



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

Simetrías Infinito-Dimensionales en Teorías de Gravedad

por *Mauricio Leston*

Director de Tesis: Rafael Ferraro
Consejero de Estudios: Rafael Ferraro

Lugar de Trabajo: Instituto de Astronomía y Física del Espacio

Trabajo de Tesis para optar por el título de Doctor de la Universidad de
Buenos Aires en el **área de Ciencias Físicas**

Octubre de 2007

...

Resumen

En este trabajo analizamos aspectos de dos clases de simetrías infinitodimensionales en teorías de gravedad. Por un lado, hemos considerado desde una nueva perspectiva la cuestión del fracaso en la implementación del denominado ‘principio de Mach’ que se halla ligada a la propia interpretación de la invariancia ante difeomorfismo de las teorías de gravedad. Esta perspectiva toma en cuenta por un lado el progreso hecho en la formulación de las teorías de gravedad como teorías de gauge y por el otro la construcción de los modelos relacionales de Barbour, que han sido reconsiderados recientemente. En estos últimos una simetría global es localizada sin la introducción de grados de libertad nuevos, a diferencia de lo que ocurre en el procedimiento de Utiyama. Puesto que se muestra que el planteo de una teoría Machiana resulta ser equivalente al de formular un procedimiento alternativo al de Utiyama, hemos considerado la generalización del procedimiento de Barbour a fin de incluir a las simetrías de gauge ordinarias. Nuestra generalización se ha restringido al caso de $U(1)$, que sirve como modelo de juguete para la posterior extensión a las teorías de gravedad consideradas como un teorías de gauge en un sentido especial. Por otra lado, hemos estudiado simetrías que aparecen en distintas teorías de gravedad en forma inesperada cuando se considera la reducción dimensional de estas, en particular en el caso de supergravedad en $D=11$ (SUGRA $D=11$). Estas son simetrías asociadas a álgebras de Lie que son de dimensión infinita en muchos casos. Una cuestión abierta es el origen de estas simetrías denominadas *simetrías ocultas*. En el caso particular de SUGRA $D=11$ se ha conjeturado que su lagrangiano puede ser reformulado como un modelo cociente, correspondiente al álgebra de Lie de dimensión infinita E_{10} . En este contexto, hemos reconsiderado algunas soluciones cosmológicas a SUGRA $D=11$, previamente halladas en la literatura, utilizando el diccionario existente que establece una correspondencia entre ambos lados de la conjetura en cierto régimen y aproximación.

PALABRAS CLAVES: TEORIAS DE GAUGE, TEORIAS DE YANG-MILLS, RELATIVIDAD GENERAL, SIMETRIAS OCULTAS, COVARIANCIA GENERAL, SUPERGRAVEDAD, FIBRADOS, ALGEBRAS DE KAC-MOODY.

Abstract

In this work, we have considered different aspects of two kind of infinity-dimensional symmetries in gravity theories. On one hand, we have reconsidered from a new point of view the issue of the failure in the implementation of the so called “Mach principle”. This issue is closely related with the one of the diffeomorphism invariance of gravitational theories. Our point of view take into account both the progress on the formulation of gravity theories as gauge theories and the Barbour relational models, which has been reconsidered recently. In these models, a global symmetry is localized without the introduction of new degrees of freedom, in contrast with the case of the Utiyama procedure. Since it is showed that the proposal of a Machian theory is equivalent to the proposal of an alternative Utiyama procedure, we have consider the generalization of the Barbour procedure in order to include the usual gauge symmetries. Our generalization has been restricted to the simple case of $U(1)$, which is a toy model for the further extension to gravitational theories in their gauge formulation. On the other hand, we have studied another kind of symmetries, which are unexpected, appearing after dimensional reduction of a wide range of gravitational theories. It happens in particular in the case of eleven dimension supergravity (SUGRA D=11). These are internal symmetries whose Lie algebra is infinity-dimensional in many interesting case. In particular, it happens in the celebrated case of One of the open question is the origin of these unexpected symmetries (also called *hidden symmetries*). In the particular case of SUGRA D=11, it has been conjectured that the lagrangian in D=11 can be written as a *coset model* associated with the exceptional Lie algebra E_{10} , which is infinity-dimensional. Within this context, we have reexamined previously found cosmological solutions to SUGRA D=11, using the “dictionary” that establishes a correspondence between between both sides of the conjecture, in certain regime and level of approximation.

KEY WORDS: GAUGE THEORIES, YANG-MILLS THEORIES, GENERAL RELATIVITY, HIDDEN SYMMETRIES, GENERAL COVARIANCE, SUPERGRAVITY, FIBER BUNDLES, KAC-MOODY ALGEBRAS.

Índice general

Introducción	5
I. Cuestiones abiertas	6
I.1. Simetrías ocultas manifiestas	6
I.2. Covariancia general y principio de Mach	7
II. Problemas específicos a tratar	9
II.1. Soluciones cosmologicas y subálgebras de E_{10}	9
II.2. Alternativa al procedimiento de Utiyama, modelos relacionales y gravedad como teoría de gauge	9
III. Herramientas matemáticas necesarias	11
IV. Organización de la tesis	12
1. Descripción Geométrica de las Simetrías de Gauge	14
1. Nociones elementales de fibrados y conexiones	14
1.1. Definición de espacio fibrado	14
1.2. Diferencia entre ser trivial y trivializable	15
1.3. Fibrados principales y asociados	16
1.4. Geometría diferencial en un fibrado principal	18
1.5. Conexión en un fibrado principal	20
1.6. “Pullback” de una conexión: potencial de gauge	21
1.7. Transformación de gauge: descripción pasiva y activa	23
1.8. Derivada covariante de secciones en el asociado	24
2. Reducción de un fibrado principal	25
2.1. Condición de reductividad débil	26
2.2. Descomposición de una conexión en el caso de reductividad débil	27
3. Descripción alternativa en términos de la realización no-lineal	29
3.1. Campos reducidos	32
4. Ruptura de simetría y lenguaje covariante	33

2. Realización No-Lineal de Símetrias Infinito-Dimensionales	35
1. Consideraciones preliminares	36
1.1. Modelo sigma no lineal	36
1.2. Espacios simétricos	36
2. Modelo sigma no lineal correspondiente a grupos de Lie de dimensión finita: construcción formal	38
2.1. Construcción de la acción del modelo sigma: 3 formas alternativas	40
2.2. Ecuaciones de movimiento y corrientes conservadas	42
2.3. Ejemplo: $SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$ (espacio hiperbólico)	43
2.4. Ejemplo: Acción para $GL(10, \mathbb{R})/SO(10)$	45
2.5. Acción para el caso general en forma explícita	47
3. Modelos sigma no lineal en espacios cociente infinito-dimensionales	50
3.1. Construcción Formal	50
3.2. Truncamientos consistentes	53
4. Modelo sigma para $\mathcal{E}_{10}/\mathcal{K}(\mathcal{E}_{10})$	55
4.1. E_{10} a Niveles Bajos	56
4.2. La Acción invariante $\mathcal{K}(\mathcal{E}_{10}) \times \mathcal{E}_{10}$ a Niveles Bajos	58
5. Apéndice	60
5.1. Álgebras de Lie semi-simples y matriz de Cartan	60
5.2. Forma de Killing y matriz de Cartan	60
5.3. Raíces positivas, negativas y simples	61
5.4. Caracterización del álgebra a apartir de la matriz de Cartan	62
5.5. Algebras de Lie a partir de la matriz de Cartan generalizada	63
5.6. Diagrama de Dynkin	64
5.7. Clasificación de las álgebras a partir de la matriz de Cartan generalizada	65
5.8. Forma real de un algebra de Lie	66
5.9. Involución de Cartan	66
5.10. Extensiones Afines	67
5.11. Subálgebras regulares	68
5.12. Expresiones útiles para el cálculo de la acción del modelo sigma no-lineal	71
5.13. Acción completa para $\mathcal{E}_{10}/\mathcal{K}(\mathcal{E}_{10})$	72

3.	E_{10} como Simetría Oculta de Supergravedad en $D = 11$	76
1.	Diccionario entre supergravedad $D=11$ y modelo coset correspondiente a E_{10}	78
1.1.	Niveles más Altos y la conjetura del gradiente	81
2.	Soluciones cosmológicas de supergravedad cerca de una singularidad	82
2.1.	Consideraciones Generales	82
2.2.	Modelos de Bianchi en supergravedad en $D = 11$	83
2.3.	Descripción en términos de configuraciones geométricas	84
3.	Configuraciones geométricas y subálgebras regulares de E_{10}	85
3.1.	Consideraciones Generales	85
3.2.	Correspondencia entre diagramas de Dynkin y diagramas de configuración	87
4.	Catálogo de diagramas de Dynkin correspondientes a Soluciones de supergravedad	89
4.1.	Casos en que la dimensión del Algebra es Finita	89
4.2.	Casos en los que la dimensión del álgebra es infinita	95
5.	Apéndice	114
5.1.	Propiedades adicionales de las subálgebras regulares	117
5.2.	Subalgebras Reductivas	118
4.	Simetrías de Gauge en Teorías de Gravedad	119
1.	Problemas en la formulación de la gravitación como una teoría de gauge	120
2.	Interpretación de la conexión afín como campo de gauge	121
3.	Vielbein y conexión traslacional en un fibrado con soldadura	123
3.1.	Vielbeins y métrica inducida	125
3.2.	Relaciones de estructura	126
4.	Teorías de gravedad como teoría del gauge con ruptura espontánea de simetría de distintos grupos	127
4.1.	Teorías de gravedad como teoría de gauge del grupo de Poincaré	128
4.2.	RG como teoría de gauge del grupo de Poincaré con torsión nula	129
4.3.	Einstein-Cartan como teoría de gauge del grupo de Anti-Sitter $SO(3, 2)$	130
5.	Síntesis de las peculiaridades de las teorías de gravitación	131
6.	Lord: Generalización del concepto de transformación de gauge	133

5. Modelos Relacionales como Alternativa al Procedimiento de Utiyama	135
1. Un ejemplo de invariancia local sin campo de gauge	137
2. Formulación de teorías invariantes $U(1)_{local}$ a la Barbour . . .	140
2.1. Reducción fuerte: extensión de las condiciones de 'stacking' de Barbour	142
2.2. Reducción débil	143
2.3. Reducción débil en Yang-Mills con invariancia $U(1)_{local}$	146
3. Síntesis preliminar	147
4. Principio de Mach en teorías de gravitación	147
4.1. Presencia de dos estrategias opuestas en la gestación de RG	148
4.2. Hacia la formulación de un procedimiento Machiano para la invariancia ante difeomorfismos	152
Resumen y Trabajos Futuros	154

Introducción

El mismo nombre relatividad general (RG), hace referencia a una simetría infinito-dimensional presente en la teoría de gravitación de Einstein, pues relatividad equivale a simetría y general se refiere al grupo de difeomorfismos (*Diff*) de la variedad espacio-tiempo, cuyos generadores satisfacen un álgebra de dimensión infinita. Esta simetría no es privativa de RG sino que la posee cualquiera de las distintas generalizaciones de RG (en distintas dimensiones y con distintos contenido de campos) a las cuales nos referimos como *teorías de gravedad*.

La naturaleza de este grupo de simetrías de las teorías de gravedad-el hecho de que *Diff* actúa sobre el propio espacio-tiempo- establece una diferencia fundamental con respecto a las teorías de Yang-Mills, en el que el grupo de simetrías de gauge actúa en un espacio interno. Usualmente, esta diferencia es expresada diciendo que que las teorías de gravitación poseen *simetrías externas* mientras que las teorías de Yang-Mills poseen *simetrías internas*.

Por otra parte, el título de esta tesis refiere a otra clase de simetrías infinito dimensionales. Se ha constatado la aparición de simetrías *inesperadas* y en muchos casos *infinito dimensionales* en una amplia variedad de teorías de gravedad (desde relatividad general en $D=4$ hasta teorías de supergravedad en dimensiones mayores, con diverso contenido de materia). Estas son de naturaleza interna, pues son simetrías ante transformaciones de los campos, que no afectan a las coordenadas espacio-tiempo. Más precisamente, lo que se ha constatado es que cuando se realiza una reducción dimensional o compactificación en estas teorías emerge un grupo de simetrías asociadas a las álgebras de Lie conocidas como *álgebras de Kac-Moody*. Las álgebras de Kac-Moody comprenden como caso particular a las álgebras de Lie de dimensión finita pero incluyen también a álgebras de dimensión infinita, en particular a algunas conocidas como *afines* e *hiperbólicas*.

Existen muchos ejemplos de este fenómeno. Un caso relevante para esta

tesis es de la teoría de supergravedad en un espacio-tiempo de 11 dimensiones (SUGRA D=11 de ahora en más). Durante los '70 se ha estudiado con detalle esta teoría y aquellas provenientes de su reducción dimensional en un toro a dimensiones $d = 3, 4, \dots, 10$. El resultado sorprendente fue que la teoría reducida dimensionalmente muestra una simetría más grande de lo esperado, asociada a las álgebras de Lie E_{11-d} [15]. En particular, en $d = 2$ se obtiene el álgebra E_9 , que resulta ser de un álgebra afín, que como tal es de dimensión infinita. Existen evidencias de que esta cadena de simetrías debería permanecer intacta hasta $d = 1$ y $d = 0$ [32], en cuyo caso se obtendrían las álgebras de dimensión infinita E_{10} y E_{11} .

I. Cuestiones abiertas

Ligadas a estas dos clases de simetrías de dimensión infinita, las internas y las externas, existen problemas abiertos que son el marco en el que se desarrolla el trabajo de esta tesis. Los problemas que presenta la primera cuestión son más bien de naturaleza conceptual, ubicados dentro de la fundamentación de las teorías de gravedad; en el segundo caso, los problemas son principalmente técnicos.

I.1. Simetrías ocultas manifiestas

Comencemos por el tema de las simetrías inesperadas. El término 'inesperadas' ya refiere a la pregunta que se intenta responder. Si T es la teoría de gravedad en cuestión y T_d la versión reducida dimensionalmente, la pregunta natural es si la presencia de las simetrías infinito dimensionales en T_d asociada a un álgebra de Lie \mathfrak{g} es *es consecuencia de la presencia de una simetría asociada a \mathfrak{g} en la teoría T* , que el proceso de reducción dimensional la puso de manifiesto. En tal caso, la simetría asociada a \mathfrak{g} estaría *oculta* en T , existiendo la posibilidad de que una re-escritura de T la ponga de manifiesto.

Esta pregunta es bastante amplia pero ha sido formulada con más precisión en el caso particular de SUGRA D=11. Más aún, se ha mostrado que en un régimen particular el lagrangiano de esta teoría puede efectivamente ser re-escrito como lo que se denomina un *modelo cociente* o también *modelo sigma no-lineal*) asociado al álgebra de Lie E_{10} , 'truncado' en una forma que veremos más adelante. Los modelos cocientes a los que nos referimos son lagrangianos que reflejan *por construcción* una simetría global ante un grupo

de Lie G y una simetría local ante un subgrupo de este K , ambos grupos correspondientes a álgebras de Lie de dimensión finita o infinita. A fin de tratar el caso de dimensión infinita, se introduce la idea de truncación a la que nos hemos referido. Esta reescritura del lagrangiano de SUGRA D=11 en un cierto régimen ha llevado a la conjetura de que la teoría completa se podría escribir como un modelo cociente asociado a E_{10} (ahora sin ninguna aproximación). De probarse esta conjetura, estaríamos ante un ejemplo de como una simetría oculta infinito-dimensional se puede poner de manifiesto. Esta es una cuestión abierta y en la que aún no se ha hecho mucho progreso.

I.2. Covariancia general y principio de Mach

Con respecto a la invariancia ante diffeomorfismo, desde la gestación de RG se ha generado una larga discusión sobre la manera en que esta invariancia debe entenderse. Esta discusión surgió en parte por el *questionamiento al contenido físico del principio de covariancia general*[45] (sinónimo de invariancia ante diffeomorfismos en un comienzo) y en parte por el fracaso en la implementación de otra manera de entender la simetría, inspirada en E. Mach. , que ha dado lugar al llamado '*principio de Mach*'[8]. Estas dos cuestiones son temas recurrentes cuando se encara un problema de fundamentación de las teorías de gravedad.

La respuesta formal al cuestionamiento del contenido físico del principio de covariancia general vino de J.L.Anderson [4, 3], quién utilizó la distinción entre objeto absoluto y objeto dinámico a fin de mostrar que la covariancia general en la formulación tensorial de RG sí tiene un contenido físico, puesto que esta se logra sin la introducción de entidades sin dinámica, a diferencia de lo que ocurre cuando se reescribe de manera covariante las ecuaciones en el marco de la teoría de la relatividad especial.

Así, de acuerdo a este punto de vista, lo que ha logrado RG es incrementar las simetrías globales de Poincaré (correspondientes a la teoría de relatividad especial) mediante la promoción de la métrica a objeto dinámico, perdiendo esta su carácter de objeto absoluto. Es importante señalar que esta forma de entender el incremento de una simetría se halla también en la base del procedimiento usual para la gestación de una invariancia local de gauge ordinarias, el cual fue expuesto formalmente por Utiyama [48] y al que nos referiremos como *procedimiento de Utiyama*.

Esta respuesta, como veremos, simultáneamente arrojó luz sobre la razón por la cual RG no logró implementar las ideas de Mach. Como mostraremos

más adelante, la manera Andersoniana de entender la invariancia ante difeomorfismo es fundamentalmente diferente de la manera Machiana de entender la misma simetría. Visto en retrospectiva, podemos decir que se ha llamado “principio de Mach’ a un conjunto de condiciones extras que se han intentado aplicar a RG a fin de que esta contuviese las ideas Machianas que la motivaron. Aunque Einstein no le ha dado un significado muy preciso, el principio de Mach se puede sintetizar en la idea de que la métrica debería ser ‘determinada’ por la distribución de materia.

Desde ya que un conjunto de ecuaciones diferenciales para la métrica, que involucre a las distintas formas de materia, esta lejos de realizar ese principio, pues estas le dejan grados de libertad a la métrica. Es por ello que Einstein exploró la posibilidad de que bajo ciertas condiciones extras (condiciones de contorno, limitación las formas de materia) ese grado de libertad extra sea eliminado. A pesar de la renuncia de Einstein a buscar satisfacer tal principio de Mach, distintos autores han continuado el intento, buscando condiciones extras bajo las cuales RG resulte una teoría Machiana o buscando teorías alternativas que lo satisfagan. Debemos señalar que en esta búsqueda, no hubo un consenso en lo que significo un tal principio de Mach; este término más bien involucra una familia de principios (quizá tantas como autores) que poseen en común la idea inicial de Einstein que la métrica debería ser ‘determinada’ (en un sentido diferente para cada autor) por la distribución de materia, donde determinación y distribución de materia adoptó un significado diferente para cada autor (véase [8] para un raconto de los distintas propuestas)¹

En síntesis: RG fue fuertemente motivada por una manera de entender la simetría ante difeomorfismos que es diferente a la usual (la Andersoniana) y que justifica el nombre “relatividad general”. El interés por esta otra forma ‘Machiana’ de entender la simetría ha persistido a pesar de las dificultades para su implementación pero los intentos en expresarlas no han logrado darle una forma precisa. Una caracterización formal de lo que sería este procedimiento Machiano es una cuestión pendiente, lo cual sería una contribución importante a la comprensión de los fundamentos de las teorías de gravedad.

¹Poco importa en esta cuestión, el hecho de que E.Mach estuvo lejos de expresar cualquiera de las ideas englobadas bajo el nombre principio de Mach

II. Problemas específicos a tratar

Hemos presentado entonces las dos cuestiones abiertas que enmarcan esta tesis. Pasemos entonces a mencionar cuales son los aportes y objetivos más específicos que consideraremos aquí.

II.1. Soluciones cosmológicas y subálgebras de E_{10}

Con respecto a la conjetura sobre E_{10} en SUGRA D=11, en el capítulo 3 reproducimos nuestro trabajo desarrollado en [27], extendido en [28], en donde hemos utilizado el “diccionario” que correlaciona ambos lados de la conjetura para aplicarlo a un conjunto especial de soluciones de SUGRA D=11 halladas en la literatura [21]. Este grupo de soluciones cosmológicas, en el que los campos solo dependen del tiempo, ha sido clasificado en base a la cantidad de componentes no-nulas de uno de los campos de SUGRA D=11 (3-forma), las cuales fueron descritas concisamente mediante unos diagramas denominados “configuraciones geométricas”.

Básicamente, en el trabajo discutido en [27] lo que hemos hallado es que a cada diagrama de configuración le corresponde, del lado del modelo cociente, un tipo muy particular de subálgebra de E_{10} denominadas *subálgebras regulares*. Esta correspondencia se traduce en forma muy simple y elegante cuando se observan los *diagramas de Dynkin* de estas subálgebras (diagramas que codifican la información de un álgebra de Lie). En estos términos, la correspondencia hallada se traduce en una curiosa dualidad entre los diagramas de configuración y los diagramas de Dynkin.

Este catálogo de diagramas de Dynkin corresponde a subálgebras de E_{10} de distintas características: subálgebras de dimensión finita e infinita. Este resultado permitió hallar otras subálgebras de Lie infinito-dimensionales que fueron analizadas en [28].

II.2. Alternativa al procedimiento de Utiyama, modelos relacionales y gravedad como teoría de gauge

Respecto a la segunda cuestión, hemos considerado que la discusión en torno a la cuestión de Mach no ha incorporado el progreso hecho en la formalización de las teorías de gravitación, en particular en lo que toca a sus simetrías. Es por eso que hemos dirigido nuestra atención a una cuestión vinculada a la fundamentación de las teorías de gravitación que es el de *la*

formulación de las teorías de gravitación como teorías de gauge en el sentido usual. Las ideas de Andersson sobre la estrategia para incrementar un grupo global de simetrías se hallan claramente plasmadas en el procedimiento de Utiyama, que en el caso de las teorías de gauge ordinarias, consiste en promover a objeto dinámico al campo de gauge, el cual se halla implícitamente como objeto absoluto en la teoría que solo presenta invariancia global. En vista de esto, hemos considerado que una mirada al progreso hecho en la dirección de ver a las teorías de gravedad en un lenguaje cercano a las teorías de gauge arrojaría luz al problema de formular un procedimiento 'Machiano', que se contrapondría al procedimiento de Utiyama.

El primer obstáculo (y el principal) al que nos enfrentamos es el de la diversidad de significados que el término 'teoría de gauge' adoptó para diversos autores, en el caso de la descripción de las teorías de gravedad. Desde del celebre trabajo de Utiyama [48] en el '55 y el de Kibble [35], años después, se han hecho distintas propuestas, principalmente en los 70 y '80, para formular las teorías de gravedad en forma más o menos cercana a la de las teorías de Yang-Mills [26, 42, 30, 46, 25]. Así, la simetría externa infinito-dimensional de las teorías de gravitación es pensada como una consecuencia de una *simetría interna de dimensión finita*.

El producto final (depurado) de esta investigación bibliografica se encuentra en el capítulo 4, donde se expone el punto de vista más adecuado para nuestro objetivo, el cual tiene la virtud de situar la diferencia entre las teorías de Yang-Mills ordinarias y la teorías de gravedad en el proceso denominado 'soldadura' que será explicado en detalle.

La siguiente idea clave para la cuestión de la fundamentación de las teorías de gravedad fue la de considerar algún ejemplo en que las ideas de Mach se hallan implementado y que tenga algún contacto con las teorías de gauge. Ambas condiciones se dan en el caso de los modelos relacionales de Barbour [10], [2, 1, 7]. Este modelos surgen ante el intento de ampliar la simetría rígida ante el grupo de Galileo de la mecánica Newtoniana, proponiendo una modificación a las ecuaciones dinámicas en donde solo entre en juego la diferencia de aceleraciones entre las mismas y no la aceleración respecto a un grupo de sistemas que sean elegidos arbitrariamente como preferenciales (los sistemas inerciales). En esta construcción, ningún grado de libertad nuevo se introduce. En particular, en estas mecánicas se materializa naturalmente la abolición de una rotación absoluta, planteada en el celebre ejemplo puesto por E. Mach.

Hecha la observación de que los modelos relacionales consiguen localizar

en el tiempo una invariancia global, hemos considerado el problema de como extender este proceso de localización (diferente al de Utiyama) para cubrir a las coordenadas del espacio-tiempo y entonces aplicarlo a una teoría con invariancia global ante un grupo G . El caso más simple por el que comenzamos es aquel en el que el grupo G es $U(1)$. Si bien este caso es demasiado simple, sirve como modelo de juguete para entender como sería la extensión al caso general de un grupo no-abeliano. De este análisis, obtenemos lo que hemos denominado condiciones de reducción débil, que aplicadas al caso de una teoría de gauge estándar con invariancia $U(1)$ convierten a este en una versión 'Machiana' de la misma.

Estas últimas ideas se encuentran en un trabajo en preparación [38], que es discutido en el capítulo final (vease también nuestras notas [39] para una introducción preliminar a la relación entre principio de Mach, principio general de relatividad y covariancia general). El salto importante y no trivial es el de la extensión al caso no-abeliano y luego, utilizando lo visto en el capítulo 4, a las teorías de gravedad como una clase de teorías de gauge con soldadura. Esto completaría el objetivo que es el de formular un procedimiento alternativo al de Utiyama, que siga la lógica Machiana que no se satisfizo en RG, en el que una estructura absoluta (como lo es el espacio-tiempo de la relatividad especial) sea eliminada sin que medie la introducción de un grado de libertad nuevo (como lo es la métrica dinámica de las teorías de gravedad).

III. Herramientas matemáticas necesarias

Existe una noción matemática que será utilizada en común en las dos cuestiones de esta tesis y es la de *realización no-lineal* de un grupo a través de uno de sus subgrupos [14, 13]. Esta ha demostrado ser muy adecuada para el fenómeno de ruptura espontánea de simetría y es utilizada tanto en la descripción de la gravedad como teoría de gauge como en la descripción de los modelos cocientes.

Consideremos ahora las necesidades específicas para cada una de las cuestiones de esta tesis. En el caso de la descripción de la gravedad como teoría de gauge es fundamental la noción de *fibrados*, la cual ha sido muy fértil en el estudio de las teorías de gauge ordinarias, tanto para problemas globales y locales. Este lenguaje está lejos de ser una mera sofisticación que oscurece la discusión, aunque es cierto que las teorías de gauge ordinarias pueden en-

tenderse razonablemente sin la necesidad de este formalismo (en general, el lenguaje de fibrados no es utilizado en las exposiciones tradicionales de las teorías de gauge). El punto es que en el caso de la descripción de la gravedad en forma cercana a las teorías de gauge el formalismo de fibrados resulta casi indispensable. Básicamente, la importancia de este lenguaje reside en que el campo de gauge es descrito como una conexión (que permite hablar de transporte paralelo) lo cual establece un terreno común para la descripción de la conexión afín de la geometría Riemanniana que aparece en las teorías de gravitación.

En cuanto a la cuestión de las simetrías internas infinito dimensionales, resulta fundamental utilizar la noción de álgebras de Kac-Moody que hemos mencionado ya, en particular la de álgebras *afines* e y *Lorentzianas*, que corresponde a aquellas álgebras de Lie de dimensión infinita de interés para la conjetura mencionada. La descripción de estas álgebras se hace en los mismos términos que han resultado útiles para las álgebras de Lie finitas clásicas, por lo que utilizaremos frecuentemente nociones como la de *matriz de Cartan*, *sistemas de raíces*, *diagramas de Dynkin*.

IV. Organización de la tesis

La tesis esta organizada en dos grandes partes: los capítulos 1 y 2, que contienen básicamente las nociones matemáticas que hemos mencionado, y los capítulos 3, 4 y 5 donde estas nociones son utilizadas.

En el capítulo 1 se provee la descripción de las simetrías de gauge en términos de conexiones en fibrados. El capítulo se halla ilustrado con ejemplos relevantes para la posterior aplicación a las teorías de gravedad.

En el capítulo 2, cuya mayor extensión obedece a la cantidad de definiciones que aparecen, continúa con una descripción de los modelos cocientes, empezando por el caso finito dimensional para luego proseguir con el caso relevante que es el correspondiente a las álgebras de dimensión infinita, en particular, E_{10} . Las nociones comunes a álgebras de Lie simples finitas así como la definición sintética de las álgebras de KacMoody (y de la noción de subálgebras regulares) se hallan en un apéndice al final del capítulo. Adicionalmente, el apéndice contiene algunos cálculos tediosos que se han omitido en el cuerpo central del capítulo.

El capítulo 3 contiene el trabajo [27] realizado por el autor que ya hemos mencionado . A fin de proveer el contexto, el capítulo comienza con una

brevísima descripción de la conjetura sobre E_{10} , poniendo el acento en el régimen en el que esta ha sido probada correcta. En este se han incluido muchas figuras que muestran lo que se conoce como diagramas de Dynkin (los cuales codifican toda la información de un álgebra de Lie) asociados a distintas soluciones de SUGRA. Estos se han discutido según un orden que facilita la discusión.

Finalmente, en los capítulos 4 y 5, nos abocamos a la cuestión de fundamentación de las teorías de gravitación, la cual, como hemos dicho, comprende dos problemas. El capítulo 4 se presenta el punto de vista que hemos considerado más adecuado para la descripción de la gravedad como teoría de gauge. Aquí se introduce la noción fundamental de *fibrado con soldadura* que destaca la particularidad de la gravitación frente a las teorías de gauge usuales. Finalmente en el capítulo 5 introducimos los modelos relacionales de Barbour y pasamos a enunciar el procedimiento alternativo al que nos hemos referido, finalizando el capítulo con una alusión a la vinculación con el principio de Mach en teorías de gravitación.

El trabajo de la tesis finaliza con un breve resumen de lo que se ha hecho y de las cuestiones en las que se continuará trabajando.

Capítulo 1

Descripción Geométrica de las Simetrías de Gauge

La noción de espacios fibrados ha sido de gran utilidad en la física, principalmente en las teorías de gauge usuales (ver [20]) y en el fenómeno de ruptura espontánea de simetrías de gauge [44]. Usualmente, esta noción es invocada cuando se debe tratar con cuestiones topológicas no triviales en las teorías de gauge. Sin embargo, como ha señalado A. Trautman en los '70 [47], la noción de fibrados es adecuada también para tratar cuestiones locales pues permiten expresar mejor la idea de un principio de relatividad o indistinguibilidad entre distintas elecciones de sistemas de referencia. Esta última es la razón por la que en este trabajo haremos uso frecuente de esta noción, al tratar luego las teorías de gravitación. Debido a ello, no pondremos mucho énfasis en aquellos ejemplos celebres donde aparecen problemas globales; la elección de los ejemplos que se han elegido está motivada por su relevancia para los problemas locales en la formulación de las teorías de gravedad.

1. Nociones elementales de fibrados y conexiones

1.1. Definición de espacio fibrado

La noción de espacio fibrado es una *generalización de la noción de espacio producto* $M \times F$, siendo M y F dos espacios dados. La distinción respecto al espacio producto se halla en que: a) el espacio fibrado es *isomorfo* (*pero no*

idéntico) al espacio producto $M \times F$ b) este isomorfismo es en general local. Para definir el espacio fibrado necesitamos de los siguientes elementos:

1. Un espacio E llamado espacio fibrado
2. Un espacio M llamado espacio base, el cual es una variedad diferenciable (y como tal es cubierto por un conjunto de abiertos U_i $i \in I$ (siendo I un conjunto de índices)
3. Un espacio F llamado *fibra estandar*.
4. Un grupo de Lie G que actúa a derecha sobre el espacio F
5. Un mapa sobreyectivo llamado proyección $\pi : E \rightarrow M$, tal que , para p en M , $\pi^{-1}(p) \equiv F_p$ es isomorfo a F . F_p es denominado la fibra en p .
6. Una familia de homeomorfismos ϕ_i asociados a cada U_i tal que $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$, tales que para cada $x \in U_i \cap U_j$

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} \equiv \psi_{ij} \in G$$

Un ejemplo de espacio fibrado es el espacio tangente TM a una variedad M de dimensión d , el cual es la unión de espacios tangentes $T_x M$ en cada punto x de la variedad. En este caso, la fibra standar F es R^d y el grupo de estructura es el grupo general lineal $GL(d, R)$, el grupo de matrices de $d \times d$, inversibles, de coeficientes reales. La fibra en x , $T_x M$ es el conjunto de todos los vectores tangentes en x , conjunto que es isomorfo (pero no naturalmente) a R^d . Este isomorfismo se establece eligiendo una base $\{\mathbf{e}_i\}$ ($i = 1, \dots, d$) en $T_x M$ y expresando cada elemento v de $T_x M$ como la combinación lineal $\sum_{i=1}^d a_i \mathbf{e}_i$. Con esta elección, el isomorfismo consiste en asignar a v la n-upla $(a_1, \dots, a_d) \in R^d$, asignación que no es única porque depende de la base elegida $\{\mathbf{e}_i\}$.

1.2. Diferencia entre ser trivial y trivializable

Una cuestión fundamental que queremos enfatizar es que aún en el caso en que el espacio base puede ser cubierto con un único abierto y entonces el homeomorfismo mencionado en **6** vale globalmente, el espacio fibrado E aún presenta un rasgo distintivo al espacio producto $M \times F$. Como establece

el ítem 5 de la definición, la fibra $F_p = \pi^{-1}(p)$ en un punto p de M es isomorfo a F . El punto es que existen múltiples isomorfismos entre F y F_p , tantos como elementos del grupo G ; utilizando la terminología más usual, este isomorfismo no es natural o canónico. Esto impide identificar F_p con F .

Es por eso que, aunque el espacio base sea trivial (es decir, admita un carta compuesta de un solo abierto) la noción de fibrado aún resulta útil para plantear la noción de simetría en las teorías de gauge que consideraremos en este trabajo. La no-naturalidad del isomorfismo entre F y F_p es la noción adecuada para expresar un principio de relatividad o indistinguibilidad asociada a diferentes elecciones de un representante en cada fibra.

El caso en que el espacio fibrado no es trivializable globalmente es el que ha despertado más interés en la literatura física al tratar problemas globales en las teorías de gauge. Debido a que este aspecto no es el que nos interesa especialmente, no pondremos mucho énfasis a lo largo de nuestra exposición en las cuestiones globales no triviales. Podemos asumir de ahora en más, a menos que se indique lo contrario, que estamos siempre en el caso trivializable.

1.3. Fibrados principales y asociados

Se dice que un fibrado P es un fibrado principal si la fibra F es isomorfa al grupo de estructura G , en cuyo caso se denota al fibrado correspondiente como $P(M, G)$.

Un ejemplo relevante de fibrado principal es el *fibrado de bases del espacio tangente* denominado LM . Los elementos de la fibra en un punto x son todas las bases $\{\mathbf{e}_i\}$ posibles definidas en el espacio tangente $T_x M$, las cuales se hallan relacionadas entre sí por una matriz inversible del grupo general lineal $GL(n, R)$ siendo n la dimensión de M . Se demuestra fácilmente que el conjunto de bases $\{\mathbf{e}_i\}$ es isomorfo al grupo $GL(n, R)$ (aunque este isomorfismo no es natural).

En un fibrado principal se introduce la noción de *sección* que (dejando de lado la cuestión de localidad) se define como un mapa $\sigma : M \rightarrow P$ tal que $\pi(\sigma(x)) = x$. En un fibrado general este tipo de mapa solo puede definirse para cada abierto U_i y es denotado por tanto con σ_i . Si el fibrado admite una sección definida para todo M entonces el fibrado es trivializable. En nuestro caso, que estamos interesados en las cuestiones locales, el que *el fibrado sea trivializable no hace que el fibrado en cuestión pierda interés* por lo que no pondremos énfasis en las obstrucciones para definir una sección

globalmente y omitiremos el subíndice i referido al abierto U_i .

Otra clase importante de fibrados son aquellos construidos a partir de un fibrado principal P y un espacio F sobre el cual G actúa. Estos son los denominados *fibrados asociados* y serán el lugar natural para definir los llamados “campos de materia”.

La definición de fibrado asociado requiere la introducción de un espacio F sobre el cual el grupo G actúa a izquierda. Denotaremos la acción de g en $\xi \in F$ simplemente como $g\xi^1$

Dado un fibrado principal $P = P(M, G)$ se define el espacio $(E \equiv P \times F)/G$, donde la acción de g en G sobre el par $[u, \xi] \in P \times F$ (con u en P y ξ en F) es definida como sigue:

$$g[u, \xi] = [ug, g^{-1}\xi] \quad (1.1)$$

En otros términos, los elementos de E son clases de equivalencia $[u, \xi]$ ante la acción de G definida por 1.1. Es útil introducir el mapa $\delta : P \times F \rightarrow E$ definido como:

$$\delta(u, \xi) \equiv [u, \xi] \quad (1.2)$$

Como es usual, denotaremos con δ_u a la aplicación $F \rightarrow E$ definida por $\delta_u(\xi) \equiv [u, \xi]$.

Se puede demostrar que el espacio E así definido es un fibrado, el cual se denomina fibrado asociado, con espacio base M , fibra F , grupo de estructura G , donde la proyección correspondiente, denotada como π_E , es definida como $\pi_E([u, \xi]) = \pi(u)$.

Un ejemplo relevante de fibrado asociado es justamente el espacio tangente TM (al que ya hemos referido como ejemplo de fibrados), cuya fibra $T_x M$ es el conjunto de todos los vectores tangentes en el punto x . Se puede demostrar que este es el fibrado asociado al LM utilizando la fibra R^n . Es decir, $TM = (LM \times R^n)/GL(n, R)$.

Analógicamente al fibrado principal, una sección $\hat{\phi}$ en E (un campo) es un mapa $\hat{\Phi} : M \rightarrow E$, que conmuta con la proyección π_E . Una noción relacionada es la de *mapa equivariante* $\varphi : P \rightarrow F$ satisfaciendo la condición:

¹La notación más habitual llevaría a denotar la acción de g sobre F como $\rho(g)\xi$. El caso en que F sea un espacio vectorial, $\rho(g)$ se refiere a una matriz que realiza una transformación lineal. Hemos decidido evitar recargar la notación de esta forma, utilizando, con alguna excepción, simplemente $g\xi$

$$\varphi(ua) = \rho(a^{-1})\varphi(u) \quad (1.3)$$

para a en G . A esta condición se la denomina *equivariancia*. La importancia de esta noción reside en que *existe una biyección entre secciones $\hat{\varphi}$ en el fibrado asociado y mapas equivariantes φ* , dada por:

$$\hat{\varphi}(x) = [u, \varphi(u)]_G \quad (1.4)$$

estando u en $\pi^{-1}(x)$

La condición (1.3) asegura que la definición (1.4) es consistente, es decir, no depende del representante u elegido en la fibra $\pi^{-1}(x)$.

Ejemplo 1.1. $(P \times G/H)/G$: Un ejemplo relevante de fibrado asociado es aquel en el que la fibra es el espacio cociente o espacio homogéneo $F \equiv G/H$, siendo H un subgrupo de G . En tal caso, la acción de G sobre F es la multiplicación a izquierda. Es decir, $\rho(g)\xi = g\xi$. Tal espacio posee un punto privilegiado \mathcal{O} que denominaremos el origen definido como aquel invariante ante la acción de H . Dicho en otros términos, \mathcal{O} tiene como grupo de isotropía al subgrupo H . Volveremos más adelante a este caso. Se puede ver fácilmente que este fibrado asociado es isomorfo al fibrado principal P/H , donde la acción de H en el espacio base es la identidad.

Será útil más adelante la expresión de una sección arbitraria $\hat{\varphi}$ en términos de una sección σ en P . Definiendo $\lambda(x) \equiv \varphi(\sigma(x))$, de acuerdo a (1.4), obtenemos la siguiente expresión:

$$\hat{\varphi}(x) = [\sigma(x), \lambda(x)]_G \quad (1.5)$$

1.4. Geometría diferencial en un fibrado principal

Puesto que el fibrado principal P es una variedad diferenciable, puede hablarse de espacio tangente T_uP en un elemento u de P y aplicarse las nociones usuales de geometría diferencial.

La acción derecha de g en P induce naturalmente una acción g_* en los vectores tangentes. A fin de no recargar la notación innecesariamente, denotaremos a la acción de g sobre un vector X_u en u simplemente como

$X_u g$. Si el vector X_u está asociado a una curva $\gamma(t)$ (la cual pasa por u en $t = 0$) el vector $X_u g \equiv Y_u$ es definido como el tangente a la curva $\gamma(t) g$ (que pasa por $u g$ en $t = 0$)

Una clase particular de vectores son aquellos tangentes a la fibra $\pi^{-1}(x)$ en un punto x de M . Al espacio tangente a la fibra en un punto u arbitrario lo denotaremos como Ver_u ('Ver' refiere a 'vertical', aludiendo a la representación usual de una fibra como una línea vertical)

Queremos hallar una base para Ver_u . Para ello, consideremos las curvas que viven en la fibra. Puesto que todo u en $\pi^{-1}(x)$ puede obtenerse a partir de un dado u_0 en $\pi^{-1}(x)$ utilizando la acción a derecha del grupo G , i.e, $u = u_0 g$ (con g en G), toda curva $s(t)$ en $\pi^{-1}(x)$ que pase por u_0 puede definirse como $s(t) = u_0 g(t)$.

El vector tangente en u_0 asociado a la curva $s(t)$ se define como es usual como el operador diferencial X_{u_0} definido por su acción sobre una función $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$X_{u_0}(f) = \left. \frac{d f(u_0 g(t))}{dt} \right|_{t=0} \quad (1.6)$$

Como es sabido, para definir el vector X_{u_0} basta con dar la dependencia de $g(t)$ sólo a primer orden en el parámetro t . Por lo tanto, no perdemos generalidad si nos restringimos a las curvas dadas por $g(t) = \exp(at)$ siendo a un elemento del álgebra de Lie \mathfrak{g} de G . Entonces, el operador diferencial X_{u_0} puede escribirse simbólicamente como $u_0 a$, entendiendo que su acción sobre una función f es definida como:

$$u_0 a(f) = \left. \frac{d f(u_0 \exp(at))}{dt} \right|_{t=0} \quad (1.7)$$

Lo que hemos hecho es establecer un isomorfismo entre un elemento a del álgebra de Lie \mathfrak{g} y un vector X_u . A fin de explicitar ese isomorfismo, a cada vector vertical en u asociado a un elemento a lo denotaremos con a^\sharp . Este se denomina el *vector fundamental* asociado a un elemento del álgebra de Lie.

Hasta aquí hemos considerado el espacio tangente vertical Ver_u . El tratamiento del espacio complementario nos llevará a la noción de conexión en la siguiente sección.

1.5. Conexión en un fibrado principal

Hemos introducido previamente la noción de espacio tangente vertical Ver_u en un punto u como el espacio tangente a la fibra en u . La noción de conexión Γ introduce la noción de *espacio horizontal*, que permitirá comparar puntos pertenecientes a distintas fibras sin la necesidad de elegir una sección.

Se define una conexión Γ como una separación unívoca del espacio tangente TP en un espacio vertical, Ver_u y su complemento, un *espacio horizontal* Hor_u en cada $u \in P$ que satisfaga las siguientes condiciones:

1. $T_u P = H_u P \oplus V_u$
2. $H_{ug} = g_*(H_u P)$

La introducción de una conexión induce naturalmente una 1-forma ω en TP con valores en el álgebra de Lie \mathfrak{G} de G . La definición de ω sigue de la comparación de 2 puntos u y u' pertenecientes a una dada curva $\gamma(t)$, ubicados en fibras distintas.

Teniendo la noción de curva horizontal $\gamma^H(t)$ (aquella tal que sus vectores tangentes son horizontales), podemos comparar u' con u de la siguiente manera: consideremos una curva horizontal tal que $\gamma^H(t') = u'$ y $\gamma^H(0) \equiv u^{(t')}$ pertenezca a la misma fibra que u . El conjunto de puntos $\{u^{(t')}\}$ compone una curva que vive en la misma fibra que u . Por lo tanto, podemos medir la proximidad de u' con u a través del elemento $g(t')$ en G tal que $u^{(t')} = u g(t')$.

Esta comparación depende, por supuesto, de la curva $\gamma(t)$ elegida que conecta u' y u . La curva vertical asociada $u g(t')$ define un vector tangente Y_u en u de acuerdo a lo dicho en la sección anterior. Y_u es entonces el vector fundamental asociado al elemento del algebra de Lie $[(g(t'))^{-1} \frac{d g(t')}{dt'}] |_{t'=0}$.

El mapa que hemos descrito, que asigna a una curva γ un elemento del algebra de Lie, es el que define la 1-forma de conexión.

La definición anterior de ω resulta ser equivalente a la siguiente, la cual es más adecuada para el cálculo:

Definición 1. 1-Forma de conexión *Sea un fibrado principal P de grupo de estructura G . Una 1-forma ω en TP con valores en el algebra de Lie \mathfrak{g} del grupo de estructura G , es una 1-forma de conexión sii satisface:*

1. $\omega(a^\#) = a$, con a en \mathfrak{g}
2. $\omega(X_u g) = Adj_{g^{-1}} \omega(X_u)$, para todo g en G

A veces utilizaremos la expresión $g^{-1}\omega(X_u)g$ para $Adj_{g^{-1}}\omega(X_u)$ en **2**.

Lo que hemos hecho fue construir la forma de conexión ω a partir de la separación dada por la conexión Γ . Puede demostrarse que una 1-forma ω que satisfaga las condiciones 1-2 mencionadas arriba, definen una única separación del espacio tangente en una parte horizontal y otra vertical. Esto puede demostrarse por construcción: dado un vector X_u , podemos definir la componente horizontal $Hor(X_u)$ de la siguiente manera:

$$Hor(X_u) = X_u - u\omega(X_u) \quad (1.8)$$

siendo la parte vertical $u\omega(X_u)$. Puede verse que esta descomposición satisface la definición de horizontalidad que hemos dado.

1.6. “Pullback” de una conexión: potencial de gauge

Para cada sección σ , la 1-forma ω en TP define una 1-forma \mathcal{A}^σ en T_xM denominada *potencial de gauge*, dada por:

$$\mathcal{A}^\sigma \equiv \sigma^*\omega \quad (1.9)$$

Por definición de “pullback”, la acción de \mathcal{A} en un vector v en T_xM es:

$$\mathcal{A}(v) = \omega(\sigma^*(v)) \quad (1.10)$$

donde $\sigma^*(v)$ es el “pushforward” del vector v en el espacio tangente a la sección.

A fin de hallar una relación explícita entre \mathcal{A} y ω , notemos que $\mathcal{A} \circ \pi_*$ coincide con la restricción de ω al espacio tangente a la sección. Por lo tanto, necesitamos hallar la relación entre un vector X_u arbitrario y el *vector inducido* X^σ en la sección definido como $X^\sigma \equiv \sigma_* \pi^* X_u$

Consideremos un vector X_u en u dado por una curva $\gamma(t)$ que pasa por u , con $\gamma : [0, 1] \rightarrow P$, tal que $\gamma(0) = u$.

Como hemos visto en la sección anterior, por cada sección existe una coordinatización preferencial asociada $\phi : P \rightarrow G \times M$ tal que $\phi(\sigma(x)) = (e, x)$. De modo que podemos asociar a cada punto de la curva γ un elemento del grupo G a través de $\phi(\gamma(t))$.

Consideremos ahora la curva $\gamma^\sigma(t) \equiv \sigma(\pi(\gamma(t)))$. Esta es la curva proyectada a la sección σ . Ambas curvas están relacionadas por $\gamma(t) = \gamma^\sigma(t)(\phi(\gamma(t)))$. Por lo tanto, la relación entre los vectores X_u y $X_{\sigma(x)}$ correspondientes, definidos en u y $\sigma(x)$ respectivamente, se obtiene por derivación respecto a t :

$$X_u = X_{\sigma(x)}(\phi(u)) + u (\phi(u))^{-1} \frac{d\phi(\gamma(t))}{dt} \Big|_{t=0} \quad (1.11)$$

El primer término corresponde al vector inducido por la acción derecha de $\phi(u)$ sobre el vector $X_{\sigma(x)}$ tangente a la sección. El segundo término corresponde a un vector vertical en u asociado al elemento del álgebra de Lie $(\phi(u))^{-1} \frac{d\phi(\gamma(t))}{dt} \Big|_{t=0}$.

La relación 1.11 puede interpretarse como la descomposición de un vector arbitrario X_u en una parte vertical y otra tangente a la sección inducida $\sigma(x)\phi(u)$.

Aplicando ω a ambos miembros de 1.11, utilizando las propiedades que definen ω , y observando que $\omega(X_{\sigma(x)}) = \mathcal{A} \circ \pi_*(X_u)$ obtenemos:

$$\omega((X_u)) = \text{adj}_{(\phi(u))^{-1}} \mathcal{A} \circ \pi_*(X_u) + [(\phi(u))^{-1}(t) \frac{d\phi(\gamma(t))}{dt}] \Big|_{t=0} \quad (1.12)$$

Puesto que esta igualdad vale para todo vector X_u , obtenemos:

$$\omega = \text{adj}_{(\phi(u))^{-1}} \mathcal{A} \circ \pi_* + \theta \circ \phi_* \quad (1.13)$$

donde θ es la forma de Maure-Cartan.

Esta última expresión muestra que a partir de una 1-forma en TM \mathcal{A} y una sección σ , se puede probar que existe una única 1-forma de conexión ω tal que su pullback por σ sea \mathcal{A} . Esta afirmación es el teorema de reconstrucción, el cual se puede probar por construcción explícita: si \mathcal{A} es una 1-forma en TM con valores en el álgebra de Lie \mathfrak{G} entonces ω definida como en 1.13 es una 1-forma en TP con valores en el álgebra de Lie \mathfrak{g} cumpliendo todas los requerimientos de 1.

Ejemplo 1.2. conexión plana *De particular interés es la conexión plana: Esta puede ser definida de dos maneras alternativas: a) a partir del potencial de gauge o b) a partir de la 1-forma de conexión. Según la primer definición, una conexión es plana si existe una sección σ tal que el potencial de gauge asociado \mathcal{A} es nulo. En tal caso, 1.13 implica que $\omega = \phi^{-1}d\phi$. Esto lleva a la segunda definición: una 1-forma de conexión ω es plana sii esta es el pullback de la 1-forma de Maure-Cartan θ por algun mapa $f : P \rightarrow G$, tal que $f(ug) = f(u)g_0$, i.e., $\omega = f_*\theta$. En particular, el fibrado trivial $M \times G$, cuyos elementos u son de la forma $u = (x, g)$, tiene asociado naturalmente una conexión plana, dada por el mapa $f((x, g)) = g$.*

1.7. Transformación de gauge: descripción pasiva y activa

Consideremos el pullback $\mathcal{A}^{(\sigma')}$ y $\mathcal{A}^{(\sigma)}$ de una forma de conexión ω por dos secciones diferentes σ y σ' , siendo $\sigma'(x) = \sigma(x)g(x)$. La relación entre ambas sigue de 1.13 :

$$\mathcal{A}^{(\sigma')} = g^{-1}\mathcal{A}^{(\sigma)}g + g^{-1}dg = g^{-1}(d + \mathcal{A}^\sigma)g \quad (1.14)$$

La anterior descripción corresponde a la transformación de gauge interpretada en forma *pasiva*: la 1-forma de conexión ω no cambia sino que es expresada en distintas formas a través de distintas secciones.

En la versión activa, *la 1-forma de conexión es transformada*, de manera tal que los potenciales de gauge asociados a una misma sección se relacionan según 1.14. Esta concepción activa de la transformación de gauge a su vez admite dos descripciones alternativas. Una de ellas utiliza explícitamente un cambio de sección como sigue: dada una 1-forma \mathcal{A} en TM y dadas dos secciones $\sigma(x)$ y $\sigma'(x) \equiv \sigma\lambda(x)$, es posible definir unívocamente dos 1-formas de conexión ω y ω' , tales que $\sigma * \omega = \sigma' \omega'$. Decimos que ω' y ω están relacionadas por una transformación de gauge de parámetro $\lambda(x)$.

Existe otra manera equivalente de definir la transformación de gauge en su forma activa que será más adecuada para la descripción de las teorías de gravedad en el próximo capítulo. Esta es la propuesta por Atiyah et al [5]:

Definición 2. Transformación de gauge: Una transformación de gauge en un fibrado principal P es un automorfismo equivariante que induce la identidad en el espacio base

1.8. Derivada covariante de secciones en el asociado

A fin de poder derivar campos o secciones $\hat{\varphi}$ en el fibrado asociado, debe existir un criterio para comparar $\hat{\varphi}(x)$ y $\hat{\varphi}(x')$. Este es el de *transporte paralelo*.

El transporte paralelo es definido como sigue: sea $x(t)$ una curva en M , con $x(t_0) = x_0$. Esta curva admite diferentes curvas $\eta(t)$ en P tales que $\pi(\eta(t)) = x(t)$. Habiendo definido una sección $\hat{\varphi}$, podemos asociar a cada t' el elemento $\hat{\varphi}(x(t')) = [\eta(t'), \varphi(\eta(t'))]$. En particular, podemos elegir $\gamma^{(t')}(t)$ como la única curva horizontal tal que $\pi(\gamma^{(t')}(t)) = x(t)$ y $\gamma^{(t')}(t') = u$ para algún u en $\pi^{-1}(x(t'))$. Definimos el elemento transportado paralelamente $\hat{\varphi}^{(t't)}(x(t))$ a la fibra en $x(t)$ como $\hat{\varphi}^{(t't)}(x(t)) \equiv [\gamma(t), \varphi(\gamma(t))]$. Es decir, $\hat{\varphi}^{(t't)}(x(t))$ es definido como el elemento de la fibra que es constante a lo largo de la curva horizontal $\gamma^{t'}$.

Ahora bien, el conjunto formado por todos los $\hat{\varphi}^{(t't_0)}(x(t_0))$, para $t_0 < t' < 1$ define en la fibra F_{x_0} una curva que pasa por $\hat{\varphi}^{(t_0t_0)}(x(t_0)) = \hat{\varphi}(x(t_0))$. Este vector no depende de la elección de la curva horizontal $\gamma^{t'}$ elegida, sino sólo de $x(t)$. A este vector lo denotamos como $D_v\hat{\varphi}(x_0)$ siendo v el vector tangente a la curva $x(t)$ en x_0 .

La cantidad $D_w\hat{\varphi}(x)$ con w un campo vectorial en M , define entonces una *sección en el fibrado tangente al asociado TE*.

La definición anterior puede reformularse en forma más compacta. Si X_u es el vector levantado en $u \in \pi^{-1}(x_0)$ correspondiente a v , entonces la derivada covariante $D_{X_u}\varphi$ y $D_v\hat{\varphi}$ se definen de la siguiente manera:

$$D_{X_u}\varphi \equiv \varphi_*(Hor(X_u)) \quad (1.15)$$

$$D_v\hat{\varphi}(x) = [u, D\varphi(X_u)] \quad (1.16)$$

Puede obtenerse la expresión usual para $D\varphi(X_u)$ en términos de la 1-forma \mathcal{A} , recordando $Hor(X_u) = X_u - Ver(X_u) = X_u - u\omega(X_u)$ y haciendo:

$$\varphi_*(Hor(X_u)) = d\Phi(X_u) - \varphi_*(u\omega(X_u)) \quad (1.17)$$

El segundo término puede expresarse como $\Phi_*(u\omega(X_u)) = -(\omega(X_u))\varphi(u)$, donde $\omega(X_u)$ debe entenderse como la acción inducida sobre el espacio tangente $T_{\varphi(u)}F$ por el elemento del álgebra de Lie $\omega(X_u)^2$

De manera que:

$$D\varphi(X_u) = d\varphi(X_u) + \omega(X_u)\varphi(u) \quad (1.18)$$

Utilizando una sección σ en P , $\omega(X_u)$ se reducirá a $\mathcal{A}(X)$ de modo que la derivada covariante de la sección φ se expresará como:

$$D_X\hat{\varphi}(x) = [\sigma(x), d\lambda(x) + \mathcal{A}(X)\lambda(x)] \quad (1.19)$$

2. Reducción de un fibrado principal

Bajo ciertas condiciones que precisaremos, un fibrado principal $P = P(M, G)$ de grupo de estructura G y espacio base M contiene un subconjunto Q que es un fibrado principal, teniendo como base al mismo espacio M pero como grupo de estructura a un subgrupo H de G . Al fibrado Q se lo denomina *fibrado reducido*.

La existencia de este fibrado reducido Q queda asegurada en los casos en que el *fibrado asociado* $E = (P \times G/H)/G$ admita una sección \sum global.

La demostración de este se encuentra en la propia construcción de Q que a continuación describiremos.

Esta construcción utiliza el hecho de que el origen \mathcal{O} del espacio F queda invariante ante la acción de H . Introduzcamos una sección $\hat{\Phi}$ en el asociado, definido por el mapa equivariante $\Phi : P \rightarrow G/H$ (es decir, $\hat{\Phi}(x) = [u, \Phi(u)]_G$ para u en P). A este campo se lo denomina *campo de Higgs*.

El campo de Higgs, define canónicamente un fibrado reducido Q , dado por la condición:

$$Q \equiv \{u' \in P / \Phi(u') = \mathcal{O}\} \quad (1.20)$$

Por ser un subconjunto de P , Q hereda la propiedad de ser localmente isomorfo a $M \times G$. Queremos ver que Q es un fibrado con grupo de estructura

²En principio, el grupo G actúa sobre F a través de un representación ρ . Por lo cual deberíamos utilizar $\rho_*(\omega(X_u))$ en lugar de $(\omega(X_u))\varphi(u)$. Al utilizar $(\omega(X_u))\varphi(u)$ estamos siendo consistentes con la omisión de ρ al indicar la acción de G sobre F , tal como hemos aclarado al introducir el fibrado asociado.

H , con proyección igual a la de P restringida. Para ello, veamos que si $u' \in Q$, entonces $u'' = u'h \in Q$, para $\forall h \in H$. Esto sigue de (1.3), puesto que $\Phi(u'') = \Phi(u'h) = \rho(h^{-1})\Phi(u') = \rho(h^{-1})\mathcal{O} = \mathcal{O}$. Entonces, la fibra en $x = \pi(u')$ se puede escribir como $u'H$.

Es útil expresar el campo de Higgs en una sección σ de P : $\Phi(\sigma(x)) \equiv \xi(x)$. $\xi(x)$ parametriza un punto del espacio coset F para cada x . Siendo $\xi(x)$ un punto de F y dado que G actúa transitivamente en F , existirá un elemento $g_{\xi(x)}$ en G tal que:

$$\xi(x) = g_{\xi(x)}\mathcal{O} \quad (1.21)$$

Se desprende de su definición que $g_{\xi(x)}$ queda determinado a menos de la multiplicación a derecha por un elemento de H . Usando (1.5) vemos que $[\sigma(x), \xi(x)]_G = [\sigma(x)g_{\xi(x)}, \mathcal{O}]_G$. De la definición de Q , vemos que $\sigma(x)g_{\xi(x)}$ es una sección en Q . Más aún: para *toda* sección σ' en Q y toda sección σ en P , existe un elemento $g_{\xi(x)}$ satisfaciendo 1.21 tal que $\sigma'(x) = \sigma(x)g_{\xi(x)}$.

2.1. Condición de reductividad débil

En vez de considerar el caso más general para el espacio $F = G/H$, en lo sucesivo nos restringiremos a los casos en los que se satisfacen una condición denominada *reductividad débil*. Este caso será de importancia para la formulación de la gravedad como teoría de Gauge.

La definición de reductividad débil involucra al espacio vectorial \mathfrak{t} , definido por la descomposición del álgebra de Lie \mathfrak{g} en la forma

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{t} \quad (1.22)$$

donde la suma directa \oplus debe entenderse en términos de espacio vectorial y no de álgebras de Lie, dado que \mathfrak{t} no es un álgebra en general. Decimos que el espacio $F = G/H$ es débilmente reductivo si *el subespacio \mathfrak{t} es invariante ante la acción adjunta del grupo H* . Es decir:

$$Ad_H \mathfrak{t} \subset \mathfrak{t} \quad (1.23)$$

La condición (1.23) implica, a nivel del álgebra, que

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{t}] \subset \mathfrak{t} \quad (1.24)$$

De la descomposición 1.22 del álgebra \mathfrak{g} se puede ver fácilmente que existe el siguiente isomorfismo:

$$T_{\mathcal{O}}F \simeq \mathfrak{t} \quad (1.25)$$

Más general aún: en un punto arbitrario $\xi = g_{\xi}\mathcal{O}$ del espacio coset, correspondiente a la traslación del origen \mathcal{O} por un elemento g_{ξ} de G (definido a menos de la multiplicación a derecha de un $h \in H$) vale el siguiente isomorfismo:

$$T_{\xi}F \cong \text{adj}_{g_{\xi}} \mathfrak{t} \quad (1.26)$$

Ejemplo 2.1. $SO(3,1)/SO(3)$: El álgebra del grupo propio de Lorentz $SO(3,1)$ puede realizarse a través de 6 matrices antisimétricas L_{ab} con $L_{ab} = -L_{ba}$ ($a, b = 0, 1, 2, 3$), satisfaciendo las siguientes reglas de conmutación

$$[L_{ab}, L_{cd}] = \eta_{ac}L_{bd} - \eta_{bc}L_{ad} + \eta_{bd}L_{ac} - \eta_{ad}L_{bc} \quad (1.27)$$

Los generadores de la forma L_{ij} con $i, j = 1, 2, 3$ corresponden a rotaciones en el espacio y forman un subálgebra $\mathfrak{h} \equiv \mathfrak{so}(3)$.

En cambio, las matrices del tipo $L_{0j} \equiv K_j$, que generan boost en la dirección j , no forman un álgebra, como puede verse rescribiendo las reglas de conmutación 1.27, en términos de L_{ij} y K_j :

$$[K_j, K_k] = L_{jk}$$

$$[L_{ij}, K_k] = \delta_{jk}K_i - \delta_{ik}K_j \quad (1.28)$$

Se desprende de la segunda regla de conmutación, que el espacio $SO(3,1)/SO(3)$ satisface las condiciones de reductividad débil. En otras palabras, \mathfrak{t} es un espacio invariante ante el grupo $SO(3)$.

2.2. Descomposición de una conexión en el caso de reductividad débil

La descomposición del espacio tangente TP en el subespacio vertical y horizontal dada por la conexión Γ induce unívocamente una correspondiente

descomposición en TQ . Una pregunta natural es cuál es la relación entre la 1-forma de conexión ω en P y la 1-forma ω' en Q . En principio, esperamos que en general ambas sean diferentes puesto que la 1-forma ω adopta valores en el álgebra \mathfrak{g} mientras que una 1-forma en Q debe tomar valores en \mathfrak{h} puesto que es una conexión en Q . De acuerdo a la descomposición del álgebra \mathfrak{g} (1.22), la 1-forma ω puede escribirse unívocamente en la siguiente forma:

$$\omega|_Q = \omega|_{\mathfrak{h}} + \omega|_{\mathfrak{t}} \quad (1.29)$$

El resultado capital obtenido en [37] es que el primer término de 1.29 define una forma de conexión en Q (el subfibrado principal cuyo grupo de estructura es H) mencionado en la Sección 2 y el segundo término es una 1-forma tensorial. El enunciado preciso del teorema es el siguiente:

Teorema I. Descomposición de la conexión: *La restricción $\omega|_Q$ en Q de la 1-forma de conexión ω de P , se descompone en forma unívoca como:*

$$\omega|_Q \equiv \bar{\omega} = \omega' + \theta \quad (1.30)$$

siendo ω' una 1-forma de conexión en Q y θ una 1-forma en Q con valores en \mathfrak{t} , i.e, una aplicación $TQ \rightarrow \mathfrak{t}$ que satisface la condición

$$\pi_*(X_v) = 0 \rightarrow \theta(X_v) = 0 \quad (1.31)$$

$$\theta(X_v h) = \text{adj}_{h^{-1}}\theta(X_v) \quad (1.32)$$

A fin de hallar una forma explícita para $\omega|_Q$, es conveniente trabajar con el pullback de $\omega|_Q$ a través de una sección σ' en Q .

Como hemos visto, para toda sección σ' se puede expresar como $\sigma'(x) = \sigma(x)g_{\xi(x)}$. Ahora bien, $g_{\xi(x)}$ se puede escribir unívocamente como $g_{\xi(x)} = \exp(\varepsilon^a(x)t_a)h_{\xi}$ siendo $\varepsilon^a(x)t_a$ un elemento de \mathfrak{t} escrito como combinación lineal de los generadores t_a , los cuales parametrizan el espacio tangente al espacio coset en torno al origen. De aquí sigue también que $\sigma'(x) \exp(-\varepsilon^a(x)t_a) \equiv q(x)$ es una sección en P que se halla fuera de Q para todo $\varepsilon^a(x) \neq 0$ pues $\Phi(\sigma'(x) \exp(-\varepsilon^a(x)t_a)) = \exp(\varepsilon^a(x)t_a)\Phi(\sigma'(x)) = \exp(\varepsilon^a t_a(x))\mathcal{O} \neq \mathcal{O}$ para $\varepsilon^a(x) \neq 0$.

A fin de hallar el pullback de $\omega' + \theta$ por σ' en términos del pullback $q^*\omega \equiv \vartheta + \Gamma$, (con $\vartheta = \vartheta^a t_a$ y $\Gamma = \Gamma^I h_I$), utilicemos la relación (1.14) especializada en este caso:

$$\sigma'^*\omega \equiv \vartheta' + \Gamma' = e^{-\varepsilon^a(x)t_a}(dx^\mu\partial_\mu + \vartheta^a t_a + \Gamma^I h_I)e^{\varepsilon^a(x)t_a} \quad (1.33)$$

ϑ' y Γ' corresponden a la descomposición de $\sigma'^*\omega$ en términos de t_a y h_I .

El cálculo explícito de Γ' y ϑ' es engorroso en general. Por lo pronto, notemos que en $e^{-\varepsilon^a t_a}(\partial_\mu + \Gamma_\mu^I h_I)e^{\varepsilon^a t_a}$ aparecerán contribuciones en \mathfrak{t} . Por lo tanto, ϑ'^a será en general diferente a ϑ^a . La diferencia entre ambos, debido al carácter no-nulo de $\varepsilon(x)$, será calculada más adelante en el caso particular en que G sea el grupo de Poincaré. Sin embargo, existe una manera formal y compacta de expresar θ en el caso general. Esta involucra la derivada covariante del campo de Higgs.

La derivada covariante para el mapa Φ asociado al campo de Higgs, se obtiene especializando la ecuación (1.18):

$$D\Phi(X_u) = d\Phi(X_u) + \omega(Ver(X_u))\Phi(u) \quad (1.34)$$

$\Phi(u)$ es un punto de F que como tal puede expresarse como $\Phi(u) = g_{\Phi(u)}\mathcal{O}$ quedando $g_{\Phi(u)} \in G$ definido a menos de la multiplicación a derecha de un $h \in H$. $\omega(Ver(X_u))\Phi(u) \in T_{\Phi(u)}F \cong adj_{g_{\Phi(u)}}\mathfrak{t}$, de acuerdo a (1.26). Por tanto:

$$\omega(Ver(X_u))\Phi(u) = adj_{g_{\Phi(u)}^{-1}}(\omega(Ver(X_u)))|_{\mathfrak{t}} \quad (1.35)$$

donde hemos utilizado la identidad $\omega|_{adj_g\mathfrak{t}} = adj_{g^{-1}}\omega|_{\mathfrak{t}}$, para reexpresar el segundo miembro.

Observando la definición de la θ y la expresión de la derivada covariante 1.35, podemos ver que ambas están relacionadas en la forma simple:

$$\theta = D\Phi|_{TQ} \quad (1.36)$$

3. Descripción alternativa en términos de la realización no-lineal

La idea de un fibrado reducido se vincula estrechamente con la de *realización no-lineal* de un grupo G en uno de sus subgrupos H , introducida en [14, 13]. Antes de dar una definición general de esta noción, consideremos el caso en que G es el grupo de Lorentz $SO(3, 1)$ y H es el subgrupo $SO(3)$ de las rotaciones en el espacio.

Introduzcamos la representación vectorial de $SO(3, 1)$, generado por vectores \mathbf{p} temporales, de norma $p^2 \equiv m^2$. Un vector \mathbf{p} genérico puede escribirse en términos de $\mathbf{k} = (m^2, 0, 0, 0)$ como $\mathbf{p} = L_p \mathbf{k}$, donde L_p es el único boost que lleva \mathbf{k} a \mathbf{p} . Si realizamos una transformación de Lorentz arbitraria Λ sobre \mathbf{p} obtenemos:

$$\Lambda \mathbf{p} = \Lambda L_p \mathbf{k} = L_{\Lambda \mathbf{p}} \mathbf{k} \quad (1.37)$$

De aquí se ve que $L_{\Lambda \mathbf{p}}^{-1} \Lambda L_p \mathbf{k} = \mathbf{k}$. Esto significa que la matriz $L_{\Lambda \mathbf{p}}^{-1} \Lambda L_p$ es un elemento del *grupo de isotropía de \mathbf{k}* , i.e., el grupo de transformaciones que dejan a \mathbf{k} invariante. Puesto que \mathbf{k} es de la forma $(m^2, 0, 0, 0)$, $L_{\Lambda \mathbf{p}}^{-1} \Lambda L_p$ debe ser un elemento de $SO(3)$.

Lo que hemos mostrado es que a un elemento del grupo de Lorentz Λ , actuando sobre una representación del mismo \mathbf{p} le corresponde un elemento del subgrupo $SO(3)$ actuando sobre la representación de este último dada por $\mathbf{k} = \mathbf{L}_{\mathbf{p}}^{-1} \mathbf{p}$. Esto puede generalizarse al caso de una representación arbitraria del grupo $SO(3, 1)$ dada por ϕ , en la cual la acción de un elemento Λ se realiza a través de $\rho(\Lambda)$. El análogo de \mathbf{k} es $\phi_{\mathbf{p}} \equiv \rho^{-1}(L_p)\phi$: ante una transformación Λ en $SO(3, 1)$, $\phi_{\mathbf{p}}$ transforma como:

$$\Lambda : \phi_{\mathbf{p}} \rightarrow \phi_{\Lambda \mathbf{p}} = \rho(L_{\Lambda \mathbf{p}}^{-1} \Lambda L_p) \phi_{\mathbf{p}} \quad (1.38)$$

Entonces, en la representación dada por $\phi_{\mathbf{p}}$ el grupo $SO(3, 1)$ actúa a través de la multiplicación por una matriz $\rho(L_{\Lambda \mathbf{p}}^{-1} \Lambda L_p)$ correspondiente a $SO(3)$. Esta es la llamada *representación no-lineal de $SO(3, 1)$ a través de $SO(3)$* . En este contexto, $SO(3)$ es el llamado *grupo pequeño*. El nombre no lineal será justificado más adelante.

Teniendo en mente este ejemplo, consideremos el caso general. Para ello, utilizaremos la descripción del grupo G como un fibrado principal $G(G/H, H)$, de fibra isomorfa a H y espacio base G/H , estando el último parametrizado por las coordenadas ξ

Si definimos una sección σ en el fibrado principal G , todo elemento g en G puede escribirse unívocamente como el siguiente producto:

$$g = \sigma(\xi)h(g) \quad (1.39)$$

donde h es un elemento del subgrupo H . Entonces, para cada elemento g de G existe un único elemento ξ en G/H y un único elemento $(\sigma(\xi))^{-1}g$ en H fijado por la descomposición 1.39.

Puesto que 1.39 vale para todo g , en particular valdrá para g_0g . Multiplicando a izquierda g por un elemento arbitrario g_0 , la factorización 1.39 se convierte en:

$$g_0g = g_0\sigma(\xi)h(g) = \sigma(\xi')h(g_0g) \quad (1.40)$$

donde $\xi' = g_0\xi$. De aquí siguen las siguientes transformaciones :

$$g_0 : \sigma(\xi) \rightarrow \sigma(\xi') = g_0\sigma(\xi)h^{-1}(\xi, g_0) \quad (1.41)$$

$$g_0 : h(g) \rightarrow h(\xi, g_0)h(g) \quad (1.42)$$

Consideremos ahora un espacio Y en el que G tiene una acción y ρ la realización correspondiente. A cada λ en Y puede asignarse un elemento:

$$\lambda_\xi \equiv \rho((\sigma(\xi))^{-1})\lambda \quad (1.43)$$

para todo ξ en G/H . Al conjunto de todos los λ_ξ con λ en Y y ξ en G/H lo denotaremos como \tilde{Y} .

Ante la acción de un elemento g_0 sobre Y , un elemento λ es transformado en $\rho(g_0)\lambda$. En cambio, la familia de elementos correspondientes λ_ξ en \tilde{Y} es transformada en $\lambda_{\xi'} = \rho((\sigma(\xi'))^{-1})\rho(g_0)\lambda$ de acuerdo a la definición, donde ξ' es $g_0\xi$. Multiplicando y dividiendo por $\sigma(\xi)$, obtenemos la siguiente transformación en el espacio \tilde{Y} :

$$\lambda_\xi \rightarrow \rho(h(\xi, g_0))\lambda_\xi \quad (1.44)$$

Ahora bien, con $h(\xi, g_0) = (\sigma(\xi'))^{-1}g_0\sigma(\xi)$, elemento de H , dependiente de ξ , y g_0 . De modo que a la realización ρ en el espacio Y corresponde una realización $\tilde{\rho}$ en el espacio \tilde{Y} definida por:

$$\tilde{\rho}(g_0) \equiv \rho(h(\xi, g_0)) \quad (1.45)$$

con $h(\xi, g_0) = (\sigma(\xi'))^{-1}g_0\sigma(\xi)$. A la realización $\tilde{\rho}$ así definida se la denomina *realización no-lineal de G a través del subgrupo H*

Una elección natural de sección σ es $\sigma(x) = e^{\varepsilon^a(x)t_a}$, donde \mathfrak{t} esta definido por la descomposición del álgebra de Lie 1.22, la cual no requiere ninguna suposición sobre G/H . De su definición, se ve que ε se halla en una correspondencia 1 – 1 con ξ y por lo tanto, $h(\xi)$ puede denotarse alternativamente como $h(\varepsilon)$.

Cuando el espacio G/H cumple las condiciones de reductividad débil, la parametrización exponencial de la sección resulta particularmente útil dado que *la realización no-lineal $\tilde{\rho}(g)$ se reduce a la acción usual si g se halla en H* . Para ver esto, debemos calcular el elemento de H , $h(\xi, g_0) = (\sigma(\xi'))^{-1} g_0 \sigma(\xi)$ en el caso en que $g_0 = h_0$ con h_0 en H . Especializando 1.40 a este caso, obtenemos:

$$h_0 \exp(\varepsilon^a t_a) h(\varepsilon) = h_0 \exp(\varepsilon^a t_a) h_0^{-1} h_0 h(\varepsilon) \quad (1.46)$$

Pero $h_0 \exp(\varepsilon^a T_a) h_0^{-1} = \exp(\varepsilon'^a T_a)$ con ε' una función lineal de ε debido a la condición de reductividad débil; por otro lado, la acción inducida de h_0 en $h(\varepsilon)$ se reduce a la multiplicación a izquierda $h_0 h(\varepsilon)$ y la transformación sobre ε se reduce a una transformación lineal. El nombre “realización no-lineal” resulta claro ahora, considerando la acción inducida de un g_0 general en el parámetro ε :

$$g_0 \exp(\varepsilon^a t_a) = \exp(\varepsilon'^a(\varepsilon, g_0) t_a) h(\varepsilon') \quad (1.47)$$

ε' resulta ser una función no-lineal de ε para un elemento g_0 arbitrario.

3.1. Campos reducidos

La sección $\sigma(x)$ es la clave para la construcción de la realización no-lineal. Cuando en un fibrado principal P introducimos un campo de Higgs $\hat{\Phi}(x) = [\sigma(x), \Phi(\sigma(x))]$, la componente $\Phi(\sigma(x))$ provee una elección privilegiada del punto ξ del espacio cociente dada simplemente por $\xi(x) \equiv \Phi(\sigma(x))$. Esta elección es, por supuesto, dependiente de la sección σ en P . De modo que la realización no lineal formulada de esta forma involucra dos secciones en diferentes fibrados: una sección $\sigma(x)$ en P (que determina la función $\xi(x)$), y la otra en $G = G(G/H, H)$, la cual fija un elemento del grupo G por cada elemento del espacio coset $\xi(x)$ para cada x en M .

La introducción del campo de Higgs permite entonces definir el fibrado reducido Q y el parámetro $\xi(x)$ necesario para la formulación de la realización no-lineal. Veremos a continuación como esto hace posible la definición de campos (secciones) en el fibrado reducido Q a partir de las correspondientes en el fibrado P que lo contiene.

Como hemos visto en secciones anteriores, un campo en E , i.e., sección $\hat{\varphi}$ en el asociado $(P \times Y)/G$ esta dado por el mapa equivariante φ a través de:

$$\hat{\varphi} = [\sigma(x), \lambda^\sigma(x)] \quad (1.48)$$

donde $\lambda^\sigma(x) \equiv \varphi(\sigma(x))$ como hemos dicho anteriormente. Ante un cambio de sección $\sigma(x) \rightarrow \sigma'(x) = \sigma(x)g(x)$, $\lambda^\sigma(x)$ transforma como

$$\lambda^{\sigma'}(x) = \rho(g^{-1}(x))\lambda^\sigma(x) \quad (1.49)$$

A partir de la sección $\hat{\varphi}$ puede definirse una sección en el fibrado asociado $E' \equiv (Q \times Y)/H$ al fibrado reducido Q (en $Q \times Y$ la acción de H es definida como la restricción de G en $P \times Y$). Esta será la *sección reducida* o *campo no-lineal* $\hat{\varphi}_\xi$, definida como:

$$\hat{\varphi}_\xi(x) = [\sigma(x), \lambda_\xi] \quad (1.50)$$

En particular, para el campo de Higgs $\hat{\Phi} = [\sigma(x), \xi(x)]$ con $\xi(x) = \exp \varepsilon(x)^a t_a \mathcal{O}$, el campo reducido $\hat{\Phi}_\xi$ es:

$$\hat{\Phi}_\xi = [\sigma(x), (g_{\xi(x)})^{-1}\xi(x)] = [\sigma(x), \mathcal{O}] \quad (1.51)$$

De modo que el campo de Higgs reducido tiene componentes constantes en una sección en Q

4. Ruptura de simetría y lenguaje covariante

Para finalizar, queremos mostrar cómo se relacionan las nociones anteriores de reducción de un fibrado principal y conexión con la de ruptura espontánea de simetría en las teorías de gauge. Para ello, observemos la diferencia entre un teoría de gauge estándar formulada en un fibrado principal Q' de grupo de estructura H y una teoría de gauge con ruptura espontánea de simetría formulada en el fibrado reducido Q .

En la teoría de gauge estándar formulada en el subfibrado Q , el único objeto dinámico del que se dispone es la conexión ω' , que como tal adopta valores en el álgebra de Lie de H . En cambio, en una teoría de gauge con ruptura espontánea de simetría del grupo G al subgrupo H , contamos con un objeto adicional: θ , el cual aparece en la descomposición 1.33 de la conexión del grupo G restringida a Q .

Es importante enfatizar que tanto la teoría con ruptura espontánea de simetría como la teoría estándar, son invariantes de gauge *sólo ante el subgrupo* H . Lo distintivo en la teoría con ruptura espontánea es la aparición de θ , el cual es un residuo de la conexión ω en P .

Sin embargo, de la covariancia de la ecuación 1.33 ante cambios arbitrarios de sección σ en P , podría concluirse ingenuamente que la teoría con ruptura espontánea de simetría es invariante ante transformaciones de gauge del grupo entero G . Esta conclusión errónea es un caso típico de confusión entre el grupo de covariancia de una ecuación y el grupo de invariancia de la misma [4]. Podemos decir que la covariancia extendida de 1.33 ha sido posible gracias a la introducción del campo $\varepsilon(x)$, que en la literatura física es conocido como *campo de Goldstone*, el cual ‘mide’ la diferencia entre una sección en Q y una sección arbitraria en P . Este campo es un objeto *absoluto, no dinámico*. Como se discute en [4], la necesidad de introducir objetos absolutos es un fenómeno inherente al proceso de extensión del grupo de covariancia más allá del grupo de invariancia de la teoría, que en este caso es el grupo de gauge H .

Capítulo 2

Realización No-Lineal de Símetrias Infinito-Dimensionales

En este capítulo daremos la base matemática necesaria para tratar con una clase de simetrías infinito-dimensionales que, como hemos mencionado en la introducción, se hallan en diversas teorías de gravedad. Estas simetrías, a diferencia de las anteriores, son *simetrías internas* y están dadas por ciertas álgebras de Lie de *infinitos generadores* que forman parte de *álgebras de Kac-Moody*, que repasaremos en la medida de lo necesario.

La aparición de estas simetrías en diversas teorías de gravitación es un fenómeno curioso puesto que son simetrías *inesperadas*, no manifiestas en la construcción, cuyo origen no se encuentra aún entendido. En este capítulo estudiaremos una construcción adecuada para hacer manifiesta este tipo de simetrías, que se utilizará en el capítulo siguiente. Nos referimos a modelos dados por lagrangianos en los que una simetría dada por un grupo de Lie G (finito o infinito dimensional) se realiza no-linealmente a través de uno de sus subgrupos H . Estos son los denominados *modelos cocientes (coset)* (también denominados “modelos sigma-no lineal”). El grupo de Lie G puede ser finito o infinito dimensional. El objetivo final será tratar el caso relevante para el capítulo siguiente que es aquel en el que G corresponde al álgebra de Lie infinito-dimensional E_{10} , puesto que esta ha sido conjeturada como el álgebra correspondiente al grupo de simetrías subyacente a la teoría de supergravedad en $D=11$, tema que será analizado en el próximo capítulo.

Comencemos ahora con generalidades sobre los modelos cociente (coset)

o modelos sigma no-lineal, para luego pasar a la construcción formal.

1. Consideraciones preliminares

1.1. Modelo sigma no lineal

Un modelo sigma no lineal describe un mapa ξ desde un espacio riemanniano X equipado con un métrica γ en otro espacio riemanniano, el “espacio target” M , con métrica g . Sea $x^m (m = 1, \dots, p = \dim X)$ las coordenadas de X y $\xi^\alpha (\alpha = 1, \dots, q = \dim M)$ las coordenadas de M . Entonces, la acción estándar para este modelo sigma no lineal es

$$S = \int_X d^p x \sqrt{\gamma} \gamma^{mn}(x) \partial_m \xi^\alpha(x) \partial_n \xi^\beta(x) g_{\alpha\beta}(\xi(x)) \quad (2.1)$$

Las soluciones a las ecuaciones de movimiento que resultan de esta acción describirán los mapas ξ^α como funciones de x^m .

Un ejemplo familiar, de interés directo para el análisis que sigue, es el caso donde X es unidimensional, parametrizado por la coordenada t . Entonces la acción para el modelo sigma no lineal se reduce a

$$S_{geodesica} = \int dt A \frac{d\xi^\alpha(t)}{dt} \frac{d\xi^\beta(t)}{dt} g_{\alpha\beta}(\xi(t)) \quad (2.2)$$

donde A es $\gamma^{11} \sqrt{\gamma}$ y asegura la invariancia ante reparametrización en la variable t . Extremando respecto a A se obtiene el vínculo

$$\frac{d\xi^\alpha(t)}{dt} \frac{d\xi^\beta(t)}{dt} g_{\alpha\beta}(\xi(t)) = 0 \quad (2.3)$$

asegurando que las soluciones a este modelo son geodésicas nulas en M .

1.2. Espacios simétricos

En lo que sigue, trataremos con modelos sigma en espacios $\mathcal{G}/\mathcal{K}(\mathcal{G})$ donde \mathcal{G} es un grupo de Lie con álgebra de Lie real semi-simple \mathfrak{g} y $\mathcal{K}(\mathcal{G})$ es su subgrupo compacto maximal con álgebra de Lie real \mathfrak{k} . Como los elementos del coset se obtienen cocientando $\mathcal{K}(\mathcal{G})$, este subgrupo se refiere como “grupo

de simetría de gauge local” (ver abajo). Nuestro objetivo es proveer una construcción algebraica de la métrica en el coset y del lagrangiano.

Un punto importante es que, debido a la existencia de la involución de Cartan θ (ver Apéndice 5.9), que todo forma real de un álgebra de Lie posee, y al hecho de que hemos elegido \mathcal{K} como el subgrupo *compacto maximal*, el espacio cociente $\mathcal{G}/\mathcal{K}(\mathcal{G})$ tiene la propiedad de ser un *espacio simétrico*. Veamos a continuación esto.

La involución de Cartan θ induce una descomposición de Cartan de \mathfrak{g} en autoespacios pares e impares, *perteniendo la subálgebra \mathfrak{t} al autoespacio par* :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{p} \quad (2.4)$$

(suma directa de espacios vectoriales), donde

$$\begin{aligned} \mathfrak{t} &= \{x \in \mathfrak{g} \mid \theta(x) = x\} \\ \mathfrak{p} &= \{y \in \mathfrak{g} \mid \theta(y) = -y\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

La ecuación de descomposición es ortogonal, en sentido que \mathfrak{p} es el complemento ortogonal de \mathfrak{t}' con respecto a la forma bilineal invariante $(\cdot \mid \cdot) \equiv B(\cdot, \cdot)$,

$$\mathfrak{p} = \{y \in \mathfrak{g} \mid \forall x \in \mathfrak{t} : (y \mid x) = 0\} \quad (2.6)$$

Las relaciones de conmutación se separan en la forma:

$$[\mathfrak{t}, \mathfrak{t}] \subset \mathfrak{t} \quad [\mathfrak{t}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p} \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{t} \quad (2.7)$$

El subespacio \mathfrak{p} no es una subálgebra. Los elementos de \mathfrak{p} transforman en alguna representación de \mathfrak{t} , la cual depende del álgebra de Lie \mathfrak{g} . Las condiciones $[\mathfrak{t}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$ y $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{t}$ definen al espacio cociente como espacio simétrico.

El espacio cociente $\mathcal{G}/\mathcal{K}(\mathcal{G})$, como ya indicamos en el capítulo anterior, se define como el conjunto de las clases de equivalencia $[g]$ de \mathcal{G} definidas por la relación de equivalencia

$$g \sim g' \quad \text{sii} \quad gg'^{-1} \in \mathcal{K}(\mathcal{G}), \quad y \quad g, g' \in \mathcal{G} \quad (2.8)$$

i.e,

$$[g] = \{kg \mid \forall k \in \mathcal{K}(\mathcal{G})\} \quad (2.9)$$

Como ejemplo para ilustrar la involución de Cartan consideramos el espacio coset $SL(n, \mathbb{R})/SO(n)$. El álgebra de Lie asociada $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ consiste entonces de las matrices reales $n \times n$ de traza nula. En este caso la involución

de Cartan que produce la separación mencionada es simplemente (menos) la matrix traspuesta ordinaria $(\)^T$ sobre los elementos del álgebra de Lie:

$$\mathcal{T} : a \mapsto -a^T \quad \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \quad (2.10)$$

Esto implica que todas las matrices antisimétricas y de traza nula de $n \times n$ pertenecen a $\mathfrak{t} = \mathfrak{so}(n)$, la involución de Cartan θ es el diferencial en la identidad de una involución Θ definida en el grupo mismo, tal que para grupos de Lie reales, θ es nada menos que la inversa de la traspuesta conjugada. Definiendo

$$\mathcal{K}(\mathcal{G}) = \{g \in \mathcal{G} \mid \Theta g = g\} \quad (2.11)$$

luego da en este ejemplo el grupo $\mathcal{K}(\mathcal{G}) = SO(n)$. La descomposición de Cartan de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ entonces separa todos los elementos en matrices simétricas y antisimétricas, i.e., para $a \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ se tiene

$$\begin{aligned} a - a^T &\in \mathfrak{so}(n) \\ a + a^T &\in \mathfrak{p} \end{aligned} \quad (2.12)$$

El grupo \mathcal{G} actúa naturalmente a través de la multiplicación (aquí, derecha) en el espacio cociente $\mathcal{K}(\mathcal{G})$ como

$$[h] \mapsto [hg] \quad (2.13)$$

Esta definición tiene sentido ya que si $h \sim h'$, i.e., $h' = kh$ para algún $k \in \mathcal{K}(\mathcal{G})$, luego $h'g \sim hg$ ya que $h'g = (kh)g = k(hg)$ (las multiplicaciones a izquierda y a derecha conmutan).

2. Modelo sigma no lineal correspondiente a grupos de Lie de dimensión finita: construcción formal

Con el objeto de describir una teoría dinámica en el espacio cociente $\mathcal{K}(\mathcal{G})$ es conveniente introducir como variable dinámica el elemento del grupo $V(x) \in \mathcal{G}$ y construir la acción para $V(x)$ de manera que la relación de equivalencia

$$\forall k(x) \in \mathcal{K}(\mathcal{G}) : V(x) \sim k(x)V(x) \quad (2.14)$$

corresponde a una simetría de gauge. Los grados de libertad físicos (invariantes de gauge) son entonces parametrizados en verdad por puntos del espacio coset. También queremos imponer 2.13 como una simetría rígida. Entonces la acción debería ser invariante ante

$$V(x) \mapsto k(x)V(x)g \quad k(x) \in \mathcal{K}(\mathcal{G}), g \in \mathcal{G} \quad (2.15)$$

Uno podría desarrollar el formalismo sin fijar la simetría de gauge $\mathcal{K}(\mathcal{G})$, o podría en cambio fijar la simetría de gauge eligiendo un representante específico del coset $V(x) \in \mathcal{G}/\mathcal{K}(\mathcal{G})$. Cuando $\mathcal{K}(\mathcal{G})$ es un subgrupo compacto maximal de \mathcal{G} no hay obstrucciones topológicas, y una elección estándar, la cual es siempre disponible, es tomar $V(x)$ como la forma triangular superior como lo permite la descomposición de Iwasawa, que hemos mencionado en el apéndice . Este se llama usualmente el gauge de Borel y será discutido en detalle más adelante. En este caso, una transformación arbitraria local,

$$V(x) \mapsto V(x)' = V(x)g, \quad g \in \mathcal{G} \quad (2.16)$$

destruirá la elección de gauge ya que $V(x)'$ en general no será una forma triangular superior. Entonces, una transformación local $\mathcal{K}(\mathcal{G})$ compensatoria se necesita que reestablezca la elección de gauge original. La transformación local es entonces

$$V(x) \mapsto V(x)'' = k(V(x), g)V(x)g, \quad k(V(x), g) \in \mathcal{K}(\mathcal{G}), g \in \mathcal{G} \quad (2.17)$$

donde $V(x)''$ está nuevamente en el gauge triangular superior. Debido a que ahora $k(V(x), g)$ depende no linealmente de $V(x)$, es que se llama realización no lineal de \mathcal{G} .

Dado el campo $V(x)$ podemos formar la forma de Maurer-Cartan:

$$dV(x)V(x)^{-1} = dx^\mu \partial_\mu V(x)V(x)^{-1} \quad (2.18)$$

Bajo la descomposición de Cartan, este elemento se separa de acuerdo a 2.4,

$$\partial_\mu V(x)V(x)^{-1} = Q_\mu(x) + P_\mu(x) \quad (2.19)$$

donde $Q_\mu(x) \in \mathfrak{t}$ y $P_\mu(x) \in \mathfrak{p}$. Podemos hacer uso de la involución de Cartan para escribir estas explícitamente como proyecciones en autoespacios pares e impares de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Q_\mu(x) &= \frac{1}{2}[\partial_\mu V(x)V(x)^{-1} + \theta(\partial_\mu V(x)V(x)^{-1})] \in \mathfrak{t} \\ P_\mu(x) &= \frac{1}{2}[\partial_\mu V(x)V(x)^{-1} - \theta(\partial_\mu V(x)V(x)^{-1})] \in \mathfrak{p} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Si definimos la *traspuesta generalizada* \mathfrak{T} por

$$()^{\mathfrak{T}} \equiv -\theta() \quad (2.21)$$

luego, $P_\mu(x)$ y $Q_\mu(x)$ corresponden a elementos simétricos y antisimétricos respectivamente,

$$P_\mu(x)^{\mathfrak{T}} = P_\mu(x), \quad Q_\mu(x)^{\mathfrak{T}} = -Q_\mu(x) \quad (2.22)$$

Por supuesto, en el caso especial en que $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ y $\mathfrak{t} = \mathfrak{so}(n)$, la traspuesta generalizada $()^{\mathfrak{T}}$ coincide con la matriz traspuesta ordinaria $()^T$. Las unoformas evaluadas del álgebra de Lie con componentes $\partial_\mu V(x)V(x)^{-1}$, $P_\mu(x)$ y $Q_\mu(x)$ son invariantes ante multiplicaciones rígidas derechas, $V(x) \mapsto V(x)g$.

Siendo un elemento del álgebra de Lie del grupo de gauge, $Q_\mu(x)$ puede interpretarse como una conexión de gauge para la simetría local $\mathcal{K}(\mathcal{G})$. Ante una transformación local $k(x) \in \mathcal{K}(\mathcal{G})$, $Q_\mu(x)$ transforma como

$$\mathcal{K}\mathcal{G} : Q_\mu(x) \mapsto k(x)Q_\mu(x)k(x) + \partial_\mu k(x)k(x)^{-1} \quad (2.23)$$

que es realmente la propiedad de transformación característica de una conexión de gauge. Por otro lado, $P_\mu(x)$ transforma covariantemente,

$$\mathcal{K}\mathcal{G} : P_\mu(x) \mapsto k(x)P_\mu(x)k(x) \quad (2.24)$$

porque el elemento $\partial_\mu k(x)k(x)^{-1}$ es eliminado debido al signo negativo en la construcción de $P_\mu(x)$ en Eq. 2.20.

2.1. Construcción de la acción del modelo sigma: 3 formas alternativas

Usando la forma bilineal $(\cdot | \cdot)$ podemos ahora formar una expresión manifiestamente invariante $\mathcal{K}(\mathcal{G})_{local} \times \mathcal{G}_{rigido}$ simplemente “elevando al cuadrado”, i.e., la acción p -dimensional adquiere la forma (ver 2.1)

$$S_{\mathcal{G}/\mathcal{K}(\mathcal{G})} = \int_X d^p x \sqrt{\gamma} \gamma^{\mu\nu} (P_\mu | p_\nu) \quad (2.25)$$

Podemos escribir esta acción en un número de formas distintas. Primero, notemos que ya que $Q_\mu(x)$ puede interpretarse como uan conexión de gauge

podemos formar una “derivada covariante” $D_\mu(x)$ de una manera estándar como

$$D_\mu(x)V(x) \equiv \partial_\mu V(x) - Q_\mu(x)V(x) \quad (2.26)$$

la cual, en virtud de 2.20 puede ser escrita alternativamente como

$$D_\mu(x)V(x) = P_\mu(x)V(x) \quad (2.27)$$

Ahora vemos que la acción puede ser interpretada como un modelo sigma no lineal gaugeado, en sentido que la invariancia local se obtiene acoplando mínimamente la expresión globalmente \mathcal{G} -invariante $(\partial_\mu V(x)V(x)^{-1} | \partial^\mu V(x)V(x)^{-1})$ al campo de gauge $Q_\mu(x)$ a través de la covariantización $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$,

$$(\partial_\mu V(x)V(x)^{-1} | \partial^\mu V(x)V(x)^{-1}) \rightarrow (D_\mu V(x)V(x)^{-1} | D^\mu V(x)V(x)^{-1}) = (P_\mu(x) | P_\nu(x)) \quad (2.28)$$

Entonces, la acción toma la forma

$$S_{\mathcal{G}/\mathcal{K}(\mathcal{G})} = \int_X d^p x \sqrt{\gamma} \gamma^{\mu\nu} (D_\mu V(x)V(x)^{-1} | D_\nu V(x)V(x)^{-1}) \quad (2.29)$$

También podemos formar una métrica “generalizada” $M(x)$ que no transforme en absoluto ante la simetría local, sino que sólo transforme ante transformaciones \mathcal{G} rígidas. Esto se hace mediante el uso de la transpuesta generalizada (extendida del álgebra al grupo a través del mapa exponencial), de la siguiente manera

$$M(x) \equiv V(x)V(x)^T \quad (2.30)$$

que es claramente invariante ante transformaciones locales

$$\mathcal{K}\mathcal{G} : M(x) \rightarrow (k(x)V(x))^{\mathfrak{T}}(k(x)V(x)) = V(x)^{\mathfrak{T}}(k(x)^{\mathfrak{T}}k(x))V(x) = M(x) \quad (2.31)$$

para $k(x) \in \mathcal{K}(\mathcal{G})$, y ante transformaciones globales de $V(x)$ desde la derecha transforma como

$$\mathcal{G} : M(x) \rightarrow g^{\mathfrak{T}}M(x)g, \quad g \in \mathcal{G} \quad (2.32)$$

Un cálculo corto muestra que la relación entre $M(x) \in \mathcal{G}$ y $P(x) \in \mathfrak{p}$ viene dada por

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}M(x)^{-1}\partial_\mu M(x) &= \frac{1}{2}(V(x)^{\mathfrak{z}}V(x))^{-1}\partial_\mu V(x)^{\mathfrak{z}}V(x) + (V(x)^{\mathfrak{z}}V(x))^{-1}V(x)^{\mathfrak{z}}\partial_\mu V(x) \\
&= \frac{1}{2}V(x)^{-1}[(\partial_\mu V(x)V(x)^{-1})^{\mathfrak{z}} + \partial_\mu V(x)V(x)^{-1}]V(x) \\
&= V(x)^{-1}P(x)_\mu V(x)
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Ya que en la expresión entre corchetes los factores de $V(x)$ se cancelan

$$(V(x)^{-1}P(x)_\mu V(x) \mid V(x)^{-1}P(x)^\mu V(x)) = (P(x)_\mu \mid P(x)^\mu) \tag{2.34}$$

La ecuación (9.33) provee una tercera manera de escribir la acción invariante $\mathcal{K}\mathcal{G}_{local} \times \mathcal{G}_{rigido}$ completamente en términos de la métrica generalizada $M(x)$,

$$S_{\mathcal{G}/\mathcal{K}(\mathcal{G})} = \frac{1}{4} \int_X d^p x \sqrt{\gamma} \gamma^{\mu\nu} (M(x)^{-1} \partial_\mu M(x) \mid M(x)^{-1} \partial_\nu M(x)) \tag{2.35}$$

[Llamamos M a la “métrica generalizada” porque en el caso $GL(n, \mathbb{R})/SO(n)$ corresponde a la métrica, siendo V los vielbeins].

Estas tres formas de la acción son manifiestamente invariantes de gauge ante $\mathcal{K}(\mathcal{G})_{local}$. Si se deseara, uno podría fijar el gauge y de este modo eliminar los grados de libertad redundantes.

2.2. Ecuaciones de movimiento y corrientes conservadas

Observemos con más detalle las ecuaciones de movimiento que resultan de una variación arbitraria $\delta V(x)$ de la 2.25. El elemento del álgebra de Lie $\delta V(x)V(x)^{-1} \in \mathfrak{g}$ puede descomponerse de acuerdo a la descomposición de Cartan

$$\delta V(x)V(x)^{-1} = \Sigma(x) + \Delta(x), \quad \Sigma(x) \in \mathfrak{t}, \Delta(x) \in \mathfrak{p} \tag{2.36}$$

La variación $\Delta(x)$ a lo largo de la órbita de gauge será automáticamente proyectada por la invariancia de la acción de gauge. Así, podemos suponer $\Sigma(x) = 0$ por simplicidad. Calculemos $\delta P_\mu(x)$. Uno puede fácilmente obtener

$$\delta P_\mu(x) = \partial_\mu \Delta(x) - [Q_\mu, \Delta(x)] \tag{2.37}$$

Como $\Delta(x)$ es un escalar valuado en el álgebra de Lie podemos libremente determinar $\partial_\mu \Delta(x) \rightarrow \nabla_\mu \Delta(x)$ en la variación de la acción abajo, donde ∇^μ es una derivada covariante sobre X compatible con la conexión de Levi-Civita. Usando la simetría y la invariancia de la forma bilineal uno encuentra entonces

$$S_{\mathcal{G}/\mathcal{K}(\mathcal{G})} = \int_X d^p x \sqrt{\gamma} \gamma^{\mu\nu} 2 [(-\nabla_\nu P_\mu(x) + [Q_\nu, P_\mu(x)] | \Delta(x))] \quad (2.38)$$

Estas ecuaciones de movimiento son entonces equivalentes a

$$D^\mu P_\mu(x) = 0 \quad (2.39)$$

con

$$D_\mu P_\nu(x) = \nabla_\mu P_\nu(x) - [Q_\mu, P_\nu(x)] \quad (2.40)$$

y simplemente expresa la conservación covariante de $P_\mu(x)$.

Es interesante también examinar la dinámica en términos de la métrica generalizada $M(x)$. Las ecuaciones de movimiento para $M(x)$ son

$$\frac{1}{2} \nabla^\mu (M(x)^{-1} \partial_\mu M(x)) = 0 \quad (2.41)$$

Estas ecuaciones aseguran la conservación de la corriente

$$\mathcal{J}_\mu \equiv \frac{1}{2} M(x)^{-1} \partial_\mu M(x) = V(x)^{-1} P_\mu V(x) \quad (2.42)$$

i.e.,

$$\nabla^\mu \mathcal{J}_\mu = 0 \quad (2.43)$$

Esta es la corriente de Noether asociada con la invariancia rígida \mathcal{G} de la acción.

2.3. Ejemplo: $SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$ (espacio hiperbólico)

Consideremos el ejemplo del espacio coset $SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$, el cual, aunque muy simple, bastante ilustrativo. Recordemos que el álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ se construye a través del Chevalley triple (e, h, f) ,

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) = \mathbb{R}f \oplus \mathbb{R}h \oplus \mathbb{R}e \quad (2.44)$$

con las relaciones de conmutación estándar

$$[h, e] = 2e \quad [h, f] = -2f \quad [e, f] = h \quad (2.45)$$

y realización matricial

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

En el gauge de Borel, $V(x)$ se lee

$$V(x) = e^{\frac{\phi(x)}{2}h} e^{\chi(x)e} = \begin{pmatrix} e^{\phi(x)/2} & \chi(x)e^{\phi(x)/2} \\ 0 & e^{-\phi(x)/2} \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

donde $\phi(x)$ y $\chi(x)$ representan coordenadas en el espacio coset, i.e. describen el mapa del modelo sigma

$$X \ni x \mapsto (\phi(x), \chi(x)) \in SL(2, \mathbb{R})/SO(2) \quad (2.48)$$

Una transformación arbitraria en $V(x)$ es

$$V(x) \mapsto k(x)V(x)g, \quad k(x) \in SO(2), g \in SL(2, \mathbb{R}) \quad (2.49)$$

que en forma infinitesimal se escribe

$$\delta_{\delta k(x), \delta g} V(x) = \delta k(x)V(x) + V(x)\delta g, \quad \delta k(x) \in \mathfrak{so}(2), \delta g \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \quad (2.50)$$

Veamos entonces cómo transforma $V(x)$ ante los generadores $\delta g = e, f, h$. Como es de esperar, los generadores de Borel, h y e preservan la estructura triangular superior

$$\begin{aligned} \delta_e V(x) &= V(x)e = \begin{pmatrix} 0 & e^{\phi(x)/2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \delta_h V(x) &= V(x)h = \begin{pmatrix} e^{\phi(x)/2} & -\chi(x)e^{\phi(x)/2} \\ 0 & -e^{\phi(x)/2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.51)$$

mientras que el generador de raíz negativa f no respeta la forma de $V(x)$

$$\delta_f V(x) = V(x)f = \begin{pmatrix} \chi(x)e^{\phi(x)/2} & 0 \\ e^{-\phi(x)/2} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

Entonces, en este caso necesitamos una transformación compensadora que reestablezca la forma triangular superior. Esta transformación necesita cancelar el factor $e^{-\phi(x)/2}$ en la esquina inferior izquierda de la matriz $\delta_f V(x)$ y así debe depender necesariamente de $\phi(x)$. La transformación que hace este trabajo es

$$\delta k(x) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\phi(x)} \\ -e^{-\phi(x)} & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(2) \quad (2.53)$$

y encontramos

$$\begin{aligned} \delta_{\delta k(x),f} V(x) &= \delta k(x)V(x) + V(x)f \\ &= \begin{pmatrix} \chi(x)e^{\phi(x)/2} & e^{-3\phi(x)/2} \\ -e^{-\phi(x)} & -\chi(x)e^{-\phi(x)/2} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})/SO(2) \end{aligned} \quad (2.54)$$

Finalmente, como la traspuesta generalizada $()^T$ en este caso se reduce a la matriz traspuesta ordinaria, la métrica “generalizada” es

$$M(x) = V(x)^T V(x) = \begin{pmatrix} e^{\phi(x)} & \chi(x)e^{\phi(x)} \\ \chi(x)e^{\phi(x)} & -\chi^2(x)e^{\phi(x)} + e^{-\phi(x)} \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

La forma de Killing $(\cdot | \cdot)$ corresponde a tomar la traza en la representación adjunta de 2.46 y entonces la acción 2.35 toma la forma

$$S_{SL(2, \mathbb{R})/SO(2)} = \frac{1}{2} \int_X d^p x \sqrt{\gamma} \gamma^{\mu\nu} 2[\partial_\mu \phi(x) \partial_\nu \phi(x) + e^{2\phi(x)} \partial_\mu \chi(x) \partial_\nu \chi(x)] \quad (2.56)$$

2.4. Ejemplo: Acción para $GL(10, \mathbb{R})/SO(10)$

Consideremos el caso del modelo sigma $GL(10, \mathbb{R})/SO(10)$, el cual es fundamental para la descripción de la gravedad en términos del ”vielbein” cuando estamos en un espacio tiempo de dimensión generica. Lo que digamos aquí será relevante cuando consideremos $GL(10, \mathbb{R})$ como subgrupo de E_{10} .

Antes de proseguir queremos hacer una observación. En el capítulo 4, cuando entremos en el tema de la descripción de la gravedad como teoría de gauge, mostraremos que, con algunas salvedades, el vielbein están asociados a componentes de una conexión de gauge. En el enfoque que utiliza el fibrado con soldadura (que será el que explicaremos), el vielbein corresponde a la parte traslacional de la conexión de Poincaré realizada no-linealmente, utilizando la terminología más común en física. Existe una enfoque diferente, sin embargo, que consiste en la descripción de la métrica como *campo*

de Goldstone, que se origina en [29] y fue analizada en [12] y recientemente en [36]. En [31] se ha mostrado que todo campo de gauge puede considerarse un campo de Goldstone asociado a una simetría espontáneamente rota (o realizada no-linealmente). Lo que sigue a continuación es básicamente la descripción de [29] pero adaptada al lenguaje que hemos introducido aquí.

Un elemento general del grupo H en el subgrupo $GL(10, \mathbb{R})$ es

$$H = \text{Exp}[h_a^b K_b^a] \quad (2.57)$$

donde h_a^b es la matriz 10×10 (con a los índices de las filas y b los de las columnas). Resultará conveniente-para optimizar los cálculos- verlos en esta sección como matrices 10×10 , ya que confinamos nuestra atención al subgrupo finito-dimensional $GL(10, \mathbb{R})$. Digamos, K_b^a será tratada como una matriz 10×10 con 0's en todos los lugares excepto 1 en la posición (a, b) . La formulación final en términos de las variables $h_a^b(t)$ -que son matrices 10×10 independientemente de si uno trata con $GL(10, \mathbb{R})$ *per se* o como un subgrupo de E_{10} - no dependen de esta interpretación.

Es útil describir $GL(10, \mathbb{R})$ como el conjunto de combinaciones lineales $m_i^j K_j^i$ donde la matriz 10×10 m_i^j es inversible. El producto de los K_j^i viene dado por

$$K_j^i K_m^k = \delta_j^k K_m^i \quad (2.58)$$

Uno puede verificar fácilmente que si $M = m_i^j K_j^i$ y $N = n_i^j K_j^i$ pertenecen a $GL(10, \mathbb{R})$, entonces $MN = (mn)_i^j K_j^i$ donde mn es el producto estándar de matrices 10×10 m y n . Además, $\text{Exp}(h^i_j K_j^i) = (e^h)_i^j K_j^i$ donde e^h es la matriz exponencial estándar.

Ante una transformación general, el representativo $H(t)$ se multiplica desde la izquierda por un elemento dependiente del tiempo R del grupo $SO(10)$ y desde la derecha por un elemento constante L del grupo $GL(10, \mathbb{R})$. Explícitamente, la transformación toma la forma (suprimiendo por conveniencia en la notación la dependencia temporal)

$$H \rightarrow H' = RHL \quad (2.59)$$

En términos de componentes, con $H = e_a^b K_b^a$, $e_a^b = (e^h)_a^b$, $R = R_a^b K_b^a$ y $L = L_a^b K_b^a$, uno encuentra

$$e_a'^b = R_a^c e_c^d L_d^b \quad (2.60)$$

donde usamos $H' = e_a'^b K_b^a$. Los índices en el representante del coset tienen propiedades de covariancia distintas. Para enfatizar este hecho, escribiremos

una barra sobre el primer índice, $e_a^b \rightarrow e_{\bar{a}}^b$. Entonces, los índices barrados transforman ante el grupo de gauge local $SO(10)$ y se llaman índices “locales” o “planos”, mientras que los índices sin barrar transforman ante el grupo global $GL(10, \mathbb{R})$ y son llamados índices de “mundo” o “curvos”. La matriz producto invariante de gauge $M = H^T H$ es igual a

$$M = g^{ab} K_{ab} \quad (2.61)$$

con $K_{ab} \equiv K_b^c \delta_{ac}$ y

$$g^{ab} = \sum_{\bar{c}} e_{\bar{c}}^a e_{\bar{c}}^b \quad (2.62)$$

g^{ab} no transforma ante transformaciones $SO(10)$ locales sino que transforma como un tensor (simétrico) contravariante ante transformaciones $GL(10, \mathbb{R})$

$$g'^{ab} = g^{cd} L_c^a L_d^b \quad (2.63)$$

Estas son componentes de una matriz simétrica no degenerada que puede ser identificada con una métrica euclídea inversa.

De hecho, el espacio coset $GL(10, \mathbb{R})/SO(10)$ puede identificarse con el espacio de tensores simétricos de signatura euclídea, i.e., el espacio de las métricas. Esto es debido a que dos tensores simétricos de signatura euclídea son equivalentes ante cambio de referencia, y el subgrupo de isotropía, digamos en la identidad, es evidentemente $SO(10)$. En vista de esto, el representante del coset e_a^b es el vielbein espacial.

La acción para el espacio coset $GL(10, \mathbb{R})/SO(10)$ puede encontrarse fácilmente y es

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{4} (g^{ac}(t)g^{bd}(t) - g^{ab}(t)g^{cd}(t)) \partial g_{ab}(t) \partial g_{cd}(t) \quad (2.64)$$

Notemos para futura referencia que la forma invariante $\partial H H^{-1}$ se lee explícitamente

$$\partial H H^{-1} = \partial e_{\bar{a}}^b e_b^{\bar{c}} K_c^a \quad (2.65)$$

donde $e_b^{\bar{n}}$ es la inversa de los vielbeins.

2.5. Acción para el caso general en forma explícita

La elección del gauge de Borel es siempre accesible cuando el grupo $\mathcal{K}(\mathcal{G})$ es el subgrupo compacto maximal de \mathcal{G} . En el caso no compacto esto no es

verdad ya que uno no puede invocar la descomposición de Iwasawa pero las sutilezas involucradas cuando $\mathcal{K}(\mathcal{G})$ es no compacto no serán tratadas en este trabajo. Procederemos en lo que sigue a escribir la acción del modelo sigma no lineal en el gauge de Borel para el espacio coset $\mathcal{G}/\mathcal{K}(\mathcal{G})$ donde $\mathcal{K}(\mathcal{G})$ es el subgrupo compacto maximal.

Sea $\prod = \{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\}$ una base de la subálgebra de Cartan $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ y sea $\Delta_+ \subset \mathfrak{h}^*$ el conjunto de raíces positivas. La subálgebra de Borel de \mathfrak{g} puede entonces escribirse como

$$\mathfrak{b} = \sum_{i=1}^n \mathbb{R}\alpha_i^\vee + \sum_{\alpha \in \Delta_+} \mathbb{R}E_\alpha \quad (2.66)$$

donde E_α es el generador de raíz positiva que expande el espacio de raíces uno-dimensional \mathfrak{g}_α asociado a la raíz α . El coset representativo se elige según

$$V(x) = V_1(x)V_2(x) = \text{Exp}\left[\sum_{i=1}^n \phi_i(x)\alpha_i^\vee\right] \text{Exp}\left[\sum_{\alpha \in \Delta_+} \chi_\alpha(x)E_\alpha\right] \in \mathcal{G}/\mathcal{K}(\mathcal{G}) \quad (2.67)$$

Como \mathfrak{g} es un álgebra de Lie finita, la suma sobre raíces positivas es finita y así la construcción está bien definida.

De 2.67 podemos calcular la uno-forma valuada del álgebra de Lie $\partial_\mu V(x)V(x)^{-1}$ explícitamente. Primero, escribimos la expresión general en términos de $V(x)_1$ y $V_2(x)$,

$$\partial_\mu V(x)V(x)^{-1} = \partial_\mu V_1(x)V_1(x)^{-1} + V_1(x)(\partial_\mu V_2(x)V_2(x)^{-1})V_1(x)^{-1} \quad (2.68)$$

Para calcular los términos individuales en esta expresión necesitamos hacer uso de las fórmulas de Baker-Hausdorff

$$\begin{aligned} \partial_\mu e^A e^{-A} &= \partial_\mu A + \frac{1}{2!}[A, \partial_\mu A] + \frac{1}{3!}[A, [A, \partial_\mu A]] + \dots \\ e^A B e^{-A} &= B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \dots \end{aligned} \quad (2.69)$$

El primer término en la Eq. 2.68 es sencillo de calcular ya que todos los generadores en la exponencial conmutan. Encontramos que

$$\partial_\mu V_1(x)V_1(x)^{-1} = \sum_{i=1}^n \partial_\mu \phi_i(x)\alpha_i^\vee \in \mathfrak{h} \quad (2.70)$$

Luego, calculamos la expresión correspondiente para $V_2(x)$. Aquí debemos tener en cuenta todos los conmutadores entre los generadores de raíces positivas $E_\alpha \in \mathfrak{n}_+$. Para el calculo detallado remitimos al apendice ??.

La suma en 2.4 puede ahora escribirse como

$$\partial_\mu V_2(x)V_2(x)^{-1} = \sum_{\alpha \in \Delta_+} \mathcal{R}_{\gamma_\mu}(x)E_\alpha \quad (2.71)$$

Para proceder, debemos conjugar esta expresión con $V_1(x)$ al fin de calcular la forma completa de 2.68. Esto involucra el uso de la segunda fórmula de Baker-Hausdorff en 2.69 para cada término en la suma, 2.71. Luego de alguna manipulación algebraica, se llega a la expresión completa para el elemento $\partial_\mu V(x)V(x)^{-1}$

$$\partial_\mu V(x)V(x)^{-1} = \sum_{i=1}^n \partial_\mu \phi_i(x)\alpha_i^\vee + \sum_{\alpha \in \Delta_+} e^{\alpha(h)} \mathcal{R}_{\alpha,\mu}(x)E_\alpha \quad (2.72)$$

De la proyección en el coset \mathfrak{p} se obtiene:

$$P_\mu(x) = \sum_{i=1}^n \partial_\mu \phi_i(x)\alpha_i^\vee + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} e^{\alpha(h)} \mathcal{R}_{\alpha,\mu}(x)(E_\alpha + E_{-\alpha}) \quad (2.73)$$

donde se ha usado que $E_\alpha^T = E_{-\alpha}$ y $(\alpha_i^\vee)^T = \alpha_i^\vee$.

Lo siguiente que queremos es calcular la forma explícita de la acción en 2.25. Eligiendo la siguiente normalización para los generadores de raíces

$$(E_\alpha | E_{\alpha'}) = \delta_{\alpha,-\alpha'}, \quad (\alpha_i^\vee | \alpha_j^\vee) = \delta_{i,j} \quad (2.74)$$

lo cual implica

$$(E_\alpha | E_{\alpha'}^T) = (E_\alpha | E_{-\alpha'})\delta_{\alpha,\alpha'} \quad (2.75)$$

La forma de la acción invariante $\mathcal{K}(\mathcal{G})_{local} \times \mathcal{G}_{rigido}$ es

$$S_{\mathcal{G}/\mathcal{K}(\mathcal{G})} = \int_X d^p x \sqrt{\gamma} \gamma^{\mu\nu} \left[\sum_{i=1}^n \partial_\mu \phi_i(x) \partial_\nu \phi_i(x) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} e^{2\alpha(h)} \mathcal{R}_{\alpha,\mu}(x) \mathcal{R}_{\alpha,\nu}(x) \right] \quad (2.76)$$

3. Modelos sigma no lineal en espacios cociente infinito-dimensionales

En lo que sigue generalizaremos y especializaremos la construcción de la sección anterior. La generalización apunta a relajar la prescripción que el álgebra \mathfrak{g} sea finito-dimensional. Aunque en principio podríamos considerar \mathfrak{g} alguna álgebra de Kac-Moody indefinida, nos enfocaremos en el caso en que es de tipo lorentziana. El análisis también será una especialización, en sentido que consideraremos sólo modelos sigma *geodésicos*, esto es, el espacio riemanniano X es la línea de mundo unidimensional de una partícula parametrizada por la variable t . Esta restricción está motivada por la descripción del “billar” [18] de la gravedad cerca de una singularidad, donde la dinámica en cada punto es efectivamente descrita por la geodésica de una partícula.

3.1. Construcción Formal

Por definición, consideramos sólo el caso donde el álgebra \mathfrak{g} Lorentziana es una forma real “split” (Ver Apéndice). Una diferencia muy importante con el caso finito-dimensional es que ahora tenemos *multiplicidades* no triviales de raíces imaginarias, es decir, raíces de norma negativa. Recordemos que si una raíz $\alpha \in \Delta$ tiene multiplicidad m_α , entonces el espacio de raíces asociado \mathfrak{g}_α es m_α -dimensional. Entonces es expandido por m_α generadores $E_\alpha^{[s]}$ ($s = 1, \dots, m_\alpha$)

$$\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{R}E_\alpha^{[1]} + \dots + \mathbb{R}E_\alpha^{[s]} \quad (2.77)$$

Las multiplicidades de las raíces no son conocidas en forma cerrada para cualquier álgebra de Kac-Moody indefinida sino que debe ser calculada recursivamente.

Nuestro principal objetivo es estudiar el coset representativo $\mathcal{V}(t) \in \mathcal{G}/\mathcal{K}(\mathcal{G})$, que ahora debe ser visto como la exponenciación “formal” de un número infinito de generadores en \mathfrak{p} . Podemos proceder como antes y elegir $\mathcal{V}(t)$ en el gauge de Borel, i.e., de la forma

$$\mathcal{V}(t) = \exp \left[\sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{h}} \beta^\mu(t) \alpha_\mu^\vee \right] \exp \left[\sum_{\alpha \in \Delta_+} \sum_{s=1}^{m_\alpha} \xi_\alpha^{[s]}(t) E_\alpha^{[s]} \right] \in \mathcal{G}/\mathcal{K}(\mathcal{G}) \quad (2.78)$$

Aquí, el índice μ no corresponden al “espacio-tiempo” sino que es un índice de la subálgebra de Cartan \mathfrak{h} . En lo que sigue nos abstendremos de escribir la

suma sobre μ explícitamente. El segundo exponente en la 2.78 contiene una suma infinita formal sobre todas las raíces positivas Δ_+ . Describiremos en detalle en las secciones subsiguientes cómo esta suma puede ser convenientemente truncada. El representativo del coset $\mathcal{V}(t)$ corresponde a la realización no lineal de \mathcal{G} y transforma como

$$\mathcal{G} : \mathcal{V}(t) \mapsto k(\mathcal{V}(t), g)\mathcal{V}(t)g, \quad k(\mathcal{V}(t), g) \in \mathcal{K}(\mathcal{G}), \quad g \in \mathcal{G} \quad (2.79)$$

Una uno-forma \mathfrak{g} -valuada puede ser construida análogamente al caso finito-dimensional

$$\partial\mathcal{V}(t)\mathcal{V}(t)^{-1} = \mathcal{Q}(t) + \mathcal{P}(t) \quad (2.80)$$

donde $\partial \equiv \partial_t$. El primer término del lado derecho de la igualdad representa una \mathfrak{t} -conexión que se fija bajo la involución de Chevalley,

$$\tau(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q} \quad (2.81)$$

mientras que $\mathcal{P}(t)$ yace en el complemento ortogonal \mathfrak{p} y de esta manera es anti-invariante

$$\tau(\mathcal{P}) = -\mathcal{P} \quad (2.82)$$

(de la forma separada, la involución de Cartan coincide con la involución de Chevalley). Usando las proyecciones en el coset \mathfrak{p} y la subálgebra compacta \mathfrak{t} , como fuera definido en 2.20, es posible calcular podemos $\mathcal{P}(t)$ y $\mathcal{Q}(t)$ en el gauge de Borel, las cuales se encuentran en el apéndice ??.

La acción para una partícula moviéndose en el espacio coset infinito-dimensional $\mathcal{G}/\mathcal{K}(\mathcal{G})$ puede ahora ser construida usando la forma invariante bilineal $(\cdot | \cdot)$ en \mathfrak{g} ,

$$S_{\mathcal{G}/\mathcal{K}(\mathcal{G})} = \int dt n(t)^{-1}(\mathcal{P}(t) | \mathcal{P}(t)) \quad (2.83)$$

donde $n(t)$ asegura la invariancia ante reparametrizaciones de t . La variación de la acción con respecto a $n(t)$ obliga al movimiento a ser una geodésica nula en $\mathcal{G}/\mathcal{K}(\mathcal{G})$,

$$(\mathcal{P}(t) | \mathcal{P}(t)) = 0 \quad (2.84)$$

Definiendo como antes una derivada covariante \mathfrak{D} con respecto a la simetría local $\mathcal{K}(\mathcal{G})$ como

$$\mathfrak{D}\mathcal{P}(t) \equiv \partial\mathcal{P}(t) - [\mathcal{Q}(t), \mathcal{P}(t)] \quad (2.85)$$

las ecuaciones de movimiento son simplemente

$$\mathfrak{D}(n(t)^{-1}\mathcal{P}(t)) = 0 \quad (2.86)$$

La forma explícita de la acción en la parametrización de 2.78 se transforma en

$$S_{\mathcal{G}/\mathcal{K}(\mathcal{G})} = \int dt n(t)^{-1} [G_{\mu\nu} \partial\beta^\mu(t) \partial\beta^\nu(t) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} \sum_{s=1}^{m_\alpha} e^{2\alpha(\beta)} \mathfrak{R}_\alpha^{[s]}(t) \mathfrak{R}_\alpha^{[s]}(t)] \quad (2.87)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es la métrica plana lorentziana definida por la restricción de la forma bilineal $(\cdot | \cdot)$ a la subálgebra de Cartan $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ y $\mathfrak{R}_\alpha^{[s]}(t)$ es el análogo a $\mathcal{R}_\alpha(x)$ en el caso finito-dimensional, cuya expresión se encuentra en el apéndice.

El término cinético para los parámetros de Cartan $\beta^\mu(t)$ es explícitamente

$$G_{\mu\nu} \partial\beta^\mu(t) \partial\beta^\nu(t) = \sum_{i=1}^{\dim\mathfrak{h}-1} \partial\beta^i(t) \partial\beta^i(t) - \left(\sum_{i=1}^{\dim\mathfrak{h}-1} \partial\beta^i(t) \right) \left(\sum_{j=1}^{\dim\mathfrak{h}-1} \partial\beta^j(t) \right) + \partial\phi(t) \partial\phi(t) \quad (2.88)$$

Se puede definir la métrica generalizada para todo \mathfrak{g} como

$$\mathcal{M}(t) \equiv \mathcal{V}^T(t) \mathcal{V}(t) \quad (2.89)$$

donde la traspuesta $()^T$ está definida como antes en términos de la involución de Chevalley,

$$()^\mathfrak{T} = -\mathcal{T}() \quad (2.90)$$

Luego, las ecuaciones de movimiento $\mathfrak{D}\mathcal{P}(t) = 0$ son equivalentes a la conservación $\partial\mathfrak{J} = 0$, de la corriente

$$\mathfrak{J} \equiv \frac{1}{2} \mathcal{M}(t)^{-1} \partial\mathcal{M}(t) \quad (2.91)$$

Esto puede ser resuelto formalmente en forma cerrada

$$\mathcal{M}(t) = e^{t\mathfrak{J}^\mathfrak{T}} \mathcal{M}(0) e^{t\mathfrak{J}} \quad (2.92)$$

y así, un elemento arbitrario \mathfrak{g} del grupo \mathcal{G} evoluciona de acuerdo a

$$g(t) = k(t)g(0)e^{t\mathfrak{J}}, \quad k(t) \in \mathcal{K}(\mathcal{G}) \quad (2.93)$$

Aunque la forma explícita de $\mathcal{P}(t)$ contiene infinitos términos, hemos visto que cada coeficiente $\mathfrak{R}_\alpha^{[s]}(t)$ puede, en principio, ser calculado exactamente para cada raíz α . Sin embargo, este no es el caso de la corriente \mathfrak{J} . Para encontrar la forma de \mathfrak{J} uno debe conjugar $\mathcal{P}(t)$ con el representativo del coset $\mathcal{V}(t)$ y esto requiere un número infinito de conmutadores para obtener el coeficiente correcto delante de todo generador en \mathfrak{J} .

3.2. Truncamientos consistentes

Un método para tratar con expresiones infinitas tales como 2.9 consiste en considerar expansiones finitas sucesivas que permitan más y más términos, mientras se mantenga respetando la dinámica del modelo sigma. Esto nos lleva al concepto de *truncamiento consistente* del modelo sigma para $\mathcal{G}/\mathcal{K}(\mathcal{G})$. Tomamos como definición de tal truncamiento a todo sub-modelo S' de $S_{\mathcal{G}/\mathcal{K}(\mathcal{G})}$ cuyas soluciones también son soluciones del modelo original.

Existen dos formas principales de encontrar truncamientos que satisfagan este último criterio. Estos son los llamados *truncamiento de subgrupo* y *truncamiento de nivel*, los cuales serán útiles para nuestros propósitos y los consideraremos más adelante.

Truncamiento a un subgrupo

EL primer truncamiento consistente con el que vamos a tratar es el caso en que la dinámica de un modelo sigma para algún grupo global \mathcal{G} está restringida a aquella de un subgrupo $\bar{\mathcal{G}} \subset \mathcal{G}$ elegido apropiadamente. Aquí consideramos sólo subgrupos $\bar{\mathcal{G}}$ que se obtienen mediante la exponenciación de subálgebras regulares $\bar{\mathfrak{g}}$ de \mathfrak{g} .

Para restringir la dinámica a la de un modelo sigma basado en un espacio coset $\bar{\mathcal{G}}/\mathcal{K}(\bar{\mathcal{G}})$, primero debemos suponer que las condiciones iniciales $g(t)|_{t=0} = g(0)$ y $\partial g(t)|_{t=0}$ son tales que se satisfacen las siguientes condiciones:

1. el elemento de grupo $g(0)$ pertenece a $\bar{\mathcal{G}}$,
2. la corriente conservada \mathfrak{J} pertenece a $\bar{\mathfrak{g}}$.

Siempre que se cumplan estas condiciones, entonces $g(0)e^{t\mathfrak{J}}$ pertenecerá a $\bar{\mathcal{G}}$ para todo t . Más aún, siempre existirá $\bar{k}(t) \in \mathcal{K}(\bar{\mathcal{G}})$ tal que

$$\bar{g}(t) \equiv \bar{k}(t)g(0)e^{t\mathfrak{J}} \in \bar{\mathcal{G}}/\mathcal{K}(\bar{\mathcal{G}}) \quad (2.94)$$

i.e., $\bar{g}(t)$ pertenece al subgrupo de Borel de $\bar{\mathcal{G}}$. Como el embebimiento es regular, $\bar{k}(t)$ pertenece a $\mathcal{K}(\mathcal{G})$ y así tenemos que $\bar{g}(t)$ también pertenece al subgrupo de Borel del grupo completo \mathcal{G} .

Recordemos ahora que de la 2.93 sabíamos que $\bar{g}(t) \equiv \bar{k}(t)g(0)e^{t\mathfrak{J}}$ es una solución a las ecuaciones de movimiento para el modelo sigma en $\bar{\mathcal{G}}/\mathcal{K}(\bar{\mathcal{G}})$. Pero como habíamos encontrado que $\bar{g}(t)$ preserva el gauge de Borel para $\mathcal{G}/\mathcal{K}(\mathcal{G})$, se sigue entonces que $\bar{k}(t)g(0)e^{t\mathfrak{J}}$ es una solución a las ecuaciones de movimiento para el modelo sigma completo. Así, la evolución dinámica del subsistema $S' = S_{\bar{\mathcal{G}}/\mathcal{K}(\bar{\mathcal{G}})}$ preserva el gauge de Borel de \mathcal{G} .

Estos argumentos muestran que las condiciones iniciales en $\bar{\mathcal{G}}$ permanecen en $\bar{\mathcal{G}}$, de esta manera la dinámica de un modelo sigma en $\mathcal{G}/\mathcal{K}(\mathcal{G})$ puede ser truncada consistentemente a un modelo sigma en $\bar{\mathcal{G}}/\mathcal{K}(\bar{\mathcal{G}})$.

Finalmente, recordemos que al ser el embebimiento $\bar{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{g}$ regular, la restricción de la forma bilineal en \mathfrak{g} coincide con la forma bilineal en $\bar{\mathfrak{g}}$. Esto implica que los vínculos hamiltonianos para los dos modelos, provenientes de la invariancia de reparametrización del tiempo en la acción, también coinciden.

Truncamiento de nivel

Métodos alternativos para truncar consistentemente el modelo sigma infinito-dimensional descansan en el uso de *gradaciones* de \mathfrak{g} .

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}^s} \mathfrak{g}_l \quad (2.95)$$

para un dado s , donde la suma es infinita pero cada subespacio es de dimensión finita, satisfaciéndose:

$$[\mathfrak{g}_l, \mathfrak{g}_{l'}] \subseteq \mathfrak{g}_{l+l'} \quad (2.96)$$

Una gradación en particular es la llamada *descomposición de nivel* de la representación adjunta de \mathfrak{g} en representaciones de una subálgebra regular finita $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$. Consideremos un álgebra de Kac-Moody \mathfrak{g} de rango r y sea \mathfrak{t} un subálgebra regular finita de rango $m < r$, cuyo diagrama de Dynkin sea obtenido eliminando un conjunto de nodos $\mathcal{N} = n_1, \dots, n_s (s = r - m)$ del diagrama de Dynkin de \mathfrak{g} .

Sea γ una raíz de \mathfrak{g} ,

$$\gamma = \sum_i m_i \alpha_i + \sum_a l_a \alpha_a \quad (2.97)$$

donde la suma en el primer termino en el subindice i es fuera del conjunto \mathcal{N} .

A esta descomposición de las raíces corresponde una descomposición del álgebra, que resulta ser una gradación, donde el índice l (el nivel) en 2.96 denota en este caso a el subespacio \mathfrak{g}_l generado por todos los vectores e_γ que tienen un valor definido del multinivel,

$$[h, e_\gamma] = \gamma(h)e_\gamma \quad (2.98)$$

El nivel l cuenta el número de veces que aparece una raíz simple específica. A fin de entender en términos más prácticos lo que significa la descomposición en niveles, tengamos en cuenta que el conjunto completo de elementos del álgebra puede generarse mediante corchetes de Lie multiples entre los elementos asociados a las raíces simples e_{α_a} y los del subálgebra de Cartan. El nivel l corresponde al subespacio generado por aquellos corchetes en los que el generador e_{α_a} aparezca un numero de veces menor o igual que l_a .

Ahora haremos uso de esta construcción para truncar el modelo sigma de $\mathcal{G}/\mathcal{K}(\mathcal{G})$, mediante la *terminación* de la gradación de \mathfrak{g} en algún nivel finito \bar{l} . Más específicamente, el truncamiento involucrará llevar a cero todos los coeficientes $\mathfrak{R}_\alpha^{[s]}(t)$, en la expansión de $\mathcal{P}(t)$ correspondientes a raíces α cuyos generadores $E_\alpha^{[s]}$ pertenecen a subespacios \mathfrak{g}_l con $l > \bar{l}$. Parte de esta sección se inspira en [17].

La forma de descomposición del nivel debe por supuesto, trabajarse en forma separada para cada elección del álgebra \mathfrak{g} y cada elección de descomposición. Haremos esto en detalle en la próxima sección para una descomposición de nivel específica del álgebra hiperbólica E_{10} .

4. Modelo sigma para $\mathcal{E}_{10}/\mathcal{K}(\mathcal{E}_{10})$

En esta sección ilustraremos los resultados obtenidos en las secciones anteriores construyendo explícitamente una acción para el espacio coset $\mathcal{E}_{10}/\mathcal{K}(\mathcal{E}_{10})$. Emplearemos la descomposición de nivel de $E_{10} = \text{Lie } \mathcal{E}_{10}$, en términos de sus subálgebras regulares $\mathfrak{sl}(10, \mathbb{R})$, para escribir las coordenadas en el espacio coset como tensores $\mathfrak{sl}(10, \mathbb{R})$ (dependientes del tiempo). Esto será importante en el siguiente capítulo cuando mostremos que para un truncamiento del modelo sigma a nivel $l = 3$, estos campos pueden ser interpretados como los campos físicos de supergravedad en once dimensiones. Este “diccionario” asegura que las ecuaciones de movimiento que surgen del modelo sigma en

$\mathcal{E}_{10}/\mathcal{K}(\mathcal{E}_{10})$ son equivalentes a las ecuaciones de movimiento (truncadas convenientemente) de supergravedad en once dimensiones.

4.1. E_{10} a Niveles Bajos

Describimos el álgebra E_{10} usando el nivel de descomposición de [17]. Los elementos de nivel cero son todos los elementos de la subálgebra $A_{9,9} \equiv \mathfrak{sl}(10, \mathbb{R})$ correspondiente al subdiagrama de Dynkin con nodos de 1 a 9, junto con el décimo generador de Cartan correspondiente a la raíz excepcional notada “10” en la Figura 2.1 y dada explícitamente en Eq. (2.105) abajo. De esta manera, el nivel cero de la subálgebra es extendido desde $\mathfrak{sl}(10, \mathbb{R})$ hasta $\mathfrak{gl}(10, \mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(10, \mathbb{R}) + \mathfrak{h}_{E_{10}}$ (la suma no es directa) y contiene todos los generadores de Cartan. Los generadores de Chevalley $\mathfrak{sl}(10, \mathbb{R})$ vienen dados por

$$e_i = K^{i+1}_i \quad f_i = K^i_{i+1} \quad h_i = K^{i+1}_{i+1} - K^i_i \quad (i = 1, \dots, 9), \quad (2.99)$$

mientras que las relaciones de conmutación del nivel 0 del álgebra $\mathfrak{gl}(10, \mathbb{R})$ son

$$[K^a_b, K^c_d] = \delta^c_b K^a_d - \delta^a_d K^c_b. \quad (2.100)$$

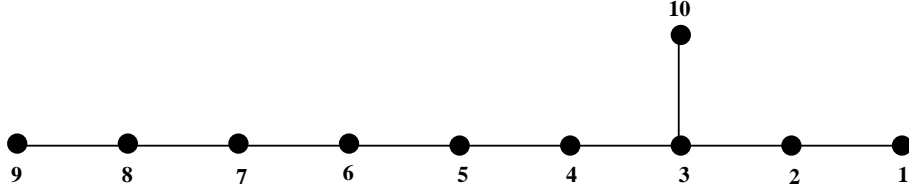


Figura 2.1: Diagrama de Dynkin de E_{10} . Los índices $i = 1, \dots, 9$ se refieren a los nodos correspondientes a las raíces simples, α_i , de la subálgebra A_9 y el nodo excepcional, indicado con “10”, se refiere a la raíz α_{10} que define el nivel de la descomposición.

Los generadores de E^{abc} de nivel 1 y sus “transpuestos”¹ $F_{abc} = -\tau(E^{abc})$ a nivel -1 transforman contravariantemente y covariantemente respecto a

¹Como en [18], formalmente el transpuesto de un elemento u de un álgebra de Lie a través de $u^T = -\tau(u)$ y extendemos a los productos formales - incluyendo elementos de grupo - a través de $(uv)^T = v^T u^T$. Elementos k de $\mathcal{K}(\mathcal{E}_{10})$ son tales que $k^T = k^{-1}$. Se tiene también que $Q^T = -Q$ y $P^T = P$.

$\mathfrak{gl}(10, \mathbb{R})$,

$$[K^a_b, E^{cde}] = 3\delta_b^{[c} E^{de]a} \quad [K^a_b, F_{cde}] = -3\delta^a_{[c} F_{de]b}. \quad (2.101)$$

Además tenemos que

$$[E^{abc}, F_{def}] = 18\delta_{[de}^{[ab} K^c]_f] - 2\delta_{def}^{abc} \sum_{a=1}^{10} K^a_a, \quad (2.102)$$

donde definimos

$$\delta_{cd}^{ab} = \frac{1}{2}(\delta_c^a \delta_d^b - \delta_c^b \delta_d^a), \quad (2.103)$$

y similarmente para δ_{def}^{abc} . Los generadores excepcionales asociados con las raíces α_{10} y $-\alpha_{10}$ son

$$e_{10} = E^{123} \quad f_{10} = F_{123}. \quad (2.104)$$

De la relación de Chevalley $[e_{10}, f_{10}] = h_{10}$, uno identifica, mirando Eq. (2.102), el generador de Cartan restante

$$h_{10} = -\frac{1}{3} \sum_{i \neq 1,2,3} K^i_i + \frac{2}{3}(K^1_1 + K^2_2 + K^3_3). \quad (2.105)$$

Un ejercicio trivial es verificar a partir de las relaciones de conmutación dadas arriba que los generadores $e_i, e_{10}, f_i, f_{10}, h_i$ y h_{10} en la $\mathfrak{gl}(10, \mathbb{R})$ -forma dada arriba en realidad satisfacen las relaciones estándar de Chevalley-Serre asociadas con la matriz de Cartan de E_{10} .

La forma bilineal de E_{10} está dada hasta los niveles ± 1 por

$$\langle K^a_b | K^c_d \rangle = \delta_d^a \delta_b^c - \delta_b^a \delta_d^c \quad (2.106)$$

$$\langle E^{abc} | F_{def} \rangle = 3! \delta_{def}^{abc}, \quad (2.107)$$

donde la segunda ecuación está normalizada, de manera que $\langle E^{123} | F_{123} \rangle = 1$.

Necesitaremos explícitamente los generadores de E_{10} hasta el nivel 3. Estos se contruyen a partir de conmutadores múltiples de los generadores de nivel 1, por ejemplo, a nivel 2 encontramos una 6-forma

$$[E^{a_1 a_2 a_3}, E^{a_4 a_5 a_6}] \equiv E^{a_1 \dots a_6} \quad (2.108)$$

(y similarmente para los transpuestos a nivel -2). Los conmutadores a este nivel son

$$[E^{a_1 \dots a_6}, F_{b_1 \dots b_6}] = 6 \cdot 6! \delta_{[b_1 \dots b_5}^{[a_1 \dots a_5} K^{a_6]}_{b_6]} - \frac{2}{3} \cdot 6! \delta_{b_1 \dots b_6}^{a_1 \dots a_6} \sum_{a=1}^{10} K^a. \quad (2.109)$$

A nivel 3 la identidad de Jacobi deja como única representación presente en E_{10} la representación mixta

$$[E^{a_1 a_2 a_3}, E^{a_4 \dots a_9}] = E^{[a_1 | a_2 a_3] \dots a_9}, \quad (2.110)$$

donde el generador de nivel 3 $E^{a_1 | a_2 \dots a_9}$ es antisimétrico en los índices $a_2 \dots a_9$ y tal que antisimetrizando sobre todos los índices se anula idénticamente,

$$E^{[a_1 | a_2 \dots a_9]} = 0. \quad (2.111)$$

Estas son todas las relaciones que necesitaremos en este trabajo. Para más detalles sobre la descomposición de E_{10} en representaciones de $\mathfrak{gl}(10, \mathbb{R})$ ver [34, 43, 19].

En resumen: hasta nivel tres aparecen las siguientes representaciones

$$\begin{aligned} l = 0 & : & K^a_b \\ l = 1 & : & E^{abc} = E^{[abc]} \\ l = 2 & : & E^{a_1 \dots a_6} = E^{[a_1 \dots a_6]} \\ l = 3 & : & E^{a | b_1 \dots b_8} = E^{a | [b_1 \dots b_8]} \end{aligned} \quad (2.112)$$

donde todos los índices son índices $\mathfrak{sl}(10, \mathbb{R})$, de modo que corren de 1 a 10. Los generadores de nivel cero K^a_b corresponden a la representación adjunta de $\mathfrak{sl}(10, \mathbb{R})$ y los generadores de nivel más alto corresponden a una torre infinita de operadores de creación de E_{10} . Como se indica por los corchetes, las representaciones de nivel uno y dos son completamente antisimétricas en todos sus índices, mientras que la representación de nivel tres tiene una simetría mixta: es antisimétrica en los ocho índices $b_1 \dots b_8$ y está sujeta al vínculo

$$E^{a | [b_1 \dots b_8]} = 0 \quad (2.113)$$

4.2. La Acción invariante $\mathcal{K}(\mathcal{E}_{10}) \times \mathcal{E}_{10}$ a Niveles Bajos

A continuación mostraremos cual es la acción en el caso de interés para el proximo capítulo, que es el caso $\mathcal{K}(\mathcal{E}_{10}) \times \mathcal{E}_{10}$. En esta sección solo consideraremos esta acción a niveles bajos. La acción completa puede verse en el Apéndice.

La acción puede ser calculada usando la forma bilineal $(\cdot | \cdot)$ en E_{10}

$$S_{\mathcal{E}_{10}/\mathcal{K}(\mathcal{E}_{10})} = \int dt n(t)^{-1}(\mathcal{P}(t) | \mathcal{P}(t)) \quad (2.114)$$

donde \mathcal{P} se obtiene proyectando ortogonalmente sobre la subálgebra $\mathfrak{t}_{E_{10}}$ usando la traspuesta generalizada

$$(K^a_b)^\mathfrak{T} = K^b_a, \quad (E^{abc})^\mathfrak{T} = F_{abc}, \quad \dots etc. \quad (2.115)$$

donde, como antes, $()^\mathfrak{T} = -\omega()$ (siendo ω la involución de Chevalley). Calcularemos la acción hasta el nivel 3 inclusive

$$S_{\mathcal{E}_{10}/\mathcal{K}(\mathcal{E}_{10})} = \int dt n(t)^{-1}(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \dots) \quad (2.116)$$

De 2.18 y del hecho que los generadores a nivel cero son ortogonales a los generadores a niveles distintos de cero, vemos que \mathcal{L}_0 se podrá construir a partir de la parte $\dot{H}H^{-1}$ del nivel cero y coincidirá con la lagrangiana 2.64 para el modelo sigma no lineal $GL(10, \mathbb{R})/SO(10)$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{4}(g^{ac}(t)g^{bd}(t) - g^{ab}(t)g^{cd}(t))\partial g_{ab}(t)\partial g_{cd}(t) \quad (2.117)$$

Similarmente, uno obtiene las contribuciones a nivel 1 2 y 3:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \frac{1}{2 \cdot 3!} g^{a_1 c_1} g^{a_2 c_2} g^{a_3 c_3} \mathcal{D}\mathcal{A}_{a_1 a_2 a_3}(t) \mathcal{D}\mathcal{A}_{c_1 c_2 c_3}(t) \\ &= \frac{1}{2 \cdot 3!} \mathcal{D}\mathcal{A}_{a_1 a_2 a_3}(t) \mathcal{D}\mathcal{A}^{a_1 a_2 a_3}(t) \\ \mathcal{L}_2 &= \frac{1}{2 \cdot 6!} \mathcal{D}\mathcal{A}_{a_1 \dots a_6}(t) \mathcal{D}\mathcal{A}^{a_1 \dots a_6}(t) \\ \mathcal{L}_3 &= \frac{1}{2 \cdot 9!} \mathcal{D}\mathcal{A}_{a|b_1 \dots b_8}(t) \mathcal{D}\mathcal{A}^{a|b_1 \dots b_8}(t) \end{aligned} \quad (2.118)$$

Agrupando todos los términos, la forma final de la acción para $\mathcal{E}_{10}/\mathcal{K}(\mathcal{E}_{10})$ incluyendo el nivel tres es

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{E}_{10}/\mathcal{K}(\mathcal{E}_{10})} &= \int dt n(t)^{-1} \left[\frac{1}{4}(g^{ac}(t)g^{bd}(t) - g^{ab}(t)g^{cd}(t))\partial g_{ab}(t)\partial g_{cd}(t) \right. \\ &+ \frac{1}{2 \cdot 3!} \mathcal{D}\mathcal{A}_{a_1 a_2 a_3}(t) \mathcal{D}\mathcal{A}^{a_1 a_2 a_3}(t) + \frac{1}{2 \cdot 6!} \mathcal{D}\mathcal{A}_{a_1 \dots a_6}(t) \mathcal{D}\mathcal{A}^{a_1 \dots a_6}(t) \\ &+ \left. \frac{1}{2 \cdot 9!} \mathcal{D}\mathcal{A}_{a|b_1 \dots b_8}(t) \mathcal{D}\mathcal{A}^{a|b_1 \dots b_8}(t) + \dots \right] \end{aligned} \quad (2.119)$$

donde hemos utilizado las derivadas “covariantes” \mathcal{D} vistas en el Apéndice. Esta acción coincide con la acción encontrada en [17].

5. Apéndice

5.1. Álgebras de Lie semi-simples y matriz de Cartan

Toda álgebra de Lie semi-simple \mathfrak{g} posee una subálgebra abeliana \mathfrak{g}_0 , con una propiedad que especificaremos, denominada *subálgebra de Cartan*. Se denomina rango r de \mathfrak{g} a dimensión de la misma r de la subálgebra de Cartan. A los r generadores de esta subálgebra abeliana se las denota con H_i ($i = 1, \dots, r$). Los generadores de esta subálgebra tienen la propiedad de que la acción adjunta ad_{H^i} es *diagonalizable* en \mathfrak{g} , es decir, existe una base de generadores del álgebra \mathfrak{g} en la que la acción adjunta se reduce a la multiplicación por un número. Sean E^α los generadores de esta base. Entonces, la propiedad anterior se expresa como:

$$ad_{H^i} E^\alpha \equiv [H^i, E^\alpha] = \alpha(H^i) E^\alpha \quad (2.120)$$

siendo $\alpha(H^i) \equiv \alpha^i$ un número complejo que depende de H^i y E^α . En vez de hablar de este número $\alpha(H^i)$, en la literatura es común referirse a la funcional α que toma un elemento H^i y le asigna el autovalor $\alpha(H^i)$. De esta forma, α pertenece al espacio dual \mathfrak{g}_0^* . En este lenguaje, se define a las *raíces* como aquellos elementos β en \mathfrak{g}_0^* tales que el conjunto:

$$\mathfrak{g}_0 = \{X \in \mathfrak{g} \mid [H^i, X] = \beta(H^i) X\} \quad (2.121)$$

sea no vacío. En otras palabras, si β es una raíz, entonces $\beta(H^i)$ dará por resultado un autovalor de ad_{H^i} . El conjunto de todas las raíces es denotado usualmente con Δ y es denominado *sistema de raíces de \mathfrak{g}* . Al autovector correspondiente E^α a una raíz, se lo denomina *operador de paso*.

El sistema de raíces tiene las siguientes propiedades:

* Las raíces generan todo \mathfrak{g}_0^*

* Las raíces son no-degeneradas en el sentido de que a cada raíz α le corresponde un subespacio unidimensional generado por E^α . A este subespacio se lo denota con \mathfrak{g}_α

* Los únicos múltiplos de $\alpha \in \Delta$ que pertenecen a Δ son $\pm\alpha$.

5.2. Forma de Killing y matriz de Cartan

Es útil introducir la forma bilineal K en \mathfrak{g} denominada *forma de Killing* y definida como:

$$K(x, y) \equiv \text{tr}(ad_x ad_y) \quad \forall x, y \in \mathfrak{g} \quad (2.122)$$

La forma de Killing posee 2 propiedades importantes: i) es no-degenerada ii) su restricción a \mathfrak{g}_0 es no degenerada.

La utilidad de la forma de Killing reside en que permite establecer un isomorfismo entre \mathfrak{g}_0 y \mathfrak{g}_0^* , asignando a $\gamma \in \mathfrak{g}_0^*$ un elemento $H^\gamma \in \mathfrak{g}_0$ a través de:

$$\gamma(h) = c_\gamma K(h, H^\gamma) \quad \forall h \in \mathfrak{g}_0 \quad (2.123)$$

siendo c_γ un factor dependiente de γ . Este isomorfismo permite pensar indistintamente en un elemento del sistema de raíces y un elemento de la subálgebra de Cartan. Además, este isomorfismo define un producto interno (\cdot, \cdot) en \mathfrak{g}_0^* :

$$(\gamma, \beta) \equiv c_\beta c_\gamma K(H^\beta, H^\gamma) \quad (2.124)$$

5.3. Raíces positivas, negativas y simples

Se puede demostrar que existe una *base de Δ* , es decir, un conjunto de raíces $\{\alpha_i\}$ con $i = 1, \dots, r$ que es base de \mathfrak{g}^* en el sentido usual y que además satisface que toda raíz $\gamma \in \Delta$ puede descomponerse en forma única como la combinación $\sum_{i=1}^r k_i \alpha_i$ siendo todos los k_i o bien enteros no-negativos o bien enteros no-positivos. Se dice que la raíz γ es una *raíz positiva (raíz negativa)* si los coeficientes k_i son no-negativos (no-positivos). Al conjunto de raíces positivas (negativas) se las denota con Δ_+ (Δ_-).

A las propias raíces α_i que componen la base se las denomina *raíces simples* y estas no pueden escribirse como suma de dos raíces positivas (dos raíces negativas).

La introducción de una base permite definir la denominada *altura o nivel* de una raíz dada $\gamma = \sum_{i=1}^r k_i \alpha_i$ como el número $\sum_{i=1}^r k_i$.

Aunque puede parecer que hemos introducido muchas definiciones, la noción de raíz simple es muy útil a la hora de describir una álgebra de Lie semisimple pues como veremos a continuación las raíces simples permiten definir una matriz llamada *matriz de Cartan* que *contiene toda la información del álgebra de Lie \mathfrak{g}*

5.4. Caracterización del álgebra a partir de la matriz de Cartan

Habiendo introducido la noción de raíces simples, podemos hallar una matriz de números enteros denominada *matriz de Cartan*. Esta se define como una matriz de $r \times r$ cuyo elemento A_{ij} es definido en términos de las raíces simples α_i como:

$$A_{ij} = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} \quad (2.125)$$

Utilizando una serie de propiedades de las raíces simples y su producto interno, se deduce que esta matriz posee las siguientes propiedades:

- i** $A_{ii} = 2$ para $i = 1, \dots, r$
- ii** $-A_{ij}$ es un entero no negativo para $i \neq j$, cuyos valores posibles son $0, 1, 2, 3$.
- iii** $A_{ij} = 0$ implica que $A_{ji} = 0$.
- iv** $\det A > 0$.
- iv** A no es descomponible, si el álgebra es simple.

La utilidad de la matriz de Cartan reside en que esta define en forma unívoca un álgebra de Lie simple $\mathfrak{g}(A)$ generada por $3r$ generadores $\{h_i, e_i, f_i\}$ sometidos a las siguientes relaciones:

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i \quad (2.126)$$

$$[h_i, e_j] = A_{ij} e_j \quad (2.127)$$

$$[h_i, f_j] = -A_{ij} f_j \quad (2.128)$$

$$[h_i, h_j] = 0$$

y las llamadas relaciones de Serre:

$$\begin{aligned} (ade_i)^{1-A_{ij}} e_j &= 0 \\ (adf_i)^{1-A_{ij}} f_j &= 0 = 0 \end{aligned} \quad (2.129)$$

Los h_i resultan ser los H_i normalizados convenientemente y los e_i resultan ser proporcionales a los generadores E_β asociados a las raíces simples,

mientras que el f_i son proporcionales al generador E_α asociado a la misma raíz con el signo cambiado.

El álgebra \mathfrak{g} admite dos descomposiciones útiles que pueden trasladarse al nivel de grupo de Lie. Una es la llamada *descomposición triangular*

$$\mathfrak{g} = n_- \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus n_+ \quad (2.130)$$

siendo \mathfrak{g}_0 la subálgebra de Cartan y n_- y n_+ las subálgebras generadas por los f_i y e_i respectivamente.

La siguiente descomposición requiere que introduzcamos la noción de *involución* $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, tal que $\theta^2 = id$ y $\theta[a, b] = [\theta(a), \theta(b)]$ para todo a y b en \mathfrak{g} . Es útil en particular la denominada *involución de Cartan-Chevalley* definida a través de:

$$\tau(h_i) = h_i \quad \tau(e_i) = f_i \quad (2.131)$$

y que se extiende a todo elemento del álgebra por las propiedades características de una involución.

La involución de τ permite descomponer al álgebra en autoespacios con autovalores $+1$ y -1 . En particular, el espacio de autovalor negativo es un álgebra y es generado por los $k_i \equiv e_i - f_i$.

Habiendo introducido esto, podemos hablar de otra descomposición útil que es la denominada *descomposición de Iwasawa*:

$$\mathfrak{g} = k \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus n_+ \quad (2.132)$$

5.5. Algebras de Lie a partir de la matriz de Cartan generalizada

Existe una manera unificada de construir algebras de Lie finito e infinito-dimensionales, utilizando una matriz que se denomina *matriz de Cartan generalizada* A (que coincidirá con la matriz de Cartan en el caso finito-dimensional) definida como una matriz de $r \times r$ que satisface:

- i $A_{ii} = 2$ para $i = 1, \dots, r$
- ii $-A_{ij}$ es un entero no negativo para $i \neq j$
- iii $A_{ij} = 0$ implica que $A_{ji} = 0$.

El algebra de Lie $\mathcal{G}(A)$ correspondiente a esta matriz se define a partir de las siguientes relaciones para un conjunto de $3r$ elementos, denominados los generadores de Chevalley $\{h_i, e_i, f_i\}$ $i = 1, \dots, r$

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i \quad (2.133)$$

$$[h_i, e_j] = A_{ij} e_j \quad (2.134)$$

$$[h_i, f_j] = -A_{ij} f_j \quad (2.135)$$

$$[h_i, h_j] = 0$$

y las llamadas relaciones de Serre:

$$(ade_i)^{1-A_{ij}} e_j = 0 \quad (2.136)$$

$$(adf_i)^{1-A_{ij}} f_j = 0 = 0$$

para $i \neq j$

A las álgebras $\mathfrak{g}(A)$ así construídas se las denomina *álgebras de Kac-Moody*.

5.6. Diagrama de Dynkin

Una manera practica de codificar la información contenida en la matriz de Cartan generalizada es a través de los denominados *diagrams de Dynking*, constuídos de acuerdo a las siguientes reglas:

1. Por cada subíndice $i = 1, \dots, r$ uno dibuja un nodo en el diagrama
2. Si $A_{ij} = 0$ (para $i \neq j$ no se dibuja ninguna linea entre el nodo i y el j)
3. Si $A_{ij} \neq 0$ se dibujara una o más lineas entre los nodos i y j de acuerdo a ls siguientes reglas:
 - a) Si $A_{ij}A_{ji} \leq 4$ (lo más frecuente en los casos de interés) se dibuja una cantidad de lineas entre i y j igual a $\max(-A_{ij}, -A_{ji})$. Si además $-A_{ij} > -A_{ji}$ se dibuja además una flecha dirigida de j a i
 - b) Si $A_{ij}A_{ji} \leq 4$ (muy raro en los casos de interés) se dibujara una sola flecha pero escribiendo arriba el par el par (A_{ij}, A_{ji}) .

5.7. Clasificación de las álgebras a partir de la matriz de Cartan generalizada

A fin de simplificar la discusión, consideremos el caso particular en que la matriz de Cartan generalizada satisface las siguientes condiciones adicionales:

1. Es no descomponible (no es suma directa de matriz de menor rango)
2. Es *simetrizable*, es decir, existe una matriz diagonal D (elegida con entradas positivas) y una matriz S simétrica, tal que $A = DS$.

Con estas condiciones, la condición finito o infinito dimensional del álgebra $\mathcal{G}(A)$ depende de la signatura de S : *el álgebra de Lie $\mathcal{G}(A)$ es un álgebra de Lie de dimensión finita si y solo si S es de signatura euclídea*. En este caso, la matriz A que satisface i-iii, satisface la condición extra que restringe los valores posibles para A_{ij} para $i \neq j$ a $0, -1, -2, -3$ de acuerdo a lo que vimos anteriormente para la matriz de Cartan.

Cuando la signatura de S no es euclídea, entonces el álgebra $\mathcal{G}(A)$ *resulta ser de dimensión infinita*.

Hay dos casos importantes dentro de las álgebras de Kac-Moody de dimensión infinita, que han sido estudiados con cierto detalle y que son los relevantes para nuestro propósito:

- i) el caso en que S admite un solo autovalor cero, siendo los otros estrictamente positivos
- ii) el caso en que S tiene signatura Lorentziana (posee un autovalor negativo siendo los restantes estrictamente positivos)

Las álgebras del primer tipo se conoce como álgebras de Kac-Moody afines mientras que las del segundo tipo se denominan álgebras de Kac-Moody Lorentzianas.

Dentro de las álgebras Lorentzianas, un caso importante es el de las *álgebras hiperbólicas* que son aquellas tales que la remoción de uno de los nodos en el diagrama de Dynkin asociado da por resultado un diagrama de Dynkin de un álgebra afín o de un álgebra de dimensión finita.

Las álgebras hiperbólicas han sido clasificadas y solo existen hasta rango 10, en el cual solo hay 4 posibilidades: las conocidas como E_{10} , BE_{10} , DE_{10} y CE_{10} , de las cuales la relevante para nuestros propósitos es E_{10} .

5.8. Forma real de un algebra de Lie

Las álgebras de Lie \mathfrak{g} que hemos considerado han sido formuladas en los números complejos. Sea n la dimensión de \mathfrak{g} como espacio vectorial en los complejos. \mathfrak{g} puede considerarse también como un espacio vectorial en los reales de dimensión $2n$ denotado como $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$. Si $\{T_a\}$ ($a=1, \dots, n$) es una base de \mathfrak{g} (considerado como espacio vectorial en los complejos), la base de $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ puede ser elegida como $\{T_a, iT_a\}$.

Por otra parte, si \mathfrak{g}_0 es un álgebra de Lie en los reales, esta puede extenderse a los complejos sencillamente extendiendo a los complejos los coeficientes en las combinaciones lineales de la base \mathfrak{g}_0 . Al álgebra de Lie así obtenida se la denota como $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$.

Cuando un álgebra de Lie \mathfrak{g} es tal que:

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}_0 \oplus i\mathfrak{g}_0 \quad (2.137)$$

se dice que \mathfrak{g}_0 es una *forma real* de \mathfrak{g} .

Dada \mathfrak{g} pueden construirse muchas formas reales. La única en la que estaremos interesados es la que se conoce como forma “split” que se construye como sigue: se elige la base de Cartan-Chevalley y se restringen las combinaciones a números reales.

5.9. Involución de Cartan

Toda forma real posee una *involución de Cartan*, la cual es definida como una involución usual pero satisfaciendo además que la forma K_θ es definida positiva, siendo K_θ una forma definida en términos de las forma de Killing usual a través de:

$$K_\theta(Z, Z') = -K(Z, \theta Z) \quad (2.138)$$

para todo Z y Z' en \mathfrak{g} .

En el caso particular de la forma split, una involución de Cartan es la involución de Chevalley que hemos definido anteriormente.

La importancia de la involución de Cartan reside en que el autoespacio de autovalor $+1$ corresponde a una subálgebra *compacta*: el grupo obtenido exponenciando esta es compacto.

5.10. Extensiones Afines

Consideremos ahora como una algebra de Kac-Moody afín puede construirse a partir de un álgebra semisimple (finito dimensional). Consideremos un álgebra de Lie simple \mathfrak{g} . Uno puede asociar con ella tres álgebras de Lie infinito dimensional relacionadas:

- el álgebra de Kac-Moody afín (no-twistada) \mathfrak{g}^+ ,
- el álgebra de corrientes \mathfrak{g}^J ,
- el álgebra de loops $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Si $\{T_A\}$ es una base de \mathfrak{g} con constantes de estructura C^A_{BC} , el álgebra de loop $\tilde{\mathfrak{g}}$ tiene base $\{T_A^n\}$ ($n \in \mathbb{Z}$) con relaciones de conmutación

$$[T_B^n, T_C^m] = C^A_{BC} T_A^{m+n}, \quad (2.139)$$

el álgebra de corrientes \mathfrak{g}^J tiene base $\{T_A, c\}$ con relaciones de conmutación

$$[T_B^n, T_C^m] = C^A_{BC} T_A^{m+n} + n \delta_{n+m,0} k_{BC} c, \quad [T_A^n, c] = 0, \quad (2.140)$$

mientras que el álgebra de Kac-Moody \mathfrak{g}^+ tiene base $\{T_A, c, d\}$ con relaciones de conmutación

$$[T_B^n, T_C^m] = C^A_{BC} T_A^{m+n} + n \delta_{n+m,0} k_{BC} c, \quad [T_A^n, c] = 0, \quad (2.141)$$

$$[d, T_A^n] = n T_A^n, \quad [d, c] = 0. \quad (2.142)$$

Aquí, k_{AB} es una forma invariante (forma de Killing) en \mathfrak{g} . Como espacios vectoriales, $\mathfrak{g}^+ = \mathfrak{g}^J \oplus \mathbb{R}d = \tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{R}c \oplus \mathbb{R}d$ y $\mathfrak{g}^J = \tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{R}c$. El álgebra \mathfrak{g}^+ es el álgebra de Kac-Moody asociada a la matriz de Cartan A_{ij}^+ obtenida a partir de la matriz de Cartan de \mathfrak{g} agregando la menos la raíz afín.

El operador de escala d está en la subálgebra de Cartan de \mathfrak{g}^+ y tiene los siguientes productos escalares con todos los generadores de Cartan [33],

$$\begin{cases} \langle d|h_a \rangle = 0 & (\text{para } h_a \text{ en la subálgebra de Cartan de } \mathfrak{g}) \\ \langle d|d \rangle = 0 \\ \langle d|c \rangle = 1. \end{cases} \quad (2.143)$$

Notemos también que $\langle c|c \rangle = 0$. La raíz afín viene dada por

$$\alpha_0 \equiv \delta - \theta, \quad (2.144)$$

donde θ es la raíz máxima de \mathfrak{g} . El generador de escala d cuenta el número de veces que aparece el operador de subida correspondiente a la raíz afín α_0 en cualquier conmutador múltiple en \mathfrak{g}^+ .

Cuando \mathfrak{g} es simple, como es el álgebra A_2 que será relevante más adelante, el álgebra de corrientes \mathfrak{g}^J es la que se obtiene del álgebra de \mathfrak{g}^+ , $\mathfrak{g}^J = [\mathfrak{g}^+, \mathfrak{g}^+] \equiv (\mathfrak{g}^+)'$. El álgebra de corrientes coincide con el álgebra generada por las relaciones de Chevalley-Serre asociadas con la matriz de Cartan dada A_{ij}^+ , y no con su realización. Además, el centro de \mathfrak{g}^J y \mathfrak{g}^+ es de dimensión uno y viene dado por $\mathbb{R}c$. El álgebra de loop $\tilde{\mathfrak{g}}$ es el cociente entre el álgebra de corrientes \mathfrak{g}^J y su centro unidimensional $\mathbb{R}c$.

De hecho, de acuerdo al Teorema 1.7 en [33], los únicos ideales de un álgebra de Kac-Moody \mathfrak{a} con matriz de Cartan no-descomponible o bien contienen su álgebra derivada \mathfrak{a}' o bien son contenidos en su centro.

5.11. Subálgebras regulares

Definiciones

Sea $\bar{\mathfrak{g}}$ una subálgebra de Kac-Moody de $\bar{\mathfrak{g}}$ con descomposición triangular $\bar{\mathfrak{g}} = \bar{\mathfrak{n}}_- \oplus \bar{\mathfrak{h}} \oplus \bar{\mathfrak{n}}_+$. Asumimos que $\bar{\mathfrak{g}}$ está canónicamente contenido en \mathfrak{g} , i.e., la subálgebra de Cartan $\bar{\mathfrak{h}}$ de $\bar{\mathfrak{g}}$ es una subálgebra de la subálgebra de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{g} , $\bar{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{h}$, de modo que $\bar{\mathfrak{h}} = \bar{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{h}$. Diremos que $\bar{\mathfrak{g}}$ está regularmente embebida en \mathfrak{g} (y la llamaremos una “subálgebra regular”) si y solo si se satisfacen las dos condiciones que siguen:

1. los operadores de paso de $\bar{\mathfrak{g}}$ son operadores de paso de \mathfrak{g} ;
2. las raíces simples de $\bar{\mathfrak{g}}$ son raíces reales de \mathfrak{g} ;

Se sigue que la red de raíces de $\bar{\mathfrak{g}}$ es una subred de la red de raíces de \mathfrak{g} .

La segunda condición es automática en el caso finito dimensional donde sólo hay raíces reales. Esto debe ser impuesto en el caso general. Consideremos por ejemplo el álgebra de Kac-Moody \mathcal{A} de rango 2 con matriz de Cartan

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sea

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}[e_1, e_2] \quad (2.1)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}[f_1, f_2] \quad (2.2)$$

$$z = -(h_1 + h_2). \quad (2.3)$$

Es fácil verificar que x, y, z define una subálgebra A_1 de \mathcal{A} ya que $[z, x] = 2x$, $[z, y] = -2y$ y $[x, y] = z$.

Más aún, la subálgebra de Cartan de A_1 es una subálgebra de la subálgebra de Cartan de \mathcal{A} , y los operadores de paso de A_1 son operadores de paso de \mathcal{A} . Sin embargo, la raíz simple $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ of A_1 (que es una raíz real A_1 ya que A_1 es finito dimensional) es una raíz imaginaria de \mathcal{A} : $\alpha_1 + \alpha_2$ con norma cuadrado negativa igual a -2 . Aún cuando la red de raíces de A_1 (llamémosla, $\{\pm\alpha\}$) es una subred de la red de raíces de \mathcal{A} , la reflexión en α no es una reflexión de Weyl de \mathcal{A} . De acuerdo a nuestra definición, este embebimiento de A_1 en \mathcal{A} no es regular.

Ejemplos

Estaremos interesados en subálgebras regulares de E_{10} .

$$A_9 \subset \mathcal{B} \subset E_{10}$$

Un primer simple ejemplo de un embebimiento regular es aquel de A_9 en E_{10} usado para definir el nivel. Este no es un embebimiento maximal ya que uno puede encontrar una subálgebra propia \mathcal{B} de E_{10} que contenga a A_9 . Podríamos tomar por \mathcal{B} la subálgebra de Kac- Moody de E_{10} generada por los operadores a niveles 0 y ± 2 , que es la subálgebra del álgebra que contiene todos los operadores de nivel par. Esta está regularmente encajada en E_{10} . Su diagrama de Dynkin se muestra en la Figura 2.2.

En términos de las raíces simples de E_{10} , las raíces simples de \mathcal{B} son α_1 a través de α_9 y $\bar{\alpha}_{10} = 2\alpha_{10} + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5$. El álgebra \mathcal{B} es lorentziana pero no hiperbólica.

$$DE_{10} \subset E_{10}$$

En [23], Dynkin presenta un método para encontrar todas las subálgebras regulares maximales de álgebras de Lie simples finito dimensionales. Este método se basa en el uso raíces máxima y no es generalizable a álgebras de Kac-Moody para las cuales no hay raíz máxima. De todas maneras, es útil en la construcción de embebimientos regulares de sobreextensiones de álgebras

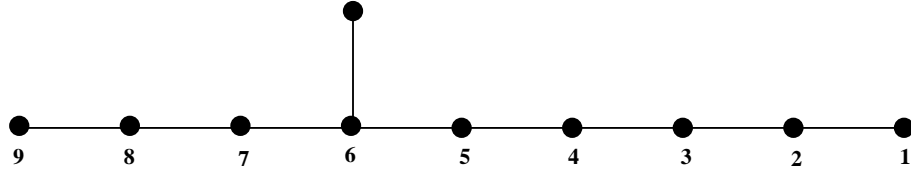


Figura 2.2: Diagrama de Dynkin de $\mathcal{B} \equiv E_7^{+++}$. La raíz sin número es la notada $\bar{\alpha}_{10}$ en el texto.

de Lie simples finito dimensionales. Ilustraremos este punto en el caso de E_8 y sus sobreextensión $E_{10} \equiv E_8^{++}$. En la notación de la Figura 2.1, las raíces simples de E_8 (que está regularmente encajado en E_{10}) son $\alpha_1, \dots, \alpha_7$ y α_{10} .

Aplicando el procedimiento de Dynkin a E_8 , se encuentra fácilmente que D_8 , puede ser encajado regularmente en E_8 . Las raíces simples de $D_8 \subset E_8$ are $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_{10}$ y $\beta \equiv -\theta$, donde $\theta = 3\alpha_{10} + 6\alpha_3 + 4\alpha_2 + 2\alpha_1 + 5\alpha_4 + 4\alpha_5 + 3\alpha_6 + 2\alpha_7$ es la máxima raíz de E_8 (que casualmente tien peso 29). Uno puede reemplazar este embebimiento en el cual una raíz simple de D_8 , digamos β , es una raíz negativa de E_8 (y el correspondiente operador de subida de D_8 es un operador de bajada para E_8), por uno equivalente en el que todas las raíces simples de D_8 son raíces positivas de E_8 .

Más aún, la raíz máxima de D_8 $\theta_{D_8} = \alpha_{10} + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + 2\alpha_6 + 2\alpha_7 + \alpha_2 + \bar{\beta}$ es igual a la raíz máxima de E_8 . Es por esto que la raíz afín α_8 de la extensión afín no-twistada E_8^+ puede ser identificada con la raíz afín de D_8^+ y la raíz sobreextendida α_9 puede también tomarse con el mismo valor. Así, DE_{10} puede ser encajado regularmente en E_{10} ver Figura 2.3).

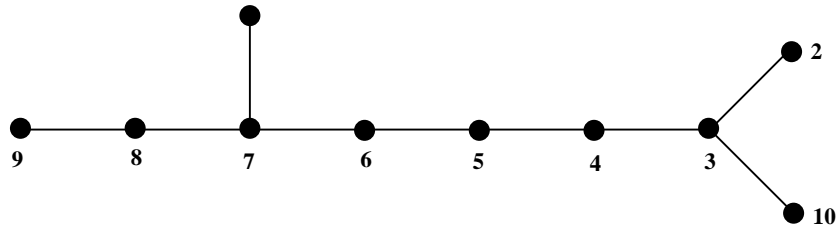


Figura 2.3: $DE_{10} \equiv D_8^{++}$ encajada regularmente en E_{10} . Etiquetas $2, \dots, 10$ representan las raíces simples $\alpha_2, \dots, \alpha_{10}$ de E_{10} y el nodo no etiquetados corresponde a la raíz positiva $\bar{\beta} = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6 + 2\alpha_{10}$.

Se puede ver que A_8^{++} puede ser regularmente encajado en E_{10} , y que DE_{10} puede ser regularmente encajado en $BE_{10} \equiv B_8^{++}$.

5.12. Expresiones útiles para el cálculo de la acción del modelo sigma no-lineal

Caso finito-dimensional

Usando las fórmulas de Baker-Hausdorff, se encuentra que:

$$\begin{aligned}
\partial_\mu V_2(x) V_2(x)^{-1} &= \partial_\mu \exp \left[\sum_{\alpha \in \Delta_+} \chi_\alpha(x) E_\alpha \right] \exp \left[- \sum_{\alpha' \in \Delta_+} \chi_{\alpha'}(x) E_{\alpha'} \right] \\
&= \sum_{\alpha \in \Delta_+} \partial_\mu \chi_\alpha(x) E_\alpha + \frac{1}{2!} \sum_{\alpha, \alpha' \in \Delta_+} \chi_\alpha(x) \partial_\mu \chi_{\alpha'}(x) [E_\alpha, E_{\alpha'}] \\
&\quad + \frac{1}{3!} \sum_{\alpha, \alpha', \alpha'' \in \Delta_+} \chi_\alpha(x) \chi_{\alpha'}(x) \partial_\mu \chi_{\alpha''}(x) [E_\alpha, [E_{\alpha'}, E_{\alpha''}]] \quad (2.4)
\end{aligned}$$

cada multi-conmutador $[E_\alpha, [E_{\alpha'}, \dots], \dots, E_{\alpha''}]$ corresponde a algún nuevo generador de raíces positivas, digamos $E_\gamma \in \mathfrak{n}_+$, sin embargo, como cada término en la expansión 2.4 es una suma sobre todas las raíces positivas, el generador específico E_γ recibirá una contribución de todos los términos. Podemos entonces escribir la suma de una “forma cerrada” con el coeficiente al frente de un generador arbitrario E_γ , adoptando la forma

$$\mathcal{R}_{\gamma\mu}(x) \equiv \partial_\mu \chi_\gamma(x) + \frac{1}{2!} \underbrace{\chi_\zeta(x) \partial_\mu \chi_{\zeta'}(x)}_{\zeta + \zeta' = \gamma} + \dots + \frac{1}{k_\gamma!} \underbrace{\chi_\eta(x) \chi_{\eta'}(x) \dots \chi_{\eta''}(x) \partial_\mu \chi_{\eta'''}(x)}_{\eta + \eta' + \dots + \eta'' + \eta''' = \gamma} \quad (2.5)$$

donde k_γ denota el número correspondiente al último término en la expansión de Baker-Hausdorff en el que aparece el generador E_γ . La forma explícita de $\mathcal{R}_{\gamma\mu}(x)$ debe calcularse individualmente para cada raíz $\gamma \in \mathfrak{n}_+$.

A fin de calcular el segundo término en 2.68, necesitaremos los conmutadores de la forma

$$[h, E_\alpha] = \alpha(h) E_\alpha \quad (2.6)$$

donde $\alpha(h)$ denota el valor de la raíz $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ actuando sobre el elemento de Cartan $h \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \alpha_i^\vee \in \mathfrak{h}$

$$\alpha(h) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \alpha(\alpha_i^\vee) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \equiv \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \alpha_i \quad (2.7)$$

Así, para cada término en la sumatoria 2.71 obtenemos

$$\begin{aligned}
V_1(x)E_\alpha V_1(x)^{-1} &= E_\alpha + \sum_i \phi_i(x)\alpha_i E_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \phi_i(x)\phi_j(x)\alpha_i\alpha_j E_\alpha + \dots \\
&= \exp\left[\sum_i \phi_i(x)\alpha_i\right] E_\alpha \\
&= e^{\alpha(h)} E_\alpha
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Caso infinito dimensional

A continuación se encuentran las expresiones para $\mathcal{P}(t)$ y $\mathcal{Q}(t)$ que necesitamos

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(t) &= \partial\beta^\mu(t)\alpha_\mu^\vee + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} \sum_{s=1}^{m_\alpha} e^{\alpha(\beta)} \mathfrak{R}_\alpha^{[s]}(t) (E_\alpha^{[s]} + E_{-\alpha}^{[s]}) \\
\mathcal{Q}(t) &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} \sum_{s=1}^{m_\alpha} e^{\alpha(\beta)} \mathfrak{R}_\alpha^{[s]}(t) (E_\alpha^{[s]} - E_{-\alpha}^{[s]})
\end{aligned} \tag{2.9}$$

donde $\mathfrak{R}_\alpha^{[s]}(t)$ es el análogo a $\mathcal{R}_\alpha(x)$ en el caso finito-dimensional, i.e., toma la forma

$$\mathfrak{R}_\alpha^{[s]}(t) = \partial\xi_\alpha^{[s]}(t) + \frac{1}{2} \underbrace{\xi_\zeta^{[s]}(t)\partial\xi_{\zeta'}^{[s]}(t)}_{\zeta+\zeta'=\alpha} + \dots \tag{2.10}$$

la cual todavía contiene un número finito de términos para cada una de las raíces positivas α . El valor de la raíz $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ actuando sobre $\beta^\mu(t)\alpha_\mu^\vee \in \mathfrak{h}$ es

$$\alpha(\beta) = \alpha_\mu \beta^\mu \tag{2.11}$$

Notemos que aquí la notación α_μ no corresponde a una raíz simple, sino que denota las componentes de un vector raíz arbitrario $\alpha \in \mathfrak{h}^*$.

5.13. Acción completa para $\mathcal{E}_{10}/\mathcal{K}(\mathcal{E}_{10})$

Consideremos el sigma no lineal completo para $\mathcal{E}_{10}/\mathcal{K}(\mathcal{E}_{10})$. En lugar de exponenciar la subálgebra de Cartan por separado como en 2.78, se verá aquí que es conveniente en lugar de eso seleccionar el subespacio de nivel cero $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{gl}(10, \mathbb{R})$. Esto nos permite controlar fácilmente la covariancia $SO(10)_{local} \times$

$GL(10, \mathbb{R})_{rigido}$. Para poner de manifiesto la covariancia del nivel cero, supondremos de acá en adelante que el gauge de Borel ha sido fijado sólo para los niveles distintos de cero, y mantendremos presentes todos los campos de nivel cero. La libertad residual de gauge es entonces la multiplicación por una rotación $SO(10)$ desde la izquierda.

Así, tomamos del representante del coset de la forma

$$\mathcal{V}(t) = Exp[h_a^b(t)K_b^a]Exp\left[\frac{1}{3!}\mathcal{A}_{abc}(t)E^{abc} + \frac{1}{6!}\mathcal{A}_{a_1\dots a_6}(t)E^{a_1\dots a_6} + \frac{1}{9!}\mathcal{A}_{a|b_1\dots b_8}(t)E^{a|b_1\dots b_8} + \dots\right] \quad (2.12)$$

donde la suma en el primer exponente estaría restringida a todos los $a \geq b$ si hubiésemos tomado el gauge de Borel completo también a nivel cero. Los parámetros $\mathcal{A}_{abc}(t)$, $\mathcal{A}_{a_1\dots a_6}(t)$ y $\mathcal{A}_{a|b_1\dots b_8}(t)$ son coordenadas en el espacio coset $\mathcal{E}_{10}/\mathcal{K}(\mathcal{E}_{10})$ y serán interpretados eventualmente como los campos físicos dependientes del tiempo de la supergravedad en once dimensiones.

Veamos como transforman los campos ante $SO(10)_{local} \times GL(10, \mathbb{R})_{rigido}$. Sea $R \in SO(10)$, $L \in GL(10, \mathbb{R})$ y descompongamos \mathcal{V} de acuerdo con la 2.12 como el producto

$$\mathcal{V} = HT \quad (2.13)$$

con

$$\begin{aligned} H &= Exp[h_a^b(t)K_b^a] \in GL(10, \mathbb{R}) \\ T &= Exp\left[\frac{1}{3!}\mathcal{A}_{abc}(t)E^{abc} + \frac{1}{6!}\mathcal{A}_{a_1\dots a_6}(t)E^{a_1\dots a_6} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{9!}\mathcal{A}_{a|b_1\dots b_8}(t)E^{a|b_1\dots b_8} + \dots\right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

Uno tiene

$$\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}' = R(HT)L = (RHL)(L^{-1}TL) \quad (2.15)$$

Ahora bien, la primera matriz, $H' = RHL$ claramente pertenece a $GL(10, \mathbb{R})$, ya que es el producto de dos matrices de rotaciones por dos matrices $GL(10, \mathbb{R})$. Tiene exactamente la misma transformación que 2.59 en el contexto del modelo sigma no lineal para $GL(10, \mathbb{R})/SO(10)$. Entonces la interpretación geométrica de $e_a^b = (e^h)_a^b$ como un vielbein resulta ser correcta.

Similarmente, la matriz $T' \equiv (L^{-1}TL)$ tiene exactamente la misma forma

que T ,

$$\begin{aligned}
T' = \text{Exp}(L^{-1}[\frac{1}{3!}\mathcal{A}_{abc}(t)E^{abc} + \frac{1}{6!}\mathcal{A}_{a_1\dots a_6}(t)E^{a_1\dots a_6} + & \quad (2.16) \\
\frac{1}{9!}\mathcal{A}_{a|b_1\dots b_8}(t)E^{a|b_1\dots b_8} + \dots]L) = \text{Exp}[\frac{1}{3!}\mathcal{A}'_{abc}(t)E^{abc} + & \\
\frac{1}{6!}\mathcal{A}'_{a_1\dots a_6}(t)E^{a_1\dots a_6} + \frac{1}{9!}\mathcal{A}'_{a|b_1\dots b_8}(t)E^{a|b_1\dots b_8} + \dots] &
\end{aligned}$$

donde las variables $\mathcal{A}'_{abc}, \mathcal{A}'_{a_1\dots a_6}, \dots$, se obtienen a partir de las variables $\mathcal{A}_{abc}, \mathcal{A}_{a_1\dots a_6}, \dots$, calculando $L^{-1}E^{abc}L, L^{-1}E^{a_1\dots a_6}L, \dots$, usando las relaciones de conmutación con K^a_b . Explícitamente, uno obtiene

$$\mathcal{A}'_{abc} = (L^{-1})_a^e (L^{-1})_b^f (L^{-1})_c^g \mathcal{A}_{efg}, \quad , \mathcal{A}'_{a_1\dots a_6} = (L^{-1})_{a_1}^{b_1} \dots (L^{-1})_{a_6}^{b_6} \mathcal{A}_{b_1\dots b_6}, \quad \text{etc.} \quad (2.17)$$

Así, los campos $\mathcal{A}_{abc}, \mathcal{A}_{a_1\dots a_6}, \dots$, no transforman ante transformaciones locales $SO(10)$. Sin embargo, transforman como tensores del tipo indicado por sus índices ante transformaciones rígidas $GL(10, \mathbb{R})$. Sus índices son índices de mundo y no índices planos.

La forma invariante $\partial\mathcal{V}\mathcal{V}^{-1}$ se lee

$$\partial\mathcal{V}\mathcal{V}^{-1} = \partial H H^{-1} + H(\partial T T^{-1})H^{-1} \quad (2.18)$$

El primer término es la forma invariante que se encontró en la discusión sobre el modelo sigma no lineal de nivel cero para $GL(10, \mathbb{R})/SO(10)$. Enfoquémonos entonces en el segundo término. Es claro que $\partial T T^{-1}$ contendrá sólo generadores positivos para nivel ≥ 1 . Así, de manera similar a 2.71, hacemos:

$$\partial T T^{-1} = \sum_{\alpha \in \Delta_+} \sum_s \mathcal{D}\mathcal{A}_{\alpha,s} E_{\alpha,s} \quad (2.19)$$

donde la suma es sobre las raíces positivas a niveles uno y más altos y tiene en cuenta las multiplicidades (a través del índice extra s). Las expresiones $\mathcal{D}\mathcal{A}_{\alpha,s}$ son lineales en las derivadas temporales $\partial\mathcal{A}$. Igual que antes, las llamamos “derivadas covariantes”. Se calculan haciendo uso de la fórmula de Baker-Hausdorff. Explícitamente, hasta nivel 3, uno encuentra

$$\dot{T}T^{-1} = \frac{1}{3!}\mathcal{D}\mathcal{A}_{abc}(t)E^{abc} + \frac{1}{6!}\mathcal{D}\mathcal{A}_{a_1\dots a_6}(t)E^{a_1\dots a_6} + \frac{1}{9!}\mathcal{D}\mathcal{A}_{a|b_1\dots b_8}(t)E^{a|b_1\dots b_8} + \dots \quad (2.20)$$

con

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}\mathcal{A}_{abc}(t) &= \partial\mathcal{A}_{abc}(t) \\
\mathcal{D}\mathcal{A}_{a_1\dots a_6}(t) &= \partial\mathcal{A}_{a_1\dots a_6}(t) + 10\mathcal{A}_{[a_1,a_2,a_3]}(t)\partial\mathcal{A}_{a_4,a_5,a_6]}(t) \\
\mathcal{D}\mathcal{A}_{a|b_1\dots b_8}(t) &= \partial\mathcal{A}_{a|b_1\dots b_8}(t) + 42\mathcal{A}_{\langle ab_1b_2\rangle}(t)\partial\mathcal{A}_{b_3\dots b_8}\rangle(t) - 42\mathcal{A}_{\langle ab_1b_2\rangle}(t)\mathcal{A}_{b_3\dots b_8}\rangle(t) \\
&= 280\mathcal{A}_{\langle ab_1b_2\rangle}(t)\mathcal{A}_{b_3b_4b_5}\partial\mathcal{A}_{b_6b_7b_8}\rangle(t) \tag{2.21}
\end{aligned}$$

como se ha calculado en [17]. La notación $\langle a_1\dots a_k \rangle$ denota proyección sobre la simetría del tableaux de Young que lleva el campo sobre el cual actúa la derivada covariante. Debería enfatizarse que las derivadas covariantes $\mathcal{D}\mathcal{A}$ tienen las mismas propiedades de transformación ante $SO(10)$ (ante las que son inertes) y $GL(10, \mathbb{R})$ que \mathcal{A} ya que las transformaciones $GL(10, \mathbb{R})$ no dependen del tiempo.

Capítulo 3

E_{10} como Simetría Oculta de Supergravedad en $D = 11$

El interés por los modelos cocientes que exhiben una simetría infinito dimensional, los cuales han sido considerados en el capítulo precedente, esta motivada por razones más que académicas, pues existe evidencia de que distintas teorías de gravedad, incluso RG en 4 dimensiones, también exhiben simetrías de dimensión infinita cuando son reducidas dimensionalmente.

La evidencia de la existencia de estas simetrías puede agruparse en dos casos. Unas provienen del comportamiento de soluciones de teorías de gravedad en presencia de una singularidad spacelike, en los cuales se verifica el llamado límite BKL (Belinski-Khalatnikov-Lifshitz) [11], según el cual la dinámica efectiva para los grados de libertad de la métrica y (los campos de materia que contenga) se reduce a una dinámica dependiente del tiempo solamente, para cada punto espacial, quedando los gradientes espaciales desacoplados de las ecuaciones de movimiento. Esta dinámica efectiva puede ser descrita como la de una partícula en un espacio auxiliar de signatura Lorentziana, que se reduce a un movimiento libre seguido alternadamente por colisiones contra hiperplanos. El resultado sorprendente es que el grupo de reflexiones que deja invariante a estos planos corresponde al grupo de Coxeter (o Weyl) de diversas álgebras de Lie, siendo muchas de estas álgebras de KacMoody Lorentzianas [18]

El segundo grupo de evidencias, proviene del estudio de una teoría particular de gravedad: la teoría de supergravedad en once dimensiones (SUGRA $D=11$). Durante los años '70 se la ha estudiado en detalle esta y se halló el resultado también inesperado de que cuando esta es compactificada en un Toro

T^d de dimensión d , la teoría exhibe una simetría coset excepcional $\mathcal{E}_d/\mathcal{K}_{(\mathcal{E}_d)}$ [15], distinta a la esperada por la reducción dimensional. Se ha encontrado también que, cuando la teoría es compactificada a $D = 1 + 1$, aparece un grupo de simetría afín (dado por un algebra infinito dimensional) que deja invariante las ecuaciones de movimiento. Este grupo es el análogo del Grupo de Geroch y ha sido identificado con la extensión afín de $\mathcal{E}_{8(8)}$ denotado como $\mathcal{E}_{9(9)} \equiv \mathcal{E}_{8(8)}^+$.

Para compactificaciones en T^{10} y T^{11} se conoce poco pero existe una conjetura formulada por Julia [32] en los 80, según la cual la cadena de simetrías extendidas debería mantenerse, dando lugar a $\mathcal{E}_{10(10)}$ y $\mathcal{E}_{11(11)}$ como grupo de simetría de la teoría de supergravedad compactificada a $D = 1$ y $D = 0$ respectivamente.

Ambas evidencias, la primeras cubriendo un amplio casos de teorías de gravedad, pueden ser consideradas ambas como parte de un mismo fenómeno: la aparición de simetrías infinito-dimensionales ante la reducción dimensional de una teoría de gravedad. El primer caso puede considerarse como un caso de reducción dimensional a $0 + 1$, pues en el régimen mencionado todas los campos resultan dependientes solo del tiempo.

Ambas evidencias, han llevado a plantearse si la aparición de simetrías inesperadas en las versiones reducidas dimensionalmente es *consecuencia de la presencia de estas simetrías en las teorías originales de las que provienen por compactificación*. Responder a esta pregunta general es una tarea muy ambiciosa, en la que aún no se ha avanzado mucho. Sin embargo, en el caso particular de SUGRA D=11 se ha hecho un progreso importante, que es la base del trabajo que consideraremos en este capítulo, y que podemos resumir como sigue.

En [17] se ha construido un lagrangiano basado en el espacio coset $\mathcal{E}_{10}/\mathcal{K}_{(\mathcal{E}_{10})}$ y se mostró que su dinámica (cuando se aplica una truncación consiste al modelo cociente, noción que hemos tratado en el capítulo precedente) reproduce el régimen BKL del sector bosónico de SUGRA D=11. Esta coincidencia es un hecho sugestivo que lleva a la pregunta de si el lagrangiano que describe un sector de SUGRA D=11 (al menos el sector bosónico), en el caso general en que los campos dependen de de todas las 11 coordenadas espacio-tiempo, puede ser reescrito como un modelo cociente correspondiente al algebra excepcional E_{10} , de forma tal de dar cuenta de la evidencia mencionada en los párrafos anteriores.

La cuestión de la validez de esta conjetura, escapa al alcance del está tesis.

El objetivo en este capítulo es el de ilustrar como esta reformulación de SUGRA D=11 funciona en algunos casos en que la conjetura tiene validez como es el caso particular de un grupo de soluciones cosmológicas de interés halladas en [21]. Este capítulo reproduce básicamente [27] (que ha sido extendido en [28]) donde hemos reexaminado las soluciones cosmológicas de [21] a la luz de la conjetura.

Comencemos entonces describiendo brevemente en que consiste la conjetura sobre la especulada simetría oculta de SUGRA D=11.

1. Diccionario entre supergravedad D=11 y modelo coset correspondiente a E_{10}

Ahora relacionaremos las ecuaciones de movimiento para el modelo sigma $\mathcal{E}_{10}/\mathcal{K}(\mathcal{E}_{10})$ con las ecuaciones de movimiento de la supergravedad en once dimensiones.

Hemos visto que el modelo sigma para $\mathcal{E}_{10}/\mathcal{K}(\mathcal{E}_{10})$ puede ser truncado consistentemente nivel por nivel. Más precisamente, uno puede consistentemente poner a cero todas las derivadas covariantes de los campos sobre un nivel dado y obtener un sistema reducido cuyas soluciones son también soluciones del sistema completo. Mostraremos que los truncamientos consistentes de $\mathcal{E}_{10}/\mathcal{K}(\mathcal{E}_{10})$ a niveles 0, 1 y 2 producen ecuaciones de movimiento que coinciden con las ecuaciones de movimiento de los truncamientos consistentes apropiados de la supergravedad en once dimensiones, siempre que uno use un diccionario que proporcionaremos aquí. También mostraremos que la correspondencia se extiende a partes del nivel 3.

Repasemos brevemente el contenido bosónico de la teoría de supergravedad D=11, que es lo único que precisaremos para este trabajo pues la conjetura se limita a ese sector. En el gauge $N^i = 0$ (shift nulo) y $A_{0bc} = 0$ (gauge temporal), los campos bosónicos son la métrica espacial $g_{ab}(x^0, x^i)$, el lapso $N(x^0, x^i)$ y las componentes espaciales de la 3-forma potencial vector $A_{abc}(x^0, x^i)$. El campo físico es $F = dA$ y sus componentes eléctrica y magnética son F_{0abc} y F_{abcd} respectivamente. El campo eléctrico involucra sólo derivadas temporales de $A_{abc}(x^0, x^i)$, mientras que el campo magnético involucra gradientes espaciales.

La acción para el sector bosónico de supergravedad en D=11 es la sigu-

iente:

$$S_{11}^{SUGRA} = \int d^{11}[\sqrt{-G}R(G) - \frac{\sqrt{-G}}{48}F_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{1}{12^4}\varepsilon^{\alpha_1\dots\alpha_{11}}F_{\alpha_1\dots\alpha_4}F^{\alpha_1\dots\alpha_4}A_{\alpha_9\alpha_{10}\alpha_{11}}] \quad (3.1)$$

Por el lado del modelo sigma, si uno mantiene únicamente los niveles cero y uno, la acción del modelo sigma, 2.119 se reduce a

$$S[g_{ab}(t), \mathcal{A}_{abc}(t), n(t)] = \int dt n(t)^{-1}[\frac{1}{4}(g^{ac}(t)g^{bd}(t) - g^{ab}(t)g^{cd}(t))\partial g_{ab}(t)\partial g_{cd}(t) + \frac{1}{2\cdot 3!}\mathcal{D}\mathcal{A}_{a_1a_2a_3}(t)\mathcal{D}\mathcal{A}^{a_1a_2a_3}(t)] \quad (3.2)$$

Consideremos ahora el truncamiento consistente homogéneo de la supergravedad en once dimensiones en el cual la métrica espacial, el lapso y el potencial vector dependen únicamente del tiempo (no hay gradiente espacial). Luego, la acción reducida por este truncamiento es precisamente 3.2 una vez hecha la identificación $t = x^0$ y

$$\begin{aligned} g_{ab}(t) &= g_{ab}(t) \\ \mathcal{A}_{abc}(t) &= A_{abc}(t) \\ n(t) &= \frac{N(t)}{\sqrt{g(t)}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

(ver, por ejemplo, [21]). También coinciden los vínculos hamiltonianos (el único que queda). Entonces, existe una coincidencia perfecta entre el modelo sigma truncado a nivel uno y la supergravedad “reducida en un 10-toro”. Si uno fuese a desechar el nivel uno, encontraría perfecto acuerdo con gravedad pura. En lo que sigue haremos la elección de gauge $N = \sqrt{g(t)}$, lo que equivale a $n = 1$.

En los niveles cero y uno, los campos de supergravedad g_{ab} y A_{abc} dependen sólo del tiempo. Cuando se va más allá en este truncamiento uno necesita introducir algunos gradientes espaciales. Nivel dos introduce gradientes espaciales de un modo muy especial, digamos que permite un campo magnético homogéneo. Esto significa que A_{abc} adquiere una dependencia temporal, más precisamente, una dependencia lineal (de manera que el gradiente no dependa de x). Sin embargo, debido a que no hay lugar para la dependencia en x

del lado del modelo sigma, donde la única variable independiente es t , usaremos el truco para describir el campo magnético en términos de un potencial dual $A_{a_1\dots a_6}$. Entonces, existe una profunda interacción entre dualidad, la formulación del modelo sigma y la introducción de gradientes espaciales.

La correspondencia encontrada arriba a niveles cero y uno en términos de la métrica y el campo electromagnético es

$$\begin{aligned} g_{ab}(t) &= \mathfrak{g}_{ab}(t) \\ \mathcal{D}\mathcal{A}_{abc}(t) &= F_{0abc}(t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Las ecuaciones de movimiento para el modelo sigma no lineal obtenidas a partir de la variación del lagrangiano 2.119, truncada a nivel dos, es

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\partial(n(t)^{-1}g^{ac}(t)\partial g_{cb}(t)) &= \frac{n(t)^{-1}}{4}(\mathcal{D}\mathcal{A}^{ac_1c_2}(t))\mathcal{D}\mathcal{A}_{bc_1c_2}(t) - \frac{n(t)^{-1}}{9}\delta^a_b\mathcal{D}\mathcal{A}^{c_1c_2c_3}(t)\mathcal{D}\mathcal{A}_{c_1c_2c_3}(t) \\ &+ \frac{n(t)^{-1}}{2\cdot 5!}(\mathcal{D}\mathcal{A}^{ac_1\dots c_5}(t))\mathcal{D}\mathcal{A}_{bc_1\dots c_5}(t) - \frac{n(t)^{-1}}{9}\delta^a_b\mathcal{D}\mathcal{A}^{c_1\dots c_6}(t)\mathcal{D}\mathcal{A}_{c_1\dots c_6}(t) \\ \partial(n(t)^{-1}\mathcal{D}\mathcal{A}_{a_1a_2a_3}(t)) &= -\frac{1}{3!}n(t)^{-1}\mathcal{D}\mathcal{A}^{a_1\dots a_6}\mathcal{D}\mathcal{A}_{a_1\dots a_6} \\ \partial(n(t)^{-1}\mathcal{D}\mathcal{A}_{a_1\dots a_6}(t)) &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Además, tenemos el vínculo que se obtiene variando n

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}(t) | \mathcal{P}(t)) &= \frac{1}{4}(g^{ac}(t)g^{bd}(t) - g^{ab}(t)g^{cd}(t))\partial g_{ab}(t)\partial g_{cd}(t) \\ &+ \frac{1}{2\cdot 3!}\mathcal{D}\mathcal{A}_{a_1a_2a_3}(t)\mathcal{D}\mathcal{A}^{a_1a_2a_3}(t) + \frac{1}{2\cdot 6!}\mathcal{D}\mathcal{A}_{a_1\dots a_6}(t)\mathcal{D}\mathcal{A}^{a_1\dots a_6}(t) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Del lado de supergravedad, truncamos las ecuaciones hasta las métricas $\mathfrak{g}_{ab}(t)$ y los campos electromagnéticos $F_{0abc}(t)$, $F_{abcd}(t)$ que dependen sólo del tiempo. Tomamos la métrica del espacio-tiempo de la forma

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + \mathfrak{g}_{ab}(t)dx^a dx^b \quad (3.7)$$

pero ahora x^0t . En lo que sigue usamos letras griegas $\lambda, \sigma, \rho, \dots$ para notar los índices del espacio-tiempo en once dimensiones y letras latinas a, b, c, \dots para denotar los índices espaciales en diez dimensiones.

Las ecuaciones de movimiento y los vínculos de Hamilton para supergravedad en once dimensiones han sido escritos explícitamente en [21] así que

pueden ser comparados con las ecuaciones de movimiento del modelo sigma. Las ecuaciones dinámicas para la métrica son

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\partial(\sqrt{g}N^{-1}g^{ac}\partial g_{cb}(t)) &= \frac{1}{12}N\sqrt{g}F^{a\rho\sigma\tau}F_{b\rho\sigma\tau} - \frac{1}{144}N\sqrt{g}\delta^a_b F^{\lambda\rho\sigma\tau}F_{\lambda\rho\sigma\tau} \\
&= \frac{1}{4}N^{-1}\sqrt{g}F^{0ac_1c_2}F_{0b_1c_2} - \frac{1}{36}N^{-1}\sqrt{g}\delta^a_b F^{0c_1c_2c_3}F_{0c_1c_2c_3} \\
&+ \frac{1}{12}N\sqrt{g}F^{ac_1c_2}F_{b_1c_2} - \frac{1}{144}N\sqrt{g}\delta^a_b F^{c_1c_2c_3c_4}F_{c_1c_2c_3c_4} \quad (3.8)
\end{aligned}$$

y para los campos eléctricos y magnéticos tenemos las ecuaciones de movimiento y la identidad de Bianchi respectivamente

$$\begin{aligned}
\partial(F^{0abc}N\sqrt{g}) &= \frac{1}{144}\varepsilon^{0abcd_1d_2d_3e_1e_2e_3e_4}F_{0d_1d_2d_3}F_{e_1e_2e_3e_4} \\
\partial F_{a_1a_2a_3a_4} &= 0 \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Además tenemos el vínculo hamiltoniano

$$\frac{1}{4}(g^{ac}(t)g^{bd}(t) - g^{ab}(t)g^{cd}(t))\partial g_{ab}(t)\partial g_{cd}(t) + \frac{1}{12}F^{0abc}F_{0abc} + \frac{1}{48}F^{abcd}F_{abcd} = 0 \quad (3.10)$$

[No consideraremos aquí los otros vínculos, ver comentario como al final de la sección].

Uno encuentra nuevamente perfecto acuerdo entre las ecuaciones 3.5 y 3.6 del modelo sigma y las ecuaciones de gravedad en once dimensiones 3.8 y 3.10, siempre y cuando uno extienda el diccionario de arriba mediante [17]

$$\mathcal{DA}_{a_1\dots a_6}(t) = -\frac{1}{4!}\varepsilon^{a_1\dots a_6b_1b_2b_3b_4}F_{b_1b_2b_3b_4}(t) \quad (3.11)$$

Este resultado es bastante notable puesto que el término de Chern-Simons en 3.9 es reproducido en particular con los coeficiente correctos, lo que en supergravedad en once dimensiones se fija pidiendo supersimetría.

1.1. Niveles más Altos y la conjetura del gradiente

Como el encaje entre las ecuaciones del modelo sigma y la supergravedad falla a nivel tres bajo la presente línea de investigación, no proveeremos detalles sino que referiremos a [17] para más información. Uno podría ver la

falla a nivel tres como un defecto serio en la aproximación del modelo sigma en exhibir la simetría E_{10} . Sin embargo, seamos optimistas por un momento y supongamos que estos problemas se solucionarán de algún modo, quizás cambiando el diccionario o incluyendo términos de orden más alto. Así, prosigamos.

¿Cuál sería entonces el significado de estos campos de niveles más altos? Hay indicios de que los campos a órdenes más altos contienen gradientes espaciales de orden más alto y de esa manera permiten reconstruir completamente, a través de algo similar a la expansión de Taylor. Es decir la información sobre los gradientes espaciales está codificada de alguna manera dentro de la descripción algebraica; una idea es que el espacio está “tapado” entre el número infinito de campos contenidos en \mathcal{E}_{10} y es por esta razón que un diccionario directo para la inclusión de gradientes espaciales es difícil de encontrar. Si fuera así, entonces, esto implicaría que podemos ver la expansión de nivel en el lado algebraico como si reflejara una especie de “expansión de Taylor” en gradientes espaciales sobre el lado de supergravedad.

2. Soluciones cosmológicas de supergravedad cerca de una singularidad

2.1. Consideraciones Generales

En estas últimas secciones mostraremos como la equivalencia a bajos niveles entre el modelo E_{10} y SUGRA D=11 puede utilizarse de manera práctica para encontrar soluciones exactas a SUGRA D=11. Esto es interesante pues aún en el contexto cosmológico de los campos homogéneos $G_{\alpha\beta}(t)$, $F_{\alpha\beta\gamma\delta}(t)$ que dependen solamente del tiempo [21]), las ecuaciones de movimiento de la supergravedad en once dimensiones son notoriamente complicadas.

Con el objetivo de obtener un sistema dinámico más manejable, se pueden imponer aún más condiciones a la métrica y la 4-forma. Esto debe hacerse de una manera compatible con las ecuaciones de movimiento: si las condiciones adicionales son impuestas inicialmente, deberían preservarse en la evolución temporal. Un conjunto tal de condiciones es que la métrica espacial sea diagonal,

$$ds^2 = -N^2(x^0)(dx^0)^2 + \sum_{i=1}^{10} a_i^2(x^0)(dx^i)^2. \quad (3.12)$$

Pedir invariancia ante las diez diferentes reflexiones espaciales $\{x^j \rightarrow -x^j, x^{i \neq j} \rightarrow x^{i \neq j}\}$ de la métrica es compatible con las ecuaciones de Einstein sólo si el tensor de energía-momento de la 4-forma también es diagonal. A pesar de que no puede imponerse que la 4-forma misma sea invariante ante reflexiones sin forzarla a anularse, se puede asegurar que el tensor energía-momento es invariante ante reflexiones.

En [21] se encontró un gran número de soluciones eléctricas al problema de encontrar $F_{\alpha\beta\gamma\delta}$ tal que $T_{\mu\nu}$ es invariante ante reflexiones espaciales. Estas pueden ser expresadas en forma elegante en términos de las denominadas *configuraciones geométricas* (n_m, g_3) de n puntos y g líneas (con $n \leq 10$). Esto es, por cada configuración geométrica (n_m, g_3) (cuya definición sera reproducida abajo), pueden asociarse soluciones diagonales con algunas componentes del campo eléctrico F_{0ijk} distintas de cero determinadas por la configuración. En estas últimas secciones, reexaminaremos este resultado desde el punto de vista del modelo sigma no lineal E_{10} . Este análisis esta basado en en [27].

2.2. Modelos de Bianchi en supergravedad en $D = 11$

Para campos dependientes del tiempo,

$$ds^2 = -N^2(x^0)(dx^0)^2 + G_{ab}(x^0)dx^a dx^b \quad (3.13)$$

$$F_{\lambda\rho\sigma\tau} = F_{\lambda\rho\sigma\tau}(x^0), \quad (3.14)$$

las ecuaciones de movimiento de supergravedad en 11 dimensiones son

$$\frac{d}{dx^0} \left(K^a_b \sqrt{G} \right) = -\frac{N}{2} \sqrt{G} F^{a\rho\sigma\tau} F_{b\rho\sigma\tau} + \frac{N}{144} \sqrt{G} F^{\lambda\rho\sigma\tau} F_{\lambda\rho\sigma\tau} \delta_b^a \quad (3.15)$$

$$\frac{d}{dx^0} \left(F^{0abc} N \sqrt{G} \right) = \frac{1}{144} \varepsilon^{0abcd_1 d_2 d_3 e_1 e_2 e_3 e_4} F_{0d_1 d_2 d_3} F_{e_1 e_2 e_3 e_4} \quad (3.16)$$

$$\frac{dF_{a_1 a_2 a_3 a_4}}{dx^0} = 0 \quad (3.17)$$

(ecuaciones dinámicas) y

$$K^a_b K^b_a - K^2 + \frac{1}{12} F_{\perp abc} F_{\perp}{}^{abc} + \frac{1}{48} F_{abcd} F^{abcd} = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{1}{6} N F^{0bcd} F_{abcd} = 0 \quad (3.19)$$

$$\varepsilon^{0abc_1 c_2 c_3 c_4 d_1 d_2 d_3 d_4} F_{c_1 c_2 c_3 c_4} F_{d_1 d_2 d_3 d_4} = 0 \quad (3.20)$$

(vínculo hamiltoniano, vínculo en los momentos y ley de Gauss). Aquí, hemos hecho $K_{ab} = (-1/2N)\dot{G}_{ab}$ and $F_{\perp abc} = (1/N)F_{0abc}$.

2.3. Descripción en términos de configuraciones geométricas

Esto es consistente con (3.15) sólo si $F^{a\rho\sigma\tau}F_{b\rho\sigma\tau}$ es diagonal. Teniendo en cuenta (3.19), la consistencia con (3.15) sólo es posible si el tensor energía momento T^α_β de la 4-forma $F_{\lambda\rho\sigma\tau}$ es diagonal. Asumiendo que el campo magnético es cero (esta restricción será eliminada posteriormente), la única forma de realizar esta condición es asumir que las componentes no nulas del campo eléctrico $F^{\perp abc}$ son determinadas por las “configuraciones geométricas” (n_m, g_3) con $n \leq 10$ [21].

Una configuración geométrica (n_m, g_3) es un conjunto de n puntos y g líneas con las siguientes *reglas de incidencia*

1. Cada línea contiene tres puntos.
2. Cada punto pertenece a m líneas.
3. Dos puntos determinan a lo sumo una línea.

. De esto se deduce que dos líneas tienen a lo sumo un punto en común. Es fácil ver que $mn = 3g$. Una cuestión interesante es si las líneas pueden ser realizadas en el plano real pero para nuestra consideración esto no necesariamente debe ocurrir; las líneas podrían estar curvadas.

En lo que sigue vamos a necesitar configuraciones con $n \leq 10$ puntos. Estas son conocidas completamente y pueden consultarse en el apéndice B de [21] y serán listadas posteriormente en las secciones 4.2 y 4.2. Estas son:

- una configuración $(3_1, 1_3)$ con 3 puntos;
- two configuraciones con 6 puntos (por ejemplo, $(6_1, 2_3)$ y $(6_2, 4_3)$); una configuración $(8_3, 8_3)$, la cual no puede ser realizada por líneas rectas;
- una configuración $(9_1, 3_3)$, dos configuraciones $(9_2, 6_3)$, tres configuraciones $(9_3, 9_3)$, y finalmente una configuración $(9_4, 12_3)$ que no puede ser realizada por líneas rectas;
- diez configuraciones $(10_3, 10_3)$, con una de ellas, denotada por $(10_3, 10_3)_1$, no realizable por líneas rectas.

. Algunas de estas configuraciones estan relacionadas por teoremas de geometría proyectiva y reciben nombres. Por ejemplo, la configuración $(10_3, 10_3)_3$ conocida como configuración de Desargues, la cual analizaremos posteriormente.

Sea (n_m, g_3) una configuración geométrica con $n \leq 10$ puntos. Numeraremos los puntos de la configuración con $1, \dots, n$. A esta clase de configuración geométrica asociaremos un conjunto de componentes del campo eléctrico $F^{\perp abc}$ con las siguientes propiedades: $F^{\perp abc}$ es distinto de cero sólo si la terna de puntos de la configuración geométrica correspondiente a (a, b, c) pertenece a una línea. En caso contrario, $F^{\perp abc} = 0$. Es claro que esta propiedad se preserva en el tiempo por las ecuaciones de movimiento *en ausencia de campo magnético*. Además, debido a la Regla **3**, todo producto $F^{\perp abc} F^{\perp a'b'c'} g_{bb'} g_{cc'}$ es cero cuando $a \neq a'$, de modo que el tensor energía momento es diagonal.

A continuación mostraremos que estas configuraciones tienen una interpretación algebraica en términos de subálgebras de E_{10} . Veremos que esta correspondencia puede sostenerse aún relajando la condición de campo magnético cero, pero preservando el caracter diagonal del tensor energía momento. Para mostrar esto, necesitaremos repasar la reformulación de supergravedad en 11 dimensiones en términos de un modelo σ .

3. Configuraciones geométricas y subálgebras regulares de E_{10}

Aplicaremos ahora la maquinaria de la sección previa para revelar una “dualidad” entre las configuraciones geométricas y una clase de subálgebras regulares de E_{10} .

3.1. Consideraciones Generales

Con el objetivo de hacer coincidir las cosmologías diagonales de Bianchi I con el modelo *sigma*, uno debe truncar el lagrangiano $\mathcal{E}_{10}/\mathcal{K}(\mathcal{E}_{10})$ de manera tal que la métrica g_{ab} sea diagonal. Este será el caso si la subálgebra S a la cual uno trunca no tiene ningún generador K^i_j con $i \neq j$. En verdad, los componentes de la métrica fuera de la diagonal son precisamente las exponenciales de los campos del modelo *sigma* asociado. El conjunto de raíces simples S no debería contener entonces ninguna raíz a nivel cero.

Consideremos subálgebras regulares “eléctricas” de E_{10} , para las cuales las raíces simples están todas a nivel uno, donde viven las variables del campo eléctrico 3-forma. Estas raíces pueden ser parametrizadas por 3 índices correspondientes a los índices de un campo eléctrico, con $i_1 < i_2 < i_3$. Los denotamos $\alpha_{i_1 i_2 i_3}$. Por ejemplo, $\alpha_{123} \equiv \alpha_{10}$. En términos de la parametrización β dada en [16, 18], uno tiene $\alpha_{i_1 i_2 i_3} = \beta^{i_1} + \beta^{i_2} + \beta^{i_3}$.

Ahora, para que S sea una subálgebra regular, debe satisfacer, como hemos visto, que la diferencia entre dos de sus raíces simples cualesquiera no sea una raíz de E_{10} : $\alpha_{i_1 i_2 i_3} - \alpha_{i'_1 i'_2 i'_3} \notin \Phi_{E_{10}}$ para cualquier par $\alpha_{i_1 i_2 i_3}$ y $\alpha_{i'_1 i'_2 i'_3}$ de raíces simples de S . Sin embargo, uno ve por inspección del conmutador de $E^{i_1 i_2 i_3}$ con $F_{i'_1 i'_2 i'_3}$ en Eq. (2.102) que $\alpha_{i_1 i_2 i_3} - \alpha_{i'_1 i'_2 i'_3}$ es una raíz de E_{10} sí y sólo sí los conjuntos $\{i_1, i_2, i_3\}$ y $\{i'_1, i'_2, i'_3\}$ tienen explícitamente dos puntos en común. Por ejemplo, si $i_1 = i'_1$, $i_2 = i'_2$ y $i_3 \neq i'_3$, el conmutador de $E^{i_1 i_2 i_3}$ con $F_{i'_1 i'_2 i'_3}$ produce el generador fuera de la diagonal $K_{i'_3}^{i_3}$ correspondiente a una raíz a nivel cero de E_{10} . Para satisfacer la condición requerida, uno debe evitar este caso, i.e., se debe elegir el conjunto de raíces simples de la subálgebra eléctrica S de manera que dado un par de índices (i_1, i_2) , existe a lo sumo uno i_3 tal que la raíz $\alpha_{i_j k}$ es una raíz simple de S , con (i, j, k) el reordenamiento de (i_1, i_2, i_3) tal que $i < j < k$.

Para cada una de las raíces simples $\alpha_{i_1 i_2 i_3}$ de S , uno puede asociar la línea (i_1, i_2, i_3) que conecta los tres puntos i_1 , i_2 y i_3 . Si uno hace esto, entonces ve que la condición de arriba es equivalente a la siguiente declaración: *el conjunto de puntos y líneas asociados con las raíces simples de S debe satisfacer la tercera Regla que define una configuración geométrica, esta es, que dos puntos determinen a lo sumo una línea* Así, esta condición geométrica tiene una interpretación algebraica elegante en términos de subálgebras regulares de E_{10} .

La primera regla, que establece que cada línea contiene 3 puntos, es una consecuencia del hecho que los generadores de E_{10} a nivel uno son las componentes de un tensor antisimétrico de 3 índices. La segunda regla, que establece que cada punto está en m líneas es menos fundamental desde el punto de vista algebraico ya que no se requiere para pedir que S sea una subálgebra regular. Fue impuesto en [21] para permitir soluciones isotrópicas en las direcciones del campo eléctrico. La mantenemos porque produce una estructura interesante (ver la siguiente subsección). Discutimos brevemente en las conclusiones qué sucede cuando esta condición es relajada.

3.2. Correspondencia entre diagramas de Dynkin y diagramas de configuración

Hemos mostrado que cada configuración geométrica (n_m, g_3) con $n \leq 10$ define una subálgebra regular S de E_{10} . Con el fin de determinar qué es esta subálgebra S , se necesita calcular, de acuerdo con el teorema citado en la Sección 5.11, la matriz de Cartan

$$C = [C_{i_1 i_2 i_3, i'_1 i'_2 i'_3}] = [\langle \alpha_{i_1 i_2 i_3} | \alpha_{i'_1 i'_2 i'_3} \rangle] \quad (3.21)$$

(las raíces reales de E_{10} tienen longitud cuadrada igual a 2). De acuerdo a ese mismo teorema, el álgebra S es luego, el álgebra de Kac-Moody de rango g con matriz de Cartan C , a menos que C tenga determinante cero, en tal caso S podría ser el cociente de esa álgebra por un ideal no trivial.

Utilizando por ejemplo la parametrización para la raíz dada en [16, 18] y la expresión del producto escalar en términos de esta parametrización, se verifica fácilmente que el producto escalar $\langle \alpha_{i_1 i_2 i_3} | \alpha_{i'_1 i'_2 i'_3} \rangle$ es igual a:

$$\langle \alpha_{i_1 i_2 i_3} | \alpha_{i'_1 i'_2 i'_3} \rangle = 2 \quad \text{si los 3 índices coinciden,} \quad (3.22)$$

$$= 1 \quad \text{si 2 y sólo 2 índices coinciden,} \quad (3.23)$$

$$= 0 \quad \text{si 1 y sólo 1 índice coinciden,} \quad (3.24)$$

$$= -1 \quad \text{si ningún índice coincide.} \quad (3.25)$$

La segunda posibilidad no aparece en nuestro caso ya que aquí tratamos con configuraciones geométricas. Por completitud, también mostramos los productos escalares de las raíces eléctricas α_{ijk} ($i < j < k$) con raíces de simetría $\alpha_{\ell m}$ ($\ell < m$) asociadas con los operadores de subida K_ℓ^m :

$$\langle \alpha_{ijk} | \alpha_{\ell m} \rangle = -1 \quad \text{si } \ell \in \{i, j, k\} \text{ y } m \notin \{i, j, k\} \quad (3.26)$$

$$= 0 \quad \text{si } \{\ell, m\} \subset \{i, j, k\} \text{ o } \{\ell, m\} \cap \{i, j, k\} = \emptyset, \quad (3.27)$$

$$= 1 \quad \text{si } \ell \notin \{i, j, k\} \text{ and } m \in \{i, j, k\} \quad (3.28)$$

así como los productos escalares de las raíces de simetría entre ellas mismas,

$$\langle \alpha_{ij} | \alpha_{\ell m} \rangle = -1 \quad \text{si } j = \ell \text{ or } i = m, \quad (3.29)$$

$$= 0 \quad \text{si } \{\ell, m\} \cap \{i, j\} = \emptyset, \quad (3.30)$$

$$= 1 \quad \text{if } i = \ell \text{ o } j \neq m, \quad (3.31)$$

$$= 2 \quad \text{si } \{\ell, m\} = \{i, j\}. \quad (3.32)$$

Una configuración geométrica dada puede asociarse con un “diagrama de incidencia de línea” que codifica las relaciones de incidencia entre sus líneas. A cada línea de (n_m, g_3) le corresponde un nodo en el diagrama de incidencia. Dos nodos están conectados por un lazo simple sí y sólo sí corresponden a líneas sin ningún punto en común (“líneas paralelas”). De lo contrario, no están conectados. Por inspección de los productos escalares de arriba, llegamos a la importante conclusión de que *el diagrama de Dynkin de la subálgebra regular S asociada con la configuración geométrica (n_m, g_3) es ni más ni menos que su diagrama de incidencia de línea*. Denominaremos al álgebra de Kac-Moody S el álgebra “dual.^a la configuración geométrica (n_m, g_3) ”.

Como las configuraciones geométricas poseen la propiedad que el número de líneas a través de cualquiera de sus puntos es igual a una constante m , el número de líneas paralela a cualquier línea dada es igual al número k que depende sólo de la configuración y no de la línea. De hecho, esto es cierto no sólo para $n \leq 10$ como puede verse, a partir del siguiente argumento. Para una configuración con n puntos, g líneas y m líneas a través de cada punto, cualquier línea dada Δ admite $3(m - 1)$ secantes verdaderas, llamémoslas $(m - 1)$ a través de cada uno de sus puntos.¹

Por definición, estas secantes son todas distintas, ya que ninguna de las líneas que Δ interseca en uno de sus puntos, digamos P , puede coincidir con una línea que esta interseca en otro de sus puntos, digamos P' , ya que la única línea que une a P con P' es Δ misma. Se sigue de acá que, el número total de líneas que Δ interseca es el número de secantes verdaderas más Δ misma, i.e. $3(m - 1) + 1$. Como consecuencia de esto, cada línea en la configuración admite $k = g - [3(m - 1) + 1]$ líneas paralelas, lo que se refleja en el hecho de que cada nodo en el diagrama de Dynkin asociado tiene el mismo número k de nodos adyacentes.

¹Una secante verdadera se define aquí como un línea, digamos Δ' , distinta de Δ y con una intersección no vacía con Δ .

4. Catálogo de diagramas de Dynkin correspondientes a Soluciones de supergravedad

4.1. Casos en que la dimensión del Algebra es Finita

Configuración Geométrica $(3_1, 1_3)$

Para ilustrar esta discusión, comenzamos construyendo el álgebra asociada a la configuración más simple $(3_1, 1_3)$.

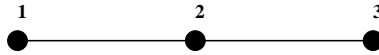


Figura 3.1: $(3_1, 1_3)$: La única configuración permitida para $n = 3$.

Este ejemplo también exhibe algunas sutilezas asociadas con el vínculo hamiltoniano con consiguiente necesidad de extender S cuando el álgebra dual a la configuración geométrica es finito dimensional.

A la luz de nuestra discusión, considerar la configuración geométrica $(3_1, 1_3)$ es equivalente a encender sólo la componente $A_{123}(x^0)$ de la 3-forma que multiplica al generador E^{123} en el elemento de grupo g y las componentes diagonales de la métrica correspondientes al generador de Cartan $h = [E^{123}, F_{123}]$. El álgebra tiene así, base $\{e, f, h\}$ con

$$e \equiv E^{123} \quad f \equiv F_{123} \quad h = [e, f] = -\frac{1}{3} \sum_{a \neq 1,2,3} K^a + \frac{2}{3} (K^1_1 + K^2_2 + K^3_3). \quad (3.33)$$

La matriz de Cartan no es sino (2) y es no degenerada. Esto define una subálgebra regular A_1 . Las relaciones de Chevalley-Serre se verifican fácilmente. La configuración $(3_1, 1_3)$ es entonces dual a A_1 .

Esta álgebra A_1 es simplemente el álgebra $\mathfrak{sl}(2)$ asociada con la raíz simple α_{10} . Como la forma de Killing del subálgebra de Cartan de A_1 es definida positiva, no se puede encontrar una solución del vínculo hamiltoniano si sólo se enciende A_1 . Es necesario agrandar A_1 (por lo menos) por una subálgebra de dimensión uno $\mathbb{R}l$ de $\mathfrak{h}_{E_{10}}$, que es tipo tiempo. Puede tomarse por l el elemento de Cartan $K^4_4 + K^5_5 + K^6_6 + K^7_7 + K^8_8 + K^9_9 + K^{10}_{10}$, que asegura isotropía en aquellas direcciones en las que no se apoya el campo eléctrico. Así, la subálgebra regular de E_{10} apropiada en este caso es $A_1 \oplus \mathbb{R}l$.

Configuración geométrica $(6_1, 2_3)$

Para $n = 6$ comenzamos con la configuración de línea doble , $(6_1, 2_3)$, en la Figura 3.2.

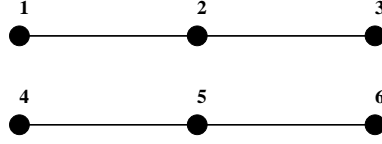


Figura 3.2: $(6_1, 2_3)$: La configuración más simple permitida para $n = 6$.

Este grafo da los siguientes generadores

$$e_1 \equiv E^{123}, \quad f_1 \equiv F_{123}, \quad h_1 \equiv -\frac{1}{3} \sum_{a \neq 1,2,3} K^a + \frac{2}{3} (K^1_1 + K^2_2 + K^3_3)$$

$$e_2 \equiv E^{456}, \quad f_2 \equiv F_{456}, \quad h_2 \equiv -\frac{1}{3} \sum_{a \neq 4,5,6} K^a + \frac{2}{3} (K^4_4 + K^5_5 + K^6_6)$$

con los siguientes conmutadores,

$$[e_i, f_i] = h_i \quad [h_i, e_i] = 2e_i \quad [h_i, f_i] = -2f_i \quad (i = 1, 2). \quad (3.35)$$

Usando las reglas señaladas arriba, se encuentra fácilmente que la matriz de Cartan es

$$A_{(6_1, 2_3)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

que es la matriz de Cartan de A_2 , $A_{(6_1, 2_3)} = A_2$. De esta manera, la configuración $(6_1, 2_3)$ en la Figura 3.2 es dual a A_2 , cuyo diagrama de Dynkin se muestra en la Figura 3.3.

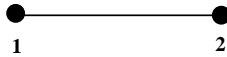


Figura 3.3: Diagrama de Dynkin de A_2 , dual a la configuración $(6_1, 2_3)$.

Notar que las raíces α_{123} y α_{456} son α_{10} y $\alpha_{10} + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5$ de modo que esta subálgebra es en efecto una subálgebra regular (no maximal)

de E_6 . El generador correspondiente a la raíz máxima, θ , de A_2 aparece naturalmente como el generador E^{123456} a nivel 2, i.e.

$$e_\theta \equiv E^{123456} = [E^{123}, E^{456}]. \quad (3.37)$$

Aunque se garantiza que esto es así del argumento general de arriba, es instructivo y fácil verificar explícitamente las relaciones de Serre. Estas son

$$[e_1, [e_1, e_2]] = [e_2, [e_2, e_1]] = 0 \quad [f_1, [f_1, f_2]] = [f_2, [f_2, f_1]] = 0, \quad (3.38)$$

y se satisfacen ya que el nivel 3-generadores son aniquilados por argumentos de antisimetría, e.g.

$$[E^{123}, [E^{123}, E^{456}]] = [E^{123}, E^{123456}] = E^{1|23123456} + E^{2|31123456} + E^{3|12123456} = 0, \quad (3.39)$$

donde cada generador en el último paso se anula individualmente.

Como la forma de Killing de la subálgebra de Cartan A_2 tiene signatura euclídea, uno debe extender A_2 por una subálgebra $\mathbb{R}l$ of $\mathfrak{h}_{E_{10}}$ tipo tiempo apropiada. Tomamos $l = K^7_7 + K^8_8 + K^9_9 + K^{10}_{10}$. En $A_2 \oplus \mathbb{R}l$, puede satisfacerse el vínculo hamiltoniano. Además, como $A_2 \oplus \mathbb{R}l$ tiene generadores sólo hasta nivel dos, las ecuaciones de movimiento del modelo *sigma* no lineal son equivalentes a las ecuaciones dinámicas de supergravedad sin necesidad de implementar truncamiento de nivel adicional.

El hecho de que haya un generador de nivel 2 implica la presencia genérica de un campo magnético distinto de cero. El vínculo de momento y la ley de Gauss son automáticamente satisfechos ya que las únicas componentes distintas de cero de la 4-forma $F_{\alpha\beta\gamma\delta}$ son F_{0123} , F_{0456} and $F_{789(10)}$.

Configuración Geométrica $(6_2, 4_3)$

Ahora tratamos la configuración $(6_2, 4_3)$, que se muestra en la Figura 3.4. A pesar de que el grafo es más complicado, las álgebras correspondientes son, en realidad mucho más simples.

Los generadores asociados a raíces simples son

$$e_1 = E^{123} \quad e_2 = E^{145} \quad e_3 = E^{246} \quad e_4 = E^{356}. \quad (3.40)$$

Lo primero que debería notarse es que en contraste con el caso previo, ahora todos los generadores tienen un índice en común ya que en el grafo cualquier par de líneas comparten un nodo. Esto implica que las 4 líneas en $(6_2, 4_3)$ definen 4 subálgebras A_1 *commutantes*,

$$(6_2, 4_3) \quad \iff \quad \mathfrak{g}_{(6_2, 4_3)} = A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1. \quad (3.41)$$

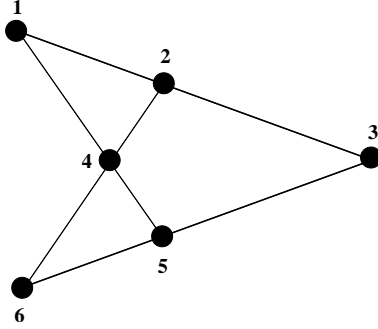


Figura 3.4: $(6_2, 4_3)$: La primera configuración con líneas que se intersectan.

Nuevamente, aunque esto no sea necesario, uno puede asegurarse que las relaciones de Chevalley-Serre sean efectivamente satisfechas. Por ejemplo, el elemento de Cartan $h = [E^{b_1 b_2 b_3}, F_{b_1 b_2 b_3}]$ (sin suma en los distintos índices fijos b_1, b_2, b_3) se lee

$$h = -\frac{1}{3} \sum_{a \neq b_1, b_2, b_3} K^a + \frac{2}{3} (K^{b_1}_{b_1} + K^{b_2}_{b_2} + K^{b_3}_{b_3}). \quad (3.42)$$

De esta manera, el conmutador $[h, E^{b_i c d}]$ se anula cada vez que $E^{b_i c d}$ tiene sólo un b -índice

$$\begin{aligned} [h, E^{b_i c d}] &= -\frac{1}{3} [(K^c_c + K^d_d), E^{b_i c d}] + \frac{2}{3} [(K^{b_1}_{b_1} + K^{b_2}_{b_2} + K^{b_3}_{b_3}), E^{b_i c d}] \\ \text{æ} &= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) E^{b_i c d} = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Además, conmutadores múltiples de los operadores de paso son inmediatamente aniquilados a nivel 2 siempre que tengan uno o más índices en común, e.g.

$$[E^{123}, E^{145}] = E^{123145} = 0. \quad (3.44)$$

Para satisfacer el vínculo hamiltoniano uno debe extender el álgebra tomando una suma directa con $\mathbb{R}l$, $l = K^7_7 + K^8_8 + K^9_9 + K^{10}_{10}$. Así, el álgebra final es $A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus \mathbb{R}l$. Como no existe campo magnético, el vínculo de momento y la ley de Gauss se satisfacen idénticamente.

La solución gravitacional asociada a esta configuración generaliza lo que se encontró en [21].

Configuración Geométrica $(7_3, 7_3)$

Ahora pasaremos a la única configuración que existe para $n = 7$, que tiene siete líneas y en consecuencia denotadas $(7_3, 7_3)$. El grafo se muestra en la Figura 3.5. Aquellos lectores familiarizados con los octoniones reconocerán esto como los así llamados *plano Fano*, que codifica la tabla completa de multiplicación de los octoniones.

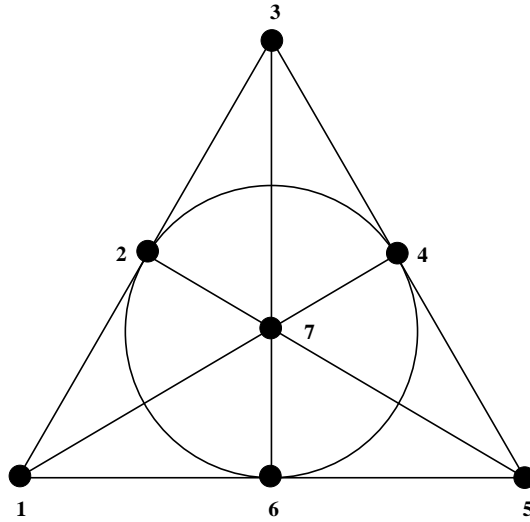


Figura 3.5: $(7_3, 7_3)$: El *plano Fano*, dual al álgebra de Lie $A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$.

De la Figura 3.5 notamos que cualesquiera dos líneas tienen exactamente un nodo en común y entonces las correspondientes álgebras serán conmutantes. Como el grafo tiene 7 líneas, concluimos que el plano Fano es dual a la suma directa de siete álgebras A_1 ,

$$(7_3, 7_3) \iff \mathfrak{g}_{\text{Fano}} = A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1. \quad (3.45)$$

Al haber siete puntos, el álgebra es en realidad encajada en E_7 . Notemos que las A_1 's NO son las subálgebras $\mathfrak{sl}(2)$ asociadas con las raíces simples de E_7 ya que las A_1 's en $\mathfrak{g}_{\text{Fano}}$ son conmutantes.

Aunque de rango 7, el enbebimiento regular de $\mathfrak{g}_{\text{Fano}}$ en E_7 no es maximal sino que es parte de la siguiente cadena de enbebimientos regulares

maximales:

$$A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \subset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus D_4 \subset A_1 \oplus D_6 \subset E_7 \quad (3.46)$$

como puede verse usando el argumento de Dynkin basado en la raíz máxima [23]. Las álgebras intermediarias que se encuentran en (3.46) tienen como operadores de subida (con la elección de $A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$ capturada por la Figura 3.5) E^{123} , E^{174} , E^{165} , K_2^3 , K_5^6 , K_4^7 , E^{245} (para $A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus D_4$) y E^{174} , K_1^4 , K_4^7 , K_3^5 , K_2^3 , K_5^6 , E^{123} (para $A_1 \oplus D_6$).

Al ser el álgebra finito dimensional, se necesita suplementar esto por una superálgebra $\mathbb{R}l$ tipo tiempo de dimensión uno de $\mathfrak{h}_{E_{10}}$ con el objeto de satisfacer el vínculo hamiltoniano. Uno podría tomar $l = K_8^8 + K_9^9 + K_{10}^{10}$, que es ortogonal a ésta. Finalmente, como no existe elemento de nivel dos, nuevamente no existe campo magnético y en consecuencia no hay vínculo de momento ni de ley de Gauss de que preocuparse. Todas las soluciones del modelo *sigma* no lineal para $A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus \mathbb{R}l$ que satisfacen el vínculo hamiltoniano definen soluciones de la supergravedad en once dimensiones.

Configuración geométrica $(8_3, 8_3)$ El último caso finito dimensional lo provee la configuración geométrica $(8_3, 8_3)$. Ya que existen ocho puntos y ocho líneas, el álgebra dual es un álgebra de rango 8 encajada regularmente en E_8 . Aplicando las reglas deducidas arriba a la configuración geométrica $(8_3, 8_3)$, representada en Figura 3.6, uno encuentra fácilmente

$$\mathfrak{g}_{(8_3, 8_3)} = A_2 \oplus A_2 \oplus A_2 \oplus A_2. \quad (3.47)$$

Esta es una subálgebra de E_8 de rango 8, no obstante, no es una subálgebra regular maximal, sino parte de una cadena de enbebimientos regulares

$$A_2 \oplus A_2 \oplus A_2 \oplus A_2 \subset A_2 \oplus E_6 \subset E_8. \quad (3.48)$$

Con la numeración de las líneas de la Figura 3.6, el álgebra intermediaria $A_2 \oplus E_6$ puede tomarse de modo tal que los operadores de subida sean E^{123} , E^{568} (para A_2) y K_1^2 , K_2^3 , K_5^6 , K_6^8 , K_4^7 , E^{145} para E_6 .

Con el propósito de satisfacer el vínculo hamiltoniano, agregamos $\mathbb{R}l$ con $l = K_9^9 + K_{10}^{10}$. El álgebra final es entonces $A_2 \oplus A_2 \oplus A_2 \oplus A_2 \oplus \mathbb{R}l$.

No hay campos de nivel 3 en $A_2 \oplus A_2 \oplus A_2 \oplus A_2$, o sea que, el truncamiento de nivel 3 es automático en este modelo. Sin embargo, debido al campo magnético de nivel 2 genéricamente presente, los vínculos de momento

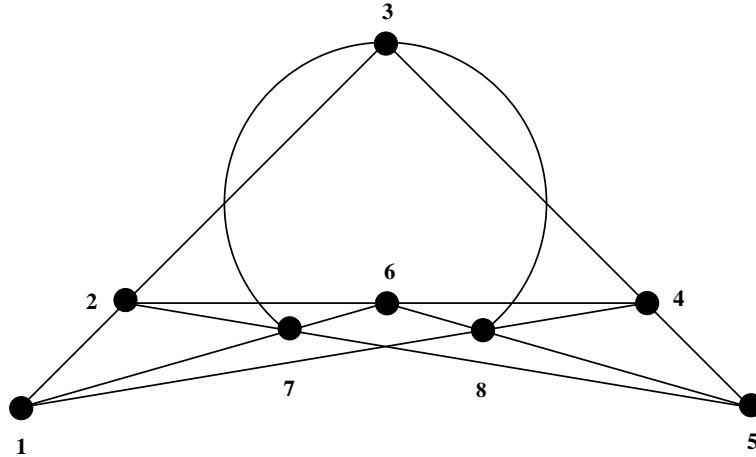


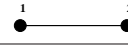

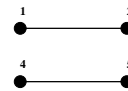
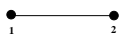
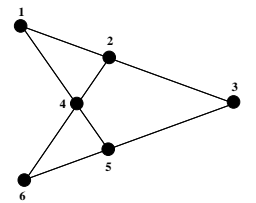
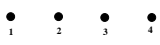
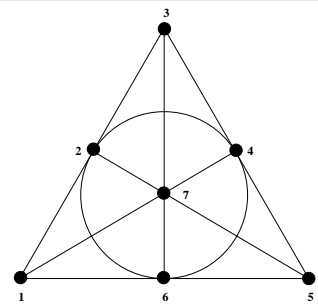
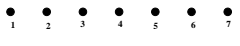
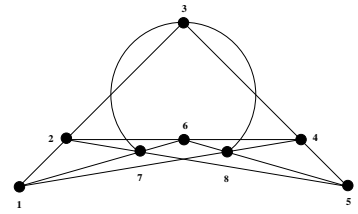
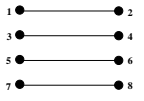
Figura 3.6: La configuración geométrica $(8_3, 8_3)$, dual al álgebra de Lie $A_2 \oplus A_2 \oplus A_2 \oplus A_2$.

y de Gauss necesitan de análisis. Las únicas componentes no nulas del campo magnético que aparecen en el modelo son $F_{479(10)}$, $F_{289(10)}$, $F_{369(10)}$ and $F_{159(10)}$. Por tener estas siempre al menos dos índices (9 and 10) distintos de los índices en las componentes del campo eléctrico, el vínculo de momento se satisface. Además, como comparten el para (9, 10), la ley de Gauss también se satisface. En consecuencia, todas las soluciones del modelo *sigma* no lineal para $A_2 \oplus A_2 \oplus A_2 \oplus A_2 \oplus \mathbb{R}l$ que satisfacen el vínculo hamiltoniano definen soluciones de la supergravedad en once dimensiones.

4.2. Casos en los que la dimensión del álgebra es infinita

Configuración geométrica $(9_m, g_3)$

Todas las álgebras que provienen de configuraciones $n = 9$ están encajadas naturalmente en $E = 9$. Resultan ser infinito dimensionales contrariamente a los casos con $n \leq 8$. Además, por el hecho de que estas involucran, como veremos más adelante, a las álgebras afines y las matrices de Cartan degeneradas, son obtenidas a partir de álgebras de Kac-Moody a través de

Configuración	diagrama de Dynkin	de álgebra de Lie	
$(3_1, 1_3)$			$\mathfrak{g}_{(3_1, 1_3)} = A_1$
$(6_1, 2_3)$			$\mathfrak{g}_{(6_1, 2_3)} = A_2$
$(6_2, 4_3)$			$\mathfrak{g}_{(6_2, 4_3)} = A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$
$(7_3, 7_3)$			$\mathfrak{g}_{(7_3, 7_3)} = A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$
$(8_3, 8_3)$			$\mathfrak{g}_{(8_3, 8_3)} = A_2 \oplus A_2 \oplus A_2 \oplus A_2$

Cuadro 3.1: Todas las configuraciones para $n \leq 8$ y sus álgebras de Lie duales finito dimensionales.

cocientes no triviales. En total, existen 7 configuraciones distintas con nueve nodos, que es lo que consideraremos.

Al ser las álgebras infinito dimensionales, uno debe truncar a nivel 2 con el objeto de hacer coincidir las ecuaciones de supergravedad Bianchi I con las ecuaciones del modelo *sigma* no lineal. Además, si se toma distinto de cero, el campo magnético debe satisfacer los vínculos relevantes del momento y de Gauss.

Configuración geométrica $(9_1, 3_3)$

La configuración geométrica $(9_1, 3_3)$ es de algún modo trivial y está dada en la Figura 3.7.

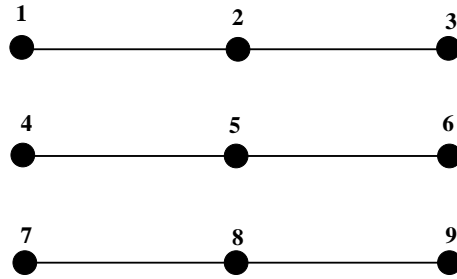


Figura 3.7: La configuración geométrica $(9_1, 3_3)$.

Por aplicación directa de las reglas, deducimos que los diagramas de Dynkin asociados consisten de tres nodos (correspondientes a las tres líneas $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5, 6\}$ y $\{7, 8, 9\}$) que deben estar todas conectadas ya que las líneas correspondientes en la configuración son paralelas. Esto da la matriz de Cartan A_2^+ , i.e. la extensión afín no-twistada de A_2 ,

$$A(A_2^+) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

cuyo diagrama de Dynkin se muestra en la Figura 3.8.

La matriz de Cartan de A_2^+ es degenerada y por esto no se garantiza que el álgebra generada por los operadores de subida

$$e_1 = E^{123} \quad e_2 = E^{456} \quad e_3 = E^{789}, \quad (3.50)$$

los operadores de bajada

$$f_1 = F_{123} \quad f_2 = F_{456} \quad f_3 = F^{789}, \quad (3.51)$$

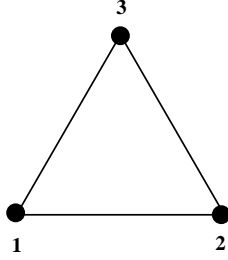


Figura 3.8: The Dynkin diagram of A_2^+ .

y los elementos de Cartan correspondientes dados por Eq. (3.42),

$$h_1 = [e_1, f_1] = -\frac{1}{3} \sum_{a \neq 1,2,3} K^a + \frac{2}{3}(K^1_1 + K^2_2 + K^3_3), \quad (3.52)$$

$$h_2 = [e_2, f_2] = -\frac{1}{3} \sum_{a \neq 4,5,6} K^a + \frac{2}{3}(K^4_4 + K^5_5 + K^6_6), \quad (3.53)$$

$$h_3 = [e_3, f_3] = -\frac{1}{3} \sum_{a \neq 7,8,9} K^a + \frac{2}{3}(K^7_7 + K^8_8 + K^9_9), \quad (3.54)$$

sea el álgebra de Kac-Moody no-twistada A_2^+ .

En el caso de la configuración $(9_1, 3_3)$, tenemos que todos los generadores $\{h_i, e_i, f_i\}$ satisfacen las relaciones de Chevalley-Serre asociadas con la matriz de Cartan de A_2^+ , sin agrandamiento de la subálgebra de Cartan para contener el operador de escala d . Así, el álgebra dual a $(9_1, 3_3)$ debe o bien ser el álgebra de corrientes A_2^J o bien su cociente por su centro - el álgebra de loop \tilde{A}_2 . Este debería ser el caso si el centro fuese representado trivialmente. Pero la carga central es no trivial y está dada por

$$c \equiv h_1 + h_2 + h_3 = -K^{10}_{10}, \quad (3.55)$$

que no se anula. Entonces, el álgebra relevante es el álgebra de corrientes $A_2^J \equiv (A_2^+)'$.

Verificar que c conmuta con todos los generadores de A_2^J es directo. También es posible definir, dentro de la subálgebra de Cartan de E_{10} , un elemento d que juega el papel de un operador de escala. Este agrandamiento de $(A_2^+)'$ conduce al álgebra de Kac-Moody completa A_2^+ . Esto es necesario a fin de

tener un producto escalar en la subálgebra de Cartan que es de signatura lorentziana, como se requiere si uno quiere resolver el vínculo hamiltoniano dentro del álgebra.

Elgiendo E^{123} como el generador “afín”, existe una familia de operadores de escala de 6 parámetros,

$$d = a_1 K^1_1 + a_2 K^2_2 + a_3 K^3_3 + b_1 K^4_4 + b_2 K^5_5 + b_3 K^6_6 + c_1 K^7_7 + c_2 K^8_8 + c_3 K^9_9 + p K^{10}_{10} \quad (3.56)$$

con

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 1 \\ b_1 + b_2 + b_3 &= c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= 1 - 2p. \end{aligned} \quad (3.57)$$

La elección más simple y conveniente es tomar para d ,

$$d = K^1_1. \quad (3.58)$$

Verifiquemos que el generador nulo e_δ ,

$$e_\delta \equiv [E^{123}, [E^{456}, E^{789}]], \quad (3.59)$$

asociado con la raíz nula

$$\delta = \alpha_0 + \theta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad (3.60)$$

donde $\theta = \alpha_2 + \alpha_3$ es la raíz máxima de A_2 , es en realidad un autovector con autovalor 1 para acción adjunta de d . A este fin observemos que

$$[d, E^{123}] = [K^1_1, E^{123}] = E^{123}, \quad [d, E^{456}] = [d, E^{789}] = 0. \quad (3.61)$$

Es decir, d cuenta en verdad el número de veces que E^{123} aparece en cualquier conmutador de manera de obtener

$$[d, e_\delta] = e_\delta, \quad (3.62)$$

como se quería.

Notemos que entre los vínculos de momentos y la ley de Gauss la única condición no idénticamente nula en el campo magnético es la décima componente del vínculo de momento.

Configuración Geométrica $(9_2, 6_3)$

También existen configuraciones geométricas $(9_2, 6_3)$. Comencemos con $(9_2, 6_3)_1$, mostrado en la Figura 3.9. La configuración consiste de dos conjuntos con tres triples distintos en cada conjunto: $S_{(1)} = \{(123), (456), (789)\}$, $S_{(2)} = \{(147), (258), (369)\}$. Por aplicación directa de las reglas de arriba podemos decir que todos los generadores asociados con cada conjunto conmutará con los generadores del otro conjunto. Esto es, la matriz de Cartan correspondiente puede descomponerse y además es igual a la suma directa de dos A_2^+ 's. Esta matriz de 6×6 tiene rango 4.

Como los generadores $\{h_i, e_i, f_i\}$ ($i = 1, \dots, 6$) of $\mathfrak{g}_{(9_2, 6_3)_1}$ cumplen con las

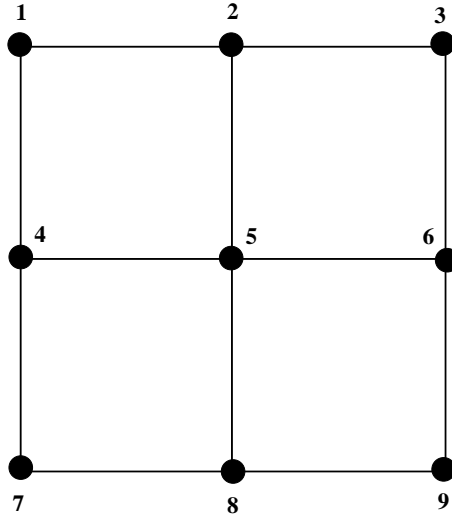


Figura 3.9: La configuración geométrica $(9_2, 6_3)_1$.

relaciones de Chevalley-Serre asociadas con la matriz $A_2^+ \oplus A_2^+$ (no agrandada, i.e., no su realización), el álgebra $\mathfrak{g}_{(9_2, 6_3)_1}$ dual a $(9_2, 6_3)_1$ es o bien el álgebra derivada $(A_2^+ \oplus A_2^+)' = (A_2^+)' \oplus (A_2^+)'$ o bien un cociente de esta álgebra por un subespacio de su centro. El centro de $(A_2^+)' \oplus (A_2^+)'$ es de dimensión 2 y generado por las dos cargas centrales $c_{(1)} = h_1 + h_2 + h_3$ y $c_{(2)} = h_4 + h_5 + h_6$. Es claro que estas cargas centrales no son independientes en el álgebra $\mathfrak{g}_{(9_2, 6_3)_1}$ ya que

$$c_{(1)} = c_{(2)} = -K^{10}_{10}. \quad (3.63)$$

Las dos (A_2^+) 's comparten entonces la misma carga central. De esta manera, $\mathfrak{g}_{(9_2,6_3)_1}$ es el cociente de $(A_2^+)' \oplus (A_2^+)'$ por el ideal $\mathbb{R}(c_{(1)} - c_{(2)})$,

$$\mathfrak{g}_{(9_2,6_3)_1} = \frac{(A_2^+)' \oplus (A_2^+)' }{\mathbb{R}(c_{(1)} - c_{(2)})}. \quad (3.64)$$

Esta es el álgebra de corrientes $(A_2 \oplus A_2)^J$ de $A_2 \oplus A_2$ con una sola carga central ((2.140) con una única c).

Nuevamente introducimos un elemento de escala (simple) dentro de la subálgebra de Cartan de E_{10} . Tomando las raíces afines como α_{123} and α_{147} (con generadores E^{123} y E^{147}), uno puede elegir

$$d = K^1_1, \quad (3.65)$$

como antes. En el álgebra agrandada con el operador de escala, el vínculo hamiltoniano puede satisfacerse ya que la métrica en la subálgebra de Cartan tiene signatura lorentziana.

Un nuevo fenómeno interesante ocurre también para esta configuración, digamos que las raíces nulas de ambas álgebras son iguales. Entonces el espacio vectorial expandido por las raíces de $\frac{(A_2^+)' \oplus (A_2^+)' }{\mathbb{R}(c_{(1)} - c_{(2)})}$ en el espacio de las raíces de E_9 es de dimensión 5. Esta “desaparición de una dimensión.”^{es} compatible con el hecho de que ambas raíces nulas tienen el mismo comportamiento de escala ante d y es posible ya que no tenemos un enbebimiento el álgebra de Kac-Moody completa $A_2^+ \oplus A_2^+$ con dos operadores de escala independientes bajo los cuales las dos raíces nulas se comporten de manera distinta. Notemos que, por supuesto, los generadores correspondientes $[E^{123}, [E^{456}, E^{789}]]$ y $[E^{147}, [E^{258}, E^{369}]]$ son linealmente independientes.

La otra configuración $(9_2, 6_3)$ es la configuración $(9_2, 6_3)_2$, ilustrada en la Figura 3.10.

El análisis es análogo al de la configuración $(9_1, 3_3)$. El cálculo de la matriz de Cartan es directo y da el diagrama de Dynkin que se muestra en la Figura 3.11, que es reconocido por ser el diagrama de la extensión afín no-twistada A_5^+ de A_5 .

El álgebra dual es ahora el álgebra de corrientes (A_5^+) , con carga central $c = -K^{10}_{10}$. Si uno mantiene α_{123} como la raíz afín, entonces puede añadirle el operador de escala $d = K^1_1$ de manera de obtener el álgebra de Kac-Moody completa A_5^+ .

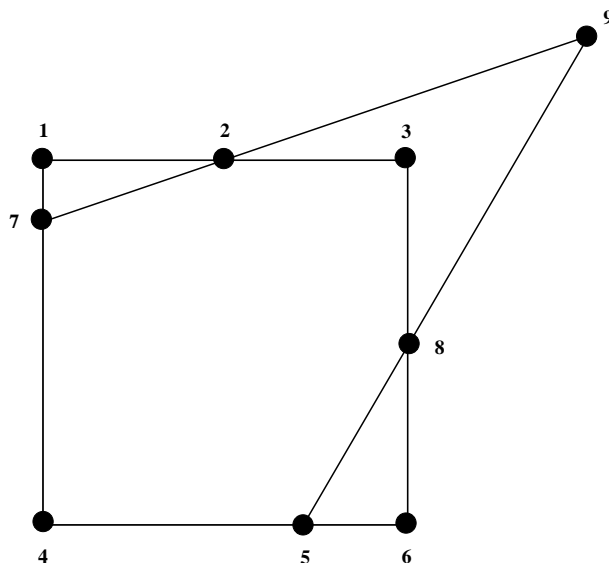


Figura 3.10: La configuración geométrica $(9_2, 6_3)_2$.

Configuración geométrica $(9_3, 9_3)$

Existen tres configuraciones geométricas $(9_3, 9_3)$. Su tratamiento es una generalización directa de lo que hemos estado discutiendo antes. Consideremos primero la configuración $(9_3, 9_3)_1$, que se muestra en la Figura 3.12.

Inspeccionando la configuración de Pappus notamos que esta consiste de tres conjuntos con tres triples distintos en cada uno: $S_1 = \{(123), (456), (789)\}$, $S_2 = \{(159), (368), (247)\}$, $S_3 = \{(269), (357), (148)\}$. Entonces, su matriz de Cartan es descomponible y es la suma directa de tres veces la matriz de Cartan A_2^+ de la extensión afín no-twistada de A_2 . Tiene rango 6. Como en los ejemplos previos, esto sin embargo, no implica que el álgebra completa asociada a la configuración de Pappus sea una suma directa de álgebras A_2^+ o de álgebras derivadas. Se tienen cocientes no triviales porque los tres $(A_2^+)'$ comparten la misma carga central. En verdad, uno encuentra nuevamente de la misma manera que arriba, la relación

$$c_{(1)} = c_{(2)} = c_{(3)} = -K_{10}^{10}. \quad (3.66)$$

Es decir, $\mathfrak{g}_{\text{Pappus}} \equiv \mathfrak{g}_{(9_3, 9_3)_1}$ es el cociente de $(A_2^+)' \oplus (A_2^+)' \oplus (A_2^+)'$ por el ideal $\mathbb{R}(c_{(1)} - c_{(2)}) \oplus \mathbb{R}(c_{(1)} - c_{(3)})$, i.e., el álgebra de corrientes $(A_2 \oplus A_2 \oplus A_2)^J$

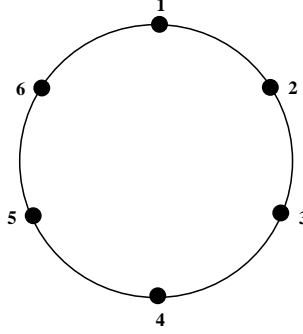


Figura 3.11: El diagrama de Dynkin A_5^+ , dual a la configuración geométrica $(9_2, 6_3)_2$.

con una única carga central,

$$\mathfrak{g}_{\text{Pappus}} = \frac{(A_2^+)' \oplus (A_2^+)' \oplus (A_2^+)'}{\mathbb{R}(c_{(1)} - c_{(2)}) \oplus \mathbb{R}(c_{(1)} - c_{(3)})} = (A_2 \oplus A_2 \oplus A_2)^J. \quad (3.67)$$

En cuanto a las raíces afines como α_{123} , α_{159} y α_{148} , uno puede añadir al álgebra el operador de escala $d = K^1_1$, una tarea necesaria para hacer posible obtener soluciones no triviales del vínculo hamiltoniano dentro del álgebra.

Las dos configuraciones $n = 9$ restantes con 9 líneas se muestran en las Figuras 3.13 y 3.14, respectivamente.

La configuración geométrica $(9_3, 9_3)_2$ conduce al diagrama de Dynkin de A_8^+ y al álgebra derivada $(A_8^+)' \equiv A_8^J$. Tomando α_{123} como la raíz afín, uno puede añadir el elemento de escala

$$d = \frac{1}{6}(2K^1_1 + 2K^2_2 + 2K^3_3 - K^4_4 - K^5_5 - K^6_6 - K^7_7 + 2K^8_8 - K^9_9 - 2K^{10}_{10}) \quad (3.68)$$

para obtener el álgebra de Kac-Moody completa A_8^+ .

La configuración $(9_3, 9_3)_3$ conduce al diagrama de Dynkin de $A_2^+ \oplus A_5^+$ y al álgebra derivada $\frac{(A_2^+)' \oplus (A_5^+)'}{\mathbb{R}(2c_{(1)} - c_{(2)})}$ con una única carga central. Tomando α_{123} y α_{146} como las raíces afines, existe una familia de un parámetro de operadores

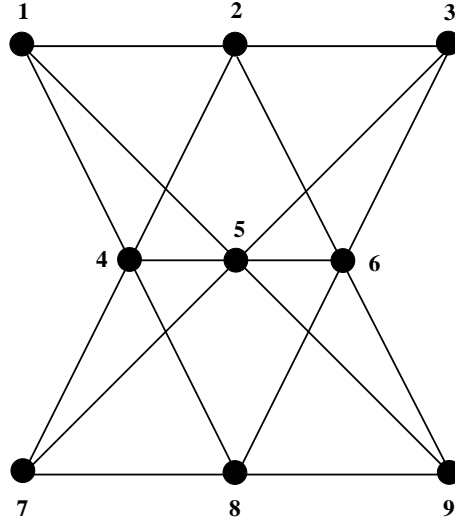


Figura 3.12: $(9_3, 9_3)_1$: Esta es la llamada *configuración Pappus* .

de escala de la forma

$$\begin{aligned}
 d = & \frac{1}{6}(5K^1_1 + 4K^2_2 + 3K^3_3 + 2K^4_4 - 5K^5_5 - K^6_6 - 3K^7_7 + K^8_8) \\
 & + \frac{p}{2}(-K^1_1 + 2K^2_2 - K^3_3 + 2K^4_4 - K^5_5 - K^6_6 - K^7_7 - K^8_8 + 2K^9_9) \\
 & + \frac{1}{4}(3 + 4p + 9p^2)K^{10}_{10}. \tag{3.69}
 \end{aligned}$$

Notar que este operador en realidad cuenta el número de raíces α_{146} pero dos veces el número de raíces α_{123} . Esto está en concordancia con el hecho de que el ideal es de la forma $\mathbb{R}(2c_{(1)} - c_{(2)})$. Los diagramas de Dynkin correspondientes se muestran en las Figuras 3.15 y 3.16, respectivamente.

Configuración geométrica $(9_4, 12_3)$

La configuración geométrica se muestra en la Figura 3.17. Encontramos el diagrama de Dynkin de $A_2^+ \oplus A_2^+ \oplus A_2^+ \oplus A_2^+$. El álgebra relevante es entonces la suma directa de las álgebras derivadas correspondientes con la misma carga central, i.e.

$$\mathfrak{g}_{(9_4, 12_3)} = \frac{(A_2^+)' \oplus (A_2^+)' \oplus (A_2^+)' \oplus (A_2^+)'}{\mathbb{R}(c_{(1)} - c_{(2)}) \oplus \mathbb{R}(c_{(1)} - c_{(3)}) \oplus \mathbb{R}(c_{(1)} - c_{(4)})}. \tag{3.70}$$

El operador de escala $d = K^1_1$ puede ser agregado al álgebra.

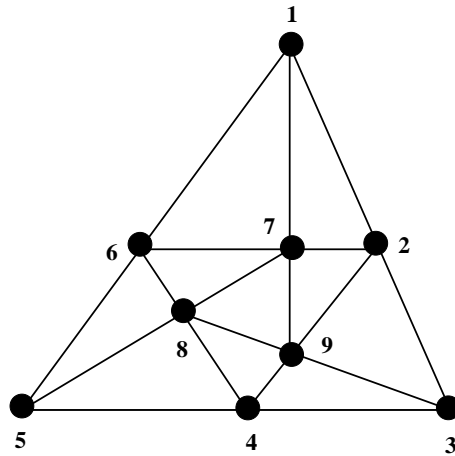
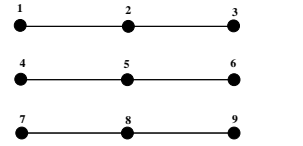
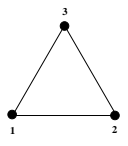
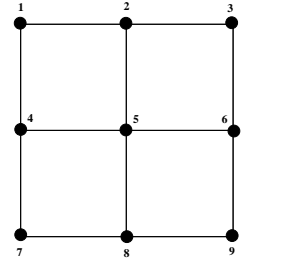
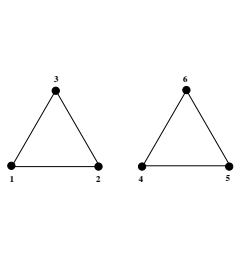
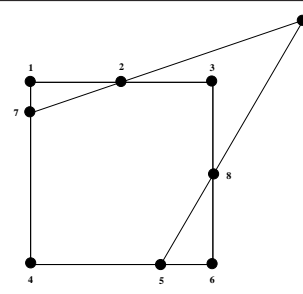
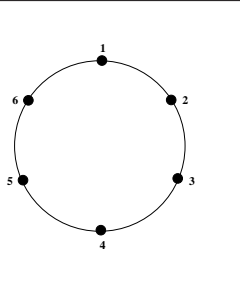
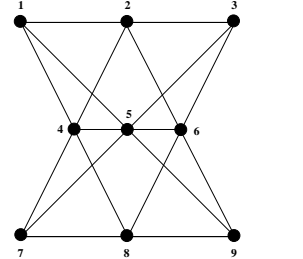
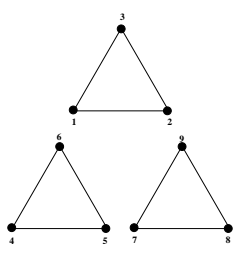
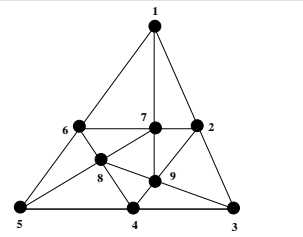
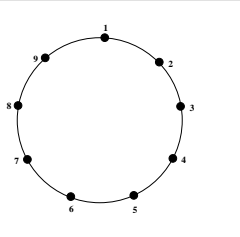


Figura 3.13: La configuración geométrica $(9_3, 9_3)_2$.

Este resultado en $(9_4, 12_3)$ está íntimamente conectado con el análisis de la configuración geométrica $(8_3, 8_3)$, por lo cual el álgebra es $A_2 \oplus A_2 \oplus A_2 \oplus A_2$. Esta álgebra puede ser encajada en E_8 y en consecuencia el álgebra de corrientes correspondiente con una única carga central puede ser encajada en el álgebra de corrientes $E'_9 \equiv (E_8^+)'$ de E_8 . Por el lado de las configuraciones geométricas, la afinización de $A_2 \oplus A_2 \oplus A_2 \oplus A_2$ corresponde a agregar un punto, digamos 9, a $(8_3, 8_3)$ y dibujar las cuatro líneas que conectan a este nuevo punto a los cuatro pares de puntos no conectados $(8_3, 8_3)$. Esto produce $(9_4, 12_3)$. Notemos que este es el único caso para el cual es posible extender una configuración $n = p$ a una configuración $n = p + 1$ mediante la inclusión de un punto adicional directamente en la configuración.

	Configuración	diagram Dynkin	de álgebra de Lie
$(9_1, 3_3)$			$\mathfrak{g}_{(9_1, 3_3)} = A_2^J$
$(9_2, 6_3)_1$			$\mathfrak{g}_{(9_2, 6_3)_1} = (A_2 \oplus A_2)^J$
$(9_2, 6_3)_2$			$\mathfrak{g}_{(9_2, 6_3)_2} = A_5^J$
$(9_3, 9_3)_1$			$\mathfrak{g}_{(9_3, 9_3)_1} = (A_2 \oplus A_2 \oplus A_2)^J$
$(9_3, 9_3)_2$			$\mathfrak{g}_{(9_3, 9_3)_2} = A_8^J$

Cuadro 3.2: configuraciones $n = 9$ y sus álgebras de Kac-Moody afines duales.

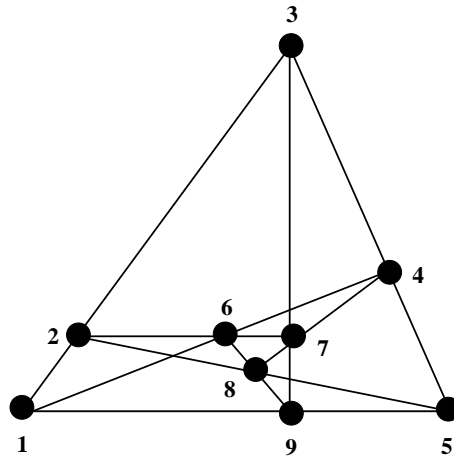


Figura 3.14: La configuración geométrica $(9_3, 9_3)_3$.

Configuración geométrica $(10_m, g_3)$

Como veremos pronto, las subálgebras construidas a partir de configuraciones con diez nodos dan lugar a subálgebras lorentzianas de E_{10} , excepto en dos casos, denotados $(10_3, 10_3)_4$ y $(10_3, 10_3)_7$ en las Tablas 4 y 5 en [21], Para los cuales la matriz de Cartan tiene determinante cero.

Al ser las álgebras de rango 10 infinito dimensionales, uno debe nuevamente truncar a nivel 2 con el objeto de hacer coincidir las ecuaciones de Bianchi I de supergravedad con las ecuaciones del modelo *sigma* no lineal. Además, si se toma distinto de cero, el campo magnético debe satisfacer los vínculos relevantes de momento y de Gauss.

El álgebra de Petersen

Primero ilustraremos la situación simple sin matriz de Cartan degenerada, por lo cual el teorema del Apéndice se aplica directamente. Consideramos explícitamente la bien conocida *Configuración Desargues*, denotada por $(10_3, 10_3)_3$, para la cual emerge un nuevo hecho fascinante, digamos que el diagrama de Dynkin dual a esta *también* corresponde en sí mismo a una configuración geométrica. De hecho, el diagrama de Dynkin dual resulta ser el famoso *grafo de Petersen*, notado $(10_3, 15_2)$. Estos se ven en las Figuras 3.18 y 3.19, respectivamente.

Para construir el diagrama de Dynkin primero debemos observar que ca-

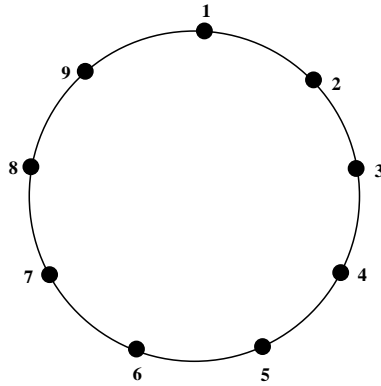


Figura 3.15: El diagrama de Dynkin de A_8^+ asociado con la configuración $(9_3, 9_3)_2$.

da línea en la configuración está desconectada de las otras tres líneas, e.g. $\{4, 1, 7\}$ no tiene nodos en común con $\{2, 3, 9\}$, $\{5, 6, 9\}$, $\{8, 10, 9\}$. Esto implica que todos los nodos en el diagrama de Dynkin estarán conectados a los otros tres nodos. Procediendo como en la sección anterior se llega al diagrama de Dynkin de la Figura 3.19, que identificamos como el grafo Petersen. La matriz de Cartan correspondiente es

$$A(\mathfrak{g}_{\text{Petersen}}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (3.71)$$

que es de signatura lorentziana con

$$\det A(\mathfrak{g}_{\text{Petersen}}) = -256. \quad (3.72)$$

El grafo de Petersen fue inventado por el matemático danés *Julius Petersen* a fines del siglo 19th. Tiene varios enbebimientos en el plano, pero quizás el

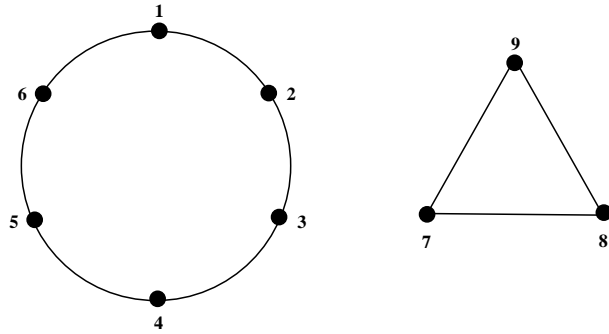


Figura 3.16: El diagrama de Dynkin de $A_2^+ \oplus A_5^+$ asociado con la configuración $(9_3, 9_3)_3$.

más famoso es como una estrella dentro de un pentágono como se describe en la Figure 3.19.

Como el álgebra es lorentziana (con una métrica que coincide con la métrica inducida por el enbebimiento en E_{10}), no es necesario agrandar mediante ningún generador para que sea compatible con el vínculo hamiltoniano.

Un caso degenerado

Ahora discutiremos un caso interesante, que requiere un tratamiento especial ya que su matriz de Cartan correspondiente es degenerada. Es la configuración $(10_3, 10_3)_4$, que se muestra en la Figura 3.20. Aplicando las reglas, con los generadores elegidos de acuerdo a la numeración de las líneas en la Figura 3.20, i.e. $(1) = 123, (2) = 456 \dots$ etc, encontramos que esta configuración da lugar al diagrama de Dynkin mostrado en la Figura 3.21. La matriz

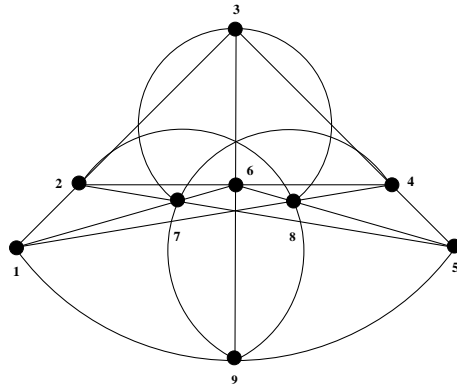


Figura 3.17: La configuración geométrica $(9_4, 12_3)$.

	Configuración	diagram Dynkin	de álgebra de Lie
$(9_3, 9_3)_3$			$\mathfrak{g}_{(9_3, 9_3)_3} = (A_5 \oplus A_2)^J$
$(9_4, 12_3)$			$\mathfrak{g}_{(9_4, 12_3)} = (A_2 \oplus A_2 \oplus A_2 \oplus A_2)^J$

Cuadro 3.3: configuraciones $n = 9$ y sus álgebras de Kac-Moody afines duales.

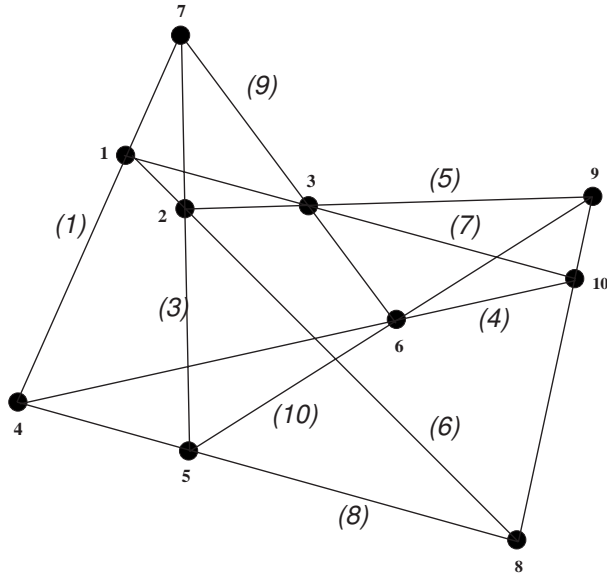


Figura 3.18: $(10_3, 10_3)_3$: La configuración de Desargues, dual al grafo de Petersen .

de Cartan toma la forma

$$A(\mathfrak{g}_{(10_3, 10_3)_4}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (3.73)$$

que tiene determinante nulo

$$\det A(\mathfrak{g}_{(10_3, 10_3)_4}) = 0. \quad (3.74)$$

Esta matriz de Cartan tiene un autovalor negativo y otro nulo. Así, el álgebra es de tipo indefinida. El autovector asociado al autovalor nulo está dado

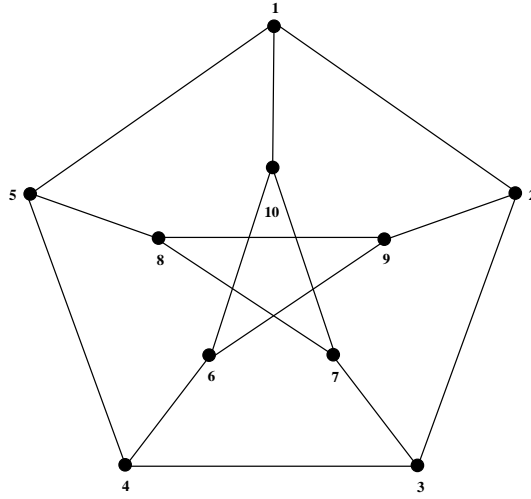


Figura 3.19: Este es el denominado *grafo de Petersen*. Es el diagrama de Dynkin dual a la configuración de Desargues, y es de hecho, la configuración geométrica misma, denotada $(10_3, 15_2)$.

explícitamente por

$$u = (0, 1, 1, 1, 0, -1, -1, -1, 0, 0). \quad (3.75)$$

Entonces se deduce que el álgebra correspondiente tiene un centro no trivial de dimensión uno, $\mathfrak{r} = \{k\}$, con

$$k = \sum_{i=1}^{10} u_i h_i = -h_2 - h_3 - h_4 + h_6 + h_7 + h_8, \quad (3.76)$$

donde u_i son las componentes del autovector nulo y h_i son los generadores de la subálgebra de Cartan. Haciendo uso de la forma explícita de h_i , Eq. (3.42), encontramos que k se anula idénticamente en E_{10}

$$k = -h_2 - h_3 - h_4 + h_6 + h_7 + h_8 = 0. \quad (3.77)$$

Esto muestra que el enbebimiento introduce una relación entre los generadores de la subálgebra de Cartan. Construyendo el álgebra cociente

$$\mathfrak{g}_{(10_3, 10_3)_4} = \frac{(\text{KM}(A(\mathfrak{g}_{(10_3, 10_3)_4})))'}{\mathfrak{r}}, \quad (3.78)$$

corresponde a eliminar uno de los generadores h_a mediante Eq. (3.77). Es que el álgebra cociente es dual a la configuración geométrica $(10_3, 10_3)_4$. Notemos que las raíces no son linealmente independientes sino que obedecen a la misma relación que los elementos de Cartan en Eq. (3.77).

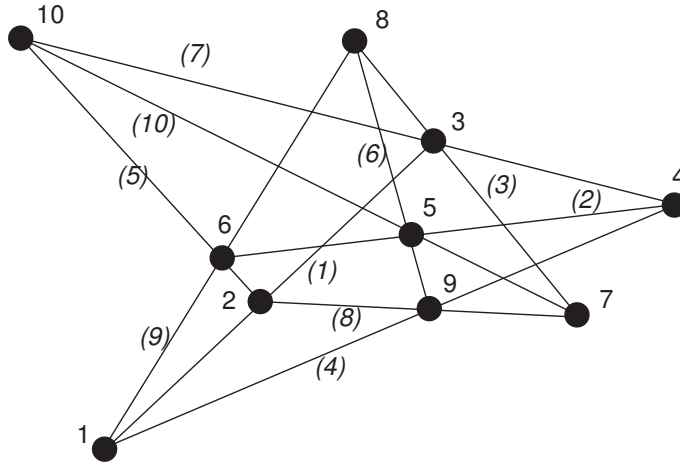


Figura 3.20: $(10_3, 10_3)_4$: Esta configuración da lugar a un diagrama de Dynkin cuya matriz de Cartan tiene determinante nulo, y en consecuencia contiene un centro no trivial.

Notemos que el álgebra de Kac-Moody asociada con la matriz de Cartan degenerada Eq. (3.73) a lo largo de líneas de [33] evoluciona aumentando la matriz de Cartan para tener una “realización” añadiendo un generador de Cartan más. La métrica en la subálgebra de Cartan completa de esta álgebra de Kac-Moody tiene signatura $(-, -, +, +, \dots, +)$.

Diagrama de Dynkin dual a la configuración $(10_3, 10_3)$

Ahora presentamos, en forma de tabla, la lista de todas las configuraciones $(10_3, 10_3)$ y los diagramas de Dynkin correspondientes. Notar que algunas de las configuraciones dan lugar a diagramas de Dynkin equivalentes. Por ejemplo, la configuración $(10_3, 10_3)_2$ y la configuración de Desargues $(10_3, 10_3)_3$ (que es proyectivamente auto-dual) ambas conducen al diagrama de Dynkin Petersen. Así, aunque se tienen diez configuraciones, sólo encontramos siete subálgebras distintas de E_{10} : seis subálgebras lorentzianas y una con matriz de Cartan con determinante distinto de cero. El caso degenerado discutido arriba aparece para dos configuraciones, $(10_3, 10_3)_4$ y $(10_3, 10_3)_7$. Todos

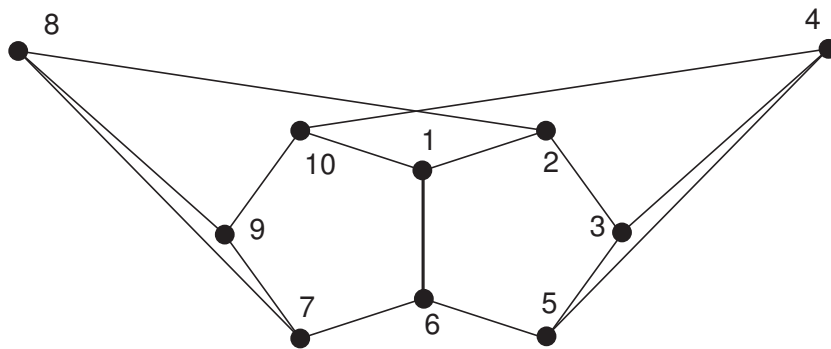


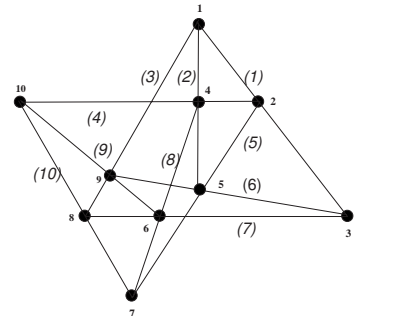
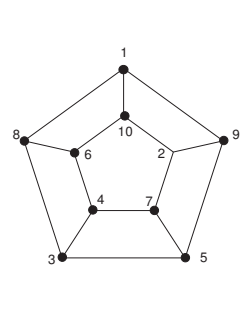
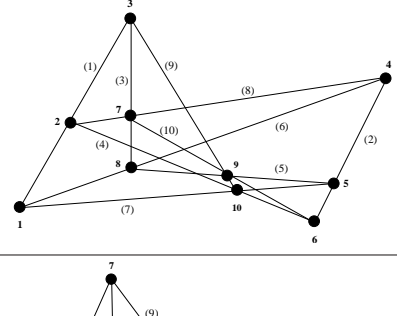
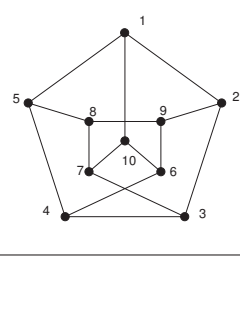
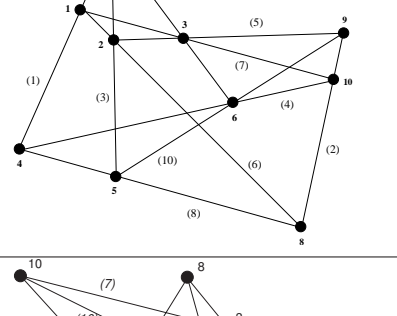
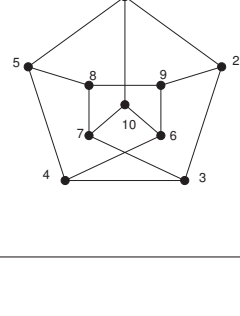
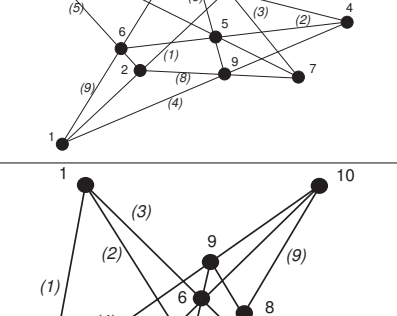
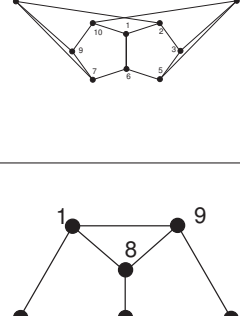
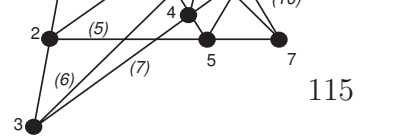
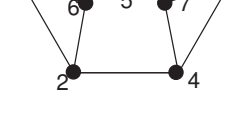
Figura 3.21: El diagrama de Dynkin de(10₃, 10₃)₄ corresponde a una matriz de Cartan con determinante nulo y en consecuencia a un álgebra que contiene un ideal no trivial .

los otros casos dan lugar a matrices de Cartan con un autovalor negativo y nueve positivos.

Como algunas de las configuraciones dan lugar a diagramas de Dynkin equivalentes, uno podría preguntarse si esto significa que dos soluciones cosmológicas pueden ser distintas desde el punto de vista de la supergravedad pero ser equivalentes en la construcción del coset. Esto no es cierto porque aún cuando los diagramas de Dynkin sean los mismo, el enbebimiento en E_{10} no lo es. Es por esto que, cuando se construya un lagrangiano coset basado en el álgebra asociada a una configuración dada, uno debe elegir los generadores de acuerdo a la numeración de las líneas en las configuraciones, y su unicidad determina la solución. Esto también motiva el uso de la palabra “dual” para las correspondencias que encontramos.

5. Apéndice

Aquí complementaremos el Apéndice del capítulo anterior respecto a las subálgebras regulares, con algunas cosas específicas para la discusión de este capítulo.

	Configuración	diagrama de Dynkin	Determinante de A
$(10_3, 10_3)_1$			$\det A(\mathfrak{g}_{(10_3, 10_3)_1}) = -121$
$(10_3, 10_3)_2$			$\det A(\mathfrak{g}_{(10_3, 10_3)_2}) = -256$
$(10_3, 10_3)_3$			$\det A(\mathfrak{g}_{(10_3, 10_3)_3}) = -256$
$(10_3, 10_3)_4$			$\det A(\mathfrak{g}_{(10_3, 10_3)_4}) = 0$
$(10_3, 10_3)_5$	 115		$\det A(\mathfrak{g}_{(10_3, 10_3)_5}) = -16$

Cuadro 3.4: configuraciones $n = 10$ y sus álgebras lorentzianas de Kac-Moody duales. Notar que algunas de las configuraciones dan lugar a diagramas de Dynkin equivalentes. En esta tabla y en la siguiente, se ve el dibujo de los diagramas de Dynkin de manera que minimizan los números cruzados (i.e., los cruces no deseados de bordes en puntos que no pertenecen a los diagramas de Dynkin).

	Configuración	diagrama de Dynkin	Determinante de A
$(10_3, 10_3)_6$			$\det A(\mathfrak{g}_{(10_3, 10_3)_6}) = -16$
$(10_3, 10_3)_7$			$\det A(\mathfrak{g}_{(10_3, 10_3)_7}) = 0$
$(10_3, 10_3)_8$			$\det A(\mathfrak{g}_{(10_3, 10_3)_8}) = -64$
$(10_3, 10_3)_9$			$\det A(\mathfrak{g}_{(10_3, 10_3)_9}) = -49$
$(10_3, 10_3)_{10}$			$\det A(\mathfrak{g}_{(10_3, 10_3)_{10}}) = -25$

Cuadro 3.5: configuraciones $n = 10$ sus álgebras lorentzianas de Kac-Moody duales. Notar que algunas de las configuraciones dan lugar a diagramas de Dynkin equivalentes. Aquí, no hemos seguido colocando el número de puntos de las configuraciones geométricas ya que esta información no es necesaria para el trazado de los diagramas de Dynkin.

5.1. Propiedades adicionales de las subálgebras regulares

Como se vio en el Apéndice en el capítulo anterior, los operadores de subida de $\bar{\mathfrak{g}}$ podrían ser operadores de subida o de bajada de \mathfrak{g} . Consideraremos aquí sólo aquel caso en el que los operadores de paso positivos (negativos, respectivamente) de $\bar{\mathfrak{g}}$ también son positivos (negativos, respectivamente) de \mathfrak{g} , de este modo, $\bar{\mathfrak{n}}_- = \mathfrak{n}_- \cap \bar{\mathfrak{g}}$ y $\bar{\mathfrak{n}}_+ = \mathfrak{n}_+ \cap \bar{\mathfrak{g}}$ (“enbebimientos regulares positivos”). De acá en adelante se asumirá esto.

En el caso finito dimensional, existe un criterio útil para determinar álgebras regulares a partir de subconjuntos de raíces. Este criterio ha sido generalizado a álgebras de Kac-Moody en [24]. El criterio es el siguiente

Teorema: Sea Φ_{real}^+ el conjunto de raíces reales positivas de un álgebra de Kac-Moody \mathcal{A} . Sea $\beta_1, \dots, \beta_n \in \Phi_{real}^+$ elegido de forma tal que ninguna de las diferencias $\beta_i - \beta_j$ sea una raíz de \mathcal{A} . Asumimos además que los β_i 's son tales que la matriz $C = [C_{ij}] = [2 \langle \beta_i | \beta_j \rangle / \langle \beta_i | \beta_i \rangle]$ tiene determinante distinto de cero. Para cada $1 \leq i \leq n$, elegir vectores E_i y F_i con raíces distintas de cero en el espacio de raíces de dimensión uno, correspondiente a las raíces reales positivas β_i y las raíces reales negativas $-\beta_i$, respectivamente, y sea $H_i = [E_i, F_i]$ el elemento correspondiente en el subálgebra de Cartan de \mathcal{A} . Entonces, el subálgebra (regular) de \mathcal{A} generado por $\{E_i, F_i, H_i\}$, $i = 1, \dots, n$, es un álgebra de Kac-Moody con matriz de Cartan $[C_{ij}]$.

Demostración: La demostración de este teorema se da en [24]. Notar que los enteros de Cartan $2 \frac{\langle \beta_i | \beta_j \rangle}{\langle \beta_i | \beta_i \rangle}$ son realmente enteros (ya que los β_i 's son raíces reales y positivas), que son no positivas (ya que $\beta_i - \beta_j$ no es una raíz), o sea que $[C_{ij}]$ es una matriz de Cartan.

Comentarios:

1. Cuando la matriz de Cartan es degenerada, el álgebra de Kac-Moody correspondiente tiene ideales no triviales [33]. Verificar que las relaciones de Chevalley-Serre se satisfacen no es suficiente para garantizar que uno obtiene el álgebra de Kac-Moody correspondiente a la matriz de Cartan $[C_{ij}]$ ya que podría haber cocientes no triviales. De hecho encontraremos precisamente situaciones en donde el álgebra de generada por el conjunto $\{E_i, F_i, H_i\}$ es el cociente del álgebra de Kac-Moody con matriz de Cartan $[C_{ij}]$ por un ideal no trivial.

2. Si la matriz $[C_{ij}]$ puede descomponerse en digamos $C = D \oplus E$ con D y E no descomponibles, entonces el álgebra de Kac-Moody $\mathbb{KM}(C)$ generado por C es la suma directa del álgebra de Kac-Moody $\mathbb{KM}(D)$ generada por D y el álgebra de Kac-Moody $\mathbb{KM}(E)$ generada por E . Las superálgebras $\mathbb{KM}(D)$ y $\mathbb{KM}(E)$ son ideales. Si C tiene determinante no nulo, entonces ambos, D and E tienen determinante no nulo. En consecuencia, $\mathbb{KM}(D)$ y $\mathbb{KM}(E)$ son simples [33] y de ahí que pueda ocurrir fielmente o trivialmente. Como los generadores de E_i son linealmente independientes, ambos $\mathbb{KM}(D)$ y $\mathbb{KM}(E)$ ocurren fielmente. Entonces, en el teorema de arriba el único caso que requiere un tratamiento especial es cuando la matriz de Cartan C tiene determinante nulo.

Es conveniente normalizar universalmente la forma de Killing de las álgebras de Kac-Moody de manera que las raíces reales grandes tengan siempre la misma longitud al cuadrado, tomada convenientemente igual a dos. Puede verse fácilmente entonces que la forma de Killing de cualquier subálgebra regular de Kac-Moody de E_{10} coincide con la forma invariante inducida por la forma de Killing de E_{10} a través del enbebimiento (“índice Dynking igual a uno”) ya que E_{10} es simplemente enlazado”. Esta propiedad no aplica a enbebimientos no regulares tal como el ejemplo dado en la subsección 5.11, muestra que tiene índice de Dynking igual a -1 .

5.2. Subálgebras Reductivas

También consideraremos enbebimientos en un álgebra de Kac-Moody \mathcal{A} of álgebras $\mathcal{B} = \mathcal{D} \oplus \mathbb{R}^k$ que son sumas directas de un álgebra de Kac-Moody \mathcal{D} más un álgebra abeliana \mathbb{R}^k . Se dice que el enbebimiento es regular si \mathcal{D} está encajada regularmente en el sentido de arriba y si \mathbb{R}^k es una subálgebra de Cartan $H_{\mathcal{A}}$ de \mathcal{A} . El álgebra abeliana $H_{\mathcal{D}} \oplus \mathbb{R}^k$ se denomina el álgebra de Cartan de \mathcal{B} . Tomamos como forma bilineal invariante sobre \mathbb{R}^k a la forma invariante inducida por la forma de Killing de \mathcal{A} a través del enbebimiento.

Capítulo 4

Simetrías de Gauge en Teorías de Gravedad

El desarrollo de la teoría de relatividad general extiende la invariancia global de Poincaré a la invariancia ante difeomorfismos. Esto es logrado por la promoción a objeto dinámico de la métrica de Minkowski. A primera vista, el procedimiento se parece al que da lugar a las teorías de Yang-Mills, en el sentido que una simetría global se extiende a una local mediante la introducción de un objeto dinámico, que es el campo de gauge. La pregunta natural es si esta analogía va más allá de este nivel superficial, de manera que la relatividad general (y sus generalizaciones) pueda formularse como una teoría de Yang-Mills

En este capítulo se considerara una propuesta, entre las distintas que se han dado en este sentido. El comienzo de esta tarea se remonta al clásico trabajo de Utiyama [48], aunque su formalización en términos de fibrados fue elaborada y difundida posteriormente por Trautman [47] y fue desarrollada extensamente durante los '70 y '80, dando lugar a una diversidad de puntos de vista y formalismos [26, 30, 22, 40, 42, 25, 46], para citar algunos. La complejidad de esta tarea se halla en las peculiaridades que la gravitación presenta, que la distinguen de las teorías de Yang-Mills y que serán consideradas a continuación.

1. Problemas en la formulación de la gravitación como una teoría de gauge

En las teorías de Yang-Mills ordinarias, los campos asociados a la simetría local, los llamados campos de gauge, corresponden al pullback al espacio-tiempo de una conexión en un fibrado principal. Las simetrías de gauge corresponden a los automorfismos verticales que hemos mencionado en 2, que como tales no actúan sobre el espacio base, el espacio-tiempo. Es por esto que las simetrías de las teorías de Yang-Mills son denominadas en la literatura *simetrías internas*.

En las teorías de gravitación, en cambio, aparecen dos rasgos distintivos:

1. El grupo de simetría es el grupo *Diff* que actúa sobre el espacio base
2. El objeto asociado a la simetría local es una métrica

Respecto al segundo punto, debemos recordar que si bien una métrica es una estructura diferente a la de un potencial de gauge, existe una descripción alternativa en la que esta diferencia es puesta en otros términos. Como es conocido en la literatura, una métrica g puede definirse a partir de una base de vectores ortonormales respecto a g , denominados *vielbeins* ('muchas patas'), como veremos en la próxima sección. Esta base de vectores no es única sino que queda determinada a menos de una transformación local, que corresponde a la localización del grupo de Lorentz o el euclídeo dependiendo de la signatura de g . La aparición de este grado de libertad hace que el formalismo de los vielbeins sea más más adecuado para establecer una comparación con las teorías de gauge standar.

Estos dos aspectos distintivos han sido la fuente de las dificultades para la interpretación de la gravedad como teoría de gauge. Uno puede quedar desconcertado por hallar una variedad de propuestas en distintos trabajos, que comienzan diciendo que en su formulación la gravedad es tratada en la forma más cercana posible a las teorías de Yang-Mills. Esta divergencia puede comprenderse teniendo en cuenta que en la cuestión acerca del status de la gravitación como una teoría gauge se hallan envueltas distintas preguntas:

1. ¿Presenta la gravitación estructuras que correspondan a conexiones en un fibrado principal?
2. ¿Es correcto considerar al vielbein como una conexión o una parte de una conexión?

3. ¿Puede considerarse el grupo de *Diff* en sí mismo como el grupo de gauge de la teoría?
4. ¿Es la invariancia ante *Diff* consecuencia de la elección de algún grupo de estructura que actúa en un espacio interno?

La primer pregunta puede ser respondida afirmativamente. En efecto, veremos en la sección siguiente, que una conexión en una variedad de Riemann-Cartan (variedad en la que la conexión se halla vinculada a la métrica solo por la condición de metricidad), tiene una interpretación en términos de una conexión en un fibrado principal en el mismo sentido que el considerado en el capítulo siguiente.

2. Interpretación de la conexión afín como campo de gauge

Dejemos de lado momentaneamente el carácter Minkowskiano de la métrica que queremos describir, y consideremos el caso euclídeo. Hemos visto en el capítulo anterior que el fibrado principal LM , de grupo de estructura $GL(D, R)$, puede reducirse al sub-fibrado $\mathcal{O}(M)$ de grupo de estructura $SO(D)$. $\mathcal{O}(M)$ es el sub-fibrado principal del subconjunto de bases de LM relacionadas por una transformación correspondiente al grupo $SO(D)$. Es decir, para todo par \mathbf{e}' y \mathbf{e} perteneciente a una fibra de $\mathcal{O}(M)$ con proyección en x , existe una transformación $\Lambda(x)$ perteneciente al grupo $SO(D)$, dependiente de x tal que $\mathbf{e}' = \Lambda(x)\mathbf{e}$.

Ahora bien, hemos dicho que el fibrado $\mathcal{O}(m)$ (y también el LM) son ejemplo en los que se da la soldadura: un elemento de cada fibra en x , es decir, una base ortonormal $\{\mathbf{e}_x\}$, esta formado por elementos de T_xM . Debido a ello, la base $\{\mathbf{e}_x\}$ desempeña el rol de soldar el espacio tangente base con el espacio tangente a la fibra R^D del fibrado TM asociado a LM . Concretamente, a un vector $V = V^\mu \partial_\mu$ en T_xM , le corresponde unívocamente un vector \bar{V} en el espacio tangente a R^d , cuya expresión en la base canónica $\{\theta_a\}$ de R^d es $\bar{V} = e_\mu^a V^\mu \theta_a$.

Ahora bien, puesto que R^d esta dotado naturalmente de una métrica euclídea que denominaremos η , la soldadura que establecen los vielbein entre TM y R^D permite definir un producto escalar $g(., .)$ para dos vectores $V = V^\mu \partial_\mu$ y $W = W^\mu \partial_\mu$ definidos en T_xM según:

$$g(V, W) \equiv \eta_{ab} V^a W^b \quad (4.1)$$

de donde sigue la expresión usual para las componentes de la métrica g en la base coordenada $\{\partial_\mu\}$:

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab} \quad (4.2)$$

La consideración anterior se aplica al caso en que el fibrado reducido corresponde al grupo propio de Lorentz y la métrica η es la métrica de Minkowski. Denotaremos a este fibrado reducido con la misma notación \mathcal{O} . Queremos ahora dotar a $\mathcal{O}(M)$ de una conexión Γ . Esto permitirá describir las llamadas variedades de *Riemann – Cartan*, que es el lugar en la que se formulan las distintas teorías que en este trabajo denominamos *teorías de gravedad*

Como es usual, denotaremos con ω a la 1-forma de conexión. ω es una 1-forma que adopta valores en el algebra de Lorentz $\mathfrak{so}(D-1, D)$. La 1-forma de conexión ω queda definida unívocamente dando su potencial de gauge $\mathcal{A} = \sigma^* \omega$, siendo σ una sección en $\mathcal{O}(M)$. Recordemos que una sección en $\mathcal{O}(M)$ corresponde es un campo de bases $\{\mathbf{e}_a(x)\}$. \mathcal{A} toma vectores tangentes en $T_x M$ y devuelve elementos del algebra de lie de $SO(D-1, 1)$. La acción de \mathcal{A} sobre la base $\{\partial_\mu\}$ del espacio tangente se puede escribir como:

$$\mathcal{A}(\partial_\mu) = \frac{1}{2} \mathcal{A}_\mu^{ab} L_{ab} \quad (4.3)$$

siendo L_{ab} generadores del algebra $\mathfrak{so}(D-1, 1)$. Hemos seguido la notación standar al numerar los $D(D-1)/2$ generadores con un doble índice ab , entendiendo que $L_{ab} = -L_{ba}$. \mathcal{A}_μ^{ab} son entonces coeficientes referidos a la base $\{\mathbf{e}_a(x)\}$, que pueden tomarse anti-simétricos en a, b . Un cambio de base $\{\mathbf{e}_a(x)\} \rightarrow \{\mathbf{e}_{a'}(x)\}$ en $\mathcal{O}(M)$, es decir, una transformación $\mathbf{e}_a = \Lambda_a^{a'}(x) \mathbf{e}_{a'}$ con $\Lambda_a^{a'}(x) \in SO(D-1, 1)$, corresponde a un cambio de sección en $\mathcal{O}(M)$ y por tanto, los coeficientes $\mathcal{A}_\mu^{a'b'}$ se relacionarán con los \mathcal{A}_μ^{ab} según 1.14.

A fin de vincular \mathcal{A}_μ^{ab} con la noción estándar de derivada covariante de un campo tensorial en TM , debemos pasar a la conexión inducida en el asociado $(LM \times R^D)/SO(D-1, 1)$. A fin de establecer contacto con la noción familiar de derivada covariante de vectores en el fibrado tangente, el cual es un fibrado vectorial, veamos en forma explícita como generadores L_{ab} actúan sobre un vector V en TM , pensado ahora como fibrado asociado. Recordemos que, debido al soldering natural, un elemento \mathbf{e}_a en $O(n)$ es también un elemento de TM y por lo tanto un vector de TM podrá expresarse como $V = V^a \mathbf{e}_a$.

Los coeficientes V^a se denominan componentes no-holónomas, dado que la base $\{\mathbf{e}_a(x)\}$ es no-holónoma a menos que la métrica sea plana.

La representación vectorial de los generadores L_{ab} es un conjunto de matrices de la forma: $(L_{ab})^c{}_d = (\eta_{ad}\delta_b^c - \eta_{bd}\delta_a^c)$ por lo cual, la acción sobre el vector $V = V^a\mathbf{e}_a$ es $L_{ab}V = V_b\mathbf{e}_a - V_a\mathbf{e}_b$. De modo que el potencial de gauge inducido A actuando sobre V se puede expresar como:

$$A_\mu(V) = A_{\mu,b}^a V^b \mathbf{e}_a \quad (4.4)$$

y la derivada covariante para un campo vectorial $V(x) = V^a(x)\mathbf{e}_a$ será:

$$D_\mu V = \partial_\mu V^a \mathbf{e}_a + A_{\mu,b}^a V^b \mathbf{e}_a \quad (4.5)$$

Podemos concluir que la noción de conexión en una variedad de Riemann-Cartan corresponde a la noción de conexión, en el sentido del capítulo precedente, asociado al grupo $SO(D-1,1)$. La cuestión sobre el status de la gravedad como teoría de gauge requiere entonces preguntarse por el status de la otra estructura presente en la variedad de Riemann-Cartan: los vielbein, a partir de los cuales se define la métrica. De eso nos ocuparemos en la siguiente sección.

3. Vielbein y conexión traslacional en un fibrado con soldadura

La elección del fibrado LM para formular la gravitación marca la diferencia con las teorías de Yang-Mills desde el principio, puesto que éste presenta naturalmente una soldadura entre el espacio tangente a la variedad y la fibra, ausente en los fibrados principales donde se formulan las teorías de Yang-Mills. Estrechamente vinculado a esto, los vielbeins aparecen desde el principio como un objeto diferente a una conexión.

A fin de arribar a una descripción de la gravitación más cercana a las teorías de Yang-Mills, consideraremos ahora una clase de fibrados propuestos ya en 1953 en [37], los *fibrados soldados al espacio base*, que sirvieron de base a los posteriores formulaciones de la gravedad como teoría de gauge. Este fue considerado por muchos autores como un marco más adecuado para la descripción gravitación en forma semejante a las teorías de Yang-Mills, pues la soldadura que estos presentan no está dada desde el principio sino que aparece como consecuencia de algunas propiedades del grupo de estructura y

de la fibra. Por otro lado, los veilbein, resultan ser una estructura relacionada (aunque no idéntica) con una conexión, a diferencia de lo que sucede en $O(M)$. Haremos a continuación un breve resumen de [37] con lo esencial para nuestro objetivo.

Consideremos un fibrado principal P de grupo de estructura G y sea $E = (P \times G/H)$ un fibrado asociado con fibra $F = G/H$, siendo H un subgrupo de G . Se dice que E está soldado al espacio M si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. El fibrado P puede reducirse a al sub-fibrado Q de grupo de estructura H . En otras palabras, el fibrado E admite una sección global $\hat{\Psi}$.
2. $DimF = DimM$
3. El espacio tangente T_xM es isomorfo al espacio tangente a la fibra F_x en el punto $\hat{\Psi}(x)$ para cada valor de x

Nosotros estamos interesados en particular en aquellos fibrados con soldadura que estén dotados de una 1-forma de conexión ω en P . En [37] se muestra que *una condición suficiente para que un fibrado que satisfaga 1- 2, satisfaga también la última condición 3 es que F sea débilmente reductivo*. Veamos a continuación como la reductividad débil de F junto $DimF = DimM$ implica el isomorfismo 3.

Utilizaremos todo lo dicho en 2 acerca de un espacio débilmente reductivo. La condición extra 2, $DimF = DimM$, implica que el subespacio \mathfrak{t} definido por la descomposición del algebra 1.22, satisface $Dim\mathfrak{t} = DimM$. El mapa $P \rightarrow F$ que define al campo de Higgs será denotado en este caso particular por Ψ .

La peculiaridad del caso, $DimF = DimM$, permite una versión fuerte del teorema I, según el cual la 1-forma tensorial θ que aparece como segundo término en (1.29) satisface una condición adicional que permitirá definir una métrica en M . El enunciado preciso del teorema es el siguiente:

Teorema II. *La restricción $\omega|_Q$ en Q de la forma de conexión ω de P , se descompone en forma unívoca como:*

$$\omega|_Q \equiv \bar{\omega} = \omega' + \theta \tag{4.6}$$

siendo ω' una 1-forma de conexión en Q y θ una 1-forma en Q que satisface la condición

$$\theta(X_v) = 0 \Leftrightarrow \pi_*(X_v) = 0 \quad (4.7)$$

Tal como en el caso I, ω' y θ corresponden a la parte \mathfrak{h} y \mathfrak{t} (*parte traslacional*) de la 1-forma de conexión restringida $\bar{\omega}$.

La diferencia con Teorema I es la doble implicación $\theta(X_v) = 0 \Leftrightarrow \pi_*(X_v) = 0$. La condición (4.7) implica que, como veremos, *existe un isomorfismo entre el espacio tangente al espacio base M y el espacio tangente a la fibra F_x en el punto $\Sigma(x)$* . En otras palabras, la condición (4.7) implica que el fibrado E se halla soldado al espacio M . Debido al rol que desempeñará en esta soldadura, a la 1-forma θ se la denomina *forma de soldadura*. En síntesis: la novedad de II es que, bajo las condiciones del teorema, *la parte traslacional de la conexión restringida es una forma de soldadura*.

Veamos cómo la condición (4.7) implica la existencia de este isomorfismo. Para ello, definamos la aplicación $e_x^{\sigma'} : T_x M \rightarrow T_{\mathcal{O}} F$, $e_x^{\sigma'} \equiv \delta_{(\sigma(x))^*} \circ \theta \circ \sigma_*$, donde σ' es una sección en Q . Observemos que esta aplicación está bien definida dado un vector V en $T_x M$ es transformado por $\theta \circ \sigma_*$ en un elemento del álgebra \mathfrak{t} y esta última es isomorfa al espacio tangente $T_{\mathcal{O}} F$, de acuerdo a (1.25). La aplicación $\delta_{(\sigma(x))^*}$ toma al elemento de $\theta \circ \sigma_*(V)$ y lo transforma en un vector tangente a F_x en el punto $[\sigma'(x), \Psi(\mathcal{O})] = \hat{\Psi}(x)$.

Puede mostrarse (ver [37]) que la condición (4.7) implica que $e_x^{\sigma'}$ *no depende de σ' y por lo tanto $e_x^{\sigma'}$ establece el isomorfismo mencionado*. Para ello, comparemos $e_x^{\sigma'}$ y $e_x^{\sigma''}$, con σ' y σ'' en Q .

Entonces, podemos suprimir el supra-índice σ' y hablar de e_x como el mapa $T_x M \rightarrow T_{\mathcal{O}} F$ que establece el isomorfismo.

3.1. Vielbeins y métrica inducida

La sola existencia de la soldadura no implica la existencia de una métrica. Análogamente a lo que ocurre en el caso de $O(M)$, es necesario disponer de una *métrica en el espacio tangente $T_{\mathcal{O}} F$ (el espacio tangente a la fibra en el origen) que se halla soldado a TM* . Ahora bien, cuando el álgebra de Lie \mathfrak{h} es semi-simple (lo cual ocurre en el caso de interés en gravitación), existe una métrica natural para $T_{\mathcal{O}} F$, que como dijimos, es isomorfo al subespacio \mathfrak{t} . Esta es la *métrica de Killing* asociada al álgebra de Lie \mathfrak{h} .

En el caso particular en que el grupo H es $SO(3, 1)$ se verifica la condición de semi-simplicidad y la métrica de Killing resulta ser la métrica de Minkowski η .

Habiendo definido una métrica, la forma de soldadura e_x desempeña ahora el rol de los vielbein (o tetradas en el caso particular $D = 4$), pues e_x define una métrica a través de:

$$g(V, U) \equiv (e_x(V), e_x(U)) \quad (4.8)$$

con $V, U \in T_x M$.

La manera como hemos definido e_x muestra que *el vielbein no es una componente de una conexión*. Formalmente e se construye a partir de θ , el cual, de acuerdo a 1.36 es la derivada covariante del mapa equivariante Ψ asociado al campo de Higgs: $\theta = D\Phi|_{TQ}$. La diferencia entre θ y la componente \mathfrak{t} de la conexión se hará explícita cuando consideremos casos particulares de G , utilizando la relación 1.33 aplicable a este caso.

3.2. Relaciones de estructura

Tenemos entonces 3 objetos geométricos asociados con la conexión ω :

1. $\bar{\omega}$: la restricción de ω en Q
2. ω' : la 1-forma de conexión de Q , que como tal toma valores en el álgebra \mathfrak{h}
3. θ : la 1-forma de soldadura, que toma valores en \mathfrak{t} , a partir de la cual se construye la métrica

A partir tanto de estos objetos pueden construirse dos cantidades de interés: la *forma de curvatura* y la *forma de torsión*, relacionadas por un conjunto de ecuaciones denominadas *ecuaciones de estructura*.

Tanto para $\bar{\omega}$ como para ω' puede calcularse la 2-forma de curvatura $\bar{\Omega}$ y Ω' respectivamente. La segunda toma valores en \mathfrak{h} mientras que la primera se descompone unívocamente como:

$$d\bar{\omega} + \frac{1}{2}[\bar{\omega}, \bar{\omega}] = \bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{\mathfrak{t}} + \bar{\Omega}_{\mathfrak{h}} \quad (4.9)$$

A partir de la 1-forma de soldadura puede calcularse la cantidad $[\theta, \theta] = [\theta, \theta]_{\mathfrak{t}} + [\theta, \theta]_{\mathfrak{h}}$ que admite en general valores en el álgebra entera \mathfrak{g} . A partir de estas cantidades se define la 2-forma Θ denominada *forma de torsión de la conexión de Cartan* ω como sigue:

$$\Theta \equiv \bar{\Omega}_{\mathfrak{t}} - \frac{1}{2}[\theta, \theta]_{\mathfrak{h}} \quad (4.10)$$

Haciendo algunas manipulaciones algebraicas, se obtienen las siguientes relaciones denominadas *relaciones de estructura*:

$$d\theta = -\frac{1}{2}([\theta, \omega'] + [\omega', \theta]) + \Theta \quad (4.11)$$

$$\Omega' = \bar{\Omega}_{\mathfrak{g}} - \frac{1}{2}[\theta, \theta]_{\mathfrak{h}} \quad (4.12)$$

En particular, si el espacio homogéneo $F = G/H$ satisface $[\mathfrak{t}, \mathfrak{t}] \subseteq \mathfrak{h}$, estas relaciones se reducen a:

$$\Theta = \bar{\Omega}_{\mathfrak{t}} \quad (4.13)$$

$$\Omega' = \bar{\Omega}_{\mathfrak{h}} - \frac{1}{2}[\theta, \theta] \quad (4.14)$$

que en el caso en que el subespacio \mathfrak{t} sea un algebra abeliana, i.e, $[\mathfrak{t}, \mathfrak{t}] = 0$, se reduce a:

$$\Theta = \bar{\Omega}_{\mathfrak{t}} \quad (4.15)$$

$$\Omega' = \bar{\Omega}_{\mathfrak{h}} \quad (4.16)$$

Notese que la relación 4.15 dice que la torsión coincide con la parte \mathfrak{t} de la 2-forma de *curvatura restringida*. Aún cuando la torsión se anula, la parte \mathfrak{t} de la 2-forma de curvatura ω (asociada a la forma de conexión en P) no es necesariamente cero. Esta observación será relevante cuando consideremos RG como una teoría con torsión nula.

4. Teorías de gravedad como teoría del gauge con ruptura espontanea de simetría de distintos grupos

Vemos como se aplica el marco general anterior al caso $D = 4$. En la literatura se han considerado extensamente los casos $G = \text{Poincare}$ y $G = \text{DeSitter}$, con $H = \text{Lorentz}$. En ambos casos se satisface tanto $\text{Dim}G/H = 4$ como la condición de reductividad débil.

4.1. Teorías de gravedad como teoría de gauge del grupo de Poincaré

En el caso en que G es el grupo de Poincare, el rol de t_J es desempeñado por los generadores P_a de las traslaciones y los generadores del subálgebra \mathfrak{h} son las transformaciones infinitesimales de Lorentz usuales L_{ab} , antisimétricos en a y b .

El carácter débilmente reducible del espacio cociente se ve inmediatamente observando las reglas de conmutación del álgebra de Poincare:

$$[P_a, P_b] = 0, \quad (4.17)$$

$$[L_{ab}, P_c] = (\eta_{ac}P_b - \eta_{bc}P_a) \quad (4.18)$$

$$[L_{ab}, L_{cd}] = (\eta_{ac}L_{bd} - \eta_{bc}L_{ad} + \eta_{bd}L_{ac} - \eta_{ad}L_{bc}) \quad (4.19)$$

En este caso el subespacio \mathfrak{t} es un álgebra abeliana: el álgebra asociada a las traslaciones.

En lo que sigue el pullback de la conexión ω del álgebra de Poincare por una sección arbitraria σ se escribirá como $\sigma^*\omega \equiv \mathcal{A}_\mu \tilde{d}x^\mu$: con $\mathcal{A}_\mu = A_\mu^a P_a + \frac{1}{2}A_\mu^{ab} L_{ab}$. A_μ^a y A_μ^{ab} son entonces las componentes traslacionales y de Lorentz de la 1-forma de conexión en TM correspondiente al pullback por una sección arbitraria.

Debido al carácter abeliano del subálgebra \mathfrak{t} , la relación 1.33 se simplifica considerablemente:

$$\sigma'^*\omega = e^{-\varepsilon^a P_a} (dx^\mu \partial_\mu + A^a P_a + \frac{1}{2}A^{ab} L_{ab}) e^{\varepsilon^a P_a} \quad (4.20)$$

$$= (\partial_\mu \varepsilon^a + A_\mu^{ab} \varepsilon_b + A_\mu^a) \tilde{d}x^\mu P_a + \frac{1}{2}A_\mu^{ab} \tilde{d}x^\mu L_{ab} \quad (4.21)$$

Como se puede apreciar, las componentes (respecto a la base $\tilde{d}x^\mu \otimes P_a$ de la forma de soldadura en un gauge del fibrado reducido están dadas por los coeficientes $e_\mu^a \equiv (\partial_\mu \varepsilon^a + A_\mu^{ab} \varepsilon_b + A_\mu^a)$. Estos difieren de las componentes traslacionales de la 1-forma de conexión A_μ^a . La diferencia se debe al término $(\partial_\mu \varepsilon^a + A_\mu^{ab} \varepsilon_b) \tilde{d}x^\mu$ dependiente de la coordenada ε que parametriza al espacio tangente a $ISO(3,1)/SO(3,1)$. Como ya hemos mencionado $\varepsilon(x)$ 'mide' la diferencia entre una sección σ' del fibrado reducido (de grupo de estructura $SO(3,1)$ y un gauge arbitrario σ del fibrado P (de grupo de estructura $ISO(3,1)$). Solo cuando $\sigma = \sigma'$, ocurre que $\varepsilon = 0$.

Una transformación de gauge infinitesimal vendrá dada por un parámetro $\Lambda \equiv \rho^a P_a + \kappa^{ab} L_{ab}$ (un elemento del algebra de $ISO(3, 1)$). La transformación infinitesimal $\delta^\Lambda \mathcal{A}_\mu$ inducida viene dada por:

$$\delta^\Lambda \mathcal{A}_\mu = -\partial_\mu \Lambda - [\mathcal{A}_\mu, \lambda] = \Delta_\mu \Lambda \quad (4.22)$$

Las entidades geométricas de interés se pueden calculando el conmutador $[\Delta_\mu, \Delta_\nu]$:

$$\bar{\Omega}_{\mu\nu} = [\Delta_\mu, \Delta_\nu] = \mathcal{T}_{\mu\nu}^a P_a + \frac{1}{2} R_{\mu\nu}^{ab} L_{ab} \quad (4.23)$$

definiendo $\mathcal{T}_{\mu\nu}^a$ y $R_{\mu\nu}^{ab}$ como las componentes de la curvatura, traslacionales y de Lorentz respectivamente. Estos coeficientes vienen dados por:

$$\mathcal{T}_{\mu\nu}^a = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^a - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^a + \mathcal{A}_\mu^{ab} \mathcal{A}_{b\nu} - \mathcal{A}_\nu^{ab} \mathcal{A}_{b\mu} \quad (4.24)$$

$$R_{\mu\nu}^{ab} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^{ab} - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^{ab} + \mathcal{A}_\mu^{ac} \mathcal{A}_{c\nu}^b - \mathcal{A}_\nu^{ac} \mathcal{A}_{c\mu}^b \quad (4.25)$$

No debe confundirse los $\mathcal{T}_{\mu\nu}^a$ con los coeficientes $T_{\mu\nu}^a$ que dan la torsión del espacio tiempo. Estos últimos se definen de acuerdo a las relaciones de estructura en forma análoga a 4.24 pero sustituyendo e_μ^a en lugar de \mathcal{A}_μ^a . La relación entre ambos es:

$$T_{\mu\nu}^a = \mathcal{T}_{\mu\nu}^a + R_{\mu\nu}^{ab} \varepsilon_b \quad (4.26)$$

4.2. RG como teoría de gauge del grupo de Poincaré con torsión nula

En términos de la derivada covariante $D\varepsilon$ el lagrangiano de Einstein-Hilbert en 4 dimensiones puede escribirse de la siguiente forma

$$S_{EH}^{D=4} = \frac{1}{4} \int d^4 x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{abcd} D_\mu \varepsilon^a D_\nu \varepsilon^b R_{\rho\sigma}^{ab} \quad (4.27)$$

En $D = 2 + 1$, la acción es:

$$S_{EH}^{D=3} = \frac{1}{4} \int d^4 x \epsilon^{\mu\nu\rho} \epsilon_{abc} D_\mu \varepsilon^a R_{\nu\rho}^{ab} \quad (4.28)$$

En este caso la coordenada ε aparece linealmente. La peculiaridad del caso $D = 2 + 1$ reside en que el término lineal en ε resulta ser un término de

superficie por lo que el lagrangiano para RG en $D = 2 + 1$ puede escribirse *exclusivamente en términos de las componentes de la conexión del grupo de Poincare*. Esta singularidad es la razón por la que se ha dicho que en $D = 2 + 1$, RG resulta ser una teoría de gauge convencional.

4.3. Einstein-Cartan como teoría de gauge del grupo de Anti-Sitter $SO(3, 2)$

El hecho de que el espacio cociente $SO(3, 2)/SO(3, 1)$ también satisfaga la condición de reductividad débil, permite la formulación de una teoría de gravedad como teoría de gauge. Veamos la novedad que trae la estructura más compleja del espacio $S(3, 2)/SO(3, 1)$,

El algebra de Lie $so(3, 2)$ puede representarse por matrices hermiticas M_{ab} (con $M_{AB} = -M_{BA}$, $A, B = 0, 1, 2, 3, 4$) que satisfacen las siguientes reglas de conmutación:

$$-i[M_{AB}, M_{CD}] = \eta_{AC}M_{BD} - \eta_{BC}M_{AD} + \eta_{BD}M_{AC} - \eta_{AD}M_{BC} \quad (4.29)$$

donde $\eta_{AB} = (1, 1, 1, -1, -1)$.

La subalgebra $\mathfrak{h} = so(3, 1)$ se halla generada por las matrices M_{ab} $a = 1, 2, 3, 4$, mientras que el subespacio invariante \mathfrak{t} se halla generado por las matrices de la forma $P_a \equiv mM_{a5}$, siendo m una constante dimensional introducida por conveniencia. La condición de reductividad debil puede constatarse observando la expresión de 4.29 en términos de M_{ab} y P_a :

$$[P_a, P_b] = m^2 M_{ab} \quad (4.30)$$

$$[M_{ab}, P_c] = \eta_{ac}P_b - \eta_{bc}P_a \quad (4.31)$$

$$[M_{ab}, M_{cd}] = \eta_{ac}M_{bd} - \eta_{bc}M_{ad} + \eta_{bd}M_{ac} - \eta_{ad}M_{bc} \quad (4.32)$$

siendo $\eta_{ab} = (1, 1, 1, -1)$. La constante m que hemos introducido permite considerar el caso ver el algebra de $ISO(3, 1)$ como el limite de $m \rightarrow 0$ de 4.32.

Aplicando lo dicho en 3.1 al caso de $SO(3, 2)/SO(3, 1)$, podemos ver que la métrica natural en este espacio será la métrica de Minkowski, tal como sucedio en el caso de $ISO(3, 1)/SO(3, 1)$.

El potencial de gauge Γ_μ del grupo $SO(3,1)$ se descompone en sus componentes \mathfrak{g} y \mathfrak{t} como: $\Gamma_\mu = \frac{1}{2}(\omega_\mu^{ab}M_{ab} + \omega_\mu^{a5}M_{a5})$. Haciendo $e_{\mu a} \equiv m^{-1}\omega_{\mu a5}$, la descomposición adopta la forma:

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2}(\omega_\mu^{ab}M_{ab} - e_\mu^{a5}P_{a5}) \quad (4.33)$$

Tal como hicimos en el caso previo, queremos hallar la descomposición del potencial de gauge asociado a la conexión restringida 1.33 $\bar{\Gamma} = \frac{1}{2}i(\bar{\omega}_\mu^{ab}M_{ab} + \bar{e}_\mu^a P_{a5})$ (siguiendo la notación de [46]). En este caso, debido a la estructura del algebra en cuestión (los P 's no forman un algebra), la expresión de los potenciales reducidos $\bar{\omega}_\mu^{ab}$ y \bar{e}_μ^a en términos de los ω_μ^{ab} y e_μ^a resulta más complicada que en 4.21. El detalle del cálculo puede seguirse en [46]; aquí solo reproduciremos el resultado:

$$\bar{e}_\mu^a = e_\mu^a + (\cosh z - 1)(e_\mu^a - e_\mu^b \frac{\xi_b \xi^a}{\xi^2}) + \frac{\sinh z}{z} \omega_{\mu.c}^a \xi^c + \partial_\mu \xi^a + (\frac{\sinh z}{z} - 1)(\partial_\mu \xi^a - \frac{x^c \partial_\mu \xi_c}{\xi^2} \xi^a)$$

donde $z \equiv m(\xi^a \xi_a)^{1/2}$. En el límite $m \rightarrow 0$ (en el que obtenemos el caso $G = Poincare$), $z \rightarrow 0$ y entonces 4.34 degenera en $\bar{e}_\mu^a = e_\mu^a + \omega_{\mu.c}^a \xi^c + \partial_\mu \xi^a = D_\mu \xi^a$, como ya hemos obtenido.

5. Síntesis de las peculiaridades de las teorías de gravitación

Resumamos a continuación las principales conclusiones que extraemos de la descripción de la gravedad que hemos dado. Para simplificar nos restringimos al caso donde la gravedad es descrita en términos del grupo de Poincaré.

1. *En la descripción de la gravedad como teoría de gauge del grupo de Poincaré, la única simetría de gauge propiamente dicha es la asociada al grupo de Lorentz*
2. *Esto significa que en esta descripción no hay invariancia ante transformaciones de gauge de las traslaciones*
3. *Se dice que es una teoría de gauge del grupo de Poincare porque esta formulación requiere que la parte traslacional de la conexión de Poincaré completa no se anule*

4. *Este aspecto es característico de las teorías de gauge con rúptura espontánea de simetría, donde la simetría ante un grupo G (en este caso $G=Poincaré$) es realizada no-linealmente a través de uno de sus subgrupos H (en este caso, $H = Lorentz$).*
5. *El vielbein no es la parte traslacional del potencial de gauge asociado al grupo de Poincaré. El vielbein difiere de esta última en un término que es la derivada covariante de la coordenada que hemos denominado q , que parametriza al espacio cociente P/H . Esta coordenada q es inevitable si queremos describir la teoría en forma covariante ante el grupo de Poncaré*
6. *Con una elección adecuada del gauge, esta coordenada puede ser puesta a cero, pero en tal caso se pierde la covariancia ante el grupo de Poincaré. Esto significa que los vielbeins coinciden con las componentes traslacionales de la conexión de Poincaré solo en un gauge particular*
7. *Esta distinción ocurre independientemente de la acción propuesta, por lo que el status del vielbein es el mismo en $D = 2 + 1$. Lo que ocurre en especial en $D=2 + 1$ (que motiva a muchos a decir que en $D = 2 + 1$, RG es una teoría de Gauge) es que la coordenada q aparece de tal forma que su contribución se reduce a un término de superficie. Pero esto no implica que pueda eliminarse, pues es necesaria para formar el vielbein y a través de este la métrica*
8. *Un diffeomorfismo no corresponde a ninguna transformación de gauge asociada al grupo de Poincare*
9. *La invariación ante difeomorfismos aparece como resultado del proceso de soldadura, que permite definir una métrica en el espacio-tiempo*
10. *Puesto que el proceso de soldadura aparece como resultado de la rúptura de la invariancia ante traslaciones, se puede decir que la invariancia ante difeomorfismo es consecuencia de la rúptura de la invariancia ante traslaciones internas*

6. Lord: Generalización del concepto de transformación de gauge

Lord [40, 41] ha propuesto una generalización del concepto standar de transformación de Gauge de Atiyah-Singer, que permite incluir transformaciones como *Diff* que afectan al espacio base. Recordemos la definición de transformación de gauge de Atiyah-Singer (ver **Definición 2**): las transformaciones de gauge (en sentido activo) consisten en los automorfismos $\lambda : P \rightarrow P$ del fibrado P que:

1. Conmutan con la acción derecha, i.e., $\lambda \circ R_g(u) = R_g \circ \lambda(u)$.
2. Se proyectan a la identidad en el espacio base, i.e., $\pi \circ \lambda(u) = \pi(u) \equiv x$

Se puede probar que un automorfismo λ satisface **1** sii λ es una '*traslación local*' izquierda $L_{g(x)}$ de parámetro $g(x)$ en G .

La propuesta de Lord es *suprimir la condición 2, permitiendo así que el automorfismo mueva al punto base x* . Lord propone considerar el fibrado principal $G = G(G/H, H)$ como el lugar natural para la descripción unificada tanto de las teorías de Yang-Mills como de la Gravitación, con la siguiente interpretación:

1. El espacio coset G/H , es interpretado como el propio espacio-tiempo
2. Una transformación de gauge generalizada consiste en la multiplicación a izquierda $g(x)z$ de un elemento z en G (considerado como elemento del fibrado principal) por un elemento $g(x)$ en G (considerado como grupo), con la propiedad $g(x)(zh) = (g(x)z)h$ para todo h en H .

Naturalmente, a fin de que el espacio G/H sea identificado con el espacio-tiempo M de acuerdo a **1**, se debe cumplir $\dim G/H = \dim M$. Por otro lado, a fin de describir la gravitación $H = SO(\dim M - 1, 1)$.

Esta definición generalizada incluye a las transformaciones de gauge de las teorías de Yang-Mills dado que existe un subconjunto no trivial de transformaciones de gauge generalizadas que dejan invariantes al punto base, i.e., $\pi(g(x)z) = \pi(z)$.

El siguiente paso es dotar a $G(G/H, H)$ de una conexión. La conexión que propone Lord es la llamada *conexión de Cartan*, que denotaremos como $\tilde{\omega}$, cuya definición difiere en un punto de la conexión de Ehresmann 1:

Definición 3. 1-Forma de conexión de Cartan Sea el fibrado principal H de grupo de estructura H , subgrupo de otro G . Una 1-forma ω en TP con valores en el álgebra de Lie \mathfrak{g} del grupo G , es una 1-forma de conexión de Cartan si satisface:

1. $\omega(a^\#) = a$, con a en \mathfrak{g}
2. $\omega(X_u h) = \text{Adj}_h^{-1}\omega(X_u)$, para todo h en H
3. $\omega(X) = 0 \rightarrow X = 0$

Como vemos, los axiomas de esta 1-forma difieren de los axiomas para la conexión de Ehresmann (1) en que: a) de acuerdo a **1**) $\tilde{\omega}$ toma valores en el álgebra de Lie \mathfrak{G} (a diferencia de ω que solo adopta valores en el álgebra de Lie correspondiente al grupo de estructura H y b) según **3**, el núcleo de $\tilde{\omega}$ es cero, por lo cual la noción de horizontalidad será diferente.

La forma de soldadura aparece aquí naturalmente como la parte \mathfrak{t} de la conexión de Cartan, i.e.,

$$\theta = \tilde{\omega} |_{\mathfrak{t}} \tag{4.34}$$

Puede demostrarse que θ definida así es no-singular. Para ver esto consideremos el potencial de gauge correspondiente $e \equiv \sigma^*\theta$, el cual es una forma en G/H (el cual se identifica con el espacio-tiempo). Supongamos que $e(X) = 0$. Si e es no singular, entonces debe ocurrir $X = 0$.

Notemos que en esta construcción no se requiere ningún mecanismo de Higgs, ya que el fibrado en el que comenzamos tiene grupo de estructura H ; la conexión generalizada $\tilde{\omega}$ juega el rol de la restricción de ω en Q , que hemos denotado con $\bar{\omega}$ en teorema I.

Capítulo 5

Modelos Relacionales como Alternativa al Procedimiento de Utiyama

El procedimiento de Utiyama [48] a la que nos hemos referido varias veces establece que la localización de una simetría global de un sistema se logra mediante la introducción de nuevos grados de libertad, que son los campos de gauge \mathcal{A} que juegan el rol de campos “compensadores”. En este procedimiento quedan incluidas las teorías de Yang Mills.

Queremos señalar lo siguiente respecto a la interpretación de la simetría local. Si G es el grupo de simetrías globales de una teoría referida a un conjunto de campos $\{\Phi_j\}$ ($j=1,\dots,N$), el procedimiento de Utiyama genera una teoría invariante ante la acción de $\tilde{G} = G_{local}$. Esta simetría extendida no se refiere al mismo espacio en el que el grupo G (del cual proviene por localización) ejerce su acción. Más bien, la simetría extendida se refiere al espacio extendido, que contiene a los campos $\{\Phi_j\}$ (campos de materia) y a los campos de gauge \mathcal{A} .

Aunque RG presenta diferencias respecto a las teorías de gauge ordinarias, la manera en que se interpreta la simetría ante *Diff* a la que hace referencia su nombre comparte la idea detrás del procedimiento de Utiyama, que es básicamente la que fue expuesta por J.L Anderson [3], a la cual volveremos al final del capítulo.

Ahora bien, como hemos dicho en la introducción, la gestación de RG estuvo fuertemente motivada por una manera de entender el incremento en una simetría completamente diferente, que es aquella que hemos denominado

Machiana aunque aún no la hemos definido. Nuestro objetivo es poder dar una definición equivalente al procedimiento de Utiyama para las teorías de gauge que retenga esta idea Machiana, a fin de aplicarla a la invariancia ante *Diff*.

A fin de avanzar hacia este objetivo, hemos considerado dirigir la mirada a un tipo de modelos en los que estas ideas Machianas fueron mejor plasmadas. Estos son las denominadas 'mecánicas relacionales', entre ellas la mecánica relacional de J. Barbour [10], que recientemente han recibido atención [2, 1, 7]. Estas mecánicas surgen ante el intento de ampliar la simetría rígida ante el grupo de Galileo de la mecánica Newtoniana, proponiendo una modificación a las ecuaciones dinámicas en donde solo entre en juego la diferencia de aceleraciones entre las mismas y no la aceleración respecto a un grupo de sistemas que sean elegidos arbitrariamente como privilegiados (los sistemas inerciales). En esta construcción, ningún grado de libertad nuevo se introduce. En particular, en estas mecánicas se materializa naturalmente la abolición de una rotación absoluta, planteada en el celebre ejemplo puesto por E. Mach.

Estos modelos son adecuados para nuestro objetivo pues el procedimiento que se sigue para su construcción tiene puntos en común con el de Utiyama, en el sentido de que una simetría global es localizada. Más precisamente, lo que se plantea es la localización en el tiempo de un grupo de simetrías de un sistema de N partículas que actúa en forma rígida en el tiempo. Lo interesante de este procedimiento genera una teoría con una interacción rica (que emula algunas características de RG) *sin necesidad de la introducción de nuevos grados de libertad*. El modelo se denomina "relacional" dada que los grados de libertad de la teoría nueva se han reducido a relaciones invariantes bajo el grupo local.

El problema del que nos ocuparemos en este capítulo-que es parte de un trabajo en preparación [38]- es el de como podría extenderse la localización respecto al tiempo seguida en el procedimiento de Barbour para cubrir a todas las variables del espacio-tiempo. Un procedimiento tal generaría una teoría con invariancia local pero sin que medie la introducción de una nueva variable como es el campo de gauge en el procedimiento de Utiyama. Es decir, la simetría local obtenida se referiría al mismo espacio de variables al que la simetría global se refiere.

La motivación principal para obtener este procedimiento alternativo es la de aplicar este al grupo de invariancia rígido de Poincaré a fin de ver cual sería una materialización directa-tal como las mecánicas relacionales lo son-

de las ideas de Mach en una teoría que pretende ser invariante ante el grupo de diffeomorfismos. Esta tarea-pendiente-cuenta con la base sentada en el capítulo precedente, en el que las teorías de gravitación son descritas en el lenguaje de las teorías de gauge ordinarias.

Queremos mencionar que aún dejando de lado la meta final que es el caso de las teorías de gravedad, podemos decir que el objeto de este capítulo presenta interés en si mismo y se puede plantear como el de explorar la posibilidad de procedimiento alternativo al de Utiyama, en el que la localización de una simetría global sea lograda sin necesidad de extender el espacio al que la simetría global se refiere. A fin de evitar un malentendido sobre nuestra motivación, queremos señalar que no esperamos que tal clase de procedimiento genere teorías nuevas de interés fenomenológico, como es el caso del procedimiento de Utiyama (que fue formulada a posteriori para dar cuenta de teorías de gauge previamente formuladas). Más bien, el estudio de esta clase de procedimiento alternativo puede generar un aporte a la fundamentación del procedimiento de Utiyama, pues el explorar la posibilidad de una alternativa puede iluminar el propio procedimiento de Utiyama, al explicitar cuánto de lo que hay en el es realmente necesario.

El procedimiento alternativo ha sido descrito en detalle para el caso más simple de invariancia $U(1)$. Su generalización a las teorías con invariancia ante un grupo no-abeliano es una tarea pendiente, que presenta obstáculos que serán discutidos. Al final del capítulo retornaremos a la vinculación que tiene esta cuestión con la de la formulación de un procedimiento 'Machiano' y el 'principio de Mach' en las teorías de gravitación.

1. Un ejemplo de invariancia local sin campo de gauge

En [9], se ha propuesto la construcción de una dinámica para un conjunto de N partículas que resulte invariante ante el denominado grupo de Leibnitz, $\mathbb{G}_{Leibnitz}$, definido por la siguiente acción sobre las coordenadas q_i de la i -ésima partícula: $\mathbb{G}_{Leibnitz}(q_i) = \mathbb{A}(t)q_i + \mathbb{B}(t)$, siendo $\mathbb{A}(t)$ y $\mathbb{B}(t)$ una rotación y una traslación arbitraria dependiente del tiempo t . Este grupo proviene de la localización del grupo *Euclideo* \mathbb{E} , definido analógicamente pero con \mathbb{A} y \mathbb{B} constantes.

Una realización explícita de tal simetría esta dada por el siguiente la-

grangiano

$$\mathcal{L}_{relacional} = f(|\dot{r}_{ij}|, |r_{ij}|) \quad (5.1)$$

donde $|r_{ij}|$ denota la distancia entre la partícula i -ésima y j -ésima. Notemos que aquí no se ha introducido ninguna variable extra a las q_i a fin de incrementar la simetría desde \mathbb{E} hasta $\widetilde{\mathbb{E}} \equiv \mathbb{G}_{Leibnitz}$. Las simetrías locales que posee $\mathcal{L}_{relacional}$ conllevan a una disminución de los grados de libertad frente a la de una teoría que tenga a \mathbb{E} como grupo de simetría. Puede verse en [9] que la simetría $\mathbb{G}_{Leibnitz}$ implica 6 vínculos que restringen 6 grados de libertad.

Notemos que el aumento en la simetría se logra sin la introducción de variables adicionales; el nuevo grupo $\mathbb{G}_{Leibnitz}$ actúa sobre las mismas variables que el grupo \mathbb{E} del cual proviene por localización.

En [10], Barbour ha propuesto una clase de lagrangianos que incluye el ejemplo considerado en [9]. Este último trabajo se asemeja al de Utiyama, en cuanto bosqueja un procedimiento general para la obtención de un lagrangiano con una simetría local.

La construcción utiliza una métrica $\langle | \rangle$ invariante ante el grupo \mathbb{E} , para medir la distancia entre puntos del espacio de configuración Q . La tarea que se propone es la de definir un procedimiento general para la construcción de una métrica en Q_0 , el espacio de *configuración intrínseco*, definido como el cociente Q/\mathbb{E} . Un punto en Q_0 es una clase de equivalencia $[q]$ de todos los puntos q relacionados por una transformación del grupo euclídeo. A partir de esta métrica modificada, se contruíra el lagrangiano de la teoría relacional.

La teoría con invariancia global que es el punto de partida es aquella definida por el siguiente lagrangiano:

$$L = \langle \dot{q} | \dot{q} \rangle \quad (5.2)$$

donde $\langle \dot{q} | \dot{q} \rangle \equiv \sum_{i=1}^N \langle \dot{q}_i | \dot{q}_i \rangle$

La falta de invariancia ante \mathbb{E}_{local} del lagrangiano 5.2 se halla ligada al carácter inadecuado de $\langle \dot{q} | \dot{q} \rangle$ para medir distancias entre puntos vecinos en Q_0 . Una prescripción para definir una distancia apropiada en Q_0 ha sido dada en [10], la cual describiremos a continuación.

Consideremos una trayectoria $q(t)$, es decir, una curva en Q , la cual define una trayectoria $[q(t)]$ en Q_0 , cuyos puntos son las clases de equivalencia de $q(t)$ en cada instante. Queremos calcular la distancia entre dos puntos vecinos $[q(t_0)]$ y $[q(t_0 + dt)]$. Un representante cualquiera en la clase $[q(t_0 + dt)]$

será de la forma $q(t_0) + \dot{q} |_{t=t_0} dt + a_\alpha(t_0) \mathcal{O}^\alpha q(t_0) dt$, siendo a_α coeficientes de una transformación euclídea infinitesimal generada por \mathcal{O}^α ($\alpha = 1, 2, 3$ correspondiente a las 3 traslaciones y $\alpha = 4, 5, 6$ correspondiente a las 3 rotaciones) . Denotemos con $D_t^{(a)} q$ a la expresión $\dot{q} |_{t=t_0} + a_\alpha(t_0) \mathcal{O}^\alpha q(t_0)$. Es importante señalar que ante $q_i \rightarrow \mathbb{A}(t)q_i + \mathbb{B}(t)$, $D_t^{(a)} q$ transforma como: $D_t^{(a)} q \rightarrow \mathbb{A}(t)D_t^{(a)} q + \mathbb{B}(t)$.

Entre todos estos representantes de $[q(t_0 + dt)]$, parametrizados por a_α , existirá uno que haga extremal la expresión $\langle D_t^{(a)} q | D_t^{(a)} q \rangle$. Sea a_α^0 el parámetro correspondiente. Es decir,

$$\begin{aligned} \delta \langle D_t^{(a)} q | D_t^{(a)} q \rangle = 0 \rightarrow \\ \langle D_t^{(a)} q | \mathcal{O}_\alpha \rangle = 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Estas son un conjunto de ecuaciones que involucran las derivadas primeras de las qs , en función de las cuales se puede despejar el valor de $a_\alpha = a_\alpha^0$.

Este parámetro a_α^0 define entonces un único representante en la clase de $[q(t_0 + dt)]$. Denotemos simplemente con D_t al operador $D_t^{(a)}$ correspondiente a $a_\alpha = a_\alpha^0$. Estamos ahora en condiciones de definir una distancia en Q_0 simplemente como $\langle D_t q | D_t q \rangle$. Una teoría dada por el lagrangiano

$$L = \langle D_t q | D_t q \rangle \quad (5.4)$$

llevara a las ecuaciones de movimiento para las q_i :

$$D_t^2 q_i = 0 \quad (5.5)$$

que resultarán invariantes ante la acción del grupo de Leibnitz.

Para establecer el contacto con una teoría de gauge, notemos que las variable extras a_α se comporta como los campos de gauge asociados al grupo euclídeo: este es introducido para expresar la distancia entre puntos vecinos de manera covariante ante el grupo de Leibnitz. El operador $D_t^{(a)}$ se comporta como un derivada covariante asociada al campo a_α .

Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre en una teoría de gauge ordinaria, este campo no tiene grados de libertad dinámicos sino que desempeña el rol de multiplicador de Lagrange, i.e., una variable eliminable. Este es eliminado a través de la condición de “stacking” 5.3, quedando expresado este en términos de las variables q y sus derivadas primeras. Desde este punto de vista, el modelo relacional que hemos descrito puede considerarse como

una teoría de gauge del grupo euclídeo en el que el campo de gauge ha sido reducido por los campos de materia, dados por los q_i .

2. Formulación de teorías invariantes $U(1)_{local}$ a la Barbour

Las teorías de de Barbour son un ejemplo de que es posible localizar (al menos en el tiempo) una simetría global sin necesidad de una extensión de las variables originales. La existencia de estos ejemplos motivan la pregunta sobre el procedimiento general para la localización de una simetría, dejando de lado características peculiares de los modelos de Barbour como la invariancia ante reparametrizaciones y extendiendo la localización a todas las coordenadas del espacio tiempo.

Para ser mas preciso: consideremos un conjunto de campos en el espacio-tiempo, denotados colectivamente como $\{\Phi_j\}$ ($j=1,\dots,N$), que sean una representación de un grupo G . Existe una manera trivial de generarse teorías para los campos $\{\Phi_j\}$ que es invariante ante la acción global de G sobre estos. Lo que queremos hallar es un procedimiento para construir una teoría que resulte invariante ante la acción *local* G_{local} del grupo G , entendiendo que esta acción se limita *únicamente a los campos* $\{\Phi_j\}$. Es decir, queremos extender la invariancia de G_{global} a G_{local} *sin incrementar el espacio sobre el que G actúe no trivialmente* (a diferencia de lo que hace el procedimiento de Utiyama). Por brevedad, diremos que una teoría tal es invariante ante $G_{local}^{materia}$, puesto que las variables $\{\Phi_j\}$ corresponden a lo que usualmente denominamos ‘materia’.

Es importante señalar que hemos enfatizado que nuestro objetivo es extender la simetría sin extender *el espacio sobre el cual el grupo de simetrías actúa*. Esto no implica que se deba dejar intacto el espacio de variables iniciales $\{\Phi_j\}$. Como veremos, la obtención de una invariancia $G_{local}^{materia}$ no impide la inclusión de *estructuras adicionales, que sean invariantes ante la acción de G_{local}* .

Limitémonos al caso en que el grupo de invariancia es $G = U(1)$ y los campos de materia Φ_j corresponde a campos escalares complejos. La acción local de $U(1)$ se reduce en este caso a la multiplicación por una fase $e^{i\alpha(x)}$, siendo $\alpha(x)$ una función real arbitraria.

Análogamente al caso de las N partículas, denotemos con Q al espacio de

valores del conjunto de N campos escalares Φ_j en un punto dado (en este caso será \mathbb{C}^N) y con Q_0 al espacio cociente $Q/U(1)$. Al conjunto de valores de $\Phi_j(x)$ en un dado punto del espacio-tiempo x corresponderá una punto en Q_0 denotado por $[\Phi_j(x)]$.

La generalización de la noción de trayectoria $q(t)$ en el caso anterior nos lleva a la de campo, como una función no de t solamente sino del espacio-tiempo, con valores en Q . A una dada configuración de campos $\{\Phi_j(x)\}$ le corresponderá una clase de equivalencia $[\{\Phi_j(x)\}]$, en la que para dos representantes distintos de la misma clase $\{\Phi_j(x)\}$ y $\{\Phi'_j(x)\}$ se cumple que $\Phi'_j(x) = e^{i\alpha(x)}\Phi_j(x)$, para alguna función $\alpha(x)$ independiente de j .

Puesto que estamos interesados en teorías definidas por ecuaciones diferenciales de segundo orden, es inevitable definir la noción de proximidad o distancia entre valores de un campo dado entre puntos vecinos del espacio-tiempo. Es decir, establecer una manera de comparar valores del campo correspondientes en x y $x + dx$, que tenga sentido en Q_0 .

En una teoría que posee solo invariancia global $U(1)$, existe una familia de de campo privilegiados $\{\Phi_j^{(0)}\}$ relacionados por una transformación de $U(1)_{global}$. Contando con esta clase privilegiada, puede definirse una noción de distancia o proximidad para los valores $[\{\Phi_j(x)\}]$ y $[\{\Phi_j(x + dx)\}]$ puntos vecinos, en una manera que tenga sentido en Q_0 simplemente como $\partial_\mu \Phi_j^{(0)} \partial^\mu \Phi_j^{(0)}$ (suma en j sobreentendida) siendo el $\Phi_j^{(0)}$ el representante privilegiado correspondiente a la clase $[\Phi_j]$.

La expresión $\partial_\mu \Phi_j^{(0)} \partial^\mu \Phi_j^{(0)}$ puede reescribirse utilizando un representante cualquiera Φ_j en la misma clase de equivalencia que $\Phi_j^{(0)}$. El primero se relaciona con el segundo en la forma: $\Phi_j(x) = e^{i\epsilon(x)}\Phi_j^{(0)}(x)$. De modo que $\partial_\mu \Phi_j^{(0)} = \partial_\mu e^{-i\epsilon(x)}\Phi_j = e^{-i\epsilon(x)}(\partial_\mu \Phi_j - i\partial_\mu \epsilon(x)\Phi_j)$, lo cual define una derivada covariante $D_\mu \Phi_j = \partial_\mu \Phi_j + i\mathcal{A}_\mu \Phi_j$ siendo \mathcal{A} dada por:

$$\mathcal{A}^{plana} = -d\epsilon(x) \quad (5.6)$$

$$F = d\mathcal{A} = 0 \quad (5.7)$$

La teoría con invariancia global corresponde a requerir que Φ satisfaga:

$$D^\mu D_\mu \Phi = 0 \quad (5.8)$$

Si observamos las ecuaciones 5.8 ,5.6 y 5.7 podemos notar que lo que hace que esta teoría no sea invariante $U(1)_{local}$, a pesar de que esta escrita

de manera covariante ante $U(1)_{local}$, es la aparición del campo de Goldstone $\epsilon(x)$ no dinámico, que refiere a la clase privilegiada $\Phi^{(0)}$.

Una manera de obtener una teoría con invariancia local $U(1)$, imitando al modelo relacional considerado previamente, consiste en eliminar al campo de Goldstone, sustituyendo 5.6 por una condición en la que la conexión \mathcal{A} se halle determinada por los campos Φ , en una relación que no privilegie a ninguno de estos.

2.1. Reducción fuerte: extensión de las condiciones de 'stacking' de Barbour

Imitando el procedimiento utilizado en el modelo relacional, consideremos un representante genérico $\Phi_j(x) + \partial_\mu \Phi(x) dx^\mu + i\mathcal{A}_\mu(x)\Phi_j(x) dx^\mu$ de la clase de equivalencia $[\Phi_j(x + dx)]$. $\mathcal{A}_\mu(x)$ juegan el mismo rol que las variables a_α en el modelo relacional, pues son los generadores de la transformación infinitesimal $U(1)$ que en este caso se reduce a la multiplicación por i . La extensión el procedimiento que llevo a 5.3 es inmediata, proviniendo en este caso de igualar a cero la variación de $\sum_{i=1}^N D^\mu \Phi_j D^\mu \Phi_j^*$ ante variaciones de \mathcal{A} correspondientes a la acción local, lo cual lleva a:

$$\Phi_j (D_\mu \Phi_j)^* - \Phi_j^* D_\mu \Phi_j = 0 \quad (5.9)$$

La condición 5.9 es análoga a las condiciones de stacking previamente mencionadas, pues esta condición determina unívocamente un representante $\mathcal{A}^{(0)}$ a partir de condiciones iniciales $\Phi|_\Sigma$ (siendo Σ una hipersuperficie espacial), a través de:

$$\mathcal{A}_\mu^{(0)} = -i \frac{(\partial_\mu \Phi_j \Phi_j^* - \partial_\mu \Phi_j^* \Phi_j)}{2\Phi_j \Phi_j^*} \quad (5.10)$$

Este campo pertenece a una clase de equivalencia $\mathcal{A}^{(0)}$ caracterizada por el tensor de curvatura $F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu} = 2(\partial_\nu \Phi_i \partial_\mu \Phi_j^* - \partial_\mu \Phi_i \partial_\nu \Phi_j^*)(\delta_{ij} - \frac{\Phi_i \Phi_j^*}{\Phi^2}) \quad (5.11)$$

donde hemos hecho $\Phi^2 \equiv \Phi_h \Phi_h^*$ (con suma en h).

La matriz M de $N \times N$ (N =número de campos escalares) de coeficientes $M_{ij} = (\delta_{ij} - \frac{\Phi_i \Phi_j^*}{\Phi^2})$ se reduce a cero en el caso $N = 1$, por lo cual en este caso

el único campo de gauge compatible con 5.9 es el campo de gauge plano. Para $N \geq 2$ de campos escalares Φ_i ($i = 1, 2, \dots, N$), la condición 5.9 permite aún una amplia variedad de geometrías para \mathcal{A} .

Debemos resaltar que aún en el caso trivial $N = 1$, en el que el campo de gauge es plano, la teoría en la que hemos aplicado el principio de reducción fuerte difiere de la teoría invariante global dada por las ecuaciones 5.6 y 5.7, escrita en lenguaje covariante ante $U(1)$, que hemos considerado en la sección anterior. Es cierto que en ambas, \mathcal{A} es un objeto sin dinámica propia, fijado a tener curvatura igual a cero. Sin embargo, lo que distingue la teoría que satisface el principio de reducción fuerte de la teoría con invariancia global es *la manera como \mathcal{A} es fijado*: en la primera, \mathcal{A} se halla unívocamente determinado por los campos de materia Φ_j , a través de la condición de reducción fuerte 5.9, mientras que la segunda, \mathcal{A} se halla determinado por el campo de Goldstone no-dinámico a través de 5.6.

Debido a esta diferencia, aun en el caso trivial en $N = 1$, la teoría dada por las condición de reducción fuerte resulta ser una teoría con invariancia $U(1)_{local}^{materia}$, puesto que \mathcal{A} puede eliminarse en términos de Φ . La ecuación dinámica para Φ puede reescribirse de manera tal que esta invariancia quede manifiesta:

$$2|\Phi|^2\partial^\mu\partial_\mu|\Phi|^2 - \partial_\mu|\Phi|^2\partial^\mu|\Phi|^2 = 0 \quad (5.12)$$

En este caso particular (invariancia $U(1)$ y un solo campo escalar, la dinámica resulta trivial, pues solo rige la evolución de la cantidad invariante $U(1) \Phi^2$.

2.2. Reducción débil

Como hemos mencionado anteriormente, nuestro objetivo de localizar el grupo global de simetrías de una teoría, sin incrementar el espacio en el que el grupo actúa, no es incompatible con la introducción de estructuras invariantes ante la acción de G_{local} .

Puesto que ahora vamos a permitir que el campo de gauge tenga grados de libertad dinámicos, será conveniente introducir la siguiente notación. Denotaremos con Γ al espacio de todos los campos \mathcal{A} y con Γ_0 al cociente del espacio anterior por la acción de G_{local} en estos. Nótese que a diferencia de Q y Q_0 , Γ y Γ_0 se refiere al espacio de campos y no de valores en un punto dado. Con esta notación, podemos decir que, fieles a nuestro objetivo,

podría permitirse que existan grados de libertad dinámicos en Γ , es decir, que la *geometría del campo de gauge tenga grados de libertad propios*; lo que debería estar fijado es el representante en Γ asociado a cada elemento en Γ_0 consistente con la dinámica. A esta clase de reducción la denominaremos *reducción débil*

La condición 5.9 que hemos planteado es entonces demasiado fuerte pues elimina completamente los grados de libertad no solo en Γ_0 sino en Γ . La observación anterior es uno de los puntos claves de nuestra construcción pues permite relajar 5.9 permitiendo que el segundo miembro contenga estructuras invariantes ante $U(1)_{local}$:

$$\Phi_j(D_\mu\Phi_j)^* - \Phi_j^*D_\mu\Phi_j = f_\mu(F, dF, \Phi_j, d\Phi_j) \quad (5.13)$$

donde $f(F, \Phi_j)$ es una expresión general que contiene a las cantidades invariantes de gauge F y a los campos de materia Φ_j (hasta sus derivadas primeras). Así como en el caso 5.10, en este caso se puede despejar un único representante $\mathcal{A}^{(0)}$ como sigue:

$$\mathcal{A}_\mu^{(0)} = -i \frac{(\partial_\mu\Phi_j\Phi_j^* - \partial_\mu\Phi_j^*\Phi_j)}{2\Phi_j\Phi_j^*} + \frac{f_\mu(F, \Phi_j)}{2\Phi_j\Phi_j^*} \quad (5.14)$$

La diferencia con el caso anterior es que la geometría no queda ahora prefijada por los campos Φ_j y sus derivadas primeras, pues, debido a la aparición de F en el miembro derecho, esta es una ecuación diferencial para \mathcal{A} .

La condición 5.13 desempeña dos roles: por un lado fija un único representante $\mathcal{A}^{(0)}$ por cada geometría y condición inicial para la materia y a la vez da una dinámica para la geometría acoplada a la materia. Debido a este doble papel, la forma en que esta escrita la condición 5.13 no parece ser la manera más adecuada de implementar el principio de reducción débil.

Sin embargo, eligiendo apropiadamente las f_μ , el doble papel que cumple la condición 5.13 puede hacerse explícito, obteniendo condiciones que solo restringen la dinámica en Γ y condiciones que solamente restringen el representante en Γ para cada punto en Γ .

Las condiciones que restringen la dinámica para la geometría son las siguientes:

1. La condición

$$\partial^\mu f_\mu = 0 \quad (5.15)$$

implicada por la identidad $\partial_\mu J^\mu = 0$ en el espacio de soluciones $D^\mu D_\mu \Phi_j = 0$

2. La ecuación diferencial que resulta del calculo de $F_{\mu\nu}$ para el potencial de gauge despejado en 5.14

$$F_{\mu\nu} = 2(\partial_\nu \Phi_i \partial_\mu \Phi_j^* - \partial_\mu \Phi_i \partial_\nu \Phi_j^*)(\delta_{ij} - \frac{\Phi_i \Phi_j^*}{\Phi^2}) + \frac{\partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu}{2\Phi_j \Phi_j^*} \quad (5.16)$$

Es importante verificar en primer lugar que la ecuación 5.16 da la *información dinámica completa sobre la geometría* presente en 5.14 (equivalente a 5.13). Esto es cierto pues las soluciones \mathcal{A} de 5.16 solo difieren del campo $\mathcal{A}^{(0)}$ en 5.14 en un un término del tipo $\partial_\mu \Lambda$.

Por otra parte, queremos que la ecuación 5.13 no implique ninguna condición dinámica extra a $D_\mu D^\mu \Phi_j = 0$. Esto hace que la elección de la función f_u se halla fuertemente restringida: *las ecuaciones diferenciales 1)-2), evaluadas en en el espacio de soluciones $D_\mu D^\mu \Phi_j = 0$, no debe contener términos con derivadas de segundo orden de Φ_j .* Si bien no hemos hallado aún la forma general que debería adoptar f_μ compatible con esta condición, podemos decir que la no aparición de derivadas segundas en 5.16 podría satisfacerse eligiendo $f_\mu = \partial_\mu h(\Phi_j \Phi_j^*) g(F^2)$ siendo g una función arbitraria.

Entonces, el doble papel de 5.13 puede hacerse explícito de esta manera:

1. Las ecuaciones 5.15 y 5.16 (implicadas por 5.13) restringen la dinámica en Γ a un subconjunto Γ_0 . Estas ecuaciones dinámicas son invariantes ante G_{local}^{gauge} pues en ella intervienen los campos de materia en cantidades invariantes ante $U(1)_{local}$.
2. En el espacio Γ_0 , el rol de 5.13 se limita al de fijar un único representante en Γ .

Es útil para reformular lo anterior la noción estándar de *condición de fijado de gauge*. Si consideramos la acción de $U(1)_{local}^{gauge}$, es decir, la acción de $U(1)_{local}$ restringida a Γ , la condición 5.13 claramente rompe la invariancia de gauge. Por otro lado, en el espacio de geometrías de Γ_0 siempre existe un representante que satisface 5.13. De esta manera, 5.13 satisface en Γ_0 las condición de *accesibilidad* que caracteriza a una condición de fijado de gauge.

De esta forma, hemos mostrado que nuestro objetivo de tener una teoría invariante ante $U(1)_{local}^{materia}$ puede lograrse imponiendo una condición de reducción más débil que la 5.9, lo cual permite una dinámica no trivial para

los campos de gauge pero que se desarrolla solamente en Γ . Esta es dada por las ecuaciones dinámicas 5.15-5.16 implicadas por 5.13. En el conjunto de geometrías en Γ seleccionadas por 5.15-5.16, la condición 5.13 actúa como una condición de fijado de gauge que elige un único representante en Γ .

Habiendo hecho este proceso de reducción, la ecuación dinámica para los Φ_j , $D^\mu D_\mu \Phi = 0$ puede re-escribirse en términos de los Φ_j y cantidades construidas con \mathcal{A} invariantes ante la acción del grupo $U(1)_{local}$. Ejemplificando en el caso trivial de un solo campo escalar Φ , la ecuación dinámica resulta:

$$2\Phi^2 \partial^\mu \partial_\mu \Phi^2 - \partial_\mu \Phi^2 \partial^\mu \Phi^2 - 4f_\mu f^\mu = 0 \quad (5.17)$$

Es importante señalar que la ecuación dinámica 5.15 asegura que no aparezcan derivadas de f_μ en 5.17, lo cual concuerda con el objetivo de que $D^\mu D_\mu \Phi$ sea una ecuación dinámica solo para la materia.

Entonces, el principio de reducción débil implica que por cada elemento en Γ , consistente con la dinámica, existe una única trayectoria en Q , dependiendo solo de las condiciones iniciales en una en una adecuada hipersuperficie espacial.

2.3. Reducción débil en Yang-Mills con invariancia $U(1)_{local}$

Es interesante observar que la propia teoría de Yang-Mills en el caso de invariancia $U(1)$ satisface este principio de reducción débil. Basta para ello ver que la ecuación que acopla la materia con el campo de gauge:

$$i(\Phi_j(D_\mu \Phi_j)^* - \Phi_j^* D_\mu \Phi_j) = F_{\mu,\nu}^\nu \quad (5.18)$$

encaja en el esquema de 5.13 con $f_\mu = F_{\mu,\nu}^\nu$ y esta f_μ satisface los requerimientos que hemos mencionado. En este caso, la ecuación dinámica 5.16 (especializando al caso de un solo campo escalar) resulta ser

$$\partial^\rho \partial_\rho F_{\mu\nu} + \frac{(\partial_\mu \Phi^2 F_{\nu,\lambda}^{\cdot\lambda} - \partial_\nu \Phi^2 F_{\mu,\lambda}^{\cdot\lambda})}{\Phi^2} - \Phi^2 F_{\mu\nu} = 0 \quad (5.19)$$

De modo que la invariancia $U(1)_{local}$ en Yang-Mills puede ser considerada de dos maneras posibles: la usual, corresponde a pensar que la dinámica es una dinámica de segundo orden para \mathcal{A} y Φ_j , que resulta invariante ante *la acción de $U(1)_{local}$ conjunta en el espacio de ambas variables*. El otro punto de vista, corresponde pensar que la dinámica en cuestión contiene una dinámica de segundo orden para las $[\Phi_j]$ y de tercer orden para los campos \mathcal{A} ,

siendo cada una de ellas invariante ante la acción de $U(1)_{local}^{materia}$ y $U(1)_{local}^{gauge}$ respectivamente

3. Síntesis preliminar

Antes de plantear los problemas para la extensión de esta noción al caso de una teoría con invariancia local no-abeliana y a las teorías de gravitación, hagamos un breve resumen de lo que hemos mostrado hasta aquí:

1. Las teorías relacionales de Barbour pueden ser vistas como teorías de gauge en dimensión 1 en las que el campo de gauge ha sido eliminado por la condición de stacking 5.3
2. Una extensión natural de las condiciones de staking de Barbour a las teorías de Yang-Mills (al menos en el caso abeliano) es la condición $\mathbb{J} = 0$ (corriente igual a cero). Esta condición, denominada, *reducción fuerte*, permite un conjunto de geometrías no triviales (excepto en el caso trivial de la teoría de gauge $U(1)$ con un único campo escalar, donde la conexión esta restringida a ser plana).
3. La condición de stacking fuerte involucra la fijación simultanea de dos aspectos del campo de gauge: $[A]$ (la geometría) y \mathcal{A} . La fijación de $[A]$ es una condición fuerte que va más allá del objetivo inicial de tener una teoría invariante local en el que el grupo actúe sólo sobre la materia.
4. Es posible formular una condición que fija el representante \mathcal{A} sin fijar completamente la geometría (*condición de reducción debil*). Una manera explícita de hacer esto es imponiendo condiciones del tipo 5.13, que pueden desdoblarse en una ecuación dinámica para la geometría y una condición de fijado de gauge.
5. Las teorías de Yang-Mills correspondientes a $U(1)$ satisfacen este principio de reducción debil

4. Principio de Mach en teorías de gravitación

Consideremos ahora la vinculación entre la cuestión de la formulación de este procedimiento alternativo y la de hallar un procedimiento Machiano.

Para ello comencemos con una descripción breve de los puntos centrales en la discusión sobre el principio de Mach, para luego pasar al problema de la extensión a las teorías de gravitación del procedimiento que hemos considerado en las secciones anteriores.

4.1. Presencia de dos estrategias opuestas en la gestación de RG

En primer lugar, justifiquemos nuestra afirmación de que la gestación de RG estuvo motivada por una manera diferente de entender el incremento de la simetría, la cual no logró concretarse.

Estrategia 'Machiana' para el incremento de una simetría

Una de las maneras en que Einstein concibió su programa de generalización de las simetrías globales de la relatividad especial se puede sintetizar en la siguiente consideración. Supongamos que estamos en el marco de la relatividad especial, en donde existe un sistema de referencia inercial S . Sea S' otro sistema de referencia relacionado con el anterior de manera arbitraria. Consideremos como se describe la dinámica de una partícula o campo, libre o interactuante. A menos que S' este relacionado con S mediante una transformación del grupo de Poincaré, las ecuaciones dinámicas vistas desde S' tendrán una forma diferente debido al carácter no nulo de las componentes de la conexión afín (determinada por las componentes de la métrica) en S' que actúan como una fuerza efectiva.

Un programa posible para generar una teoría en la que S y S' se hallen en pie de igualdad (sin importar lo arbitraria de la transformación que ligue ambos sistemas) y de esta manera se amplíe la simetría global de Poincaré a la del grupo de difeomorfismo consistiría en proponer alguna nueva clase de interacción tal que la diferencia mencionada *sea atribuible a la diferente relación de S y S' con el resto de la materia universo*. En el caso célebre utilizado por Einstein, inspirado en E. Mach, en el que S' se halla en rotación respecto a S , la diferencia entre ambas descripciones sería atribuible a la rotación relativa de S' respecto al promedio de la materia restante del universo.

Ingenuamente, uno podría pensar que esta idea vaga de cómo se puede lograr incrementar el grupo de simetrías de la teoría de la relatividad especial se implementaría en una teoría en la que las componentes de la métrica estén

vinculadas a toda forma de materia, cercana o lejana, a través de un conjunto de ecuaciones. De hecho, esta estrategia fue la que motivó la búsqueda de las ecuaciones de Einstein, que abren la posibilidad de explicar la diferencia en la dinámica vista entre S y S' sin declarar privilegiado a ninguno de estos.

Estrategia Machiana y “principio de Mach”

El punto es que las ecuaciones de Einstein son ecuaciones diferenciales y como tal no pueden por sí solas determinar las componentes de la métrica a partir de la distribución de materia. Es por ello que esta estrategia, una vez escritas las ecuaciones de Einstein, se tradujo en la de imponer condiciones adicionales a las ecuaciones de Einstein (ver para un racconto de esta búsqueda [8]), como condiciones de contorno, o algún otro recorte en el espacio de soluciones a las ecuaciones de Einstein, etc a fin de que la métrica quede determinada únivocamente por la materia. Esta idea de “determinación únivoca de la métrica por la distribución de materia” se convirtió en el llamado “principio de Mach.” aunque este no se refiere a un principio formulado con precisión. Véase [8] para un racconto de las distintas acepciones que adoptó.

La idea de pretender que un campo que satisfaga un conjunto de ecuaciones diferenciales sea determinado por su fuente no es algo nuevo. Tal es el caso de las ecuaciones de Maxwell, en las que adecuadas condiciones de contorno para el campo electromagnético (que respeten las simetrías globales de la electrodinámica) seleccionan al denominado *campo retardado*, el cual es determinado únivocamente por la fuente, descartando, por ejemplo, las ondas libres. El punto es que en el caso de las ecuaciones de Einstein, estas condiciones de contorno, a fin de que sean aceptables, no deben romper la invariancia ante el grupo de difeomorfismos. Una condición de contorno tal para la métrica no es posible de satisfacer y esa es, desde el punto de vista técnico, la explicación del fracaso en la implementación de un principio de Mach concebido de esta forma.

A pesar de este obstáculo insalvable, la búsqueda prosiguió debido a la relajación del principio para hacerlo más viable. Una modificación importante justamente consiste en no pretender la invariancia ante el grupo completo de difeomorfismos en esta forma Machiana sino solo ante algún subgrupo ligado a las “rotaciones”, definidas adecuadamente .

Invariancia ante diffeomorfismos y punto de vista de Anderson

El fracaso en la implementación del principio de Mach no significa desde ya que en RG no se halla incrementado el grupo de simetrías de la teoría de la relatividad especial. Más bien significa que este incremento debe entenderse de una manera diferente a esta que hemos denominado ‘Machiana’. Esta forma diferente de entender el principio de invariancia ante difeomorfismo ha sido explícitamente expuesta por J.L Anderson y difundida por A.Trautman, y se halla, implícita o explícitamente, en las exposiciones usuales de RG y cualquier teoría de gravitación. A fin de captar la diferencia entre esta forma y la que antes hemos definido como ‘Machiana’ retornemos al ejemplo del sistema S y S' .

Teníamos que las ecuaciones de movimiento para cualquier campo vistas desde S y S' son diferentes en general. Claramente, una teoría que pretenda poner en pie de igualdad ambos sistemas no puede sencillamente atribuir la diferencia a la relación de S' respecto a S , pues esto presupone la elección de un sistema privilegiado en sí mismo, por su relación con el espacio absoluto. La solución debe consistir en atribuir la diferencia a la situación relativa de S' respecto a algo que tenga una ‘entidad física’. En la concepción ‘Machiana’, hemos aceptado como entidad física válida a la distribución de materia global. Surge la pregunta de cuales son las características que hacen que una entidad de una teoría ‘califique’ para entrar en el conjunto de relaciones que explique la diferencia entre S y S' .

Respecto a esta cuestión, Anderson señala que es importante distinguir en una teoría dada a los *objetos absolutos* de los *objetos dinámicos*. Remitimos a [3] para una definición más precisa pero a grandes rasgos, lo que distingue a un objeto absoluto de uno dinámico es que el primero interactúa con el resto sin recibir una reacción mientras que en con el segundo existe una interacción recíproca. Así, la métrica en la relatividad especial es un objeto absoluto, pues esta influye en las ecuaciones de movimiento de los campos no pudiendo estos últimos ejercer una acción sobre la primera.

Habiendo introducido esta distinción, es posible encontrar un criterio para decidir qué entidades califican para entrar en el conjunto de relaciones que “explican” la diferencia entre S y S' . Estos son únicamente los objetos dinámicos. Este criterio permite definir sin ambigüedades los que se entiende por grupo de simetrías de una teoría (o grupo de invariancia en la denominación de [3]).

La observación crucial de Anderson es que la estrategia seguida por Ein-

stein al formular RG fue la de cambiar el rol de la métrica de objeto absoluto a objeto dinámico, al introducir las ecuaciones de Einstein, en las que la métrica resulta afectada por la materia. En otras palabras, la diferencia entre el marco de la relatividad especial y el de RG es que ahora la métrica califica para explicar la diferencia entre S y S' , por el hecho de haber perdido su carácter de objeto absoluto.

Esta idea de Anderson se halla en la base del procedimiento de Utiyama para la localización de las simetrías globales internas de los llamados campos de materia. El ejemplo de S y S' puede adaptarse al caso de las simetrías de gauge, pensando simplemente que S y S' son ejes en un espacio interno relacionados por la acción de un elemento de un grupo G . Cuando S y S' se relacionan mediante un elemento del grupo $g(x)$ dependiente de la posición x en el espacio-tiempo, entonces las ecuaciones de movimiento vistas desde S y S' resultan ser diferentes. Esta diferencia se traduce en la diferencia entre los potenciales de gauge \mathcal{A} y \mathcal{A}' . La estrategia de Utiyama es la de Andersson: promover a \mathcal{A} a objeto dinámico, mediante la imposición de ecuaciones en las que exista una interacción mutua entre el campo de gauge y los campos de materia. De esta forma, \mathcal{A} califica para ser objeto de referencia al explicar la distinción entre S y S' .

Así, se puede decir que, pese a las diferencias con las teorías de Yang-Mills, la gestación de RG sigue la misma lógica Andersoniana presente en el procedimiento de Utiyama, en el sentido en que la invariancia rígida (ante el grupo de Poincaré) del marco de la relatividad especial se incrementa a la invariancia ante difeomorfismos, pero al precio de que esta última se refiere a un conjunto ampliado de variables: las variables que en RG aparecen en el miembro derecho (denominadas usualmente 'materia'), presentes ya en el marco de la relatividad, junto a la nueva variable que es el tensor métrico. En otras palabras, el incremento en el grupo de invariancia se ha logrado por la promoción a objeto dinámico de la métrica, estructura absoluta responsable de que el grupo de invariancia de una teoría formulada en el marco de la relatividad especial sea el grupo rígido de Poincaré.¹

En síntesis: el intento de Einstein fue la eliminación completa de la estructura absoluta del espacio-tiempo. Aunque RG fue exitosa en esta tarea, lo ha sido en un espíritu diferente al de las mecánicas relacionales, pues la

¹Probablemente, de haberse formulado el procedimiento de Utiyama con anterioridad a la formulación de RG, el problema relativo al principio de Mach no se habría planteado, así como ocurrió en el caso de las teorías de Yang-Mills

desaparición de la estructura absoluta (la métrica) fue lograda por la promoción a objeto dinámico de la misma. Dejando de lado las dificultades por incluir a RG en el marco de las teorías de gauge estándar, es claro que la construcción de RG sigue la lógica del procedimiento de Utiyama, pues la métrica es promovida a objeto dinámico a fin de hacer que las simetrías de la teoría resulten ser locales.

4.2. Hacia la formulación de un procedimiento Machiano para la invariancia ante difeomorfismos

A fin de abarcar a las teorías de gravedad en este procedimiento alternativo al de Utiyama, el procedimiento anterior visto para el caso $U(1)$ debería generalizarse a fin de incluir:

1. El caso de una teoría de gauge no-abeliana usual
2. En particular, a aquellas teorías que presentan ruptura espontánea de simetría.

Si bien esta tarea escapó al alcance de esta tesis, queremos señalar algunos puntos.

El problema que presenta el caso no-abeliano, es que la corriente \mathbb{J} no es invariante de gauge y por lo tanto una condición tan simple como la que hemos visto para el caso abeliano $\mathbb{J} = 0$ no fijará al campo de gauge \mathcal{A} completamente en términos de condiciones iniciales para la materia, sino que dejará a \mathcal{A} grados de libertad propios manteniéndose dentro de la misma geometría. Es decir, la condición $\mathbb{J} = 0$ es invariante ante un subgrupo de G^{gauge} no trivial. Es justamente este grado de libertad el que una condición de reducción (fuerte o débil) debe eliminar. Sin embargo, puede verse en el caso simple no abeliano de un campo escalar representación de $SU(2)$, que las ecuaciones de evolución para la materia no dependen de la elección del representante \mathcal{A} dentro de G^{gauge} . La pregunta a contestar es si este fenómeno es general o es una particularidad de el caso $SU(2)$. En caso contrario, el problema será investigar cual será la condición de reducción adecuada.

Al carácter no-abeliano de las teorías de gravedad debe agregarse el orden de diferenciabilidad diferente que presentan la teorías de gravedad usuales, como RG. Aquí, el *veilbein* (el campo de gauge de las traslaciones realizado no-linealmente) aparece en ecuaciones diferenciales de segundo orden. Las condiciones de reducción deberán ser desde ya ecuaciones de primer orden

entonces. Esto en sí mismo requeriría una modificación del procedimiento visto para el caso de las teorías de gauge abelianas vistas aquí.

Podemos anticipar algo importante sobre la naturaleza de estas condiciones de reducción, lo que que podría considerarse uno de los aportes de este capítulo a la cuestión del principio de Mach en RG y las teorías de gravedad:

Las condiciones de reducción débil para el caso $U(1)$, sugieren que su extensión al caso de las teorías de gravedad no representan condiciones de determinación unívoca de la métrica en función de la materia. Más bien, la métrica aún podría poseer un grado de libertad geométrico. Comparando con la interpretación usual del principio de Mach, podríamos decir que el principio de Mach definido por la construcción que hemos esbozado aquí sería una versión débil del mismo, que como tal, dejaría un sector de soluciones más rico.

Por último, queremos mencionar que si bien no podemos aún identificar cual será en RG el objeto a desempeñar el rol de \mathbb{J} , tenemos argumentos por los cuales este estaría relacionado con el propio tensor energía-momento, pues es el que proviene de variar la acción para la materia respecto a la métrica (el cuadrado del vielbein). De ser este el objeto adecuado, una condición como $T_{\mu\nu} = 0$ (en presencia de materia) sería la condición de reducción adecuada. Es interesante mencionar que tal tipo de distribución de materia (materia distinta de cero pero con tensor energía momento igual a cero) ha recibido atención recientemente en la literatura [6] por otras razones. Parte de la tarea pendiente podría incluir el análisis de estos casos, que podría ayudar a definir lo que sería un sector 'Machiano' de RG.

Resumen y Trabajos Futuros

Para finalizar, realizaremos un breve resumen de los aportes que contiene esta tesis, señalando a la vez problemas en los que se continuará trabajando y preguntas nuevas que han surgido en el curso del trabajo.

En el capítulo 3 hemos reproducido el análisis hecho en [27] de soluciones cosmológicas de SUGRA D=11 halladas previamente en la literatura [21]. El trabajo de [27] fue desarrollado en el contexto de la conjetura que establece que SUGRA D=11 puede ser descrita como un modelo cociente correspondiente al álgebra de Lie de dimensión infinita E_{10} [17]. Nos hemos restringido al régimen (en ambos lados de la conjetura) en el que esta conjetura ha sido probada, que es aquel en el que los campos de SUGRA dependen solo del tiempo y el modelo cociente es truncado hasta nivel 3. En ese régimen existe un “diccionario” que relaciona ambos lados de la conjetura.

Lo que hemos hecho en [27] es utilizar ese diccionario a fin de hallar la estructura algebraica asociada a un grupo de soluciones de SUGRA D=11 que se hallaba descrito en términos de unos diagramas puntos conectados “diagramas de configuración”. Se ha mostrado que la contraparte en el modelo cociente asociada a cada diagrama de configuración es una subálgebra regular de E_{10} . Un resultado interesante es que el diagrama de Dynkin de esta subálgebra se halla en una sencilla relación de dualidad que mapea los puntos y líneas del diagrama de configuración en puntos y líneas de un diagrama de Dynkin.

Este tipo de análisis, por moverse en el régimen en el que la conjetura esta probada, no aporta directamente a la cuestión más ambiciosa de la validez de la conjetura, en la cual se está trabajando. Se espera que este tipo de análisis convierta al diccionario existente en algo más intuitivo y manejable, de manera de sugerir posibles generalizaciones.

El trabajo de [27] ha sido la base para el subsiguiente trabajo [28] que no hemos descrito en esta tesis. Lo que se ha hecho en [28] es aprovechar la duali-

dad hallada entre los diagramas de configuración y los diagrams de Dynkin de las subálgebras regulares para hallar otras subálgebras de E_{10} correspondientes a diagramas de configuración no incluidos en [21]. Las subálgebras obtenidas desde ya no corresponderán en principio a soluciones cosmológicas de SUGRA D=11. El interés en utilizar la dualidad hallada en [27] está en la propia búsqueda de álgebras de dimensión infinita de rango 10 y 11, las cuales no se encuentran catalogadas y las cuales son relevantes para el estudio de las simetrías infinito dimensionales de las teorías de gravitación.

El material de los capítulos 4 y 5 podría considerarse un paso fundamental hacia la definición formal de lo que sería un procedimiento 'Machiano' para generar una teoría con invariancia ante difeomorfismos. Ambos forman parte de un trabajo en preparación[38] en el que se vincula a tres líneas de investigación hasta hoy no conectadas: los modelos relacionales de Barbour, la descripción de las teorías de gravedad como teorías de gauge y el llamado principio de Mach.

El capítulo 4 contiene una selección entre la diversidad de puntos de vista acerca de cómo plantear la diferencia entre las teorías de gravitación y las teorías de Yang-Mills. Hemos considerado la descripción en términos de fibrado con soldadura como la caracterización más adecuada, que destaca la peculiaridad del grupo de invariancia de las teorías de gravedad, que es el grupo de difeomorfismos a la vez que presenta a la gravedad como una teoría de gauge en que el grupo de Poincaré o el de DeSitter ha sido "espontáneamente roto" al grupo de Lorentz o en otros términos, una teoría en el que la simetría de Poincaré o de DeSitter es *realizada no-linealmente* (noción común a ambas cuestiones de la tesis). El vielbein conforma la forma de soldadura. Se ha destacado la distinción entre el vielbein y la parte traslacional de la conexión, lo cual ha sido frecuentemente motivo de confusión en la literatura.

El capítulo 5 comienza considerando los modelos relacionales de Barbour. La observación clave que hemos hecho fue que en estos modelos se halla el procedimiento para localizar las simetrías diferente al de Utiyama, pues una simetría global es localizada sin que sea necesario introducir campos compensatorios. El caso de los modelos relacionales es muy simple pues la localización se refiere solo a la coordenada temporal. Nuestro objetivo fue extender esta idea a la localización en el espacio-tiempo de una simetría global, aunque solo hemos dado una descripción detallada en el caso más simple de la simetría $U(1)$, tenemos indicios de que esta consideración se puede extender al caso general.

Al final del capítulo 5, luego de una breve discusión acerca de la diferencia

entre la forma Machiana de entender la invariancia ante difeomorfismo y la forma usual (Andersoniana), hemos pasado a esbozar los problemas a resolver para la extensión del procedimiento alternativo al de Utiyama (desarrollado en el modelo de juguete de $U(1)$) al caso de las teorías de gravitación.

La extensión a las teorías de gravitación (que constituiría un principio de Mach formulado en base a la descripción de la gravedad como teoría de gauge) requiere un análisis más profundo, que requiere una posterior generalización de las teorías de gauge no-abelianas, en particular a aquellas peculiares que corresponden a las teorías de gravedad. Así, el contenido del capítulo 4 es la base sobre la cual se procederá a esta extensión.

Agradecimientos

Agradezco desde ya la beca doctoral de CONICET de la que me beneficie durante el período del desarrollo de esta tesis.

Quiero destacar la dirección de Rafael Ferraro, quién generó un clima de trabajo reflexivo y cuidadoso a la vez que hizo posible el contacto con el grupo de Marc Henneaux en la Universidad de Bruselas. En este grupo, quiero mencionar a Marc Henneaux, Philippe Spindel y especialmente a Daniel Persson, con quienes he colaborado en una parte del trabajo de esta tesis. Por otra parte, fue de gran ayuda la interacción con Lorena Nicolas y Gaston Giribet, con quienes tuve interesantes discusiones sobre parte de los temas de esta tesis y su vinculación con otros contextos. El giro que tomó este trabajo en sus comienzos se debe en parte a Gabriel Catren, quién dirigió mi atención a un grupo de trabajos sobre fundamentación de las teorías de gravitación de donde adquirí parte importante de las motivaciones para esta tesis. Agradezco especialmente a Cecilia Garraffo, quien acompañó con paciencia el largo y trabajoso proceso de finalización de la tesis.

Bibliografía

- [1] E. Anderson, J. Barbour, B. Foster, and N. Ó Murchadha. Scale-invariant gravity: geometrodynamics. *Classical Quantum Gravity*, 20(8):1571–1604, 2003.
- [2] E. Anderson, J. Barbour, B. Z. Foster, B. Kelleher, and N. Ó. Murchadha. The physical gravitational degrees of freedom. *Classical Quantum Gravity*, 22(9):1795–1802, 2005.
- [3] J. Anderson. *Principles of Relativity Physics*, chapter 4. Academic Press, New York, U.S.A., 1967.
- [4] J. L. Anderson. Covariance, invariance, and equivalence: A viewpoint. *General Relativity and Gravitation*, 2:161–172, 1971.
- [5] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, and I. M. Singer. Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 362(1711):425–461, 1978.
- [6] E. Ayon-Beato, C. Martinez, R. Troncoso, and J. Zanelli. Gravitational Cheshire effect: Nonminimally coupled scalar fields may not curve spacetime. *Phys. Rev.*, D71:104037, 2005, hep-th/0505086.
- [7] J. Barbour. Scale-invariant gravity: particle dynamics. *Classical Quantum Gravity*, 20(8):1543–1570, 2003.
- [8] J. B. Barbour. Einstein and Mach’s principle. In *Studies in the history of general relativity (Luminy, 1988)*, volume 3 of *Einstein Stud.*, pages 125–153, 460. Birkhäuser Boston, 1992.
- [9] J. B. Barbour and B. Bertotti. Gravity and inertia in a Machian framework. *Il Nuovo Cimento*, 38B(1), 1977.

- [10] J. B. Barbour and B. Bertotti. Mach's principle and the structure of dynamical theories. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 382(1783):295–306, 1982.
- [11] V. A. Belinsky, I. M. Khalatnikov, and E. M. Lifshitz. Oscillatory approach to a singular point in the relativistic cosmology. *Adv. Phys.*, 19:525–573, 1970.
- [12] A. B. Borisov and V. I. Ogievetsky. Theory of dynamical affine and conformal symmetries as gravity theory of the gravitational field. *Theor. Math. Phys.*, 21:1179, 1975.
- [13] J. Callan, Curtis G., S. R. Coleman, J. Wess, and B. Zumino. Structure of phenomenological lagrangians. 2. *Phys. Rev.*, 177:2247–2250, 1969.
- [14] S. R. Coleman, J. Wess, and B. Zumino. Structure of phenomenological lagrangians. 1. *Phys. Rev.*, 177:2239–2247, 1969.
- [15] E. Cremmer, B. Julia, H. Lü, and C.Ñ. Pope. Dualisation of dualities. *Nuclear Phys. B*, 523(1-2):73–144, 1998.
- [16] T. Damour and M. Henneaux. E_{10} , BE_{10} and arithmetical chaos in superstring cosmology. *Phys. Rev. Lett.*, 86:4749–4752, 2001, hep-th/0012172.
- [17] T. Damour, M. Henneaux, and H.Ñicolai. E_{10} and a 'small tension expansion' of M theory. *Phys. Rev. Lett.*, 89:221601, 2002, hep-th/0207267.
- [18] T. Damour, M. Henneaux, and H.Ñicolai. Cosmological billiards. *Class. Quant. Grav.*, 20:R145–R200, 2003, hep-th/0212256.
- [19] T. Damour and H.Ñicolai. Eleven dimensional supergravity and the $E(10)/K(E(10))$ sigma-model at low A_9 levels. 2004, hep-th/0410245.
- [20] M. Daniel and C. M. Viallet. The geometrical setting of gauge theories of the yang-mills type. *Rev. Mod. Phys.*, 52:175, 1980.
- [21] J. Demaret, J. L. Hanquin, M. Henneaux, and P. Spindel. Cosmological models in eleven-dimensional supergravity. *Nucl. Phys.*, B252:538–560, 1985.

- [22] W. Drechsler. Group contraction in a fiber bundle with Cartan connection. *J. Math. Phys.*, 18:1358–1366, 1977.
- [23] E. Dynkin. Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebra. *American Mathematical Society Translations*, 6:111–244, 1957.
- [24] A. J. Feingold and H.Ñicolai. Subalgebras of hyperbolic kac-moody algebras. 2003, math/0303179.
- [25] G. Grignani and G.Ñardelli. Gravity and the poincare group. *Phys. Rev.*, D45:2719–2731, 1992.
- [26] F. W. Hehl, P. Von Der Heyde, G. D. Kerlick, and J. M. Nester. General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects. *Rev. Mod. Phys.*, 48:393–416, 1976.
- [27] M. Henneaux, M. Leston, D. Persson, and P. Spindel. Geometric configurations, regular subalgebras of E_{10} and M-theory cosmology. *J. High Energy Phys.*, (10):021, 48 pp. (electronic), 2006.
- [28] M. Henneaux, M. Leston, D. Persson, and P. Spindel. A special class of rank 10 and 11 Coxeter groups. *J. Math. Phys.*, 48(5), 2007.
- [29] C. J. Isham, A. Salam, and J. Strathdee. Nonlinear realizations of space-time symmetries. Scalar and tensor gravity. *Ann. Physics*, 62:98–119, 1971.
- [30] E. A. Ivanov and J.Ñiederle. Gauge formulation of gravitation theories. 1. The Poincare, De Sitter and conformal cases. *Phys. Rev.*, D25:976, 1982.
- [31] E. A. Ivanov and V. I. Ogievetsky. Gauge theories as theories of spontaneous breakdown. *Lett. Math. Phys.*, 1:309–313, 1976.
- [32] B. Julia. Kac-Moody symmetry of gravitation and supergravity theories. In *Applications of group theory in physics and mathematical physics (Chicago, 1982)*, volume 21 of *Lectures in Appl. Math.*, pages 355–373. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985.
- [33] V. G. Kac. *Infinite-dimensional Lie algebras*. Cambridge University Press, Cambridge, third edition, 1990.

- [34] V. G. Kac, R. V. Moody, and M. Wakimoto. On E_{10} . In *Differential geometrical methods in theoretical physics (Como, 1987)*, volume 250 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 109–128. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1988.
- [35] T. W. B. Kibble. Lorentz invariance and the gravitational field. *J. Math. Phys.*, 2:212–221, 1961.
- [36] I. Kirsch. A Higgs mechanism for gravity. *Phys. Rev.*, D72:024001, 2005, hep-th/0503024.
- [37] S. Kobayashi. On connections of Cartan. *Canad. J. Math.*, 8:145–156, 1956.
- [38] M. Leston and R. Ferraro. Barbour relational models and Utiyama procedure. *Trabajo en preparacion*.
- [39] M. Leston and R. Ferraro. General relativity principle and uniqueness in Einstein equations. 2004, gr-qc/0410034.
- [40] E. A. Lord. A unified approach to the gauging of space-time and internal symmetries. *Gen. Rel. Grav.*, 19:983–1002, 1987.
- [41] E. A. Lord and P. Goswami. Gauge theory of a group of diffeomorphisms. 3. The fiber bundle description. *J. Math. Phys.*, 29:258–267, 1988.
- [42] S. W. MacDowell and F. Mansouri. Unified geometric theory of gravity and supergravity. *Phys. Rev. Lett.*, 38:739, 1977.
- [43] H.Ñicolai and T. Fischbacher. Low level representations for E_{10} and E_{11} , 2003, hep-th/0301017.
- [44] L.Ñikolova and V. A. Rizov. Geometrical approach to the reduction of gauge theories with spontaneously broken symmetry. *Rept. Math. Phys.*, 20:287–301, 1984.
- [45] J. D. Norton. General covariance and the foundations of general relativity: eight decades of dispute. *Rep. Prog. Phys.*, 56:791–858, 1993.
- [46] K. S. Stelle and P. C. West. Spontaneously broken De Sitter symmetry and the gravitational holonomy group. *Phys. Rev.*, D21:1466, 1980.

- [47] A. Trautman. Fiber bundles associated with space-time. *Rept. Math. Phys.*, 1:29–62, 1970.
- [48] R. Utiyama. Invariant theoretical interpretation of interaction. *Phys. Rev.*, 101:1597–1607, 1956.