

Tesis Doctoral

Dualidades en teorías de campos conformes no-rationales y sus aplicaciones en teorías de cuerdas

Nicolás, Lorena

2010

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Nicolás, Lorena. (2010). Dualidades en teorías de campos conformes no-rationales y sus aplicaciones en teorías de cuerdas. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

Cita tipo Chicago:

Nicolás, Lorena. "Dualidades en teorías de campos conformes no-rationales y sus aplicaciones en teorías de cuerdas". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2010.

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

*Dualidades en Teorías de Campos Conformes
No-Racionales y sus Aplicaciones en Teorías de
Cuerdas*

Trabajo de Tesis para optar por el título de
Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área de Ciencias Físicas.

por Lorena Nicolás

Director: Gastón Giribet
Lugar de Trabajo: Instituto de Astronomía y Física del Espacio.

Agosto, 2010

RESUMEN

Dualidades en Teorías de Campos Conformes No-Racionales y sus Aplicaciones en Teorías de Cuerdas

En el presente trabajo de tesis estudiamos las dualidades que conectan distintas teorías de campos conformes no-rationales bidimensionales, poniendo especial atención a la dualidad que existe entre la teoría de Liouville y el modelo Wess-Zumino-Novikov-Witten formulado sobre la variedad $SL(2, \mathbb{R})$. Estudiamos varias aplicaciones de esto: Como primera aplicación, analizamos la auto-dualidad de la teoría de Liouville y mostramos, a partir de esta, una realización física de la dualidad de Langlands en funciones de correlación del modelo Wess-Zumino-Novikov-Witten. Estudiamos luego una familia de teorías conformes biparamétricas, de las cuales tanto la teoría de Liouville cuanto el modelo Wess-Zumino-Novikov-Witten son casos particulares. Calculamos explícitamente funciones de correlación de 2 y 3-puntos de estas teorías. Basándonos en nuestra observación sobre la dualidad de Langlands, mostramos que el modelo WZNW aparece doblemente representado en la familia biparamétrica de CFTs, lo cual se relaciona con la existencia de un segundo operador de apantallamiento en la teoría. Como otra aplicación comparamos las contribuciones a las amplitudes de 3-puntos de los distintos sectores de la geometría $AdS_3 \times S^3 \times T^4$, analizamos con detalle cómo la relación entre Liouville y Wess-Zumino-Novikov-Witten permite entender el acuerdo exacto entre observables del borde y del bulk en este ejemplo particular de la conjetura de Maldacena. Nuestro enfoque pone de manifiesto el importante papel que desempeña la supersimetría para el cálculo, lo que se desprende de nuestro análisis detallado de cómo el modelo $SU(2)$ y el modelo $SL(2, \mathbb{R})$ se relacionan mediante una extensión analítica.

Palabras clave: Teoría de Campos Conformes, Teoría de Liouville, Modelo Wess-Zumino-Novikov-Witten.

ABSTRACT

Dualities in Non-Rational Conformal Field Theories and its Applications in String Theories

In the present thesis we study the dualities which connect different non-rational two-dimensional conformal field theories, paying special attention to the duality that exists between Liouville and the Wess-Zumino-Novikov-Witten model formulated on a $SL(2, \mathbb{R})$ manifold. We study several applications of this relation: As a first application, we analyze the Liouville self-duality and show, from this one, a physical realization of the Langlands duality in correlation functions of the Wess-Zumino-Novikov-Witten model. We study then a family of biparametric conformal theories, from which so much Liouville theory as the Wess-Zumino-Novikov-Witten model are particular cases. We explicitly compute 2 and 3-points correlation functions in these theories. Based on our observation on Langlands duality, we show that the WZNW model appears represented twice in the biparametric family of CFTs, which is related to the existence of a second operator screening in the theory. As another application, we compare the contributions to the 3-point scattering amplitudes from different sectors of $AdS_3 \times S^3 \times T^4$, analyzing closely how the relation between Liouville theory and the Wess-Zumino-Novikov-Witten model enables us to understand the exact agreement between bulk and boundary observables in this particular example of the Maldacena's conjecture. Our approach reveals the important role that supersymmetry plays on the computation; this comes as a result of our detailed analysis about how the $SU(2)$ model and the $SL(2, \mathbb{R})$ model are related by an analytic extension.

Key words: Conformal Field Theory, Liouville Field Theory, Wess-Zumino-Novikov-Witten model.

Agradecimientos

Mi agradecimiento inconmensurable hacia Gastón Giribet, quien hizo posible la realización de este trabajo de tesis. Más allá de sus innumerables virtudes como director, de su predisposición constante para el trabajo (en la oficina o desde Trieste) o de su preocupación por promover la discusión en temas de física, Gastón me dio la confianza y el impulso imprescindibles para terminar el doctorado. Gracias!

Quisiera agradecer a las personas del Instituto de Astronomía y Física del Espacio que me brindaron un lugar físico donde realizar este trabajo. Especialmente quiero agradecer a Rafael Ferraro, con quien ha sido un verdadero placer compartir la oficina estos años. También a Jorge Miraglia, por facilitarme la computadora. A Francisco y Matias, por la buena onda.

Agradezco al departamento de Física de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad de Buenos Aires, a sus profesores, especialmente a Rafael Ferraro, Ricardo Piegai y Mario Castagnino, cuyas clases disfruté particularmente.

A Yu Nakayama, con quien fue un privilegio trabajar.

También quiero agradecer a mis amigos: Matias Aiello, Gabriel Bengochea, Hernán Deccico, Gastón Giribet, Mauricio Leston, Leonardo Vanni y Carlos Vigh; por todos los viernes en deportes.

Y a mis amigos de toda la vida: Cristian, Daniel, Ezequiel, Érica, Marisa y Paola, mis hermanos.

Por último, un agradecimiento enorme a mi familia N: Ana, Mirta, Haydeé, Tato y prim; y a mi familia K: Guillermo, Cristina, Andrés, Paula y Cecilia. Mi agradecimiento para Ale está más allá de las palabras.

Índice general

1. Introducción	1
2. Teorías Conformes	7
2.1. Aspectos Generales	7
2.1.1. Teorías Conformes en d -dimensiones	7
2.1.2. Simetría Conforme en 2-dimensiones	10
2.1.3. Cuantización Radial	11
2.1.4. La Carga Central	13
2.1.5. Un ejemplo de CFT: El bosón libre	14
2.2. Aspectos Avanzados	15
2.2.1. Álgebra de Virasoro	15
2.2.2. Funciones de Correlación	16
2.2.3. Operadores de Vértice	18
2.2.4. Un segundo ejemplo: Los Modelos Minimales	18
2.3. Teorías Conformes no-rationales	19
2.3.1. La teoría de Liouville	19
2.3.2. El modelo Wess-Zumino-Novikov-Witten	25
2.3.3. La teoría de cuerdas como una CFT	37
3. Correspondencia LFT/WZNW	43
3.1. La reducción hamiltoniana de Drinfeld-Sokolov	43
3.2. La fórmula Fateev-Zamolodchikov	45
3.3. La Fórmula de Stoyanovsky-Ribault-Teschner	47
3.3.1. El mapa SRT	47
3.3.2. Deducción a través de integral de caminos	48
3.4. Generalizaciones y aplicaciones de la fórmula SRT	50

4. Aplicaciones I: Dualidad de Langlands en el modelo WZNW	53
4.1. Preliminares	53
4.2. Versión dual de la fórmula SRT	55
4.2.1. Deducción mediante la ecuación KZ	56
4.2.2. Deducción mediante integral de caminos	58
5. Aplicaciones II: Nuevas teorías conformes no-rationales	61
5.1. Familia de CFT's Biparamétricas	61
5.1.1. Representación de Campos Libres	62
5.1.2. Funciones de Correlación	65
5.2. Reducción Hamiltoniana y Dualidad de Langlands	71
5.2.1. Implementando la reducción como el límite $\mu_i \rightarrow 0$	71
5.2.2. Realizando la dualidad de nivel de Langlands	73
5.3. Funciones de correlación que violan winding	74
6. Aplicaciones III: Correspondencia AdS_3/CFT_2	79
6.1. Preliminares	79
6.2. Funciones de correlación en la teoría de WZNW	81
6.2.1. Correladores de $SL(2, \mathbb{R})_k$ a partir de LFT	81
6.2.2. Correladores de $SU(2)_k$ a partir de Modelos Minimales	84
6.3. Amplitudes de cuerdas en $AdS_3 \times S^3$	86
6.3.1. La Correspondencia AdS_3/CFT_2	86
6.3.2. La Función de tres-puntos	88
6.3.3. La Función de cuatro-puntos	89
6.4. Continuación Analítica	93
6.4.1. Continuación Analítica en k	93
6.4.2. Representación de gas de Coulomb	95
7. Conclusiones	101
7.1. Resultados Originales	101
7.2. Futuras Direcciones	102
A. La conjetura FZZ	105
B. Invariancia conforme en la teoría de Liouville	107
C. Integración del modo cero en los correladores de LFT	109
D. Funciones Especiales	113

Introducción

Las teorías de campos conformes no-rationales bidimensionales tienen muchas aplicaciones tanto en física como en matemática, desde agujeros negros cuánticos (en teorías de cuerdas) hasta el programa de Langlands geométrico. La mayor parte de nuestro conocimiento sobre estas teorías está basado en nuestro entendimiento acerca de la teoría de Liouville (LFT)[1, 2, 3, 4]. De hecho, la teoría de campos de Liouville es, por mucho, la teoría mejor entendida entre las CFT's no-rationales, y resulta ser el modelo prototípico para estudiar su cuantización exacta. Otro ejemplo es la teoría Wess-Zumino-Novikov-Witten (WZNW) sobre la variedad $H_3^+ = SL(2, \mathbb{C})/SU(2)$, cuya estructura fue entendida recurriendo a la analogía con LFT [5, 6, 7]. En el Capítulo 2 repasaremos los aspectos básicos de las CFT's, tanto en dimensión arbitraria como en 2 dimensiones. Luego describiremos los ejemplos más representativos de las teorías conformes no-rationales, como son, la teoría de Liouville, el modelo WZNW y la descripción de la hoja de mundo de la teoría de cuerdas.

En los últimos años hubo importantes avances en el área de las teorías conformes no-rationales: Cuatro años atrás, S. Ribault y J. Teschner mostraron que la relación entre la teoría de Liouville y el modelo WZNW puede ser llevada más allá del nivel de una mera analogía, demostrando una correspondencia entre funciones de correlación de ambas teorías de campos conformes (CFT's). En [8] ellos mostraron (basándose en un trabajo previo de A. Stoyanovsky) que funciones de correlación arbitrarias del modelo H_3^+ WZNW admiten expresiones simples en términos de funciones de correlación de LFT. Más precisamente, cualquier función de n -puntos correspondiente a la teoría H_3^+ WZNW en la topología de la esfera puede escribirse en términos de una función de $(2n-2)$ -puntos de LFT. En esta tesis nos referiremos a la fórmula que conecta las funciones de correlación en WZNW con las de Liouville como la fórmula Stoyanovsky-Ribault-Teschner (SRT).

Una aplicación de la correspondencia H_3^+ -Liouville en teoría de cuerdas (se describe brevemente en el Apéndice A) es la descripción del modelo coset $SL(2, \mathbb{R})_k/U(1)$, de modo

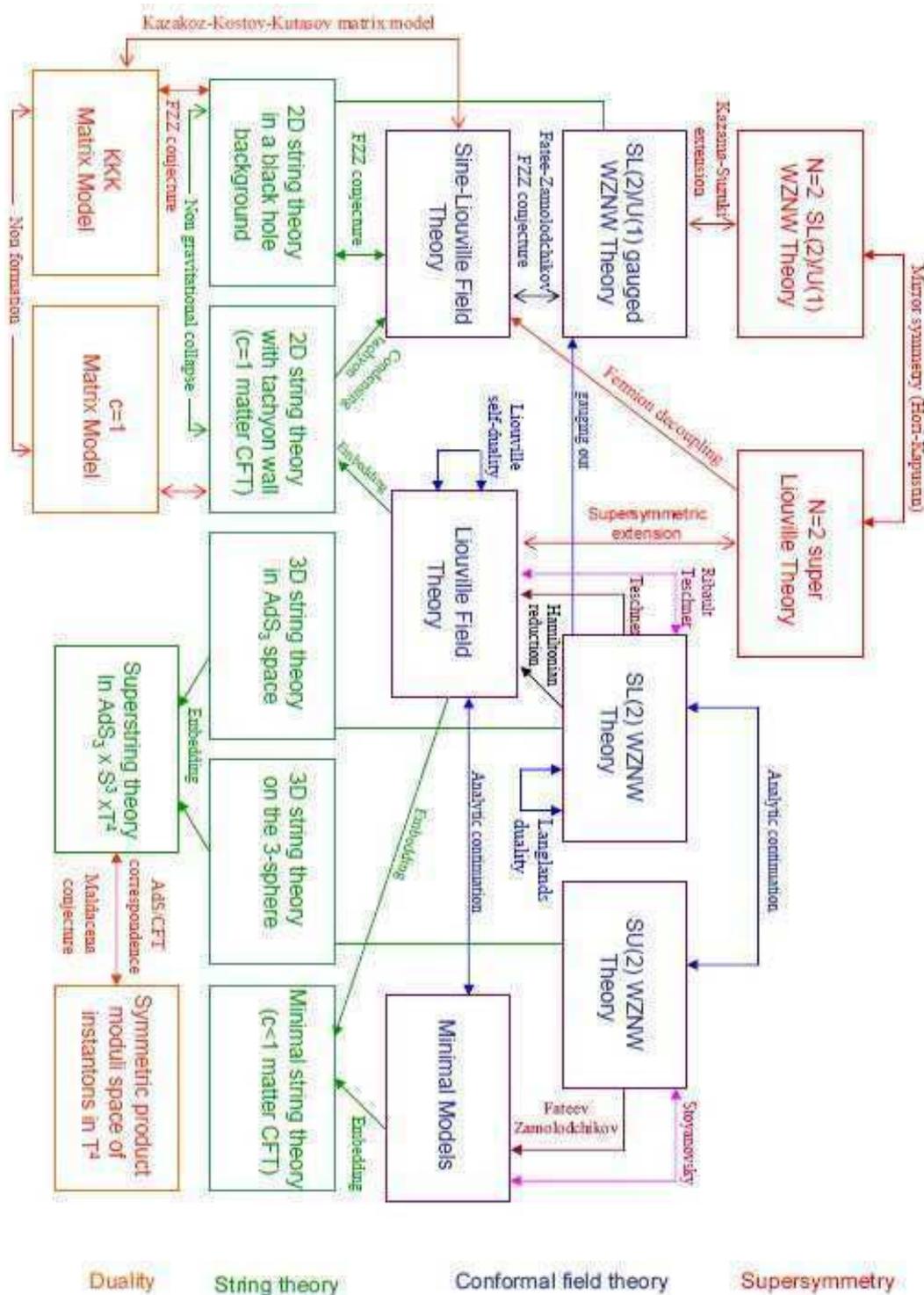


Figura 1.1: Red de Dualidades entre Teorías Conformes

que las amplitudes de cuerdas en el fondo de un agujero negro bidimensional puedan ser descritas por funciones de correlación de la teoría de Liouville [9]. Esta correspondencia es también relevante en el estudio de la teoría de cuerdas en el espacio-tiempo Anti-de Sitter tridimensional (AdS_3), en la dinámica de un condensado de taquiones inhomogéneos en la teoría de cuerdas cerradas, en la teoría de *little string* en seis dimensiones y muchos otros escenarios (ver [10, 11, 12, 13, 14] y referencias en ellos). Algunas de estas aplicaciones fueron investigadas en [15].

En la Figura 1.1 se muestra un gráfico que resume el mapa de dualidades entre distintas teorías conformes bidimensionales. En el Capítulo 3 presentaremos las distintas correspondencias que se conocen entre LFT y WZNW, a saber: La reducción hamiltoniana de Drinfeld-Sokolov (DS), la fórmula de Fateev-Zamolodchikov (FZ) y la fórmula de Stoyanovsky-Ribault-Teschner (SRT). Veremos también aquí cómo surgen estas correspondencias y las distintas generalizaciones y aplicaciones.

Una de las características más interesantes de la teoría de Liouville es auto-dualidad ante el intercambio del parámetro de acoplamiento $b \rightarrow 1/b$. Esta simetría ha llamado la atención de los expertos desde hace más de una década [16, 17, 18]. La pregunta fundamental es si esta auto-dualidad del lado de la teoría de Liouville establece alguna otra del lado del modelo WZNW en $SL(2, \mathbb{R})$. Nosotros atacamos esta cuestión. Como aplicación concreta se estudia lo largo del Capítulo 4 una conexión entre las nociones de dualidad de nivel de Langlands $k - 2 \rightarrow 1/(\tilde{k} - 2)$ y correspondencia SRT H_3^+ -Liouville. Para ello comenzaremos deduciendo una generalización de la relación SRT que pondrá de manifiesto la dualidad de nivel. Ciertamente, uno puede reformular la fórmula SRT básicamente cambiando b por b^{-1} del lado de la LFT, y luego mostrar que esto lleva a una relación sorprendente entre funciones de correlación en la teoría H_3^+ WZNW con nivel k y aquellas con nivel dual \tilde{k} . Esta relación es conocida con el nombre de dualidad de Langlands. La comprensión matemática de la correspondencia de Langlands fuera del nivel crítico es vivamente investigado actualmente (e.g. [19], ver también [20, 21] desde un punto de vista físico). En este sentido, nuestra versión dual de la fórmula SRT puede verse como una intuición física de la correspondencia Langlands cuántica (aún no formulada matemáticamente) a nivel de las funciones de correlación completas¹. Para mostrar todo esto primero deduciremos la versión dual de la formula SRT a través de la ecuación de Kniznik-Zamolodchikov y luego mediante el formalismo de integral de caminos.

En el Capítulo 5 propondremos una representación de campos libres para ciertas teorías conformes propuestas recientemente por Ribault en [22], en la que se muestra que existe una familia biparamétrica de CFT's cuyos observables están directamente relacionados con aquellos de la teoría de Liouville. En este caso, podemos identificar al modelo WZNW sobre la variedad H_3^+ y a la teoría de Liouville como casos particulares de esta familia. Es más, mostraremos que el modelo H_3^+ está representado por dos curvas (y no sólo por una) en el espacio de parámetros (m, b) de [22] (Esto se relaciona con la dualidad de Langlands mencionada arriba). Fijar el nivel k corresponde a fijar un punto en cada curva, donde una

¹Enfatizamos que nuestro enfoque sólo ofrece una relación entre las funciones de correlación completas y no entre las funciones de correlación quirales.

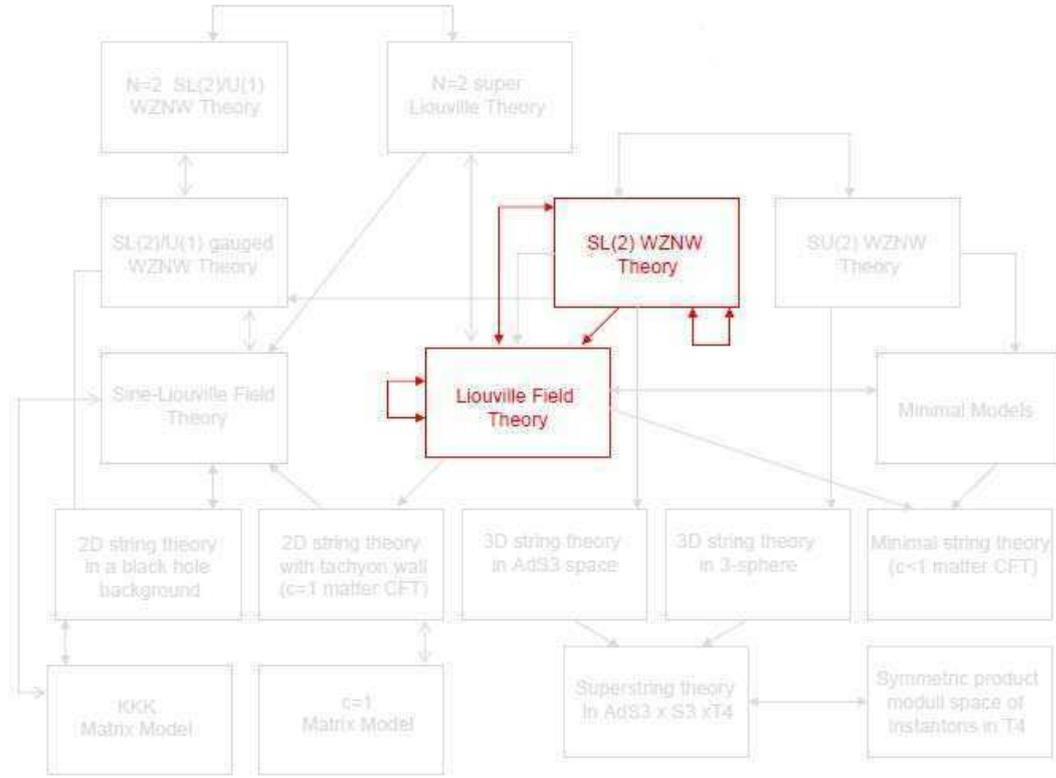


Figura 1.2: La autodualidad de Liouville induce la dualidad de Langlands en el modelo WZNW.

de ellas resulta estar relacionada con la otra a través de la dualidad de nivel de Langlands $k - 2 \rightarrow (k - 2)^{-1}$. Discutiremos entonces, la forma de revelar la dualidad de Langlands en el modelo H_3^+ y también trataremos de explicar porqué esto podría verse como un ejemplo de una dualidad aún más general. Veremos cómo interpretar la fórmula SRT desde el punto de vista de la reducción hamiltoniana; más aun, estudiaremos funciones de correlación en las que intervienen estados con simetría de flujo espectral. Como se desprende de la Figura 1.1, la dualidad SRT abre un abanico muy interesante entre otras teorías conformes bidimensionales; los aportes originales [23] de estos dos capítulos tienden a aumentar nuestro conocimiento en esta dirección, como se ve en la Figura 1.2.

Como otra aplicación de las dualidades entre teorías conformes estudiaremos la correspondencia AdS_3/CFT_2 . La teoría de supercuerdas en $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ con flujos NSNS admite una descripción exacta a través de su hoja de mundo en términos del modelo WZNW supersimétrico con $\mathcal{N} = 1$. Esto es, la teoría es descrita mediante el modelo- σ con $\mathcal{N} = 1$ en $SL(2, \mathbb{R}) \times SU(2) \times U(1)^4$, donde el nivel \hat{k} es un número entero que parametriza el radio, tanto de AdS_3 como de S^3 , en unidades de longitud de la cuerda $\sqrt{\alpha'} = l_s$. En las referencias [24, 25], Gaberdiel y Kirsch, y Dabholkar y Pakman, calcularon las funciones

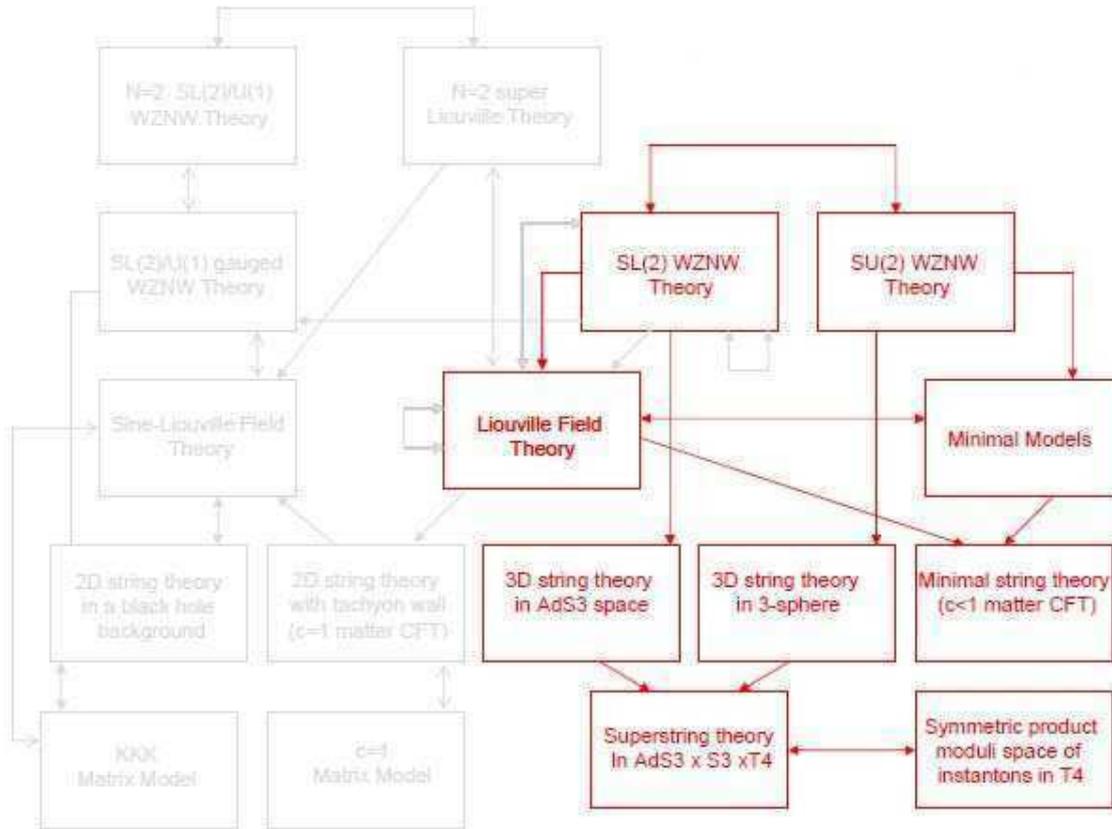


Figura 1.3: Porción de la red de dualidades que discutiremos en esta tesis.

de tres-puntos de ciertos estados primarios quirales para la teoría de cuerdas tipo IIB en $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ en la geometría de la esfera. Las expresiones resultantes se compararon luego con los correspondientes correladores en la teoría conforme dual bidimensional que vive en el borde de AdS_3 . Como resultado, se vio que los observables del volumen y los del borde para N grande coinciden exactamente. En [26], Pakman y Server extendieron el análisis de esta coincidencia holográfica al caso de operadores quirales con $\mathcal{N} = 4$ y en [27] se consideraron operadores del sector de flujo espectral. Esta concordancia también se vio desde el punto de vista de supergravedad en [28].

La coincidencia exacta encontrada en [24, 25, 26] no sólo representan un importante verificación de la correspondencia AdS/CFT más allá de la aproximación de supergravedad sino que también puede verse como evidencia de que se satisface un teorema de no-renormalización para la teoría de cuerdas en este fondo. El problema de no-renormalización se debe a que la dualidad AdS/CFT relaciona el régimen de acoplamiento débil de las teorías de gauge con teorías de cuerdas en fondos con alta curvatura; esto fue recientemente estudiado en [29]. Al revisar los cálculos correspondientes a la hoja de mundo de [24, 25], uno nota de inmediato que un punto crucial para que haya acuerdo

entre observables del volumen y del borde es la sorprendente cancelación de todos los factores en las funciones de tres-puntos de la hoja de mundo que mezclan los momentos de los operadores de vértice. Este es un punto que analizaremos en detalle [31]. Una de las ventajas de considerar la dualidad AdS_3/CFT_2 es que para estas dimensiones en particular, ambas teorías, tanto la teoría de cuerdas como la teoría de campos conformes bidimensional son conocidas explícitamente. Es por esto que el Capítulo 6 lo dedicamos a la coincidencia entre funciones de correlación (en particular, funciones de 3-puntos) del volumen y el borde $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ con flujos NSNS prestando especial atención a las cancelaciones que tienen lugar entre las constantes de estructura de $SU(2)$ y $SL(2, \mathbb{R})$ supersimétricos. Estas cancelaciones se deben, en parte, al hecho que ambas constantes de estructuras pueden verse, por decirlo rápidamente, como una la inversa multiplicativa de la otra. En un principio uno podría imaginar alguna contradicción dado que en el caso bosónico, las constantes de estructura de $SL(2, \mathbb{R})$ pueden obtenerse mediante una continuación analítica de su análogo compacto, $SU(2)$. Mostramos entonces, que esto tiene que ver con la forma de realizar las continuaciones analíticas dependiendo si el nivel del álgebra de ambos grupos tienen el mismo signo (caso supersimétrico) o cambian de signo (caso bosónico). Conjeturamos la forma funcional que podría tener la función de 4-puntos en el bulk para el caso extremal. En la Figura 1.3 se muestran las relaciones entre teorías conformes bidimensionales que intervinieron en el desarrollo de este capítulo.

Finalmente, el Capítulo 7 está dedicado a las conclusiones, el resumen de los aportes originales y las direcciones futuras que devendrán de esta tesis.

Teorías Conformes

La esencia de la teoría de campos conformes es que se apoya sólo en condiciones de invariancia conforme para calcular funciones de correlación entre distintos campos [32, 33, 34]. Es un hecho al menos remarcable que sólo el requerimiento de invariancia conforme sea suficiente para determinar casi completamente la estructura de la amplitudes de scattering de N -puntos.

En esta sección se estudiarán las características principales que definen a las teorías conformes. Comenzaremos con el estudio de las teorías conformes en dimensión arbitraria d para luego profundizar en el caso bidimensional. Repasaremos los ejemplos más representativos de tales teorías; a saber, los campos libres, los modelos minimales, la teoría de Liouville y el modelo Wess-Zumino-Novikov-Witten, así como su aplicación a la teoría de cuerdas.

2.1. Aspectos Generales

2.1.1. Teorías Conformes en d -dimensiones

Consideremos el espacio-tiempo R^d con métrica plana $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ de signatura (p, q) y elemento de línea $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$. Por definición, el grupo conforme es el subgrupo de transformaciones de coordenadas que deja invariante la métrica a menos de un factor de escala

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \Omega(x)g_{\mu\nu}(x) \quad (2.1)$$

en otras palabras, una transformación conforme es localmente equivalente a una rotación y una dilatación.

El conjunto de transformaciones conformes es un grupo que contiene al grupo de Poincaré como subgrupo (basta evaluar $\Omega(x) = 1$). En resumen, las transformaciones conformes son las transformaciones de coordenadas que preservan ángulos entre vectores [35].

2. Teorías Conformes

Los generadores infinitesimales del grupo conforme se determinan considerando la transformación infinitesimal de coordenadas

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu \quad (2.2)$$

En el caso unidimensional esta transformación no impone ninguna condición sobre la función Ω , de manera que toda transformación suave es conforme; esto es consistente con el hecho que en una dimensión no existe la noción de ángulo. El caso bidimensional, que merece especial atención, será tratado en detalle en la siguiente sección. Para $d \geq 3$ las transformaciones conformes infinitesimales son

$$\begin{aligned} \epsilon^\mu &= a^\mu && \text{traslaciones} \\ \epsilon^\mu &= \omega_\nu^\mu a^\nu && \text{rotaciones } (\omega \text{ antisimétrico}) \\ \epsilon^\mu &= \lambda a^\mu && \text{transformaciones de escala } (\lambda \text{ real}) \\ \epsilon^\mu &= b^\mu x^2 - 2x^\mu \dot{b} && \text{transformaciones especiales conformes} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Integrando éstas, se obtienen las transformaciones finitas correspondientes, a saber

$$\begin{aligned} x \rightarrow x'^\mu &= x^\mu + a^\mu \\ x \rightarrow x'^\mu &= \Lambda_\nu^\mu x^\nu \quad (\Lambda_\nu^\mu \in SO(p, q)) \\ x \rightarrow x'^\mu &= \lambda x^\mu \\ x \rightarrow x'^\mu &= \frac{x^\mu - b^\mu x^2}{1 - 2b\dot{x} + b^2 x^2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde las dos primeras ecuaciones corresponden al grupo de Poincaré, la siguiente a las dilataciones y por último las transformaciones especiales conformes.

Construyamos entonces los invariantes conformes, esto es, las funciones $\Gamma(x_i)$ de N -puntos x_i que quedan invariantes ante cualquiera de las transformaciones conformes (2.4) vistas arriba. Invariancia ante traslaciones y rotaciones implica que Γ sólo puede depender de las distancias relativas entre pares de puntos distintos $|x_i - x_j|$. La invariancia de escala nos dice que sólo son permitidos en Γ los cocientes entre estas distancias, es decir $\frac{|x_i - x_j|}{|x_k - x_l|}$. Por último, de pedir invariancia ante transformaciones especiales conformes se obtiene [36]

$$|x'_i - x'_j| = \frac{|x_i - x_j|}{(1 - 2b\dot{x}_i + b^2 x_i^2)^{1/2} (1 - 2b\dot{x}_j + b^2 x_j^2)^{1/2}} \quad (2.5)$$

Con esto se muestra que es imposible construir un invariante Γ con dos o tres puntos. Las posibilidades más simples son las siguientes funciones de 4-puntos

$$\frac{|x_1 - x_2||x_3 - x_4|}{|x_1 - x_3||x_2 - x_4|} \quad \frac{|x_1 - x_2||x_3 - x_4|}{|x_2 - x_3||x_1 - x_4|} \quad (2.6)$$

Expresiones como estas se denominan radios anarmónicos o *cross-ratios*¹. Con N puntos distintos, pueden construirse $N(N - 3)/2$ *cross-ratios* [36].

¹En español, radios cruzados.

2.1. Aspectos Generales

Habiendo establecido las transformaciones y los invariantes nos queda entonces ver las restricciones que la invariancia conforme impone a las funciones de N -puntos de una teoría cuántica.

Ante una transformación conforme $x \rightarrow x'$ un campo $\phi(x)$ de spin cero transforma como

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-\Delta/d} \phi(x) \quad (2.7)$$

donde Δ es la dimensión conforme de ϕ y $\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|$ es el jacobiano de la transformación de coordenadas². A los campos que transforman de esta manera se los denomina “cuasi-primarios”.

La teoría es entonces covariante ante la transformación (2.7) en sentido que las funciones de correlación deben satisfacer³

$$\langle \phi_1(x_1) \dots \phi_n(x_n) \rangle = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|_{x=x_1}^{-\Delta_1/d} \dots \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|_{x=x_n}^{-\Delta_n/d} \langle \phi_1(x'_1) \dots \phi_n(x'_n) \rangle \quad (2.8)$$

Además el vacío $|0\rangle$ de la teoría con el que se definen los valores medios $\langle \dots \rangle \equiv \langle 0 | \dots | 0 \rangle$ resulta invariante ante el grupo conforme.

De acuerdo a (2.8) y pidiendo invariancia ante traslaciones, rotaciones y dilataciones, se llega a que la forma de la función de 2-puntos es

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle = \frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{2\Delta}} \quad (2.9)$$

si $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ y 0 en si $\Delta_1 \neq \Delta_2$. C_{12} es una constante que depende de la normalización de los campos.

Lo mismo puede hacerse para obtener una forma genérica de la función de 3-puntos

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \phi_3(x_3) \rangle = \frac{C_{123}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3} |x_2 - x_3|^{\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1} |x_1 - x_3|^{\Delta_1 + \Delta_3 - \Delta_2}} \quad (2.10)$$

A diferencia de lo que sucede para las funciones de 2 y 3 puntos, para $N \geq 4$ la función de N -puntos no queda determinada completamente, sino que queda determinada a menos de constantes debido a la dependencia en los *cross-ratios*, que son invariantes conformes. La función de 4-puntos, por ejemplo, toma la forma más general

$$\langle \phi_1(x_1) \dots \phi_4(x_4) \rangle = f \left(\frac{|x_1 - x_2| |x_3 - x_4|}{|x_1 - x_3| |x_2 - x_4|}, \frac{|x_1 - x_2| |x_3 - x_4|}{|x_2 - x_3| |x_1 - x_4|} \right) \prod_{i < j}^4 |x_i - x_j|^{\Delta/3 - \Delta_i - \Delta_j} \quad (2.11)$$

²El jacobiano se relaciona con el factor de escala mediante la relación $\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = \Omega^{-d/2}$. Esto compensa el $1/d$ en el exponente de (2.7).

³El valor de expectación $\langle \mathcal{O} \rangle$ de un observable \mathcal{O} en la teoría cuántica se define como $\langle 0 | \mathcal{O} | 0 \rangle$ donde $|0\rangle$ es el valor de expectación del vacío. En caso de contar con una descripción lagrangiana de la teoría, tendremos también que $\langle \mathcal{O} \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{-S} \mathcal{O}$, donde S es la acción euclídea.

donde se definió $\Delta = \sum_{i=1}^4 \Delta_i$ y f es una función arbitraria de los 2 *cross-ratios*. Como mencionamos anteriormente, las funciones de N -puntos en general son funciones de los $N(N-3)/2$ *cross-ratios* de modo que la invariancia conforme global por sí sola no puede aportar más información sobre estas funciones de correlación.

Hasta aquí se discutieron las propiedades que caracterizan una teoría conforme en dimensión mayor o igual que 3. En la siguiente sección veremos qué sucede en el caso bidimensional.

2.1.2. Simetría Conforme en 2-dimensiones

En el caso bidimensional aparecen naturalmente las ecuaciones de Cauchy-Riemann al buscar las transformaciones conformes [35, 36], de manera que estas coinciden con las transformaciones analíticas de coordenadas

$$z \rightarrow f(z) \quad , \quad \bar{z} \rightarrow \bar{f}(\bar{z}) \quad (2.12)$$

cuya álgebra local es infinito-dimensional. En coordenadas complejas el elemento de línea transforma como

$$ds^2 = dzd\bar{z} \rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 dzd\bar{z} \quad (2.13)$$

donde $\Omega = \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2$. Es un resultado conocido que todo mapeo analítico del plano complejo en sí mismo es conforme (*i.e.* preserva ángulos); este conjunto es infinito dimensional, ya que se necesita un número infinito de parámetros (los coeficientes de las series de Laurent) para especificar todas las funciones analíticas sobre alguna vecindad. Es precisamente esta dimensionalidad infinita la que permite que se sepa tanto sobre teorías de campos conformes en dos dimensiones.

Los generadores infinitesimales del álgebra conforme⁴, en otras palabras, las transformaciones infinitesimales de la forma (2.12), son

$$l_n = -z^{n+1}\partial_z \quad \bar{l}_n = -\bar{z}^{n+1}\partial_{\bar{z}} \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (2.14)$$

Es fácil ver que estos generadores satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$[l_m, l_n] = (m-n)l_{m+n} \quad , \quad [\bar{l}_m, \bar{l}_n] = (m-n)\bar{l}_{m+n} \quad , \quad [l_m, \bar{l}_n] = 0 \quad (2.15)$$

Dado que las partes holomorfa y antiholomorfa conmutan, el álgebra local conforme es la suma directa de dos subálgebras isomorfas; el álgebra (2.15) frecuentemente recibe el nombre de álgebra de de-Witt.

De aquí en más, aprovechando la independencia de estas dos álgebras, ignoraremos por simplicidad la parte anti-holomorfa.

La razón por la que llamamos a estas álgebras “locales” es que los generadores no están bien definidos globalmente en la esfera de Riemann $S^2 = \mathbb{C} \cup \infty$. El conjunto de

⁴Toda transformación holomorfa infinitesimal puede expresarse como $z' = z + \epsilon_n(z)$, con $n \in \mathbb{Z}$, donde $\epsilon_n(z) = -z^{n+1}$.

2.1. Aspectos Generales

transformaciones conformes que sí está bien definido en la esfera de Riemann es el grupo conforme global, es lo que se denomina el *grupo especial conforme*. La subálgebra asociada con este grupo es la generada por $\{l_{-1}, l_0, l_1\}$. De hecho, puede verse de (2.14) que l_{-1} genera las traslaciones, l_0 genera las transformaciones de escala y las rotaciones y l_1 genera las transformaciones especiales conformes; además $l_0 + \bar{l}_0$ genera las dilataciones y $l_0 - \bar{l}_0$ rotaciones en la superficie real. En esta base llamaremos dimensión conforme holomorfa (anti-holomorfa) h (\bar{h}) al autovalor ante el operador l_0 (\bar{l}_0). Debido a esto la dimensión (o peso) conforme Δ y el spin s del estado correspondiente están dados por $\Delta = h + \bar{h}$ y $s = h - \bar{h}$ respectivamente.

La forma finita de las transformaciones de arriba resulta ser

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{con} \quad ad - bc = 1 \quad (2.16)$$

donde a, b, c, d son números complejos. Este es el grupo $SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2 \approx SO(3, 1)$ también conocido como el grupo de las transformaciones conformes proyectivas⁵. Esta distinción entre grupos conformes locales y globales se da únicamente en el caso bidimensional (en dimensiones más altas sólo existe el grupo conforme global).

Siguiendo los pasos del apartado anterior podemos generalizar las transformaciones (2.12) a la forma⁶

$$\phi(z, \bar{z}) \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^h \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right)^{\bar{h}} \phi(f(z), \bar{f}(\bar{z})) \quad (2.17)$$

La propiedad de transformación (2.17) define lo que se conoce con el nombre de campo primario ϕ de dimensión (o peso) conforme (h, \bar{h}) ⁷. Los campos de una teoría conforme que no transforman de acuerdo a (2.17) reciben el nombre de campos “secundarios”. Un campo primario es automáticamente un campo cuasi-primario en sentido que satisface (2.7) ante transformaciones conformes globales; un campo secundario en cambio, puede o no ser un campo cuasi-primario.

2.1.3. Cuantización Radial

Mostraremos a continuación algunos detalles del procedimiento de cuantización de las teorías conformes bidimensionales. Consideremos un cilindro parametrizado por las coordenadas $\sigma \in [0, 2\pi]$ y $\tau \in [-\infty, +\infty]$. Es decir, pasemos de considerar una variedad Lorentziana \mathbb{R}^2 a considerar la variedad Euclidea $\mathbb{R} \times U(1)$. Hagamos una rotación de Wick, esto es

$$\sigma^\pm = \tau \pm \sigma \rightarrow -i(\tau \pm i\sigma) \quad (2.18)$$

⁵El cociente por \mathbf{Z}_2 se debe al hecho que (2.16) no se ve afectado al tomar todos los parámetros a, b, c, d a menos ellos mismos.

⁶Una forma equivalente de expresar (2.17) es decir que la cantidad $\phi(z, \bar{z})dz^h d\bar{z}^{\bar{h}}$ es invariante.

⁷Donde h y \bar{h} , toman valores reales (\bar{h} no es el complejo conjugado de h).

donde τ y σ son las dos coordenadas del espacio-tiempo. Luego definamos las coordenadas complejas en el cilindro

$$\begin{aligned} z' &= \tau - i\sigma \\ \bar{z}' &= \tau + i\sigma \end{aligned} \quad (2.19)$$

De esta manera, las nociones de campos no masivos left-moving y right-moving en el espacio bidimensional de Minkowsky se traducen en el espacio euclídeo en campos que tienen dependencia puramente holomorfas o anti-holomorfas con las coordenadas. Ahora podemos mapear el cilindro en el plano complejo vía transformaciones conformes

$$\begin{aligned} z &= e^{z'} = e^{\tau - i\sigma} \\ \bar{z} &= e^{\bar{z}'} = e^{\tau + i\sigma} \end{aligned} \quad (2.20)$$

De esta manera, el pasado y futuro infinito en el cilindro ($\sigma = \mp\infty$) se mapean a los puntos $z = 0, \infty$ del plano. Superficies de igual tiempo ($\sigma = cte$) se transforman en círculos de radio constante en el plano, y la inversión temporal ($\sigma \rightarrow -\sigma$) se mapea en el plano complejo como $z \rightarrow 1/\bar{z}$. Para construir una teoría de campos conformes en el plano complejo, se necesita realizar los operadores que implementan los mapeos conformes del plano. Por ejemplo, dilataciones en el cilindro serán traslaciones temporales en el plano complejo; de esta manera, el generador de las dilataciones en el plano conforme puede pensarse como el hamiltoniano del sistema y el espacio de Hilbert se construye a partir de superficies de radio constante. Es debido a esto que este procedimiento, mediante el cual se define una teoría cuántica en el plano se conoce con el nombre de *cuantización radial*.

Los generadores de simetrías pueden construirse vía prescripción de Noether. En particular, las transformaciones locales de coordenadas son generadas por cargas construidas a partir del tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$. En teorías invariantes conformes, el tensor de energía-momento no sólo es simétrico y sin divergencias como sucede en general, sino que además, tiene traza nula [36]. Esto nos lleva a una ecuación de conservación de cargas en el plano complejo; esto es, el tensor de energía-momento tendrá sólo dos componentes no nulas; a saber

$$T(z) \equiv T_{zz}(z) \quad y \quad T(\bar{z}) \equiv \bar{T}_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z}) \quad (2.21)$$

donde se aprecia la contribución sólo holomorfa (anti-holomorfa).

Las funciones de correlación suelen tener singularidades en las posiciones en que coinciden dos o más campos. La expansión en producto de operadores (OPE) es la representación de un producto de dos operadores insertados en puntos que son usualmente denotados z y w mediante una suma finita de términos [36, 35]. El OPE del tensor de energía-momento con un campo primario ϕ de dimensión conforme h es

$$T(z)\phi(w) = \frac{h}{(z-w)^2}\phi(w) + \frac{1}{z-w}\partial_w\phi(w)\dots \quad (2.22)$$

y lo mismo para la parte anti-holomorfa. Aquí, el símbolo ... expresa que el OPE contiene también términos regulares.

2.1. Aspectos Generales

2.1.4. La Carga Central

No todos los campos satisfacen la ley de transformación (2.17) ante transformaciones conformes. Las derivadas de los campos, por ejemplo, tienen leyes de transformación más complicadas. Esto se ve reflejado en el hecho que el OPE del tensor de energía-momento con un campo secundario (es decir, que no transforma según (2.17)), no tendrá la forma (2.22) sino que aparecerán polos de orden mayor.

Un ejemplo de un campo que no obedece (2.17) ni (2.22) es el tensor de energía-momento. En este caso, el OPE del tensor de energía-momento consigo mismo toma la forma

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{z-w}\partial T(w)\dots \quad (2.23)$$

donde el factor que acompaña al polo de orden 4 es el doble de la carga central de la teoría.

La carga central no puede determinarse mediante consideraciones de simetría, este valor está dictaminado por el comportamiento a cortas distancias de la teoría y depende también de la topología del espacio [35]. Por ejemplo, veremos más adelante, que para el bosón libre el valor de la carga central es $c = 1$, y para el fermión libre es $c = 1/2$. Se puede argüir que la carga central es de alguna manera una medida extensiva del número de grados de libertad del sistema, pero no nos preocuparemos por este aspecto termodinámico en esta tesis.

La aparición de la carga central c , también conocida con el nombre de *Anomalía Conforme*, está relacionada con una ruptura *suave* de la simetría conforme al introducir una escala macroscópica en el sistema. En otras palabras, c describe la forma en que un sistema reacciona a la introducción de escalas de longitud macroscópicas, por ejemplo, mediante condiciones de borde. Para ser más específicos veamos dos ejemplos concretos. El primer ejemplo tiene que ver con la introducción de condiciones de periodicidad. Supongamos una teoría conforme en el plano complejo; el mapeo al cilindro de longitud L se realiza mediante la transformación

$$z \rightarrow w = \frac{L}{2\pi} \ln z \quad (2.24)$$

El tensor de energía-momento sobre el cilindro (T_{cil}) se relaciona con el correspondiente tensor de energía-momento en el plano (T_{pl}) a través de

$$T_{cil}(w) = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \left\{ T_{pl}(z) z^2 - \frac{c}{24} \right\} \quad (2.25)$$

Asumiendo que la densidad de energía de vacío ($\langle T_{pl} \rangle$) se anula en el plano, entonces la densidad de energía de vacío para el cilindro será

$$\langle T_{cil} \rangle = -\frac{c\pi^2}{16L^2} \quad (2.26)$$

En este caso la carga central puede verse proporcional a la energía de Casimir, el cambio en la densidad de energía de vacío que aparece al imponer condiciones de periodicidad.

La energía de Casimir va naturalmente a cero al hacer que la escala macroscópica L vaya a infinito.

El segundo ejemplo se relaciona con la formulación de una teoría conforme sobre una variedad bidimensional. En este caso la curvatura de la variedad es lo que introduce una escala macroscópica en el sistema, haciendo que el valor de expectación de la traza del tensor de energía-momento, en lugar de anularse, sea proporcional a la curvatura de la variedad. La carga central es precisamente lo que determina la anomalía de traza según $\langle T^\mu_\mu \rangle = \frac{cR(x)}{24\pi}$ donde R es el escalar de Ricci de la variedad bidimensional.

2.1.5. Un ejemplo de CFT: El bosón libre

Ilustremos lo discutido hasta aquí con el ejemplo del bosón libre o modelo gaussiano que es, desde el punto de vista del formalismo de integral de camino, la teoría conforme más simple. La acción de esta teoría viene dada por

$$S = \int \mathcal{L} = \frac{1}{2\pi} \int \partial X \bar{\partial} X \quad (2.27)$$

donde la medida de integración es $2idz \wedge d\bar{z}$. El propagador puede separarse en una parte holomorfa y otra antiholomorfa

$$\langle x(z)x(w) \rangle = -\log(z-w) \quad , \quad \langle \bar{x}(\bar{z})\bar{x}(\bar{w}) \rangle = -\log(\bar{z}-\bar{w}) \quad (2.28)$$

Donde se usó $X(z, \bar{z}) = \frac{1}{2}(x(z) + \bar{x}(\bar{z}))$. Notemos que este campo $x(z)$ no es primario⁸, pero su derivada $\partial x(z)$ sí lo es, esto queda claro en el OPE

$$\partial x(z)\partial x(w) = -\frac{1}{(z-w)^2} + \dots \quad (2.29)$$

Puede definirse el tensor de energía-momento via prescripción de orden normal, $T(z) =: \partial x(z)\partial x(w) :$ y así calcular el OPE con $\partial x(w)$. Esto es

$$T(z)\partial x(w) = \frac{\partial x(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial^2 x(w)}{(z-w)} + \dots \quad (2.30)$$

de donde se deduce, de acuerdo a (2.22) que $\partial x(z)$ es un campo primario con peso conforme $(1, 0)$. Por supuesto esto mismo vale exactamente para la parte antiholomorfa.

El teorema de Wick nos permite también calcular el OPE del tensor energía-momento consigo mismo, este toma la forma

$$T(z)T(w) = \frac{1/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{(z-w)} + \dots \quad (2.31)$$

Del primer término del lado derecho resulta obvio que el tensor de energía-momento no es un campo primario. De aquí vemos que para el bosón libre la carga central es $c = 1$.

⁸En algún sentido puede pensarse que x es primario de peso cero.

2.2. Aspectos Avanzados

2.2.1. Álgebra de Virasoro

El tensor de energía-momento en la teoría cuántica puede expandirse en series de Laurent,

$$T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n-2} L_n \quad , \quad \bar{T}(\bar{z}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{z}^{-n-2} \bar{L}_n \quad (2.32)$$

en términos de los operadores L_n . El álgebra de estos operadores

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0} \\ [\bar{L}_n, \bar{L}_m] &= (n - m)\bar{L}_{n+m} + \frac{\bar{c}}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0} \\ [L_n, \bar{L}_m] &= 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

representa dos copias de un álgebra infinito dimensional llamada álgebra de Virasoro (extensión central del álgebra de de-Witt (2.15)). Toda teoría cuántica de campos conformes determina una representación de esta álgebra con algún valor de c y \bar{c} . Para el caso particular $c = \bar{c} = 0$ se reduce al álgebra clásica (2.15).

En forma análoga a como se clasifican las representaciones de un grupo de Lie ordinario, como $SU(2)$, uno podría intentar construir representaciones del grupo conforme a partir de los operadores de subida y bajada del álgebra; elegimos como nuestros operadores “escalera” el conjunto de los L_n , con n positivo. Los estados de peso máximo pueden especificarse con dos números cuánticos h y c , tales que

$$\begin{aligned} L_0|h, c\rangle &= h|h, c\rangle \\ L_n|h, c\rangle &= 0 \quad , \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.34)$$

El autovalor de L_0 es el número de nivel (el peso conforme del operador asociado) y c es la carga central del álgebra de Virasoro. Así, el álgebra envolvente se crea por la suma de todos los productos de los operadores escalera actuando sobre el estado de peso máximo; a saber

$$|\{n\}\rangle = L_{-n_1} L_{-n_2} \dots L_{-n_k} |h, c\rangle \quad (2.35)$$

La dimensión de esta colección de productos es infinita, en contraste a lo que sucede en el caso del álgebra de Lie. Esta representación, construida a partir del álgebra envolvente tiene el nombre de módulo de Verma.

Volviendo al ejemplo ilustrativo del bosón libre, los estados primarios de nivel más bajo están dados por operadores locales del tipo $e^{i\alpha X(z)}$ mientras que los estados excitados corresponden a operadores que contienen dependencias del tipo $\partial^n X$ y $(\partial X)^n$. Estos operadores crean estados $|\{n\}\rangle$ cuando actúan sobre el vacío $|0\rangle$ y se considera el límite $z \rightarrow 0$. Discutiremos esto en detalle más abajo.

2.2.2. Funciones de Correlación

Volvamos ahora a las funciones de correlación. La función de 2-puntos escrita ahora en coordenadas complejas es

$$\langle \phi(z_1, \bar{z}_1) \phi(z_2, \bar{z}_2) \rangle = \frac{C_{12}}{z_{12}^{2h} \bar{z}_{12}^{2\bar{h}}} \quad (2.36)$$

si $h_1 = h_2 = h$ y $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = \bar{h}$ y se anula en cualquier otro caso, donde $z_{12} = |z_1 - z_2|$. Vale notar la condición adicional en los pesos conformes proviene de imponer invariancia de rotación, esto es, si consideramos campos sin spin recuperamos la expresión para la función de dos puntos vista en la sección anterior, como era de esperar.

La función de tres puntos es dada por

$$\begin{aligned} \langle \phi(z_1, \bar{z}_1) \phi(z_2, \bar{z}_2) \phi(z_3, \bar{z}_3) \rangle &= C_{123} \frac{1}{z_{12}^{h_1+h_2-h_3} z_{23}^{h_2+h_3-h_1} z_{13}^{h_1+h_3-h_2}} \\ &\times \frac{1}{\bar{z}_{12}^{\bar{h}_1+\bar{h}_2-\bar{h}_3} \bar{z}_{23}^{\bar{h}_2+\bar{h}_3-\bar{h}_1} \bar{z}_{13}^{\bar{h}_1+\bar{h}_3-\bar{h}_2}} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Nuevamente, la suma de los spines de las partes holomorfa y antiholomorfa se cancelan de manera de asegurar invariancia ante rotaciones (*i.e.* la conservación del impulso angular total).

La función de 4-puntos merece especial atención. Ésta tiene la forma

$$\langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \phi_2(z_2, \bar{z}_2) \phi_3(z_3, \bar{z}_3) \phi_4(z_4, \bar{z}_4) \rangle = f(x, \bar{x}) \prod_{i<j} z_{ij}^{-(h_i+h_j)+h/3} \prod_{i<j} \bar{z}_{ij}^{-(\bar{h}_i+\bar{h}_j)+\bar{h}/3} \quad (2.38)$$

donde $h = \sum_{i=1}^4 h_i$ y $\bar{h} = \sum_{i=1}^4 \bar{h}_i$, mientras que los *cross-ratios* están dados ahora por

$$x = \frac{z_{12}z_{34}}{z_{13}z_{24}}, \quad 1-x = \frac{z_{14}z_{23}}{z_{13}z_{24}}, \quad \frac{x}{1-x} = \frac{z_{12}z_{34}}{z_{14}z_{23}}, \quad (2.39)$$

Esta forma de la función de 4-puntos puede entenderse de la siguiente manera: Dados tres puntos distintos, siempre es posible encontrar una transformación conforme global que mapee estos puntos en otros fijos, por ejemplo, $z_1 = \infty$, $z_2 = 1$, $z_3 = x$ y $z_4 = 0$. La función de correlación (2.38) puede relacionarse con un elemento de matriz entre dos estados asintóticos de un producto de dos campos, de la siguiente manera

$$\lim_{z_1 \bar{z}_1 \rightarrow \infty} z_1^{2h_1} \bar{z}_1^{2\bar{h}_1} \langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \phi_2(1, 1) \phi_3(x, \bar{x}) \phi_4(0, 0) \rangle G_{34}^{21}(x, \bar{x}) \quad (2.40)$$

donde la función $G_{34}^{21}(x, \bar{x})$ se define como⁹

$$G_{34}^{21}(x, \bar{x}) = \langle h_1, \bar{h}_1 | \phi_2(1, 1) \phi_3(x, \bar{x}) | h_4, \bar{h}_4 \rangle \quad (2.41)$$

⁹El orden en que aparecen los índices en G es importante.

2.2. Aspectos Avanzados

Haciendo uso del álgebra de operadores podemos escribir la función G_{34}^{21} como una suma sobre familias conformes intermediarias, etiquetadas con el índice p ; estas familias corresponden a los distintos estados intermedios formados durante el scattering de los dos campos desde $(0, x)$ hasta $(1, \infty)$. Así, la función de 4-puntos puede expresarse como

$$G_{34}^{21}(x, \bar{x}) = \sum_p C_{34}^p C_{12}^p F_{34}^{21}(p|x) \bar{F}_{34}^{21}(p|\bar{x}) \quad (2.42)$$

donde los coeficientes C_{34}^p y C_{12}^p representan funciones de tres puntos y la función $F_{nm}^{lk}(p|x)$ es llamada comunmente un *bloque conforme* ya que las funciones de correlación de orden superior pueden escribirse en términos de estos bloques. Los bloques conformes son las piedras fundamentales en las funciones de correlación en sentido que a partir de ellos pueden escribirse funciones de correlación arbitrarias factorizando las mismas como en (2.42).

Al definir la función G_{34}^{21} se eligió un orden particular para los cuatro campos (ϕ_{1-4}) en el correlador. Sin embargo, el resultado debería ser independiente de esta elección¹⁰; podríamos haber escogido los campos de otra forma, por ejemplo, haciendo $z_2 = 0$ y $z_4 = 1$; de esta manera, $z_3 = 1 - x$, de modo que se obtiene la siguiente relación entre funciones de 4-puntos

$$G_{34}^{21}(x, \bar{x}) = G_{32}^{41}(1 - x, 1 - \bar{x}) \quad (2.43)$$

También podríamos haber intercambiado ϕ_1 con ϕ_2 , de esta manera tendríamos

$$G_{34}^{21}(x, \bar{x}) = \frac{1}{x^{2h_3} \bar{x}^{2\bar{h}_3}} G_{31}^{24}(1/x, 1/\bar{x}) \quad (2.44)$$

Estas condiciones sobre la función G_{34}^{21} son manifestaciones de la llamada simetría de cruce¹¹. Podemos escribir (2.43) en función de los bloques conformes

$$\sum_p C_{21}^p C_{34}^p F_{34}^{21}(p|x) \bar{F}_{34}^{21}(p|\bar{x}) = \sum_q C_{41}^q C_{32}^q F_{32}^{41}(q|1-x) \bar{F}_{32}^{41}(q|1-\bar{x}) \quad (2.45)$$

Esta relación expresa un conjunto de vínculos que podrían determinar los coeficientes C_{mn}^p . Este programa para calcular funciones de correlación asumiendo simplemente simetría de cruce recibe el nombre de *bootstrap approach*.

Las funciones de correlación obedecen la siguiente identidad [36]

$$\langle T(z)\phi_1(w_1)\phi_2(w_2)\phi_n(w_n) \rangle = \sum_{i=1}^n \left[\frac{h_i}{(z-w_i)^2 + \frac{1}{z-w}} \frac{\partial}{\partial w_i} \right] \langle \phi_1(w_1)\phi_2(w_2)\phi_n(w_n) \rangle \quad (2.46)$$

Esto no es una otra cosa que la identidad de Ward, que relaciona una función de correlación donde ha sido insertado el tensor de energía-momento, con una ecuación diferencial sobre una función de correlación donde el tensor de energía-momento ya no está. La

¹⁰Excepto por signos, cuando se trate de funciones de correlación en la que intervengan fermiones.

¹¹En inglés crossing symmetry.

demostración de (2.46) viene de representar los modos L_m del tensor de energía-momento $T(z) = \sum L_n z^{-n-2}$ en términos de operadores diferenciables (2.14). En general estas ecuaciones diferenciales para los bloques conformes son en extremo difíciles de resolver, especialmente si tienen un número infinito de campos primarios en el espectro, como en los casos que analizaremos.

2.2.3. Operadores de Vértice

Un ingrediente importante de las teorías conformes son los operadores que representan estados primarios como

$$\mathcal{V}_\alpha(z) =: e^{i\alpha x(z)} : \quad (2.47)$$

Los operadores de vértice crean estados $|k\rangle$ del espacio de Hilbert mediante la relación

$$\lim_{z \rightarrow 0} \mathcal{V}_\alpha(z)|0\rangle = |k\rangle \quad (2.48)$$

donde k es una función de α .

Tomando el OPE con el tensor de energía-momento encontramos que

$$T(z)e^{i\alpha x(w)} = \frac{\alpha^2/2}{(z-w)^2}e^{i\alpha x(w)} + \frac{1}{(z-w)}\partial e^{i\alpha x(w)} + \dots \quad (2.49)$$

lo que enseña que $e^{i\alpha x(z)}$ es un campo primario de dimensión conforme $h = \alpha^2/2$. Para los operadores antiholomorfos aplican idénticas consideraciones. La relevancia de los operadores de vértice reside en que, en una teoría de campos conformes, existe un isomorfismo entre los estados de la teoría y ellos. Volveremos sobre este tema en el capítulo siguiente cuando estudiemos las interacciones de cuerdas. En la teoría de cuerdas, las amplitudes de scattering vienen dadas por funciones de correlación de una teoría conforme formulada sobre la “hoja de mundo” que la cuerda dibuja al propagarse, y los operadores de vértice de dicha teoría conforme describen estados del espacio de Hilbert de la cuerda.

2.2.4. Un segundo ejemplo: Los Modelos Minimales

Antes de pasar al siguiente capítulo se impone una pequeña digresión sobre la clasificación de teorías conformes. Puede demostrarse que si existe un número finito de campos primarios, entonces los valores del peso conforme y la carga central son racionales. Estas teorías reciben el nombre de RCFT (nosotros las llamaremos teorías conformes racionales). La más sencilla de estas teorías conformes es la llamada “Modelos minimales”. Veamos brevemente estos modelos, ya que trabajaremos con ellos en el Capítulo 6.

Podemos determinar si un módulo de Verma es irreducible o no tomando sus elementos $|\{n\}\rangle$ en (2.35) y formando el producto escalar entre ellos. Así, una representación es reducible si el determinante de esta matriz es cero, esto es

$$\det\langle\{m\}|\{n\}\rangle = 0 \quad (2.50)$$

2.3. Teorías Conformes no-rationales

El cálculo de este determinante no es para nada trivial, dado que los elementos del módulo de Verma crecen rápidamente. Se debe a Kac la fórmula que establece que el determinante al nivel n -ésimo está dado por

$$\det M_n = \prod_{k=1}^n \psi_k(h, c)^{p(n-k)} \quad (2.51)$$

con

$$\psi_k(h, c) = \prod_{pq=k} [h - h_{p,q}(c)] \quad , \quad (2.52)$$

$$h_{p,q}(c) = \frac{[(m+1)p - mq]^2 - 1}{4m(m+1)} \quad (2.53)$$

donde $p(n)$ es la partición del entero n (es decir, el número de formas de escribir n como suma de enteros más pequeños) y donde el parámetro c se relaciona con m a través de

$$c = 1 - \frac{6}{m(m+1)} \quad (2.54)$$

con

$$m = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25-c}{1-c}} \quad (2.55)$$

donde p y q son enteros positivos. Si $h \neq h_{p,q}$, entonces el determinante de Kac no se anula, de modo que la representación es irreducible. A su vez, si el determinante de Kac es cero, la representación es reducible, de este modo, uno puede trincar los módulos de Verma hasta obtener un número finito de campos primarios. Las representaciones unitarias con un número finito de campos primarios ocurren para $c < 1$.

Una de las ventajas de estos modelos es que no se requiere de condiciones extra, tales como invariancia modular, para determinar totalmente las funciones de correlación. En el caso de los modelos minimales, tanto el OPE como las funciones de correlación pueden resolverse exactamente. Esta simpleza no es compartida por las teorías no-rationales, las cuales son las que nos ocupan en esta tesis y que requieren un análisis mucho más técnico.

2.3. Teorías Conformes no-rationales

2.3.1. La teoría de Liouville

La teoría de Liouville es acaso el ejemplo más simple de una teoría conforme no-razional (esto es, con un espectro continuo de campos primarios), por lo que sirve como un prototipo para desarrollar técnicas que serán útiles también en el estudio de CFT's más generales que comparten con Liouville características similares tales como la no-compacticidad.

Usando el principio general de covariancia, toda teoría cuántica de campos $S_m[X^i]$ en dimensión arbitraria puede acoplarse a gravedad, resultando una acción $S[g, X^i]$, donde

X^i refiere a los campos de materia en la teoría y g es la métrica. En el formalismo de cuantización mediante integral de camino la acción de Liouville surge al pedir que se eliminen los fantasmas que aparecen al fijar el calibre conforme¹² $g_{ab} = e^\phi \delta_{ab}$. Es decir, si uno considera la acción de una teoría que clásicamente es invariante conforme, la acción de Liouville aparece como la que parametriza la anomalía conforme, que está dada por la no-invariancia de la medida de integración de Feynmann ante transformaciones de Weyl. Es en este sentido que suele decirse que la teoría cuántica de Liouville emerge naturalmente en la cuantización de la cuerda bosónica [38], la cual es, en sí, una CFT bidimensional.

La teoría de campos de Liouville se define como la teoría de campos conforme¹³ no-racional (NRCFT) [39] cuya acción viene dada por

$$S_L = \int d^2z \left((\partial\varphi)^2 - 4\pi QR\varphi + \mu e^{\sqrt{2}b\varphi} \right) \quad (2.56)$$

donde μ es un parámetro real positivo que recibe el nombre de “constante cosmológica de Liouville”. La carga de fondo es

$$Q = (b + b^{-1}) \quad (2.57)$$

y tiene la propiedad de hacer del término de interacción un operador marginal (*i.e.* que tiene peso conforme igual a uno). Es apropiado mencionar en este punto que la teoría de Liouville presenta cierta invariancia $b \rightarrow \frac{1}{b}$, la que es evidente en la carga de fondo Q , aunque no así en el lagrangiano de la teoría, debido al término de interacción. Esta simetría será tratada en mayor profundidad en las secciones que siguen. El término $QR\varphi$ da cuenta del acoplamiento de la hoja de mundo que recibe una contribución de un punto en el infinito. Dado que es una teoría conforme podemos usar las herramientas de la sección anterior para ver que el propagador del campo de Liouville libre es

$$\langle \varphi(z)\varphi(w) \rangle = -\frac{1}{2} \ln(z-w) \quad (2.58)$$

Luego, el tensor de energía-momento se obtiene variando la acción de la teoría libre (es decir, la que deviene de despreciar el término de interacción) con respecto a la métrica; esto es

$$T = -\partial\varphi\partial\varphi + Q\partial^2\varphi \quad (2.59)$$

y la carga central $c = 1 + 6Q^2$, que por supuesto viene dada por el polo de orden cuarto en el OPE del tensor de energía-momento consigo mismo. Vemos que se vuelve la de un bosón libre si se elimina el término $QR\varphi$, responsable del segundo término en c . Esto es, en el límite $Q \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow 0$.

Los operadores de vértice de esta teoría son campos primarios [40] que denotaremos por $V_\alpha(z)$ y, en particular, algunos corresponden a campos exponenciales. El parámetro α podría en principio tomar cualquier valor complejo arbitrario, pero se distingue el

¹²Ver [37, 4] para una disquisición detallada y ejemplos.

¹³En el Apéndice B se explica la invariancia conforme de la teoría.

2.3. Teorías Conformes no-rationales

subconjunto $\alpha \in \frac{Q}{2} + i\mathbb{R}$ por el hecho que la acción de los campos $V_\alpha(z)$ sobre el vacío $|0\rangle$ crea estados normalizados de funciones delta [4]. Estos operadores tienen la forma

$$V_\alpha(z) =: e^{\sqrt{2}\alpha\varphi(z)} : \quad (2.60)$$

con dimensión conforme

$$h = \alpha(Q - \alpha) \quad (2.61)$$

Notar que la fórmula para la dimensión conforme es invariante ante la llamada simetría de reflexión de Liouville $\alpha \rightarrow Q - \alpha$; y esto sugiere que los estados correspondientes estarían relacionados por esta conjugación mediante cierto coeficiente de reflexión de la teoría.

Esta teoría queda totalmente caracterizada (al menos en la esfera), por los correladores de n-puntos [41, 42, 3, 43, 40, 44], a saber¹⁴:

$$\mathcal{A}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^{Liouville}(z_n, \dots, z_1 | \alpha_n, \dots, \alpha_1) = \langle V_{\alpha_n}(z_n) \dots V_{\alpha_1}(z_1) \rangle \quad (2.62)$$

donde

$$\langle V_{\alpha_n}(z_n) \dots V_{\alpha_1}(z_1) \rangle \equiv \int \mathcal{D}\varphi e^{-S_L} \prod_{i=1}^n V_{\alpha_i}(z_i) \quad (2.63)$$

Es posible obtener representaciones en series de potencias para $\mathcal{A}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^{Liouville}$ mediante el OPE

$$\begin{aligned} V_{\alpha_2}(z_2)V_{\alpha_1}(z_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{Q}{2} + i\mathbb{R}_+} d\alpha_3 \quad \langle V_{\alpha_3}(\infty)V_{\alpha_2}(z_2 - z_1)V_{\alpha_1}(0) \rangle \\ &\quad \times (V_{Q-\alpha_3}(z_1) + (\text{descendientes})) \end{aligned} \quad (2.64)$$

donde $V_{\alpha_3}(\infty)$ se define de modo que las funciones de correlación en las que este factor interviene sean finitas,

$$V_{\alpha_3}(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} |z|^{4\Delta_\alpha} \langle 0 | V_\alpha(z) \rangle \quad (2.65)$$

Los descendientes en (2.64) quedan completamente determinados por la invariancia conforme del OPE.

Dorn y Otto [45] aplicaron el formalismo denominado “gas de Coulomb” a la teoría de Liouville con la intención de expresar la integral (2.64) como el producto de una teoría libre perturbada por operadores $\mu e^{\sqrt{2}b\varphi}$ adicionales. Así, la expresión para las funciones de correlación en la teoría de Liouville en la esfera toma la forma [46]

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^L &= (\sqrt{2}b)^{-1} \mu^s \Gamma(-s) \delta \left(s + b^{-1} \sum_{i=1}^N \alpha_i - b^{-1}Q \right) \times \\ &\quad \times \int \prod_{r=1}^s d^2w_r \left\langle \prod_{i=1}^n e^{\sqrt{2}\alpha_i\varphi(z_i)} \prod_{r=1}^s e^{\sqrt{2}b\varphi(w_r)} \right\rangle \end{aligned} \quad (2.66)$$

¹⁴Para ser consecuentes con algunos autores y no sobrecargar la notación utilizaremos también Ω^L para notar funciones de correlación en la teoría de Liouville.

donde el factor $\Gamma(-s)$ viene de la integración de los modos cero¹⁵ de φ [47, 46], obteniéndose así leyes de conservación como condiciones que hagan no-nula las funciones de correlación y, s refiere a la cantidad de operadores de apantallamiento que se necesitan para satisfacer la condición de simetría de carga; esta condición, que no es otra cosa que una ley de conservación para esta teoría, se escribe como

$$\sum_{\mu=1}^N \alpha_{\mu} + sb = Q \quad (2.67)$$

La inclusión de estos operadores de apantallamiento $S_{\pm} = \int dz e^{\sqrt{2}b^{\pm 1}\varphi(w_r)}$ se realiza en forma análoga al caso de los modelos minimales discutidos por Dotsenko y Fateev en [49].

Notemos que en la Ec. (2.64) el valor de expectación $\langle \dots \rangle$ está definido por la teoría auto-interactuante, mientras que el valor de expectación en (2.66) se define considerando la teoría libre, es decir $\mu = 0$.

La forma de las funciones de dos y tres puntos ha sido estudiada exhaustivamente en la literatura, puede encontrarse entre otros, en [8, 50, 3, 41]. La función de 2-puntos está dada por

$$\mathcal{A}_{\alpha_1, \alpha_2}^L = 2\pi(\delta(Q - \alpha_2 - \alpha_1) + R^L(\alpha_1)\delta(\alpha_2 - \alpha_1)) \times |z_2 - z_1|^{-4\Delta_{\alpha_1}} \quad (2.68)$$

Donde $R^L(\alpha_1)$ es el coeficiente de reflexión de Liouville [50, 6] y tiene la forma

$$R^L(\alpha_1) = (\pi\mu_L\gamma(b^2))^{\frac{Q-2\alpha}{b}} \frac{\Gamma(1 + b(2\alpha - Q))\Gamma(1 + b^{-1}(2\alpha - Q))}{\Gamma(1 - b(2\alpha - Q))\Gamma(1 - b^{-1}(2\alpha - Q))} \quad (2.69)$$

Este coeficiente aparece en la relación de reflexión

$$V_{\alpha} = R^L(\alpha)V(Q - \alpha) \quad (2.70)$$

aún cuánticamente, lo cual explica el límite de Seiberg $\alpha < Q/2$, ya que las representaciones para α genérico resultan redundantes.

La función de 3-puntos en la esfera es la piedra fundamental para construir la teoría de Liouville desde el punto de vista de una CFT. Se conocen al menos dos formas distintas (aunque en algunos aspectos equivalentes) de calcularla. La primera (cronológicamente hablando) corresponde a la fórmula DOZZ, propuesta de manera independiente por Dorn y Otto [50] y por los hermanos Zamolodchikov [41], tiene en cuenta las propiedades conformes de la teoría y la prescripción del gas de Coulomb. La segunda, conocida como el truco de Teschner, fue deducida por Joerg Teschner en [6], y hace uso de la representación degenerada del álgebra de Virasoro en la teoría de Liouville.

Al realizar el cálculo de la función de 3-puntos de la teoría de Liouville perturbativamente, por medio de la integral de gas de Coulomb, la conservación de carga arroja divergencias del tipo δ provenientes de la integración del modo-cero de Liouville. Esto impone restricciones en las propiedades analíticas de las constantes de estructura.

¹⁵En el Apéndice C se detalla este cálculo.

2.3. Teorías Conformes no-rationales

Presentemos la forma explícita de la función de 3-puntos

$$\mathcal{A}_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}^L = \frac{C^L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{|z_3 - z_2|^{2(\Delta_{\alpha_3 + \Delta_{\alpha_2} - \Delta_{\alpha_1})} |z_3 - z_1|^{2(\Delta_{\alpha_3 + \Delta_{\alpha_1} - \Delta_{\alpha_2})} |z_2 - z_1|^{2(\Delta_{\alpha_2 + \Delta_{\alpha_1} - \Delta_{\alpha_3})}} \quad (2.71)$$

Donde la constante de estructura $C^L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ adquiere la forma [41]

$$\begin{aligned} C^L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \frac{(\pi\mu_L\gamma(b^2)b^{2-2b^2})^{b^{-1}(Q-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)}}{\Upsilon_b(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - Q)} \\ &\times \frac{\Upsilon'_b(0)\Upsilon_b(2\alpha_1)\Upsilon_b(2\alpha_2)\Upsilon_b(2\alpha_3)}{\Upsilon_b(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)\Upsilon_b(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1)\Upsilon_b(\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_2)} \end{aligned} \quad (2.72)$$

Detalles de las prescripciones para el cálculo de esta función de correlación pueden encontrarse en [4, 50, 6, 43].

Pasemos ahora a la función de 4-puntos. Si bien no hay en la actualidad una expresión integrada para la función de 4-puntos, aun así es posible sacar importantes conclusiones sobre su forma funcional, sus propiedades de factorización y la simetría de cruce¹⁶.

La invariancia conforme obliga a la función de 4-puntos a depender únicamente de un cross-ratio

$$z = \frac{z_{21}z_{43}}{z_{31}z_{42}} \quad (2.73)$$

de modo que la función de 4-puntos adopta la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4}^L &= G_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}(z, \bar{z}) \times \\ &\times |z_{21}|^{-4\Delta_2} |z_{41}|^{2(\Delta_3 + \Delta_2 - \Delta_1 - \Delta_4)} |z_{43}|^{2(\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4)} |z_{31}|^{2(\Delta_4 - \Delta_2 - \Delta_1 - \Delta_3)} \end{aligned} \quad (2.74)$$

Donde $G_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}(z, \bar{z})$ puede escribirse en términos de una función hipergeométrica y funciones de 3-puntos como

$$G_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}(z, \bar{z}) = \sum_{\alpha} C(\alpha_4, \alpha_3, \alpha) C(Q - \alpha, \alpha_2, \alpha_1) \left| F_s \left[\begin{matrix} \alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_4 & \alpha_1 \end{matrix} \right] \right|^2 \quad (2.75)$$

Esta función de 4-puntos puede obtenerse tanto mediante el OPE de $V_{\alpha_4}V_{\alpha_3}$ primero y $V_{\alpha_1}V_{\alpha_2}$ después como mediante el OPE de $V_{\alpha_1}V_{\alpha_3}$ primero y $V_{\alpha_2}V_{\alpha_4}$ después, lo cual representa la simetría de cruce de la teoría de campos. En general, no es posible resolver esta ecuación de bootstrap ya que el número de estados intermedios es infinito. Sin embargo, como era de esperarse, se recupera la función de 3-puntos al pedir que uno de los operadores de vértice que intervienen tenga momento $\alpha \rightarrow 0$.

Una característica notable de la teoría de Liouville es que la función de 3-puntos puede obtenerse a partir de la de 4-puntos que incluye un estado degenerado. Un estado degenerado es un estado cuyo peso conforme más alto satisface la relación

$$h = \Delta_{r,s} = \frac{c-1}{24} + \frac{1}{4}(r\alpha_+ + s\alpha_-)^2 \quad (2.76)$$

¹⁶En [44] se podrá encontrar una muy interesante discusión sobre el alcance de la función de 4-puntos en la teoría de Liouville, al punto de resolver esta teoría sin usar en ningún momento el término de interacción.

donde $\alpha_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{24}}(\sqrt{1-c} \pm \sqrt{25-c})$. Esta fórmula tiene cierta similitud con aquella que presentáramos en la sección anterior para los modelos minimales. En el caso particular de esta teoría ($c = 1 + 6Q^2$ y $Q = b + b^{-1}$) se ve que para los casos particulares $(r, s) = (1, 2)$ y $(r, s) = (2, 1)$ se obtienen $V_{-b/2}$ y $V_{-1/b}$ respectivamente. Es más, se puede ver que una representación es degenerada sí y sólo sí

$$\alpha = -\frac{rb}{2} - \frac{s}{2b} \quad (2.77)$$

con r y s enteros positivos. Los estados degenerados satisfacen las propiedades que existe cierta combinación lineal de producto de operadores de Virasoro L_n (con $n < 0$) que los aniquila.

Teniendo en cuenta esto, tomemos en cuenta el correlador de la teoría de Liouville formado por $n + m$ operadores de vértice, siendo m de ellos campos degenerados de momento $\alpha = -\frac{1}{2b}$. Los correladores de esta teoría $\Omega_{n|m}^L$ están definidos, a priori, sólo para valores físicos del momento, $\alpha_i \in \frac{\mathbb{Q}}{2} + i\mathbb{R}$. Sin embargo, poseen una continuación meromorfa a momento complejos arbitrarios $\alpha_i \in \mathbb{C}$ [3]. En particular, podemos constreñir más la forma funcional de los correladores que contienen campos con momento $\alpha = -\frac{1}{2b}$

$$\Omega_{n|m}^L \equiv \langle V_{\alpha_1}(z_1) \dots V_{\alpha_n}(z_n) V_{-\frac{1}{2b}}(y_1) V_{-\frac{1}{2b}}(y_m) \rangle \quad (2.78)$$

Ya que se sabe que estos campos degenerados poseen un vector singular en el segundo nivel, esto es, satisfacen la ecuación diferencial

$$\partial_y^2 V_{-\frac{1}{2b}}(y) + b^{-2} : T(y) V_{-\frac{1}{2b}}(y) := 0 \quad (2.79)$$

Esta ecuación, que encarna el hecho que el estado creado por el operador $V_{-\frac{1}{2b}}$ es aniquilado por la combinación $L_{-2} + L_{-1}L_{-1}$, se satisface para cada uno de los m operadores degenerados en los puntos y_i . Usando las identidades de Ward para el campo $T(y_i)$, es posible convertir estas ecuaciones para los vectores singulares en m ecuaciones diferenciales de segundo orden para los correladores de Liouville (2.78),

$$D_r^{BPZ} \Omega_{n|m}^L = 0 \quad (2.80)$$

donde el operador diferencial D_r^{BPZ} se define como

$$\begin{aligned} D_r^{BPZ} = b^2 \frac{\partial^2}{\partial y_r^2} &+ \sum_{s \neq r} \left(\frac{1}{y_r - y_s} \frac{\partial}{\partial y_s} + \frac{\Delta_{-\frac{1}{2b}}}{(y_r - y_s)^2} \right) \\ &+ \sum_s \left(\frac{1}{y_r - z_s} \frac{\partial}{\partial z_s} + \frac{\Delta_{\alpha_s}}{(y_r - z_s)^2} \right) \end{aligned} \quad (2.81)$$

Las ecuaciones (2.80) implican en particular que el OPE $V_{-\frac{1}{2b}}(y)V_{\alpha}(z)$ toma la forma sencilla

$$V_{-\frac{1}{2b}}(y)V_{\alpha}(z) = \sum_{\eta=\pm} |y-z|^{\eta(2\alpha-Q)+QC_{\eta}^L(\alpha)} V_{\alpha-\frac{\eta}{2b}}(z) + (\text{descendientes}) \quad (2.82)$$

2.3. Teorías Conformes no-rationales

con coeficientes

$$\begin{aligned} C_-^L(\alpha) &= R^L(\alpha)R^L(Q - \alpha - \frac{1}{2b}) \\ C_\eta^L(\alpha) &= 1 \end{aligned} \quad (2.83)$$

Las ecuaciones (2.80) son conocidas comúnmente con el nombre de ecuaciones BPZ dado que fueron Belavin, Polyakov y Zamolodchikov en [34], quienes encontraron los operadores diferenciales D_r^{BPZ} para el caso de los modelos minimales.

Si bien en este apartado sólo hemos mencionado que estas ecuaciones diferenciales tienen como soluciones a las funciones de $(n + m)$ -puntos de la teoría de Liouville, en el capítulo siguiente se verá el poder de este formalismo.

2.3.2. El modelo Wess-Zumino-Novikov-Witten

Si bien este modelo tiene peso propio, es reconocida su importancia en el marco de la teoría de cuerdas. Esta radica en que, cuando la teoría de cuerdas es formulada en términos del modelo WZNW, esto garantiza la invariancia conforme de la teoría y permite una formulación algebraica más natural ya que amplía el concepto de propagación de cuerdas en un fondo curvo a otro más “algebraico” como es el de la propagación sobre una variedad de grupo, que no necesariamente tiene una interpretación geométrica directa (aunque sí la tiene en el caso que nosotros estudiamos).

Se define la métrica natural de un grupo de Lie semisimple G de dimensión D como

$$ds^2 = \frac{1}{2}Tr[(g^{-1}dg)^2] \quad (2.84)$$

donde g representan los elementos del grupo (*i.e.* $g \in G$). La traza $Tr[\dots]$ se toma sobre los índices de representación.

El modelo de Wess-Zumino-Novikov-Witten [51, 52] viene dado por la acción

$$\begin{aligned} S_{WZW} &= k \int_{\Sigma} d\sigma d\tau \delta^{\alpha\beta} Tr[(g^{-1}\partial_\alpha g)(g^{-1}\partial_\beta g)] + \\ &+ \frac{2}{3}k \int_V d^3x \varepsilon^{ijk} Tr[(g^{-1}\partial_i g)(g^{-1}\partial_j g)(g^{-1}\partial_k g)] \end{aligned} \quad (2.85)$$

donde V es una variedad tridimensional que encierra la variedad Σ , esto es, $\partial V \equiv \Sigma$. Si se piensa que las variables σ y τ pueden llevarse a una esfera a través de una proyección estereográfica, entonces V corresponde a S^3 .

El primer término en (2.85) no garantiza por sí solo la invariancia conforme del modelo a nivel cuántico. Es el segundo término de la acción, llamado comúnmente término de Wess-Zumino el que se encarga de asegurar la invariancia conforme de la teoría [35].

Definiendo una vez más las coordenadas (z, \bar{z}) en el plano complejo es posible demostrar que el modelo WZNW es una teoría conforme que posee además la siguiente simetría

$$g(z, \bar{z}) \rightarrow \Omega(z)g(z, \bar{z})\bar{\Omega}^{-1}(\bar{z}) \quad (2.86)$$

donde Ω es un elemento arbitrario del grupo G . Como se verá a continuación esta simetría es más grande que los isomorfismos del grupo. Las corrientes asociadas a estas transformaciones de simetría están dadas por

$$J = J_a T^a = -\frac{k}{2}(\partial g)g^{-1} \quad (2.87)$$

$$\bar{J} = \bar{J}_a T^a = -\frac{k}{2}g^{-1}(\bar{\partial}g) \quad (2.88)$$

donde los T^a generan el álgebra de Lie del grupo G y cumplen

$$[T^a, T^b] = f_c^{ab} T^c \quad (2.89)$$

con f_c^{ab} las constantes de estructura del grupo.

Haciendo uso nuevamente de la invariancia conforme es posible desarrollar la función J series de Laurent

$$J^a(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^a z^{-n-1} \quad (2.90)$$

y análogamente para \bar{J} en términos de \bar{z} . Multiplicando por z^n e integrando alrededor de $z = 0$ se obtienen los modos de Fourier en función de las corrientes

$$J_n^a = \frac{1}{2\pi i} \oint J^a(z) \cdot z^n dz \quad (2.91)$$

A partir de ellos, calculando sus relaciones de conmutación se obtiene el álgebra de Kac-Moody de nivel k , que denotaremos de aquí en más como $\hat{g}(k)$ y tendrá la forma

$$[J_n^a, J_m^b] = i f^{abc} J_{n+m}^c + n \frac{k}{2} g^{ab} \delta_{n+m,0} \quad (2.92)$$

donde g^{ab} es la métrica de Cartan-Killing definida por

$$f_c^{ad} f_d^{cb} = Q g^{ab} \quad (2.93)$$

siendo Q un número que se relaciona con el Casimir C del grupo por la igualdad

$$C = \frac{2}{Q} g_{ab}^a J^a J^b \quad (2.94)$$

Notemos que el álgebra del grupo inicial se encuentra contenida dentro de ésta si se evalúa (2.92) para los modos cero ($n = m = 0$). Lo mismo sucede con el Casimir, en sentido que el modo cero de (2.94) es el Casimir cuadrático usual.

A partir del álgebra (2.92) se pueden definir los generadores del álgebra de Virasoro

$$L_n = \frac{g_{ab}}{(Q+k)} \sum_m : J_{-m}^a J_{n+m}^b : \quad (2.95)$$

2.3. Teorías Conformes no-rationales

los cuales cumplen el álgebra de Virasoro con extensión central

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{kD}{12(k + Q)}\delta_{n+m,0}(m^3 - m) \quad (2.96)$$

siendo la carga central de la teoría

$$c = \frac{kD}{k + Q} \quad (2.97)$$

donde D representa el número de generadores del álgebra asociada al grupo G (de esta manera puede obtenerse la dimensión del espacio-tiempo en la teoría de cuerdas en cuestión a través de la carga central).

Los generadores del álgebra de Virasoro pueden ser identificados con los modos de Fourier del tensor de energía-momento de la teoría conforme de acuerdo con la construcción de Sugawara

$$T(z) = \frac{g_{ab}}{(Q + k)} : J^a(z)J^b(z) : \quad (2.98)$$

Los generadores de Kac-Moody satisfacen el siguiente corchete con los generadores de Virasoro

$$[L_n, J_m^a] = -mJ_{m+n}^a \quad (2.99)$$

Esto es lo que se pretendía hacer ver al comentar las bondades de formular una teoría en forma algebraica: Existe una forma sistemática de construirse el álgebra que realiza la simetría conforme en el modelo WZNW sobre un grupo G , basta especificar sobre qué grupo se quiere trabajar y eso dependerá del problema de interés.

Veamos el caso particular del grupo $G = SL(2, \mathbb{R})$. Más precisamente nuestro interés se motiva en que el modelo WZNW basado en $SL(2, \mathbb{R})$ es una teoría de campos conforme que describe la propagación de la cuerda en el espacio AdS_3 , como se verá en la siguiente sección.

El grupo $SL(2, \mathbb{R})$ es el grupo de Lie semisimple no compacto formado por las matrices cuadradas de dimensión 2 con coeficientes reales y determinante uno. Para este grupo en particular encontramos que $Q = -2$ y $c = \frac{3k}{k-2}$.

Introduciendo la base compleja (J^\pm, J^3) definida como

$$J^\pm = J^1 \pm J^2, \quad J^{\pm\dagger} = J^\mp \quad (2.100)$$

el álgebra de los generadores puede escribirse como sigue

$$\begin{aligned} [J^3, J^-] &= -J^- \\ [J^3, J^+] &= J^+ \\ [J^-, J^+] &= 2J^3 \end{aligned} \quad (2.101)$$

Donde el operador de Casimir está dado por

$$\hat{C} = J^3J^3 - \frac{1}{2}(J^+J^- + J^-J^+) \quad (2.102)$$

Se puede parametrizar el elemento de grupo g de la siguiente manera

$$g = \begin{pmatrix} le^{it} \cosh \rho & e^{-i\theta} \sinh \rho \\ e^{i\theta} \sinh \rho & e^{-it} \cosh \rho \end{pmatrix} \quad (2.103)$$

lo que lleva a una forma para la métrica natural (2.84) dada por

$$ds^2 = -\cosh \rho dt^2 + d\rho^2 + \sinh \rho d\theta^2 \quad (2.104)$$

Esta es la acción del espacio-tiempo anti-de Sitter en 3-dimensiones, sobre lo que hablaremos en breve. Veamos ahora qué sucede con la acción del modelo WZNW cuando nos movemos en el espacio-tiempo euclídeo. La teoría conforme formulada sobre el coset $H_3^+ = SL(2, \mathbb{C})/SU(2)$ y su versión lorentziana $SL(2, \mathbb{R})$ están relacionadas mediante una rotación de Wick. Es natural entonces esperar un paralelismo entre ambas teorías. Nos referiremos frecuentemente al modelo de WZNW sobre esta variedad cociente con el nombre de modelo H_3^+ .

La variedad cociente H_3^+ se construye tomando módulo $H = SU(2)$ a la variedad de grupo $G = SL(2, \mathbb{C})$ (i.e. $H_3^+ \equiv SL(2, \mathbb{C})/SU(2)$). Una parametrización particular es la Gaussiana

$$g = \begin{pmatrix} e^\phi & \gamma e^\phi \\ \bar{\gamma} e^\phi & \gamma \bar{\gamma} e^\phi + e^{-\phi} \end{pmatrix} \quad (2.105)$$

y de esta manera, la métrica natural del cociente de grupos resulta ser la métrica del espacio AdS_3 euclídeo, donde el borde de AdS_3 corresponde a la región $\phi = \infty$.

Así pues, puede escribirse la acción (2.85) como

$$S = k \int d^2z (\partial\phi\bar{\partial}\phi + \bar{\partial}\gamma\partial\bar{\gamma}e^{2\phi}) \quad (2.106)$$

En esta acción los campos involucrados no se comportan como campos débilmente acoplados a ϕ grande, lo que sería útil para estudiar AdS/CFT . Se debe a Wakimoto [55] la formulación de una representación del álgebra de corrientes de $SL(2, \mathbb{R})$ en términos de tres campos libres en dos dimensiones, que permite escribir la acción en forma más conveniente. Esto equivale a introducir campos auxiliares sin dinámica, $\{\beta, \bar{\beta}\}$, de la siguiente manera

$$S = \frac{k}{8\pi} \int d^2z (\partial\phi\bar{\partial}\phi + \beta\bar{\partial}\gamma + \bar{\beta}\partial\bar{\gamma} - \beta\bar{\beta}e^{-2\phi}) \quad (2.107)$$

donde el factor k debe ser entendido como aquel que contiene tanto efectos cuánticos (de hecho, $k \sim \frac{-1}{\alpha'\Lambda}$) cuanto efectos propios de la curvatura $G_{\mu\nu} \sim k$.

Dado que estos nuevos campos β y $\bar{\beta}$ no poseen término cinético, no hay problema a nivel clásico en reobtener la acción original (2.106) a partir de (2.107); sin embargo, en el caso cuántico podrían existir puntos delicados. Como la medida de la integración funcional debe ser invariante ante la simetría afín de la teoría, se debe introducir un factor de renormalización [53, 54]. Si además se redefine el campo ϕ mediante la transformación

$$\phi \rightarrow \sqrt{\frac{2}{k-2}}\phi \quad (2.108)$$

2.3. Teorías Conformes no-rationales

se obtiene

$$S[\lambda] = \frac{1}{4\pi} \int d^2z \left(\partial\phi\bar{\partial}\phi + \beta\bar{\partial}\gamma + \bar{\beta}\partial\bar{\gamma} - \frac{b}{2\sqrt{2}}R\phi + 4\pi\lambda\beta\bar{\beta}e^{\sqrt{2}b\phi} \right) \quad (2.109)$$

donde el término $\frac{b}{2\sqrt{2}}R\phi$ aparece por efectos cuánticos. Acá, el parámetro b se relaciona con el nivel del modelo WZNW mediante $b^{-2} = k - 2$. Notemos que la acción usual del modelo WZNW emerge luego de haber integrado en los campos β y $\bar{\beta}$. El valor de la constante de acoplamiento λ es controlado por el modo cero de ϕ . Es fácil ver que el término de interacción $\beta\bar{\beta}e^{\sqrt{2}b\phi}$ tiene dimensión conforme $(h, \bar{h}) = (1, 1)$.

También es fácil ver que, ahora sí, para $\phi \rightarrow \infty$ el término de interacción $\beta\bar{\beta}e^{-\sqrt{\frac{2}{k-2}}\phi}$ se vuelve despreciable, por lo que la teoría puede tratarse como una teoría débilmente acoplada cerca del borde de AdS_3 (un campo bosónico libre ϕ con carga de fondo que da cuenta de un acoplamiento con el escalar de curvatura con una pequeña perturbación).

En esta variedad el álgebra de Kac-Moody (2.92) que genera la simetría afín de la teoría es

$$\begin{aligned} [J_m^3, J_n^3] &= -\frac{k}{2}\delta_{n+m,0} \\ [J_m^3, J_n^\pm] &= \pm J_{m+n}^\pm \\ [J_m^+, J_n^-] &= -2J_{m+n}^3 + km\delta_{n+m,0} \end{aligned} \quad (2.110)$$

y que esta álgebra de corrientes de $SL(2, \mathbb{R})$ puede escribirse en función de los campos libres (ϕ, β, γ) usando la representación de Wakimoto [55]

$$\begin{aligned} J^-(z) &= \beta(z) \\ J^3(z) &= \beta(z)\gamma(z) + \frac{\alpha_+}{2}\partial\phi(z) \\ J^+(z) &= \beta(z)\gamma^2(z) + \alpha_+\gamma(z)\partial\phi(z) + k\partial\gamma(z) \end{aligned} \quad (2.111)$$

Los OPEs no-nulos son

$$\begin{aligned} \phi(z)\phi(w) &\sim -2\ln(z-w) \\ \gamma(z)\beta(w) &\sim \frac{1}{(z-w)} \end{aligned} \quad (2.112)$$

Es posible calcular la expansión en producto de operadores de estas corrientes

$$\begin{aligned} J^+(z)J^-(w) &= \frac{k}{(z-w)^2} - \frac{2}{(z-w)}J^3(w) + \dots \\ J^3(z)J^\pm(w) &= \pm \frac{1}{(z-w)}J^\pm(w) + \dots \\ J^3(z)J^3(w) &= \frac{-k/2}{(z-w)^2} + \dots \end{aligned} \quad (2.113)$$

y comprobar que son los correctos, de acuerdo a las relaciones de conmutación (2.92).

Usando (2.98) podemos obtener una expresión para el tensor de energía-momento

$$T(z) = \beta(z)\partial\gamma(z) - \frac{1}{2}(\partial\phi(z))^2 - \frac{1}{\alpha_+}\partial^2\phi(z) \quad (2.114)$$

y así calcular la carga central de la teoría, a saber

$$c(H_3^+) = \frac{3k}{k-2} = 3 + 6b^2 = 2 + (1 + 6b^2) \quad (2.115)$$

Vemos aquí que este valor está relacionado con la carga central de la teoría de Liouville acoplada a un bosón libre.

Notemos que, a diferencia del tensor de energía-momento de una teoría libre, aparece una derivada segunda del campo ϕ , proveniente del término lineal $bR\phi$ que se introdujo en la teoría. Sin embargo, esto no introduce cambios en los propagadores, sólo una carga anómala de fondo, que sí contribuye a la carga central y sobre la que daremos más detalles en las subsecciones que siguen.

Escribamos ahora los operadores de vértice en el modelo WZNW euclídeo. Existen distintas bases en las cuales realizar estos operadores, y en las que trabajaremos alternativamente a lo largo de esta tesis. Hagamos entonces una brevísima referencia cada una de ellas. La más natural es la base m , la cual corresponde a los operadores $V_{j,m,\bar{m}}(z)$ que crean estados $|j, m\rangle \otimes |j, \bar{m}\rangle$ de las representaciones del grupo $SL(2, \mathbb{R}) \otimes SL(2, \mathbb{R})$ según

$$\lim_{z \rightarrow 0} V_{j,m,\bar{m}}|0\rangle = |j, m, \bar{m}\rangle \quad (2.116)$$

Pero comencemos por la base x . En esta base los operadores de vértice toman la forma [7]

$$\Phi_j(z, x) = \frac{2j+1}{\pi} (|\gamma-x|^2 e^{\phi/\alpha_+} + e^{-\phi/\alpha_+})^{-2j-2} \quad (2.117)$$

donde $(x, \bar{x}) \in \mathbb{C}^2$ son variables complejas auxiliares que se introducen para caracterizar los vectores de las representaciones de $SL(2, \mathbb{R})$ según la representación diferencial \mathcal{D}^3 , \mathcal{D}^\pm [56], a saber

$$\mathcal{D}^+ = x^2\partial_x - 2jx, \quad \mathcal{D}^- = \partial_x, \quad \mathcal{D}^3 = x\partial_x - j \quad (2.118)$$

de manera que estos operadores satisfacen el álgebra

$$j^a(z)\Phi_j(x|w) = -\frac{\mathcal{D}^a\Phi_j(x|w)}{(z-w)} + \dots \quad (2.119)$$

con $a = +, -, 3$.

Tomando el límite $\phi \rightarrow \infty$, donde la realización en términos de campos libres es válida, la expansión de los campos $\Phi_j(z, x)$ en torno a $\phi \approx \infty$ es

$$\Phi_j(x, \bar{x}) \rightarrow e^{\frac{2j}{\alpha_+}\phi}\delta^{(2)}(\gamma-x) + \frac{2j+1}{\pi} |\gamma-x|^{-4j-4} e^{\frac{-2j-2}{\alpha_+}\phi} + \mathcal{O}(e^{\frac{1}{\alpha_+}j\phi}), \quad (2.120)$$

2.3. Teorías Conformes no-rationales

Si bien el comportamiento de las funciones (2.117) cambia a medida que uno se aproxima al punto $j = -1/2$ [57], no es difícil ver que el primer término es el dominante para los valores $j > -1/2$ mientras que el segundo rige en la zona $j < -1/2$.

Otra base que usaremos con frecuencia es la llamada base m de momentos (m, \bar{m}) , que mencionábamos arriba. En esta base los operadores de vértice se escriben

$$V_{j,m,\bar{m}} = \gamma^{j-m} \bar{\gamma}^{j-\bar{m}} e^{\frac{2j}{\alpha_+} \phi} \quad (2.121)$$

Los valores físicos de m, \bar{m} deben satisfacer $m - \bar{m} \in \mathbb{Z}$ y $m + \bar{m} \in i\mathbb{R}$ si se pide que el operador de vértice (2.121) sea univaluado sobre las coordenadas espacio-tiempo $\{\gamma, \bar{\gamma}\}$. Los operadores de vértice en la base m pueden obtenerse a partir de una transformada de Fourier de los operadores de vértice en la base x (2.117)

$$\mathcal{V}_{j,m,\bar{m}}(z, \bar{z}) = \int d^2x \Phi_j(x, \bar{x}) x^{j-m} \bar{x}^{j-\bar{m}}, \quad (2.122)$$

donde

$$\mathcal{V}_{j,m,\bar{m}} = V_{j,m,\bar{m}} + (2j+1) \frac{\Gamma(j-m+1)\Gamma(j+\bar{m}+1)\Gamma(-2j-1)}{\Gamma(-j+\bar{m})\Gamma(-j-m)\Gamma(2j+2)} V_{-1-j,m,\bar{m}} \quad (2.123)$$

En el límite de ϕ grande. Es fácil ver que estos operadores tienen el OPE correcto con las corrientes (2.111)

$$\begin{aligned} J^+(z)V_{j,m}(w) &= (j+1+m) \frac{V_{j,m+1}(w)}{(z-w)} + \dots \\ J^3(z)V_{j,m}(w) &= m \frac{V_{j,m}(w)}{(z-w)} + \dots \\ J^-(z)V_{j,m,\omega}(w) &= (-1-j+m) \frac{V_{j,m-1}(w)}{(z-w)} + \dots \end{aligned} \quad (2.124)$$

Por último, escribamos los operadores de vértice en un tercer lenguaje, la base μ ; en esta base los operadores de vértice $\Phi_j(\mu|z)$, toman la forma

$$\Phi_j(\mu|z) = |\mu|^{2j+2} e^{\mu\gamma(z) - \bar{\mu}\bar{\gamma}(\bar{z})} e^{\sqrt{2b(j+1)}\phi(z,\bar{z})} \quad (2.125)$$

Esta forma para operadores también puede obtenerse a partir de los operadores de vértice en la base x (2.117), mediante la transformada de Fourier [8]

$$\Phi_j(\mu|z) = \frac{1}{2\pi} |\mu|^{2j+2} \int d^2x e^{\mu x - \bar{\mu} \bar{x}} \Phi_j(x|z) \quad (2.126)$$

Los campos $\Phi_j(\mu|z)$ se caracterizan por el siguiente OPE con las corrientes:

$$J^a(w)\Phi_j(\mu|z) \sim \frac{1}{w-z} D^a \Phi_j(\mu|z) \quad (2.127)$$

donde los operadores D^a se definen mediante

$$D^- = \mu \quad , \quad D^0 = -\mu\partial_\mu \quad , \quad D^+ = \mu\partial_\mu^2 - \frac{j(j+1)}{\mu} \quad (2.128)$$

Estos operadores, expresados en cualquiera de las bases recién vistas, crean campos primarios de Virasoro de dimensión conforme

$$h = -\frac{j(j+1)}{k-2} \quad (2.129)$$

en la teoría H_3^+ .

Un aspecto interesante (y molesto) de la teoría WZNW sobre $SL(2, \mathbb{R})$ es el siguiente: Si uno considera el álgebra (2.110) como la generadora del espectro de la teoría nota la presencia de estados de norma negativa aun después de haber impuesto los vínculos de Virasoro sobre las representaciones de $SL(2, \mathbb{R})$. Este problema lo resolvieron Maldacena y Ooguri [58] introduciendo representaciones adicionales (*i.e.* nuevos estados) a partir de la simetría de flujo espectral (2.132), la cual no había sido considerada hasta ese momento en este contexto. Esta simetría espectral, como dijimos, es un automorfismo de $sl(2)$, donde las transformaciones se parametrizan mediante un número entero ω que, en el contexto de cuerdas, identificaremos con el número de enrollamientos de una cuerda alrededor del cilindro que parametriza a la variedad.

En la teoría WZNW en $SL(2, \mathbb{R})$ existen representaciones adicionales que describen nuevos estados del espectro. Estos estados están parametrizados con un número cuántico adicional ω . Los operadores de vértice, usualmente notados por $\Phi^{j,\omega}(z)$, asociados a estos nuevos estados de spin j y número de enrollamiento $\omega \in \mathbb{Z}$ actúan como campos primarios con respecto a las corrientes $\tilde{J}(z)$ construidas con la simetría de flujo espectral. Estas corrientes pueden definirse por medio de sus modos \tilde{J}_n^a , los cuales son usados para construir una copia del álgebra de Virasoro con simetría de flujo espectral \tilde{L}_n [56]

$$J_n^3 \rightarrow \tilde{J}_n^3 = J_n^3 - \frac{k}{2}\omega\delta_{n,0} \quad (2.130)$$

$$J_n^\pm \rightarrow \tilde{J}_n^\pm = J_{n\pm\omega}^\pm \quad (2.131)$$

$$L_n \rightarrow \tilde{L}_n = L_n + \omega J_n^3 - \frac{k}{4}\omega^2\delta_{n,0} \quad (2.132)$$

En otras palabras, el estado $|j, \omega\rangle$ correspondiente al campo $\Phi^{j,\omega}(z)$ satisface

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{n>0}^a |j, \omega\rangle &= 0 \\ \tilde{J}_0^a |j, \omega\rangle &= |j, \omega\rangle \end{aligned} \quad (2.133)$$

2.3. Teorías Conformes no-rationales

De la misma manera, el campo $\Phi^{j,\omega}(z)$ tiene el siguiente OPE con las corrientes ordinarias

$$\begin{aligned} J^3(z)\Phi^{j,\omega}(y) &\sim \frac{-t^3\Phi^{j,\omega}(y)}{z-y} + \frac{k\omega}{2} \frac{\Phi^{j,\omega}(y)}{z-y} \\ J^+(z)\Phi^{j,\omega}(y) &\sim \frac{-t^+\Phi^{j,\omega}(y)}{(z-y)^{1+\omega}} \\ J^-(z)\Phi^{j,\omega}(y) &\sim \frac{-t^-\Phi^{j,\omega}(y)}{(z-y)^{1-\omega}} \end{aligned} \tag{2.134}$$

donde t^a son los generadores del álgebra \hat{sl}_2 . Los campos $\Phi^{j,\omega}(z)$ llevan, en efecto, una representación de \hat{sl}_2 de spin j y Casimir $\frac{1}{2}(t^+t^- + t^-t^+ - 2t^3t^3) = -j(j+1)$, aunque los grados de libertad correspondientes no están establecidos hasta que se diga a cuál serie principal¹⁷ corresponden. Si suponemos que pertenecen a la serie principal continua con spin $j \in -\frac{1}{2} + i\mathbb{R}$, entonces sus estados pueden etiquetarse mediante un parámetro complejo μ , de modo tal que

$$\begin{aligned} t^+ &= \mu \\ t^3 &= \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \\ t^- &= \mu \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} - \frac{j(j+1)}{\mu} \end{aligned} \tag{2.135}$$

Otra base para la representación continua se obtiene diagonalizando t^3 con autovalor $-m$ y considerando a t^\pm como operadores de subida y bajada. Así, los estados $|j, \omega, m\rangle$ correspondientes al campo $\Phi_m^{j,\omega}(z)$ satisfacen

$$\tilde{J}_0^3 = -t^3 = J_0^3 - \frac{k\omega}{2} = m \tag{2.136}$$

Una ventaja de la base m es que los campos escritos en ésta son autovectores del operador dilatación original L_0 (*i.e.* no sólo de \tilde{L}_0), de modo que escalan como

$$\begin{aligned} \left(z \frac{\partial}{\partial z} + \Delta_m^{j,\omega} \right) \Phi_m^{j,\omega}(z) &= 0 \\ \Delta_m^{j,\omega} &= \Delta_j - \omega m - \frac{k}{4} \\ \Delta_j &= -\frac{j(j+1)}{k-2} \end{aligned} \tag{2.137}$$

Las dos bases que estudiamos anteriormente (2.135) y (2.136) relacionan los operadores de vértice mediante

$$\Phi_{m,\bar{m}}^{j,\omega}(z, \bar{z}) = N_{m,\bar{m}}^j \int \frac{d^2\mu}{|\mu|^2} \mu^m \bar{\mu}^{-\bar{m}} \Phi^{j,\omega}(\mu, \bar{\mu}|z, \bar{z}) \tag{2.138}$$

¹⁷Ver [56] para una discusión detallada sobre las distintas representaciones.

donde el factor de normalización $N_{m,\bar{m}}^j$ está dado por

$$N_{m,\bar{m}}^j = \frac{\Gamma(-j-m)}{\Gamma(j+1+\bar{m})}. \quad (2.139)$$

Pasemos ahora a describir las interacciones en este modelo. Por simplicidad describiremos el caso en el sector sin flujo espectral; en [58, 59, 68] pueden encontrarse los resultados para el sector donde la simetría de flujo espectral está presente. El cálculo de las funciones de correlación en esta teoría pueden calcularse en forma análoga al cálculo en la teoría de Liouville [48, 49] y de los modelos minimales [47].

La construcción de la función de n -puntos queda reducida a la construcción de las funciones de 2 y 3-puntos como bloques de construcción. La función de 2-puntos en la base μ se escribe

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{j_1}(\mu_1|z_1)\Phi_{j_2}(\mu_2|z_2) \rangle &= |z_2 - z_1|^{-4\Delta_{j_1}} |\mu_1|^2 \delta^{(2)}(\mu_2 + \mu_1) \\ &\times (\delta(j_2 + j_1 + 1) + R^H(j_1)\delta(j_2 - j_1)) \end{aligned} \quad (2.140)$$

El coeficiente de reflexión $R^H(j)$ es

$$R^H(j) = - \left(\frac{1}{\pi} b^2 \gamma(b^2) \right)^{-(2j+1)} \frac{\Gamma(2j+1)\Gamma(b^2(2j+1))}{\Gamma(-2j-1)\Gamma(-b^2(2j+1))} \quad (2.141)$$

Este coeficiente está presente en la relación de reflexión

$$\Phi_{j_1}(\mu|z) = R^H(j)\Phi_{-1-j}(\mu_1|z_1) \quad (2.142)$$

La consistencia de la simetría de cruce de esta teoría conforme fue demostrada en [43]. En el capítulo siguiente veremos cómo se relaciona este coeficiente de reflexión con aquél de la teoría de Liouville.

La función de 3-puntos en la base μ viene dada por

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{j_1}(\mu_1|z_1)\dots\Phi_{j_3}(\mu_3|z_3) \rangle &= |z_3 - z_2|^{-4\Delta_{j_3}} |z_3 - z_1|^{-4\Delta_{j_1}} |z_2 - z_1|^{-4\Delta_{j_2}} \\ &\times \delta^{(2)}(\mu_3 + \mu_2 + \mu_1) D^H \begin{bmatrix} j_3 & j_2 & j_1 \\ \mu_3 & \mu_2 & \mu_1 \end{bmatrix} C^H(j_3, j_2, j_1) \end{aligned} \quad (2.143)$$

La constante de estructura $C^H(j_3, j_2, j_1)$ tiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} C^H(j_3, j_2, j_1) &= -\frac{1}{2\pi^3 b} \left(\frac{\gamma(b^2)b^{2-2b^2}}{\pi} \right)^{-2-\Sigma j_i} \frac{\Upsilon'_b(0)}{\Upsilon_b(-b(j_3 + j_2 + j_1 + 1))} \\ &\times \frac{\Upsilon_b(-b(2j_1 + 1))\Upsilon_b(-b(2j_2 + 1))\Upsilon_b(-b(2j_3 + 1))}{\Upsilon_b(-bj_{12}^3)\Upsilon_b(-bj_{13}^2)\Upsilon_b(-bj_{23}^1)} \end{aligned} \quad (2.144)$$

donde se usó la notación $j_{st}^r \equiv j_s + j_t - j_r$. La cantidad $\delta^{(2)}(\mu_3 + \mu_2 + \mu_1) D^H \begin{bmatrix} j_3 & j_2 & j_1 \\ \mu_3 & \mu_2 & \mu_1 \end{bmatrix}$ representa los coeficientes de Clebsch-Gordan para las representaciones de $SL(2, \mathbb{C})$ de spines j_1, j_2, j_3 en la base μ .

2.3. Teorías Conformes no-rationales

La forma general de la función de 4-puntos queda definida por la invariancia conforme. Análogamente a lo que sucede en el caso de la teoría de Liouville, esta función depende únicamente de un *cross-ratio*

$$z = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)} \quad (2.145)$$

y puede expresarse según

$$\langle \Phi_{j_1}(z_1)\Phi_{j_2}(z_2)\Phi_{j_3}(z_3)\Phi_{j_4}(z_4) \rangle = \prod_{a<b} |z_a - z_b|^{2h_{ab}} |\mathcal{F}(z)|^2 \quad (2.146)$$

donde

$$\begin{aligned} h_{34} &= -h_2 - h_1 + h_3 - h_4 \\ h_{14} &= -2h_1 \\ h_{24} &= h_2 - h_1 - h_3 - h_4 \\ h_{23} &= h_4 + h_1 - h_2 - h_3 \end{aligned} \quad (2.147)$$

y la función \mathcal{F} se obtiene de pedir que satisfaga ciertas ecuaciones diferenciales que veremos enseguida y que son una forma de codificar la simetría afín $SL(2, \mathbb{R})$ que la teoría presenta.

Usando la transformada (2.126), es posible escribir las expresiones para las funciones de correlación de esta teoría en la base x . Para la función de 2-puntos se tiene

$$\begin{aligned} \langle \Phi^{j_1}(x_1|z_1)\Phi^{j_2}(x_2|z_2) \rangle &= |z_2 - z_1|^{-4\Delta_j} (\delta^{(2)}(x_1 - x_2)\delta(j_2 + j_1 + 1) + \\ &+ B^H(j_1)|x_1 - x_2|^{-4j_1}\delta(j_1 - j_2)) \end{aligned} \quad (2.148)$$

donde la constante $B^H(j)$ es

$$B^H(j) = \frac{1}{\pi b^2} \frac{(-\pi b^2 \gamma(-b^2))^{2j+1}}{\gamma(-b^2(2j+1))} \quad (2.149)$$

Esta constante se relaciona con el coeficiente de reflexión (2.141) mediante la transformada de Fourier de la función de dos puntos, de esta manera se obtiene la relación

$$R^H(j) = B^H(j) \times |\mu|^{4j+2} \int_{\mathbf{C}} d^2 x e^{\mu x - \bar{\mu} \bar{x}} |x|^{4j} = B^H(j) \times \pi \gamma(2j+1) \quad (2.150)$$

La función de 3-puntos en la base x adquiere la forma

$$\begin{aligned} \langle \Phi^{j_1}(x_1|z_1)\dots\Phi^{j_3}(x_3|z_3) \rangle &= |z_3 - z_2|^{2\Delta_{23}^1} |z_3 - z_1|^{2\Delta_{31}^2} |z_2 - z_1|^{2\Delta_{21}^3} \\ &|x_3 - x_2|^{2j_{23}^1} |x_3 - x_1|^{2j_{31}^2} |x_2 - x_1|^{2j_{21}^3} \\ &\times C^H(j_3, j_2, j_1) \end{aligned} \quad (2.151)$$

donde la constante de estructura $C^H(j_3, j_2, j_1)$ es la dada en la ecuación (2.144).

Mientras que la función de 4-puntos, como decíamos antes, está dada por

$$\langle \Phi_{j_1}(z_1) \Phi_{j_2}(z_2) \Phi_{j_3}(z_3) \Phi_{j_4}(z_4) \rangle = \prod_{a<b} |x_a - x_b|^{2J_{ab}} \prod_{a<b} |z_a - z_b|^{2h_{ab}} |\mathcal{F}(x, z)|^2 \quad (2.152)$$

donde ahora

$$x = \frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_3)}{(x_1 - x_4)(x_3 - x_2)} \quad (2.153)$$

y

$$\begin{aligned} J_{34} &= j_1 + j_2 - j_3 + j_4 \\ J_{14} &= -2j_1 \\ J_{24} &= j_1 - j_2 + j_3 + j_4 \\ J_{23} &= j_1 + j_2 + j_3 - j_4 \end{aligned} \quad (2.154)$$

La utilidad de elección de esta base en particular se hará manifiesta cuando veamos la correspondencia entre la teoría WZNW y la teoría de Liouville en el capítulo siguiente.

Debido a la simetría afín $(\hat{sl}_2)_k \times (\hat{sl}_2)_k$ del modelo H_3^+ , las funciones de correlación pueden caracterizarse como soluciones particulares de las ecuaciones de Knizhnik-Zamolodchikov (KZ). Este es un sistema de ecuaciones en derivadas parciales sujeto a ciertas condiciones asintóticas. Las ecuaciones KZ en este caso son¹⁸

$$(k-2) \frac{\partial}{\partial z_r} \Omega_n^H = H_r \Omega_n^H \quad , \quad H_r \equiv \sum_{s \neq r} \frac{D_{rs}}{z_r - z_s} \quad (2.155)$$

donde el operador diferencial D_{rs} en la base μ se define como

$$\begin{aligned} D_{rs} &\equiv D_r^0 D_s^0 - \frac{1}{2} (D_r^+ D_s^- D_r^- D_s^+) \\ &= \mu_r \mu_s \left[-(\partial_{\mu_r} - \partial_{\mu_s})^2 + \frac{j_r(j_r+1)}{\mu_r^2} + \frac{j_s(j_s+1)}{\mu_s^2} \right] \end{aligned} \quad (2.156)$$

Recordemos que al conjunto de ecuaciones (2.155) hay que sumarle su contraparte anti-holomorfa y las ecuaciones complejas conjugadas correspondientes. La idea principal es que estas ecuaciones son a primer orden en derivadas parciales de z , de modo que el correlador Ω_n^H queda caracterizado por su comportamiento $z_1 \rightarrow z_2$. Usando el OPE, este comportamiento queda determinado por los correladores de más bajos Ω_{n-1}^H .

Dado que será de importancia en esta tesis, describiremos a modo de ejemplo particular la función de 4-puntos. Escribamos, pues, la ecuación KZ en la base x ya que emplearemos esta forma más adelante

$$(k-2)z(z-1) \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{F}(x, z) = ((z-1)\mathcal{D}_1 + z\mathcal{D}_0) \mathcal{F} \quad (2.157)$$

¹⁸Para ser consecuentes con algunos autores y no sobrecargar la notación utilizaremos también Ω^H funciones de correlación en el modelo H_3^+ .

2.3. Teorías Conformes no-rationales

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_1 &= x^2(x-1)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - ((j_1 + j_2 + j_3 - j_4 - 1)x^2 + 2j_1x + 2j_2x(1-x))\frac{\partial}{\partial x} + \\
&\quad + 2(j_1 + j_2 + j_3 - j_4)j_2x - 2j_1j_2 \\
\mathcal{D}_0 &= -(1-x)^2x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + ((-j_1 - j_2 - j_3 + j_4 + 1)(1-x) + 2j_3 - 2j_2x)(x-1)\frac{\partial}{\partial x} + \\
&\quad + 2(j_1 + j_2 + j_3 - j_4)j_2(1-x) - 2j_2j_3
\end{aligned} \tag{2.158}$$

Usando el *ansatz* de [7] (ver también [3]) se puede encontrar una expresión para \mathcal{F} en función de las constantes de estructura, el coeficiente de reflexión y los bloques conformes, a saber¹⁹

$$\mathcal{F} = \int_c dj \frac{C(j_1, j_2, j)C(j, j_3, j_4)}{B(j)} \mathcal{G}(j_1, j_2, j_3, j_4)(x|z) \times \bar{\mathcal{G}}(j_1, j_2, j_3, j_4)(\bar{x}|\bar{z}) \tag{2.159}$$

Esta es una de las claves para comprender la correspondencia entre este modelo y la teoría de Liouville; volveremos sobre este asunto en el capítulo siguiente.

En [58, 59, 60] se podrán encontrar diversos cálculos concernientes a funciones de correlación de 2,3,4-puntos tanto que violan como que preservan el número de flujo espectral total $\omega = \sum_{i=1}^N \omega_i$ y en las que intervienen estados en las distintas representaciones.

2.3.3. La teoría de cuerdas como una CFT

Otro importante ejemplo de teorías de campos conformes bidimensionales es la Teoría de cuerdas. Ésta viene definida por la acción de Polyakov [61]

$$S_P = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X_\mu \partial_\beta X^\mu \tag{2.160}$$

donde $h^{\alpha\beta}$ es la métrica de la variedad bidimensional de la hoja de mundo ($\alpha, \beta \in \{0, 1\}$, $\sigma^0 = \tau$ y $\sigma^1 = \sigma$), $X^\mu(\sigma, \tau)$ son las coordenadas del espacio-tiempo en que se encuentra contenida la cuerda ($\mu \in \{0, 1, 2, \dots, D-1\}$) y α' es la constante de Regge, un parámetro de la teoría con unidades de longitud al cuadrado que se relaciona con la tensión de la cuerda T por $\alpha' = \frac{1}{4\pi T}$ y que es frecuentemente utilizado para efectuar el desarrollo perturbativo de la teoría.

Así, la acción (2.160), que describe esta teoría de cuerdas en un espacio-tiempo D-dimensional, corresponde en realidad a una teoría de D campos escalares en un espacio-tiempo 2-dimensional de métrica $h^{\alpha\beta}$.

Aplicando los conceptos vistos en la sección anterior puede continuarse la signatura de la métrica de la hoja de mundo de Minkowsky a la de Euclides (y fijar el calibre conforme

¹⁹A diferencia de (2.42), aquí la suma sobre estados intermedios $\sum p$ se reemplazó por una integral $\int dj$, ya que se trata de una CFT no-racional, (*i.e.* con espectro continuo).

2. Teorías Conformes

$h^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$), considerar las coordenadas de la hoja de mundo transformadas según (2.20). Hecho esto la acción (2.160) adopta la forma

$$S_P = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X_\mu \bar{\partial} X^\mu \quad (2.161)$$

En el plano complejo, el desarrollo en osciladores tiene la forma de una serie de Laurent

$$\partial X^\mu(z) = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_m^\mu}{z^{m+1}} \quad (2.162)$$

$$T(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{L_m}{z^{m+2}} \quad (2.163)$$

para la parte holomorfa (recordemos que existe un desarrollo equivalente para la parte antiholomorfa). En este caso el desarrollo se hace para ∂X ya que tiene propiedades holomorfas de transformación conforme bien definidas, pero puede desarrollarse X^μ integrando la ecuación (2.162). Notar que (2.162)-(2.163) no es más que el desarrollo en modos de los D campos escalares libres X^μ .

El hamiltoniano de la teoría

$$H = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} d\sigma^2 (\dot{X}^2 + X'^2) \quad (2.164)$$

puede ser escrito en términos de los osciladores como

$$H = \frac{1}{2} \sum_n (\alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n) \quad (2.165)$$

donde $\alpha_m \dot{\alpha}_n = \alpha_{m\mu} \dot{\alpha}_n^\nu$. Estos operadores α_n^μ cumplen el álgebra

$$\begin{aligned} [\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu] &= n\eta^{\mu\nu} \delta_{n+m,0} \\ [\tilde{\alpha}_n^\mu, \tilde{\alpha}_m^\nu] &= n\eta^{\mu\nu} \delta_{n+m,0} \\ [x^\mu, p^\mu] &= i\eta^{\mu\nu} \\ [\alpha_n^\mu, \tilde{\alpha}_m^\nu] &= 0 \end{aligned} \quad (2.166)$$

A partir de ellos se definen los modos del tensor energía-momento, de la siguiente forma

$$L_m = \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \sum_n : \alpha_{-n}^\mu \alpha_{n+m}^\nu : \quad (2.167)$$

y análogamente los \tilde{L}_m . El símbolo $::$ se debe a que para evitar divergencias relacionadas a la energía del punto 0 todos los operadores deben ordenarse normalmente. Se puede ver a partir de las relaciones (2.166), que los operadores L_m cumplen el álgebra de Virasoro (2.167).

2.3. Teorías Conformes no-rationales

Existen tres formalismos equivalentes para cuantizar la cuerda bosónica. El formalismo del cono de luz, donde la condición de dimensionalidad crítica $D = 26$ surge de pedir invariancia de Lorentz; el formalismo de cuantización covariante²⁰, donde la condición $D = 26$ aparece al pedir que se eliminen los estados de norma negativa, y finalmente el formalismo de integral funcional en donde $D = 26$ es la condición necesaria para cancelar la anomalía conforme [61, 63, 62].

El espectro de estados físicos de la cuerda bosónica cerrada es el siguiente: Contiene un taquión ($m^2 < 0$) en el nivel más bajo de excitaciones; este hecho está asociado con expandir alrededor de un vacío inestable y se elimina al considerar la cuerda supersimétrica. El nivel siguiente corresponde a estados no masivos que pueden identificarse con el gravitón (tensor simétrico de rango 2), un tensor antisimétrico (también de rango 2) y el dilatón (escalar). Los restantes estados excitados forman una torre infinita de estados masivos con espectro equiespaciado.

Los operadores de vértice se encuentran en correspondencia con los estados de la teoría. Y es por esto que los operadores de vértice se utilizan para calcular amplitudes de dispersión entre distintos estados de la teoría en el formalismo de la integral funcional. En el caso de la cuerda bosónica, la amplitud de scattering general se escribe como la función de correlación de la teoría conforme definida por (2.160), a saber

$$\mathcal{A}_{j_1 \dots j_n}(k_1 \dots k_n) = \sum_{tc} \int \frac{[dX dh]}{V_{gs}} e^{-S - \lambda \chi} \prod_{i=1}^n \int d^2 z_i \sqrt{h(z_i)} V_{j_i}(k_i, z_i) \quad (2.168)$$

donde tc se refiere a todas las topologías compactas y el hecho de estar sumando significa que no sólo deben tenerse en cuenta todas las variaciones locales de la hoja de mundo, sino también las globales. V_{gs} es el volumen del grupo de simetrías y la idea al dividir por él es hacer que la expresión para la amplitud esté bien definida (con el gauge fijado y sin redundancias debidas a la simetría conforme de la teoría), aunque esto trae como consecuencia la aparición de fantasmas tipo BRST. S es la acción sin fijado de gauge. Finalmente, los j_i indican los números cuánticos de los operadores insertados (*i.e.* los momentos, típicamente). Cada topología es pesada por un factor definido por χ , el número de Euler de la variedad y por λ , una constante multiplicativa que está asociada con el background de la teoría.

Con esto queda claro que si se pretende que la amplitud de dispersión sea invariante ante transformaciones conformes, la integral de los operadores de vértice sobre la hoja de mundo debe tener peso conforme igual a cero, es decir que sean escalares ante transformaciones. Y dado que $d^2 z$ transforma con peso -1, entonces V debe ser un tensor de peso 1.

Dado que se busca construir estados de momento definido, una primera aproximación podría ser

$$V_0 \propto e^{ik \cdot X(z, \bar{z})} \quad (2.169)$$

y lo mismo para la parte anti-holomorfa (similar a lo que vimos para un único bosón

²⁰En la literatura conocido como Old Covariant Quantization

libre). Se puede ver que este es un campo de peso

$$h = \frac{\alpha' k^2}{4} \quad (2.170)$$

De esta manera, la condición para que V represente un operador de vértice es

$$m^2 = -k^2 = -\frac{4}{\alpha'} \quad (2.171)$$

Así encontramos el operador de vértice correspondiente al taquión

$$V_{tq} = 2 \int d^2\sigma \gamma^{1/2} e^{ik \cdot X} \quad (2.172)$$

Para un bosón se considera típicamente el conjunto de campos conformes formados por el operador identidad, el campo $X(z)$, sus derivadas $\partial X(z)$ y sus exponenciales $e^{ik \cdot X(z)}$, de esta manera, para obtener las excitaciones de este estado basta con insertar el campo conforme ∂X^μ que define los osciladores de la teoría. Vemos de esta manera que el operador de vértice que corresponde a los estados no masivos de la teoría, es decir, al gravitón, el dilatón y el tensor antisimétrico, estará dado por

$$V_{nm} = \frac{1}{\alpha'} \int d^2\sigma h^{1/2} [(h^{ab} a_{\mu\nu} + i\varepsilon^{ab} b_{\mu\nu})(\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu e^{ik \cdot X}) + \alpha' \phi R e^{ik \cdot X}] \quad (2.173)$$

donde $a_{\mu\nu}$ es un tensor constante simétrico, $b_{\mu\nu}$ uno antisimétrico y ϕ una constante.

Entonces, al considerar la propagación de cuerdas en campos de fondo, los únicos campos compatibles con la invariancia conforme la cuerda bosónica cerrada, a este orden, además de la métrica ($G_{\mu\nu}$), son el tensor antisimétrico de fondo ($B_{\mu\nu}$) y el dilatón (Φ). Podemos, entonces, pasar a describir la acción de la cuerda incorporando como campos de fondo los mismos que las cuerdas generan. La idea es que la cuerda se mueve bajo la influencia de configuraciones de campos de fondo que son, en definitiva, estados coherentes de los mismos estados de cuerda. Así, la acción que describe la dinámica de la hoja de mundo de una cuerda bosónica propagándose en un espacio-tiempo d -dimensional toma la forma

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma h^{1/2} ((h^{ab} G^{\mu\nu}(X) + i\varepsilon^{ab} B^{\mu\nu}(X)) \partial_a X_\mu \partial_b X_\nu + \alpha' R \Phi(X)) \quad (2.174)$$

donde $R = R_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta}$ representa el escalar de curvatura de la hoja de mundo, ε^{ab} es el pseudo-tensor de Levi-Civita sobre la variedad definida por h_{ab} , $G^{\mu\nu}$ es la métrica del espacio-tiempo, $B^{\mu\nu}$ es el campo antisimétrico de Kalb-Ramond y Φ es el campo del dilatón. La teoría que resulta de la acción (2.174) describe un modelo σ no lineal en dos dimensiones.

Un criterio natural para resolver esta teoría es pedir que la condición de consistencia sea la misma que para el caso plano: Invariancia conforme. Entonces, los fondos admisibles son aquellos que anulan las ecuaciones beta de renormalización.

2.3. Teorías Conformes no-rationales

Ahora, a modo de ejemplo, y para introducir ingredientes que necesitaremos luego, discutamos el caso particular de la teoría conforme en la hoja de mundo que describe a una cuerda moviéndose en el espacio $AdS_3 \times \mathcal{N}$. La teoría de cuerdas puede ser formulada sobre el espacio Anti-de Sitter, en el sentido que la acción de Polyakov con $G_{\mu\nu} = AdS_3$ y (con cierta configuración precisa para el campo $B_{\mu\nu}$) es un modelo conforme también a nivel cuántico (a todo orden en α'). Más específicamente: Se puede ver que la acción (2.109), que corresponde al modelo WZNW sobre H_3^+ es equivalente a la acción (2.174) evaluada en la configuración de campos

$$\begin{aligned} ds^2 &= l^2(d\phi^2 + e^{2\phi}d\gamma d\bar{\gamma}) \\ B &= l^2 e^{2\phi}d\gamma \wedge d\bar{\gamma} \end{aligned} \tag{2.175}$$

que corresponde a la métrica AdS_3 euclídea con radio de curvatura $l^2 = k\alpha'$. El caso de la cuerda en AdS tridimensional es particularmente interesante debido a que en este escenario la acción de Polyakov está garantizada como un modelo conforme exacto más allá de las aproximaciones de teorías efectivas de pequeños α' . En particular, en el contexto de la conjetura de Maldacena [64], uno puede verificar que la correspondencia entre teorías de gravedad y teorías conformes se sostiene aún más allá del régimen de supergravedad [25]. En el caso particular de la correspondencia AdS_3/CFT_2 , la dualidad se dará entre dos teorías conformes bidimensionales y a que, además no es necesario introducir campos de Ramond-Ramond para “soportar” el espacio AdS_3 .

Debido a que se pueden encontrar innumerables introducciones al tema de la descripción de la geometría AdS_3 en términos de modelos conformes (ver [65, 56, 66, 58]), no nos extenderemos demasiado en la demostración, sino que expondremos el resultado final. Como mencionamos, el punto central es que la dinámica de la hoja de mundo de la teoría de cuerdas en AdS_3 se puede representar en términos de un modelo WZNW euclídeo. Teniendo esto en consideración, es posible usar los resultados de la sección anterior para la teoría de cuerdas en esta variedad.

Correspondencia LFT/WZNW

En esta sección se revisará con detalle la conexión que existe entre las funciones de correlación de la teoría de Liouville y aquellas de la teoría de WZNW en $SL(2, \mathbb{R})_k$. Se estudiarán en particular tres puentes entre estas dos teorías: La reducción hamiltoniana de Drinfeld-Sokolov, la ecuación de Fateev-Zamolodchikov y el mapa Stoyanovsky-Ribault-Teschner. Estas correspondencias entre la teoría de Liouville y el modelo WZNW será el tema central de este trabajo de tesis. Luego, en las secciones siguientes discutiremos aplicaciones del hecho de contar con una conexión entre dos teorías, lo que provee una descripción dual para cada una de ellas.

3.1. La reducción hamiltoniana de Drinfeld-Sokolov

Se conoce con el nombre de reducción hamiltoniana al proceso por el cual se “reduce” el modelo WZNW formulado sobre $SL(2, \mathbb{R})$ a una teoría de Liouville. Esto se logra “congelando” grados de libertad de la primera de estas dos teorías. La reducción de estos grados de libertad se logra imponiendo vínculos adicionales (y un fijado de gauge) al modelo WZNW; de esto resulta la teoría de Liouville, que gobierna la dinámica remanente.

El procedimiento puede describirse sucintamente en dos pasos: Primero, imponemos el vínculo

$$J^-(z) = k \tag{3.1}$$

y su compañero anti-holomorfo $\bar{J}^+(\bar{z}) = k$. Este fijado de grados de libertad se puede implementar por medio del método BRST. Se introduce un sistema de fantasmas b - c con carga central $c_g = -2$ [35, 36] y se define la carga BRST como ¹

$$Q_{BRST} = \frac{1}{2\pi i} \oint dw (J^-(w) - k) c(w) \tag{3.2}$$

Esto es análogo a la implementación BRST de la construcción del *coset* $SL(2, \mathbb{R})_k/U(1)$ WZNW, ver por ejemplo [68].

¹Ver también [67] para una muy interesante discusión.

3. Correspondencia LFT/WZNW

La corriente $J^-(z)$ originalmente corresponde a un campo primario de dimensión conforme +1 con respecto al tensor de Sugawara. Entonces, con el fin de imponer (3.1) de un modo invariante de coordenadas, uno tiene que realizar un cambio en el tensor de energía-momento de manera de convertir a J^- en un operador de dimensión cero (un escalar). Dicho de otro modo, hay que hacer de $\beta(z)$ una constante $\beta = k$. Este cambio en el tensor de energía-momento se refiere usualmente a un *twist*, que se define a través del cambio (*twisting*)

$$T(z) \rightarrow \hat{T}(z) = T(z) - \partial J^3(z) \quad (3.3)$$

Teniendo en cuenta la representación de Wakimoto

$$\begin{aligned} T(z) &= -\beta(z)\partial\gamma(z) - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{\sqrt{2k-4}}\partial^2\phi(z) \\ J^3(z) &= -\beta(z)\gamma(z) + \sqrt{\frac{k-2}{2}}\partial\phi(z) \end{aligned} \quad (3.4)$$

el tensor *twistado* toma la forma

$$\hat{T}(z) = -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{\sqrt{2(k-2)}}\partial^2\phi(z) + \partial\beta(z)\gamma(z) - \sqrt{\frac{k-2}{2}}\partial^2\phi(z) \quad (3.5)$$

Se puede verificar que el OPE $\hat{T}(z)\beta(w)$ es consistente con tratar a $J^-(z)$ como un campo de dimensión cero

$$\hat{T}(z)\beta(w) \sim \frac{\partial\beta(z)}{(z-w)} + \dots \quad (3.6)$$

Luego, dado que $J^-(z) = \beta(z)$ la implementación del vínculo $J^-(z) = k$ produce $\partial\beta(z) = 0$ en (3.5). Tenemos entonces

$$\hat{T}(z) = -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{Q}{\sqrt{2}}\partial^2\phi(z) \quad (3.7)$$

donde $Q = b + b^{-1}$ and $b^{-2} = k - 2$. Esto corresponde al tensor de energía-momento de Liouville. Así, vemos cómo la teoría WZNW se reduce a la teoría de Liouville imponiendo el vínculo (3.1). Obviamente, calculando el OPE $\hat{T}(z)\hat{T}(w)$ también se verifica que la carga central de la teoría de Liouville está dada por

$$\hat{c} = 1 + 6Q^2 = c_{SL(2)} + 6k - 2 \quad (3.8)$$

donde $c_{SL(2)} = 3 + 6/(k - 2)$ es la carga central de la teoría $SL(2, \mathbb{R})_k$.

Ahora, deberíamos especificar cómo el espectro de la teoría WZNW se relaciona con el espectro de la teoría de Liouville, que están representados por campos exponenciales primarios $V_\alpha(z) = e^{\sqrt{2}\alpha\phi(z)}$. Primero, recordemos la fórmula para la dimensión conforme de estos campos:

$$h_\alpha = \Delta_\alpha = \alpha(Q - \alpha) \quad (3.9)$$

Por otra parte, del lado de WZNW es conveniente enfocarse en aquellos campos que pertenecen a las representaciones de peso máximo de $SL(2, \mathbb{R})$, digamos con esto, los

3.2. La fórmula Fateev-Zamolodchikov

campos que satisfacen $j = -p = -\bar{p}$ (o su contraparte reflejada de Weyl ($j + 1 = p = \bar{p}$)). Estos son campos primarios con respecto al tensor de energía-momento twistado $\hat{T}(z)$, como puede verse calculando el OPE $\hat{T}(z)\Phi_{j,p,\bar{p}}(w)$, cuya dimensión conforme es

$$\hat{\Delta}_j = -\frac{j(j+1)}{k-2} - j = -bj(Q - (-bj)) \quad (3.10)$$

Así, comparando (3.9) con (3.10) vemos que es natural identificar el momento de Liouville α y el momento de WZNW j mediante la simple relación

$$\alpha = -bj \quad (3.11)$$

o su contraparte reflejada de Weyl $\alpha = b(j+1)$, dependiendo de las convenciones. Digamos, reducción hamiltoniana induce la siguiente identificación $V_{\alpha=-bj}(z) \leftrightarrow \Phi_{j,-j,-j}(z)$ entre operadores de vértices de ambas teorías. De acuerdo con esta correspondencia, esperaríamos que la reducción hamiltoniana pudiera ser realizada a nivel de las funciones de correlación a través de la forma

$$\left\langle \prod_{i=1}^n V_{-bj_i}(z_i) \right\rangle_{LFT} \sim f(b) \left\langle \prod_{i=1}^n \Phi_{j_i}(z_i) \right\rangle_{H_3^+} \quad (3.12)$$

donde $f(b)$ es un factor numérico dependiente de b .

3.2. La fórmula Fateev-Zamolodchikov

Discutamos ahora una conexión (a priori) distinta entre el modelo H_3^+ y la teoría de Liouville. Hace ya un tiempo se observó que algunas funciones de correlación del modelo H_3^+ lucen similares a ciertas funciones de correlación particulares de la teoría de Liouville [41, 69, 7, 45]. Sin embargo, esta relación no era evidente para el caso de las funciones de correlación más generales.

La primera relación precisa entre correladores de ambas teorías fue presentada por Fateev y Zamolodchikov en [71]. Este diccionario, que llamaremos con el nombre de mapa FZ, relaciona la ecuación KZ satisfecha por un correlador de 4-puntos del modelo H_3^+

$$\Omega_{4|1}^H = \langle \Phi^{j_2}(0|0)\Phi^{j_1}(x|z)\Phi^{j_3}(1|1)\Phi^{j_4}(\infty|\infty) \rangle \quad (3.13)$$

y la ecuación BPZ satisfecha por un correlador de 5-puntos de la teoría de Liouville con un campo degenerado $V_{\frac{-1}{2b}}$

$$\Omega_{4|1}^L = \langle V_{\alpha_2}(0)V_{\alpha_1}(z)V_{\alpha_3}(1)V_{\frac{-1}{2b}}(x)V_{\alpha_4}(\infty) \rangle \quad (3.14)$$

La afirmación de Fateev y Zamolodchikov es que la ecuación KZ satisfecha por las funciones de 4-puntos en el modelo WZNW coinciden con la ecuación BPZ satisfecha por un conjunto particular de funciones de 5-puntos en la teoría de Liouville. Para ser más

3. Correspondencia LFT/WZNW

precisos, digamos que es posible obtener una solución de la ecuación KZ comenzando a partir de una del sistema BPZ. Esto se traduce en la relación

$$\Omega_4^H = F_k(j_1, j_2, j_3, j_4) \chi_k(j_1, j_2, j_3, j_4 | x, z) \Omega_{4|1}^L \quad (3.15)$$

donde

$$\chi_k(j_1, j_2, j_3, j_4 | x, z) = |z|^{-4b^2 j_1 j_2 + \alpha_1 \alpha_2} |1-z|^{-4b^2 j_1 j_3 + \alpha_1 \alpha_3} |x-z|^{-2b^{-1} \alpha_1} |x|^{-2b^{-1} \alpha_2} |1-x|^{-2b^{-1} \alpha_3} \quad (3.16)$$

mientras que $F_k(j_1, j_2, j_3, j_4)$ viene dada por

$$F_k(j_1, j_2, j_3, j_4) = c_b \left(\lambda \pi b^{2b^2} \frac{\Gamma(1-b^2)}{\Gamma(1+b^2)} \right)^{1-3j_1-j_2-j_3-j_4} (\lambda \mu)^{2j_1} \prod_{\mu=1}^4 \frac{\Upsilon_b(2j_\mu + 1)}{\Upsilon_b(2\alpha_\mu)} \quad (3.17)$$

siendo la función $\Upsilon_b(x)$ aquella definida en el capítulo anterior (ver Apéndice C para encontrar la definición y una lista de las propiedades funcionales de las funciones $\Upsilon_b(x)$). El coeficiente c_b es un factor que depende de b , independiente de los números cuánticos j_μ y α_μ ; volveremos con más detalle sobre este factor en el capítulo siguiente. El parámetro λ es un parámetro libre del modelo WZNW, por lo tanto no debe atribuírsele ningún significado físico (a nivel perturbativo), ya que puede asignársele cualquier valor positivo mediante un reescalo apropiado del modo cero del campo ϕ . Dicho de otro modo, puede ser absorbido dentro de esta ecuación a través de un simple shift en λ .

La relación entre los índices j_μ que etiquetan las representaciones de $SL(2, \mathbb{R})_k$ y los momentos de Liouville α_μ , involucra una transformación inversible no-diagonal definida como

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= b(j_1 + j_2 + j_3 + j_4 - 1) \\ 2\alpha_i - Q &= b(j_1 - j_2 - j_3 - j_4 + 2j_i) \quad i = 2, 3, 4 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Por otro lado, recordemos una vez más que la relación entre el nivel k del modelo WZNW y el parámetro b de la teoría de Liouville

$$b^{-2} = k - 2 \in R > 0 \quad (3.19)$$

Esta relación fue encontrada originalmente en el contexto del modelo WZNW en $SU(2)$, que corresponde a valores enteros negativos de k y a espines semienteros j_r , en nuestra notación.

El mapa FZ (3.15) ha tenido numerosas aplicaciones, por ejemplo, ha sido extendida por Teschner a la relación entre los correladores físicos correspondientes entre el modelo H_3^+ y Liouville, con la intención de mostrar la simetría de cruce del modelo H_3^+ a partir de la misma simetría en la teoría de Liouville [6]. Además, el mapa FZ fue desarrollado por varios autores en [73, 5, 14, 74].

3.3. La Fórmula de Stoyanovsky-Ribault-Teschner

Pasemos ahora a estudiar una nueva (la tercera) relación entre el modelo WZNW y la teoría de Liouville. Esta es la llamada fórmula de Stoyanovsky-Ribault-Teschner [75, 8], que establece una relación precisa entre observables de estas dos CFT's no-rationales.

3.3.1. El mapa SRT

Como vimos en el capítulo anterior, las ecuaciones KZ [33] son una herramienta esencial en el estudio de las CFT's con simetría de Lie afín ya que todas las funciones de correlación de los campos primarios afines obedecen este sistema de ecuaciones diferenciales lineales, las cuales determinan su dependencia en las coordenadas de la hoja de mundo.

Stoyanovsky observó en [75] que existe una sorprendente relación funcional entre soluciones a la ecuación de Knizhnik-Zamolodchikov y a la ecuación de Belavin-Polyakov-Zamolodchikov. En otras palabras, las ecuaciones KZ pueden llevarse, luego de algunos trucos algebraicos, a la forma de ciertas ecuaciones BPZ. Esta correspondencia entre ecuaciones diferenciales da pie a una nueva relación entre la teoría de Liouville y el modelo H_3^+ a nivel de las funciones de correlación.

A partir de esta observación, S. Ribault y J. Teschner mostraron en [8] que funciones de correlación arbitrarias del modelo H_3^+ admiten expresiones simples en términos de funciones de correlación de LFT. Más precisamente, cualquier función de n -puntos correspondiente al modelo H_3^+ en la topología de la esfera puede escribirse en términos de una función de $(2n - 2)$ -puntos de LFT. En este apartado nos referiremos a la fórmula que conecta las funciones de correlación en el modelo H_3^+ con las de la teoría de Liouville como la fórmula Stoyanovsky-Ribault-Teschner (SRT).

La teoría de Liouville y el modelo H_3^+ , son dos teorías conformes que han jugado un papel preponderante en una cantidad significativa de estudios recientes sobre las teorías de cuerdas no-críticas, la gravedad cuántica bidimensional y la correspondencia AdS/CFT en el caso del espacio-tiempo tridimensional. Estos dos modelos son ejemplos de teorías de campos conformes bidimensionales con conjuntos continuos de campos primarios que no son obtenidos a partir de teorías de campos libres en una forma sencilla. Uno podría ver a la teoría de Liouville y al modelo H_3^+ como las contrapartes no-compactas de los modelos minimales y el modelo de WZNW en $SU(2)$, respectivamente.

La relación SRT permite conectar en forma sistemática los correladores de ambas teorías [76, 8]. En particular, la fórmula de Ribault-Teschner relaciona funciones de n -puntos a nivel árbol de la teoría de cuerdas en AdS_3 euclídeo con cierto subconjunto de funciones de M -puntos en la teoría de Liouville, donde $M = 2n - 2$.

Para establecer la fórmula de Ribault-Teschner digamos que $\Phi(\mu|z_i)^{j_i}$ representa a los operadores de vértice del modelo WZNW, mientras que $V_{\alpha_i}(z_i)$ y $V_{-\frac{1}{2b}}(y_i)$ representan a los operadores de vértice de la teoría de Liouville; entonces, en la base μ introducida en el capítulo anterior, la relación entre funciones de correlación de ambas

teorías resulta ser

$$\left\langle \prod_{i=1}^n \Phi_{j_i}(\mu_i | z_i) \right\rangle_{H_3^+} = \frac{\pi}{2} (-\pi)^{-n} b \delta^{(2)} \left(\sum_{i=1}^n \mu_i \right) |\Theta_n|^2 \left\langle \prod_{i=1}^n V_{\alpha_i}(z_i) \prod_{t=1}^{n-2} V_{-\frac{1}{2b}}(y_t) \right\rangle_{LFT} \quad (3.20)$$

donde la función de correlación del lado derecho corresponde a una función de $2n - 2$ puntos de LFT, la que involucra $(2n-2)$ campos primarios exponenciales $V_\alpha(z) = e^{\sqrt{2}\alpha\varphi(z)}$.

La función interpoladora Θ_n está dada por

$$\Theta_n(z_1, \dots, z_n | y_1, \dots, y_{n-2} | u) = \frac{u \prod_{r < s \leq n} (z_r - z_s)^{\frac{1}{2b^2}} \prod_{t < l \leq n-2} (y_t - y_l)^{\frac{1}{2b^2}}}{\prod_{r=1}^n \prod_{t=1}^{n-2} (z_r - y_t)^{\frac{1}{2b^2}}} \quad (3.21)$$

La relación (3.20) vale siempre que se satisfagan algunas relaciones que pasaremos a enumerar. Primero, que y_i esté relacionada con μ_i y u de la siguiente manera (separación de variables de Sklyanin):

$$\sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{t - z_i} = u \frac{\prod_{j=1}^{n-2} (t - y_j)}{\prod_{i=1}^n (t - z_i)} \quad (3.22)$$

En particular, como $\sum_{i=1}^n \mu_i = 0$, tenemos

$$u = \sum_{i=1}^n \mu_i z_i \quad (3.23)$$

Segundo, que el parámetro b de la teoría de Liouville esté identificado con el parámetro k del modelo H_3^+ mediante la relación $b^2 = (k - 2)^{-1}$. Tercero, que la constante de acoplamiento de Liouville tenga un valor constante² $\mu_L = \frac{b^2}{\pi^2}$. Cuarto, los momentos de Liouville se relacionan con los del modelo H_3^+ mediante la relación

$$\alpha_i = b(j_i + 1) + \frac{1}{2b} \quad (3.24)$$

El elemento clave en la correspondencia (3.20) es claramente el cambio de variables (3.22). La forma en que Ribault y Tschner demostraron (3.20) fue haciendo uso de la relación existente entre las soluciones de las ecuaciones diferenciales BPZ y la ecuación diferencial KZ generalizada. Este ingenioso recurso permitió demostrar el mapa entre los correladores de ambas teorías sin necesidad de conocer la forma genérica de estos observables en cada una de ellas.

3.3.2. Dedución a través de integral de caminos

Hikida y Schomerus [77] dedujeron hace un par de años una demostración de la fórmula SRT mediante el método de la integral de caminos y, a través de este formalismo, extendieron la correspondencia a género arbitrario.

²No confundir este μ_L , que es el coeficiente de reflexión y está relacionado con la normalización, es decir con la función de dos puntos en la teoría de Liouville, con la variable μ .

3.3. La Fórmula de Stoyanovsky-Ribault-Teschner

Como se vio en capítulos anteriores, la acción del modelo H_3^+ involucra los tres campos $\gamma, \bar{\gamma}, \phi$ correspondientes a las coordenadas que parametrizan el borde bidimensional de H_3^+ y la dirección radial, respectivamente. En este trabajo, sin embargo, pasaremos a una formulación alternativa que incluye dos campos adicionales β y $\bar{\beta}$ de peso conforme $(h_\beta, h_{\bar{\beta}}) = (1, 1)$. A lo largo de esta sección usaremos el gauge conforme, donde la métrica de la hoja de mundo y la curvatura quedan determinadas por alguna función ρ del siguiente modo

$$ds^2 = |\rho(z)|^2 dz d\bar{z} \quad , \quad \sqrt{g}R = -4\partial\bar{\partial} \ln |\rho(z)|^2 \quad (3.25)$$

En este gauge en particular, la acción del modelo H_3^+ toma la siguiente forma [79, 80]

$$S[\phi, \gamma, \beta] = \frac{1}{2\pi} \int d^2w \left(\bar{\partial}\phi\partial\phi + \beta\bar{\partial}\gamma\bar{\beta}\partial\bar{\gamma} + \frac{Q_\phi}{4}\sqrt{g}R\phi - b^2\beta\bar{\beta}e^{2b\phi} \right) \quad (3.26)$$

Acá, el parámetro b se relaciona con el nivel del modelo WZNW mediante $b^{-2} = k - 2$ y la carga de fondo está dada por $Q_\phi = b$. Notemos que la acción usual del modelo H_3^+ emerge luego de haber integrado en los campos β y $\bar{\beta}$.

Todos los ingredientes necesarios para este formalismo se definieron anteriormente, sin embargo los listaremos nuevamente, por comodidad. Comencemos por la carga central (2.115)

$$c(H_3^+) = \frac{3k}{k-2} = 3 + 6b^2 = 2 + (1 + 6b^2) \quad (3.27)$$

Los vértices del modelo H_3^+ (2.125) en la base μ

$$\Phi_j(\mu|z) = |\mu|^{2j+2} e^{\mu\gamma(z) - \bar{\mu}\bar{\gamma}(\bar{z})} e^{\sqrt{2b(j+1)}\phi(z, \bar{z})} \quad (3.28)$$

con dimensión conforme (3.29)

$$h = -\frac{j(j+1)}{k-2} \quad (3.29)$$

Por último, los OPEs de las corrientes con campos primarios (3.30)

$$J^a(w)\Phi_j(\mu|z) \sim \frac{1}{w-z} D^a \Phi_j(\mu|z) \quad (3.30)$$

donde los operadores D^a se habían definido mediante

$$D^- = \mu \quad , \quad D^0 = -\mu\partial_\mu \quad , \quad D^+ = \mu\partial_\mu^2 - \frac{j(j+1)}{\mu} \quad (3.31)$$

Si bien todas las bases son equivalentes en algún sentido, la base μ es la más conveniente para tratar este formalismo.

La idea es calcular la función de n -puntos de campos primarios en el modelo H_3^+ , esto es

$$\left\langle \prod_{i=1}^n \Phi_{j_i}(\mu_i|z_i) \right\rangle_{H_3^+} = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\gamma \mathcal{D}\bar{\gamma} \mathcal{D}\beta \mathcal{D}\bar{\beta} e^{-S_0 - S_s} \prod_{i=1}^n \Phi_{j_i}(\mu_i|z_i) \quad (3.32)$$

El primer paso es integrar los campos γ y $\bar{\gamma}$. Esta integración lleva a un vínculo tan simple como una función delta, esto es

$$\bar{\partial}\beta(w) = 2\pi \sum_{i=1}^n \mu_i \delta(w - z_i) \quad (3.33)$$

esto puede integrarse, de manera de obtener

$$\beta(w) = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{w - z_i} \quad (3.34)$$

Otra ecuación similar se satisface para $-\bar{\beta}$. La idea crucial de este proceso es reparametrizar β ; para eso se usa el hecho que β debe tener $n - 2$ ceros cuyas localizaciones en la esfera denotaremos por $w = y_i$. Así, podemos escribir β en la forma

$$\beta(w) = u \frac{\prod_{j=1}^{n-2} (w - y_j)}{\prod_{i=1}^n (w - z_i)} \quad (3.35)$$

De integrar sobre los campos ³ β y $\bar{\beta}$ resulta la representación de la integral de camino

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_{i=1}^n \Phi_{j_i}(\mu_i | z_i) \right\rangle_{H_3^+} &= |\Theta_n|^2 \delta \left(\sum_{i=1}^n \mu_i \right) \int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{1}{2\pi} \int d^2w \left(\frac{1}{2} \partial\varphi \bar{\partial}\varphi + e^{\sqrt{2b}\varphi} \right)} \times \\ &\times \prod_{i=1}^n e^{(\sqrt{2b}^{-1}(j_i+1) + \frac{\sqrt{2b}}{2})\varphi(z_i)} \prod_{l=1}^{n-2} e^{-\frac{\sqrt{2b}}{2}\varphi(y_l)} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Como se desprende de lo visto en este capítulo y lo representado en la Figura 1.1, la pieza clave alrededor de la que se despliega la red de dualidades entre teorías conformes es la relación entre la teoría de Liouville y el modelo WZNW en $SL(2, \mathbb{R})_k$. En los capítulos que siguen veremos algunas aplicaciones de esta dualidad.

3.4. Generalizaciones y aplicaciones de la fórmula SRT

Luego de que se formulara la correspondencia SRT H_3^+ -Liouville en la hoja de mundo de la esfera, se siguieron generalizaciones importantes. Primero, su extensión al caso en que la hoja de mundo presentara geometrías con bordes se estudió en [76, 81, 82, 83], esto puede ser visto como una descripción de la hoja de mundo en el contexto de la teoría de cuerdas de D-branas.

La segunda generalización fue la extensión al caso de funciones de correlación en géneros mayores: en [77] Y. Hikida y V. Schomerus demostraron que cualquier función de correlación de n -puntos del modelo H_3^+ WZNW a género g puede ser escrito en términos de funciones de correlación de $(2n + 2g - 2)$ -puntos de LFT. Esta generalización a género

³En realidad el formalismo es un tanto más complicado, pero se verá con más detalle en el capítulo siguiente

3.4. Generalizaciones y aplicaciones de la fórmula SRT

arbitrario fue realizada empleando el método de integral de camino de la correspondencia H_3^+ -Liouville (ver también [84]).

En [76], S. Ribault consiguió incorporar los sectores con simetría de flujo espectral extendiendo los resultados de [8]. En particular, se mostró que si en una dada función de correlación en WZNW se viola la conservación del número de winding en $\Delta\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i$ unidades, entonces tal función de correlación siempre puede escribirse en términos de una función de correlación de $(2n - 2 - \Delta\omega)$ -puntos de LFT. Esta nueva correspondencia incrementó el conjunto de funciones de correlación de WZNW que admiten una representación en términos de LFT.

En la Figura 3.1 se muestra un esquema de las generalizaciones más importantes hasta el momento.

Recientemente, siguiendo el método de integral de camino S. Ribault propuso una generalización novedosa de la correspondencia H_3^+ -Liouville, arguyendo que LFT puede proveer una representación de observables de un conjunto más amplio de CFT's [22]. De acuerdo con esta propuesta, la correspondencia SRT H_3^+ -Liouville podría ser sólo un caso particular de un correspondencia más general. La afirmación que se discute en [22] es que las funciones de correlación de $(2n-2)$ -puntos de LFT en la esfera pueden ser consideradas como generadores de funciones de correlación de n -puntos de una familia biparamétrica de CFT's no-rationales. Cada miembro de esta familia de teorías está caracterizado por dos parámetros continuos, b y m , (en lugar de sólo por el parámetros b) y la parametrización es tal que LFT corresponde a un caso particular $m = 0$, teniendo carga central $c_L = 1 + 6(b + b^{-1})^2$.

3. Correspondencia LFT/WZNW

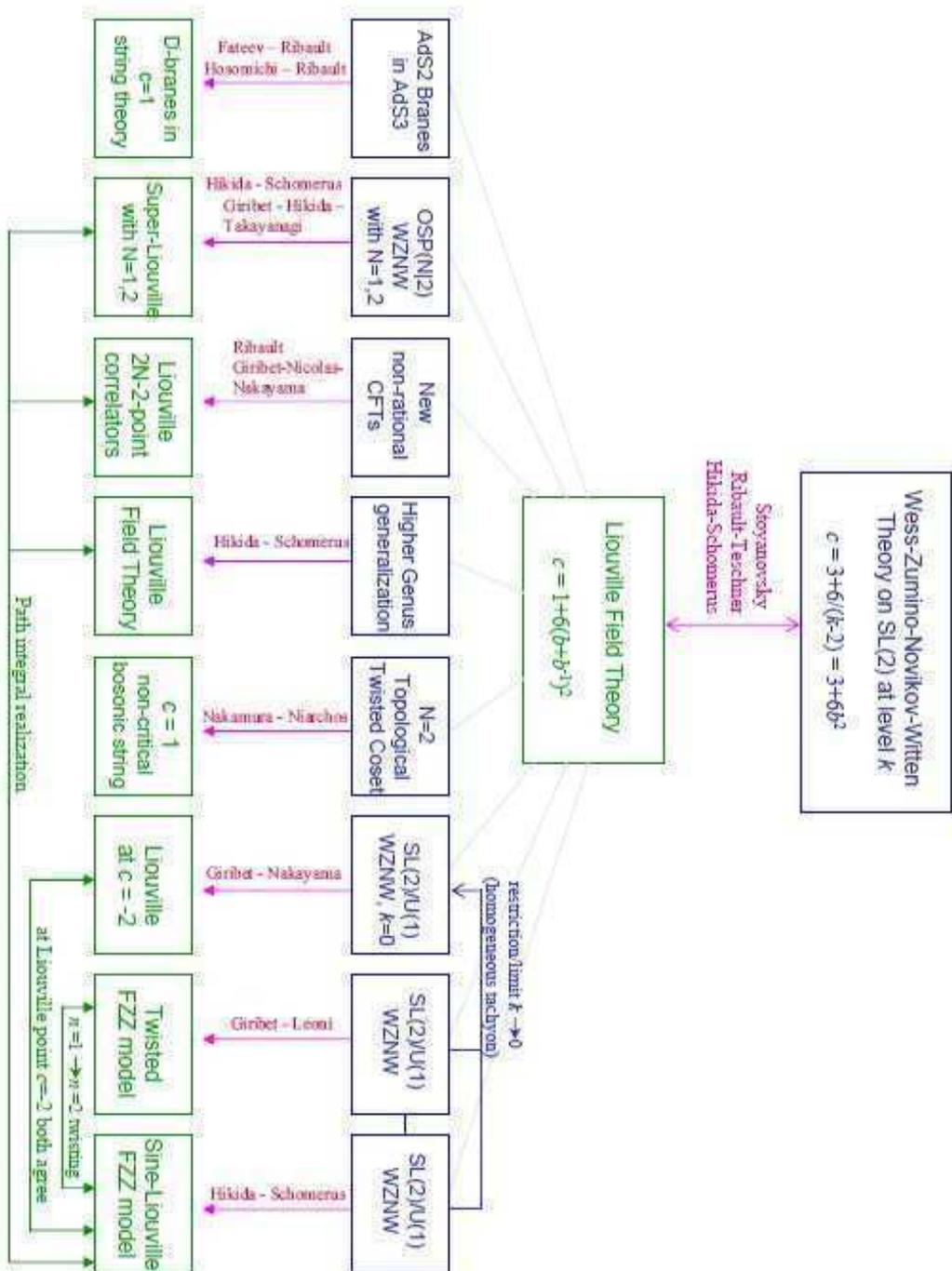


Figura 3.1: Generalizaciones y Aplicaciones del mapa SRT.

Aplicaciones I: Dualidad de Langlands en el modelo WZNW

En este capítulo se muestra una realización física de la llamada dualidad de Langlands en funciones de correlación del modelo H_3^+ WZNW. Se deduce una versión dual de la fórmula Stoyanovsky-Ribault-Teschner (SRT) que relaciona las funciones de correlación de H_3^+ WZNW y la teoría de Liouville dual con el objeto de investigar la dualidad a nivel $k - 2 \rightarrow (k - 2)^{-1}$ en las funciones de correlación de WZNW.

4.1. Preliminares

En este apartado hacemos una observación preliminar sobre la cual se discutirá más en este capítulo y el que sigue. Por un lado, el resultado de Ribault en [22] indica que existe una familia biparamétrica de teorías conformes caracterizadas por sus observables

$$\Omega_n^{(m)} = \delta^{(2)} \left(\sum_{i=1}^n \mu_i \right) |\Theta_n^{(m)}|^{2m^2} \left\langle \prod_{i=1}^n V_{\alpha_i}(z_i) \prod_{t=1}^{n-2} V_{-\frac{m}{2b}}(y_t) \right\rangle_{LFT} \quad (4.1)$$

donde el lado derecho corresponde a una función de $2n - 2$ -puntos en LFT, como se observa en la Figura 4.1. Las funciones $\Omega_n^{(m)}$ serían funciones de n -puntos de la nueva m -ésima CFT.

En este caso, el modelo H_3^+ corresponde al caso $m = 1$, donde el nivel WZNW está dado por $k = b^{-2} + 2$ y su carga central por $c_{SL(2)} = 3 + 6b^2$. Por otro lado, como se mostrará más adelante, el caso $m = b^2$ también corresponde a la teoría H_3^+ cuya carga central es $c_{SL(2)} = 3 + 6b^{-2}$, pero con nivel $k = b^2 + 2$. Esto implica que el modelo H_3^+ está representado por dos curvas en el espacio de parámetros (m, b) de [22]. Fijar el nivel k corresponde a fijar un punto en cada curva, donde una de ellas resulta estar relacionada con la otra a través de la dualidad de nivel de Langlands $k - 2 \rightarrow (k - 2)^{-1}$. Discutiremos entonces, la forma de revelar la dualidad de Langlands¹ en el modelo H_3^+ y también trataremos

¹En [78] se puede encontrar una completa introducción al tema.

4. Aplicaciones I: Dualidad de Langlands en el modelo WZNW

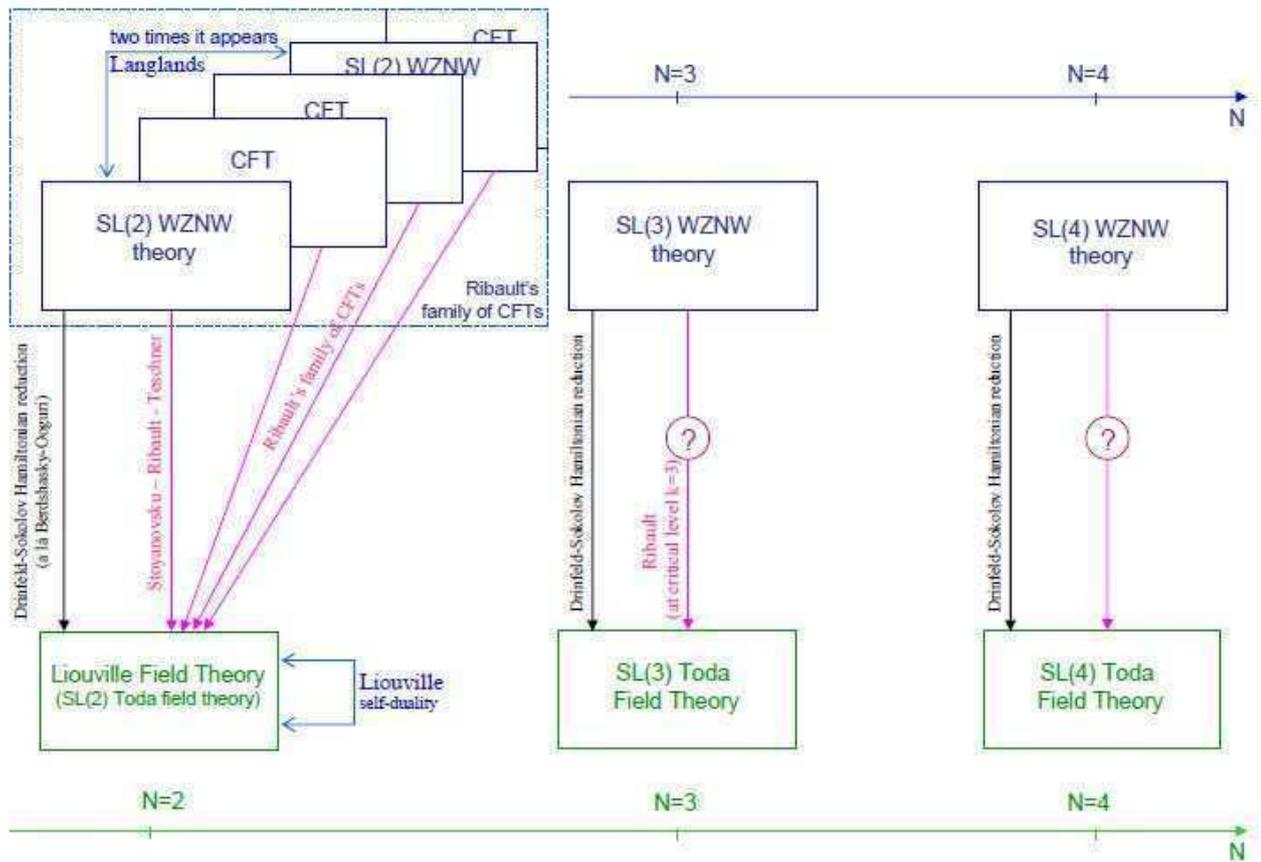


Figura 4.1: Familia Biparamétrica de CFT's.

4.2. Versión dual de la fórmula SRT

de explicar porqué esto podría verse como un ejemplo de una dualidad aún más general. Específicamente, más miembros de esta familia biparamétrica de CFT's propuestos en [22] podrían aparecer dos veces en el espacio de parámetros definidos por el plano (m, b) . Esta idea no es caprichosa sino que se sugiere por la estructura de las identidades conformes de Ward y aparece naturalmente cuando se discute el álgebra de corrientes que genera las simetrías de la teoría [23].

4.2. Versión dual de la fórmula SRT

Nuestro primer objetivo es deducir la versión dual de la correspondencia H_3^+ –Liouville de [8]. Esta fórmula relaciona funciones de n -puntos del modelo H_3^+ en la así llamada base μ (para más detalles ver sección 2.3.2) y las funciones $(2n-2)$ -puntos de LFT. Más precisamente, nos gustaría proponer la siguiente versión dual de la fórmula SRT²

$$\left\langle \prod_{i=1}^n \Phi_{j_i}(\mu_i | z_i) \right\rangle_{H_3^+} = \frac{\pi}{2\tilde{b}} (-\pi)^n \delta^{(2)} \left(\sum_{i=1}^n \mu_i \right) |\Theta_n|^2 \left\langle \prod_{i=1}^n V_{\alpha_i}(z_i) \prod_{t=1}^{n-2} V_{-\frac{\tilde{b}}{2}}(y_t) \right\rangle_{LFT} \quad (4.2)$$

donde la función de correlación del lado derecho corresponde a una función de $(2n-2)$ -puntos de LFT, la que involucra $(2n-2)$ campos primarios exponenciales $V_\alpha(z) = e^{\sqrt{2}\alpha\varphi(z)}$. La carga central de LFT está dada en términos de \tilde{b} como $c_L = 1 + 6Q^2$, $Q = \tilde{b} + \tilde{b}^{-1}$. Definimos LFT mediante la acción clásica

$$S_{LFT} = \frac{1}{2\pi} \int d^2z \left(\partial\varphi\bar{\partial}\varphi + 2\pi\mu_L e^{\sqrt{2\tilde{b}}\varphi} \right) \quad (4.3)$$

La función interpoladora Θ_n está dada por

$$\Theta_n(z_1, \dots, z_n | y_1, \dots, y_{n-2} | u) = \frac{u \prod_{r<s\leq n} (z_r - z_s)^{\frac{\tilde{b}^2}{2}} \prod_{t<l\leq n-2} (y_t - y_l)^{\frac{\tilde{b}^2}{2}}}{\prod_{r=1}^n \prod_{t=1}^{n-2} (z_r - y_t)^{\frac{\tilde{b}^2}{2}}} \quad (4.4)$$

donde y_i está relacionada con μ_i y u mediante la separación de variables de Sklyanin estudiada en el capítulo anterior (3.22)

$$u = \sum_{i=1}^n \mu_i z_i, \quad \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{t - z_i} = u \frac{\prod_{j=1}^{n-2} (t - y_j)}{\prod_{i=1}^n (t - z_i)} \quad (4.5)$$

El momento de Liouville α_i se relaciona con las variables de spin j_i de $SL(2, \mathbb{R})$ mediante

$$\alpha_i = \tilde{b}^{-1} (j_i + 1) + \tilde{b}/2 \quad (4.6)$$

²Para evitar confusión usamos la notación \tilde{b} para los exponentes de Liouville para así enfatizar que se está discutiendo la fórmula dual SRT, mientras que finalmente identificaremos \tilde{b} con b cuando estudiemos la dualidad de Langlands.

4. Aplicaciones I: Dualidad de Langlands en el modelo WZNW

mientras que el parámetro de Liouville \tilde{b} se relaciona con el nivel k de WZNW por ³

$$\tilde{b}^2 = k - 2 \tag{4.7}$$

lo que establece la relación entre dimensiones conformes como $\Delta_\alpha + \Delta_{-\tilde{b}/2} + \tilde{b}^2/2 = \Delta_\alpha - k/4 = -\tilde{b}^{-2}j(j+1) = \Delta_j$.

La expresión (4.2) representa una versión dual de la fórmula SRT, como fuera presentada en [8]. De hecho, la versión original de la fórmula en [8] se obtiene a partir de (4.2) reemplazando $\tilde{b} \rightarrow b^{-1}$. Este es en realidad la clave en este asunto: el hecho de que exista tal expresión dual implica que la fórmula (4.2) y la fórmula en [8], consideradas juntas, inducen la dualidad ante $b^{-2} = k - 2 \rightarrow (k - 2)^{-1}$ a nivel de las funciones de correlación de WZNW, siempre que la teoría de Liouville contenga la auto-dualidad $b \rightarrow \tilde{b}$ y se introduzca una transformación conveniente de las variables de spin de $SL(2, R)$ como $b(j+1 + b^{-2}/2) \rightarrow \tilde{b}(j_i + 1 + \tilde{b}^{-2}/2)$.

A continuación, deduciremos la fórmula (4.2) reviendo el análisis de [8] y [77].

4.2.1. Deducción mediante la ecuación KZ

Comencemos con la relación entre los coeficientes de reflexión de los modelos LFT y WZNW. Primero, consideremos la función de dos-puntos de la teoría de Liouville

$$R^L(\alpha) = -(\pi\mu_L\gamma(\tilde{b}^2))^{\frac{Q-2\alpha}{\tilde{b}}} \frac{\Gamma(1 + \tilde{b}(2\alpha - Q)) \Gamma(1 + \tilde{b}^{-1}(2\alpha - Q))}{\Gamma(1 - \tilde{b}(2\alpha - Q)) \Gamma(1 - \tilde{b}^{-1}(2\alpha - Q))} \tag{4.8}$$

y la función de dos-puntos de la teoría $SL(2, \mathbb{R})_k$

$$R^H(j) = - \left(\frac{\gamma(\frac{1}{k-2})}{\pi(k-2)} \right)^{-2j-1} \frac{\Gamma(2j+1)}{\Gamma(-2j-1)} \frac{\Gamma(\frac{2j+1}{k-2})}{\Gamma(-\frac{2j+1}{k-2})} \tag{4.9}$$

donde $\gamma(x) = \Gamma(x)/\Gamma(1-x)$. Es fácil ver que los coeficientes de reflexión (4.8) y (4.9) están relacionados mediante

$$R^L(\tilde{b}^{-1}(j+1) + \tilde{b}/2) = R^H(j) \tag{4.10}$$

siempre que

$$\left(\pi\mu_L\gamma(\tilde{b}^2) \right)^{\tilde{b}^{-2}} = \frac{\gamma(\frac{1}{k-2})}{\pi(k-2)}, \quad \text{o} \quad \tilde{\mu}_L = \frac{1}{\pi^2\tilde{b}^2} \tag{4.11}$$

de manera que el prefactor coincida ⁴. Recordemos la relación de dualidad de Liouville $(\pi\tilde{\mu}_L\gamma(b^{-2}))^{\tilde{b}} = (\pi\mu_L\gamma(b^2))^{1/\tilde{b}}$. Esto muestra cómo la relación dual (4.2) se sostiene para el caso simple de la función de dos-puntos.

Para ir más lejos, consideremos la función de cuatro-puntos de Liouville,

³Notar que en la fórmula original, teníamos $b^2 = (k-2)^{-2}$.

⁴En [8] se utilizó la convención $\mu = b^2/\pi^2$.

4.2. Versión dual de la fórmula SRT

$$F^L(\alpha_1, \alpha_2, -\tilde{b}/2, \alpha_3) = \left\langle V_{\alpha_1}(z_1) V_{\alpha_2}(z_2) V_{-\tilde{b}/2}(y_1) V_{\alpha_3}(z_3) \right\rangle_{LFT} \quad (4.12)$$

que está dada por

$$\begin{aligned} F^L(\alpha_1, \alpha_2, -\tilde{b}/2, \alpha_3) &= |z_{32}|^{2(\Delta_{\alpha_1} - \Delta_{\alpha_2} - \Delta_{\alpha_3} + \Delta_{-\tilde{b}/2})} |z_{31}|^{2(\Delta_{\alpha_2} - \Delta_{\alpha_1} - \Delta_{\alpha_3} + \Delta_{-\tilde{b}/2})} \times \\ &\times |z_{21}|^{2(\Delta_{\alpha_3} - \Delta_{\alpha_1} - \Delta_{\alpha_2} - \Delta_{-\tilde{b}/2})} |z_3 - y_1|^{-4\Delta_{-\tilde{b}/2}} |1 - z|^{2(j_1+1)+\tilde{b}^2} \times \\ &\times \sum_{\eta=\pm} \left(|z|^{2(\Delta_{\alpha_3} - \eta\tilde{b}/2 - \Delta_{\alpha_3} + \Delta_{\eta\tilde{b}/2})} \tilde{C}_{\eta}^L(\alpha_3) C^L(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3 - \eta\tilde{b}/2) \times \right. \\ &\left. \times {}_2F_1(-j_3^{\eta} + j_1 + j_2 + 1, -j_3^{\eta} + j_1 - j_2, -2j_3^{\eta}, z) \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde

$$z_{ab} = z_a - z_b, \quad z = \frac{(z_1 - z_2)(y_1 - z_3)}{(z_1 - z_3)(y_1 - z_2)} \quad (4.14)$$

y $j^- = j$, $j^+ = -j - 1$. En (4.13), la función $C^L(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)$ corresponde a la constante de estructura de Liouville

$$C^L(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1) = (\pi\mu_L\gamma(\tilde{b}^2)\tilde{b}^{2-2\tilde{b}^2})^s \frac{\Upsilon'_b(0)}{\Upsilon_b(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - Q)} \prod_{i=1}^3 \frac{\Upsilon_b(2\alpha_i)}{\Upsilon_b(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_i)} \quad (4.15)$$

donde $s = 1 + \tilde{b}^{-2} - \tilde{b}^{-1}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$. Ver Apéndice C para definiciones y propiedades de $\Upsilon_b(x)$. Las constantes de estructura especiales $\tilde{C}_{\eta}^L(\alpha)$ en (4.13) vienen dadas por

$$\tilde{C}_{-}^L(\alpha) = (\pi\mu_L\gamma(\tilde{b}^2))^{\tilde{b}^2} \frac{\gamma(2\tilde{b}\alpha - 1 - \tilde{b}^2)}{\gamma(2\tilde{b}\alpha)} \quad \tilde{C}_{+}^L(\alpha) = 1 \quad (4.16)$$

Es relativamente fácil mostrar que (4.12) se transforma en

$$\begin{aligned} F^L(\alpha_1, \alpha_2, -\tilde{b}/2, \alpha_3) &= |z_{32}|^{2(\Delta_{\alpha_1} - \Delta_{\alpha_2} - \Delta_{\alpha_3} - \Delta_{-\tilde{b}/2})} |z_{31}|^{2(\Delta_{\alpha_2} - \Delta_{\alpha_1} - \Delta_{\alpha_3} - \Delta_{-\tilde{b}/2})} \times \\ &\times |z_{21}|^{2(\Delta_{\alpha_3} - \Delta_{\alpha_1} - \Delta_{\alpha_2} - \Delta_{-\tilde{b}/2})} |u|^{4\Delta_{-\tilde{b}/2}} |\mu_1|^{\tilde{b}^2} |\mu_2|^{\tilde{b}^2} |\mu_3|^{\tilde{b}^2} \times \\ &\times (-2\pi^2\tilde{b}) C^H(j_3, j_2, j_1) D^H[j, \mu] \end{aligned} \quad (4.17)$$

con $C^H(j_3, j_2, j_1) D^H[j, \mu]$ siendo la constante de estructura de H_3^+ WZNW halladas en [85, 69, 7] escritas en términos de la base μ introducida en [8]. Luego, si se multiplica (4.17) por Θ_3 , uno encuentra el acuerdo esperado, según se estableció en (4.2).

Para completar la demostración, debemos estudiar funciones de más puntos. Con este objeto, mostramos primero la relación entre la ecuación BPZ y la ecuación KZ, correspondientes a los lados derecho e izquierdo de (4.2) respectivamente. La ecuación BPZ satisfecha por las funciones de correlación de LFT que contiene campos degenerados $V_{-\tilde{b}/2}$ está dada por

$$\left[\frac{1}{\tilde{b}^2} \frac{\partial^2}{\partial y_r^2} + \sum_{s \neq r} \left(\frac{1}{y_r - y_s} \frac{\partial}{\partial y_s} + \frac{\Delta_{-\tilde{b}/2}}{(y_r - y_s)^2} \right) + \sum_s \left(\frac{1}{y_r - z_s} \frac{\partial}{\partial z_s} + \frac{\Delta_{\alpha_s}}{(y_r - z_s)^2} \right) \right] \Omega_{2n-2}^L = 0 \quad (4.18)$$

4. Aplicaciones I: Dualidad de Langlands en el modelo WZNW

donde Ω_{2n-2}^L denota la función de correlación de Liouville que aparece en 4.2. Por otro lado, la separación de variables de Sklyanin produce la siguiente forma para la ecuación KZ

$$\left[\frac{1}{\tilde{b}^2} \frac{\partial^2}{\partial y_a^2} + \sum_{r=1}^n \frac{1}{y_a - z_r} \left(\frac{\partial}{\partial z_r} + \frac{\partial}{\partial y_a} \right) - \sum_{b \neq a} \frac{1}{y_a - y_b} \left(\frac{\partial}{\partial y_a} - \frac{\partial}{\partial y_b} \right) + \sum_{r=1}^n \frac{\Delta_{j_r}}{(y_a - z_r)^2} \right] \Omega_n^H = 0 \quad (4.19)$$

donde Ω_n^H denota la la función de correlación de H_3^+ en 4.2.

Una observación crucial es que estas dos ecuaciones concuerdan una con otra después de twistear por Θ_n . Ahora bien, como las funciones de correlación de ambas teorías satisfacen la misma ecuación diferencial lineal, uno puede mostrar 4.2 tomando un límite particular $z_{12} \rightarrow 0$ y siguiendo el mismo argumento inductivo utilizado en [8].

En resumen, el mismo argumento utilizado en [8] lleva a la deducción de la relación dual (4.2). Nuestra formulación dual claramente implica la estrecha relación entre la auto-dualidad de Liouville ante $\tilde{b} \rightarrow \tilde{b}^{-1}(= b)$ y la dualidad de nivel de Langlands ante $k - 2 \rightarrow (k - 2)^{-1}$ en las funciones de correlación de $SL(2, \mathbb{R})_k$ WZNW. No debería ser complicado generalizar esto a las funciones de correlación que violan la conservación del número de winding y la las funciones de un-punto en el disco.

Hacemos incapié en que aunque nuestra fórmula dual luce como si fuese una mera reescritura de la fórmula original con la variable dual, no lo es. Es más bien una consecuencia de la dualidad de Liouville ante $b \rightarrow b^{-1}$. Por ejemplo, tuvimos que fijar la constante cosmológica *dual* a un valor particular y esta relación es diferente de la fórmula SRT original, cuyo origen será aclarado más adelante cuando discutamos la deducción mediante integral de camino. Dicho de otra forma, la demostración inductiva de la equivalencia entre la formulación SRT original y la dual presentada acá puede ser pensada como una deducción de la auto-dualidad LFT a nivel de las funciones de correlación de n -puntos. Como la auto-dualidad de Liouville no es trivial ⁵ y no ha sido demostrada en general, nuestra fórmula dual es de suyo, no trivial. Veremos que la existencia de tal fórmula conlleva como consecuencia a la dualidad de Langlands en las funciones de correlación de H_+^3 .

4.2.2. Deducción mediante integral de caminos

La fórmula SRT dual (4.2) también puede obtenerse a partir del enfoque de la integral de camino mediante el llamado operador de apantallamiento dual. Esta posibilidad ya había sido mencionada en [77]. El punto de partida es el modelo H_3^+ WZNW representado por la acción de campos libres

$$S_0 = \frac{1}{2\pi} \int d^2z (\partial\phi\bar{\partial}\phi + \beta\bar{\partial}\gamma + \bar{\beta}\partial\bar{\gamma}) \quad (4.20)$$

⁵Por ejemplo, se sabe que no se cumple en el caso de la función de partición en la esfera [42].

4.2. Versión dual de la fórmula SRT

donde el campo ϕ tiene una carga de fondo ⁶ $\hat{Q} = 1/\sqrt{k-2} = \tilde{b}^{-1}(= b)$, y añadiendo el operador de apantallamiento *dual*

$$S_s = \frac{1}{2\pi} \int d^2z (-\beta\bar{\beta})^{\tilde{b}^2} e^{\sqrt{2\tilde{b}}\phi} \quad (4.21)$$

Los operadores de vértice de $sl(2)_k$ en la base μ pueden ser realizados como

$$\Phi_j(\mu|z) = |\mu|^{2j+2} e^{\mu\gamma - \bar{\mu}\bar{\gamma}} e^{\sqrt{2\tilde{b}^{-1}}(j+1)\phi} \quad (4.22)$$

cuya dimensión conforme es $\Delta_j = -\tilde{b}^{-2}j(j+1)$. Para calcular el lado izquierdo de 4.2 y conectarlo explícitamente con el lado derecho, nos gustaría evaluar la integra de camino

$$\langle \prod_{i=1}^n \Phi_{j_i}(\mu_i|z_i) \rangle_{H_3^+} = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\gamma \mathcal{D}\bar{\gamma} \mathcal{D}\beta \mathcal{D}\bar{\beta} e^{-S_0 - S_s} \prod_{i=1}^n \Phi_{j_i}(\mu_i|z_i) \quad (4.23)$$

La integración sobre el campo γ (con una modificación de contorno conveniente) produce el vínculo de la función delta

$$\bar{\partial}\beta(w) = 2\pi \sum_{i=1}^n \mu_i \delta(w - z_i) \quad (4.24)$$

o, equivalentemente, la función integrada

$$\beta(w) = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{w - z_i} \quad (4.25)$$

con $\sum_{i=1}^n \mu_i = 0$. Luego, podemos introducir y_j y u de modo que

$$\beta(w) = u \frac{\prod_{j=1}^{n-2} (w - y_j)}{\prod_{i=1}^n (w - z_i)} \quad (4.26)$$

De la integración sobre el campo β se obtiene

$$\begin{aligned} & |u|^2 \delta\left(\sum_{i=1}^n \mu_i\right) \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2\pi} \int d^2w \left(\partial\phi\bar{\partial}\phi + |u|^{2\tilde{b}^2} \left|\prod_{t=1}^{n-2} (w - y_t) \prod_{i=1}^n (w - z_i)^{-1}\right|^{2\tilde{b}^2} e^{\sqrt{2\tilde{b}}\phi}\right)} \times \\ & \times \prod_{i=1}^n |\mu_i|^{2(j_i+1)} e^{\sqrt{2\tilde{b}^{-1}}(j_i+1)\phi} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Ahora, para remover el prefactor al frente de la interacción definimos un nuevo campo definimos un nuevo campo

$$\varphi(w) = \phi(w) + \sqrt{2\tilde{b}} \log |u|^2 + \sqrt{2\tilde{b}} \left(\sum_{j=1}^{n-2} \log |w - y_j|^2 - \sum_{i=1}^n \log |w - z_i|^2 \right) \quad (4.28)$$

⁶Formulamos la integral de camino en el espacio plano euclídeo. Un tratamiento cuidadoso del acoplamiento con la curvatura puede encontrarse en [77].

4. Aplicaciones I: Dualidad de Langlands en el modelo WZNW

Esto arroja la representación de la integral de camino

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_{i=1}^n \Phi_{j_i}(\mu_i | z_i) \right\rangle_{H_3^+} &= |\Theta_n|^2 \delta \left(\sum_{i=1}^n \mu_i \right) \int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{1}{2\pi} \int d^2w \left(\frac{1}{2} \partial\varphi \bar{\partial}\varphi + e^{\sqrt{2\tilde{b}}\varphi} \right)} \times \\ &\times \prod_{i=1}^n e^{(\sqrt{2\tilde{b}}^{-1}(j_i+1) + \frac{\sqrt{2\tilde{b}}}{2})\varphi(z_i)} \prod_{l=1}^{n-2} e^{-\frac{\sqrt{2\tilde{b}}}{2}\varphi(y_l)} \end{aligned} \quad (4.29)$$

donde la carga de fondo de φ viene dada por $Q = \tilde{b} + \tilde{b}^{-1}$. El corrimiento $\hat{Q} = \tilde{b}^{-1} \rightarrow Q = \tilde{b} + \tilde{b}^{-1}$ de la carga de fondo podría entenderse como que da cuenta del acoplamiento con la curvatura como en [77]. Notemos que el lado derecho de la ecuación de arriba corresponde a la función de $2n - 2$ -puntos de LFT que esperábamos. De esta manera, hemos obtenido la deducción mediante el método de integral de camino de la fórmula SRT dual.

Mirando hacia atrás, podríamos interpretar la fórmula dual a partir de la variable original b en lugar de \tilde{b} . Si hiciésemos esto, terminaríamos con la acción de Liouville con la interacción *dual* $e^{\sqrt{2b^{-1}}\phi}$. Esta es la razón por la cual debemos fijar la constante cosmológica dual (y no la constante cosmológica original) a un valor particular en 4.11. Esto claramente muestra que la carga del operador de apantallamiento dual en el modelo H_3^+ corresponde a la interacción de Liouville dual.

Aplicaciones II: Nuevas teorías conformes no-rationales

En este capítulo estudiaremos la relación (4.2) en el contexto de la generalización de la correspondencia SRT recientemente propuesta en [22]. Analizaremos la familia biparamétrica de CFT's no-rationales para mostrar que la versión dual de la fórmula SRT H_3^+ –Liouville discutida en el capítulo anterior puede interpretarse como un caso particular de teorías de campos conformes más generales. Calcularemos funciones de correlación para estas nuevas CFT's explícitamente.

5.1. Familia de CFT's Biparamétricas

Consideremos la siguiente cantidad propuesta por Ribault en [22]

$$\Omega_n^{(m)} = \delta^{(2)} \left(\sum_{i=1}^n \mu_i \right) |\Theta_n^{(m)}|^{2m^2} \left\langle \prod_{i=1}^n V_{\alpha_i}(z_i) \prod_{t=1}^{n-2} V_{-\frac{m}{2b}}(y_t) \right\rangle_{LFT} \quad (5.1)$$

donde m y b son dos parámetros continuos con valores reales. Las coordenadas u , z_i , y_r y μ_i están relacionadas a través del cambio de variables de Sklyanin (3.22), y la función $\Theta_n^{(m)}$ está definida por

$$\Theta_n^{(m)}(z_1, \dots, z_n | y_1, \dots, y_{n-2} | u) = \frac{u^{(\frac{1}{m} + b^{-2}(\frac{1}{m} - 1))} \prod_{r < s \leq n} (z_r - z_s)^{\frac{1}{2b^2}} \prod_{t < l \leq n-2} (y_t - y_l)^{\frac{1}{2b^2}}}{\prod_{r=1}^n \prod_{t=1}^{n-2} (z_r - y_t)^{\frac{1}{2b^2}}} \quad (5.2)$$

Tanto en (5.1), como en (4.2), la función de correlación en el lado derecho corresponde a una función de $2n - 2$ -puntos en LFT. Esta función de correlación involucra $2n - 2$ campos primarios exponenciales $V_\alpha(z) = e^{\sqrt{2}\alpha\varphi(z)}$, $n - 2$ de esos campos con momento $\alpha = -m/2b$.

En [76], se argumentó que $\Omega_n^{(m)}$ definido como en (5.1) podría interpretarse como una función de correlación de una cierta CFT, la cual está caracterizada por m y b . Esto

5. Aplicaciones II: Nuevas teorías conformes no-rationales

significa que $\Omega_n^{(m)}$ podría escribirse como

$$\Omega_n^{(m)} = \left\langle \prod_{i=1}^n \Phi_{j_i}(\mu_i | z_i) \right\rangle_{CFT} \quad (5.3)$$

donde $\Phi_j(\mu|z)$ correspondería a operadores primarios de una CFT. La existencia de esta CFT se conjetura y se la considera “resoluble” en sentido que sus funciones de correlación son conocidas una vez dada la representación LFT (5.1).

En cambio, (5.1) se piensa como una definición de una familia biparamétrica de una nuevas CFT’s no-rationales. La teoría H_3^+ WZNW corresponde a un caso particular $m = 1$ así como (5.1) se reduce a la correspondencia H_3^+ –Liouville de [8]. Por otro lado, se obtiene LFT en el caso trivial $m = 0$. Vale la pena mencionar que la versión dual de la fórmula SRT que hemos deducido en la sección 2 se obtiene en $m = b^2$ en (5.1). De hecho, en este caso, el lado derecho de (5.1) coincide con el lado derecho de (4.2).

5.1.1. Representación de Campos Libres

En [22], se obtuvo una representación lagrangiana de esta familia de CFT’s generalizando el método de integral de camino de [77]. El lagrangiano para la CFT en la cual (5.3) son sus funciones de correlación está dado por la acción

$$S[\lambda] = \frac{1}{2\pi} \int d^2z \left(\partial\phi\bar{\partial}\phi + \beta\bar{\partial}\gamma + \bar{\beta}\partial\bar{\gamma} + \frac{Q_m}{2\sqrt{2}}R\phi + 2\pi\lambda(-\beta\bar{\beta})^m e^{\sqrt{2}b\phi} \right) \quad (5.4)$$

con carga de fondo $Q_m = b + b^{-1}(1 - m)$. Acá, λ representa una constante de acoplamiento real cuyo valor específico es controlado por el modo cero de ϕ . No es difícil verificar que el término de interacción $(-\beta\bar{\beta})^m e^{\sqrt{2}b\phi}$ tiene dimensión conforme $(1, 1)$. La realización (5.4) es reminiscente de la representación lagrangiana del modelo $SL(2, \mathbb{R})_k$ WZNW. De hecho, (5.4) coincide con la representación de campos libres de Wakimoto del modelo $SL(2, \mathbf{R})_k$ en el caso particular $m = 1$ ($m = b^2 (= \tilde{b}^2 = k - 2)$), donde el nivel k de WZNW está dado por $k = b^{-2} + 2$ (resp. $k = b^2 + 2$).

La realización lagrangiana (5.4) nos permite estudiar el álgebra de simetrías que subyace a la CFT resoluble [22], la cual es generada por el tensor de energía-impulsos

$$T(z) = -\beta(z)\partial\gamma(z) - \frac{1}{2}(\partial\phi(z))^2 + (b + b^{-1}(1 - m))\partial^2\phi(z) \quad (5.5)$$

y el álgebra de Borel de la siguiente representación del álgebra afín $\hat{sl}(2)_k$

$$J^+(z) = \beta(z) \quad (5.6)$$

$$J^-(z) = \beta(z)\gamma^2(z) - \sqrt{2}mb^{-1}\gamma(z)\partial\phi(z) + (m^2b^{-2} + 2)\partial\gamma(z) \quad (5.7)$$

$$J^3(z) = -\beta(z)\gamma(z) + \frac{1}{\sqrt{2}}mb^{-1}\partial\phi(z) \quad (5.8)$$

5.1. Familia de CFT's Biparamétricas

Aquí, como de costumbre, los campos β y γ forman un sistema de fantasmas conmutantes mientras que el campo ϕ es un bosón libre con carga de fondo $Q_m = (b + b^{-1}(1 - m))$. Estos campos tienen propagadores no-nulos dados por

$$\langle \beta(z)\gamma(w) \rangle = (z - w)^{-1}, \quad \langle \phi(z, \bar{z})\phi(w, \bar{w}) \rangle = -\log|z - w|^2 \quad (5.9)$$

La carga central asociada al tensor de energía-momento (5.5) está dada por $c = 3 + 6Q_m^2$. Vale la pena notar que el término de interacción $(-\beta\bar{\beta})^m e^{\sqrt{2b}\phi}$ en (5.4) conmuta con (5.5) para cualquier valor de m pero sólo conmuta con las corrientes (5.6)-(5.8) para $m = 1$ y $m = b^2$. En particular, la expansión en producto de operadores (OPE) con $J^-(z)$ se escribe

$$J_{(z)}^- \beta_{(w)}^m e^{\sqrt{2b}\phi(w)} \sim \frac{m}{(z - w)^2} \left((m^2 b^{-2} - m + 1) \beta^{m-1} e^{\sqrt{2b}\phi} + (z - w)(\sqrt{2m} b^{-1} \partial\phi\beta + (m - 1)\partial\beta) \beta^{m-2} e^{\sqrt{2b}\phi} \right) + \dots \quad (5.10)$$

que en los casos $m = 1$ y $m = b^2$ representan derivadas totales

$$\begin{aligned} J_{(z)}^- \beta_{(w)} e^{\sqrt{2b}\phi(w)} &\sim b^{-2} \partial_w \frac{e^{\sqrt{2b}\phi(w)}}{(z - w)} + \dots \\ J_{(z)}^- \beta_{(w)}^{b^2} e^{\sqrt{2b}\phi(w)} &\sim b^{+2} \partial_w \frac{\beta_{(w)}^{b^2-1} e^{\sqrt{2b}\phi(w)}}{(z - w)} + \dots \end{aligned} \quad (5.11)$$

respectivamente. Como resultado, para valores genéricos de m y b , las simetrías de la teoría (5.4) resultan ser generadas por la corriente de Virasoro $T(z)$ y la subálgebra generada por $J^+(z)$ and $J^3(z)$.

La formulación lagrangiana (5.4) también proporciona la forma explícita de los operadores primarios $\Phi_j(\mu|z)$, a saber

$$\Phi_j(\mu|z) = |\mu|^{2m(j+1)} e^{\mu\gamma(z) - \bar{\mu}\bar{\gamma}(\bar{z})} e^{\sqrt{2b}(j+1)\phi(z, \bar{z})} \quad (5.12)$$

Estos son campos primarios de Virasoro de dimensión

$$\Delta_j = -(j + 1)(b^2 j + m - 1) \quad (5.13)$$

con respecto al tensor de energía-momento (5.5). Notemos que el momento j_i y el momento de Liouville α_i en (5.1) se relacionan mediante $\alpha_i = b(j_i + 1 + mb^{-2}/2)$.

Es natural considerar la siguiente representación para los operadores de vértice

$$\Phi_{j,p,\bar{p}}(z) \sim \gamma_{(z)}^{p-m(j+1)} \bar{\gamma}_{(\bar{z})}^{\bar{p}-m(j+1)} e^{\sqrt{2b}(j+1)\phi(z, \bar{z})} \quad (5.14)$$

Nuevamente, esto es reminiscente de la representación de campos libres de Wakimoto del modelo $SL(2, \mathbb{R})_k$, y se obtiene la relación

$$\Phi_{j,p,\bar{p}}(z) = \frac{\Gamma(1 + p - m(j + 1))}{\Gamma(m(j + 1) - \bar{p})} \int d^2\mu \mu^{-p-1} \bar{\mu}^{-\bar{p}-1} \Phi_j(\mu|z) \quad (5.15)$$

5. Aplicaciones II: Nuevas teorías conformes no-rationales

La relación entre las bases $\Phi_{j,p,\bar{p}}(z)$ y $\Phi_j(\mu|z)$ se sigue de las relaciones funcionales $\Gamma(n)\Gamma(1-n) = (-)^n\Gamma(0)$ y $\int ds e^{-st}s^{x-1} = t^{-x}\Gamma(x)$. Los operadores (5.14) obedecen el siguiente OPE con respecto al álgebra de corrientes (5.6)-(5.8)

$$\begin{aligned} J^\pm(z)\Phi_{j,p,\bar{p}}(w) &\sim \frac{p_i \mp m(j_i + 1)}{(z-w)} \Phi_{j,p \mp 1, \bar{p}}(w) + \dots \\ J^3(z)\Phi_{j,p,\bar{p}}(w) &\sim \frac{-p_i}{(z-w)} \Phi_{j,p,\bar{p}}(w) + \dots \end{aligned} \quad (5.16)$$

de manera que, en particular, estos son primarios de Kac-Moody ante la subálgebra de Borel generada por $J^+(z)$ y $J^3(z)$, que son simetrías del sistema.

En resumen, la versión dual de la correspondencia H_3^+ -Liouville que se discutió en el capítulo anterior corresponde a un caso particular en la representación lagrangiana (5.4), aquella con $m = b^2 = k - 2$. Esto implica que la teoría H_3^+ WZNW resulta estar doblemente representada dentro de la familia de CFT's propuesta en [76]. El modelo H_3^+ está representado por dos curvas distintas en el espacio de parámetros, y fijar el nivel k corresponde a fijar un punto en cada curva. Una curva se relaciona con la otra mediante la dualidad de nivel $k - 2 \rightarrow (k - 2)^{-1}$, y esto está en completo acuerdo con las representaciones de campos libres consideradas en la literatura. La idea que nos gustaría sugerir es que, presumiblemente, esta doble representación de las CFT's dentro de la familia biparamétrica de [76] es un hecho más general, y no sólo le ocurre a la teoría H_3^+ WZNW. De hecho, la estructura de las identidades de Ward conformes sugiere que la CFT correspondiente al caso $m = n$ (para un número entero y positivo $n \in \mathbf{Z}_{>0}$) coincide con aquella correspondiente al caso $m = nb^2$. Más aún, notemos que la función $|\Theta_n^{(m)}|^{2m^2}$ en (5.1) es tal que el cambio $m \rightarrow mb^2$ siempre puede reinterpretarse como la inversión $b \rightarrow b^{-1}$ pero dejando m fijo; y lo mismo sucede con los campos auxiliares $V_{-m/2b}$ en el lado derecho de (5.1).

Así, asumiendo la auto-dualidad de Liouville uno es inducido a concluir que ambos casos $m = n$ y $m = nb^2$ corresponden a la misma CFT. Sería interesante explorar estos aspectos, pues produciría una generalización de lo que la dualidad de nivel de Langlands es para la teoría de WZNW.

Antes de adentrarnos en el cálculo explícito de las funciones de correlación, nos gustaría mencionar un tema abierto sobre las CFT's descritas por (5.4). Este es la pregunta sobre la identificación de tales CFT's. Estas teorías probablemente corresponden realmente a CFT's pero, cuáles son estas CFT's? Recientemente comentamos que el caso particular $m = b^2$ también corresponde a la teoría H_3^+ WZNW; sin embargo, analizar en detalle otros casos particulares parece ser un problema sustancialmente más arduo. Lo que sabemos con certeza sobre las CFT's propuestas en [76] es que probablemente existan, y que un subconjunto de sus observables están dados por (5.1). No obstante, parece una tarea complicada intentar una clasificación, o identificar más casos particulares. También podríamos preguntarnos si se necesitarían funciones de correlación adicionales a aquellas en (5.1)-(5.3) para caracterizar completamente al conjunto de observables. Por ejemplo, sabemos que justamente este es el caso para $m = 1$ y $m = b^2$, donde los sectores con flujo espectral requieren una cantidad distinta de campos de Liouville en el lado derecho

5.1. Familia de CFT's Biparamétricas

de (5.1). Dado que la simetría de flujo espectral también es un automorfismo del álgebra remanente generada por $J^{3,-}(z)$ y $T(z)$, es probable que una cantidad distinta de inserciones de Liouville en (5.1) también corresponda a funciones de correlación bien definidas de las teorías descritas por (5.4). Esto ciertamente merece un análisis ulterior. En la siguiente subsección estudiamos la forma explícita de las funciones de correlación con el objeto de poner de manifiesto algunas características de estas CFT's hipotéticas.

5.1.2. Funciones de Correlación

Comparemos las funciones de correlación de las CFT's definidas por (5.4). Estudiamos las funciones de correlación de n -puntos (5.3) en la base p

$$\Omega_n^{(m)} = \left\langle \prod_{i=1}^n \Phi_{j_i, p_i, \bar{p}_i}(z_i) \right\rangle_{CFT} \quad (5.17)$$

que están definidas por

$$\Omega_n^{(m)} = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\gamma \mathcal{D}\bar{\gamma} \mathcal{D}\beta \mathcal{D}\bar{\beta} e^{-S[\lambda]} \prod_{i=1}^n \gamma_{(z_i)}^{p_i - m(j_i+1)} \bar{\gamma}_{(\bar{z}_i)}^{\bar{p}_i - m(j_i+1)} e^{\sqrt{2}b(j_i+1)\phi(z_i, \bar{z}_i)} \quad (5.18)$$

Después de haber integrado en los modos cero, la función de correlación puede escribirse como

$$\begin{aligned} \Omega_n^{(m)} &= (-1)^{ms} \lambda^s b^{-1} \Gamma(-s) \delta \left(\sum_{i=1}^n j_i + n + s - 1 - b^{-2}(1-m) \right) \times \\ &\times \int \prod_{r=1}^s d^2 w_r \int \tilde{\mathcal{D}}\phi \mathcal{D}\gamma \mathcal{D}\bar{\gamma} \mathcal{D}\beta \mathcal{D}\bar{\beta} e^{-S[\lambda=0]} \prod_{r=1}^s \beta_{(w_r)}^m e^{\sqrt{2}b\phi(w_r)} \times \\ &\times \prod_{i=1}^n \gamma_{(z_i)}^{p_i - m(j_i+1)} e^{\sqrt{2}b(j_i+1)\phi(z_i)} \times c.c. \end{aligned} \quad (5.19)$$

donde *c.c.* refiere a la contribución del complejo conjugado y la medida de integración $\tilde{\mathcal{D}}\phi$ en la segunda línea debe ser entendida como aquella que excluye al modo cero. La integración en el modo cer de ϕ produce la primera línea en (5.19), suponiendo la condición

$$\sum_{r=1}^n j_r + n + s = 1 + b^{-2}(1-m) \quad (5.20)$$

la cual, combianda con el teorema de Riemann-Roch produce

$$\sum_{r=1}^n \bar{p}_r = \sum_{r=1}^n p_r = (mb^{-2} - 1)(1-m) \quad (5.21)$$

Como ocurre frecuentemente en las teorías no racionales la expresión (5.19) debe entenderse formalmente: Como las configuraciones cinemáticas en (5.20) pueden devenir en valores no enteros s de cargas de apantallamiento, las integrales y los productos en (5.19) (y en consecuencia las contracciones de Wick, ver también [86]) generalmente no

5. Aplicaciones II: Nuevas teorías conformes no-rationales

parecen estar bien definidas. No obstante, estas son características comunes en las CFT's no-rationales y afortunadamente las continuaciones analíticas de tales expresiones están bajo control. Además, para valores enteros positivos de s , el factor $\Gamma(-s)$ en (5.19) diverge. Esta divergencia se interpreta como debida a la calidad no compacta del espacio target como en el caso de LFT [47].

Haciendo contracciones de Wick en (5.19), encontramos la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \Omega_n^{(m)} &= (-1)^{ms} \lambda^s b^{-1} \Gamma(-s) \delta \left(\sum_{i=1}^n j_i + n + s - 1 - b^{-2}(1-m) \right) \times \\ &\times \prod_{a < b \leq n} |z_{ab}|^{-4b^2(j_a+1)(j_b+1)} \int \prod_{r=1}^s d^2 w_r \prod_{r < t \leq s} |w_r - w_t|^{-4b^2} \times \\ &\times \prod_{r=1}^s \prod_{a=1}^n |z_a - w_r|^{-4b^2(j_a+1)} \times \sum_{(i,r)} \prod_{r=1}^s \prod_{i=1}^n w_i^r (z_i - w_r)^{-c_i^r} \times c.c. \end{aligned} \quad (5.22)$$

donde la suma $\sum_{(i,r)}$ corre sobre las distintas elecciones de pares (i, r) entre $ms - 1$, y con $i = 1, \dots, n$ mientras $r = 1, \dots, s$. Estas contribuciones corresponden a distintas combinaciones cuando se hacen las contracciones de Wick de los campos β - γ , y los coeficientes w_i^r son los factores de multiplicidad que cuentan las distintas formas de contraer los campos c_i^r eligiendo aquellos entre $r \leq s$ y $i \leq p_i - m(j_i + 1)$.

Ahora enfoquémonos en la función de tres-puntos, la cual genéricamente toma la forma

$$\left\langle \prod_{i=1}^{n=3} \Phi_{j_i, p_i, \bar{p}_i}(z_i) \right\rangle_{CFT} = |z_{12}|^{2(\Delta_{j_3} - \Delta_{j_1} - \Delta_{j_2})} |z_{13}|^{2(\Delta_{j_2} - \Delta_{j_3} - \Delta_{j_1})} |z_{23}|^{2(\Delta_{j_1} - \Delta_{j_2} - \Delta_{j_3})} \times C_{(j_1, j_2, j_3 | p_1, p_2, p_3)}^{(m)} \quad (5.23)$$

donde $C_{(j_1, j_2, j_3 | p_1, p_2, p_3)}^{(m)}$ representa la constante de estructura. Aquí nos concentraremos en el caso $p_2 = \bar{p}_2 = m(1 + j_2)$ dado que así el cálculo se facilita drásticamente: la contracción de Wick del sistema γ - β puede realizarse sin el recurso de las combinatorias abstrusas. Sin embargo, el cálculo para el caso genérico puede hacerse mediante una adaptación apropiada de los resultados de [87]. Veamos por ejemplo Ec. (2.15) de [87], y cf. Eq. (3.20) en [68]. No trataremos aquí el caso $p_2 \neq m(1 + j_2)$.

Calculemos $C_{(j_1, j_2, j_3 | p_1, m(1+j_2), p_3)}^{(m)}$. Con el fin de hacer esto primero necesitamos calcular las contracciones de Wick

$$\begin{aligned} W_{(j_1, j_2, j_3 | p_1, m(1+j_2), p_3)}^{(m)} &= \int \prod_{r=1}^s d^2 w_r \times \\ &\times \left\langle e^{\sqrt{2}b(j_1+1)\phi(0)} e^{\sqrt{2}b(j_2+1)\phi(1)} e^{\sqrt{2}b(j_3+1)\phi(\infty)} \prod_{r=1}^s e^{\sqrt{2}b\phi(w_r, \bar{w}_r)} \right\rangle_{\lambda=0} \\ &\times \left\langle \gamma_{(0)}^{p_1 - m(j_1+1)} \gamma_{(\infty)}^{p_3 - m(j_3+1)} \prod_{r=1}^s \beta_{(w_r)}^m \right\rangle_{\lambda=0} \left\langle \bar{\gamma}_{(0)}^{\bar{p}_1 - m(j_1+1)} \bar{\gamma}_{(\infty)}^{\bar{p}_3 - m(j_3+1)} \prod_{r=1}^s \bar{\beta}_{(\bar{w}_r)}^m \right\rangle_{\lambda=0} \end{aligned} \quad (5.24)$$

donde el subíndice $\lambda = 0$ refiere al hecho que esas funciones de correlación están definidas en términos de la acción libre $S[\lambda = 0]$. Las técnicas estándares de campos libres nos permiten escribir

$$W_{(j_1, j_2, j_3 | p_1, m(1+j_2), p_3)}^{(m)} = \frac{\Gamma(1 - m(j_1 + 1) + \bar{p}_1) \Gamma(1 - m(j_3 + 1) + p_3)}{\Gamma(m(j_1 + 1) - p_1) \Gamma(m(j_3 + 1) - \bar{p}_3)} \times$$

5.1. Familia de CFT's Biparamétricas

$$\times \int \prod_{r=1}^s d^2 w_r \prod_{r=1}^s |w_r|^{-4b^2(j_1+1)-2m} |1-w_r|^{-4b^2(j_2+1)} \prod_{r<t \leq s} |w_r-w_t|^{-4b^2} \quad (5.25)$$

Las funciones Γ en la primera línea vienen del factor de multiplicidad al contraer los campos del sistema β - γ . Esta contribución puede obtenerse como en [59] generalizando el procedimiento en [68]. Esto produce

$$\left\langle \gamma_{(0)}^{p_1-m(j_1+1)} \gamma_{(\infty)}^{p_3-m(j_3+1)} \prod_{r=1}^s \beta_{(w_r)}^m \right\rangle = \lim_{w_i^{(t)} \rightarrow w_i^{(1)} = w_i} \mathcal{P}^{-1} \frac{\partial^{ms} \mathcal{P}}{\partial w_1^{(1)} \dots \partial w_1^{(m)} \dots \partial w_s^{(1)} \dots \partial w_s^{(m)}} \quad (5.26)$$

con

$$\mathcal{P} = \prod_{r=1}^s \prod_{t=1}^m (w_r^{(t)})^{m(j_1+1)-p_1} \prod_{r<l} (w_r^{(t)} - w_l^{(t)}) \quad (5.27)$$

Aquí regulamos la función de correlación mediante el método de *point-splitting* para la inserción de puntos de operadores de apantallamiento como $\beta_{(w_r)}^m \rightarrow \prod_{t=1}^m \beta_{(w_r^{(t)})}$, tomando ms puntos distintos como $w_r^{(t)}$, con $r = 1, \dots, s$ y $t = 1, \dots, m$, y luego tomando el límite de coincidencia $w_r^{(t)} \rightarrow w_r^{(t-1)} \rightarrow \dots \rightarrow w_r^{(2)} \rightarrow w_r^{(1)} = w_r$. De esta manera, para un caso particular $p_i = \bar{p}_i$, uno obtiene

$$\left| \left\langle \gamma_{(0)}^{p_1-m(j_1+1)} \gamma_{(\infty)}^{p_3-m(j_3+1)} \prod_{r=1}^s \beta_{(w_r)}^m \right\rangle \right|^2 = (-1)^{ms} \gamma(1-m(j_1+1)+p_1) \times \\ \times \gamma(1-m(j_3+1)+p_3) \prod_{r=1}^s |w_r|^{-2m} \quad (5.28)$$

Por otro lado, la integral generalizada de Selberg en la segunda línea de (5.25) puede calcularse usando la fórmula (D.10) del Apéndice C, desarrollada por Dotsenko y Fateev en [49]. El resultado toma la forma

$$C_{(j_1, j_2, j_3 | p_1, m(1+j_2), p_3)}^{(m)} = b^{-1} \lambda^s \pi^s \Gamma(-s) \Gamma(s+1) \gamma^s (1+b^2) \delta \left(\sum_{i=1}^n j_i + n + s - 1 - b^{-2}(1-m) \right) \times \\ \times \frac{\Gamma(1-m(j_1+1)+\bar{p}_1) \Gamma(1-m(j_3+1)+p_3)}{\Gamma(m(j_1+1)-p_1) \Gamma(m(j_3+1)-\bar{p}_3)} \prod_{r=0}^{s-1} \frac{\gamma(-(r+1)b^2) \gamma(b^2(j_1-j_3+j_2+1+r))}{\gamma(b^2(2j_1+2+r)+m) \gamma(b^2(2j_2+2+r))} \quad (5.29)$$

Con el fin de encontrar resultados generales es necesario hacer una continuación analítica de esta expresión, incorporando también las configuraciones que producen s no enteros. Tal continuación analítica se hace pidiendo que el residuo de la expresión exacta evaluado en $s = -2 + b^{-2}(1-m) - j_1 - j_2 - j_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ coincida con (5.29). La continuación analítica produce

$$C_{(j_1, j_2, j_3 | p_1, m(1+j_2), p_3)}^{(m)} = (\pi \lambda b^{-2} \gamma(b^2))^s \frac{\Gamma(1-m(j_1+1)+\bar{p}_1) \Gamma(1-m(j_3+1)+p_3)}{b \Gamma(m(j_1+1)-p_1) \Gamma(m(j_3+1)-\bar{p}_3)} \times \\ \times \frac{G(1+j_1+j_2+j_3+(m-2)b^{-2}) G(j_1-j_2+j_3+(m-1)b^{-2})}{G(2j_1+1+(m-1)b^{-2}) G(2j_3+1+(m-1)b^{-2})} \times \\ \times \frac{G(-j_1+j_2+j_3-b^{-2}) G(j_1+j_2-j_3-b^{-2})}{G(-1) G(2j_2+1-b^{-2})} \quad (5.30)$$

5. Aplicaciones II: Nuevas teorías conformes no-rationales

donde $s = -2 - j_1 - j_2 - j_3 + (1 - m)b^{-2}$, y la definición de la función G puede encontrarse en el Apéndice C. Para deducir esta expresión uno usa la relación funcional

$$\gamma(-rb^2) = \frac{\Gamma(-rb^2)}{\Gamma(1 + rb^2)} = \frac{G(r)}{G(r-1)} \quad (5.31)$$

La expresión (5.30) da la función de tres-puntos para el caso ¹ $p_2 = \bar{p}_2 = m(j_2 + 1)$, para valores genéricos de m y b . Por supuesto, cuando $m = 1$ esta expresión coincide con aquella del modelo $SL(2, \mathbb{R})_k$ WZNW para el caso donde uno de los operadores de vértice viene dado por la representación de peso máximo de $SL(2, \mathbb{R})$ (con la identificación $k = b^{-2} + 2$). En [59], se mostró cómo esto reproduce la transformada de Melin de las funciones de tres-puntos de [85, 69, 7]. Más precisamente, considerando $m = 1$ en (5.30) y la relación funcional $G(x) = \gamma(-x)(k-2)^{(2x+1)}G(x+2-k)$, uno encuentra las Ecs. (60)-(62) de [59], las cuales reproducen el resultado esperado. Aún más remarcable es el hecho que, el mismo resultado se obtiene para el caso $m = b^2 = k - 2$, como se discutió en [59], ver Ec. (50) allí. A modo de check de consistencia más simple, uno puede verificar también que $m = 0$ en (5.30) reproduce la función de correlación de tres campos exponenciales de la forma $e^{\sqrt{2}\alpha_i\varphi(z_i)}$ de la teoría de campos de Liouville, con $\alpha_i = b(j_i + 1)$; digamos $C_{(j_1, j_2, j_3)}^{(m=0)} = C^L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ escribiendo $G(x)$ en términos de $\Upsilon(x)$ usando (D.3) del Apéndice C (ignorando contribuciones del sistema β - γ).

Un comentario interesante en este punto es que si especificamos $m = b^2 (= \tilde{b}^2 = k - 2)$ en (5.2), y lo comparamos con la definición (4.4), obtenemos la relación²

$$|\Theta_n^{(b^2)}|^{2b^4} = |\Theta_n|^2 \quad (5.32)$$

Esto implica que $m = b^2$ en (5.4) produce una representación alternativa de la teoría H_3^+ WZNW. Nosotros notamos que esta representación era la misma empleada en [59] para calcular explícitamente la función de tres-puntos. Cuando el término de interacción (5.4) $m = b^2$ corresponde a la carga de apantallamiento dual (4.21), digamos $S_s \sim \int d^2z \beta^{k-2} \bar{\beta}^{k-2} e^{\sqrt{2k-4}\phi}$, donde la relación con el nivel WZNW es ahora $m = b^2 = k - 2$. Tiene que ser comparado con el caso $m = 1$ en (5.4), el cual corresponde a la representación de Wakimoto estándar con operador de apantallamiento $S_s \sim \int d^2z \beta \bar{\beta} e^{\sqrt{\frac{2}{k-2}}\phi}$, con $b^2 = (k-2)^{-1}$. Notemos que la relación entre el parámetro de Liouville b y el nivel de WZNW k difiere en cada caso; uno se relaciona con el otro a través de $k - 2 \rightarrow (k - 2)^{-1}$. Esto muestra que en el contexto de la correspondencia H_3^+ - Liouville la dualidad de Langlands resulta ser inducida por la auto-dualidad de Liouville ante $b \rightarrow b^{-1}$.

La estructura de polos de (5.30) puede analizarse de la siguiente manera: la función $G(x)$ desarrolla polos en

$$x = p + qb^{-2}, \quad x = -(p+1) - (q+1)b^{-2} \quad (5.33)$$

¹Entender la configuración cinemática $p_i = m(j_i + 1)$ en general requeriría del análisis del espectro de la CFT correspondiente para valores genéricos de m y b .

²En particular, en el caso $m = 1$ la función $\Theta_n^{(1)}$ coincide con la función Θ_n de [8].

5.1. Familia de CFT's Biparamétricas

para cualquier par de enteros positivos $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Esto implica que la expresión (5.30) presenta polos en

$$\begin{aligned} -j_1 + j_2 + j_3 &= p + (q+1)b^{-2} & -j_1 + j_2 + j_3 &= -(p+1) - qb^{-2} \\ j_1 + j_2 - j_3 &= p + (q+1)b^{-2} & j_1 + j_2 - j_3 &= -(p+1) - qb^{-2} \end{aligned}$$

y en

$$\begin{aligned} j_1 - j_2 + j_3 &= p + (q+1-m)b^{-2}, & j_1 - j_2 + j_3 &= -(p+1) - (q+m)b^{-2} \\ j_1 + j_2 + j_3 &= p-1 + (q+2-m)b^{-2} & j_1 + j_2 + j_3 &= -(p+2) - (q+m-1)b^{-2} \end{aligned}$$

Vale la pena notar que estas condiciones sobre los polos permanecen intalteradas si uno realiza los cambios $m \rightarrow -mb^2$, $j_i \rightarrow -b^{-2}j_i$, y luego reemplaza b^2 por b^{-2} . Esta es en realidad una manifestación de la dualidad de nivel ante $k-2 \rightarrow (k-2)^{-1}$. Las propiedades de la función de tres-puntos ante la dualidad de nivel puede entenderse introduciendo la función dual $\tilde{G}(x)$, ver (D.8) en el Apéndice C, la cual presenta polos en $x = p+q b^2$ y en $x = -(p+1) - (q+1) b^2$, en lugar de (5.33). Así, teniendo en cuenta la relación funcional $\tilde{G}(xb^2) = b^{2b^2x(x+b^{-2}+1)}G(x)$, uno encuentra que la expresión (5.30) puede escribirse en términos de otra cantidad análoga pero para el parámetro inverso b^{-1} redefinición apropiada de las variables de spin j_i .

Por otro lado, la contribución a los polos proveniente de las funciones Γ en la primera línea de (5.30) son de una naturaleza distinta, ya que estas dependen del momento p_i . Las condiciones de polos que dependen de p_i tienen que ver con las potencia específica de los campos γ en la forma funcional de los operadores de vértice (5.14), mientras que las condiciones para los polos escritas arriba no dependen de estas potencias específicas $p_i - m(j_i + 1)$.

La función de dos-puntos también puede obtenerse a partir de (5.30) usando la relación funcional

$$\lim_{j_2 \rightarrow -1} \frac{G(-j_1 + j_3 + j_2 - b^{-2}) G(j_1 - j_3 + j_2 - b^{-2})}{G(-1)G(2j_2 + 1 - b^{-2})} = 2\pi b^{-2} \delta(j_1 - j_3) \quad (5.34)$$

En el límite $j_2 \rightarrow -1$, el operador $\Phi_{j_2, p_2, p_2}(z_2)$ se aproxima al operador identidad, pudiéndose escribir como

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{j_1, p_1, \bar{p}_1}(z_1) \Phi_{j_3, p_3, \bar{p}_3}(z_3) \rangle_{CFT} &\sim |z_{13}|^{-2\Delta_{j_1}} (\pi \lambda b^2 \gamma(b^2))^s \gamma(-s) \gamma(1 + b^2 s) \delta(j_1 - j_3) \times \\ &\times \frac{\Gamma(1 - m(j_1 + 1) + \bar{p}_1) \Gamma(mb^{-2}(1 - m) - mj_1 - p_1)}{\Gamma(m(j_1 + 1) - p_1) \Gamma(1 + mb^{-2}(m - 1) + mj_1 + \bar{p}_1)} \end{aligned} \quad (5.35)$$

donde ahora $s = -1 - 2j_1 + b^{-2}(1 - m)$, y, de acuerdo con (5.21), tenemos $p_3 = (mb^{-2} - 1)(1 - m) - p_1$. Se sabe que el límite $j_2 \rightarrow -1$ de la función de tres-puntos coincide con la función de dos puntos a menos de factores dependientes de b [68, 59]. Además, notemos que también deberíamos tomar el límite $j_2 \rightarrow b^{-2}(1 - m)$ en (5.30), y esto debería reproducir una función de dos-puntos. Esto se debe a que el operador $\Phi_{j_2=b^{-2}(1-m)}$

5. Aplicaciones II: Nuevas teorías conformes no-rationales

también corresponde a un operador de dimensión cero que puede considerarse como una representación conjugada (en particular, el reflejado de Weyl) del operador identidad. Esto es análogo a lo que sucede en el modelo $SL(2, \mathbb{R})_k$ WZNW con los operadores $\Phi_{j_2=0}$ y $\Phi_{j_2=-1}$; en tanto que insertar estos operadores en la función de tres-puntos lleva al coeficiente de reflexión $\sim R^H(j_1)\delta(j_1 - j_2)$, insertar los otros lleva ³ al “término no reflejado” $\sim \delta(j_1 + j_2 + 1)$. En el caso general (digamos m genérico), la generalización de la reflexión de Weyl está dada por $j \rightarrow -1 - j - b^{-2}(m - 1)$, que deja invariante la dimensión conforme (5.13). De esta manera, el límite $j_2 \rightarrow b^{-2}(1 - m)$ da $s = 0$ y en consecuencia produce la expresión

$$\langle \Phi_{j_1, p_1, \bar{p}_1}(z_1) \Phi_{j_3, p_3, \bar{p}_3}(z_3) \rangle_{CFT} \sim |z_{13}|^{-2\Delta_{j_1}} \delta(j_1 + j_3 + 1 + b^{-2}(m - 1)) \quad (5.36)$$

Esta expresión puede obtenerse de (5.35) reemplazando $j_3 \rightarrow -1 - j_3 - b^{-2}(m - 1)$ antes de evaluar la función $\delta(j_1 - j_3)$. En resumen, (5.35) y (5.36) dan todas las contribuciones a la función de dos puntos.

Las técnicas de campos libres empleadas en el cálculo de (5.30) nos permiten también discutir la función de cero-punto. La función de partición en la esfera (*i.e.* con $g = 0$), puede obtenerse calculando la función de tres-puntos sin operadores de vértice y donde, en cambio, se insertaron operadores de apantallamiento en puntos fijos y luego se integraron las restantes $s - 3$ inserciones

$$Z^{(m)} = (-)^{l(m+1)} \frac{\lambda^{l+3}}{b} \Gamma(-l-3) \prod_{r=1}^l \int d^2 w_r \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\lambda=0]} e^{\sqrt{2}b\phi(0)} e^{\sqrt{2}b\phi(1)} e^{\sqrt{2}b\phi(\infty)} \prod_{r=1}^l e^{\sqrt{2}b\phi(w_r)} \quad (5.37)$$

con $l = s - 3 = -2 + b^{-2}(1 - m)$. Así, las reglas usuales de Wick nos llevan a escribir

$$Z^{(m)} = (-)^{l(m+1)} b^{-1} \lambda^{3+l} \Gamma(-l-3) \prod_{r=1}^l \int d^2 w_r \left(\prod_{r=1}^l |w_r|^{-4b^2} |1 - w_r|^{-4b^2} \prod_{r < t}^{l-1, l} |w_t - w_r|^{-4b^2} \right) \quad (5.38)$$

Una vez más, esto puede resolverse para l entero usando el resultado de [48]. Luego de manipular un poco las funciones Γ y los índices de las productorias, la función de partición puede escribirse según

$$Z^{(m)} = \frac{(1 - m - b^2) ((-)^{m+1} \pi \lambda \gamma(b^2))^{Q_m/b}}{\pi^3 Q_m \gamma(b^{-2}(1 - m)) \gamma^2(b^2) \gamma(1 - m - b^2)} \prod_{i=1}^l \frac{\gamma(rb^2 + m) \gamma(rb^2 - m)}{\gamma^2(rb^2)}, \quad (5.39)$$

donde $l = -2 + b^{-2}(1 - m)$. A modo de ejercicio, podemos verificar que para el caso $m = 0$, recobramos la función de partición esférica de la teoría de Liouville

$$Z^{(m=0)} = \frac{(1 - b^2) (\pi \mu_L \gamma(b^2))^{Q/b}}{\pi^3 Q \gamma(b^{-2}) \gamma(b^2)} \quad (5.40)$$

³Luego de transformar Mellin-furrier la expresión (5.30) también tenemos la misma contribución en la base x ; ver por ejemplo [59] y referencias que aparecen allí.

5.2. Reducción Hamiltoniana y Dualidad de Langlands

donde $Q = Q_{m=0} = b + b^{-1}$ y $\mu_L = \lambda$. Este es el resultado exacto para la función de partición de Liouville en la topología de la esfera; coincide exactamente con el resultado obtenido por Al. Zamolodchikov en [88] y con el de Leoni y Giribet en [70]. En (5.40) se puede apreciar que esta expresión no manifiesta la auto-dualidad de Liouville antes transformaciones $b \rightarrow 1/b$. Este hecho es de alguna manera inesperado y hasta ahora no se ha encontrado una explicación satisfactoria.

Otro caso que merece especial atención es el que corresponde al modelo WZNW. Para $m = 1$, la expresión que se obtiene para la función de partición es divergente. De hecho, si uno considera $m = 1$ in (5.39) encuentra el resultado infinito $Z^{(m=1)} \sim \Gamma^2(0)\lambda$. Más precisamente, en la expresión (5.39) deben considerarse valores de l negativos. Considerando la continuación analítica usual, $\prod_{r=1}^{-|l|} f(r) = \prod_{r=0}^{|l|-1} f^{-1}(-r)$, se encuentran resultados divergentes para la función de partición. La razón por la que aparecen estas divergencias es que al realizar el cálculo correspondiente a $m = 1$, el factor $\Gamma^2(-3 + Q_{m=1}/b)$ se convierte en el factor divergente $\Gamma^2(-2)$, mientras que para el caso genérico la cantidad $\Gamma^2(-3 + Q_{m \neq 1}/b) = \Gamma^2(-2 + b^{-2}(1 - m))$ no es divergente para valores de b suficientemente genéricos.

5.2. Reducción Hamiltoniana y Dualidad de Langlands

En esta sección discutiremos la relación entre la reducción hamiltoniana y la fórmula SRT. Finalmente, esta relación nos da una realización concreta de la dualidad de Langlands en las funciones de correlación del modelo H_3^+ WZNW.

5.2.1. Implementando la reducción como el límite $\mu_i \rightarrow 0$

La intención de esta sección es dar una interpretación de la fórmula SRT desde el punto de vista de la reducción hamiltoniana. Como se discutió en el capítulo 3, la forma convencional de implementar la reducción es imponiendo la condición de gauge (3.1), la cual, en la representación de Wakimoto se lee $\beta = k$ (i.e. $\partial\beta = \bar{\partial}\beta = \partial\bar{\beta} = \bar{\partial}\bar{\beta} = 0$). Por otro lado, en la formulación de integral de camino discutida en capítulo anterior, la integración sobre γ imponía la condición

$$\bar{\partial}\beta(w) = 2\pi \sum_{i=1}^n \mu_i \delta(w - z_i) \quad (5.41)$$

o, equivalentemente,

$$\beta(w) = \text{const} + \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{w - z_i} \quad (5.42)$$

5. Aplicaciones II: Nuevas teorías conformes no-rationales

Como una 1-forma, la constante en principio debería anularse, pero luego del *twist* del tensor energía-momento, el término constante debería permitirse ⁴.

Ahora, tomemos el límite $\mu_i \rightarrow 0$ (mientras se mantiene $\sum_{i=1}^n \mu_i = 0$) en la fórmula SRT (dual). Más precisamente, primero tomamos $\mu_i \rightarrow 0$ para $i = 2, 3, \dots, n-1$, y luego tomamos límite $\mu_1 = -\mu_n \rightarrow 0$. Este límite está en perfecta armonía con el espíritu de la reducción hamiltoniana ya que (5.42) sugiere que, con el fin de fijar β a una constante, el límite $\mu_i \rightarrow 0$ parece ser inevitable. En este límite, el parámetro y_i que aparece en la fórmula SRT se transforma en $y_i \rightarrow z_{i+1}$ para $i = 1 \dots n-2$ a través de la relación

$$\mu_i = u \frac{\prod_{j=1}^{n-2} (z_i - y_j)}{\prod_{j \neq i} (z_i - z_j)} \quad (5.43)$$

La observación crucial es que en este límite podemos remover esencialmente $n-2$ operadores de vértice extra en el lado de Liouville de la fórmula SRT (dual) (4.2). Esto es porque al tomar el límite $y_i \rightarrow z_{i+1}$ el campo degenerado $V_{-\tilde{b}/2}$ colisionan con $n-2$ campos V_α en las funciones de correlación de Liouville. Como $V_{-\tilde{b}/2}$ es un campo degenerado, el OPE toma la forma simple

$$V_\alpha(z)V_{-\tilde{b}/2}(w) = \frac{V_{\alpha-\tilde{b}/2}(w)}{|z-w|^{-2\alpha\tilde{b}}} + \tilde{C}_-^L(\alpha) \frac{V_{\alpha+\tilde{b}/2}(w)}{|z-w|^{-2(Q-\alpha)\tilde{b}}} + (\text{descendants}) \quad (5.44)$$

Así, para $\alpha < Q/2$, que está en el llamado límite Seiberg (correspondiente a $j < -1/2$), sobrevive sólo el primer término del OPE ya que es dominante sobre el segundo término en el límite $w \rightarrow z$ y del lado de Liouville de la fórmula SRT está dado por la función de correlación de n -puntos

$$\left\langle V_{\alpha_1}(z_1) \prod_{i=2}^{n-1} V_{\tilde{\alpha}_i}(z_i) V_{\alpha_n}(z_n) \right\rangle_{LFT} \quad (5.45)$$

donde $\alpha_i = \tilde{b}^{-1}(j_i + 1 + \tilde{b}^2/2) = \tilde{b}^{-1}(j_i + k/2)$ y $\tilde{\alpha}_i = \tilde{b}^{-1}(j_i + 1)$. El factor Θ_n resulta singular en el límite $y_i \rightarrow z_{i+1}$, pero no es difícil remover esta singularidad y uno puede ver (a menos de algunas constantes de normalización \mathcal{C}) que

$$\left\langle \prod_{i=1}^n \Phi_{j_i}(0|z_i) \right\rangle = \mathcal{C} |\tilde{\Theta}_n|^2 \left\langle V_{\alpha_1}(z_1) \prod_{i=2}^{n-1} V_{\tilde{\alpha}_i}(z_i) V_{\alpha_n}(z_n) \right\rangle_{LFT} \quad (5.46)$$

donde $\tilde{\Theta}_n = \prod_{1 < i < j < n-1} (z_i - z_j)^{2\tilde{b}^2}$ es la versión regularizada de Θ_n en la fórmula SRT. Un factor de normalización singular similar aparece en el intento anterior de reducción hamiltoniana al fijar $x_i = z_i$ [72].

Notemos que la relación entre $\tilde{\alpha}_i$ y j_i en (5.46) coincide con la versión reflejada de Weyl de (3.11), digamos haciendo allí $j_i \rightarrow -1 - j_i$. Además la relación entre α_i y j_i corresponde a efectuar el cambio $j_i \rightarrow -k/2 - j_i$ en (3.11).

⁴Como fuera mencionado, este *twist* puede obtenerse cambiando el tensor de Sugawara $T(z)$ por $T(z) \rightarrow T(z) - \partial J^3(z)$. Alternativamente, uno puede agregar una pieza $\bar{\omega}J$ en la acción, donde ω es una conexión en la hoja de mundo, la cual lleva a la ecuación de movimiento $(\bar{\partial} + \bar{\omega})\beta(w) = 2\pi \sum_{i=1}^n \mu_i \delta(w - z_i)$.

5.2. Reducción Hamiltoniana y Dualidad de Langlands

5.2.2. Realizando la dualidad de nivel de Langlands

Hagamos ahora un comentario sobre la dualidad de nivel en la teoría WZNW. Como hicimos en (4.2), es posible deducir una versión dual de la fórmula de (5.46) reemplazando \tilde{b} y b^{-1} . Como la teoría de Liouville no tiene inserciones extra en el límite particular que consideramos, (*i.e.* $\mu_i \rightarrow 0$), comparando las dos expresiones (una en la fórmula SRT y la otra en la fórmula SRT dual) con la identificación crucial $b = \tilde{b}$, encontramos la sorprendente identidad ⁵

$$\left\langle \prod_{i=1}^n \Phi_{j_i}(0|z_i) \right\rangle_k = \tilde{\mathcal{C}} \left\langle \prod_{i=1}^n \Phi_{\tilde{j}_i}(0|z_i) \right\rangle_{\tilde{k}} \quad (5.47)$$

donde los niveles del modelo WZNW en ambos lados de esta expresión se relacionan a través de la dualidad de Langlands

$$\tilde{k} - 2 = (k - 2)^{-1} \quad (5.48)$$

e introdujimos un coeficiente numérico $\tilde{\mathcal{C}}$ que regulariza el límite $\mu_i \rightarrow 0$. Los spines de los operadores de vértice en cada lado obedecen la relación $\tilde{j}_i = (j + 1)/(k - 2) - 1$ para $i = 1, n$, y $\tilde{j}_i = (j + 1)/(k - 2) - 1/2 - (k - 2)^{-1}/2$ para $i = 2, \dots, n - 1$. Uno puede constatar explícitamente que esta identidad es verdadera para las funciones de dos-puntos y las funciones de tres-puntos (ver Apéndice C para identidades útiles tales como D.8).

Esta identidad puede verse como una manifestación de la dualidad de Langlands cuántica a nivel de las funciones de correlación. En aplicaciones físicas, muestra la dualidad de acoplamiento débil/acoplamiento fuerte entre distintas CFT's aún con distintas cargas centrales. En el contexto de la teoría de cuerdas, esto podría relacionar amplitudes de scattering de compactificaciones de cuerdas totalmente distintas aún con espacios target de distinta dimensioanlidad. Por ejemplo, si embebemos el modelo coset $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ en la compactificación de supercuerda, la versión supersimétrica de la dualidad de Langlands está dada por $\hat{k} \rightarrow 1/\hat{k}$, donde $\hat{k} = k - 2$ es el nivel del álgebra de corrientes supersimétrica. Esto da una dualidad no trivial entre amplitudes de scattering en el agujero negro bidimensional para $\hat{k} = 1/2$ y aquellos en la singularidad tipo A_1 (espacio de Eguchi-Hanson) para $\hat{k} = 2$. Desde el punto de vista de la correspondencia AdS_3/CFT_2 , predice una dualidad fuerte-débil en la teoría de campos conforme del borde cuyo origen es bastante misterioso.

Desde el punto de vista matemático, una identidad como (5.47) daría una pista para entender la versión cuántica de la correspondencia geométrica de Langlands, la cual todavía no está totalmente formulada en un lenguaje matemático preciso. Ver e.g. [19] para una discusión más que interesante sobre un intento.

⁵Estrictamente hablando, como la constante cosmológica de LFT es distinta en la fórmula original y en la dual, tenemos que ajustar el parámetro de apantallamiento en el modelo H_3^+ (λ en la representación de Wakimoto) de modo que ambos lados tengan el mismo comportamiento de escala.

5.3. Funciones de correlación que violan winding

En esta sección se discute una forma alternativa de realizar la reducción hamiltoniana a nivel de las funciones de correlación en términos de la fórmula SRT. En particular, estudiaremos las funciones de correlación de WZNW en las que intervienen estados floweados. Esto es, consideraremos funciones de correlación que violan la conservación del así llamado número de winding, como se definió en [76].

Como se mencionara en la introducción, la fórmula SRT de [8] se generalizó en [76] para el caso con estados floweados (estados con winding) de la teoría $SL(2, \mathbb{R})_k$ WZNW. El resultado general establece que las funciones de n -puntos de la teoría $SL(2, \mathbb{R})_k$ WZNW que violan la conservación del número de winding en $\Delta\omega$ unidades está dada por una función de $2n - 2 - \Delta\omega$ -puntos en LFT (donde $n - 2 - \Delta\omega$ operadores de vértice de Liouville corresponden a campos degenerados $V_{-1/2b}$). Explícitamente tenemos

$$\begin{aligned} & \left\langle \prod_{i=1}^n \Phi_{j_i, p_i, \bar{p}_i}^{\omega_i}(z_i) \right\rangle_{H_3^+} = \frac{2\pi^{3-2n} b c_k^{\Delta\omega}}{\Gamma(n-1-\Delta\omega)} \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(-j_i + p_i)}{\Gamma(j_i + 1 - \bar{p}_i)} \times \\ & \times \prod_{1 \leq l < t \leq n} (z_l - z_t)^{\frac{k}{2} - \frac{k}{2}\omega_l\omega_t + \omega_l p_t + p_l \omega_t + p_l + p_t} (\bar{z}_l - \bar{z}_t)^{\frac{k}{2} - \frac{k}{2}\omega_l\omega_t + \omega_l \bar{p}_t + \bar{p}_l \omega_t + \bar{p}_l + \bar{p}_t} \times \\ & \times \int \prod_{t=1}^{n-2-\Delta\omega} d^2 y_t \prod_{l=1}^n \prod_{t=1}^{n-2-\Delta\omega} (z_l - y_t)^{\frac{k}{2} - p_l} (\bar{z}_l - \bar{y}_t)^{\frac{k}{2} - \bar{p}_l} \times \\ & \times \prod_{1 \leq a < b \leq n-2-\Delta\omega} |y_a - y_b|^k \left\langle \prod_{i=1}^n V_{\alpha_i}(z_i) \prod_{t=1}^{n-2-\Delta\omega} V_{-\frac{1}{2b}}(y_t) \right\rangle_{LFT} \end{aligned} \quad (5.49)$$

donde $b^{-2} = k - 2$, $\sum_{i=1}^n \omega_i = -\Delta\omega$, $\alpha_i = b(j_i + k/2)$, $\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n \bar{p}_i = -k\Delta\omega/2$, y c_k es un factor dependiente de k ; ver [76] para detalles. La expresión (5.49) es la versión más general de la correspondencia H_3^+ -Liouville que emplea estados floweados $\Phi_{j,p,\bar{p}}^\omega(z)$ de la teoría WZNW. En particular, para $\Delta\omega = 0$ uno recobra la relación SRT entre funciones de n -puntos en WZNW y funciones de $2n - 2$ -puntos en LFT.

Por otro lado, en el caso de las amplitudes que violan maximalmente la conservación del número de winding (*i.e.* $\Delta\omega = n - 2$), todos los campos degenerados $V_{-1/2b}$ en (5.49) desaparecen y la fórmula verdaderamente reproduce la correspondencia entre funciones de n -puntos WZNW functions and n -point LFT functions. En tal caso, tenemos $\Delta\omega = -\sum_{i=1}^n \omega_i = n - 2$, y (5.49) adquiere la forma

$$\begin{aligned} & \left\langle \prod_{i=1}^n \Phi_{j_i, p_i, \bar{p}_i}^{\omega_i}(z_i) \right\rangle_{H_3^+} = 2\pi^{3-2n} b c_k^{n-2} \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(-j_i + p_i)}{\Gamma(j_i + 1 - \bar{p}_i)} \left\langle \prod_{i=1}^n V_{\alpha_i}(z_i) \right\rangle_{LFT} \times \\ & \times \prod_{1 \leq l < t \leq n} (z_l - z_t)^{\frac{k}{2} - \frac{k}{2}\omega_l\omega_t + \omega_l p_t + p_l \omega_t + p_l + p_t} (\bar{z}_l - \bar{z}_t)^{\frac{k}{2} - \frac{k}{2}\omega_l\omega_t + \omega_l \bar{p}_t + \bar{p}_l \omega_t + \bar{p}_l + \bar{p}_t} \end{aligned} \quad (5.50)$$

donde $\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n \bar{p}_i = k(n - 2)/2$. Notemos que la notación aquí es tal que los campos floweados $\Phi_{j_i, p_i, \bar{p}_i}^{\omega_i}$ poseen dimensión conforme dada por

$$\Delta_j^{\omega, p} = -b^2 j(j + 1) + p\omega - k\omega^2/4 \quad (5.51)$$

Investiguemos ahora dos casos particulares de (5.50), que son relevantes para la reducción hamiltoniana.

5.3. Funciones de correlación que violan winding

Caso 1: En primer lugar, consideremos dos estados del sector floweado $\omega = 0$, y $n - 2$ estados del sector $\omega = -1$. Supongamos $\omega_1 = \omega_n = 0$, $p_1 = p_1 = j_i$, $p_n = p_n = -j_n$, mientras que $\omega_2 = \omega_3 = \dots \omega_{n-1} = -1$, $p_2 = p_3 = \dots p_{n-1} = \bar{p}_2 = \bar{p}_3 = \dots \bar{p}_{n-1} = -k/2$. En este caso, (5.50) puede escribirse de la siguiente manera

$$\left\langle \prod_{i=1}^n V_{\alpha_i}(z_i) \right\rangle_{LFT} = \frac{\pi}{2b} |z_1 - z_n|^{2j_1+2j_n-k} \left\langle \Phi_{j_1}^{(0)}(z_1) \prod_{i=2}^{n-1} \Phi_{j_i}^{(-)}(z_i) \Phi_{j_n}^{(0)}(z_n) \right\rangle_{H_3^+} \quad (5.52)$$

donde hemos definido

$$\Phi_j^{(0)}(z) = \frac{1}{\gamma(-2j)} \Phi_{j,-j,-j}^{\omega=0}(z), \quad \Phi_j^{(-)}(z) = \frac{c_k \pi^2}{\gamma(k/2 - j)} \Phi_{j,-\frac{k}{2},-\frac{k}{2}}^{\omega=-1}(z) \quad (5.53)$$

La expresión (5.52) es en verdad similar a (5.46). Así como en (5.46), sería conveniente fijar los puntos de inserción en $z_1 = 0$ y $z_n = \infty$ aprovechando la invariancia proyectiva. Esto haría desaparecer un factor global $|z_1 - z_n|^{2j_1+2j_n-k}$ produciendo una correspondencia entre funciones de n -puntos de ambas teorías.

Caso 2: En segundo lugar, consideremos un estado en el sector floweado $\omega = +1$, y $n - 1$ estados en el sector $\omega = -1$. Ahora supongamos $\omega_1 = +1$, $p_1 = p_1 = +k/2$, mientras que $\omega_2 = \omega_3 = \dots \omega_{n-1} = \omega_n = -1$, $p_2 = p_3 = \dots p_{n-1} = p_n = \bar{p}_2 = \bar{p}_3 = \dots \bar{p}_{n-1} = \bar{p}_n = -k/2$. En este caso encontramos

$$\left\langle \prod_{i=1}^n V_{-bj_i}(z_i) \right\rangle_{LFT} = \frac{\pi}{2b} \left\langle \Phi_{-\frac{k}{2}-j_1}^{(+)}(z_1) \prod_{i=2}^n \Phi_{-\frac{k}{2}-j_i}^{(-)}(z_i) \right\rangle_{H_3^+} \quad (5.54)$$

donde introdujimos

$$\Phi_{-\frac{k}{2}-j}^{(-)}(z) = \frac{c_k \pi^2}{\gamma(j+k)} \Phi_{-\frac{k}{2}-j,-\frac{k}{2},-\frac{k}{2}}^{-1}(z), \quad \Phi_{-\frac{k}{2}-j}^{(+)}(z) = \frac{1}{c_k \pi^2 \gamma(j)} \Phi_{-\frac{k}{2}-j,+\frac{k}{2},+\frac{k}{2}}^{+1}(z) \quad (5.55)$$

y

$$\alpha = b(j + k/2) \quad (5.56)$$

Remarcablemente, en la expresión (5.54) desapareció toda la dependencia en $|z_i - z_j|$ sin fijar puntos de inserción z_i . Consecuentemente, eso puede ser pensado como una correspondencia directa entre funciones de correlación de n -puntos de WZNW y funciones de correlación de n -puntos de LFT. Los operadores $\Phi_{-\frac{k}{2}-j_1}^{(+)}$ en (5.54) deberían entenderse como aquellos que definen el estado de vacío de *salida*, mientras que los operadores $\Phi_{-\frac{k}{2}-j_{i>1}}^{(-)}$ actúan sobre el vacío de *entrada* creando estados de cuerdas en la hoja de mundo. Notemos también que el campo $\Phi_{-\frac{k}{2}-j}^{(+)}$ tiene la siguiente dimensión conforme con respecto al tensor de energía-momento $T(z)$,

$$\Delta_{-\frac{k}{2}-j}^{\omega=-1,p=-k/2} = \frac{(j+k/2)(-j-k/2+1)}{k-2} + \frac{k}{4} = -\frac{j(j+1)}{k-2} - j \quad (5.57)$$

el cual ciertamente coincide con la fórmula (3.10) para la dimensión conforme de los campos $\Phi_{j,-j,-j}^0$ con respecto al tensor de energía-momento mejorado $\hat{T}(z) = T(z) - \partial J^3(z)$. En cambio, tenemos

$$\hat{\Delta}_j = \Delta_{-\frac{k}{2}-j}^{\omega=\pm 1,p=\pm k/2} \quad (5.58)$$

5. Aplicaciones II: Nuevas teorías conformes no-rationales

Por lo tanto, los campos $\Phi_{j,-j,-j}^0$ y $\Phi_{-k/2-j,\pm k/2,\pm k/2}^{\pm 1}$ tienen la misma dimensión conforme y representan los mismos valores para el momento de Liouville $\alpha = -bj$, así como en (3.11). En este sentido, podemos asociar los campos como $\Phi_j^{(0)}(z) \leftrightarrow \Phi_{-k/2-j}^{(\pm)}(z)$. Esto manifiestamente muestra el paralelismo entre las realizaciones (3.12) y (5.54). Más aun, esto también es consistente con la relación entre (3.11) y (5.56). Concluimos que (5.54) puede verse como una realización de la reducción hamiltoniana a nivel de las funciones de correlación.

Para entender la aparición del sector con flujo espectral $\omega = -1$ en (5.54), uno tiene que tener en cuenta que implementar la condición $J^+ = \beta = k$ induce un cambio de modos $J_n^{\pm,3}$ de las corrientes de Kac-Moody $J_{(z)}^{\pm,3} = \sum_n J_n^{\pm,3} z^{-n-1}$, y tales cambios pueden interpretarse como transformaciones de flujo espectral con parámetro $\omega = -1$, lo que produce el flujo $J_n^\pm \rightarrow J_{n\mp 1}^\pm$, $J_0^3 \rightarrow J_0^3 + k/2$. Nuevamente, esto está íntimamente relacionado con el hecho que la dimensión conforme de un campo $\Phi_j^{(0)} \sim \Phi_{j,j,j}^{(\omega=0)}$ con respecto a el tensor de energía-momento mejorado $T(z) - \partial_z J^3(z)$ coincide con aquella de un campo en el sector de flujo espectral $\Phi_j^{(-)} \sim \Phi_{-j-k/2,k/2,k/2}^{(\omega=-1)}$ con respecto a $T(z)$.

Notemos que, así como en el caso de la base μ , sucede que realizar el cambio $b \rightarrow \tilde{b}^{-1}$ en (5.54) produce una versión dual de tal fórmula. De hecho, uno puede escribir la fórmula dual como

$$\left\langle \prod_{t=1}^n V_{\alpha_t}(z_t) \right\rangle_{LFT} = \frac{\tilde{b}}{2\pi^3} \left\langle \Phi_{j_1}^{(+)}(z_1) \prod_{r=2}^n \Phi_{j_r}^{(-)}(z_r) \right\rangle_{H_3^+} \quad (5.59)$$

donde ahora $\alpha = \tilde{b}^{-1}(j+1) + b/2$, $\tilde{b}^2 = k - 2$. Luego, de (5.54) y (5.59) obtenemos la relación de dualidad

$$\left\langle \Phi_{j_1}^{(+)}(z_1) \prod_{r=2}^n \Phi_{j_r}^{(-)}(z_r) \right\rangle_k = \hat{\mathcal{C}} \left\langle \Phi_{\tilde{j}_1}^{(+)}(z_1) \prod_{r=2}^n \Phi_{\tilde{j}_r}^{(-)}(z_r) \right\rangle_{\tilde{k}} \quad (5.60)$$

donde $\hat{\mathcal{C}} = (k-2)^{-2}$, y $\tilde{j} = (k-2)(j+1/2) - 1/2$ y $\tilde{k} - 2 = (k-2)^{-1}$. Esta identidad puede pensarse como una manifestación de la dualidad Langlands cuántica a nivel de las funciones de correlación relacionando los sistemas fuertemente acoplados con los débilmente acoplados.

Para concluir este capítulo, hagamos un comentario sobre la generalización de la fórmula (5.49) al caso de las funciones de correlación para géneros mayores. De hecho, sería muy interesante extender la correspondencia H_3^+ -Liouville al caso de funciones de correlación de mayor género y que involucren sectores de flujo espectral (sectores de winding de la teoría de cuerdas en AdS_3). Un resultado curioso para las funciones de correlación de $SL(2, \mathbb{R})_k$ en la esfera es la existencia de un límite superior para la violación de la conservación del número de winding. Resulta ser que la conservación del número de winding en una dada función de n -puntos a nivel árbol puede violarse hasta en $n-2$ unidades⁶. En el contexto de la correspondencia H_3^+ -Liouville, este límite superior $\Delta\omega \leq n-2$ para la violación de la conservación del número de winding es entendida en forma natural de la siguiente manera: de acuerdo a (5.49) las funciones de correlación de n -puntos que

⁶Esta cota puede entenderse en términos de la simetría $sl(2)_k$ de la teoría, ver Apéndice D en [58] para una interesante digresión.

5.3. Funciones de correlación que violan winding

violan la conservación del winding en $\Delta\omega$ unidades están relacionadas a las funciones de $(2n - 2 - \Delta\omega)$ -puntos de LFT, donde $(n - 2 - \Delta\omega)$ operadores de vértice de Liouville representan campos degenerados $V_{-1/2b}$. En otras palabras, violar la conservación del número de winding en $\Delta\omega$ unidades en el lado de WZNW corresponde a remover $\Delta\omega$ campos degenerados del lado de Liouville de la fórmula original en [8]. Así, una pregunta natural que podría surgir es cómo tal panorama se generaliza al caso de funciones de correlación de géneros mayores. Probablemente, para una función de correlación de género g la historia sea la misma, y uno podría asociar las unidades de violación de winding a la suma de campos de Liouville degenerados $V_{-1/2b}$. En realidad, uno se ve tentado a conjeturar que el límite superior para la violación del número de winding en una función de correlación de n -puntos de género g estaría dado por $\Delta\omega \leq n + 2g - 2$. Por un lado, este es el número de campos de Liouville degenerados en el caso de amplitudes con número de winding conservado [77]; por otro lado, coincide al menos numéricamente con el número esperado si uno piensa la función de correlación de género g que viola máximamente el número de winding factorizada en términos de varias funciones de correlación de género cero que violan máximamente el número de winding. Sería interesante confirmar que se obedece tal límite.

5. Aplicaciones II: Nuevas teorías conformes no-rationales

Aplicaciones III: Correspondencia AdS_3/CFT_2

En este capítulo estudiamos la coincidencia exacta entre funciones de tres puntos del bulk y el borde en geometrías tipo $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ con flujos NSNS; mirando de cerca la cancelación entre las contribuciones de la hoja de mundo correspondientes a AdS_3 y las correspondientes a la geometría S^3 . Además, damos una mirada más profunda a estas intrigantes cancelaciones desde la perspectiva de la teoría minimal y esclarecemos algunos puntos sobre la relación analítica entre las constantes de estructura de $SU(2)$ y $SL(2, \mathbb{R})$.

6.1. Preliminares

En las referencias [24, 25], Gaberdiel y Kirsch, y Dabholkar y Pakman, calcularon las funciones de tres-puntos de ciertos estados primarios quirales para la teoría de cuerdas tipo IIB en $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ en la geometría de la esfera. Las expresiones resultantes del cálculo se compararon luego con los correspondientes correladores en la teoría conforme dual bidimensional. Como resultado, se vio que los observables del bulk y los del borde para N grande coincidían exactamente. En [26], Pakman y Server extendieron el análisis de esta coincidencia holográfica al caso de operadores quirales con $\mathcal{N} = 4$ y en [27] se consideraron operadores del sector de flujo espectral. Esta correspondencia también se vio desde el punto de vista de supergravedad en [28].

Esta concordancia exacta encontrada en [24, 25, 26] no sólo representa una importante verificación de la correspondencia AdS/CFT más allá de la aproximación de supergravedad sino que también puede verse como evidencia de que se satisface un teorema de no-renormalización para la teoría de cuerdas en este fondo. Este mecanismo de no-renormalización fue recientemente estudiado en [29].

Al revisar los cálculos correspondientes a la hoja de mundo de [24, 25], uno nota de inmediato que un punto crucial para que exista el acuerdo entre observables del volumen y del borde es una sorprendente cancelación de todos los factores en las funciones de tres-

puntos de la hoja de mundo que “mezclan” los momentos de los operadores de vértice.

La dualidad AdS/CFT relaciona el régimen de acoplamiento débil de las teorías de gauge con teorías de cuerdas en fondos con alta curvatura. Una de las ventajas de considerar la dualidad AdS/CFT es que para estas dimensiones en particular, ambas teorías, tanto la teoría de cuerdas como la teoría de campos conformes bidimensional, son conocidas explícitamente [30].

La teoría de supercuerdas en $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ con flujos NSNS admite una descripción exacta a través de su hoja de mundo en términos del modelo WZNW supersimétrico con $\mathcal{N} = 1$ (estudiamos antes el caso $\mathcal{N} = 0$). Esto es, la teoría es descrita mediante el modelo σ con $\mathcal{N} = 1$ en $SL(2, \mathbb{R}) \times SU(2) \times U(1)^4$, donde el nivel \hat{k} es un número entero que parametriza el radio, tanto de AdS_3 como de S^3 en unidades de longitud de la cuerda.

Para quienes estén familiarizados con la teoría de cuerdas minimal, la cancelación “mágica” mencionada arriba es similar al tipo de simplificaciones que suceda entre funciones de correlación en la teoría de Liouville y los modelos minimales generalizados. Aquí discutiremos la relación precisa entre estos dos problemas, que ciertamente están conectados más allá de esta “similitud”. Ya en su momento Al. Zamolodchikov señaló que, aunque la relación analítica entre GMM y LFT podría dar lugar a la idea que los observables de la teoría GMM podrían ser meras continuaciones analíticas de las cantidades correspondientes en LFT para valores imaginarios puros del parámetro de Liouville, en realidad este no es el caso. Se mostró en [88] que las constantes de estructura de GMM no son meras continuaciones analíticas de sus contrapartes en LFT. De hecho, contrariamente a lo que se podría esperar, las constantes de estructura de GMM resultan ser, a menos de una renormalización apropiada de los operadores de vértices, la “inversa” de las constantes de estructura de LFT; en el sentido que del producto de ambas cantidades resulta una expresión factorizada en forma notablemente simple del tipo $\sim \prod_{i=1}^3 f(a_i)$, donde a_i representan los momentos de los operadores de vértice de la teoría de Liouville.

La cancelación que tiene lugar entre las constantes de estructura supersimétricas de $SU(2)$ y de $SL(2, \mathbb{R})$ al calcular las amplitudes en $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ es similar a la que ocurre entre los observables de GMM y LFT. Si bien no hay nada incorrecto en esta observación, interpretada incorrectamente puede llevar a la errónea conclusión que los observables de $SU(2)$ no pueden obtenerse como la continuación analítica de su análogo en $SL(2, \mathbb{R})$ para valores negativos del nivel k del modelos WZNW. Lo que se quiere señalar con esto es que a diferencia de lo que ocurre en el modelo WZNW supersimétrico con $\mathcal{N} = 1$, donde el producto de las funciones de tres-puntos de $SU(2)$ y de $SL(2, \mathbb{R})$ arrojan una forma simple factorizada como en la Gravedad Minimal de Liouville, acá la relación entre las constantes de estructura bosónicas de $SU(2)$ y de $SL(2, \mathbb{R})$ es diferente y admite ser vista como una continuación analítica en k . Tal continuación analítica es, en realidad, la que uno considera para ir de la aproximación de gas de Coulomb a los modelos WZNW no-rationales.

6.2. Funciones de correlación en la teoría de WZNW

6.2.1. Correladores de $SL(2, \mathbb{R})_{\hat{k}}$ a partir de LFT

El modelo WZNW supersimétrico con $\mathcal{N} = 1$ sobre $SL(2, \mathbb{R})_{\hat{k}}$ describe el modelo σ de la teoría de supercuerdas en la porción de geometría de AdS_3 donde la relación entre el radio de AdS_3 l y la escala de longitud de la cuerda l_s está dada por $\hat{k} = l^2/l_s^2$, de manera que el límite semiclásico corresponde a valores de \hat{k} grandes. Esta interpretación es consistente con el valor de la carga central de la teoría

$$c_{sl(2)} = 3 + \frac{6}{\hat{k}} \quad (6.1)$$

que tiende a 3 a medida que \hat{k} tiende a infinito.

El álgebra afín supersimétrica del modelo WZNW es generada por la supercorriente $\psi^a(z) + \Theta J^a(z)$, donde $a = 1, 2, 3$, Θ es una variable de Grassman y $\psi^a(z)$ representa tres campos libres fermiónicos. Las corrientes J^a generan el álgebra afín $\hat{sl}(2)$ de nivel \hat{k} , la cual es realizada por el siguiente OPE

$$J^a(z)J^b(w) \sim \frac{\eta^{ab}\hat{k}/2}{(z-w)^2} + \frac{i\varepsilon^{abc}J_c(w)}{(z-w)} + \dots \quad (6.2)$$

donde $\varepsilon^{abc} = 1$ y $\eta^{ab} = \text{diag}(+ + -)$, con $a, b, c = 1, 2, 3$. Los generadores $J^a(z)$ pueden escribirse como

$$J^a(z) = j^a(z) - \frac{i}{\hat{k}}\varepsilon^{abc}\psi_b(z)\psi_c(z) \quad (6.3)$$

donde las corrientes bosónicas $j^a(z)$ generan $sl(2)_k$ de nivel $k = \hat{k} + 2$. El OPE entre las corrientes

$$J^a(z)\psi^b(w) \sim \frac{i\varepsilon^{abc}\psi_c(w)}{(z-w)} + \dots, \quad \psi^a(z)\psi^b(w) \sim \frac{\eta^{ab}\hat{k}/2}{(z-w)} + \dots \quad (6.4)$$

La construcción de Sugawara lleva al tensor de energía-impulso

$$T(z) = \frac{1}{\hat{k}}\eta_{ab} : J^a(z)J^b(z) - \psi^a(z)\psi^b(z) : \quad (6.5)$$

que genera el álgebra de Virasoro de la hoja de mundo.

Recordemos la representación en la base x : Los operadores de vértice $\Phi_j(x|z)$ vienen dados por los campos primarios de Virasoro en referencia a (6.5) y expanden representaciones de $SL(2, \mathbb{R})$. El índice j etiqueta la representación $SL(2, \mathbb{R})$, mientras que x es una variable compleja auxiliar que permite la siguiente realización del álgebra (2.119)

$$j^a(z)\Phi_j(x|w) = -\frac{\mathcal{D}^a\Phi_j(x|w)}{(z-w)} + \dots \quad (6.6)$$

6. Aplicaciones III: Correspondencia AdS_3/CFT_2

con operadores diferenciales definidos en (2.118)

$$\mathcal{D}^+ = x^2 \partial_x - 2jx, \quad \mathcal{D}^- = \partial_x, \quad \mathcal{D}^3 = x \partial_x - j \quad (6.7)$$

donde, como de costumbre, la notación $a = +, -, 3$ corresponde a generadores $j^\pm(z) = j^1(z) \pm ij^2(z)$.

La dimensión conforme de los operadores de vértice $\Phi_j(x|w)$ está dada por

$$\Delta_{sl(2)} = -\frac{j(j+1)}{k-2}, \quad \text{con } k = \hat{k} - 2 \quad (6.8)$$

Como mencionamos en el Capítulo 3, la función de correlación de 4-puntos en el modelo WZNW sobre $SL(2, \mathbb{R})_k$ puede escribirse en términos de la función de 5-puntos en la teoría de campos de Liouville, de la siguiente forma

$$\left\langle \prod_{i=1}^4 \Phi_{j_i}(x_i|z_i) \right\rangle_{SL(2)} = \mathcal{X}_k(j_1, j_2, j_3, j_4|x, z) \times \left\langle \prod_{i=1}^5 V_{a_i}(z_i) \right\rangle_{LFT} \quad (6.9)$$

donde $2a_1 = -b(j_1 + j_2 + j_3 + j_4 + 1)$, $2a_{5>i>1} = -b(j_1 + 2j_i - j_2 - j_3 - j_4 - b^{-2} - 1)$, $2a_5 = -b^{-1}$, $b^{-2} = k - 2$, $z_1 = z$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$, $z_4 = \infty$, y sobre el lado derecho también vale que $z_5 = x$. La función de correlación en el lado derecho involucra cinco operadores de vértice exponenciales correspondientes a la teoría de Liouville. La función $\mathcal{X}_k(j_1, j_2, j_3, j_4|x, z)$ está dada por

$$\mathcal{X}_k(j_1, j_2, j_3, j_4|x, z) = \frac{|z|^{4(a_1 a_2 - b^2 j_1 j_2)} |z - 1|^{4(a_1 a_3 - b^2 j_1 j_3)}}{|x|^{2a_2 b^{-1}} |x - 1|^{2a_3 b^{-1}} |x - z|^{2a_1 b^{-1}}} X_k(j_1, j_2, j_3, j_4) \quad (6.10)$$

con¹

$$X_k(j_1, j_2, j_3, j_4) = \frac{\pi C_W^2(b)}{b^{5+4b^2} \Upsilon_0^2} \frac{(\nu(b))^s}{(\pi \mu \gamma(b^2) b^4)^{2j_1}} \times \quad (6.11)$$

$$\times \frac{G_k(2 + \sum_{i=1}^4 j_i) \prod_{n=2}^4 G_k(-1 - j_1 - 2j_n + \sum_{i=2}^4 j_i) \gamma(b^2(j_1 + 2j_n - \sum_{i=2}^4 j_i))}{\gamma(-b^2 \sum_{i=1}^4 j_i - 2b^2) \prod_{t=1}^4 G_k(2j_t + 1)} \quad (6.12)$$

donde $s = 1 + \sum_{i=1}^4 j_i$, $\gamma(x) = \Gamma(x)/\Gamma(1-x)$, $\nu(b) = -b^2 \gamma(-b^2)$, y la función especial $G_k(x)$ obedece las relaciones funcionales

$$\begin{aligned} G_k(x) &= G_k(x-1) \gamma(-b^2 x) \\ G_k(x) &= G_k(-1-x-b^{-2}), \end{aligned} \quad (6.13)$$

ver [58] y las referencias allí. El factor $\frac{\pi C_W^2(b)}{b^2 \Upsilon_0^2}$ en (6.12) es b -dependiente (es decir, independiente de j_i). Las constantes de estructura de $SL(2, \mathbb{R})_k$ se obtienen de (6.12) en el límite $j_1 = n = 0$.

¹Al comparar con [43], es importante tener en cuenta las relaciones $\Upsilon_W(x) = \Upsilon_b(-xb) = G_k^{-1}(x) b^{-b^2 x^2 - (b^2+1)x}$.

6.2. Funciones de correlación en la teoría de WZNW

La relación (6.9) permite comprender varias propiedades no triviales de la estructura de polos de la función de cuatro-puntos del modelo WZNW sobre $SL(2, \mathbb{R})_k$. En [89] se demostró que las dependencias logarítmicas en las amplitudes de AdS_3 , las cuales pueden entenderse en términos de AdS_3/CFT_2 como en [90, 91], están asociadas con el OPE $V_{(b+1/b)/2(z_i)}V_{-1/2b(x)}$ cuando $a_i = (b + 1/b)/2$ para $i = 2, 3, 4$. La representación (6.9) también resulta de utilidad al intentar comprender el origen de los polos en el punto $z = x$ que están asociados a instantones en la hoja de mundo [58]. Mientras que desde la perspectiva del modelo WZNW tales polos son inesperados ya que están localizados en el medio del espacio de módulos, en términos de la teoría de Liouville estos se entienden naturalmente como emergentes en el límite de coincidencia de dos operadores $V_{-sb/2(z_1)}V_{-1/2b(x)}$.

La normalización $X_k(j_1, j_2, j_3, j_4)$ en (6.9) es compatible con la simetría de cruce del modelo WZNW [43]. También puede mostrarse que $X_k(j_1, j_2, j_3, j_4)$ lleva a una elegante realización de la reducción hamiltoniana, la que en este caso corresponde a tomar el límite $x \rightarrow z$. En este límite y considerando el OPE

$$\begin{aligned} V_{\alpha_i(z_i)}V_{-1/2b(x)} &= |x - z|^{2\xi_-} V_{-1/2b+\alpha_i(z_i)} + \\ &= (\pi\mu\gamma(b^2))^{b^{-2}} \frac{\gamma(2a_i b^{-1} - 1 - b^{-2})}{b^4 \gamma(2a_i b^{-1})} |x - z|^{2\xi_+} V_{-1/2b-\alpha_i(z_i)} \end{aligned} \quad (6.14)$$

donde $\xi_{\pm} = (\Delta_{\alpha_i \pm 1/2b} - \Delta_{1/2b}) - \Delta_{\alpha_i}$ y $\Delta_a = a(b + b^{-1} - a)$, se encuentra

$$\left\langle \prod_{i=1}^4 \Phi_{j_i}(x_i | z_i) \right\rangle_{sl(2)} \sim \prod_{i=1}^4 \gamma(1 + b^2(2j_i + 1)) \times \left\langle \prod_{i=1}^4 \Phi_{-bj_i}(z_i) \right\rangle_{\text{LFT}} + \dots \quad (6.15)$$

donde el símbolo \sim expresa un factor dependiente de b y un factor singular $|x - z|^{1+b^{-2}}$, mientras que los puntos marcan una contribución despreciable, suponiendo que se obedece la cota de Seiberg $a_i > (b + b^{-1})/2$. Notar que los factores $\gamma(1 + b^2(2j_i + 1))$ en (6.15) pueden absorberse en la normalización de los vértices de Liouville. La expresión (6.15) puede demostrarse mediante las fórmulas (1.28)-(1.29) de [101] junto con trucos del estilo de los usados en el Apéndice B de [89].

Las funciones de correlación de Liouville en (6.12) se definen como en el Capítulo 2, recordemos que mediante la integración del modo cero de φ estas pueden ser expandidas según

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_{i=1}^5 V_{a_i}(z_i) \right\rangle_{\text{LFT}} &= \Gamma(-n)b^{-1}\mu^n \delta(nb + \sum_{i=1}^5 \alpha_i - b - b^{-1}) \times \\ &\times \int D\varphi e^{-S_L[\varphi; \mu=0]} \prod_{i=1}^5 e^{\sqrt{2}a_i \varphi(z_i)} \prod_{r=1}^n e^{\sqrt{2}b\varphi(w_r)} \end{aligned} \quad (6.16)$$

donde ahora la integral de caminos debe ser entendida como aquella que no incluye los modos cero.

6. Aplicaciones III: Correspondencia AdS_3/CFT_2

Es importante notar que la expresión de arriba admite una representación integral en la forma

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_{i=1}^4 \Phi_{j_i}(x_i|z_i) \right\rangle_{SL(2)} &= X_k(j_1, j_2, j_3, j_4) |z|^{-4b^2 j_1 j_2} |1-z|^{-4b^2 j_1 j_3} \Gamma(-2j_1) b^{-1} \mu^{2j_1} \times \\ &\times \int \prod_{r=1}^{2j_1} d^2 w_r \prod_{r=1}^{2j_1} |w_r|^{-4a_2 b} |w_r - 1|^{-4a_3 b} |w_r - z|^{-4a_1 b} |w_r - x|^2 \prod_{r < t} |w_r - w_t|^{-4b^2} \end{aligned} \quad (6.17)$$

donde

$$n = b + b^{-1} \left(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i\right) = 2j_1. \quad (6.18)$$

Para el caso particular $j_1 = 0$ se obtendrían las constantes de estructura $C(j_2, j_3, j_4) \sim X_k(0, j_2, j_3, j_4)$. Reemplazando este valor en la ecuación de arriba se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_k(0, j_2, j_3, j_4) &= -\frac{\gamma(-b^2)}{2\pi^2} (\nu(b))^{j_2+j_3+j_4+1} \frac{G_k(1+j_2+j_3+j_4)}{G_k(-1)} \times \\ &\times \frac{G_k(-j_2+j_3+j_4) G_k(j_2-j_3+j_4) G_k(j_2+j_3-j_4)}{G_k(2j_2+1) G_k(2j_3+1) G_k(2j_4+1)} \end{aligned} \quad (6.19)$$

donde el factor $\frac{C_W^2(b)G_k(-1)}{\Upsilon_0^2 G_k(1)}$ ha sido reemplazado por $\frac{b^{1+4b^2}}{2\pi^3} \gamma(1-b^2)$, teniendo en cuenta que $\lim_{j_1 \rightarrow 0} \frac{G_k(-1)}{G_k(1)} \Gamma(-n) = \frac{b^2}{2} \gamma(1+b^2)$.

Pasemos ahora a considerar la función de cuatro-puntos en el modelo $SU(2)_k$.

6.2.2. Correladores de $SU(2)_k$ a partir de Modelos Minimales

La teoría WZNW supersimétrica con $\mathcal{N} = 1$ en $SU(2)_{\hat{k}}$ tiene carga central

$$c_{su(2)} = 3 - \frac{6}{\hat{k}} \quad (6.20)$$

La simetría afín es generada por el álgebra de corrientes $su(2)_{\hat{k}}$, realizada por el OPE

$$K^a(z) K^b(w) \sim \frac{\delta^{ab} \hat{k}/2}{(z-w)^2} + \frac{i\varepsilon^{abc} K_c(w)}{(z-w)} + \dots \quad (6.21)$$

donde $\varepsilon^{abc} = 1$ y $\delta^{ab} = \text{diag}(+, +, +)$, con $a, b, c = 1, 2, 3$. El OPE ...

$$K^a(z) \chi^b(w) \sim \frac{i\varepsilon^{abc} \chi_c(w)}{(z-w)} + \dots, \quad \chi^a(z) \chi^b(w) \sim \frac{\delta^{ab} \hat{k}/2}{(z-w)} + \dots \quad (6.22)$$

Así como en el caso de $SL(2, \mathbb{R})$, los generadores pueden escribirse como

$$K^a(z) = k^a(z) - \frac{i}{\hat{k}} \varepsilon^{abc} \chi_b(z) \chi_c(z) \quad (6.23)$$

6.2. Funciones de correlación en la teoría de WZNW

donde las corrientes bosónicas $k^a(z)$ generan el álgebra $\widehat{su}(2)_{k'}$ de nivel $k' = \hat{k} - 2$ y los campos $\chi_a(z)$ representan tres fermiones libres.

Los operadores de vértice $\Psi_{j'}(y|z)$ son primarios de Virasoro con dimensión conforme La dimensión conforme

$$\Delta_{su(2)} = \frac{j(j+1)}{k'+2}, \quad \text{with} \quad \hat{k} = k' + 2. \quad (6.24)$$

donde ahora j' etiqueta las representaciones de $SU(2)$, mientras que y es una variable auxiliar compleja que permite la siguiente realización del álgebra

$$k^a(z)\Psi_{j'}(y|w) = -\frac{\mathcal{K}^a\Psi_{j'}(y|w)}{(z-w)} + \dots \quad (6.25)$$

con operadores diferenciales

$$\mathcal{K}^+ = y^2\partial_y - 2j'y, \quad \mathcal{K}^- = -\partial_y, \quad \mathcal{K}^3 = y\partial_y - j' \quad (6.26)$$

donde, como de costumbre, la notación $a = +, -, 3$ corresponde a los generadores $j^\pm(z) = j^1(z) \pm ij^2(z)$.

La función de correlación de cuatro-puntos in el modelo WZNW en $SU(2)_{k'}$ puede escribirse en términos de la función de cinco-puntos en el modelo de minimal generalizado de la siguiente forma

$$\left\langle \prod_{i=1}^4 \Psi_{j'_i}(y_i|z_i) \right\rangle_{SU(2)} = \mathcal{Y}_{k'}(j'_1, j'_2, j'_3, j'_4|y, z) \times \left\langle \prod_{i=1}^5 W_{\alpha_i}(z_i) \right\rangle_{\text{GMM}} \quad (6.27)$$

donde $2\alpha_1 = \beta(j_1 + j_2 + j_3 + j_4 + 1)$, $2\alpha_{5>i>1} = \beta(j_1 + 2j_i - j_2 - j_3 - j_4 + k' + 1)$, $2\alpha_5 = \beta^{-1}$, $\beta^{-2} = k' + 2$, $z_1 = z$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$, $z_4 = \infty$, y en el lado derecho también se sostiene que $z_5 = y$. Donde la función $B_k(j_1, j_2, j_3, j_4|y, z)$ está dada por

$$\mathcal{Y}_{k'}(j'_1, j'_2, j'_3, j'_4|y, z) = \frac{|z|^{4(\beta^2 j'_1 j'_2 - \alpha_1 \alpha_2)} |z-1|^{4(\beta^2 j'_1 j'_3 - \alpha_1 \alpha_3)}}{|y|^{-2\alpha_2 \beta^{-1}} |y-1|^{-2\alpha_3 \beta^{-1}} |y-z|^{-2\alpha_1 \beta^{-1}}} Y_{k'}(j'_1, j'_2, j'_3, j'_4) \quad (6.28)$$

con

$$\begin{aligned} Y_{k'}(j'_1, j'_2, j'_3, j'_4) &= (\gamma(\beta^2))^{2j'_1+1} P_{k'}\left(\sum_{a=1}^4 j'_a + 1\right) \prod_{i=1}^4 \frac{\sqrt{\gamma(1 - \beta^2(2j'_i + 1))}}{P_{k'}(2j'_i)} \times \\ &\times \prod_{n=2}^4 P_{k'}\left(\sum_{l=2}^4 j'_l - 2j'_n - j'_1\right) \end{aligned} \quad (6.29)$$

Donde, siempre que x sea un entero positivo,

$$P_{k'}(x) = \prod_{n=1}^x \gamma(n\beta^2), \quad x \geq 1 \quad (6.30)$$

6. Aplicaciones III: Correspondencia AdS_3/CFT_2

para x entero positivo, mientras que $P_{k'}(0) = 1$. El factor de normalización (6.29) es consistente con las reglas de fusión del álgebra [5].

La expresión (6.27) arriba, también admite una representación integral

$$\begin{aligned} & \left\langle \prod_{i=1}^4 \Psi_{j'_i}(y_i|z_i) \right\rangle_{SU(2)} = Y_{k'}(j'_1, j'_2, j'_3, j'_4) |z|^{4\beta^2 j'_1 j'_2} |1-z|^{4\beta^2 j'_1 j'_3} \times \\ & \times \int \prod_{r=1}^{2j'_1} d^2 t_r \prod_{r=1}^{2j'_1} |t_r|^{-4\alpha_2 \beta} |t_r - 1|^{-4\alpha_3 \beta} |t_r - z|^{-4\alpha_1 \beta} |t_r - y|^2 \prod_{r < l} |t_r - t_l|^{4\beta^2} \end{aligned} \quad (6.31)$$

Esto completa el paralelismo con la fórmula (6.17) para el caso $SL(2, \mathbb{R})$. En la siguiente sección se discutirá sobre las amplitudes de cuerdas en $AdS_3 \times S^3$ en términos de las funciones de correlación de los modelos en $SL(2, \mathbb{R})$ y $SU(2)$ respectivamente.

6.3. Amplitudes de cuerdas en $AdS_3 \times S^3$

6.3.1. La Correspondencia AdS_3/CFT_2

Dentro del contexto de la correspondencia AdS_3/CFT_2 , las funciones de correlación del sector de la CFT corresponden a amplitudes de cuerdas en el sector AdS, esto es, funciones de correlación de operadores de dimensión conforme h en la CFT del borde se corresponden con amplitudes de cuerdas en AdS_3 ; esto se realiza de la siguiente forma

$$\prod_{i=3}^N \int d^2 z_i \left\langle \prod_{i=1}^N \Phi_{j_i}(x_i|z_i) \right\rangle_{\text{hoja de mundo}} \times \dots = \left\langle \prod_{i=1}^N \mathcal{O}_{h_i}(x_i) \right\rangle_{\text{borde}} \quad (6.32)$$

Donde los puntos suspensivos representan las contribuciones internas en $S^3 \times T^4$. Para ser más precisos aún, la prescripción completa para el caso particular AdS_3/CFT_2 también incluye contribuciones provenientes de los diagramas disconexos de la hoja de mundo [92].

Los índices j_i , que etiquetan las representaciones de $SL(2, \mathbb{R})$ se relacionan con la dimensión conforme h_i de los operadores de vértice en la teoría dual mediante la sencilla relación

$$h_i = -j_i \quad (6.33)$$

Una forma de ver esto es mirar la dependencia en x de la función de tres-puntos en el modelo WZNW en $SL(2, \mathbb{R})_k$, la cual va como

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{j_1}(x_1|0) \Phi_{j_2}(x_2|1) \Phi_{j_3}(x_3|\infty) \rangle_{sl(2)} &= |x_{12}|^{2(j_1+j_2-j_3)} |x_{23}|^{2(j_2+j_3-j_1)} |x_{13}|^{2(j_3+j_1-j_2)} \times \\ &\times C_{sl(2)}(j_1, j_2, j_3), \end{aligned} \quad (6.34)$$

donde $|x_{ij}| \equiv |x_i - x_j|$. Así, la variable auxiliar compleja x_i puede ahora interpretarse como las coordenadas del borde, donde está definida la CFT_2 dual.

Pedir que se satisfaga la condición de unitariedad de la teoría en la hoja de mundo en AdS_3 exige que el momento j esté acotado según

$$1 - k < 2j < -1 \quad , \quad k > 2 \quad (6.35)$$

6.3. Amplitudes de cuerdas en $AdS_3 \times S^3$

así como la introducción de los sectores con flujo espectral del álgebra de $\hat{sl}(2)_k$, el cual representa estados de cuerdas con enrollamiento en AdS_3 ; ver [58] y las referencias que aparecen allí.

La teoría de campos conformes bidimensional del borde que es dual a la teoría de cuerdas tipo IIB en $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ es alguna deformación de productos simétricos de orbifolds $Sym^N(\tilde{T}^4)$ de N copias de \tilde{T}^4 [93], donde \tilde{T}^4 está estrechamente relacionado con T^4 . Este ejemplo tridimensional de la correspondencia holográfica está motivado por el límite cercano al horizonte del sistema $D1/D5$, donde se ha visto que emerge la geometría $AdS_3 \times S^3 \times T^4$. En la representación S-dual, esta configuración corresponde a setear $Q_5 = \hat{k}$ NS5-branas y Q_1 cuerdas fundamentales, donde el número de copias de \tilde{T}^4 está dado por $N = Q_1 Q_5$. La constante de acoplamiento de la cuerda seis-dimensional está dada por $g_6^2 = Q_5/Q_1$, de modo que la teoría de cuerdas perturbativa es fiable en el límite Q_1 grande, o $N = Q_1 Q_5 \gg Q_5$. En este límite, los estados de cuerdas en el volumen se mapean a estados twisteados en $Sym^N(\tilde{T}^4)$ que están asociados con las clases de conjugación con un ciclo simple no-trivial de longitud n . La relación entre n y el momento de la hoja de mundo es [94, 27]

$$n = 2h - 1 + \hat{k}\omega, \quad 2h = 2, 3, 4, \dots, k, \quad \omega = 0, 1, 2, \dots \quad (6.36)$$

donde h está asociado al índice j de las representaciones de $SL(2, \mathbb{R})$ mediante la relación (6.33), mientras que ω etiqueta el sector de flujo espectral al que pertenecen las representaciones de $SL(2, \mathbb{R})$. En esta sección consideraremos el sector con $\omega = 0$.

Estamos interesados en operadores de vértice en la hoja de mundo que representan estados de cuerdas quirales en $AdS_3 \times S^3 \times T^4$. Como ejemplo, consideremos los operadores de vértice de la hoja de mundo de la forma

$$\mathcal{O}_j(x|z) = \psi(x|z) \times \Phi_j(x|z) \times \Psi_{-1-j}(x|z) \quad (6.37)$$

donde las contribuciones fermiónicas toman la forma

$$\psi(x|z) = -\psi^+(z) + 2x\psi^3(z) - x^2\psi^-(z) \quad (6.38)$$

Este es un operador de vértice de la hoja de mundo asociado a estados quirales de cuerdas del sector NS, escrito en el picture -1 . Para poder calcular una función de tres-puntos se necesita también la expresión de este estado en el picture 0. Este se obtiene leyendo el polo simple del OPE entre la supercorriente de la hoja de mundo $G(z)$ y el operador de vértice $\mathcal{O}_j(x|z)$. De hacer este producto se obtiene

$$\tilde{\mathcal{O}}_j(x|z) = \left(J(x|z) + \frac{2}{\hat{k}}\psi(x|z)\psi_a(z)\mathcal{D}_x^a + \frac{2}{\hat{k}}\psi(x|z)\chi_a(z)\mathcal{K}_x^a \right) \mathcal{O}_j(x|z) \quad (6.39)$$

donde

$$J(x|z) = -J^+(z) + 2xJ^3(z) - x^2J^-(z) \quad (6.40)$$

De acá se ve que el cálculo de la amplitud de tres-puntos $\langle \tilde{\mathcal{O}}_{j_1}(x_1|z_1)\tilde{\mathcal{O}}_{j_2}(x_2|z_2)\tilde{\mathcal{O}}_{j_3}(x_3|z_3) \rangle$ también requiere del cálculo de correladores de la forma $i\epsilon_{cd}^f \langle \psi^a(z_1)\psi^b(z_2)\psi^c(z_3)\psi^d(z_4) \rangle$ así como de los correladores que involucran la inserción del operador de corriente $J^a(z_3)$.

6. Aplicaciones III: Correspondencia AdS_3/CFT_2

De acuerdo con (6.32), los operadores $\tilde{\mathcal{O}}_j(x|z)$ de la hoja de mundo, están asociados con sus contrapartes $\mathcal{O}_{h_i}(x_i)$ en la teoría conforme del borde. La relación entre los spines j de $SL(2, \mathbb{R})$ y j' de $SU(2)$ en (6.37) es tal que la contribución bosónica a la dimensión conforme correspondiente a la porción de $AdS_3 \times S^3$ del modelo sigma da $\Delta_{sl(2)} + \Delta_{su(2)} = 0$. En este punto vale notar también que la relación entre k y k' , o sea, $k - 2 = k' + 2$, fuerza al radio de AdS_3 a ser igual al radio de S^3 , de modo tal que satura la carga central total de la teoría de la hoja de mundo

$$c = \frac{3k}{k-2} + \frac{3k'}{k'+2} + 9 = 3 + \frac{6}{\hat{k}} + 3 - \frac{6}{\hat{k}} + 4 + 5 = 15 \quad (6.41)$$

donde se incluyeron las contribuciones tanto de T^4 (+4) como de los fermiones libres (+5).

En [24, 25], se mostró que las funciones de tres-puntos de operadores quirales (6.37) concuerdan con las funciones de tres-puntos en el producto simétrico en el punto de orbifold. En Refs. [25, 27], se discuten en detalle los cálculos de todos los casos. La función de tres-puntos de operadores quirales de la hoja de mundo (6.37) (con uno de ellos escrito en el picture 0) toma la forma

$$\langle \mathcal{O}_{j_1}(0|0) \mathcal{O}_{j_2}(1|1) \tilde{\mathcal{O}}_{j_3}(\infty|\infty) \rangle_{\text{hoja de mundo}} = \hat{k}^2 |2 - h_1 - h_2 - h_3|^2 C(-h_2, -h_3, -h_4) \quad (6.42)$$

donde el factor $C(j_2, j_3, j_4)$ está dado por el producto de las constantes de estructura de $SL(2, \mathbb{R})$ y $SU(2)$; a saber, $C(j_2, j_3, j_4) = C_{sl(2)}(j_2, j_3, j_4) C_{su(2)}(-1 - j_2, -1 - j_3, -1 - j_4)$; esto es,

$$C(j_2, j_3, j_4) \sim X_k(0, j_2, j_3, j_4) Y_{k-4}(0, -1 - j_2, -1 - j_3, -1 - j_4) \quad (6.43)$$

Cuando se juntan todas las piezas, y luego de alguna manipulación algebraica, la expresión (6.42) puede verse como aquella que coincide con las funciones de tres-puntos de la teoría del borde [95, 96]. Esta coincidencia exhibida por los observables del volumen y del borde es exacta, y varios pasos a través de los cálculos se combinan de un modo tan sutil que no deja duda que es una verificación no-trivial de la conjetura AdS/CFT . El papel que juega el operador de cambio de picture en la función de tres-puntos y por la normalización precisa de la función de dos-puntos son ingredientes cruciales en el cálculo. No obstante, la característica más sobresaliente en el cálculo es, hasta ahora, el hecho que todas las dependencias que mezclan los momentos j_i en la función de tres puntos en $C_{sl(2)}(j_2, j_3, j_4)$ se cancelan con sus contrapartes en $C_{su(2)}(-1 - j_2, -1 - j_3, -1 - j_4)$. En la siguiente sección revisaremos estas cancelaciones y explicaremos porqué este hecho no confronta con la relación analítica que existe entre las constantes de estructura de $SL(2, \mathbb{R})$ y $SU(2)$.

6.3.2. La Función de tres-puntos

Por un lado, la función de tres-puntos en el modelo WZNW en $SL(2, \mathbb{R})_k$ puede obtenerse a partir de (6.12) tomando el límite $j_1 \rightarrow 0$, de esto se obtiene

6.3. Amplitudes de cuerdas en $AdS_3 \times S^3$

$$X_k(0, j_2, j_3, j_4) = \frac{(\nu(b))^{j_2+j_3+j_4+1}}{2\pi^2\gamma(b^2)b^4} \frac{G_k(1+j_2+j_3+j_4)}{G_k(-1)} \prod_{i=2}^4 \frac{G_k(j_2+j_3+j_4-2j_i)}{G_k(2j_i+1)} \quad (6.44)$$

lo que ya habíamos escrito en (6.19). Por otro lado, sabiendo que $\beta = b$, y siendo concientes que para x enteros positivos se mantiene la siguiente identidad

$$P_{k'}(x) = \prod_{n=1}^x \gamma(n\beta^2) = \frac{G_k(-1)}{G_k(-1-x)}, \quad x \geq 1, \quad (6.45)$$

a partir de (6.52), tomando ahora el límite $j_1 \rightarrow -1$, obtenemos la forma explícita para la función de tres-puntos en el modelo $SU(2)_{k'}$, esta es

$$Y_{k'}(0, -1-j_2, -1-j_3, -1-j_4) = \frac{\sqrt{\gamma(b^2)}G_k(-1)}{G_k(1+j_2+j_3+j_4)} \prod_{i=2}^4 \frac{\sqrt{\gamma(1+b^2(2j_i+1))}G_k(2j_i+1)}{G_k(j_2+j_3+j_4-2j_i)} \quad (6.46)$$

Reescribiendo esto en una forma más conveniente, poniendo ambas expresiones (6.44) y (6.46) juntas, encontramos

$$X_k(0, j_2, j_3, j_4)Y_{k'}(0, -1-j_2, -1-j_3, -1-j_4) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \prod_{i=2}^4 \sqrt{B(j_i)}, \quad (6.47)$$

donde observamos que las contribuciones que mezclan las variables de spin j_i han desaparecido.

Esta expresión tiene la particular propiedad de cancelar las contribuciones de las funciones G que provienen del lado de $SL(2, \mathbb{R})_k$ con aquellas que surgen de $SU(2)_{k'}$.

De esta manera, hemos mostrado que las funciones de tres-puntos de estados quirales en $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ se simplifican de tal manera que los números cuánticos de la teoría aparecen completamente factorizados.

6.3.3. La Función de cuatro-puntos

Recordemos la relación entre los momentos de Liouville, α_i y las variables de spin en el modelo WZNW en $SL(2, \mathbb{R})_k$ (con $k-2 = b^{-2}$), j_i ; esto es,

$$a_1 = -\frac{b}{2}(j_1+j_2+j_3+j_4+1), \quad a_i = -\frac{b}{2}(j_1+2j_i-j_2-j_3-j_4-b^{-2}-1), \quad (6.48)$$

para $i = 2, 3, 4$. Esto está en total concordancia con la notación en [43] una vez renombrados los índices mediante $2 \leftrightarrow 1$.

6. Aplicaciones III: Correspondencia AdS_3/CFT_2

Recordemos también la relación entre los momentos de los modelos minimales α_i y del modelo WZNW en $SU(2)_{k'}$ ($k' + 2 = \beta^{-2}$), j'_i ²

$$\alpha_1 = \frac{\beta}{2} (j'_1 + j'_2 + j'_3 + j'_4 + 1), \quad \alpha_i = \frac{\beta}{2} (j'_1 + j'_2 - j'_3 - j'_4 + \beta^{-2} - 1), \quad (6.49)$$

para $i = 2, 3, 4$.

Con el objeto de encontrar la conexión entre α_i y a_i a partir de la existente entre j_i, j'_i, k, k' , hay dos requerimientos que deben tenerse en consideración. Primero, es necesario pedir la condición de supersimetría; esta es AdS_3 y S^3 deben tener un radio común, a saber, $k' + 2 = k - 2$. Segundo, al estar tratando con estados quirales, (1/2 BPS) la contribución bosónica al peso conforme en $AdS_3 \times S^3$ debe anularse, esto significa $j_i = -1 - j'_i$. Así se tiene

$$a_i = \alpha_i + b \quad (6.50)$$

para los cinco estados $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Esta es la relación exacta que deben satisfacer los modelos minimales generalizados α_i y los momentos de Liouville a_i para asegurar que el estado $V_{\alpha_i} \times W_{\alpha_i}$ tenga peso conforme unidad con respecto al tensor de energía-momento $T_{\text{Liouville}} + T_{\text{MinimalModel}}$. A su vez, las restricciones sobre los momentos en los correladores supersimétricos en $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ coinciden con los requerimientos para la invariancia conforme en MLG.

En este punto vale la pena notar que el requerimiento de supersimetría en la interpretación de la teoría de cuerdas puede verse como un requerimiento de simetría conforme en el escenario de la gravedad minimal. Este papel que juegan la supersimetría y la invariancia conforme es al menos intrigante.

Una vez más, usando que para x positivo se satisface la siguiente identidad

$$P_k(x) = \prod_{n=1}^x \gamma(n\beta^2) = \frac{G_k(-1)}{G_k(-1-x)}, \quad x > 0, \quad (6.51)$$

y teniendo en cuenta $j'_i = -1 - j_i$ (para $i = 1, 2, 3, 4$), es posible escribir la ecuación de cuatro-puntos en el modelo WZNW en $SU(2)_{k'}$ como

$$\begin{aligned} Y_{k'}(-1 - j_1, -1 - j_2, -1 - j_3, -1 - j_4) &= \frac{(\gamma(b^2))^{-2j_1-1}}{G_k(2 + \sum_{a=2}^4 j_a)} \prod_{n=1}^4 \frac{G_k(2j_n + 1)}{\sqrt{\gamma(-(2j_n + 1)b^2)}} \times \\ &\times \frac{1}{\prod_{n=2}^4 G_k(-1 - 2j_n - j_1 + \sum_{i=2}^4 j_i)} \quad (6.52) \end{aligned}$$

Tomando el producto de las funciones de cuatro-puntos provenientes de ambos modelos

²Estas relaciones concuerdan con aquellas de [71], siendo $\alpha_i = \beta j_i / 2$, $i = 1, 2, 3, 4$.

6.3. Amplitudes de cuerdas en $AdS_3 \times S^3$

se encuentra que la expresión final es

$$X_k(j_1, j_2, j_3, j_4) Y_{k'}(-1 - j_1, -1 - j_2, -1 - j_3, -1 - j_4) = \frac{\pi^3}{b^{3+4b^2}} \frac{C_W^2}{\Upsilon_0^2} \prod_{i=1}^4 \frac{\sqrt{B(j_i)}}{\gamma(2ba_i - b)} \quad (6.53)$$

donde se eligió $\mu\pi\gamma^2(b^2)b^{4-2b^2} = 1$, y donde $B(j)$ es el coeficiente de reflexión de $SL(2, \mathbb{R})_k$

$$\langle \Phi_{j_1}(x_1|0) \Phi_{j_1}(x_2|1) \rangle = |x_{12}|^{4j_1} B(j_1), \quad \text{con } B(j) = (\nu(b))^{2j+1} \frac{1}{\pi b^2} \gamma(1 + (2j+1)b^2) \quad (6.54)$$

Debemos notar aquí la remarcable similitud entre esta expresión y aquella de la ecuación (6.47), ambas son proporcionales al coeficiente de reflexión. Sin embargo, hay un factor en (6.53) que mezcla los números cuánticos de la teoría a través del momento de Liouville (a_i). Esta semejanza es no obstante algo inquietante ya que uno no esperaría *a priori* algo de este estilo. En el caso de la función de cuatro-puntos la invariancia conforme no es suficiente para fijar las cuatro inserciones, de modo que se esperaría que no hubiese estados quirales en el canal de intercambio.

Entonces, observamos que la amplitud de cuatro cuerdas en $AdS_3 \times S^3$ admite ser escrita en una forma muy sencilla en términos de los números de correlación en los modelos minimales acopladas a la gravedad de Liouville (esto debe entenderse como teoría de cuerdas minimal), digamos

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_{i=1}^4 \Phi_{j_i}(x_i|z_i) \right\rangle_{\text{SL}(2)} &\times \left\langle \prod_{i=1}^4 \Psi_{-1-j_i}(x_i|z_i) \right\rangle_{\text{SU}(2)} = \frac{\pi^3}{b^{3+4b^2}} \frac{C_W^2}{\Upsilon_0^2} \prod_{i=1}^4 \frac{\sqrt{B(j_i)}}{\gamma(2ba_i - b)} \times \\ &\times \frac{|z|^2|1-z|^2}{|x|^2|1-x|^2|z-x|^2} \left\langle \prod_{i=1}^5 U_{\alpha_i}(z_i) \right\rangle_{\text{MLG}} \end{aligned} \quad (6.55)$$

donde $\langle \prod_{i=1}^5 U_{\alpha_i}(z_i) \rangle_{\text{MLG}}$ representa la función de correlación (aún sin integrar) en la gravedad de Liouville minimal; a saber

$$\left\langle \prod_{i=1}^5 U_{\alpha_i}(z_i) \right\rangle_{\text{MLG}} = \left\langle \prod_{i=1}^5 V_{a_i}(z_i) \right\rangle_{\text{LFT}} \times \left\langle \prod_{i=1}^5 W_{a_i-b}(z_i) \right\rangle_{\text{GMM}} \quad (6.56)$$

con $z_2 = 0$, $z_3 = 1$, $z_4 = \infty$, while $z_1 = z$, $z_5 = x$. En este contexto los operadores de vértice de la gravedad minimal pueden escribirse como $U_{\alpha_i} = V_{a_i} \times W_{\alpha_i} = V_{a_i} \times W_{a_i-b}$, siendo $\beta = b$.

Antes de terminar esta sección, notemos que (6.50) es exactamente la misma relación entre los momentos α_i y a_i en MLG, tal como se necesita para que los operadores de vértice $V_{a_i} \times W_{\alpha_i}$ tengan dimensión conforme uno con respecto al tensor de energía-momento completo $T_{\text{Liouville}} + T_{\text{MM}}$.

Usando (6.50) se puede mostrar que las expresiones para la parte bosónica de la función de cuatro-puntos en la hoja de mundo $\langle \mathcal{O}_{j_1} \mathcal{O}_{j_2} \mathcal{O}_{j_3} \mathcal{O}_{j_4} \rangle$ se simplifica considerablemente. Recordando

$$P_k(x) = \prod_{n=1}^x \gamma(n\beta^2) = \frac{G_k(-1)}{G_k(-1-x)}, \quad x > 0 \quad (6.57)$$

6. Aplicaciones III: Correspondencia AdS_3/CFT_2

y teniendo en cuenta $j'_i = -j_i - 1$ (para $i = 1, 2, 3, 4$), podemos escribir la función de cuatro-puntos de $SU(2)'_k$ como sigue

$$Y_{k'}(-1 - j_1, -1 - j_2, -1 - j_3, -1 - j_4) = \frac{(\gamma(b^2))^{-2j_1-1}}{G_k(2 + \sum_{a=2}^4 j_a)} \prod_{n=1}^4 \frac{G_k(2j_n + 1)}{\sqrt{\gamma(-(2j_n + 1)b^2)}} \times \\ \times \frac{1}{\prod_{n=2}^4 G_k(-1 - 2j_n - j_1 + \sum_{i=2}^4 j_i)} \quad (6.58)$$

Considerando ambas ecuaciones (6.12) y (6.58), la expresión final se lee

$$X_k(j_1, j_2, j_3, j_4) \mathcal{Y}_{k'}(-1 - j_1, -1 - j_2, -1 - j_3, -1 - j_4) = \frac{C_W^2}{\Upsilon_0^2} \frac{|z|^2 |1 - z^2|}{|x|^2 |1 - x|^2 |z - x|^2} \times \\ \times \frac{\pi^3}{b^{3+4b^2}} \prod_{i=1}^4 \frac{\sqrt{B(j_i)}}{\gamma(2ba_i - b)} \quad (6.59)$$

donde se ha elegido $\mu\pi\gamma^2(b^2)b^{4-2b^2} = 1$. Aunque el cálculo de la función de cuatro-puntos en la hoja de mundo, requeriría además, tratar con la inserción de operadores de cambio de picture en $\langle \mathcal{O}_{j_1} \mathcal{O}_{j_2} \tilde{\mathcal{O}}_{j_3} \tilde{\mathcal{O}}_{j_4} \rangle$, es todavía esperanzador que el sector bosónico del correlador $\langle \mathcal{O}_{j_1} \mathcal{O}_{j_2} \mathcal{O}_{j_3} \mathcal{O}_{j_4} \rangle$ arroja una forma muy simplificada en términos de la función de cinco puntos de MLG. De hecho, se obtiene

$$\langle \prod_{i=1}^4 \Phi_{j_i}(x_i | z_i) \rangle_{sl(2)} \times \langle \prod_{i=1}^4 \Psi_{-1-j_i}(x_i | z_i) \rangle_{su(2)} \frac{\pi^3}{b^{3+4b^2}} \frac{C_W^2}{\Upsilon_0^2} \prod_{i=1}^4 \frac{\sqrt{B(j_i)}}{\gamma(2ba_i - b)} \times \\ \times \frac{|z|^2 |1 - z^2|}{|x|^2 |1 - x|^2 |z - x|^2} \langle \prod_{i=1}^5 U_{a_i}(z_i) \rangle_{MLG} \quad (6.60)$$

donde $\langle \prod_{i=1}^5 U_{a_i}(z_i) \rangle_{MLG}$ en el lado derecho de la ecuación de arriba refiere a la función de correlación de cinco-puntos en MLG; esto es

$$\langle \prod_{i=1}^5 U_{a_i}(z_i) \rangle_{MLG} = \langle \prod_{i=1}^4 V_{a_i}(z_i) \rangle_{LFT} \times \langle \prod_{i=1}^4 W_{a_i-b}(z_i) \rangle_{GMM} \quad (6.61)$$

con $z_2 = 0$, $z_3 = 1$, $z_4 = \infty$, mientras que $z_1 = z$ y $z_5 = x$. Vale mencionar que las funciones de correlación de N -puntos en MLG se calcularon recientemente [101, 103, 104] para valores particulares de $N - 3$ de los N momentos a_i . De esta manera, el hecho que uno tenga acceso a estos observables convierte la ecuación (6.60) en una relación más que interesante. Por ejemplo, uno podría preguntarse si se observa esta coincidencia holográfica para las funciones de cuatro-puntos extremales en $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ así como sucede en $AdS_5 \times S^5$. Para poder responder a esta clase de interrogantes uno debería aprender más sobre el mecanismo de no-renormalización y, primordialmente, disponer de más información sobre la función de cuatro-puntos del borde. Desafortunadamente, no se dispone aún de cálculos de la función de cuatro-puntos en el producto simétrico para

6.4. Continuación Analítica

poder comparar, sin embargo, durante el año pasado varios autores se han concentrado en este tema³.

6.4. Continuación Analítica

En la sección anterior se mostró que, en la teoría supersimétrica, la función de tres-puntos de los modelos $SL(2, \mathbb{R})_k$ y $SU(2)_{k'}$ se relacionan mediante

$$X_k(0, j_2, j_3, j_4) \sim \frac{\prod_{i=2}^4 \sqrt{B(j_i)}}{Y_{k'}(0, -1 - j_2, -1 - j_3, -1 - j_4)} \quad (6.62)$$

de modo que todas las contribuciones han desaparecido. Esto es lo que permite la concordancia entre los observables del volumen y los del borde.

La expresión (6.62) se debe a las relaciones $j'_i = -1 - j_i$ y $k - 2 = k' + 2$. Puede decirse que (6.62) expresa que el correlador de $SL(2, \mathbb{R})_k$ es el *inverso* de aquellos de $SU(2)_{k'}$, suponiendo esas relaciones entre sus números cuánticos.

En este punto puede aparecer una pregunta natural: esta relación no confronta con el hecho que uno puede continuar analíticamente las expresiones desde $SU(2)_k$ hasta su análogo no compacto $SL(2, \mathbb{R})_k$?

De manera inocente, uno esperaría encontrar la expresión para los correladores para $SL(2, \mathbb{R})_k$ revirtiendo el signo de k en las fórmulas para $SU(2)_k$, y efectuando alguna clase de extensión analítica; a saber,

$$X_k(0, j_2, j_3, j_4) \sim Y_{-k}(0, j_2, j_3, j_4) \prod_{i=2}^4 \sqrt{B(j_i)} \quad (6.63)$$

En esta sección veremos que este es, de hecho, el caso; uno puede continuar analíticamente las expresiones y demostrar una relación del tipo (6.63). Abajo se explicará porqué esto no contradice la relación (6.62).

6.4.1. Continuación Analítica en k

En esta subsección discutiremos la extensión analítica *a là* Dotsenko para la suma.

Las funciones de tres-puntos en los modelos minimales acoplados a la gravedad de Liouville fueron calculados por Dotsenko en [97]. A principio de los años noventa, Dotsenko calculó la función de tres-puntos para la gravedad minimal y encontró que debía tratar con sumas desde 1 hasta enteros negativos. Esta clase de sumas sólo tiene sentido formalmente, de modo que tuvo que proponer una nueva extensión acorde para expresiones de este estilo

$$\prod_{n=1}^x f(n) \quad (6.64)$$

³El lector que estuviese interesado podría consultar, por ejemplo, el trabajo de de Boer et al [105]

6. Aplicaciones III: Correspondencia AdS_3/CFT_2

con x negativo. Veremos más adelante que expresiones similares aparecen al tratar de extender las constantes de estructura de $SU(2)$ para valores negativos de j' y k . Con el objeto de proponer una extensión razonable, Dotsenko comenzó por notar que para x positivos se satisface

$$\Pi_f(x) = \prod_{n=1}^x f(n) = \frac{\prod_{n=1}^{\infty} f(n)}{\prod_{n=t+1}^{\infty} f(n)} = \frac{\prod_{n=1}^{\infty} f(n)}{\prod_{n=1}^{\infty} f(n+t)} \quad (6.65)$$

Después de eso, y de una forma bastante natural, se propone la siguiente extensión para las funciones $\Pi_f(x)$ con argumento negativo [98]

$$\Pi_f(-x) = \prod_{n=0}^{x-1} f^{-1}(-n). \quad (6.66)$$

Consideremos ahora esta extensión analítica para los productos $P_k(x)$ en (6.29), consistentes con esta en particular; no es difícil ver que esta extensión a valores negativos en el límite superior de la suma implica la siguiente expresión como un caso particular

$$\prod_{n=1}^{-|l|} \gamma(nb^2) = b^{4(|l|-1)} \frac{\gamma(|l|)}{\gamma(|l|b^2)} \prod_{n=1}^{+|l|} \gamma(nb^2) \quad (6.67)$$

siendo 1 un entero y donde se usó $\gamma(x)\gamma(1-x) = 1$, $\gamma(1+x) = -x^2\gamma(x)$. Esto permite hacer que la siguiente expresión tenga sentido

$$\prod_{n=-|l|}^{+|l|} \gamma(nb^2) = \gamma(-|l|)b^{-4|l|-2} \quad (6.68)$$

la cual será deducida nuevamente más adelante en una forma alternativa, ya que se hará uso de ella en reiteradas oportunidades para extender analíticamente nuestras expresiones.

Un primer lugar donde se aplicará esta clase de “sumas” será cuando se trate de verificar que la función de tres-puntos del modelo WZNW en $SL(2, \mathbb{R})_k$ puede obtenerse como una extensión analítica de la suma análoga del modelo WZNW en $SU(2)_{-k}$. Aunque podría parecer que esto ya se ha demostrado, debemos evitar esta confusión. Lo que se mostró anteriormente fue que si se relaciona el nivel k de $SL(2, \mathbb{R})_k$ con el nivel k' de $SU(2)_{k'}$ de acuerdo a $k - 2 = k' + 2$, y se relaciona $j_i = -1 - j'_i$ entonces, la función de tres-puntos de $SL(2, \mathbb{R})_k$ era, de alguna manera, inversamente proporcional a la función de tres-puntos del modelo en $SU(2)_{k'}$. Mientras que lo que se quiere mostrar en esta sección es que si bien los correladores son inversos uno a otro cuando $k - 2 = k' + 2$ y $j_i = -1 - j'_i$, son proporcionales (a través de la continuación analítica apropiada) cuando $k = -k'$ y $j_i = j'_i$. Para ver esto es importante notar que asumiendo $k = -k'$, está permitido escribir, para $x > 0$,

$$P_{k'}(x) = \prod_{n=1}^x \gamma(n\beta^2) = \prod_{n=1}^x \gamma(-nb^2) = \prod_{n=1}^x \gamma^{-1}(1 + nb^2) \quad (6.69)$$

6.4. Continuación Analítica

ya que ahora $\beta^2 = \frac{1}{k'+2} = -b^2 = -\frac{1}{k-2}$ (en lugar de $\beta^2 = +b^2$ como antes). Por otro lado, de acuerdo a (6.66), para $x < 0$, se tiene

$$P_{k'}(x) = \frac{\gamma(|x|b^2)}{\Gamma(0)} \left(\prod_{n=1}^{|x|} \gamma(nb^2) \right)^{-1} = \frac{G_k(-1-|x|)}{\Gamma(0)G_k(-1)} \gamma(|x|b^2), \quad x < 0. \quad (6.70)$$

En resumen, si $k = -k'$, $x < 0$ se obtiene $P_{-k}(x) \sim G_k(x-1)\gamma(-xb^2)/G_k(-1)$, mientras que si $k-2 = k'+2$, $x > 0$ se obtiene $P_{-k}(x) \sim G_k(-1)/G_k(-1-x)$. Este resultado y el hecho que $G_k(x) = G_k(-1+x)\gamma(-xb^2)$ pueden emplearse para mostrar que las siguientes identidades se satisfacen (teniendo en cuenta que $k = -k'$, *i.e.* $b^2 = -\beta^2$ y $j_i = j'_i$)⁴

$$\begin{aligned} Y_{-k}(0, j_2, j_3, j_4) &= \frac{\sqrt{\gamma(-b^2)}G_k(-1)(\nu(b))^{j_2+j_3+j_4+2}G_k(1+j_2+j_3+j_4)}{b^3\sqrt{\pi^3B(j_2)B(j_3)B(j_4)}G_k(-1)} \times \\ &\times \frac{G_k(-j_2+j_3+j_4)G_k(j_2-j_3+j_4)G_k(j_2+j_3-j_4)}{G_k(2j_2+1)G_k(2j_3+1)G_k(2j_4+1)} \end{aligned} \quad (6.71)$$

Resulta instructivo comparar (6.71) con (6.19).

Esto significa que, en efecto, existe una relación estrecha entre la función de tres-puntos en $SL(2, \mathbb{R})_k$ y las funciones de tres-puntos en $SU(2)_{k'}$. Notemos que esta relación entre $X_k(0, j_2, j_3, j_4)$ y $Y_k(0, j_2, j_3, j_4)$ es inversa a aquella encontrada entre (6.44) y (6.46).

En la sección que sigue volveremos a ver esta relación pero ahora desde un punto de vista distinto (aunque equivalente) y, en particular, se mostrará cómo la representación de campos libres emerge de esta extensión analítica. En otras palabras, se mostrará que esta relación entre ambos modelos no es otra que la misma clase de continuación analítica que se emplea al considerar la representación de Wakimoto y el formalismo de gas de Coulomb.

6.4.2. Representación de gas de Coulomb

Aquí queremos ver cómo recobrar las constantes de estructura de $SL(2, \mathbb{R})_k$ a partir de (6.29). Esto es, se quiere obtener

$$\left\langle \prod_{i=2}^4 \Phi_{j_i}(x_i|z_i) \right\rangle_{SL(2)} = \prod_{i < j} |x_{ij}|^{2(j_i+j_j-j_k)} |z_{ij}|^{-2(\Delta_i+\Delta_j-\Delta_k)} C(j_2, j_3, j_4) \quad (6.72)$$

Donde $C(j_2, j_3, j_4) = X_k(0, j_2, j_3, j_4)$ son las constantes de estructura del modelo WZNW sobre $SL(2, \mathbb{R})_k$ [85], y $\Delta_i = -b^2 j_i(j_i+1)$ es la dimensión conforme de los operadores en esta teoría. Así, el principal ingrediente de esta discusión será el factor de normalización ya que se desea mostrar que el caso $j_1 = 0$ lleva a la función de tres-puntos correcta.

⁴donde se omitió un factor divergente $\Gamma(0)$

6. Aplicaciones III: Correspondencia AdS_3/CFT_2

Consideremos la cantidad $Y_{-k}(j_1, j_2, j_3, j_4) \prod_{i=1}^4 \sqrt{B(j_i)}$, y consideremos el caso particular $j_1 = 0$

$$Y_{-k}(0, j_2, j_3, j_4) \prod_{i=2}^4 \sqrt{B(j_i)} \sim (\nu(b))^s \gamma(-b^2) \prod_{i=2}^4 \gamma(1 + b^2(2j_a + 1)) \times \quad (6.73)$$

$$\times \frac{P_{-k}(s)P_{-k}(j_2 + j_3 - j_4)P_{-k}(j_2 - j_3 + j_4)P_{-k}(-j_2 + j_3 + j_4)}{P_{-k}(2j_2)P_{-k}(2j_3)P_{-k}(2j_4)} \quad (6.74)$$

donde $s = j_2 + j_3 + j_4 + 1$, y donde el símbolo \sim indica que se han omitido factores irrelevantes, independientes de b . Recordemos además la definición $P_{-k}(x) = \prod_{n=1}^x \gamma(-nb^2)$ with $b^{-2} = k - 2$.

Vale notar además, que aparece un factor divergente $\Gamma(0)$ en (6.74), aunque lo aquí lo omitiremos. Este factor aparece por la integración del modo cero en la realización integral (6.16), en otras palabras, corresponde al factor $\Gamma(-n) = \Gamma(-2j_1)$, ver (6.18). Este factor será finalmente cancelado por otra contribución $\Gamma^{-1}(0)$ proveniente de la extensión analítica; ver (6.92) abajo.

El primer paso para reescribir (6.74) será considerar los tres factores de la forma

$$\frac{P_{-k}(j_2 + j_3 + j_4 - 2j_a)}{P_{-k}(2j_a)} = \frac{\prod_{r=1}^{j_2+j_3+j_4-2j_a} \gamma(-b^2 r)}{\prod_{r=1}^{2j_a} \gamma(-b^2 r)} \quad (6.75)$$

Escribámoslos separándolos en productos según

$$\prod_{r=1}^{j_2+j_3+j_4-2j_a} f(r) = \prod_{r=1}^{2j_a} f(r) \prod_{r=2j_a+1}^{j_2+j_3+j_4-2j_a} f(r) \quad (6.76)$$

lo cual, por supuesto, debería ser cierto en el caso $j_2 + j_3 + j_4 - 2j_a > 2j_a$. Como en el caso [98], el truco acá será suponer la validez de algunas relaciones funcionales (provenientes de la manipulación de esta clase de productos) aún en un rango de índices para los cuales los productos no está necesariamente bien definidos. Así, al menos formalmente, se puede escribir

$$\begin{aligned} \frac{P_{-k}(j_2 + j_3 + j_4 - 2j_a)}{P_{-k}(2j_a)} &= \prod_{r=1}^{2j_a} \gamma^{-1}(-b^2 r) \prod_{r=1}^{2j_a} \gamma(-b^2 r) \prod_{r=2j_a+1}^{j_2+j_3+j_4-2j_a} \gamma(-b^2 r) = \\ &= \prod_{r=2j_a+1}^{j_2+j_3+j_4-2j_a} \gamma(-b^2 r) \end{aligned} \quad (6.77)$$

Una vez más, separemos el producto, básicamente extendiendo lo que sería válido para el caso $2j_a + 1 < -2j_a - 1 < j_2 + j_3 + j_4 - 2j_a$; a saber

$$\prod_{r=2j_a+1}^{j_2+j_3+j_4-2j_a} f(r) = \prod_{r=2j_a+1}^{-2j_a-1} f(r) \prod_{r=-2j_a}^{j_2+j_3+j_4-2j_a} f(r). \quad (6.78)$$

6.4. Continuación Analítica

Aquí, la continuación analítica se vuelve necesaria al tratar de hacer válida la separación de los tres índices j_a simultáneamente dentro del mismo rango de valores. Así, estos reemplazos en la fórmula tiene que ser entendido como una propuesta natural para una clase de extensión analítica en lugar de como una verdadera identidad. La consistencia de los resultados dará, a posteriori, sustancia a estos pasos. Continuando con esta idea, es posible escribir

$$\frac{P_k(j_2 + j_3 + j_4 - 2j_a)}{P_k(2j_a)} = \prod_{r=2j_a+1}^{-2j_a-1} \gamma(-b^2 r) \prod_{r=-2j_a}^{j_2+j_3+j_4-2j_a} \gamma(-b^2 r) \quad (6.79)$$

En este punto es importante hacer una observación preliminar, reemplazaremos los productos de la forma $\prod_{r=-x}^x \gamma(-b^2 r)$ que aparecen en la expresión de arriba por la cantidad $(-b^2)^{-2x-1} \gamma(-x)$, esto es, usando ⁵

$$\prod_{r=2j_a+1}^{-2j_a-1} \gamma(-b^2 r) = (-b^2)^{4j_a+1} \gamma(2j_a + 1) \quad (6.80)$$

Luego, (6.74) tendría la forma

$$\begin{aligned} \prod_{i=2}^4 \sqrt{B(j_i)} Y_{-k}(0, j_2, j_3, j_4) &\sim (\nu(b))^s \gamma(-b^2) (-b^2)^{4(1-s)} \prod_{a=2}^4 \frac{\gamma(2j_a + 1)}{\gamma(-b^2(2j_a + 1))} \times \\ &\times \prod_{r=1}^s \gamma(-b^2 r) \prod_{b=2}^4 \prod_{r=-2j_b}^{j_2+j_3+j_4-j_b} \gamma(-b^2 r) \end{aligned} \quad (6.81)$$

Una vez más, manipulando las funciones Γ , se tiene

$$\begin{aligned} Y_{-k}(0, j_2, j_3, j_4) \prod_{i=2}^4 \sqrt{B(j_i)} &\sim (\nu(b))^s \gamma(-b^2) \frac{\gamma(j_2 - j_3 - j_4)}{\gamma(2j_2 + 1)} \times \\ &\times \frac{(-1)^s}{\pi^s \gamma^s(b^2) \Gamma(-s) \Gamma(1+s)} \prod_{a=2}^4 \frac{\gamma(2j_a + 1)}{\gamma(-b^2(2j_a + 1))} \mathcal{I}_k \end{aligned} \quad (6.82)$$

donde, para abreviar, se definió

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_k &= \Gamma(-s) \Gamma(s+1) \pi^s (-1)^s (-b^2)^{2s} (\gamma(b^2))^s \prod_{r=1}^s \gamma(-b^2 r) \times \\ &\times \prod_{r=0}^{s-1} (\gamma(1 - b^2(r - 2j_2)) \gamma(-b^2(r - 2j_3)) \gamma(-b^2(r - 2j_4))) \end{aligned} \quad (6.83)$$

⁵Esto puede verse heurísticamente de la siguiente manera: Primero se considera la expansión $\prod_{r=-x}^x \gamma(-b^2 r) = \frac{\Gamma(b^2 x) \Gamma(b^2(x-1)) \dots \Gamma(b^2) \Gamma(0) \Gamma(-b^2) \dots \Gamma(-b^2 x)}{\Gamma(1-b^2 x) \Gamma(1-b^2(x-1)) \dots \Gamma(1-b^2) \Gamma(1) \Gamma(1+b^2) \dots \Gamma(1+b^2 x)}$ la cual, usando que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ y reemplazando $\Gamma(0) = (-1)^{-x} \Gamma(-x) \Gamma(x+1)$, uno encuentra (6.80). Notar que esto es consistente con las prescripción (6.66).

6. Aplicaciones III: Correspondencia AdS_3/CFT_2

La razón por la que se prefirió escribir la expresión para $\prod_{i=2}^4 \sqrt{B(j_i)} B_{-k}(0, j_2, j_3, j_4)$ de esta forma (6.83)-(6.84) es que puede identificarse con la contribución proveniente de una integral de Dotsenko-Fateev⁶

$$\mathcal{I}_k = \Gamma(-s) \prod_{r=1}^s \int d^2 w_r \prod_{r=1}^s |w_r|^{4j_2 b^2} |1 - w_r|^{4j_3 b^2 - 2} \prod_{r < t}^{s-1, s} |w_r - w_t|^{-4b^2} \quad (6.84)$$

Esto se sigue de la fórmula (B.9) del apéndice de Ref. [48].

Vale notar que la integral (6.84) es precisamente la que aparece cuando se usa la representación de campos libres de Wakimoto para realizar los correladores de tres-puntos [68]. Por ejemplo, el exponente de $|1 - w_r|^{-2+4j_3 b^2}$ en (6.84) puede pensarse como el que viene de la contracción de Wick entre un vértice de $SL(2, \mathbb{R})_k$ y las cargas de apantallamiento. Por otro lado, las contribuciones $|w_r|^{+4j_2 b^2}$ indican la presencia de estados de peso más alto de las representaciones discretas en el correlador.

La representación de campos libres de Wakimoto se sigue de considerar la acción⁷

$$S[\phi, \beta, \gamma] = \frac{1}{4\pi} \int d^2 z \left(\partial\phi\bar{\partial}\phi - bR\phi/2\sqrt{2} + \bar{\beta}\bar{\partial}\bar{\gamma} + \beta\bar{\partial}\gamma + 4\pi\beta\bar{\beta}e^{-\sqrt{2}b\phi} \right) \quad (6.85)$$

con propagadores

$$\langle \beta(w)\gamma(z) \rangle = \frac{1}{(w-z)}, \quad \langle \phi(w)\phi(z) \rangle = 2 \log |w-z| \quad (6.86)$$

En el régimen de ϕ grande, el cuál corresponde al límite cercano al borde en el espacio AdS_3 , los operadores de vértice se definen, como en el Capítulo 2, mediante

$$\Phi_{j_i, m_i, \bar{m}_i}(z_i) = \gamma_{(z_i)}^{j_i+m_i} \gamma_{(\bar{z}_i)}^{j_i+\bar{m}_i} e^{\sqrt{2}j_i b\phi(z_i)} + B(j_i)\gamma_{(z_i)}^{-1-j_i+m_i} \gamma_{(\bar{z}_i)}^{-1-j_i+\bar{m}_i} e^{-\sqrt{2}(j_i+1)b\phi(z_i)} + \dots \quad (6.87)$$

Estos se obtienen aplicando la transformada de Fourier a los operadores de vértice en la base x , a saber

$$\Phi_{j_i, m_i, \bar{m}_i}(z_i) = \int d^2 x_i \Phi_{j_i}(x_i|z_i) x_i^{j_i+m_i} \bar{x}_i^{j_i+\bar{m}_i} \quad (6.88)$$

$i = 2, 3, 4$. Los operadores de apantallamiento que usaremos en este caso son

$$\mathcal{S}(w_r) = \beta_{(w_r)} \bar{\beta}_{(w_r)} e^{-\sqrt{2}b\phi(w_r)}, \quad (6.89)$$

donde $r = 1, 2, \dots, s$, con $s = j_2 + j_3 + j_4 + 1$.

La relación precisa entre funciones de tres-puntos en la base m y las de la base x que se mostraron en el Capítulo 2 fueron estudiadas en [59]. Allí se demostró que, expresiones como el lado derecho de (6.83) llevan al resultado exacto [85, 7, 69] a través de una continuación analítica. Más aún, en la Ref. [59] (ver Eqs. (2.45) y (2.63) allí), se argumentó que

⁶Al comparar con [68] debe considerarse $\rho = -b^2$.

⁷Esta es la acción (2.109) del Capítulo 2.

6.4. Continuación Analítica

la integral de Dotsenko-Fateev referida arriba podría ser continuada formalmente de modo de ser expresada también en términos de funciones especiales, de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_k &= b^2 \pi^s (\gamma(b^2))^s \gamma(-1 - j_2 - j_3 - j_4) \gamma(2j_2 + 1) \gamma(-j_2 - j_3 + j_4) \gamma(-j_2 + j_3 - j_4) \times \\ &\times \frac{G_k(-2 - j_2 - j_3 - j_4)}{G_k(-1)} \prod_{a=2}^4 \frac{G_k(-1 - j_2 - j_3 - j_4 + 2j_a)}{G_k(-2j_a - 1)} \end{aligned} \quad (6.90)$$

La forma de proponer la expresión (6.90) hace uso de la extensión analítica de las propiedades funcionales que conectan a la función $G_k(x)$ con la función Γ ; ver [59, 100] por detalles. La fórmula (6.90) también se empleó para calcular funciones de correlación en otra realización de campos libres, conocida con el nombre de cono de luz discreto [99], donde se también se dedujo la expresión exacta de la función de tres-puntos [102]. Si se presupone acá la misma continuación analítica, esto permite reemplazar la pieza

$$\begin{aligned} (-b^2)^{2s} \prod_{r=1}^s \gamma(-b^2 r) \prod_{r=0}^{s-1} \gamma(1 - b^2(r - 2j_2)) \gamma(-b^2(r - 2j_3)) \gamma(-b^2(r - 2j_4)) = \\ = \frac{(-1)^s}{\Gamma(-s)\Gamma(s+1)\pi^s \gamma^s(b^2)} \mathcal{I}_k, \end{aligned} \quad (6.91)$$

que aparece en (6.83), por la siguiente contribución,

$$\begin{aligned} \frac{(-b^2)^{-2s+1} \gamma(-1 - j_2 - j_3 - j_4) \gamma(-j_2 - j_3 + j_4) \gamma(-j_2 + j_3 - j_4)}{\Gamma(0)} \times \\ \times \frac{\gamma(2j_2 + 1) G_k(-2 - j_2 - j_3 - j_4)}{G_k(-1)} \prod_{a=2}^4 \frac{G_k(-1 - j_2 - j_3 - j_4 + 2j_a)}{G_k(-2j_a - 1)} \end{aligned} \quad (6.92)$$

donde el factor $\Gamma^{-1}(0)$ viene de escribir $(-1)^{-s} \Gamma(-s) \Gamma(s+1) = \Gamma(0)$. Como fuera mencionado anteriormente, este factor cancela precisamente el factor divergente $\Gamma(-2j_1) = \Gamma(0)$ al evaluar $j_1 = 0$ en (6.16). Teniendo en cuenta las propiedades funcionales (6.13)-(6.13), se encuentra

$$Y_{-k}(0, j_2, j_3, j_4) \prod_{i=2}^4 \sqrt{B(j_i)} \sim (\nu(b))^{j_2+j_3+j_4+1} \frac{G_k(1 + j_2 + j_3 + j_4)}{G_k(-1)} \prod_{a=2}^4 \frac{G_k(j_2 + j_3 + j_4 - 2j_a)}{G_k(2j_a + 1)} \quad (6.93)$$

En resumen, se recuperaron las constantes de estructura de $SL(2, \mathbb{R})_k$ a partir de la expresión para el modelo en $SU(2)_{k'}$; a saber, $\prod_{i=2}^4 \sqrt{B(j_i)} Y_{-k}(0, j_2, j_3, j_4) \sim C(j_2, j_3, j_4)$. Esto no es otra cosa que (6.63), lo que se demostró en la sección anterior por medio de la relación (6.70).

Conclusiones

En este capítulo hacemos un resumen de los resultados originales que aparecen en este trabajo de tesis. También reservamos una sección para discutir futuras direcciones que se podrían seguir en esta línea de investigación.

7.1. Resultados Originales

A continuación se presentan, de manera resumida y esquemática, los resultados originales más importantes obtenidos durante el trabajo de tesis.

En este trabajo investigamos las interrelaciones entre las siguientes tres nociones: la dualidad de nivel de Langlands $k - 2 \rightarrow \tilde{k} - 2 = 1/(k - 2)$, la correspondencia SRT H_3^+ -Liouville y la reducción hamiltoniana de DS. Primero dedujimos una versión dual de la fórmula de correspondencia H_3^+ -Liouville (4.2) inducida por la auto-dualidad de Liouville ante $b \rightarrow b^{-1}$. También se discutió cómo la fórmula dual puede interpretarse como un caso particular de las CFT's no-rationales recientemente propuestas en [22]. Usando la realización de campos libres confirmamos que el modelo H_3^+ WZNW está en realidad doblemente representado dentro del espacio de parámetros (m, b) . Las técnicas de campos libres también nos permitieron calcular explícitamente funciones de tres-puntos para estas CFT's no-rationales.

La fórmula dual (4.2) que demostramos aquí, junto con la fórmula original de [8], muestran cómo la dualidad de nivel de Langlands del modelo H_3^+ WZNW se manifiesta a nivel de las funciones de correlación de n -puntos. Esto se realiza particularmente en (5.47) (ver también (5.60)). Hemos argumentado cómo tales ecuaciones pueden pensarse como una realización en términos de la reducción hamiltoniana a nivel de las funciones de correlación. Más precisamente, hemos propuesto su realización en términos de un límite de la relación SRT (dual). Esta está representada en (5.46) deducida en el límite $\mu_i \rightarrow 0$, que corresponde a la reducción hamiltoniana en la base μ .

El estudio de la relación entre la correspondencia SRT H_3^+ -Liouville y la reducción hamiltoniana DS podría resultar relevante en el contexto de la correspondencia geométrica

de Langlands. De hecho, (5.46) (ver también (5.54)) pueden verse como una versión cuántica (no quirral) de la correspondencia geométrica de Langlands, en sentido que esta fórmula selecciona bases precisas de las funciones de correlación de n -puntos de WZNW que admiten ser expresadas en términos de funciones de correlación de n -puntos del álgebra de Virasoro. Enfatizamos que la ventaja de (5.46) (ver también (5.54)) sobre las demás expresiones es que esta provee un mapa entre funciones de n -puntos en ambos lados, sin agregar campos degenerados adicionales.

Otra aplicación de la relación existente entre la teoría de Liouville y el modelo WZNW la encontramos al estudiar la conjetura de Maldacena: Motivados por recientes resultados en la correspondencia AdS_3/CFT_2 más allá del límite de supergravedad, se revisaron los cálculos de amplitudes de scattering de supercuerdas de estados quirales en $AdS_3 \times S^3 \times T^4$. Luego de revisar las sorprendentes cancelaciones entre distintas contribuciones a las funciones de tres-puntos que llevan a esta expresión final factorizada. Nuestro análisis muestra con precisión la importancia de la supersimetría para que dichas cancelaciones tomen lugar [31]. Se comentó también sobre el problema de la función de cuatro-puntos; se describió cómo la función de cuatro-puntos de estados quirales en $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ admiten ser escritos en términos de funciones de cinco-puntos particulares de la gravedad minimal. Se escribió una expresión suscita para este observable. Desafortunadamente, no se dispone de observables en la teoría del borde para comparar este resultado, pero cálculos explícitos recientes de observables de cinco-puntos particulares de la gravedad minimal hacen que la situación de la teoría de la hoja de mundo sea promisoria. De hecho, hemos mostrado que, así como la función de tres-puntos, la función de cuatro-puntos de estados quirales también exhibe una simplificación remarcable que lleva a una expresión casi factorizada. Además, también explicamos cómo el hecho que las amplitudes en AdS_3 y aquellas en S^3 lleven a una expresión factorizada no confronta con el hecho bien conocido que las fórmulas del modelo WZNW en $SL(2, \mathbb{R})_k$ pueden obtenerse a partir de aquellas del modelo WZNW en $SU(2)_{k'}$ mediante una continuación analítica en k . Esto resulta estar relacionado con el corrimiento del nivel k del álgebra de Kac-Moody en la teoría supersimétrica; mientras que en la teoría bosónica una continuación analítica apropiada de los correladores de $SU(2)_{k'}$ lleva a la expresión de los correladores de $SL(2, \mathbb{R})_k$, en la teoría supersimétrica los dos observables son, rápidamente hablando, uno inverso del otro. Esta cancelación en las amplitudes de supercuerdas es la clave para la coincidencia entre las funciones de tres-puntos en el volumen y en el borde.

7.2. Futuras Direcciones

Pensamos que los temas estudiados en este trabajo de tesis podrían tener continuación en las siguientes generalizaciones y aplicaciones:

La comprensión de la relación precisa entre la reducción hamiltoniana DS cuántica y la correspondencia SRT H_3^+ –Liouville sería importante por su elevado rango de generalización. Se cree comúnmente que una correspondencia análoga podría existir entre el

7.2. Futuras Direcciones

modelo $SL(N, \mathbb{R})_k$ WZNW y la teoría de campos afín Toda ¹(correspondientes a la fórmula SRT para $N = 2$). Como la versión cuántica de la reducción hamiltoniana admite una generalización a $N > 2$ [108], este enfoque podría ser un medio natural para contestar estas preguntas y encontrar sus extensiones posibles en rangos más altos.

Una posible generalización de los resultados del Capítulo 5, sería ampliar el estudio de las familias conformes biparamétricas [22] al caso de CFT's con bordes. En particular se podrían calcular funciones de correlación en la geometría del disco y verificar que se obtengan los resultados conocidos para la teoría de Liouville y WZNW para valores particulares del parámetro m ; en [106] se puede encontrar el cálculo para la función de un punto en el disco.

En el Capítulo 6, vimos que en el caso de $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ aparece a nivel de las funciones de 3-puntos, una coincidencia holográfica. Un paso natural a seguir en esta dirección sería ver si esta coincidencia se mantiene para las funciones de 4-puntos extremales. La idea sería entonces conocer en mayor profundidad el mecanismo de no-renormalización y tratar de encontrar una expresión cerrada para la función de 4-puntos en el borde, cosa que por ahora no se conoce, si bien en la literatura puede encontrarse una extensa lista de trabajos en esa dirección.

Por último, mencionemos un nuevo resultado que podría tener gran conexión con lo tratado en esta tesis: El año pasado se llevó la correspondencia entre la teoría de Liouville y otras teorías conformes mucho más allá de lo esperado. Alday, Gaiotto, y Tachikawa (AGT) [109], conjeturaron un mapa entre la función de partición de Nekrasov asociada a ciertas teorías de gauge $SU(2)$ superconformes con $\mathcal{N} = 2$ supersimetrías y los bloques conformes de Virasoro de la teoría de Liouville. Esto fue confirmado por el cálculo explícito a varios órdenes en expansiones de potencias y la evidencia es bastante convincente. Muchas preguntas hay todavía abiertas en este tema que podrían encontrar respuesta en futuros trabajos relacionados con los temas de esta tesis. Por un lado, como vimos en el Capítulo 2, las constantes de estructura en la teoría de Liouville presentan la simetría $b \rightarrow 1/b$; sería oportuno preguntarse entonces qué simetría subyace en el sector de la teoría de gauge superconforme. Por otro lado, si bien ya se calcularon explícitamente algunos casos particulares [110], podría calcularse la función de 1-punto en la geometría del toro ($g = 1$) en LFT y comparar explícitamente con aquella teoría de gauge asociada a esta configuración.

¹Recientemente, [107] calculó ciertas clases de funciones de correlación en teorías de campos conformes Toda.

Apéndice A

La conjetura FZZ

En este Apéndice se describe brevemente la conjetura que fuera formulada por Fateev-Zamolodchikov-Zamolodchikov (FZZ).

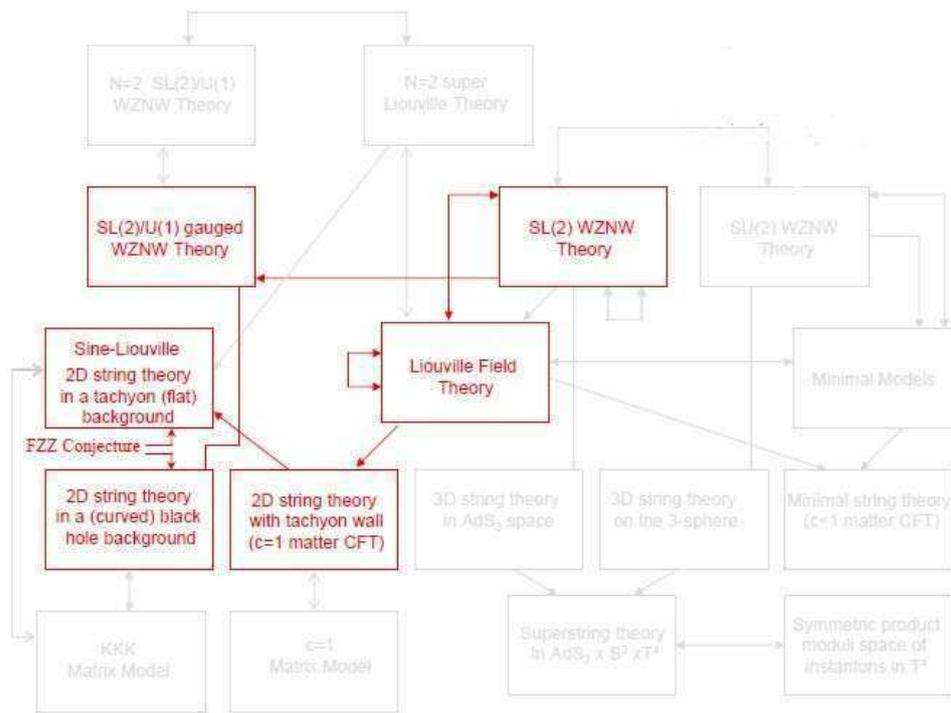


Figura A.1: La dualidad FZZ en la Red de Teorías Conformes

Aquí daremos una breve reseña sobre la dualidad FZZ, que relaciona una teoría de cuerdas bidimensional en un background de agujero negro con una deformación de la teoría de Liouville denominada Sine-Liouville. Esto cubriría la porción de relaciones que se encuentra remarcada en la Figura A.1 y que completa la red de dualidades entre teorías conformes bidimensionales.

La conjetura FZZ establece que uno puede identificar funciones de correlación en la teoría de cuerdas en dos dimensiones formulada en un fondo de agujero negro con funciones de correlación en la teoría de Sine-Liouville, a saber

$$\left\langle \prod_{\nu=1}^N \Psi_{(n_\nu, \omega_\nu)}^{SL(2,R)/U(1);j_\nu}(z_\nu, \bar{z}_\nu) \right\rangle_k^{SL(2,R)/U(1)} = \mathcal{N} \left\langle \prod_{\nu=1}^N \Psi_{(\omega_\nu, n_\nu)}^{SL;j_\nu}(z_\nu, \bar{z}_\nu) \right\rangle_R^{SL} \quad (\text{A.1})$$

donde $\Psi_{(n_\nu, \omega_\nu)}^{SL(2,R)/U(1);j_\nu}(z_\nu, \bar{z}_\nu)$ representan los operadores de vértice del modelo coset y $\Psi_{(\omega_\nu, n_\nu)}^{SL;j_\nu}(z_\nu, \bar{z}_\nu)$ representan los operadores de Sine-Liouville. El factor de normalización \mathcal{N} depende del parámetro b , la violación del número de winding $S = \sum \omega_\nu$ y el número N de operadores de vértice.

Esta correspondencia es del tipo fuerte-débil, lo que sugiere que podría ser deducida como alguna clase de perturbación de otros resultados conocidos relacionados con la simetría especular; de hecho, una versión supersimétrica de esta dualidad fue demostrada por Hori y Kapustin en [112] usando para esto la equivalencia entre modelo $SL(2, R)/U(1)$ de Kazama-Suzuki y la teoría de Super Liouville con $N = 2$.

Otras demostraciones de esta conjetura se encuentran en la literatura. Maldacena en 2005 [113] usó la simetría especular de Kazama y Suzuki para mostrar la correspondencia a nivel de supercuerdas y mostró que al bosonizar la teoría, la correspondencia se seguía manteniendo a nivel bosónico. Más adelante, en 2007, Giribet y Leoni en [46] mostraron que una conjetura similar a la FZZ pero entre Sine-Liouville y una deformación marginal del cigarro podía demostrarse sin recurrir a argumentos de supersimetría. Finalmente, Hikida y Schomerus en [114] se valieron de este resultado anterior para dar una demostración para la conjetura FZZ sin recurrir a la supersimetría.

Invariancia conforme en la teoría de Liouville

En este apéndice se discute brevemente la invariancia conforme en la teoría de Liouville, un estudio más detallado puede encontrarse en [39]. Comencemos escribiendo la densidad lagrangiana de esta teoría en la forma

$$\mathcal{L}_0^{\text{Liouville}} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{m^2}{\beta^2}e^{\beta\phi} \quad (\text{B.1})$$

Las transformaciones de simetría conforme actúan de manera afín, de modo que la interacción exponencial permanece invariante; la teoría es entonces invariante ante

$$\delta\phi = f^\alpha\partial_\alpha\phi + \frac{1}{\beta}\partial_\alpha f^\alpha \quad (\text{B.2})$$

donde f^α es un vector de Killing conforme en el espacio plano. El tensor de energía-momento

$$\Theta_{\mu\nu}^{\text{canonico}} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \eta_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - \frac{m^2}{\beta^2}e^{\beta\phi}\right) \quad (\text{B.3})$$

es conservado y simétrico, como se esperaría de una teoría invariante ante Poincaré; sin embargo, no tiene traza nula. Efectivamente, $\eta_{\mu\nu}\Theta_{\mu\nu}^{\text{canonico}} \neq 0$. Sin embargo, debido a la invariancia conforme de (B.1), $\Theta_{\mu\nu}^{\text{canonico}}$ puede ser modificado añadiendo una expresión conservada y simétrica de modo que este nuevo tensor sí tenga traza nula. Este nuevo tensor tiene la forma

$$\Theta_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu}^{\text{canonico}} + \frac{2}{\beta}(\eta_{\mu\nu}\square - \partial_\mu\partial_\nu)\phi, \quad \eta^{\mu\nu}\Theta_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{B.4})$$

Es posible hacer una deducción variacional de (B.3) después de acoplar mínimamente la acción (B.1) a un tensor métrico $g_{\mu\nu}$, variando la acción integral con respecto a la métrica $g_{\mu\nu}$. El tensor (B.3) se recobra en el límite $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$. Una deducción similar del tensor (B.4) se obtiene al agregar a la densidad lagrangiana (B.1) generalizada a espacios curvos una interacción no-minimal particular

$$\mathcal{L}^{\text{Liouville}} = \frac{1}{\beta}R\phi + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{m^2}{\beta^2}e^{\beta\phi} \quad (\text{B.5})$$

B. Invariancia conforme en la teoría de Liouville

Así, el nuevo tensor de energía-momento es

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int \sqrt{|g|} \mathcal{L}^{\text{Liouville}} \\ &= \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - \frac{m^2}{\beta^2} e^{\beta\phi} \right) + \frac{2}{\beta} (g_{\mu\nu} D^2 - D_\mu D_\nu) \phi \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

No es difícil ver que

$$T_{\mu\nu} \overrightarrow{g_{\mu\nu}} \rightarrow \eta_{\mu\nu} \Theta_{\mu\nu} \quad (\text{B.7})$$

Sin embargo, el tensor $T_{\mu\nu}$ en el espacio curvo no tiene traza nula

$$g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = \frac{2}{\beta^2} R \neq 0 \quad (\text{B.8})$$

De acá se ve que el tensor de energía-momento se vuelve sin traza en el límite de espacio plano, donde R se anula. Así mismo, la acción asociada a (B.5) no es invariante ante transformaciones de Weyl

$$\phi \xrightarrow{\text{Weyl}} \phi - \frac{2}{\beta} \sigma \quad (\text{B.9})$$

Esta transformación es necesaria para hacer de la densidad de interacción $\sqrt{|g|} e^{\beta\phi}$. Sin embargo, el término cinético junto con el término no-minimal no son invariantes, de modo que

$$\begin{aligned} I^{\text{Liouville}} &= \int \sqrt{|g|} \mathcal{L}^{\text{Liouville}} \\ \xrightarrow{\text{Weyl}} I^{\text{Liouville}} &- \frac{2}{\beta^2} \int \sqrt{|g|} (R\sigma + g^{\mu\nu} \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Vale notar que el cambio en la acción es independiente de ϕ , con lo cual, la ecuación de campo

$$D^2 \phi + \frac{m^2}{\beta} e^{\beta\phi} - \frac{1}{\beta} R = 0 \quad (\text{B.11})$$

posee invariancia de Weyl, aún cuando la acción no la tiene.

Integración del modo cero en los correladores de LFT

Dedicaremos este apéndice al cálculo explícito de la integración de los modos cero de los campos en la integral funcional de Liouville. Como resultado de esto veremos que se obtienen las leyes de conservación correspondientes¹.

La integral funcional (2.63) puede resolverse separando el campo φ en la contribución de los modos constantes y los modos oscilatorios

$$\varphi = \varphi_0 + \tilde{\varphi} \quad (\text{C.1})$$

Para ver esto en detalle, comencemos con ver cómo transforman ante esta separación la acción y los operadores de vértice. La acción (2.56) puede escribirse como

$$S_L[\mu] = \tilde{S}_L[0] + 4\pi \int d^2z Q R \varphi_0 + \mu e^{\sqrt{2}b\varphi_0} \int d^2z e^{\sqrt{2}b\tilde{\varphi}} \quad (\text{C.2})$$

con $\tilde{S}_L[0]$ la acción libre de Liouville para el modo $\tilde{\varphi}$. Ahora bien, el teorema de Gauss-Bonet dice que sobre superficies cerradas se satisface

$$\int d^2z \sqrt{h} R = 2\pi(1 - g) \quad (\text{C.3})$$

donde h es la métrica de la variedad bidimensional, g el género y R la curvatura. Teniendo en cuenta que se quiere ver la integración en la esfera (*i.e.* $g=0$), se tiene que la acción de Liouville transformará según

$$S_L[\mu] = \tilde{S}_L[0] + \sqrt{2}Q\varphi_0 + \mu e^{\sqrt{2}b\varphi_0} \int d^2z e^{\sqrt{2}b\tilde{\varphi}} \quad (\text{C.4})$$

¹Ver [115] para una deducción detallada así como interesante de la integración del modo cero en la teoría de Liouville

C. Integración del modo cero en los correladores de LFT

En cuanto al producto de operadores de vértice, estos transformarán como

$$\prod_{i=1}^N e^{\sqrt{2}\alpha_i\varphi(z_i)} = e^{\sqrt{2}\sum_{i=1}^N(\alpha_i)\varphi_0} \prod_{i=1}^N e^{\sqrt{2}\alpha_i\tilde{\varphi}(z_i)} \quad (\text{C.5})$$

Reemplazando esto en la integral funcional (2.63) se tiene

$$\mathcal{A}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^{Liouville}(z_n, \dots, z_1 | \alpha_n, \dots, \alpha_1) = \int \mathcal{D}\tilde{\varphi} d\varphi_0 e^{-\tilde{S}_L[0]} e^{\sqrt{2}\sum_{i=1}^N(\alpha_i-Q)\varphi_0} e^{-\mu e^{\sqrt{2}b\varphi_0} V_{\tilde{\varphi}}} \prod_{i=1}^N e^{\sqrt{2}\alpha_i\tilde{\varphi}(z_i)} \quad (\text{C.6})$$

donde se definió $V_{\tilde{\varphi}} = \int d^2z e^{\sqrt{2}b\tilde{\varphi}(z)}$. Usando la identidad

$$e^{-\mu e^{\sqrt{2}b\varphi_0} V_{\tilde{\varphi}}} = \int_0^\infty du e^{-\mu V_{\tilde{\varphi}} U} \delta(U - e^{\sqrt{2}b\varphi_0}) \quad (\text{C.7})$$

y transformando la delta de Dirac mediante

$$\frac{\delta(x - x_0)}{\left. \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x_0}} = \delta(F(x) - F(x_0)) \quad (\text{C.8})$$

la integral funcional (C.6) resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^{Liouville} &= (\sqrt{2}b^{-1}) \int \mathcal{D}\tilde{\varphi} e^{-\tilde{S}_L[0]} \int_{-\infty}^\infty d\varphi_0 \int_0^\infty dU U^{-1} \times \\ &\times e^{\sqrt{2}\sum_{i=1}^N(\alpha_i-Q)\varphi_0} e^{-\mu V_{\tilde{\varphi}} U} \delta\left(\varphi_0 - \frac{1}{\sqrt{2}b} \ln U\right) \prod_{i=1}^N e^{\sqrt{2}\alpha_i\tilde{\varphi}(z_i)} \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

De esta manera es inmediata la integral en φ_0 , mientras que para integrar en U hay que hacer uso de la identidad

$$\int_{-\infty}^\infty dU U^{x-1} e^{-aU} = a^{-x} \Gamma(x) \quad (\text{C.10})$$

Así, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^{Liouville} &= (\sqrt{2}b^{-1}) \mu^s \Gamma(-s) \delta\left(s + b^{-1} \sum_{i=1}^N (\alpha_i) - b^{-1}Q\right) \times \\ &\times \int \mathcal{D}\tilde{\varphi} e^{-\tilde{S}_L[0]} \prod_{i=1}^N e^{\sqrt{2}\alpha_i\tilde{\varphi}(z_i)} \int \prod_{k=1}^s d^2w_k \prod_{k=1}^s e^{\sqrt{2}b\tilde{\varphi}(w_k)} \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Este resultado puede verse de la siguiente forma

$$\mathcal{A}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^{Liouville} = (\sqrt{2}b^{-1}) \mu^s \Gamma(-s) \delta\left(s + b^{-1} \sum_{i=1}^N (\alpha_i) - b^{-1}Q\right) \int \prod_{k=1}^s d^2w_k \left\langle \prod_{k=1}^s e^{\sqrt{2}b\tilde{\varphi}(w_k)} \prod_{i=1}^N e^{\sqrt{2}\alpha_i\tilde{\varphi}(z_i)} \right\rangle_{S_L[0]} \quad (\text{C.12})$$

De acá se ve que lo que se calcula es el valor de expectación de vacío de un producto de operadores de vértice de la teoría de Liouville sin interacción. Además, la aparición de la delta indica una conservación de los momentos de Liouville, esta es

$$Q = sb + \sum_{i=1}^N (\alpha_i) \quad (\text{C.13})$$

Notemos que para que tenga sentido la productoria debemos pedir que s sea un número entero, sin embargo, la conservación dada por la delta de Dirac no supone tal cosa.

Funciones Especiales

Aquí resumimos algunas fórmulas de funciones especiales.

La función $\Upsilon(x)$ (que antes denotamos $\Upsilon_b(x)$ para hacer explícita la dependencia con el parámetro b) fue introducida por Zamolodchikov y Zamolodchikov en Ref. [41], y está definida por

$$\Upsilon(x) = \exp \left(\int_0^\infty \frac{dt}{t} \left[\left(\frac{Q}{2} - x \right)^2 e^{-t} - \frac{\sinh^2 \left(\frac{Q}{2} - x \right) \frac{t}{2}}{\sinh \frac{bt}{2} \sinh \frac{t}{2b}} \right] \right) \quad (\text{D.1})$$

para $0 < \Re(x) < Q$, y por su continuación analítica fuera de esta cinta. Satisface las ecuaciones de periodicidad

$$\Upsilon(x+b) = \gamma(bx)b^{1-2x}\Upsilon(x), \quad \Upsilon(x+b^{-1}) = \gamma(xb^{-1})b^{2xb^{-1}-1}\Upsilon(x), \quad (\text{D.2})$$

donde $\gamma(x) = \Gamma(x)/\Gamma(1-x)$, la cual obedece $\gamma(x)\gamma(1-x) = 1$, $\gamma(x)\gamma(-x) = -x^{-2}$. Notar también que la definición (D.1) es invariante ante $b \rightarrow b^{-1}$, y este factor produce más relaciones funcionales interesantes.

Por otro lado, la función especial $G(x)$ se define en términos de $\Upsilon(x)$ por

$$G(x) = \Upsilon^{-1}(-bx)b^{-b^2x^2-(b^2+1)x}, \quad (\text{D.3})$$

y en consecuencia satisface las ecuaciones de periodicidad

$$G(x) = \gamma(-x)b^{-2(2x+1)}G(x-b^{-2}), \quad G(x+1) = \gamma(-(1+x)b^2)G(x). \quad (\text{D.4})$$

La función $G(x)$ también puede definirse en términos de la función Γ_2 de Barnes de la siguiente manera

$$G(x) = b^{x(xb^2-1-b^2)}\Gamma_2(-x|1, b^{-2})\Gamma_2(b^{-2}-1+x|1, b^{-2}), \quad (\text{D.5})$$

con

$$\log \Gamma_2(x|1, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \partial_\varepsilon \left(\sum_{n,m} (x+n+my)^{-\varepsilon} - \sum_{n,m} (n+my)^{-\varepsilon} \right), \quad (\text{D.6})$$

D. Funciones Especiales

donde la primera suma corre sobre enteros positivos $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ and $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, mientras que la segunda suma excluye los pasos $n = m = 0$. La función $G(x)$ desarrolla polos en

$$x = n + mb^{-2}, \quad x = -(1 + n) - (m + 1)b^{-2} \quad (\text{D.7})$$

También es útil introducir la función *dual* $\tilde{G}(x)$ que se define como en (D.5) reemplazando $b \rightarrow b^{-1}$. Una manifestación de la invariancia de (D.1) ante $b \rightarrow b^{-1}$ es la siguiente identidad

$$G(x) = (k - 2)^{(x^2 + (k-1)x)/(k-2)} \tilde{G}(x/(k - 2)), \quad (\text{D.8})$$

donde $b^{-2} = k - 2$. La relación (D.8) puede verse de (D.3).

En el texto principal también hemos usado la siguiente fórmula intergral, que es conocida como la integral de Dotsenko-Fateev

$$\frac{1}{m!} \int d^2 z_i \prod_{i=1}^m |z_i|^{2\alpha} |1 - z_i|^{2\beta} \prod_{i < j}^m |z_i - z_j|^{4\rho} = \pi^m (\gamma(1 - \rho))^m \times \quad (\text{D.9})$$

$$\times \prod_{i=1}^m \gamma(i\rho) \gamma(1 + \alpha + (i - 1)\rho) \gamma(1 + \beta + (i - 1)\rho) \gamma(-1 - \alpha - \beta - (m - 2 + i)\rho) \quad (\text{D.10})$$

Bibliografía

- [1] J. Distler y H. Kawai, *Conformal field theory and 2D quantum gravity or who's afraid of Joseph Liouville?*, Nucl. Phys. **B321**, (1989), 509.
- [2] Polchinski, Joseph, *Remarks on the Liouville Field Theory*, Presented at Strings '90 Conf., College Station, TX, Mar 12-17, 1990".
- [3] Teschner, Jorg, *Liouville theory revisited*, Class. Quant. Grav. **18** (2001) 153, [arXiv:hep-th/0104158].
- [4] Y. Nakayama, *Liouville Field Theory - A decade after the revolution*, Int.J.Mod.Phys. **A19** (2004) 2771, [arXiv:hep-th/0402009].
- [5] O. Andreev, *Operator algebra of the $SL(2)$ conformal field theories*, Phys. Lett. **B363** (1995) 166, [arXiv:hep-th/9504082].
- [6] J. Teschner, *On the Liouville three point function*, Phys. Lett. **B363** (1995) 65, [arXiv:hep-th/9507109].
- [7] J. Teschner, *Operator product expansion and factorization in the H_3^+ -WZNW model*, Nucl. Phys. **B571** (2000) 555, [arXiv:hep-th/9906215].
- [8] S. Ribault and J. Teschner, *H_3^+ correlators from Liouville theory*, JHEP. **0506**, (2005), 014, [arXiv:hep-th/0502048].
- [9] V. Fateev, *Relation between Sine-Liouville and Liouville correlation functions*, unpublished.
- [10] T. Takayanagi, *$c < 1$ String from two dimensional black holes*, JHEP **07** (2005) 050; [arXiv:hep-th/0503237].
- [11] S. Nakamura and V. Niarchos, *Notes on the S-Matrix of bosonic and topological non-critical strings*, JHEP **10** (2005) 025; [arXiv:hep-th/0507252].
- [12] D. Sahakyan and T. Takayanagi, *On the connection between $N = 2$ minimal string and $(1, n)$ bosonic minimal string*, JHEP **06** (2006) 027; [arXiv:hep-th/0512112].

-
- [13] V. Niarchos, *On minimal $N = 4$ topological strings and the $(1, k)$ minimal bosonic string*, JHEP **03** (2006) 045; [arXiv:hep-th/0512222].
- [14] G. Giribet, *The string theory on AdS_3 as a marginal deformation of a linear dilaton background*, Nucl. Phys. **B737** (2006) 209; [arXiv:hep-th/0511252].
- [15] G. Giribet and Y. Nakayama, *The Stoyanovsky-Ribault-Teschner map and string scattering amplitudes*, Int. J. Mod. Phys. **A21** (2006) 4003; [arXiv:hep-th/0505203].
- [16] L. O' Raifeartaigh, J. Pawłowski, V. Sreedhar *The duality of quantum Liouville theory*, Annals Phys. **277**, 117, (1999), [arXiv:hep-th/9811090].
- [17] L. O' Raifeartaigh, V. Sreedhar *Duality in Liouville theory as a reduced symmetry*, Phys. Letter **B461**, 66, (1999), [arXiv:hep-th/9906116].
- [18] L. O' Raifeartaigh, J. Pawłowski, V. Sreedhar *The two-exponential Liouville theory and the uniqueness of the three-point function*, Phys. Letter **B481**, 436, (2000), [arXiv:hep-th/0003247].
- [19] A. V. Stoyanovsky, *Quantum Langlands duality and conformal field theory*, [arXiv:math/0610974].
- [20] I. Bakas and C. Sourdis, *On the tensionless limit of gauged WZW models*, JHEP **0406** (2004) 049, [arXiv:hep-th/0403165].
- [21] I. Bakas and C. Sourdis, *Aspects of WZW models at critical level*, Fortsch. Phys. **53** (2005) 409, [arXiv:hep-th/0501127].
- [22] S. Ribault, *A family of solvable non-rational conformal field theories*, JHEP **05** (2008) 073, [arXiv:0803.2099].
- [23] G. Giribet and Y. Nakayama, and L. Nicolás, *Langlands duality in Liouville- H_3^+ WZNW correspondence*, Int.J.Mod.Phys. **A24**, (2009), 3137, [arXiv:hep-th/0805.1254].
- [24] M. Gaberdiel and I. Kirsch, *Worldsheet correlators in $AdS(3)/CFT(2)$* , JHEP **0704**, (2007), 050, [arXiv:hep-th/0703001].
- [25] A. Dabholkar and A. Pakman, *Exact chiral ring of $AdS(3)/CFT(2)$* , Adv. Theor. Math. Phys. **13**, (2009), 409, [arXiv:hep-th/0703022].
- [26] A. Sever and A. Pakman, *Exact $N = 4$ correlators of $AdS(3)/CFT(2)$* , Phys. Lett. **B652**, (2007), 60, [arXiv:0704.3040].
- [27] G. Giribet, A. Pakman and L. Rastelli, *Spectral flow in $AdS(3)/CFT(2)$* , JHEP **0806**, (2008), 013, [arXiv:0712.3046].
- [28] M. Taylor, *Matching of correlators in AdS_3/CFT_2* , JHEP **0806**, (2008), 010, [arXiv:0709.1838].

BIBLIOGRAFÍA

- [29] J. de Boer, J. Manschot, K. Papadodimas, E. Verlinde, *The chiral ring of AdS3/CFT2 and the attractor mechanism*, JHEP. **03**, (2009), 30, [arXiv:0809.0507].
- [30] V. Schomerus, *Non-compact string backgrounds and non-rational CFT*, Phys. Rept. **431**, (2006), 39, [arXiv:hep-th/0509155].
- [31] G. Giribet, L. Nicolás *Comment on three-point function in AdS(3)/CFT(2)*, J. Math. Phys. **50**, (2009), 042304, [arXiv:0812.2732].
- [32] D. Friedan, E. Martinec y S. Shenker, *Conformal Invariance, supersymmetry and string theory*, Nucl. Phys. **B 325**, (1986), 93.
- [33] Knizhnik, V. G. and Zamolodchikov, A. B., *Current algebra and Wess-Zumino model in two dimensions*, Nucl. Phys. **B247**, (1984), 83.
- [34] Belavin, A. A. and Polyakov, Alexander M. and Zamolodchikov, A. B., *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*, Nucl. Phys. **B241**, (1984), 333.
- [35] Di Francesco, P. and Mathieu, P. and Senechal, D., *Conformal field theory*, New York, USA: Springer, (1997), 890 p.
- [36] Ginsparg, Paul H., *Applied Conformal Field Theory*, (1988), [arXiv:hep-th/9108028].
- [37] Ginsparg, Paul H. and Moore, Gregory W., *Lectures on 2-D gravity and 2-D string theory*, (1993), 015, [arXiv:hep-th/9304011].
- [38] Polyakov, Alexander M., *Quantum geometry of bosonic strings*, Phys. Lett. **B103**, (1981), 207.
- [39] Roman Jackiw, *Weyl symmetry and the Liouville theory*, Theor. Math. Phys. **148**, (2006), 941, [hep-th/0511065].
- [40] Teschner, Jorg, *A lecture on the Liouville vertex operators*, Int. J. Mod. Phys. **A19S2**, (2004), 436, [arXiv:hep-th/0303150].
- [41] Zamolodchikov, Alexander B. and Zamolodchikov, Alexei B. *Structure constants and conformal bootstrap in Liouville field theory*, Nucl. Phys. **B477**, (1996), 577, [arXiv:hep-th/9506136].
- [42] Zamolodchikov, A. *Higher equations of motion in Liouville field theory*, Int. J. Mod. Phys. **A19S2**, (2004), 510, [arXiv:hep-th/0312279].
- [43] J. Teschner, *Crossing symmetry in the H_3^+ WZNW model*, Phys. Lett. **B521**, (2001), 127, [arXiv:hep-th/0108121].
- [44] A. Pakman, *Liouville theory without an action*, Phys. Lett. **B642**, (2006), 263, [arXiv:hep-th/0601197].

-
- [45] Dorn, Harald and Otto, H. J. *On correlation functions for noncritical strings with $c_{j=1} = d_{j=1}$* , Phys. Lett., **B291**, (1992), 39, [arXiv:hep-th/9206053].
- [46] Goulian, M. and Li, Miao, *Correlation functions in Liouville theory*, Phys. Rev. Lett. **66**, (1991), 2051, [arXiv:hep-th/0512238].
- [47] P. Di Francesco and D. Kutasov, *Worldsheet and space-time physics in two-dimensional (super)string theory*, Nucl.Phys. **B375**, (1992), 119, [arXiv:hep-th/9109005].
- [48] V.S. Dotsenko y V.A. Fateev, *Conformal algebra and multipoint correlation functions in two-dimensional statistical models*, Nucl. Phys. **B 240**, (1984), 312.
- [49] V. Dotsenko and V. Fateev, *Four-point correlation functions and the operator algebra in the two-dimensional conformal invariant theories with the central charge $c < 1$* , Nucl. Phys. **B251**, (1985), 691.
- [50] Dorn, Harald and Otto, H. J. *Two and three point functions in Liouville theory*, Nucl. Phys., **B429**, (1994), 375, [arXiv:hep-th/9403141].
- [51] S.P. Novikov, *The Hamiltonian formalism and a many valued analog of Morse theory*, Usp.Mat.Nauk. **37N5**, (1982), 3.
- [52] E. Witten, *Nonabelian bosonization in two dimensions* Comm.Math.Phys. **92**, (1984), 455.
- [53] K. Hosomichi, K. Okuyama, y Y. Satoh, *Free field approach to string theory on $AdS(3)$* , Phys. Nucl. Phys. **B598**, (2001), 451, [arXiv:hep-th/0009107].
- [54] N. Ishibashi, K. Okuyama y Y. Satoh, *Path integral approach to string theory on AdS_3* , Nucl. Phys. **B 588**, (2000), 149, [arXiv:hep-th/0005152].
- [55] M. Wakimoto, *Fock representations of the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$* , Comm. Math. Phys. **104**, (1986), 605.
- [56] J. Maldacena, H. Ooguri, *Strings in AdS_3 y the $SL(2,R)$ WZNW model. Part 1*, J.Math.Phys. **42**, (2001), 2929, [arXiv:hep-th/0001053].
- [57] D. Kutasov y N. Seiberg, *More comments on string theory on AdS_3* , JHEP. **04**, (1999), 008, [arXiv:hep-th/9903219].
- [58] J. Maldacena and H. Ooguri, *Strings in AdS_3 and the $SL(2,R)$ WZW model. Part 3: Correlation functions*, Phys.Rev. **D65**, (2002), 106006, [arXiv:hep-th/0111180].
- [59] G. Giribet and C. Núñez, *Correlators in AdS_3 string theory*, JHEP **0106**, (2001), 010, [arXiv:hep-th/0105200].

BIBLIOGRAFÍA

- [60] Y. Satoh, *On string theory in $AdS(3)$ backgrounds*, Phys. Nucl. Phys. **B598**, (1999), 451, [arXiv:hep-th/0005169].
- [61] J. Polchinski *String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string*, Cambridge, UK: Univ. Pr. (1998), 402 p.
- [62] , M. B. Green, J. H. Schwarz, y E. Witten, *Superstring theory. VOL. 1: Itroduction*, Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1987), 469 P. (Cambridge monographs on mathematical physics)
- [63] D. Lust y S. Theisen, *Lectures on string theory*, Lect. Notes Phys. 346, (1989).
- [64] J. M. Maldacena, *The large N limit of superconformal field theories and supergravity*, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, (1998), 231, [arXiv:hep-th/9711200].
- [65] A. Giveon, D. Kutasov y N. Seiberg, *Comments on string theory on AdS_3* , JHEP. **2**, (1998), 733, [arXiv:hep-th/9806194].
- [66] J. Maldacena, H. Ooguri y J. Son, *Strings in AdS_3 y the $SL(2,R)$ WZNW model. Part 2: Euclidean black hole*, J.Math.Phys. **42**, (2001), 2961.
- [67] F. Nitti y M. Porrati, *Hidden $sl(2, R)$ symmetry in 2D CFTs and the wave function of 3D quantum gravity*, JHEP**0401**, (2004), 028, [arXiv:hep-th/0311069].
- [68] K. Becker y M. Becker, *Interactions in the $SL(2, R)/U(1)$ black hole background*, Nucl. Phys. **B418**, (1994), 206, [arXiv:hep-th/9310046].
- [69] J. Teschner, *The Mini-Superspace limit of the $SL(2, C)/SU(2)$ -WZNW model*, Nucl. Phys. **B546**, (1999), 369, [arXiv:hep-th/9712258].
- [70] M. Leoni y G. Giribet, *A twisted FZZ-like dual for the 2D black hole*, Rept. Math. Phys. **61**, (2008), 151, [arXiv:0706.0036].
- [71] A. B. Zamolodchikov y V. A. Fateev, *Operator algebra and correlation functions in the two-dimensional Wess-Zumino $SU(2) \times SU(2)$ chiral model*, Sov. J. Nucl. Phys. **43**, (1986), 657.
- [72] J.L. Petersen, J. Rasmussen y M. Yu, *Free field realizations of 2D current algebras, screening currents and primary fields*, Nucl. Phys. **B502**, (1997), 649, [arXiv:hep-th/9704052].
- [73] B. Ponsot, *Monodromy of solutions of the Knizhnik-Zamolodchikov equation: $SL(2,C)/SU(2)$ WZNW model*, Nucl.Phys. **B642**, (2002), 114, [arXiv:hep-th/0204085].
- [74] G. Giribet, *A Note on Z_2 Symmetries of the Knizhnik-Zamolodchikov Equation*, J. Math. Phys. **48**, (2007), 012304, [arXiv:hep-th/0608104].

-
- [75] A. Stoyanovsky, *A relation between the Knizhnik-Zamolodchikov and Belavin-Polyakov-Zamolodchikov systems of partial differential equations*, [arXiv:math-ph/0012013].
- [76] S. Ribault, *Knizhnik-Zamolodchikov equations and spectral flow in AdS3 string theory*, JHEP **0509**, (2005), 045, [arXiv:hep-th/0507114].
- [77] Y. Hikida y V. Schomerus, *H_3^+ WZNW model from Liouville field theory*, JHEP. **10**, (2007), 064, [arXiv:0706.1030].
- [78] E. Frenkel, *Lectures on the Langlands Program and Conformal Field Theory*, Lectures delivered at the Les Houches School on Number Theory and Physics, March, 2003, and at the DARPA Workshop on Langlands Program and Physics, at the Institute for Advanced Study, March, 2004, [arXiv:hep-th/0512172].
- [79] A. Giveon, D. Kutasov y N. Seiberg, *Comments on string theory on AdS₃*, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, (1998), 733, [arXiv:hep-th/9806194].
- [80] K. Hosomichi, K. Okuyama y Y. Satoh, *Free field approach to string theory on AdS(3)*, Phys. Nucl. Phys. **B598**, (2001), 451, [arXiv:hep-th/0009107].
- [81] K. Hosomichi y S. Ribault, *Solution of the H_3^+ model on a disc*, JHEP **01**, (2007), 057, [arXiv:hep-th/0610117].
- [82] S. Ribault, *Boundary three-point function on AdS₂ D-branes*, JHEP **01**, (2008), 004, [arXiv:0708.3028].
- [83] V. Fateev y S. Ribault, *Boundary action of the H_3^+ model*, JHEP **02**, (2008), 024, [arXiv:0710.2093].
- [84] Y. Hikida y V. Schomerus, *Structure constants of the OSP(1|2) WZNW model*, JHEP. **12**, (2007), 100, [arXiv:0711.0338].
- [85] J. Teschner, *On structure constants and fusion rules in the SL(2, C)/SU(2) WZNW model*, Nucl. Phys. **B546**, (1999), 390, [arXiv:hep-th/9712256].
- [86] J. Petersen, J. Rasmussen y M. Yu, *Hamiltonian reduction of SL(2)-theories at the level of correlators*, Nucl. Phys. **B457**, (1995), 343, [arXiv:hep-th/9506180].
- [87] Y. Satoh, *Three-point function and operator product expansion in SL(2) conformal field theory*, Nucl. Phys. **B629**, (2002), 188, [arXiv:hep-th/0109059].
- [88] Al. Zamolodchikov, *Perturbed conformal field theory on fluctuating sphere*, Contribution to the Balkan workshop BW2003, “Mathematical, Theoretical and Phenomenological Challenges Beyond Standard Model”, Vrnjancka Banja, Serbia, [arXiv:hep-th/0508044].

BIBLIOGRAFÍA

- [89] G. Giribet y C. Simeone, *Liouville theory and logarithmic solutions to Knizhnik-Zamolodchikov equation*, Int. J. Mod. Phys. **A20**, (2005), 4821, [arXiv:hep-th/0402206].
- [90] E. D'Hoker, D. Freedman, S. Marthur, A. Matusis y L. Rastelli, *Extremal correlators in AdS/CFT correspondence*, Int. J. Mod. Phys. **A20**, (2005), 4821, [arXiv:hep-th/0402206].
- [91] D. Freedman, S. Marthur, A. Matusis y L. Rastelli, *Comments on four-point function in AdS/CFT Correspondence*, Phys. Lett. **B452**, (1999), 61, [arXiv:hep-th/9908160].
- [92] J. de Boer, H. Ooguri, H. Robins y J. Tannenhauser, *String Theory on AdS₃*, JHEP **9812**, (1998), 026, [arXiv:hep-th/9812046].
- [93] N. Seiberg y E. Witten, *The D1/D5 system and singular CFT*, JHEP **9904**, (1999), 017, [arXiv:hep-th/9903224].
- [94] R. Argurio, A. Giveon y A. Shomer, *Superstrings on AdS₃ and symmetric products*, JHEP. **0012**, (2000), 003, [arXiv:hep-th/0009242].
- [95] O.Lunin y S. Mathur, *Three-point functions for m(n)/s(n) orbifolds with N = 4 supersymmetry*, Comm. Math. Phys. **227**, (2002), 385, [arXiv:hep-th/0103169].
- [96] O.Lunin y S. Mathur, *Correlation functions for m(n)/s(n) orbifolds*, Comm. Math. Phys. **219** (2001) 399, [arXiv:hep-th/0006196].
- [97] Dotsenko, V. S. *Solving the SU(2) conformal field theory with the Wakimoto free field representation*, Nucl. Phys. **B358**, (1991), 547.
- [98] V. Dotsenko, *Three-point correlation functions of the minimal conformal theories coupled to 2D gravity*, Mod. Phys. Lett. **A6**, (1991), 36.
- [99] Y. Hikida, K. Hosomichi y Y. Sugawara *String theory on AdS₃ as discrete light-cone Liouville theory*, Nucl. Phys. **B589**, (2000), 134, [arXiv:hep-th/0005065].
- [100] V. Fateev y A. Litvinov, *Multipoint correlation functions in Liouville field theory and minimal Liouville gravity*, Theor. Math. Phys. **154**, (2008), 454, [arXiv:0707.1664].
- [101] V. Fateev y A. Litvinov, *Coulomb integrals in Liouville theory and Liouville gravity*, JETP Lett. **84**, (2007), 531.
- [102] G. Giribet, *Three-point function in perturbed Liouville gravity*, Phys. Lett. **B637**, (2006), 192, [arXiv:hep-th/0602109].
- [103] A. Belavin y A. Zamolodchikov, *Moduli integrals and ground ring in minimal Liouville gravity*, JETP Lett. **82**, (2005) 7; A. Belavin y A. Zamolodchikov, *Integrals over moduli spaces, ground ring, and four-point function in minimal Liouville gravity*, Theor. Math. Phys. **147**, (2006), 729.

-
- [104] I. Kostov y V. Petkova, *Bulk correlation functions in 2D quantum gravity*, Theor. Math. Phys. **146** (2006) 108.
- [105] J. de Boer, J. Manschot, K. Papadodimas y E. Verlinde, *The chiral ring of AdS3/CFT2 and the attractor mechanism*, JHEP **03**, (2009), 030, [arXiv:0809.0507].
- [106] J. P. Babaro y G. Giribet, *Disk one-point function for non-rational conformal theories*, (2010), [arXiv:1005.2607].
- [107] V. A. Fateev y A. V. Litvinov, *Correlation functions in conformal Toda field theory I*, JHEP **0711**, 002, (2007), [arXiv:0709.3806].
- [108] M. Bershadsky y H. Ooguri, *Hidden $Sl(N)$ symmetry in conformal field theories*, Commun. Math. Phys. **126**, (1989), 49.
- [109] L. Alday, D. Gaiotto y Y. Tachikawa *Liouville correlation functions from four-dimensional gauge theories*, Lett. Math. Phys. **91**, (2010), 167, [arXiv:0906.3219].
- [110] G. Giribet *On AGT description of $\mathcal{N} = 2$ SCFT with $N_f = 4$* , [arXiv:0906.0638].
- [111] V. Fateev, A. Zamolodchikov y Al. Zamolodchikov, unpublsh.
- [112] K.Hori, y A. Kapustin, *Duality of the fermionic 2d black hole and $N = 2$ Liouville theory as mirror symmetry*, JHEP, **08**, (2001), 45, [arXiv:hep-th/0104202].
- [113] J. M. Maldacena, *Long strings in two dimensional string theory and non-singlets in the matrix model*, JHEP, **09**, (2005), 78, [arXiv:hep-th/0503112].
- [114] Y. Hikida y V. Schomerus, *The FZZ-Duality Conjecture-A Proof*, JHEP, **03**, (2009), 95, [arXiv:0805.3931].
- [115] M. Leoni *Un Nuevo Modelo Dual para la Teoría de Cuerdas en un Agujero Negro*, Tesis de Licenciatura, UBA, (2007).