Biblioteca Digital FCEN-UBA

BIBLIOTECA CENTRAL ELOIR

Tesis Doctoral

Decoherencia y simulaciones cuánticas: ambientes con dinámica propia

Cormick, M. Cecilia

2009

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Cormick, M. Cecilia. (2009). Decoherencia y simulaciones cuánticas: ambientes con dinámica propia. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

Cita tipo Chicago:

Cormick, M. Cecilia. "Decoherencia y simulaciones cuánticas: ambientes con dinámica propia". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2009.

EXACTAS Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA Universidad de Buenos Aires

Dirección: Biblioteca Central Dr. Luis F. Leloir, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA - Tel. (++54 +11) 4789-9293

Contacto: digital@bl.fcen.uba.ar











UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

Decoherencia y simulaciones cuánticas: ambientes con dinámica propia

Trabajo de Tesis para optar por el título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el Área Ciencias Físicas

por M. Cecilia Cormick

Director de Tesis: Juan Pablo Paz Lugar de Trabajo: Depto. de Física, FCEyN, UBA

Octubre de 2009

Resumen

Esta tesis analiza la pérdida de coherencia de un sistema cuántico acoplado a un ambiente con dinámica propia, enfocando el estudio en los efectos relacionados con la presencia o ausencia de correlaciones espaciales y temporales en el ambiente. En una primera parte se considera un modelo de decoherencia por cadenas de espines, prestando especial atención a las consecuencias de una transición de fase del entorno. En la segunda parte se proponen experiencias de decoherencia controlada utilizando iones atrapados. En ambas partes, los modelos examinados permiten explorar los efectos de la localidad del acoplamiento entre sistema y entorno, y la evolución del entrelazamiento entre subsistemas en relación con las características del ambiente.

Palabras clave: decoherencia, correlaciones, simulación cuántica

Decoherence and quantum simulations of dynamic environments

Abstract

This thesis analyses the loss of coherence of a quantum system coupled to a dynamic environment. The work is focused on the manifestations of the presence or absence of spatial and temporal correlations in the environment. In a first part a model of decoherence induced by spin chains is studied, paying special attention to the consequences of environmental phase transitions. The second part is devoted to the elaboration of proposals for experiences of controlled decoherence using trapped ions. In both parts, the models considered allow for the exploration of the effects related to the locality of the coupling between system and environment, and the analysis of the evolution of entanglement between subsystems in connection with the features of the environment.

Key words: decoherence, correlations, quantum simulations

Índice general

Ι	Ma	terial	preliminar	1
1.	Intr	oducc	ión	3
2.	Dec	oherei	ncia	9
	2.1.	Esque	ma básico de decoherencia	10
	2.2.	Decoh	erencia por ambientes de espines	12
		2.2.1.	Baño de espines no interactuantes	12
		2.2.2.	Entornos dados por cadenas de espines	13
		2.2.3.	El rol de las interacciones en el entorno	15
	2.3.	Movin	niento Browniano cuántico	16
3.	Esta	ados c	uánticos gaussianos	19
	3.1.	Estade	os gaussianos bosónicos	21
		3.1.1.	Descripción de los estados gaussianos bosónicos	21
		3.1.2.	Evolución temporal	23
	3.2.	Estade	os gaussianos fermiónicos	25
		3.2.1.	Descripción de los estados gaussianos fermiónicos	25
		3.2.2.	Diagonalización de Hamiltonianos cuadráticos	27
		3.2.3.	Evolución temporal	27
4.	Mai	nipula	ción de iones atrapados	29
	4.1.	Algun	as generalidades sobre trampas de iones	29
	4.2.	Proces	samiento cuántico en trampas de iones	31
		4.2.1.	El Hamiltoniano básico	31
		4.2.2.	Elección de los iones	33
		4.2.3.	Manipulación de los estados internos	35
	4.3.	Decoh	erencia en trampas de iones	36
		4.3.1.	Decoherencia de los estados internos	36
		4.3.2.	Imperfecciones en el control de los iones	37
		4.3.3.	Coherencia del estado de movimiento	38
	4.4.	Grado	s de libertad transversales	38
	4.5.	Enfria	umiento de la cadena de iones	40
	4.6.	Simula	aciones cuánticas en trampas de iones	41

II Decoherencia por cadenas de espines

5.	Dec	oherencia en el modelo de un espín central: estudio del			
	régi	men universal	49		
	5.1.	El modelo: un qubit central interactuando con una cadena de espines	50		
	5.2.	Transformación de Jordan-Wigner y cálculo del eco de Loschmidt	51		
	5.3. El régimen universal gaussiano				
	5.4.	Un régimen universal no gaussiano	57		
	5.5.	${}_{\dot{c}}{\rm Cuál}$ es la relación entre el régimen universal y la transición de			
		fase?	59		
6.	Dec	oherencia de estados de Bell por una cadena de espines	65		
	6.1.	Un modelo de decoherencia para dos qubits	66		
		6.1.1. Descripción del sistema, su ambiente y el acoplamiento			
		entre ambos	66		
		6.1.2. Expresión general para el eco de Loschmidt	67		
		6.1.3. Decoherencia y desentrelazamiento	69		
		6.1.4. Dependencia de la decoherencia con la distancia entre sub-			
		sistemas \ldots	70		
	6.2.	Resultados: el caso de acoplamientos débiles	70		
	6.3.	Resultados: acoplamiento fuerte	75		
	6.4.	Un modelo con acoplamiento suavemente dependiente de la distancia	78		

III Propuestas para la simulación de procesos de decoherencia 85

7.	Dec	oherencia y dinámica del entrelazamiento	87
	7.1.	Decoherencia de dos osciladores igualmente acoplados a un am-	
		biente común	88
		7.1.1. Entrelazamiento en el estado asintótico	90
	7.2.	Implementación en una trampa de iones: Hamiltoniano del sistema	
		y acoplamiento láser	93
	7.3.	Entrelazamiento en el estado asintótico	97
	7.4.	Diagrama de fases en función del estado inicial	98
	7.5.	Detección del estado final	101
	7.6.	Comentarios finales	104
8.	Un	modelo local de decoherencia por un baño de osciladores	105
	8.1.	El modelo del colchón de resortes	106
	8.2. La funcional de influencia		107
			108
		8.3.1. Resolución del problema	108
		8.3.2. Resultados: decoherencia en función de la distancia y del	
		tiempo	111

	8.4.	Simula	ción del modelo en una trampa de iones	112
		8.4.1.	Decoherencia por campos externos fluctuantes	113
		8.4.2.	Comparación de la decoherencia en los dos problemas	116
9.	Con	clusio	nes	119
\mathbf{A}	péndi	ice: Pr	oducto interno entre dos estados gaussianos fermiónic	os
$\mathbf{A}_{]}$	péndi pure	ice: Pro	oducto interno entre dos estados gaussianos fermiónic	${f os}$ 123
	péndi puro grade	ice: Pro os ecimier	oducto interno entre dos estados gaussianos fermiónic ntos	os 123 127

Parte I Material preliminar

Capítulo 1 Introducción

A principios de los años ochenta, Richard Feynman propuso la utilización de sistemas cuánticos controlables como instrumentos para reproducir o simular la dinámica de otros sistemas cuánticos demasiado complejos de tratar por medios más tradicionales [1]. La idea de explotar la mecánica cuántica para llevar adelante ciertos tipos de cómputos cobró fuerza a mediados de los noventa, tras la aparición del algoritmo de Deustch-Jozsa [2], el primer ejemplo de una tarea que puede resolverse en forma más eficiente apelando a la mecánica cuántica, y más adelante gracias a los algoritmos de factorización de Shor [3] y de búsqueda de Grover [4, 5]. Estos algoritmos señalaron el nacimiento de la computación cuántica como disciplina. Pero además motivaron la expansión y revitalización del área más general de la información cuántica [6], que incluye el análisis de otros tipos de protocolos, como la distribución cuántica de claves secretas, y de aspectos fundamentales de la mecánica cuántica, como el entrelazamiento, la contextualidad, la decoherencia, etc., objetos de estudio y debate desde hace ya muchos años.

Todo este desarrollo teórico dio impulso a un avance tecnológico impresionante orientado al control de una variedad de sistemas físicos que podrían funcionar como procesadores cuánticos [6]. En este contexto se ha logrado llevar a cabo experiencias que resultaban impensables no tanto tiempo atrás, como la teleportación de un estado de un fotón a través del Danubio [7], la realización de seis pasos de una caminata cuántica al azar con un átomo en una red óptica [8], la medición del cociente entre dos frecuencias atómicas con una precisión de 10^{-17} [9], la creación determinística de entrelazamiento de sistemas masivos a distancias de décimas de milímetro [10], la observación de "saltos cuánticos" correspondientes a la aparición y desaparición de fotones en cavidades [11], etc.

Pero si bien algunos protocolos cuánticos como los de distribución de claves ya son tecnología comercial [12], los requisitos para llevar a cabo computación cuántica que realmente pueda sobrepasar la capacidad de las computadoras clásicas actuales son terriblemente exigentes. Cada uno de los sistemas físicos en los que podría implementarse una computadora cuántica tiene algunas fortalezas pero también puntos débiles, relacionados por ejemplo con dificultades para controlar más que unos pocos elementos, o tiempos de coherencia demasiado cortos a comparación de los tiempos necesarios para manipular los sistemas.

En cualquier caso, la computación cuántica estimuló el alcance de un alto nivel de control de sistemas cuánticos en los laboratorios, y al mismo tiempo un renovado análisis teórico de los fundamentos de la mecánica cuántica. Ambos aspectos hacen posible, hoy en día, analizar y poner a prueba experimentalmente las predicciones de la mecánica cuántica en relación con fenómenos como el entrelazamiento y la no-localidad [13], la contextualidad [14], o la decoherencia y la transición cuántico-clásica [15].

La decoherencia recibió especial atención dado que resulta de interés, en primer lugar, desde la perspectiva de los fundamentos de la mecánica cuántica, y en segundo lugar, desde la necesidad práctica de minimizar (o controlar) los efectos inducidos por el entorno a lo largo de un cómputo cuántico. Algunas posibles estrategias para lidiar con este problema tienen que ver con la elección apropiada del sistema, la implementación de técnicas de corrección cuántica de errores [16, 17, 18], o la protección de la información en subespacios libres de decoherencia [19].

En esta tesis se estudia la decoherencia desde dos enfoques distintos. En una primera parte, se analizan los efectos de la decoherencia producida por entornos con dinámica propia y correlaciones, tomando como ambiente un baño de espines. Posteriormente, se elaboran propuestas para la simulación de distintos modelos de decoherencia en experimentos realizables con iones atrapados. En ambas partes resulta central la consideración de fenómenos no triviales presentes en el proceso de decoherencia, incluyendo modelos no-Markovianos (es decir, con memoria), con correlaciones espaciales en el ambiente, con interacciones intraambientales, etc.

La tesis se encuentra dividida en tres grandes secciones. En la primera, que abarca los capítulos 2, 3 y 4, se presenta una introducción a temas generales que atraviesan el contenido general de la tesis. En el capítulo 2 se describe en términos generales el proceso de decoherencia, tratando en particular algunos modelos típicos para entornos correspondientes a baños de osciladores y de espines. El capítulo 3 se dedica a la descripción de los estados gaussianos (bosónicos y fermiónicos), un tipo de estados de sistemas cuánticos que puede tratarse eficientemente, lo cual se explotará permanentemente en los capítulos subsiguientes. En el capítulo 4, por otra parte, se hace una introducción a la física de los sistemas de iones atrapados.

La segunda parte de la tesis abarca los capítulos 5 y 6 y allí se analizan las propiedades del proceso de decoherencia para sistemas cuánticos acoplados con cadenas de espines. El estudio de la decoherencia causada por un ambiente con dinámica propia no trivial ha sido de especial interés en los últimos años, incluyendo por ejemplo entornos con dinámicas no lineales y caóticas, o con transiciones de fase [20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28]. Este tema presenta aspectos intrincados relacionados con el aumento o disminución de la decoherencia debido a la complejidad del ambiente, y no existen hasta el momento conclusiones claras sino más bien ejemplos de distintos tipos de comportamiento según las propiedades específicas de cada modelo. Algunas características esenciales a tener en cuenta son, por ejemplo, el tamaño efectivo del espacio de Hilbert y el grado de entrelazamiento que puede generarse dentro del entorno (que puede limitar la generación de entrelazamiento entre éste y el sistema).

Por otra parte, el estudio de ambientes modelados como baños de espines ha sido objeto de mucha atención [29, 22, 30, 25, 23, 31, 27, 26] dado que en algunas implementaciones este tipo de entorno puede proveer un modelo más realista del proceso de decoherencia que el típico ambiente de osciladores armónicos. Por ejemplo, cuando se almacena información cuántica en el espín nuclear de ciertos átomos, manipulándolo por medio de técnicas de resonancia magnética [32]. Otras situaciones en que los ambientes de espines constituyen un buen modelo lo proporcionan los sistemas de estado sólido como los puntos cuánticos [33], imanes moleculares, qubits semiconductores y fullerenos dopados (ver [34] y las referencias en este trabajo). Una razón adicional para el estudio de este tema es que los ambientes de espines proporcionan algunos modelos de entornos con dinámica propia no trivial que pueden ser resueltos analíticamente, o numéricamente en forma eficiente.

Como fue señalado en [24], resulta interesante considerar la pérdida de coherencia desde una perspectiva diferente: se puede utilizar el sistema cuántico como un medio para acceder a las propiedades de su entorno. En el trabajo mencionado se propuso y analizó, como ejemplo de esta idea, la posibilidad de usar una partícula de espín 1/2 como detector de una transición de fase cuántica del entorno, dado por una cadena de espines con Hamiltoniano de Ising con campo transverso. En el artículo se conjetura que la transición de fase se manifiesta en ciertas propiedades "universales" del decaimiento de la coherencia. Esta propuesta se examinará en profundidad en el capítulo 5, estudiando la existencia y características del régimen "universal", y mostrando que las conclusiones en [24] no tienen validez general. Además de un análisis detallado de las propiedades del proceso de decoherencia en este modelo, se discutirá la conexión entre la universalidad y la existencia de una transición cuántica de fase en el entorno. La evidencia sugiere que, si bien esta última puede ser causante de la aparición de rasgos universales, la observación de estos rasgos no permite inferir la presencia de transiciones de fase.

El capítulo 6 se centra en la comprensión de la decoherencia en el caso de un sistema compuesto por subsistemas localmente acoplados a un entorno común que presenta correlaciones espaciales y efectos de memoria. La situación considerada es una variación de la estudiada en el capítulo anterior: se trata de un sistema de dos partículas, cada una acoplada a un sitio de una cadena de espines con Hamiltoniano tipo Ising o XY. Se propondrá un estado inicial en que los subsistemas se encuentran máximamente entrelazados y se estudiará la pérdida de entrelazamiento entre las dos partes debida al efecto del entorno. Este trabajo es una continuación natural de estudios previos que consideraban, por un lado, el caso de dos partículas interactuando uniformemente con la cadena-entorno [35], o el caso de una sola partícula interactuando localmente con la cadena de espines [25].

Los resultados obtenidos permiten analizar el modo en que el proceso de desentrelazamiento depende de la distancia entre los subsistemas, y la transición entre los límites en los que éstos interactúan con el mismo sitio o cuando están tan separados entre sí que sus ambientes efectivos son independientes. La longitud de correlación del entorno cumple un rol particularmente relevante, al proporcionar una escala espacial característica para la transición al límite de entornos independientes. Por otro lado, el proceso de decoherencia es cualitativamente diferente según la magnitud del acoplamiento entre sistema y ambiente. En particular, cuando este acoplamiento es fuerte pueden encontrarse situaciones en que se observan efectos de memoria que pueden interpretarse como interacciones efectivas entre los subsistemas mediadas por el ambiente. En este caso, la evolución puede exhibir fenómenos cuasiperiódicos de "muerte y resurrección" del entrelazamiento [36] con escalas temporales que dependen de la distancia entre subsistemas.

Finalmente, la tercera parte de la tesis comprende los capítulos 7 y 8. En ellos se elaboran propuestas para la implementación en trampas de iones de distintos modelos de decoherencia. La idea de utilizar un sistema cuántico para simular otro no es nueva: como ya se mencionó, fue sugerida por primera vez por Feynman [1], y posteriormente elaborada en mayor profundidad [37, 38, 39]. Existen además propuestas experimentales, y experimentos ya realizados, que involucran situaciones de decoherencia controlada de un registro cuántico [15, 40, 41]. Esta clase de experiencias puede por ejemplo ser de utilidad para poner a prueba distintas estrategias de control de errores [42, 43]. En cuanto a la elección de los iones atrapados como sistema físico concreto, éstos no sólo son particularmente apropiados para los modelos de decoherencia estudiados en esta tesis sino que constituyen uno de los simuladores cuánticos favoritos en la literatura. A modo de ejemplos concretos, existen propuestas recientes para la simulación cuántica de problemas de cosmología [44] y materia condensada [45] utilizando esta tecnología, y se ha reportado recientemente la realización experimental de la simulación de la ecuación de Dirac utilizando un ion atrapado [46].

El capítulo 7 considera un estudio experimental consistente en la reproducción de la dinámica asintótica para el entrelazamiento entre dos osciladores igualmente acoplados a un ambiente común. Este tema fue analizado en detalle en [47, 48]; en estos artículos se identifican tres comportamientos cualitativamente distintos para el estado del sistema a tiempos largos: un estado asintótico entrelazado, uno desentrelazado, o una situación final en que los subsistemas se entrelazan y desentrelazan periódicamente. En esta tesis se propone una implementación de un modelo similar utilizando tres iones atrapados en una trampa lineal: dos de estos iones constituyen los subsistemas y el tercero, acoplado a un láser, se utiliza para inducir decoherencia.

En el capítulo 8 se estudia un problema en que una partícula en una dimen-

sión espacial se encuentra localmente acoplada a un ambiente de osciladores [49]. Este modelo "del colchón de resortes" es una extensión del movimiento Browniano cuántico [50] que considera un ambiente con grados de libertad locales y un rango de acoplamiento finito de cada uno de ellos con el sistema. Como consecuencia, la decoherencia de un paquete de ondas deslocalizado sobre una cierta distancia exhibe saturación cuando esta distancia se vuelve mucho más grande que las escalas espaciales de la interacción con el entorno. En este trabajo se propone una posible simulación experimental para este modelo, también utilizando iones en una trampa lineal. En este caso, la fuente de decoherencia la proporciona un campo externo cuyas fluctuaciones controladas permiten reproducir el efecto de un baño térmico local a alta temperatura.

Los resultados relacionados con el régimen universal presentados en el capítulo 5 fueron publicados en [51]. El análisis de la decoherencia por acoplamiento local a una cadena de espines desarrollado en el capítulo 6 se encuentra publicado en [52]. La propuesta de simulación contenida en el capítulo 7 se encuentra en proceso de revisión editorial [53].

Capítulo 2

Decoherencia

Si bien no existe un único criterio respecto de qué quiere decir que un sistema se comporte clásicamente o un estado sea clásico, hay cierto consenso en torno de algunas características básicas. Dos de ellas, introducidas por Leggett y Garg [54], son el realismo macroscópico y la posibilidad de realizar una medición noinvasiva. Estas pautas establecen, respectivamente, que un objeto macroscópico que puede tomar varios estados macroscópicamente diferentes se encuentra, en cada momento dado, en un estado definido dentro de este conjunto, y que, al menos en principio, es posible determinar en cuál estado se encuentra sin alterar ni dicho estado ni la dinámica subsiguiente. La mecánica cuántica, según se argumenta en dicho artículo, se encuentra en contradicción con estos criterios. Existen por lo tanto numerosos intentos de explicar cómo un sistema cuántico pasa a comportarse clásicamente. De estas explicaciones, actualmente la más aceptada la proporciona la decoherencia, es decir la supresión de los efectos cuánticos a raíz de las interacciones incontrolables de un sistema con su entorno [55, 56, 57].

La idea esencial es que una superposición coherente de estados de un sistema cuántico deviene inevitablemente entrelazada con el ambiente. Sin embargo, la información a la que un observador tiene acceso corresponde únicamente al sistema y el estado de éste queda descripto por su matriz densidad reducida, obtenida trazando sobre el estado del entorno. El estado resultante del sistema puede entonces, bajo ciertas hipótesis, describirse como una superposición incoherente (es decir, una mezcla estadística) de un conjunto de estados que corresponden por lo tanto a los estados clásicamente observables. Esta explicación implica entonces la existencia de un cierto conjunto de estados "puntero", identificados con los estados clásicos, que son seleccionados en forma dinámica por el proceso de decoherencia, es decir por la interacción entre el sistema y su entorno. Cuáles son estos estados puntero puede depender no sólo del tipo de interacción entre sistema y entorno sino también de las dinámicas que cada uno de ellos obedezca por separado, y de la magnitud relativa de los distintos Hamiltonianos involucrados.

Existen sin embargo numerosas críticas a esta explicación [58, 59, 60], que cuestionan las hipótesis típicas a las que se acude (por ejemplo, en la elección

de estado inicial) o que no consideran resuelto el problema de la medición en tanto el proceso de decoherencia lleva al estado a una mezcla estadística de estados clásicos, en lugar de seleccionar sólo un estado final que pueda asociarse al resultado de una medición particular.

En los últimos años, el interés por el proceso de pérdida de coherencia se acrecentó por razones prácticas, relacionadas con la implementación de protocolos de información cuántica. La decoherencia fue estudiada en detalle en distintos sistemas físicos de interés, identificando los principales mecanismos responsables de la pérdida de pureza del sistema cuántico en cuestión y permitiendo diseñar distintas estrategias para combatirla. De esta forma se ha logrado alcanzar logros notables en términos de los tiempos de coherencia de los sistemas utilizados, la precisión de las operaciones aplicadas sobre ellos, etc. Es decir, más allá del debate en relación con su capacidad explicativa para el comportamiento clásico del universo, la decoherencia está siendo explorada en distintos sistemas concretos de laboratorio en forma detallada y minuciosa. Se han llevado a cabo por ejemplo varios experimentos de decoherencia controlada en distintas implementaciones [15, 40, 41]. Es posible además observar interferencias cuánticas en sistemas cada vez más "macroscópicos", como los condensados de Bose-Einstein [61], moléculas relativamente grandes [62], superconductores (SQUIDs) [63], una muestra de gas de cesio de 10^{12} átomos [64], etc.

Más allá del intenso esfuerzo abocado al análisis de situaciones específicas, hay también algunos modelos típicos relativamente sencillos y de amplia aplicabilidad, en los cuales es posible identificar el conjunto de estados punteros, las escalas de tiempo para la pérdida de coherencia, etc. En este capítulo se describirán brevemente algunos de ellos. En primer lugar, algunas variantes de modelos de decoherencia de una partícula de espín 1/2 a causa de su interacción con un entorno formado por otros espines. Y a continuación, el modelo de movimiento Browniano cuántico, que describe la decoherencia de una partícula en una dimensión debida al acoplamiento con un baño de osciladores armónicos. Cabe mencionar que existe un tercer modelo muy relevante de decoherencia que es una combinación de los dos problemas anteriores: el modelo de espín-bosón, en el cual el sistema es una partícula de espín 1/2 y el entorno está compuesto por osciladores armónicos [65].

2.1. Esquema básico de decoherencia

Consideremos el modelo de decoherencia más sencillo posible: un sistema cuántico de dos niveles, $|0\rangle \ge |1\rangle$, que se encuentra acoplado a su ambiente. En lo sucesivo nos referiremos frecuentemente al sistema como el "qubit" (por "quantum bit"), usando la terminología de la información cuántica [6]. Por simplicidad ignoramos el Hamiltoniano del sistema, y suponemos que éste se encuentra acoplado al ambiente a través de un Hamiltoniano de interacción del tipo:

$$H_{int} = |0\rangle\langle 0| \otimes O_0 + |1\rangle\langle 1| \otimes O_1 \tag{2.1}$$

donde O_0 y O_1 son dos operadores que actúan sobre el entorno. Éste puede además tener su propio Hamiltoniano, H_E .

Supongamos que preparamos el sistema inicialmente en un estado puro arbitrario, es decir de la forma $\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$, mientras que el entorno se encuentra en un estado $|E(0)\rangle$. De acuerdo a la forma propuesta para el Hamiltoniano, la evolución temporal del universo constituido por el qubit y su ambiente estará dada por:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-(it/\hbar)(H_{int}+H_E)}(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes |E(0)\rangle &= \\ &= \alpha|0\rangle \otimes |E_0(t)\rangle + \beta|1\rangle \otimes |E_1(t)\rangle. \end{aligned}$$
(2.2)

En esta expresión, los estados $|E_0(t)\rangle$ y $|E_1(t)\rangle$ corresponden a las dos evoluciones del entorno cuando el estado del qubit es $|0\rangle$ o $|1\rangle$ respectivamente:

$$|E_j(t)\rangle = e^{-(it/\hbar)(O_j + H_E)}|E_0\rangle, \quad j = 0, 1.$$
 (2.3)

De esta manera, a lo largo de la evolución el estado del sistema se entrelaza con el ambiente. Si sólo el sistema es accesible para realizar mediciones, en tanto que el ambiente no puede ser controlado, la descripción del estado del qubit está dada por su matriz densidad reducida ρ , que se obtiene trazando sobre el estado del entorno:

$$\rho(t) = \operatorname{Tr}_E \Big[|\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| \Big].$$
(2.4)

En la llamada "base computacional", compuesta por los estados $|0\rangle$, $|1\rangle$, esta matriz densidad reducida resulta de la forma:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* f(t) \\ \alpha^*\beta f^*(t) & |\beta|^2 \end{pmatrix}.$$
(2.5)

Es decir, los términos diagonales permanecen constantes en el tiempo, mientras que los no diagonales son reducidos al ser multiplicados por el factor f(t), que corresponde al solapamiento entre las dos evoluciones del entorno:

$$f(t) = \langle E_1(t) | E_0(t) \rangle. \tag{2.6}$$

Además de la reducción de los términos no diagonales, el factor f(t) puede también introducir una fase dependiente del tiempo.

En el caso en que los dos estados $|E_j(t)\rangle$ se vuelven ortogonales entre sí, la matriz densidad corresponde a una mezcla dada por:

$$\rho(f \to 0) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0\\ 0 & |\beta|^2 \end{pmatrix}.$$
(2.7)

Este estado puede entonces identificarse con un estado clásico, una combinación estadística de los dos estados punteros $|0\rangle$ y $|1\rangle$. En este sentido, la decoherencia proporciona una explicación para el comportamiento clásico de sistemas cuánticos abiertos, como consecuencia de la supresión por efecto del ambiente de los términos no diagonales de la matriz densidad.

El efecto que este tipo de acoplamientos tiene sobre el sistema se conoce normalmente como "desfasante". Otros modelos para el acoplamiento pueden inducir distintas transformaciones en la matriz densidad reducida [6]. Por ejemplo, el acoplamiento con un baño a baja temperatura tiende a llevar al sistema cerca de su estado fundamental, mientras que un baño a temperatura muy alta lleva el sistema a un estado máximamente mixto (en tanto no haya alguna simetría preservada que lo impida). La consideración de efectos de memoria, dinámica del sistema, etc., resulta en una complejización del proceso de decoherencia. En lo sucesivo se describirán algunos ejemplos típicos de modelos de decoherencia, en primer lugar por ambientes de espines, y a continuación por entornos de osciladores armónicos.

2.2. Decoherencia por ambientes de espines

Existe una gran variedad de modelos para la decoherencia producida por baños de espines. Esta sección no pretende ser exhaustiva sino más bien introducir los modelos más simples, y posteriormente algunos resultados que son relevantes para el trabajo posterior en esta tesis. Una revisión más amplia sobre baños de espines puede por ejemplo encontrarse en [66].

2.2.1. Baño de espines no interactuantes

La situación más sencilla que puede considerarse es un entorno formado por partículas distinguibles de espín 1/2 que no interactúan entre sí. Éste es el modelo propuesto en [30] con el objetivo de analizar la decoherencia observada en experimentos de resonancia magnética nuclear. En la aproximación más sencilla, se considera solamente el Hamiltoniano de interacción entre el sistema y el entorno. Se propone nuevamente un sistema correspondiente a un qubit, con un acoplamiento de Ising entre éste y cada partícula en el ambiente:

$$H_{int} = \frac{\hbar}{2} Z_S \otimes \sum_j g_j Z_j \tag{2.8}$$

donde Z_S , Z_j indican las matrices de Pauli asociadas a la componente en dirección z del espín del sistema y del espín *j*-ésimo del baño respectivamente, en tanto g_j es una constante de acoplamiento.

Se considera un estado inicial puro en que sistema y ambiente se encuentran descorrelacionados, según:

$$|\psi(0)\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes |\psi_E(0)\rangle.$$
(2.9)

En esta expresión los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ corresponden a los autoestados de Z con autovalor +1 y -1 respectivamente. La evolución del estado $|\psi\rangle$ será de la forma:

$$|\psi(t)\rangle = \alpha|0\rangle \otimes e^{-it\frac{1}{2}\sum_{j}g_{j}Z_{j}}|\psi_{E}(0)\rangle + \beta|1\rangle \otimes e^{it\frac{1}{2}\sum_{j}g_{j}Z_{j}}|\psi_{E}(0)\rangle.$$
(2.10)

De acuerdo a la evolución hallada, los términos diagonales de la matriz densidad reducida del sistema permanecerán constantes en el tiempo, mientras que los no diagonales serán suprimidos por un factor de decoherencia:

$$f(t) = \langle \psi_E(0) | e^{-it \sum_j g_j Z_j} | \psi_E(0) \rangle.$$
(2.11)

Al igual que en la situación considerada en la sección anterior, en la medida en que f tiende a cero, la matriz densidad se convierte en una mezcla estadística de los estados de la base computacional, que son los estados punteros en este problema.

Utilizando argumentos estadísticos, en [30] se muestra que el comportamiento genérico en este modelo es un decaimiento de la coherencia gaussiano en el tiempo (en lugar del decaimiento exponencial esperable en un modelo Markoviano, caracterizado por una cierta tasa de reducción de la coherencia). La escala temporal del decaimiento está dada por la dispersión de las energías correspondientes a las distintas evoluciones posibles (pesadas por sus respectivas probabilidades).

Este modelo puede complejizarse incluyendo por ejemplo un Hamiltoniano del sistema, de la forma:

$$H_S = \Delta X_S \tag{2.12}$$

donde X_S es la matriz de Pauli correspondiente a la componente x del espín del sistema. Cuando el Hamiltoniano del sistema domina sobre el de interacción, el decaimiento de la coherencia sigue una ley de potencias en lugar de la forma gaussiana ya mencionada. Además, los estados punteros en este caso son los autoestados de H_S (es decir, los estados correspondientes a un espín apuntando en dirección $+\hat{x}$ o $-\hat{x}$) en lugar de los de la base computacional [30]. En la siguiente sección se introducirán modelos con interacciones en el entorno, y por simplicidad se despreciará el Hamiltoniano propio del sistema.

2.2.2. Entornos dados por cadenas de espines

El modelo del qubit central estudia un caso que puede resolverse en forma analítica y simple pero que exhibe un comportamiento complejo a causa de las propiedades del ambiente [24, 23]. En este modelo, nuevamente tanto el sistema como el entorno son partículas de espín 1/2, y el Hamiltoniano de interacción entre sistema y entorno es también igual que en el caso anterior, es decir un acoplamiento de Ising entre el qubit y cada partícula del ambiente. Ahora se asume además que todos los acoplamientos son iguales, $g_j = g \forall j$. Sin embargo, en este caso los espines del entorno tienen una dinámica propia, ya que se encuentran formando una cadena que obedece a un Hamiltoniano de tipo Ising con campo transverso:

$$H_E = -\hbar \sum_j X_j X_{j+1} + \lambda Z_j.$$
(2.13)

Aquí λ corresponde a la intensidad del campo transverso, y los Hamiltonianos están elegidos de tal forma que el efecto del qubit corresponde a una modificación del campo transverso efectivo para la cadena.



Figura 2.1: Una partícula de espín 1/2 interactuando con un entorno dado por una cadena de espines. El sistema está igualmente acoplado a todos los espines del ambiente.

El interés de este problema radica en la riqueza de la dinámica del entorno, que de hecho en el límite termodinámico (cuando el número de sitios tiende a infinito) exhibe una transición de fase cuántica: el estado fundamental para $|\lambda| < 1$ es un estado ferromagnético, dominado por las interacciones entre sitios, mientras que para $|\lambda| > 1$ es un estado paramagnético en que los espines se orientan según el campo externo [67].

Al igual que en el problema anterior, el entorno evoluciona en forma distinta según sea el estado del sistema, lo cual produce un decaimiento de los términos no diagonales en la matriz densidad. El factor de decoherencia como función del tiempo puede hallarse computando el solapamiento entre las dos posibles evoluciones de la cadena. Esto se realiza eficientemente mapeando los espines a un sistema de fermiones por medio de la transformación de Jordan-Wigner y usando la invariancia rotacional del sistema (los detalles del cálculo se verán en el capítulo 5).

Entre los resultados más interesantes que surgen del análisis de este modelo se encuentra la observación de que, cuando el acoplamiento entre sistema y entorno es débil, la decoherencia es mucho más fuerte en las cercanías de la transición de fase. Este efecto se ilustra en la figura 2.2, y puede interpretarse como una manifestación de hipersensibilidad del entorno a la perturbación introducida por el sistema [23]. El límite opuesto de acoplamiento fuerte muestra, para $\lambda \simeq 0$, un decaimiento de la coherencia que presenta oscilaciones con una envolvente gaussiana independiente de la intensidad del acoplamiento. Este régimen fue estudiado por primera vez en [24] y será el objeto de estudio del capítulo 5 de esta tesis.

El modelo propuesto puede resolverse eficientemente también en el caso en que el acoplamiento del sistema a la cadena es no-uniforme (la forma de hacerlo se explica en el capítulo 6). Este tipo de situación ha sido analizada minuciosamente en [25], donde se observan comportamientos cualitativamente similares a los ya descriptos. Los modelos de decoherencia por acoplamiento a una cadena de spines han sido utilizados para estudiar estrategias de control de errores en [69], y el efecto de ambientes con memoria en canales de comunicación cuántica en [70].



Figura 2.2: La decoherencia de un qubit que interactúa débilmente con una cadena de espines resulta mucho más fuerte en las proximidades de una transición de fase. A la izquierda se muestran los resultados analíticos (figura tomada de [23]). A la derecha, resultados experimentales para un modelo similar con 4 espines en resonancia magnética nuclear (figura tomada de [68]). En ambos casos, el factor de decoherencia presenta bruscas caídas en torno de los puntos críticos.

2.2.3. El rol de las interacciones en el entorno

El efecto sobre la decoherencia de las interacciones presentes en el entorno fue estudiado en [22], para un sistema de un qubit en contacto con un baño de partículas de espín 1/2. En dicho trabajo se propone una interacción tipo Ising entre el qubit y el baño, y también entre las distintas partículas que componen el baño. Además, tanto el qubit como las partículas del baño se encuentran en presencia de un campo externo que tiene componentes en z y x. Se considera como estado inicial un estado térmico para las partículas del entorno.

El análisis del artículo se centra en las modificaciones en el proceso de decoherencia cuando se varía la intensidad de los acoplamientos entre partículas del entorno. Según se observa, la presencia de interacciones fuertes entre ellas resulta en una supresión de la decoherencia, que se interpreta en términos de la monogamia del entrelazamiento: un alto grado de entrelazamiento entre las componentes del ambiente impide que éstas puedan a su vez entrelazarse con el sistema y producir una pérdida de coherencia del mismo. Este resultado ha sido posteriormente estudiado en más profundidad, y observado en otros modelos [71, 72].

Por otra parte, existen también indicaciones de que los detalles de la dinámica del ambiente, y no solamente la magnitud de los acoplamientos internos, son relevantes para el proceso de decoherencia. Un ejemplo claro lo proporcionan los resultados mencionados en la sección anterior con respecto a ambientes críticos. Existen además artículos que muestran que la pérdida de coherencia cambia cualitativamente según si la dinámica del entorno corresponde a un problema caótico o integrable [73], o de acuerdo al grado de conectividad del entorno [74].

2.3. Movimiento Browniano cuántico

En esta sección se considera el movimiento Browniano cuántico [65, 50], que describe la decoherencia de una partícula sin espín que se mueve en un potencial armónico e interactúa con un ambiente formado por un conjunto de osciladores armónicos. El acoplamiento entre sistema y entorno es también cuadrático, es decir, bilineal en las coordenadas de posición de la partícula y de los osciladores del baño. Este modelo puede aplicarse a muchas situaciones distintas, ya que un gran número de problemas pueden describirse por medio de aproximaciones cuadráticas (ver [50, 75] y las referencias contenidas allí). Al igual que en las secciones anteriores, se presenta sólo un esquema sintético del tema y algunos resultados principales. Un tratamiento un poco más detallado puede encontrarse por ejemplo en [76].

Gracias al hecho de que los Hamiltonianos involucrados son cuadráticos, la evolución temporal es gaussiana. Si se propone un estado inicial térmico para el baño de osciladores, éste corresponde también a una función gaussiana de las coordenadas de posición y momento. Esto permite el tratamiento analítico del problema por medio del formalismo de la funcional de influencia de Feynman y Vernon [77]: el procedimiento consiste en plantear la integral funcional para el sistema y su entorno y luego trazar sobre los grados de libertad del entorno para encontrar la evolución del sistema, que se encuentra dada por un propagador gaussiano (algunos detalles de este método, que fue aplicado a este problema en [50], se darán más adelante en el capítulo 8).



Figura 2.3: Una partícula que puede moverse en una dirección e interactúa en forma bilineal con un baño de osciladores armónicos.

El Hamiltoniano completo en el modelo es de la forma:

$$H = H_S + H_E + H_{int} \tag{2.14}$$

donde H_S es el Hamiltoniano del sistema, H_E el del entorno y H_{int} el acoplamiento entre ambos. H_S corresponde a un oscilador armónico de frecuencia ω_S :

$$H_S = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_S^2 q^2}{2}$$
(2.15)

El entorno es un conjunto de osciladores armónicos no interactuantes, cada uno con frecuencia ω_j y masa m_j :

$$H_E = \sum_j \frac{p_j^2}{2m_j} + \frac{m_j \omega_j^2 q_j^2}{2}$$
(2.16)

y la interacción entre sistema y ambiente es a través de las coordenadas de posición del sistema y de los osciladores en el entorno:

$$H_{int} = -q \sum_{j} g_j q_j \tag{2.17}$$

El efecto del ambiente sobre el sistema puede caracterizarse por medio de la densidad espectral, asociada a la distribución en frecuencias de los osciladores en el entorno, pesados por la magnitud de su acoplamiento al sistema:

$$J(\omega) = \sum_{j} \delta(\omega - \omega_j) \frac{g_j^2}{2m_j \omega_j}$$
(2.18)

La evolución temporal del sistema queda determinada por su estado inicial, la temperatura inicial del entorno, y la densidad espectral (que es una propiedad conjunta del entorno y su interacción con el sistema, o equivalentemente determina un entorno efectivo). A los efectos de calcular la evolución temporal en forma analítica, típicamente se reemplaza la densidad espectral por la correspondiente a un continuo en frecuencias, introduciendo además una frecuencia de corte que define la mínima escala de tiempo característica del entorno efectivo.

Como ya se mencionó anteriormente, la evolución del sistema queda determinada al trazar sobre el ambiente, obteniéndose una integral gaussiana que puede ser resuelta analíticamente. Esto permite derivar en forma exacta la ecuación maestra para la matriz densidad reducida ρ del sistema, hallada por Hu, Paz y Zhang [78]:

$$\dot{\rho} = \frac{1}{\hbar} \Big(-i[H_R, \rho] - i\gamma(t)[q, \{p, \rho\}] - \frac{D(t)}{\hbar} [q, [q, \rho]] - \frac{f(t)}{\hbar} [q, [p, \rho]] \Big)$$
(2.19)

Aquí $H_R = H_S + m\delta\omega^2(t)q^2/2$ corresponde a un Hamiltoniano del sistema con renormalización de la frecuencia a causa de la interacción con el ambiente, $\gamma(t)$ es el núcleo de difusión, D(t) el de disipación y f(t) el de difusión anómala. De acuerdo a la expresión anterior, γ tiene unidades de frecuencia, D de frecuencia por momento cuadrado, y f de energía. Los coeficientes $\delta\omega^2(t)$, $\gamma(t)$, D(t) y f(t)dependen de la densidad espectral del ambiente y también de la temperatura inicial [78, 79].

A partir de la ecuación maestra (2.19) es posible derivar ecuaciones para la evolución de los coeficientes que caracterizan el estado del sistema, por ejemplo, valores medios y dispersiones de posición y momento:

$$\frac{d\langle q\rangle}{dt} = \frac{\langle p\rangle}{m} \tag{2.20}$$

$$\frac{d\langle p \rangle}{dt} = -m\Omega^2(t)\langle q \rangle - 2\gamma(t)\langle p \rangle$$
(2.21)

$$\frac{d\langle q^2 \rangle}{dt} = \frac{1}{m} \langle \{q, p\} \rangle \tag{2.22}$$

$$\frac{d\langle p^2 \rangle}{dt} = -m\Omega^2(t)\langle \{q, p\} \rangle - 4\gamma(t)\langle p^2 \rangle + 2D(t)$$
(2.23)

$$\frac{d\langle \{q,p\}\rangle}{dt} = 2\frac{\langle p^2 \rangle}{m} - 2m\Omega^2(t)\langle q^2 \rangle - 2\gamma(t)\langle \{q,p\}\rangle - 2f(t) \qquad (2.24)$$

En estas expresiones $\Omega(t)$ corresponde a la frecuencia renormalizada.

La evolución en el modelo de movimiento Browniano cuántico es no-Markoviana, es decir, presenta efectos de memoria. Esto se ve trivialmente en la dependencia temporal de los coeficientes de la ecuación maestra. Menos trivialmente, la presencia misma de difusión anómala es en sí un efecto no-Markoviano. Cabe mencionar que la evolución se vuelve Markoviana en los límites de acoplamiento muy débil o de muy alta temperatura.

Entre las predicciones importantes de este modelo se encuentra la de que la escala temporal de la decoherencia es muchísimo más rápida que cualquier otra escala relevante para la dinámica, para el caso de una partícula con masa correspondiente a un sistema macroscópico (una mota de polvo, por ejemplo) y en el límite de altas temperaturas (mucho más altas que las asociadas a la frecuencia natural del sistema y la frecuencia de corte). En esta situación, además, el modelo predice que la supresión de la interferencia entre paquetes de onda situados a distancia d entre sí estará dada por una función gaussiana de la distancia. Esta propiedad, observada experimentalmente en [15], deja de ser válida si se considera un modelo con acoplamientos locales a los grados de libertad del entorno, como el propuesto en [49] y que se estudiará en el capítulo 8.

Otro resultado interesante al que conduce el modelo de movimiento Browniano cuántico tiene que ver con los estados punteros, es decir los estados más robustos frente a la decoherencia (en las escalas temporales rápidas en que ésta actúa). Estos estados, que son identificados con los estados clásicos, corresponden a los estados coherentes del sistema, es decir paquetes gaussianos localizados en posición y momento. Esto es consistente con la idea de que los estados clásicos son puntos en el espacio de fases, con la salvedad de que los puntos en cuestión son en realidad "manchas" cuyo tamaño mínimo está dado por el principio de incertidumbre.

Capítulo 3

Estados cuánticos gaussianos

Una de las primeras dificultades con que se tropieza al intentar estudiar la evolución y propiedades de un sistema cuántico es la complejidad en la descripción de su estado. De hecho, si se tiene un conjunto de n partículas, cada una de las cuales tiene asociado un espacio de Hilbert de dimensión d, el espacio de Hilbert correspondiente al sistema completo será de dimensión d^n , y la descripción de un estado mixto requerirá por lo tanto de una matriz de $d^n \times d^n$. Es decir, el número de parámetros necesarios para describir el estado del sistema escalea en forma exponencial con el número de partículas. Por supuesto, el mismo inconveniente aparecerá si se intenta escribir los operadores de evolución temporal, diagonalizar el Hamiltoniano para hallar los valores posibles de energía, etc. Ésta es una dificultad crucial al abordar problemas de más de unas pocas partículas. Por poner un ejemplo, un sistema de 20 partículas de espín 1/2 tiene dimensión 2^{20} , es decir del orden del millón. Dado que diagonalizar una matriz de $N \times N$ requiere de un número de operaciones del orden de N^3 , un Hamiltoniano arbitrario de este sistema resulta intratable.

Existen varios enfoques que intentan lidiar con este problema. Uno de ellos es el de los simuladores cuánticos [1]: vista la dificultad de reproducir la mecánica cuántica por medio de recursos clásicos, ¿por qué no utilizar directamente recursos cuánticos? La clave de esta propuesta es contar con algún sistema cuántico controlable al cual pueda mapearse el sistema que se desea estudiar [37, 38, 39, 80]. Esta idea se ha explorado en forma creciente en los últimos años, en la medida en que las tecnologías de procesamiento cuántico avanzan en forma impresionante, pero todavía se encuentran muy lejos de los muy exigentes requisitos para llevar a cabo verdadera computación cuántica [6]. En particular, en la sección 4.6 se mencionan algunas propuestas y experiencias relacionadas con simulaciones cuánticas en trampas de iones.

Sin embargo, incluso el eventual uso de procesadores cuánticos tiene limitaciones: existen sistemas relativamente simples para los cuales aún una computadora cuántica podría no ser suficientemente poderosa. Por ejemplo, hallar la energía del estado fundamental de un conjunto de partículas de espín 1/2 en una red bidimensional con un Hamiltoniano de primeros vecinos pertenece a la clase de complejidad QMA-hard, y se desconoce si podría resolverse eficientemente por medio de un cómputo cuántico [81]. Incluso un problema que se suponía relativamente sencillo, como es el de un conjunto de partículas de dimensión finita (aunque grande), colocadas en un arreglo unidimensional con invariancia traslacional e interacciones solamente a primeros vecinos, podría ser intratable para una computadora cuántica [82].

De todas formas, desde el punto de vista de la física, no es claro qué tan relevante es la pregunta sobre estados, Hamiltonianos o evoluciones arbitrarios. El espacio de Hilbert de un dado sistema puede ser muchísimo más grande que el espacio que el sistema puede efectivamente explorar bajo condiciones concretas, y los Hamiltonianos de los sistemas físicos de interés pueden no resultar tan difíciles de diagonalizar como una matriz arbitraria del tamaño que corresponda. Existe por lo tanto una intensa actividad abocada a encontrar métodos eficientes (y clásicos) que permitan describir estados, evolucionarlos en el tiempo, o estudiar sus propiedades, bajo algunas restricciones físicamente relevantes.

Esta línea de trabajo no es nada nueva, y de hecho existen muchos métodos orientados a la resolución de la ecuación de Schrödinger de sistemas de varios cuerpos en forma aproximada para problemas de interés en química [83, 84, 85, 86]. Otros avances que han surgido en los últimos años en el tratamiento eficiente de estados cuánticos de sistemas de muchos cuerpos se relacionan con el campo de la materia condensada y tienen que ver con mecanismos para describir sistemas con invariancia traslacional o de escala: el método DMRG [87, 88], y sus parientes los MPS, PEPS, MERA, etc. [89, 90, 91, 92, 93].

En este capítulo nos enfocaremos en un tipo de estados cuya descripción es particularmente sencilla: los estados gaussianos de sistemas bosónicos o fermiónicos. Estos estados no sólo son simples, sino que son físicamente relevantes, ya que a esta familia pertenecen los estados fundamentales y térmicos de los Hamiltonianos cuadráticos. Más aún, cuando la evolución es lineal es posible describir eficientemente la forma en que estos estados cambian a lo largo del tiempo.

Cabe mencionar que el estudio de estados gaussianos tiene grandes ventajas pero también implica ciertas limitaciones. Estos estados son convenientes, en primer lugar, por la facilidad con que pueden tratarse, y además de ser, en muchos casos, físicamente relevantes, pueden exhibir propiedades interesantes como un alto grado de entrelazamiento entre subsistemas. Sin embargo, las conclusiones que se extraen de ellos no pueden extrapolarse directamente a situaciones generales. Aún teniendo esto en mente, el estudio de estas familias de estados es interesante en sí mismo, y en muchas ocasiones es un buen punto de partida para luego abordar situaciones más generales. A lo largo de esta tesis, estos estados aparecerán ligados al estudio de la decoherencia en distintos contextos y sistemas físicos. En la primera mitad, la decoherencia por cadenas de espines se tratará mapeando el sistema a uno de fermiones con Hamiltoniano cuadrático [94]. En la segunda mitad, se considerarán sistemas de osciladores armónicos acoplados, cuya evolución se restringirá al espacio de estados gaussianos bosónicos.

3.1. Estados gaussianos bosónicos

En esta sección se considerará un conjunto de n osciladores armónicos, cada uno con coordenada de posición q_j y de momento p_j , j = 1, ..., n. Los estados gaussianos de este sistema se definen como aquéllos cuya matriz densidad puede escribirse como una función gaussiana de los operadores de creación y destrucción, o equivalentemente aquéllos cuya función de Wigner es gaussiana en las coordenadas de posición y momento. Esta introducción al tema sólo pretende servir a los fines de la comprensión del trabajo de esta tesis. Un tratamiento más detallado puede por ejemplo encontrarse en las tesis de Augusto Roncaglia [76] y de Raúl García-Patrón [95].

3.1.1. Descripción de los estados gaussianos bosónicos



Figura 3.1: Representación esquemática en el espacio de fases de la evolución de un estado gaussiano de un oscilador armónico unidimensional. La distribución de cuasiprobabilidad es una función gaussiana en las coordenadas de posición y momento; los primeros momentos indican el centro del paquete y la matriz de covarianza la dispersión en las distintas direcciones. El mínimo valor posible del área está dado por el principio de incertidumbre. Las escalas de los ejes se eligen en forma tal que la evolución temporal corresponde a una rotación en torno del origen del espacio de fases.

Pensando en primer lugar en un único oscilador armónico, los estados gaussianos están caracterizados por una distribución gaussiana en el espacio de fases. Por lo tanto, para describirlos en forma completa alcanza con dar los siguientes parámetros: el centro del paquete (en posición y momento), la dirección de los ejes, y la dispersión en cada una de esas direcciones (ver Figura 3.1). En términos más técnicos, el estado está completamente definido por el vector de primeros momentos:

$$\langle R \rangle = (\langle Q \rangle, \langle P \rangle) \tag{3.1}$$

y la matriz de covarianza, cuyos elementos son las varianzas de los observables cuadráticos:

$$C = \begin{pmatrix} \langle Q^2 \rangle - \langle Q \rangle^2 & \frac{1}{2} \langle \{Q, P\} \rangle - \langle Q \rangle \langle P \rangle \\ \frac{1}{2} \langle \{Q, P\} \rangle - \langle Q \rangle \langle P \rangle & \langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2 \end{pmatrix}$$
(3.2)

Las coordenadas Q, P son versiones adimensionalizadas de las coordenadas de posición y momento q y p respectivamente, según:

$$Q = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}q = \sqrt{\frac{1}{2}}(a+a^{\dagger})$$
(3.3)

$$P = \sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}p} = -i\sqrt{\frac{1}{2}(a-a^{\dagger})}$$
(3.4)

con a y a^{\dagger} los operadores de creación y destrucción. En términos de estos operadores, el Hamiltoniano del oscilador armónico está dado por:

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} \left(P^2 + Q^2 \right) = \hbar\omega \left(a^{\dagger}a + \frac{1}{2} \right)$$
(3.5)

Existen ejemplos particularmente sencillos de estados gaussianos. Entre ellos, el estado de vacío de un oscilador armónico, que corresponde a un estado centrado en el origen y de mínima incerteza; los estados coherentes, que se obtienen a partir de desplazamientos del estado de vacío; y los estados térmicos, cuya representación es similar a la del estado de vacío pero con mayor dispersión. Estos estados se ilustran en la figura 3.2. Para las coordenadas elegidas, la evolución temporal se representa en el espacio de fases como una rotación en torno del origen, y la representación de los estados térmicos tiene por lo tanto simetría de rotación. El principio de incertidumbre impone un área mínima para la representación del estado en el espacio de fases: el producto de las dispersiones en los dos ejes está acotado inferiormente por 1/2.



Figura 3.2: Representación esquemática en el espacio de fases de distintos estados gaussianos: el estado fundamental de un oscilador armónico (a), un estado coherente (b), un estado térmico (c), y un estado de vacío estrujado (d). Las distribuciones de cuasiprobabilidad de estos estados son gaussianas en las coordenadas de posición y momento; las figuras ilustran la ubicación del paquete y su dispersión en las distintas direcciones (correspondiendo a primeros momentos y matriz de covarianza respectivamente). La evolución temporal equivale a una rotación en torno del origen del espacio de fases. Los estados térmicos, por lo tanto, permanecen constantes en el tiempo.

Cuando el paquete gaussiano no tiene simetría de rotación en torno de su centro, es decir, cuando no puede obtenerse a partir de un desplazamiento de un estado térmico (de los cuales el estado fundamental es un caso particular para T = 0), diremos que el estado se encuentra "estrujado" (una de las posibles traducciones de la palabra inglesa "squeezed"). El estrujamiento es una propiedad

importante en muchas situaciones y se cuantifica por el siguiente parámetro:

$$r = \frac{1}{2} \left| \ln \left(\frac{\Delta Q}{\Delta P} \right) \right| = \frac{1}{2} \left| \ln \left(m \omega \frac{\Delta q}{\Delta p} \right) \right|$$
(3.6)

Esta definición corresponde a un paquete gaussiano cuyos ejes se orientan en las direciones de posición y momento, con ΔQ y ΔP las respectivas varianzas (la generalización al caso de ejes arbitrarios es trivial). Un paquete centrado en el origen y de incerteza mínima pero distinto del estado de vacío, como se ilustra en la figura 3.2.d, se llama comúnmente un estado "de vacío estrujado".

La generalización de esta descripción a un conjunto de n osciladores armónicos es simple: el vector de primeros momentos contiene los valores medios del operador:

$$R = (Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)$$
(3.7)

y la matriz de covarianza resulta dada por:

$$C_{jk} = \left\langle \frac{1}{2} \{ (R_j - \langle R_j \rangle), (R_k - \langle R_k \rangle) \} \right\rangle$$
(3.8)

La condición para que una matriz de covarianza corresponda a un estado físico está dada por la desigualdad:

$$C + \frac{i}{2}L \ge 0 \tag{3.9}$$

que es la generalización de la relación de incertidumbre para un sistema de varios osciladores. En esta expresión, L es la forma simpléctica:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_N \\ -\mathbb{I}_N & 0 \end{pmatrix}$$
(3.10)

Un Hamiltoniano cuadrático en los operadores de creación y destrucción a_n^{\dagger} , a_n siempre puede diagonalizarse por medio de una transformación lineal (de Bogoliubov) de los operadores. Si el Hamiltoniano tiene un espectro acotado inferiormente, su versión diagonal corresponde a un conjunto de *n* osciladores armónicos independientes. Los estados térmicos de este Hamiltoniano son productos de estados térmicos de cada uno de los modos normales; como la transformación de los operadores es lineal, estos estados son también gaussianos en términos de las variables originales. Sin embargo, no necesariamente corresponden a estados térmicos; por ejemplo, un estado de vacío puede por medio de una transformación de Bogoliubov convertirse en uno de vacío estrujado.

3.1.2. Evolución temporal

Cuando la evolución temporal es lineal, el carácter gaussiano del estado se preserva ya que el operador de evolución temporal es a su vez gaussiano. Por lo tanto, en estos casos, la descripción de la evolución temporal completa está determinada por la evolución de los primeros momentos y de la matriz de covarianza. La evolución unitaria gaussiana más general corresponde a una traslación de los primeros momentos más una transformación simpléctica de la forma:

$$C \to SCS^t, \quad \langle R \rangle \to S \langle R \rangle$$
 (3.11)

donde ${\cal S}$ preserva la forma simpléctica, o sea:

$$L \to SLS^t = L. \tag{3.12}$$

Esto muestra que la condición (3.9) para que la matriz de covarianza corresponda a un estado físico es preservada por estas transformaciones. Una evolución gaussiana no unitaria está representada por una traslación en los primeros momentos más una transformación de la forma [95, 96]:

$$C \to ACA^t + G, \quad \langle R \rangle \to A \langle R \rangle$$

$$(3.13)$$

donde G es una matriz simétrica. La condición para la preservación de la positividad del estado está dada por la relación:

$$2G + iL - iALA^t \ge 0 \tag{3.14}$$

Existen algunas formas de evolución de interés que son resolubles en forma particularmente sencilla. A continuación veremos dos casos que serán relevantes para este trabajo: la evolución libre de un conjunto de osciladores armónicos, y el efecto de un canal de decaimiento con coeficientes constantes en el tiempo (que puede por ejemplo describir pérdidas del campo electromagnético en una cavidad, o, en el caso del capítulo 7 se utilizará para aproximar el enfriamiento láser de una cadena de iones).

La ecuación para la evolución libre de un sistema de n osciladores independientes es:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H,\rho] \tag{3.15}$$

donde H es el Hamiltoniano del sistema,

$$H = \sum_{k} \hbar \omega_k \left(a_k^{\dagger} a_k + \frac{1}{2} \right) = \sum_{k} \hbar \omega_k \frac{Q_k^2 + P_k^2}{2}$$
(3.16)

La manera más fácil de hallar la evolución del estado gaussiano es a partir de los operadores de posición y momento en representación de Heisenberg:

$$\tilde{Q}_k(t) = e^{itH/\hbar} Q_k e^{-itH/\hbar}, \qquad \tilde{P}_k(t) = e^{itH/\hbar} P_k e^{-itH/\hbar}$$
(3.17)

que obedecen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d\tilde{Q}_k}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, \tilde{Q}_k] = \omega_k \tilde{P}_k \tag{3.18}$$

$$\frac{dP_k}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, \tilde{P}_k] = -\omega_k \tilde{Q}_k \qquad (3.19)$$

lo cual equivale, como ya se mencionó, a una rotación en el espacio de fases para cada uno de los osciladores. En términos de los primeros momentos y matriz de covarianza, la evolución corresponde a la transformación:

$$\langle R \rangle(t) = e^{L\Omega t} \langle R \rangle(0) \tag{3.20}$$

$$C(t) = e^{L\Omega t} C(0) e^{-L\Omega t}$$
(3.21)

donde L es la forma simpléctica (3.10) y Ω es una matriz diagonal conteniendo las frecuencias de los distintos osciladores:

$$\Omega = \operatorname{diag}(\omega_1, \dots, \omega_n, \omega_1, \dots, \omega_n) \tag{3.22}$$

Consideremos ahora la evolución temporal dada por la combinación de la evolución libre y el decaimiento, asumiendo que cada uno de los modos sufre un decaimiento con tasa γ_k . La ecuación para la evolución de la matriz densidad como función del tiempo es de la forma:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H,\rho] + \sum_{k} \frac{\gamma_k}{2} (2a_k\rho a_k^{\dagger} - \{a_k^{\dagger}a_k,\rho\})$$
(3.23)

Usando nuevamente la ecuación para la evolución de los operadores de posición y momento en representación de Heisenberg, se puede deducir que la evolución de los primeros momentos y matriz de covarianza resulta dada por [97]:

$$\langle R \rangle(t) = e^{-\Gamma t/2} \langle R \rangle_0(t) \tag{3.24}$$

$$C(t) = e^{-\Gamma t/2} C_0(t) e^{-\Gamma t/2} + \frac{1}{2} (\mathbb{I} - e^{-\Gamma t})$$
(3.25)

Aquí $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, y $\langle R \rangle_0(t)$, $C_0(t)$ refieren a la evolución libre de los osciladores, según las fórmulas (3.20-3.21). Es crucial para la derivación de este resultado el hecho de que la evolución libre y el decaimiento conmutan entre sí. Esto es a su vez una consecuencia de asumir que el decaimiento actúa sobre los distintos modos en forma independiente.

3.2. Estados gaussianos fermiónicos

Consideremos ahora un sistema de n fermiones, con operadores de creación y destrucción c_n^{\dagger} , c_n . En forma similar al caso de los estados bosónicos, la matriz densidad de un estado gaussiano fermiónico es una función gaussiana de los operadores de creación y destrucción. Si bien en esta tesis no se trata específicamente con sistemas de fermiones, sí se consideran sistemas de espines que son mapeados a modelos fermiónicos por medio de la transformación de Jordan-Wigner (ver capítulos 5 y 6).

3.2.1. Descripción de los estados gaussianos fermiónicos

Una definición más precisa de un estado gaussiano es: aquél para el cual toda correlación truncada o cumulante K_n es igual a cero para $n \ge 3$. Esto implica
que los primeros momentos se anulan, como puede verse de la siguiente manera:

$$K_3^{(i,i,i)} = \langle c_i c_i c_i \rangle_T = \langle c_i c_i c_i \rangle - 3(\langle c_i c_i \rangle - \langle c_i \rangle^2) \langle c_i \rangle - \langle c_i \rangle^3 = 2 \langle c_i \rangle^3, \quad (3.26)$$

ya que $c_i^3 = c_i^2 = 0$. Pero esa expresión debe ser igual a cero por la definición de estado gaussiano. Por lo tanto, $\langle c_i \rangle = 0$. Esto sumado a la gaussianidad implica que, en el caso fermiónico, todos los términos con un número impar de operadores son nulos ¹.

Al igual que en el caso bosónico, los estados térmicos de Hamiltonianos cuadráticos son estados gaussianos. Pero, a diferencia del caso bosónico, aquí esto vale sólo para Hamiltonianos cuadráticos sin términos lineales (a raíz de la restricción adicional de que los primeros momentos deben ser nulos).

El estado se encuentra entonces totalmente descripto por la matriz de covarianza, ya que los primeros momentos son nulos. La matriz de covarianza se escribe en la forma [98]:

$$C = \begin{pmatrix} \langle c_j^{\dagger} c_k \rangle & \langle c_j^{\dagger} c_k^{\dagger} \rangle \\ \langle c_j c_k \rangle & \langle c_j c_k^{\dagger} \rangle \end{pmatrix}$$
(3.27)

Aunque en lo sucesivo consideraremos la definición de la expresión anterior, cabe mencionar que existen definiciones alternativas. Por ejemplo, en [99] se considera una elección más cercana a la utilizada en el caso bosónico, en la cual se definen "cuadraturas fermiónicas" análogas a la posición y el momento, dadas por:

$$\gamma_{2j-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_j + c_j^{\dagger}), \quad \gamma_{2j} = \frac{i}{\sqrt{2}}(c_j - c_j^{\dagger})$$
 (3.28)

Los operadores así definidos satisfacen las relaciones de anticonmutación:

$$\{\gamma_j, \gamma_k\} = \delta_{jk} \tag{3.29}$$

y la matriz de covarianza se define según:

$$\tilde{C}_{jk} = -i\langle [\gamma_j, \gamma_k] \rangle \tag{3.30}$$

Es posible definir estados coherentes fermiónicos en forma análoga al caso bosónico, es decir, como autoestados de los operadores de destrucción (ahora fermiónicos). Estos estados resultan en muchos problemas una herramienta útil, ya que (como ocurre en el caso bosónico) cualquier estado puede escribirse en términos de estados coherentes fermiónicos [100]. Sin embargo, no se trata de verdaderos estados físicos: su descomposición en la base de estados de Fock tiene coeficientes que son variables de Grassman. De hecho, en tanto la evaluación de evoluciones temporales y propiedades de los estados gaussianos bosónicos suele requerir de integrales de funciones gaussianas, el tratamiento de estados gaussianos fermiónicos generalmente implica recurrir a integrales gaussianas en variables de Grassman.

¹La explicación anterior se la debo a Lorenzo Campos Venuti, Institute for Scientific Interchange, Torino (¡muchas gracias!).

3.2.2. Diagonalización de Hamiltonianos cuadráticos

A continuación se explica brevemente cómo diagonalizar Hamiltonianos cuadráticos fermiónicos. El método es estándar y está presentado en el Apéndice A del trabajo de Lieb, Schultz y Mattis [94]. Se parte de un Hamiltoniano cuadrático de la forma:

$$H = \hbar \sum_{j,k} c_j^{\dagger} A_{jk} c_k + \frac{1}{2} (c_j^{\dagger} B_{jk} c_k^{\dagger} - c_j B_{jk} c_k)$$
(3.31)

con A y B reales, A simétrica y B antisimétrica (a raíz de las relaciones de anticonmutación estas propiedades de simetría no implican pérdida de generalidad). Se propone la transformación lineal:

$$\eta_j = \sum_k \frac{\Phi_{jk} + \Psi_{jk}}{2} c_k + \frac{\Phi_{jk} - \Psi_{jk}}{2} c_k^{\dagger}$$
(3.32)

Para diagonalizar el Hamiltoniano, las matrices que aparecen en esta transformación deben corresponder a las soluciones de las ecuaciones acopladas:

$$\Phi_j(A-B) = \Lambda_j \Psi_j \tag{3.33}$$

$$\Psi_j(A+B) = \Lambda_j \Phi_j \tag{3.34}$$

Aquí Φ_j , Ψ_j representan vectores fila (uno por cada valor del índice j) y los Λ_j son autovalores. El Hamiltoniano puede entonces diagonalizarse resolviendo estas ecuaciones de autovalores, y las matrices Φ , Ψ correspondientes a la solución son ortogonales.

Esto permite, por ejemplo, encontrar fácilmente la matriz de covarianza correspondiente al estado fundamental de un Hamiltoniano de la forma (3.31), en términos de las matrices Φ , Ψ . Además, las familias de operadores que surgen de diagonalizar distintos Hamiltonianos cuadráticos pueden relacionarse entre sí simplemente componiendo las distintas transformaciones lineales involucradas.

3.2.3. Evolución temporal

Consideremos un Hamiltoniano cuadrático arbitrario de la forma (3.31). El operador de evolución temporal asociado es gaussiano en los operadores de creación y destrucción, y por lo tanto preserva la gaussianidad del estado. La evolución temporal de un estado gaussiano fermiónico queda entonces completamente determinada por la transformación de su matriz de covarianza (3.27).

Esta evolución puede calcularse en forma sencilla a partir de la ecuación para los operadores de creación y destrucción en representación de Heisenberg:

$$\tilde{c}_j(t) = e^{itH/\hbar} c_j \ e^{-itH/\hbar} \tag{3.35}$$

La ecuación diferencial correspondiente es de la forma:

$$\frac{d\tilde{c}_j}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, \tilde{c}_j] \tag{3.36}$$

de la que puede deducirse, insertando la forma de H, que $\tilde{c}_j(t)$ es una combinación lineal (con coeficientes dependientes del tiempo) de los operadores de creación y destrucción c_k^{\dagger} , c_k . La ecuación lineal que se obtiene para estos coeficientes puede resolverse fácilmente, resultando:

$$\begin{pmatrix} \tilde{c}_1^{\dagger} \\ \vdots \\ \tilde{c}_n^{\dagger} \\ \tilde{c}_1 \\ \vdots \\ \tilde{c}_n \end{pmatrix} = e^{itM} \begin{pmatrix} c_1^{\dagger} \\ \vdots \\ c_n^{\dagger} \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$
(3.37)

donde

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & -A \end{pmatrix}$$
(3.38)

con $A \ge B$ las matrices correspondientes al Hamiltoniano (3.31).

A partir de la fórmula para la evolución temporal de los operadores \tilde{c} , \tilde{c}^{\dagger} puede calcularse en forma directa la evolución de la matriz de covarianza, dada por:

$$C(t) = e^{itM} C(0) e^{-itM} (3.39)$$

Capítulo 4

Manipulación de iones atrapados

En este capítulo se introducen los conceptos básicos relacionados con el uso de trampas de iones para el procesamiento cuántico de la información. Esencialmente se trata de un resumen del tutorial [101], que se incluye para permitir la comprensión de la última parte de esta tesis, relacionada con la implementación de simuladores cuánticos usando iones atrapados. Se incluyen también en este capítulo algunas ideas sobre el control de los grados de libertad transversales de los iones [102], y se explica brevemente un mecanismo para enfriar la cadena de iones por medio del acoplamiento a un láser de frecuencia apropiadamente elegida [103]. Estas dos últimas secciones serán de importancia para la propuesta experimental considerada en el capítulo 7 de esta tesis. Finalmente, se describen algunas propuestas y experiencias relacionadas con simulaciones cuánticas utilizando iones atrapados.

4.1. Algunas generalidades sobre trampas de iones

Los iones son atrapados y mantenidos en ultra-alto vacío por medio de fuerzas electromagnéticas que no se acoplan a los estados internos. Estos estados internos son manipulados por medio de láseres lo suficientemente fuertes como para poder ser tratados clásicamente. La forma de trampa más común es la trampa lineal de Paul, en que los iones forman una cadena lineal [104, 105]. En estos aparatos, un potencial oscilante en radio-frecuencia se aplica a dos electrodos paralelos al eje de la trampa. Esto permite crear un potencial cuadrupolar oscilante, que para una frecuencia suficientemente alta ejerce una fuerza restitutiva que confina los iones sobre el eje de la trampa. Se requiere además de campos eléctricos estáticos para crear el confinamiento en la dirección del eje de la trampa. Una representación esquemática se muestra en la figura 4.1. Típicamente el potencial resultante puede en una buena aproximación ser descripto por un potencial armónico en las tres dimensiones. Si el confinamiento en dirección radial es mucho más fuerte que en dirección longitudinal, los iones se ordenan formando una cadena. Las



Figura 4.1: Esquema de una trampa lineal de Paul: el confinamiento en la dirección radial es producto de una combinación de electrodos a tierra (V=0) y otros con tensión alterna en radiofrecuencia (RF). El confinamiento axial lo proporcionan electrodos adicionales con tensión continua (V>0). Figura tomada de [106].

frecuencias típicas para el movimiento radial son entre 4 y 10 MHz, mientras que las axiales se encuentran generalmente entre 0.5 y 5 MHz. Las distancias típicas entre iones son del orden del micrón, y dependen tanto de las frecuencias de la trampa como del número de iones atrapados.

Algunos experimentos clave que han sido exitosamente llevados a cabo en trampas de iones incluyen: la utilización de subespacios "libres" de decoherencia para el almacenamiento de información [107]; la lectura parcial de un registro cuántico y la aplicación de operaciones condicionadas al resultado de la medición [108, 109, 110]; la teleportación, alcanzando fidelidades de entre 0.75 y 0.83. En el grupo de Innsbruck [110, 111] se introdujo un tiempo de espera de 20 ms (10 veces mayor que el tiempo que toma la teleportación) entre la creación del par entrelazado y la de estado a teleportar sin observar un decaimiento significativo de la fidelidad. En el grupo de NIST [108] la teleportación se llevó a cabo usando trampas segmentadas [112], que permitían el desplazamiento y reagrupación de los iones a lo largo del experimento.

El estado del arte en términos del control de trampas de iones se sintetiza a continuación:

- Los tiempos de coherencia de los qubits son uno o dos órdenes de magnitud mayores que los tiempos de las compuertas básicas. En algunas implementaciones pueden llegar a hacerse hasta cinco órdenes de magnitud más grandes.
- La preparación del estado inicial puede efectuarse con fidelidades del orden de 0.999.
- Las operaciones sobre los estados internos de los iones pueden realizarse con fidelidades de 0.995 o mayores.
- Las compuertas de dos qubits pueden alcanzar fidelidades del orden de 0.9–0.99.

- El estado interno de los iones puede medirse individualmente con fidelidades de 0.999.
- La mayor limitación para el procesamiento cuántico con iones atrapados parece dada por la fidelidad en las operaciones de dos qubits, y por la velocidad alcanzable en la aplicación de compuertas.

4.2. Procesamiento cuántico en trampas de iones

4.2.1. El Hamiltoniano básico

En primer lugar nos referiremos al Hamiltoniano de un ion de masa m, tratado como un sistema de dos niveles, interactuando con un oscilador armónico asociado a sus grados de libertad de movimiento a través del acoplamiento a un láser (una explicación más detallada puede encontrarse en [113, 114]). El Hamiltoniano de un ion atrapado interactuando con un láser cerca de la resonancia, teniendo en cuenta sólo dos niveles internos $|g\rangle |g\rangle |e\rangle$, y un modo de oscilación (orientado en dirección z) es de la forma [114]:

$$H = \hbar \Omega \left(\sigma_+ e^{-i(\omega_L t - \varphi - kz)} + \text{h.c.} \right)$$
(4.1)

Aquí σ_+ es el operador de subida para los niveles internos (y $\sigma^{\dagger}_+ = \sigma_-$ el de bajada), mientras que z es la posición del ion. Ω caracteriza la intensidad del acoplamiento al láser (es la llamada "frecuencia de Rabi"), ω_L es la frecuencia del láser, k la componente del vector de onda en la dirección z, y φ la fase del campo en la posición del ion.

Escribiendo la posición z en términos de operadores de creación y destrucción del oscilador armónico, a^{\dagger} y a, pasando a representación de interacción con respecto a los Hamiltonianos de los niveles internos y del oscilador armónico, y aplicando una aproximación de onda rotante, se llega al siguiente Hamiltoniano:

$$H = \hbar \Omega \sigma_{+} e^{-i(\Delta t - \varphi)} \exp\left(i\eta \left[a e^{-i\omega_{t}t} + a^{\dagger} e^{i\omega_{t}t}\right]\right) + \text{h.c.}$$
(4.2)

En esta expresión, Δ es la diferencia de frecuencia entre el láser y la transición de un nivel interno al otro. ω_t denota la frecuencia de la trampa y $\eta = kz_0$ es el parámetro de Lamb-Dicke, con $z_0 = \sqrt{\hbar/(2m\omega_t)}$ la escala espacial del estado fundamental del ion. Para la aproximación de onda rotante, se asume que tanto la diferencia de frecuencias Δ como la frecuencia de Rabi Ω son mucho menores que las frecuencias ópticas (una aproximación similar también puede realizarse para el caso de qubits basados en transiciones de Raman, ver sección 4.2.2).

Usando la aproximación de Lamb-Dicke, $\eta \sqrt{\langle (a + a^{\dagger})^2 \rangle} \ll 1$, la ecuación 4.2 puede reescribirse en la forma:

$$H = \hbar\Omega \left\{ \sigma_{+} e^{-i(\Delta t - \varphi)} + \sigma_{-} e^{i(\Delta t - \varphi)} + i\eta (\sigma_{+} e^{-i(\Delta t - \varphi)} - \sigma_{-} e^{i(\Delta t - \varphi)}) \left(a e^{-i\omega_{t}t} + a^{\dagger} e^{i\omega_{t}t} \right) \right\}.$$

$$(4.3)$$

Existen tres elecciones posibles para Δ que son de particular interés: $\Delta = 0$ y $\Delta = \pm \omega_t$. En estos casos, aplicando una segunda aproximación de onda rotante, se obtienen los siguientes Hamiltonianos (ver figura 4.2):

1. $\Delta = 0$: el Hamiltoniano que induce oscilaciones de Rabi entre los dos niveles internos:

$$H^{car} = \hbar \Omega (\sigma_+ e^{i\varphi} + \sigma_- e^{-i\varphi}). \tag{4.4}$$

Esta transición se nombra comúnmente como "portadora" (en inglés "carrier").

2. $\Delta = \omega_t$: el Hamiltoniano que describe la excitación en la "banda azul":

$$H^{+} = i\hbar\Omega\eta(\sigma_{+}a^{\dagger}e^{i\varphi} - \sigma_{-}ae^{-i\varphi}).$$
(4.5)

En este caso, la evolución excita el estado interno del ion al mismo tiempo que crea un fonón (es decir una excitación del oscilador armónico asociado al movimiento del ion). Se trata de un proceso oscilatorio entre los estados $|g,n\rangle \neq |e,n+1\rangle$ (donde n es el número de fonones) con frecuencia:

$$\Omega_{n,n+1} = \sqrt{n+1} \ \eta\Omega. \tag{4.6}$$

3. $\Delta = -\omega_t$: el Hamiltoniano que corresponde a la transición en la "banda roja":

$$H^{-} = i\hbar\Omega\eta(\sigma_{-}a^{\dagger}e^{-i\varphi} - \sigma_{+}ae^{i\varphi}).$$
(4.7)

En este caso, la excitación del estado interno es acompañada por la destrucción de un fonón, es decir se trata de una transición entre $|g,n\rangle$ y $|e,n-1\rangle$ con frecuencia:

$$\Omega_{n,n-1} = \sqrt{n} \ \eta \Omega \tag{4.8}$$

A los fines del procesamiento cuántico, resulta conveniente poder realizar estas transiciones que acoplan los niveles internos con los de movimiento en la forma más rápida posible. Sin embargo, las transiciones asociadas a las bandas azul y roja están suprimidas respecto de la transición resonante en un factor de $1/\eta$. Al intentar acelerar estas transiciones utilizando láseres muy intensos, aparecen efectos no-resonantes indeseados que hacen difícil superar frecuencias del orden de $\eta \omega_t$ [115].

El Hamiltoniano (4.3) puede fácilmente generalizarse a una trampa que contiene más de un ion, en la forma:

$$H = \hbar \sum_{j,l} \Omega_j \left\{ \sigma_+^{(j)} e^{-i\Delta_j t} + \sigma_-^{(j)} e^{i\Delta_j t} + i\eta_{jl} (\sigma_+^{(j)} e^{-i\Delta_j t} - \sigma_-^{(j)} e^{i\Delta_j t}) \left(a_l e^{-i\omega_l t} + a_l^{\dagger} e^{i\omega_l t} \right) \right\}.$$
(4.9)

En esta expresión los índices $j \ge l$ denotan respectivamente los distintos iones en la trampa y los distintos modos de movimiento para la cadena de iones. η_{jl} tiene en cuenta la transformación de las coordenadas de los iones individuales a los distintos modos colectivos, y el consiguiente acoplamiento del láser a los distintos modos [116].



Figura 4.2: Esquema de niveles de un ion atrapado considerando sólo dos estados internos, $|g\rangle \neq |e\rangle$, y un modo de oscilación con autoestados $|n\rangle$. Se muestran sólo los tres primeros niveles del oscilador. Se indican también las transiciones correspondientes al acoplamiento con la frecuencia portadora (láser resonante con la transición interna, $\Delta = 0$), la banda azul ($\Delta = \omega_t$) y la banda roja($\Delta = -\omega_t$). Los valores típicos de las frecuencias involucradas dependen de la elección de niveles para formar el qubit (ver próxima sección).

4.2.2. Elección de los iones

Para ser un buen qubit, un ion típicamente debe satisfacer los siguientes criterios: tener tiempos de coherencia relativamente largos (a comparación de los tiempos de operación que son del orden de $0.1 - 500\mu$ s), y tener transiciones en una frecuencia conveniente (en términos de los láseres necesarios para manipular el estado del sistema).

Existen dos esquemas fundamentales para utilizar iones como qubits, dados por diferentes elecciones de los niveles "lógicos" $|0\rangle$ y $|1\rangle$ (elegimos como $|0\rangle$ el estado más energético de los dos). En el primer caso (qubit óptico), el sistema de dos niveles está formado por el estado fundamental electrónico y un estado metaestable (Fig. 4.3a). Este tipo de qubits se puede implementar con Ca⁺, Sr⁺ o Ba⁺, y tiene un tiempo de vida de más de un segundo. Escalas temporales aún mayores pueden obtenerse en el segundo esquema, que utiliza la estructura Zeeman o hiperfina del nivel fundamental electrónico (qubits de radio-frecuencia, Fig. 4.3b). Los tiempos de decoherencia de estos estados son mucho más largos que cualquier escala experimental relevante. Además de los niveles utilizados para codificar el qubit, en general se utiliza un tercer nivel para el enfriamiento y la medición del ion.

Para explotar todo el potencial de un qubit óptico se requieren láseres muy estables, mientras que las frecuencias de transición para qubits de radio-frecuencia son típicamente menores que 10 GHz y facilitan la estabilidad de fase. Estos últimos qubits, además, pueden ser manipulados tanto por medio de microondas como por un proceso Raman que involucra láseres de dos frecuencias distintas, cuya diferencia es igual a la diferencia de energía entre los niveles internos del ion. Estos dos láseres pueden típicamente obtenerse de la misma fuente, permitiendo la estabilidad de la fase. El uso de láseres permite una mayor resolución espacial, ya que las posibilidades de enfocar el láser son mejores que para microondas, lo



Figura 4.3: Esquema de niveles para un qubit óptico (izquierda) y de radio-frecuencia (derecha). Además de los niveles internos asociados al qubit, $|0\rangle$ y $|1\rangle$, típicamente se requiere de un tercer nivel inestable que se utiliza para el enfriamiento láser y la medición del estado del sistema. En el caso de un qubit de radio-frecuencia, la transición entre los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ puede corresponder a la diferencia de energía entre dos láseres (transición Raman). Figura tomada de [101].

cual permite efectuar transiciones más rápidas con menores efectos asociados a la excitación indeseada de iones cercanos. Finalmente, esta implementación permite la libertad adicional de incrementar el acoplamiento a los modos de movimiento (si los dos láseres utilizados se propagan en sentidos opuestos) o minimizarlo (si se propagan en el mismo sentido).

Para los dos tipos de qubits, los tiempos de coherencia están típicamente limitados por fluctuaciones del campo magnético, que introducen desfasajes indeseados. Este tema se tratará con más detalle en la sección 4.3.

Finalmente, es deseable que las transiciones relevantes se encuentren en una región de frecuencias accesible a los láseres disponibles. En general los iones tienden a tener transiciones en frecuencias altas, para las que el equipamiento es más caro y menos efectivo. En relación con este aspecto, los iones convenientes resultan el calcio, el estroncio y el iterbio. Por otro lado, el berilio y el magnesio son atractivos ya que gracias a su pequeña masa tienen factores de Lamb-Dicke relativamente grandes ($\eta \approx 0.3$) que facilitan el acoplamiento entre grados de libertad internos y externos, aunque requieren de láseres en el ultravioleta.

La preparación del estado interno al inicio del cómputo o experimento es típicamente lograda a través del bombeo óptico: el ion es sometido a una transición entre dos niveles, uno de los cuales puede decaer a otro nivel que es insensible al bombeo. Con este mecanismo se pueden obtener estados iniciales con fidelidades del orden de 0.99-0.999 [117].

Al final del cómputo, se debe realizar una medición del estado interno del ion. Una forma estándar de lograrlo es aplicar radiación que se acopla a uno solo de los niveles "lógicos", produciendo la fluorescencia del átomo cuando éste se encuentra en un dado estado de la base computacional. Los tiempos de detección suelen ser del orden de un milisegundo con fidelidades del orden de 0.99.

4.2.3. Manipulación de los estados internos

El estado interno de los iones puede ser controlado fácilmente por medio de oscilaciones de Rabi entre los dos niveles lógicos, inducidas por el Hamiltoniano (4.4). El efecto de este tipo de acoplamiento al láser es una rotación $R(\theta, \varphi)$ en la esfera de Bloch:

$$R(\theta,\phi) = \exp\left[\frac{i\theta}{2} \left(e^{i\varphi}\sigma_{+} + e^{-i\varphi}\sigma_{-}\right)\right] = \begin{pmatrix}\cos(\frac{\theta}{2}) & ie^{i\varphi}\sin(\frac{\theta}{2})\\ie^{-i\varphi}\sin(\frac{\theta}{2}) & \cos(\frac{\theta}{2})\end{pmatrix}$$
(4.10)

El ángulo φ especifica el eje de rotación en el plano ecuatorial y θ el ángulo de rotación en torno de este eje, de modo que cualquier combinación lineal de operaciones σ_x y σ_y puede obtenerse de esta forma. Los parámetros que gobiernan la rotación son $\theta = \Omega \tau$ (con τ la duración del pulso) y la fase del láser, φ , que pueden modificarse con un modulador acusto-óptico.

Las rotaciones en torno del eje z pueden ser obtenidas componiendo rotaciones del tipo anterior, o pueden lograrse como efecto Stark debido a un láser lejos de la resonancia, que puede causar un corrimiento de la diferencia de energía entre niveles en la forma $\Delta E = \hbar \Omega^2 / (2\Delta)$.

La manipulación del estado interno de los iones se realiza fácilmente con fidelidades que exceden 0.99 [118]. Esta fidelidad está típicamente limitada por factores como fluctuaciones en la intensidad del láser, vibraciones térmicas de la cadena de iones, o emisiones espontáneas desde el nivel intermedio para el caso de transiciones Raman. Los efectos debidos a vibraciones en general sólo son relevantes para qubits ópticos, ya que las transiciones Raman permiten minimizar el acoplamiento a los grados de libertad de movimiento.

La velocidad de las operaciones sobre el estado interno de un ion está generalmente limitada por el modulador acusto-óptico usado para controlar el láser. Otros límites a la velocidad están dados por la potencia de láser disponible y por la presencia de transiciones cercanas cuya excitación se quiere evitar y que impiden aumentar la intensidad del acoplamiento.

El acoplamiento individual del láser a un dado ion es un problema delicado en la medida en que, al aumentar el número de iones en una trampa, las distancias entre ellos disminuyen requiriendo una gran precisión al enfocar el haz láser. El enfocado del haz es la estrategia más directa y permite, en los experimentos de Innsbruck, una cintura de 2 μ m suficiente para acoplamientos individuales ya que la distancia entre iones es del orden de 5 μ m. Los acoplamientos indeseados a iones vecinos son del orden de 0.03 con respecto a la intensidad del acoplamiento en el ion objetivo. Por otro lado, la resolución espacial mejora cuando el láser se propaga perpendicular a la trampa, pero el acoplamiento a los modos de movimiento axiales requiere de una componente en la dirección z. Esto puede resolverse con una solución de compromiso en la elección del ángulo, o alternativamente tomando en consideración los modos transversales de la trampa (ver sección 4.4). Existen además métodos que permiten reducir los efectos de acoplamientos no deseados, por ejemplo aplicando pulsos compuestos para lograr cada rotación.

Una técnica alternativa para lograr el acoplamiento individual consiste en utilizar un láser o campo magnético inhomogéneo de modo que los distintos iones tengan distintas frecuencias de transición. De esta manera un láser resonante en un ion no será resonante para los otros, y por lo tanto se acoplará a éstos más débilmente. Sin embargo esta técnica requiere, cuando se tiene un número relativamente grande de iones, de un control muy preciso del gradiente del campo. Finalmente, para permitir la escalabilidad del sistema a números grandes de iones, es posible utilizar trampas segmentadas. Éste es el tipo de trampas que se emplea en el grupo de NIST, y en ellas los iones pueden desplazarse entre zonas de almacenamiento y zonas de manipulación, reordenarse, etc.

El acoplamiento entre distintos iones en una cadena, necesario para tareas de procesamiento cuántico de la información, se obtiene utilizando los modos colectivos de vibración. El uso de excitaciones de estos modos y el acoplamiento de éstas a los estados internos por medio de transiciones en la banda azul o roja permiten lograr interacciones efectivas entre los distintos iones. Existen varias propuestas que han permitido entrelazar los estados internos de distintos iones utilizando los grados de libertad de movimiento como mediadores. Entre ellas, las más relevantes son la compuerta de fase controlada de Cirac-Zoller [119], la compuerta de Mølmer-Sørensen [120], y la compuerta de fase geométrica [121]. La fidelidad de esta clase de acoplamientos está fuertemente limitada por efectos térmicos, es decir por la posibilidad de preparar estados de movimiento de exactamente n fonones.

4.3. Decoherencia en trampas de iones

Esta sección describe los mecanismos más relevantes para la decoherencia de los iones atrapados. Una discusión más detallada puede encontrarse en [113].

4.3.1. Decoherencia de los estados internos

Bit-flips

Los errores tipo bit-flip corresponden al paso indeseado de un estado lógico a otro por emisión espontánea. Esta clase de error es típicamente despreciable (los tiempos en que ocurren son del orden de 1 s., mientras que la escala de operación de los qubits suele ser menor que 1 ms.).

Desfasaje

La utilización de dos estados internos con distinto momento magnético conduce, debido a fluctuaciones en el campo magnético, a errores de desfasaje. Éstos también pueden ocurrir debido a fluctuaciones en la frecuencia del láser. Estas fluctuaciones pueden ocurrir en distintas escalas temporales: pueden ser más cortas que el tiempo de un dado experimento, o pueden ocurrir de un experimento a otro. Posibles estrategias para reducir el desfasaje utilizan aislamiento magnético, o niveles con el mismo momento magnético (usando la estructura hiperfina).

4.3.2. Imperfecciones en el control de los iones

Una fuente seria de decoherencia es el control imperfecto de los pulsos utilizados para manipular el estado de los iones, generalmente asociados a fluctuaciones en la intensidad, frecuencia o apuntado del láser. A esto hay que sumarle los errores asociados a transiciones indeseadas en los vecinos del ion sobre el que actúa la operación. Estas imperfecciones pueden ser fuertemente reducidas utilizando pulsos compuestos y técnicas de control óptimo. A continuación se enumeran algunos de los errores más frecuentes:

- Errores de duración de los pulsos debidos a las fluctuaciones ya mencionadas. Estas fluctuaciones tienen una escala temporal típica debajo del kHz, es decir más lenta que una secuencia usual de pulsos. Las fluctuaciones en amplitud suelen ser del orden de 10⁻². Otra fuente de fluctuaciones efectivas en la intensidad corresponde a un enfriamiento insuficiente de la cadena, ya que distintos números de fonones inducen distintos valores para las frecuencias de transición (ver ecs. 4.8 y 4.6). Sin embargo, este efecto no es tan grave para cadenas de varios iones ya que los factores de LambDicke tienden a ser menores y las contribuciones de los distintos modos se promedian, disminuyendo las fluctuaciones.
- Errores de sintonización del láser tienen efectos similares a los de las fluctuaciones del campo magnético, introduciendo desfasajes, pero pueden ser cancelados utilizando técnicas de espín-eco.
- Errores de apuntado del láser (que ya fueron mencionados en la sección 4.2.3).
- Excitaciones no resonantes que son problemáticas cuando se quiere excitar una transición débil en presencia de una transición cercana más fuerte [115, 122]. En particular, la transición entre niveles internos sin acoplar a los modos de vibración tiene un acoplamiento mayor en un factor $1/\eta$ respecto de las bandas roja o azul, como se ve en (4.4-4.7). Las transiciones no resonantes pueden ser interpretadas como una consecuencia de que un pulso centrado en una dada frecuencia tiene también componentes de Fourier en otros valores; la excitación de las frecuencias problemáticas puede ser evitada modelando el pulso en la forma apropiada.
- Efecto Stark alterno de origen similar al de las excitaciones no resonantes, excepto que afecta la fase en lugar de la población de los niveles. Esta variación en la fase puede ser tenida en cuenta y cancelada, pero el

valor puede ser tan grande que requiera una enorme estabilidad del láser. Una estrategia para reducir este efecto es introducir un segundo láser que genere un efecto Stark de signo contrario (este segundo láser puede ser obtenido de la misma fuente que el anterior).

4.3.3. Coherencia del estado de movimiento

El estado vibracional de los iones sufre cambios en la población debidos a efectos térmicos, y desfasajes debidos a fluctuaciones en la frecuencia de la trampa. Estas últimas fluctuaciones son lentas y del orden de unos pocos Hz, en tanto que los efectos térmicos pueden deberse a radiación electromagnética en las frecuencias de la trampa. Esta radiación se debe típicamente a fluctuaciones de voltaje del material que forma la misma trampa, en particular debido al movimiento térmico de los electrones dentro de los conductores.

Las tasas de calentamiento dependen fuertemente del material y la estructura de la trampa, y los mecanismos no están completamente claros [113]. Los valores pueden llegar a unos pocos fonones por ms [114, 15], pero pueden ser muy reducidos enfriando los electrodos a ≈ 150 K [123]. Las trampas más pequeñas permiten manipulación más rápida de los iones al costo de mayores efectos térmicos. Pero por otro lado, estas trampas pueden ser enfriadas más fácilmente (hasta el orden de algunos K).

Los efectos de desfasaje también deben ser tenidos en cuenta. Para los modos axiales más altos que el centro de masa, los tiempos de coherencia son del orden de 5 ms [124]. A diferencia del centro de masa, estos modos sufren el hecho de que su frecuencia depende del estado de los modos radiales, lo cual introduce un desfasaje adicional a las fluctuaciones en la frecuencia de la trampa.

4.4. Grados de libertad transversales

Existe una serie reciente de artículos abocados al estudio de los grados de libertad de movimiento de los iones en una dirección transversal al eje de la trampa [102, 125, 126]. Estos trabajos analizan esencialmente dos ejes de interés: en primer lugar, el estudio de transiciones de fase cuánticas (en este caso, entre una cadena lineal y una configuración de zig-zag), y en segundo lugar, la posibilidad de utilizar los grados de libertad transversales para procesamiento cuántico. En esta sección se comentarán brevemente algunos resultados relacionados con estas líneas de trabajo.

Consideramos una cadena de N iones de masa m atrapados por un potencial armónico tridimensional y que interactúan entre sí por repulsión coulombiana. En la dirección axial z de la cadena el confinamiento es menor que en las direcciones transversales $x \in y$. A su vez, suponemos por simplicidad que en la dimensión transversal y el potencial es mayor que en la dirección x, de modo que el problema se vuelve efectivamente bidimensional. El Hamiltoniano resultante es de la forma:

$$H = \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{p_j^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_x^2 x_j^2 + \frac{1}{2} m \omega_z^2 z_j^2 \right] + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i>j}^{N} \frac{1}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (z_i - z_j)^2}}$$
(4.11)

donde x_j es la posición del ion *j*-ésimo en la dirección transversal x, y z_j su posición a lo largo del eje de la trampa. Para un dado valor de la frecuencia de confinamiento axial, la configuración de equilibrio de la cadena depende del confinamiento ω_x en la dirección transversal. Existe un valor crítico ω_c ($\omega_c \approx 3N\omega_z/(4\sqrt{\log N})$, para $N \gg 1$ [125]) para el cual se observa una transición entre una cadena lineal (cuando $\omega_x > \omega_c$) y una configuración de zig-zag (si $\omega_x < \omega_c$). Para valores aún menores de ω_x se obtienen configuraciones más complicadas.

En adelante consideraremos el caso en que configuración de equilibrio es lineal. En este caso, las posiciones de equilibrio de los iones no dependen de la frecuencia transversal. Realizando una expansión de Taylor al cuarto orden en torno del equilibrio se obtiene el Hamiltoniano [126]:

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^{N} p_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^{N} \gamma_{ij} x_i x_j + \sum_{j=1}^{N} b_j x_j^4 + \sum_{ij=1}^{N} \alpha_{ij} x_i^2 x_j^2 + \kappa_{ij} x_i^3 x_j, \qquad (4.12)$$

donde:

$$\gamma_{ii} = m\omega_x^2 - \sum_j \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 |z_i - z_j|^3}, \quad b_i = \frac{1}{4!} \sum_j \frac{9e^2}{4\pi\epsilon_0 |z_i - z_j|^5}, \tag{4.13}$$

y para $i \neq j$ se tiene:

$$\gamma_{ij} = \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 |z_i - z_j|^3}, \quad \alpha_{ij} = \frac{9e^2}{16\pi\epsilon_0 |z_i - z_j|^5}, \quad \kappa_{ij} = -\frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 |z_i - z_j|^5}.$$
 (4.14)

En esta expresión se omite el acoplamiento entre modos axiales y transversales, presente en el tercer y cuarto órdenes de Taylor pero que puede despreciarse [126]. Suficientemente lejos de la transición de fase, el Hamiltoniano puede aproximarse por la expansión a segundo orden; a medida que la frecuencia transversal se acerca al valor crítico, los efectos no lineales se vuelven más importantes.

Los grados de libertad transversales resultan entonces de interés en tanto permiten estudiar en forma controlada una transición de fase cuántica, efectos relacionados con la presencia de un estado fundamental degenerado al pasar a la configuración de zig-zag, la formación de defectos durante la transición, etc. Por otra parte, es posible considerar la manipulación de los grados de libertad transversales para realizar protocolos de información cuántica. Una ventaja que proporcionan con respecto a los grados de libertad axiales es la posibilidad de alcanzar altos grados de estrujamiento manteniendo válida la aproximación armónica. Por otra parte, los grados de libertad transversales pueden acoplarse fuertemente a láseres cuya dirección de propagación es perpendicular al eje de la cadena, lo cual facilita la manipulación individual de los iones. De cualquier manera, al aumentar el número de iones las distancias entre ellos en la zona central de la cadena disminuyen impidiendo el control individual usando láseres enfocados a un solo ion. Pero el uso del movimiento transversal tiene también la ventaja de incorporar un parámetro extra de control dado por la frecuencia de confinamiento transversal. Como se muestra en [102], la capacidad de variar esta frecuencia para cada sitio de la cadena permite implementar transformaciones gaussianas arbitrarias sobre el estado del movimiento.

4.5. Enfriamiento de la cadena de iones

En esta sección se explican algunos principios básicos sobre uno de los mecanismos más usuales para enfriar iones atrapados, el llamado "*sideband cooling*". El contenido es esencialmente un resumen del presentado en [103], donde se incluye además la descripción de una variedad de métodos alternativos.

Por simplicidad, consideremos en primer lugar el caso de un solo ion atrapado, prestando atención al movimiento en una única dirección espacial y tratando sus estados internos como un sistema de dos niveles. El Hamiltoniano que describe la interacción entre este ion y un láser cerca de la resonancia (es decir, cuya frecuencia es próxima a la de transición entre esos dos niveles) es de la forma descrita en la ecuación (4.1). El efecto de este acoplamiento consiste en inducir excitaciones y desexcitaciones del estado interno del ion, acompañadas de eventuales transiciones en el estado de movimiento, asociadas al efecto del operador e^{ikz} .

La evolución completa del ion está por lo tanto dada por la combinación de su propio Hamiltoniano (correspondiente a un oscilador armónico para los grados de libertad, más un sistema de dos niveles para los estados internos), el Hamiltoniano de acoplamiento al láser, y un término extra asociado a la emisión espontánea, proceso por el cual el estado interno se desexcita y que también involucra en general una transición en el estado de movimiento.

En lo sucesivo nos referiremos únicamente al caso en que la tasa de decaimiento espontánea Γ es mucho menor que la frecuencia ω_t de la trampa, y asumiremos que vale la aproximación de Lamb-Dicke, es decir que la extensión del paquete de ondas correspondiente al estado del átomo es mucho menor que la longitud de onda del láser. En esta situación, el Hamiltoniano puede escribirse en la forma (4.3), donde las transiciones dominantes son la portadora, en la cual el estado de movimiento no es alterado, y las bandas azul y roja, correspondientes a la excitación o desexcitación en un fonón.

El protocolo para enfriar consiste esencialmente en elegir la frecuencia del láser de tal forma que resulten más probables las transiciones tendientes a disminuir el número de fonones. Las tasas de transición del estado $|g,n\rangle$ a los estados $|g,n+1\rangle$ y $|g,n-1\rangle$ son de la forma $(n+1)A_+$ y nA_- respectivamente. Las amplitudes A_{\pm} dependen de parámetros como la frecuencia de la trampa, la diferencia de frecuencias entre el láser y la transición interna del ion, la tasa de decaimiento espontáneo, etc. La evolución del número medio de fonones obedece la ecuación:

$$\frac{d\langle n\rangle}{dt} = (A_+ - A_-)\langle n\rangle + A_+ \tag{4.15}$$

Cuando la frecuencia del láser es menor que la de la transición interna, resulta $A_- > A_+$ y el proceso llega a una solución estacionaria con un número medio de fonones:

$$\langle n \rangle = \frac{A_+}{A_- - A_+} \tag{4.16}$$

La escala temporal en la cual el sistema se acerca a la situación asintótica está dada por $(A_- - A_+)^{-1}$.

Para el caso considerado $\Gamma \ll \omega_t$, la elección óptima para la frecuencia del láser corresponde a la banda roja. En esta situación, el número medio de fonones en el estado asintótico es

$$\langle n \rangle \simeq \left(\frac{\Gamma}{\omega_{\rm t}}\right)^2 \ll 1$$
 (4.17)

es decir, el estado final del protocolo corresponde prácticamente al vacío del oscilador armónico.

Este esquema básico puede extenderse a situaciones más complejas involucrando más de una dimensión espacial o cadenas de varios iones. En este caso, existe un conjunto de frecuencias relevantes, asociadas a los diferentes modos. Una manera posible de enfriar el conjunto es por medio de sucesivas aplicaciones de este protocolo en la banda roja de los distintos modos. Si bien al enfriar un modo el acoplamiento láser tiende a calentar los otros modos, este efecto es no-resonante y este tipo de estrategia permite alcanzar estados muy cercanos al vacío del conjunto de modos. Por ejemplo, el grupo de NIST ha logrado enfriar una cadena formada por dos iones, uno de ⁹Be y otro de ²⁴Mg, llevando los dos modos axiales a números de ocupación media de 0.03 y 0.04 [127].

4.6. Simulaciones cuánticas en trampas de iones

La implementación de simulaciones cuánticas en trampas de iones es prometedora en la medida en que muchas veces permite aprovechar las interacciones naturalmente presentes en el sistema, y tiene requerimientos moderados en términos de la fidelidad de las operaciones. Existe por lo tanto una variedad de propuestas de simulaciones en este contexto, algunas de las cuales ya se han llevado parcialmente a cabo (en sistemas pequeños, de unos pocos iones). A continuación se hará una breve revisión de algunas de las diversas propuestas y experiencias desarrolladas; se trata esencialmente de una síntesis de [128], donde puede encontrarse una exposición detallada y reciente del tema.

Modelos de espines

Los estados internos de un ion pueden asociarse a distintos estados de un espín efectivo. Es posible obtener interacciones entre los espines asociados a distintos iones utilizando la interacción eléctrica entre ellos sumada al acoplamiento a láseres que proporcionan fuerzas externas dependientes del estado interno. A raíz de este tipo de fuerzas, la posición de equilibrio de un ion puede depender de su estado interno, lo que a través de la repulsión de Coulomb altera la posición de equilibrio de otro ion; debido a campos magnéticos espacialmente variables o láseres estacionarios fuera de resonancia, esto puede introducir a su vez una modificación en los niveles internos [129, 80, 130].

A modo de ejemplo, en [130] se muestra cómo fuerzas dependientes del estado interno que actúan sobre el movimiento en una dirección transversal de una cadena de iones pueden utilizarse para simular modelos de Ising o XY con campo transverso. Esto puede implementarse tanto en cristales de Coulomb como en cadenas de microtrampas. El uso de cadenas de microtrampas proporciona la ventaja de permitir el control local de los acoplamientos y campos externos, y la posibilidad de trasladar los iones a distintas secciones de la trampa, aunque como contrapartida suele sufrir de mayores problemas de calentamiento [15].

El modelo de Ising con campo transverso resulta de interés gracias a la presencia de transiciones de fase cuánticas en una dimensión. Existen varias propuestas para la implementación de modelos similares a éste con iones atrapados [131, 121, 80, 132]. Recientemente se reportó una realización experimental de la propuesta de Porras y Cirac [80] usando dos iones atrapados de $^{25}Mg^+$ [133]. En esta experiencia se induce una transición adiabática entre una fase paramagnética y una ferromagnética en un sistema compuesto por sólo dos partículas, aunque los métodos son en principio generalizables a números más grandes.

Modelo de espín-bosón

El modelo de espín-bosón [65, 75] describe la dinámica de una partícula de espín 1/2 que interactúa con un baño de osciladores armónicos. Este tipo de acoplamientos pueden obtenerse a partir de aplicar fuerzas dependientes del estado interno sobre alguno de los iones de una cadena; los osciladores del entorno corresponden a los distintos modos colectivos de vibración. En [134] se muestra cómo un láser enfocado en un ion particular permite simular este modelo, considerando además distintas densidades espectrales y efectos de tamaño finito.

Transiciones de fase de campos escalares

Las cadenas de iones confinados por distintos tipos de potenciales exhiben transiciones de fase clásicas entre distintas configuraciones espaciales, que han sido estudiadas teórica y experimentalmente [135, 104, 136, 125]. Retzker et al. [126] sugieren la exploración de la transición entre una configuración lineal y una de zig-zag en el régimen cuántico. Esta transición puede asimilarse a una correspondiente a un campo escalar con ruptura espontánea de simetría, lo cual permite por ejemplo estudiar la formación de defectos.

Efectos cuánticos en biología

Estudios recientes muestran que el desfasamiento inducido por un ambiente puede incrementar la transferencia de energía o información en una red de nodos cuánticos [137], presentando modelos simplificados que sugieren que algunas moléculas podrían aprovechar este proceso para optimizar procesos relacionados con la fotosíntesis. Si bien la verificación experimental utilizando estas moléculas es difícil, el modelo propuesto podría ser testeado utilizando iones atrapados. En una línea similar, se podría testear en sistemas de iones un estudio teórico reciente que indica que el entrelazamiento en situaciones dinámicas puede persistir incluso en contacto con ambientes a alta temperatura, como es el caso de las moléculas en problemas de relevancia en biología [138].

Óptica cuántica

En [139] se muestra cómo implementar, con un único ion atrapado, una amplia clase de Hamiltonianos de una partícula de espín 1/2 en un potencial externo. En la misma publicación se reportan además resultados experimentales de la simulación de divisores de haz no lineales. La no-linealidad introduce en esta situación un incremento en la frecuencia de las franjas de interferencia, potencialmente aplicable para obtener un aumento de sensibilidad.

Modelo de Bose-Hubbard

En [45] se propone la idea de utilizar los grados de libertad fonónicos para simular distintos modelos bosónicos. Considerando los iones como sitios de una red y los fonones asociados al movimiento transversal de cada ion como un sistema de bosones, es posible investigar experimentalmente el modelo de Bose-Hubbard [140]. Por ejemplo, es posible simular una transición entre superfluido y aislante de Mott en una implementación en que cada sitio se asocia a la vibración en dirección transversal de un ion de la cadena, mientras que el acoplamiento (débil) entre las vibraciones transversales de distintos iones permite el tuneleo y las correcciones cuárticas al potencial de la trampa proporcionan un término de interacción entre bosones en un dado sitio [141]. Las anarmonicidades pueden también ser inducidas por ondas estacionarias fuera de resonancia; con este tipo de estrategia es posible simular un gas de Tonks-Girardeau [141] y modelos XY frustrados [142].

Modelo de Frenkel-Kontorova

El modelo de Frenkel-Kontorova describe una cadena lineal de partículas con interacciones armónicas a primeros vecinos, sujetas a un potencial sinusoidal. Este sistema es clásico y unidimensional, y su interés se relaciona con la dinámica no lineal y el caos. A pesar de su simplicidad, el modelo permite describir una gran variedad de fenómenos físicos, incluyendo problemas bidimensionales [143]. El modelo de iones de Frenkel-Kontorova describe una cadena lineal de iones atrapados y acoplados a una onda estacionaria. El tratamiento cuántico del modelo introduce modificaciones no triviales como la aparición de "instantones", y la posibilidad de variar el valor de la constante de Planck efectiva [144].

Efecto Unruh y creación de partículas en un universo en expansión

Unruh [145] mostró que en el vacío de un espacio de Minkowski un observador acelerado mediría un espectro de partículas correspondiente a un estado térmico, con temperatura proporcional a la aceleración. Efectos similares a éstos pueden observarse en el movimiento de un ion atrapado en un potencial que depende del tiempo. La variación del potencial externo conduce entonces a la creación de fonones, que permiten definir una temperatura efectiva asociada a la tasa de cambio del potencial de la trampa. Las principales dificultades para la implementación de este modelo están asociadas al calentamiento indeseado del ion.

El efecto de un universo en expansión conduce también a la creación de partículas [146]. Es posible describir este proceso a partir de fluctuaciones de vacío en términos de una expansión no-adiabática, que conduce de un estado de vacío a uno estrujado [44]. Este fenómeno puede obtenerse también en una cadena de iones sometida a una variación rápida del potencial externo [147]. Los fonones se comportan en este caso en forma análoga a las partículas de un campo escalar.

Simulación de la ecuación de Dirac

Con un ion atrapado es posible simular también efectos relativistas asociados a la solución de la ecuación de Dirac [148]; en particular el fenómeno de "Zitterbewegung" (movimiento helicoidal de la partícula de Dirac libre como consecuencia de la no-conmutatividad de las diferentes componentes de la velocidad) o la paradoja de Klein (transmisión casi total de una partícula relativista de masa m a través de un potencial de altura $V > 2mc^2$).

La simulación de la ecuación de Dirac en 3 + 1 dimensiones requiere de la utilización de cuatro niveles internos del ion, de modo de representar todas las componentes del espinor. La dinámica es generada a través del acoplamiento entre estos niveles internos y el movimiento del ion. Sin embargo, es necesario utilizar y controlar separadamente un gran número de láseres, lo cual hace el experimento demasiado difícil. Afortunadamente, es posible simplificar la implementación enormemente y manteniendo los efectos relativistas más importantes reduciendo el problema a 2+1 o 1+1 dimensiones.

La implementación experimental de la simulación de la ecuación de Dirac ha sido llevada a cabo recientemente [46], demostrando en 1+1 dimensiones algunos efectos como el *Zitterbewegung* y la transición entre dinámica relativista y no-relativista. En esta experiencia ha sido posible medir la evolución temporal de la densidad de probabilidad como función de la posición usando fuerzas dependientes de la posición y mediciones por fluorescencia.

Parte II

Decoherencia por cadenas de espines

Capítulo 5

Decoherencia en el modelo de un espín central: estudio del régimen universal

En este capítulo se analiza la decoherencia inducida sobre un qubit a raíz de la interacción con una cadena de espines con dinámica propia no trivial (Hamiltoniano tipo Ising o XY con campo transverso). El objetivo de este trabajo es estudiar las propiedades del llamado "régimen universal", en el cual la escala temporal para la pérdida de coherencia se vuelve independiente de la intensidad del acoplamiento con el ambiente. La existencia de este régimen fue establecida por Cucchietti *et al* en [24], interpretando la detección de este tipo de comportamiento como señal de una transición cuántica de fase en el entorno. En este capítulo se muestra que este tipo de universalidad puede existir también en ausencia de transiciones de fase. Los resultados presentados indican además que en el régimen de acoplamiento fuerte la proximidad a la transición de fase no induce un aumento de la decoherencia, al contrario de lo que ocurre cuando el acoplamiento entre sistema y entorno es débil.

El capítulo está organizado en la siguiente forma: en primer lugar, en la sección 5.1 se introduce el modelo, similar a uno ya presentado en el capítulo 2. En la sección 5.2 se muestra cómo calcular la decoherencia en este problema, mapeando el sistema de espines a uno fermiónico por medio de la transformación de Jordan-Wigner. La sección 5.3 se dedica al estudio del régimen considerado en [24], en el cual la pérdida de coherencia está caracterizada por una envolvente gaussiana universal. En la sección 5.4 se muestran casos similares con envolventes no gaussianas, y finalmente la sección 5.5 discute las razones para la existencia de las características universales en la decoherencia del sistema.

5.1. El modelo: un qubit central interactuando con una cadena de espines

Consideraremos a continuación la decoherencia inducida en una partícula de espín 1/2, a la que se llamará "el sistema" o "el qubit", a raíz del acoplamiento a un entorno formado por una cadena de N partículas de espín 1/2. Se despreciará el Hamiltoniano propio del sistema, y se considerará que el qubit interactúa igualmente con todos los espines de la cadena. Por simplicidad, en este capítulo y el próximo tomaremos $\hbar = 1$. El Hamiltoniano del entorno será modelado por un Hamiltoniano tipo XY con campo transverso [94, 67, 149]:

$$H_E = -\sum_{j} \left\{ \frac{1+\gamma}{2} X_j X_{j+1} + \frac{1-\gamma}{2} Y_j Y_{j+1} + \lambda Z_j \right\}$$
(5.1)

en el que se imponen condiciones periódicas de contorno, y donde los tres operadores de Pauli actuando sobre el *j*-ésimo sitio de la cadena se notan X_j, Y_j, Z_j . El parámetro γ en el Hamiltoniano determina la anisotropía en el plano *x-y*, en tanto que λ corresponde a un campo magnético en la dirección *z*; para $\gamma = 1$ se obtiene el Hamiltoniano de Ising con campo transverso. Este modelo es crítico para $\gamma = 0 \text{ con } |\lambda| < 1$ y para $\lambda = \pm 1$, que corresponde (en el límite $N \to \infty$) a una transición cuántica de una fase ferromagnética a una paramagnética [150, 151]. A lo largo del trabajo, se discutirán los effectos de esta transición sobre la decoherencia del sistema.

El Hamiltoniano de interacción entre sistema y entorno es el siguiente:

$$H_{int} = -g|1\rangle\langle 1| \otimes \sum_{j} Z_{j}.$$
(5.2)

Notamos $|0\rangle$ y $|1\rangle$ los dos autoestados del operador de Pauli sobre el qubit Z_S , con autovalores +1 y -1 respectivamente. De esta forma, dependiendo del estado del sistema, el entorno evoluciona con un Hamiltoniano efectivo diferente H_a (a = 0, 1) dado por:

$$H_a = H_E - ag \sum_j Z_j,$$

lo cual es un cambio del campo magnético efectivo en la forma $\lambda \to \lambda^{(a)} = \lambda + ag$.

Se asume que el estado inicial del universo formado por sistema y entorno es puro, y que no existen correlaciones entre ellos:

$$\rho_{SE}(0) = |\psi\rangle\langle\psi| \otimes |E_0\rangle\langle E_0|, \qquad (5.3)$$

donde $|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$. El objetivo es estudiar la evolución de la matriz densidad reducida del sistema, ρ . A causa de la forma del Hamiltoniano, la dependencia temporal de ρ puede ser obtenida formalmente como se explica a continuación. En la base computacional, es decir de autoestados de Z_S , ρ puede escribirse en la forma:

$$\rho(t) = \sum_{ab=0,1} \rho_{a,b}(t) |a\rangle \langle b|.$$
(5.4)

Al igual que en los modelos tratados en la sección 2.2, la evolución de los elementos de matriz de ρ está dada por:

$$\rho_{a,b}(t) = \rho_{a,b}(0) \ \langle E_0 | e^{iH_b t} e^{-iH_a t} | E_0 \rangle \tag{5.5}$$

Como el Hamiltoniano total conmuta con Z_S , los términos diagonales $\rho_{a,a}$ permanecen constantes. La amplitud de los términos no diagonales, en cambio, es multiplicada por el solapamiento entre dos estados del entorno que corresponden a las dos posibles evoluciones de la cadena correspondientes a los dos estados distintos del qubit. La decoherencia inducida por el ambiente será analizada a través del módulo cuadrado de este factor, al que, siguiendo a [152, 25], llamaremos "eco de Loschmidt":

$$L(t) = |\langle E_0 | e^{iH_0 t} e^{-iH_1 t} | E_0 \rangle|^2.$$
(5.6)

Este eco se simplifica si se asume que el entorno se encuentra inicialmente en un autoestado del Hamiltoniano H_0 (que es el Hamiltoniano de la cadena no perturbada por la interacción con el qubit). En este caso, uno de los operadores de evolución actúa trivialmente, de modo que el eco resulta igual a la "probabilidad de supervivencia" del estado inicial de la cadena luego de ser evolucionado con el Hamiltoniano efectivo H_1 . A lo largo de este trabajo se considerará el caso especial en que el estado inicial del entorno es su estado fundamental.

En tanto el estado inicial es puro y separable, a consecuencia de la interacción el qubit se entrelaza con la cadena, de modo que su matriz densidad reducida se vuelve mixta. La pureza del qubit en función del tiempo puede ser calculada a partir del eco de Loschmidt:

$$Tr(\rho^{2}(t)) = 1 - 2|\alpha\beta|^{2}(1 - L).$$
(5.7)

5.2. Transformación de Jordan-Wigner y cálculo del eco de Loschmidt

Para encontrar el eco de Loschmidt se utiliza el siguiente procedimiento, que se encuentra descripto en [94, 23]. En primer lugar es conveniente mapear los Hamiltonianos H_a de la cadena de espines a un sistema de fermiones, por medio de la transformación de Jordan-Wigner:

$$X_j = \exp\left\{i\pi \sum_{k=1}^{j-1} c_k^{\dagger} c_k\right\} (c_j + c_j^{\dagger})$$
(5.8)

$$Y_j = i \exp\left\{i\pi \sum_{k=1}^{j-1} c_k^{\dagger} c_k\right\} (c_j - c_j^{\dagger})$$
(5.9)

$$Z_j = 2c_j^{\dagger}c_j - 1. (5.10)$$

Esta transformación corresponde a asociar, en cada sitio, la presencia o ausencia de un fermión con un espín apuntando en la dirección +z o -z respectivamente.

Sin embargo, a fin de obtener relaciones de anticonmutación para operadores asociados a los distintos sitios, es necesario agregar los términos no locales de la forma exp $\left\{ i\pi \sum_{k=1}^{j-1} c_k^{\dagger} c_k \right\} \equiv \prod_{k=1}^{j-1} (-Z_k)$. Efectuando esta transformación, a menos de una corrección asociada a efectos

Efectuando esta transformación, a menos de una corrección asociada a efectos de borde (relevante en tiempos del orden del número de espines de la cadena)¹, los Hamiltonianos pueden escribirse como:

$$H_a = -\sum_j (c_j^{\dagger} c_{j+1} + c_{j+1}^{\dagger} c_j) + \gamma (c_j^{\dagger} c_{j+1}^{\dagger} + c_{j+1} c_j) + \lambda^{(a)} (2c_j^{\dagger} c_j - 1).$$
(5.11)

Dado que el qubit interactúa uniformemente con toda la cadena, los Hamiltonianos H_a son invariantes frente a la operación $c_j \rightarrow c_{j+1}$ (con condiciones periódicas). En lo sucesivo nos referiremos a esta operación como una traslación a lo largo de la cadena (aunque para esta geometría es más bien una simetría de rotación discreta). Gracias a esto los Hamiltonianos pueden ser diagonalizados por el siguiente método estándar: en primer lugar, se realiza una transformada de Fourier de los operadores de creación y destrucción c_j, c_j^{\dagger} :

$$c_j = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{N}} \sum_k e^{2\pi i k j/N} \tilde{c}_k \tag{5.12}$$

A continuación se definen nuevos operadores por medio de una transformación de Bogoliubov que preserva el momento, mezclando solamente operadores \tilde{c}_k y \tilde{c}_{-k}^{\dagger} :

$$\tilde{c}_k = \eta_k^{(a)} \cos\left(\frac{\varphi_k^{(a)}}{2}\right) - \eta_{-k}^{\dagger(a)} \sin\left(\frac{\varphi_k^{(a)}}{2}\right).$$
(5.13)

De modo de diagonalizar el Hamiltoniano, los coeficientes de Bogoliubov deben obedecer la relación:

$$\tan(\varphi_k^{(a)}) = \frac{\gamma \, \operatorname{sen}(2\pi k/N)}{\lambda^{(a)} + \cos(2\pi k/N)} \tag{5.14}$$

y las energías de los modos correspondientes son:

$$E_k^{(a)} = 2\sqrt{[\gamma \ \text{sen}(2\pi k/N)]^2 + [\lambda^{(a)} + \cos(2\pi k/N)]^2}.$$
 (5.15)

La combinación de operadores de creación y destrucción que diagonaliza el Hamiltoniano depende de ángulos que cambian al modificar el campo externo (y por lo tanto, dependen del estado del qubit). En particular, puede verse que los operadores correspondientes a los distintos valores del campo efectivo pueden relacionarse según:

$$\eta_k^{(0)} = \eta_k^{(1)} \cos(\delta\varphi_k) - \eta_{-k}^{\dagger(1)} \sin(\delta\varphi_k), \qquad (5.16)$$

¹Los Hamiltonianos considerados pueden resolverse en forma exacta, dividiendo los autoestados según su paridad y aplicando transformadas de Fourier con coeficientes enteros o semienteros [153]. Sin embargo la diferencia no es importante excepto a tiempos largos.

con $\delta \varphi_k = \varphi_k^{(1)} - \varphi_k^{(0)}$. El estado inicial de la cadena, $|E_0\rangle$, es aniquilado por los operadores de la forma (5.16), y puede escribirse en la forma:

$$|E_0\rangle = \prod_{1 \le k < N/2} \left[\cos(\delta\varphi_k) + \sin(\delta\varphi_k) \eta_k^{\dagger(1)} \eta_{-k}^{\dagger(1)} \right] |E_0'\rangle$$
(5.17)

donde $|E'_0\rangle$ es el estado aniquilado por los operadores $\eta_k^{(1)}$.

El eco (5.6) está dado por:

$$L(t) = \left| \langle E_0 | e^{-it \sum_k E_k^{(1)} \eta_k^{\dagger(1)} \eta_k^{(1)}} | E_0 \rangle \right|^2$$
(5.18)

Insertando una identidad en términos de estados de Fock del Hamiltoniano perturbado resulta:

$$L(t) = \left| \langle E_0 | \sum_{\vec{n}} | \vec{n}^{(1)} \rangle \langle \vec{n}^{(1)} | e^{-it \sum_k E_k^{(1)} \eta_k^{(1)\dagger} \eta_k^{(1)}} | E_0 \rangle \right|^2 = \\ = \left| \sum_{\vec{n}} e^{-it \sum_k E_k^{(1)} n_k} | \langle \vec{n}^{(1)} | E_0 \rangle |^2 \right|^2$$
(5.19)

donde $|\vec{n}^{(1)}\rangle$ es el autoestado del Hamiltoniano H_1 en que el modoktiene ocupación $n_k.$ Usando

$$|\langle \vec{n}^{(1)} | E_0 \rangle|^2 = \prod_{1 \le k < N/2} |\cos(\delta\varphi_k)(1 - n_k)(1 - n_{-k}) + \sin(\delta\varphi_k)n_k n_{-k}|^2 \quad (5.20)$$

se tiene:

$$L(t) = \left| \sum_{\vec{n}} e^{-it \sum_{k} E_{k}^{(1)} n_{k}} \prod_{1 \le k < N/2} |\cos(\delta\varphi_{k})(1 - n_{k})(1 - n_{-k}) + \\ + \sin(\delta\varphi_{k}) n_{k} n_{-k} |^{2} \right|^{2} = \\ = \prod_{1 \le k < N/2} \left| \cos^{2}(\delta\varphi_{k}) + e^{-2it E_{k}^{(1)}} \sin^{2}(\delta\varphi_{k}) \right|^{2} = \\ = \prod_{1 \le k < N/2} \left(1 - \sin^{2}(\delta\varphi_{k}) \sin^{2}(E_{k}^{(1)}t) \right)$$
(5.21)

A causa de la invariancia del problema frente a traslaciones a lo largo de la cadena, el eco de Loschmidt puede entonces ser factorizado en contribuciones de los distintos pares de modos de acuerdo a su momento. Los modos 0, N/2 (en caso de N par) no contribuyen al eco: dado que el numerador en (5.14) se anula, los ángulos que corresponden a estos modos sólo pueden ser 0 ó π , de modo que la transformación correspondiente no mezcla operadores de creación y destrucción.

5.3. El régimen universal gaussiano

El problema presentado fue analizado por Cucchietti *et al* en [24] para el caso de una cadena de Ising ($\gamma = 1$). En ese artículo, la existencia de un régimen de decoherencia universal fue descubierta para $\lambda < 1$ y g > 1. Este fenómeno fue posteriormente observado y analizado por otros autores [25]. El régimen universal encontrado en [24] (ilustrado en la figura 5.1) se caracteriza por el hecho de que el eco tiene una envolvente gaussiana cuyo ancho es independiente de la intensidad del acoplamiento, parametrizada por g. Es a raíz de esto que el régimen fue bautizado como "universal" (en el sentido de independencia de g). En [24] se muestra que la forma gaussiana de la envolvente puede entenderse como una consecuencia de las propiedades de la distribución de los coeficientes de Bogoliubov que aparecen en la transformación (5.13). En particular, del hecho de que para $\gamma = 1$, $\lambda \simeq 0$, y g suficientemente grande, los ángulos $\delta \varphi_k$ están uniformemente distribuidos.



Figura 5.1: El eco en función del tiempo para el caso considerado en [24]: un qubit central interactuando uniformemente con todos los sitios de una cadena de espines, con $\gamma = 1, \lambda = 0$ (el gráfico corresponde a N = 100). El eco está dado por una oscilación con frecuencia determinada por g, y envolvente gaussiana independiente de g. Se muestran los casos g = 5 (verde), 10 (azul), 40 (negro); la línea roja indica la envolvente gaussiana.

A continuación examinaremos en más detalle las características de este régimen gaussiano. La universalidad observada es alcanzada cuando la magnitud g del acoplamiento con el ambiente supera un cierto límite. El valor de este límite parece ser independiente de la longitud de la cadena, N, pero depende de λ . La envolvente del eco es de la forma $\exp(-\alpha t^2 N/4)$; el valor de α , el parámetro que determina el ancho temporal, es aproximadamente 1 cuando g es suficientemente grande. La dependencia de α con el acoplamiento g se analiza en la figura 5.2, para λ entre 0 y 0.9. Es importante notar, de todas formas, que a medida que λ se aproxima a 1 la envolvente adquiere una "cola" que decae lentamente, de forma que el ajuste gaussiano no es bueno a tiempos largos.



Figura 5.2: El eco para el caso de un qubit central interactuando con una cadena de Ising con campo transverso tiene para $\lambda < 1$ y g > 1 una envolvente gaussiana de la forma $\exp(-\alpha t^2 N/4)$. Se grafica el valor de α como función de g para $\lambda = 0$ (negro), 0.3 (azul), 0.6 (rojo) y 0.9 (verde), y una cadena de longitud N = 100. Los ajustes son tomados considerando picos para los cuales el eco es mayor que 1/e.

A partir del gráfico resulta claro que para $\lambda = 0$ (curva superior) la universalidad se alcanza más rápidamente que para $\lambda = 0.9$ (curva inferior). De todas maneras, la dependencia de α con g es bastante débil. De acuerdo a la figura, para $\lambda = 0.9$ los cambios de α son apenas del orden de 10 % con g variando entre 10 y 75. Por otra parte, es conveniente enfatizar que el hecho de que α decrece con λ indica que, al contrario de lo que ocurre en el caso de acoplamiento débil, la proximidad a la transición de fase cuántica no produce un aumento de la decoherencia. De hecho, la decoherencia disminuye al aumentar el campo externo dado que los espines tienden a alinearse con él.

Los valores de α mostrados en la figura 5.2 corresponden a ajustes gaussianos de los picos en la evolución del eco como función del tiempo. Pueden también ser aproximados por una fórmula analítica sencilla como se muestra a continuación. Según se ve en la fórmula (5.15), cuando g es grande las energías de todos los modos del Hamiltoniano perturbado H_1 son del orden de 2g. En la expresión del eco (5.21), escribimos entonces todas las energías como $E_k^{(1)} = E + \Delta_k$ con $\Delta_k \ll E$ (lo cual se satisface para $g \gg 1$). Todos los factores en el eco oscilan con frecuencias similares; las diferencias Δ_k son las responsables por el decaimiento del eco. Evaluando en torno de los picos, $t = n\pi/E + \delta t$ con $n \in \mathbb{Z}$, y usando expansiones de Taylor en δt y Δ_k , la frecuencia de los picos corresponde a una energía ${\cal E}$ dada por:

$$E = \frac{\sum_{k} \operatorname{sen}^{2}(\delta\varphi_{k}) E_{k}^{(1)}}{\sum_{k} \operatorname{sen}^{2}(\delta\varphi_{k})}$$
(5.22)

y el valor del eco en los picos puede ser aproximado por $\exp(-\tilde{\alpha}t^2N/4)$, con:

$$\tilde{\alpha} = \frac{4}{N} \sum_{1 \le k < N/2} \operatorname{sen}^2(\delta \varphi_k) \left(E_k^{(1)} - E \right)^2.$$
(5.23)

Esta fórmula es similar a la publicada en [24], con una diferencia sustancial: la propuesta en [24] toma en cuenta la dispersión de las energías en torno de su valor medio, sin considerar los pesos sen²($\delta\phi_k$) de la ecuación (5.22). Esto da una buena aproximación en el caso $\lambda = 0$, que es el que fue analizado en ese trabajo. Sin embargo, esa fórmula falla al intentar reproducir el comportamiento del eco para valores mayores de λ , prediciendo incorrectamente un aumento de la decoherencia en las proximidades de la transición de fase también en el caso de acoplamiento fuerte (error que de hecho se repite en [154]). Este efecto, que realmente se observa para acoplamiento débil, no ocurre para g suficientemente grande. En la figura 5.3 se muestra la comparación entre la nueva aproximación propuesta (5.23), la dada en [24], y el ajuste gaussiano de los picos del eco. Ambas aproximaciones son buenas para $\lambda \simeq 0$. Para valores mayores de λ , la aproximación (5.23) subestima la decoherencia, pero muestra el comportamiento correcto en las cercanías del punto crítico.



Figura 5.3: El eco para un qubit central interactuando con una cadena de Ising, en el caso $\lambda < 1$, g > 1, exhibe una envolvente gaussiana de la forma $\exp(-\alpha t^2 N/4)$. El gráfico muestra el valor de α como función de λ para g = 75 (negro), a partir del ajuste gaussiano de los picos. Este valor es comparado con la aproximación analítica propuesta (rojo) y la obtenida a partir de la fórmula en [24] (azul).

5.4. Un régimen universal no gaussiano

Es importante notar que la naturaleza gaussiana de la envolvente desaparece si se considera un ambiente con una evolución más general. De hecho, la envolvente gaussiana corresponde al caso de una cadena de Ising ($\gamma = 1$). Para otros valores del parámetro de anisotropía γ existe un régimen gaussiano a tiempos cortos, seguido por un decaimiento tipo ley de potencias (figura 5.4). Cabe aclarar que la transición de decaimientos gaussianos a leyes de potencias fue ya observada en otros baños de espines al cambiar el Hamiltoniano del ambiente [29, 30]; un régimen universal no gaussiano fue también observado en Hamiltonianos XY en [25].



Figura 5.4: El eco en función del tiempo para el caso de un qubit central, y un entorno con N = 100, $\gamma = 0.1$, $\lambda = 0$. En este caso, las curvas mostradas, correspondientes a g = 5 (azul), 20 (negro), también muestran la existencia del régimen universal, pero la envolvente ya no es gaussiana. La línea roja indica el decaimiento gaussiano a tiempos cortos, seguido por una caída tipo ley de potencias ($\sim t^{-1.1}$).

El comportamiento universal para $\gamma \neq 1$ es similar al hallado en el caso gaussiano, es decir, una vez que la magnitud g del acoplamiento supera cierto umbral, la envolvente se estabiliza y pasa a ser independiente de g. El estudio de la envolvente no es ahora tan simple como para $\gamma = 1$, ya que no puede ser caracterizada por un único parámetro (como el ancho de la gaussiana en el caso anterior). Sin embargo, es posible observar que el valor del umbral se incrementa a medida que λ se aproxima a 1, mientras que no es especialmente sensible a modificaciones en γ o N, en concordancia con los resultados previos para el caso gaussiano.

Teniendo en cuenta el análisis en [24], el carácter no gaussiano de la envolvente no es sorprendente, dado que para $\gamma \simeq 0$ las condiciones a las que se debía la forma gaussiana ya no se cumplen: en particular, los ángulos $\delta \varphi_k$ en (5.21) no están uniformemente distribuidos, dado que la mayoría de los coeficientes de Bogoliubov no varía significativamente cuando el campo transverso se modifica, como se ve de la ecuación (5.14).

Por otra parte, en la figura 5.5 se muestran las envolventes para distintos valores de γ entre 0.1 y 1. Como puede observarse, el ancho temporal de la envolvente aumenta a medida que $\gamma \to 0$. Esto no debe confundirse con el hecho de que el eco es exactamente igual a 1 cuando $\gamma = 0$, ya que en este caso el Hamiltoniano de interacción conmuta con el de la cadena. Para γ pequeño pero no nulo, es el extremo superior de la envolvente el que se aproxima a 1 a medida que γ disminuye. Esto puede ser cualitativamente explicado a partir de los ángulos en (5.14): cuando γ es pequeño, todos los ángulos son cercanos a cero, excepto aquéllos para los cuales el denominador está cerca de cero también (los modos de más baja energía de H_0). Sólo estos modos tienen variaciones importantes cuando se introduce una perturbación en el campo externo, y son por lo tanto los únicos que contribuyen al decaimiento del eco en (5.21). Si tomamos g grande y γ pequeño, todas las frecuencias relevantes serán muy similares (aproximadamente 2g), oscilando en fase entre sí. De modo que en el régimen de acoplamiento fuerte, la decoherencia es menor para γ pequeño.



Figura 5.5: La envolvente del eco para un qubit central interactuando con una cadena de espines con N = 100, $\lambda = 0$, g = 50. Las distintas curvas corresponden a $\gamma = 1$ (continua), 0.5 (- -), 0.2 (- -), 0.1 (· · ·). El régimen gaussiano sólo se observa para $\gamma = 1$, y el ancho de la envolvente aumenta al disminuir γ .

Una vez más, vale la pena destacar que este comportamiento es radicalmente diferente del caso de perturbaciones débiles, en el cual la proximidad a la región crítica $\gamma = 0$, $|\lambda| < 1$ produce un aumento de la decoherencia [23]. De hecho, el argumento del párrafo anterior ya no es válido si tanto γ como g son pequeños, porque en este caso las frecuencias involucradas serán pequeñas y con una importante dispersión. Es decir que también aquí la relación entre criticalidad y decoherencia es distinta según la intensidad del acoplamiento entre sistema y entorno.

5.5. ¿Cuál es la relación entre el régimen universal y la transición de fase?

En [24] se argumenta que la universalidad de la envolvente puede ser tomada como indicador de la existencia de una transición cuántica de fase en el entorno. Sin embargo, la derivación del decaimiento universal gaussiano en el artículo mencionado no hace uso explícito de la transición, sino más bien de una hipótesis sobre la distribución de los autoestados de los dos Hamiltonianos efectivos H_0 y H_1 . A partir de la evidencia presentada en [24] (y posteriormente confirmada en esta tesis y por otros autores en [25]) el comportamiento universal es efectivamente observable para g grande, lo cual, si $\lambda < 1$, es suficiente para llevar el sistema a través de la transición de fase.

A continuación se presentan algunos resultados que indican que la existencia de un régimen universal no es un buen detector de una transición de fase o inestabilidad estructural del ambiente. En particular, por ejemplo, al considerar $\lambda > 1$ se encuentran también situaciones en las cuales la envolvente es independiente de la magnitud del acoplamiento. En la figura 5.6 se muestra el eco de Loschmidt para los casos $\lambda = 2$ y $\lambda = 5$. Una diferencia importante entre estos casos y el observado para $\lambda < 1$ es que en la nueva situación la decoherencia es más débil, y disminuye a medida que λ se incrementa, lo cual es esperable dado que los espines tienden a alinearse con el campo externo. Para $\lambda = 2$ las envolventes correspondientes a g = 40 y g = 80 son similares sin que este nuevo comportamiento universal pueda asociarse a la transición de fase, ya que los dos Hamiltonianos involucrados se encuentran del mismo lado del punto crítico. Sin embargo, estos valores de acoplamiento son mucho mayores que los considerados en las secciones anteriores, y para los mismos valores de q el comportamiento universal no es alcanzado en el caso $\lambda = 5$. Es decir, a medida que el valor del campo externo aumenta el umbral para la universalidad tiende a incrementarse, en concordancia con lo observado para $\lambda < 1$ a partir de la figura 5.2.

El hecho de que es posible encontrar comportamientos universales no asociados a transiciones de fase fue ya discutido en [24] para el caso de sistemas complejos. No es por lo tanto sorprendente encontrar situaciones similares en el caso de una cadena de Ising. Podría pensarse que la transición no está relacionada con la mera existencia del régimen universal, sino con características de escaleo, por ejemplo cuán rápidamente este régimen es alcanzado a medida que gaumenta, en el sentido de la dependencia del umbral en relación con el valor del campo externo y el número de espines de la cadena. Esta cuestión se examina en la figura 5.7, en la cual se toma una cadena de Ising con campo transverso y se consideran distintos valores para $N y \lambda$. Los valores graficados fueron obtenidos en la siguiente forma: se estudiaron las envolventes en el intervalo de tiempos [0,0.5]; para este rango temporal, la parte superior de la envolvente se ajustó por



Figura 5.6: Envolvente del eco como función del tiempo para un qubit central, con $N = 100, \gamma = 1, \lambda = 2$ (izquierda) y $\lambda = 5$ (derecha). En el gráfico de la izquierda, las envolventes para g = 40 (continua) y 80 (- -) son similares aún cuando este proceso no implica atravesar ninguna transición de fase. En el caso $\lambda = 5$ no se observa este tipo de "universalidad" para estos valores de g. Para $\lambda > 1$ el borde inferior de la envolvente no llega a cero, y de hecho se acerca a 1 a medida que el campo transverso aumenta y la decoherencia se debilita.

una gaussiana $\exp(-\alpha t^2 N/4)$. La figura muestra el valor obtenido para α , que determina el ancho temporal de la envolvente (reescaleado a través del factor N/4).

La figura 5.7 no muestra cambios significativos entre $\lambda = 0.9$ y 1.1, a pesar de que estos casos se encuentran a distintos lados de la transición. Además, los gráficos sugieren que el umbral para la convergencia a una envolvente universal a medida que g aumenta es prácticamente independiente del número de espines en la cadena. Esta convergencia es particularmente rápida para λ pequeño, lo cual no parece ser consecuencia de que la perturbación induzca un cambio de fase en el Hamiltoniano (ya que esto también ocurre para $\lambda = 0.9$), sino más bien de las propiedades del estado fundamental cerca de $\lambda = 0$. Por último, la diferencia principal al tomar λ grande es que α se vuelve menos dependiente de N (es decir el ancho temporal escalea aproximadamente como 1/N), y el valor de α es más pequeño ya que la decoherencia es menor.

Es posible encontrar más ejemplos de situaciones similares, como el caso en que el qubit interactúa en forma no uniforme con el entorno (un problema tratado en [25], y que se retomará más adelante en esta tesis): la figura 5.8 muestra los límites superior e inferior de la envolvente para un qubit acoplado a un solo sitio de la cadena. En este caso el ambiente también tiene una transición de fase y la condición crítica es $\prod_j \lambda_j = 1$ (para $\gamma = 1$) [155]. Por lo tanto, incluso para valores grandes de g la interacción con el sistema puede no ser suficiente para llevar al entorno del otro lado de la transición (en contraste con el caso de acoplamiento uniforme tratado previamente). De los tres casos que se observan en la figura 5.8, sólo el segundo ($\lambda = 0.99$) "atraviesa" la transición de fase. Sin



Figura 5.7: La envolvente del eco para $\gamma = 1$ puede ajustarse a tiempos cortos por una gaussiana exp $(-\alpha t^2 N/4)$. El gráfico muestra el valor de α como función de g para distintos valores de λ : 0.1 (a), 0.9 (b), 1.1 (c), y 2 (d). En cada caso las curvas corresponden a N = 40 (rojo), 60 (magenta), 80 (violeta), 100 (azul) y 120 (verde).

embargo, la similitud de las envolventes correspondientes a distintos valores de g se observa también en los otros dos casos ($\lambda = 0.5$ –arriba– y $\lambda = 1.05$ –abajo).

Estos resultados sugieren que la existencia y características del régimen universal no se encuentran claramente relacionadas con la transición de fase. Dado que este régimen se observa para acoplamientos fuertes, resulta natural pensar que la universalidad podría ser consecuencia de una separación de escalas temporales. En el límite de acoplamiento fuerte, la oscilación rápida (con frecuencia de orden g) está dada por la interacción entre sistema y entorno, mientras que la envolvente estaría asociada a la "perturbación" introducida por el Hamiltoniano de la cadena. A continuación se muestra una derivación simple de esta idea, para el caso de un qubit central (que puede extenderse fácilmente a otros casos). Consideremos la evolución de la cadena con Hamiltoniano $H_1 = H_E - gZ_T$, con H_E de orden 1, $g \gg 1$ y $Z_T = \sum_j Z_j$. El estado de la cadena a tiempo t puede ser descompuesto en la forma:

$$|\phi(t)\rangle = e^{-iH_1 t} |E_0\rangle = e^{igtZ_T} |\phi'(t)\rangle$$
(5.24)


Figura 5.8: Envolvente del eco como función del tiempo para un qubit que interactúa con un solo sitio de una cadena con N = 100, $\gamma = 1$. El gráfico superior muestra el caso $\lambda = 0.5$, el siguiente $\lambda = 0.99$, y el inferior $\lambda = 1.05$. En cada uno la curva continua corresponde a g = 50, y la discontinua a g = 30; ambas son muy similares, independientemente de la proximidad al punto crítico $\lambda = 1$. Sólo en el segundo caso el acoplamiento con el qubit lleva a la cadena a atravesar la transición de fase.

donde $|\phi'(t)\rangle$ contiene la evolución lenta de acuerdo a la ecuación:

$$\frac{d}{dt}|\phi'\rangle = -i \ e^{-igtZ_T} \ H_E \ e^{igtZ_T}|\phi'\rangle \tag{5.25}$$

que determina el Hamiltoniano dependiente del tiempo en esta representación de interacción.

En este nuevo Hamiltoniano hay términos constantes y otros que evolucionan en escalas temporales del orden de 1/g. Esto puede verse insertando identidades $\mathbb{I} = \sum_z P_z$, donde P_z es el proyector sobre el subespacio de autovalor z para Z_T :

$$H'_{E}(t) = e^{-igtZ_{T}} H_{E} e^{igtZ_{T}} = \sum_{z,z'} e^{-igt(z-z')} P_{z} H_{E} P'_{z}$$
(5.26)

Los términos correspondientes a autovalores distintos, $z \neq z'$, oscilan rápidamente y su efecto promedio se cancela (al orden más bajo en 1/g). Se puede entonces efectuar una aproximación de onda rotante consistente en despreciar estos términos, conservando solamente un Hamiltoniano de la cadena reducido a una forma diagonal en bloques, H'_E , donde los bloques corresponden a los distintos autovalores del término de interacción:

$$H'_E \simeq \sum_z P_z H_E P_z. \tag{5.27}$$

Esta aproximación puede ahora introducirse en la fórmula para el eco:

$$L(t) \simeq |\langle E_0|e^{igtZ_T}e^{-itH'_E}|E_0\rangle|^2 \tag{5.28}$$

en la cual puede verse que el operador de evolución se factoriza en una oscilación rápida con frecuencia del orden de g, y una evolución lenta gobernada por un Hamiltoniano efectivo H'_E . Esta evolución lenta determina entonces la envolvente, y para g suficientemente grande es independiente del valor de este parámetro. De esta forma, se obtiene un ejemplo de universalidad que no tiene ninguna conexión evidente con las transiciones de fase, y que puede entenderse únicamente en términos de separación de escalas de energía. Sin embargo, es importante notar que la separación de escalas no necesariamente conduce a un régimen universal: en este caso, no sólo importa que $g \gg 1$, sino que además la evolución rápida está dada por un operador periódico. Por otra parte, en el régimen universal observado para $\lambda = 0$ en [24] la envolvente coincide con el límite asintótico para valores de g de orden 1, es decir no se trata en ese caso de un fenómeno de separación de escalas.

En conclusión, la aparición de una envolvente universal puede en algunos casos estar relacionada con la presencia de una transición de fase en el ambiente, pero la relación entre ambos fenómenos es menos clara que lo que los resultados presentados en [24] permiten suponer. Esto cuestiona por lo tanto la utilidad de este régimen universal como detector de transiciones de fase. En primer lugar, porque existen comportamientos similares que no son consecuencia de la criticalidad del ambiente. En segundo lugar, porque los resultados observados para acoplamiento fuerte en este modelo son consecuencia del hecho de que el Hamiltoniano de acoplamiento entre sistema y ambiente conduce a una evolución periódica, lo que permite separar claramente la oscilación de la envolvente. En casos más generales, por ejemplo si el acoplamiento del qubit no es a todos los sitios de la cadena con igual magnitud (una situación que se considerará en el próximo capítulo), esta distinción se vuelve complicada y en muchos casos directamente imposible.

Cabe mencionar, por último, que la posibilidad de detectar la criticalidad del ambiente a través del aumento de la decoherencia del qubit en el régimen de acoplamiento débil resulta más promisoria en tanto ha sido testeada con resultados positivos en un rango más grande de modelos. Por ejemplo, los resultados en [156] sugieren que podría ser aplicable también en situaciones que incluyen efectos de desorden. En una línea similar, en [157] se propone el uso de ambientes críticos como recurso para realizar estimación de parámetros con mayor precisión, diseñando las interacciones de tal forma que el parámetro a medir gobierne el paso del entorno a través de la transición de fase. Finalmente, en [158] se considera el estudio de las propiedades estadísticas de una cadena de iones a través del efecto de éstas sobre el eco de Loschmidt de un espín acoplado a ella.

Capítulo 6

Decoherencia de estados de Bell por una cadena de espines

Este capítulo está dedicado al estudio de la pérdida de entrelazamiento entre las partes de un sistema a raíz de la interacción con un entorno común. Este proceso puede depender de numerosos detalles como la naturaleza del acoplamiento con el ambiente, la existencia de correlaciones espaciales en el entorno, su dinámica, etc. En este caso se considerará la decoherencia de un sistema de dos qubits, cada uno de los cuales interactúa localmente con una cadena de espines. El modelo estudiado es la extensión, al caso de dos qubits, del propuesto para un sistema de un qubit en [25]. Muchas de las características relevantes del problema son por lo tanto similares. Sin embargo, el paso a un sistema de dos qubits introduce también elementos de análisis nuevos: en particular, la pérdida de coherencia se encuentra ahora ligada a pérdida de entrelazamiento entre subsistemas; y aparece además una nueva escala relevante dada por la distancia entre los dos qubits, que define si ambos interactúan con un entorno común o con entornos efectivamente independientes.

La pérdida de entrelazamiento en un sistema de dos qubits ha sido examinada en casos con acoplamiento uniforme de ambos qubits a una misma cadena XY [35], y con acoplamiento no uniforme a ambientes caóticos, integrables y mixtos [26]. Otras situaciones fueron analizadas usando simulaciones numéricas (limitadas por el aumento exponencial de los recursos necesarios con el tamaño del ambiente a simular) [27, 28].

En este capítulo se estudia el modelo de acoplamiento local a una cadena de espines, para el caso en que los dos qubits interactúan con sitios diferentes de la cadena, analizando en particular la dependencia de la decoherencia con respecto a la distancia entre los subsistemas. En el límite de acoplamiento fuerte entre el sistema y el entorno, se observa que la decoherencia tiende a aumentar a medida que esta distancia aumenta, es decir a medida que los entornos efectivos para los subsistemas se vuelven independientes. En el caso de acoplamiento débil, en cambio, la dependencia de la decoherencia con la distancia varía según el estado inicial elegido para el sistema. Cuando el acoplamiento es débil, además, la dependencia con la distancia satura cuando ésta supera una cierta escala d_{sat} . Los resultados obtenidos para la cadena de Ising sugieren que esta escala de saturación está relacionada con la longitud de correlación ξ de la cadena, es decir en particular que esta escala aumenta para valores de campo externo cercanos al punto crítico. Para el caso de acoplamiento fuerte, se encuentra evidencia de efectos no-Markovianos en la forma de interacciones entre qubits mediadas por el entorno. Como consecuencia de esto, el sistema puede sufrir una secuencia de decaimientos y recuperaciones del entrelazamiento con una escala temporal asociada a la distancia entre qubits.

El capítulo se organiza de la siguiente manera: en la sección 6.1 se presenta el modelo, y las fórmulas que se utilizarán para calcular el decaimiento de la coherencia y el entrelazamiento en el sistema. En las secciones 6.2 y 6.3 se estudia la pérdida de entrelazamiento entre qubits como consecuencia de su interacción con el ambiente, para los casos de acoplamiento débil y fuerte respectivamente. Por último, en la sección 6.4 se introduce un modelo en que el acoplamiento es a varios sitios en una región de la cadena, con una magnitud que depende suavemente de la distancia, y se comparan los resultados con los obtenidos en las secciones anteriores.

6.1. Un modelo de decoherencia para dos qubits

6.1.1. Descripción del sistema, su ambiente y el acoplamiento entre ambos





A continuación se presenta el modelo de decoherencia para el sistema de dos qubits. Se considerará que cada qubit interactúa con un solo sitio de una cadena de espines: el qubit A con el sitio 0, y el B con el sitio d (Fig. 6.1). El Hamiltoniano para la cadena es de tipo Ising o XY con campo transverso, es decir igual al tratado en el capítulo anterior, y dado por la ecuación (5.1). Al igual que en el capítulo anterior, en éste se tomará $\hbar = 1$. El Hamiltoniano de interacción propuesto es de la forma:

$$H_{int} = -g(|1\rangle\langle 1|_A Z_0 + |1\rangle\langle 1|_B Z_d).$$
(6.1)

Esto es, cuando un qubit se encuentra en el estado excitado $|1\rangle$, altera el valor del campo externo para el espín con el que se encuentra acoplado. Si el sistema se encuentra inicialmente en el estado $|a\rangle_A \otimes |b\rangle_B \equiv |ab\rangle$ $(a, b \in \{0, 1\})$, el entorno evolucionará con un Hamiltoniano efectivo H_{ab} dado por:

$$H_{ab} = H_E - g(aZ_0 + bZ_d). (6.2)$$

Nuevamente se asume que el estado inicial del "universo" es de la forma:

$$\rho_{SE}(0) = \rho_0 \otimes |E_0\rangle \langle E_0| \tag{6.3}$$

con $|E_0\rangle$ el estado fundamental del Hamiltoniano $H_{00} = H_E$. La matriz densidad reducida del sistema AB, en la base de autoestados de Z_A y Z_B , puede escribirse en la forma:

$$\rho(t) = \sum_{abcd=0,1} \rho_{ab,cd}(t) |ab\rangle \langle cd|.$$
(6.4)

La evolución de los elementos de matriz de ρ es:

$$\rho_{ab,cd}(t) = \rho_{ab,cd}(0) \langle E_0 | e^{iH_{cd}t} e^{-iH_{ab}t} | E_0 \rangle \tag{6.5}$$

Al igual que en el modelo considerado en el capítulo anterior, los elementos diagonales $\rho_{ab,ab}$ permanecen constantes, mientras que los no diagonales son reducidos en un factor cuyo módulo cuadrado está dado por el eco de Loschmidt:

$$L_{ab,cd}(t) = |\langle E_0 | e^{iH_{cd}t} e^{-iH_{ab}t} | E_0 \rangle|^2.$$
(6.6)

Como se mostrará a continuación, estos ecos pueden calcularse haciendo uso de que los Hamiltonianos de la cadena de espines pueden escribirse como combinaciones cuadráticas de operadores fermiónicos de creación y destrucción.

6.1.2. Expresión general para el eco de Loschmidt

Para poder calcular los ecos de Loschmidt (6.6) nuevamente se hará uso del hecho de que cada Hamiltoniano H_{ab} puede ser mapeado a un sistema fermiónico por medio de la transformación de Jordan-Wigner, presentada en el capítulo anterior y dada por las fórmulas (5.8-5.10). A menos de la corrección de borde, los Hamiltonianos efectivos resultan dados por:

$$H_{ab} = -\sum_{j} \left[(c_{j}^{\dagger}c_{j+1} + c_{j+1}^{\dagger}c_{j}) + \gamma (c_{j}^{\dagger}c_{j+1}^{\dagger} + c_{j+1}c_{j}) + \lambda_{j}^{(ab)}(2c_{j}^{\dagger}c_{j} - 1) \right]$$
(6.7)

 $\operatorname{con} \lambda_j^{(ab)} = \lambda + g(a\delta_{j,0} + b\delta_{j,d})$ (la extensión al caso de qubits que interactúan con más de un sitio es trivial).

Estos Hamiltonianos ya no tienen invariancia traslacional, pero son cuadráticos en los operadores de creación y destrucción y pueden por lo tanto ser diagonalizados por medio de transformaciones lineales (de Bogoliubov), definiendo nuevos operadores que se notarán $\eta^{(ab)}, \eta^{\dagger(ab)}$. Además, como cada una de estas transformaciones es lineal, los distintos sets de operadores correspondientes a distintos valores de los parámetros (ab) pueden a su vez conectarse entre sí por medio de transformaciones de Bogoliubov.

El carácter gaussiano de los estados y transformaciones involucrados permite calcular el eco haciendo uso de resultados parciales sencillos. Los ingredientes esenciales del cómputo son dos: en primer lugar, el hecho de que el solapamiento entre dos estados gaussianos fermiónicos puros puede calcularse como un determinante en función de las matrices de covarianza correspondientes, según se muestra en el apéndice. En segundo lugar, la forma en que la matriz de covarianza evoluciona en el tiempo, y que ya fue hallada en el capítulo 3.

A continuación se muestra la expresión para el eco de Loschmidt teniendo en cuenta estos resultados. La forma general del eco está dada por la fórmula (6.6). En esa expresión, el estado $|E_0\rangle$ corresponde al estado fundamental del Hamiltoniano cuadrático H_{00} , y es por lo tanto un estado gaussiano fermiónico, y los Hamiltonianos H_{lm} son cuadráticos también ($\{lm\} = \{ab\} \text{ ó } \{cd\}$). Diagonalizando el Hamiltoniano H_{00} según se explica en la sección 3.2 es posible encontrar la matriz de covarianza para el estado inicial $|E_0\rangle$. Al aplicar un operador de evolución dado por el Hamiltoniano H_{lm} durante un tiempo t, la matriz de covarianza evoluciona según la fórmula (3.39):

$$C(t) = e^{itM_{lm}}C(0)e^{-itM_{lm}}$$
(6.8)

con una matriz hermítica M_{lm} que contiene los coeficientes del Hamiltoniano (ver sección 3.2).

El cálculo del eco se reduce al cómputo del producto interno entre dos estados gaussianos puros, dados por dos evoluciones distintas del estado inicial. El producto interno entre un estado gaussiano $|\phi\rangle$ con matriz de covariancia C y otro $|\phi\rangle$ con matriz de covariancia \tilde{C} puede escribirse en la forma:

$$|\langle \phi | \tilde{\phi} \rangle|^2 = \sqrt{|\det[\mathbb{I} - (C - \tilde{C})]|}$$
(6.9)

Esta igualdad puede derivarse de las fórmulas presentadas en [159], haciendo uso de la pureza del estado y propiedades del determinante. Alternativamente, en el apéndice se incluye una demostración de esta fórmula por medio de estados coherentes fermiónicos e integrales gaussianas en variables de Grassman [100].

El eco de Loschmidt puede entonces escribirse como un determinante en términos de las matrices de covarianza de los dos estados involucrados:

$$L_{ab,cd}(t) = \sqrt{|\det[\mathbb{I} - (e^{itM_{ab}}C(0)e^{-itM_{ab}} - e^{itM_{cd}}C(0)e^{-itM_{cd}})]|}.$$
 (6.10)

De esta manera, haciendo uso de las propiedades de los estados y evoluciones gaussianos, es posible calcular los ecos de Loschmidt por medio de operaciones que involucran únicamente diagonalizaciones, productos y cálculos de determinantes de matrices de tamaño $2N \times 2N$, con N el número de espines en la cadena. Todas estas operaciones requieren de recursos (tiempo y memoria) que escalean polinomialmente en N, en lugar de hacerlo exponencialmente como el tamaño del espacio de Hilbert. Esto es crucial ya que permite el tratamiento de sistemas de algunos cientos de espines con una cantidad moderada de recursos.

6.1.3. Decoherencia y desentrelazamiento

En lo sucesivo consideraremos una situación en la que los qubits comienzan en un estado máximamente entrelazado, y estudiaremos la manera en que este entrelazamiento se pierde a consecuencia de la interacción con el entorno. Tomaremos entonces como estado inicial para el sistema uno de los estados de Bell, de la forma:

$$|\Phi_{00,11}^{\pm}\rangle = \frac{|00\rangle \pm |11\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |\Phi_{01,10}^{\pm}\rangle = \frac{|01\rangle \pm |10\rangle}{\sqrt{2}}$$
 (6.11)

Estos dos casos se distinguirán llamando a los estados iniciales "pares" $(|\Phi_{00,11}^{\pm}\rangle)$ o "impares" $(|\Phi_{01,10}^{\pm}\rangle)$, de acuerdo a su autovalor para el operador $Z_A \otimes Z_B$. La reducción de los términos no diagonales de la matriz densidad cuando el estado inicial del sistema es uno de los estados de Bell pares está dada por el eco de Loschmidt $L_{00,11}$, mientras que para los estados de Bell impares el eco relevante es $L_{01,10}$.

Vale la pena mencionar que existen analogías formales entre estas situaciones y otros modelos de decoherencia. De hecho, la decoherencia para dos qubits a distancia d en un estado inicial par es idéntica a la de un único qubit que interactúa en forma no local con los sitios 0 y d (un caso que fue parcialmente estudiado en [25]). Por otra parte, para el caso de estados iniciales impares, el eco $L_{01,10}$ puede mapearse en el de un problema equivalente: el de una partícula sin espín que puede ocupar posiciones discretas $|x_j\rangle$, $j = 0, \ldots, N - 1$ a lo largo de la cadena y que interactúa con el espín en el sitio correspondiente, modificando su campo efectivo. En este caso, superposiciones de la forma $(|x_j\rangle + |x_{j+d}\rangle)/\sqrt{2}$ sufrirán decoherencia a consecuencia de la interacción, y la reducción de los términos no diagonales de la matriz densidad será equivalente a la considerada en el modelo de espines.

En cada caso, el eco correspondiente L(t) determinará no sólo el proceso de decaimiento de la pureza sino también el modo en que los qubits en el sistema se desentrelazan. El entrelazamiento entre los qubits puede ser medido por la negatividad \mathcal{N} :

$$\mathcal{N}(t) = \sum_{j} \frac{|\lambda_j| - \lambda_j}{2} \tag{6.12}$$

con λ_j los autovalores de la matriz densidad ρ parcialmente transpuesta [160]. $\mathcal{N} \neq 0$ es una condición necesaria y suficiente para que un estado de dos qubits sea no-separable. Para el estado inicial propuesto, resulta:

$$\mathcal{N}(t) = \frac{1}{2}\sqrt{L(t)}.\tag{6.13}$$

Es decir, el estado se mantiene entrelazado para todo momento en que $L \neq 0$.

Si se considera el caso un poco más general de un estado inicial mixto, de la forma $\rho_0 = p |\varphi\rangle\langle\varphi| + (1-p) \mathbb{I}/4$, con $|\varphi\rangle$ alguno de los estados de Bell, la negatividad estará dada por la expresión:

$$\mathcal{N}(t) = \max\left\{0, \frac{p}{2}\sqrt{L(t)} - \frac{1-p}{4}\right\}.$$
 (6.14)

O sea que en el caso de un estado inicial mixto, el entrelazamiento entre los dos qubits en el sistema se pierde cuando el eco se encuentra por debajo de un umbral que depende de p. A este fenómeno de pérdida de entrelazamiento en tiempo finito se lo suele conocer como "muerte súbita" ("sudden death") del entrelazamiento [36].

6.1.4. Dependencia de la decoherencia con la distancia entre subsistemas

En lo sucesivo se analizará la dependencia del eco con la distancia entre los qubits (o, lo que es equivalente, la distancia entre los sitios con que los qubits interactúan). Existen dos casos que son particularmente simples. En primer lugar, aquél en que los dos qubits están acoplados al mismo sitio (d = 0): en este caso, el eco $L_{01,10}$ resulta trivialmente 1 dado que los dos Hamiltonianos efectivos son idénticos. Se dice en este caso que el espacio de estados "impares" es un subespacio libre de decoherencia. En particular, puede ser utilizado para "codificar" un qubit de información que no se degrada por la interacción con el entorno [6]. Por otra parte, $L_{00,11}$ es igual al eco de un solo qubit cuya constante de acoplamiento con la cadena es 2g (este caso fue estudiado con detalle en [25]).

El límite de larga distancia también resulta sencillo: si la cadena es suficientemente larga, los ambientes efectivos de ambos qubits se comportan en forma independiente. Por esto, tanto $L_{00,11}$ como $L_{01,10}$ se aproximan a $L_{0,1}^2$ (donde $L_{0,1}$ indica el eco para un solo qubit). Este régimen de larga distancia es claro cuando el efecto de los qubits sobre su entorno es relativamente pequeño. Si este efecto es grande, a tiempos largos es esperable que aún si la distancia entre qubits es grande la cadena permita interacciones efectivas entre los qubits. Esta diferencia entre los casos de acoplamiento débil y fuerte se observará en los resultados más adelante.

6.2. Resultados: el caso de acoplamientos débiles

En esta sección se estudia la pérdida de entrelazamiento para el caso de acoplamientos débiles entre el sistema y el entorno, es decir, cuando g es pequeño comparado con la interacción típica entre sitios de la cadena, de magnitud 1. Los resultados que se muestran son para el valor g = 0.1. La figura 6.2 muestra el eco $L_{00,11}$ como función del tiempo para una cadena de Ising ($\gamma = 1$) y para distintos valores del campo transverso, λ , y de la distancia d.

Para $\lambda < 1$, el eco exhibe oscilaciones de pequeña amplitud (con frecuencia de orden 1, es decir del orden de la interacción entre sitios vecinos). Esta oscilación es en torno de un valor que es relativamente independiente de la distancia. Para $\lambda > 1$ la decoherencia (cuantificada a través de 1-L) es un orden de magnitud menor, las oscilaciones decaen rápidamente y el eco se aproxima a una constante que crece con la distancia. En ambos casos la dependencia en la distancia satura en valores bastante pequeños: el límite de larga distancia se alcanza en $d \gtrsim 4$. En contraste, cerca del punto crítico ($\lambda = 1$) el eco decrece logarítmicamente con el tiempo (después de un breve transitorio), y la saturación con la distancia no se alcanza para las distancias graficadas, lo cual puede entenderse como una señal de correlaciones de largo rango en el ambiente.



Figura 6.2: Eco $L_{00,11}$ en función del tiempo para una cadena de Ising ($\gamma = 1$) con N = 100 sitios, débilmente acoplada a un sistema de dos qubits (g = 0.1). De arriba a abajo, el campo transverso es $\lambda = 0.5$, 0.99, y 1.5. La distancia entre qubits es d = 0 (verde), 1 (azul), 2 (violeta), y 3 (magenta). En el caso casi crítico, $\lambda = 0.99$, se incluye también d = 4 (rojo), y 10 (naranja); estas curvas no se muestran en los otros gráficos ya que se encuentran superpuestas con las otras. En marrón se indica el límite de dos entornos independientes.

Para el caso de estados pares, la decoherencia típicamente es máxima a distancias cortas. Un argumento simple muestra que esto es esperable para acoplamiento débil: a tiempos cortos, el decaimiento del eco es gaussiano, de la forma $\exp(-\alpha^2 t^2)$, con $\alpha \propto g$. A d = 0 resulta $\alpha^2 \sim (2g)^2$ mientras que para ambientes independientes es $\alpha^2 \propto 2g^2$, de modo que se espera que $L_{00,11}$ decaiga más



Figura 6.3: Eco $L_{01,10}$ en función del tiempo; todos los parámetros son los mismos que en la figura anterior (para d = 0 este eco es siempre igual a 1).

rápidamente para d = 0.

Para el eco $L_{01,10}$ la dependencia con la distancia es opuesta al caso anterior, como se observa en la Fig. 6.3. Esto es razonable ya que los Hamiltonianos efectivos H_{01} y H_{10} se vuelven más diferentes a medida que *d* crece. Por otra parte, la saturación con la distancia al aproximarse al límite de entornos independientes es similar a la de $L_{00,11}(g,t)$.

A continuación se analiza en más detalle el comportamiento de la escala de saturación. Los resultados que se muestran fueron obtenidos de la siguiente manera: se calculó el eco $L_{00,11}$ para λ entre 0.1 y 2, distancias d entre 1 y 15, y tiempos t_j en el intervalo [0, 10]. Para cada valor de λ y de d, se tomó una n-upla formada por los valores del eco en los distintos tiempos t_j y se le sustrajeron los valores correspondiente a los mismos tiempos para el caso de entornos independientes. La norma al cuadrado de la n-upla resultante fue considerada como una medida de la diferencia entre ambos ecos. Se realizó un ajuste exponencial del



Figura 6.4: Distancia de saturación como función del campo externo λ para una cadena de Ising ($\gamma = 1$). La línea continua indica el ajuste como función de la longitud de correlación de la cadena, ξ , de la forma: $d_{sat} \simeq 1.1 + 0.21/(0.17 + \xi^{-1})^{2.2}$. Estos resultados corresponden a una cadena de 500 espines, y las oscilaciones temporales de los ecos han sido suavizadas para corregir efectos espurios. Además, el hecho de que g > 0 se toma en cuenta desplazando la longitud de correlación considerada, en la forma $\xi_{\text{eff}}(\lambda) = \xi(\lambda + 5.7 \ 10^{-3})$.

decaimiento de estas normas al incrementar d, y a partir de este ajuste se estimó una longitud de saturación d_{sat} para cada valor del campo externo λ . El comportamiento de d_{sat} como función de λ se muestra en la Fig. 6.4. La distancia de saturación hallada resulta relacionada con la longitud de correlación de la cadena, $\xi = |\ln(\lambda)|^{-1}$ [149, 151]. En particular, d_{sat} claramente aumenta cerca del punto crítico, aunque no parece diverger como ξ . El análisis del eco $L_{01,10}$ lleva a resultados análogos.

Para testear la importancia de efectos asociados al tamaño finito, las condiciones de borde y la relación entre la perturbación g y el campo externo λ , se realizaron distintas curvas de saturación. En primer lugar se tomaron cadenas de 500 espines con condiciones de borde abiertas, y se consideraron las distintas posibilidades: barrer sobre el valor del campo externo λ manteniendo la perturbación g constante, tomando $g = r\lambda$, y $g = r|\lambda - 1|$, con r constante. Las distintas curvas obtenidas resultaron muy similares a la mostrada en la figura 6.4 (correspondiente a condiciones de contorno periódicas y con g constante). Por último, se estudió el escaleo de la distancia de saturación d_{sat} con el número de partículas de la cadena, para un campo externo de $\lambda = 1$ (que corresponde a la transición de fase para $N \to \infty$). Se tomaron cadenas con N entre 50 y 1700; el comportamiento de la distancia de saturación con N se observa en la figura 6.5, donde se aprecia que esta cantidad no parece diverger sino tender a un valor máximo de ≈ 15 . Esto puede interpretarse como una manifestación de que el eco no está gobernado únicamente por el comportamiento del nivel fundamental



Figura 6.5: Escaleo de la distancia de saturación para una cadena de 500 espines con condiciones de contorno abiertas y con campo externo crítico, $\lambda = 1$. Se observa que d_{sat} tiende a saturar para valores grandes de N, en lugar de diverger como lo hace la longitud de correlación ξ de la cadena. La línea punteada muestra un ajuste por ley de potencias, $d_{sat} = 15.07 - 1.966 \ 10^6 / N^{3.642}$. La escala horizontal es logarítmica.

(asociado a la divergencia en la longitud de correlación).

Los ecos obtenidos para el caso de un Hamiltoniano XY con $\gamma = 0.1$ son cualitativamente similares a los que se observan en las Figs. 6.2, 6.3 para la cadena de Ising. Existen sin embargo algunas diferencias importantes. Éstas se refieren principalmente a la dependencia con la distancia, que es bastante irregular para $\lambda \leq 1$. Además, la conexión entre la escala de saturación d_{sat} y la longitud de correlación ξ no es nada evidente, aún cuando la escala de saturación sigue mostrando un claro incremento en las cercanías del punto crítico. Se manifiestan también diferencias en la forma del decaimiento cerca del caso crítico (casi lineal, en tiempos hasta $t \sim 10$), y en la magnitud de la decoherencia (para $\lambda \leq 1$ la decoherencia es más fuerte que en el caso $\gamma = 1$, mientras que para $\lambda > 1$ es menor).

En tanto el ambiente se considere suficientemente grande, entonces, los resultados sugieren que pasada una escala de distancias relativamente pequeña (pero que depende del valor del campo externo), los qubits evolucionan casi independientemente, como si estuvieran acoplados a entornos distintos. Este comportamiento es marcadamente diferente en el caso de acoplamiento fuerte, que será tratado en la próxima sección. Vale la pena mencionar que todos los resultados previos aluden a tiempos más cortos que aquéllos en los cuales el tamaño finito del ambiente se vuelve relevante. En tiempos largos los efectos de tamaño finito son importantes, y se manifiestan en abruptos aumentos o caídas en la coherencia del sistema [25]. Sin embargo, la aproximación que desprecia los efectos de borde ya no es buena en estas escalas temporales. De cualquier manera, los tiempos de recoherencia se hacen cada vez más grandes al aumentar el tamaño del entorno.

6.3. Resultados: acoplamiento fuerte

Cuando el sistema se encuentra fuertemente acoplado al entorno, los resultados son muy diferentes de los observados anteriormente. Como ya fue notado para el caso de un espín en el capítulo anterior, el régimen de acoplamiento fuerte se caracteriza por un eco con una oscilación rápida y una envolvente lenta que, para g suficientemente grande, se vuelve independiente de g. Como fue explicado en el capítulo anterior, este fenómeno puede atribuirse a una separación de escalas temporales entre el Hamiltoniano de interacción y el del entorno. Al igual que antes, cabe mencionar que es importante que la evolución rápida corresponde a una oscilación dada por un operador de evolución periódico. En casos más generales, por ejemplo si cada qubit interactúa con un cierto número de sitios con un acoplamiento gaussiano en la distancia según la forma propuesta en la sección 6.4, la evolución rápida ya no es periódica y se observa una rápida caída de la coherencia, sin oscilaciones.

En el caso de acoplamiento fuerte, se espera que la decoherencia aumente con la distancia para ambos ecos. De hecho, para d = 0 se tiene $L_{00,11}(g,t) = L_{0,1}(2g,t)$, con $L_{0,1}$ el eco correspondiente a un solo qubit. Esto debe ser del mismo orden que $L_{0,1}(g,t)$ dado que para g grande la envolvente es independiente de g. Por otra parte, en el límite de larga distancia $L_{00,11}(g,t) \simeq L_{0,1}^2(g,t)$, lo cual es menor que $L_{0,1}(g,t)$. La comparación entre $d \gg 1$ y d = 0, ilustrada en la Fig. 6.6 para $\gamma = 1$, $\lambda = 0.99$, indica por lo tanto un resultado opuesto al hallado para acoplamientos débiles. La dependencia con la distancia del eco $L_{01,10}$ sigue un patrón similar, es decir, la decoherencia también aumenta con la distancia, como se observa en la Fig. 6.7.

En la Fig. 6.6 se observan manifestaciones de interacciones efectivas entre los qubits. De hecho, para d > 0 además de la oscilación rápida con una envolvente que decae, el eco $L_{00,11}$ exhibe un batido en un tiempo que depende de d. Este efecto no es observable para acoplamiento débil y puede ser interpretado como una interacción de los qubits mediada por los modos de la cadena de espines. Por el contrario, no se observan batidos en $L_{01,10}$.

Es conveniente notar que la oscilación rápida del eco provoca continuas caídas y recuperaciones del entrelazamiento entre qubits. Sin embargo, esto es sólo una transferencia permanente de entrelazamiento entre cada qubit y el espín con que interactúa, con una frecuencia dada por la constante de acoplamiento g. La verdadera pérdida de entrelazamiento se produce por el decaimiento de la oscilación. Cuando la distancia entre qubits es relativamente pequeña, en los estados iniciales pares el batido permite recuperar parcialmente este entrelazamiento. En cambio, a medida que aumenta la distancia la pérdida de entrelazamiento se vuelve irreversible, al menos hasta la escala temporal en que los efectos de tamaño finito se vuelven relevantes.



Figura 6.6: Envolvente del eco $L_{00,11}$ como función del tiempo para dos qubits fuertemente acoplados a dos sitios distintos de una cadena de Ising con N = 100, $\lambda = 0.99$, g = 50. Se grafican los casos de distancia d = 0 (negro), 2 (verde), y límite de larga distancia (rojo). En contraste con la situación de acoplamiento débil, la decoherencia es ahora más fuerte para larga distancia, dado que la envolvente en ese caso es igual al cuadrado de la correspondiente a d = 0.



Figura 6.7: Envolvente del eco $L_{01,10}$ como función del tiempo para dos qubits fuertemente acoplados a dos sitios distintos de una cadena de Ising con N = 100, $\lambda = 0.99$, g = 50. Los gráficos corresponden a distancias d = 1 (azul), 2 (verde), y límite de larga distancia (rojo). Para el caso d = 0 no hay decoherencia en este caso, para $d \ge 1$ la decoherencia tiende a ser más fuerte a medida que la distancia aumenta.

La diferencia entre los ecos $L_{01,10}$ y $L_{00,11}$ en relación con la presencia o no de batidos puede ser comprendida analizando el origen del batido en términos del espectro del Hamiltoniano y de los coeficientes de Bogoliubov en la transformación que relaciona las excitaciones del Hamiltoniano de la cadena con las del Hamiltoniano perturbado. Las excitaciones del Hamiltoniano original tienen energías entre $2|1 - \lambda| \ge 2|1 + \lambda|$. Cuando se aplica un campo externo fuerte en dos sitios, dos autovalores de orden g aparecen, asociados a combinaciones de los operadores fermiónicos c_j correspondientes a los sitios en cuestión. Las demás excitaciones, cuyos autovalores son del mismo orden que antes, pueden dividirse en dos grupos, que corresponden esencialmente a excitaciones en la región entre esos sitios, o en el resto de la cadena (esta distinción entre "dentro" \ge "fuera" tiene sentido porque consideramos sólo distancias $d \ll N$). Los niveles más poblados resultan ser el correspondiente al modo de menor energía (que ocupa la región exterior), las excitaciones en los sitios de interacción, y las que están localizadas en la región interior. De estos niveles, las excitaciones de alta energía están asociadas a la oscilación rápida del eco, mientras que la excitación de energía más baja tiene una escala temporal que crece con N y sólo se manifiesta a tiempos largos. El batido en el eco está relacionado con el modo de menor energía en la región entre los dos qubits.

La situación para $L_{01,10}$ es distinta, como se observa en la Fig. 6.7, ya que en cada Hamiltoniano efectivo hay una perturbación en un solo sitio de la cadena. En este caso la cadena no resulta dividida en dos regiones, y las poblaciones de los modos de baja energía decaen en forma suave a medida que la energía aumenta, de modo que no es posible encontrar una única frecuencia dominante. Por lo tanto, no se observan batidos excepto en tiempos suficientemente largos, en que se manifiestan efectos de tamaño finito.

Las recoherencias del eco $L_{00,11}$ aparecen para $\lambda < 1$ pero no para $\lambda > 1$. Esto es una consecuencia del cambio en las propiedades de la cadena al atravesar el punto crítico. En particular, para $\lambda < 1$ el tiempo del batido es más corto a medida que λ aumenta ya que también aumenta la energía del primer modo entre los qubits. Para $\lambda > 1$, la desaparición del batido puede entenderse dado que muchas más excitaciones de baja energía, con frecuencias comparables a la que correspondería al batido, resultan similarmente pobladas.

El primer tiempo de recoherencia, t_r , y el valor del eco en el mismo, L_r , fueron analizados en función de la distancia d. En primer lugar se consideró un caso cercano al crítico, tal que H_{00} y H_{11} correspondieran a fases distintas $(\lambda = 0.99, \gamma = 1, N = 100)$. En cada caso, nuevos picos aparecen en múltiplos de t_r . Para d > 1, el tiempo de recoherencia crece linealmente con la distancia $(t_r \approx 2d)$, mientras que L_r decae como una ley de potencias, $L_r \propto d^{-1/4}$. Para distancias $d \gtrsim N/5$, aparecen efectos de tamaño finito.

Al examinar el eco para $\lambda < 1$ lejos de la transición de fase, se encuentra un decaimiento más lento del eco L_r con la distancia. Además, en este caso t_r ya no resulta lineal en d, sino aproximadamente exponencial. Es decir que t_r parece relacionado con propiedades del transporte en la cadena que son modificadas al variar el campo externo; la energía del modo más bajo entre los qubits en general no escalea como 1/d. El hecho de que la escala temporal no es lineal en la distancia demuestra que no es correcto imaginar las recoherencias como simples ondas de espín propagándose por la cadena a velocidad constante. Si se cambia el parámetro de anisotropía γ , las envolventes toman distintas formas, y se modifican también los valores de los tiempos de recoherencia y del eco en los mismos. La dependencia con la distancia de t_r y L_r fue estudiada para $\lambda = 0.99$ y γ entre 0.1 y 1. Se encontró que t_r típicamente aumenta según una ley de potencias, y que L_r aumenta a medida que γ disminuye, manteniéndose el decaimiento tipo ley de potencias para L_r como función de d. Sin embargo, el batido tiende a perder definición al agrandar d y achicar γ .

6.4. Un modelo con acoplamiento suavemente dependiente de la distancia

Anteriormente se han considerado modelos de decoherencia de un qubit a consecuencia de su interacción con una cadena de espines en dos situaciones extremas: la de acoplamiento uniforme con todos los sitios, o con un solo sitio. A continuación analizaremos un caso más general, en el cual el acoplamiento del qubit con su entorno varía en forma suavemente dependiente de la distancia. El modelo que se propone es el de un acoplamiento con forma gaussiana, es decir:

$$g(d) = g_0 C e^{-\frac{1}{2}(d/a)^2} \tag{6.15}$$

donde d es la distancia entre el qubit y un dado sitio de la cadena, y a el rango de la interacción (ambas cantidades se miden en número de sitios). C es una constante que normaliza el acoplamiento "total", es decir:

$$C = \left(\sum_{j} e^{-\frac{1}{2}(d_j/a)^2}\right)^{-1}$$
(6.16)

(esta suma debe hacerse teniendo en cuenta las condiciones periódicas de la cadena). Es conveniente notar que en el capítulo 5 la "interacción total" estaría dada por Ng y no por g. Por lo tanto, en el "régimen de acoplamiento débil" tratado en el modelo de espín central, la magnitud del acoplamiento total no es tan pequeña: para los valores ilustrados en los gráficos, es $gN \sim 10$. Sin embargo, el orden de magnitud del eco y las frecuencias involucradas corresponden a una situación de acoplamiento débil.

La forma de interacción propuesta permite estudiar casos intermedios a los tratados anteriormente. El caso del qubit central corresponde al límite de ancho infinito, $a \gg N$, mientras que el modelo en que cada qubit interactúa sólo con el espín más próximo se recupera en el límite $a \ll 1$. Un aspecto importante del modelo de interacción gaussiana es que permite eliminar una característica patológica de los casos anteriores, como es el hecho de que el Hamiltoniano de interacción tuviera sólo frecuencias armónicas entre sí, obteniendo por lo tanto una evolución perfectamente periódica. En el nuevo modelo, las intensidades de los acoplamientos varían en forma suave y las energías no son múltiplos de una misma constante. Esto no genera cambios drásticos en la situación de acoplamiento débil, puesto que en ese caso las frecuencias dominantes son las de la

cadena. En cambio, en el caso de acoplamiento fuerte la presencia de un espectro más complejo en el Hamiltoniano de interacción deriva en la supresión de las oscilaciones rápidas y el régimen de envolvente universal. En esta situación, para $\lambda < 1$ se observa un rápido decaimiento de la coherencia, prácticamente a cero (ver figura 6.8). Por supuesto, el creciente alineamiento de los espines en dirección z al aumentar el valor del campo transverso lleva nuevamente a un límite sin decoherencia para $\lambda \to \infty$.



Figura 6.8: Eco de Loschmidt para un qubit que interactúa fuertemente con una región de una cadena de Ising de 500 espines, con acoplamiento gaussiano en la distancia. La intensidad del acoplamiento es $g_0 = 50$, el campo transverso es 0.99. El ancho de la gaussiana es a = 100 (línea continua), 10 (de trazos), 1 ($-\cdots$), y 0.1 (punteada). Para el rango de tiempos que se muestra, el primer caso coincide con el eco para el límite de acoplamiento uniforme, y el último con el de acoplamiento con un solo sitio. En la situación intermedia a = 10, en que hay interacción con numerosos sitios pero con intensidad variable, el comportamiento es un rápido decaimiento del eco. En el caso a = 1, la interacción es predominantemente con el sitio más próximo pero el acoplamiento con sus primeros vecinos no es despreciable y produce oscilaciones irregulares.

Vale la pena mencionar que este resultado, que corresponde en forma más realista a un sistema cuántico fuertemente interactuante con su entorno, no representa una objeción hacia los estudios relacionados con el régimen universal puesto que éstos fueron iniciados con otro propósito: no el de describir una situación presente en la naturaleza o en una implementación experimental, sino el de sugerir una posible aplicación de un proceso de decoherencia controlada, con el fin de estudiar el ambiente a través de un qubit de prueba [24].

En las figuras 6.9 y 6.10 se muestra el resultado los ecos correspondientes a estados de Bell pares e impares, respectivamente, cuando el acoplamiento es débil. El comportamiento general del eco es similar al de acoplamiento con un solo sitio, excepto por el suavizado de las oscilaciones. Las curvas correspondientes a acoplamientos gaussianos son más regulares en su dependencia temporal y con la distancia: esta última, excepto para las cercanías del punto crítico, determina esencialmente un reescaleo del valor del eco en cada instante. Esto puede facilitar el estudio de la distancia de saturación. Por otro lado esta distancia deja de reflejar las longitudes de correlación de la cadena ya que está fuertemente relacionada con el ancho de la gaussiana. Sin embargo, como se observa en las figuras, la escala de saturación sigue siendo visiblemente mayor en la proximidad del punto crítico.

Como ya se ha mencionado, el modelo estudiado presenta para d = 0 un subespacio libre de decoherencia dado por los estados impares (es decir, de la forma $\alpha |01\rangle + \beta |10\rangle$). Esto permite almacenar qubits protegidos contra la decoherencia, si el estado anterior de dos qubits se utiliza para guardar el estado de un qubit $\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$ en forma "codificada". Situaciones de este tipo existen, por ejemplo, en las implementaciones que involucran trampas de iones, en las que una causa primordial de decoherencia son fluctuaciones incontrolables de campos uniformes, que desfasan a todos los iones por igual. En la práctica, no existen subespacios completamente libres de decoherencia, sino subespacios en los que los tiempos de decoherencia son mucho más largos que las otras escalas temporales relevantes.

En el modelo propuesto, en el caso d = 0 los dos qubits están acoplados en forma exactamente igual con el ambiente, y por lo tanto la coherencia no decae en absoluto. Una situación más realista es la correspondiente a una distancia d no nula, pero pequeña comparada con el rango de la campana de interacción sistema-entorno. En este caso, el Hamiltoniano de interacción se puede dividir en una parte en que el acoplamiento es igual para ambos qubits, más una parte que contiene el desbalance en las constantes de acoplamiento. Este último término es responsable del decaimiento de la coherencia, aunque éste puede ocurrir en escalas temporales mucho más largas que el tiempo de decoherencia de un único qubit acoplado a la cadena. Al variar el valor de d, por lo tanto, se puede modelar una serie de situaciones: cuando $d \ll a$, el subespacio libre de decoherencia protege la información en forma prácticamente perfecta; a medida que d aumenta, los tiempos de decoherencia disminuyen. Para d suficientemente grande, codificar un qubit en dos pasa a ser de hecho una mala idea: en particular, en el límite de entornos independientes, resulta $L_{01,10} = L_{0,1}^2$, es decir la decoherencia del estado de dos qubits es mayor que la del estado que se desea proteger.

Una medida de la eficiencia de la utilización del subespacio (cuasi)libre de decoherencia es, por lo tanto, la comparación del eco del estado original, $L_{0,1}$, con el del eco del estado "protegido" $L_{01,10}$. En la figura 6.11 se estudia esta eficiencia a través de la diferencia relativa $(L_{01,10} - L_{0,1})/(1 - L_{0,1})$. Un valor de 1 para esta cantidad indica protección perfecta, el cero corresponde a una situación en que la decoherencia es igual en ambos casos (y por lo tanto el uso de dos qubits físicos para la codificación de un solo qubit lógico es un desperdicio de recursos), mientras que un valor negativo indica que la estrategia de protección resulta más destructiva que no hacer nada.



Figura 6.9: Eco $L_{00,11}$ para el caso de acoplamiento débil, $g_0 = 0.1$, una cadena de Ising de 500 espines con campo transverso y acoplamiento gaussiano con ancho a = 5. Al igual que en las figuras 6.2 y 6.3, el valor del campo es $\lambda = 0.5$ (arriba), 0.99 (en el medio) y 1.5 (abajo). Las curvas que se muestran corresponden a distancias crecientes de 3 en 3 y a partir de d = 0 (el eco es siempre creciente con la distancia). La última curva (marrón) corresponde al límite de entornos independientes.



Figura 6.10: Eco $L_{01,10}$ para el caso de acoplamiento débil. Los parámetros son los mismos que en la figura anterior. Para estados impares la decoherencia es nula en d = 0 y aumenta con la distancia (al contrario del caso de estados pares).



Figura 6.11: Eficiencia relativa de la protección de un qubit en un subespacio semi-libre de decoherencia correspondiente a dos qubits a distancia d, cuyo estado se encuentra en el subespacio generado por los dos estados de Bell impares. Esta eficiencia puede cuantificarse en la forma $Ef = (L_{01,10} - L_{0,1})/(1 - L_{0,1})$. Se grafica para el caso de acoplamiento pequeño, $g_0 = 0.1$, una cadena de Ising de 500 espines y acoplamiento gaussiano con ancho a = 5. Las curvas que se muestran corresponden a distancias crecientes de 3 en 3 y a partir de d = 0 (para este valor la protección es siempre perfecta, y empeora al aumentar la distancia).

Según se observa en la figura 6.11, en este modelo la codificación proporciona cierta protección contra la decoherencia en tanto la distancia entre qubits cumpla $d \leq a$. Llamativamente, a tiempos cortos la eficiencia de esta estrategia es relativamente independiente del valor del campo transverso. A tiempos largos, en el caso crítico la estrategia de codificación da mejores resultados, lo cual puede interpretarse como consecuencia de que la decoherencia para un qubit es más fuerte en este caso, y de que la longitud de correlación es mayor.

Parte III

Propuestas para la simulación de procesos de decoherencia

Capítulo 7

Decoherencia y dinámica del entrelazamiento

Este capítulo está abocado al estudio de la decoherencia siguiendo un modelo propuesto en [47, 48]: un sistema de dos osciladores armónicos iguales acoplados de la misma manera a un baño térmico común formado por un conjunto de osciladores (el acoplamiento es bilineal en posición). Notablemente, este modelo sencillo es suficiente para producir una evolución no trivial del entrelazamiento entre los dos subsistemas. En el límite de tiempos largos existen tres tipos de comportamiento cualitativamente diferentes, dependiendo de parámetros tales como el estado inicial, la temperatura del baño, etc. Estos tres comportamientos corresponden a las siguientes opciones: los subsistemas pueden terminar compartiendo entrelazamiento no nulo para todo tiempo suficientemente largo, pueden terminar desentrelazados, o puede ocurrir que se entrelacen y desentrelacen periódicamente.

La existencia de las tres posibilidades mencionadas es un resultado presentado por J. P. Paz y A. Roncaglia en [47] pero no ha sido nunca observada en un experimento. Una propuesta reciente [161] considera una implementación de un modelo similar donde el sistema está dado por el campo electromagnético en una cavidad. En este caso el diagrama de fases del entrelazamiento asintótico comprende dos fases, correspondientes a estados finales entrelazados o desentrelazados, pero no se observa la fase con desaparición y reaparición periódica del entrelazamiento.

En este capítulo se analizará una propuesta para la realización de una experiencia en una trampa de iones que exhibe las tres situaciones asintóticas halladas en [47]. Consideramos para esto un conjunto de tres iones en una trampa lineal. Los dos iones en las puntas de la cadena serán iguales y corresponderán a los subsistemas, mientras que el ion del medio, de una especie distinta, proporcionará un ambiente para los subsistemas. La decoherencia producida por la interacción entre los iones se incrementará acoplando el ion central a un láser que se utilizará para enfriar ciertos modos de la cadena. Los ingredientes que constituyen este modelo se encuentran disponibles en la tecnología actual y son suficientes para la demostración de la dinámica del entrelazamiento que se desea estudiar.

La elección de un sistema de iones atrapados para la reproducción de la dinámica del entrelazamiento mencionada no es casual. En primer lugar, los modos de movimiento de una cadena de iones corresponden en muy buena aproximación a un conjunto de osciladores armónicos. En segundo lugar, los iones interactúan entre sí en una forma dada por la repulsión coulombiana, que puede al orden más bajo aproximarse por una interacción bilineal en posición, igual a la tratada en [47]. Por último, el entrelazamiento en los modos de movimiento de iones atrapados ha sido recientemente producido y demostrado en [10], lo cual abre la puerta para considerar situaciones más complejas como las propuestas en este capítulo.

7.1. Decoherencia de dos osciladores igualmente acoplados a un ambiente común



Figura 7.1: Un modelo de movimiento Browniano cuántico en el que dos subsistemas, correspondientes a osciladores armónicos iguales, se encuentran igualmente acoplados a cada uno de los osciladores que forman el entorno.

En esta sección se describe brevemente el problema considerado en [47] y que se ilustra en la figura 7.1. El contenido incluido es esencialmente una selección del presentado en el artículo mencionado y se incluye solamente por completitud. En el trabajo se estudia la dinámica del entrelazamiento para un sistema compuesto por dos osciladores armónicos idénticos (subsistemas $A ext{ y } B$), los cuales se hallan igualmente acoplados a un entorno común. Este entorno corresponde a un baño formado por un conjunto de osciladores [77, 162, 78, 163] que se encuentran en un estado térmico. El Hamiltoniano propuesto es de la forma $H = H_S + H_E + H_{int}$, donde

$$H_{S} = \frac{p_{A}^{2} + p_{B}^{2}}{2m} + \frac{1}{2}m(\omega_{A}^{2}q_{A}^{2} + \omega_{B}^{2}q_{B}^{2}) + mc_{AB}q_{A}q_{B}$$

$$H_{E} = \sum_{j} (\frac{p_{j}^{2}}{2m_{j}} + \frac{m_{j}}{2}w_{j}^{2}q_{j}^{2}),$$

$$H_{int} = (q_{A} + q_{B})\sum_{j} g_{j}q_{j}.$$
(7.1)

Este Hamiltoniano es una generalización al caso de dos subsistemas del modelo

del movimiento Browniano cuántico presentado en la sección 2.3.

Dada la simetría del modelo propuesto, resulta conveniente usar coordenadas correspondientes al centro de masa y movimiento relativo para el sistema, definidas en la forma: $q_{\pm} = (q_A \pm q_B)/\sqrt{2}$. En términos de estas variables el Hamiltoniano del sistema resulta:

$$H_S = \frac{p_+^2 + p_-^2}{2m} + m \frac{\omega_-^2 q_-^2 + \omega_+^2 q_+^2}{2} + mc_{+-}q_+q_-$$
(7.2)

donde $\omega_{\pm}^2 = (\omega_A^2 + \omega_B^2)/2 \pm c_{AB}$ y $c_{+-} = (\omega_A^2 - \omega_B^2)/2$. Dado que se asume que los dos subsistemas se encuentran igualmente acoplados al entorno, sólo la variable q_{\pm} del sistema aparece en el Hamiltoniano de interacción.

A continuación nos referiremos únicamente al caso más simple, en el cual ambos osciladores son resonantes ($\omega_A = \omega_B$). En esta situación el movimiento relativo resulta completamente desacoplado del entorno y evoluciona en forma independiente. En cambio, el centro de masa del sistema sufre decoherencia exactamente de la misma forma que un único oscilador acoplado al baño, siguiendo el modelo de movimiento Browniano cuántico estudiado en la sección 2.3. Como se ha mencionado anteriormente, este modelo puede ser resuelto en forma exacta si se asume que el estado inicial del ambiente corresponde a un estado térmico. La ecuación maestra para la evolución temporal del sistema está dada por la ecuación (2.19) e incluye efectos de renormalización de la frecuencia, disipación, difusión y difusión anómala.

En este trabajo se considerará solamente el caso de un ambiente óhmico, es decir con densidad espectral $J(\omega) = \sum_{j} \delta(\omega - \omega_j) g_j^2 / (2m_j \omega_j) = 2m \gamma_0 \omega$ $\theta(\omega - \Lambda)/\pi$. A proporciona una frecuencia de corte asociada a una escala de tiempo característica Λ^{-1} para la respuesta del entorno, y por lo tanto para las variaciones de los coeficientes en la ecuación maestra. Para tiempos $t \gg \Lambda^{-1}$ los coeficientes de disipación $\gamma(t)$ y de renormalización de la frecuencia $\delta\omega(t)$ alcanzan valores asintóticos dados por: $\gamma = 2\gamma_0 \text{ y } \delta\omega^2 = -4m\Lambda\gamma/\pi$. Por lo tanto, las frecuencias renormalizadas $\Omega^2_{A,B}(t) = \omega^2_{A,B} + \delta \omega^2(t)/2$ dependen del tiempo y se aproximan a valores independientes de la frecuencia de corte sólo si las frecuencias desnudas $\omega_{A,B}$ son elegidas en la forma apropiada (es decir incluyendo una corrección dependiente del corte). La constante de acoplamiento c_{AB} también debe ser corregida de modo que el acoplamiento renormalizado $C_{AB}(t) = c_{AB} + \delta \omega^2(t)/2$ se aproxime a un valor finito independiente del corte. Los comportamientos de los coeficientes de difusión D(t) y de difusión anómala f(t) son más complicados y dependen de la temperatura inicial del baño. Estos coeficientes típicamente alcanzan valores asintóticos luego de un transitorio que depende de la temperatura y de la frecuencia de corte. Aquí y en adelante, siguiendo la notación introducida en [47], las letras mayúsculas se utilizarán para las variables renormalizadas y la dependencia en el tiempo de los coeficientes se omitirá cuando éstos correspondan a los valores asintóticos.

El estado del sistema a tiempos largos es fácil de caracterizar: el modo de movimiento relativo evoluciona libremente, mientras que el centro de masa alcanza un estado estacionario gaussiano con primeros momentos nulos y matriz de covarianza determinada por [76]:

$$\Delta p_{+}^{2} = \frac{D}{2\gamma}, \qquad m^{2} \Omega^{2} \Delta q_{+}^{2} = \frac{D}{2\gamma} - mf, \qquad \langle \{q_{+}, p_{+}\} \rangle = 0.$$
(7.3)

Esta situación asintótica se ilustra en la figura 7.2. Es interesante notar que el estado estacionario del centro de masa corresponde a un estado estrujado a consecuencia del término de difusión anómala f; este estrujamiento es por lo tanto una indicación de efectos no-Markovianos.



Figura 7.2: Descripción esquemática de la situación a tiempos largos. El centro de masa y el movimiento relativo se encuentran totalmente descorrelacionados. El estado final del centro de masa depende del baño y es típicamente un estado mixto y estrujado, mientras que el movimiento relativo continúa evolucionando libremente.

7.1.1. Entrelazamiento en el estado asintótico

Asumiremos en lo sucesivo que el sistema se encuentra inicialmente en un estado gaussiano. En este caso, el estado final será gaussiano también, y el entrelazamiento estará completamente determinado por las propiedades de la matriz de covarianza. Una buena medida para el entrelazamiento de este tipo de estados lo proporciona la negatividad logarítmica E_N que puede calcularse en la forma [160, 164, 165, 166]:

$$E_N = \max\{0, -\ln(2\nu_{\min})\},\tag{7.4}$$

donde $\nu_{\rm mín}$ es el menor autovalor simpléctico de la matriz de covarianza correspondiente al estado parcialmente transpuesto. La transposición parcial, en términos de las variables de centro de masa y movimiento relativo, corresponde a la operación $p_{\pm} \rightarrow p_{\mp}$. La expresión anterior muestra que el estado es entrelazado si y sólo si la operación de transposición parcial conduce a una matriz de covarianza cuyo menor autovalor simpléctico es menor a 1/2, lo cual señala que no puede corresponder a la matriz de covarianza de ningún estado físico. Este criterio proporciona una condición suficiente, pero no necesaria, para el entrelazamiento en el caso de estados no gaussianos.

Para el modelo propuesto, el entrelazamiento entre los subsistemas $A \ge B$ a tiempos largos está dado por la expresión:

$$E_N(t) \to \max\{0, \tilde{E}_N + \Delta E_N G(t)\}.$$
(7.5)

donde G(t) es una función con período π/Ω_{-} y cuya imagen es el intervalo $\{-1, 1\}$. La oscilación es en torno de un valor dado por:

$$\tilde{E}_N = \max\{r, r_{crit}\} - S_{crit}, \qquad (7.6)$$

y con amplitud:

$$\Delta E_N = \min\{r, r_{crit}\}.$$

En esta expresión, r es el estrujamiento inicial del modo de movimiento relativo, definido como:

$$r = \left| \frac{1}{2} \ln \left(m \Omega_{-} \frac{\Delta q_{-}}{\Delta p_{-}} \right) \right| \tag{7.7}$$

 r_{crit} está relacionado con el estrujamiento del estado as
intótico para el centro de masa,

$$r_{crit} = \left| \frac{1}{2} \ln \left(m \Omega_{-} \frac{\Delta q_{+}}{\Delta p_{+}} \right) \right|, \qquad (7.8)$$

y S_{crit} con la entropía total del sistema:

$$S_{crit} = \frac{1}{2} \ln(4\Delta q_+ \Delta p_+ \Delta q_- \Delta p_- /\hbar^2)$$
(7.9)

Las dispersiones Δq_+ y Δp_+ están dadas por los valores asintóticos, mientras que las dispersiones para el modo de movimiento relativo son las correspondientes a un instante de tiempo en que la matriz de covariancia para este modo es diagonal (es decir, un instante tal que el estrujamiento del modo es en posición o en momento).

La siguiente es una forma más sencilla de entender la situación final: el entrelazamiento entre subsistemas alcanza sus valores extremos cuando el estrujamiento del movimiento relativo es en dirección de los ejes de posición o momento, q_- o p_- . Para estos instantes, la negatividad logarítmica puede escribirse según una expresión más simple, dada por:

$$E_N = \max\{0, -\ln(2\Delta p_-\Delta q_+/\hbar), -\ln(2\Delta q_-\Delta p_+/\hbar)\}$$
(7.10)

Esto indica que el entrelazamiento entre A y B es no nulo cuando $\Delta p_{-}\Delta q_{+} < \hbar/2$ ó $\Delta q_{-}\Delta p_{+} < \hbar/2$. Vale la pena destacar que el tipo de correlaciones en estos estados es cualitativamente similar a la del estado considerado en la paradoja de Einstein, Podolsky y Rosen, es decir se tienen valores bien definidos para cantidades colectivas de movimiento pero no para el estado de cada subsistema individualmente [167].

Teniendo en cuenta que, como ya se mencionó, la transposición parcial de la matriz densidad corresponde a la operación $p_{\pm} \rightarrow p_{\mp}$, es fácil interpretar los resultados anteriores: cuando se tiene $\Delta p_{-}\Delta q_{+} < \hbar/2$ ó $\Delta q_{-}\Delta p_{+} < \hbar/2$, al efectuar la transposición parcial el resultado para uno de los modos no satisface la relación de incerteza, es decir su área en el espacio de fases es menor que la correspondiente a cualquier estado físico. Esto conduce entonces a una negatividad no nula, que indica que el estado es entrelazado. Estos conceptos se ilustran en la figura 7.3.



Figura 7.3: Representación esquemática del criterio de la transpuesta parcial (TP), correspondiente a la operación $p_{\pm} \leftrightarrow p_{\mp}$. El estado es entrelazado si y sólo si esta operación conduce a una matriz de covarianza que no puede corresponder a ningún estado físico, por no respetar el principio de incertidumbre. En el esquema se observa cómo un estado puede pasar de no estar entrelazado a estarlo, y viceversa, a medida que el modo de movimiento relativo evoluciona.

De acuerdo a estos resultados, existen tres posibles escenarios para el entrelazamiento asintótico, de acuerdo a los valores que toman los parámetros r, r_{crit} y S_{crit} , es decir, el estrujamiento de los dos modos y el área en el espacio de fases. En primer lugar, es posible que el entrelazamiento entre subsistemas sea distinto de cero para todo tiempo suficientemente largo. Alternativamente, es posible que el entrelazamiento se anule y reaparezca periódicamente, en una serie infinita de eventos de muerte y resurrección del entrelazamiento [36, 168]. Por último, es posible que los subsistemas se encuentren asintóticamente desentrelazados. Para el caso de un ambiente óhmico es posible usar expresiones analíticas para los coeficientes D, γ y f en función de la temperatura T [79]. A partir de ellas es posible determinar a cuál de los tres casos corresponde el estado a tiempos largos dados los valores de T y r, como se muestra en el diagrama de fases para el entrelazamiento asintótico en la fig. 7.4.

La presencia de entrelazamiento asintótico no nulo a bajas temperaturas y bajo estrujamiento del modo de movimiento relativo es un fenómeno no-Markoviano y no-perturbativo: el entrelazamiento es consecuencia del estrujamiento inducido en el estado del centro de masa a consecuencia de la interacción con el baño. Para baja temperatura y un estrujamiento alto del movimiento relativo, el entrelazamiento entre subsistemas es una consecuencia de este último. Cuando los estrujamientos de ambos modos son similares, el entrelazamiento aparece y desaparece a medida que el movimiento relativo evoluciona en el tiempo. Para un dado valor de estrujamiento inicial del movimiento relativo, si la temperatura es suficientemente alta el estado final es siempre desentrelazado. Para altas temperaturas del baño, la fase con muerte y reaparición del entrelazamiento tiende a desaparecer. Esto es una característica del caso considerado en la figura, en que los osciladores son no-interactuantes, y no un fenómeno general [169].



Figura 7.4: Diagrama de fases para el entrelazamiento asintótico correspondiente a un ambiente óhmico. Los valores de los parámetros corresponden a $\Omega = 1$, $\gamma_0 = 0.15$, $\Lambda = 20$, m = 1, $C_{AB} = 0$, y en los ejes se considera $\hbar = k_B = 1$. Las tres fases para tiempos largos se describen como: SD ("sudden-death") para el caso en que el entrelazamiento asintótico es nulo, NSD ("no sudden death") para entrelazamiento asintótico no nulo, y SDR ("sudden death and revivals") para secuencias periódicas de muerte y reaparición del entrelazamiento. Se indica también la dependencia con la temperatura de los parámetros S_{crit} (línea de trazos) y r_{crit} (línea punteada). Figura tomada de [47].

Todas las propiedades analizadas corresponden al caso de osciladores resonantes. En un caso más general, el modo de movimiento relativo ya no resulta desacoplado del ambiente, y por lo tanto ambos grados de libertad sufren decoherencia. Fuera de una campana en torno de la condición de resonancia, la situación final genérica corresponde a un estado desentrelazado de los subsistemas [48].

7.2. Implementación en una trampa de iones: Hamiltoniano del sistema y acoplamiento láser

En esta sección se estudia un modelo de decoherencia controlada en una trampa de iones que permite reproducir los resultados cualitativos del modelo presentado en la sección anterior. Consideramos una cadena de tres iones atrapada por un potencial armónico, y nos interesaremos únicamente en el movimiento de los iones en una de las direcciones transversales¹, x, asumiendo que el confinamiento es muy fuerte en la otra dirección transversal, y [126, 102]. Los dos iones en los extremos de la cadena, que se asociarán a los subsistemas $A ext{ y } B$, serán iguales, mientras que el ion central, E, pertenecerá a una especie diferente. Este ion será sometido a enfriamiento láser y será la fuente de decoherencia para los subsistemas (ver figura 7.5).

El Hamiltoniano de la cadena está entonces dado por una expresión similar a (4.11), excepto que evaluado para el caso de tres iones, e introduciendo la

¹Gracias a Martin Plenio y Alex Retzker por sugerir el uso de los modos transversales de movimiento.



Figura 7.5: Un sistema de tres iones atrapados formando una cadena lineal. Se considerará solamente el movimiento en una dirección transversal. Los dos iones en los extremos serán iguales y corresponderán a los subsistemas, mientras que el ion del medio, sometido a enfriamiento láser, proporcionará una fuente de decoherencia.

diferencia de masas:

$$H = \sum_{j=1}^{3} \left[\frac{p_j^2}{2m_j} + \frac{1}{2} \frac{m^2}{m_j} \omega_x^2 x_j^2 + \frac{1}{2} m \omega_z^2 z_j^2 \right] + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i>j}^{3} \frac{1}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (z_i - z_j)^2}}$$
(7.11)

Aquí *m* es la masa de los iones en los extremos de la cadena, *x* la posición en la dirección transversal y *z* la posición sobre el eje de la trampa. ω_z es la frecuencia de la trampa en la dirección axial y ω_x la frecuencia para la dirección radial, para los iones de los extremos; a diferencia de la frecuencia axial, la radial escalea inversamente con la masa del ion, y por lo tanto es distinta para el ion del medio [113].

Se considerarán solamente valores de las frecuencias tales que la configuración de equilibrio de los iones es un arreglo lineal. La distancia de equilibrio está entonces dada por $d_{eq}^3 = 5e^2/(16\pi m\omega_z^2\epsilon_0)$. Además se elegirán valores para los cuales sea posible realizar una aproximación armónica del potencial, es decir, valores suficientemente alejados de la transición a una configuración de zig-zag (cabe mencionar que las correcciones a órdenes superiores son muy pequeñas excepto en valores muy próximos a la transición [102]).

En la aproximación armónica, se obtiene para el movimiento transversal el Hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2m_j} \sum_j p_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{ij} V_{ij} x_i x_j$$
(7.12)

donde $V_{ii} = (m^2/m_i)\omega_x^2 - \sum_j e^2/(2\pi\epsilon_0|z_i - z_j|^3)$, y $V_{ij} = e^2/(2\pi\epsilon_0|z_i - z_j|^3)$ for $i \neq j$ [126]. Reemplazando el valor de la distancia de equilibrio, la matriz V resulta entonces dada por:

$$V = \frac{m\omega_z^2}{5} \begin{pmatrix} 5\delta\omega^2 - 9 & 8 & 1\\ 8 & 5m\delta\omega^2/m_E - 16 & 8\\ 1 & 8 & 5\delta\omega^2 - 9 \end{pmatrix}$$
(7.13)

donde m_E es la masa del ion del medio y $\delta \omega = \omega_x / \omega_z$. Este Hamiltoniano puede ser fácilmente diagonalizado, obteniendo los modos normales de la cadena. A

causa de la simetría, los modos tienen paridad bien definida: existen dos modos pares, en los cuales todos los iones toman parte y en los que los subsistemas se mueven en fase, y un modo impar, en el que los subsistemas se mueven en contrafase y el ion del medio permanece quieto (ver figura 7.6).



Figura 7.6: Modos normales para la cadena lineal de tres iones. Dado que los dos iones de los extremos son iguales, los modos tienen simetría definida.

Si la población de los modos es del orden de 1, las correcciones al Hamiltoniano (7.12) son del orden de $x^2/d^2 \approx 10^{-5}\omega_z/\omega_l$, con ω_l la frecuencia del modo más bajo. Cerca de la transición de fase este modo corresponde al modo par 2 de la figura 7.6, que para el valor crítico de ω_x se vuelve inestable. Consideraremos entonces sólo frecuencias para las cuales estas correcciones son pequeñas (del orden de 10^{-3} - 10^{-4}). Las frecuencias de los modos se grafican en la figura 7.7 para el caso en que los subsistemas corresponden a iones de ²⁴Mg y el ion-entorno es ⁹Be (la justificación para esta elección se explica más adelante). Cuando $\omega_x \gg \omega_c$, los modos normales de la cadena son aproximadamente iguales a los modos locales, es decir el movimiento independiente de los iones. Uno de los modos pares está entonces dado por el movimiento del ion central únicamente, con frecuencia $m\omega_x/m_E$. El otro modo par y el impar son degenerados, con frecuencia ω_x , e involucran sólo el movimiento de los iones de los extremos.

Los iones correspondientes a los subsistemas, $A \neq B$, están acoplados de la misma manera al entorno provisto por el ion central, E, a causa de la simetría del conjunto. Modificando el cociente entre las frecuencias longitudinal y transversal es posible variar la intensidad del acoplamiento entre iones: en el límite en que $\omega_x \gg \omega_z$, no hay acoplamiento entre los distintos iones y por lo tanto no hay decoherencia; el acoplamiento aumenta a medida en que el valor de ω_x decrece (es decir a medida que se acerca al valor para el cual la configuración de equilibrio pasa a ser la de zig-zag).

Al igual que en el modelo anterior, conviene usar coordenadas colectivas para el sistema, $q_{\pm} = (x_A \pm x_B)/\sqrt{2}$. El movimiento relativo, asociado a la coordenada q_- , corresponde al modo impar y está por lo tanto desacoplado del ambiente. En cambio, el movimiento del centro de masa, dado por la coordenada q_+ , no corresponde a un modo de la cadena y sufre decoherencia por estar acoplado al ion central. En este sentido, la evolución del sistema es análoga a la tratada en la sección anterior, con la diferencia fundamental de que el ambiente está hasta ahora compuesto por un único oscilador. El tamaño efectivo del entorno puede agrandarse al acoplar un láser al ion central. La frecuencia de este láser puede ajustarse en forma tal de producir un enfriamiento de los modos en los que el ion



Figura 7.7: Frecuencias de los modos normales para una cadena de dos iones de ²⁴Mg con un ion de ⁹Be en el medio. Para $\omega_x < \omega_c \simeq 1.6733 \ \omega_z$ la configuración lineal resulta inestable. Para $\omega_x \gg \omega_z$, los modos normales corresponden al movimiento independiente de cada ion, y por lo tanto las frecuencias son proporcionales a ω_x . El modo impar corresponde a la línea de trazos (- - -). Los dos ejes están en escala logarítmica y unidades de ω_z , la frecuencia longitudinal.

E participa, de modo de simular el efecto de un reservorio a baja temperatura.

Consideramos entonces un enfriamiento dado por un láser en la banda roja de un dado modo (ver capítulo 4). Este acoplamiento, en la representación de interacción (con respecto al Hamiltoniano de los niveles internos más el correspondiente a los modos de movimiento) y luego de una aproximación de onda rotante, puede escribirse en la forma:

$$H_{L-I}^{(int)} = i\hbar\Omega v^{(l)}k\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_l}}(\sigma_+ a_l e^{i\varphi} - h.c.)$$
(7.14)

Aquí l es el modo considerado, Ω es la frecuencia de Rabi, k la componente en dirección x del vector de onda, y φ la fase del láser. $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$ es el operador de transición para el estado interno del ion central, y a_l, a_l^{\dagger} son los operadores de destrucción y creación para el modo. Este Hamiltoniano es la versión correspondiente a (4.7) para el caso en que se trata con una cadena de iones en vez de un único ion atrapado, simplemente reemplazando la coordenada para el ion sobre el cual actúa el láser en términos de los operadores asociados al conjunto de modos:

$$x_E = \sum_l v^{(l)} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_l}} Q_l = \sum_l v^{(l)} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_l}} \frac{a_l + a_l^{\dagger}}{\sqrt{2}}.$$
 (7.15)

El Hamiltoniano (7.14) transfiere excitaciones entre el modo de movimiento y el estado interno del ion. Si $|g\rangle$ es un estado interno estable, mientras que $|e\rangle$ decae rápidamente de vuelta a $|g\rangle$, el efecto del acoplamiento con el láser es el

enfriamiento del modo l. Utilizando un láser de frecuencia variable es posible de esta forma enfriar los dos modos transversales de los que el ion central participa. El ingrediente esencial de esta propuesta es por lo tanto el enfriamiento por simpatía, y se trata de un caso particular entre los considerados en [170]. Tal como se menciona en ese trabajo, es importante notar que la causa principal de calentamiento de los modos es la presencia de campos externos fluctuantes; típicamente estos campos son constantes en la escala de tamaños correspondiente a la distancia entre iones, y por lo tanto prácticamente no afectan el modo de movimiento impar.

Por simplicidad, se puede aproximar el efecto del enfriamiento láser por una ecuación maestra Markoviana, que en la representación de interacción toma la forma:

$$\frac{d\rho}{dt} = \sum_{l} \frac{\Gamma_l}{2} (2a_l \rho a_l^{\dagger} - \{a_l^{\dagger} a_l, \rho\})$$
(7.16)

En esta expresión se asume que cada uno de los modos pares se enfría con una tasa Γ_l . El estado final de la evolución es entonces el vacío de los modos enfriados.

7.3. Entrelazamiento en el estado asintótico

Al igual que en el modelo de dos osciladores asociados a un baño común tratado en [47, 48], restringimos el análisis a estados gaussianos. La evolución dada por el Hamiltoniano de la cadena sumado al enfriamiento modelado por la ecuación (7.16) preserva el carácter gaussiano del estado y puede ser analíticamente resuelta, según se explica en la sección 3.1. Los segundos momentos del modo impar evolucionan según la dinámica libre de este modo, mientras que los asociados a los modos pares se acercan a los correspondientes al estado de vacío. Transformando las coordenadas de los modos normales pares a las del centro de masa del sistema (q_+, p_+) se obtiene que la matriz de covarianza del centro de masa se aproxima a valores de equilibrio dados por:

$$\langle q_{+}^{2} \rangle = \Delta^{2} q_{+} = \frac{\hbar}{2m} \left(\frac{\alpha_{p_{1}}^{2}}{\omega_{p_{1}}} + \frac{\alpha_{p_{2}}^{2}}{\omega_{p_{2}}} \right)$$
(7.17)

$$\langle p_{+}^{2} \rangle = \Delta^{2} p_{+} = \frac{m\hbar}{2} \left(\omega_{p1} \ \alpha_{p1}^{2} + \omega_{p1} \ \alpha_{p2}^{2} \right)$$
 (7.18)

$$\langle \{q_+, p_+\} \rangle = 0.$$
 (7.19)

En esta expresión, p1 y p2 indican los dos modos pares, $\omega_{p1/p2}$ las frecuencias correspondientes, y $\alpha_{p1/p2}$ las amplitudes (adimensionales) de los coeficientes en la transformación de la coordenada de centro de masa q_+ a las de los modos normales, $Q_{p1/p2}$. Aún si los detalles del proceso de enfriamiento son diferentes de los descriptos, este estado asintótico para el centro de masa surge solamente de asumir que los modos pares son enfriados a su estado de vacío.
A partir de la matriz de covarianza es posible calcular el entrelazamiento entre los subsistemas $A \ y \ B$ como función del tiempo. Al igual que en el modelo anterior, el entrelazamiento puede cuantificarse a través de la negatividad logarítmica, E_N , y el comportamiento asintótico está nuevamente determinado por las tres cantidades r, r_{crit} y S_{crit} . La posibilidad de observar en este modelo los tres regímenes para el entrelazamiento asintótico estudiados en [47, 48] depende de los valores que puedan tomar esos tres parámetros. Los parámetros r, r_{crit} y S_{crit} dependen a su vez de la elección de la masa de los iones y del cociente entre las frecuencias longitudinal y transversal, así como del estado inicial del modo impar. En particular, una escala de valores típicos de entrelazamiento está determinada por:

$$E_N^0 = \max\{r_{crit} - S_{min}, 0\},$$
(7.20)

que corresponde a la negatividad logarítmica cuando la cadena está en su estado fundamental; S_{min} está dado por el valor de S_{crit} cuando el estado del movimiento relativo es el vacío, es decir:

$$S_{min} = \frac{1}{2} \ln(2\Delta q_+ \Delta p_+ /\hbar). \tag{7.21}$$

Para obtener una buena cantidad de estrujamiento r_{crit} , es necesario que el acoplamiento entre iones sea fuerte, lo cual a su vez implica una elección de parámetros no muy lejana de la transición entre configuración lineal y zig-zag. Por otra parte, los parámetros deben ser elegidos de forma que la aproximación armónica sea válida, lo cual implica no demasiado cerca de la transición. Para obtener, dentro de estas limitaciones, valores grandes para E_N^0 , es conveniente que el ion central, E, sea más liviano que los otros dos. La figura 7.8 muestra los valores de r_{crit} , S_{min} y E_N^0 como funciones del cociente ω_x/ω_z para el caso en que A y B son iones de ²⁴Mg y E es un ion de ⁹Be. Ésta es la elección de especies utilizada en [10] para generar entrelazamiento en forma determinista en los grados de libertad de movimiento de iones atrapados. La utilización de iones de distintas especies, además de aumentar los valores accesibles de entrelazamiento, permite reducir acoplamientos indeseados del láser a los iones A y B, evitando la decoherencia del modo impar.

7.4. Diagrama de fases en función del estado inicial

A los efectos de poder observar las distintas situaciones asintóticas, es necesario poder preparar diferentes estados iniciales. Conceptualmente, el estado inicial más simple es el vacío, es decir el estado fundamental de la cadena, correspondiente a enfriar todos los modos completamente. En este caso, el sistema no evoluciona en el tiempo, y el entrelazamiento entre subsistemas corresponde a E_N^0 , la cantidad dada por la fórmula (7.20) y estudiada en [171]. Tal como se menciona en ese artículo, el entrelazamiento entre A y B en este caso es consecuencia de que el estado de vacío de la cadena completa es un estado estrujado en términos de los modos locales. En nuestro sistema, los valores que pueden



Figura 7.8: Valores de los parámetros r_{crit} (- - -), S_{min} (- · · -) y E_N^0 (continua) en función del cociente ω_x/ω_z para una cadena de dos iones de ²⁴Mg con un ion de ⁹Be en el medio. Para $\omega_x/\omega_z < 1.6733$ la configuración lineal resulta inestable, y la configuración de equilibrio es de zig-zag. El valor crítico se muestra en línea punteada.

obtenerse para el entrelazamiento en el estado fundamental pueden modificarse variando las frecuencias longitudinal y transversal.

Otra opción es comenzar con un estado térmico en lugar del vacío. Esto corresponde también a un estado gaussiano, pero el estado asintótico tiene una mayor entropía. En cambio, los valores de r y r_{crit} no se modifican por la elección de temperatura inicial (ya que el estado asintótico del centro de masa es el mismo, y el movimiento relativo no tiene estrujamiento en un estado térmico). De hecho, el estado final sólo depende de la temperatura efectiva para el modo impar, y es independiente del estado inicial de los otros modos.

Finalmente, es posible también considerar estados iniciales estrujados. Un modo de introducir estrujamiento es por medio de un cambio repentino en la frecuencia de la trampa, en la forma $\omega'_x \to \omega_x = \omega'_x/c$. Esta operación estruja todos los modos. Es fácil calcular el efecto del cambio de frecuencia en términos de los parámetros r, r_{crit} , S_{crit} . Los valores iniciales de δq_- , δp_- no cambian, pero todas las frecuencias de los modos se modifican en un factor c, y el estrujamiento resulta entonces $r = \frac{1}{2} |\ln(c)|$. S_{crit} , sin embargo, se mantiene igual que antes. El valor de r_{crit} depende del valor final de ω_x , pero no del factor de expansión o contracción c. Dado que el entrelazamiento asintótico depende de $|\ln(c)|$, expandir o contraer la trampa lleva a la misma situación final. Sin embargo, para evitar problemas relacionados con la transición de fase, es necesario empezar con un valor grande de ω_x , y luego relajar el confinamiento transversal, manteniéndose siempre en la región en que la configuración de equilibrio es la cadena lineal.

Otra forma de generar estrujamiento es acoplar el modo de movimiento rela-

tivo a un láser cuya frecuencia esté elegida en forma tal que excite transiciones entre niveles del oscilador en la forma $n \to n \pm 2$, es decir tal que la diferencia de frecuencias entre el láser y los niveles internos sea de la forma $\Delta = 2\omega_i \operatorname{con} \omega_i$ la frecuencia del modo impar. Este método ha sido utilizado en [172] produciendo estrujamientos del orden de r = 2 en el estado de movimiento de un ion de ⁹Be atrapado.

De esta forma es posible modificar los dos parámetros relevantes $r \ y \ S_{crit}$. El valor de r_{crit} está únicamente determinado por la transformación lineal de modos locales a modos normales. La variación de la preparación del estado inicial permite entonces barrer las distintas situaciones asintóticas. Los resultados se muestran en el diagrama de la figura 7.9 en función de $r \ y \ \langle n_- \rangle$, la población media inicial del modo impar, asociada a la temperatura inicial. El diagrama de fases de la figura corresponde a la elección de frecuencias $\omega_x = 1.68 \ \omega_z$, lo cual conduce a $r_{crit} \simeq 0.75$, $S_{min} \simeq 0.32$, $E_N^0 \simeq 0.42$. Cabe aclarar que el eje vertical en el diagrama de fases representa algo diferente en las figuras 7.4 y 7.9: en la primera corresponde a la temperatura del baño, mientras que en la segunda está asociado a la temperatura inicial del sistema. El valor del entrelazamiento asintótico como función del tiempo es ilustrado en la figura 7.10 para algunas elecciones de estados iniciales.



Figura 7.9: Distintos comportamientos asintóticos para el entrelazamiento en un estado gaussiano parametrizado por la población media inicial del modo impar, $\langle n_- \rangle$ (asociada a la temperatura inicial del modo) y el estrujamiento r para el modo impar. Las posiciones de los vértices en la figura están determinadas por el valor de r_{crit} , que depende de la elección de iones y del cociente entre frecuencias transversal y longitudinal. El caso graficado corresponde a una cadena de tres iones, un ⁹Be en el medio y dos ²⁴Mg en los extremos; las frecuencias son elegidas en la forma $\omega_x = 1.68 \omega_z$.

La elección de una frecuencia transversal tan cercana al valor crítico, como es el caso considerado para el diagrama de fases de la figura 7.9, exige un alto



Figura 7.10: Distintos comportamientos para el entrelazamiento asintótico (cuantificado por la negatividad logarítmica) como función del tiempo. La elección de iones y frecuencias es la misma que en la figura anterior. Los casos graficados corresponden a distintos parámetros para la preparación del estado inicial, $\langle n_- \rangle$, que caracteriza la población media inicial del modo impar, y c la subsiguiente expansión de la trampa en la dirección transversal: $\langle n_- \rangle = 0, c = 1$ (línea continua); $\langle n_- \rangle = 0, c = 6$ (- - -); $\langle n_- \rangle = 0, c = 3$ (- · · -) y $\langle n_- \rangle = 0.5, c = 3$ (· · ·). El tiempo está en unidades de ω_z^{-1} , y el origen temporal es arbitrario.

control de los potenciales que confinan a los iones. Si se toma una frecuencia tal que E_N^0 es muy pequeño o igual a cero, será difícil o imposible detectar la isla de entrelazamiento asintótico no nulo que se observa en la esquina del diagrama de fases para baja temperatura y bajo estrujamiento del modo impar. Sin embargo, el resto del diagrama de fases puede obtenerse de todas formas. El ancho de la región con desaparición y reaparición periódica del entrelazamiento es del orden de r_{crit} , razón por la cual para observar esta fase no es conveniente un valor demasiado pequeño para este parámetro. Es posible obtener diferentes comportamientos de los parámetros r_{crit} y S_{crit} como función del cociente ω_x/ω_z variando las especies o el ordenamiento de los iones.

7.5. Detección del estado final

Para detectar las distintas fases, es suficiente medir las dispersiones en posición y momento para los subsistemas $A \ y B$. Los tiempos para los cuales estas cantidades alcanzan sus valores extremos coinciden con los tiempos para los cuales el entrelazamiento entre subsistemas es extremo. A continuación se muestra un método que permite medir las matrices de covarianza de los distintos modos, a menos del signo de los elementos no diagonales. Este signo está relacionado con la orientación de los ejes del paquete gaussiano en el espacio de fases, y en una secuencia de mediciones puede inferirse del sentido de rotación de un oscilador armónico. De todas formas, el signo en cuestión no es relevante para el cálculo del entrelazamiento.

A la hora de definir un protocolo de medición, es necesario tener en cuenta que las cantidades que se desea medir varían en escalas de tiempo dadas por la frecuencia de la trampa. Además, no es posible acceder al estado de movimiento de los iones directamente. Lo que puede medirse es la fluorescencia del estado interno: los métodos para medir el estado de movimiento recurren entonces a pulsos que acoplan el estado interno y el externo, y luego miden el estado interno. Por medio de este tipo de estrategias es posible en principio medir la población de cada uno de los niveles de un dado modo.

El modo de realizar la medición es el siguiente [103]: consideremos el acoplamiento entre un ion y un láser cuya frecuencia corresponde a la banda azul de un cierto modo (del cual el ion participa). El Hamiltoniano es similar al dado en la fórmula (4.5) del capítulo 4, e induce una oscilación entre los estados con $|g, n\rangle$ y $|e, n + 1\rangle$ con frecuencia $\Omega_{n,n+1} = \sqrt{n+1}\eta\Omega$, donde Ω es la frecuencia de Rabi y η depende de la estructura del modo. Si el modo se encuentra entonces en una superposición de distintos estados $|n\rangle$, la probabilidad de encontrar al ion en el estado interno $|e\rangle$ en que puede detectarse por fluorescencia oscila en el tiempo según:

$$P_e(t) = \sum_{n} P_{g,n}(0) \operatorname{sen}^2\left(\eta\sqrt{n+1}\Omega t\right)$$
(7.22)

donde t es la duración del acoplamiento láser anterior a la medición por fluorescencia, y $P_{g,n}(0)$ es la probabilidad de que el modo se encuentre inicialmente en el estado $|g,n\rangle$. A partir de una serie de mediciones de este tipo se puede entonces reconstruir $P_{g,n}$.

La matriz de covarianza C de un modo (a menos del signo ya mencionado) puede hallarse recurriendo a la medición de la población media del modo $(\sum_n nP_{g,n})$, y de la probabilidad de hallar el modo en el estado fundamental $(P_{g,0})$, combinadas con la aplicación de fuerzas que induzcan desplazamientos rápidos en momento. Dichas fuerzas deben actuar en escalas temporales mucho más cortas que el período de evolución libre del modo, y pueden implementarse por medio de pulsos de láseres intensos.

En primer lugar, la medición de la población media contiene información sobre la traza de la matriz de covarianza:

$$\operatorname{Tr}(C) = \langle Q^2 \rangle + \langle P^2 \rangle = 2\langle a^{\dagger}a \rangle + 1.$$
(7.23)

Para obtener los elementos restantes de la matriz, consideramos la aplicación de un desplazamiento en momento (por medio de una fuerza) en una cantidad δP , seguida de una medición de la probabilidad de encontrar el estado fundamental del modo, según se ilustra en la figura 7.5. Esta probabilidad es el producto interno entre el estado gaussiano medido y el correspondiente al vacío, y está dada por [173]:

$$F(\delta P) = \sqrt{\det(M)} \exp\{-(\delta P)^2 M_{22}/2\}, \quad M = \left(\frac{\mathbb{I}}{2} + C\right)^{-1}.$$
 (7.24)



Figura 7.11: Secuencia para medir la matriz de covarianza de un paquete gaussiano: se aplica rápidamente una fuerza que desplaza en momento, seguida por una medición de la probabilidad de que el estado de movimiento sea el fundamental. La matriz de covarianza puede reconstruirse a partir de estos resultados, sumados a la medición de la población media del modo.

Realizando este tipo de mediciones es posible entonces hallar el valor de det(M)y M_{22} , mientras que la población media permite calcular Tr(M). Dado que Mes una matriz real y simétrica de 2 × 2, estos tres parámetros alcanzan para determinarla por completo, excepto por el signo de los elementos no diagonales. A partir de la matriz M hallada puede reconstruirse la matriz de covarianza C, también a menos de ese signo.

Es importante destacar que no se requiere de mediciones especialmente rápidas, ya que las cantidades medidas (las poblaciones $P_{g,n}$) no son afectadas por la dinámica de la cadena. El único requisito en este sentido es que la fuerza que produce el desplazamiento sea mucho más rápida que la evolución libre, y que los desplazamientos que pueden inducirse sean lo suficientemente grandes como para permitir detectar la variación en $F(\delta P)$ al modificar el valor de δP .

Una forma alternativa de detectar el entrelazamiento presente en el estado final consiste en transferirlo del estado de movimiento a los grados de libertad internos de los iones $A ext{ y } B$, como se propone en [171]. La transferencia de entrelazamiento puede obtenerse combinando pulsos láser que ejercen fuerzas dependientes del estado interno, asociadas a operadores de evolución de la forma $V(\alpha) = \exp\{i\alpha q\sigma_x\}$, con desplazamientos dependientes del estado interno en la forma $W(\beta) = \exp\{i\beta p\sigma_y\}$. A su vez, $W(\beta)$ se implementa componiendo fuerzas dependientes de la posición según $\exp\{i\alpha q\sigma_y\}$ con períodos muy cortos de evolución libre.

En [171] se observa que una secuencia de tres pasos de este tipo es suficiente para obtener una gran transferencia de entrelazamiento al estado interno. Después de la aplicación de esta secuencia, el estado interno puede medirse por medio de fluorescencia. La idea esencial de este protocolo es un mapeo de los estados vibracionales $|0\rangle$, $|1\rangle$ de un dado modo local en los estados internos del ion correspondiente. Por lo tanto, la transferencia no es eficiente para valores de estrujamiento grandes, para los que más niveles fonónicos están poblados. De cualquier modo, dado que el entrelazamiento es entre grados de libertad locales, cualquier operación de transferencia debe ser rápida comparada con la evolución libre de los modos, lo cual implica una limitación para esta clase de protocolos.

7.6. Comentarios finales

Cabe mencionar por último que una investigación más detallada de la dinámica del acoplamiento del ion central con el láser permitiría una descripción más precisa del acercamiento al régimen asintótico, en términos de una ecuación maestra no-Markoviana. El carácter no-Markoviano de este proceso puede variarse dependiendo de la temperatura efectiva del baño dado por el láser y de la intensidad del acoplamiento entre iones. El primer parámetro puede ser modificado variando la frecuencia del láser, mientras que el segundo depende de la elección de frecuencias transversal y longitudinal. Algunas ideas relacionadas con la aplicación de distintos modelos de decoherencia a partir de distintos tipos de acoplamiento con láseres fueron propuestas en [174] para el caso de un solo ion atrapado.

Capítulo 8

Un modelo local de decoherencia por un baño de osciladores

En este capítulo se considera un protocolo para la implementación, también en una trampa de iones, de otra experiencia de decoherencia controlada¹. En este caso se trata del modelo "del colchón de resortes" [49], una generalización del modelo de movimiento Browniano cuántico en la cual se considera un ambiente local para cada posición que la partícula puede tomar, y un rango espacial finito de interacción entre el sistema y cada elemento del entorno. Cuando se prepara el sistema en una superposición de dos autoestados de posición, la decoherencia de esta superposición dependerá de la distancia d entre las dos componentes de la función de onda y de las escalas espaciales características del acoplamiento con el ambiente.

En [15], Turchette *et al* reportan una experiencia de decoherencia controlada del estado de movimiento de un ion atrapado, inducida por campos externos fluctuantes. El efecto de estos campos se diseña de modo de simular distintos tipos de reservorios, incluyendo baños térmicos a alta y baja temperatura. En el experimento se mide la decoherencia de superposiciones de estados coherentes y estados de Fock. Dado que los campos considerados son espacialmente homogéneos, la tasa de decoherencia de un estado deslocalizado sobre una cierta distancia d es proporcional a d^2 , un resultado similar al obtenido en el modelo de movimiento Browniano cuántico (ver capítulo 2).

La implementación del modelo del colchón de resortes en una trampa de iones es por lo tanto una extensión natural de la experiencia de [15], y permite explorar las consecuencias de la localidad del acoplamiento entre sistema y entorno. El obstáculo fundamental para esto reside en la dificultad de controlar los campos externos indeseados, que se acoplan fuertemente al ion por ser éste una partícula cargada. Por esto, se considera un esquema en el cual el estado deslocalizado

¹Parte del trabajo presentado en este capítulo se realizó en colaboración con Eric Lutz (Universidad de Augsburg, Alemania).

de la partícula correspondiente al sistema se simula por un estado deslocalizado de una excitación en el estado interno de un sistema de dos o más iones. El efecto del entorno se obtiene controlando las fluctuaciones de un campo externo que induce un desfasaje dependiente de la ubicación de la excitación. Como alternativa, los progresos recientes en el control de átomos atrapados en redes ópticas [8] los convierten en un sistema promisorio para implementar esta clase de simulaciones (con la ventaja de tratarse de partículas neutras).

8.1. El modelo del colchón de resortes

El modelo del colchón de resortes [49] se esquematiza en la figura 8.1. El sistema estudiado es una partícula en una dimensión (coordenada de posición x) que está acoplada a una colección de osciladores armónicos. El nombre del modelo obedece al hecho de que cada uno de estos osciladores interactúa con la partícula dentro de un cierto rango espacial; en cada región del espacio existe un conjunto diferente de grados de libertad correspondientes al ambiente. Por lo tanto, la decoherencia de un paquete de ondas dependerá del cociente entre el rango espacial de la interacción y la distancia d sobre la cual se extiende el paquete. Para un valor pequeño de d, se recupera el conocido resultado de un factor de decoherencia gaussiano en la distancia. A medida que la distancia se incrementa, los dos ambientes efectivos que actúan sobre las dos componentes de posición superpuestas se vuelven independientes, de modo que la dependencia de la decoherencia en la distancia tiende a saturar.



Figura 8.1: Representación esquemática del modelo del colchón de resortes. El sistema es una partícula con coordenada de posición x acoplada a una colección de osciladores armónicos. Cada oscilador interactúa con la partícula dentro de un cierto rango espacial, y en cada región existe un conjunto distinto de osciladores que actúan como ambiente.

Consideremos en primer lugar el caso de una partícula que interactúa con un solo oscilador armónico, bajo la hipótesis de que el acoplamiento es lineal en la coordenada de posición del oscilador, que se nota q:

$$H = H_0 + \frac{1}{2} \left[\frac{p^2}{m} + m\omega^2 \left(q - \frac{g}{\omega} f(x) \right)^2 \right] = = H_0 + \frac{1}{2} \left[\frac{p^2}{m} + m\omega^2 q^2 \right] - mg\omega q f(x) + \frac{m}{2} g^2 f(x)^2$$
(8.1)

Aquí H es el Hamiltoniano total, H_0 es el que corresponde a la partícula, y f(x) es una función que determina el rango espacial de la interacción; asumimos

que este rango es finito, de modo que f tiende a cero en el infinito. La interacción propuesta corresponde a un modelo en el cual el ambiente es un oscilador armónico cuya posición de equilibrio depende de la posición de la partícula que constituye el sistema.

A continuación, extendemos este modelo a un entorno constituido por un conjunto de osciladores; este conjunto está compuesto por "manojos" de osciladores, caracterizados por una cierta densidad $n(\omega) = \sum_j \delta(\omega - \omega_j)$, y ubicados en posiciones $x = k\epsilon$, con $k \in \mathbb{Z}$ (por simplicidad se usa una definición de la densidad espectral distinta de la introducida en los capítulos anteriores). Estos osciladores interactúan con el sistema pero no entre sí. De acuerdo a la posición de la partícula, ésta interactuará con un conjunto diferente de grados de libertad del entorno. Es decir, si se considera una superposición de dos autoestados de posición a una distancia d entre sí, los entornos efectivos coinciden cuando d es pequeño comparado con el rango de interacción, mientras que son independientes para d grande.

8.2. La funcional de influencia

El factor de decoherencia para el problema propuesto será calculado utilizando el formalismo de funcional de influencia [77], que se repasa brevemente a continuación. Dado un problema con un Lagrangiano $\mathcal{L}_0 = T - V$, con T el término cinético y V el potencial, la evolución entre un tiempo inicial t_i y uno final t_f para una partícula con acción dada por $S_0[x] = \int \mathcal{L}_0 dt$ puede calcularse como:

$$\rho(x, x', t_f) = \int dx_i dx'_i \ \rho(x_i, x'_i, t_i) \int_{x_i}^x \mathcal{D}x \int_{x'_i}^{x'} \mathcal{D}x' e^{i(S_0[x] - S_0[x'])/\hbar}$$
(8.2)

Supongamos ahora que la partícula interactúa con otra, de coordenada q, que juega el rol de entorno. La acción total es entonces $S[x,q] = S_0[x] + \tilde{S}[x,q]$, y se tiene para la evolución del conjunto:

$$\rho_{total}(x, x', q, q', t_f) = \int dx_i dx'_i dq_i dq'_i \ \rho_{total}(x_i, x'_i, q_i, q'_i, t_i) \int_{x_i}^x \mathcal{D}x \int_{x'_i}^{x'} \mathcal{D}x' \\ \int_{q_i}^q \mathcal{D}q \int_{q'_i}^{q'} \mathcal{D}q' e^{i(S_0[x] - S_0[x'])/\hbar} e^{i(\tilde{S}[x, q] - \tilde{S}[x', q'])/\hbar}$$
(8.3)

Si sólo es de interés el estado final de la partícula de coordenada x, entonces al trazar sobre los estados finales de la otra se obtiene, imponiendo $q_f = q'_f$ e integrando sobre q_f :

$$\rho(x, x', t_f) = \int dx_i dx'_i dq_i dq'_i dq_f \ \rho_{total}(x_i, x'_i, q_i, q'_i, t_i) \int_{x_i}^x \mathcal{D}x \int_{x'_i}^{x'} \mathcal{D}x' \\
\int_{q_i}^{q_f} \mathcal{D}q \int_{q'_i}^{q_f} \mathcal{D}q' e^{i(S_0[x] - S_0[x'])/\hbar} e^{i(\tilde{S}[x,q] - \tilde{S}[x',q'])/\hbar}$$
(8.4)

Si el estado inicial es separable, la expresión anterior puede escribirse en la forma:

$$\rho(x, x', t_f) = \int dx_i dx'_i \ \rho(x_i, x'_i, t_i) \int_{x_i}^x \mathcal{D}x \int_{x'_i}^{x'} \mathcal{D}x' e^{i(S_0[x] - S_0[x'])/\hbar} F[x, x'] \quad (8.5)$$

donde

$$F[x,x'] = \int dq_i dq'_i dq_f \ \rho_q(q_i,q'_i,t_i) \int_{q_i}^{q_f} \mathcal{D}q \int_{q'_i}^{q_f} \mathcal{D}q' e^{i(\tilde{S}[x,q] - \tilde{S}[x',q'])/\hbar}$$
(8.6)

es la funcional de influencia, y contiene toda la información sobre el efecto que el entorno ejerce sobre el sistema. En esta expresión, $\rho_q(q_i, q'_i, t_i)$ describe el estado inicial de la partícula que forma el ambiente.

La funcional de influencia F definida de esta forma satisface:

- $F[x, x'] = F^*[x', x].$
- F[x, x] = 1.

La generalización a situaciones que involucran un número mayor de grados de libertad es directa. En particular, puede resultar útil tener en cuenta las siguientes propiedades:

- Si la evolución total es la combinación estadística de un conjunto de distintas evoluciones posibles, cada una con probabilidad p_j, entonces F = ∑_j p_jF_j.
- Si se tienen distintos entornos para el sistema, que no interactúan entre sí, vale $F = \prod_{j} F_{j}$.

8.3. El efecto de un entorno de osciladores

El factor de decoherencia para distintos entornos compuestos por osciladores armónicos, incluyendo el modelo del colchón de resortes, puede encontrarse en [49], pero se incluye aquí por completitud. El objetivo es calcular la integral funcional que determina el efecto del ambiente sobre la evolución del sistema. Se asume entonces que el estado inicial del universo formado por sistema y ambiente es un estado producto, y que el estado inicial del ambiente está descripto por un estado térmico.

8.3.1. Resolución del problema

Comenzamos por considerar el caso de un ambiente formado por un único oscilador armónico. Cuando el estado inicial del oscilador-entorno es un estado térmico, $\rho_q(t_0)$ es gaussiano en q, q'; en este caso, todo el integrando de la funcional de influencia (8.6) es gaussiano. El resultado debe ser por lo tanto una función gaussiana de f(x) y f(x'), y puede sin pérdida de generalidad escribirse en la forma:

$$F[x, x'] = C \exp \left\{ i \int dt \left[J_{-}(t) f_{-}(t) + J_{+}(t) f_{+}(t) \right] + i \int dt dt' \left[K_{--}(t, t') f_{-}(t) f_{-}(t') + K_{++}(t, t') f_{+}(t) f_{+}(t') + K_{+-}(t, t') f_{+}(t) f_{-}(t') \right] \right\}$$

$$(8.7)$$

donde se define:

$$f_{\pm}(t) = f(x(t)) \pm f(x'(t)) \tag{8.8}$$

Aquí y en lo sucesivo se sobreentiende que todas las integrales temporales son de t_i a t_f , y por simplicidad se toma $t_i = 0$.

Utilizando las propiedades de la funcional de influencia, se observa que para una trayectoria con $f_+ = f_- = 0$ debe ser F = 1 (este caso corresponde a una partícula que no interactúa con su entorno), y por lo tanto C = 1. Por otro lado, imponiendo que F[x, x] = 1 para x(t) arbitrario se tiene que $J_+ = K_{++} = 0$. Por lo tanto la expresión anterior se reduce a:

$$F[x,x'] = \exp \left\{ i \int dt J_{-}(t) f_{-}(t) + i \int dt dt' K_{--}(t,t') f_{-}(t) f_{-}(t') + i \int dt dt' K_{+-}(t,t') f_{+}(t) f_{-}(t') \right\}$$

$$(8.9)$$

Para hallar las expresiones correspondientes a J_{-}, K_{--}, K_{+-} se toman las derivadas funcionales respecto de $f_{-}(t)$ y $f_{+}(t)$ en las expresiones (8.6, 8.9) y se comparan los resultados, obteniendo:

$$J_{-}(t) = \frac{mg\omega}{\hbar} \operatorname{Tr} \left(\rho_q(0) q(t) \right)$$
(8.10)

$$K_{+-}(t,t') = -\frac{im^2\omega^2 g^2}{2\hbar^2} \theta(t'-t) \operatorname{Tr}\left(\rho_q(0)[q(t),q(t')]\right)$$
(8.11)

$$K_{--}(t,t') = -\frac{i}{2}J_{-}(t)J_{-}(t') + \frac{im^2\omega^2 g^2}{4\hbar^2} \operatorname{Tr}\big(\rho_q(0)\{q(t),q(t')\}\big)$$
(8.12)

Estas fórmulas se encuentran escritas en términos de operadores para poder expresarlas en forma compacta. $\rho_q(0)$ corresponde a la matriz densidad para el estado inicial del ambiente y q(t) es el operador de posición en representación de Heisenberg (considerando la evolución libre del entorno).

Teniendo en cuenta que para el oscilador armónico es $q(t) = q \cos(\omega t) + (p/m\omega) \sin(\omega t)$ es posible calcular los valores medios en las expresiones anteriores. Cuando el estado inicial del oscilador es un estado térmico con $k_B T >> \hbar \omega$, resulta:

$$J_{-}(t) = 0 (8.13)$$

$$K_{+-}(t,t') = \frac{mg^2\omega}{2\hbar}\theta(t'-t)\operatorname{sen}(\omega(t'-t))$$
(8.14)

$$K_{--}(t,t') = \frac{img^2 k_B T}{2\hbar^2} \cos(\omega(t'-t))$$
(8.15)

A la funcional de influencia obtenida se le puede incorporar también el último término del lagrangiano (8.1), de la forma $\frac{m}{2}g^2f(x)^2$, de modo de incluir todos los efectos debidos a la presencia del oscilador. La funcional de influencia resultante es:

$$F[x, x'] = \exp\left\{-\frac{img^2}{2\hbar}\int dt f_+(t)f_-(t) - \frac{mg^2k_BT}{2\hbar^2}\int dt dt' \cos(\omega(t'-t))f_-(t)f_-(t') + \frac{img^2\omega}{2\hbar}\int dt dt' \theta(t'-t) \sin(\omega(t'-t))f_+(t)f_-(t')\right\}$$
(8.16)

Si consideramos a continuación un entorno constituido por un conjunto de osciladores con densidad $n(\omega)$ y ubicados en posiciones $x = k\epsilon$, la funcional de influencia $F_{\omega,k}$ asociada a cada grado de libertad del ambiente está dada por la fórmula (8.16), reemplazando f(x) por $f(x-k\epsilon)$. Si escribimos $F_{\omega,k} = \exp{\{\Phi_{\omega,k}\}}$, entonces de acuerdo a las propiedades enumeradas la funcional de influencia total está dada por:

$$F[x, x'] = \exp\left\{\sum_{k} \int d\omega n(\omega) \Phi_{\omega, k}[x, x']\right\}$$
(8.17)

Por último, pasamos al límite de un entorno continuo de osciladores; para esto, la distancia ϵ se hace tender a cero, junto con la constante de acoplamiento al cuadrado, de forma que g^2/ϵ permanece constante. Se define la función de correlación para el entorno como:

$$U(y) = mg^2/\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} dz f(z) f(z-y)$$
(8.18)

Esta función es par, positiva en y = 0, y tiende a cero en una escala espacial determinada por el rango de interacción entre la partícula y cada oscilador del entorno.

La funcional de influencia resultante puede escribirse en la forma:

$$F[x,x'] = \exp\left\{\int d\omega \frac{n(\omega)}{2\hbar} \left[-i \int dt V_{+}(x,x',t,t) - \frac{k_{B}T}{\hbar} \int dt dt' \cos(\omega(t'-t)) V_{-}(x,x',t,t') + \frac{k_{B}T}{\hbar} \int dt dt' \theta(t'-t) \sin(\omega(t'-t)) V_{+}(x,x',t,t')\right]\right\}$$

$$(8.19)$$

donde

$$V_{\pm}(x, x', t, t') = U(x(t) - x(t')) \pm U(x'(t) - x(t')) - -U(x(t) - x'(t')) \mp U(x'(t) - x'(t'))$$
(8.20)

Esta funcional de influencia depende de las elecciones para $n(\omega)$ y U(y). El resultado final puede dividirse en un factor de módulo 1 y un factor con exponente

real y negativo, que produce un decaimiento de la interferencia entre distintas trayectorias.

En lo sucesivo se considera la decoherencia de una superposición de dos autoestados de posición, correspondientes a dos posiciones fijas situadas a distancia d una de otra. Se desea calcular, entonces, la funcional de influencia para el caso x(t) = d, $x'(t) = 0 \forall t$. En este caso, la parte imaginaria de la funcional de influencia se anula ya que $V_+ = 0$; el resultado está entonces dado por:

$$F(d,t_f) = \exp\left\{-\frac{k_B T}{\hbar^2} \left[U(0) - U(d)\right] \int dt dt' d\omega \ n(\omega) \cos(\omega(t'-t))\right\} = \\ = \exp\left\{-\frac{4k_B T}{\hbar^2} \left[U(0) - U(d)\right] \int d\omega \frac{n(\omega)}{\omega^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega t_f}{2}\right)\right\}$$
(8.21)

8.3.2. Resultados: decoherencia en función de la distancia y del tiempo

La decoherencia del sistema depende de la distancia a través de la diferencia U(0) - U(d), una función que es igual a 0 para d = 0, y positiva para cualquier otra distancia. Su escala característica está dada por el rango l de la interacción entre el sistema y cada oscilador del entorno, y para distancia tendiendo a infinito esta función se aproxima a un valor de saturación dado por U(0). Por lo tanto, la decoherencia satura a distancias grandes comparadas con l. En el límite opuesto, en que d es mucho más chico que el rango de interacción, un desarrollo de Taylor de U(d) en torno de cero conduce a una decoherencia típicamente gaussiana en la distancia.

Como un ejemplo del comportamiento típico en la distancia, consideremos el caso en que f(z) es lineal en escalas pequeñas pero satura en una escala dada por l según $f(z) \propto z \exp\{-z^2/(2l^2)\}$. En este caso, resulta $U(y) \propto$ $\exp\{-y^2/(2l)^2\}[1-y^2/(8l^2)]$. La forma del exponente que determina la dependencia de la decoherencia con la distancia se muestra en la Figura 8.2.

La dependencia temporal, por otra parte, puede ser estudiada resolviendo la integral en frecuencias de la expresión 8.21 para una dada elección de densidad espectral $n(\omega)$. Un caso particularmente simple, correspondiente a un entorno óhmico, es aquél en que $n(\omega)$ es constante. En este caso, la decoherencia decae exponencialmente en el tiempo, con una cierta tasa proporcional a la densidad de osciladores.

Eligiendo un baño con densidad espectral diferente el comportamiento temporal de la decoherencia puede tener grandes modificaciones, incluyendo por ejemplo fenómenos de recuperación parcial de la coherencia. Consideremos por ejemplo los casos $n(\omega) = \omega^k e^{-\omega/\Omega}/(k!\Omega^{k-1})$, con $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Evaluando a tiempos cortos, $\Omega t_f \ll 1$ en la fórmula (8.21) es posible ver que esta elección conduce a un decaimiento inicial gaussiano, con el mismo ancho temporal para cualquier elección de k. Resolviendo la integral para tiempo arbitrario, los correspondientes exponentes para la dependencia temporal de la decoherencia resultan dados



Figura 8.2: Exponente $\Phi_d = [U(d) - U(0)]/U(0)$ que gobierna la dependencia de la decoherencia como función de la distancia en el modelo del colchón de resortes, para el caso de un acoplamiento lineal a escalas cortas modulado por una función gaussiana con rango l. La decoherencia resultante es gaussiana en la distancia para escalas menores que l y tiende a saturar en un valor independiente de la distancia cuando ésta es mucho más grande que l.

por:

$$\Phi_t = \begin{cases} \left[2u \ \arctan(u) - \ln(1+u^2) \right], & k = 0\\ \ln(1+u^2), & k = 1\\ \frac{2}{k(k-1)} \left[1 - \mathcal{R}e\left\{ (1+iu)^{1-k} \right\} \right], & k \ge 2 \end{cases}$$
(8.22)

Los resultados se expresan en términos de la variable $u = \Omega t_f$, y se muestran en la figura 8.3. Para valores grandes de u los casos $k \ge 2$ saturan (el proceso de decoherencia alcanza un valor límite), mientras que para k = 1 el exponente resulta proporcional a $\ln(u)$ (es decir la coherencia decae según una ley de potencias), y para k = 0 el exponente es lineal en u (la coherencia decae exponencialmente en el tiempo, como en el caso en que la densidad espectral es constante). Para k > 2, a raíz de los efectos de memoria existe cierta recoherencia (el comportamiento no es monótono en el tiempo).

8.4. Simulación del modelo en una trampa de iones

Para simular el modelo descripto consideramos un sistema de dos iones iguales atrapados, que llamaremos $a \ge b$, cada uno de los cuales será tratado como un sistema de dos niveles $|g\rangle \ge |e\rangle$ correspondientes a dos estados internos. La partícula considerada en la sección anterior será representada aquí como una excitación de un dado ion. Es decir, el estado de la forma $|eg\rangle$ en que el primer ion se encuentra excitado y el segundo en su estado fundamental se identificará con una partícula localizada en la posición del primer ion, mientras que el estado $|ge\rangle$



Figura 8.3: Exponente Φ_t que determina la dependencia temporal de la decoherencia, para una densidad espectral correspondiente a una ley de potencias modulada por un decaimiento exponencial. Las curvas corresponden a k = 0 (línea continua), 1 (- - -), 2 $(\cdot - \cdot)$, 3 $(\cdot - \cdot)$, 4 $(- \cdot -)$ y 5 (\cdots) , graficados en función de Ωt_f . El comportamiento a tiempos cortos es cuadrático en todos los casos, de modo que la decoherencia es gaussiana en el tiempo; para tiempos largos, los casos $k \ge 2$ saturan, mientras que para k = 0 el exponente es lineal en el tiempo, y para k = 1 es proporcional a $\ln(t)$. En los casos $k \ge 2$ el comportamiento no es monótono.

corresponderá a una partícula en la posición del segundo ion. El estado $(|eg\rangle + |ge\rangle)/\sqrt{2}$ corresponderá por lo tanto a un estado deslocalizado, una superposición de autoestados de posición. La decoherencia de esta superposición se producirá por el efecto de campos externos fluctuantes, responsables de la aparición de fases variables entre los dos estados superpuestos.



Figura 8.4: Un sistema de dos iones atrapados, sometidos a decoherencia de los niveles internos a causa de campos externos fluctuantes pero correlacionados.

8.4.1. Decoherencia por campos externos fluctuantes

Consideremos entonces el estado inicial $|eg\rangle + |ge\rangle$ (ignorando la normalización, que se recuperará cuando sea necesaria). Una forma posible para preparar este estado, utilizando un modo colectivo de movimiento como grado de libertad auxiliar, es la siguiente secuencia [101]: Se comienza por el estado $|gg\rangle|0\rangle$ y se lo lleva a $|eg\rangle|0\rangle$ por medio de un láser que produce una oscilación de Rabi del primer ion. A continuación se utiliza un pulso láser en la banda roja para transferir la excitación del estado interno al estado de movimiento, obteniéndose $|gg\rangle|1\rangle$. Si ahora se implementa otro pulso en la banda roja aplicado sobre los dos iones pero durante la mitad del tiempo, se obtiene el estado deseado $(|eg\rangle + |ge\rangle)|0\rangle$.

Una vez preparado el estado $|eg\rangle + |ge\rangle$, se aplica un campo externo dependiente de la posición, cuyo efecto sobre cada ion está dado por un Hamiltoniano de la forma $H_j = \alpha \hbar B_j Z_j$, con j = a, b y donde Z denota la matriz de Pauli $|g\rangle\langle g| - |e\rangle\langle e|$. Esto es simplemente una variación en la diferencia de energía entre los niveles internos, y puede ser obtenida, por ejemplo, con láseres no resonantes o por medio de campos magnéticos si los dos niveles internos tienen momentos magnéticos diferentes (ver capítulo 4). Bajo la acción de un campo de esta forma, y que puede variar con el tiempo, el estado evolucionará según $|eg\rangle + |ge\rangle \rightarrow e^{-i\alpha\delta B}|eg\rangle + e^{i\alpha\delta B}|ge\rangle$, con $\delta B = -\int dt [B_a(t) - B_b(t)]$.

Si el campo externo es aleatorio, al promediar sobre un conjunto de realizaciones del experimento el estado del sistema será mixto y dado por:

$$\rho = \frac{1}{2} \Big\{ |ge\rangle \langle ge| + |eg\rangle \langle eg| + \int \mathcal{D}B \ P[B](e^{-2i\alpha\delta B} |eg\rangle \langle ge| + e^{2i\alpha\delta B} |ge\rangle \langle eg|) \Big\}$$
(8.23)

donde P[B] es la distribución de probabilidades para el campo. De esta forma, el campo aleatorio causa un decaimiento de los términos no-diagonales de la matriz densidad. Esto ocurre permanentemente en la práctica debido a fluctuaciones incontrolables en las intensidades o frecuencias de los láseres. En esta propuesta, se desea controlar justamente esta variabilidad, produciendo una pérdida de coherencia que simule la del modelo del colchón de resortes.

Consideramos una distribución de probabilidades gaussiana, de la forma:

$$P[B] \propto e^{-\frac{1}{2}(B-\overline{B})\kappa^{-1}(B-\overline{B})}$$
(8.24)

donde se usa por brevedad la notación:

$$B\kappa^{-1}B' = \int dy dy' dt dt' \ B(y,t) \ \kappa^{-1}(y,t,y',t') \ B'(y',t').$$
(8.25)

 $\overline{B}(y,t)$ corresponde al promedio del campo en un valor dado de posición y tiempo, mientras que κ^{-1} es una función real, simétrica y positiva $(B\kappa^{-1}B > 0 \quad \forall B \neq 0)$ asociada a las correlaciones en las fluctuaciones del campo:

$$\kappa(y,t,y',t') = \int \mathcal{D}B \ P[B] \ (B-\overline{B})(y,t) \ (B-\overline{B})(y',t') \tag{8.26}$$

La relación entre κ y κ^{-1} es la siguiente:

$$\int dy' dt' \ \kappa(y,t,y',t') \ \kappa^{-1}(y',t',y'',t'') = \delta(y-y'') \ \delta(t-t'')$$
(8.27)

Resulta conveniente escribir:

$$\delta B = \int dt dy \ B(y,t) \Delta(y,t) \tag{8.28}$$

 \cos

$$\Delta(y,t) = \delta(y-d) - \delta(y) \tag{8.29}$$

donde y = 0 e y = d son las posiciones de los iones a y b respectivamente (esto corresponde simplemente a una elección particular de origen y escala para la coordenada espacial de los iones).

Introduciendo un cambio de variables $B' = B - \overline{B} - 2i\alpha\kappa\Delta$ se encuentra para los términos no-diagonales:

$$\int \mathcal{D}B \ P[B]e^{2i\alpha\delta B} \propto \int \mathcal{D}B \ e^{-\frac{1}{2}(B-\overline{B})\kappa^{-1}(B-\overline{B})+2i\alpha B\Delta} =$$
$$= C \ e^{-2\alpha^2\Delta\kappa\Delta+2i\alpha\Delta\overline{B}}$$
(8.30)

donde C es una constante. Dado que para $\alpha = 0$ el integrando es simplemente la distribución de probabilidades para el campo, y por lo tanto la integral debe ser igual a 1, se obtiene que C = 1. Supongamos por simplicidad que el valor medio del campo se elige en forma tal que las fases obtenidas por las dos ramas de la función de onda son iguales en promedio, es decir, tomemos $\Delta \overline{B} = 0$. En este caso, el estado final del sistema es de la forma:

$$\rho = \frac{1}{2} \Big\{ |ge\rangle \langle ge| + |eg\rangle \langle eg| + (|eg\rangle \langle ge| + |ge\rangle \langle eg|)e^{-2\alpha^2 \Delta \kappa \Delta} \Big\}.$$
(8.31)

La decoherencia está entonces dada por el factor $e^{-2\alpha^2\Delta\kappa\Delta}$, que depende de las correlaciones en las fluctuaciones del campo, según:

$$\Delta \kappa \Delta = \int \mathcal{D}B \ P[B] \left(\int dt \left[(B_a - \overline{B}_a)(t) - (B_b - \overline{B}_b)(t) \right] \right)^2$$
(8.32)

Esta expresión muestra que, como es de esperarse, el sistema no sufrirá decoherencia cuando las fluctuaciones en los dos iones sean iguales, y la decoherencia será más fuerte en la medida en que las correlaciones entre ambos desaparezcan, es decir, cuando la longitud de correlación del campo sea mucho más chica que la distancia entre los iones. En el caso en que se tiene $\Delta \overline{B} \neq 0$, la decoherencia está dada por esta misma expresión pero aparece una fase adicional de $\pm 2\alpha\Delta\overline{B}$ en los dos elementos no diagonales de la matriz densidad.

Como un último paso en el protocolo, es necesario realizar una medición del estado. Una manera de hacer esto, siguiendo a [175], es inducir una oscilación de Rabi sobre el primer ion que intercambie los estados $|g\rangle |e\rangle$, y luego aplicar sobre cada uno de los iones una rotación en la forma: $|g\rangle \rightarrow (|g\rangle + ie^{i\varphi}|e\rangle)/\sqrt{2}$, $|e\rangle \rightarrow (|e\rangle + ie^{-i\varphi}|g\rangle)/\sqrt{2}$ (la manera de implementar estas operaciones se explica en la sección 4.2).

Se realiza finalmente una medición por fluorescencia del estado interno y se computa el valor medio del operador de paridad:

$$\Pi = |gg\rangle\langle gg| + |ee\rangle\langle ee| - |eg\rangle\langle eg| - |ge\rangle\langle ge|.$$
(8.33)

El resultado estará dado entonces por:

$$\langle \Pi \rangle = -\cos(2\varphi)e^{-2\alpha^2\Delta\kappa\Delta}.$$
 (8.34)

Al variar el parámetro φ , para una dada elección del campo externo, la paridad oscila entre -1 y 1. La decoherencia inducida por la aleatoriedad en el campo externo puede detectarse a través de la atenuación de las oscilaciones de la paridad.

8.4.2. Comparación de la decoherencia en los dos problemas

¿Bajo qué condiciones la simulación en la trampa de iones conduce a la misma decoherencia que el entorno de osciladores? Comparemos el exponente en la funcional de influencia (8.21),

$$-\frac{4k_BT}{\hbar^2} \left[U(0) - U(d)\right] \int d\omega \frac{n(\omega)}{\omega^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega t_f}{2}\right),$$

con el que determina la pérdida de coherencia en la trampa de iones (8.31),

$$-2\alpha^{2}\Delta\kappa\Delta = -2\alpha^{2}\int dt \ dt' \ [\kappa(d,t,d,t') + \kappa(0,t,0,t') - 2\kappa(d,t,0,t')].$$

Dado que en el modelo del colchón de resortes la dependencia en posición y tiempo está factorizada, proponemos para la correlación del campo externo κ la forma:

$$\kappa(y,t,y',t') = \kappa_y(y-y') \ \kappa_t(t-t') \tag{8.35}$$

donde tanto κ_y como κ_t son funciones pares. Esta elección conduce entonces a:

$$-2\alpha^2 \Delta \kappa \Delta = -4\alpha^2 [\kappa_y(0) - \kappa_y(d)] \int dt \ dt' \kappa_t(t - t')$$
(8.36)

Para que la dependencia temporal sea la misma en ambos problemas se debe tener:

$$\kappa_t(t-t') \propto \int d\omega \ n(\omega) \cos(\omega(t'-t))$$
(8.37)

es decir, κ_t está relacionada con la transformada de Fourier de la densidad espectral del entorno de osciladores. Como ejemplo, el caso óhmico corresponde a una situación límite en que no hay correlación temporal en el campo, $\kappa_t(t-t') \propto \delta(t-t')$. Los casos en que el sistema recupera parte de su coherencia se obtienen cuando el campo tiene una correlación temporal que al cabo de un tiempo toma valores negativos, lo cual permite cancelar parte del desfasaje inducido previamente.

Por otra parte, para que la dependencia espacial sea la misma hay que elegir la misma correlación espacial en los dos sistemas: $U(d) \propto \kappa_y(d)$. El cambio en la distancia d entre iones puede ser representado en la simulación por un simple reescaleo de la correlación dada por κ_y . Una alternativa opuesta en espíritu, y en el que la implementación es más cercana al problema original, consistiría en realizar el experimento en una cadena de varios iones. En este caso, la correlación del campo puede mantenerse fija y la distancia varía al tomar distintos pares de iones entrelazados. Finalmente, otra opción es considerar un sistema de dos iones en el que la distancia de equilibrio en las sucesivas experiencias se modifica alterando el valor del potencial que crea el confinamiento en la dirección axial.

Capítulo 9

Conclusiones

La primera parte del trabajo de esta tesis se dedicó al estudio teórico de modelos de decoherencia por ambientes de espines con dinámica propia. En el capítulo 5 se analizó la decoherencia inducida en un sistema de un qubit a raíz de la interacción uniforme con todos los sitios de una cadena de espines con Hamiltonianos de tipo Ising y XY. Con este fin se estudió el eco de Loschmidt, que determina el decaimiento de los términos no diagonales de la matriz densidad del sistema. Se corroboró la existencia de un régimen de decoherencia universal, en que para acoplamientos suficientemente fuertes entre el sistema y su entorno este eco oscila con una envolvente independiente de la magnitud del acoplamiento. Los resultados hallados muestran que la observación de esta universalidad no es un indicador claro de la existencia de una transición de fase en el ambiente, como había sido conjeturado en [24]. Si bien una transición de fase cuántica puede producir un régimen universal, éste puede observarse en otras situaciones. No resulta tampoco evidente si el umbral para la universalidad está relacionado con la presencia de una transición.

Se analizaron además algunas características de la envolvente del eco para distintos valores de los parámetros en el Hamiltoniano, correspondientes a decaimientos gaussianos y no gaussianos. Para el caso gaussiano (observado para una cadena de Ising, y también a tiempos cortos en situaciones más generales) se derivó una aproximación para el ancho temporal del decaimiento que resulta mejor que la hallada en [24], si se la compara con los resultados del ajuste del eco en un rango amplio de valores del campo externo. En particular, la aproximación derivada indica correctamente que no hay aumento de la decoherencia en las proximidades de la transición de fase. Este resultado contrasta con las observaciones realizadas para el caso de acoplamiento débil, en que la decoherencia se incrementa abruptamente cerca del punto crítico. Se encontraron otros ejemplos de esta diferencia radical del comportamiento entre los regímenes de acoplamiento fuerte y débil: no se observa un aumento de la decoherencia en el valor crítico del campo externo para el caso de un qubit interactuando con un solo sitio de la cadena, ni tampoco para el modelo de un qubit central al acercar el parámetro de anisotropía a la región crítica correspondiente al modelo XX. Esto indica que la relación entre decoherencia y criticalidad hallada en situaciones perturbativas no se mantiene en general.

En el capítulo 6 se estudió la evolución de un sistema de dos qubits, cada uno interactuando localmente con un sitio de una cadena con Hamiltoniano de Ising o XY. La decoherencia y el entrelazamiento se analizaron nuevamente a través del eco de Loschmidt. En particular, se estudió la pérdida de entrelazamiento como función del tiempo para estados iniciales máximamente entrelazados, correspondientes a estados de Bell. El análisis se enfocó en la dependencia del eco con la distancia entre los subsistemas. Los casos estudiados muestran una gran variedad de resultados. Por ejemplo, para acoplamiento fuerte entre el sistema y su entorno, la decoherencia aumenta con la distancia para todos los estados de Bell, mientras que para acoplamientos débiles la decoherencia puede aumentar o disminuir con la distancia según el estado inicial propuesto.

En el régimen de acoplamiento débil la dependencia del eco con la distancia satura rápidamente excepto cerca del punto crítico. La escala de saturación l que caracteriza el acercamiento al límite de larga distancia puede relacionarse con la longitud de correlación de la cadena, ξ . Este resultado es interesante ya que asocia una propiedad del estado de equilibrio (ξ) con una cantidad dinámica (l). Sin embargo, la relación entre ambas sólo resulta clara para el caso del modelo de Ising.

Por otra parte, el régimen de acoplamiento fuerte se caracteriza, para el tipo de interacción propuesto, por un eco que oscila rápidamente con un decaimiento lento de la envolvente. Para algunos estados iniciales (la familia de estados pares, es decir con autovalor +1 para el operador $Z_A \otimes Z_B$) esta envolvente puede exhibir un batido debido a una interacción entre qubits mediada por su entorno común. La escala temporal está determinada por los modos de la parte de la cadena contenida entre los qubits; la energía de estos modos depende de la distancia entre qubits y de los parámetros del Hamiltoniano.

Finalmente, se propuso una generalización de este modelo, en que cada qubit interactúa con una región de la cadena de espines, con un acoplamiento cuya intensidad decae suavemente con la distancia. Se observó que en esta situación el resultado para acoplamientos débiles es similar al obtenido anteriormente, excepto por la supresión o suavizado de las oscilaciones en el eco. En cambio, para acoplamientos fuertes el "régimen universal" desaparece, y en su lugar se obtiene un rápido decaimiento del eco que, si el acoplamiento es con un número suficientemente grande de sitios, no presenta oscilaciones.

El resto de la tesis se abocó al estudio de modelos de decoherencia controlada en trampas de iones. En el capítulo 7 se consideró un modelo de movimiento Browniano cuántico en el que dos subsistemas se encuentran igualmente acoplados a un baño térmico común. El comportamiento asintótico en este modelo es no trivial e incluye tres fases finales, correspondientes a estados desentrelazados, con entrelazamiento no nulo o con desapariciones y reapariciones periódicas del entrelazamiento entre subsistemas. Las características fundamentales de este problema pueden reproducirse en una implementación simple utilizando tres iones atrapados, dos de ellos correspondientes a los subsistemas y el restante (sometido a enfriamiento láser) proporcionando una fuente de decoherencia. Tanto la preparación del sistema como la detección de las distintas situaciones asintóticas son realizables con tecnología actual, recurriendo esencialmente a acoplamientos de los iones con láseres de frecuencias apropiadas, y al control de los potenciales armónicos que confinan a los iones.

En el capítulo 8 se estudió la simulación de un modelo simple de decoherencia de una partícula que interactúa localmente con un baño de osciladores. Si la partícula se encuentra en una superposición coherente de autoestados de posición, la coherencia decaerá a consecuencia del acoplamiento al entorno. Los detalles de este proceso varían de acuerdo a la densidad espectral del baño, y la relación entre la separación entre partes del paquete de ondas y el rango espacial de interacción con cada elemento del entorno. Se propuso una forma sencilla de simular este modelo de decoherencia en una trampa de iones: el estado deslocalizado de la partícula es análogo a una excitación colectiva de un sistema de dos iones, y el efecto del ambiente puede ser simulado por un campo externo clásico que induce un desfasaje aleatorio entre las dos componentes de la función de onda. Al igual que el considerado en el capítulo anterior, el protocolo propuesto es implementable con técnicas que ya han sido demostradas experimentalmente en iones atrapados.

Para finalizar, entonces: el proceso de decoherencia depende fuertemente de las características del entorno considerado y del tipo de acoplamiento entre éste y el ambiente. En particular, de la presencia de efectos de memoria y/o de correlaciones espaciales. Para el caso de un sistema compuesto, las correlaciones en el ambiente adquieren especial relevancia en relación con la dinámica del entrelazamiento entre subsistemas: el entorno puede proporcionar un medio para la interacción entre subsistemas, la aparición de subespacios libres de decoherencia puede permitir la presencia de entrelazamiento a tiempos largos, etc. Se trata de situaciones en las que el rol del ambiente no consiste en inducir un comportamiento clásico del sistema, sino que introduce una complejidad adicional a la dinámica. Los recientes progresos en el control de sistemas cuánticos concretos permiten comenzar a explorar este tipo de problemas en experiencias de laboratorio.

Apéndice: Producto interno entre dos estados gaussianos fermiónicos puros

En este apéndice se incluye el cálculo que permite expresar los ecos de Loschmidt en el capítulo 6 como determinantes de matrices cuyo tamaño es proporcional al número de espines que forman el entorno (y que por lo tanto pueden computarse eficientemente). Para esto se muestra cómo calcular la fidelidad, o el solapamiento, entre dos estados gaussianos puros, en términos de sus matrices de covarianza. Este resultado es un caso particular del hallado en [159]¹. La derivación se incluye por completitud y porque el caso tratado aquí puede resolverse en una forma más sencilla que la que se encuentra en la referencia. Por otra parte, cabe mencionar que el resultado principal de esta sección, es decir la fórmula (9.1) a continuación, se extiende en [159] para un caso más general en que uno de los estados gaussianos es puro y el otro es mixto.

Consideremos dos estados gaussianos fermiónicos puros, $|\phi\rangle \neq |\tilde{\phi}\rangle$, aniquilados respectivamente por un conjunto de operadores $\eta_1, \ldots, \eta_N \neq \tilde{\eta}_1, \ldots, \tilde{\eta}_N$. Llamamos $C \neq \tilde{C}$ a sus respectivas matrices de covarianza. En esta sección se demostrará que el producto interno entre ellos puede escribirse en la forma:

$$|\langle \phi | \tilde{\phi} \rangle|^2 = \sqrt{|\det[\mathbb{I} - (C - \tilde{C})]|}$$
(9.1)

En el capítulo 3 se define la matriz de covarianza de un estado gaussiano fermiónico en términos de los valores medios de las combinaciones cuadráticas de una base de operadores fermiónicos $c_1, \ldots, c_N, c_1^{\dagger}, \ldots, c_N^{\dagger}$. Tomemos por simplicidad la base $c_j = \eta_j \forall j$. Cualquier otra elección corresponde simplemente a un cambio de base, es decir una transformación unitaria de las matrices involucradas, y no altera los resultados finales. Los operadores $\eta \neq \tilde{\eta}$ están conectados entre sí por una transformación de Bogoliubov con coeficientes complejos, de la forma:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\eta} \\ \tilde{\eta}^{\dagger} \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \eta \\ \eta^{\dagger} \end{pmatrix}$$
(9.2)

 $^{^1}$ Infinitos agradecimientos para Paolo Zanardi y Lorenzo Campos Venutti por haberme mostrado este artículo.

donde se usa la notación compacta

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_N \end{pmatrix}, \quad \tilde{\eta} = \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\eta}_N \end{pmatrix}$$
(9.3)

y donde la matriz U es una matriz unitaria de la forma:

$$U = \begin{pmatrix} g & h \\ h^* & g^* \end{pmatrix}$$
(9.4)

con g, h matrices complejas de $N \times N$.

Llevemos primero el determinante del lado derecho de (9.1) a una forma más simple en términos de las matrices que aparecen en la transformación de Bogoliubov entre los dos sets de operadores. Resulta fácil ver que las matrices de covarianza están dadas por:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} h^{\dagger} \\ g^{\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & g \end{pmatrix}.$$
(9.5)

Esto quiere decir que el determinante en (9.1) puede escribirse como:

$$|\det[\mathbb{I} - (C - \tilde{C})]| = \left|\det\left[\begin{pmatrix}\mathbb{I} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}h^{\dagger}\\g^{\dagger}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h & g\end{pmatrix}\right]\right|$$
(9.6)

Utilizando que el módulo del determinante de una matriz no cambia al multiplicar por una matriz unitaria, este determinante resulta igual a:

$$|\det[\mathbb{I} - (C - \tilde{C})]| = \left| \det\left\{ \begin{pmatrix} h & g \\ g^* & h^* \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h^{\dagger} \\ g^{\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & g \end{pmatrix} \end{bmatrix} \right\} \right| = \left| \det\left(\frac{2h}{g^*} & 0 \right) \right| = |\det(g)|^2$$

$$(9.7)$$

donde para pasar del primer al segundo renglón se usan las relaciones impuestas sobre $g \ge h$ por el hecho de que la matriz U es unitaria.

A continuación probaremos entonces la expresión para el solapamiento entre los estados en la forma:

$$|\langle \phi | \tilde{\phi} \rangle|^2 = |\det(g)| \tag{9.8}$$

Empezaremos por considerar el caso en que det(g) = 0 y demostrar que en ese caso el producto interno entre estos dos estados se anula, y luego se considerará el caso en que $det(g) \neq 0$.

Supongamos entonces que se tiene $\tilde{\eta}_j = \sum_k g_{jk} \eta_k + h_{jk} \eta_k^{\dagger}$ con det(g) = 0. Existe por lo tanto un vector fila v de norma 1 tal que vg = 0. Consideremos el operador definido como $\chi = \sum_j v_j \tilde{\eta}_j$, que corresponde a un operador de aniquilación fermiónico (en alguna otra base). Claramente resulta $\langle \tilde{\phi} | \chi^{\dagger} \chi | \tilde{\phi} \rangle = 0$. En cambio, desarrollando $\tilde{\eta}_j$ en términos de los operadores $\eta \ge \eta^{\dagger}$ puede observarse que: $\langle \phi | \chi \chi^{\dagger} | \phi \rangle = 0$. Es decir que $| \tilde{\phi} \rangle$ corresponde a un estado de vacío para la partícula asociada a χ , mientras que $| \phi \rangle$ lo es para χ^{\dagger} . Esto implica que ambos estados son ortogonales. Una manera sencilla de verlo es notar que el valor medio de $\chi^{\dagger} \chi$ en el estado $| \phi \rangle$ es igual a 1. Como los autovalores de $\chi^{\dagger} \chi$ son 0 y 1, esto implica que $| \phi \rangle$ no puede tener componentes en el subespacio aniquilado por χ .

Pasemos ahora al caso en que det $(g) \neq 0$, es decir la matriz g es inversible. En este caso, siguiendo a [176], podemos conectar los estados $|\phi\rangle$ y $|\tilde{\phi}\rangle$ en la forma:

$$|\tilde{\phi}\rangle = Ce^{\frac{1}{2}\sum_{jk}G_{jk}\eta_j^{\dagger}\eta_k^{\dagger}}|\phi\rangle \tag{9.9}$$

donde C es una constante de normalización, y donde para que $|\tilde{\phi}\rangle$ sea aniquilado por todos los operadores $\tilde{\eta}_k$, G debe ser una matriz antisimétrica dada por:

$$G = -g^{-1}h. (9.10)$$

A partir de la relación entre los dos estados es posible entonces calcular el producto interno entre ellos, según:

$$\begin{aligned} |\langle \phi | \tilde{\phi} \rangle|^2 &= \left| \langle \phi | C e^{\frac{1}{2} \sum_{jk} G_{jk} \eta_j^{\dagger} \eta_k^{\dagger}} | \phi \rangle \right|^2 &= \\ &= \left(\langle \phi | e^{\frac{1}{2} \sum_{jk} G_{jk}^* \eta_j \eta_k} e^{\frac{1}{2} \sum_{jk} G_{jk} \eta_j^{\dagger} \eta_k^{\dagger}} | \phi \rangle \right)^{-1} \end{aligned}$$
(9.11)

donde para llegar a la última expresión se usa el hecho de que los operadores de creación c_k^{\dagger} actuando hacia la izquierda sobre $\langle \phi |$ lo aniquilan, y se reemplaza la constante C por el valor que debe tener para que el estado en la fórmula (9.9) esté normalizado.

En esta nueva forma, el solapamiento entre estados puede calcularse por medio de integrales gaussianas en variables de Grassman, insertando una identidad en términos de estados coherentes fermiónicos $|\xi\rangle$ [100]:

$$\langle \phi | e^{\frac{1}{2} \sum_{jk} G_{jk}^* \eta_j \eta_k} e^{\frac{1}{2} \sum_{jk} G_{jk} \eta_j^\dagger \eta_k^\dagger} | \phi \rangle =$$

$$= \int \prod_{l=1}^N d\xi_l^* d\xi_l e^{-\sum_l \xi_l^* \xi_l} \langle \phi | e^{\frac{1}{2} \sum_{jk} G_{jk}^* \eta_j \eta_k} | \xi \rangle \langle \xi | e^{\frac{1}{2} \sum_{jk} G_{jk} \eta_j^\dagger \eta_k^\dagger} | \phi \rangle =$$

$$= \int \prod_{l=1}^N d\xi_l^* d\xi_l e^{-\sum_l \xi_l^* \xi_l} e^{\frac{1}{2} \sum_{jk} G_{jk}^* \xi_j \xi_k} e^{\frac{1}{2} \sum_{jk} G_{jk} \xi_j^* \xi_k^*}$$

$$(9.12)$$

Esta integral en variables de Grassman puede resolverse resultando:

$$|\langle \phi | \tilde{\phi} \rangle|^2 = \left| \det \begin{pmatrix} G & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & G^{\dagger} \end{pmatrix} \right|^{-1/2}$$
(9.13)

<u>\</u>

Finalmente, se puede llegar a la expresión deseada en la forma:

$$\det \begin{pmatrix} G & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & G^{\dagger} \end{pmatrix} = \frac{\det \left[\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -g^{-1}h & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & -h^{\dagger}(g^{-1})^{\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & g^{\dagger} \end{pmatrix} \right]}{|\det(g)|^2} = \frac{1}{|\det(g)|^2} \det(gg^{\dagger} + hh^{\dagger}) = \frac{1}{|\det(g)|^2}$$
(9.14)

lo cual concluye la derivación.

Muchas gracias a:

- Juan Pablo, por dirigirme, y mis compañeros de grupo: Augusto, Christian, Ariel, Fer, y cómo no Leo, Griselda, Diego, Juan y Lisandro. Fue un gusto pasar estos años en buena compañía, y ojalá volvamos a trabajar juntos.
- Los amigos físicos no cuánticos, sobre todo Rolo, Fla, Willy y Di, que me acompañaron a lo largo de este tiempo durante muchos cafés, y/o por mail.
- La familia y las amigas del Poli, es decir la gente que no tiene ni idea de qué hago pero que me alienta igual, lo cual siempre viene bien.
- Beta, que no requiere de más explicaciones.

Bibliografía

- R. P. Feynman, Simulating physics with computers, Int. J. Theor. Phys. 21, 467 (1982).
- [2] D. Deutsch y R. Jozsa, Rapid solution of problems by quantum computation, Proc. Roy. Soc. London A 439, 553 (1992).
- [3] P. W. Shor, en Proceedings of the 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (IEEE Press, Los Alamitos, CA, 1994), pp. 124–134.
- [4] L. Grover, en Proc. 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computation (ACM Press, New York, 1996), pp. 212–219.
- [5] L. K. Grover, Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack, Phys. Rev. Lett. 79, 325 (1997).
- [6] M. A. Nielsen y I. L. Chuang, Quantum computation and quantum information (Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2000).
- [7] R. Ursin, T. Jennewein, M. Aspelmeyer, R. Kaltenbaek, M. Lindenthal, P. Walther, y A. Zeilinger, *Quantum teleportation across the Danube*, Nature 430, 849 (2004).
- [8] M. Karski, L. Forster, J.-M. Choi, A. Steffen, W. Alt, D. Meschede, y A. Widera, Quantum Walk in Position Space with Single Optically Trapped Atoms, Science 325, 174 (2009).
- [9] T. Rosenband et al., Frequency Ratio of Al⁺ y Hg⁺ Single-Ion Optical Clocks; Metrology at the 17th Decimal Place, Science **319**, 1808 (2008).
- [10] J. D. Jost, J. P. Home, J. M. Amini, D. Hanneke, R. Ozeri, C. Langer, J. J. Bollinger, D. Leibfried, y D. J. Wineland, *Entangled mechanical oscillators*, Nature 459, 683 (2009).
- [11] S. Gleyzes, S. Kuhr, C. Guerlin, J. Bernu, S. Deléglise, U. Busk Hoff, M. Brune, J.-M. Raimond, y S. Haroche, *Quantum jumps of light recording the birth and death of a photon in a cavity*, Nature **446**, 297 (2007).
- [12] http://www.idquantique.com, http://magiqtech.com/MagiQ/Home.html, http://www.smartquantum.com, http://www.quintessencelabs.com.
- [13] D. Salart, A. Baas, C. Branciard, N. Gisin, y H. Zbinden, *Testing spooky action at a distance*, Nature 454, 861 (2008).
- [14] G. Kirchmair, F. Zahringer, R. Gerritsma, M. Kleinmann, O. Guhne, A. Cabello, R. Blatt, y C. F. Roos, *State-independent experimental test of quantum contextuality*, Nature 460, 494 (2009).

- [15] Q. A. Turchette, C. J. Myatt, B. E. King, C. A. Sackett, D. Kielpinski, W. M. Itano, C. Monroe, y D. J. Wineland, *Decoherence and decay of motional quantum states of a trapped atom coupled to engineered reservoirs*, Phys. Rev. A 62, 053807 (2000).
- [16] P. W. Shor, Scheme for reducing decoherence in quantum memory, Phys. Rev. A 52, R2493 (1995).
- [17] A. M. Steane, Error correcting codes in quantum theory, Phys. Rev. Lett. 77, 793 (1996).
- [18] D. Gottesman, An Introduction to Quantum Error Correction, Quantum Computation: A Grand Mathematical Challenge for the Twenty-First Century and the Millennium, ed. S. J. Lomonaco, Jr., pp. 221–235 (2002). ArXiv e-print quantph/0004072.
- [19] D. A. Lidar, I. L. Chuang, y K. B. Whaley, Decoherence Free Subspaces for Quantum Computation, Phys. Rev. Lett. 81, 2594 (1998).
- [20] L. Ermann, J. Paz, y M. Saraceno, *Decoherence induced by a chaotic environment:* A quantum walker with a complex coin, Phys. Rev. A **73**, 012302 (2006).
- [21] R. Blume-Kohout y W. Zurek, Decoherence from a chaotic environment: An upside-down "oscillator" as a model, Phys. Rev. A 68, 032104 (2003).
- [22] L. Tessieri y J. Wilkie, Suppression of decoherence via strong intra-environmental coupling, J. Phys. A 36, 12305 (2003).
- [23] H. T. Quan, Z. Song, X. F. Liu, P. Zanardi, y C. P. Sun, Decay of Loschmidt Echo Enhanced by Quantum Criticality, Phys. Rev. Lett. 96, 140604 (2006).
- [24] F. M. Cucchietti, S. Fernandez-Vidal, y J. P. Paz, Universal decoherence induced by an environmental quantum phase transition, Phys. Rev. A 75, 032337 (2007).
- [25] D. Rossini, T. Calarco, V. Giovannetti, S. Montangero, y R. Fazio, Decoherence induced by interacting quantum spin baths, Phys. Rev. A 75, 032333 (2007).
- [26] C. Pineda y T. H. Seligman, Evolution of pairwise entanglement in a coupled n-body system, Phys. Rev. A 73, 012305 (2006).
- [27] S. Yuan, M. I. Katsnelson, y H. De Raedt, Importance of bath dynamics for decoherence in spin systems, e-print arXiv.org:0707.2372 (2007).
- [28] H. De Raedt y V. V. Dobrovitski, en Computer Simulation Studies in Condensed-Matter Physics XVI, Springer Proceedings in Physics (Springer, Berlin, 2004), arXiv.org:quant-ph/0301121.
- [29] W. H. Zurek, F. M. Cucchietti, y J. P. Paz, Gaussian Decoherence and Gaussian Echo from Spin Environments, Acta Physica Polonica B 38, 1685 (2007), e-print arXiv.org:quant-ph/0611200.
- [30] F. M. Cucchietti, J. P. Paz, y W. H. Zurek, Decoherence from spin environments, Phys. Rev. A 72, 052113 (2005).
- [31] V. V. Dobrovitski, H. A. De Raedt, M. I. Katsnelson, y B. N. Harmon, Quantum Oscillations without Quantum Coherence, Phys. Rev. Lett. 90, 210401 (2003).
- [32] D. G. Cory et al., NMR Based Quantum Information Processing: Achievements and Prospects, Forts. Phys. 48, 875 (2000). e-print arXiv.org:quant-ph/0004104.

- [33] J. Fischer, W. A. Coish, D. V. Bulaev, y D. Loss, Spin decoherence of a heavy hole coupled to nuclear spins in a quantum dot, Phys. Rev. B 78, 155329 (2008).
- [34] A. Morello, P. C. E. Stamp, y I. S. Tupitsyn, *Pair-wise decoherence in coupled spin qubit networks*, Phys. Rev. Lett. 97, 207206 (2006).
- [35] J. Jing y Z.-G. Lu, Dynamics of two center spins in a Quantum Heisenberg XY system, e-print arXiv.org:quant-ph/0612115 (2006).
- [36] T. Yu y J. H. Eberly, Finite-Time Disentanglement via Spontaneous Emission, Phys. Rev. Lett. 93, 140404 (2004).
- [37] S. Lloyd, Universal Quantum Simulators, Science 273, 1073 (1996).
- [38] C. Zalka, Simulating quantum systems on a quantum computer, Proc. Roy. Soc. Lond. A 454, 313 (1998). e-print arXiv.org:quant-ph/9603026.
- [39] S. Wiesner, Simulations of Many-Body Quantum Systems by a Quantum Computer e-print arXiv.org:quant-ph/9603028 (1996).
- [40] S. Hofferberth, I. Lesanovsky, T. Schumm, A. Imambekov, V. Gritsev, E. Demler, y J. Schmiedmayer, *Probing quantum and thermal noise in an interacting many*body system, Nature Physics 4, 489 (2008).
- [41] J. Zhang, Z. Lu, L. Shan, y Z. Deng, Experimental study of quantum decoherence using nuclear magnetic resonance, e-print arXiv.org:quant-ph/0202146 (2002).
- [42] M. Mohseni, J. S. Lundeen, K. J. Resch, y A. M. Steinberg, Experimental application of decoherence-free subspaces in a quantum-computing algorithm, Phys. Rev. Lett. 91, 187903 (2003).
- [43] S. Damodarakurup, M. Lucamarini, G.Di Giuseppe, D. Vitali, y P. Tombesi, Experimental inhibition of decoherence on flying qubits via bang-bang control, Phys. Rev. Lett. 103, 040502 (2009).
- [44] R. Schutzhold, M. Uhlmann, L. Petersen, H. Schmitz, A. Friedenauer, y T. Schatz, Analogue of cosmological particle creation in an ion trap, Phys. Rev. Lett. 99, 201301 (2007).
- [45] D. Porras y J. I. Cirac, Bose-Einstein Condensation and Strong-Correlation Behavior of Phonons in Ion Traps, Phys. Rev. Lett. 93, 263602 (2004).
- [46] R. Gerritsma, G. Kirchmair, F. Zahringer, E. Solano, R. Blatt, y C. F. Roos, Quantum simulation of the Dirac equation, e-print arXiv.org:0909.0674 (2009).
- [47] J. P. Paz y A. Roncaglia., Dynamics of the Entanglement between Two Oscillators in the Same Environment, Phys. Rev. Lett. 100, 220401 (2008).
- [48] J. P. Paz y A. J. Roncaglia, Dynamical phases for the evolution of the entanglement between two oscillators coupled to the same environment, Phys. Rev. A 79, 032102 (2009).
- [49] J. R. Anglin, J. P. Paz, y W. H. Zurek, *Deconstructing decoherence*, Phys. Rev. A 55, 4041 (1997).
- [50] H. Grabert, P. Schramm, y G. L. Ingold, Quantum Brownian motion: the functional integral approach, Phys. Rep. 168, 115 (1988).
- [51] C. Cormick y J. P. Paz, Decoherence induced by a dynamic spin environment: The universal regime, Phys. Rev. A 77, 022317 (2008).

- [52] C. Cormick y J. P. Paz, Decoherence of Bell states by local interactions with a dynamic spin environment, Phys. Rev. A 78, 012357 (2008).
- [53] C. Cormick y J. P. Paz, Observing different phases for the dynamics of entanglement in an ion trap (2009). Enviado a Phys. Rev. A.
- [54] A. J. Leggett y A. Garg, Quantum mechanics versus macroscopic realism: Is the flux there when nobody looks?, Phys. Rev. Lett. 54, 857 (1985).
- [55] H. D. Zeh, Toward a quantum theory of observation, Found. Phys. 3, (1973).
- [56] J. Paz y W. Zurek, in *Coherent Matter Waves, Les Houches Session LXXII*, Vol. editado por R. Kaiser, C. Westbrook y F. David, EDP Sciences (Springer Verlag, Berlin, 2001), pp. 533–614.
- [57] W. Zurek, Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical, Rev. Mod. Phys. 75, 715 (2003).
- [58] P. Stamp, The Decoherence Puzzle, Stud. Hist. Phil. Mod. Phys. 37, 467 (2006).
- [59] H. Janssen, Reconstructing Reality: Environment-Induced Decoherence, the Measurement Problem, and the Emergence of Definiteness in Quantum Mechanics, http://philsci-archive.pitt.edu/archive/00004224/ (2000).
- [60] S. Weinstein, Decoherence without decoherence, e-print arXiv.org:0906.4544 (2009).
- [61] M. R. Andrews, C. Townsend, H. Miesner, D. Durfee, D. Kurn, y W. Ketterle, Observation of interference between two Bose condensates, Science 275, 637 (1997).
- [62] M. Arndt, O. Nairz, J. Vos-Andreae, C. Keller, G. van der Zouw, y A. Zeilinger, Waveparticle duality of C₆0 molecules, Nature 401, 680 (1999).
- [63] J. R. Friedman, V. Patel, W. Chen, S. K. Tolpygo, y J. E. Lukens, Quantum superposition of distinct macroscopic states, Nature 406, 43 (2000).
- [64] B. Julsgaard, A. Kozhekin, y E. S. Polzik, Experimental long-lived entanglement of two macroscopic objects, Nature 413, 400 (2001).
- [65] A. J. Leggett, S. Chakravarty, A. T. Dorsey, M. P. A. Fisher, A. Garg, y W. Zwerger, *Dynamics of the dissipative two-state system*, Rev. Mod. Phys. **59**, pp. 1-85 (1987).
- [66] N. Prokof'ev y P. Stamp, Theory of the spin bath, Rep. Prog. Phys. 63, 669 (2000).
- [67] S. Sachdev, Quantum Phase Transitions (Cambridge University Press, 1999).
- [68] J. Zhang, F. M. Cucchietti, C. M. Chandrashekar, M. Laforest, C. A. Ryan, M. Ditty, A. Hubbard, J. K. Gamble, y R. Laflamme, *Direct observation of quantum criticality in Ising spin chains*, Phys. Rev. A **79**, 012305 (2009).
- [69] D. Rossini, P. Facchi, R. Fazi, G. Florio, D. A. Lidar, S. Pascazio, F. Plastina, y P. Zanardi., Bang-Bang control of a qubit coupled to a quantum critical spin bath, Phys. Rev. A 77, 052112 (2008).
- [70] D. Rossini, V. Giovannetti, y S. Montangero, Spin chain model for correlated quantum channels, New J. Phys. 10, 115009 (2008).
- [71] C. M. Dawson, A. P. Hines, R. H. McKenzie, y G. J. Milburn, *Entanglement sharing and decoherence in the spin-bath*, Phys. Rev. A **71**, 052321 (2005).

- [72] N. P. Oxtoby, A. Rivas, S. F. Huelga, y R. Fazio, Probing a composite spin-boson environment, New J. Phys. 11, 063028 (2009).
- [73] J. Lages, V. V. Dobrovitski, M. I. Katsnelson, H. A. De Raedt, y B. N. Harmon, Decoherence by a chaotic many-spin bath, Phys. Rev. E 72, 026225 (2005).
- [74] S. Yuan, M. I. Katsnelson, y H. De Raedt, Decoherence by a spin thermal bath: Role of the spin-spin interactions and initial state of the bath, Phys. Rev. B 77, 184301 (2008).
- [75] U. Weiss, Quantum Dissipative Systems, Series in Modern Condensed Matter Physics (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 1993).
- [76] A. Roncaglia, Dinámica de las correlaciones durante el proceso de decoherencia, Tesis de doctorado, Universidad de Buenos Aires (2009). Disponible en http://www.qufiba.df.uba.ar.
- [77] R. Feynman y F. Vernon, The Theory of a General Quantum System Interacting with a Linear Dissipative System, Ann. Phys. 24, 118 (1963).
- [78] B. L. Hu, J. P. Paz, y Y. Zhang, Quantum Brownian motion in a general environment: Exact master equation with nonlocal dissipation and colored noise, Phys. Rev. D 45, 2843 (1992).
- [79] C. H. Fleming, B. L. Hu, y A. Roura, Solutions to Master Equations of Quantum Brownian Motion in a General Environment with External Force, e-print arXiv.org:0705.2766 (2007).
- [80] D. Porras y J. I. Cirac, Effective Quantum Spin Systems with Trapped Ions, Phys. Rev. Lett 92, 207901 (2004).
- [81] R. Oliveira y B. M. Terhal, The complexity of quantum spin systems on a two-dimensional square lattice, COMP. 8, 0900 (2008). e-print arXiv.org:quantph/0504050.
- [82] D. Gottesman y S. Irani, The Quantum and Classical Complexity of Translationally Invariant Tiling and Hamiltonian Problems, e-print arXiv.org:0905.2419 (2009).
- [83] U. Manthe, H. D. Meyer, y L. S. Cederbaum, Wave-packet dynamics within the multiconfiguration Hartree framework: General aspects and application to NOCl, J. Chem. Phys. 97, 3199 (1992).
- [84] Y. H. Wu y V. S. Batista, Matching-pursuit for simulations of quantum processes, J. Chem. Phys. 118, 6720 (2003).
- [85] M. Ben-Nun y T. J. Martínez, Nonadiabatic molecular dynamics: Validation of the multiple spawning method for a multidimensional problem, J. Chem. Phys. 108, 7244 (1998).
- [86] M. Ben-Nun, J. Quenneville, y T. Martínez, Ab Initio Multiple Spawning: Photochemistry from First Principles Quantum Molecular Dynamics, J. Phys. Chem. A 104, 5161 (2000).
- [87] S. R. White, Density matrix formulation for quantum renormalization groups, Phys. Rev. Lett. 69, 2863 (1992).
- [88] U. Schollwöck, The density-matrix renormalization group, Rev. Mod. Phys. 77, 259 (2005).
- [89] M. Fannes, D. Nachtergaele, y R. Werner, *Finitely correlated states on quantum spin chains*, Commun. Math. Phys. **144**, 443 (1992).
- [90] S. Rommer y S. Ostlund, Thermodynamic Limit of Density Matrix Renormalization, Phys. Rev. Lett. 75, 3537 (1995).
- [91] J. Dukelsky, M. A. Martín-Delgado, T. Nishino, y G. Sierra, Equivalence of the variational matrix product method and the density matrix renormalization group applied to spin chains, Europhys. Lett. 43, 457 (1998). e-print arXiv.org:condmat/9710310.
- [92] F. Verstraete, J. Cirac, y V. Murg, Matrix Product States, Projected Entangled Pair States, and variational renormalization group methods for quantum spin systems, Adv. Phys. 57, 143 (2008).
- [93] G. Vidal, A class of quantum many-body states that can be efficiently simulated, Phys. Rev. Lett. 101, 110501 (2008).
- [94] E. Lieb, T. Schultz, y D. Mattis, Two soluble models of an antiferromagnetic chain, Ann. Phys. 16, 407 (1961).
- [95] Raúl García-Patrón Sánchez, Quantum Information with Optical Continuous Variables: from Bell Tests to Key Distribution, Tesis de doctorado, Université Libre de Bruxelles (2007). Disponible en: http://quic.ulb.ac.be/members/rgarciap/.
- [96] J. Eisert y M. B. Plenio, Introduction to the basics of entanglement theory in continuous-variable systems, Int. J. Quant. Inf. 1, 479 (2003).
- [97] A. Serafini, M. G. A. Paris, F. Illuminati, y S. D. Siena., Quantifying decoherence in continuous variable systems, J. Opt. B 7, R19 (2005).
- [98] D.-M. Schlingemann, M. Cozzini, M. Keyl, y L. C. Venuti, Maximally entangled fermions, e-print arXiv.org:0711.3394 (2007).
- [99] A. Botero and B. Reznik, BCS-like Modewise Entanglement of Fermion Gaussian States, Phys. Lett. A 331, 39 (2004).
- [100] J. W. Negele y H. Orland, Quantum many-particle systems, Vol. 68 of Frontiers in Physics (Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1987).
- [101] H. Haeffner, C. F. Roos, y R. Blatt, Quantum computing with trapped ions, Phys. Rep. 469, 155 (2008).
- [102] A. Serafini, A. Retzker, y M. B. Plenio, Manipulating the quantum information of the radial modes of trapped ions: Linear phononics, entanglement generation, quantum state transmission and non-locality tests, arXiv.org:0809.4287 (2008).
- [103] J. Eschner, G. Morigi, F. Schmidt-Kaler, y R. Blatt, Laser cooling of trapped ions, J. Opt. Soc. Am. B 20, 1003 (2003).
- [104] M. G. Raizen, J. M. Gilligan, J. C. Bergquist, W. M. Itano, y D. J. Wineland, *Ionic crystals in a linear Paul trap*, Phys. Rev. A 45, 6493 (1992).
- [105] J. Drees y W. Paul, Beschleunigung von Elektronen in einem Plasmabetatron, Zeits. Phys. 180, 340 (1964).
- [106] D. Kielpinski, Ion-trap quantum information processing: experimental status, Front. Phys. China 3, 365 (2008).

- [107] D. Kielpinski, V. Meyer, M. A. Rowe, C. A. Sackett, W. M. Itano, C. Monroe, y D. J. Wineland, A Decoherence-Free Quantum Memory Using Trapped Ions, Science 291, 1013 (2001).
- [108] M. D. Barrett, J. Chiaverini, T. Schaetz, J. Britton, W. M. Itano, J. D. Jost, E. Knill, C. Langer, D. Leibfried, R. Ozeri, y et al., Deterministic quantum teleportation of atomic qubits, Nature 429, 737 (2004).
- [109] C. F. Roos, M. Riebe, H. Häffner, W. Hänsel, J. Benhelm, G. P. T. Lancaster, C. Becher, F. Schmidt-Kaler, y R. Blatt, *Control and Measurement of Three-Qubit Entangled States*, Science **304**, 1478 (2004).
- [110] M. Riebe, H. Häffner, C. F. Roos, W. Hänsel, J. Benhelm, G. P. T. Lancaster, T. W. Körber, C. Becher, F. Schmidt-Kaler, y D. F. V. J. et al., Deterministic quantum teleportation with atoms, Nature 429, 734 (2004).
- [111] M. Riebe, M. Chwalla, J. Benhelm, H. Haeffner, W. Haensel, C. F. Roos, y R. Blatt, *Quantum teleportation with atoms: quantum process tomography*, New J. Phys. 9, 211 (2007).
- [112] M. A. Rowe et al., Transport of quantum states and separation of ions in a dual RF ion trap, Quantum Inf. and Comput. 2, 257 (2002).
- [113] D. J. Wineland, C. Monroe, W. M. Itano, D. Leibfried, B. E. King, y D. M. Meekhof, *Experimental issues in coherent quantum-state manipulation of trapped atomic ions*, J. Res. NIST **103**, 259 (1998).
- [114] D. Leibfried, R. Blatt, C. Monroe, y D. Wineland, Quantum dynamics of single trapped ions, Rev. Mod. Phys. 75, 281 (2003).
- [115] A. Steane, C. F. Roos, D. Stevens, A. Mundt, D. Leibfried, F. Schmidt-Kaler, y R. Blatt, Speed of ion-trap quantum-information processors, Phys. Rev. A 62, 042305 (2000).
- [116] D. F. V. James, Quantum dynamics of cold trapped ions with application to quantum computation, Appl. Phys. B 66, 181 (1998).
- [117] C. F. Roos, M. Chwalla, K. Kim, M. Riebe, y R. Blatt, 'Designer atoms' for quantum metrology, Nature 443, 316 (2006).
- [118] E. Knill, D. Leibfried, R. Reichle, J. Britton, R. B. Blakestad, J. D. Jost, C. Langer, R. Ozeri, S. Seidelin, y D. J. Wineland, *Randomized Benchmarking of Quantum Gates*, Phys. Rev. A 77, 012307 (2008).
- [119] J. I. Cirac y P. Zoller, Quantum Computations with Cold Trapped Ions, Phys. Rev. Lett. 74, 4091 (1995).
- [120] A. Sørensen y K. Mølmer, Quantum Computation with Ions in Thermal Motion, Phys. Rev. Lett. 82, 1971 (1999).
- [121] G. J. Milburn, S. Schneider, y D. F. V. James, Ion Trap Quantum Computing with Warm Ions, Fortschr. Phys. 48, 801 (2000).
- [122] F. Schmidt-Kaler, H. Häffner, M. Riebe, S. Gulde, G. P. T. Lancaster, T. Deuschle, C. Becher, C. F. Roos, J. Eschner, y R. Blatt, *Realization of the Cirac-Zoller* controlled-NOT quantum gate, Nature 422, 408 (2003).

- [123] L. Deslauriers, S. Olmschenk, D. Stick, W. K. Hensinger, J. Sterk, y C. Monroe, Scaling and Suppression of Anomalous Heating in Ion Traps, Phys. Rev. Lett. 97, 103007 (2006).
- [124] C. F. Roos, Ion trap quantum gates with amplitude-modulated laser beams, New J. Phys. 10, 013002 (2008).
- [125] G. Morigi y S. Fishman, Eigenmodes and Thermodynamics of a Coulomb Chain in a Harmonic Potential, Phys. Rev. Lett. 93, 170602 (2004).
- [126] A. Retzker, R. Thompson, D. Segal, y M. B. Plenio, Double Well Potentials and Quantum Phase Transitions in Ion Traps, Phys. Rev. Lett. 101, 260504 (2008).
- [127] M. D. Barrett et al., Sympathetic cooling of ⁹Be⁺ and ²⁴Mg⁺ for quantum logic, Phys. Rev. A 68, 042302 (2003).
- [128] M. Johanning, A. F. Varn, y C. Wunderlich, Quantum simulations with cold trapped ions, J. Phys. B 42, 154009 (2009).
- [129] C. Wunderlich, en Laser Physics at the Limit, editado por H. Figger, D. Meschede, y C. Zimmermann (Springer Verlag Heidelberg, Berlin, New York, 2002), pp. 261– 271.
- [130] X.-L. Deng, D. Porras, y J. I. Cirac, Effective spin quantum phases in systems of trapped ions, Phys. Rev. A 72, 063407 (2005).
- [131] G. J. Milburn, Simulating nonlinear spin models in an ion trap, e-print arXiv.org:quant-ph/9908037 (1999).
- [132] J. P. Barjaktarevic, G. J. Milburn, y R. H. McKenzie, Fast simulation of a quantum phase transition in an ion-trap realizable unitary map, Phys. Rev. A 71, 012335 (2005).
- [133] A. Friedenauer, H. Schmitz, J. T. Glueckert, D. Porras, y T. Schaetz, Simulating a quantum magnet with trapped ions, Nature Phys. 4, 757 (2008).
- [134] D. Porras, F. Marquardt, J. von Delft, y J. I. Cirac, Mesoscopic Spin-Boson Models of Trapped Ions, Phys. Rev. A 78, 010101 (2008).
- [135] I. Waki, S. Kassner, G. Birkl, y H. Walther, Observation of ordered structures of laser-cooled ions in a quadrupole storage ring, Phys. Rev. Lett. 68, 2007 (1992).
- [136] G. Birkl, S. Kassner, y H. Walther, Multiple-shell structures of laser-cooled ²⁴Mg⁺ ions in a quadrupole storage ring, Nature 357, 310 (1992).
- [137] M. B. Plenio y S. F. Huelga, Dephasing assisted transport: Quantum networks and biomolecules, New J. Phys. 10, 113019 (2008).
- [138] J. Cai, S. Popescu, y H. J. Briegel, Dynamic entanglement in oscillating molecules, e-print arXiv.org:0809.4906 (2008).
- [139] D. Leibfried, B. DeMarco, V. Meyer, M. Rowe, A. Ben-Kish, J. Britton, W. M. Itano, B. Jelenković, C. Langer, T. Rosenband, y D. J. Wineland, *Trapped-Ion Quantum Simulator: Experimental Application to Nonlinear Interferometers*, Phys. Rev. Lett. **89**, 247901 (2002).
- [140] M. P. A. Fisher, P. B. Weichman, G. Grinstein, y D. S. Fisher, Boson localization and the superfluid-insulator transition, Phys. Rev. B 40, 546 (1989).

- [141] X. L. Deng, D. Porras, y J. I. Cirac, Quantum phases of interacting phonons in ion traps, Phys. Rev. A 77, 033403 (2008).
- [142] R. Schmied, T. Roscilde, V. Murg, D. Porras, y J. I. Cirac, Quantum Phases of Trapped Ions in an Optical Lattice, New J. Phys. 10, 045017 (2008).
- [143] O. M. Braun y Y. S. Kivshar, Nonlinear dynamics of the Frenkel-Kontorova model, Phys. Rep. 306, 1 (1998).
- [144] I. Garcia-Mata, O. V. Zhirov, y D. L. Shepelyansky, Frenkel-Kontorova model with cold trapped ions, Eur. Phys. J. D 41, 325 (2007).
- [145] W. G. Unruh, Notes on black-hole evaporation, Phys. Rev. D 14, 870 (1976).
- [146] G. W. Gibbons y S. W. Hawking, Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation, Phys. Rev. D 15, 2738 (1977).
- [147] D. J. Heinzen y D. J. Wineland, Quantum-limited cooling and detection of radiofrequency oscillations by laser-cooled ions, Phys. Rev. A 42, 2977 (1990).
- [148] L. Lamata, J. Leon, T. Schaetz, y E. Solano, Dirac Equation and Quantum Relativistic Effects in a Single Trapped Ion, Phys. Rev. Lett. 98, 253005 (2007).
- [149] P. Pfeuty, The One-Dimensional Ising Model with a Transverse Field, Ann. Phys. 57, 79 (1970).
- [150] E. Barouch, B. M. McCoy, y M. Dresden, Statistical Mechanics of the XY Model. I, Phys. Rev. A 2, 1075 (1970).
- [151] E. Barouch y B. M. Coy, Statistical mechanics of the XY model II Spin correlation functions, Phys. Rev. A 3, 786 (1971).
- [152] P. R. Levstein, G. Usaj, y H. M. Pastawski, Attenuation of polarization echoes in nuclear magnetic resonance: A study of the emergence of dynamical irreversibility in many-body quantum systems, J. Chem. Phys. 108, 2718 (1998).
- [153] J. Dziarmaga, Dynamics of quantum phase transition: exact solution in quantum Ising model, Phys. Rev. Lett. 95, 245701 (2005).
- [154] Z.-G. Yuan, P. Zhang, y S.-S. Li, Disentanglement of two qubits coupled to an XY spin chain: Role of quantum phase transition, e-print arXiv.org:0707.2846 (2007).
- [155] P. Pfeuty, An exact result for the 1-D random Ising model in a transverse field, Phys. Lett. 72A, 245 (1979).
- [156] N. T. Jacobson, S. Garnerone, S. Haas, y P. Zanardi, Scaling of the fidelity susceptibility in a disordered quantum spin chain, Phys. Rev. B 79, 184427 (2009).
- [157] P. Zanardi, M. G. A. Paris, y L. C. Venuti, Quantum criticality as a resource for quantum estimation, Phys. Rev. A 78, 042105 (2008).
- [158] G. De Chiara, T. Calarco, S. Fishman, y G. Morigi, Ramsey interferometry with a spin embedded in a Coulomb chain, Phys. Rev. A 78, 043414 (2008).
- [159] M. Keyl y D.-M. Schlingemann, The algebra of Grassmann canonical anticommutation relations (GAR) and its applications to fermionic systems, e-print arXiv.org:0906.2929 (2009).
- [160] G. Vidal y R. F. Werner, Computable measure of entanglement, Phys. Rev. A 65, 032314 (2002).

- [161] R. C. Drumond, L. A. M. Souza, y M. T. Cunha, Asymptotic Entanglement Dynamics Phase Diagrams for Two Electromagnetic Field Modes in a Cavity, e-print arXiv.org:0909.4023 (2009).
- [162] A. O. Caldeira y A. J. Leggett, Path integral approach to quantum Brownian motion, Physica A 121, 587 (1983).
- [163] C.-H. Chou, T. Yu, y B. L. Hu, Exact master equation and quantum decoherence of two coupled harmonic oscillators in a general environment, Phys. Rev. E 77, 011112 (2008).
- [164] J. Eisert, Entanglement in Quantum Information Theory, Tesis de doctorado, University of Potsdam (2001).
- [165] G. Adesso, A. Serafini, y F. Illuminati, Quantification and Scaling of Multipartite Entanglement in Continuous Variable Systems, Phys. Rev. Lett. 93, 220504 (2004).
- [166] A. Serafini, F. Illuminati, y S. De Siena, Symplectic invariants, entropic measures and correlations of Gaussian states, J. Phys. B 37, L21 (2004).
- [167] A. Einstein, B. Podolsky, y N. Rosen, Can quantum-mechanical description of reality be considered complete?, Phys. Rev. 47, 777 (1935).
- [168] M. Yönac, T. Yu, y J. H. Eberly, Sudden death of entanglement of two Jaynes-Cummings atoms, J. Phys. B 39, S621 (2006).
- [169] J. P. Paz y A. J. Roncaglia, Entanglement dynamics during decoherence, e-print arXiv.org:0909.0423. A publicar en: QIP special issue on Quantum Decoherence and Entanglement (2009).
- [170] D. Kielpinski, B. E. King, C. J. Myatt, C. A. Sackett, Q. A. Turchette, W. M. Itano, C. Monroe, D. J. Wineland, y W. H. Zurek, Sympathetic cooling of trapped ions for quantum logic, Phys. Rev. A 61, 032310 (2000).
- [171] A. Retzker, J. I. Cirac, y B. Reznik, Detecting Vacuum Entanglement in a Linear Ion Trap, Phys. Rev. Lett. 94, 050504 (2005).
- [172] D. M. Meekhof, C. Monroe, B. E. King, W. M. Itano, y D. J. Wineland, Generation of Nonclassical Motional States of a Trapped Atom, Phys. Rev. Lett. 76, 1796 (1996).
- [173] H. Scutaru, Fidelity for displaced squeezed thermal states and the oscillator semigroup, J. Phys. A 31, 3659 (1998). e-print arXiv.org:quant-ph/9708013.
- [174] J. F. Poyatos, J. I. Cirac, y P. Zoller, Quantum Reservoir Engineering with Laser Cooled Trapped Ions, Phys. Rev. Lett. 77, 4728 (1996).
- [175] C. A. Sackett, D. Kielpinski, B. E. King, C. Langer, V. Meyer, C. J. Myatt, M. Rowe, Q. A. Turchette, W. M. Itano, D. J. Wineland, y C. Monroe, *Experimental entanglement of four particles*, Nature 404, 256 (2000).
- [176] M.-C. Chung e I. Peschel, Density-matrix spectra of solvable fermionic systems, Phys. Rev. B 64, 064412 (2001).