

Tesis Doctoral

# Historias contextuales

Vanni, Leonardo

2010

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Vanni, Leonardo. (2010). Historias contextuales. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

Cita tipo Chicago:

Vanni, Leonardo. "Historias contextuales". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2010.

**EXACTAS** UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



**UBA**

Universidad de Buenos Aires



**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**

**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**

**Departamento de Física**

## **Historias Contextuales**

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Física.

**Leonardo Vanni**

Director de Tesis: Dr. Roberto Laura.

Consejero de Estudios: Dr. Mario Castagnino.

Lugar de Trabajo: Instituto de Astronomía y Física del Espacio I.A.F.E.

Fecha: 1 de junio de 2010

# Historias Contextuales

Leonardo Vanni.

1 de junio de 2010

## Historias Contextuales

En la mecánica clásica y en la mecánica cuántica, mediante la noción habitual de traslación temporal, definimos una relación de equivalencia entre propiedades a distintos tiempos, de modo que propiedades temporalmente equivalentes queden reunidas en una única clase de equivalencia.

Estas clases forman nuevas propiedades, y como tales es posible definir entre ellas una relación de orden y las operaciones de conjunción disyunción y negación, lo cual permite organizarlas dentro de un retículo ortocomplementado, pero no necesariamente distributivo en el caso cuántico.

Cuando la dinámica es tenida en cuenta, indagamos como este lenguaje de clases habilita una comparación de las descripciones clásicas y cuánticas. En el caso cuántico, la posibilidad de establecer clases de propiedades temporalmente equivalentes, conduce a definir el concepto de historia como una conjunción de clases de propiedades a distintos tiempos, la cual se traduce a la clase obtenida de la conjunción de las propiedades cuando estas son trasladadas a un tiempo común.

No obstante, dada una particular evolución temporal, no todas las posibles conjunciones así construidas, permiten una descripción válida en términos de historias. Solo bajo determinada condición sobre las propiedades elegidas a distintos tiempos, las conjunciones entre ellas establecen historias, que como nuevas propiedades, forman los átomos de un retículo distributivo, es decir un conjunto de propiedades compatibles con las cuales es posible una descripción legítima que involucre al tiempo. Este retículo forma un contexto, un contexto de historias, o historias contextuales, y determina que es lo está permitido decir sobre propiedades elegidas, para la particular evolución temporal presente.

Se analiza y compara este formalismo con el ya conocido de historias consistentes. El nuevo formalismo es aplicado para analizar el experimento de la doble rendija, el interferómetro de Mach-Zender, y el proceso de medición.

**PALABRAS CLAVES:** Historia, contexto, retículo, propiedad, traslación temporal, clase de equivalencia.

## Contextual Histories

Both in classical and quantum mechanics, using the notion of time translation, we defined an equivalence relation between properties at different times, either in the classic or quantum case, such that time equivalent properties are included in an single class of equivalence.

These classes form new properties, and as such it is possible to define an order relation among them and the operations of conjunction, disjunction and negation. These classes are organized in an orthocomplemented lattice, which is not necessarily distributive in the quantum case.

We investigated if this language of classes allows a comparison of the classical and quantum descriptions, when dynamics is considered. In the quantum case, the possibility of establishing classes of temporarily equivalent properties, leads to define the concept of history as a conjunction of classes of properties at different times, which is the class of the conjunction of the properties when they are translated at the same common time.

However, given a particular temporal evolution, not all the possible conjunctions obtained in this way, allow a valid description in terms of histories. Only under certain condition on the properties chosen at different times, the conjunctions among them establish histories, which like new properties, form atoms of a distributive and orthocomplemented lattice, that is to say, a set of compatible properties through which it is possible a legitimate description of the system at different times. This lattice forms a context, a context of histories, or contextual histories, and determines what is allowed to say about the chosen properties, for the particular temporal evolution generated by the Hamiltonian of the system.

This formalism is analyzed and compared with the well known of consistent histories. The new formalism is also applied to analyse the double slit experiment, the Mach-Zender interferometer, and the measurement process.

**KEY WORDS:** History, context, lattice, property, time translation, equivalence class of properties.

## Agradecimientos

Quiero destacar la dirección de esta tesis por parte de Roberto Laura, quien genero siempre un trato cordial y de igual a igual; y quien me ayudó y apoyó en el trabajo aún en momentos personales no del todo favorables.

Por supuesto, incluyo en los agradecimientos a Mario Castagnino, por ser siempre un referente y consejero, y a Olimpia Lombardi por su empuje y actitud.

Quiero también agradecer a Romina Zuponne y Martin Narvaia, por sus discusiones filosóficas.

Finalmente a mis padres, que estuvieron.

+

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Colapso de la función de onda</b>	<b>14</b>
2.1. Teoría cuántica de la medición . . . . .	14
2.2. Los problemas de la medición . . . . .	18
2.2.1. El problema de la lectura definida . . . . .	19
2.2.2. El problema de la base preferida . . . . .	20
2.3. Probabilidad condicional y colapso efectivo . . . . .	21
2.3.1. Mediciones ideales y colapso . . . . .	22
2.3.2. Mediciones no ideales . . . . .	26
2.3.3. Mediciones generalizadas . . . . .	28
2.3.4. Macroscopicidad de los instrumentos . . . . .	29
<b>3. Propiedades dependientes del tiempo</b>	<b>33</b>
3.1. Estados y propiedades clásicas . . . . .	33
3.2. Estados y propiedades cuánticas . . . . .	42
3.3. Propiedades clásicas dependientes del tiempo. . . . .	50
3.4. Propiedades cuánticas dependientes del tiempo. . . . .	56
3.5. Relaciones entre propiedades clásicas y cuánticas. . . . .	63
<b>4. Historias cuánticas</b>	<b>68</b>
4.1. Historias contextuales . . . . .	69
4.1.1. Historias a dos tiempos . . . . .	70
4.1.2. Historias a varios tiempos. . . . .	75
4.2. Historias consistentes . . . . .	77
4.2.1. Historias a dos tiempos. . . . .	81
4.2.2. Historias a tres y más tiempos. . . . .	83
4.3. Comparación de historias consistentes con historias contextuales	86

4.3.1. Ejemplo comparativo . . . . .	89
<b>5. Aplicaciones</b>	<b>96</b>
5.1. La doble rendija sin instrumentos de medición . . . . .	97
5.2. La doble rendija con instrumentos de medición . . . . .	99
5.3. El interferómetro de Mach-Zehnder . . . . .	103
5.4. El interferómetro de Mach-Zehnder modificado . . . . .	107
<b>6. Estructura de propiedades en el proceso de medición</b>	<b>110</b>
6.1. Historias contextuales en el proceso de medición. . . . .	111
6.2. Historias contextuales y la deducción del colapso. . . . .	118
<b>7. Conclusiones</b>	<b>123</b>
<b>A. Los axiomas de la probabilidad para propiedades clásicas</b>	<b>129</b>
<b>B. Los axiomas de la probabilidad para propiedades cuánticas</b>	<b>130</b>
<b>C. Los axiomas de la probabilidad para clases de equivalencia clásicas</b>	<b>132</b>
<b>D. Los axiomas de la probabilidad para clases de equivalencia cuánticas</b>	<b>133</b>
<b>E. Evolución temporal de la densidad de probabilidad en la teoría clásica</b>	<b>134</b>
<b>F. Condicion de consistencia en el ejemplo de spin 1/2</b>	<b>135</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Toda teoría física basa su utilidad en la capacidad de describir propiedades que pueden ser atribuidas a los objetos que pretende estudiar. Esto es así tanto en la física clásica como en la cuántica. La diferencia reside en los objetos teóricos que representan esas propiedades y las relaciones que entre ellos establece cada teoría.

Estas relaciones son la clave de una descripción que permita hacer deducciones, pues describir propiedades no implica una mera enunciación de estas, sino poder articularlas dentro de un marco semántico mediante el cual poder predicar sobre los objetos de la teoría. Esto implica establecer una *estructura de propiedades* que habilite construir inferencias y elaborar argumentos.

La estructura de propiedades que entra en juego en las descripciones de una teoría es formalizada por medio de un álgebra que involucra las operaciones ínfimo, supremo y complemento. Estas operaciones junto con una relación de orden define lo que es llamado *retículo de propiedades*, [27], [36]. El retículo de propiedades sienta las bases para establecer una lógica, pues cuando puede ser definida una función de verdad cumpliendo ciertos axiomas sobre sus elementos [46], cada propiedad queda asociada a una proposición y entonces es posible hablar de una *estructura lógica de proposiciones*.<sup>1</sup>

En ese caso, la relación de orden se corresponde a la implicación, y las operaciones ínfimo supremo y complemento a las operaciones lógicas habituales

---

<sup>1</sup>Existen muchas y diferentes definiciones para la palabra *lógica*. El concepto viene de la filosofía y es usado en diferentes áreas, de diferentes maneras. En algunas definiciones se llama lógica a la estructura algebraica de las propiedades establecida por el retículo correspondiente. Aunque esto no define estrictamente hablando una lógica, sienta las bases para ello.

---

de conjunción, disyunción y negación respectivamente.<sup>2</sup>

La caracterización de propiedades y sus posibles estructuras es de vital importancia. Todo lo que una teoría puede decir queda sujeto a la particular estructura algebraica de las propiedades que participan en sus descripciones. Esta consideración, algo inusitada desde el punto de vista clásico, toma una relevancia insospechada con el advenimiento de la mecánica cuántica. Clásicamente, un sistema físico no puede responder a otra estructura que no sea *booleana* [2], [27], [36], la cual acuerda con nuestra experiencia en el mundo macroscópico.

Pues bien, como veremos, experimentos simples pero fundacionales dentro de la mecánica cuántica, como el famoso experimento de la doble rendija, o el del interferómetro de Mach-Zehnder, abren la puerta a la posibilidad de preguntarse sobre descripciones de propiedades de sistemas físicos que no necesariamente respondan a un álgebra booleana. Esto induce a direccionar el objeto de estudio hacia áreas más fundamentales, clásicamente ni cuestionadas o indagadas por parte de la física, como son las áreas del lenguaje y de la lógica formal. Es así que se habla de las posibles estructuras de propiedades que subyacen en distintos sistemas físicos, posibilitando la diferenciación de un álgebra de atributos, de estados y de propiedades, las cuales pueden no necesariamente coincidir entre sí, como es en el caso clásico [3].

Clásicamente, las propiedades son representadas como regiones dentro del espacio de las fases. Atribuir una propiedad a un sistema físico clásico, es asociarle un subconjunto del espacio de las fases. Por lo tanto, la estructura de las propiedades clásicas se reduce al álgebra del conjunto de todas las partes de un conjunto, cuyas operaciones de implicancia, conjunción y disyunción, se corresponden respectivamente a las operaciones de inclusión, intersección y unión de conjuntos, las cuales determinan un álgebra de Boole [2].

Cuánticamente, las descripciones de los sistemas físicos responden a objetos teóricos de una naturaleza muy distinta que la empleada en el caso clásico. Según la estructura lógica desarrollada inicialmente por G. Birkhoff y J. von Neumann [38], las propiedades cuánticas son caracterizadas por subespacios cerrados dentro de espacios de Hilbert, o lo que es lo mismo, por los proyectores que los generan. La implicación, conjunción y disyunción, se corresponden respectivamente a la inclusión, intersección y suma directa de

---

<sup>2</sup>Aún cuando en esta tesis trabajaremos al nivel del retículo de propiedades, nos referiremos a las operaciones de ínfimo, supremo y complemento, como las correspondientes operaciones lógicas de conjunción, disyunción y negación.

---

subespacios.<sup>3</sup> Estas operaciones sobre subespacios de Hilbert determinan una estructura de propiedades no booleana, cuya principal característica respecto a la estructura de propiedades clásicas es que no cumple con las llamadas igualdades distributivas [10], [36], [39].

Que dos propiedades cumplan las igualdades distributivas implica que si la conjunción entre ellas es vacía, entonces no puede serlo la conjunción de una y la negación de la otra. Esto es evidente en el discurso clásico, que por tratarse esencialmente de operaciones entre conjuntos, se desprende trivialmente que si la intersección entre dos conjuntos es vacía, entonces no puede serlo la intersección de uno con el complemento del otro. En forma más dramática: si un conjunto no está incluido en otro, entonces debe estarlo en el complemento.

Estas afirmaciones que resultan evidentes desde el sentido común, son desafiadas por la mecánica cuántica. No todo par de propiedades cuánticas cumple las igualdades distributivas. Cuando dos propiedades no cumplen las igualdades distributivas, se dicen que son *incompatibles* aunque exista intersección entre ellas [36].

No obstante, dentro del conjunto de todas las posibles propiedades asignadas a un dado sistema cuántico, siempre es posible encontrar subconjuntos de propiedades cerrados ante las operaciones lógicas mencionadas, que sí cumplen las igualdades distributivas. En ese caso se habla de un retículo distributivo en el que las descripciones de la lógica clásica son válidas.

Estos retículos distributivos son llamados *contextos* [56] y quedan determinados por las propiedades atómicas representadas por subespacios ortogonales que son generados por los vectores componentes de una base común de observables que conmutan [36]. Las propiedades atómicas de un contexto son aquellas asociadas a los posibles valores que los observables pueden adquirir.

Ahora bien, las propiedades asociadas a los posibles valores de un observable, no son reveladas y por lo tanto susceptibles de ser incluidas en una descripción del sistema, si no es por medio de un proceso de medición que las evidencie en el mundo macroscópico de nuestra percepción. Los valores que un observable puede adquirir son siempre entendidos como los valores que pueden obtenerse en una medición, la cual queda determinada por una particular configuración experimental. De este modo, cada contexto queda también

---

<sup>3</sup>La disyunción corresponde a la suma directa solo en el caso de subespacios ortogonales. En forma más general, la disyunción entre dos subespacios cerrados es el menor subespacio cerrado que contienen a los dos y es desarrollado por ellos.

---

asociado al arreglo experimental utilizado en la medición de las magnitudes observables cuya base común determinan las propiedades que forman dicho contexto.

Un contexto puede ser pensado como una "perspectiva" con la que se observa al sistema con un determinado dispositivo experimental, y desde la cual es posible describirlo. Cada perspectiva es contextual al arreglo experimental, y en ella valen las propiedades booleanas, pero en general no es posible combinar distintas perspectivas en otra perspectiva mayor que las contenga.

Esta característica de la mecánica cuántica es llamada *contextualidad* y no tiene precedente clásico.

En la literatura la noción de contextualidad es típicamente vinculada a la imposibilidad de atribución de valores en forma consistente a todos los observables de un sistema, lo cual es demostrado por el conocido teorema de Kochen y Specker [4]. Solo en un conjunto de observables que conmutan es posible asignar valores a cada uno de ellos sin contradicción. De este modo, fuera de un contexto, no solo es imposible una descripción booleana de las propiedades asociadas a los valores de los observables, sino que además ni siquiera es posible asignar simultáneamente dichas propiedades al sistema. Afirmaciones que pueden ser válidas en la perspectiva dada por un contexto, pueden estar fuera del discurso de otro, porque las propiedades que permiten elaborar esas afirmaciones, pueden estar definidas en un contexto, pero no en otro. Esto no significa que haya perspectivas correctas, y otras incorrectas para describir la realidad. Si forman un contexto, cada perspectiva es válida y establece una posible descripción de la realidad aunque las descripciones entre ellas sean incompatibles. Se dice que son *complementarias*.

En el caso típico de la medición de la proyección de spin en un experimento de Stern-Gerlach, un posible contexto, es decir, una perspectiva, queda determinada al orientar el campo magnético en una dada dirección, por ejemplo en  $\hat{z}$ . En ese caso, nada se puede decir de los valores de proyección de spin en otra dirección, por ejemplo  $\hat{x}$ . Si se desea investigar sobre los valores de spin en  $\hat{x}$ , cambiando la orientación del imán que genera el campo magnético en esa dirección, entonces nada se puede decir de los valores en  $\hat{z}$ .

No es posible establecer un contexto que contenga propiedades de spin en  $\hat{z}$  y en  $\hat{x}$  simultáneamente.

En cada perspectiva, con las propiedades que pertenecen al contexto que la determina, es válido hacer inferencias y deducciones como son entendidas por la lógica del discurso clásico. Así por ejemplo, en el contexto establecido por la medición del spin según  $\hat{z}$  uno puede preguntarse cuál será la proyec-

---

ción del spin si en una medición no se obtuvo  $+\frac{1}{2}\hbar$ . La respuesta será  $-\frac{1}{2}\hbar$ . Pero dentro de ese contexto, no podemos preguntarnos sobre propiedades vinculadas a la proyección de spin en  $\hat{x}$  o en  $\hat{y}$ . Tampoco podemos combinar propiedades de uno y otro contexto. No podemos, por ejemplo, preguntarnos sobre la propiedad conjunta asociada a la proposición "el sistema tiene valor  $+\frac{1}{2}\hbar$  de proyección de spin en  $\hat{z}$  y valor  $-\frac{1}{2}\hbar$  de proyección en  $\hat{x}$ ". No porque esa conjunción sea falsa. No es ni verdadera ni falsa, directamente no tiene sentido. Al no haber un contexto común que incluya los contextos en  $\hat{z}$  y en  $\hat{x}$ , esa propiedad queda fuera del discurso posible [13].

Esto no tiene análogo clásico. Clásicamente podemos observar un objeto desde un "lado", es decir, desde una cierta perspectiva. Cuando queramos medir alguna magnitud, por ejemplo sus medidas de alto o largo, accedemos a proyecciones de esas magnitudes desde la perspectiva elegida, y aunque no podamos ver el otro lado del objeto, siempre es posible compatibilizar nuestras mediciones, con las mediciones desde otra perspectiva que hace un observador desde el otro lado. Aunque no podamos mirar el mismo objeto clásico desde dos lados simultáneamente, es posible "mapear" los valores de las mediciones tomadas desde una perspectiva, con los valores de mediciones tomadas desde otra, de modo de combinarlas dentro de un discurso que hable de un mismo objeto observado. Clásicamente siempre es posible compatibilizar descripciones entre perspectivas diferentes sin lugar a "sin sentidos". Esto asegura que efectivamente hay un objeto en la realidad, más allá de la forma con la que accedemos a él para observarlo o describirlo.

Como consecuencia de la contextualidad, lo último mencionado resulta imposible de asegurar en la mecánica cuántica, lo cual viene a derribar conceptos clásicos como el de objetividad y preguntarnos sobre la validez de la lógica del mundo clásico.

En este punto dos enfoques son posibles de tener en cuenta.

Uno es renunciar a la lógica establecida por la estructura de las propiedades clásicas y considerar que la mecánica cuántica vino a revelar una realidad, antes desconocida, que responde a una lógica distinta, no booleana. La incompatibilidad entre contextos sería consecuencia de pretender descripciones booleanas en una realidad que no es gobernada por estas. Esta posibilidad tuvo como origen los trabajos G. Birkhoff y J. von Neumann [38], quienes dieron inicio a la formalización lo que hoy se conoce como la estructura de la lógica cuántica. En ella se pretende establecer una descripción lógica unificada de todas las posibles propiedades cuánticas, estén o no en diferentes contextos. Sin embargo, aunque progresos significativos se han hecho desde

---

los trabajos originales de G. Birkhoff y J. von Neumann [3], [9], [6], [7], [8], hoy se entiende que no es una lógica en el sentido estricto, es decir como una teoría general del razonamiento con una noción de verdad mediante la cual se pueda hacer demostraciones teóricas, sino un cálculo proposicional que establece un álgebra de las propiedades cuánticas. Estrictamente hablando, renunciar a la lógica clásica implicaría rehacer completamente la matemática demostrando todo lo que sabemos con otra lógica, lo cual es claramente inabordable.

Otro enfoque, en algún sentido opuesto al anterior, es mantener la lógica clásica en las descripciones, pero pagando el precio de la contextualidad. Es decir aceptando la existencia de descripciones complementarias pero incompatibles, cada una vinculada a un determinado arreglo experimental con el que es posible evidenciar las propiedades sobre las que se quiere predicar en un determinado sistema cuántico.

Mantener la lógica clásica, tampoco implica abandonar la estructura de las propiedades cuánticas representadas por subespacios de Hilbert como han sido dadas inicialmente por G. Birkhoff y J. von Neumann, sino restringirla a contextos donde pueda ser mapeada a una estructura booleana. A eso nos referiremos cuando hablamos de descripciones válidas dentro de la mecánica cuántica [56] o de como el "sentido común", bajo ciertas condiciones, no entra en contradicción con las leyes de la física cuántica [47].

Como hemos mencionado al principio de esta introducción el poder explicativo de una teoría puede reducirse a su capacidad de describir lo que son consideradas propiedades de los sistemas que estudia. En el caso de la física, estas consideraciones adquieren una importancia mayor cuando en las posibles descripciones se intenta dar cuenta de cómo las propiedades cambian en el tiempo, es decir, de cómo describir la dinámica de los sistemas.

En la mecánica cuántica, intentar describir la evolución temporal de propiedades es particularmente conflictivo debido al carácter esencialmente probabilístico de la teoría en los resultados de las mediciones. Como consecuencia de ello, el conjunto de propiedades relevantes en la descripción de un sistema un dado tiempo, evidenciadas con un particular arreglo experimental, puede pertenecer a un contexto distinto del conjunto de propiedades relevantes estudiadas a otro tiempo con otros dispositivos instrumentales. Así, se pone de manifiesto la necesidad de compatibilizar distintos contextos en una descripción global que involucre distintos tiempos, máxime cuando esos contextos se refieran a propiedades de observables que no conmutan.

Uno de los formalismos más destacados a este respecto es la teoría de

---

*historias consistentes*, también llamada *historias decoherentes*, cuyos gestores principales han sido R. Griffiths [41], R. Omnès [48], M. Gell-Mann and J. Hartle [52].

La idea central del formalismo es considerar una historia como una secuencia de eventos constituidos por propiedades a distintos tiempos. Tomando como base los trabajos sobre lógica cuántica de G. Birkhoff y J. von Neumann, historias consistentes representa cada propiedad con un dado proyector a un dado tiempo. La historia es representada como el producto ordenado en el tiempo de cada uno de esos proyectores. Aunque el operador que resulta, puede ni siquiera ser un proyector, se utiliza para calcular la probabilidad de la historia de acuerdo a una fórmula que implica una generalización de la regla de Born [47].

No obstante esa fórmula no cumple los axiomas de la probabilidad de Kolmogorov. De todas las posibles historias caracterizadas por todas las posibles secuencias de proyectores ordenados, no siempre la probabilidad de una unión de dos historias excluyentes, es la suma de sus probabilidades. Es necesario exigir una condición adicional para que esto valga, y es llamada *condición de consistencia*. Bajo esta condición quedan establecidas familias de historias en donde es posible asegurar positividad, normalización y aditividad para sus probabilidades. Estas familias son llamadas *historias consistentes* y cada una de ellas establecen un conjunto de descripciones válidas de la evolución del sistema cuántico en consideración.

Como en la noción de contexto antes señalada, cada familia establece una posible perspectiva para describir al sistema, solo que ahora esas descripciones involucran el curso de los eventos en el tiempo. El conjunto de las distintas familias consistentes establece un conjunto de descripciones mutuamente incompatibles, pero complementarias, de la posible evolución del sistema.

Ahora bien, a causa de la naturaleza probabilística de la mecánica cuántica, cada evento cuántico podría o no ocurrir. Por lo tanto, la evolución del sistema no es determinada por la evolución del estado dada por la ecuación de Schrödinger, sino por la particular secuencia de eventos en el curso de los experimentos, la cual es caracterizada por una dada historia.

El formalismo de historias consistentes ofrece así una determinada interpretación de la mecánica cuántica. Para historias consistentes, la ecuación de Schrödinger no establece la evolución del sistema, sino las probabilidades a la que están sujetos los eventos que forman una historia que describe una posible evolución.

---

Una característica algo discutible del formalismo de historias consistentes, es que en todas las historias consideradas, el primer evento que entra en juego es aquel que determina la preparación del estado del sistema. Esto establece que la condición de consistencia depende siempre del estado inicial. Esto es objetable ya que el estado es normalmente pensado como una función de peso sobre el retículo de las propiedades cuánticas [36]. Que ese retículo forme o no un contexto y así determine o no una descripción posible, es previo e independiente del estado definido sobre él. La posibilidad de una descripción válida que involucre propiedades compatibles es normalmente independiente de la noción de estado actuando sobre ellas. Por ejemplo, en [53] y [54] se discute el hecho de considerar al estado como un funcional actuando sobre el espacio de observables previamente definidos.

El núcleo central de esta tesis viene a desarrollar un formalismo alternativo al de historias consistentes pero que trata sobre el mismo tipo de problemas, es decir el de disponer de un marco válido de descripciones que involucren al tiempo en sus propiedades. Este formalismo que hemos llamado *historias contextuales* [56], está basado en la noción de clases de equivalencia establecidas por medio de la traslación temporal.

La construcción de clases basadas en la equivalencia temporal aplica tanto para descripciones clásicas donde las propiedades son entendidas como subconjuntos del espacio de las fases, como para descripciones cuánticas donde las propiedades se corresponden a subespacios. A cada par formado por una propiedad y un tiempo le corresponde una clase de equivalencia la cual queda establecida por el conjunto de todas las propiedades que se obtienen por traslación temporal (hecha con el formalismo habitual según sea el caso, cuántico o clásico) de la propiedad considerada al tiempo dado.

Con esto es posible definir una implicación entre clases, como la implicación de propiedades que las representa a un tiempo común, y las operaciones de conjunción, disyunción y negación entre clases, como las correspondientes operaciones (según sea el caso cuántico o clásico) de las propiedades representantes a un dado tiempo.

En el caso cuántico, que es en el que principalmente aplicamos este formalismo, y al que se debe el nombre dado a la tesis, definimos una historia como la clase de equivalencia que se origina de la conjunción de las clases generadas por propiedades tomadas de distintos contextos a distintos tiempos. Dicho de otra manera, la historia es formada por la conjunción de propiedades de distintos contextos a tiempos distintos, cuando estos son trasladados a un tiempo común según la relación de equivalencia definida.

---

Se puede demostrar que cuando los proyectores que representan a las distintas propiedades elementales trasladadas desde distintos tiempos, conmutan a un tiempo común, las propiedades compuestas por la conjunción de propiedades elementales determinan un conjunto de propiedades exhaustivas y mutuamente excluyentes que forman un nuevo contexto, *un contexto de historias* que llamamos *historias contextuales*.

Al igual que en la teoría de historias consistentes, el formalismo de historias contextuales establece qué propiedades son posibles de incluir en un universo de discurso válido que involucre descripciones cuánticas a distintos tiempos, pero a diferencia de la primera, no es necesaria una condición de consistencia en historias contextuales. Existe sí, lo que podemos llamar condición de conmutatividad de los proyectores que representan la historia, para que esta sea considerada como tal, pero esta condición es independiente del estado.

El formalismo de historias contextuales es particularmente interesante de aplicar al proceso de medición, pues en tal proceso aparece naturalmente la necesidad de descripciones que permitan vincular propiedades a distintos tiempos, por ejemplo, propiedades susceptibles de ser atribuidas al sistema antes de la medición, con propiedades vinculadas a los registros de los aparatos luego de esta. Historias contextuales permite hacer esto, y como caso particular conduce a la posibilidad de analizar el conocido *postulado del colapso*, el cual participa en uno de los problemas presentes en el proceso de medición cuántica.

El proceso de medición adquiere una relevancia ineludible en la mecánica cuántica, no solo porque el arreglo experimental de la medición queda asociado a un contexto desde el cual es posible una descripción válida, sino porque de alguna manera los instrumentos participan en la realidad que se pretende describir desde ese contexto. Adicionalmente, como la medición viene a evidenciar en el mundo clásico propiedades de sistemas cuánticos, surge la necesidad de entender como características clásicas emergen desde una realidad cuántica.

La teoría cuántica de la medición, desarrollada inicialmente por Von Neumann [1], estableció un primer paso en este camino. En ella se trataba de incluir a los instrumentos dentro de la misma teoría cuántica. Cuando se hace esto, la teoría predice un entrelazamiento entre sistema y aparato expresado por una particular forma del estado final después de la medición. No obstante, este estado final no basta para explicar completamente los resultados obtenidos en la experiencia y justificar que se está midiendo [28], [12].

---

Esto ha dado origen a los llamados problemas de la medición, y ha motivado a la aparición de un sin número de interpretaciones, muchas de las cuales fueron desarrolladas para solucionarlos.

Uno de esos problemas, y sin duda el más importante, es el llamado *problema de la lectura definida* el cual pone de manifiesto que la teoría cuántica de la medición no puede explicar por qué siempre se observan resultados bien definidos en las mediciones, aun cuando prediga una superposición de estados de la variable indicadora del aparato.

El postulado del colapso, antes mencionado, ha sido propuesto como una posible solución del mismo, y aunque justifica los resultados en la práctica, no resulta conceptualmente satisfactorio.

Hoy día existe consenso en afirmar que los problemas de la medición son solucionados dentro de la misma teoría cuántica, por medio del formalismo de decoherencia [16], [17], [18], [19], [32], [49].

En esta tesis, nosotros sostenemos que el colapso es un postulado innecesario al ofrecer una deducción del mismo que hacemos mediante el uso de la probabilidad condicional dentro de una descripción que incluya los aparatos dentro de la teoría [55]. Haremos esto contemplando dos mediciones sucesivas, y veremos que la probabilidad para la segunda medición condicional a un determinado resultado en la primera, coincide para todo efecto práctico, con la probabilidad asociada al estado que predice el postulado del colapso aplicado a la primera medición. Veremos que esto es así para mediciones ideales, y mostraremos que es erróneo para mediciones más generales.

Ahora bien, al considerar resultados de mediciones sucesivas queda implícita la necesidad de describir propiedades a distintos tiempos. Nosotros ofrecemos primero una deducción del colapso sin incluir al tiempo explícitamente, al suponer que el resultado de la primera medición no se ve alterado hasta el momento de la segunda. En un proceso más general esto no tiene porque ser así, lo cual pone de manifiesto la relevancia de un formalismo para tratar con propiedades a distintos tiempos.

Luego de desarrollar el formalismo de historias contextuales, a modo de aplicación, volvemos a efectuar una deducción del colapso, pero en este caso formalizada como la probabilidad condicional aplicada a los eventos de una particular historia que involucre los registros en los aparatos.

La estructura de esta tesis se organiza de la siguiente manera. El capítulo 1 lo constituye la presente introducción, donde presentamos los lineamientos generales del trabajo.

En el capítulo 2 se explican las bases de la teoría cuántica de la medición

---

de donde surgen los problemas ya mencionados, y mediante el uso de probabilidades condicionales se dan argumentos que permiten una deducción del colapso para el caso de mediciones ideales. Se analiza que el postulado del colapso conduce a conclusiones erróneas para el caso de mediciones más generales.

En el capítulo 3, se dan los fundamentos del álgebra de las propiedades clásicas y cuánticas, y se ofrece una generalización de estas a distintos tiempos, lo cual es la base, en el caso cuántico, para el desarrollo del formalismo que llamamos historias contextuales.

En el capítulo 4 se desarrolla en profundidad el formalismo de historias contextuales y se resume el formalismo de historias consistentes, para luego ofrecer una comparación entre ambos.

En el capítulo 5 son ofrecidas aplicaciones concretas del formalismo de historias contextuales a experimentos como el de la doble rendija, con y sin aparatos de medición, y el del interferómetro de Mach-Zehnder, para analizar la dualidad onda partícula. Finalmente en el capítulo 6, se utiliza historias contextuales para establecer la estructura de propiedades a distintos tiempos detrás del proceso de medición y se deduce el postulado del colapso utilizando historias contextuales. En el último capítulo se ofrecen las conclusiones.

# Capítulo 2

## Colapso de la función de onda

### 2.1. Teoría cuántica de la medición

En toda teoría, la descripción del proceso de medición es de vital importancia no solo para la corroboración o no de dicha teoría, sino también para ajustar una correcta interpretación de la misma. Esto es así porque cualquier interpretación debería proveer relaciones entre las expresiones teóricas y los resultados experimentales, y es el proceso de medición quien logra establecer este vínculo.

En la mecánica cuántica esto ha sido históricamente problemático. Hoy día hay consenso en considerar a la física cuántica universalmente válida [5], y sin embargo, aún persisten fuertes desacuerdos en su interpretación .

Si una teoría es universalmente válida esta debe contener los medios necesarios para su propia verificación, es decir debe ser capaz de describir los procesos de medición para su verificación.

Los requerimientos mediante los cuales la mecánica cuántica puede o no cumplir esta propiedad fueron inicialmente estudiados por Von Neuman [1] quien desarrolló lo que hoy conocemos como *teoría cuántica de la medición*.

El concepto básico de la teoría de la medición en mecánica cuántica consiste en tratar como cuánticos tanto al objeto que se quiere medir, como al aparato que lo mide. Bajo esta condición, el proceso de medición es visto como una interacción entre dos sistemas: el sistema objeto, y el sistema aparato que mide al primero. La utilidad de la medición reside en el hecho de que después de la interacción estos dos sistemas quedan correlacionados, de modo que propiedades de uno, por ejemplo valores  $a_i$  de un observable  $A$

que se desea medir en el sistema objeto, se correspondan a propiedades del otro, por ejemplo, valores  $z_i$  de un observable  $Z$  que caracterice la variable indicadora (pointer) del aparato. La variable indicadora será aquella cuyos valores represente los posibles resultados de la medición.

La correspondencia entre el sistema y el aparato queda establecida por medio de la llamada *función del pointer* que vincula los  $a_i$  con los  $z_i$ . Mas exactamente diremos que la función del pointer  $f$  es tal que  $a_i = f(z_i)$ . Así, el conocimiento de un valor del aparato de medición nos revela información sobre un valor del sistema a medir.

Ahora bien, al tratarse de una interacción, la medición puede afectar la evolución del sistema, por lo que el concepto clásico de "observación pasiva", así como la atribución de propiedades objetivas del sistema, se ven seriamente comprometidos. Nunca podremos "observar" al sistema aislado, lo que observamos es siempre el sistema mas la acción producida por la misma observación.

No obstante, dicha acción queda completamente determinada por el operador de evolución construido con el hamiltoniano de la interacción para el sistema compuesto por el sistema y el aparato. Este operador, en el cual reside la dinámica de la medición, deberá satisfacer ciertos requerimientos para dar sentido a lo que llamamos medición. Esto se analizará en las siguientes etapas de la medición [10].

### Primera etapa: preparación

Supongamos al sistema objeto  $S$ , un sistema cuántico descrito con un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_S$  y el sistema aparato  $M$  otro sistema cuántico con un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_M$ . Se quiere medir en el sistema  $S$  el observable  $A = \sum a_i |a_i\rangle\langle a_i|$ , donde  $|a_i\rangle$  son los autovectores de  $A$ . Antes de la medición,  $S$  es preparado en un estado  $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}_S$ , el cual no es necesariamente un autoestado del observable  $A$ , es decir:  $|\varphi\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle$ .

El aparato es preparado en un estado  $|z_0\rangle \in \mathcal{H}_M$  el cual es un autoestado con valor de referencia  $z_0$  del observable indicador  $Z = \sum z_i |z_i\rangle\langle z_i|$ . En esa etapa los sistemas  $S$  y  $A$  son completamente independientes, no obstante son considerados como un sistema compuesto en el estado  $|\psi\rangle = |\varphi\rangle|z_0\rangle \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_M$ .

### Segunda etapa: interacción

Los sistemas  $S$  y  $M$  son puestos en interacción durante un intervalo de tiempo  $[t, t']$ . La dinámica de la evolución será gobernada por el hamiltoniano total del sistema compuesto  $S + M$  dado por

$$H = H_S + H_M + H_{SM}, \quad (2.1)$$

donde  $H_S \in \mathcal{H}_S$ ,  $H_M \in \mathcal{H}_M$  y  $H_{SM} \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_M$ . Sin embargo, a los efectos de establecer la interacción durante el intervalo de tiempo considerado, la energía del término de interacción  $H_{SM}$ , puede considerarse mucho más grande que la energía de los términos cinéticos, por lo que la evolución será conducida fundamentalmente por el operador unitario  $U \equiv U(t', t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H_{SM}(t'-t)}$ .

El tipo de interacción es determinada, o elegida, acorde al observable que se quiere medir en el sistema  $S$ , y en relación a que observable en el aparato  $M$  se quiera vincular. Bajo estas consideraciones es esperable asumir que elegido el observable en el sistema que se desea medir y el aparato para hacerlo (es decir, el arreglo experimental), a cada proceso de medición le corresponde un operador unitario  $U$  que lo caracteriza.

Los requisitos que debe cumplir este operador  $U$  para que la interacción tenga sentido como medición, constituyen la *calibración* del proceso y del aparato.

En la calibración se requerirá que cuando el sistema es preparado en un autoestado  $|a_i\rangle$  del observable  $A$ , la medición arroje con certeza un único valor  $z_i$  para el observable del pointer, el cual será el correspondiente al valor  $a_i = f(z_i)$  para la variable del sistema.

Dentro del tipo de las llamadas *mediciones ideales*<sup>1</sup>, si el sistema es preparado en un autoestado  $|a_i\rangle$  de la variable a medir,  $U$  deberá ser tal que

$$|\psi\rangle = |a_i\rangle|z_0\rangle \quad \rightarrow \quad |\psi'\rangle = U|\psi\rangle = |a_i\rangle|z_i\rangle. \quad (2.2)$$

Un proceso de medición de este tipo está acorde a una visión realista de la mecánica cuántica, porque el hecho de preservar el estado del sistema nos concede la posibilidad de atribuirle propiedades objetivas, ya sea de estado o de valor. En este caso, la lectura  $z_i$  del pointer indica que la medición para

---

<sup>1</sup>Las mediciones ideales son a veces llamadas también mediciones standares.

la variable  $A$  ha arrojado como resultado el valor  $a_i = f(z_i)$ , el cual puede ser atribuido como una propiedad perteneciente al sistema. En ese sentido, la función del pointer vincula el valor leído del observable del aparato después de la medición, con el valor del observable que efectivamente "tiene" el sistema.

Las mediciones ideales son también mediciones repetibles porque tienen la propiedad de dejar inalterado el estado del sistema si este se encuentra en un autoestado de la variable que se mide.

Sin embargo, en un concepto más general de la medición, lo único que necesitamos es que después de la interacción, el aparato tenga algún rastro del estado del sistema antes de la medición, necesario para identificar que se ha medido. Así, dentro del tipo de mediciones que llamaremos *no ideales*, tenemos:

$$|\psi\rangle = |a_i\rangle|z_0\rangle \quad \rightarrow \quad |\psi'\rangle = U |\psi\rangle = |\alpha_i\rangle|z_i\rangle, \quad (2.3)$$

donde  $|\alpha_i\rangle \neq |a_i\rangle$  (y no necesariamente es un autoestado del observable  $A$ ). El hecho que el estado inicial del sistema sea alterado no invalida la medición, ya que el valor del observable indicador permanece correlacionado al valor inicial del observable del sistema. Aunque este tipo de interacción modifica el estado del sistema, aún así en esta etapa todavía podemos sostener una descripción realista al decir que la función del pointer en este caso vincula el valor leído en el aparato, no con el valor que tiene el sistema, sino con el que "tenía" antes de efectuar la medición [10].

La atribución realista tiene mucho que ver con la posibilidad de obtener certezas en los resultados, o al menos certeza en algo que caracterice a dichos resultados, como así sucede en la calibración, ya que calibrar es de alguna manera el ajuste de las certezas que definen la interpretación de lo que se mide. Sin eso, no habría una medición en general.

Ya fuera de las condiciones del postulado de calibración, si el sistema es preparado en una combinación lineal de autoestados del observable  $A$ , esto es  $|\varphi\rangle = \sum c_i |a_i\rangle$ , y como consecuencia de la linealidad del operador de evolución  $U$ , tenemos para mediciones ideales

$$|\psi\rangle = |\varphi\rangle|z_0\rangle \quad \rightarrow \quad |\psi'\rangle = U |\psi\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle|z_i\rangle, \quad (2.4)$$

y en el caso de mediciones no ideales:

$$|\psi\rangle = |\varphi\rangle|z_0\rangle \quad \rightarrow \quad |\psi'\rangle = U |\psi\rangle = \sum_i c_i |\alpha_i\rangle|z_i\rangle. \quad (2.5)$$

En cualquier caso, si el estado inicial del sistema es una suma de autoestados de  $A$ , solo sabemos que los posibles resultados leídos en el aparato serán algunos de los  $z_i$ , pero no sabemos cual. De este modo, la certeza es perdida. La mecánica cuántica no puede predecir cual será el resultado de la medición del observable  $A$ . Solo puede predecir cual será la distribución de probabilidad.

No obstante, se asumirá (de hecho así se comprueba) que la medición tendrá un valor definido relativo al pointer, es decir que aunque no sepamos cual, sólo uno de los posibles valores  $z_i$  de la variable indicadora será registrado, y así atribuido al aparato. Ahora bien, si la atribución de valor corresponde a la atribución de estado<sup>2</sup>, entonces el hecho experimental de que la lectura del pointer conduzca siempre a un bien definido valor  $z_i$ , conlleva una contradicción al asumir que tal lectura es realizada sobre el estado final  $|\psi'\rangle$ , puesto que este estado constituye una superposición de distintos autoestados de la variable  $Z$ , cada uno con distinto  $z_i$ .

Esta dificultad nos introduce a uno de los llamados problemas de la medición que desarrollaremos en la siguiente sección.

## 2.2. Los problemas de la medición

Entre los múltiples desafíos conceptuales que presenta la mecánica cuántica, los llamados problemas de medición son sin duda los más discutidos, tal vez porque enfrentan el cuerpo teórico con la evidencia empírica más directa.

Tal como se indica en [12], actualmente las dificultades conceptuales de la medición cuántica pueden concentrarse en torno a dos núcleos

- El problema de la lectura definida (definite outcome): Según la teoría cuántica de la medición el estado final después de una medición es en general representado como una superposición de estados asociados a la variable indicadora, la cual se pretende sea aquella que registre los resultados de la medición en el mundo macroscópico. La teoría cuántica de la medición es incapaz de explicar porque siempre se registran valores bien definidos de la variable indicadora, aún cuando la teoría predice una superposición de estados para dicha variable.
- El problema de la base privilegiada (preferred basis): El estado final del

---

<sup>2</sup>La relajación de esta correspondencia es estudiada en la interpretación modal.

sistema compuesto luego de una medición es en general expresable mediante una particular descomposición que exhibe, bajo ciertas circunstancias, la ambigüedad de un cambio de base que permite expresar las correlaciones vinculadas a la medición de un dado observable, en términos de correlaciones vinculadas a la medición de otro, imposibilitando determinar que observable es realmente medido.

El primer problema, el problema de las salidas definidas, es el más difundido en la literatura y es el que normalmente se conoce como "el problema de la medición". No obstante, el segundo aunque menos difundido, involucra dificultades conceptuales tan graves como en el primero.

Actualmente, en el ámbito de la física ambos problemas son abordados a partir del llamado *formalismo de decoherencia*. Entre sus corrientes principales se destaca el programa de decoherencia inducida por el entorno (environment-induced decoherence), cuyo esquema principal fue desarrollado por Zurek desde los años 80, [16], [17], [18], [19] y que se basa en el estudio de los efectos de la interacción entre un sistema cuántico, considerado como un sistema abierto y su entorno. En algunos abordajes el entorno no es un sistema separado del aparato, sino que es vinculado a los muchos grados de libertad internos propios de un instrumento macroscópico [22], [61], [45], [49]. De acuerdo con este formalismo, la interacción del sistema y el aparato con el entorno conduce al proceso de decoherencia que selecciona las propiedades ("observables") que adquieren valores definidos en el sistema, y determina una base privilegiada que establece que está siendo medido.

### 2.2.1. El problema de la lectura definida

Consideremos una medición ideal de un observable  $A = \sum a_i |a_i\rangle\langle a_i|$  de un sistema preparado en un estado  $|\varphi\rangle = \sum c_i |a_i\rangle$  por medio de un aparato cuya variable indicadora está dada por  $Z = \sum z_i |z_i\rangle\langle z_i|$ . Bajo estas condiciones la medición es conducida por la expresión dada en (2.4) cuyo estado final es

$$|\psi'\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle |z_i\rangle. \quad (2.6)$$

Aunque el estado inicial antes de la medición, es un estado factorizado entre el sistema y el aparato, el estado final resulta ser una superposición de estados del sistema y del aparato que impide distinguir uno del otro. El problema se presenta al considerar la variable indicadora del aparato como una variable

macroscópica, de modo que el aparato sirva como tal. Si es así, entonces el estado final representa una superposición de estados del aparato asociados a resultados macroscópicamente distinguibles.

La mecánica cuántica presenta aquí un problema, porque superposiciones macroscópicas de estados excluyentes no tienen sentido. Adicionalmente, los datos de la experiencia indican que esto nunca es observado, de modo que lo que predice la teoría cuántica de la medición, por alguna razón además es incompleto. Algún otro mecanismo participa de la medición y no es contemplado por la expresión dada por la ecuación (2.4).

Mucho se ha discutido en el intento de encontrar una respuesta adecuada a las dificultades que plantea este problema [28], [34], [12], [30], [15], [55], e incluso muchas interpretaciones han sido diseñadas específicamente para suministrar una solución conceptualmente admisible. La respuesta tradicional al problema de la medición se basa en la llamada *hipótesis del colapso*, formulada por primera vez por von Neumann [1]. Según esta hipótesis, los sistemas cuánticos desarrollan dos tipos de evolución temporal: una evolución determinista y unitaria cuando no son observados, y una transición indeterminista y no-unitaria (el "colapso" de la función de onda) al ser medidos. Dicha transición conduciría al sistema de su estado de superposición original a otro estado en el cual sistema y aparato de medición adquieren propiedades definidas.

En las siguientes secciones se dará una justificación para la hipótesis del colapso pero no como un postulado adicional de la mecánica cuántica, sino que valiéndonos de la probabilidad condicional podremos deducir un colapso efectivo.

### 2.2.2. El problema de la base preferida

Consideremos nuevamente la medición de un observable  $A = \sum a_i |a_i\rangle\langle a_i|$  en un sistema  $S$  el cual es medido por medio de un aparato  $M$  con la variable indicadora  $Z = \sum z_i |z_i\rangle\langle z_i|$ . El sistema es inicialmente preparado en el estado  $|\varphi\rangle = \sum c_i |a_i\rangle$ . Bajo las condiciones dadas, el proceso de medición puede ser representado por la ya dada expresión (2.4).

La descomposición del estado final  $|\psi'\rangle$  del sistema compuesto  $S+M$  dada en (2.4), es llamada descomposición biortonormal [23], y la misma establece la correlación cuántica que define la medición. No obstante, si al menos dos de los coeficientes  $c_i$  que participan en el desarrollo del estado inicial  $|\varphi\rangle$  del sistema son iguales en modulo, la descomposición en cuestión no es única.

Es posible realizar un cambio de base:  $\{|a_i\rangle\} \rightarrow \{|a'_i\rangle\}$ , y  $\{|z_i\rangle\} \rightarrow \{|z'_i\rangle\}$  de manera tal que

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle |z_i\rangle = \sum_i c'_i |a'_i\rangle |z'_i\rangle. \quad (2.7)$$

El llamado "problema de la base preferida" [12], reside en la ambigüedad que presenta la última ecuación. Esta ecuación deja en pie de igualdad dos diferentes juegos de salidas<sup>3</sup>, los  $\{z_i\}$  y los  $\{z'_i\}$ , para el mismo proceso de medición, estableciendo la ambigüedad sobre que observable fue medido por el dispositivo de medición. No es posible determinar desde el estado final (2.7) del sistema compuesto, si es realizado alguno de los  $z_i$  de manera de asegurar que  $A$  es medido por medio de  $Z$ , como indica la correlación expresada por la primera expansión, o si es realizado alguno de los  $z'_i$  de manera de asegurar que  $A'$  es medido por medio de  $Z'$ , como indica la correlación expresada por la segunda expansión. Peor aún, no es posible determinar si  $A$  y  $A'$  son medidos simultáneamente aun cuando en general  $[A, A'] \neq 0$ .

Desde el punto de vista del formalismo de decoherencia [16], [17], este problema no puede ser resuelto si el sistema compuesto  $S + M$  permanece aislado. Es necesario apelar a un entorno caracterizado por muchos grados de libertad (environment) que por medio de una posterior interacción con el sistema compuesto, vía decoherencia, permite seleccionar la base privilegiada (pointer basis), la cual determina que observable es medido.

### 2.3. Probabilidad condicional y colapso efectivo

En esta sección daremos una deducción para el postulado del colapso dentro del formalismo usual de la mecánica cuántica valiéndonos de la noción adicional de la probabilidad condicional. Más exactamente, deduciremos que el estado de un sistema después de una primer medición con un dado resultado, es para el cálculo de probabilidades en una segunda medición, equivalente a asumir el colapso en la primera [55], [57].

Para hacer contacto entre la matemática de la teoría y los resultados de los experimentos es inevitable una elección de la interpretación del vector de

---

<sup>3</sup>Hay en realidad infinitos cambios de bases distintos.

estado. En esta deducción el estado de un sistema es considerado dentro de una interpretación de probabilidad, es decir, el vector de estado es considerado como una herramienta matemática para calcular esas probabilidades con la conocida regla de Born [26], [28], [29], [31].

Por medio de la ley de los grandes números esas probabilidades son relacionadas con las frecuencias de los resultados obtenidos en los experimentos [33]. En esta interpretación, los valores definidos de mediciones individuales son asumidos como nociones primitivas.

### 2.3.1. Mediciones ideales y colapso

Como fue explicado en la sección 2.1, una medición ideal de un observable  $Q$  es una interacción entre el sistema  $S$  y un instrumento  $A$ . Dicha interacción queda completamente caracterizada ya al nivel de la calibración mediante la transformación unitaria en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_A$  del tipo

$$|q\rangle|a_0\rangle \rightarrow |q\rangle|a_q\rangle, \quad (2.8)$$

donde  $|q\rangle$  es un autovector del operador  $Q$  con autovalor  $q$ ,  $|a_0\rangle$  es el estado inicial del aparato  $A$ , y  $|a_q\rangle$  son los autoestados de la variable indicadora en el aparato  $A$ . Para un estado inicial del sistema  $S$  que no sea autoestado de  $Q$ , la misma evolución unitaria de la calibración conduce ahora a

$$|\phi\rangle|a_0\rangle \rightarrow \sum_q \langle q|\phi\rangle|q\rangle|a_q\rangle. \quad (2.9)$$

Por simplicidad no hemos incluido explícitamente en la descripción el gran número de variables microscópicas que junto a la variable indicadora definen el estado del instrumento de medición. Ese caso será considerado más adelante.

La medición ideal de otro observable  $R$  requiere de un instrumento diferente  $B$  y esto es representado por el siguiente proceso de calibración en el correspondiente espacio  $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_B$

$$|r\rangle|b_0\rangle \rightarrow |r\rangle|b_r\rangle, \quad (2.10)$$

lo cual conduce a una transformación general dada por

$$|\phi\rangle|b_0\rangle \rightarrow \sum_r \langle r|\phi\rangle|r\rangle|b_r\rangle, \quad (2.11)$$

### 2.3 Probabilidad condicional y colapso efectivo

---

donde  $|r\rangle$  es un autovector del operador  $R$  con autovalor  $r$ ,  $|b_0\rangle$  es el estado inicial de instrumento  $B$ , y  $|b_r\rangle$  son los autoestados de la variable indicadora en el aparato  $B$ .

La medición consecutiva del observable  $Q$  y  $R$  es representada por las correspondientes transformaciones en el espacio de Hilbert compuesto  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  del sistema  $S$  y los aparatos  $A$  y  $B$  de modo que

$$\begin{aligned}
 |\Psi_0\rangle &= |\phi\rangle|a_0\rangle|b_0\rangle \\
 \rightarrow |\Psi_1\rangle &= \sum_q \langle q|\phi\rangle|q\rangle|a_q\rangle|b_0\rangle \\
 &= \sum_{r,q} \langle q|\phi\rangle\langle r|q\rangle|r\rangle|a_q\rangle|b_0\rangle \\
 &\rightarrow |\Psi_2\rangle = \sum_{r,q} \langle q|\phi\rangle\langle r|q\rangle|r\rangle|a_q\rangle|b_r\rangle.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Como veremos en la sección 3.2, propiedades vinculadas a valores de observables que conmutan, forman un contexto. Sobre un contexto las expresiones usuales de la teoría de probabilidades son válidas, particularmente esas correspondientes a la probabilidad condicional. Esto nos habilita a calcular probabilidades condicionales sobre propiedades de valor referidas a las variables de ambos aparatos, pues ellas conmutan trivialmente. El uso de probabilidades condicionales para obtener el estado de un sistema preparado por una medición fue dado por W. M. de Muynck [29].

Usando la regla de Born de la mecánica cuántica, y la fórmula habitual para la probabilidad condicional, tenemos que la probabilidad de medir el valor  $r$  para el observable  $R$  con el segundo instrumento  $B$  *condicional* a obtener el valor  $q$  del observable  $Q$  con el primer instrumento  $A$  es dada por

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(b_r/a_q) &= \frac{\mathcal{P}(b_r \wedge a_q)}{\mathcal{P}(a_q)} \\
 &= \frac{\langle \Psi_2 | \left[ \mathbb{I}_S \otimes |a_q\rangle\langle a_q| \otimes |b_r\rangle\langle b_r| \right] | \Psi_2 \rangle}{\langle \Psi_2 | \left[ \mathbb{I}_S \otimes |a_q\rangle\langle a_q| \otimes \mathbb{I}_B \right] | \Psi_2 \rangle} \\
 &= \frac{|\langle q|\phi\rangle\langle r|q\rangle|^2}{\sum_{r'} |\langle q|\phi\rangle\langle r'|q\rangle|^2} \\
 &= |\langle r|q\rangle|^2 \\
 &= \langle q|r\rangle\langle r|q\rangle,
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

### 2.3 Probabilidad condicional y colapso efectivo

---

donde  $\mathbb{I}_S$  y  $\mathbb{I}_B$  son los operadores identidades en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_S$  y  $\mathcal{H}_B$  respectivamente, y  $|\Psi_2\rangle$  es el estado final dado por la ecuación (2.12).

Si ahora consideramos el proyector  $\Pi_r \equiv |r\rangle\langle r|$  correspondiente al valor  $r$  para el observable  $R$ , y si definimos el operador estadístico  $\rho_q \equiv |q\rangle\langle q|$ , la probabilidad condicional adopta la expresión

$$\mathcal{P}(b_r/a_q) = Tr[\rho_q \Pi_r]. \quad (2.14)$$

Notemos que hemos calculado la probabilidad condicional en términos de propiedades que involucran registros de los instrumentos, como indica el lado izquierdo de la última igualdad; pero ha sido expresada en términos de vectores y operadores del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_S$  del sistema  $S$ , como indica el lado derecho.

La ecuación (2.14) es válida para la medición de cualquier observable  $R$ , siempre y cuando mantengamos la medición del primero con resultado  $q$ . Así, para todos los efectos prácticos del cálculo de probabilidades en la segunda medición, luego de la primera con resultado  $q$ , el sistema  $S$  puede ser descrito como preparado en el estado

$$\rho_q \equiv |q\rangle\langle q|. \quad (2.15)$$

Tal como se indica en la ecuación (2.12), el estado inicial del sistema antes de la medición es representado por el vector  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_S$ , mientras que después de la medición este es representado por el vector  $|q\rangle \in \mathcal{H}_S$ , que es el autovector del operador  $Q$  con autovalor  $q$ . Este resultado coincide con el que se obtendría utilizando el postulado del colapso.

Sin embargo dicho resultado ha sido obtenido sin utilizar el colapso. Fue logrado utilizando:

**i)** La ecuación de Schrödinger para la evolución unitaria dada en la ecuación (2.12) del vector de estado correspondiente al sistema cerrado formado por el sistema  $S$  y los instrumentos  $A$  y  $B$ .

**ii)** La probabilidad condicional definida por la ecuación (2.13) como un cociente de probabilidades obtenidas de la regla de Born.

La transformación  $|\phi\rangle \rightarrow |q\rangle$  del estado del sistema  $S$  debido a la medición no es una transformación unitaria (estados diferentes  $|\phi\rangle$  y  $|\phi'\rangle$  pueden evolucionar al mismo estado  $|q\rangle$ ).

### 2.3 Probabilidad condicional y colapso efectivo

---

Para el caso de mediciones ideales, esta transformación coincide con la producida por el postulado de colapso, no obstante hemos evitado usar dicho postulado. Así, en nuestro abordaje la medición es analizada como un proceso descrito completamente por la teoría cuántica. La transformación no unitaria  $|\phi\rangle \rightarrow |q\rangle$  fue deducida desde la evolución unitaria generada por la ecuación de Schrödinger describiendo la interacción entre los aparatos y el sistema.

El caso de una medición ideal de un observable con espectro degenerado también puede ser obtenido con este procedimiento. Consideremos un observable representado por el operador

$$Q = \sum_q q \Pi_q, \quad \Pi_q = \sum_{j=1}^{n_q} |q, j\rangle \langle q, j|, \quad \langle q, j | q', j' \rangle = \delta_{qq'} \delta_{jj'},$$

donde  $n_q$  es la dimensión del subespacio de  $\mathcal{H}_S$  correspondiente a los autovectores de  $Q$  con autovalor  $q$ . Cualquier vector  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_S$  puede ser escrito en términos de los proyectores  $\Pi_q$

$$|\phi\rangle = \sum_q \sum_{j=1}^{n_q} c_{qj} |q, j\rangle = \sum_q \Pi_q |\phi\rangle,$$

donde  $c_{qj} \equiv \langle q, j | \phi \rangle$ .

Una medición ideal de este observable por un instrumento  $A$  es representada al nivel de la calibración, por la siguiente transformación unitaria en  $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_A$

$$|q, j\rangle |a_0\rangle \rightarrow |q, j\rangle |a_q\rangle.$$

Después de la interacción con el instrumento  $A$ , el sistema  $S$  interactúa con otro instrumento  $B$  produciendo una medición ideal con un observable representado por el operador  $R = \sum_r r |r\rangle \langle r|$ , que suponemos con espectro no degenerado. La segunda medición es representada por

$$|r\rangle |b_0\rangle \rightarrow |r\rangle |b_r\rangle.$$

Las mediciones consecutivas, desde un estado inicial general para el sistema  $S$ , son entonces representadas por las siguientes transformaciones unitarias

## 2.3 Probabilidad condicional y colapso efectivo

---

en el espacio  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$

$$\begin{aligned}
 |\Psi_0\rangle &= |\phi\rangle|a_0\rangle|b_0\rangle \\
 &\rightarrow |\Psi_1\rangle = \sum_q \Pi_q |\phi\rangle|a_q\rangle|b_0\rangle \\
 &\rightarrow |\Psi_2\rangle = \sum_q \sum_r |r\rangle\langle r| \Pi_q |\phi\rangle|a_q\rangle|b_r\rangle.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

La probabilidad de obtener  $b_r$  en la segunda medición si el resultado de la primera fue  $a_q$ , en este caso es:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(b_r/a_q) &= \frac{\mathcal{P}(b_r \wedge a_q)}{\mathcal{P}(a_q)} \\
 &= \frac{\langle \Psi_2 | [\mathbb{I}_S \otimes |a_q\rangle\langle a_q| \otimes |b_r\rangle\langle b_r|] | \Psi_2 \rangle}{\langle \Psi_2 | [\mathbb{I}_S \otimes |a_q\rangle\langle a_q| \otimes \mathbb{I}_B] | \Psi_2 \rangle} \\
 &= \frac{\langle \phi | \Pi_q | r \rangle \langle r | \Pi_q | \phi \rangle}{\langle \phi | \Pi_q | \phi \rangle} \\
 &= \text{Tr}[\rho_q \Pi_r],
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

donde hemos usado  $|\Psi_2\rangle$  dado por la ecuación (2.16),  $\Pi_r = |r\rangle\langle r|$  y

$$\rho_q = \frac{\Pi_q |\phi\rangle\langle \phi| \Pi_q}{\langle \phi | \Pi_q | \phi \rangle}, \tag{2.18}$$

que resulta ser una proyección de Lüders [10], [11].

### 2.3.2. Mediciones no ideales

Consideremos el mismo procedimiento anterior, pero supongamos ahora que el sistema es modificado por el proceso de medición aún cuando el estado inicial del sistema es un autoestado del observable medido.

Un proceso de medición no ideal del observable  $Q$  es caracterizado en por la transformación

$$|q\rangle|a_0\rangle \rightarrow |\mu_q\rangle|a_q\rangle,$$

donde  $|\mu_q\rangle$  es diferente del estado inicial  $|q\rangle$ . Asimismo, la medición del observable  $R$  es caracterizada por

$$|r\rangle|b_0\rangle \rightarrow |\nu_r\rangle|b_r\rangle,$$

### 2.3 Probabilidad condicional y colapso efectivo

---

donde  $|\nu_r\rangle$  es diferente al estado  $|r\rangle$ . Mediciones consecutivas desde un estado general, son ahora representadas por la secuencia

$$\begin{aligned}
 |\Psi_0\rangle &= |\phi\rangle|a_0\rangle|b_0\rangle \\
 \rightarrow |\Psi_1\rangle &= \sum_q \langle q|\phi\rangle |\mu_q\rangle |a_q\rangle |b_0\rangle \\
 &= \sum_{r,q} \langle q|\phi\rangle \langle r|\mu_q\rangle |r\rangle |a_q\rangle |b_0\rangle \\
 &\rightarrow |\Psi_2\rangle = \sum_{r,q} \langle q|\phi\rangle \langle r|\mu_q\rangle |\nu_r\rangle |a_q\rangle |b_r\rangle.
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

La probabilidad que el segundo instrumento de medición mida el valor  $r$  de  $R$  si la primer instrumento ha medido el valor  $q$  de  $Q$ , es calculada a partir de la misma fórmula para la probabilidad condicional dada en (2.13) y en (2.17) pero ahora usando el estado final dado por (2.19). Obtenemos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(b_r/a_q) &= \frac{\mathcal{P}(b_r \wedge a_q)}{\mathcal{P}(a_q)} \\
 &= \frac{\langle \Psi_2 | [\mathbb{I}_S \otimes |a_q\rangle\langle a_q| \otimes |b_r\rangle\langle b_r|] | \Psi_2 \rangle}{\langle \Psi_2 | [\mathbb{I}_S \otimes |a_q\rangle\langle a_q| \otimes \mathbb{I}_B] | \Psi_2 \rangle} \\
 &= \frac{|\langle q|\phi\rangle \langle r|\mu_q\rangle|^2}{\sum_{r'} |\langle q|\phi\rangle \langle r'|\mu_q\rangle|^2} \\
 &= |\langle r|\mu_q\rangle|^2 \\
 &= \text{Tr}[\rho'_q \Pi_r],
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

donde  $\Pi_r = |r\rangle\langle r|$  corresponde al valor  $r$  para el observable  $R$ , y se ha definido el operador de estado  $\rho'_q \equiv |\mu_q\rangle\langle \mu_q|$ .

En este caso hemos mostrado que luego de la primer medición con resultado  $q$  el sistema puede ser descrito por medio del estado  $\rho'_q$ . El efecto de la primer medición sobre el sistema se vincula en ese caso a la transformación  $|\phi\rangle \rightarrow |\mu_q\rangle$ , la cual no coincide con el postulado de colapso aplicado sobre el estado inicial  $|\phi\rangle = \sum_q \langle q|\phi\rangle |q\rangle$ . Este resultado fue previamente obtenido por L. E. Ballentine [34].

### 2.3.3. Mediciones generalizadas

Finalmente consideremos el proceso de medición más general posible [35]. Este es descrito a través de una colección de *operadores de medición*  $\{M_m\}$ , actuando sobre el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_S$  del sistema satisfaciendo  $\sum_m M_m^\dagger M_m = \mathbb{I}_S$ . La probabilidad de obtener el resultado  $m$  en la medición sobre el estado  $|\phi\rangle$  es  $\mathcal{P}(m) = \langle\phi|M_m^\dagger M_m|\phi\rangle$ , y si el resultado es  $m$  la transformación sobre el sistema es

$$|\phi\rangle \rightarrow \left( \sqrt{\langle\phi|M_m^\dagger M_m|\phi\rangle} \right)^{-1} M_m|\phi\rangle. \quad (2.21)$$

En esta sección probaremos que las propiedades de una medición generalizada pueden ser *deducidas* considerando la interacción entre el sistema  $S$  y el instrumento de medición  $A$ , representada por una transformación unitaria  $U$  en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_A$ . Si indicamos con  $|m\rangle$  el estado del instrumento correspondiente al resultado  $m$ , los operadores de medición pueden ser obtenidos desde la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} |\Psi_0\rangle = |\phi\rangle|0\rangle &\quad \rightarrow \quad |\Psi_1\rangle = U|\phi\rangle|0\rangle \\ &= \sum_m |m\rangle\langle m|U|\phi\rangle|0\rangle \\ &\equiv \sum_m (M_m|\phi\rangle)|m\rangle, \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde  $|0\rangle$  es el estado de referencia del instrumento  $A$ .

La probabilidad de obtener el resultado  $m$  puede ser deducida de la regla de Born como es habitual

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(m) &= \langle\Psi_1| \left[ \mathbb{I}_S \otimes |m\rangle\langle m| \right] |\Psi_1\rangle \\ &= \langle\phi|M_m^\dagger M_m|\phi\rangle. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Si dos instrumentos  $A$  y  $B$  con operadores de medición  $\{M_{m_A}\}$  y  $\{N_{m_B}\}$ , son usados en una de medición consecutiva sobre el sistema  $S$ , el proceso es representado por las siguientes dos transformaciones unitarias consecutivas

$$\begin{aligned} |\Psi_0\rangle &= |\phi\rangle|0_A\rangle|0_B\rangle \\ \rightarrow \quad |\Psi_1\rangle &= \sum_{m_A} (M_{m_A}|\phi\rangle)|m_A\rangle|0_B\rangle \\ &\rightarrow \quad |\Psi_2\rangle = \sum_{m_A, m_B} (N_{m_B}M_{m_A}|\phi\rangle)|m_A\rangle|m_B\rangle. \end{aligned}$$

## 2.3 Probabilidad condicional y colapso efectivo

---

La probabilidad para el instrumento  $B$  de producir el resultado  $m_B$  condicional al hecho que el instrumento  $A$  ha arrojado  $m_A$  como resultado, es obtenida desde la expresión de la probabilidad condicional y la regla de Born:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(m_B/m_A) &= \frac{\mathcal{P}(m_B \wedge m_A)}{\mathcal{P}(m_A)} \\
 &= \frac{\langle \Psi_2 | [\mathbb{I}_S \otimes |m_A\rangle\langle m_A| \otimes |m_B\rangle\langle m_B|] \Psi_2 \rangle}{\langle \Psi_2 | [\mathbb{I}_S \otimes |m_A\rangle\langle m_A| \otimes \mathbb{I}_B] \Psi_2 \rangle} \\
 &= \langle \phi_{m_A} | N_{m_B}^\dagger N_{m_B} | \phi_{m_A} \rangle,
 \end{aligned}$$

en donde hemos usado

$$|\phi_{m_A}\rangle \equiv \left( \sqrt{\langle \phi | M_{m_A}^\dagger M_{m_A} | \phi \rangle} \right)^{-1} M_{m_A} | \phi \rangle.$$

El estado  $|\phi_{m_A}\rangle$  puede ser interpretado como el resultado de una preparación sobre el sistema producida cuando el instrumento  $A$  registra el valor  $m_A$ . El postulado de colapso generalizado definido en la ecuación (2.21) es ahora deducido de la ecuación de Schrödinger y la regla de Born, considerando el instrumento de medición como un sistema cuántico. Hemos mostrado, una vez más, que todas las propiedades que definen una medición general pueden ser deducidas al considerar la medición como un proceso cuántico de interacción entre el sistema y el instrumento, y que no hay necesidad del postulado del colapso.

### 2.3.4. Macroscopicidad de los instrumentos

En las subsecciones precedentes nosotros no hemos incluido el gran número de variables microscópicas del instrumento de medición macroscópico. Incluyendo esas variables, un operador  $A$  representando la variable indicadora de un instrumento  $M_1$  tiene un conjunto completo de autovectores en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_{M_1}$ , satisfaciendo  $A|a, m\rangle = a|a, m\rangle$ , donde  $a$  es la variable indicadora, y  $m$  etiqueta todos los demás números cuánticos para especificar el autovector. Para el sistema  $S$  consideramos la medición de un observable representando por un operador  $Q$  en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_S$ , teniendo un conjunto completo de autovectores que verifican  $Q|q\rangle = q|q\rangle$ .

### 2.3 Probabilidad condicional y colapso efectivo

---

El proceso de medición no ideal es representado por una transformación unitaria en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_{M_1}$ , definido por

$$|q\rangle|a_0, m\rangle \quad \rightarrow \quad |a_q; (q, m)\rangle \equiv \sum_{q', m'} u_{qm}^{q'm'} |q'\rangle|a_q, m'\rangle.$$

Siguiendo a L. E. Ballentine [34], la etiquetas  $(r, m)$  en el vector final no denotan autovalores, sino que mantienen la memoria del estado inicial previo a la medición. El estado del sistema compuesto sistema-aparato después de la medición es  $|a_q; (q, m)\rangle$ , teniendo valores  $a_q$  de la variable indicadora bien definidos, pero en general valores no definidos en las demás variables. El valor *inicial*  $q$  del observable del sistema  $Q$  es correlacionado con el valor *final*  $a_q$  del observable indicador  $A$ .

Análogamente, la medición de otro observable representado por el operador  $R$  en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_S$  de el sistema  $S$  es hecha con otro instrumento  $M_2$  con variable indicadora  $B$  en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_{M_2}$ . El proceso de medición es representado por la siguiente transformación unitaria en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_{M_2}$

$$|r\rangle|b_0, n\rangle \quad \rightarrow \quad |b_r; (r, n)\rangle \equiv \sum_{r', n'} v_{rn}^{r'n'} |r'\rangle|b_r, n'\rangle,$$

donde  $|r\rangle$  es un autovector de  $R$  en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_S$ , y  $|b, n\rangle$  es un autovector del observable indicador  $B$  en el espacio  $\mathcal{H}_B$ . El índice  $n$  representa los números cuánticos diferentes de  $b$  asociado a la variable indicadora.

Para el estado inicial  $|\phi\rangle = \sum_q c_q |q\rangle$  del sistema  $S$ , la medición consecutiva de los observables  $Q$  y  $R$  es representada por la siguiente transformación consecutiva en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_{M_1} \otimes \mathcal{H}_{M_2}$

$$\begin{aligned} |\Psi_0\rangle &= |\phi\rangle|a_0; m\rangle|b_0; n\rangle \\ &\rightarrow |\Psi_1\rangle = \sum_q c_q |a_q; (q, m)\rangle|b_0, n\rangle \\ &\rightarrow |\Psi_2\rangle = \sum_{q, r} c_q (r|a_q; (q, m)) |b_r; (r, n)\rangle, \end{aligned}$$

donde  $(r|a_q; (q, m)) \equiv \sum_{q', m'} u_{qm}^{q'm'} \langle r|q'\rangle|a_q, m'\rangle \in \mathcal{H}_{M_1}$ . De cálculos directos

obtenemos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(b_r|a_q) &= \frac{\mathcal{P}(b_r \wedge a_q)}{\mathcal{P}(a_q)} \\
 &= \frac{\langle \Psi_2 | \left[ \mathbb{I}_S \otimes \sum_{m'} |a_q, m'\rangle \langle a_q, m'| \otimes \sum_{n'} |b_r, n'\rangle \langle b_r, n'| \right] | \Psi_2 \rangle}{\langle \Psi_2 | \left[ \mathbb{I}_S \otimes \sum_{m'} |a_q, m'\rangle \langle a_q, m'| \otimes \mathbb{I}_{M_2} \right] | \Psi_2 \rangle} \\
 &= Tr [\rho(q, m) \Pi_r],
 \end{aligned}$$

donde  $\Pi_r \equiv |r\rangle \langle r|$  y

$$\rho(q, m) \equiv \sum_{q'q''} \left( \sum_{\tilde{m}} u_{qm}^{q'\tilde{m}} \bar{u}_{qm}^{q''\tilde{m}} \right) |q'\rangle \langle q''|.$$

El operador densidad  $\rho(q, m)$  representa el estado del sistema  $S$  después que la medición con el instrumento  $M_1$  ha dado el resultado  $a_q$ .

Notamos en este caso una diferencia importante respecto a los resultados obtenidos previamente: aún para un sistema  $S$  inicialmente en un estado puro, las variables microscópicas del instrumento en la primera medición, establecen para la segunda, una distribución de probabilidad correspondiente a un estado no puro.

El colapso de la función de onda es normalmente incorporado en la teoría para justificar valores bien definidos en el proceso de medición. Es decir, es válida la implicación que si se acepta el colapso, entonces el proceso de medición produce valores bien definidos.

Nuestra estrategia aquí ha sido opuesta. Aceptando la evidencia experimental de que el proceso de medición produce resultados bien definidos, entonces hemos demostrado que el postulado del colapso puede ser deducido de la teoría si son incorporados los aparatos en las descripciones. Esto es posible para mediciones ideales. Para mediciones no ideales, demostramos además que el postulado es erróneo.

En este punto hacemos notar lo siguiente. Si bien hemos tratado con una secuencia de dos mediciones para deducir el colapso, hemos hecho esto bajo la suposición implícita de que el resultado de la primera medición queda inalterado, al menos hasta efectuarse la segunda.

Esto nos permitió calcular probabilidades condicionales vinculando resultados de una y otra medición en formulas que no dependen explícitamente

del tiempo, como por ejemplo podemos apreciar de la ecuación (2.13), la cual es obtenida a un único tiempo final después de la segunda medición.

En un proceso más general, deberíamos considerar una evolución no trivial para los aparatos aún entre las mediciones. En ese caso el proyector asociado al valor de la primera medición, luego de su evolución hasta el momento de la segunda, puede no conmutar con los proyectores asociados a los valores del segundo aparato. En tal caso, todo lo desarrollado en esta sección quedaría anulado en virtud de que la conjunción que participa en la fórmula de la probabilidad condicional, deja de ser válida.

Esto pone de relieve la necesidad de encontrar un formalismo, dentro de la teoría cuántica, que permita descripciones de propiedades a distintos tiempos, y que establezca bajo qué condiciones es posible articular esas propiedades dentro de conjunciones legítimas.

Pues bien, luego de introducir en el próximo capítulo una generalización en el tiempo de la noción de propiedad cuántica, desarrollaremos un formalismo adecuado para tal fin, el cual llamaremos *historias contextuales*. Este formalismo nos permitirá definir el concepto historias como nuevos objetos descriptivos capaces de establecer un marco dentro del cual es lícito vincular propiedades a distintos tiempos y calcular sus probabilidades.

# Capítulo 3

## Propiedades dependientes del tiempo

### 3.1. Estados y propiedades clásicas

En la mecánica clásica, dentro de la llamada formulación hamiltoniana, la dinámica de los sistemas físicos es determinada por las ecuaciones de Hamilton, las cuales son ecuaciones diferenciales para las variables de posición y momento. En un dado instante, el *estado* del sistema es especificado al dar valores a estas variables.

Geoméricamente, la posición y el momento son representadas en el llamado *espacio de las fases*  $\Gamma$ . Así, para un sistema de  $n$  partículas moviéndose en el espacio real de tres dimensiones, el espacio de las fases es un espacio de  $6n$  dimensiones. Especificar las variables de posición y momento para determinar el estado del sistema es entonces equivalente a especificar un punto en el espacio de las fases.

Cualquier otra variable asociada al sistema es determinada como función de la posición y momento, es decir como función de un punto que determina el estado en el espacio de las fases. De este modo, la evolución del sistema en el tiempo es dada por la dinámica del estado.

Pero no solo basta la evolución temporal del estado. En la descripción del comportamiento de los sistemas se requiere poder discutir sobre sus *propiedades*. La física de todo proceso se basa en última instancia en la descripción de propiedades, y esto es válido tanto para la mecánica clásica como la cuántica.

En general, las propiedades de un sistema pueden ser expresadas en términos de proposiciones que involucren condiciones sobre las variables dinámicas, en particular, condiciones sobre sus posibles valores.

Por ejemplo, consideremos un sistema  $S$  formado por un oscilador armónico simple. Una propiedad posible de ser asignada al sistema puede involucrar una condición sobre el valor de la variable energía

$$p_E = \text{"El sistema } S \text{ tiene energía menor o igual a } E\text{"}$$

Ahora bien, como las variables dinámicas son determinadas por funciones sobre el espacio de las fases, las condiciones sobre los valores de las variables corresponderán a subconjuntos de puntos en dicho espacio: aquellos que cumplen con las condiciones dadas. Así la condición  $p_E$  corresponde al subconjunto

$$C_E = \left\{ x = (p, q) \in \Gamma \mid \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} \leq E \right\}.$$

De este modo, asociaremos cada propiedad física a un subconjunto o región del espacio de las fases. No obstante, no todo subconjunto podrá ser asociado a una dada propiedad. Por razones físicas evitaremos conjuntos de puntos cuyas coordenadas tomen, por ejemplo, solo valores irracionales. Los conjuntos de puntos asociados a propiedades dinámicas, serán restringidos a los llamados conjuntos de *Borel* en  $\Gamma$ , que son esencialmente, conjuntos generados por uniones e intersecciones numerables de conjuntos abiertos y cerrados.

Tenemos entonces que, clásicamente, los estados son representados por puntos en el espacio de las fases, las variables dinámicas por funciones evaluadas sobre el espacio de las fases, y las propiedades como subconjuntos de puntos de dicho espacio.

Será posible la asignación de una determinada propiedad a un sistema si el punto que caracteriza al estado pertenece al subconjunto que representa la propiedad. De este modo, las ecuaciones de Hamilton, entonces, nos dice cómo evolucionan las propiedades, porque nos dice como el estado evoluciona atravesando distintos subconjuntos de propiedades en el espacio de las fases.

Dado un sistema, el conjunto de propiedades y el esquema de sus implicancias puede ser representado mediante un *retículo* de propiedades. Un retículo  $\mathcal{R}(X) = (X, \preceq)$ , es un conjunto de elementos  $X$  con una relación de orden parcial  $\preceq$  entre sus elementos que cumple

- **Reflexividad:**  $a \preceq a, \forall a \in X,$
- **Transitividad:** si  $a \preceq b$  y  $b \preceq c,$  entonces  $a \preceq c,$
- **Antisimetría:** si  $a \preceq b$  y  $b \preceq a,$  entonces  $a = b,$

y en donde se puede definir, respecto al orden parcial establecido, las siguientes dos operaciones

- **Supremo:**  $a \vee b = \text{Sup}\{a, b\},$  tal que
  - i)  $a \preceq \text{Sup}\{a, b\}$
  - ii)  $b \preceq \text{Sup}\{a, b\}$
  - iii) Si  $\exists c / a \preceq c \preceq \text{Sup}\{a, b\}$  y  $b \preceq c \preceq \text{Sup}\{a, b\} \Rightarrow c = \text{Sup}\{a, b\}$
- **Ínfimo:**  $a \wedge b = \text{Inf}\{a, b\},$  tal que
  - i)  $\text{Inf}\{a, b\} \preceq a$
  - ii)  $\text{Inf}\{a, b\} \preceq b$
  - iii) Si  $\exists c / \text{Inf}\{a, b\} \preceq c \preceq a$  y  $\text{Inf}\{a, b\} \preceq c \preceq b \Rightarrow c = \text{Inf}\{a, b\}$

El orden es llamado parcial, porque no todos los elementos de  $X$  están relacionados a través de la relación  $\preceq$ .

En los retículos que estudiaremos existen dos elementos especiales que tienen nombre propio: un elemento  $\emptyset$  llamado *cero* tal que  $\emptyset \preceq p \forall p,$  y otro elemento  $\mathbb{I}$  llamado *unidad*, tal que  $p \preceq \mathbb{I} \forall p.$  El cero es el ínfimo de todos los ínfimos, y la unidad es el supremo de todos los supremos.

En general, en todos los retículos se cumplen las siguientes propiedades generales:

- **Isotonía:** Si  $p \preceq q$  entonces

$$\begin{aligned} p \vee k &\preceq q \vee k \\ p \wedge k &\preceq q \wedge k \end{aligned}$$

- **Desigualdades distributivas :**

$$\begin{aligned} p \wedge (q \vee k) &\succeq (p \wedge q) \vee (p \wedge k) \\ p \vee (q \wedge k) &\preceq (p \vee q) \wedge (p \vee k) \end{aligned}$$

· **Desigualdad modular :**

$$p \vee (q \wedge k) \preceq q \wedge (p \vee k)$$

Un concepto muy importante que formará parte de futuras discusiones en esta tesis es el de distributividad. Un retículo se dice *distributivo* si vale la igualdad en las desigualdades distributivas. Además, un retículo se dice *complementado* si para todo  $p$  en el retículo, existe  $\bar{p}$  tal que

$$\begin{aligned} p \vee \bar{p} &= \mathbb{I}, \\ p \wedge \bar{p} &= \emptyset. \end{aligned}$$

Finalmente, un retículo se dice *ortocomplementado* si para todo  $p$  vale  $\bar{\bar{p}} = p$ . Bajo estas condiciones el conjunto de los elementos de un retículo junto a las operaciones de ínfimo y supremo definidas en él, determinan un *álgebra*.

Hablaremos del álgebra de las propiedades clásicas como aquella estructura formada por el retículo de todos los subconjuntos posibles del espacio de la fases, con la inclusión de conjuntos como la relación de orden parcial (implicancia). Compatible con este orden parcial, el ínfimo (intersección) y supremo (conjunción) son dados por las operaciones de intersección y unión respectivamente [27].

Los retículos de propiedades clásicas son distributivos, forman una estructura distributiva (o booleana) porque son distributivas las operaciones de unión respecto la intersección y viceversa, [10], [36]. Adicionalmente son ortocomplementados respecto al complemento usual entre conjuntos. Así, el cero de los retículos clásicos es el conjunto vacío, y la unidad es el conjunto que forma todo el espacio de las fases del sistema.

De manera más formal diremos que si tenemos dos propiedades  $p_C$  y  $p_{C'}$  asociadas a las correspondientes regiones  $C$  y  $C'$  en el espacio de las fases, entonces

- $p_C \preceq p_{C'} \iff C \subseteq C'$
- $p_{C''} = p_{C'} \wedge p_C \iff C'' = C \cap C'$
- $p_{C''} = p_{C'} \vee p_C \iff C'' = C \cup C'$
- $\overline{p_C} = p_{\bar{C}} \iff \bar{C} = \Gamma - C$ . Así la región asociada al complemento de la propiedad  $p_C$ , es el complemento de la región  $C$

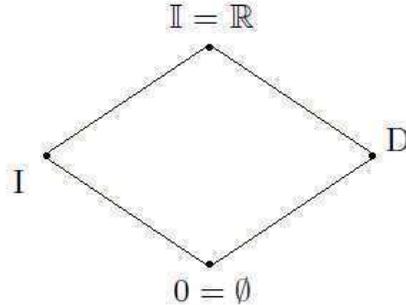


Figura 3.1: Diagrama de Hasse para una estructura booleana de 2 elementos atómicos.

Para ver todo esto consideremos un sistema clásico elemental de una partícula cuyo movimiento es restringido al eje  $x$ . Es posible caracterizar este sistema por medio de dos propiedades:

- $I =$  "a la izquierda del cero",
- $D =$  "en cero o a la derecha del cero".

Pero también existe la propiedad nula representada por el conjunto vacío, y la propiedad universal representada por el conjunto de todas las posiciones posibles (en este caso el conjunto de todos los reales). Estas cuatro propiedades con la relación de orden parcial correspondiente a la operación de inclusión, forman un retículo de propiedades de la partícula en una dimensión.

Gráficamente el retículo de propiedades es representado en lo que se llama *diagrama de Hasse*. En nuestro caso, el diagrama de Hasse es mostrado en la figura 3.1. Empezando por la propiedad nula, se puede ir ascendiendo hasta la propiedad universal de acuerdo a la operación de inclusión entre conjuntos, los cuales representan las correspondientes propiedades en el retículo. Así por ejemplo  $0 \preceq I \preceq \mathbb{I}$ . Cada línea que une dos elementos, uno por debajo del otro representa la inclusión la del primero en el segundo.

Este retículo determina una estructura de propiedades para la partícula en una dimensión, pero *bajo la suposición de que dos propiedades básicas sean consideradas, las propiedades: "I=a la izquierda del cero"; y "D=cero o a la*

*derecha del cero*".

Estas dos propiedades básicas forman los *elementos atómicos* del retículo. En general, los elementos atómicos (o los átomos) de un retículo son los elementos que están inmediatamente por encima del cero según la relación de orden. Así I y D, son los átomos, pues son los que cumplen  $0 \preceq I$  y  $0 \preceq D$  sin que exista  $x$  tal que  $0 \preceq x \preceq I$ , ni  $0 \preceq x \preceq D$ .

El conjunto de elementos atómicos está formado por aquellas propiedades mediante las cuales, por medio de la operación disyunción, es posible obtener todas las demás propiedades del retículo.

Estas propiedades básicas están vinculadas a los estados del sistema. Al nivel del espacio de las fases, ya vimos que las propiedades se corresponden a subconjuntos. Pues bien, en la literatura se llama estados del sistema a los subconjuntos de  $\Gamma$  que representan las propiedades atómicas [3], [27]. Sin embargo, más arriba habíamos dicho que los estados son puntos en el espacio de las fases. Las propiedades atómicas no siempre se relacionan con puntos en el espacio de las fases, sino con subconjuntos de una considerada partición.

Para conciliar esto diremos que en general los estados son los subconjuntos mas pequeños (atómicos) de la partición considerada, con los cuales, por medio de unión e intersección, es posible armar todos los subconjuntos de la partición. De este modo, los estados de un sistema son los elementos atómicos de su retículo.

Los elementos atómicos caracterizan la estructura de propiedades del sistema y definen todos los demás elementos. Así, el mismo sistema pero bajo la consideración de otro conjunto de propiedades atómicas, otros elementos atómicos, formarán otra estructura.

Consideremos el sistema clásico anterior: una partícula que se puede mover en el eje  $x$ . Pero ahora consideremos una partición del eje  $x$  en tres regiones atómicas. Así, quedan determinadas tres propiedades:

$$\begin{aligned} I &= \text{"a la izquierda de } -1\text{"}, \\ M &= \text{"entre } -1 \text{ y } 1\text{"}, \\ D &= \text{"la derecha de } 1\text{"}. \end{aligned}$$

Junto a la propiedad universal y el vacío, estas tres propiedades, determinan una estructura de 8 elementos como es indicado en el diagrama de Hasse de la figura 3.2. Las relaciones de orden son ahora más complicadas. Los elementos primados son los complementos de los elementos atómicos, y están formados por la unión de los otros dos. Así  $I' = M \vee D$ ,  $M' = I \vee D$

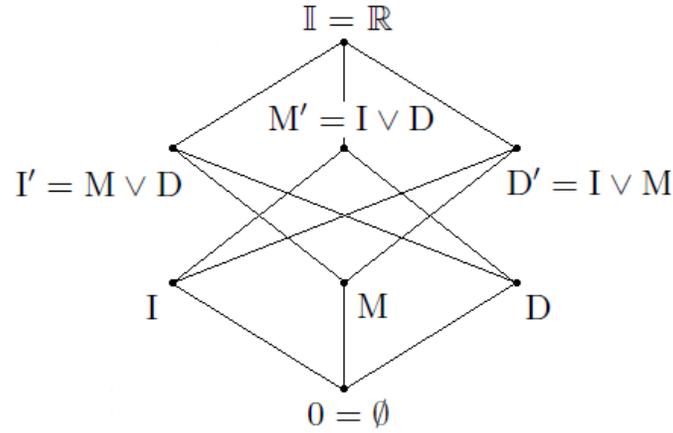


Figura 3.2: Diagrama de Hasse para una estructura booleana de 3 elementos atómicos.

y  $D' = I \vee M$ . El diagrama fue construido para que el complemento de cada elemento atómico quede exactamente arriba de este.

Ya hemos dicho que cada propiedad es asociada a un subconjunto del espacio de las fases. Adicionalmente, cada propiedad puede ser también asociada a una función llamada función característica. Consideremos cierta propiedad asociada a un subconjunto  $C_i$  del espacio de las fases. A este le corresponde una función característica  $\Pi_i$  definida por:

$$\Pi_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in C_i \\ 0, & \text{si } x \notin C_i \end{cases}, \quad (3.1)$$

donde  $x$  pertenece a  $\Gamma$ .

Las funciones características son variables dinámicas *idempotentes*, esto es  $\Pi_i(x)^2 = \Pi_i(x)$ .

Decir que el sistema tiene la propiedad  $\Pi_i$  es equivalente a decir que la función característica tiene valor 1, lo cual implica que el punto que representa el estado del sistema pertenece al conjunto  $S_i$ . Decir que el sistema no tiene la propiedad  $\Pi_i$  implica decir que la función característica tiene valor 0, lo cual implica que el estado no pertenece al conjunto  $S_i$ .

En general, y esto ya fue mencionado, una propiedad cualquiera puede ser expresada como condiciones sobre los posibles valores de las variables dinámicas, lo cual determina subconjuntos en el espacio de las fases  $\Gamma$ , porque cualquier variable  $A$  de un dado sistema clásico, es expresable en función de la posición y el momento, es decir  $A = A(x)$  donde  $x \in \Gamma$ .

En virtud de esto, cualquier variable puede ser puesta en términos de las funciones características que podemos asociar a cada posible valor de  $A$ . Consideremos una dada partición  $C_1, C_2, \dots, C_k$  del espacio de las fases, y una variable  $A$  con valor  $a_i$  en la región  $C_i$ . Entonces  $A$  puede ser representada como una combinación lineal de propiedades  $\Pi_i$ , de la siguiente forma

$$A(x) = \sum_i^k a_i \Pi_i(x). \quad (3.2)$$

Esto es así porque el subconjunto del espacio de las fases asociado a la propiedad "A tiene valor  $a_i$ " es dado por la región  $C_i$ , por lo tanto la asignación de esa propiedad es válida si  $x \in C_i$ , lo que implica  $\Pi_i(x) = 1$ . Esto se cumple si  $A$  es representado como indica la última ecuación.

Caracterizado el retículo de las propiedades que describen un dado sistema, es posible definir una *medida de probabilidad (o distribución de probabilidad)* para cada elemento del retículo.

Una medida de probabilidad  $\mathcal{P}$  es una función evaluada sobre los elementos del retículo  $\mathcal{P} : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , [36] que cumple los siguientes axiomas<sup>1</sup>

- $k_1)$   $\mathcal{P}(p_C) \geq 0$
- $k_2)$   $\mathcal{P}(\mathbb{I}) = 1$ , donde  $\mathbb{I}$  es la propiedad universal representando todo el espacio de las fases  $\Gamma$
- $k_3)$   $\mathcal{P}(p_C \vee p_{C'}) = \mathcal{P}(p_C) + \mathcal{P}(p_{C'})$ , si  $p_C \wedge p_{C'} = 0$ .

Se puede probar [36], que una distribución de probabilidad así definida para todo par de elementos  $p_C$  y  $p_{C'}$  del retículo cumple

$$p_C \preceq p_{C'} \Rightarrow \mathcal{P}(p_C) \leq \mathcal{P}(p_{C'}). \quad (3.3)$$

---

<sup>1</sup>Hay varias formulaciones que definen una medida de probabilidad. En abundante bibliografía es definida como una función  $\mathcal{P} : \mathcal{R} \rightarrow [0, 1]$  que cumple los axiomas de Kolmogorov [10]

- $k_1)$   $\mathcal{P}(\mathbb{I}) = 1, \mathcal{P}(\emptyset) = 0$
- $k_2)$   $\mathcal{P}(\overline{p_C}) = 1 - \mathcal{P}(p_C)$
- $k_3)$   $\mathcal{P}(p_C \vee p_{C'}) = \mathcal{P}(p_C) + \mathcal{P}(p_{C'})$ , si  $p_C \wedge p_{C'} = 0$ .

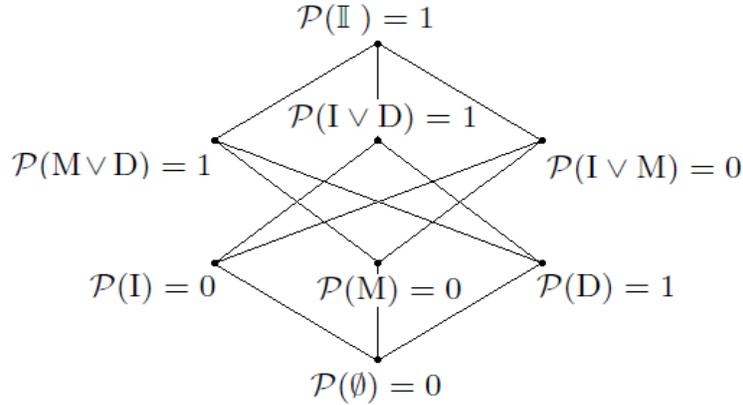


Figura 3.3: Distribución de probabilidad dado el estado " $x = 20$ "

Esto vincula la relación de orden en el retículo, con la relación de orden en los reales para la probabilidad.

La distribución de probabilidad está relacionada con el estado de sistema, de hecho, cuánticamente, el estado de un sistema puede ser considerado la distribución de probabilidad misma. Consideremos otra vez el sistema dado por una partícula que se puede mover a lo largo del eje  $x$  con las tres propiedades:  $I =$  "a la izquierda de  $-1$ ",  $M =$  "entre  $-1$  y  $1$ " y  $D =$  "la derecha de  $1$ ". Supongamos que la partícula es colocada en la posición " $x = 20$ " y es dejada allí. Estamos dando un estado para el sistema. Entonces tenemos certeza que se cumpla la propiedad  $D$ , es decir probabilidad igual a uno, y certeza de que no se cumpla  $I$ , ni  $M$ . Para especificar una distribución de probabilidad sobre el retículo, solo basta especificarla para sus elementos atómicos. Usando el axioma  $k_3$ , es posible asignar una probabilidad a propiedades compuestas, y así ir armando la distribución sobre todo el retículo hasta llegar a la identidad. Esto se ve reflejado en la figura 3.3.

Ahora bien, el estado del sistema no siempre es conocido. Conocer el estado de un gas por ejemplo, implica conocer del orden de  $10^{23}$  valores para las coordenadas y momentos de cada molécula. En ese caso, y es así como se procede en mecánica estadística, es usual definir una *densidad de probabilidad*,  $\rho(x) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^+$ , la cual representa la probabilidad por unidad de volumen del espacio de las fases, de que el estado del sistema sea representado por el punto  $x$ . Así, la medida de probabilidad sobre un elemento del retículo  $p_C$

asociado a la región  $C$  es determinada por

$$\mathcal{P}(p_C) \equiv \int_C \rho(x) dx. \quad (3.4)$$

En el apéndice A se da una breve demostración de que esta definición de probabilidad sobre subconjuntos del espacio de las fases, cumple los axiomas de la probabilidad como fueron indicados más arriba.

## 3.2. Estados y propiedades cuánticas

En esta sección daremos una introducción a la estructura de propiedades cuánticas acorde a G. Birkhoff y J. von Neumann [38], la cual es la base de las formulaciones actuales de la lógica cuántica [39], [40].

Usualmente, en la mecánica cuántica, el estado de un sistema queda determinado por un vector  $|\varphi\rangle$  en un espacio vectorial  $\mathcal{H}$ , llamado espacio de Hilbert. En una interpretación de ensamble [28] los vectores de estados son llamados estado puros y representan ensambles de sistemas todos idénticamente preparados. Para contemplar la posibilidad de ensambles más generales, por ejemplo ensambles mezclas, donde no todos los sistemas que lo componen son preparados idénticamente, se requiere del formalismo de operadores de estados. En el formalismo de operadores de estados, un estado puro  $|\varphi\rangle$  se corresponde al operador

$$\rho = |\varphi\rangle\langle\varphi|, \quad (3.5)$$

y un estado mezcla se corresponde al operador

$$\rho = \sum_i c_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|, \quad (3.6)$$

donde los  $c_i$  son los pesos estadísticos de los que se compone la mezcla. Como es sabido, a través de la regla de Born, el estado determina la distribución de probabilidad para los valores de las variables dinámicas del sistema. Si bien la mecánica cuántica no es una teoría determinística en la predicción de los valores de las variables, sí lo es en la predicción de la evolución de la distribución de probabilidad para dichos resultados, porque es determinista en la evolución de los estados. La ecuación de Schrodinger establece el operador evolución  $U(t', t)$  de modo que conocido el estado a un dado tiempo

$t$  representado por el vector  $|\varphi\rangle$ , queda determinado el estado del sistema a un tiempo posterior  $t'$  representado por el vector  $|\varphi'\rangle = U(t', t)|\varphi\rangle$ . En el caso de operadores de estado, el operador al tiempo  $t$  representado por  $\rho$  queda determinado al tiempo  $t'$  por  $\rho' = U(t', t)\rho U(t', t)^{-1}$

En mecánica cuántica las variables dinámicas son representadas por operadores hermíticos. En un espacio de Hilbert de dimensión finita, un operador  $A$  que representa una dada variable física tiene asociado un conjunto de autovalores  $a_i$ , y sus correspondientes autovectores  $|a_i\rangle$ . Los autovalores son entendidos como los posibles valores que puede tomar  $A$ .

Si el sistema es preparado en un estado genérico  $\rho$ , la regla de Born especifica que la variable  $A$  tomará, en una medición, el valor  $a_i$  con una probabilidad dada por

$$\mathcal{P}(a_i) = Tr[\rho \Pi_i], \quad (3.7)$$

donde  $\Pi_i = |a_i\rangle\langle a_i|$  es el proyector asociado al valor  $a_i$  de la variable  $A$  que proyecta sobre el subespacio generado por el correspondiente autovector  $|a_i\rangle$ .

Como en mecánica clásica, las propiedades de un sistema cuántico podrán ser caracterizadas como condiciones sobre los valores de las variables dinámicas. En mecánica clásica esto determinaba subregiones en el espacio de las fases asociados a esos valores. En mecánica cuántica, condiciones sobre los valores de las variables dinámicas determinan un conjunto de proyectores asociados a esos valores.

Así, las propiedades de un sistema cuántico serán caracterizadas por proyectores  $\Pi_i$ , o lo que es lo mismo por los subespacios que esos proyectores generan. Los proyectores resultan ser variables idempotentes, esto es  $\Pi_i^2 = \Pi_i$ , las cuales pueden tomar sólo valores 0 y 1. Tomará valor 1 si como propiedad se verifica en el sistema, y 0 si no.

Esto se refleja en el hecho de que si el sistema es preparado en un autovector  $|a_k\rangle$  de  $A$ , correspondiente al proyector  $|a_k\rangle\langle a_k|$ , la probabilidad asociada al valor  $a_i$  se reduce a

$$\mathcal{P}(a_i) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = k \\ 0, & \text{si } i \neq k \end{cases} \quad (3.8)$$

En analogía con la representación de una variable en mecánica clásica, tenemos que el proyector  $\Pi_i$ , como variable idempotente, queda asociado a la propiedad que el sistema tome valor  $a_i$  en la variable  $A$ . De hecho, como

consecuencia del teorema de la descomposición espectral [28], al igual que en mecánica clásica, una variable  $A$  puede ser desarrollada como una suma sobre variables idempotentes asociadas. En el caso cuántico, como suma sobre los proyectores  $\Pi_i$ , esto es

$$A = \sum_i^k a_i \Pi_i. \quad (3.9)$$

Si el estado en el que es preparado el sistema cumple que  $\Pi_i|\varphi\rangle = |\varphi\rangle$ , entonces la propiedad  $\Pi_i$ , asociada al valor  $a_i$  de la variable  $A$ , queda asignada al sistema como una certeza, ya que  $\mathcal{P}(a_i) = 1$ , pues de acuerdo a la regla de Born de la probabilidad tenemos

$$\mathcal{P}(a_i) = Tr[|\varphi\rangle\langle\varphi|\Pi_i] = \langle\varphi|\Pi_i|\varphi\rangle = \langle\varphi|\varphi\rangle = 1.$$

Si  $\Pi_i|\varphi\rangle = |\varphi\rangle$  entonces el subespacio  $\mathcal{H}_\varphi$  generado por el vector de estado  $|\varphi\rangle$  está incluido en el subespacio  $\mathcal{H}_i$  generado por el proyector  $\Pi_i$ . Entonces, así como en mecánica clásica una variable  $A$  con ciertos posibles valores  $a_i$  tomaba uno de ellos si el estado  $x$  en el espacio de las fases estaba incluido en la región  $S_i$  asociada a  $a_i$ ; aquí una variable cuántica  $A$  con valores  $a_i$  tomará uno de esos valores si el subespacio generado por el estado  $|\varphi\rangle$  del sistema está incluido en el subespacio asociado al proyector  $\Pi_i$  correspondiente al valor  $a_i$ .

Esto caracteriza las propiedades que pueden ser consideradas en la descripción de un sistema cuántico. Hablaremos del álgebra de las propiedades cuánticas como aquella estructura formada por el retículo de todos los subespacios posibles de un espacio de Hilbert, con una relación de orden establecida por la inclusión de subespacios. Compatible con esta implicancia, la conjunción es dada por la intersección de subespacios, y la disyunción por el menor subespacio que contienen a los dos, y sea desarrollado por ellos. La negación estará dada por el complemento ortogonal.

De manera más formal, si tenemos dos propiedades  $p_a$  y  $p_{a'}$  representadas mediante los correspondientes proyectores  $\Pi_a$  y  $\Pi_{a'}$  en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , tenemos que

- $p_a \preceq p_{a'} \quad \Leftrightarrow \quad \Pi_a \mathcal{H} \subseteq \Pi_{a'} \mathcal{H}.$
- $p_{a''} = p_a \wedge p_{a'} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{H}_{a''} = \Pi_a \mathcal{H} \cap \Pi_{a'} \mathcal{H}.$  El proyector asociado a la conjunción está dado por  $\Pi_{a''} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\Pi_a \Pi_{a'})^n.$

- $p_{a''} = p_a \vee p_{a'} \Leftrightarrow \mathcal{H}_{a''} = \{V''/V'' = \alpha V + \alpha' V', \text{ con } V \in \Pi_a \mathcal{H}, \text{ y } V' \in \Pi_{a'} \mathcal{H}\}$ . El proyector asociado a la disyunción esta dado  $\Pi_{a''} = \mathbb{I} - \lim_{n \rightarrow \infty} ((\mathbb{I} - \Pi_a) (\mathbb{I} - \Pi_{a'}))^n$ .
- $\overline{p_a} = p_{\bar{a}} \Leftrightarrow \mathcal{H}_{\bar{a}} = (\mathbb{I} - \Pi_a) \mathcal{H}$ . El proyector asociado al complemento de la propiedad  $p_a$  es complemento ortogonal del proyector  $\Pi_a$ .

En el caso que los proyectores  $\Pi_a$  y  $\Pi_{a'}$  conmuten, se tiene

$$\begin{aligned} p_{a''} = p_a \wedge p_{a'} &\Leftrightarrow \Pi_{a''} = \Pi_a \Pi_{a'} \\ p_{a''} = p_a \vee p_{a'} &\Leftrightarrow \Pi_{a''} = \Pi_a + \Pi_{a'} - \Pi_a \Pi_{a'}. \end{aligned}$$

Con estas definiciones el retículo formado por todos los subespacios en un espacio de Hilbert resulta ser *no distributivo*. Es decir, dos propiedades cuánticas, en general no cumplen las igualdades distributivas.

Si dos propiedades no cumplen las igualdades distributivas se dicen *incompatibles* [36]. Esto introduce diferencias fundamentales respecto al retículo de las propiedades clásicas. En esta diferencia reside el núcleo fundamental de donde derivan muchas de las discrepancias y dificultades conceptuales que presenta la mecánica cuántica cuando se quiere compatibilizar sus descripciones con las de la mecánica clásica. A lo largo de este trabajo atravesaremos muchas de las consecuencias de la no distributividad del retículo de las descripciones cuánticas.

Como ejemplo, consideremos un sistema de spin 1/2. Como sabemos un sistema tal puede ser representado por un espacio de Hilbert complejo de dos dimensiones. Cada subespacio generado por el proyector  $\Pi_{\pm n} = |S_n \pm\rangle \langle \pm S_n|$  correspondiente al autovector  $|S_n \pm\rangle$  del operador de spin en la dirección  $n$ , forman los elementos atómicos indicados en la figura 3.4.

Si  $\Pi_{\pm n}$  es el proyector asociado a propiedad  $p_{\pm n}$ , entonces, es fácil ver que

$$p_{+z} \wedge (p_{+x} \vee p_{-x}) \succeq (p_{+z} \wedge p_{+x}) \vee (p_{+z} \wedge p_{-x})$$

puesto que esta última expresión se traduce en términos de subespacios

$$\begin{aligned} \Pi_{+z} \mathcal{H} \wedge (\mathcal{H} \Pi_{+x} \vee \mathcal{H} \Pi_{-x}) &\supseteq (\mathcal{H} \Pi_{+z} \cap \mathcal{H} \Pi_{+x}) \wedge (\mathcal{H} \Pi_{+z} \cap \mathcal{H} \Pi_{-x}) \\ \mathcal{H} \Pi_{+z} \wedge \mathbb{I} &\supseteq \emptyset \cup \emptyset \\ \mathcal{H} \Pi_{+z} &\supseteq \emptyset, \end{aligned}$$

lo cual muestra que no valen en general las igualdades distributivas.

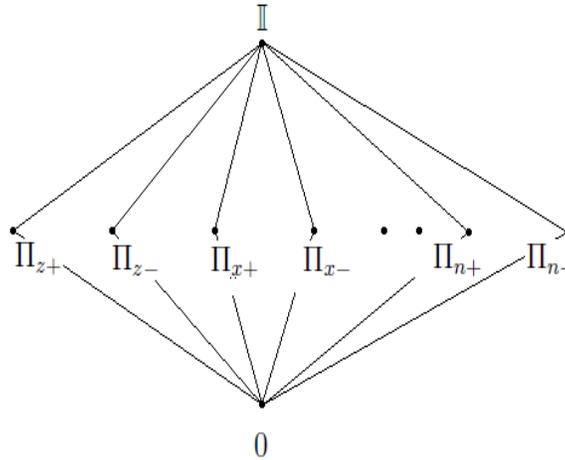


Figura 3.4: Diagrama de Hasse para el retículo de propiedades de un sistema de spin 1/2.

Esta característica del retículo de las propiedades cuánticas trae consecuencias sobre la validez de propiedades que cumple la definición de probabilidad dada sobre un retículo clásico. Como habíamos mencionado en la sección 3.1, dado un retículo de propiedades es posible definir una medida de probabilidad. Cuánticamente esto se hace con la regla de Born dada por la ecuación (3.7). Sin embargo, esta regla no es una atribución de probabilidad válida en el retículo general de las propiedades cuánticas. Esto no es consecuencia de que la regla de Born para la probabilidad sea errónea, sino de las características no booleanas propia de la estructura no distributiva donde se evalúa dicha probabilidad.

Una de las consecuencias más importantes que conllevan las características no booleanas de un retículo de propiedades, es que, a diferencia del caso clásico, la conjunción nula no basta para asegurar la aditividad de la probabilidad sobre la disyunción. Cuánticamente vale la aditividad de la probabilidad sobre la disyunción de dos propiedades, sólo cuando además de la conjunción nula, sus correspondientes proyectores son ortogonales.

Esta importante diferencia con el caso clásico ilustra sobre las dificultades que presenta la definición de probabilidades en la mecánica cuántica [14].

Como ejemplo ilustrativo, consideremos el a veces llamado principio de

superposición de la probabilidad [33], el cual indica clásicamente que

$$\mathcal{P}(p_a/p_b) = \sum_c \mathcal{P}(p_a/p_c)\mathcal{P}(p_c/p_b),$$

donde si las probabilidades son todas independientes entre sí, la formula se reduce a

$$\mathcal{P}(p_a) = \sum_c \mathcal{P}(p_a \wedge p_c).$$

Para ver que cuánticamente esto deja de valer, consideremos el ejemplo de un sistema de spin 1/2 dado arriba. Si intentamos aplicar la medida de probabilidad dada por la regla de Born, haciendo uso de la ecuación (3.3), tenemos que

$$p_{+z} = p_{+z} \wedge (p_{+x} \vee p_{-x}) \succeq (p_{+z} \wedge p_{+x}) \vee (p_{+z} \wedge p_{-x}),$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(p_{+z}) &\geq \mathcal{P}((p_{+z} \wedge p_{+x}) \vee (p_{+z} \wedge p_{-x})) \\ \mathcal{P}(p_{+z}) &\geq \mathcal{P}(p_{+z} \wedge p_{+x}) + \mathcal{P}(p_{+z} \wedge p_{-x}), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\mathcal{P}(p_{+z}) \neq \sum_{\pm} \mathcal{P}(p_{+z} \wedge p_{\pm x}).$$

Tenemos las propiedades  $p_{+z} \wedge p_{+x}$  y  $p_{+z} \wedge p_{-x}$  cuya conjunción es nula y su disyunción es  $p_{+z}$ , y sin embargo la suma de sus probabilidades no da  $\mathcal{P}(p_{+z})$ .

Así, en general, en los retículos cuánticos no valen las propiedades booleanas ni las propiedades de la probabilidad al usar la regla de Born.

Sin embargo, para todo retículo cuántico siempre es posible encontrar, subretículos distributivos y ortocomplementados. Estos subretículos son llamados *contextos* y quedan determinados por los subespacios que desarrollan los componentes de cada base ortogonal del espacio de Hilbert. Los proyectores unidimensionales asociados a cada componente de la base, representan las propiedades atómicas irreducibles del contexto. No obstante, y al igual que las particiones del espacio de fases el caso clásico, los elementos atómicos

dependen de las propiedades consideradas para el caso. En general podrán existir elementos atómicos formados con propiedades que sean disyunciones de otras más elementales, de modo que sean representados por proyectores sobre espacios no necesariamente unidimensionales. En cualquier caso, un contexto está determinado por el conjunto de propiedades atómicas  $p_i$  asociadas a los proyectores  $\Pi_i$  que verifican

$$\Pi_i \Pi_j = \delta_{ij} \Pi_i, \quad \sum_{i \in \Sigma} \Pi_i = \mathbb{I}. \quad (3.10)$$

Con la definición de la relación de orden parcial, conjunción, disyunción y complemento dadas para las propiedades cuánticas, a partir de las propiedades (3.10) es posible construir una estructura de propiedades que forman un retículo distributivo.

La primer condición en (3.10) manifiesta la ortogonalidad de los subespacios que desarrolla la base, la segunda el hecho que la suma de todos los subespacios desarrolla el espacio de Hilbert completo, por lo que le corresponde el proyector identidad. Esto determina entonces un *conjunto exhaustivo de propiedades mutuamente excluyentes*.

Como cada base determina un contexto, cada contexto se asocia a un conjunto de observables que conmutan entre sí, porque estos comparten una base común de autoestados, y por lo tanto a los posibles resultados de un conjunto de mediciones que pueden realizarse sobre el sistema en forma simultánea.

Cualquier propiedad dentro de un contexto podrá ser expresada por las disyunciones de las propiedades atómicas consideradas. Como estas siempre corresponden a subespacios ortogonales, el proyector asociado a una propiedad cualquiera  $p_a$  adopta la forma

$$\Pi_a = \sum_{i \in \sigma_a} \Pi_i,$$

donde  $\sigma_a$  es cualquier subconjunto de  $\Sigma$  ( $\sigma_a \subseteq \Sigma$ ).

El conjunto de todas las propiedades dentro del contexto determinan un espacio muestral adecuado donde verificar la noción de probabilidad dada por la regla de Born como el límite de las frecuencias obtenidas de los experimentos. Así, si un conjunto de propiedades cuánticas  $p_a$ , asociadas a los proyectores  $\Pi_a$ , forma un retículo distributivo, las probabilidades calculadas con la regla de Born cumplen los axiomas para la probabilidad como hemos

visto en el caso clásico

- $k_1)$   $\mathcal{P}(p_a) \geq 0$
- $k_2)$   $\mathcal{P}(\Omega) = 1$ , donde  $\Omega$  es la propiedad universal representando todo el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ .
- $k_3)$   $\mathcal{P}(p_a \vee p_{a'}) = \mathcal{P}(p_a) + \mathcal{P}(p_{a'})$ , si  $p_a \wedge p_{a'} = 0$ .

Adicionalmente, la probabilidad condicional definida por la expresión

$$\mathcal{P}(p_a/p_b) \equiv \frac{\mathcal{P}(p_a \wedge p_b)}{\mathcal{P}(p_b)},$$

también cumple con los mencionados axiomas de la probabilidad, cuando se aplica a propiedades de un mismo contexto. Una demostración de que la regla de Born y las probabilidades condicionales inducida por esta, cumplen los axiomas de la probabilidad dentro de un contexto es dada en el apéndice B.

Dentro del reticulado distributivo generado por las propiedades atómicas con proyectores  $\Pi_i$  que cumplen con las ecuaciones (3.10), consideremos ahora una propiedad  $p_a$  que *implica* a otra propiedad  $p_b$ . Por definición, esto quiere decir que los correspondientes subespacios del espacio de Hilbert verifican  $\mathcal{H}_a \subseteq \mathcal{H}_b$ . Entonces los proyectores asociados verifican  $\Pi_a \Pi_b = \Pi_b \Pi_a = \Pi_a$ , y por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(p_b \wedge p_a) &= Tr \left[ \rho \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \Pi_b \Pi_a \}^n \right] \\ &= Tr [\rho \Pi_a] \\ &= \mathcal{P}(p_a). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Resulta así que

$$\mathcal{P}(p_b/p_a) = \frac{\mathcal{P}(p_b \wedge p_a)}{\mathcal{P}(p_a)} = 1.$$

Se ve entonces cual es el significado estadístico de la relación de orden: Toda vez que se cumpla la propiedad  $p_a$ , se cumple también la propiedad  $p_b$ .

En forma más general, es posible demostrar que todo par de propiedades  $p_a$  y  $p_b$  de un dado contexto verifican  $p_a \preceq p_b$  si y solo si  $\mathcal{P}(p_b/p_a) = 1$ , para todo estado  $\rho$ .

Hasta aquí hemos dado una introducción de las nociones de las estructuras de propiedades clásicas y cuánticas, como estas son construidas dado

un sistema, y qué relaciones son posibles de establecer. Pero esto, aunque no explícitamente aclarado, fue hecho a un tiempo fijo. En las siguientes secciones desarrollaremos la generalización, tanto en el caso clásico como en el cuántico, de estructuras cuyas propiedades son predicadas a distintos tiempos.

Luego de hacer esto, en los subsiguientes capítulos, en el abordaje de historias cuánticas, volveremos hablar de contextos y de cómo propiedades pertenecientes a distintos contextos, a distintos tiempos nos permiten desarrollar la idea de lo que hemos llamado contextos generalizados, para introducir finalmente la idea de historias contextuales [56].

### 3.3. Propiedades clásicas dependientes del tiempo.

Como fue dicho en secciones anteriores, en la mecánica clásica, el *estado* de un sistema físico es representado matemáticamente con un punto  $x$  en el espacio de las fases, el cual está formado por los puntos que representan las posibles posiciones y momentos para el sistema en consideración.

Dentro de este esquema los sistemas son considerados *deterministas*. Esto significa que conocido el estado al tiempo  $t$ , representado por el punto  $x_t$ , queda unívocamente determinado el estado del sistema al tiempo posterior  $t'$ , representado por el punto  $x_{t'}$ . Simbólicamente,  $x_{t'} = S_{t',t}(x_t)$ , donde  $S_{t',t} : \Gamma \rightarrow \Gamma$  es una aplicación que caracteriza la evolución del sistema desde el tiempo  $t$  hasta el tiempo  $t'$ .

De acuerdo a lo explicado en la sección 3.1, como parte de la descripción de un sistema, además de especificar su estado, se requiere caracterizar también las propiedades que pueden estar asociadas a dicho estado. Ya hemos visto que las propiedades son representadas por regiones en el espacio de las fases, y también como se representan en dicho espacio las operaciones lógicas entre propiedades que formarán parte de una descripción.

Queremos ahora generalizar estas nociones involucrando al tiempo. Representaremos matemáticamente una propiedad  $p$  al tiempo  $t$  con el par  $(C_p, t)$ , donde  $C_p$  es la región correspondiente a la propiedad  $p$ .

En virtud de la aplicación  $S_{t',t}$  que determina la evolución del sistema en el espacio de las fases, una región  $C$  al tiempo  $t$  se convierte en la región  $S_{t',t}(C)$  al tiempo  $t'$ . Si la región evolucionada  $S_{t',t}(C)$  es igual a la región

### 3.3 Propiedades clásicas dependientes del tiempo.

---

$C'$ , todo sistema físico que cumple la propiedad representada por la región  $C$  al tiempo  $t$ , cumplirá con la propiedad representada por la región  $C'$  al tiempo  $t'$  posterior, y viceversa, si el sistema físico cumple con la propiedad representada por la región  $C'$  al tiempo  $t'$ , entonces cumplía con la propiedad representada por la región  $C$  al tiempo  $t$  anterior.

Motivados por estas consideraciones, definimos una *relación de equivalencia temporal* entre pares, de modo tal que  $(C, t)$  es equivalente a  $(C', t')$ , sí y solo sí la región  $C$  dada en el tiempo  $t$ , luego de ser evolucionada al tiempo  $t'$ , es igual a la región dada por  $C'$  a  $t'$ . Simbólicamente

$$(C, t) \sim (C', t') \quad \Leftrightarrow \quad S_{t',t}(C) = C'$$

Si tenemos  $(C', t') \sim (C, t)$  diremos que la propiedad representada por la región  $C'$  al tiempo  $t'$ , es la traslación de la propiedad representada por la región  $C$ , al tiempo  $t$ , y viceversa.

Veamos que así definida, esta relación es efectivamente una relación de equivalencia, es decir cumple con *reflexividad, transitividad y simetría*.

- **Reflexividad:** Trivialmente si  $t = t'$ ,  $S_{t,t}(C) = C$  y por lo tanto se cumple que  $(C, t) \sim (C, t)$ .
- **Transitividad:** Si tenemos tres propiedades que cumplen  $(C, t) \sim (C', t') \sim (C'', t'')$ , entonces

$$\begin{aligned} S_{t',t}(C) &= C' \\ S_{t'',t'}(C') &= C'' \end{aligned}$$

$\Rightarrow S_{t'',t'}(S_{t',t}(C)) = S_{t'',t'}(C') = C''$ , con lo cual  $S_{t'',t}(C) = C''$  y por lo tanto  $(C, t) \sim (C'', t'')$ .

- **Simetría:** Consideremos ahora dos clases tales que  $(C, t) \sim (C', t')$  entonces

$$S_{t',t}(C) = C'$$

$\Rightarrow S_{t,t'}(S_{t',t}(C)) = S_{t,t'}(C') = C$ , y así tenemos que  $(C', t') \sim (C, t)$ .

### 3.3 Propiedades clásicas dependientes del tiempo.

---

Una relación de equivalencia nos permite introducir *clases de equivalencia* como los conjuntos de elementos que son equivalentes a un elemento dado. Designaremos a la clase  $[C, t]$  como el conjunto de los pares que son equivalentes al par  $(C, t)$ . Al tratarse de una relación de equivalencia temporal, la clase  $[C, t]$  está formada por todas las posibles traslaciones temporales de la propiedad representada por la región  $C$  al tiempo  $t$ . Diremos que  $C$  es un representante, o representativo, al tiempo  $t$ , de la clase  $[C, t]$ .

Las clases de equivalencia, en este caso clásicas, son propiedades que contienen información de la evolución temporal del sistema. Entre estas clases es posible definir una relación de orden, y las operaciones de conjunción, disyunción y negación, lo cual nos permitirá construir el correspondiente reticulado de clases clásicas.

Comencemos definiendo la *relación de orden* para clases de equivalencia. Diremos que la clase  $[C, t]$  *precede* a la clase  $[C', t']$ , y lo designaremos con  $[C, t] \preceq [C', t']$ , cuando  $S_{t',t}(C) \subseteq C'$ .

Veamos que esta relación entre clases es efectivamente una relación de orden, es decir cumple con *reflexividad*, *transitividad* y *antisimetría*.

- **Reflexividad:** Trivialmente  $S_{t,t}(C) = C \subseteq C$  y por lo tanto se cumple que  $[C, t] \preceq [C, t]$ .
- **Transitividad:** Si tenemos tres propiedades que cumplen  $[C, t] \preceq [C', t'] \preceq [C'', t'']$ , entonces

$$\begin{aligned} S_{t',t}(C) &\subseteq C' \\ S_{t'',t'}(C') &\subseteq C'' \end{aligned}$$

$\Rightarrow S_{t'',t'}(S_{t',t}(C)) \subseteq S_{t'',t'}(C') \subseteq C''$ , con lo cual  $S_{t'',t}(C) \subseteq C''$  y por lo tanto  $[C, t] \preceq [C'', t'']$ .

- **Antisimetría:** Consideremos ahora dos propiedades tales que  $[C, t] \preceq [C', t']$  y  $[C', t'] \preceq [C, t]$ , entonces

$$\begin{aligned} S_{t',t}(C) &\subseteq C' \\ S_{t,t'}(C') &\subseteq C \end{aligned}$$

### 3.3 Propiedades clásicas dependientes del tiempo.

---

de la última ecuación tenemos  $S_{t,t'}(S_{t',t}(C)) \subseteq S_{t,t'}(C') \subseteq C$ , como además  $S_{t',t}(C) \subseteq C'$ , tenemos  $S_{t',t}(C) = C'$  y así tenemos que  $(C, t) \sim (C', t')$ , con lo cual  $[C, t] = [C', t']$ .

La relación de orden permite incorporar las operaciones lógicas de *conjunción* y *disyunción*, las cuales están definidas como el ínfimo y el supremo consistente con la relación de orden dada. Mediante la aplicación  $S_{t',t}$  que gobierna la evolución temporal, podemos definir el ínfimo y el supremo entre dos clases cualesquiera  $[C_1, t_1]$  y  $[C_2, t_2]$  utilizando un representativo de cada clase a un tiempo común. Tomando como tiempo común  $t_0$ , tenemos  $[C_1, t_1] = [C_1^0, t_0]$  y  $[C_2, t_2] = [C_2^0, t_0]$ , si  $C_1^0 = S_{t_0,t_1}(C_1)$  y  $C_2^0 = S_{t_0,t_2}(C_2)$ , con lo cual definimos

$$\begin{aligned} [C_1, t_1] \wedge [C_2, t_2] &= \text{Inf}\{[C_1, t_1], [C_2, t_2]\} \\ &= \text{Inf}\{[C_1^0, t_0], [C_2^0, t_0]\} \\ &= [C_1^0 \cap C_2^0, t_0], \end{aligned} \tag{3.12}$$

y además

$$\begin{aligned} [C_1, t_1] \vee [C_2, t_2] &= \text{Sup}\{[C_1, t_1], [C_2, t_2]\} \\ &= \text{Sup}\{[C_1^0, t_0], [C_2^0, t_0]\} \\ &= [C_1^0 \cup C_2^0, t_0] \end{aligned} \tag{3.13}$$

Veamos que estas definiciones son compatibles con la relación de orden definida entre clases.

- **Conjunción:** Si  $[C_1^0 \cap C_2^0, t_0]$  es el ínfimo entre  $[C_1, t_1] = [C_1^0, t_0]$  y  $[C_2, t_2] = [C_2^0, t_0]$  debe cumplir las siguientes tres condiciones

**i)**  $[C_1^0 \cap C_2^0, t_0] \preceq [C_1^0, t_0]$  Se cumple trivialmente dado que  $C_1^0 \cap C_2^0 \subseteq C_1^0$

**ii)**  $[C_1^0 \cap C_2^0, t_0] \preceq [C_2^0, t_0]$  Idem caso anterior dado que  $C_1^0 \cap C_2^0 \subseteq C_2^0$

**iii)** No existe clase  $[C_*, t_*]$  distinta de  $[C_1^0 \cap C_2^0, t_0]$  que cumpla  $[C_1^0 \cap C_2^0, t_0] \preceq [C_*, t_*] \preceq [C_1^0, t_0]$  y  $[C_1^0 \cap C_2^0, t_0] \preceq [C_*, t_*] \preceq [C_2^0, t_0]$ .

Supongamos que si existe  $[C_*, t_*]$ , entonces el conjunto  $C_*^0 = S_{t_0,t_*} C_*$  verificaría  $C_1^0 \cap C_2^0 \subset C_*^0 \subseteq C_1^0$ , y también  $C_1^0 \cap C_2^0 \subset C_*^0 \subseteq C_2^0$ . Pero eso significaría que el conjunto  $C_*^0$  contiene al menos un punto que pertenece a  $C_1^0$  y a  $C_2^0$  pero no a  $C_1^0 \cap C_2^0$ , lo que es imposible.

### 3.3 Propiedades clásicas dependientes del tiempo.

---

- **Disyunción:** Si  $[C_1^0 \cup C_2^0, t_0]$  es el supremo entre  $[C_1, t_1] = [C_1^0, t_0]$  y  $[C_2, t_2] = [C_2^0, t_0]$  debe cumplir las siguientes tres condiciones

i)  $[C_1^0, t_0] \preceq [C_1^0 \cup C_2^0, t_0]$  se cumple trivialmente ya que  $C_1^0 \subseteq C_1^0 \cup C_2^0$

ii)  $[C_2^0, t_0] \preceq [C_1^0 \cup C_2^0, t_0]$  Idem caso anterior ya que:  $C_2^0 \subseteq C_1^0 \cup C_2^0$

iii) No existe clase  $[C_*, t_*]$  distinta de  $[C_1^0 \cup C_2^0, t_0]$  que cumpla  $[C_1^0, t_0] \preceq [C_*, t_*] \preceq [C_1^0 \cup C_2^0, t_0]$  y  $[C_2^0, t_0] \preceq [C_*, t_*] \preceq [C_1^0 \cup C_2^0, t_0]$ .

Supongamos que si existe  $[C_*, t_*]$ , entonces el conjunto  $C_*^0 = S_{t_0, t_*} C_*$  verificaría  $C_1^0 \subseteq C_*^0 \subset (C_1^0 \cup C_2^0)$ , y también  $C_2^0 \subseteq C_*^0 \subset (C_1^0 \cup C_2^0)$ . Pero eso significaría que el conjunto  $(C_1^0 \cup C_2^0)$  contiene al menos un punto que no pertenece a  $C_*^0$ , y entonces no pertenece a  $C_1^0$  ni a  $C_2^0$ , lo que es imposible.

- **Negación:** Finalmente definimos la *negación* de la clase de equivalencia  $[C, t]$ , como la clase de equivalencia  $[\overline{C}, t]$ , donde  $\overline{C}$  representa el complemento del conjunto  $C$  en el espacio de las fases  $\Gamma$ , esto es

$$[\overline{C}, t] = [\overline{C}, t]. \quad (3.14)$$

La interpretación de la operación conjunción y disyunción es inmediata. Todos los estados representados por un punto del conjunto  $(C_1^0 \cup C_2^0)$  al tiempo  $t_0$  estarán representados por un punto de  $C_1$  al tiempo  $t_1$ , ó bien por un punto de  $C_2$  al tiempo  $t_2$ . Todos los estados representados por un punto del conjunto  $(C_1^0 \cap C_2^0)$  al tiempo  $t_0$  estarán representados por un punto de  $C_1$  al tiempo  $t_1$ , y también por un punto de  $C_2$  al tiempo  $t_2$ .

El conjunto de las clases de equivalencia  $[C, t]$ , con la relación de orden, la conjunción, la disyunción y la negación definidas más arriba, forma un *reticulado ortocomplementado* cuyo cero está formado por el vacío en el espacio de las fases a un dado tiempo, es decir por el par  $[\emptyset, t]$ ; y su unidad por el espacio completo, es decir por  $[\Gamma, t]$ .

Este reticulado es una generalización, a distintos tiempos, del reticulado de las propiedades clásicas formadas con todos los subconjuntos posibles del conjunto de puntos del espacio de las fases. En virtud de la relación de equivalencia, es posible tomar un representante de la clase que forma cada elemento de este reticulado a un tiempo común. Como las operaciones entre clases son las clases de las operaciones a ese tiempo común, es claro que el retículo de clases de equivalencia hereda las características del retículo

### 3.3 Propiedades clásicas dependientes del tiempo.

---

representante tomado al tiempo común. Por consiguiente, se trata de un *reticulado distributivo* de clases de equivalencia.

De esta forma hemos podido definir un *universo del discurso* que involucra distintos tiempos, formado por las clases de la forma  $[C, t]$ . Para conectar lo aquí hecho con lo que haremos para el caso de la mecánica cuántica hablaremos de las probabilidad de estas clases.

Como hemos mencionado en la sección 3.1, en la mecánica clásica, cuando no se conoce con precisión el punto del espacio de las fases que representa con exactitud el estado del sistema, es usual definir una función  $\rho(x) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^+$ , llamada *densidad de probabilidad*.

Si el sistema evoluciona explícitamente en el tiempo se define una densidad de probabilidad dependiente del tiempo  $\rho_t(x) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^+$ , la cual representa densidad de probabilidad de que el estado del sistema al tiempo  $t$  sea el caracterizado por el punto  $x$ . Conociendo la ley de evolución  $S_{t',t}$  es posible determinar la distribución de probabilidad al tiempo  $t'$ , si se conoce la distribución al tiempo  $t$  representada por  $\rho_t$

$$\rho_{t'}(x) = \left| \frac{\partial S_{t',t}^{-1}(x)}{\partial x} \right| \rho_t(S_{t',t}^{-1}(x)).$$

Esta última expresión se obtiene de postular que la probabilidad asignada al estado del sistema en cualquier región  $C$  al tiempo  $t$  sea igual a la probabilidad para el estado del sistema en la región  $C' = S_{t',t}(C)$  al tiempo  $t'$  (ver apéndice E). De este modo, si una propiedad asociada a la región  $C$  al tiempo  $t$  es equivalente a otra propiedad asociada a la región  $C'$  al tiempo  $t'$ , se obtienen las mismas probabilidades

$$\mathcal{P}(C', t') = \int_{C'} \rho_{t'}(x) dx = \int_C \rho_t(x) dx = \mathcal{P}(C, t).$$

Esto asigna una misma probabilidad a todas las propiedades que son miembros de una misma clase de equivalencia. Por lo tanto definimos la probabilidad de una clase como la probabilidad de uno de sus miembros representantes a un dado tiempo, calculada con la densidad de probabilidad tomada a ese tiempo. Esto es

$$\mathcal{P}([C, t]) = \mathcal{P}(C, t) = \int_C \rho_t(x) dx = \int_{C'} \rho_{t'}(x) dx = \mathcal{P}(C', t'). \quad (3.15)$$

### 3.4 Propiedades cuánticas dependientes del tiempo.

---

No es difícil demostrar (ver apéndice C) que con esta definición de probabilidad de clases se cumplen los axiomas de la probabilidad dados en la sección 3.1

- $k_1)$   $\mathcal{P}([C, t]) \geq 0,$
- $k_2)$   $\mathcal{P}([\Gamma, t]) = 1,$
- $k_3)$   $\mathcal{P}([C_1, t_1] \vee [C_2, t_2]) = \mathcal{P}([C_1, t_1]) + \mathcal{P}([C_2, t_2]),$  si  $[C_1, t_1] \wedge [C_2, t_2] = 0.$

### 3.4. Propiedades cuánticas dependientes del tiempo.

Como ha sido indicado en la sección 3.2, en la mecánica cuántica, el estado puro de un sistema físico es representado matemáticamente con un vector dentro del espacio de Hilbert cuya evolución temporal es gobernada por la ecuación de Schrodinger. Así, si  $U(t', t)$  es el operador de evolución del tiempo  $t$  al tiempo  $t'$  dado por la ecuación de Schrodinger, y si  $|\varphi_t\rangle$  es el estado del sistema a un dado tiempo  $t$ , entonces el estado a un tiempo  $t'$  es dado por  $U(t', t)|\varphi_t\rangle = |\varphi_{t'}\rangle.$

Consideremos entonces un sistema físico que a un dado tiempo  $t$  es preparado en un estado puro  $|\varphi_t\rangle$  y consideremos que  $|\varphi_t\rangle$  es un autovector con autovalor uno del proyector  $\Pi_p$ , correspondiente a la propiedad  $p$ , esto es

$$\Pi_p|\varphi_t\rangle = |\varphi_t\rangle,$$

como hemos visto en la sección 3.2 podemos decir que en estas condiciones el sistema "tiene" la propiedad  $p$  al tiempo  $t$ , o mejor dicho, queda asignada al sistema con certeza a ese tiempo, porque tiene probabilidad igual a uno de acuerdo a la regla de Born de la probabilidad.

Como en el caso clásico, queremos generalizar esta noción de propiedad involucrando al tiempo. Representaremos matemáticamente una propiedad  $p$  al tiempo  $t$  con el par  $(\Pi_p, t)$ , donde  $\Pi_p$  es el proyector correspondiente a la propiedad  $p$ .

Ahora bien, aplicando la evolución temporal a la ultima ecuación tenemos que

$$\begin{aligned} U(t', t)\Pi_p U^{-1}(t', t)U(t', t)|\varphi_t\rangle &= U(t', t)|\varphi_t\rangle \\ \Pi_{p'}|\varphi_{t'}\rangle &= |\varphi_{t'}\rangle. \end{aligned} \tag{3.16}$$

### 3.4 Propiedades cuánticas dependientes del tiempo.

---

Esto nos dice que, si la propiedad  $p$  asociada al proyector  $\Pi_p$  puede ser asignada al sistema al tiempo  $t$ , entonces la propiedad  $p'$  asociada al proyector  $U(t', t)\Pi_p U^{-1}(t', t)$  puede ser asignada al mismo sistema a un tiempo posterior  $t'$ , y viceversa. Es decir, en virtud del operador de evolución  $U(t', t)$ , una determinada propiedad  $p$  representada por el proyector  $\Pi_p$  a un dado tiempo  $t$ , evoluciona a la propiedad  $p'$  representada por  $U(t', t)\Pi_p U^{-1}(t', t)$  al tiempo  $t'$ .

Motivados por estas consideraciones, definimos una *relación de equivalencia temporal* entre propiedades cuánticas de modo tal que el par  $(\Pi_p, t)$  es equivalente a  $(\Pi_{p'}, t')$ , sí y solo sí el subespacio generado por  $\Pi_p$  en el tiempo  $t$ , pero evolucionado hasta el tiempo  $t'$ , es igual al proyector  $\Pi_{p'}$  a  $t'$ . Simbólicamente

$$(\Pi_p, t) \sim (\Pi_{p'}, t') \quad \Leftrightarrow \quad U(t', t)\Pi_p U^{-1}(t', t) = \Pi_{p'}.$$

Si tenemos  $(\Pi_p, t) \sim (\Pi_{p'}, t')$  diremos que la propiedad representada por el proyector  $\Pi_{p'}$  al tiempo  $t'$ , es la traslación de la propiedad representada por  $\Pi_p$  al tiempo  $t$ , y viceversa.

Veamos que así definida, esta relación es efectivamente una relación de equivalencia, es decir cumple con *reflexividad, transitividad y simetría*.

- **Reflexividad:** Trivialmente  $U(t, t)\Pi_p U^{-1}(t, t) = \Pi_p$ , y por lo tanto  $(\Pi_p, t) \sim (\Pi_p, t)$ .
- **Transitividad:** Consideremos tres propiedades que cumplen  $(\Pi_p, t) \sim (\Pi_{p'}, t') \sim (\Pi_{p''}, t'')$  entonces

$$\begin{aligned} U(t', t)\Pi_p U^{-1}(t', t) &= \Pi_{p'} \\ U(t'', t')\Pi_{p'} U^{-1}(t'', t') &= \Pi_{p''} \end{aligned}$$

Reemplazando la primera ecuación en la segunda resulta

$$U(t'', t')U(t', t)\Pi_p U^{-1}(t', t)U^{-1}(t'', t') = U(t'', t)\Pi_p U^{-1}(t'', t) = \Pi_{p''}$$

y por lo tanto  $(\Pi_p, t) \sim (\Pi_{p''}, t'')$ .

- **Simetría:** Consideremos ahora dos propiedades tales que  $(\Pi_p, t) \sim (\Pi_{p'}, t')$ , entonces

$$U(t', t)\Pi_p U^{-1}(t', t) = \Pi_{p'}$$

$\Rightarrow \Pi_p = U^{-1}(t', t)\Pi_{p'}U(t', t)$ , y así tenemos que  $(\Pi_{p'}, t') \sim (\Pi_p, t)$ .

### 3.4 Propiedades cuánticas dependientes del tiempo.

---

Al igual que en el caso clásico, la relación de equivalencia temporal nos permite introducir *clases de equivalencia* como los conjuntos de elementos que son equivalentes a un elemento dado. Designaremos a la clase  $[\Pi_p, t]$  como el conjunto de los pares que son equivalentes al par  $(\Pi_p, t)$ , es decir al conjunto de todas las posibles traslaciones temporales de la propiedad representada por el proyector  $\Pi_p$  en el tiempo  $t$ .

Las clases de equivalencia, en este caso cuántica, son nuevas propiedades que contienen información de la evolución dinámica del sistema. Entre ellas es posible definir una relación de orden y las operaciones de conjunción, disyunción y negación, lo cual nos permitirá construir un reticulado de clases cuánticas.

Comenzamos definiendo una *relación de orden* entre clases de equivalencia cuánticas. Diremos que la clase  $[\Pi_p, t]$  *precede* a la clase  $[\Pi_{p'}, t']$ , y lo designaremos con  $[\Pi_p, t] \preceq [\Pi_{p'}, t']$ , cuando  $U(t', t)\Pi_p U^{-1}(t', t)\mathcal{H} \subseteq \Pi_{p'}\mathcal{H}$ .

Esta relación de orden entre clases cumple con *reflexividad*, *transitividad* y *antisimetría*.

- **Reflexividad:** Trivialmente  $U(t, t)\Pi_p U^{-1}(t, t)\mathcal{H} = \Pi_p\mathcal{H} \subseteq \Pi_p\mathcal{H}$ , y por lo tanto  $[\Pi_p, t] \preceq [\Pi_p, t]$ .
- **Transitividad:** Consideremos tres propiedades que cumplen  $[\Pi_p, t] \preceq [\Pi_{p'}, t'] \preceq [\Pi_{p''}, t'']$  entonces

$$\begin{aligned} U(t', t)\Pi_p U^{-1}(t', t)\mathcal{H} &\subseteq \Pi_{p'}\mathcal{H} \\ U(t'', t')\Pi_{p'} U^{-1}(t'', t')\mathcal{H} &\subseteq \Pi_{p''}\mathcal{H} \end{aligned}$$

Reemplazando la primera ecuación en la segunda resulta

$$U(t'', t)U(t', t)\Pi_p U^{-1}(t', t)U^{-1}(t'', t')\mathcal{H} = U(t'', t)\Pi_p U^{-1}(t'', t)\mathcal{H} \subseteq \Pi_{p''}\mathcal{H}$$

y por lo tanto  $[\Pi_p, t] \preceq [\Pi_{p''}, t'']$ .

- **Antisimetría:** Consideremos ahora dos clases tales que  $[\Pi_p, t] \preceq [\Pi_{p'}, t']$  y  $[\Pi_{p'}, t'] \preceq [\Pi_p, t]$ , entonces

$$\begin{aligned} U(t', t)\Pi_p U^{-1}(t', t)\mathcal{H} &\subseteq \Pi_{p'}\mathcal{H} \\ U(t, t')\Pi_{p'} U^{-1}(t, t')\mathcal{H} &\subseteq \Pi_p\mathcal{H} \end{aligned}$$

### 3.4 Propiedades cuánticas dependientes del tiempo.

---

con lo cual  $U(t, t')U(t', t)\Pi_p U^{-1}(t', t)U^{-1}(t, t')\mathcal{H} \subseteq U(t, t')\Pi_{p'}U^{-1}(t, t')\mathcal{H} \subseteq \Pi_p\mathcal{H}$ , como además se cumple  $U(t', t)\Pi_p U^{-1}(t', t)\mathcal{H} \subseteq \Pi_{p'}\mathcal{H}$ , tenemos que  $U(t', t)\Pi_p U^{-1}(t', t) = \Pi_{p'}$  y así  $(\Pi_p, t) \sim (\Pi_{p'}, t')$ , de modo que  $[\Pi_p, t] = [\Pi_{p'}, t']$ .

La *conjunción* (ínfimo) y la *disyunción* (supremo) entre clases de equivalencia se obtienen a partir de esta relación de orden. Mediante el operador de evolución  $U(t', t)$  definimos el ínfimo y el supremo entre dos clases cualesquiera  $[\Pi_1, t_1]$  y  $[\Pi_2, t_2]$  utilizando un representativo de cada clase a un tiempo común. Tomando como tiempo común  $t_0$ , tenemos  $[\Pi_1, t_1] = [\Pi_1^0, t_0]$  y  $[\Pi_2, t_2] = [\Pi_2^0, t_0]$ , donde indicamos  $\Pi_1^0 = U(t_0, t_1)\Pi_1 U^{-1}(t_0, t_1)$  y  $\Pi_2^0 = U(t_0, t_2)\Pi_2 U^{-1}(t_0, t_2)$ . Definimos entonces

$$\begin{aligned} [\Pi_1, t_1] \wedge [\Pi_2, t_2] &= \text{Inf}\{[\Pi_1, t_1], [\Pi_2, t_2]\} \\ &= \text{Inf}\{[\Pi_1^0, t_0], [\Pi_2^0, t_0]\} \\ &= [\Pi_{1\wedge 2}^0, t_0], \end{aligned} \tag{3.17}$$

con  $\Pi_{1\wedge 2}^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (\Pi_1^0 \Pi_2^0)^n$ . Además

$$\begin{aligned} [\Pi_1, t_1] \vee [\Pi_2, t_2] &= \text{Sup}\{[\Pi_1, t_1], [\Pi_2, t_2]\} \\ &= \text{Sup}\{[\Pi_1^0, t_0], [\Pi_2^0, t_0]\} \\ &= [\Pi_{1\vee 2}^0, t_0], \end{aligned} \tag{3.18}$$

con  $\Pi_{1\vee 2}^0 = \mathbb{I} - \lim_{n \rightarrow \infty} ((\mathbb{I} - \Pi_1^0)(\mathbb{I} - \Pi_2^0))^n$ . Veamos que estas definiciones son compatibles con la relación de orden definida entre clases

- **Conjunción:** Si  $[\lim_{n \rightarrow \infty} (\Pi_1^0 \Pi_2^0)^n, t_0] = [\Pi_{1\wedge 2}^0, t_0]$  es el ínfimo entre  $[\Pi_1, t_1] = [\Pi_1^0, t_0]$  y  $[\Pi_2, t_2] = [\Pi_2^0, t_0]$ , donde  $\Pi_{1\wedge 2}^0 \mathcal{H} = \Pi_1^0 \mathcal{H} \cap \Pi_2^0 \mathcal{H}$ , entonces

i)  $[\Pi_{1\wedge 2}^0, t_0] \preceq [\Pi_1^0, t_0]$ . Se cumple trivialmente dado que  $\Pi_{1\wedge 2}^0 \mathcal{H} \subseteq \Pi_1^0 \mathcal{H}$

ii)  $[\Pi_{1\wedge 2}^0, t_0] \preceq [\Pi_2^0, t_0]$ . Idem caso anterior dado que  $\Pi_{1\wedge 2}^0 \mathcal{H} \subseteq \Pi_2^0 \mathcal{H}$

iii) No existe clase  $[\Pi_*, t_*]$  distinta de  $[\Pi_{1\wedge 2}^0, t_0]$  que cumpla  $[\Pi_{1\wedge 2}^0, t_0] \preceq [\Pi_*, t_*] \preceq [\Pi_1^0, t_0]$  y  $[\Pi_{1\wedge 2}^0, t_0] \preceq [\Pi_*, t_*] \preceq [\Pi_2^0, t_0]$ .

Supongamos que si existe  $[\Pi_*, t_*]$ , entonces el proyector dado por  $\Pi_*^0 = U(t_0, t_*)\Pi_* U^{-1}(t_0, t_*)$  verificaría  $\Pi_{1\wedge 2}^0 \mathcal{H} \subset \Pi_*^0 \mathcal{H} \subseteq \Pi_1^0 \mathcal{H}$ , y también  $\Pi_{1\wedge 2}^0 \mathcal{H} \subset \Pi_*^0 \mathcal{H} \subseteq \Pi_2^0 \mathcal{H}$ . Pero eso significaría que el conjunto  $\Pi_*^0 \mathcal{H}$

### 3.4 Propiedades cuánticas dependientes del tiempo.

---

contiene al menos un vector que pertenece a  $\Pi_1^0\mathcal{H}$  y a  $\Pi_2^0\mathcal{H}$  pero no a  $\Pi_{1\wedge 2}^0\mathcal{H} = \Pi_1^0\mathcal{H} \cap \Pi_2^0\mathcal{H}$ , lo que es imposible. Luego se cumple la propiedad iii).

- **Disyunción:** Si  $[(\mathbb{I} - \lim_{n \rightarrow \infty} \{(\mathbb{I} - \Pi_1^0)(\mathbb{I} - \Pi_2^0)\}^n), t_0] = [\Pi_{1\vee 2}^0, t_0]$  es el supremo entre  $[\Pi_1, t_1] = [\Pi_1^0, t_0]$  y  $[\Pi_2, t_2] = [\Pi_2^0, t_0]$ , donde  $\Pi_{1\vee 2}^0\mathcal{H} = \{V/V = \alpha V_1 + \beta V_2, V_1 \in \Pi_1^0\mathcal{H}, V_2 \in \Pi_2^0\mathcal{H}\}$  entonces

i)  $[\Pi_1^0, t_0] \preceq [\Pi_{1\vee 2}^0, t_0]$ . Se cumple trivialmente dado que  $\Pi_1^0\mathcal{H} \preceq \Pi_{1\vee 2}^0\mathcal{H}$

ii)  $[\Pi_2^0, t_0] \preceq [\Pi_{1\vee 2}^0, t_0]$ . Idem caso anterior dado que  $\Pi_2^0\mathcal{H} \preceq \Pi_{1\vee 2}^0\mathcal{H}$

iii) No existe clase  $[\Pi_*, t_*]$  distinta de  $[\Pi_{1\vee 2}^0, t_0]$  que cumpla  $[\Pi_1^0, t_0] \preceq [\Pi_*, t_*] \preceq [\Pi_{1\vee 2}^0, t_0]$  y  $[\Pi_2^0, t_0] \preceq [\Pi_*, t_*] \preceq [\Pi_{1\vee 2}^0, t_0]$ .

Supongamos que si existe  $[\Pi_*, t_*]$ , entonces el proyector dado por  $\Pi_*^0 = U(t_0, t_*)\Pi_*U^{-1}(t_0, t_*)$  verificaría  $\Pi_1^0\mathcal{H} \subseteq \Pi_*^0\mathcal{H} \subset \Pi_{1\vee 2}^0\mathcal{H}$ , y también  $\Pi_2^0\mathcal{H} \subseteq \Pi_*^0\mathcal{H} \subset \Pi_{1\vee 2}^0\mathcal{H}$ . Pero eso significaría que el conjunto  $\Pi_*^0\mathcal{H}$  contiene al menos un vector que pertenece a  $\Pi_{1\vee 2}^0\mathcal{H}$  pero no a  $\Pi_1^0\mathcal{H}$  ni a  $\Pi_2^0\mathcal{H}$ , lo que es imposible. Luego se cumple la propiedad iii).

- **Negación:** Finalmente definimos la *negación* de una clase de propiedades a partir del complemento ortogonal, esto es

$$\overline{[\Pi, t]} = [\mathbb{I} - \Pi, t]. \quad (3.19)$$

En resumen, las operaciones de conjunción, disyunción y negación de clases de propiedades cuánticas, son obtenidas de la conjunción, disyunción y negación, de las propiedades que son los representantes de dichas clases, a un tiempo común dado. En otras palabras, las operaciones entre clases son las clases de las operaciones a un tiempo común.

El conjunto de las clases de equivalencia cuánticas formadas con los pares  $[\Pi, t]$ , con la relación de orden, la conjunción, la disyunción y la negación definidas más arriba, forma un *reticulado ortocomplementado* cuyo cero está formado por el cero en el espacio de Hilbert a un dado tiempo, es decir por el par  $[0, t]$ ; y su unidad por el espacio de Hilbert completo, representado por la identidad, es decir por  $[\mathbb{I}, t]$ .

Como era de esperar, el *universo del discurso* formado por el conjunto de clases de equivalencia cuánticas, resulta heredar las mismas características del

### 3.4 Propiedades cuánticas dependientes del tiempo.

---

discurso cuántico habitual, es decir forman un retículo ortocomplementado, pero *no distributivo*.

Existirán *clases incompatibles* que provienen de propiedades incompatibles cuando estas son trasladadas a un tiempo común, es decir de propiedades que cuando son trasladadas a un tiempo común, sus correspondientes proyectores no conmutan.

No obstante, clases de equivalencia  $[\Pi_i, t]$  que provienen de un contexto al tiempo  $t$ , es decir, en donde los  $\Pi_i$  cumplen las ecuaciones (3.10) que definen un contexto, sí forman un retículo distributivo.

A este contexto lo llamaremos *contexto generalizado*. Será aquel contexto de clases cuyos representantes son las propiedades que pertenecen al contexto elegido al tiempo  $t$  dado. Un contexto generalizado es un contexto de clases de equivalencia establecidas por la evolución temporal de un contexto habitual a un dado tiempo.

Para terminar la sección hablaremos ahora de la probabilidad de clases cuánticas. Supongamos un sistema preparado en el estado  $\rho_t$  al tiempo  $t$ . Es fácil ver que si la propiedad  $p$  al tiempo  $t$ , esto es  $(\Pi_p, t)$  es equivalente a la propiedad  $p'$  al tiempo  $t'$ , es decir  $(\Pi_{p'}, t')$ , entonces la regla de Born usual da la misma probabilidad, puesto que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\Pi_{p'}, t') &= \text{Tr}[\rho_{t'} \Pi_{p'}] \\ &= \text{Tr}[U^{-1}(t', t) \rho_t U(t', t) \Pi_p] \\ &= \text{Tr}[\rho_t \Pi_p] = \mathcal{P}(\Pi_p, t). \end{aligned}$$

Esto indica que una única probabilidad es obtenida para propiedades de la misma clase de equivalencia. En términos físicos, todas las propiedades de una misma clase son esencialmente la misma propiedad. Por lo tanto definimos la probabilidad de una clase como la probabilidad de uno de sus miembros a un dado tiempo, calculada con el estado a ese tiempo. Esto es

$$\begin{aligned} \mathcal{P}([\Pi_p, t]) &= \mathcal{P}(\Pi_p, t) \\ &= \text{Tr}[\rho_t \Pi_p] \\ &= \text{Tr}[\rho_{t'} \Pi_{p'}] \\ &= \mathcal{P}(\Pi_{p'}, t'). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Al igual que en el caso de la estructura de propiedades cuánticas a tiempo fijo, esta probabilidad no cumple los axiomas de Kolmogorov en un retículo de clases de propiedades cuánticas general. Como el retículo de las clases

### 3.4 Propiedades cuánticas dependientes del tiempo.

---

cuánticas resulta ser en general no distributivo, tenemos que la conjunción de clases vacías no es suficiente para asegurar la aditividad de la probabilidad en la disyunción.

La condición  $[\Pi_1, t_1] \wedge [\Pi_2, t_2] = 0$  implica que los proyectores  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$ , trasladados a un tiempo común  $t_0$ , esto es  $\Pi_1^0$  y  $\Pi_2^0$ , generan subespacios vectoriales con intersección nula. Sólo en el caso especial en que estos subespacios resulten además ortogonales se cumplirá la aditividad de las probabilidades para las propiedades trasladadas a ese tiempo común representadas por los proyectores  $\Pi_1^0$  y  $\Pi_2^0$ . Por lo tanto, solo en ese caso, se cumplirá la aditividad para la probabilidad de la disyunción de las correspondientes clases, es decir

$$\begin{aligned} \mathcal{P}([\Pi_1, t_1] \vee [\Pi_2, t_2]) &= \mathcal{P}([\Pi_1^0, t_0] \vee [\Pi_2^0, t_0]) \\ &= \mathcal{P}([\Pi_1^0, t_0]) + \mathcal{P}([\Pi_2^0, t_0]) \\ &= \mathcal{P}([\Pi_1, t_1]) + \mathcal{P}([\Pi_2, t_2]). \end{aligned}$$

Ya hemos visto que dentro del retículo de clases de propiedades cuánticas existen subretículos que son distributivos. Son los retículos de clases generados por un contexto a un tiempo dado, esto es, un contexto generalizado. Dentro de un contexto generalizado las probabilidades definidas para clases de equivalencia por supuesto cumplen con los axiomas de Kolmogorov de la probabilidad

- $k_1)$   $\mathcal{P}([\Pi, t]) \geq 0$ ,
- $k_2)$   $\mathcal{P}([\mathbb{I}, t]) = 1$
- $k_3)$   $\mathcal{P}([\Pi_1, t_1] \vee [\Pi_2, t_2]) = \mathcal{P}([\Pi_1, t_1]) + \mathcal{P}([\Pi_2, t_2])$ , si  $[\Pi_1, t_1] \wedge [\Pi_2, t_2] = 0$

Adicionalmente, respecto a la probabilidad condicional, como hemos visto para el caso cuántico a tiempo fijo, si dos clases  $[\Pi_1, t_1]$  y  $[\Pi_2, t_2]$  pertenecen al mismo contexto, vale que si  $[\Pi_1, t_1]$  *implica*  $[\Pi_2, t_2]$ , entonces tenemos que  $\mathcal{P}([\Pi_2, t_2]/[\Pi_1, t_1]) = 1$ , pues si  $[\Pi_1, t_1] \preceq [\Pi_2, t_2]$ , entonces los proyectores trasladados al tiempo común  $t_0$  cumplen  $\Pi_1^0 \subseteq \Pi_2^0$ . Esto implica  $\Pi_2^0 \Pi_1^0 = \Pi_1^0$ , y así tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}([\Pi_2, t_2]/([\Pi_1, t_1])) &= \frac{\mathcal{P}([\Pi_2, t_2] \wedge [\Pi_2, t_2])}{\mathcal{P}([\Pi_1, t_1])} \\ &= \frac{\mathcal{P}([\Pi_2^0, t_0] \wedge [\Pi_1^0, t_0])}{\mathcal{P}([\Pi_1^0, t_0])} \\ &= \frac{\mathcal{P}([\Pi_2^0 \Pi_1^0, t_0])}{\mathcal{P}([\Pi_1^0, t_0])} = 1. \end{aligned}$$

Usaremos este resultado más adelante.

## 3.5. Relaciones entre propiedades clásicas y cuánticas.

En las secciones precedentes hemos visto como caracterizar las propiedades con las que podemos hablar el lenguaje de la física clásica y el de la física cuántica, y como en ambos casos esas propiedades pueden ser generalizadas en un lenguaje más amplio que involucre al tiempo en sus descripciones mediante la definición de clases establecidas a través la noción de equivalencia temporal.

No obstante, los objetos teóricos que representan las propiedades cuánticas responden a una naturaleza matemática muy distinta al caso de de las propiedades clásicas. Si se pretende que el lenguaje de propiedades sea un lenguaje universal para describir tanto a los fenómenos clásicos, como los cuánticos, las representaciones matemáticas de las propiedades clásicas deberían ser puestas en correspondencia con las representaciones matemáticas de las propiedades cuánticas.

Cualquier intento de unificar la teoría cuántica con la clásica, debería contemplar la manera de establecer un lenguaje común entre ellas, generalizando las descripción de las propiedades de una y otra.

Por supuesto, hoy día se entiende que esta unificación, con todo lo que implica, es imposible. No obstante se pueden establecer correspondencias, bajo ciertas condiciones, que nos permiten hablar de la física clásica como *emergiendo* de la cuántica [21], [19], [20]. Aunque esto es siempre logrado pagando el precio de algún tipo de aproximación, o recorte de las características cuánticas con alguna operación de "grano grueso" [25], [58], muchos avances han sido obtenidos. Uno de los enfoques más exitosos en este respecto es el llamado análisis microlocal [44], [47].

La idea central es tratar de establecer una correspondencia entre las propiedades clásicas representadas por celdas en el espacio de la fases, con proyectores o mejor dicho con cuasi-proyectores (debido al carácter aproximativo del análisis), de modo que la dinámica de la celda corresponda a la dinámica del proyector, con un dado criterio que explicaremos. Hay en realidad muchas maneras de lograr esta correspondencia, pero dentro del análisis microlocal, una forma es haciendo uso del formalismo desarrollado

### 3.5 Relaciones entre propiedades clásicas y cuánticas.

---

por Wigner [50] y más tarde Weyl [51].

Dado un operador  $A$  que puede ser hermítico o no, se llama *transformada de Weyl* o *símbolo de Weyl* de  $A$  a la función  $a(x, p)$  tal que

$$a(x, p) = \int \left\langle x + \frac{y}{2} \left| A \right| x - \frac{y}{2} \right\rangle e^{-i\frac{py}{\hbar}} dy. \quad (3.21)$$

Esta transformación establece un vínculo entre el operador  $A$  y la función  $a(x, p)$  sobre el espacio de las fases  $\Gamma$ , en el sentido que para cualquier función  $f$  bien comportada,  $f(A) = f(a(x, p))$ .

La transformada de Weyl nos permitirá asociar celdas con proyectores de la siguiente manera. Consideremos una celda  $C$  en el espacio de las fases suficientemente *regular*, cuyo ancho característico es  $\Delta_x$  y  $\Delta_p$  en los ejes  $x$  y  $p$  respectivamente. Una celda se dice regular si cumple que su volumen sea mucho más grande que la *constante de Plank*, y que además sea muy poco "retorcida", expresión coloquial que ajusta al hecho de que la razón adimensional entre el largo de su frontera y su área, sea del orden de 1.

Por otro lado, consideremos  $f(x, p)$  una función sobre el espacio de las fases, tal que toma valor aproximadamente 1 dentro de la celda, y cero afuera, pero variando gradualmente de 0 a 1 a lo largo de la frontera.

Entonces, diremos que el operador  $F_C$  cuyo símbolo de Weyl es  $f(x, p)$  es un cuasi-proyector asociado a la celda  $C$  en el sentido que cumple

$$F_C |\phi\rangle \simeq \begin{cases} |\phi\rangle & \text{si } (\langle x \rangle_\phi, \langle p \rangle_\phi) \in C \\ 0 & \text{si } (\langle x \rangle_\phi, \langle p \rangle_\phi) \notin C \end{cases} \quad (3.22)$$

es decir,  $|\phi\rangle$  es prácticamente un autovector de  $F_C$  con autovalor 0 y 1. El operador  $F_C$  se aproxima mucho a un proyector en un espacio de dimensión  $N$  igual al número de estados semi-clásicos asociados a la celda, es decir

$$N = \frac{\text{Area}(C)}{2\pi\hbar} = \int_C \frac{1}{2\pi\hbar} dpdx. \quad (3.23)$$

Resulta que este cuasi-proyector tiene  $N$  autovalores en el intervalo  $[0, 1]$  y decimos que se aproxima a un proyector en el sentido dado por la norma definida con la traza<sup>2</sup>

$$\text{Tr} |F_C - F_C^2| = NO(\epsilon), \quad (3.24)$$

---

<sup>2</sup>Se define  $\text{Tr}|A| = \sum |a_i|$ , siendo  $a_i$  los autovalores del operador  $A$

### 3.5 Relaciones entre propiedades clásicas y cuánticas.

---

siendo  $\epsilon = \sqrt{\hbar/2\Delta_x\Delta_p}$  el llamado parámetro de clasicidad, el cual es una medida de control de todas las aproximaciones.

El criterio de distancia dado por la traza entre proyectores establece cierta multiplicidad en la determinación de los cuasi-proyectores  $F_C$  asociados a una dada celda  $C$ . Estrictamente hablando existe toda una clase de proyectores asociados a una única celda  $C$ .

Con todo esto, es posible establecer un criterio de correspondencia entre la física clásica y la cuántica [46], [47], el cual puede ser considerado una reformulación del llamado *principio de correspondencia de Bohr*, puesto ahora en términos de las relaciones dinámicas de las propiedades clásicas (vistas como regiones) y cuánticas (vistas como sus correspondientes cuasi-proyectores asociados).

Sea  $C_0$  una celda suficientemente regular representando cierta propiedad clásica al tiempo  $t_0$ . Esta propiedad evoluciona, después de un tiempo  $t$ , a otra región  $C_t = S_{t,t_0}(C_0)$  de acuerdo a la dinámica clásica dada por la función hamiltoniana  $h(x, p)$ , que es considerada símbolo de Weyl del operador hamiltoniano  $H$  del sistema cuántico al que se quiere hacer corresponder con una descripción clásica. Veamos.

Sea  $F_{C_0}$  el cuasi-proyector asociado a la celda  $C_0$ , al tiempo  $t_0$ , el cual será el representante cuántico de la propiedad clásica asociada a  $C_0$ . Este operador evolucionará, después de un tiempo  $t$ , al operador dado por  $UF_{C_0}U^{-1}$  de acuerdo a la dinámica cuántica dada por el hamiltoniano del sistema  $H$ , donde  $U \equiv U(t, t_0) = e^{-i\frac{H}{\hbar}(t-t_0)}$ .

Entonces podremos decir que existe una correspondencia entre la descripción de los aspectos clásicos y cuánticos cuando

$$UF_{C_0}U^{-1} \simeq F_{C_t}, \tag{3.25}$$

con un error que será esencialmente el más grande de los parámetros de clasicidad de todas las celdas intermedias entre  $C_0$  y  $C_t$ . El principio es representado en el siguiente esquema

$$\begin{array}{ccc}
 C_0 & \xrightarrow{\text{dinámica clásica}} & C_t \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 F_{C_0} & \xrightarrow{\text{dinámica cuántica}} & UF_{C_0}U^{-1} \simeq F_{C_t}
 \end{array}$$

### 3.5 Relaciones entre propiedades clásicas y cuánticas.

---

Cuando la ecuación (3.25) es válida (dentro de la aproximación considerada), este esquema nos indica que una vez establecida la correspondencia entre propiedades cuánticas y clásicas a un dado tiempo, entonces se establece una correspondencia entre sus correspondientes dinámicas.

Como las propiedades de clases que hemos definido, ya sea para el caso clásico o el cuántico, en las secciones 3.3 y 3.4 respectivamente, tienen incorporada la evolución dinámica del caso, el principio de correspondencia puede ser puesto en términos del lenguaje de clases de la siguiente forma más simple

$$\begin{array}{c}
 \text{dinámica clásica} \\
 [C_t, t] \\
 \\
 \updownarrow \\
 \\
 \text{dinámica cuántica} \\
 [F_{C_t}, t]
 \end{array}$$

Ahora bien, establecida la correspondencia entre propiedades clásicas y cuánticas a un dado tiempo, dicha correspondencia se puede generalizar a una correspondencia entre el álgebra de las correspondientes propiedades, cuando las operaciones entre celdas que representan los conectivos lógicos aplicados a las propiedades clásicas, se corresponden a las operaciones entre los correspondientes cuasi-proyectores que representan los mismos conectivos pero sobre propiedades cuánticas.

No damos aquí el detalle porque esto es demostrado en [46]. Solo queremos manifestar como el lenguaje de clases, desarrollado en las ya mencionadas secciones, nos permite una formulación cada vez más fuerte del criterio de correspondencia entre los dominios clásicos, y cuánticos; por supuesto, siempre y cuando permanezcamos dentro de las hipótesis del análisis microlocal, y sujetos a las aproximaciones del caso.

Terminamos entonces esta sección elevando un nivel más esta correspondencia al establecer el vínculo entre el álgebra de propiedades clásicas y cuánticas pero dependientes del tiempo, es decir entre la estructura de las clases de equivalencia como fue desarrollado en la secciones 3.3 y 3.4.

Al quedar establecida la correspondencia entre el álgebra de propiedades clásicas y cuánticas a un dado tiempo fijo, solo necesitamos la correspondencia entre las respectivas relaciones de equivalencia temporal. Pero esto ya es hecho al establecer el criterio mismo de correspondencia, el cual impone

$$C_t = S_{t,t_0}(C_0) \quad \Leftrightarrow \quad UF_{C_0}U^{-1} = F_{C_t}. \quad (3.26)$$

### 3.5 Relaciones entre propiedades clásicas y cuánticas.

---

Así, si una propiedad clásica en un tiempo implica otra a otro tiempo, sucede lo mismo con las correspondientes propiedades cuánticas que provienen de los cuasi-proyectores asociados. La generalización de la estructura algebraica dependiente del tiempo es lograda trasladando las correspondientes propiedades a un dado tiempo común fijo.

Por lo tanto decimos que si  $\mathcal{R}([C_t, t])$  representa el retículo que forma la estructura de clases clásicas y  $\mathcal{R}([F_{C_t}, t])$  el retículo que forma la estructura de clases cuánticas, entonces la correspondencia entre estructuras generalizadas en el tiempo es representada por el siguiente diagrama

$$\begin{array}{c} \mathcal{R}([C_t, t]) \\ \updownarrow \\ \mathcal{R}([F_{C_t}, t]) \end{array}$$

El lenguaje de clase nos permite dar los primeros pasos hacia un lenguaje común para la física clásica y cuántica capaz de ordenar y simplificar las correspondencia que se pueden establecer entre ellas, siempre y cuando valgan las aproximaciones ya consideradas.

Alguien podría objetar que si las aproximaciones del caso desdibujan las características cuánticas, entonces las correspondencias establecidas no tienen mucho mérito. Pues bien, el tema es que aún bajo esta consideración se necesita un lenguaje común entre la cuántica y la clásica para entender formalmente como la física clásica puede "emerger" de un límite sobre la cuántica.

## Capítulo 4

# Historias cuánticas

La ausencia de determinismo es una de las principales diferencias entre la teoría cuántica y la teoría clásica. En la mecánica cuántica, si bien la ecuación de Schrödinger rige la evolución del estado, esta no determina la evolución del sistema en términos de los posibles resultados registrados en el transcurso de los experimentos. Solo establece la probabilidad de obtener esos resultados. Bajo esta perspectiva, la evolución de un sistema queda determinada por las posibles secuencias de propiedades asociadas a los valores de las mediciones. Es decir, puede ser descripta en términos de *historias*.

Independientemente de que haya mediciones, una historia puede ser pensada como una secuencia de propiedades a distintos tiempos. A causa de la naturaleza probabilística de la mecánica cuántica, para una única evolución del estado, podrá haber un conjunto de distintas historias reflejando el hecho de que cada propiedad puede o no ser verificada en los experimentos.

Ahora bien, descripciones que involucren relaciones entre propiedades a distintos tiempos pueden conducir a problemas de compatibilidad dentro de la teoría, porque propiedades registradas por medio de una dada configuración experimental a un dado tiempo, pueden pertenecer a un contexto distinto de las propiedades registradas por medio de otro arreglo experimental en otro tiempo de la historia. Así, algunas secuencias deberán ser excluidas como historias válidas dentro de todas las posibles descripciones.

Esto pone de manifiesto la necesidad en la teoría cuántica de establecer un formalismo para tratar de manera consistente con expresiones que involucren historias compuestas de diferentes propiedades consideradas a diferentes tiempos.

Ejemplos donde se manifiesta esta necesidad hay muchísimos. De hecho,

cualquier sistema sujeto a una evolución no trivial, requiere de descripciones que contemplen distintos tiempos. El proceso de medición cuántica es uno de estos ejemplos. En un análisis de este proceso se hace necesario relacionar propiedades de un sistema microscópico a un dado tiempo previo a la medición, con propiedades del instrumento cuando la medición ha finalizado.

En particular, un ejemplo famoso en donde se evidencian las dificultades al relacionar propiedades que caracterizan al sistema en distintos tiempos, lo constituye el experimento de la doble rendija. La dificultad se presenta en la imposibilidad de determinar por cual rendija pasó la partícula en un determinado tiempo, en virtud del registrado en la pantalla en un tiempo posterior [37].

En lo que sigue, aplicaremos el concepto de propiedades de clases que hemos establecido en el anterior capítulo para desarrollar nuestro formalismo de *historias contextuales* [56]. Luego de esto, daremos las bases del ya conocido formalismo de *historias consistentes* [41], [48], [52]. Finalmente estableceremos una comparación entre ellos.

## 4.1. Historias contextuales

El mencionado formalismo de historias consistentes es por su puesto exitoso para poder describir el curso de las propiedades en el tiempo, no obstante, como veremos luego, el mismo queda sujeto a cierta condición de consistencia vinculada a la definición de probabilidad, que en cierto sentido la aparta del formalismo usual de la mecánica cuántica.

La idea central del desarrollo de historias contextuales es establecer un formalismo en el que valiéndonos de la noción de propiedades de clases, nos permita reducir el concepto de historia a la noción usual de propiedad cuántica, y circunscribir el dominio de validez de sus descripciones a la noción de un contexto. La validez o no de las posibles historias para formar parte de descripciones legítimas de un sistema, queda sujeta a la condición habitual de compatibilidad entre propiedades y por lo tanto a las relaciones de conmutación típicas que definen un contexto.

Esto permitirá establecer un marco formal para tratar con historias que adhiera más estrictamente al formalismo usual de la teoría cuántica con un mínimo de agregados conceptuales. De hecho el único agregado conceptual consiste en la noción de equivalencia temporal necesaria para definir clases de equivalencia como fuera explicado en el capítulo anterior.

Procederemos a explicar esto de manera constructiva. El concepto de historia se hace relevante con al menos dos tiempos en consideración. En la siguiente subsección desarrollaremos en detalle como pueden ser construidas historias contextuales a dos tiempos. En la próxima haremos las generalizaremos del formalismo a más tiempos sin ahondar en detalles constructivos adicionales.

### 4.1.1. Historias a dos tiempos

Consideremos un contexto de propiedades a  $t_1$  generado por las propiedades atómicas  $p_i^{(1)}$  representadas por los proyectores  $\Pi_i^{(1)}$  que verifican

$$\Pi_i^{(1)}\Pi_j^{(1)} = \delta_{ij}, \quad \sum_i \Pi_i^{(1)} = \mathbb{I},$$

y consideremos otro contexto de propiedades a  $t_2$  generado por las propiedades atómicas  $p_k^{(2)}$  representadas por los proyectores  $\Pi_k^{(2)}$  tales que

$$\Pi_l^{(2)}\Pi_k^{(2)} = \delta_{lk}, \quad \sum_l \Pi_l^{(2)} = \mathbb{I}.$$

Una historia de propiedades a dos tiempos será representada en el lenguaje usual con expresiones como **”la propiedad  $p_i^{(1)}$  al tiempo  $t_1$  y la propiedad  $p_j^{(2)}$  al tiempo  $t_2$ ”**. Basándonos en la metodología detallada en la sección 3.4 podemos convertir esta conjunción a distintos tiempos en una conjunción a un único tiempo luego que las propiedades que componen la historia sean trasladadas a un tiempo común, por ejemplo al tiempo  $t_0$  correspondiente al tiempo de preparación inicial del sistema. Pero podría ser cualquier otro tiempo, ya que como veremos el estado inicial del sistema no es relevante para la condición que determina qué historias serán consideradas legítimas dentro del formalismo de historias contextuales. Para ver esto en detalle consideremos el siguiente esquema

$$\begin{array}{ccc}
 t_0 & & t_1 & & t_2 \\
 \rho_0 & & \Pi_i^{(1)}\Pi_j^{(1)} = \delta_{ij} & & \Pi_l^{(2)}\Pi_k^{(2)} = \delta_{lk} \\
 & & \sum \Pi_i^{(1)} = \mathbb{I} & & \sum \Pi_i^{(2)} = \mathbb{I} \\
 \Pi_i^{(01)} = U_{01}\Pi_i^{(1)}U_{01}^{-1} & \longleftarrow & & & \\
 \Pi_l^{(02)} = U_{02}\Pi_l^{(2)}U_{02}^{-1} & \longleftarrow & & & 
 \end{array}$$

Hemos llamado  $U_{ab} \equiv U(t_a, t_b)$  al operador de evolución del tiempo  $t_b$  al tiempo  $t_a$ , y  $\Pi_i^{(ab)}$  al proyector  $\Pi_i^{(b)}$  en el tiempo  $t_b$ , trasladado al tiempo  $t_a$ .

La flecha superior representa esquemáticamente la traslación temporal de las propiedades en el tiempo  $t_1$ , al tiempo  $t_0$  mediante la cual obtenemos la equivalencia

$$(\Pi_i^{(1)}, t_1) \sim (\Pi_i^{(01)}, t_0),$$

que determina un contexto generalizado de clases dadas por

$$[\Pi_i^{(1)}, t_1] = [\Pi_i^{(01)}, t_0]. \quad (4.1)$$

Esto establece a la propiedad correspondiente a  $\Pi_i^{(01)}$  como representante equivalente al tiempo  $t_0$ , de la propiedad asociada al proyector  $\Pi_i^{(1)}$  que participa en la historia al tiempo  $t_1$ .

Por otro lado, la flecha inferior representa, también esquemáticamente, la traslación temporal de las propiedades en el tiempo  $t_2$ , al tiempo  $t_0$ , mediante lo cual obtenemos la equivalencia

$$(\Pi_l^{(2)}, t_2) \sim (\Pi_l^{(02)}, t_0),$$

que determina un contexto generalizado de clases de dadas por

$$[\Pi_l^{(2)}, t_2] = [\Pi_l^{(02)}, t_0]. \quad (4.2)$$

Esto establece a la propiedad correspondiente a  $\Pi_l^{(02)}$  como representante equivalente al tiempo  $t_0$  de la propiedad asociada al proyector  $\Pi_l^{(2)}$  que participa en la historia al tiempo  $t_2$ .

Con el esquema del procedimiento detallado, podemos enunciar la noción de historia de distintas maneras.

Construimos una historia como la conjunción entre las clases de equivalencia generadas por traslación temporal de propiedades elegidas de distintos contextos a distintos tiempos, es decir, como la conjunción entre las clases  $[\Pi_i^{(1)}, t_1]$  y  $[\Pi_l^{(2)}, t_2]$  de los contextos generalizados obtenidos de los contextos de propiedades  $\Pi_i^{(1)}$  y  $\Pi_l^{(2)}$  que participan en la historia a los tiempos  $t_1$  y  $t_2$  respectivamente. Matemáticamente

$$\begin{aligned} h_{ik} &= [\Pi_i^{(1)}, t_1] \wedge [\Pi_k^{(2)}, t_2] \\ &= [\Pi_i^{(01)}, t_0] \wedge [\Pi_k^{(02)}, t_0] \\ &= \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} (\Pi_i^{(01)} \Pi_k^{(02)})^n, t_0 \right]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

La conjunción de clases de equivalencia que define una historia, es otra clase, e igual a la clase de equivalencia cuyo representante es la conjunción de las propiedades de la historia cuando son trasladadas a un tiempo común, es decir, es la clase determinada por la conjunción de los representantes equivalentes al tiempo común  $t_0$  de las propiedades dadas a los tiempos  $t_1$  y  $t_2$ .

Como vemos de la ecuación (4.3), una historia (en este caso, a dos tiempos) queda asociada al operador,  $\Pi_{ik}^{(0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\Pi_i^{(01)} \Pi_k^{(02)})^n$ . Este operador es el representante de la clase que forma la historia, y el mismo es obtenido de la conjunción de las propiedades que la determinan.

Ahora bien, cuánticamente solo podemos hablar de la conjunción de propiedades que conmutan, es decir de la conjunción de propiedades que sean compatibles. Así  $h_{ik} = [\Pi_i^{(1)}, t_1] \wedge [\Pi_k^{(2)}, t_2]$  es una historia válida si las propiedades  $\Pi_i^{(1)}$  y  $\Pi_k^{(2)}$ , conmutan cuando son trasladadas a un tiempo común  $t_0$ , esto es

$$\left[ \Pi_i^{(01)}, \Pi_k^{(02)} \right] = 0. \quad (4.4)$$

En ese caso, el proyector de la historia formada el tiempo  $t_0$  es el producto de los proyectores asociados a las propiedades que la componen a cada tiempo, es decir  $\Pi_{ik}^{(0)} = \Pi_i^{(01)} \Pi_k^{(02)}$ , de modo que la ecuación (4.3) se reduce a

$$\begin{aligned} h_{ik} &= [\Pi_i^{(1)}, t_1] \wedge [\Pi_k^{(2)}, t_2] \\ &= [\Pi_i^{(01)} \Pi_k^{(02)}, t_0] \\ &= [\Pi_{ik}^{(0)}, t_0]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Pero no solo queremos que las historias estén formadas con conjunciones de propiedades compatibles, sino que vistas como clases de propiedades, formen un conjunto exhaustivo y mutuamente excluyente, es decir que sean generadores de un contexto de clases. Solo en ese caso el conjunto de historias establecen un universo de discurso válido que permita descripciones de propiedades cuánticas que involucren distintos tiempos, y sobre el cual las probabilidades estén bien definidas.

Vamos a ver que esto último es garantizado bajo la misma condición dada por la ecuación (4.4) que asegura una conjunción de propiedades compatibles para formar la historia.

Para demostrar que el conjunto de clases de equivalencia dadas por la ecuación (4.5) generan un contexto de propiedades, tenemos que demostrar que así lo generan sus representantes al tiempo común, esto implica probar que el conjunto de proyectores  $\Pi_{ik}^{(0)}$  son ortogonales y desarrollan la identidad. Pues bien, bajo la condición de conmutación dada por la ecuación (4.4), tenemos

$$\begin{aligned}
 \Pi_{ik}^{(0)} \Pi_{jl}^{(0)} &= (\Pi_i^{(01)} \Pi_k^{(02)}) (\Pi_j^{(01)} \Pi_l^{(02)}) \\
 &= \Pi_k^{(02)} \delta_{ij} \Pi_i^{(01)} \Pi_l^{(02)} \\
 &= \delta_{ij} \Pi_i^{(01)} \Pi_k^{(02)} \Pi_l^{(02)} \\
 &= \delta_{ij} \delta_{kl} \Pi_i^{(01)} \Pi_k^{(02)} \\
 &= \delta_{ij} \delta_{kl} \Pi_{ik}^{(0)}.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Adicionalmente

$$\begin{aligned}
 \sum_{ik} \Pi_{ik}^{(0)} &= \sum_i \Pi_i^{(01)} \sum_k \Pi_k^{(02)} \\
 &= \sum_i U_{01} \Pi_i^{(1)} U_{01}^{-1} \sum_k U_{02} \Pi_k^{(2)} U_{02}^{-1} \\
 &= U_{01} \left( \sum_i \Pi_i^{(1)} \right) U_{01}^{-1} U_{02} \left( \sum_k \Pi_k^{(2)} \right) U_{02}^{-1} \\
 &= U_{01} \mathbb{I} U_{01}^{-1} U_{02} \mathbb{I} U_{02}^{-1} \\
 &= \mathbb{I}.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

De este modo, cuando los proyectores representantes de la propiedades que participan en la historia, conmutan al ser trasladados a un tiempo común, queda definida una conjunción de propiedades compatibles, cuyo operador

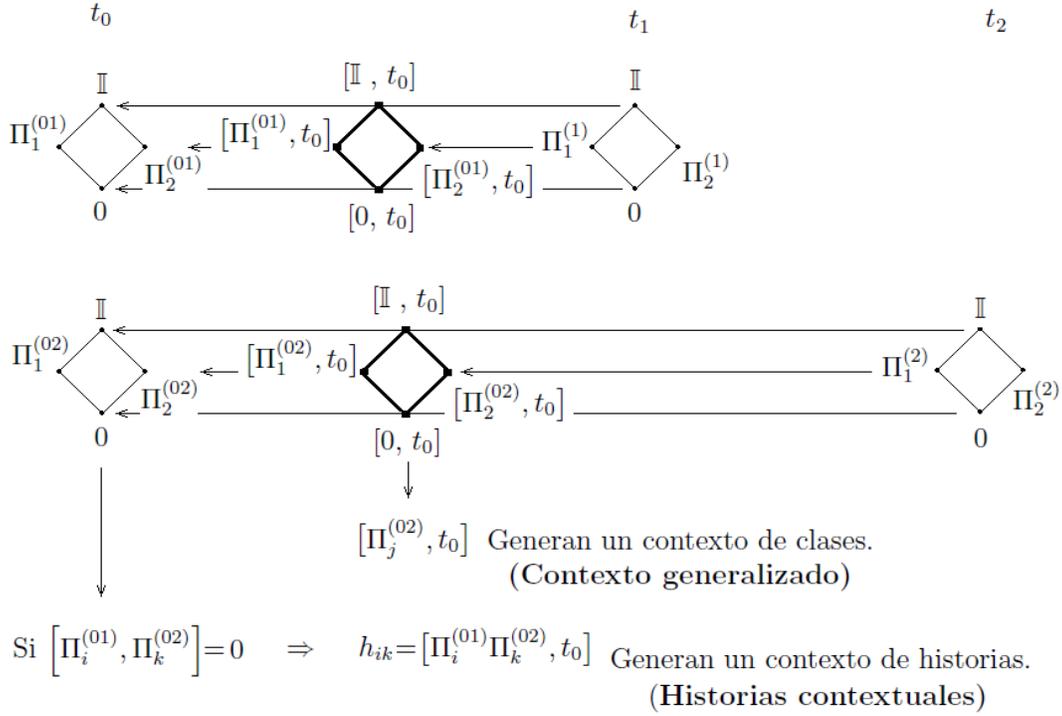


Figura 4.1: Como se generan historias contextuales.

a ese tiempo, es decir el operador de la historia, es el representante de las propiedades de clases que determinan un contexto, un contexto de historias, y que llamaremos *historias contextuales*.

Es decir, el conjunto de propiedades compuestas  $\Pi_{ij}^{(0)} = \Pi_i^{(01)} \Pi_j^{(02)}$  forman las propiedades atómicas de otro contexto al tiempo común elegido. Este contexto de propiedades compuestas es el representante del contexto de clases que forman las historias contextuales.

El resumen del procedimiento para construir historias contextuales y su adicional relación con la noción de contexto generalizado es esquemáticamente representado en la figura 4.1.

Para calcular la probabilidad de la historia  $h_{ij}$  hacemos uso de la formula (3.20), la cual indica que la probabilidad de una clase, es la probabilidad de uno de sus representantes calculada con el estado en el tiempo en el cual se

considera dicho representante. Es decir

$$\mathcal{P}(h_{ij}) = \mathcal{P}([\Pi_{ij}^{(0)}, t_0]) = Tr[\rho_0 \Pi_{ij}^{(0)}] = Tr[\rho_0 \Pi_i^{(01)} \Pi_j^{(02)}]$$

Un conjunto de historias contextuales forman un contexto de clases de equivalencia de propiedades a dos tiempos. La regla de Born asigna probabilidades bien definidas a estas historias que pueden ser puestas en correspondencia con las frecuencias de los resultados en las mediciones. Por lo tanto serán estas historias contextuales las historias que podrán ser verificadas con probabilidades susceptibles de ser verificadas por medio de las frecuencias obtenidas en los experimentos.

Antes de pasar a la generalización del formalismo a varios tiempos, queremos indicar algo que no debe pasar desapercibido. El formalismo de historias contextuales determina qué puede ser dicho sobre propiedades elegidas a distintos tiempos circunscribiendo las posibilidades del discurso a un contexto, *pero sujeto a la particular evolución dinámica* que vincula esas propiedades a distintos tiempos.

Esto es así, porque las historias contextuales están formadas de clases de equivalencia las que, al igual que la relación de orden y los conectivos lógicos entre ellas, quedan definidos en virtud de la evolución temporal presente. Así, todo lo que puede ser dicho entre ellas está implícitamente sujeto a la dinámica del sistema.

### 4.1.2. Historias a varios tiempos.

Generalizamos ahora lo hecho en la sección precedente. Para cada uno de los tiempos  $t_1, t_2, \dots, t_n$  vamos a considerar un contexto, es decir pondremos un conjunto exhaustivo de propiedades mutuamente excluyentes para cada tiempo. Para cada tiempo  $t_\mu$  ( $1 \leq \mu \leq n$ ) consideraremos las propiedades atómicas  $p_i^{(\mu)}$ , cuyos proyectores  $\Pi_i^{(\mu)}$  satisfacen

$$\Pi_i^{(\mu)} \Pi_j^{(\mu)} = \delta_{ij} \Pi_i^{(\mu)}, \quad \sum_i \Pi_i^{(\mu)} = \mathbb{I}. \quad (4.8)$$

Si elegimos la propiedad  $p_{j_\mu}^{(\mu)}$  al tiempo  $t_\mu$ , una historia a  $n$  tiempos es representada en el lenguaje usual por medio de la expresión **”la propiedad  $p_{j_1}^{(1)}$  al tiempo  $t_1$  y la propiedad  $p_{j_2}^{(2)}$  al tiempo  $t_2$  y  $\dots$  y  $p_{j_n}^{(n)}$  al tiempo  $t_n$ ”**. Convertimos esta conjunción a distintos tiempos en una conjunción a

un único tiempo común  $t_0$ , al trasladar cada una de la propiedades al tiempo común indicado. El proyector  $\Pi_{j_\mu}^{(\mu)}$  que corresponde a la propiedad  $p_{j_\mu}^{(\mu)}$  al tiempo  $t_\mu$ , se convierte, para el tiempo  $t_0$ , en el proyector

$$\Pi_{j_\mu}^{(0\mu)} = U_{0\mu} \Pi_{j_\mu}^{(\mu)} U_{0\mu}^{-1},$$

donde  $U_{0\mu}$  es el operador de evolución del tiempo  $t_\mu$  al tiempo  $t_0$ .

En forma análoga a lo hecho a dos tiempos, construimos una historia a  $n$  tiempos como la conjunción de las clases generadas por la traslación temporal de las propiedades elegidas, esto es

$$\begin{aligned} h_{j_1, j_2 \dots j_n} &= [\Pi_{j_1}^{(1)}, t_1] \wedge [\Pi_{j_2}^{(2)}, t_2] \wedge \dots \wedge [\Pi_{j_n}^{(n)}, t_n] \\ &= [\Pi_{j_1}^{(01)}, t_0] \wedge [\Pi_{j_2}^{(02)}, t_0] \wedge \dots \wedge [\Pi_{j_n}^{(0n)}, t_0] \\ &= [\Pi_{j_1, j_2 \dots j_n}^{(0)}, t_0], \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde  $\Pi_{j_1, j_2 \dots j_n}^{(0)}$  es el operador de la historia a  $n$  tiempos definido por

$$\Pi_{j_1, j_2 \dots j_n}^{(0)} \mathcal{H} \equiv (\Pi_{j_1}^{(01)} \mathcal{H}) \cap (\Pi_{j_2}^{(02)} \mathcal{H}) \cap \dots \cap (\Pi_{j_n}^{(0n)} \mathcal{H}).$$

En general será complicado obtener una expresión explícita para este proyector. Sin embargo, como queremos que la conjunción esté bien definida, pedimos que todos los proyectores que forman la historia conmuten cuando son trasladados al tiempo  $t_0$ , esto es

$$[\Pi_{j_\mu}^{(0\mu)}, \Pi_{j_\nu}^{(0\nu)}] = 0. \quad (4.10)$$

Esta última ecuación es la generalización de la ecuación (4.4). Como en el caso a dos tiempos, esto nos conduce a una expresión para el operador de la historia como el proyector formado por el producto de los proyectores asociados a las propiedades que componen la historia cuando estas son trasladadas al tiempo  $t_0$ , es decir

$$\Pi_{j_1, j_2 \dots j_n}^{(0)} \equiv \Pi_{j_1}^{(01)} \Pi_{j_2}^{(02)} \dots \Pi_{j_n}^{(0n)}.$$

En ese caso la ecuación (4.9) se reduce a

$$\begin{aligned} h_{j_1, j_2 \dots j_n} &= [\Pi_{j_1}^{(1)}, t_1] \wedge [\Pi_{j_2}^{(2)}, t_2] \wedge \dots \wedge [\Pi_{j_n}^{(n)}, t_n] \\ &= [\Pi_{j_1}^{(01)} \Pi_{j_2}^{(02)} \dots \Pi_{j_n}^{(0n)}, t_0], \end{aligned} \quad (4.11)$$

y como lo visto a dos tiempos, tenemos como una generalización inmediata de (4.6) y (4.7), que la condición de conmutación (4.10) nos asegura que el operador de la conjunción al tiempo común  $t_0$ , es decir el operador de la historia, es el representante de las clases de propiedades que determinan un contexto de historias, o historias contextuales, a  $n$  tiempos.

Esto implica que si llamamos  $a = \{j_1, j_2 \cdots j_n\}$  y  $a' = \{j'_1, j'_2 \cdots j'_n\}$ , entonces los operadores  $\Pi_a^{(0)} = \Pi_{j_1, j_2 \cdots j_n}^{(0)}$  cumplen

$$\Pi_a^{(0)} \Pi_{a'}^{(0)} = \delta_{aa'} \Pi_a^{(0)} \quad \sum_a \Pi_a^{(0)} = \mathbb{I}. \quad (4.12)$$

Sobre este reticulado distributivo de historias las probabilidades están bien definidas por la regla de Born. Así por ejemplo, para la historia  $h_a = h_{j_1, j_2 \cdots j_n}$  se obtiene la probabilidad

$$\mathcal{P}(h_a) = Tr[\rho_0 \Pi_a^{(0)}],$$

donde  $\rho_0$  es el operador estadístico que representa el estado del sistema cuántico al tiempo  $t_0$ .

Para finalizar esta sección mencionamos por último el hecho de que, ya sea para dos o más tiempos, los contextos considerados y las propiedades establecidas para formar las historias son elegidos de acuerdo a la descripción que se pretende en el caso. El formalismo no determina que contexto elegir en cada tiempo. Sin embargo determina si las propiedades elegidas en los contextos seleccionados, pueden ser o no incluidas en una descripción por medio de historias que formen un nuevo contexto.

En la próxima sección daremos un resumen, que si bien comprimido, creemos resulta tener todo lo necesario para entender el formalismo de historias consistentes, que es el formalismo referente vinculado a historias cuánticas. Luego de esto, en la próxima sección estaremos en condiciones de establecer comparaciones entre el formalismo de historias consistente con el de historias contextuales

## 4.2. Historias consistentes

El formalismo de historias consistentes es originado una serie de trabajos desarrollados desde el año 1984, cuyos principales gestores ha sido R. Griffiths [41], R. Omnès [48], M. Gell-Mann and J. Hartle [52]. Lo que expondremos

aquí esta basado principalmente en la versión ofrecida por R. Omnès [48], quien desarrollo una formalización lógica de historias consistentes.

Tanto en el formalismo de historias contextuales como en el de historias consistentes, la noción de historia surge al querer describir el curso de los acontecimientos que dan cuenta de una evolución del sistema. Dado un sistema y preparación, podrán existir un conjunto de historias alternativas con distintas probabilidades para la evolución de dicho sistema. La evolución determinística de la ecuación de Schrödinger dará cuenta de esas probabilidades pero no de cuales propiedades participan a cada tiempo considerado. Cada conjunto de historias da una posibilidad de evolución.

Como se quiere contemplar todas las posibilidades, hablaremos de una familia completa de historias consistentes cuando son incluidas todas las posibilidades en el curso de los eventos, esto es, de las distintas propiedades a distintos tiempos.

Como hemos visto en el capítulo 3 las propiedades de un sistema pueden ser puestas en términos de condiciones sobre los valores de los observables de la teoría. Por lo tanto, una historia es definida como una secuencia de propiedades elementales que involucran condiciones sobre los observables a distintos tiempos.

Bajo esta consideración, un método para construir una familia de historias completas fue dado por Griffiths [41]. Consideramos una secuencia de tiempos  $t_k$  y un observable  $A_k$  para cada tiempo, cuyo espectro  $\Sigma_k$  puede ser dividido en dominios  $\Delta_k^j$  que son mutuamente excluyentes, esto es  $\Delta_k^j \cap \Delta_k^{j'} = \emptyset$  para  $j \neq j'$ ; y completos, es decir, la unión de todos los dominios  $\Delta_k^j$  cubre el espectro de  $A_k$ .

Como la propiedad elemental "el valor de  $A_k(t_k)$  está en  $\Delta_k^j$ " es asociada al proyector  $E_k^j(t_k)$ , el conjunto de todas las historias en la familia es representado por todas las posibles secuencias

$$C_a = C_{j_1, j_2 \dots j_n} = E_n^{j_n}(t_n) \dots E_2^{j_2}(t_2) E_1^{j_1}(t_1), \quad (4.13)$$

donde el índice  $a = \{j_1, j_2 \dots j_n\}$  etiqueta a un miembro de la familia.

Una familia así construida es completa en el sentido de que fijados los tiempos, fijados los observables y fijados los rangos a tomar en cuenta, son considerados todos los posibles eventos. Adicionalmente también son excluyentes debido a que dos historias son distintas si en algún tiempo difieren en propiedades que son excluyentes, de modo que cada posible evolución de los acontecimientos es incluida sin redundancia.

En el abordaje dado por Griffiths, una familia de historias es excluyente si para todo par de historias en la familia, existe al menos un tiempo común a las dos familias en el cual los correspondientes proyectores son ortogonales. Formalmente esto implica que para todo par de historias, existe un  $t_k$ , tal que

$$E_k^i E_k^j = \delta_{ij}.$$

Una familia de historias es completa si para cada tiempo  $t_k$  vale

$$\sum_i E_k^i = \mathbb{I}.$$

Entonces se deduce que la condición de completitud implica

$$\sum_a C_a = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} E_n^{j_n}(t_n) \dots E_2^{j_2}(t_2) E_1^{j_1}(t_1) = \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes \dots \mathbb{I}.$$

Definiendo un espacio de dimensión  $n$ , que podemos llamar "espacio de historias", de modo tal de asociar un tiempo a cada eje, es posible representar cada familia de historias por una región  $\Xi$  dada por lo producto directo de los espectros de cada observable  $A_k$  al tiempo  $t_k$ , es decir  $\Xi = \Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \dots \times \Sigma_n$ . Una particular historia  $C_a$  dentro de la familia, es representada por el "bloque" elemental  $\Gamma_a$  de dimensión  $n$  en los que se puede dividir la región  $\Xi$ , y el cual queda determinado por los producto directo de los dominios  $\Delta_k^{j_k}$  en los que se divide el espectro  $\Sigma_k$  de cada observable considerado al tiempo  $t_k$ , esto es  $\Gamma_a = \Delta_1^{j_1} \times \Delta_2^{j_2} \times \dots \times \Delta_n^{j_n}$  [43].

Esta representación geométrica permite establecer las bases para desarrollar, según lo indicado en [46] y [47], una estructura lógica de historias, cuando cada una de ellas es considerada una proposición que predica sobre un posible curso de eventos.

Al representar cada historia por una región dentro del espacio de historias, es posible establecer las operaciones conjunción, disyunción, y negación entre proposiciones de historias, como la intersección, unión, y complemento, de las correspondientes regiones que las representan [43], [46].

Dentro de este esquema, en la formulación de Omnès de historias consistentes, [42], [46], [47], la inferencia entre historias queda supeditada a la noción de probabilidad, de modo que

$$C_a \Rightarrow C_b \quad \text{si} \quad \mathcal{P}(C_b/C_a) = 1,$$

donde como siempre

$$\mathcal{P}(C_b/C_a) = \frac{\mathcal{P}(C_a \wedge C_b)}{\mathcal{P}(C_a)}.$$

La equivalencia lógica, es entonces determinada por

$$C_a \Leftrightarrow C_b \quad \text{si} \quad \mathcal{P}(C_b/C_a) = 1 \quad \text{y} \quad \mathcal{P}(C_a/C_b) = 1.$$

Esta últimas definiciones dadas en términos de probabilidades pueden resultar algo cuestionables, pues normalmente las nociones de implicación y equivalencia dentro de un campo de proposiciones son previas a la definición de una medida de probabilidad sobre ellas, y no al revés. Además la definición de equivalencia entre historias, no es directamente expresable en términos de conjuntos. Que dos historias sean equivalentes con la definición dada, no significa que las correspondientes regiones que las representan sean estrictamente iguales.<sup>1</sup>

La probabilidad de una historia es definida a través de una fórmula motivada por la regla de Born. Como veremos a través de un ejemplo, una *condición de consistencia* debe ser satisfecha por las diferentes posibles historias para ser incluidas en una descripción legítima del sistema, de modo como que proposiciones, valgan sobre ella los axiomas de la lógica formal [46] y que la probabilidad definida cumpla positividad, normalización y aditividad. En forma general, la especificación de los requerimientos que debe cumplir una dada familia de historias para que sea considerada completa y consistente no es asunto trivial.

Aquí surge otra particularidad propia del formalismo de historias consistentes. Para un dado sistema físico, el posible conjunto de historias válidas depende del estado inicial en la que se encontraba el sistema. Esto no es del todo satisfactorio, porque en una teoría axiomática de la mecánica cuántica el estado es usualmente considerado como un funcional sobre el espacio de observables. La importancia de la noción del estado actuando sobre espacios de observables previamente definidos fue enfatizado en [53] y [54].

Veamos cómo se define la probabilidad de una historia y como esta participa en la definición de consistencia. Sabemos de la regla de Born que la probabilidad para una propiedad  $p$  asociada al proyector  $\Pi_p$  es dada por

$$Tr[\rho \Pi_p] = Tr[\Pi_p \rho \Pi_p^\dagger].$$

---

<sup>1</sup>Se puede probar que si  $C_a \Leftrightarrow C_b$  entonces las correspondientes regiones  $\Gamma_a$  y  $\Gamma_b$  son tales que  $(\Gamma_a \cup \Gamma_b) - (\Gamma_a \cap \Gamma_b)$  tiene cero probabilidad, ver [46].

Como  $C_a = E_n^{j_n}(t_n) \dots E_2^{j_2}(t_2) E_1^{j_1}(t_1)$  es el operador que caracteriza la historia como la secuencia de propiedades que la definen, se generaliza esta fórmula para la probabilidad de una historia de la siguiente forma

$$\mathcal{P}(C_a) = Tr[C_a \rho C_a^\dagger] \quad (4.14)$$

Notamos que es una generalización ya que en general  $C_a$  es un producto de proyectores a distintos tiempos, por lo que puede no ser un proyector. No obstante puede ser justificada de varias maneras. Por ejemplo, vemos que cuando todas las propiedades que ocurren en la historia resultan propiedades compatibles, esta fórmula da la probabilidad conjunta correcta para todos esas propiedades.

Para ir acercándonos a la ya enunciada condición de consistencia, procederemos en forma constructiva con dos ejemplos. Como dentro del formalismo siempre es necesario especificar la preparación inicial del sistema, y hacer explícita la participación de esta, consideraremos en lo que sigue que uno de los tiempos es el tiempo en el cual se prepara el sistema. Con esta consideración hablaremos entonces de una historia elemental a dos y tres tiempos.

### 4.2.1. Historias a dos tiempos.

Consideremos una historia a dos tiempos donde a  $t_0$  se prepara un sistema en el estado puro  $\rho = E_0 = |E_0\rangle\langle E_0|$ , y a  $t_1$  se contempla  $n$  propiedades  $E_1^i(t_1)$  asociadas a los  $n$  posibles valores del operador  $A_1 = \sum_i^n a_i(t_1) E_1^i(t_1)$  los cuales se corresponden además a los dominios  $\Delta_1^i = \{a_i(t_1)\}$  en el que se divide el espectro  $\Sigma_1$  de  $A_1$ . Esquemáticamente

$$\begin{array}{cc} t_0 & t_1 \\ \rho = E_0 & A_1 = \sum_i^n a_i(t_1) E_1^i(t_1) \\ & E_1^1(t_1) \\ & E_1^2(t_1) \\ & \vdots \\ & E_1^n(t_1) \end{array}$$

Esto determina una familia con  $n$  historias, con la propiedad común  $E_0$  al tiempo  $t_0$ , dada por

$$\{C_1 = E_1^1 E_0, \quad C_2 = E_1^2 E_0, \quad C_3 = E_1^3 E_0, \quad \dots \quad C_n = E_1^n E_0\}$$

Esta es una familia de historias completa y excluyente y vale que la probabilidad de la disyunción de dos historias es la suma de las probabilidades. Pues si  $C_i = E_1^i$  y  $C_j = E_1^j$ , tenemos que  $\Delta_1^i = \{a_i(t_1)\}$  y  $\Delta_1^j = \{a_j(t_1)\}$ , por lo que  $C_i \vee C_j$  es la historia representada por el operador asociado a la unión  $\Delta_1^i \cup \Delta_1^j$  esto es  $E_1^i E_0 + E_1^j E_0$ . Entonces

$$\begin{aligned} C = C_i \vee C_j &= E_1^i E_0 + E_1^j E_0 \\ &= (E_1^i + E_1^j) E_0. \end{aligned}$$

Considerando ahora la propiedad al primer tiempo como la preparación  $E_0 = \rho$ , tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(C) = Tr[C \rho C^\dagger] &= Tr[(E_1^i + E_1^j) E_0 \rho E_0 (E_1^i + E_1^j)] \\ &= Tr[(E_1^i + E_1^j) E_0] \\ &= Tr[E_1^i E_0] + Tr[E_1^j E_0] \\ &= Tr[E_1^i E_0 \rho E_0 E_1^i] + Tr[E_1^j E_0 \rho E_0 E_1^j] \\ &= \mathcal{P}(C_i) + \mathcal{P}(C_j). \end{aligned}$$

Para analizar más detenidamente algunas consecuencias de la teoría de historias consistentes, consideremos dentro de las hipótesis de este ejemplo, la siguiente evolución

$$|E_0\rangle \quad \rightarrow \quad |E_1\rangle = \alpha|E_\alpha\rangle + \beta|E_\beta\rangle.$$

Entonces, tenemos la historia trivial

$$C_1 : \quad |E_0\rangle \rightarrow |E_1\rangle,$$

con probabilidad

$$\mathcal{P}(C_1) = Tr[E_1 E_0 \rho E_0 E_1] = |\langle E_0 | E_1 \rangle|^2,$$

siendo  $\rho = E_0 = |E_0\rangle\langle E_0|$  y  $E_1 = |E_1\rangle\langle E_1|$ . Pero también podemos considerar las historias

$$\begin{aligned} C_\alpha &: |E_0\rangle \rightarrow |E_\alpha\rangle \\ C_\beta &: |E_0\rangle \rightarrow |E_\beta\rangle, \end{aligned}$$

con probabilidades

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(C_\alpha) &= \text{Tr}[E_\alpha E_0 \rho E_0 E_\alpha] = |\langle E_0 | E_\alpha \rangle|^2 \\ \mathcal{P}(C_\beta) &= \text{Tr}[E_\beta E_0 \rho E_0 E_\beta] = |\langle E_0 | E_\beta \rangle|^2, \end{aligned}$$

siendo  $\rho = E_0 = |E_0\rangle\langle E_0|$ ,  $E_\alpha = |E_\alpha\rangle\langle E_\alpha|$  y  $E_\beta = |E_\beta\rangle\langle E_\beta|$ . Las historias  $C_\alpha$  y  $C_\beta$  son también evoluciones posibles dentro del marco de historias consistentes. Así, la ecuación de Schrödinger no genera la evolución temporal del sistema, sino determina las probabilidades de cada posible historia. La familia de historia que forman  $C_\alpha$  y  $C_\beta$ , es complementaria a la historia  $C_1$ . Ambos conjuntos de historias son posibles, pero pertenecen a descripciones distintas, y no hay razón para preferir una a la otra. Son complementarias. La situación es del todo análoga a tener los estados  $S_{z+}$ ,  $S_{z-}$  y el estado  $S_{x+}$ . No se pueden incluir en una descripción común.

### 4.2.2. Historias a tres y más tiempos.

En el ejemplo anterior, el más simple de todos los posibles, no se evidencia la necesidad de introducir una condición de consistencia. A partir de historias a tres tiempos se hace necesario imponer una condición específica para que valgan los axiomas de la probabilidad. En particular, construiremos la condición de consistencia para que valga la aditividad de las probabilidades de historias excluyentes.

En esta sección consideramos historias a tres tiempos incluyendo el tiempo en el cual se prepara el sistema en un dado estado, aunque las historias, como sucesión de eventos, serán construidas con propiedades tomadas a dos tiempos subsiguientes al de la preparación. No obstante contemplamos el tiempo inicial porque el estado del sistema a ese tiempo participa de la condición de consistencia, así que estrictamente hablando hay tres tiempos que entran en consideración en todo lo que sigue.

Consideremos en  $t_0$  la preparación del sistema en un estado  $\rho_0$  no necesariamente puro. Al tiempo  $t_1$  consideremos las propiedades  $E_1^i(t_1)$  asociadas a los dominios  $\Delta_1^i = \{a_i(t_1)\}$  con el que se divide el espectro  $\Sigma_1$  del

observable  $A_1 = \sum_i^2 a_i(t_1) E_1^i(t_1)$ , y al tiempo  $t_2$  las propiedades  $E_2^i(t_2)$  asociadas a los dominios  $\Delta_2^i = \{a_i(t_2)\}$  con el que se divide el espectro  $\Sigma_2$  de  $A_2 = \sum_i^2 a_i(t_2) E_2^i(t_2)$ . El esquema de la construcción es representado por

$t_0$	$t_1$	$t_2$
$\rho_0$	$A_1 = \sum_i^2 a_i(t_1) E_1^i(t_1)$	$A_2 = \sum_i^2 a_i(t_2) E_2^i(t_2)$
	$E_1^1(t_1)$	$E_2^1(t_2)$
	$E_1^2(t_1)$	$E_2^2(t_2)$

Esto determina una familia de cuatro posibles historias

$$\{C_{11} = E_2^1 E_1^1, \quad C_{21} = E_2^2 E_1^1, \quad C_{12} = E_2^1 E_1^2, \quad C_{22} = E_2^2 E_1^2\}$$

Es fácil ver que esta es una familia de historias completa y excluyente según lo indicado más atrás.

Consideremos ahora una historia que sea la disyunción de otras dos, por ejemplo  $C = C_{21} \vee C_{22}$ . De como construimos la disyunción de historias en el ejemplo anterior, es claro que

$$\begin{aligned} C &= C_{21} \vee C_{22} \\ &= E_2^2 E_1^1 + E_2^2 E_1^2 \\ &= E_2^2 (E_1^1 + E_1^2) \\ &= E_2^2 \mathbb{I}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(C) &= Tr[C \rho C^\dagger] \\ &= Tr[E_2^2 \mathbb{I} \rho \mathbb{I} E_2^2] \\ &= Tr[(E_1^1 + E_1^2) \rho (E_1^1 + E_1^2) E_2^2] \\ &= Tr[E_1^1 \rho E_1^1 E_2^2] + Tr[E_1^1 \rho E_1^2 E_2^2] + Tr[E_1^2 \rho E_1^1 E_2^2] + Tr[E_1^2 \rho E_1^2 E_2^2] \\ &= \mathcal{P}(C_{21}) + Tr[E_1^1 \rho E_1^2 E_2^2] + Tr[E_1^2 \rho E_1^1 E_2^2] + \mathcal{P}(C_{22}). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Como se quiere que la probabilidad de la conjunción de dos historias excluyentes sea la suma de las probabilidades, pedimos

$$Tr\left[E_1^1 \rho E_1^2 E_2^2\right] + Tr\left[E_1^2 \rho E_1^1 E_2^2\right] = 0.$$

Trabajando con esta expresión se llega a

$$Re\left(Tr\left[E_1^1 \rho E_1^2 E_2^2\right]\right) = 0 \quad \text{Griffiths.} \quad (4.16)$$

Esta es la condición de consistencia definida por Griffiths [41] para el caso de historias a tres tiempos (considerando el primero para la preparación del estado). Existe una condición más fuerte introducida por Gell-Mann [52] dada por

$$Tr\left[E_1^1 \rho E_1^2 E_2^2\right] = 0 \quad \text{Gell-Mann.} \quad (4.17)$$

Estas condiciones fueron deducidas partiendo de la unión de dos historias particulares,  $C_{21}$  y  $C_{22}$ . No obstante no es difícil demostrar que la unión de cualquier otras dos, dentro de las cuatro posibles establecidas a tres tiempos, conduce a la mismas condiciones dadas arriba [47].

Para dirigirnos hacia generalización a mas tiempos partimos de la ecuación (4.16), la cual puede ser expresada como

$$\begin{aligned} Re\left(Tr\left[E_1^1 \rho E_1^2 E_2^2\right]\right) &= 0 \\ Re\left(Tr\left[E_2^2 E_1^1 \rho (E_2^2 E_1^2)^\dagger\right]\right) &= 0 \\ Re\left(Tr\left[C_{21} \rho C_{22}^\dagger\right]\right) &= 0 \end{aligned}$$

La ultima ecuación da los indicios para la generalización. Se puede demostrar que la condición de consistencia necesaria y suficiente para que la probabilidad de la unión de cualquier par de historias excluyentes sea la suma de las historias es dada por la condición general de Griffiths

$$Re\left(Tr\left[C_a \rho C_b^\dagger\right]\right) = 0 \quad a \neq b \quad \text{Griffiths.} \quad (4.18)$$

La condición general de Gell-Mann no es una condición necesaria pero si suficiente y queda dada por

$$Tr\left[C_a \rho C_b^\dagger\right] = 0 \quad a \neq b \quad \text{Gell-Mann.} \quad (4.19)$$

### 4.3 Comparación de historias consistentes con historias contextuales

---

Se dice que la familia de historias es consistente si cumple la condición de consistencia dada por (4.18) o (4.19), y en ese caso vale la suma de las probabilidades para la conjunción de cualquier par de historias dentro de la familia.

Adicionalmente, cuando dicha condición es satisfecha en una familia, se puede probar que el conjunto de sus historias, con las operaciones de conjunción, disyunción y negación definidas en términos de las correspondientes operaciones entre los conjuntos asociados en el espacio de historias, y la implicación definida con la probabilidad, cumplen con los axiomas de la lógica formal como son entendidos en [46].

Vista como proposición, cada historia dentro de la familia establece una declaración predicativa sobre una posible evolución del sistema. Dentro de ese campo de proposiciones, la teoría de historias consistentes ofrece un marco descriptivo válido que permite articular propiedades a diferentes tiempos en el lenguaje de la teoría cuántica.

Cada familia consistente ofrece una posible descripción del proceso físico, y los razonamientos sobre el sistema pueden ser probados en el dominio de la particular familia. Sin embargo, en general no es posible incluir dos familias consistentes en otra que las contenga y que también sea consistente. Cuando esto sucede se dicen que son *complementarias*. En ese caso, cada familia forman un conjunto de descripciones válidas, pero incompatibles. Establecen diferentes "perspectivas" de una realidad cuántica que no necesariamente pueden reconciliarse.

No obstante, existe un resultado muy importante que es llamado *Teorema de no contradicción* [46], el cual afirma que si la inferencia  $C_a \Rightarrow C_b$  se verifica en una familia, entonces se verifica en cualquier otra familia que contenga esa dos proposiciones. Esto asegura la inexistencia de paradojas dentro del formalismo, sin embargo, no asegura la imposibilidad de que existan familias que contengan a la proposición  $C_a$ , pero no la  $C_b$ .

### 4.3. Comparación de historias consistentes con historias contextuales

En esta sección procederemos a comparar, al menos en las características mas relevantes, nuestro formalismo de historias contextuales con el de historias consistentes diseñado para tratar con el mismo tipo de problemas, y que

### 4.3 Comparación de historias consistentes con historias contextuales

---

fuera presentado en la sección anterior. Como parte de la comparación, aplicaremos ambos formalismos a un ejemplo concreto que ponga de manifiesto las similitudes y diferencias entre ambos.

La primera consideración es respecto a la formulación de Omnès de historias consistentes [42], [46]. Acorde a esta formulación, como ya fue visto, una propiedad  $a$  implica otra propiedad  $b$  de la misma familia, si  $\mathcal{P}(b/a) = 1$ .

Los axiomas usuales de la lógica formal son satisfechos con esas definiciones [46]. Pero notamos que en esa teoría la relación de implicación es definida a través de la definición previa de probabilidad. Esto implica una gran diferencia con la formulación usual de la mecánica cuántica, donde las relaciones lógicas y operaciones sobre las propiedades tienen su propia definición independiente de la probabilidad, la cual es dada por la regla de Born.

Nuestra construcción de clases de equivalencia y de las operaciones lógicas entre ellas desarrolladas en las secciones 3.3 y 3.4, que nos permitió más tarde desarrollar el formalismo de historias contextuales, establecen una estructura que no depende de la definición de la probabilidad. Nosotros hemos usado la definición de probabilidad dada por la regla de Born en forma usual. La hemos aplicado para calcular probabilidades de clases de equivalencia, pero de acuerdo a la ecuación (3.20), esta se reduce finalmente al cálculo de propiedades representada por proyectores.

Otra diferencia fundamental entre el formalismo de historias consistentes y el de historias contextuales, es que en el primero, la condición de consistencia dada por las ecuaciones (4.18) o (4.19) necesaria para que una familia de historias se enmarquen en un conjunto de propiedades que permita una descripción válida, depende del estado inicial con el que se prepara el sistema. Esto no es del todo satisfactorio, ya que uno esperaría que el conjunto de propiedades que puedan establecer una descripción posible sea independiente de la preparación inicial del sistema. En un proceso de medición sucesiva de tipo filtrado, cada medición opera de preparación de un nuevo estado para el sistema [28]. Así en cada etapa de medición tendríamos que contemplar un conjunto de familias de historias distintas para lograr una descripción del proceso entre mediciones. Esto implicaría, desde el punto de vista de historias consistentes, la imposibilidad de describir el proceso completo imponiendo una única condición de consistencia.

En historias contextuales, por otra parte, no existe una condición de consistencia estrictamente hablando. El requerimiento es de otra naturaleza. La condición de consistencia en historias consistentes, básicamente se reduce a encontrar la condición que asegure que la probabilidad de una unión de

### 4.3 Comparación de historias consistentes con historias contextuales

---

historias excluyentes sea la suma de las probabilidades. En historias contextuales, existe una condición de conmutatividad, dada por la ecuación (4.4) que determina qué conjunto de propiedades elementales pueden ser puestas en conjunción de modo que formen un nuevo contexto, un contexto de propiedades compuestas. Esa condición no depende de ningún estado inicial, y los requerimientos para la aditividad de la probabilidad se dan automáticamente al quedar establecido un contexto.

No obstante existe una relación entre los conjuntos de historias que son consistentes con el de historias contextuales. Esto es desarrollado mediante el siguiente teorema, que demostraremos para el caso de historias a dos tiempos.

**Teorema:** *Un contexto de historias es un conjunto de historias consistentes con las mismas probabilidades.*

Consideremos la notación de índices  $a = \{ij\}$  y  $b = \{lk\}$ , y sea  $C_a = \Pi_{ij}^{(0)}$  y  $C_b = \Pi_{lk}^{(0)}$  con  $a \neq b$ , esto es,  $i \neq l$  y  $j \neq k$ , los operadores que determinan un contexto de historias, es decir son los representantes de la clase que forman un contexto de historias o historias contextuales, por lo tanto provienen de la conjunción de propiedades trasladadas a un tiempo común,  $t_0$  y conmutan entre sí. Es decir  $\Pi_{ij}^{(0)} = \Pi_i^{(01)} \Pi_j^{(02)}$  y  $\Pi_{lk}^{(0)} = \Pi_l^{(01)} \Pi_k^{(02)}$ . Entonces

$$\begin{aligned} Tr[C_a \rho_0 C_b] &= Tr[\Pi_{ij}^{(0)} \rho_0 \Pi_{lk}^{(0)}] \\ &= Tr[\Pi_i^{(01)} \Pi_j^{(02)} \rho_0 \Pi_l^{(01)} \Pi_k^{(02)}] \\ &= Tr[\rho_0 \Pi_l^{(01)} \Pi_k^{(02)} \Pi_i^{(01)} \Pi_j^{(02)}] \\ &= Tr[\rho_0 \delta_{il} \delta_{jk} \Pi_i^{(01)} \Pi_j^{(02)}] = 0, \end{aligned}$$

vemos entonces que se cumple la condición de consistencia.

De este modo la condición de conmutatividad que define historias contextuales implica la condición de consistencia para historias consistentes, independientemente del estado inicial. Por otro lado

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(C_a) = Tr[C_a \rho_0 C_a^\dagger] &= Tr[\Pi_{ij}^{(0)} \rho_0 \Pi_{ij}^{(0)\dagger}] \\ &= Tr[\Pi_i^{(01)} \Pi_j^{(02)} \rho \Pi_j^{(02)} \Pi_i^{(01)}] \\ &= Tr[\rho_0 \Pi_j^{(02)} \Pi_i^{(01)}] = \mathcal{P}(h_{ij}), \end{aligned}$$

### 4.3 Comparación de historias consistentes con historias contextuales

---

por lo tanto la probabilidad es la misma que en historias consistentes.

A partir de esta demostración, una generalización del teorema con historias contextuales a  $n$  tiempos es directa.

La conclusión fuerte de este teorema, es que demuestra que nuestro formalismo de historias contextuales es más restrictivo que el formalismo de historias consistentes. Historias contextuales pone más restricciones que historias consistentes sobre el número de descripciones válidas de un sistema físico.

Veremos esto al analizar el siguiente ejemplo el cual es analizado por medio de historias consistentes en [47]. Aquí lo analizaremos también por medio de historias contextuales, para derivar diferencias entre ambos formalismos.

#### 4.3.1. Ejemplo comparativo

Consideremos un sistema de spin  $1/2$  preparado a un tiempo  $t_0$  en un estado puro con  $S_x = +\frac{1}{2}\hbar$ , representado por el vector  $|x+\rangle$  cuyo correspondiente operador de estado es  $\rho_0 = |x+\rangle\langle+x|$ . A un tiempo posterior  $t_2$ , como posible descripción del sistema, se considera los dos posibles valores de spin en la dirección  $\hat{z}$ , los cuales pueden ser obtenidos por medio de un experimento del tipo Stern-Gerlach. Asumiendo la hipótesis simplificadora de considerar el hamiltoniano igual a cero, queremos preguntarnos qué estados  $|n_1\pm\rangle$  correspondientes a los valores  $\pm\frac{1}{2}\hbar$  para la proyección del spin en cierta dirección  $\hat{n}_1$ , son posibles en una descripción válida del sistema a un tiempo intermedio  $t_1$ , ( $t_0 < t_1 < t_2$ ). Analizaremos qué posibilidades son permitidas dentro del marco de historias consistentes e historias contextuales. El esquema del procedimiento y las propiedades consideradas a cada tiempo, son representados en la siguiente tabla

$t_0$	$t_1$	$t_2$
$\hat{n}_0 = \hat{x}$	$\hat{n}_1 = \hat{i}?$	$\hat{n}_2 = \hat{z}$
$\rho_0 =  x+\rangle\langle+x $	$\Pi_{n_1+} =  n_1+\rangle\langle+n_1 $	$\Pi_{z+} =  z+\rangle\langle+z $
	$\Pi_{n_1-} =  n_1-\rangle\langle-n_1 $	$\Pi_{z-} =  z-\rangle\langle-z $

### 4.3 Comparación de historias consistentes con historias contextuales

---

#### Con historias consistentes

Tenemos el mismo esquema mediante el cual desarrollamos en la sección 4.2 la condición de consistencia para historias a tres tiempos (asumiendo al primer tiempo para la preparación). Consideremos la condición de consistencia necesaria dada por Gell-Mann representada por la ecuación (4.17), que aquí adopta la forma

$$\text{Tr}[\Pi_{n_1+} \rho_0 \Pi_{n_1-} \Pi_{z-}] = 0. \quad (4.20)$$

Haciendo uso de que cada proyector  $\Pi_{n\pm} = |n\pm\rangle\langle\pm n|$  asociado al estado puro de spin en la dirección  $\hat{\mathbf{n}}$  puede ser representado por  $\frac{1}{2}(1 \pm \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}})$ , donde  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  está formado con las matrices de Pauli, la condición de consistencia dada arriba implica (ver apéndice F) que

$$(\hat{\mathbf{n}}_1 \times \hat{\mathbf{x}}) \cdot (\hat{\mathbf{n}}_1 \times \hat{\mathbf{z}}) + i \hat{\mathbf{x}} \cdot (\hat{\mathbf{n}}_1 \times \hat{\mathbf{z}}) = 0. \quad (4.21)$$

Esta última ecuación se cumple si  $\hat{\mathbf{n}}_1$  coincide con  $\hat{\mathbf{x}}$ , o si  $\hat{\mathbf{n}}_1$  coincide con  $\hat{\mathbf{z}}$ . Esto implica la posibilidad de dos familias consistentes de historias

**Familia 1** ( $\hat{\mathbf{n}}_1 = \hat{\mathbf{x}}$ ), cuyo esquema de propiedades corresponde a

$t_0$	$t_1$	$t_2$
$\rho_0$	$\Pi_{x+}$	$\Pi_{z+}$
	$\Pi_{x-}$	$\Pi_{z-}$

entonces

$$h_1 = \{C_{11} = \Pi_{z+}\Pi_{x+}, \quad C_{21} = \Pi_{z-}\Pi_{x+}, \quad C_{12} = \Pi_{z+}\Pi_{x-}, \quad C_{22} = \Pi_{z-}\Pi_{x-}\}$$

es una familia consistente.

**Familia 2** ( $\hat{\mathbf{n}}_1 = \hat{\mathbf{z}}$ ), cuyo esquema es representado por

### 4.3 Comparación de historias consistentes con historias contextuales

---

$$\begin{array}{ccc}
 t_0 & t_1 & t_2 \\
 \rho_0 & \Pi_{z+} & \Pi_{z+} \\
 & \Pi_{z-} & \Pi_{z-}
 \end{array}$$

Entonces

$$h_2 = \{C_{11} = \Pi_{z+}\Pi_{z+}, C_{21} = \Pi_{z-}\Pi_{z+}, C_{12} = \Pi_{z+}\Pi_{z-}, C_{22} = \Pi_{z-}\Pi_{z-}\}$$

es otra familia consistente.

Podemos considerar también la condición necesaria y suficiente dada por Griffiths, la cual se reduce en el esquema a tres tiempos a la ecuación (4.16). En ese caso sólo se pide que la parte real de la traza sea cero

$$(\hat{\mathbf{n}}_1 \times \hat{\mathbf{x}}) \cdot (\hat{\mathbf{n}}_1 \times \hat{\mathbf{z}}) = 0.$$

Con esta condición es posible obtener un conjunto más amplio de historias consistentes. En este caso, la dirección de spin al tiempo  $t_1$  puede ser cualquier dirección en el plano  $xy$  o el plano  $yz$ .

Hasta ahora nosotros hemos considerados resultados bien conocidos dentro de la teoría de historias consistentes. En lo que sigue analizaremos en más detalle las familias de historias que surgen de la condición de Gell-Mann. En particular consideraremos, dentro del formalismo de historias consistentes, la posibilidad de hacer variar los tiempos que forman la historias y analizaremos la limitación que el formalismo encuentra en este caso. Luego compararemos la misma posibilidad para historias contextuales.

#### Problema

Consideremos dentro de la familia  $h_1$  la historia  $C_{11} = \Pi_{z+}\Pi_{x+}$ . Esta historia, representa la propiedad compuesta "el spin a lo largo del eje  $\hat{\mathbf{x}}$  tiene valor  $\frac{1}{2}\hbar$  en el tiempo  $t_2$  y el spin a lo largo del eje  $\hat{\mathbf{z}}$  tiene

valor  $\frac{1}{2}\hbar$  al tiempo  $t_2$ ". Su probabilidad es dada por

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(C_{11}) &= \mathcal{P}\left((x+, t_1) \wedge (z+, t_2)\right) \\
 &= \text{Tr}\left[C_{11} \rho_0 C_{11}^\dagger\right] \\
 &= \text{Tr}\left[\Pi_{z+} \Pi_{x+} \rho_0 \Pi_{x+} \Pi_{z+}\right] \\
 &= \text{Tr}\left[|z+\rangle\langle+z| |x+\rangle\langle+x| \rho_0 |x+\rangle\langle+x| |z+\rangle\langle+z|\right] \\
 &= |\langle x+ | z+\rangle|^2 = \frac{1}{2}
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Si tomamos el límite  $t_1 \rightarrow t_2$ , la teoría de historias consistentes encuentra un problema (o al menos una limitación), pues como el hamiltoniano de  $t_0$  a  $t_2$  es nulo, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \lim_{t_1 \rightarrow t_2} \mathcal{P}(C_{11}) &= \lim_{t_1 \rightarrow t_2} \mathcal{P}\left((x+, t_1) \wedge (z+, t_2)\right) \\
 &= |\langle x+ | z+\rangle|^2 = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Esto implicaría tener probabilidad definida, para valores simultáneos de proyección del spin en distintos ejes, lo cual es prohibido en el universo del discurso de la mecánica cuántica como consecuencia del principio de incerteza. Por lo tanto, el límite  $\lim_{t_1 \rightarrow t_2} \mathcal{P}(C_{11})$  no puede ser interpretado como la probabilidad de la conjunción  $S_x = +\frac{1}{2}$  y  $S_z = +\frac{1}{2}$  a un único tiempo  $t_1 = t_2$ .

Esto pone de relieve una limitación propia de la teoría de historias consistentes. Quedan excluidas dentro del formalismo la posibilidad de historias a tiempos continuos. El formalismo pone de manifiesto una discontinuidad de atribución en el tiempo de propiedades para formar historias bien definidas. Solo son válidas historias formadas con eventos en un conjunto de tiempos discretos.

Esto es consecuencia de que en historias consistentes, aunque las historias quedan determinadas por una sucesión de propiedades a distintos tiempos, y por lo tanto son pensadas como "una propiedad a un tiempo **y** otra a otro tiempo **y**  $\dots$  etc.", estrictamente hablando, no están definidas como una operación de conjunción en un retículo de propiedades generalizado a diferentes tiempos. Recordemos que el operador de una historia consistente, ni siquiera es un proyector, como se esperaría de un operador que represente una conjunción bien definida en un campo de propiedades cuánticas.

### 4.3 Comparación de historias consistentes con historias contextuales

---

De este modo, de las dos familias de historias posibles  $h_1$  y  $h_2$  dadas por la condición de Gell-Mann,  $h_1$  tendría que ser excluida como familia válida cuando  $t_2 \rightarrow t_1$ . Es claro que con  $h_2$  no hay problema al tomar ese límite porque esa familia está compuesta con conjunciones de propiedades de un mismo contexto.

No obstante, para el formalismo de historias consistente las dos familias son válidas, puesto que tal formalismo basa su validez en el hecho de tomar tiempos discretos. Lo que no es válido es tomar el límite  $t_2 \rightarrow t_1$ .

Como veremos ahora, esta es una limitación a la que no está sujeto el formalismo de historias contextuales, pues las historias no son solo secuencias de propiedades, sino conjunciones legítimas en una estructura algebraica de propiedades a distintos tiempos. Esto incluye cualquier posible conjunto de tiempos, en particular tiempos continuos.

#### Con historias contextuales

Dentro del formalismo de historias contextuales, tenemos una preparación al tiempo  $t_0$ , y un contexto de propiedades formadas por las asignación de valores al spin en la dirección  $\hat{z}$  al tiempo  $t_2$ , es decir por la base de autoestados de  $S_z$ . Mediante la relación de equivalencia temporal trasladamos este contexto al tiempo  $t_0$ . Queremos ver que otro posible contexto de propiedades a  $t_1$ , cuando este es trasladado al mismo tiempo  $t_0$ , forman con el contexto trasladado desde el tiempo  $t_2$ , un nuevo contexto de propiedades compuestas a dos tiempos.

Esto será posible cuando los proyectores asociados a las propiedades de los contextos trasladados al tiempo  $t_0$  conmutan, lo que es lo mismo, cuando conmutan los operadores representantes al tiempo  $t_0$  de las clases de propiedades que forman los contextos generalizados obtenidos de trasladar los correspondientes contextos a  $t_1$  y a  $t_2$ . El esquema del procedimiento se reduce a

### 4.3 Comparación de historias consistentes con historias contextuales

---

$t_0$	$t_1$	$t_2$
$\widehat{\mathbf{n}}_0 = \widehat{\mathbf{x}}$	$\widehat{\mathbf{n}}_1 = \mathbf{i}?$	$\widehat{\mathbf{n}}_2 = \widehat{\mathbf{z}}$
$\rho_0$	$\Pi_{n_1\pm}^{(1)}$	$\Pi_{z\pm}^{(2)}$
	$\Pi_{n_1+}^{(1)} + \Pi_{n_1-}^{(1)} = \mathbb{I}$	$\Pi_{z+}^{(2)} + \Pi_{z-}^{(2)} = \mathbb{I}$
$\Pi_{n_1\pm}^{(01)} = \Pi_{n_1\pm}^{(1)}$	←	
$\Pi_{z\pm}^{(02)} = \Pi_{z\pm}^{(2)}$	←	

La condición de conmutación mencionada es  $[\Pi_{n_1\pm}^{(01)}, \Pi_{z\pm}^{(02)}] = 0$ , la cual impone  $\widehat{\mathbf{n}}_1 = \widehat{\mathbf{z}}\pm$ . Así la única familia permitida es

$$h_2 = \{C_{11} = \Pi_{z+}\Pi_{z+}, C_{21} = \Pi_{z-}\Pi_{z+}, C_{12} = \Pi_{z+}\Pi_{z-}, C_{22} = \Pi_{z-}\Pi_{z-}\}$$

El formalismo de historias contextuales excluye la historia  $h_1$  que es el caso problemático presente en historias consistentes bajo el pedido de continuidad en los tiempos. Con historias contextuales podemos perfectamente tomar el límite  $t_2 \rightarrow t_1$ , el mismo formalismo se encarga de excluir la historia que lleva a contradicción en ese límite.

En historias contextuales, dos propiedades a distintos tiempos,  $t_i$  y  $t_j$ , nunca puede conducir a incompatibilidades con el principio de incerteza cuando  $t_j \rightarrow t_i$ , ya que por la definición misma del formalismo, las historias son formadas por la conjunción de clases compatibles, es decir, por la conjunción obtenida de propiedades que cuando son trasladadas a un tiempo común, sus correspondientes proyectores conmutan.

En el formalismo de historias contextuales,  $t_j \rightarrow t_i$  implica formar una historia con la clase de equivalencia obtenida de la conjunción a un tiempo común  $t_0$ , de propiedades trasladadas desde un tiempo  $t_i$  y otras desde el tiempo  $t_j$ , cuando estas últimas son previamente trasladadas a  $t_i$ . Ahora bien, la conjunción entre las propiedades trasladadas de  $t_i$  a  $t_0$ , y las trasladadas de  $t_j$  a  $t_0$ , es la misma conjunción cuando las últimas son trasladadas de  $t_j$  a  $t_i$  y luego de  $t_i$  a  $t_0$ . Por lo tanto, si existen historias bien definidas con propiedades a  $t_i$  y a  $t_j$ , existen, y son las mismas historias bien definidas, si  $t_i \rightarrow t_j$ .

### 4.3 Comparación de historias consistentes con historias contextuales

---

En términos de contextos generalizados, podemos agregar que el límite  $t_j \rightarrow t_i$  significa que las historias pueden ser vistas como conjunciones de clases de propiedades en el contexto generalizado obtenido a partir de  $t_i$ , y del contexto generalizado obtenido a partir de  $t_j$  cuando el contexto a  $t_j$  evoluciona al contexto en  $t_i$ . Pero por la propiedad mismo que lo define, un contexto generalizado obtenido del contexto a  $t_j$ , cuando este evoluciona a otro tiempo, es el mismo contexto generalizado. Así, llegamos a la misma conclusión que antes, si existen historias bien definidas con  $t_i$  y  $t_j$ , el límite  $t_j \rightarrow t_i$  produce las mismas historias bien definidas.

Este ejemplo, aunque elemental, pone de manifiesto propiedades características de ambos formalismos. Para historias consistentes queda expresada la limitación en la atribución de propiedades a tiempos continuos. Por su parte, historias contextuales no comparte esta limitación porque excluye los casos en donde dicha limitación se evidencia. En virtud de esto, queda expresado el carácter más restrictivo de historias contextuales en la selección de familias posibles de ser consideradas válidas.

# Capítulo 5

## Aplicaciones

En este capítulo mostraremos aplicaciones concretas del formalismo de historias contextuales sobre dos experimentos paradigmáticos: el experimento de la doble rendija, y el interferómetro de Mach-Zehnder. En ambos casos quedará manifiesto el poder del formalismo para establecer el universo de discurso posible en procesos que involucren propiedades a distintos tiempos.

En el experimento de la doble rendija se analizará la posibilidad de establecer historias de propiedades que vinculen por cuál rendija pasaron las partículas a un dado tiempo, y lo detectado en la pantalla un tiempo posterior. Mostraremos como la presencia de los aparatos modifican las posibilidades de lo que es permitido decir entre dichos tiempos y como eso se relaciona con la presencia de interferencia.

En el experimento del interferómetro, analizaremos la posibilidad de historias que incluyan propiedades referidas a la determinación de por cuál rama pasó el fotón a un tiempo dado, y lo registrado en los aparatos en la salida del interferómetro, un tiempo después. Haremos esto con dos configuraciones experimentales distintas. Mostraremos como el cambio del arreglo experimental para hacer desaparecer la interferencia en la salida del dispositivo determina el cambio de expresiones lógicas referidas a proposiciones que afirman sobre el paso del fotón por una u otra rama, y así la posibilidad de establecer una trayectoria definida que implicaría una descripción corpuscular. Cuando la interferencia está presente, la imposibilidad de afirmar por cuál rama pasó el fotón en relación a lo registrado en los aparatos un tiempo posterior, permite sólo una descripción ondulatoria. Deduciremos así la dualidad onda-partícula.

## 5.1. La doble rendija sin instrumentos de medición

Consideremos una descripción ideal de un experimento de interferencia en el que la partícula pasa a través de una doble rendija. Indicaremos con  $t_1$  el tiempo en el que la función de onda de la partícula está localizada en las rendijas, y con  $t_2$  el tiempo en el que la función de onda ha evolucionado y tiene un valor significativamente distinto de cero en la región que determina una franja vertical situada a la derecha de las rendijas. Esto es indicado en la figura 5.1. En un primer análisis no supondremos la presencia de ningún aparato de medición. Queremos usar la noción de historias contextuales para discutir la posibilidad de una descripción que contenga expresiones del tipo "la partícula está ubicada en la región  $V_+^{(1)}$  al tiempo  $t_1$  y en la región  $V_n^{(2)}$  al tiempo  $t_2$ " (ver figura 5.1).

Las propiedades vinculadas al hecho de localizar las partículas en las regiones  $V_+^{(1)}$  o  $V_-^{(1)}$  al tiempo  $t_1$  son representadas por los proyectores

$$\Pi_+^{(1)} = \int_{V_+^{(1)}} d^3r |\bar{r}\rangle\langle\bar{r}|, \quad \Pi_-^{(1)} = \int_{V_-^{(1)}} d^3r |\bar{r}\rangle\langle\bar{r}|. \quad (5.1)$$

Como la partícula al tiempo  $t_1$  solo puede ubicarse dentro de las rendijas, todo el espacio en ese tiempo queda restringido a los volúmenes  $V_+^{(1)}$  y  $V_-^{(1)}$ . Sobre este espacio acotado que impone la presencia de la configuración en las rendijas, los proyectores  $\Pi_+^{(1)}$  y  $\Pi_-^{(1)}$  resultan ortogonales y completos

$$\Pi_+^{(1)} \Pi_-^{(1)} = \Pi_-^{(1)} \Pi_+^{(1)} = 0, \quad \Pi_+^{(1)} + \Pi_-^{(1)} = \mathbb{I}, \quad (5.2)$$

por lo tanto forman un contexto con dos propiedades atómicas al tiempo  $t_1$ .

Para el tiempo  $t_2$  las propiedades de posición de la partícula en las regiones  $V_n^{(2)}$  son representadas por los proyectores

$$\Pi_n^{(2)} = \int_{V_n^{(2)}} d^3r |\bar{r}\rangle\langle\bar{r}|. \quad (5.3)$$

Para el tiempo  $t_2$  la partícula puede estar en cualquier lugar de la franja vertical. Sobre ese espacio los proyectores,  $\Pi_n^{(2)}$  resultan ortogonales y completos por lo que

$$\Pi_n^{(2)} \Pi_{n'}^{(2)} = \delta_{nn'} \Pi_n^{(2)}, \quad \sum_n \Pi_n^{(2)} = \mathbb{I}. \quad (5.4)$$

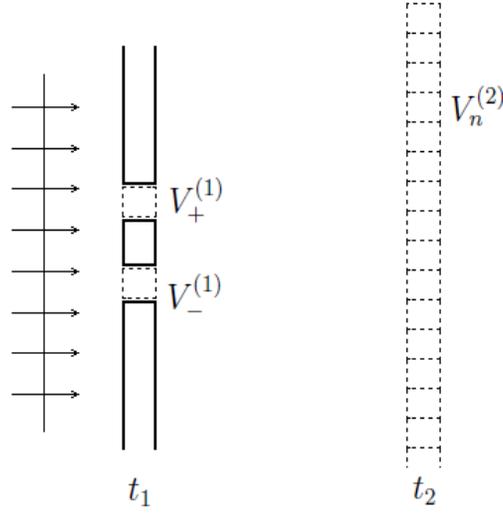


Figura 5.1: Experimento de la doble rendija.

Estos proyectores generan un contexto, en este caso con infinitas propiedades atómicas al tiempo  $t_2$ . Aplicamos el formalismo de historias contextuales de acuerdo a la evolución temporal dada por el sistema mediante el operador  $U \equiv U(t_2, t_1)$ , tal que  $U|\varphi_1\rangle = |\varphi_2\rangle$ , donde  $|\varphi_1\rangle$  es la función de onda localizada en las rendijas al tiempo  $t_1$ , y  $|\varphi_2\rangle$  es la función de onda sobre la franja vertical en  $t_2$ . Elijiendo a  $t_1$  como tiempo común, tenemos la traslación

$$\begin{array}{ccc} & t_1 & t_2 \\ & \Pi_{\pm}^{(1)} & \\ \Pi_n^{(12)} = U^{-1}\Pi_n^{(2)}U & \longleftarrow & \Pi_n^{(2)}. \end{array} \quad (5.5)$$

Vamos a probar que  $\Pi_{\pm}^{(1)}$  no conmutan con  $\Pi_n^{(2)}$ . En particular tomemos  $\Pi_+^{(1)}$ . Es bien conocido que aplicando la evolución temporal de  $|\varphi_1\rangle$  localizada en las rendijas, obtenemos  $|\varphi_2\rangle$  con interferencia en la zona determinada por la franja vertical. Por lo tanto si elegimos  $V_n^{(2)}$  como una región con interferencia destructiva, obtenemos  $\Pi_n^{(2)}|\varphi_2\rangle = 0$  y así

$$\begin{aligned} \Pi_+^{(1)}\Pi_n^{(12)}|\varphi_1\rangle &= \Pi_+^{(1)}U^{-1}\Pi_n^{(2)}U|\varphi_1\rangle \\ &= \Pi_+^{(1)}U^{-1}\Pi_n^{(2)}|\varphi_2\rangle = 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Por otro lado

$$\Pi_n^{(12)}\Pi_+^{(1)}|\varphi_1\rangle = U^{-1}\Pi_n^{(2)}U\Pi_+^{(1)}|\varphi_1\rangle, \quad (5.7)$$

donde  $U\Pi_+^{(1)}|\varphi_1\rangle$  es el vector de estado obtenido de evolucionar al sistema al tiempo  $t_2$  con la rendija inferior cerrada. Por lo tanto no presenta interferencia en la zona de la franja vertical, y así  $U^{-1}\Pi_n^{(2)}U\Pi_+^{(1)}|\varphi_1\rangle$  no puede ser nulo. Esto basta para demostrar que  $\Pi_n^{(12)}$  y  $\Pi_+^{(1)}$  no conmutan.

Por lo tanto, según el formalismo de historias contextuales, no existe un contexto de propiedades compuestas con las propiedades consideradas al tiempo  $t_1$  y al tiempo  $t_2$ . Es decir, no es posible una descripción que permita proposiciones conjuntas que vinculen por donde pasó la partícula en  $t_1$  en relación a su ubicación en la franja vertical al tiempo  $t_2$ .

Esta imposibilidad fue también estudiada por la teoría de historias consistentes [48] arribando a la misma conclusión, aunque con diferente definición de probabilidades.

En ambos formalismos la imposibilidad de establecer por donde pasó la partícula como parte de una historia que termine con la detección de la partícula en la pantalla, tienen una causa común: la presencia de interferencia.

## 5.2. La doble rendija con instrumentos de medición

Analizamos ahora el experimento de la doble rendija con un instrumento de medición  $A$  capaz de detectar por cuál rendija pasó la partícula, y otro instrumento  $B$ , que puede ser considerado la pantalla, capaz de registrar la posición de la partícula en la franja vertical a la derecha de las rendijas.

El sistema  $S$  constituido por la partícula interactúa primero con el instrumento  $A$  durante el intervalo de tiempo  $[t_1 - \Delta, t_1]$ , y luego interactúa con el instrumento  $B$  durante el intervalo de tiempo  $[t_2 - \Delta, t_2]$ .

Ahora no nos interesa la posición de la partícula a diferentes tiempos, sino el registro por parte del instrumento  $A$  en  $t_1$ , luego de finalizada la primera medición, y el registro del instrumento  $B$  en  $t_2$  luego de finalizada la segunda. Nuestro objetivo es determinar la posibilidad de establecer una descripción por medio de historias que involucren los resultados de los aparatos al tiempo  $t_1$  y al tiempo  $t_2$ .

Consideremos al instrumento  $A$  con una variable indicadora cuyo valor de referencia es  $a_0$  antes de la primera medición y con los valores  $a_{\pm}$  si la partícula es detectada en la rendija superior o inferior respectivamente. Asimismo, consideremos al instrumento  $B$  con un valor de referencia  $b_0$  en la variable indicadora antes de la segunda medición y con valores  $b_n$  si la partícula es registrada en la región  $V_n^{(2)}$ .

El sistema  $S + A + B$ , constituido por la partícula y los dos instrumentos es preparado inicialmente en el estado  $|\varphi_1\rangle|a_0\rangle|b_0\rangle$  del espacio del Hilbert  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , donde  $|a_0\rangle$  y  $|b_0\rangle$  son los estados de referencia de los correspondientes aparatos.

Las interacciones del sistema con los dos instrumentos, primero con el  $A$  y luego con el  $B$ , estarán regidas por hamiltonianos de interacción  $H_{SA}$  y  $H_{SB}$  los cuales, por simplicidad, consideraremos efectivos en sus respectivos intervalos de tiempo. Esos hamiltonianos determinarán los correspondientes operadores de evolución, que en el espacio de Hilbert completo notaremos como

$$\begin{aligned} U(t_1, t_1 - \Delta) &= U_{SA} \otimes \mathbb{I}_B & U_{SA} &: \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_A \rightarrow \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_A \\ U(t_2, t_2 - \Delta) &= U_{SB} \otimes \mathbb{I}_A & U_{SB} &: \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_B \rightarrow \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_B, \end{aligned} \quad (5.8)$$

donde  $\mathbb{I}_A$  es la identidad del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_A$ , y  $\mathbb{I}_B$  es la identidad del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_B$ .

Entre interacciones, tanto el sistema como los aparatos evolucionarán con sus propios hamiltonianos libres  $H_S$ ,  $H_A$  y  $H_B$ . El operador de evolución entre  $t_1$  y  $t_2 - \Delta$  es dado por

$$\begin{aligned} U(t_2 - \Delta, t_1) &= U_S \otimes U_A \otimes U_B, & U_S &: \mathcal{H}_S \rightarrow \mathcal{H}_S \\ & & U_A &: \mathcal{H}_A \rightarrow \mathcal{H}_A \\ & & U_B &: \mathcal{H}_B \rightarrow \mathcal{H}_B. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Aun cuando los hamiltonianos de interacción sean efectivos durante los intervalos  $[t_1 - \Delta, t_1]$  y  $[t_2 - \Delta, t_2]$ , el hamiltoniano total

$$H = H_S + H_A + H_B + H_{SA} + H_{SB}, \quad (5.10)$$

puede ser considerado independiente del tiempo asumiendo que los instrumentos de medición son localizados en diferentes regiones del espacio y el sistema microscópico es preparado en un estado tal que sea distinto de cero en las regiones de influencia de los aparatos.

## 5.2 La doble rendija con instrumentos de medición

---

La evolución entre  $t_1$  y  $t_2$  es entonces representada con el operador

$$\begin{aligned} U(t_2, t_1) &= U(t_2, t_2 - \Delta)U(t_2 - \Delta, t_1) \\ &= [U_{SB} \otimes \mathbb{I}_A] [U_S \otimes U_A \otimes U_B]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Fuimos detallando la escritura de los distintos operadores de evolución, para lograr finalmente determinar la estructura del operador de evolución entre los tiempos  $t_1$  y  $t_2$ , porque la posibilidad de construir un contexto historias dependen de la evolución temporal del sistema entre esos tiempos.

Al tiempo  $t_1$ , luego de finalizada la primer medición estamos interesados en los registros del aparato  $A$  que pueden ser caracterizados por propiedades representadas por los proyectores

$$\Pi_{a_{\pm}}^{(1)} = \mathbb{I}_S \otimes |a_{\pm}\rangle\langle a_{\pm}| \otimes \mathbb{I}_B, \quad (5.12)$$

donde  $|a_{\pm}\rangle$  son los autoestados correspondientes a los valores  $a_{\pm}$  de la variable indicadora del instrumento  $A$ . Claramente, los proyectores  $\Pi_{a_{\pm}}^{(1)}$  forman propiedades atómicas de un contexto a  $t_1$ .

Al tiempo  $t_2$  luego de finalizada la segunda medición, nos interesa los registros del instrumento  $B$ , los cuales pueden ser caracterizados por propiedades representadas por los proyectores

$$\Pi_{b_n}^{(2)} = \mathbb{I}_S \otimes \mathbb{I}_A \otimes |b_n\rangle\langle b_n|, \quad (5.13)$$

donde  $|b_n\rangle$  son los autoestados correspondientes a los valores  $b_n$  de la variable indicadora del instrumento  $B$ . Es claro que los proyectores  $\Pi_{b_n}^{(2)}$  forman un contexto a  $t_2$ .

Del formalismo desarrollado en la sección 4.1, sabemos que los registros de ambos aparatos podrán ser incorporados en una descripción por medio de historias contextuales si los correspondientes proyectores conmutan a un tiempo común, el cual elegimos como  $t_1$ .

Si  $U \equiv U(t_2, t_1)$  es el operador de evolución desde el tiempo  $t_1$  inmediatamente después de la medición del instrumento  $A$ , hasta el tiempo  $t_2$  luego de finalizada la medición en la pantalla con el instrumento  $B$ , tenemos

$$\Pi_{b_n}^{(12)} = U^{-1} \overset{t_1}{\Pi_{a_{\pm}}^{(1)}} \overset{t_2}{\Pi_{b_n}^{(2)}} U \longleftarrow \Pi_{b_n}^{(2)} \quad (5.14)$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 \Pi_{a_{\pm}}^{(1)} \Pi_{b_n}^{(2)} &= \Pi_{a_{\pm}}^{(1)} U^{-1} \Pi_{b_n}^{(2)} U \\
 &= \Pi_{a_{\pm}}^{(1)} [U_S \otimes U_A \otimes U_B]^{-1} [U_{SB} \otimes \mathbb{I}_A]^{-1} \Pi_{b_n}^{(2)} [U_{SB} \otimes \mathbb{I}_A] [U_S \otimes U_A \otimes U_B] \\
 &= [U_S \otimes \mathbb{I}_A \otimes U_B]^{-1} [U_{SB} \otimes \mathbb{I}_A]^{-1} \Pi_{a_{\pm}}^{(1)} \Pi_{b_n}^{(2)} [U_{SB} \otimes \mathbb{I}_A] [U_S \otimes \mathbb{I}_A \otimes U_B] \\
 &= [U_S \otimes U_A \otimes U_B]^{-1} [U_{SB} \otimes \mathbb{I}_A]^{-1} \Pi_{b_n}^{(2)} [U_{SB} \otimes \mathbb{I}_A] [U_S \otimes U_A \otimes U_B] \Pi_{a_{\pm}}^{(1)} \\
 &= U^{-1} \Pi_{b_n}^{(2)} U \Pi_{a_{\pm}}^{(1)} \\
 &= \Pi_{b_n}^{(2)} \Pi_{a_{\pm}}^{(1)}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, los posibles registros del aparato  $A$  al tiempo  $t_1$  y los del aparato  $B$  al tiempo  $t_2$  son propiedades que pueden incluirse en un retículo distributivo de propiedades compuestas bien definidas representadas al tiempo  $t_1$  por los proyectores

$$\Pi_{\pm n} = \Pi_{a_{\pm}}^{(1)} \Pi_{b_n}^{(2)}. \quad (5.15)$$

Estos proyectores determinan un contexto de historias a dos tiempos formadas por

$$\begin{aligned}
 h_{\pm n} &= [\pm, t_1] \wedge [n, t_2] \\
 &= [\Pi_{a_{\pm}}^{(1)}, t_1] \wedge [\Pi_{b_n}^{(2)}, t_2] \\
 &= [\Pi_{a_{\pm}}^{(1)} \Pi_{b_n}^{(2)}, t_1] \\
 &= [\Pi_{a_{\pm}}^{(1)} U^{-1} \Pi_{b_n}^{(2)} U, t_1].
 \end{aligned} \quad (5.16)$$

Por medio de este contexto de historias es posible construir inferencias que predicen sobre lo obtenido en la pantalla acorde a cuál rendija fue atravesada por la partícula.

Podemos calcular la probabilidad de que se registre la partícula atravesando la ranura superior en el tiempo  $t_1$ , y que se registre en el volumen  $V_n^{(2)}$  al tiempo  $t_2$ . Esta probabilidad estará dada por la probabilidad de la historia  $h_{+n} = [a_+, t_1] \wedge [b_n, t_2]$

$$\begin{aligned}
 P(h_{+n}) &= Tr \left[ \Pi_{a_+}^{(1)} U^{-1} \Pi_{b_n}^{(2)} U |\varphi_1\rangle \langle \varphi_1| \right] \\
 &= \langle \varphi_1 | \Pi_{a_+}^{(1)} U^{-1} \Pi_{b_n}^{(2)} U | \varphi_1 \rangle \\
 &= \langle \varphi_1 | U^{-1} \Pi_{a_+}^{(1)} \Pi_{b_n}^{(2)} U | \varphi_1 \rangle \\
 &= \langle \varphi_2 | \Pi_{a_+}^{(1)} \Pi_{b_n}^{(2)} \Pi_{a_+}^{(1)} | \varphi_2 \rangle.
 \end{aligned} \quad (5.17)$$

Notamos que esta probabilidad obtenida con ambas rendijas abiertas coincide con la que se obtendría de registrar la partícula en el volumen  $V_n^{(2)}$  con la rendija inferior tapada.

Los aparatos de medición han eliminado la interferencia. Al eliminarse la interferencia las características cuánticas de la superposición han desaparecido. Bajo esa condición, es claramente posible establecer historias que contemplen por donde pasó la partícula en el tiempo  $t_1$  y por donde al tiempo  $t_2$ .

Por supuesto, el fenómeno detrás de estos resultados no es nuevo y ha sido ampliamente discutido en la literatura [37]. Sin embargo estos mismos resultados son ahora obtenidos como consecuencia de un formalismo que trata sobre la compatibilidad de propiedades a diferentes tiempos.

Para el caso de la doble ranura sin instrumentos de medición, el formalismo de historias consistentes, principalmente el desarrollado por Omnès, también excluye la posibilidad de describir por cual rendija ha pasado la partícula porque este tipo de descripción no satisface las condiciones de consistencia estudiadas en la sección 4.2. Como el formalismo de historias contextuales se basa en la posibilidad de establecer historias como propiedades de un nuevo contexto, y por lo tanto sujeta a una condición de conmutatividad, parece más cercano que la teoría de historia consistentes a las nociones usuales de compatibilidad en mecánica cuántica.

Adicionalmente esta condición de conmutatividad que habilita un contexto de historias cuyas probabilidades están bien definidas, no depende del estado inicial del sistema, por lo que en algún sentido, pertenece a un nivel más fundamental o primitivo.

### 5.3. El interferómetro de Mach-Zehnder

En esta sección aplicaremos historias contextuales al interferómetro de Mach-Zehnder, mediante el cual analizaremos como característica distintiva de la mecánica cuántica la dualidad onda partícula.

Sabemos que los objetos cuánticos comparten aspectos tanto ondulatorios como corpusculares. Esta característica es llamada dualidad onda partícula y se enuncia en el principio de complementariedad de Bohr

*Los objetos cuánticos exhiben aspectos corpusculares (siguen trayectorias*

### 5.3 El interferómetro de Mach-Zehnder

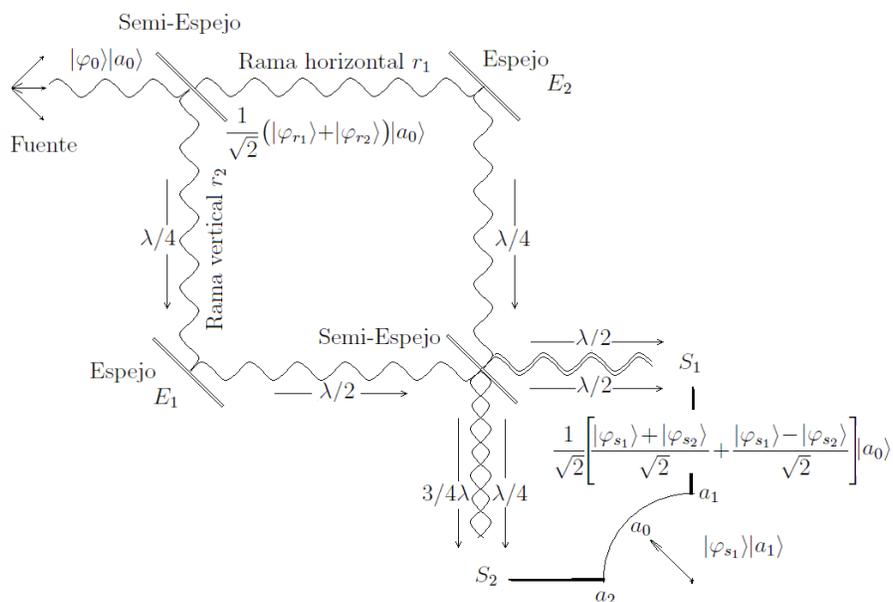


Figura 5.2: Interferómetro de Mach-Zehnder.

*bien definidas) o aspectos ondulatorios (interferencia) dependiendo del arreglo experimental, pero nunca los dos aspectos al mismo tiempo.*

El interferómetro de Mach-Zehnder permite poner de manifiesto esta dualidad. El mismo responde a la configuración de la figura 5.2. Está compuesto de dos divisores de onda (semi-espejos) y dos espejos de modo tal que en cada reflexión, ya sea en un espejo o semi-espejo, se introduce un desfase de un cuarto de onda.

En muchas versiones del interferómetro son considerados dos detectores, uno para cada salida  $S_1$  y  $S_2$ . Nosotros aquí consideramos por simplicidad un único detector capaz de registrar al fotón en una u otra salida.

Con la configuración establecida y los saltos de fase indicados, se logra que en la salida  $S_2$  se produzca interferencia destructiva y en la salida  $S_1$  constructiva, aún cuando el experimento es realizado con frentes de ondas monofotónicos.

Así, aún tratándose de una única partícula, el fotón se comporta como onda, por lo que no es posible determinar por cuál rama viajó. Más allá que los

fotones sean detectados como puntos, consideraremos que estos se comportan como partículas si es posible definir una trayectoria [63], que no es el caso con la configuración establecida por el interferómetro de Mach-Zehnder.

Veamos como nuestro formalismo de historias contextuales impide, en las condiciones dadas, una descripción que incluya proposiciones referidas al pasaje del fotón por una u otra rama.

Para esto consideramos al fotón como el sistema microscópico  $S$ , y un aparato  $A$  colocado en las salidas del interferómetro cuya variable indicadora tiene  $a_0$  como valor de referencia, y dos valores más,  $a_1$  y  $a_2$ , si el fotón es detectado en la salida  $S_1$  o  $S_2$  respectivamente.

A un tiempo inicial  $t_0$  la fuente genera un estado monofotónico  $|\varphi_0\rangle$  y el aparato permanece en el estado de referencia. El sistema compuesto  $S + A$  estará en el estado  $|\varphi_0\rangle|a_0\rangle$ . A un tiempo  $t_1$ , después de atravesar el primer semi-espejo el sistema evoluciona a una superposición de estados  $|\varphi_{r_1}\rangle$  y  $|\varphi_{r_2}\rangle$  que representa respectivamente la localización del fotón en la rama horizontal y vertical

$$|\varphi_0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_{r_1}\rangle + |\varphi_{r_2}\rangle) \quad (5.18)$$

Luego de atravesar el segundo semi-espejo, a un tiempo  $t'$ , los estados  $|\varphi_{r_1}\rangle$  y  $|\varphi_{r_2}\rangle$  tendrán que evolucionar a combinaciones de los estados  $|\varphi_{s_1}\rangle$  y  $|\varphi_{s_2}\rangle$  correspondientes a la localización del fotón en las salidas  $S_1$  y  $S_2$  respectivamente. Considerando los desfases introducidos en cada reflexión, tendremos

$$\begin{aligned} |\varphi_{r_1}\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_{s_1}\rangle + |\varphi_{s_2}\rangle) \\ |\varphi_{r_2}\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_{s_1}\rangle - |\varphi_{s_2}\rangle). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Finalmente a la salida del interferómetro el fotón interactúa con el instrumento de medición  $A$  produciendo una evolución del tipo

$$|\varphi_{s_i}\rangle|a_0\rangle \rightarrow |\varphi_{s_i}\rangle|a_i\rangle,$$

donde  $i = 1, 2$ . Por consiguiente el sistema completo evoluciona de la siguiente

manera

$$\begin{aligned}
 & |\varphi_0\rangle|a_0\rangle \\
 & \rightarrow U(t_1, t_0)|\varphi_0\rangle|a_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_{r_1}\rangle + |\varphi_{r_2}\rangle)|a_0\rangle \\
 & \rightarrow U(t', t_0)|\varphi_0\rangle|a_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{|\varphi_{s_1}\rangle + |\varphi_{s_2}\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|\varphi_{s_1}\rangle - |\varphi_{s_2}\rangle}{\sqrt{2}}\right]|a_0\rangle = |\varphi_{s_1}\rangle|a_0\rangle \\
 & \rightarrow U(t_2, t_0)|\varphi_0\rangle|a_0\rangle = |\varphi_{s_1}\rangle|a_1\rangle.
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

Para poder caracterizar o no un comportamiento corpuscular, nos interesa analizar la posibilidad de describir propiedades que determinen por cuál rama pasó el fotón antes del registro del aparato. Al tiempo  $t_1$  estas propiedades son representadas por los proyectores

$$\Pi_{r_i}^{(1)} = |\varphi_{r_i}\rangle\langle\varphi_{r_i}| \otimes |a_0\rangle\langle a_0|, \tag{5.21}$$

los cuales forman un contexto de propiedades al tiempo  $t_1$ . Consideramos al tiempo  $t_2$  el registro del aparato que puede indicar al fotón detectado en la salida  $S_1$  o en la salida  $S_2$ . Estas son propiedades que se corresponden con los proyectores

$$\Pi_{a_j}^{(2)} = \mathbb{I} \otimes |a_j\rangle\langle a_j| \tag{5.22}$$

las cuales forman un contexto al tiempo  $t_2$ . Eligiendo  $t_2$  como tiempo común, y considerando  $U \equiv U(t_2, t_1)$ , tenemos la traslación

$$\begin{array}{ccc}
 t_1 & & t_2 \\
 & & \Pi_{a_j}^{(2)} \\
 \Pi_{r_i}^{(1)} & \longrightarrow & \Pi_{r_i}^{(21)} = U\Pi_{r_i}^{(1)}U^{-1}
 \end{array}$$

Vamos a ver que no es posible articular las propiedades elegidas al tiempo  $t_1$  y al tiempo  $t_2$  dentro de conjunciones que formen historias, porque los correspondientes proyectores  $\Pi_{a_j}^{(2)}$  y  $\Pi_{r_i}^{(21)}$  no conmutan. Tomemos como ejemplo  $U\Pi_{r_1}^{(1)}U^{-1}$  y  $\Pi_{a_1}^{(2)}$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 U\Pi_{r_1}^{(1)}U^{-1} &= U(t_2, t'_1)U(t'_1, t_1)(|\varphi_{r_1}\rangle\langle\varphi_{r_1}| \otimes |a_0\rangle\langle a_0|)U(t'_1, t_1)^{-1}U(t_2, t'_1)^{-1} \\
 &= \frac{1}{2}U(t_2, t'_1)(|\varphi_{s_1}\rangle + |\varphi_{s_2}\rangle)(\langle\varphi_{s_1}| + \langle\varphi_{s_2}|) \otimes |a_0\rangle\langle a_0|U(t'_1, t_1)^{-1} \\
 &= \frac{1}{2}\left(|\varphi_{s_1}\rangle\langle\varphi_{s_1}| \otimes |a_1\rangle\langle a_1| + |\varphi_{s_1}\rangle\langle\varphi_{s_2}| \otimes |a_1\rangle\langle a_2| \right. \\
 &\quad \left. + |\varphi_{s_2}\rangle\langle\varphi_{s_1}| \otimes |a_2\rangle\langle a_1| + |\varphi_{s_2}\rangle\langle\varphi_{s_2}| \otimes |a_2\rangle\langle a_2|\right)
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

claramente este operador no conmuta con  $\Pi_{a_1}^{(2)} = \mathbb{I} \otimes |a_1\rangle\langle a_1|$ . Por lo tanto, en el lenguaje de historias contextuales esto implica que no pueden armarse conjunciones con propiedades al tiempo  $t_1$  y al tiempo  $t_2$ , que formen un retículo distributivo donde las probabilidades están bien definidas. No es posible predicar sobre cuál rama pasó el fotón al tiempo  $t_1$  en relación a lo que se detectó en tiempo posterior  $t_2$ . Del formalismo de historias contextuales se desprende que no podemos precisar que rama atravesó el fotón, porque nada podemos hablar sobre esas propiedades en las condiciones dadas.

Si la estructura de propiedades del sistema nos impide precisar sobre cuál rama pasó, no podemos afirmar que tenga trayectoria definida y por lo tanto tampoco afirmar que se comporta como partícula.

Vemos que el comportamiento ondulatorio, y la imposibilidad de atribución corpuscular, es deducida lógicamente desde el formalismo de historias contextuales en virtud de lo que puede ser dicho, o no, en las condiciones dadas.

## 5.4. El interferómetro de Mach-Zehnder modificado

Consideremos ahora el interferómetro de Mach-Zehnder modificado al que se le ha retirado el segundo semi-espejo antes de la salida. La configuración responde ahora al esquema de la figura 5.3.

Sucede que los fotones son ahora detectados tanto en la salida  $S_1$  como en la  $S_2$ , y con un 50 % de probabilidad para cada una. De este resultado, comprobado experimentalmente, tenemos que concluir que los fotones se comportan como partículas. Esto es así porque aunque no sepamos por cual rama pasaron, la vertical o la horizontal, después de atravesar el primer semi-espejo tuvieron que pasar por una o por la otra exclusivamente.

Como en el caso anterior consideramos que a un tiempo inicial  $t_0$  la fuente genera un estado monofotónico  $|\varphi_0\rangle$  y que el aparato permanece en el estado de referencia  $|a_0\rangle$ . El sistema compuesto  $S + A$  estará en el estado  $|\varphi_0\rangle|a_0\rangle$ . A un tiempo  $t_1$ , después de atravesar el primer semi-espejo el sistema evoluciona a una superposición de estados  $|\varphi_{r_1}\rangle$  y  $|\varphi_{r_2}\rangle$  representando la localización del fotón en la rama horizontal y horizontal respectivamente. Luego de las reflexiones en los espejos  $E_1$  y  $E_2$ , como ahora se ha quitado el segundo semi-espejo, los últimos estados evolucionan a los estados  $|\varphi_{s_1}\rangle$  y  $|\varphi_{s_2}\rangle$  localizados en las

## 5.4 El interferómetro de Mach-Zehnder modificado

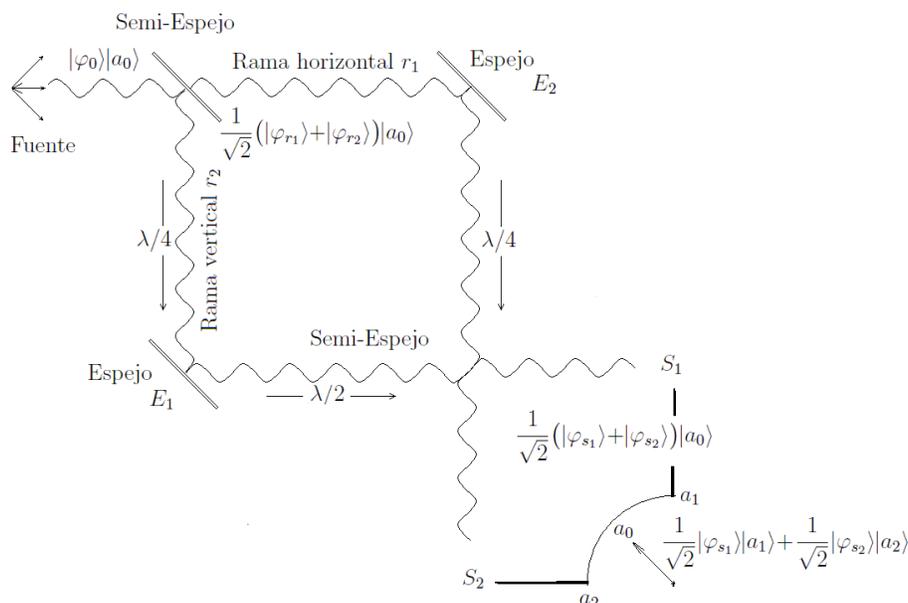


Figura 5.3: Interferómetro de Mach-Zehnder modificado.

salidas  $S_1$  y  $S_2$ . Considerando los desfases de cada reflexión, la evolución del sistema compuesto es ahora dada por

$$\begin{aligned}
 |\varphi_0\rangle|a_0\rangle &\rightarrow U(t_1, t_0)|\varphi_0\rangle|a_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_{r_1}\rangle + |\varphi_{r_2}\rangle)|a_0\rangle \\
 &\rightarrow U(t', t_0)|\varphi_0\rangle|a_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_{s_1}\rangle + |\varphi_{s_2}\rangle)|a_0\rangle \\
 &\rightarrow U(t_2, t_0)|\varphi_0\rangle|a_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_{s_1}\rangle|a_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_{s_2}\rangle|a_2\rangle. \quad (5.24)
 \end{aligned}$$

No queremos cambiar las propiedades elegidas en el caso anterior, queremos ver como el cambio del arreglo experimental afecta a la posibilidad de discutir sobre las mismas propiedades consideradas. Así, utilizaremos los mismos contextos de propiedades a los mismos tiempos. Esto es, las propiedades representadas por los proyectores

$$\Pi_{r_i}^{(1)} = |\varphi_{r_i}\rangle\langle\varphi_{r_i}| \otimes |a_0\rangle\langle a_0|, \quad (5.25)$$

al tiempo  $t_1$ , y la propiedades representadas por los proyectores

$$\Pi_{a_j}^{(2)} = \mathbb{I} \otimes |a_j\rangle\langle a_j|, \quad (5.26)$$

al tiempo  $t_2$ . Queremos determinar si ahora, con el cambio de arreglo experimental, es posible combinar estas propiedades para formar historias.

Elegimos  $t_2$  como tiempo común, y considerando  $U \equiv U(t_2, t_1)$  analizamos la conmutación de los proyectores  $\Pi_{a_j}^{(2)}$  y  $\Pi_{r_i}^{(21)}$ . Tenemos

$$\begin{aligned}
 \Pi_{a_j}^{(2)} \Pi_{r_i}^{(21)} &= \Pi_{a_j}^{(2)} U \Pi_{r_i}^{(1)} U^{-1} \\
 &= \Pi_{a_j}^{(2)} U |\varphi_{r_i}\rangle \langle \varphi_{r_i}| \otimes |a_0\rangle \langle a_0| U^{-1} \\
 &= \Pi_{a_j}^{(2)} |\varphi_{s_i}\rangle \langle \varphi_{s_i}| \otimes |a_i\rangle \langle a_i| \\
 &= U |\varphi_{r_i}\rangle \langle \varphi_{r_i}| \otimes |a_0\rangle \langle a_0| U^{-1} \Pi_{a_j}^{(2)} = \Pi_{r_i}^{(21)} \Pi_{a_j}^{(2)}. \quad (5.27)
 \end{aligned}$$

Vemos que ahora, al contrario que en el caso anterior los proyectores correspondientes a las propiedades consideradas a  $t_1$  y  $t_2$  conmutan, por lo tanto es posible incluirlos en un contexto de propiedades conjuntas a uno y otro tiempo. Es decir, es posible vincular los posibles valores del detector (propiedades al tiempo  $t_2$ ), con las propiedades vinculadas al pasaje por la rama horizontal o vertical (propiedades al tiempo  $t_1$ ). Si es posible hacer esto, entonces es posible construir afirmaciones referidas a la rama por cual pasó el fotón y calcular sus probabilidades. Esto implica una descripción corpuscular de los fotones.

El comportamiento corpuscular, como antes el ondulatorio, es deducido lógicamente desde el formalismo de historias contextuales en virtud de lo que se puede predicar sobre ello.

Las conclusiones ya sea para el interferómetro modificado o no, dentro del marco de historias contextuales, dependen de la evolución temporal presente en el sistema, es decir, del arreglo experimental. Hemos concluido que según sea el hamiltoniano de evolución, en el primer caso historias contextuales excluye historias (propiedades conjuntas) que contemplan si el fotón pasó o no por una rama, y en el segundo sí lo permite. Que las conclusiones dependan del arreglo experimental posiciona al formalismo de historias consistentes dentro de la interpretación *dualista de complementariedad* [63], la cual se basa en el principio de complementariedad enunciado al comenzar la sección. De hecho podemos decir que historias contextuales permite una formalización lógica de dicha interpretación.

## Capítulo 6

# Estructura de propiedades en el proceso de medición

Históricamente la descripción del proceso de medición en el marco de la teoría cuántica ha sido problemática [1], [59], [60], [24]. Dentro de la interpretación de Copenhague los instrumentos de medición son considerados sistemas gobernados por la física clásica, aunque estén constituidos de los mismos elementos del mundo microscópico que describe la física cuántica [59].

Esto hace de los instrumentos sistemas especiales sin justificación aparente sobre los cuales la teoría no puede aplicar, y establece una inconsistencia en la capacidad de ajustar un marco unificado que incluya a la medición dentro de la propia teoría cuántica.

Con el desarrollo de la teoría cuántica de la medición iniciada por Von-Neuman [1], los instrumentos son considerados sistemas cuánticos y por lo tanto son puestos en pie de igualdad con los sistemas que se pretenden medir. Esto conduce a descripciones tendientes a establecer un marco teórico común que vincule los resultados de la mediciones con propiedades del sistema medido.

No obstante, aun en la teoría cuántica de la medición, es necesario el postulado de colapso para establecer el vinculo final entre lo registrado por el observador y los posibles atributos del sistema.

Como hemos visto en la sección 2.2, el colapso establece un tipo de evolución no unitaria, por lo que su existencia supondría una interacción no gobernada por la mecánica cuántica y que se presenta solo en los sistemas que son considerados instrumentos de medición. Por su puesto esto no es satisfactorio, pues de nuevo posiciona a los instrumentos en un lugar especial que

no puede ser incluido en la teoría.

Las descripciones del proceso de medición deberían proveer relaciones lógicas entre los aspectos que caracterizan al sistema y a los aparatos, dentro de un marco común establecido por la misma mecánica cuántica [62]. En particular, estas descripciones deberían contemplar la posibilidad de elaborar argumentos que involucren al tiempo, ya que las propiedades que podrán ser asignadas a los sistemas antes de una medición, dependerán de los registros de los aparatos que se evidencian después de efectuada la misma.

En el marco de la teoría cuántica de la medición, en este capítulo nosotros indagaremos que inferencias lógicas entre propiedades definidas antes y después de la medición son posibles de establecer con el formalismo de historias contextuales. Veremos que la aplicación del formalismo de historias contextuales al proceso de medición, permite recobrar y justificar desde un marco común incluido en la mecánica cuántica, las inferencias lógicas a las que deberían estar sujetos los principios de la medición para que esta tenga sentido como tal.

Adicionalmente esta aplicación permitirá formalizar el procedimiento desarrollado en el capítulo 2 mediante el cual hemos demostrado que el colapso no es necesario como postulado adicional. En ese procedimiento han sido utilizadas mediciones sucesivas, las cuales implícitamente implican descripciones de propiedades en dos tiempos. Dotados del formalismo de historias contextuales, recobramos la deducción del postulado del colapso, justificado ahora como resultado de probabilidades aplicadas sobre las posibles historias.

### 6.1. Historias contextuales en el proceso de medición.

Consideremos un proceso de medición donde un sistema microscópico  $S$  interactúa con un instrumento de medición  $A$ . Los posibles estados del sistema compuesto  $S+A$  son representados en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_A$ . Asumiremos que la interacción entre los sistemas  $S$  y  $A$  comienza en un tiempo  $t_1$  y finaliza al tiempo  $t_2$ . Asumiremos también que el sistema  $S$  tiene un observable  $Q$  con valores  $q_j$ , y que el instrumento de medición tiene una variable indicadora con diferentes valores  $a_i$ .

Cualquier vector del espacio  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_A$  puede ser escrito como una combinación lineal de vectores ortonormales  $|q_j; a_i, r\rangle = |q_j\rangle \otimes |a_i, r\rangle$ , donde

---

## 6.1 Historias contextuales en el proceso de medición.

los índices  $r$  en el vector  $|a_i, r\rangle \in \mathcal{H}_A$  corresponden al enorme número de variables microscópicas del instrumento de medición, diferentes del observable indicador  $a_i$ .

La interacción del sistema  $S$  con el instrumento  $A$  en la calibración de una medición no ideal del observable  $Q$  es representada por una evolución unitaria del sistema compuesto  $S + A$  que verifica

$$|q_j\rangle|a_0, r\rangle \rightarrow U(t_2, t_1)|q_j\rangle|a_0, r\rangle = \sum_{j'r'} C_{rr' jj'} |q_{j'}\rangle|a_j, r'\rangle, \quad (6.1)$$

donde  $a_0$  representa el valor de referencia de la variable indicadora del aparato antes que comience el proceso de medición [28]. Esta expresión muestra la correlación entre el valor  $a_j$  de la variable indicadora al tiempo  $t_2$  y el valor  $q_j$  del observable  $Q$  al tiempo anterior  $t_1$ .

En general, el proceso de medición que comienza al tiempo  $t_1$  y finaliza al tiempo  $t_2$  para un estado inicial del sistema  $S$  que no sea autoestado de  $Q$  se representa por

$$|\psi_1\rangle = \sum_j c_j |q_j\rangle|a_0, r\rangle \rightarrow |\psi_2\rangle = U(t_2, t_1)|\psi_1\rangle = \sum_j c_j \sum_{j'r'} C_{rr' jj'} |q_{j'}\rangle|a_j, r'\rangle. \quad (6.2)$$

Para aplicar el formalismo de historias contextuales, queremos una descripción de la medición que incluya un contexto de propiedades del sistema compuesto  $S + A$  antes y después de la medición. Al tiempo  $t_1$  las propiedades de interés están vinculadas a los posibles valores para el observable  $Q$  y son representadas por los proyectores

$$\Pi_{q_j}^{(1)} = |q_j\rangle\langle q_j| \otimes \mathbb{I}_A, \quad (6.3)$$

siendo  $\mathbb{I}_A$  el operador identidad en el espacio  $\mathcal{H}_A$ . En ese tiempo el instrumento es preparado en el estado de referencia vinculado al valor  $a_0$  para la variable indicadora. Representamos esa propiedad al tiempo  $t_1$  con el proyector

$$\Pi_{a_0}^{(1)} = \mathbb{I}_S \otimes \sum_r |a_0, r\rangle\langle a_0, r|, \quad (6.4)$$

siendo  $\mathbb{I}_S$  el operador identidad en el espacio  $\mathcal{H}_S$ . Por cuestiones de conveniencia, para caracterizar el sistema compuesto al tiempo  $t_1$  elegiremos las propiedades conjuntas determinadas por el valor  $q_j$  del observable  $Q$  y el

## 6.1 Historias contextuales en el proceso de medición.

---

valor  $a_0$  de la variable indicadora. Estas propiedades son representadas por los proyectores

$$\Pi_{q_j \wedge a_0}^{(1)} = \Pi_{q_j}^{(1)} \Pi_{a_0}^{(1)}. \quad (6.5)$$

Como queremos incluir estas propiedades dentro de un contexto a  $t_1$ , completamos el operador identidad con el proyector

$$\begin{aligned} \Pi_{\bar{a}_0}^{(1)} &= \mathbb{I} - \sum_{j \in \sigma(S)} \Pi_{q_j \wedge a_0}^{(1)} \\ &= \mathbb{I} - \sum_{j \in \sigma(S)} \Pi_{q_j}^{(1)} \Pi_{a_0}^{(1)} = \mathbb{I} - \Pi_{a_0}^{(1)}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

donde  $\mathbb{I}$  es el operador identidad del espacio de Hilbert completo  $\mathcal{H}$ . El proyector  $\Pi_{\bar{a}_0}^{(1)}$ , representa la propiedad que puede enunciarse como "un valor distinto de  $a_0$  para la variable indicadora sin importar el valor de  $Q$ ".

Así, los proyectores  $\Pi_{q_j \wedge a_0}^{(1)}$  dados por la ecuación (6.5), y el proyector  $\Pi_{\bar{a}_0}^{(1)}$  dado por la ecuación (6.6), son ortogonales y desarrollan la identidad en  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_A$ . Por lo tanto, representan propiedades atómicas de un contexto de propiedades al tiempo  $t_1$ .

Para el tiempo  $t_2 > t_1$ , después de la medición, las variables de interés están vinculadas a los posibles registros del aparato. Como la medición ha concluido, incluimos en nuestra descripción a ese tiempo, las propiedades asociadas a los posibles valores  $a_i$  de la variable indicadora sin especificar valores para el observable  $Q$ . Los proyectores correspondientes son simplemente

$$\Pi_{a_i}^{(2)} = \mathbb{I}_S \otimes \sum_r |a_i, r\rangle \langle a_i, r|. \quad (6.7)$$

Esos proyectores son mutuamente ortogonales y suman la identidad, por lo que forman un contexto de propiedades al tiempo  $t_2$ .

Queremos ver si es posible incluir las propiedades elegidas a  $t_1$  y a  $t_2$  dentro de un conjunto de historias que puedan ser consideradas propiedades de un nuevo contexto, un contexto de historias. Utilizando la metodología presentada en la sección 4.1, trasladamos las propiedades de los contextos a  $t_1$  y a  $t_2$  a un tiempo común, en este caso tomamos  $t_2$ . Llamando  $U \equiv U(t_2, t_1)$ , al operador de evolución del tiempo  $t_1$  al tiempo  $t_2$ , el esquema del

## 6.1 Historias contextuales en el proceso de medición.

---

procedimiento es

$$\begin{array}{ccc}
 & t_1 & t_2 \\
 \Pi_{q_j \wedge a_0}^{(1)} & \longrightarrow & \Pi_{q_j \wedge a_0}^{(21)} = U \Pi_{q_j \wedge a_0}^{(1)} U^{-1} = U \Pi_{q_j}^{(1)} \Pi_{a_0}^{(1)} U^{-1} \\
 \Pi_{\bar{a}_0}^{(1)} & \longrightarrow & \Pi_{\bar{a}_0}^{(21)} = U \Pi_{\bar{a}_0}^{(1)} U^{-1} = U [\mathbb{I} - \Pi_{a_0}^{(1)}] U^{-1} \\
 & & \Pi_{a_i}^{(2)}
 \end{array}$$

Entonces, usando la ecuaciones (6.1), (6.5) y (6.7), tenemos

$$\begin{aligned}
 \Pi_{a_i}^{(2)} \Pi_{q_j \wedge a_0}^{(21)} &= \Pi_{a_i}^{(2)} U \Pi_{q_j}^{(1)} \Pi_{a_0}^{(1)} U^{-1} \\
 &= \delta_{ij} U \Pi_{q_j}^{(1)} \Pi_{a_0}^{(1)} U^{-1} = \delta_{ij} \Pi_{q_j \wedge a_0}^{(21)}.
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Tomando ahora la ecuación adjunta

$$\begin{aligned}
 \Pi_{q_j \wedge a_0}^{(21)} \Pi_{a_i}^{(2)} &= U \Pi_{q_j}^{(1)} \Pi_{a_0}^{(1)} U^{-1} \Pi_{a_i}^{(2)} \\
 &= \delta_{ij} U \Pi_{q_j}^{(1)} \Pi_{a_0}^{(1)} U^{-1} = \delta_{ij} \Pi_{q_j \wedge a_0}^{(21)}.
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

Si restamos las ultimas dos ecuaciones, obtenemos

$$\left[ \Pi_{a_i}^{(2)}, \Pi_{q_j \wedge a_0}^{(21)} \right] = 0. \tag{6.10}$$

En forma análoga se obtiene  $[\Pi_{a_i}^{(2)}, \Pi_{\bar{a}_0}^{(21)}] = 0$ . Por lo tanto, los proyectores  $\Pi_{q_j \wedge a_0}^{(21)}$  y  $\Pi_{\bar{a}_0}^{(21)}$  que representan la traslación al tiempo  $t_2$ , de las propiedades relevantes al tiempo  $t_1$ , conmutan con los proyectores  $\Pi_{a_i}^{(2)}$ , que representan las propiedades relevantes al tiempo  $t_2$ . Por lo tanto, el conjunto de operadores

$$\Pi_{ji} = \Pi_{q_j \wedge a_0}^{(21)} \Pi_{a_i}^{(2)}, \quad \Pi_i = \Pi_{\bar{a}_0}^{(21)} \Pi_{a_i}^{(2)}, \tag{6.11}$$

representan propiedades bien definidas que forman un contexto. Son esas propiedades los representantes al tiempo  $t_2$  de las clases de equivalencia que determinan un contexto de historias a dos tiempos y que indicamos como

$$\begin{array}{ccc}
 h_{ji} = & [q_j \wedge a_0, t_1] \wedge [a_i, t_2] & h_i = [\bar{a}_0 t_1] \wedge [a_i, t_2] \\
 & [\Pi_{q_j \wedge a_0}^{(1)}, t_1] \wedge [\Pi_{a_i}^{(2)}, t_2] & [\Pi_{\bar{a}_0}^{(1)}, t_1] \wedge [\Pi_{a_i}^{(2)}, t_2] \\
 & [\Pi_{q_j \wedge a_0}^{(21)} \Pi_{a_i}^{(2)}, t_2] & [\Pi_{\bar{a}_0}^{(21)}, t_1] \wedge [\Pi_{a_i}^{(2)}, t_2]
 \end{array}$$

## 6.1 Historias contextuales en el proceso de medición.

---

Por disyunción de esas propiedades, se obtiene un reticulado distributivo involucrando propiedades a ambos tiempos  $t_1$  y  $t_2$ , esto es, un posible universo de discurso referido al proceso de medición mediante historias a dos tiempos. Esto determina una estructura que formaliza las relaciones entre las propiedades referidas al proceso de medición sobre las cuales podemos hablar legítimamente dentro de la mecánica cuántica.

No obstante, para lo que queremos mostrar necesitamos un ingrediente más que es la traslación al tiempo  $t_2$  de la propiedad asociada al valor  $a_0$  de la variable indicadora al tiempo  $t_1$ , es decir la traslación

$$\begin{array}{ccc}
 t_1 & & t_2 \\
 \Pi_{a_0}^{(1)} & \longrightarrow & \Pi_{a_0}^{(21)} = U\Pi_{a_0}^{(1)}U^{-1}
 \end{array}$$

Entonces de la ecuación (6.8), podemos deducir

$$\begin{aligned}
 \Pi_{a_j}^{(2)}\Pi_{a_0}^{(21)} &= \Pi_{a_j}^{(2)}U\Pi_{a_0}^{(1)}U^{-1} \\
 &= \Pi_{a_j}^{(2)}U \sum_{t \in \sigma^{(S)}} \Pi_{q_t}^{(1)}\Pi_{a_0}^{(1)}U^{-1} \\
 &= \sum_{t \in \sigma^{(S)}} \Pi_{a_j}^{(2)}U\Pi_{q_t}^{(1)}\Pi_{a_0}^{(1)}U^{-1} \\
 &= \sum_{t \in \sigma^{(S)}} \delta_{tj}U\Pi_{q_t}^{(1)}\Pi_{a_0}^{(1)}U^{-1} \\
 &= U\Pi_{q_j}^{(1)}\Pi_{a_0}^{(1)}U^{-1} = \Pi_{q_j \wedge a_0}^{(1)}. \tag{6.12}
 \end{aligned}$$

Como además,  $\Pi_{a_j}^{(2)}$  y  $\Pi_{a_0}^{(21)}$  conmutan, como puede verse de las mismas ecuaciones (6.8) y (6.9), tenemos que el primer término de la última ecuación es un proyector que representa la conjunción de clases  $[a_0, t_1] \wedge [a_j, t_2]$ , y el último representa  $[q_j \wedge a_0, t_1]$  el cual puede escribirse como la conjunción  $[a_0, t_1] \wedge [q_j, t_1]$ . Por lo tanto conseguimos la doble implicación

$$[a_0, t_1] \wedge [a_j, t_2] \Leftrightarrow [a_0, t_1] \wedge [q_j, t_1]. \tag{6.13}$$

Aplicando lo desarrollado para el caso de clases de propiedades cuánticas en la sección 3.2 y 3.4, de la última ecuación obtenemos

$$\mathcal{P}([a_0, t_1] \wedge [a_j, t_2]) = \mathcal{P}([a_0, t_1] \wedge [q_j, t_1]). \tag{6.14}$$

## 6.1 Historias contextuales en el proceso de medición.

---

Si ahora dividimos ambos términos de esta ecuación por  $\mathcal{P}([a_0, t_1])$ , obtenemos

$$\mathcal{P}([q_j, t_1]/[a_0, t_1]) = \mathcal{P}([a_j, t_2]/[a_0, t_1]). \quad (6.15)$$

Esta ecuación nos brinda información sobre el valor  $q_j$  del observable  $Q$  antes del proceso de medición en términos de las lecturas sobre la variable indicadora  $A$  después de la medición. Al repetir la medición varias veces, siempre con la misma preparación del sistema microscópico  $S$ , y siempre con el mismo valor  $a_0$  de la variable indicadora, es posible obtener la frecuencia relativa del valor  $a_j$ . Si esa frecuencia relativa es identificada con la probabilidad presente en el lado derecho de la ecuación (6.15), entonces es igual a la frecuencia relativa para el valor  $q_j$  del observable microscópico  $Q$ . Esta frecuencia microscópica no ha sido obtenida por observación directa, sino través de la ecuación (6.15) y con información empírica de la frecuencia relativa de la variable indicadora.

Esto es resultado de una inferencia aplicada dentro de un universo de discurso válido sobre el sistema compuesto  $S + A$  en el proceso de medición, sobre la base de la realización del valor  $a_j$  para la variable indicadora. Este no es un resultado nuevo, es conocido en la literatura, pero no debidamente enmarcado dentro de un formalismo que involucre explícitamente los tiempos en consideración.

Volvamos ahora la expresión dada por (6.13). Esta puede expresarse como

$$[a_0, t_1] \wedge ([a_j, t_2] \Leftrightarrow [q_j, t_1]). \quad (6.16)$$

Si descomponemos ahora el bicondicional dentro del paréntesis, tenemos la relación  $[q_j, t_1] \Rightarrow [a_j, t_2]$  de la que se obtiene

$$\mathcal{P}([a_j, t_2]/[q_j, t_1]) = 1. \quad (6.17)$$

Esta ecuación permite la *predicción* de resultados. Con ella podemos decir que, *si* el observable  $Q$  del sistema microscópico  $S$  tiene valor  $q_j$  al tiempo  $t_1$  *entonces* la variable indicadora arrojará el valor  $a_j$  a un tiempo posterior  $t_2$ .

Este resultado tampoco es nuevo, de hecho es lo que da validez al proceso de calibración como fuera descrito en la sección 2.1. No obstante, mediante el formalismo de historias contextuales es ahora recobrado formalmente en un marco lógico que involucra propiedades a distintos tiempos, como es relevante para el proceso de medición.

## 6.1 Historias contextuales en el proceso de medición.

---

De la relación recíproca a la anterior obtenemos  $[a_j, t_2] \Rightarrow [q_j, t_1]$ , de donde podemos deducir la probabilidad condicional

$$\mathcal{P}([q_j, t_1]/[a_j, t_2]) = 1. \quad (6.18)$$

Esta ecuación establece la posibilidad de la *retrodicción* sobre valores del sistema medido, en virtud de los resultados de la medición. Nos lleva a la conclusión de que *si* el valor  $a_j$  puede ser asignado a la variable indicadora del aparato al tiempo  $t_2$ , *entonces* el valor  $q_j$  puede ser asignado al observable  $Q$  del sistema al tiempo  $t_1$  antes de la medición.

No obstante, la afirmación debe analizarse con cuidado, pues pone de relieve dificultades conceptuales que son características del proceso de medición cuántica.

El problema que se presenta aquí, es cómo considerar la asignación de un valor de la variable  $Q$  al tiempo  $t_1$  si a ese tiempo el sistema es preparado en una superposición de autoestados de  $Q$  como indica la ecuación (6.2). Para sortear este problema debemos aceptar que la asignación de valor en la variable  $Q$  no puede ser entendida como una atribución completamente objetiva, sino como una asignación "efectiva" que no es independiente de la condición experimental dada.

Pues bien, esto no es más que una manifestación de la contextualidad determinada por el "entrelazamiento" que establece la medición entre sistema y aparato. Dentro del formalismo de historias contextuales, el cual nos condujo a la implicación  $[a_j, t_2] \Rightarrow [q_j, t_1]$ , la contextualidad vinculada al arreglo experimental está implícita en el hecho de que el condicional queda definido en virtud de la particular evolución temporal que determina la medición, y que además da sentido a las mismas propiedades que definen el antecedente y el consecuente de dicho condicional. Las propiedades  $[q_j, t_1]$  y  $[a_j, t_2]$  no son propiedades independientes. El significado de una queda vinculado al de la otra por medio de la evolución temporal que determina la medición y da sentido al condicional entre ellas.

Así, si somos fieles a la mecánica cuántica, con el formalismo de historias contextuales debemos concluir que la asignación de valor  $q_j$  en el tiempo  $t_1$  es válida en tanto sea realizada por medio del registro del valor  $a_j$  en la variable del aparato un tiempo posterior tiempo  $t_2$ . Es decir, la asignación de valor en variable  $Q$  es hecha entendiendo que la misma queda sujeta al resultado de la medición de dicha variable, y no de otra. Después de todo, la única manera de evidenciar un valor de  $Q$ , es por medio de la medición de dicha variable.

El formalismo de historias contextuales nos ha permitido establecer la estructura de propiedades dependiente del tiempo detrás del proceso de medición. Esto define un marco formal lógico que determina que nos permite decir el valor de la variable indicadora, respecto a los valores del observable microscópico  $Q$  y así vincular propiedades "microscópicas" del sistema medido, con propiedades "macroscópicas" presentes en los aparatos.

## 6.2. Historias contextuales y la deducción del colapso.

En esta sección recobramos los resultados de la sección 2.3 donde se dedujo el postulado del colapso considerando un proceso con dos mediciones sucesivas. Como las mediciones intervienen a distintos tiempos, el colapso es ahora deducido mediante la aplicación de probabilidades a las posibles historias que involucren los registros de una y otra medición.

Así, consideremos un sistema microscópico  $S$  que interactúa primero con un instrumento de medición  $A$  durante el intervalo de tiempo  $[t_1 - \Delta, t_1]$ , y luego con un segundo instrumento de medición  $B$  durante el intervalo  $[t_2 - \Delta, t_2]$ . Consideremos además a los vectores  $|a_j\rangle$  y  $|b_i\rangle$  como los autoestados de las variables indicadoras de los instrumentos  $A$  y  $B$  respectivamente.

Al tratarse de un proceso con dos mediciones, una entre  $[t_1 - \Delta, t_1]$  y la otra entre  $[t_2 - \Delta, t_2]$ , el esquema temporal del procedimiento es análogo al desarrollado en la sección 5.2, así que valen las mismas apreciaciones hechas sobre los hamiltonianos en esa sección, y los operadores de evolución en las interacciones, entre ellas y entre los tiempos  $t_1$  y  $t_2$ , pueden ser considerados los mismos presentados en las ecuaciones (5.8), (5.9) y (5.11) respectivamente.

Al tiempo  $t_0 = t_1 - \Delta$  el sistema compuesto  $S + A + B$  es preparado en el estado genérico

$$\rho_{t_0} = \rho_S \otimes \rho_A \otimes \rho_B. \quad (6.19)$$

Estamos interesados en un universo de discurso que incluya los posibles valores de las variables indicadoras de ambos instrumentos.

Para el tiempo  $t_1$ , cuando la primer medición ha finalizado, las propiedades de interés están vinculadas a los posibles valores de la variable indicadora del instrumento  $A$ , propiedades que son representadas por los proyectores

$$\Pi_{a_j}^{(1)} = \mathbb{I}_S \otimes |a_j\rangle\langle a_j| \otimes \mathbb{I}_B. \quad (6.20)$$

## 6.2 Historias contextuales y la deducción del colapso.

---

Estos proyectores son mutuamente ortogonales y desarrollan la identidad, por lo tanto forman un contexto de propiedades a  $t_1$ .

Para el tiempo posterior  $t_2$ , cuando la segunda medición ha finalizado, las propiedades de interés están vinculadas a los posibles valores de la variable indicadora del instrumento  $B$ , propiedades que son representadas por los proyectores

$$\Pi_{b_i}^{(2)} = \mathbb{I}_S \otimes \mathbb{I}_A \otimes |b_i\rangle\langle b_i|. \quad (6.21)$$

Estos proyectores también forman un contexto de propiedades a  $t_2$ .

Queremos construir historias a dos tiempos que incluyan las propiedades elegidas a  $t_1$  y  $t_2$ . Como ya hemos visto del formalismo, esto será posible si las propiedades involucradas, al ser trasladadas a un tiempo común, son representadas por proyectores que conmutan.

Eligiendo a  $t_2$  como tiempo común tenemos la traslación

$$\begin{array}{ccc} t_1 & & t_2 \\ \Pi_{a_j}^{(1)} & \longrightarrow & \Pi_{a_j}^{(21)} = U\Pi_{a_j}^{(1)}U^{-1} \\ & & \Pi_{b_i}^{(2)} \end{array} \quad (6.22)$$

donde  $U = U(t_2, t_1)$  es el operador de evolución de  $t_1$  a  $t_2$  dado por la ecuación (5.11). Queremos ver si  $\Pi_{a_j}^{(12)}$  y  $\Pi_{b_i}^{(2)}$  conmutan. Tenemos

$$\begin{aligned} \Pi_{b_i}^{(2)}\Pi_{a_j}^{(21)} &= \Pi_{b_i}^{(2)}U\Pi_{a_j}^{(1)}U^{-1} \\ &= \Pi_{b_i}^{(2)}[U_{SB} \otimes \mathbb{I}][U_S \otimes U_A \otimes U_B]\Pi_{a_j}^{(1)}[U_S \otimes U_A \otimes U_B]^{-1}[U_{SB} \otimes \mathbb{I}]^{-1} \\ &= \Pi_{b_i}^{(2)}[\mathbb{I} \otimes U_A \otimes \mathbb{I}]\Pi_{a_j}^{(1)}[\mathbb{I} \otimes U_A^{-1} \otimes \mathbb{I}] \\ &= [\mathbb{I} \otimes U_A \otimes \mathbb{I}]\Pi_{a_j}^{(1)}[\mathbb{I} \otimes U_A^{-1} \otimes \mathbb{I}]\Pi_{b_i}^{(2)} \\ &= [U_{SB} \otimes \mathbb{I}][U_S \otimes U_A \otimes U_B]\Pi_{a_j}^{(1)}[U_S \otimes U_A \otimes U_B]^{-1}[U_{SB} \otimes \mathbb{I}]^{-1}\Pi_{b_i}^{(2)} \\ &= U\Pi_{a_j}^{(1)}U^{-1}\Pi_{b_i}^{(2)} = \Pi_{a_j}^{(21)}\Pi_{b_i}^{(2)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, vemos que los valores de las variables indicadoras del aparato  $A$  al tiempo  $t_1$  y del aparato  $B$  al tiempo  $t_2$ , son propiedades tales que al ser trasladadas un tiempo común  $t_2$ , sus proyectores representantes a ese tiempo, conmutan. De este modo, la conjunción de esas propiedades representadas por

$$\Pi_{ji} = \Pi_{a_j}^{(21)}\Pi_{b_i}^{(2)}, \quad (6.23)$$

## 6.2 Historias contextuales y la deducción del colapso.

---

al tiempo  $t_2$  son propiedades compuestas bien definidas que forman un conjunto de propiedades atómicas de nuevo contexto. Estas serán las representantes de las clases de equivalencia que forman un contexto de historias a dos tiempos, las cuales son indicadas como

$$\begin{aligned}
 h_{ji} &= [a_j, t_1] \wedge [b_i, t_2] \\
 &= [\Pi_{a_j}^{(1)}, t_1] \wedge [\Pi_{b_i}^{(2)}, t_2] \\
 &= [\Pi_{a_j}^{(21)} \Pi_{b_i}^{(2)}, t_2] \\
 &= [U \Pi_{a_j}^{(1)} U^{-1} \Pi_{b_i}^{(2)}, t_2].
 \end{aligned} \tag{6.24}$$

En este contexto de historias  $h_{ji}$ , la probabilidad de obtener  $b_j$  en la medición con el instrumento  $B$  en el tiempo  $t_2$  *condicional* a la obtención del valor  $a_i$  en la medición con el instrumento  $A$  en el tiempo  $t_1$  es dada por

$$\mathcal{P}([b_i, t_2]/[a_j, t_1]) = \frac{\mathcal{P}(h_{ji})}{\mathcal{P}([a_j, t_1])}. \tag{6.25}$$

Como elegimos  $t_2$  como tiempo común, tenemos

$$\mathcal{P}(h_{ji}) = \text{Tr} \left[ \rho_{t_2} U \Pi_{a_j}^{(1)} U^{-1} \Pi_{b_i}^{(2)} \right].$$

Sin embargo, por conveniencia podemos calcular esta probabilidad con todos los operadores al tiempo  $t_1$ , lo cual manifiesta la versatilidad del formalismo de historias contextuales a ese respecto. Así

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(h_{ji}) &= \text{Tr} \left[ (U^{-1} \rho_{t_2} U) U^{-1} \Pi_{b_i}^{(2)} U \Pi_{a_j}^{(1)} \right] \\
 &= \text{Tr} \left[ \rho_{t_1} U^{-1} \Pi_{b_i}^{(2)} U \Pi_{a_j}^{(1)} \right] \\
 &= \text{Tr} \left[ \Pi_{a_j}^{(1)} \rho_{t_1} \Pi_{a_j}^{(1)} U^{-1} \Pi_{b_i}^{(2)} U \right],
 \end{aligned} \tag{6.26}$$

donde  $U = U(t_2, t_1)$ . Usando el operador de evolución entre  $t_0 = t_1 - \Delta$  y  $t_1$  según la ecuación (5.8), el estado del sistema compuesto a  $t_1$  es dado por

$$\begin{aligned}
 \rho_{t_1} &= U(t_1, t_0) \rho_{t_0} U(t_1, t_0)^{-1} \\
 &= [U_{SA} \otimes \mathbb{I}_B] (\rho_S \otimes \rho_A \otimes \rho_B) [U_{SA} \otimes \mathbb{I}_B]^{-1} \\
 &= U_{SA} (\rho_S \otimes \rho_A) U_{SA}^{-1} \otimes \rho_B,
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

## 6.2 Historias contextuales y la deducción del colapso.

---

Si ahora reemplazamos las expresiones para  $\Pi_{a_j}^{(1)}$ ,  $\Pi_{b_i}^{(2)}$  y  $\rho_{t_1}$  de las ecuaciones (6.20), (6.21) y (6.27) en la ecuación (6.26), obtenemos

$$\mathcal{P}(h_{ji}) = \text{Tr}_{S+B} \left[ U_{SB} \left[ U_S \text{Tr}_A \left[ \Pi_{a_j} U_{SA} (\rho_S \otimes \rho_A) U_{SA}^{-1} \Pi_{a_j} \right] U_S^{-1} \right. \right. \\ \left. \left. \otimes U_B \rho_B U_B^{-1} \right] U_{SB}^{-1} \Pi_{b_i} \right],$$

donde hemos llamado  $\Pi_{a_j} = \mathbb{I}_S \otimes |a_j\rangle\langle a_j|$  y  $\Pi_{b_i} = \mathbb{I}_S \otimes |b_i\rangle\langle b_i|$ . Por otro lado

$$\mathcal{P}([a_j, t_1]) = \text{Tr}_{S+A} \left[ \Pi_{a_j} [U_{SA} (\rho_S \otimes \rho_A) U_{SA}^{-1}] \mathbb{I}_S \Pi_{a_j} \right].$$

Entonces, reemplazando las dos últimas ecuaciones en (6.25), obtenemos

$$\mathcal{P}([b_i, t_2]/[a_j, t_1]) = \text{Tr}_{S+B} \left[ U_{SB} [U_S \otimes U_B] (\rho_S^* \otimes \rho_B) [U_S \otimes U_B]^{-1} U_{SB}^{-1} \Pi_{b_i} \right], \quad (6.28)$$

donde

$$\rho_S^* = \frac{\text{Tr}_A \left[ \Pi_{a_j} [U_{SA} (\rho_S \otimes \rho_A) U_{SA}^{-1}] \Pi_{a_j} \right]}{\text{Tr}_{S+A} \left[ \Pi_{a_j} [U_{SA} (\rho_S \otimes \rho_A) U_{SA}^{-1}] \Pi_{a_j} \right]}. \quad (6.29)$$

Si la interacción entre el sistema  $S$  y el primer aparato  $A$  durante el intervalo  $[t_1 - \Delta, t_1]$  corresponde a una medición ideal de modo tal que su correspondiente operador de evolución  $U_{SA}$  cumple

$$|q_j\rangle|a_0\rangle \rightarrow U_{SA}|q_j\rangle|a_0\rangle = |q_j\rangle|a_j\rangle,$$

y al tiempo  $t_0$  el sistema compuesto  $S + A$  es preparado en el estado

$$\rho_S \otimes \rho_A = \rho_S \otimes |a_0\rangle\langle a_0|,$$

donde  $|a_0\rangle$  es el autoestado asociado al valor de referencia de la variable indicadora del instrumento  $A$ , entonces, es fácil ver que la ecuación (6.29) se reduce a

$$\rho_S^* = |q_j\rangle\langle q_j|. \quad (6.30)$$

Hemos recobrado el resultado obtenido en la sección 2.3. A todos los efectos de calcular la probabilidad para una segunda medición, luego de la primera

## 6.2 Historias contextuales y la deducción del colapso.

---

con resultado  $a_j$ , al sistema  $S$  puede ser atribuido el estado que asigna el postulado del colapso, sin que eso signifique abandonar la evolución unitaria para el sistema compuesto que incluye los aparatos, pero siempre y cuando la primer medición sea una medición ideal.

Como en la sección mencionada, logramos esto mediante el uso de la formula de la probabilidad condicional, pero ahora es aplicada sobre clases de propiedades que formaliza las descripciones de propiedades a distintos tiempos mediante la construcción de historias.

# Capítulo 7

## Conclusiones

Incorporando al tiempo en las descripciones, ya sea clásicas o cuánticas, hemos establecido una generalización de las propiedades mediante la representación de pares (*propiedad, tiempo*). Entre ellos definimos una relación de equivalencia basándonos en la noción de traslación temporal propia de cada teoría, y esto nos permitió organizar las propiedades que participan en descripciones a distintos tiempos en clases de propiedades equivalentes.

Hemos definido una relación de orden entre clases de equivalencias, como la relación de orden que establece cada teoría entre las propiedades representativas de dichas clases a un tiempo común. De la misma forma, y compatible con esta relación de orden, definimos las operaciones ínfimo, supremo, y complementación entre clases.

Vinculando la relación de orden a una implicación, y las operaciones ínfimo, supremo, y complemento, a la conjunción, disyunción y negación respectivamente, pudimos hablar de una estructura algebraica de clases de equivalencia, y con ello formalizar un lenguaje para operar con propiedades a distinto tiempos.

Hablamos de estructura algebraica de clases de equivalencia refiriéndonos al correspondiente retículo de clases. Esto no basta para definir una lógica ya que en el caso cuántico se carece de una función de verdad la cual constituye un elemento fundamental necesario para hablar de una lógica. No obstante se han definido probabilidades de clases inducidas por la regla de Bohr, la cual están bien definidas siempre y cuando circunscribamos su aplicación a retículos distributivos. Dentro de ellos, aunque no poseamos una función de verdad, es posible valerse de la definición de probabilidad para establecer certezas de ciertas propiedades cuando estas están sujetas a sentencias condicionales.

---

El tratamiento es esencialmente igual ya sea para el caso cuántico como el clásico. Difieren en la representación de las propiedades y en el mecanismo de evolución, propio de cada teoría para determinar la clase. Pero el lenguaje es al menos sintácticamente el mismo, lo cual permite encuadrar las descripciones clásicas y cuánticas en un lenguaje común.

Con esta perspectiva, la aplicación inmediata es sobre la posibilidad de establecer correspondencias explícitas entre dichas descripciones. Haciendo corresponder celdas en el espacio de las fases, con proyectores en el espacio de Hilbert, es posible definir, bajo ciertas aproximaciones, un criterio de correspondencia entre la dinámica de propiedades clásicas y cuánticas mediante el uso del llamado análisis microlocal. Como el lenguaje de clases ya tiene incorporada la dinámica que define la equivalencia temporal, este nos permitió elevar el mencionado criterio de correspondencia al nivel de establecerlo entre la estructura de propiedades dependiente del tiempo, y de hacerlo de manera sencilla y simétrica.

Dentro de las aplicaciones específicamente cuánticas, el lenguaje de clases nos permitió desarrollar la noción de historia, lo cual da origen al nombre de la tesis.

Definimos una historia como la clase obtenida por medio de la conjunción de propiedades a distintos tiempos, y demostramos que si las propiedades que participan en la historia conmutan cuando son trasladadas a un tiempo común, las propiedades compuestas por dicha conjunción forma los átomos de un nuevo contexto de clases, que llamamos historia contextuales (o contextos de historias).

Esto deja establecido un formalismo que nos dice bajo que condiciones, propiedades elegidas a distintos tiempos en un sistema cuántico, determinan una descripción legítima del mismo, en el sentido que el discurso clásico es válido y las probabilidades están bien definidas de acuerdo a los axiomas de Kolmogorov.

Enfatizamos el hecho de que las propiedades son "elegidas", de acuerdo a lo que se quiera describir. Eso no está dado por el formalismo. El formalismo nos habilita a determinar si los intentos descriptivos son válidos por medio de historias de propiedades a distintos tiempos.

El formalismo está de alguna manera inspirado en el de historias consistentes, principalmente en la versión desarrollada por R. Omnès. Para el caso de historias a dos tiempos, una comparación entre ellos permitió evidenciar el carácter más restrictivo de historias contextuales frente a historias consistentes en la determinación de historias posibles, quedando demostrado en un

---

teorema que *un contexto de historias es un conjunto de historias consistentes con las mismas probabilidades.*

Con el ejemplo elemental de historias con spines a dos tiempos concluimos además que historias contextuales permite la posibilidad de asignación de tiempos continuos, lo cual puede llevar a contradicción con el principio de incerteza en el caso de historias consistentes. En virtud de su carácter más restrictivo, historias contextuales excluye naturalmente las posibles historias consistentes que traen incompatibilidades cuando uno de los tiempos tiende a otro. Esto es debido al hecho de que historias contextuales están formadas por la conjunción de clases compatibles.

Hemos destacado y explicado dos características objetables en el formalismo de historias consistentes, que no están presentes en historias contextuales. La primera remite al hecho que la condición de consistencia depende de la preparación inicial del sistema. La segunda que dentro de una familia válida, la inferencia es definida en virtud de la noción de probabilidad, la cual también depende del estado inicial. Así, el estado inicial y su distribución de probabilidades asociada determina el espacio muestral, esto es, define el conjunto de familias permitidas en donde será aplicado; y por medio del condicional también determina la estructura lógica dentro de la familia.

Decimos que esto es objetable, puesto que las probabilidades, determinadas por el estado, son normalmente definidas después del espacio muestral donde aplicar dichas probabilidades, y no al revés.

En un contexto de historias, la posibilidad de una descripción válida descansa en la condición de conmutación entre propiedades cuyas conjunciones pueden generar un contexto de propiedades compuestas. En este sentido, historias contextuales es fiel al formalismo habitual de la mecánica cuántica con un agregado mínimo de hipótesis. El único agregado es la noción de equivalencia temporal. Todo lo que se deriva de ello está sujeto al formalismo usual.

De esta manera, creemos que historias contextuales puede ser considerada una aproximación más natural para construir historias de propiedades cuánticas, porque logra esto apelando a la idea de conjunciones que formen un contexto de clases, lo cual no es más que contextos obtenidos de la traslación temporal ordinaria de la mecánica cuántica y sobre la base de conjunciones de propiedades compatibles.

Esto puede ser evidenciado por ejemplo con el problema que se presenta en las operaciones de refinamiento o simplificación de historias. En el primer caso, una historia es refinada agregando mas tiempos en consideración. En el

---

segundo, simplificada sacando tiempos en la historia. En el caso del formalismo de historias consistentes, estas operaciones implican el análisis de nuevas condiciones de consistencia cada vez.

Dentro del formalismo de historias contextuales, la operación de simplificación es inmediata. Como un contexto de historias es definido por conjunciones de propiedades compatibles, cualquier conjunto de historias formada de subconjuntos de propiedades del primer contexto, también formarán un contexto, y así un contexto de historias simplificado.

La operación de refinamiento consiste en encontrar un nuevo contexto que incluya a otro previamente obtenido. Esto implica encontrar propiedades que se puedan agregar a un conjunto de otras compatibles de modo que el nuevo conjunto sea también compatible. Esto se reduce a encontrar proyectores que conmuten con otros que ya conmutan. Así, si bien el procedimiento es menos directo que en la simplificación, la operación es constructiva por pasos.

Una aplicación importante fue desarrollada para el proceso de medición cuántica. Establecimos propiedades que caracterizan al sistema antes de la medición, y propiedades que caracterizan los resultados en los aparatos después de esta. Vinculando las primeras con las segundas mediante un contexto de historias posibles a dos tiempos, pudimos encontrar sentencias condicionales que nos permita elaborar argumentos sobre la predicción y retrodicción en un proceso de medición cuántica general.

Las conclusiones a ese respecto se centran en la relación de clases establecida por el bicondicional  $[a_j, t_2] \Leftrightarrow [q_j, t_1]$ . Mediante el cálculo de probabilidades esto nos condujo a la atribución estadística. Como historias contextuales nos habilita a predicar sobre propiedades a distintos tiempos, nos permite establecer una estadística para un sistema antes de la medición, en relación a la estadística observada en las variables de los aparatos luego de dicha medición, y lo hace aún cuando el proceso corresponda a una medición no ideal, es decir cuando no se preserva la información sobre el estado del sistema. Justamente como dicho formalismo incluye propiedades a distintos tiempos, no es necesario preservar la información del estado hasta un tiempo posterior mediante una medición ideal.

Si descomponemos el bicondicional, tenemos la relación dada por  $[q_j, t_1] \Rightarrow [a_j, t_2]$ . Esta relación permite la predicción y es la más inmediata pues es la que define la calibración del proceso de medición.

La relación recíproca  $[a_j, t_2] \Rightarrow [q_j, t_1]$  que permite la retrodicción es más delicada, pues asigna un valor para la variable medida aún cuando el sistema se encuentre en una superposición de estados de dicha variable. Entendemos

---

que esa asignación, es una asignación "efectiva" porque tiene sentido en tanto sea realizada con el correspondiente valor de la variable indicadora luego de la medición. Esto no hace más que expresar el entrelazamiento que determina la medición y es evidenciado por el hecho de que en historias contextuales el condicional que define la relación entre las propiedades antecedente y consecuente, es determinado por la misma evolución temporal que define dichas propiedades.

Asimismo, dentro del proceso de medición, hemos sido capaces de reproducir el resultado previo de la deducción del colapso. Esto fue logrado considerando mediciones consecutivas sobre el sistema. La distribución de probabilidad para los valores de la segunda medición condicional a determinado resultado en la primera, puede ser calculada con las expresiones usuales para las probabilidades condicionales, y coincide con la calculada por el postulado del colapso, pero solo para mediciones ideales.

Con el formalismo de historias contextuales hemos recobrado este resultado calculando probabilidades definidas sobre las historias posibles que incluyan propiedades vinculadas a la primera y segunda medición.

Por último, aplicamos el formalismo a ejemplos conocidos por evidenciar particularidades cuánticas como son la doble rendija y el interferómetro de Mach-Zehnder. En el primero, el problema de la interferencia es manifestado al nivel de la estructura lógica por la imposibilidad de determinar historias que vinculen propiedades relacionadas con el pasaje de las partículas por uno u otra rendija y las propiedades de registro en la pantalla.

El segundo ejemplo, un argumento similar, impide determinar por cual rama viajó el fotón de acuerdo a la configuración experimental de los espejos. Como al cambiar el arreglo experimental, cambiamos la particular evolución temporal que determina o no la existencia de un contexto de historias, podemos decir que este formalismo permite una formalización del llamado principio de complementariedad.

Estos ejemplos presentan aplicaciones del formalismo, que si bien pueden considerarse iniciales, ponen de manifiesto características que permiten proyectar sus alcances.

Ya hemos mencionado que el formalismo de historias contextuales es elaborado con un mínimo de nociones agregadas al formalismo usual de la teoría cuántica. Por consiguiente, el mismo queda presentado sin ninguna interpretación particular de la teoría. Pues bien, parte de las expectativas presentes es encuadrar el formalismo dentro de una particular interpretación de la mecánica cuántica.

---

Como fue introducido, el lenguaje de clases en el que se basa el formalismo de historias contextuales, versa sobre propiedades más que sobre proposiciones. Como las propiedades refieren a cosas que no necesariamente son verificadas, es decir permiten describir posibilidades independientemente que sean realizadas, es de esperar que el formalismo ajuste naturalmente a una interpretación modal de la mecánica cuántica. Algunas implicancias de esta consideración están siendo analizadas como parte de la investigación presente.

Asimismo, en virtud de la presentación de un lenguaje común que introduce la noción de clases para describir propiedades ya sean clásicas o cuánticas, consideramos que el formalismo de historias contextuales puede ser de gran utilidad en descripciones que involucren el límite clásico dentro de algún mecanismo de decoherencia. Concretamente estamos interesados en una aplicación sobre el proceso de medición que contemple el límite clásico dentro del mecanismo de decoherencia inducida por el entorno. Resultados preliminares han sido obtenidos a este respecto pero serán plasmados formalmente en los próximos trabajos.

# Apéndice A

## Los axiomas de la probabilidad para propiedades clásicas

El axioma  $k_1$ ) es consecuencia directa de la definición de probabilidad de clases dada por la ecuación (3.15) y de la no negatividad de la densidad de probabilidad.

El axioma  $k_2$ ) es consecuencia de la condición de normalización requerida para la densidad de probabilidad

$$\int_{\Gamma} \rho(x) dx = 1.$$

Finalmente el axioma  $k_3$ ) de aditividad de las probabilidades se obtiene de considerar que si  $C \cap C' = 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(p_C \vee p_{C'}) &= \int_{C \cup C'} \rho(x) dx \\ &= \int_C \rho(x) dx + \int_{C'} \rho(x) dx = \mathcal{P}(p_C) + \mathcal{P}(p_{C'}), \end{aligned}$$

lo que demuestra el axioma  $k_3$ ).

# Apéndice B

## Los axiomas de la probabilidad para propiedades cuánticas

La regla de Born para la probabilidad cumple el axioma  $k_1$ ) como consecuencia directa de que el operador estadístico es autoadjunto y definido positivo.

El axioma  $k_2$ ) se cumple como consecuencia de que por normalización, el operador estadístico es de traza igual a uno.

El axioma  $k_3$ ) se demuestra teniendo en cuenta que si  $p_a$  y  $p_b$  son un par de propiedades excluyentes dentro de un contexto

$$p_a \wedge p_b = 0 \quad \Rightarrow \quad \Pi_a \mathcal{H} \cap \Pi_b \mathcal{H} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Pi_a \Pi_b = 0$$

por lo que resulta que los proyectores  $\Pi_a$  y  $\Pi_b$  generan subespacios ortogonales y por lo tanto, de acuerdo a la formula para el proyector de una disyunción, tenemos que  $\Pi_{a \vee b} = \Pi_a + \Pi_b$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(p_a \vee p_b) &= Tr[\rho \Pi_{a \vee b}] \\ &= Tr[\rho(\Pi_a + \Pi_b)] \\ &= Tr[\rho \Pi_a] + Tr[\rho \Pi_b] = \mathcal{P}(p_a) + \mathcal{P}(p_b), \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

lo cual demuestra el axioma  $k_3$ ).

Para la formula de la probabilidad condicional

$$\mathcal{P}(p_a/p_b) \equiv \frac{\mathcal{P}(p_a \wedge p_b)}{\mathcal{P}(p_b)},$$

---

calculada mediante la regla de Born, es evidente que cumple con el axioma  $k_1$ ), porque lo cumple la regla de Born. Además resulta

$$\mathcal{P}(\Omega/p_b) = \frac{\mathcal{P}(\Omega \wedge p_b)}{\mathcal{P}(p_b)} = \frac{\mathcal{P}(p_b)}{\mathcal{P}(p_b)} = 1,$$

donde  $\Omega$  es la propiedad universal. Esto demuestra la propiedad  $k_2$ ).

Para la propiedad  $k_3$ ) consideremos dos propiedades excluyentes  $p_a$  y  $p_c$  ( $p_a \wedge p_c = 0$ ), por lo que los correspondientes proyectores  $\Pi_a$  y  $\Pi_c$  generaran subespacios ortogonales. Si usamos la propiedad distributiva del reticulado de propiedades tendremos entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(p_a \vee p_c/p_b) &= \frac{\mathcal{P}(\{p_a \vee p_c\} \wedge p_b)}{\mathcal{P}(p_b)} \\ &= \frac{\mathcal{P}(p_a \wedge p_b) + \mathcal{P}(p_c \wedge p_b)}{\mathcal{P}(p_b)} \\ &= \mathcal{P}(p_a/p_b) + \mathcal{P}(p_c/p_b), \end{aligned} \tag{B.2}$$

lo cual demuestra la propiedad  $k_3$ ).

## Apéndice C

# Los axiomas de la probabilidad para clases de equivalencia clásicas

Como la probabilidad de una clase de equivalencia clásica, es la probabilidad de uno de sus representantes calculada con la formula (3.4), el axioma  $k_1$ ) se cumple trivialmente para clases clásicas, porque lo cumple la mencionada formula. La misma consideración vale para el axioma  $k_2$ ).

El axioma  $k_3$ ) de aditividad de las probabilidades se obtiene de considerar que si

$$\begin{aligned} [C_1, t_1] \wedge [C_2, t_2] = 0 & \Rightarrow [C_1^0, t_0] \wedge [C_2^0, t_0] = 0 \\ [C_1^0 \cap C_2^0, t_0] = 0 & \Rightarrow C_1^0 \cap C_2^0 = 0, \end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \mathcal{P}([C_1, t_1] \vee [C_2, t_2]) &= \mathcal{P}([C_1^0, t_0] \vee [C_2^0, t_0]) \\ &= \mathcal{P}([C_1^0 \cup C_2^0, t_0]) \\ &= \int_{C_1^0 \cup C_2^0} \rho_{t_0}(x) dx \\ &= \int_{C_1^0} \rho_{t_0}(x) dx + \int_{C_2^0} \rho_{t_0}(x) dx \\ &= \mathcal{P}([C_1^0, t_0]) + \mathcal{P}([C_2^0, t_0]) = \mathcal{P}([C_1, t_1]) + \mathcal{P}([C_2, t_2]), \end{aligned}$$

lo que demuestra el axioma  $k_3$ ).

## Apéndice D

# Los axiomas de la probabilidad para clases de equivalencia cuánticas

Como la probabilidad de una clase de equivalencia cuántica, es la probabilidad de uno de sus representantes calculada con la formula de Born, el axioma  $k_1$ ) se cumple directamente para clases cuánticas, porque lo cumple la mencionada formula. La misma consideración vale para el axioma  $k_2$ ).

El axioma  $k_3$ ) de aditividad de las probabilidades se obtiene de considerar que si  $[\Pi_1, t_1]$  y  $[\Pi_2, t_2]$  son clases de propiedades excluyentes dentro de un contexto generalizado, y por consiguiente  $\Pi_1^0$  y  $\Pi_2^0$  lo son en el contexto representante al tiempo  $t_0$ , entonces

$$\begin{aligned} [\Pi_1, t_1] \wedge [\Pi_2, t_2] = 0 & \Rightarrow [\Pi_1^0, t_0] \wedge [\Pi_2^0, t_0] = 0 \\ & [\Pi_1^0 \mathcal{H} \cap \Pi_2^0 \mathcal{H}, t_0] = 0 \Rightarrow \Pi_1^0 \Pi_2^0 = 0, \end{aligned}$$

por lo que  $\Pi_{1\vee 2}^0 = \Pi_1^0 + \Pi_2^0$ . Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{P}([\Pi_1, t_1] \vee [\Pi_2, t_2]) &= \mathcal{P}([\Pi_1^0, t_0] \vee [\Pi_2^0, t_0]) \\ &= \mathcal{P}([\Pi_{1\vee 2}^0, t_0]) \\ &= Tr[\rho_0 \Pi_{1\vee 2}^0] \\ &= Tr[\rho_0 (\Pi_1^0 + \Pi_2^0)] \\ &= Tr[\rho_0 \Pi_1^0] + Tr[\rho_0 \Pi_2^0] \\ &= \mathcal{P}([\Pi_1^0, t_0]) + \mathcal{P}([\Pi_2^0, t_0]) = \mathcal{P}([\Pi_1, t_1]) + \mathcal{P}([\Pi_2, t_2]), \end{aligned}$$

lo que demuestra el axioma  $k_3$ ).

## Apéndice E

# Evolución temporal de la densidad de probabilidad en la teoría clásica

Si se requiere que la probabilidad correspondiente a la celda  $C$  en el tiempo  $t$  sea igual a la probabilidad de la celda  $C = S_{t',t}(C)$  al tiempo  $t'$ , se debe cumplir

$$\int_C \rho_t(x) dx = \int_{S_{t',t}(C)} \rho_{t'}(x) dx. \quad (\text{E.1})$$

Podemos reescribir la integral del primer miembro haciendo el cambio de variables  $x' = S_{t',t}(x)$

$$\int_C \rho_t(x) dx = \int_{S_{t',t}(C)} \left| \frac{\partial S_{t',t}^{-1}(x)}{\partial x'} \right| \rho_t(S_{t',t}^{-1}(x')) dx'. \quad (\text{E.2})$$

Teniendo en cuenta que las ecuaciones (E.1) y (E.2) deben verificarse para toda celda  $C$  del espacio de estados  $\Gamma$ , se deduce que

$$\rho_{t'}(x) = \left| \frac{\partial S_{t',t}^{-1}(x)}{\partial x} \right| \rho_t(S_{t',t}^{-1}(x)).$$

Esta ecuación permite calcular la densidad de probabilidad al tiempo  $t'$  si se conoce la densidad de probabilidad al tiempo  $t$ .

## Apéndice F

### Condicion de consistencia en el ejemplo de spin 1/2

Como cada proyector  $\Pi_{n\pm} = |n\pm\rangle\langle n\pm|$  asociado al estado puro de spin en la dirección  $\hat{\mathbf{n}}$  puede ser representado por  $\frac{1}{2}(1 \pm \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}})$ , donde  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  está formado con las matrices de Pauli, entonces

$$\begin{aligned}\Pi_{n_1+} &= |n_1+\rangle\langle +n_1| = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1), \\ \Pi_{n_1-} &= |n_1-\rangle\langle -n_1| = \frac{1}{2}(1 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1), \\ \Pi_{z-} &= |z-\rangle\langle -z| = \frac{1}{2}(1 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{z}}),\end{aligned}$$

y siendo  $\rho_0 = |x+\rangle\langle +x|$ , entonces la condición de consistencia dada por la ecuación (4.20) puede expresarse como

$$\begin{aligned}Tr[\Pi_{n_1+} \rho_0 \Pi_{n_1-} \Pi_{z-}] \\ = Tr\left[\frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1) \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) \frac{1}{2}(1 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1) \frac{1}{2}(1 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{z}})\right].\end{aligned}$$

Haciendo uso de la identidad

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}') = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' + i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{n}'),$$

y el hecho de que  $Tr[\sigma_i] = 0$ , entonces

$$\begin{aligned}
Tr[\Pi_{n_1+\rho_0}\Pi_{n_1-\Pi_{z-}}] &= \frac{1}{16}Tr\left[\left(1 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_1 + \hat{\boldsymbol{n}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{x}} + i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\boldsymbol{n}}_1 \times \hat{\boldsymbol{x}})\right)\right. \\
&\quad \left.\left(1 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_2 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_1 + \hat{\boldsymbol{n}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{z}} + i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\boldsymbol{n}}_1 \times \hat{\boldsymbol{z}})\right)\right] \\
&= \frac{1}{16}Tr\left[\hat{\boldsymbol{n}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{z}} + \hat{\boldsymbol{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_1 - i \hat{\boldsymbol{x}} \cdot (\hat{\boldsymbol{n}}_1 \times \hat{\boldsymbol{z}}) + \hat{\boldsymbol{n}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{z}}\right. \\
&\quad \left.- i \hat{\boldsymbol{n}}_1 \cdot (\hat{\boldsymbol{n}}_1 \times \hat{\boldsymbol{z}}) + \hat{\boldsymbol{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_1 + i \hat{\boldsymbol{z}} \cdot (\hat{\boldsymbol{n}}_1 \times \hat{\boldsymbol{x}})\right. \\
&\quad \left.- i \hat{\boldsymbol{n}}_1 \cdot (\hat{\boldsymbol{n}}_1 \times \hat{\boldsymbol{x}}) + (\hat{\boldsymbol{n}}_1 \times \hat{\boldsymbol{x}}) \cdot (\hat{\boldsymbol{n}}_1 \times \hat{\boldsymbol{z}})\right] = 0.
\end{aligned}$$

Simplificando llegamos a la condición dada por la ecuación (4.21)

$$(\boldsymbol{n}_1 \times \hat{\boldsymbol{x}}) \cdot (\boldsymbol{n}_1 \times \hat{\boldsymbol{z}}) + i \hat{\boldsymbol{x}} \cdot (\boldsymbol{n}_1 \times \hat{\boldsymbol{z}}) = 0.$$

# Bibliografía

- [1] J. von Neumann, *Mathematical foundations of quantum mechanics*, Princeton Univ. Press, (1955).
- [2] G. Boole, *An Investigation Into the Laws of Thought, On Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*, (1854).
- [3] D.J. Foulis, *A Half Century of Quantum Logic What Have we Learned?, Einstein Meets Magritte Conference, Belgium*, (1995).
- [4] S. Kochen, E.P. Specker, *The problem of hidden variables in quantum mechanics*, *Journal of Mathematics and Mechanics*, **17**, pp. 59-87, (1967).
- [5] A. Peres, H. Zurek, *Is quantum theory universally valid?*, *Journal of Physics*, **50**, pp. 807-810, (1982).
- [6] C. Piron, *Foundations of Quantum Physics Mathematical Physics Monograph Series*, A. Wightman (ed.), W.A. Benjamin, Reading, MA, (1976).
- [7] S. P. Gudder, *Quantum Probability*, Academic Press, San Diego, (1988).
- [8] P. Pták, S. Pulmannová, *Orthomodular Structures as Quantum Logics*, Kluwer, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1991).
- [9] H. Putnam, "Is Logic Empirical?" *Boston Studies in the Philosophy of Science*, Vol. 5, eds. Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky, Dordrecht: D. Reidel, (1968), pp. 216-241. Repr. como "The Logic of Quantum Mechanics" in *Mathematics, Matter and Method*, pp. 174-197, (1975).
- [10] P. Mittelstaedt, *The Interpretation of Quantum Mechanics and The Measurement Process*, Cambridge University, Press, (1998).

- [11] G. Lüders, Über die Zustandsänderung durch den Messprozess, *Ann. Phys. Lpz.*, **8**, 322, (1951).
- [12] M. Schlosshauer, Decoherence, the Measurement Problem, and Interpretations of Quantum Mechanics, *Reviews of Modern Physics*, **76**, pp. 1267-1305, (2004).
- [13] R. Griffiths, R. Omnès, Consistent histories and quantum measurements, *Physics Today*, **52**, pp. 26-31, (1999).
- [14] R. Griffiths, Probabilities and Quantum Reality: Are There Correlata?, *Foundations of Physics*, **33**, pp. 1423-1459, (2002).
- [15] M. Scully, R. Shea, State reduction in quantum mechanics: A calculational example, *Physics Reports*, **43**, pp. 485-498, (1978).
- [16] W. H. Zurek, Pointer Basis of Quantum Apparatus: Into What Mixture does the Wave Packet Collapse?, *Physical Review D*, **24**, pp. 1516-1525, (1981).
- [17] W. H. Zurek, Environment-Induced Superselection Rules, *Physical Review D*, **26**, pp. 1862-1880, (1982).
- [18] W. H. Zurek, Decoherence and the Transition from Quantum to Classical, *Physics Today*, **44**, pp. 36-44, (1991).
- [19] W. H. Zurek, Decoherence, Einselection, and the Quantum Origins of the Classical, *Reviews of Modern Physics*, **75**, pp. 715-776, (2003).
- [20] W. H. Zurek, J. P. Paz, Environment-Induced Decoherence and the Transition from Quantum to Classical, *Lecture Notes in Physics*, Vol. 587, pp. 77-148, (2002).
- [21] W. H. Zurek, Decoherence and the Transition from Quantum to Classical-Revisited, *Progress in Mathematical Physics*, Vol. 48, pp. 1-31, (2007).
- [22] G. Sewell, On the Mathematical Structure of Quantum Measurement Theory, *Reports on Mathematical Physics*, **56**, pp. 271-290, (2005).
- [23] E. Schmidt, *Math. ann.* **63**, pp.433-76, (1907).

- [24] N. G. Van Kampen, Ten theorems about quantum mechanical measurements, *Physica A*, **153**, pp. 97-113, (1998).
- [25] G. Emch, Coarse-graining in Liouville Space an master equation, *Helv. Phys. Act*, **37**, (1964).
- [26] A. Peres, *Quantum theory: concepts and methods*, Kluwer, Dordrecht (1993).
- [27] J. Bub, *Interpreting the Quantum World*, Cambridge University, Press, (1997).
- [28] L. Ballentine, *Quantum mechanics. A modern development*. World Scientific, Singapore (1998).
- [29] W. M. de Muynck, *Foundations of quantum mechanics, an empiricist approach*, Kluwer, Dordrecht (2002).
- [30] A. Peres, Can we undo quantum measurements? , *Phys. Rev. D* **22**, pp. 879-883, (1980).
- [31] A. Peres, *Foundations of Physics*, **14**, 1131, (1984).
- [32] A. Peres, Classical interventions in quantum systems. I. The measuring process, *Physical Review A*, **61**, (2000).
- [33] L. E. Ballentine, *Am. J. Phys.* **54**, 883, (1986).
- [34] L. E. Ballentine, *Foundations of Physics*, **20**, 1329, (1990).
- [35] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press (2000).
- [36] D. W. Cohen, *An introduction to Hilbert space and quantum logic*, Springer-Verlag, New York (1989).
- [37] R. Feynmann, R. Leighton, M. Sands, *The Feynmann Lectures on Physics, Quantum Mechanics*. Addison-Wesley (1965).
- [38] G. Birkhoff, J. von Neumann, The logic of quantum mechanics, *Annals of Math.* **37**, pp. 823-843, (1936).

- [39] M. Dalla Chiara, R. Giuntini and R. Greechie, Reasoning in Quantum Theory. Sharp and Unsharp Quantum Logics. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (2004).
- [40] P. Mittelstaedt, Quantum Logic, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht (1978).
- [41] R. Griffiths, J. Stat. Phys. **36**, 219 (1984).
- [42] R. Omnès, Annals of Physics, **201**, 354-447 (1990).
- [43] R. Omnès, Consistent interpretations of quantum mechanics, Reviews of Modern Physics, **64**, pp. 339-382, (1992).
- [44] R. Omnès, J. Math. Phys. **38**, 697, (1997).
- [45] R. Omnès, Phys. Rev. **A 56**, pp. 3383-3393, (1997).
- [46] R. Omnès, The interpretation of quantum mechanics, Princeton University Press, (1994).
- [47] R. Omnès, Understanding Quantum Mechanics, Princeton University Press, (1999).
- [48] R. Omnès, J. Stat. Phys. **53**, 893, (1988).
- [49] R. Omnès, Phys. Rev. **A 65**, pp. 052119.1-052119.18, (2002).
- [50] E.P. Wigner, Phys. Rev. **40**, 749, (1932).
- [51] H. Weyl, Bull. Amer. Math. Soc. **56**, 115, (1950).
- [52] M. Gell-Mann, J. B. Hartle, Complexity, Entropy and the Physics of Information, W. Zurek ed., Addison Wesley, Reading, Pennsylvania (1990).
- [53] R. Laura, M. Castagnino, Phys Rev. E, **57**, pp. 3948-3961, (1998).
- [54] M. Castagnino, R. Id Betan, R. Laura and R. Liotta. J. Phys. A: Math. Gen. **35**, 6055 (2002).
- [55] R. Laura, L. Vanni, Conditional probabilities and collapse in quantum measurements, International Journal of Theoretical Physics, **47**, pp. 2382-2392, (2008).

- [56] R. Laura, L. Vanni, Time Translation of Quantum Properties, *Foundations of Physics*, **39**, no. 2, pp. 160-173, (2008).
- [57] R. Laura, L. Vanni, Probabilidades condicionales y colapso en las mediciones cuánticas, *Filosofia e Historia da Ciência no Cone Sul (AFHIC)*, Seleção de Trabalhos do 5º Encontro, Florianópolis, Brasil, pp. 383-391 (2008).
- [58] M. Castagnino, O. Lombardi, L. Vanni, Hacia una interpretación ontológicamente pluralista de la mecánica cuántica, *Filosofia e Historia da Ciência no Cone Sul (AFHIC)*, Seleção de Trabalhos do 5º Encontro, Florianópolis, Brasil, pp. 321-330 (2008).
- [59] N. Bohr, *New Theories in Physics*, International Institute of Intellectual Cooperation, Paris, (1939).
- [60] W. M. de Muynck, Towards a Neo-Copenhagen Interpretation of Quantum Mechanics, *Foundations of physics*, **34**, no. 5, pp. 717-770, (2004).
- [61] E. Joos, H. D. Zeh, C. Kiefer, D. Giulini, J. Kupsch, I. O. Stamatescu, *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory*. Springer (2003).
- [62] R. Laura y L. Vanni, Relaciones entre la lógica cuántica y la lógica clásica, *Epistemología e Historia de la Ciencia*, Selección de Trabajos de las XVII Jornadas, L. Salvatico y P. García eds., Univ. Nac. de Córdoba, Argentina (2007).
- [63] O. Pessoa, *Conceitos de Física Quântica*, Editora Livraria da Física, Sao Paula, (2005).