{2k} + \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n-r-m_1} C_{2i,2j}^{3k} \bar{T}_{3k} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.87})$$

$$\begin{aligned} [\bar{T}_{2i}, \bar{T}_{3j}] &= \varepsilon^3 [T_{2i}, T_{3j}] = \\ &\varepsilon^3 \left( \sum_{k=1}^r C_{2i,3j}^{1k} \bar{T}_{1k} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{m_1} C_{2i,3j}^{2k} \bar{T}_{2k} + \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n-r-m_1} C_{2i,3j}^{3k} \bar{T}_{3k} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.88})$$

$$\begin{aligned} [\bar{T}_{3i}, \bar{T}_{3j}] &= \varepsilon^4 [T_{3i}, T_{3j}] = \\ &\varepsilon^4 \left( \sum_{k=1}^r C_{3i,3j}^{1k} \bar{T}_{1k} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{m_1} C_{3i,3j}^{2k} \bar{T}_{2k} + \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n-r-m_1} C_{3i,3j}^{3k} \bar{T}_{3k} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.89})$$

Efectuando el límite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , podemos ver que la nueva álgebra dará resultados finitos sólo en los casos en que  $C_{1i,1j}^{2k} = 0$ ,  $C_{1i,1j}^{3k} = 0$  en la ec. (A.84) y  $C_{1i,2j}^{3k} = 0$  en la ec.(A.85).  $C_{1i,1j}^{2k} = 0$  y  $C_{1i,1j}^{3k} = 0$  significa que los generadores infinitesimales  $T_{1i}$  expanden una subálgebra, ya que  $[T_{1i}, T_{1j}] = \sum_{k=1}^r C_{1i,1j}^{1k} T_{1k}$ . Por otro lado, la condición  $C_{1i,2j}^{3k} = 0$  implicará que el álgebra de Lie tendrá a su vez una subálgebra conformada por los generadores  $\bar{T}_{1i}$  y  $\bar{T}_{2i}$ . Por lo tanto, si asumimos que el álgebra de partida tiene un subgrupo  $S$ , que a su vez dentro de él tiene un subgrupo  $S_1$ , entonces se podrá obtener una nueva álgebra contraída con las siguientes relaciones de conmutación:

$$[\bar{T}_{1i}, \bar{T}_{1j}] = \sum_{k=1}^r C_{1i,1j}^{1k} \bar{T}_{1k} \quad (\text{A.90})$$

$$[\bar{T}_{1i}, \bar{T}_{2j}] = \sum_{k=1}^{m_1} C_{1i,2j}^{2k} \bar{T}_{2k} \quad (\text{A.91})$$

$$[\bar{T}_{1i}, \bar{T}_{3j}] = \sum_{k=1}^{n-r-m_1} C_{1i,3j}^{3k} \bar{T}_{3k} \quad (\text{A.92})$$

$$[\bar{T}_{2i}, \bar{T}_{2j}] = \sum_{k=1}^{n-r-m_1} C_{2i,2j}^{3k} \bar{T}_{3k} \quad (\text{A.93})$$

$$[\bar{T}_{2i}, \bar{T}_{3j}] = 0 \quad (\text{A.94})$$

$$[\bar{T}_{3i}, \bar{T}_{3j}] = 0 \quad (\text{A.95})$$

Vemos también que los generadores  $\bar{T}_{2i}$  y  $\bar{T}_{3j}$  conforman una subálgebra abeliana invariante en el álgebra de Lie contraída. Básicamente, lo que se está efectuando es una contracción de todo el grupo de simetría sobre el subgrupo invariante generado por  $T_{1i}$  y  $T_{2i}$ .

## A.2. Decoherencia autoinducida y límite clásico

### A.2.1. Decoherencia autoinducida

La propuesta de la decoherencia autoinducida (*self-induced decoherence*, *SID*) está basada en la idea general de que la relación entre los observables y los estados es un elemento fundamental de la mecánica cuántica [100]. El formalismo matemático que sirve de punto de partida consiste en la elección de un álgebra de operadores, como se introdujo en el primer capítulo de la tesis, como elemento primitivo de la teoría: los observables son los operadores autoadjuntos del álgebra. Como ya señalamos, este álgebra es una  $C^*$ -álgebra.

El teorema GNS muestra que el espacio de Hilbert tradicional es una representación particular de este formalismo algebraico: el álgebra de observables se introduce como representación concreta, en tanto conjunto de operadores acotados autoadjuntos en un espacio de Hilbert separable. No obstante, dado que el marco  $C^*$ -algebraico no admite operadores no acotados, es necesario moverse a un marco menos restrictivo con el fin de adecuar este tipo de operadores. La decoherencia autoinducida adopta un álgebra nuclear [101] como el álgebra de observables: estos elementos son núcleos o kernels, esto es, distribuciones de dos variables que pueden pensarse como matrices generalizadas [59]. Por medio de una versión generalizada del teorema GNS ([102], [103]) se puede demostrar que este formalismo basado en un álgebra nuclear tiene una representación en un espacio de Hilbert equipado: el “equipamiento” apropiado brinda un fundamento matemático riguroso para operadores no acotados [104]. En efecto, el teorema de espectro nuclear de Gel’fand y Maurin establece que, bajo hipótesis matemáticas muy generales (razonables desde un punto de vista físico), para cada CCOC de operadores no acotados autoadjuntos, hay un espacio de Hilbert equipado donde cada CCOC puede dar lugar a una descomposición generalizada en sus autovalores, lo cual implica que puede asociarse un continuo de autovalores generalizados y autovectores. Con el fin de encontrar el equipamiento apropiado, el álgebra nuclear se usa para generar dos topologías adicionales: una de ellas corresponde al espacio nuclear, que es el espacio de observables generalizados  $V_O$ ; el otro corresponde al espacio dual de  $V_O$ , y éste es el espacio  $V_S$  de estados.

### El formalismo

Siguiendo ([105], [100], [106]) se simbolizará un observable perteneciente a  $V_O$  como un ket redondo  $|O\rangle$ , y un estado perteneciente a  $V_S$  como un bra redondo  $\langle\rho|$ . El resultado de la acción de un estado bra  $\langle\rho|$  sobre un ket  $|O\rangle$  es el valor medio del observable  $|O\rangle$  en el estado  $\langle\rho|$ :

$$\langle O \rangle_\rho = \langle \rho | O \rangle \quad (\text{A.96})$$

Si la base es discreta,  $\langle O \rangle_\rho$  puede calcularse como es usual, esto es, como una traza  $Tr(\rho O)$ . Pero si la base es continua,  $Tr(\rho O)$  no está bien definida; no obstante,  $\langle \rho | O \rangle$  siempre puede definirse rigurosamente dado que  $\langle \rho |$  es un funcional lineal perteneciente a  $V_S$  actuando sobre un operador  $|O\rangle$  perteneciente a  $V_O$ . Para ver cómo la decoherencia entra en juego desde este nuevo enfoque, podemos considerar el caso más simple, esto es, un sistema cuántico cuyo Hamiltoniano tiene un espectro continuo  $\omega \in [0, \infty)$ :

$$H |\omega\rangle = \omega |\omega\rangle \quad \omega \in [0, \infty) \quad (\text{A.97})$$

donde  $\omega$  y  $|\omega\rangle$  son los autovalores y autovectores generalizados de  $H$ , respectivamente. En este modelo simple, el CCOC del sistema es  $\{H\}$ . Un observable genérico  $|O\rangle$  puede ser expresado en términos de la autobase  $\{|\omega\rangle, \langle\omega'|\}$  como:



$$|O\rangle = \int_0^\infty \int_0^\infty \widehat{O}(\omega, \omega') |\omega\rangle \langle \omega'| d\omega d\omega' = \int_0^\infty \int_0^\infty \widehat{O}(\omega, \omega') |\omega, \omega'\rangle d\omega d\omega' \quad (\text{A.98})$$

donde  $|\omega\rangle \langle \omega'| = |\omega, \omega'\rangle$  y  $\widehat{O}(\omega, \omega')$  son las coordenadas del kernel  $|O\rangle$ . El Hamiltoniano en esta autobase  $\{|\omega, \omega'\rangle\}$  es:

$$|H\rangle = \int_0^\infty \omega |\omega\rangle \langle \omega| d\omega = \int_0^\infty \int_0^\infty \omega \delta(\omega - \omega') |\omega, \omega'\rangle d\omega d\omega' \quad (\text{A.99})$$

Entonces,  $\omega \delta(\omega - \omega')$  debe ser uno de los  $\widehat{O}(\omega, \omega')$ , dado que  $H$  es uno de los observables pertenecientes a  $V_O$ . Incluso, todos los observables que conmutan con  $H$  y comparten la autobase  $\{|\omega, \omega'\rangle\}$  se pueden expresar como

$$|O\rangle = \int_0^\infty \int_0^\infty O(\omega) |\omega\rangle \langle \omega| d\omega d\omega' = \int_0^\infty \int_0^\infty O(\omega) \delta(\omega - \omega') |\omega, \omega'\rangle d\omega d\omega' \quad (\text{A.100})$$

donde ahora  $O(\omega)$  brinda los valores de todas las componentes de  $|O\rangle$  en la base  $\{|\omega, \omega'\rangle\}$ . Por lo tanto,  $O(\omega) \delta(\omega - \omega')$  debe ser uno de los  $\widehat{O}(\omega, \omega')$ . Pero, por supuesto, también se necesitan a aquellos observables que no conmutan con  $H$  y cuyo  $\widehat{O}(\omega, \omega')$  son diferentes de  $O(\omega) \delta(\omega - \omega')$ ; entonces, se puede decir que en el caso general [60]:

$$\widehat{O}(\omega, \omega') = O(\omega) \delta(\omega - \omega') + O(\omega, \omega') \quad (\text{A.101})$$

donde  $O(\omega, \omega')$  es una función regular cuyas propiedades matemáticas precisas se describen en [107]. Por lo tanto, un observable genérico  $|O\rangle$  es (ver [108]):

$$|O\rangle = \int_0^\infty O(\omega) |\omega\rangle d\omega + \int_0^\infty \int_0^\infty O(\omega, \omega') |\omega, \omega'\rangle d\omega d\omega' \quad (\text{A.102})$$

donde  $|\omega\rangle = |\omega\rangle \langle \omega|$  y  $|\omega, \omega'\rangle = |\omega\rangle \langle \omega'|$  son los autovectores generalizados del observable  $|O\rangle$ . Llamemos  $O_S$  el primer término del lado derecho de (A.102) (la parte singular del observable  $|O\rangle$ ), y  $O_R$  el segundo término del lado derecho de (A.102) (la parte regular del observable  $|O\rangle$ ). Los observables  $|O\rangle$  de la forma (A.102) definen lo que se llama “espacio de Van Hove”,  $V_O^{VH} \subset V_O$ ; cuya base es  $\{|\omega\rangle, |\omega, \omega'\rangle\}$ . Por el otro lado, los estados están representados por funcionales lineales pertenecientes al espacio  $V_S^{VH}$ , que es el espacio dual de  $V_O^{VH}$ . Por lo tanto, un estado general  $(\rho|$  puede expresarse como:

$$(\rho| = \int_0^\infty \rho(\omega) (\omega| d\omega + \int_0^\infty \int_0^\infty \rho(\omega, \omega') (\omega, \omega'| d\omega d\omega' \quad (\text{A.103})$$

donde  $\rho(\omega, \omega')$  es una función regular, y  $\rho(\omega)$  y  $\rho(\omega, \omega')$  satisfacen la propiedad  $\rho \geq 0$ ,  $(\rho|I) = 1$  (donde  $|I)$  es el operador identidad) y aquellas listadas en [107].  $\{|\omega\rangle, |\omega, \omega'\rangle\}$  es una base de  $\mathcal{V}_S^{VH}$  (esto es, la cobase de  $\{|\omega\rangle, |\omega, \omega'\rangle\}$ ), definida por las siguientes relaciones:

$$(\omega|\omega') = \delta(\omega - \omega') \quad (\omega, \omega''|\omega', \omega''') = \delta(\omega - \omega'')\delta(\omega' - \omega''') \quad (\text{A.104})$$

Dadas las expresiones (A.102) y (A.103) para  $|O)$  y para  $(\rho|$  respectivamente, se puede dar cuenta de la decoherencia de una manera directa. De acuerdo con la ecuación unitaria de von Neumann, la evolución de  $(\rho|$  está dada por:

$$(\rho(t)| = \int_0^\infty \rho(\omega) (\omega| d\omega + \int_0^\infty \int_0^\infty \rho(\omega, \omega') e^{-i(\omega - \omega')t} (\omega, \omega'| d\omega d\omega' \quad (\text{A.105})$$

Por lo tanto, el valor medio del observable  $|O)$  en el estado  $(\rho(t)|$  queda:

$$\langle O \rangle_{\rho(t)} = (\rho(t)|O) = \int_0^\infty \rho^*(\omega) O(\omega) d\omega + \int_0^\infty \int_0^\infty \rho^*(\omega, \omega') e^{-i(\omega - \omega')t} O(\omega, \omega') d\omega d\omega' \quad (\text{A.106})$$

Dado que  $\rho(\omega, \omega')$  y  $O(\omega, \omega')$  son funciones regulares, es natural el requerimiento de que  $\rho(\omega, \omega')O(\omega, \omega')$  sea  $\mathbb{L}_1$  en las variables  $\omega - \omega'$  (ver [106] para detalles). Cuando se toma el límite para  $t \rightarrow \infty$ , se puede aplicar el teorema de Riemann-Lebesgue, de acuerdo con el cual el segundo término del lado derecho de la última ecuación se hace cero. Por lo tanto:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle O \rangle_{\rho(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} (\rho(t)|O) = \int_0^\infty \rho^*(\omega) O(\omega) d\omega \quad (\text{A.107})$$

Pero esta integral es equivalente al valor medio del observable  $|O)$  en un nuevo estado  $(\rho_*|$ :

$$(\rho_*| = \int_0^\infty \rho^*(\omega) (\omega| \omega \quad (\text{A.108})$$

donde los términos no diagonales son cero. Por lo tanto se obtiene el siguiente límite:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle O \rangle_{\rho(t)} = \langle O \rangle_{\rho_*} \quad (\text{A.109})$$

o

$$W - \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \rho_* \quad (\text{A.110})$$

Resumiendo, en el enfoque SID, la decoherencia no requiere de la interacción del sistema de interés con su entorno: un sistema cuántico cerrado puede decoherir. La diagonalización del operador densidad no depende de cuán abierto sea el sistema, pero sí del espectro continuo del Hamiltoniano del sistema. Esto significa que el problema que surge en el enfoque de la decoherencia inducida por el entorno (*environment-induced decoherence*, EID) al intentar dar un criterio general para discriminar entre el sistema y el entorno pierde sentido desde el punto de vista del enfoque SID. Este hecho tiene una ventaja adicional: en varios casos el enfoque EID requiere de una hipótesis no fundamentada teóricamente acerca de los observables que se comportarán clásicamente, con el fin de decidir dónde colocar el corte entre el sistema y el entorno. Este nuevo enfoque, por el contrario, brinda una definición matemática precisa de los observables tales que el sistema observado por estos operadores decohere, es decir los observables de van Hove del espacio  $V_O^{VH}$ .

### A.2.2. El límite clásico

Con el fin de explicar el límite clásico, la descripción clásica de un sistema cuántico requiere de dos elementos: decoherencia, como se explicó con la propuesta SID, y macroscopicidad, que significa que la acción  $S$  característica del sistema es mucho mayor que  $\hbar$ . Entonces, la tarea es representar el funcional diagonal  $\rho_*$  (ec. A.110) que resulta de la decoherencia en el correspondiente espacio de fases a través de la transformación de Wigner (ver [109]), y luego aplicar el límite macroscópico  $\hbar \rightarrow 0$  (siendo estricto,  $\frac{\hbar}{S} \rightarrow 0$ ):

$$\rho^c(\phi) = \lim_{\hbar \rightarrow 0} W \rho_* \quad (\text{A.111})$$

donde  $\phi = (q, p) = (q_1, \dots, q_{n+1}, p_1, \dots, p_{n+1})$  es un punto en el espacio de las fases  $\Gamma = \mathbb{R}^{2(N+1)}$  y  $W$  es la transformación de Wigner, cuya definición debe ser adecuadamente extendida para ser aplicable a distribuciones singulares. Sobre esta base, se puede probar que la función  $\rho^c(\phi)$  tiene la siguiente forma (ver [64], [65]):

$$\rho^c(\phi) = \int_{\omega} \rho(\omega) \delta(H(\phi) - \omega) d\omega \quad (\text{A.112})$$

donde  $H(\phi)$  es la transformación de Wigner del Hamiltoniano  $H$ ,  $H(\phi) = WH$ . En otras palabras,  $\rho^c(\phi)$  es una suma infinita de densidades clásicas  $\delta(H(\phi) - \omega)$ , promediadas por el correspondiente valor de la función  $\rho(\omega)$ . A su vez,  $\rho(\omega)$  es una función normalizada y definida como no negativa debido a su origen, dado que representa los elementos diagonales del funcional  $\rho^c(\phi)$ ; este hecho es lo que permite que pueda ser interpretada como una función probabilidad. Por lo tanto, la distribución clásica  $\rho^c(\phi)$  definida en el espacio de fases  $\Gamma = \mathbb{R}^{2(N+1)}$  puede concebirse como una suma infinita de densidades clásicas, definidas por la constante global de movimiento  $H(\phi) = \omega$  y pesadas por sus correspon-

dientes probabilidades  $\rho(\omega)$ .<sup>1</sup> Esto significa que el Hamiltoniano se convierte en una constante de movimiento global clásica en la descripción resultante del límite clásico. Incluso, la base donde el funcional  $\rho_*$ , invariante ante traslaciones temporales, se hace diagonal se corresponde precisamente al contexto preferido CCPO  $\{|\omega\rangle\langle\omega|\}$  donde la actualización ocurre.

Una vez que se obtiene  $\rho^c(\phi)$ , se puede explicar el límite clásico en el espacio de fases. Como hemos visto, la decoherencia autoinducida implica la convergencia de los valores medios de cualquier observable  $O \in \mathcal{V}_O^{VH}$  a un valor final  $\langle O \rangle_{\rho_*}$  (ver ecuación A.109). A su vez, se sabe que la transformación de Wigner tiene la propiedad de preservar los valores medios:

$$\langle O \rangle_{\rho(t)} = \langle O(\phi) \rangle_{\rho(\phi,t)} \quad \langle O \rangle_{\rho_*} = \langle O(\phi) \rangle_{\rho_*(\phi)} \quad (\text{A.113})$$

donde  $O(\phi) = WO$ ,  $\rho(\phi, t) = W\rho(t)$  y  $\rho_*(t) = W\rho_*$ . Pero también sabemos que, en el límite  $\hbar \rightarrow 0$ ,  $W\rho_*$  se transforma en  $\rho^c(\phi)$  (ver ecuación A.111). Por lo tanto, en el límite macroscópico, el valor medio de cualquier observable  $O \in \mathcal{V}_O^{VH}$  converge a un valor final que puede calcularse en términos clásicos como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle O \rangle_{\rho(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle O(\phi) \rangle_{\rho(\phi,t)} = \langle O(\phi) \rangle_{\rho^c(\phi)} \quad (\text{A.114})$$

donde

$$\langle O(\phi) \rangle_{\rho^c(\phi)} = \int_{\omega} \rho(\omega) O(\omega) \delta(H(\phi) - \omega) d\omega \quad (\text{A.115})$$

Esto significa que el estado  $\rho(\phi, t)$  converge débilmente a  $\rho^c(\phi)$ :

$$W - \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\phi, t) = \rho^c(\phi) = \int_{\omega} \rho(\omega) \delta(H(\phi) - \omega) d\omega \quad (\text{A.116})$$

### A.2.3. Interpretación modal-Hamiltoniana del límite clásico

Cuando se explicó el proceso de medición, se distinguió entre medición única y medición de frecuencia. En el primer caso, la actualización de uno de los hechos posibles  $P_F[|r_i\rangle\langle r_i|] \in \mathcal{F}^p$  definido por el CCPO preferido  $\{|\omega_{M_i}\rangle\langle\omega_{M_i}| = |r_i\rangle\langle r_i|\}$  es lo relevante para el valor definido del puntero. Pero para que las propensiones se manifiesten como frecuencias por repetición de mediciones únicas, es necesario realizar una medición de frecuencia repitiendo las mediciones únicas bajo

<sup>1</sup>Dado que aquí la dimensión del espacio de fases de Wigner es  $2(N+1)$  y la descripción clásica tiene a la energía como la única constante global de movimiento, el sistema es no integrable, como es de esperar debido a su naturaleza macroscópica. Como se ha mostrado en trabajos previos ([110], [111]), si  $g$  es el número de constantes globales de movimiento, en el caso no integrable puede definirse  $(N+1) - g$  constantes de movimiento locales, las cuales permiten la caracterización de los niveles más bajos de la jerarquía ergódica cuántica.

las mismas condiciones: sólo de esta manera las predicciones probabilísticas de la teoría pueden testearse. En el caso del límite clásico, la situación es análoga. Cada sistema cuántico elemental aislado satisface la Regla de Actualización y, en consecuencia, un hecho posible  $P_F [|\omega\rangle \langle\omega|] \in \mathcal{F}^p$  definido por el CCPO preferido  $\{|\omega\rangle \langle\omega|\}$  se hace actual: por lo tanto,  $H$  y todos los observables que conmutan con  $H$  adquieren valores definidos. Sin embargo, sólo cuando entran en juego ensambles de sistemas cuánticos, las predicciones estadísticas pueden ser testeadas empíricamente. Cuando se tienen en cuenta todas estas consideraciones, el límite clásico puede interpretarse de manera precisa a la luz de la interpretación modal-Hamiltoniana.

Para ello consideremos un sistema cuántico elemental  $S : (\mathcal{O} \subset \mathcal{A}, H)$  con estado inicial  $\rho_0 \in \mathcal{O}'$ , tal que su límite clásico es el explicado en el apartado anterior. Si consideramos ahora un ensamble de sistemas cuánticos idénticos  $S$ , en cada miembro del ensamble:

- En un instante  $t = t_0$  cada hecho posible  $P_F [|\omega\rangle \langle\omega|]$  tiene una propensión a actualizarse cuya medida está dada por los términos diagonales de  $\rho_0$  expresados en la base preferida  $\{|\omega\rangle\} : p_\rho^p(P_F [|\omega\rangle \langle\omega|]) = \rho(\omega)$  (ver Proposición 7).
- Dado que el CCPO preferido es  $\{|\omega\rangle \langle\omega|\}$ , uno y sólo uno de los hechos posibles  $P_F [|\omega\rangle \langle\omega|]$ , digamos  $P_F [|\omega_\Omega\rangle \langle\omega_\Omega|]$ , es también un hecho actual  $A_F [|\omega\rangle \langle\omega|]$  (ver Proposición 10).
- Si  $A_F [|\omega_\Omega\rangle \langle\omega_\Omega|]$  es un hecho actual,  $H$  y todos los observables  $R_I$  que conmutan con  $H$  adquieren valores  $\omega_\Omega$  y  $r_{I\Omega}$  de manera impredecible, respectivamente:  $A_F [H : \omega_\Omega]$ ,  $A_F [R_I : r_{I\Omega}]$ .

Dado que esto se cumple para cada miembro del ensamble, la propensión a la actualización cuya medida está dada por  $\rho(\omega)$  se manifiesta como una frecuencia de los hechos actuales en el ensamble.

Ahora puede darse una interpretación a los valores medios que aparecen en los límites clásicos. Para ello se debe distinguir entre dos casos: el caso en que los observables adquieren valores definidos y el caso de los observables restantes.

- a) Los observables con valor definido son diagonales en la base de la energía, correspondiente al CCPO preferido. Esto significa que los valores medios son independientes del tiempo:

$$\langle H \rangle_{\rho(t)} = \int_0^\infty \rho(\omega) \omega d\omega = \langle H \rangle_{\rho_*} = \langle H(\phi) \rangle_{\rho_*(\phi)} \quad (\text{A.117})$$

$$\langle R_I \rangle_{\rho(t)} = \int_0^\infty \rho(\omega) r_I d\omega = \langle R_I \rangle_{\rho_*} = \langle R_I(\phi) \rangle_{\rho_*(\phi)} \quad (\text{A.118})$$

y en el límite macroscópico  $\hbar \rightarrow 0$  estas dos últimas ecuaciones pueden ser calculadas como:

$$\langle H \rangle_{\rho(t)} = \langle H(\phi) \rangle_{\rho^c(\phi)} = \int_0^{\infty} \rho(\omega) \omega \delta(H(\phi) - \omega) d\omega \quad (\text{A.119})$$

$$\langle R_I \rangle_{\rho(t)} = \langle R_I(\phi) \rangle_{\rho^c(\phi)} = \int_0^{\infty} \rho(\omega) \omega \delta(H(\phi) - \omega) d\omega \quad (\text{A.120})$$

En cada sistema del ensamble,  $H$  y  $R_I$  adquieren valores  $\omega_\Omega$  y  $r_{I\Omega}$  de manera indeterminada con una propensión medida por  $\rho(\omega_\Omega)$ . Por lo tanto, los valores medios independientes del tiempo  $\langle H \rangle_{\rho(t)} = \langle H(\phi) \rangle_{\rho^c(\phi)}$  y  $\langle R_I \rangle_{\rho(t)} = \langle R_I(\phi) \rangle_{\rho^c(\phi)}$  miden los valores medios correspondientes a los valores definidos que adquieren los observables  $H$  y  $R_I$  entre los miembros del ensamble, valores medios que pueden ser computados en términos de las frecuencias en el ensamble.

- b) Ahora consideremos a un observable  $A$  que no conmuta con  $H$ . De acuerdo con la interpretación, éste no adquiere valor definido en el sistema. No obstante, dado que cada hecho posible  $P_F[A : a_i]$  correspondiente a  $A$  tiene su propensión a la actualización, cuya medida depende del estado del sistema, el valor medio  $\langle A \rangle_\rho$  puede calcularse (y también testearse cuando el estado es medido por medio de una medición de estado, ver subsección 2.6.6). Dado que el estado, que codifica las propensiones, cambia con el tiempo, tal valor medio también cambia con el tiempo. Sin embargo, el límite clásico muestra que, si el sistema es lo suficientemente macroscópico, luego de la decoherencia  $\langle A \rangle_\rho$  llega a un valor constante que puede calcularse como  $\langle A(\phi) \rangle_{\rho^c(\phi)}$ , donde  $A(\phi) = WA$  y  $\rho^c(\phi)$  es una distribución clásica (ver ecs.(A.111), (A.112)). Esto significa que, en el límite clásico desde el punto de vista de los valores medios, el ensamble cuántico puede ser descrito como un ensamble estadístico clásico a pesar del hecho que, en cada sistema del ensamble cuántico, el observable  $A$  no adquiere valor definido.

Este hecho peculiar de los ensambles cuánticos nos permite entender otras propiedades estadísticas de la mecánica cuántica. En particular, de acuerdo con la IMH, el principio de incerteza no se refiere a un sistema aislado sino a un ensamble cuántico. Cuando decimos que  $[A, B] = C$  ( $C \neq 0$ ) y, por lo tanto,  $\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} \langle C \rangle$  (ver [26], pág. 223-224), ambos  $\Delta A$ ,  $\Delta B$  pueden ser computados en términos de los respectivos valores medios  $\langle A \rangle_\rho$  y  $\langle B \rangle_\rho$  en el ensamble cuántico. Sin embargo, las dispersiones  $\Delta A$ ,  $\Delta B$  no tienen significado en cada sistema aislado dado que  $A$  o  $B$ , pero no los dos, pueden poseer valores definidos.

Incluso, en el límite clásico ambos valores medios pueden ser calculados como valores medios de observables clásicos  $A(\phi) = WA$  y  $B(\phi) = WB$  en un

ensamble estadístico clásico descrito por  $\rho^c(\phi)$ . Esto nos permite tratar al ensamble cuántico con las herramientas teóricas de la mecánica clásica estadística: podemos imaginar que estamos trabajando con un ensamble estadístico clásico donde los observables clásicos  $A(\phi)$  y  $B(\phi)$  tienen valores definidos en cada miembro clásico del ensamble, con una dispersión  $\Delta A$ ,  $\Delta B$  en el ensamble, respectivamente.<sup>2</sup> Pero esta descripción clásica sólo es válida cuando la teoría se aplica a un ensamble y, en consecuencia, no puede ser usada para extraer conclusiones interpretativas acerca de sistemas aislados.

Resumiendo, el hecho de que la IMH conciba a la mecánica cuántica como la descripción de sistemas únicos no implica ignorar los resultados estadísticos referidos a ensambles que suministra la teoría. Pero esos resultados estadísticos no son tomados como el punto de partida de la interpretación, como sí ocurre con las interpretaciones por ensambles. Por el contrario, su significado se explica en términos de una interpretación precisa de los elementos básicos de la teoría, que se refieren a sistemas cuánticos individuales.

#### A.2.4. Aplicaciones a la cosmología: entropía del universo

Podemos también encontrar otras aplicaciones de la decoherencia autoinducida, en particular en el cálculo de la entropía del universo temprano [7]. Si bien, el tópico estudiado en esta sección no está directamente relacionado con el argumento principal de la tesis, se mostrará que se pueden derivar otras propiedades de la materia a partir del contenido del Hamiltoniano de un sistema. El marco teórico de esta subsección, la gravedad cuántica canónica, se basa en encontrar la estructura canónica de la relatividad general, para luego cuantificar las variables que entran en juego (la métrica y sus derivadas), y luego construir una ecuación tipo Schrödinger a través de la aproximación WKB [112] para así poder definir el Hamiltoniano. Eligiendo como observables relevantes aquéllos que pertenecen al espacio de van Hove  $V_O^{VH}$  expresados en términos de los autoestados de energía, se puede desarrollar la decoherencia autoinducida explicada en la sección anterior. Luego se puede definir la entropía de Gibbs, que será función del vector de estado, y por medio de dos reducciones de estos posibles estados, se podrá mostrar que la entropía de Gibbs crece con el tiempo.

#### Introducción

En la bibliografía científica, el concepto de entropía en el contexto cosmológico no está completamente comprendido. En esta sección se explicará brevemente cómo es posible encontrar un vínculo entre los procesos cuánticos ocurridos en la fase inicial del universo y la entropía de Gibbs, para luego relacionar los resultados con la teoría de la flecha del tiempo geométrica.

---

<sup>2</sup>Por supuesto, si queremos testear estas predicciones, debemos realizar diferentes mediciones de frecuencia en el ensamble, cada una de las cuales medirá un observable con el Hamiltoniano de interacción adecuado, como se explicó en el apartado 2.6.6.

## La flecha del tiempo

Como se sabe, la noción de una entropía siempre creciente no surge directamente de las ecuaciones fundamentales de la física, dado que éstas son invariantes ante inversión temporal y las correspondientes evoluciones dinámicas son unitarias. En consecuencia, a cualquier fenómeno irreversible que sucede en la dirección pasado-futuro le corresponde un fenómeno simétrico en la dirección futuro-pasado. A este par se lo ha llamado “gemelos t-simétricos” [113]. En efecto, desde 1912 [114] se sabe que, para cada evolución con entropía creciente, se puede encontrar un gemelo t-simétrico: una evolución con entropía decreciente. Entonces, con el fin de definir correctamente el concepto de entropía, siempre son necesarios algunos ingredientes adicionales. Ésta es la razón por la cual no se ha usado la entropía para definir la flecha del tiempo en trabajos previos ([115],[116],[117],[118],[119]). Por el contrario, en estos trabajos la flecha del tiempo se ha basado en la asimetría cosmológica del universo. Precisamente, la flecha del tiempo se define como una diferencia substancial (no convencional) y cosmológica entre pasado y futuro [120]. En un nivel cosmológico, esta diferencia es la asimetría temporal del universo genérico (el nuestro), como se ha probado en [118]. La flecha global puede ser transferida a un contexto local usando el tensor de energía-momento, que también es t-asimétrico (en el caso de que la condición de energía dominante se satisface). Para una comprensión completa de esta línea de investigación se puede ver [113] y [118]. De esta manera, todas las flechas del tiempo usuales pueden ser recuperadas (electromagnética, cuántica, intuitiva, etc). También se ha encontrado la flecha termodinámica irreversible en [113], pero otras flechas termodinámicas todavía siguen sin ser encontradas. Por esto último se introducirán, en el esquema general de la flecha del tiempo geométrica, la entropía clásica de Gibbs y la entropía condicional en el universo temprano y se calculará su límite semiclásico en un modelo cosmológico particular.

## Decoherencia en el universo cuántico

En los modelos cosmológicos, la entropía puede calcularse introduciendo un grano grueso en la acción efectiva de la teoría. En el contexto de EID, en [121] se define un grano grueso considerando un campo de materia e integrando todos los modos de este campo con una longitud menor que un valor crítico. De esta manera se puede encontrar una acción efectiva, es decir, la ecuación de evolución de la matriz densidad reducida. Al calcular luego los coeficientes de difusión de esta ecuación, la decoherencia puede analizarse a través de los modos de longitud de onda mayores que el valor crítico. Estos resultados se han aplicado a modelos de espacio-tiempo de de Sitter interactuando con un campo escalar acoplado, y se ha demostrado que la decoherencia es efectiva siempre y cuando la longitud de onda crítica no sea inferior al radio de Hubble. Hay una extensa bibliografía de la decoherencia en cosmología cuántica que, a nivel de nuestro conocimiento actual acerca de la gravedad cuántica, ha llevado a una imagen consistente de la transición cuántico-clásica cosmológica ([122], [123], [124], [125], [126], [127]).



A continuación se explicará una aproximación diferente, efectuando tres granos gruesos para encontrar un entropía siempre creciente en el período cuántico del universo.

### A.2.5. Decoherencia en el universo cerrado

Si la transición de lo cuántico a lo clásico no requiere de la división del universo en subsistemas como condición necesaria, entonces la decoherencia debe ser uno de los procesos que explican cómo el universo como un todo se hace clásico y llega a un estado de equilibrio térmico.

#### El modelo

Consideremos un universo de Robertson-Walker plano con la métrica

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2) \quad (\text{A.121})$$

donde  $\eta$  es el tiempo conforme y  $a$  es el factor de escala del universo. Consideremos también un campo escalar neutro  $\Phi$  y acoplémoslo con la métrica mediante un acoplamiento conforme  $\xi = \frac{1}{6}$ . La acción total es  $S = S_g + S_f + S_i$ , donde la acción gravitacional  $S_g$  es:

$$S_g = M^2 \int d\eta \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{da}{d\eta} \right)^2 - V(a) \right] \quad (\text{A.122})$$

donde  $M$  es la masa de Planck, y el potencial  $V$  contiene el término de la constante cosmológica y, eventualmente, la contribución de alguna forma de materia clásica. Supongamos que  $V$  es tal que el universo llega a un estado de equilibrio asintóticamente para un radio del orden de  $a_1$ . Podemos expandir el campo escalar  $\Phi$  como:

$$\Phi(\eta, \vec{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{k}}(\eta) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} d\vec{k} \quad (\text{A.123})$$

donde las componentes de  $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$  son tres variables continuas que se corresponden con el momento lineal del campo. La ecuación de Wheeler-De Witt para este modelo resulta:

$$H\Psi(a, \Phi) = (h_g + h_f + h_i)\Psi(a, \Phi) = 0 \quad (\text{A.124})$$

donde

$$h_g = \frac{1}{2M^2} \partial_a^2 + M^2 V(a) \quad (\text{A.125})$$

$$h_f = -\frac{1}{2} \int (\partial_k^2 - k^2 f_{\vec{k}}^2) d\vec{k} \quad (\text{A.126})$$

$$h_i = \frac{1}{2}m^2a^2 \int f_k^2 d\vec{k} \quad (\text{A.127})$$

donde  $m$  es la masa del campo escalar  $\Phi$ ,  $\frac{\vec{k}}{a}$  es el momento lineal del campo y  $\partial_{\vec{k}} = \frac{\partial}{\partial f_{\vec{k}}}$ . Podemos encontrar el régimen semiclásico usando el método WKB [112], escribiendo  $\Psi(a, \Phi)$  como:

$$\Psi(a, \Phi) = e^{iM^2S(a)}\chi(a, \Phi) \quad (\text{A.128})$$

y expandiendo  $S$  y  $\chi$  como:

$$S = S_0 + M^{-1}S_1 + \dots \quad \chi = \chi_0 + M^{-1}\chi_1 + \dots \quad (\text{A.129})$$

Para satisfacer (A.124) en el orden  $M^2$ , la función principal de Jacobi  $S(a)$  debe satisfacer la ecuación de Hamilton-Jacobi:

$$\left(\frac{dS}{da}\right)^2 = 2V(a) \quad (\text{A.130})$$

Podemos definir el tiempo semiclásico<sup>3</sup>

$$\frac{d}{d\eta} = \frac{dS}{da} \frac{d}{da} = \pm \sqrt{2V(a)} \frac{d}{da} \quad (\text{A.131})$$

La solución de esta última ecuación es  $a = \pm F(\eta, C)$ , donde  $C$  es una constante de integración arbitraria. Diferentes valores de esta constante y del signo  $\pm$  dan diferentes soluciones clásicas para la geometría. Entonces, en el próximo orden de la expansión WKB,  $\chi$  satisface la ecuación de Schrödinger que queda:

$$i \frac{d\chi}{d\eta} = h(\eta)\chi \quad (\text{A.132})$$

donde

$$h(\eta) = h_f + h_i(\eta) \quad (\text{A.133})$$

precisamente

$$h(\eta) = -\frac{1}{2} \int \left[ -\frac{\partial^2}{\partial f_{\vec{k}}^2} + \Omega_{\vec{k}}^2(a) f_{\vec{k}}^2 \right] d\vec{k} \quad (\text{A.134})$$

donde

$$\Omega_{\vec{k}}^2(a) = \Omega_{\omega}^2(a) = m^2a^2 + k^2 = m^2a^2 + \omega \quad (\text{A.135})$$

donde  $\omega = k^2$ . Por lo tanto, la dependencia temporal del Hamiltoniano proviene de la función  $a = a(\eta)$ . Ahora consideremos una escala del universo tal que

<sup>3</sup>Estamos considerando el tiempo conforme  $\eta$  de (A.131) definido a través del tiempo clásico como  $d\eta = \frac{dt}{a(t)}$ .

$a = a_{out} \gg a_1$ , donde  $a_1$  es el valor del factor de escala del equilibrio asintótico. En esta región la geometría es casi constante, por lo tanto tenemos como límite un vacío adiabático  $|0\rangle$  y operadores de creación y destrucción adiabáticos  $a_{\vec{k}}^\dagger$  y  $a_{\vec{k}}$ .<sup>4</sup> Entonces  $h = h(a_{out})$  resulta:

$$h = \int \Omega_\omega a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} d\vec{k} \quad (\text{A.136})$$

Podemos considerar el espacio de Fock y una base de vectores:

$$|\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_n\rangle = |\{\vec{k}\}\rangle = a_{\vec{k}_1}^\dagger a_{\vec{k}_2}^\dagger \dots a_{\vec{k}_n}^\dagger |0\rangle \quad (\text{A.137})$$

donde hemos llamado  $\{\vec{k}\}$  al conjunto  $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_n$ , donde eventualmente  $n$  puede ser infinito. Los vectores de esta base son autovectores de  $h$ :

$$h |\{\vec{k}\}\rangle = \omega |\{\vec{k}\}\rangle \quad (\text{A.138})$$

donde

$$\omega = \sum_{\vec{k} \in \{\vec{k}\}} \Omega_\omega = \sum_{\vec{k} \in \{\vec{k}\}} (m^2 a^2 + \omega)^{1/2} \quad (\text{A.139})$$

Por una cuestión de simplicidad y para mantener la consistencia con la notación de la tesis, podemos usar la energía para denotar los autovectores de la siguiente manera:

$$|\{\vec{k}\}\rangle = |\Psi_\omega\rangle \quad (\text{A.140})$$

donde se han omitido las componentes  $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_n$  que realmente son necesarias para definir sin ambigüedad un vector, como se verá. Finalmente, en esta notación, el Hamiltoniano queda:

$$h = \int \omega |\Psi_\omega\rangle \langle \Psi_\omega| d\omega \quad (\text{A.141})$$

### Las tres reducciones

Para obtener la entropía de la función de onda del universo, es necesario realizar tres reducciones en el espacio de observables: la primera de ellas nos lleva a la decoherencia, la segunda y la tercera mostrarán una evolución de la función de la onda que decae. Una vez que hemos efectuado estas tres reducciones, se usarán las técnicas de la mecánica cuántica estadística para definir la entropía del sistema, que en este caso es el universo.

<sup>4</sup>El vacío adiabático es una aproximación del vacío usual, para un universo que se expande con una tasa de expansión muy baja. Este vacío fue introducido por [128] sobre la base de una idea de Einstein. Desde entonces se ha considerado como la definición más fiel del vacío, y también como la base para la noción de número de partículas en un universo en expansión [129].

**Decoherencia y equilibrio en la base de la energía (reducción I)** Se introduce la primer elección particular de los observables, la reducción  $I$ . En este caso, un observable generico  $|O\rangle \in V_O^{VH}$  es de la forma (A.102) donde, como vimos,  $V_O^{VH}$  es el espacio de observables:

$$O = \int_0^\infty O(\omega) |\Psi_\omega\rangle d\omega + \int_0^\infty \int_0^\infty O(\omega, \omega') |\Psi_\omega, \Psi_{\omega'}\rangle d\omega d\omega' \quad (\text{A.142})$$

donde  $|\Psi_\omega\rangle = |\Psi_\omega\rangle \langle \Psi_\omega|$  y  $|\Psi_\omega, \Psi_{\omega'}\rangle = |\Psi_\omega\rangle \langle \Psi_{\omega'}|$ . Un estado genérico  $(\rho| \in V_S^{VH}$  puede ser expresado como (A.103):

$$(\rho| = \int_0^\infty \rho(\omega) (\Psi_\omega| d\omega + \int_0^\infty \int_0^\infty \rho(\omega, \omega') (\Psi_\omega, \Psi_{\omega'}| d\omega d\omega' \quad (\text{A.143})$$

donde  $\{(\Psi_\omega|, (\Psi_{\omega'}|)\}$  es la cobase de  $\{|\Psi_\omega\rangle, |\Psi_{\omega'}\rangle\}$ . Entonces el valor medio de un observable  $|O\rangle$  en el estado  $(\rho(t)|$  resulta

$$\langle O \rangle_{\rho(t)} = (\rho(t) | O) = \int_0^\infty \rho(\omega) O(\omega) d\omega + \int_0^\infty \int_0^\infty \rho(\omega, \omega') O(\omega, \omega') e^{-i\frac{\omega - \omega'}{\hbar} t} d\omega d\omega' \quad (\text{A.144})$$

Tomando el límite para  $t \rightarrow \infty$  y aplicando el teorema de Riemann-Lebesgue, se obtiene, como ya vimos (ec.(A.109))

$$\langle O \rangle_{\rho(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} (\rho(t) | O) = \int_0^\infty \rho(\omega) O(\omega) d\omega \quad (\text{A.145})$$

Y esta última integral es idéntica al valor medio del observable  $|O\rangle$  en un nuevo estado  $(\rho_*|$  :

$$(\rho_*| = \int_0^\infty \rho(\omega) (\Psi_\omega| d\omega \quad (\text{A.146})$$

Este nuevo estado  $(\rho_*|$  es el estado de equilibrio asintótico en el tiempo del universo, que es diagonal en las variables  $\omega, \omega'$  como la decoherencia en la energía requiere. De esta manera, el universo cuántico se aproxima asintóticamente a este estado.

**Reducción analítica (reducción II)** Un problema relacionado con la irreversibilidad se origina en el hecho de que las evoluciones tendientes al equilibrio observadas son exponenciales durante un largo período de tiempo, pero en la mecánica cuántica este tipo de evolución queda excluido aun cuando se tome la traza de los estados. En particular, no hay un efecto exponencial para tiempos pequeños (efecto Zeno) ni para tiempos grandes (efecto Khalfin). No obstante,

en varios casos es usual considerar sólo la ley exponencial de decaimiento eliminando lo que se conoce como las componentes Zeno y Khalfin. Siguiendo nuestro enfoque algebraico, se probará que las evoluciones exponenciales pueden obtenerse cuando se reducen otra vez los espacios de observables y los estados de la siguiente manera:

$$V_{VH}^+ = V_{VH}^S \oplus V_{VH}^{R+} \quad V_{VH}^{+'} = V_{VH}^{S'} \oplus V_{VH}^{R+'} \quad (\text{A.147})$$

donde  $V_{VH}^{R+} \subset V_{VH}^R$  y  $V_{VH}^{R+'} \subset V_{VH}^{R'}$  son subespacios dotados con propiedades analíticas particulares en el plano complejo de la energía que serán precisadas a continuación. Llamaremos a este segundo paso de reducción, una reducción analítica. Consideremos los siguientes espacios:

$$V_{VH}^{R+} = \Phi_+ \otimes \Phi_+ \quad V_{VH}^{R+'} = \Phi_- \otimes \Phi_- \quad (\text{A.148})$$

donde  $|\Psi\rangle \in \Phi_+$  si, siendo  $|\Psi_\omega^f\rangle$  la función de onda que evoluciona bajo el Hamiltoniano libre (es decir  $h_f = -\frac{1}{2a^3} \frac{\partial^2}{\partial \Phi^2}$ ), las funciones  $\langle \Psi_\omega^f | \Psi \rangle$  pueden ser continuadas analíticamente en la región de arriba (abajo) del plano complejo de la energía. El siguiente paso consiste en encontrar los polos de las funciones  $\langle \Psi_\omega^f | \Psi \rangle$ , donde  $\{|\Psi\rangle\}$  es la base del Hamiltoniano completo (el dominio de analiticidad debe ser lo suficientemente grande para contener esos polos, que son los polos resolventes). Precisamente, la siguiente continuación analítica para  $z \in C_+$  y  $z \in C_-$  se define de la siguiente manera:

$$\langle \rho | \Psi_z, \Psi_{z'} \rangle = \text{cont}_{\omega \rightarrow z} \text{cont}_{\omega' \rightarrow z'} \langle \rho | \Psi_\omega, \Psi_{\omega'} \rangle \quad (\text{A.149})$$

$$\langle \Psi_z, \Psi_{z'} | A \rangle = \text{cont}_{\omega \rightarrow z} \text{cont}_{\omega' \rightarrow z'} \langle \Psi_\omega, \Psi_{\omega'} | A \rangle \quad (\text{A.150})$$

donde  $\text{cont}_{\omega \rightarrow z}$  es la continuación analítica de  $\omega$  a  $z$ ,  $\langle \rho | \Psi_z, \Psi_{z'} \rangle$  se considera analítica, y  $\langle \Psi_z, \Psi_{z'} | A \rangle$  tiene polos (por simplicidad asumiremos que sólo tiene dos polos simples en  $z = z_0^*$  y  $z' = z_0$ , ver [130] y [61] para el origen de los polos). Entonces, usando el teorema de Cauchy y los residuos de las funciones analíticas alrededor de los polos, puede probarse que, para cualquier  $A \in V_{VH}^+$  y  $\rho \in V_{VH}^{R+'}$ , la ecuación de evolución débil para  $\rho(t)$  queda:

$$\begin{aligned} \langle \rho(t) | A \rangle &= e^{i(z_0^* - z_0)t} (\rho_0 | \phi_{00}) (\phi_{00}^* | A) + \quad (\text{A.151}) \\ &\int_0^\infty d\omega (\rho_0 | \Psi_\omega) (\Psi_{\omega'} | A) + \int_\Gamma dz' (\rho_0 | \phi_{0z'}) (\tilde{\phi}_{0z'} | A) e^{i(z_0^* - z')t} + \\ &\int_\Gamma dz (\rho_0 | \phi_{z0}) (\tilde{\phi}_{z0} | A) e^{i(z - z_0)t} + \int_{\Gamma^*} dz \int_\Gamma dz' (\rho_0 | \phi_{zz'}) (\tilde{\phi}_{zz'} | A) e^{i(z - z')t} \end{aligned}$$

donde  $\rho_0 = \rho_*$ ,  $z_0(z_0^*)$  es el polo que hemos considerado único por simplicidad (ver [130]),  $\Gamma(\Gamma^*)$  es una curva en el semiplano inferior (superior) que contiene su correspondiente polo, y

$$(\rho_0 | \phi_{00}) = \text{cont}_{\omega \rightarrow z_0^*} \text{cont}_{\omega' \rightarrow z_0} (\rho_0 | \Psi_\omega, \Psi_{\omega'}) \quad (\text{A.152})$$

$$(\tilde{\phi}_{00} | A) = \text{cont}_{\omega \rightarrow z_0^*} \text{cont}_{\omega' \rightarrow z_0} 4\pi^2 (\omega - z_0^*) (\omega' - z_0) (\Psi_\omega, \Psi_{\omega'} | A) \quad (\text{A.153})$$

$$(\rho_0 | \phi_{0z'}) = \text{cont}_{\omega \rightarrow z_0^*} \text{cont}_{\omega' \rightarrow z_0} (\rho_0 | \Psi_\omega, \Psi_{\omega'}) \quad (\text{A.154})$$

$$(\tilde{\phi}_{z0} | A) = \text{cont}_{\omega \rightarrow z_0^*} \text{cont}_{\omega' \rightarrow z_0} 2\pi i (\omega - z_0^*) (\Psi_\omega, \Psi_{\omega'} | A) \quad (\text{A.155})$$

$$(\rho_0 | \phi_{z0}) = \text{cont}_{\omega \rightarrow z_0^*} \text{cont}_{\omega' \rightarrow z_0} (\rho_0 | \Psi_\omega, \Psi_{\omega'}) \quad (\text{A.156})$$

$$(\tilde{\phi}_{0z'} | A) = -\text{cont}_{\omega \rightarrow z_0^*} \text{cont}_{\omega' \rightarrow z_0} 2\pi i (\omega' - z_0^*) (\Psi_\omega, \Psi_{\omega'} | A) \quad (\text{A.157})$$

$$(\rho_0 | \phi_{zz'}) = \text{cont}_{\omega \rightarrow z_0^*} \text{cont}_{\omega' \rightarrow z_0} (\rho_0 | \Psi_\omega, \Psi_{\omega'}) \quad (\text{A.158})$$

$$(\tilde{\phi}_{zz'} | A) = \text{cont}_{\omega \rightarrow z_0^*} \text{cont}_{\omega' \rightarrow z_0} (\Psi_\omega, \Psi_{\omega'} | A) \quad (\text{A.159})$$

Por lo tanto,  $\{|\Psi_\omega\rangle, |\phi_{00}\rangle, |\phi_{z0}\rangle, |\phi_{0z'}\rangle, |\phi_{zz'}\rangle\}$  es una base obtenida por continuación analítica y  $\{(\Psi_\omega|, (\phi_{00}|, (\phi_{z0}|, (\phi_{0z'}|, (\phi_{zz'}|)\}$  es la correspondiente cobase (ver[130]):

$$(\Psi_\omega | \Psi_{\omega'}) = \delta(\omega - \omega') \quad (\tilde{\phi}_{00} | \phi_{00}) = 1 \quad (\Psi_\omega | \phi_{00}) = (\tilde{\phi}_{00} | \Psi_{\omega'}) = 0 \quad (\text{A.160})$$

Si  $z_0 = \tilde{\omega}' - i\frac{\gamma}{2}$  y  $\gamma > 0$ , entonces  $z_0^* - z_0 = i\gamma$  y los cinco términos de la ecuación (A.151) se pueden interpretar de la siguiente manera:

- (i) El primer término es el correspondiente al equilibrio por decoherencia, contenido en  $V_{VH}^S$ , que es constante en el tiempo e igual a  $(\rho_* | A)$ .
- (ii) El segundo término contiene el factor  $e^{-\gamma t}$  y, por lo tanto, es el término de decaimiento exponencial. A este término se lo llama  $e^{-\gamma t} (\rho_1 | A)$ .
- (iii) Los tres términos se conocen como “términos de fondo”, que son sólo relevantes al comienzo (efecto Zeno) y al final (efecto Khalfin) de la evolución (ver [60]). Puesto que el primero de ellos corresponde al comienzo, puede ser eliminado en un estudio para grandes tiempos. El tiempo característico de Khalfin fue medido en el año 2006 y es extremadamente largo frente a los tiempos característicos de los polos usuales, de modo que también puede despreciarse en un período exponencial largo. Incluso, cuando  $t \rightarrow \infty$ , se hace cero como suma lineal de potencias inversas en el tiempo.

**Reducción exponencial (reducción III)** El decaimiento exponencial, que es que se está buscando, está descrito en el punto (ii) del apartado anterior. Si se quiere retener este comportamiento exponencial despreciando los términos de fondo, debemos introducir una reducción más, que llamaremos reducción exponencial. Para ello, se define un estado reducido como

$$(\rho_r| = (\rho| \Pi_+ \quad (\text{A.161})$$

donde el proyector  $\Pi_+$  se define como

$$\Pi_+ = (|\phi_{00}\rangle + \int_0^\infty |\Psi_\omega\rangle d\omega)(\langle\tilde{\phi}_{00}| + \int_0^\infty \langle\Psi_\omega| d\omega) \quad (\text{A.162})$$

De (A.160) vemos que  $\Pi_+$  es de hecho un proyector. Entonces,  $(\rho_r(t)|$  resulta:

$$(\rho_r(t)| = (\rho(t)| \Pi_+ = (\rho| \phi_{00}) \left( \langle\tilde{\phi}_{00}| e^{i(z_0^* - z_0)t} + \int_0^\infty (\rho| \Psi_\omega) \langle\Psi_\omega| d\omega = (\rho_*| + (\rho_1(t)| \right) \quad (\text{A.163})$$

que sólo contiene un término constante y uno de decaimiento. Por lo tanto, por medio de tres reducciones (van Hove, analítica y exponencial), logradas mediante el proyector  $\Pi_+$ , hemos obtenido el decaimiento exponencial a un estado de equilibrio decoherido.

Hasta este punto, hemos usado los espacios definidos en (A.147). Sin embargo, también podríamos haber elegido los siguientes espacios:

$$V_{VH}^- = V_{VH}^S \oplus V_{VH}^{R-} \quad V_{VH}^{-'} = V_{VH}^{S'} \oplus V_{VH}^{R-'} \quad (\text{A.164})$$

$$V_{VH}^{R-} = \Phi_- \oplus \Phi_- \quad V_{VH}^{R-'} = \Phi_+ \oplus \Phi_+ \quad (\text{A.165})$$

En este caso habríamos obtenido el proyector  $\Pi_-$  y el factor  $e^{\gamma t}$  (con  $\gamma > 0$ ), que no representa un término de decaimiento exponencial, sino un término de crecimiento exponencial, correspondiente a una evolución que nos lleva a un equilibrio en el pasado. Esto significa que las leyes de la mecánica cuántica invariantes ante la inversión del tiempo, dan lugar a un par de gemelos t-simétricos en el tiempo: uno de ellos incluye el factor  $e^{-\gamma t}$ , que describe el decaimiento de estado inestable hacia el equilibrio (un proceso disipativo), el otro incluye el factor  $e^{\gamma t}$ , que describe el crecimiento de un estado cuántico inestable desde el equilibrio (un proceso antidisipativo). Entonces hemos encontrado una pareja de gemelos t-simétricos; pero, por supuesto, considerando los fundamentos de la flecha del tiempo global de los trabajos [113] y [71], debemos elegir el primero de los gemelos para explicar la irreversibilidad.

### A.2.6. Entropía condicional del universo

En esta sección se definirá una *entropía condicional*, que está relacionada con la entropía fenomenológica de la termodinámica como veremos a continuación. Para ello se define la entropía cuántica condicional como:

$$S_C = - \langle \rho_r(t) \log [\rho_r(t) \rho_*^{-1}] \rangle \quad (\text{A.166})$$

donde  $\rho_r(t)$  es el operador densidad,  $\rho_*$  el operador densidad en el equilibrio y  $\langle \dots \rangle$  simboliza la traza. Esta entropía se transforma en la entropía de Gibbs en el caso particular en que  $\rho_* = cte$ . Por lo tanto, el problema de la irreversibilidad consiste en encontrar una entropía creciente que evoluciona hacia un valor final de equilibrio. Para encarar este problema, podemos escribir (A.163) con la dependencia explícita en el tiempo de cada uno de los términos:

$$\rho_r(t) = \rho_* + e^{-\gamma t} \rho_1 \quad (\text{A.167})$$

donde  $\rho_*$  y  $\rho_1$  son operadores constantes. Esta última ecuación es una ecuación “débil”, dado que sólo es válida para el estado  $\rho_r(t)$ , completamente reducido bajo la acción del proyector  $\Pi_+$ . En este sentido,  $\rho_r(t)$  puede ser concebido como un estado particular de grano grueso. Desarrollando (A.166), cuando reemplazamos  $\rho_r(t)$  de (A.167) llegamos a

$$S_C = - \langle (\rho_* + e^{-\gamma t} \rho_1) (\log [\rho_* + e^{-\gamma t} \rho_1] - \log [\rho_*^{-1}]) \rangle \quad (\text{A.168})$$

Reescribiendo  $\rho_* + e^{-\gamma t} \rho_1 = \rho_* (1 + e^{-\gamma t} \rho_1 \rho_*^{-1})$  en el primer logaritmo de A.168 se obtiene:

$$S_C = - \langle (\rho_* + e^{-\gamma t} \rho_1) (\log [\rho_*] + \log [1 + e^{-\gamma t} \rho_1 \rho_*^{-1}] - \log [\rho_*^{-1}]) \rangle \quad (\text{A.169})$$

Expandiendo el segundo logaritmo en polinomios de Taylor y quedándonos hasta el término en segundo orden, llegamos a

$$S_C = - \langle (\rho_* + e^{-\gamma t} \rho_1) e^{-\gamma t} \rho_1 \rho_*^{-1} \rangle \quad (\text{A.170})$$

y finalmente

$$S_C = -e^{-\gamma t} \langle \rho_* \rho_1 \rho_*^{-1} \rangle - e^{-2\gamma t} \langle \rho_1^2 \rho_*^{-1} \rangle \quad (\text{A.171})$$

El orden en los operadores en el primer término del lado derecho de (A.171) puede ser intercambiado dado que  $\langle \dots \rangle$  es una traza. Por lo tanto  $\langle \rho_* \rho_1 \rho_*^{-1} \rangle = \langle \rho_1 \rangle$ , y, entonces,

$$S_C = -e^{-\gamma t} \langle \rho_1 \rangle - e^{-2\gamma t} \langle \rho_1^2 \rho_*^{-1} \rangle \quad (\text{A.172})$$

Por otro lado,  $\langle \rho(t) \rangle = \langle \rho_*(t) \rangle + \langle \rho_1(t) \rangle e^{-\gamma t}$ . Dado que la función de onda esta normalizada,  $\langle \rho(t) \rangle = \langle \rho_*(t) \rangle = 1$ . Entonces, por la ecuación (A.167),  $\langle \rho_1(t) \rangle = 0$ . Por lo tanto

$$S_C = -e^{-2\gamma t} \langle \rho_1^2 \rho_*^{-1} \rangle = S_C = e^{-2\gamma t} \int_{\Gamma} \rho_1^2 \rho_*^{-1} d\Gamma + O\left(\frac{\hbar}{S}\right) \quad (\text{A.173})$$



donde los símbolos en la parte derecha de la última ecuación son estados clásicos, obtenidos por la transformación de Wigner (ver [58], [131], [109] para detalles) y  $S$  es la acción. A su vez, (A.167) puede ser transformado a través de la transformación de Wigner [109]. La magnitud  $S_C(t)$  de (A.173) podría ser nuestro candidato para la “entropía condicional”, esto es, la entropía derivada de las ecuaciones fundamentales por reducción (ver [132] para más detalles). De hecho,  $S_C(t)$  crece con el tiempo y, para  $t \rightarrow \infty$ ,  $S_C(t) \rightarrow 0$  y  $\rho(t) \rightarrow \rho_*$ . Incluso, si  $\sigma$  es la producción de entropía, entonces

$$\sigma = \dot{S} > 0 \quad (\text{A.174})$$

$$\dot{\sigma} = \ddot{S} < 0 \quad (\text{A.175})$$

Esto significa que nuestra entropía fundamental  $S_C(t)$  satisface los requerimientos necesarios para ser una entropía creciente e irreversible que alcanza su máximo valor en el equilibrio [133]. Hemos probado, entonces, que la flecha termodinámica del tiempo asociada con esta entropía existe y está basada en un marco cosmológico consistente con nuestro esquema de la flecha del tiempo.

### A.2.7. Las entropías termodinámica y de Gibbs

Para completar el panorama, en este apartado vamos a deducir la relación que mantiene la entropía condicional  $S_C$  con la entropía de Gibbs  $S_G$  y con la entropía termodinámica. Para ello podemos escribir (A.166) como

$$S_C = -\langle \rho_r(t) \log [\rho_r(t)] \rangle + \langle \rho_r(t) \log [\rho_*] \rangle \quad (\text{A.176})$$

Si calculamos los diferenciales en ambos términos, tenemos

$$-dS_C + d\langle \rho_r(t) \log [\rho_*] \rangle = d\langle \rho_r(t) \log [\rho_r(t)] \rangle \quad (\text{A.177})$$

Como  $\rho_*(t)$  es un estado de equilibrio, puede ser escrito como  $\rho_*(t) = Z^{-1}e^{-\beta E}$  donde  $\beta = \frac{1}{T}$ ; entonces,

$$\log [\rho_*] = \log [Z^{-1}] - \beta E \quad (\text{A.178})$$

Dado que  $Z = cte$ , entonces,

$$d\langle \rho_r(t) \log [\rho_*] \rangle = -\beta d\langle \rho_r(t) E \rangle \quad (\text{A.179})$$

donde  $\langle \rho_r(t) E \rangle$  es la energía total del sistema, que en el caso general de un sistema abierto (no en el caso del universo que es un sistema cerrado) sería el incremento de energía o calor  $dQ$  intercambiado entre el sistema y su entorno. Entonces, de (A.177),

$$-d\langle \rho_r(t) \log [\rho_r(t)] \rangle = \frac{1}{T}dQ + dS_C \quad (\text{A.180})$$

Entonces, si llamamos  $-S_G(\rho_r(t)) = \langle \rho_r(t) \log [\rho_r(t)] \rangle$  a la entropía usual de Gibbs, (A.180) queda

$$dS_G = \frac{1}{T}dQ + dS_C \quad (\text{A.181})$$

Por lo tanto

- (i) la ecuación (A.181) es el incremento ordinario de la entropía de Gibbs en un período de tiempo  $dt$ .
- (ii) El primer término de (A.181) del lado derecho es  $\frac{dQ}{T}$ , donde  $dQ$  es el calor intercambiado entre el sistema y su entorno. Si el sistema está cercano al equilibrio entonces tenemos que  $dS_C \simeq 0$  y entonces se obtiene la definición usual de la entropía termodinámica  $dS_G = dS = \frac{dQ}{T}$ .
- (iii) El segundo término de (A.181) es la producción de entropía condicional en el período de tiempo  $dt$  de acuerdo con (A.174) y (A.175).

Volviendo al caso de nuestro universo (sistema cerrado) tenemos entonces que  $dQ = 0$  y por lo tanto

$$dS_G = dS_C \quad (\text{A.182})$$

Por lo tanto  $S_G$  satisface también (A.174) y (A.175).

Resumiendo, entonces, hemos mostrado que es posible introducir una entropía de Gibbs en un marco cosmológico en los estadios iniciales del universo. Usando el modelo de Wheeler-deWitt y luego el formalismo de decoherencia autoinducida, hemos encontrado que los estados decoheridos llegan al equilibrio con un factor de decaimiento. La irreversibilidad de este proceso implica que se ha hallado otro ejemplo de la flecha termodinámica del tiempo, basado en un marco cosmológico.

# Bibliografía

- [1] Lombardi, O. y Castagnino, M., *Stud. Hist. Phil. Mod. Phys.*, **39**, 380, (2008).
- [2] Castagnino, M. y Lombardi, O., *J. Phys. Conf. Series*, **128**, 012014, (2008).
- [3] Ardenghi, J. S., Castagnino, M. y Lombardi, O., *Found. Phys.*, **39**, 1023, (2009).
- [4] Lombardi, O., Castagnino, M. y Ardenghi, J. S., *Theoria*, **24**, 5, (2009).
- [5] Lombardi, O., Castagnino, M. y Ardenghi, J. S., *Stud. Hist. Phil. Mod. Phys.*, **41**, 93, (2010).
- [6] Ardenghi, J. S., Campoamor-Stursberg, R. y Castagnino, M., *J. Math. Phys.*, **50**, 103526, (2009).
- [7] Ardenghi, J. S. y Castagnino, M., *Int. J. Theor. Phys.*, **49**, 171, (2010).
- [8] Ardenghi, J. S., Castagnino, M. y Lombardi O., *Int. J. Theor. Phys.*, **50**, 774, (2011).
- [9] Ardenghi, J. S., Fortin, S., Narvaja, M. y Lombardi, O., “The modal–Hamiltonian interpretation of quantum mechanics: facing the interpretive problems of the theory”, *Int. J. Mod. Phys. D*, en prensa, (2010).
- [10] Ardenghi, J. S. y Lombardi, O., “Interpretación modal-hamiltoniana, no-separabilidad y no-localidad”, *Epistemología e Historia de la Ciencia 2010*, Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba, 20, (2010).
- [11] Lombardi, O., “The Central Role of the Hamiltonian in Quantum Mechanics: Decoherence and Interpretation”, Manuscrito. *Revista Internacional de Filosofía*, en prensa, (2011).
- [12] Lombardi, O. y Castagnino, M., “Una ontología modal para la mecánica cuántica”, en R. de Andrade Martins, L. Al-Chueyr Pereira Martins, C. Celestino Silva y L. Lewowicz (eds.), *Filosofia e História da Ciência no Cone Sul.*, AFHIC, Campinas, XX, (2010).

- [13] Lombardi, O., Fortin, S., Castagnino, M. y Ardenghi, J. S., *The modal Hamiltonian interpretation of quantum mechanics: physical relevance and philosophical implications*, Nova Science, New York, (2010).
- [14] Lombardi, O., Fortin, S., Castagnino, M. y Ardenghi, J. S., An introduction to Modal Hamiltonian Interpretation of quantum mechanics, en Nova Publishers, Nova Science, New York, (2010).
- [15] J. S. Ardenghi y M. Castagnino, *Renormalization: the projection method*, arXiv:1105.1826v1 [quant-ph], (2011).
- [16] van Fraassen, B. C., "A formal approach to the philosophy of science". En R. Colodny (ed.), *Paradigms and Paradoxes: The Philosophical Challenge of the Quantum Domain.*, University of Pittsburgh Press, Pittsburgh, 303, (1972).
- [17] van Fraassen, B. C., "Semantic analysis of quantum logic". En C. A. Hooker (ed.), *Contemporary Research in the Foundations and Philosophy of Quantum Theory*, Reidel, 80, Dordrecht, (1973).
- [18] van Fraassen, B. C., *Synthese*, **29**, 291, (1974).
- [19] Dieks, D., *Stud. Hist. Phil. Mod. Phys.*, **38**, 292, (2007).
- [20] Kochen, S. y Specker, E., *J. Math. Mech.*, **17**, 59, (1967).
- [21] Einstein, A., Podolsky, B. y Rosen, N., *Phys. Rev.*, **47**, 777, (1935).
- [22] Haag, R. *Local Quantum Physics (Fields, Particles, Algebras)*. Springer Verlag, Berlin, (1993).
- [23] Gelfand, I. M. y Naimark M. A., *Math. Sbornik*, **12**, 197, (1943).
- [24] Hugues, R., *The Structure and Interpretation of Quantum Mechanics*, Harvard University Press, Cambridge Mass, (1989).
- [25] Cohen, D. W., *An Introduction to Hilbert Space and Quantum Logic*, Springer-Verlag, New York, (1989).
- [26] Ballentine, L., *Quantum Mechanics: A Modern Development*, World Scientific, Singapore, (1998).
- [27] Kobayashi, S. y Nomizu, K., *Foundations of Differential Geometry*, Vol. 1 (New ed.), Wiley-Interscience, New York, (1996).
- [28] Harshman, N. y Wickramasekara, S., *Phys. Rev. Lett.*, **98**, 080406, (2007).
- [29] Harshman, N. y Wickramasekara, S., *Open System and Information Dynamics*, **14**, 341, (2007).
- [30] Thinkam, M., *Group Theory and Quantum Mechanics*, Dover, New York, (1992).

- [31] Meijer, P. y Bauer, E., Group Theory. *The Application to Quantum Mechanics*. Dover, New York, (2004).
- [32] Cohen-Tannoudji, C., Diu, B. y Laloe, F., *Quantum Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, (1977).
- [33] Fock, *Zeits. Phys.*, **98**, 145, (1935).
- [34] Weyl, H., *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover, New York, (1950).
- [35] Hamermesh, M., *Group Theory and its Applications to Physical Problems*, Addison-Wesley, Reading Mass, (1962).
- [36] Tung, W. K., *Group Theory in Physics*, World Scientific, Singapore, (1985).
- [37] Barut, A. O. y Raczka, R., *Theory of Group Representations and Application*, World Scientific, Singapore, (1987).
- [38] Zhang, W. M., Feng, D. H., Yuan, J. M. y Wang, S. J., *Phys. Rev. A*, **40**, 438, (1989).
- [39] Kochen, S., "A new interpretation of quantum mechanics". En P. J. Lahti y P. Mittelstaedt (eds.), *Symposium on the Foundations of Modern Physics*, World Scientific, 151, Singapore, (1985).
- [40] Dieks, D. y Vermaas, P., *The Modal Interpretation of Quantum Mechanics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1998).
- [41] Ardenghi, J. S. y Lombardi, O., enviado a *Phys. Res. Int.*, (2011).
- [42] Georgi, H., *Lie Algebras in Particle Physics: From Isospin to Unified Theories*, Benjamin-Cummings, Reading, MA, (1982).
- [43] Bene, G. y Dieks, D., *Found. Phys.*, **32**, 656, (2002).
- [44] Primas, H., *Chemistry, Quantum Mechanics and Reductionism*, Springer, Berlin, (1983).
- [45] Woolley, R., *Amer. Chem. Soc.*, **100**, 1073, (1978).
- [46] Amann, A., *South Afric. J. Lett.*, **6**, 297, (1992).
- [47] Mittelstaedt, P., *The Interpretation of Quantum Mechanics and the Measurement Process*. Cambridge University Press, Cambridge, (1998).
- [48] Albert, D. y Loewer, B., "Wanted dead or alive: Two attempts to solve Schrodinger's paradox". *Proceedings of the 1990 Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, Vol. 1, Philosophy of Science Association, 277, East Lansing, (1990).

- [49] Albert, D. y Loewer, B., *Found. Phys. Lett.*, **6**, 297, (1993).
- [50] Bacciagaluppi, G. y Hemmo, M., *Stud. Hist. Phil. Mod. Phys.*, **27**, 239, (1996).
- [51] Elby, A., *Found. Phys. Lett.*, **6**, 5-19, (1993).
- [52] Omnés, R., *The Interpretation of Quantum Mechanics*. Princeton University Press, Princeton, (1994).
- [53] Omnés, R., *Understanding Quantum Mechanics*. Princeton University Press, Princeton, (1999).
- [54] Paz, J. y Zurek, W., “Environment-induced decoherence and the transition from quantum to classical”. En D. Heiss (ed.), *Lectures Notes in Physics*, Vol. **587**. Springer, 77, Heidelberg-Berlin, (2002).
- [55] Zurek, W., *Rev. Mod. Phys.*, **75**, 715, (2003).
- [56] Castagnino, M., Laura, R., y Lombardi, O., *Phil. of Sci.*, XX, (2007).
- [57] Ballentine, L., *Rev. Mod. Phys.*, **42**, 358-, (1970).
- [58] Castagnino, M. y Laura, R., *Phys. Rev. A*, **62**, 022107, (2000).
- [59] Castagnino, M. y Ordoñez, A., *Int. J. Theor. Phys.*, **43**, 695, (2004).
- [60] Castagnino, M. y Lombardi, O., *Stud. Hist. Phil. Mod. Phys.*, **35**, 73, (2004).
- [61] Castagnino, M. y Lombardi, O., *Phys. Rev. A*, **72**, 012102, (2005).
- [62] Castagnino, M. y Lombardi, O., *Inter. Journ. of Theo. Phys.*, **42**, 1281, (2003).
- [63] Castagnino, M. y Lombardi, O., *Phil. Sci.*, **72**, 764, (2005).
- [64] Castagnino, M., *Braz. J. Phys.*, **35**, 375, (2005).
- [65] Castagnino, M. y Gadella, M., *Found. Phys.*, **36**, 920, (2006).
- [66] Lévi-Leblond, J. M., *Nuovo Cim.*, **4**, 99, (1974).
- [67] Brading, K. y Castellani, E., *Philosophical Reflections*. Cambridge University Press, Cambridge, (2003).
- [68] Suppes, P., *Found. Phys.*, **30**, 1569, (2000).
- [69] Earman, J., *Phil. Sci.*, **71**, 1227, (2004).
- [70] Earman, J., *Int. Stud. Phil. Sci.*, **18**, 173, (2004).
- [71] Castagnino, M., Lara, L. y Lombardi, O., *Class. Quant. Grav.*, **20**, 369, (2003).

- [72] Brown, H. y Holland P., *Amer. Jour. Phys.*, **67**, 204, (1999).
- [73] Fine, A., *Brit. J. Phil. Sci.*, **24**, 1, (1973).
- [74] Kochen, S., “A new interpretation of quantum mechanics”. En P. J. Lahti y P. Mittelsteadt (eds.), *Symposium on the Foundations of Modern Physics*. World Scientific, 151, Singapore, (1985).
- [75] Dieks, D., *Ann. Phys.*, **7**, 174, (1988).
- [76] Vermaas, P. E. y Dieks, D., *Found. Phys.*, **25**, 145, (1995).
- [77] Clifton, R. K., *Brit. J. Phil. Sci.*, **46**, 33, (1995).
- [78] Lévi-Leblond J. M., *J. Math. Phys.*, **4**, 776, (1963).
- [79] Dickson, M., *Non-relativistic quantum mechanics*. En J. Butterfield y J. Earman (eds.), *Philosophy of Physics*. Elsevier, Amsterdam, 275, (2007).
- [80] Butterfield, J., “On symplectic reduction in classical mechanics”. En J. Butterfield and J. Earman (eds.), *Philosophy of Physics*. Elsevier, Amsterdam, 1, (2007).
- [81] Laue, H., *Amer. J. Phys.*, **64**, 1203, (1996).
- [82] Colussi, V. y Wickramasekara, S., *Ann. Phys.*, **323**, 3020, (2008).
- [83] Brown, H., Suárez, M., and Bacciagaluppi, G., Are ‘sharp values’ of observables always objective elements of reality?. En D. Dieks & P. E. Vermaas (Eds.), *The modal interpretation of quantum mechanics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1998).
- [84] Minkowski, H., “Space and Time. In The Principle of Relativity”, *A Collection of Original Memoirs on the Special and General Theory of Relativity*, Dover, New York, 75, (1908).
- [85] Weyl, H., *Symmetry*, Princeton University Press, Princeton, (1952).
- [86] Auyang, S. Y., *How is Quantum Field Theory Possible?*, Oxford University Press, Oxford, (1995).
- [87] Nozick, R., *Invariances: The Structure of the Objective World*, Harvard University Press, Harvard, (2001).
- [88] Bacry, M., Levy-Leblond, J. M., *J. Math. Phys.*, **9**, 1605, (1968).
- [89] Haag, R., “Questions in quantum physics: a personal view”, arXiv:hep-th/0001006, (2006).
- [90] Cariñena, J. F., del Olmo, M. A. y Santander, M., *J. Phys. A: Math. Gen.*, **14**, 1, (1981).

- [91] Greiner, W., *Relativistic Quantum Mechanics*, Springer, Berlin, (2000).
- [92] Le Bellac, M. y Levy-Léblond, J. M., *Nuovo Cim.*, **14B**, 217, (1973).
- [93] Coleman, S. y Mandula, J., *Phys. Rev.*, **159**, 1251, (1967).
- [94] Kaku, M., *Quantum Field Theory, A Modern Introduction*, Oxford University Press, New York, (1993).
- [95] Weinberg, S., *The Quantum Theory of Fields. Vol III: Supersymmetry*, Cambridge University Press, New York, (2000).
- [96] Aghasi, J. J., Roman, P. y Santilli, M., *Phys. Rev. D*, Vol. **I**, N. 10, 2753, (1970).
- [97] Lam, K. S., *Non-relativistic Quantum Theory, Dynamics, Symmetry and Geometry*, World Scientific, Singapore (2009).
- [98] Weinberg, S., *The Quantum Theory of Fields, Vol. I: Foundations*, Cambridge University Press, Cambridge, (1995).
- [99] Wigner, E. P. y Inönü, E., *Proc. Nat. Acad. Sci*, **39**, 510, (1953).
- [100] Laura, R. y Castagnino, M., *Phys. Rev. A*, **57**, 4140, (1998).
- [101] Treves, A., *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, Academic Press, New York, (1967).
- [102] Iguri, S. y Castagnino, M., *Int. J. Theor. Phys.*, **38**, 143, (1999).
- [103] Iguri, S. y Castagnino, M., *J. Math. Phys.*, **49**, 033510, (2008).
- [104] Belanger, A. y Thomas, G.F., *Can. J. Math.*, **42**, 410, (1990).
- [105] Antoniou, I., Suchanecki, Z., Laura, R. y Tasaki, S., *Physica A*, **241**, 737, (1997).
- [106] Laura, R. y Castagnino, M., *Phys. Rev. E*, **57**, 3948, (1998).
- [107] Castagnino, M. y Laura, R., *Int. J. Theor. Phys.*, **39**, 1737, (2000).
- [108] van Hove, L., *Physica*, **21**, 901, (1955).
- [109] Hillery, M., O'Connell, R., Scully, M. y Wigner, E. P., *Phys. Reports*, **106**, 121, (1984).
- [110] Castagnino, M. y Lombardi, O., *Chaos, Solitons and Fractals*, **28**, 879, (2006).
- [111] Castagnino, M. y Lombardi, O., *Stud. Hist. Phil. Mod. Phys.*, **38**, 482, (2007).
- [112] Hartle, J., Bowik, N. J. y Gurse, F., (ed.) *High energy Physics, Proceedings of the Yale Summer School*, World Scientific, Singapore, (1985).



- [113] Aiello, M., Castagnino, M. y Lombardi, O., *Found. Phys.*, **38**, 256, (2008).
- [114] Ehrenfest, P. y Ehrenfest, T., *The Conceptual of the Statistical Approach in Mechanics*, Cornell University Press, Ithaca, (1959) (**ver esta cita**).
- [115] Castagnino, M. y Lombardi, O., *Journ. Phys. A (Math. and Gen.)*, **37**, 4445, (2004).
- [116] Castagnino, M. y Lombardi, O., “A global and non entropic approach to the problem of the arrow of time”. En: Reimer, A. (Ed.). *Spacetime physics research trends. Horizons in world physics*, Nova Science, New York, (2005).
- [117] Castagnino, M., Lara, L. y Lombardi, O., *Int. J. Theor. Phys.*, **42**, 2487, (2003).
- [118] Castagnino, M., Fortin, S. y Lombardi, O., *Class. and Quant. Grav.*, **25**, 154002, (2008).
- [119] Castagnino, M., Lombardi, O. y Lara, L., *Found. Phys.*, **33**, 877, (2003).
- [120] Price, H., *Time’s Arrow and Archimedes’ Point*, Oxford University Press, Oxford (1984).
- [121] Lombardo, F. y Mazzitelli, D., *Phys. Rev. D*, **53**, 2001, (1996).
- [122] Barvinsky, A. O., et al., *Nucl. Phys. B*, **551**, 374, (1999).
- [123] Joos, E., *Phys. Lett. A*, **116**, 6, (1986).
- [124] Kiefer, C., *Class. Quantum Gravity*, **4**, 1369, (1987).
- [125] Kiefer, C., Lesgourgues, J., Polarski, D. y Starobinsky, A. A., *Class. Quantum Gravity*, **15**, L67, (1998).
- [126] Kiefer, C. y Polarski, D., *Ann. Phys. (Leipzig)*, **7**, 137, (1998).
- [127] Kiefer, C., Polarski, D. y Starobinsky, A. A., *Int. J. Mod. Phys. D*, **7**, 455, (1998).
- [128] Parker, L., *Phys. Rev.*, **183**, 1057, (1969).
- [129] Birrell, N. y Davies, P., *Quantum Field Theory in Curved Space*. Cambridge University Press, Cambridge, (1982).
- [130] Castagnino, M., Laura, R., Liotta, R. e Id Bettan, R., *J. Phys. A (Math. Gen.)*, **35**, 6055, (2002).
- [131] Castagnino, M., *Physica A*, **335**, 511, (2004).
- [132] Castagnino, M. y Gunzig, E., *Int. J. Theor. Phys.*, **36**, 2545, (1997).
- [133] Prigogine, I., *Non-Equilibrium Statistical Mechanics*, Wiley, New York, (1962).