UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Una Teoría General de Representación Para mv-Algebras

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

Yuri Alexander Poveda Quiñones

Director de tesis: Dr. Eduardo J. Dubuc

Buenos Aires, 2007

Una Teoría General de Representación Para mv-Algebras

El trabajo relaciona mv-álgebras con haces sobre un espacio topológico.

En [3] se obtiene un teorema de representación de mv-álgebras localmente finitas. Cada mv-algebra localmente finita A es isomorfa al álgebra de las secciones globales de un haz $E_A \to X_A$ (espacio topológico etal de base X_A), cuyas fibras son subalgebras del intervalo racional $[0,1] \cap \mathbb{Q}$.

Generalizamos el teorema de representación de [3] a todas las mv-álgebras arquimedianas, considerando como espacio base X_A el conjunto de los ideales maximales $\mathfrak{M}$ de A munidos de una topología analoga a la conocida topología de *Zariski*. El espacio X_A resulta ser un espacio de Stone.

Mostramos que en el caso de mv-algebras localmente finitas, nuestra construccion y la de [3] son equivalentes.

Luego generalizamos estos resultados a mv-álgebras arbitrarias siguiendo los lineamientos de la teoría de topos clasificantes. Introducimos el espectro primo $Spec_A$ de una mv-álgebra general, como el haz de cadenas cuyo espacio base es el conjunto de ideales primos de A, munido de la topología *coZariski*. Las fibras de E_A son los cocientes A/P con P ideal primo.

Demostramos que la base X_A resulta un espacio compacto y que toda mv-álgebra A es isomorfa al álgebra de secciones globales del haz $Spec_A$.

Una corolario interesante de nuestro teorema de representacion general, aplicado al caso de las mv-álgebras libres, es una nueva demostración del teorema de McNaughton (ver capítulo 7).

Palabras Clave: mv-álgebra, mv-cadena, topos, espacio etal, fibra, funtor representable, topología subcanónica, topos clasificante.

A General Theory for Representation of mv-Algebras

The present work relates mv-algebras with sheaves over topological spaces.

In [3] a representation theorem for locally finite mv-algebras is obtained. Each locally finite mv-algebra A results isomorphic to the algebra of global sections of a sheaf $E_A \to X_A$ (etal topological space with base X_A), where the fibers are subalgebras of the rational interval $[0,1] \cap \mathbb{Q}$.

We generalize this representation theorem to archimedian mv-algebras, considering as base space X_A the set of maximal ideals $\mathfrak{M}$ of A with a topology that is analog to the classic *Zariski* topology. The space X_A results a Stone space.

We show that, for locally finite mv-algebras, our construction and the one in [3] are equivalents.

We further generalize these results to arbitrary mv-algebras following the lines of the calssifying topoi theory. We introduce the prime spectrum $Spec_A$ of a general mv-algebra, as the sheaf of chains with the set of prime ideals of A, as base space with the *coZariski* topology. The fibers of E are the quotients A/P with P prime ideal of A.

We prove that the base X_A results a compact space and that any mv-algebra A is isomorphic to the algebra of global sections of the sheaf $Spec_A$.

As a corollary of our general representation theorem applied to free mv-algebras, we obtain a new proof of McNaughton theoerm (see chapter 7).

Keywords: mv-algebra, mv-chain, topos, etal space, fiber, representable functor, subcanonic topology.

Agradecimientos

Al profesor Eduardo Dubuc porque me dio el privilegio de trabajar bajo su dirección, por la luz constante que significó su presencia y sus ideas en este arduo camino y, por el apoyo incondicional que me brindó desde mi llegada a la Universidad de Buenos Aires. Los aciertos en esta tesis los aprendí de él. Los errores son mi responsabilidad.

A Manuela Busaniche, quien siempre tuvo la disposición para responder acertadamente mis preguntas sobre teoría general de las mv-álgebras.

A Jesús Hernando Perez, por su amistad y porque me indicó el camino hacia Buenos Aires.

A Fernando Cukierman, por sus enseñanzas.

A Diego Rial, por su hospitalidad.

A Fernando Zalamea y Arnold Oostra, por su amistad y sus enseñanzas.

A Mariana Sainz y Abigail Stein por su calidad y calidez.

A mi padre Cesar Zabala, por sus valiosos consejos.

A mi abuelo Germán Zabala quien meinspiró para realizar el doctorado en matemáticas.

A mis compañeros del doctorado en la Universidad de Buenos Aires.

A la Universidad Tecnológica de Pereira en Colombia, que financió toda mi estadía en la Argentina.

A mis hijas Tatiana y Laura
por su amor

A mi abuelo Germán Zabala
con afecto y admiración

Índice general

Introducción

En este trabajo desarrollamos una teoría general de representación para mv-álgebras.

El trabajo relaciona mv-álgebras con haces sobre un espacio topológico. Para los propósitos de esta introducción fijamos la siguiente notación: A denota una mv-álgebra, $E \to X$ un haz sobre un espacio topológico, (con espacio etal E y espacio base X). Este haz será considerado el espectro del álgebra A. Para cada elemento $a \in A$, se tendrá una sección global $\widehat{a} : X \to E$.

En [3] se obtiene un teorema de representación de mv-álgebras localmente finitas como el álgebra de secciones globales de $E \to X$, donde las fibras son subalgebras del intervalo racional $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Generalizamos este resultado para el caso de mv-álgebras arquimedianas generales; en este caso las subalgebras de $[0, 1]$ no son más racionales.

Nuestra construcción de $E \to X$ está inspirada más en la geometría algebraica que en el análisis funcional.

En [3], dada una mv-álgebra localmente finita, el espacio X se construye como el conjunto de morfismos $p : A \to [0, 1]$ munido de la topología producto, y la fibra del haz en un punto p es la subalgebra $p(A) \subseteq [0, 1]$, imagen de p. Así el espacio etal E es un subespacio del producto $X \times ([0, 1] \cap \mathbb{Q})$, este intervalo munido de la topología discreta. Las secciones $\widehat{a}$ están definidas por $\widehat{a}(p) = (p,\ p(a))$.

Mostramos que la construcción precedente resulta equivalente a tomar como espacio base X el conjunto de los ideales maximales $\mathfrak{M}$ de A munidos de una topología análoga a la conocida topología de Zariski, en el caso del espectro de un anillo conmutativo. Aquí, la fibra del haz en un punto M es el álgebra cociente A/M, y el espacio E se construye como la unión disjunta de todas esas fibras munido de una topología definida con técnicas similares a las empleadas en geometría algebraica. Esta topología tiene como base de abiertos a las imágenenes de los abiertos de la base X por las secciones $\widehat{a}$, donde $\widehat{a}(M) = [a]_M$, la clase de equivalencia de a en el cociente A/M.

Generalizamos el teorema de representación de [3] al caso de mv-álgebras arquimedianas generales. En esta construcción ilustramos en el caso particular de las álgebras arquimedianas, la construcción del espectro de una mv-álgebra general introducida en este trabajo y la demostración de sus propiedades. Esto facilita una mejor comprensión del trabajo en el caso general.

El espacio X resulta ser un espacio de Stone y como tal, tiene una base de entornos clopen (abierto cerrados), que definen la topología "de Zariski ".

Así, los complementos de los abiertos de la base son también abiertos y, resulta que X se puede también considerar tomando como base de abiertos a estos complementos. Se tiene la topología "coZariski"y es, precisamente, ésta topología la que resulta adecuada para una generalización de la teoría al caso de mv-álgebras arbitrarias. Podemos decir que, en el caso arquimediano, el hecho de que el espectro sea un espacio de Stone es lo que hace que la topología de Zariski sea adecuada. Por otro lado, en el caso arquimediano todo ideal primo es maximal, y este hecho es lo que hace que el espectro maximal resulte adecuado.

Introducimos el espectro primo $Spec_A$ de una mv-álgebra general como el haz de cadenas cuyo espacio base es el conjunto de ideales primos de A, munido de la topología coZariski. Las fibras de E son los cocientes A/P, con P ideal primo (que son mv-cadenas arbitrarias), y como antes, la topología de E toma como base las imagenes de los abiertos de la base por las secciones $\widehat{a}$, con $\widehat{a}(P) = [a]_P$ la clase de equivalencia de a en el cociente A/P.

Demostramos que la base X es un espacio compacto y que toda mv-álgebra es isomorfa al álgebra de secciones globales de este haz.

Una consecuencia interesante de este teorema de representación resulta ser el famoso teorema de McNaughton. Si $A = F[x_1, \cdots, x_n]$ es el álgebra libre con n generadores (es decir, el conjunto de fórmulas en n variables de la teoría de mv-álgebras), se ve fácilmente que una fórmula determina una función de McNaughton (cf [2]). Ahora, el teorema afirma que toda función de McNaughton corresponde a una fórmula. La misma naturaleza "local"de la noción de función de McNaughton permite entender (y demostrar) facilmente que a toda función de McNaughton le corresponde una sección global del espectro de $F[x_1, \cdots, x_n]$. El teorema de representación brinda entonces el teorema de McNaughton. Estirando un poco la lógica, podemos decir que el teorema de McNaughton es el caso particular (para álgebras libres) de nuestro teorema de representación, o, invirtiendo los términos, que éste es una vasta generalización a mv-álgebras arbitrarias del teorema de McNaughton.

En este trabajo utilizamos como guía la teoría de topos clasificantes. Dada una teoría del álgebra universal $\mathbb{T}$, y una extensión geométrica de la misma $\mathbb{G}$, los topos clasificantes brindan (en particular) las construcciones necesarias para desarrollar un teoría de representación de $\mathbb{T}-$álgebras en $\mathbb{G}-$álgebras (modelos de $\mathbb{G}$). Dada una $\mathbb{T}-$álgebra $A \in \mathcal{E}ns$, se obtiene un topos $\gamma : \mathcal{E}_A \to \mathcal{E}ns$, y un modelo $S_A \in \mathcal{E}_A$ de $\mathbb{G}$, junto con un morfismo $\gamma^*(A) \to S_A$. S_A es la $\mathbb{G}$-álgebra libre sobre A, que no existe en la categoría de conjuntos, pero si en el topos $\mathcal{E}_A$. Al morfismo $\gamma^*(A) \to S_A$ le corresponde por adjunción un morfismo $A \to \gamma_*(S_A)$ (donde γ denota el funtor secciones globales), que establece (en caso de ser un isomorfismo) una representación de A como las secciones globales de un modelo de $\mathbb{G}$.

Aquí consideramos la teoría de mv-álgebras y la extensión geométrica que constituye la teoría de las mv-cadenas. Dada una mv-álgebra A, la teoría general dice muy poco sobre el objeto cadena S_A y sobre el morfismo $A \to \gamma_*(S_A)$. En este trabajo hacemos una construcción específica de estos dos topos clasificantes, y del topos $\mathcal{E}_A = Sh(\mathcal{V}_A)$. Esta construcción tiene como guía los desarrollos generales hechos en [?]. Logramos demostrar que en nuestro caso el topos $\mathcal{E}_A = Sh(\mathcal{V}_A)$ es un topos espacial con suficientes puntos y, por lo tanto, resulta ser el topos de haces sobre un espacio topológico compacto. El objeto cadena S_A es un haz de cadenas y la imagen directa $\gamma_*(S_A)$ es la mv-álgebra de secciones globales. Demostramos además que en este caso el morfismo $A \to \gamma_*(S_A)$ es un isomorfismo.

Finalmente demostramos que este haz de cadenas S_A resulta ser el espectro primo $Spec_A$, obteniendo así el teorema de representación.

En este trabajo los conceptos de la teoría de topos son explícitamente introducidos y el trabajo puede ser comprendido por lectores con solo un conocimiento básico de la teoría de categorías.

1

El espectro primo de una mv-álgebra

En esta sección se desarrollará la construcción de un espacio topológico munido de un haz de cadenas asociado a toda mv-álgebra. Las siguientes definiciones se encuentran en [2], y pertenecen al folklore de la teoría de mv-álgebras. Las recordamos en esta sección, porque son necesarias para este trabajo.

Ideal primo de una mv-algebra

Definición 1.1. *Los elementos de toda mv-álgebra A, están munidos de un orden; para todo $x, y \in A$,*

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x \ominus y = 0$$

Definición 1.2. *Un conjunto P tal que $P \subseteq A$, es un ideal de una mv-álgebra A, si y solo si,*

1. $0 \in P$
2. $\forall x, y \in A$: $\quad x \leq y \in P \quad \Rightarrow \quad x \in P$
3. $\forall x, y \in P$, $\quad x \oplus y \in P$.

Definición 1.3. *Un ideal P, de una mv-álgebra A; es primo, si y solo si, para todo $x, y \in A$*

$$x \ominus y \in P \quad ó \quad y \ominus x \in P$$

Corolario 1.4. *Todo ideal primo P de una mv-álgebra A, es un conjunto filtrante*

Demostración. Para todo $x, y \in P$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[dr] & \\ & x \oplus y \\ y \arrow[ur] & \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

donde la flecha representa la relación " $\leq$ "

∎

El espectro primo de una mv-álgebra A: $\mathfrak{Z}_A$

El espectro primo de una mv-álgebra A, es el espacio topológico $\mathfrak{Z}_A$ cuyos puntos son los ideales primos de A y cuya base de abiertos viene dada por los conjuntos:

$$W_a = \{P : a \in P, \text{ y } P \text{ es ideal primo de } A\} \tag{1.2}$$

Los conjuntos W_a con $a \in A$ se pueden tomar como base, debido a que $W_a \cap W_b = W_{a \oplus b}$. Si $a, b \in P$ un ideal primo de A, entonces $a \oplus b \in P$. Si $a \oplus b \in P$ como $a, b \leq a \oplus b$ y P es ideal, entonces $a, b \in P$. Además $\mathfrak{Z}(A) = W_0$.

Por analogía con el espectro primo de un anillo conmutativo o de las álgebras de Boole, podemos decir que la topología definida por los abiertos de (1.2), es una topología ***co-Zariski***; los abiertos de esta topología son los cerrados de la topología de Zariski.

El objeto cadena $Spec_A$

Dado X un espacio topológico, se considera $Sh(X)$ la categoría de haces sobre X; es decir, espacios topológicos E munidos de un homeomorfismo local

$$E \longrightarrow X$$

Definición 1.5 (Haz de mv-álgebras). *Un objeto mv-álgebra en* $Sh(X)$ *es un haz de mv-álgebras sobre* X*; es decir una tripla*

$$\mathbf{E} = (E, X, \pi)$$

tal que (ver [3]):

1. S_1 *E y X son espacios topológicos y $\pi : E \to X$ es un homeomorfismo local.*

   S_2 *Para cada $x \in X$ la fibra $E_x := \pi^{-1}(x)$ es una mv-álgebra.*

   S_3 *La función $e \mapsto \neg\, e$ es continua para todo $e \in E$*

   S_4 *La función $(a, b) \mapsto a \oplus b$ es continua en el subespacio*

   $$\{(a, b) \in E \times E : \pi(a) = \pi(b)\}$$

   Cuando E es Hausdorff se dirá que $\mathbf{E} = (E, X, \pi)$ es un haz Hausdorff.

2. *El haz $\mathbf{E}$ se dice global si cada punto $e \in E$ es la imagen de alguna sección global.*

3. *Dadas dos secciones $s, t \in \mathbf{E}$, el conjunto*

   $$[[s = t]] = \{x \in X : s(x) = t(x)\}$$

   es abierto. Si E es Hausdorff $[[s = t]]$ es clopen.

Definición 1.6 (Objeto cadena). *Un objeto* $\mathbf{E}$ *mv-álgebra de* $Sh(X)$*; es un objeto mv-cadena, si las fibras de* $\mathbf{E}$ *son mv-cadenas.*

Definición 1.7. *El objeto* $Spec_A \in Sh(\mathfrak{Z}_A)$ *está definido por:*

$$\begin{array}{rcl} E_A & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{Z}_A \\ [a]_P & \longmapsto & P \end{array}$$

donde $[a]_P$ *es la clase de equivalencia del elemento* a *en la mv-álgebra cociente* A/P *y* E_A*, es el espacio topológico que tiene como conjunto subyacente la unión disjunta*

$$E_A = \coprod_{P \in \mathfrak{Z}(A)} A/P$$

y cuya base de abiertos viene dada por los conjuntos,

$$\widehat{a}(W_b) = \{[a]_P : P \in W_b\}$$

Notar que π *establece una biyección*

$$W_b \approx \widehat{a}(W_b)$$

Estos conjuntos cubren E_A*, y son cerrados para intersecciones,*

$$\widehat{a}(W_b) \cap \widehat{c}(W_d) = \{[a]_P : b, d, a \ominus c, c \ominus a, \in P\} = \widehat{a}(W_e)$$

con $e = b \oplus d \oplus (a \ominus c) \oplus (c \ominus a) \in P$.

Lema 1.8. $\pi : E_A \to \mathfrak{Z}_A$, *es un homeomorfismo local.*

Demostración: Es continua por construcción, dado $W_b \subseteq \mathfrak{Z}_A$,

$$\pi^{-1}(W_b) = \bigcup_{a \in A} \widehat{a}(W_b)$$

es abierto de E_A.

De otra parte dado $[a]_P \in E_A$, se toma algún $b \in P$, o sea $P \in W_b$. Se tiene $[a]_P \in \widehat{a}(W_b)$ y puede verse que la biyección $W_b \approx \widehat{a}(W_b)$ establece un homeomorfismo entre W_b y $\widehat{a}(W_b)$.

■

Definición 1.9. *Cada elemento* $a \in A$, *define una sección global continua y abierta de* $Spec_A$,

$$\widehat{a} : \quad \mathfrak{Z}_A \longrightarrow E_A \tag{1.3}$$

$$P \longmapsto [a]_P$$

Por definición, dado $c \in A$,

$$\widehat{c}^{-1}(\widehat{a}(W_b)) = W_{(c \ominus a)\oplus(a\ominus c)\oplus b}$$

es abierto en $\mathfrak{Z}_A$; consecuentemente $\widehat{c}$ es continua para cada elemento $c \in A$; y abierta por construcción; en particular,

$$\widehat{a}^{-1}(\widehat{a}(W_b)) = W_b$$

Para cada $[a]_P \in E_A$ y $b \in P$; $\widehat{a}(W_b)$ es un abierto de E_A que contiene a $[a]_P$.

Proposición 1.10. *El haz de secciones del homeomorfismo local precedente, es el haz asociado, por la construcción de Godement (ver [?] y [8]), al prehaz:*

$$\mathcal{P}_A : \quad \mathcal{O}(\mathfrak{Z}_A)^{op} \longrightarrow \mathcal{E}ns \tag{1.4}$$

$$\begin{tikzcd} W_a \arrow[r, mapsto] \arrow[d, hook] & A/\langle a \rangle \\ W_b \arrow[r, mapsto] & A/\langle b \rangle \arrow[u] \end{tikzcd}$$

donde $\mathcal{O}(\mathfrak{Z}_A)$ *es el local de los abiertos de* $\mathfrak{Z}_A$ *y* $\mathcal{E}ns$ *es la categoría de conjuntos.*

Demostración. Notar que las fibras de E_A son

$$(E_A)_P = A/P$$

Se debe verificar que

$$(E_A)_P = \varinjlim_{P \in W_a} \mathcal{P}_A(W_a)$$

o sea

$$A/P = \varinjlim_{a \in P} A/\langle a \rangle$$

El sistema filtrante considerado esta determinado por el orden en la mv-álgebra; es decir para todo $a, b \in P$ tal que $a \leq b$, se toma el morfismo:

$$\begin{aligned} h_{ab}\ : \qquad A/\langle a \rangle &\longrightarrow A/\langle b \rangle \\ [x]_{\langle a \rangle} &\longmapsto [x]_{\langle b \rangle} \end{aligned}$$

inducido por la inclución $\langle a \rangle \subseteq \langle b \rangle$ (que el sistema es filtrante se sigue del corolario 1.4)

Se debe verificar que

$$A/\langle a \rangle \xrightarrow[a \in P]{} A/P$$

es colímite.

Sea $\{g_a\}_{a \in A}$ un cono del diagrama anterior, es decir:

$$\begin{tikzcd} A/\langle a \rangle \arrow[r, "a \in P"'] \arrow[rr, bend left, "g_a"] & A/P & A' \end{tikzcd}$$

se quiere demostrar que existe un único $\lambda : A/P \to A'$, tal que

$$\begin{tikzcd} A/\langle a \rangle \arrow[r, "a \in P"'] \arrow[rr, bend left, "g_a"] & A/P \arrow[r, dashed, "!\lambda"] & A' \end{tikzcd}$$

el diagrama conmuta.

Definase

$$\begin{array}{rrcl} \lambda : & A/P & \longrightarrow & A' \\ & [x]_P & \longmapsto & g_0(x) \end{array}$$

se debe verificar: (1) λ está bien definido y (2) el diagrama conmuta.

Veamos (1): sea $[x]_P = [y]_P$ para $x, y \in A$, entonces,

$$g_0(x) = g_a h_{0a}(x)$$

para todo $a \in P$; porque $\{g_a\}_{a \in P}$ es cono.

Consecuentemente para todo $a \in P$;

$$g_0(a) = g_a(h_{0a}(a)) = g_a(0) = 0$$

consecuentemente, todos los elementos de P van a cero de A'.

Por hipótesis

$$x \ominus y \in P \quad \text{y} \quad y \ominus x \in P$$

entonces $g_0(x \ominus y) = 0 = g_0(y \ominus x)$; consecuentemente

$$\lambda([x]_P) = g_0(x) = g_0(y) = \lambda([y]_P)$$

Veamos (2): se quiere demostrar

$$\lambda h_{aP} = g_a$$

sea $[x]_{\langle a \rangle} \in A/\langle a \rangle$ entonces,

$$\lambda h_{aP}\left([x]_{\langle a \rangle}\right) = \lambda\,(x/P) = g_0(x) = g_a h_a(x) = g_a\left([x]_{\langle a \rangle}\right)$$

λ es único. Dado λ' que hace conmutar el diagrama, entonces

$$\lambda'([x]_P) = \lambda' h_{0P}(x) = g_0(x) = \lambda([x]_P)$$

■

Definición 1.11 (El objeto cadena $Spec_A$). *El objeto $Spec_A \in Sh(\mathfrak{Z}_A)$ es el objeto cadena definido por el par,*

$$Spec_A = (\mathfrak{Z}_A, E_A)$$

Que sea un objeto cadena significa que las fibras $(E_A)_P \approx A/P$ son cadenas.

Definición 1.12 (La categoría de mv-lagebras). *$mv\mathcal{A}$ la categoría de mv-álgebras; es la categoría cuyos objetos son las mv-álgebras y morfismos los homomorfismos entre mv-álgebras.*

Definición 1.13 (La categoría de espacios topológicos munidos de un haz de cadenas). *Llamaremos $mv\mathcal{E}$ a la categoría de espacios topológicos munidos de un haz de cadenas, cuyos objetos son los triplas (X, E, π)*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "\pi"] \\ X \end{tikzcd} \tag{1.5}$$

con π un homeo local, y E, X, espacios topológicos tales que la fibra E_x es una mv-cadena para cada $x \in X$; y cuyos morfismos

$$f : (X, E, \pi_1) \longrightarrow (Y, F, \pi_2)$$

están dados por un par (f, φ), donde f es una función continua y φ_x es un morfismo de mv-álgebras, tales que para toda sección $s \in F$

$$\begin{tikzcd} E_x & F_{f(x)} \arrow[l, "\varphi_x"'] \\ X \arrow[u, dashed, "k"] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[u, "s"'] \end{tikzcd} \tag{1.6}$$

$$k(x) = \varphi_x \circ s \circ f(x)$$

es sección de E.

La asignación $A \mapsto Spec_A$ es funtorial y se tiene:

Proposición 1.14. *Los funtores*

$$(mv\mathcal{A})^{op} \underset{\Gamma}{\overset{Spec}{\rightleftarrows}} mv\mathcal{E}$$

son adjuntos a derecha,

con Γ *funtor de secciones globales; es decir, para cada mv-álgebra* A *y haz sobre* X*,* $T \to X$*, existe un isomorfismo natural*

$$[\,A, \Gamma(X,T)\,] \overset{iso}{\approx} [\,(X,T), Spec_A\,]$$

Demostración. Dado un morfismo

$$(X,T) \xrightarrow{f} (\mathfrak{Z}(A), E_A)$$

para todo $a \in A$

$$\begin{array}{ccc} T & \xleftarrow{\varphi} & E_A \\ {\scriptstyle k}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \widehat{a}} \\ X & \xrightarrow{f} & \mathfrak{Z}(A) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \Gamma(X,T) \\ & & \\ a & \longmapsto & \varphi\,\widehat{a}\,f = k \end{array}$$

Consecuentemente, se ha construido una asignación

$$[\,(X,\,T),\,Spec_A\,] \xrightarrow{\theta} [\,A,\,\Gamma(X,T)\,] \tag{1.7}$$

que es una biyección natural.

La adjunción precedente está determinada por la propiedad universal del objeto cadena $Spec_A$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "g"'] & \Gamma Spec_A \arrow[d, dashed] & Spec_A \arrow[d, dashed, "\exists!"] & \in \quad mv\mathcal{A}^{op} \\ & \Gamma(X,T) & (X,T) & \end{tikzcd} \tag{1.8}$$

con

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta} & \Gamma Spec_A \\ a & \longmapsto & \widehat{a}(P) = [a]_P \end{array}$$

$\blacksquare$

La teoría general de representación de una mv-álgebra como el álgebra de secciones de un haz de cadenas que desarrollamos en este trabajo, estudia el morfismo η. El resultado principal de esta tesis consiste en demostrar que cualquiera sea la mv-álgebra A, el morfismo η es un isomorfismo.

2

El teorema de representación para mv-álgebras arquimedianas

Antes de tratar el caso de una mv-álgebra general, estudiaremos el caso arquimediano. En este caso, todo ideal primo es maximál, y este hecho implica que ciertas construcciones clásicas puedan aplicarse. Nos inspiramos en el artículo [3], y obtenemos una generalización al caso arquimediano general, del resultado allí obtenido para mv-álgebras localmente finitas.

En el artículo [3] de Cignoli, Dubuc, Mundici: *Extending Stone duality to multisets and locally finite mv-algebras*; se representó toda mv-álgebra localmente finita, como el haz de secciones globales sobre un espacio topológico, asociado a su conjunto de ideales maximales; donde para cada ideal maximal P, la fibra del haz corresponde a la cadena A/P subalgebra del intervalo racional $[0,1] \cap \mathbb{Q}$.

Se mostrará que las mv-álgebras arquimedianas admiten una representación análoga.

Dada A una mv-álgebra arquimediana, se estudiará el conjunto de sus ideales maximales; en particular, se estudiarán el espacio topológico $\mathfrak{Z}_A$ y el objeto $Spec_A$. Algunas propiedades de este espacio topológico se relacionan con la estructura arquimediana del álgebra.

Aquí demostraremos que todas las mv-álgebras arquimedianas se representan bien como las secciones globales del haz $Spec_A$, es decir;

$$A \underset{iso}{\approx} \Gamma(Spec_A)$$

2.1. mv-Algebras localmente finitas

Se presentarán algunos resultados del artículo [3] de Cignoli, Dubuc, Mundici, acerca de la representación de las mv-álgebras localmente finitas por álgebras de secciones globales de un haz de cadenas, que serán generalizados para el caso mv-álgebras arquimedianas.

mv-Espectro, los funtores $\mathfrak{X}$ y $\mathfrak{C}$

Dada una mv-álgebra A, $\mathfrak{X}(A)$ denota el conjunto de homomorfismos de A en la mv-álgebra $[0,1]$. Es conocida la biyección entre $\mathfrak{X}(A)$ y el conjunto de ideales maximales de A.

$\mathfrak{X}(A)$ con la topología heredada del espacio producto $[0,1]^A$, es un espacio compacto Hausdorff; donde $[0,1]$ está dotado con la topología usual.

Una subbase de abiertos para la topología de $\mathfrak{X}(A)$ está dada por los conjuntos de la forma:

$$W_{a,U} = \{f \in \mathfrak{X}(A) | f(a) \in U\}$$

con $a \in A$ y U abierto de $[0,1]$.

Si A, B son mv-álgebras; a cada homomorfismo $h : A \to B$ asociamos la función continua

$$\mathfrak{X}(h) : \mathfrak{X}(B) \to \mathfrak{X}(A)$$

definida por composición:

$$\mathfrak{X}(h)(f) = fh$$

para todo $f \in \mathfrak{X}(B)$.

$\mathfrak{X}$ es un funtor de la categoría de mv-álgebras $mv\mathcal{A}^{op}$ en la categoría de espacios compactos Hausdorff $\mathbb{COMP}$.

Dado X un espacio compacto Hausdorff se define:

$$\mathfrak{C}(X) = Cont(X, [0,1])$$

la mv-álgebra de todas las funciones $[0,1]$-valuadas de dominio X, con las operaciones punto a punto.

Dada la función $f : Y \to X$;

$$\mathfrak{C}(f) : \mathfrak{C}(X) \to \mathfrak{C}(Y)$$

es el homomorfismo dado por $\mathfrak{C}(f)(g) = gf$ para cada $g \in \mathfrak{C}(Y)$.

Consecuentemente $\mathfrak{C}$ es un funtor de la categoría $\mathbb{COMP}^{op}$ en la categoría $mv\mathcal{A}$.

Los funtores $\mathfrak{X}$ y $\mathfrak{C}$ son adjuntos a derecha: se tienen transformaciones naturales

$$\eta : id \to \mathfrak{C}\mathfrak{X}$$

y

$$\epsilon : id \to \mathfrak{X}\mathfrak{C}$$

definidas para cada $a \in A$ por,

$$\eta_A(a) = \widehat{a} : \quad \mathfrak{X}(A) \rightarrowtail [0,1], \qquad \widehat{a}(f) = f(a)$$

función continua

y para cada $x \in X$

$$\epsilon_X(x) = \widehat{x} : \quad \mathfrak{C}(X) \rightarrowtail [0,1] \qquad \widehat{x}(\lambda) = \lambda(x)$$

homomorfismo de mv-álgebras.

La asignación $a \mapsto \hat{a}$ es un homomorfismo de mv-álgebras, y analogamente la asignación $x \mapsto \hat{x}$ es una función continua.

A continuación recordaremos algunos resultados básicos del artículo [3] de Cignoli, Dubuc, Mundici, referentes a estas dos transformaciones naturales y algunas de sus consecuencias en la teoría del espectro.

Hechos 1.

1. El término mv-álgebra arquimediana, se usa en lugar de álgebra hiperarquimediana.
2. $n.a = \underbrace{a \oplus a \cdots \oplus a}_{n \text{ veces}}$
3. Un elemento a de una mv-álgebra A se dice arquimediano si y solo si, exite un número natural n tal que $n.a = (n+1).a$
4. Una mv-álgebra se dice arquimediana si todos sus elementos son arquimedianos.
5. Para todo espacio compacto Hausdorff X y cualquier subalgebra separable A de $\mathfrak{C}(X)$, la función $\epsilon_X : X \to \mathfrak{X}(A)$ es un homeomorfismo
6. El funtor $\mathfrak{C} : \mathbb{COMP}^{op} \to mv\mathcal{A}$ es plenamente fiel y determina una equivalencia entre las categorías $\mathbb{COMP}^{op}$ y la subcategoría plena de mv-álgebras de la forma $\mathfrak{C}(X)$.
7. Para cualquier mv-álgebra A, el homomorfismo $\eta_A : A \to \mathfrak{C}\mathfrak{X}(A)$ es inyectivo si y solo si la intersección de ideales maximáles de A es cero, es decir, si y solo sí A es semisimple.
8. $f \in \mathfrak{C}(X)$ con X compacto Hausdorff, es arquimediano si y solo sí $f^{-1}(0)$ es clopen en X
9. Una mv-álgebra A es separable si para todo $a, b \in A$ existe $f \in \mathfrak{X}(A)$ tal que $f(a) = 0$ y $f(b) \neq 0$
10. Consecuentemente una subalgebra separable de $\mathfrak{C}(X)$ es arquimediana, si y solo si, $f^{-1}(0)$ es clopen de X para cada $f \in A$.
11. La mv-álgebra $\mathfrak{C}(X)$ tiene una subalgebra arquimediana separable si y solo si X es un espacio de Stone (ver el item 16 abajo).
12. Sea X compacto Hausdorff y A una subalgebra separable de $\mathfrak{C}(X)$, tal que $f(X) = rango(f) \subset \mathbb{Q}$ para cada $f \in A$; entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    a) A es arquimediana

b) El rango de f es finito para cada $f \in A$

c) A es una subalgebra de $Cont(X, \mathbb{Q}_d \cap [0,1])$, donde $\mathbb{Q}_d$ denota los racionales con la topología discreta.

13. Existen espacios de Stone X tales que la mv-álgebra $\mathfrak{C}(X)$ no es arquimediana: por ejemplo el conjunto $X = \{0\} \cup \{1/n | n = 1, 2, 3, \cdots\}$ con la topología heredada de $\mathbb{R}$ es un espacio de Stone y la función identidad es $\mathbb{Q}$-valuada y continua y sin embargo no es de rango finito.

14. Una mv-álgebra A es localmente finita, si y solo sí, toda subalgebra de A finitamente generada, es finita.

15. Las siguientes condiciones son equivalentes:

    a) A es localmente finita

    b) Para cada ideal primo J de A, el cociente A/J es isomorfo a una subalgebra de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$

    c) $\mathfrak{X}(A)$ es un espacio de Stone, η_A es un isomorfismo de A sobre la subalgebra separable $\eta_A(A)$ de $Cont(X, \mathbb{Q} \cap [0,1]$ y cada función $\widehat{a}$ es de rango finito.

    d) Existe un espacio de Stone X tal que A es isomorfo a una subalgebra separable de $Cont(X, \mathbb{Q} \cap [0,1])$ formada por funciones de rango finito.

16. Sea X un espacio compacto Hausdorff y A una subalgebra separable de $\mathfrak{C}(X)$. Si A es arquimediana, entonces los complementos de los conjuntos $f^{-1}(0)$ forman una base de X. Los espacios compactos Hausdorff que tienen base clopen son llamados espacios de Stone.

17. La mv-álgebra $\mathfrak{C}(X)$ tiene una subalgebra separable arquimediana A si y solo si X es un espacio de Stone.

Observación. En el mismo artículo [3, Remark 5.3], se deduce que si A es una mv-álgebra localmente finita, entonces los conjuntos

$$W_{a,r} = \{f \in \mathfrak{X}(A) | f(a) = r\}$$

son clopen para todo $a \in A$ y $r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Sin embargo si estos conjuntos $W_{a,r}$ son clopen, no se deduce que la mv-álgebra A sea localmente finita.

Basta tomar $A = [0,1]$; así $\mathfrak{X}(A) = \{id_{[0,1]}\}$, los $W_{a,r}$ son clopen y A no es localmente finita. Es necesario pedir que los rangos de los elementos de $W_{a,r}$ sean racionales.

A continuación se enuncia el teorema que establece la representación de las mv-álgebras localmente finitas, como haces de Hausdorff de mv-cadenas racionales; escrito en el artículo [3, Teorema 6.9] de Cignoli, Dubuc, Mundicci.

Teorema 2.1. *Existe una equivalencia entre la categoría de mv-álgebras localmente finitas y la categoría opuesta de haces de Hausdorff de mv-álgebras racionales.*

En [3] se define un haz

$$X_A \to \mathfrak{X}(A)$$

tal que $X_A \subseteq \mathfrak{X}(A) \times ([0,1] \cap \mathbb{Q})$, y el isomorfismo en la categoría de mv-álgebras localmente finitas correspondiente a esta equivalencia es precisamente el que establece

$$A \xrightarrow{\approx} \Gamma(\mathfrak{X}(A), X_A)$$

2.2. El espectro primo de las mv-álgebras arquimedianas.

Dada cualquier mv-álgebra A, se tienen tres espacios topológicos asociados, el espectro primo $\mathfrak{Z}_A$, definido en el capítulo 1; el espectro maximál $\mathfrak{M}_A$ definido abajo, y el espectro $\mathfrak{X}(A)$ definido en (2.1). Veremos que cuando A es arquimediana estos tres espacios coinciden.

Las mv-álgebras arquimedianas se representan bien como mv-álgebras de secciones globales de un haz de mv-cadenas que son subalgebras de $[0,1]$. Para demostrarlo, se hará una construcción análoga a la sugerida para mv-álgebras localmente finitas; primero se estudiará su espectro primo $\mathfrak{Z}_A$; después se estudiará el objeto cadena $Spec_A$.

Se mostrará que para el caso arquimediano, $\mathfrak{Z}_A$ es un espacio de Stone (en particular compacto y Hausdorff), que el haz $Spec_A$ es de Hausdorff y que cada mv-álgebra arquimediana es isomorfa a las secciones globales del haz $Spec_A$. Esta es una buena generalización del caso localmente finito debido a que en el caso arquimediano

$$\mathfrak{Z}_A = \mathfrak{X}(A)$$

A continuación se caracterizan las mv-álgebras arquimedianas en términos del espacio $\mathfrak{Z}_A$.

El espectro maximal $\mathfrak{M}_A$ es el espacio topológico cuyos puntos son los ideales maximales de A y cuya base de abiertos está dada por los conjuntos,

$$W_a|_{\mathfrak{M}_A} = \{P \in \mathfrak{M}_A : a \in P\} \tag{2.1}$$

El espectro maximal es el subespacio de $\mathfrak{Z}_A$ restringido a los ideales maximales con la topología de subespacio.

Teorema 2.2. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *A es una mv-álgebra arquimediana*
2. $\mathfrak{Z}_A = \mathfrak{M}_A$
3. $\mathfrak{Z}_A$ *es* T_2
4. $\mathfrak{Z}_A = \mathfrak{X}(A)$ - *(son homeomorfos)*
5. W_a *es clopen para todo* $a \in A$
6. **E** *es* T_2

Demostración
(1) $\Leftrightarrow$ (2)
Es una consecuencia directa del teorema (6.3.2, pg 117) del libro [2].

(2) $\Rightarrow$ (3)
Dados P, Q dos ideales maximales de $\mathfrak{Z}_A$. Por ser diferentes, existe $a \in A$ diferente de cero, tal que $a \in P$ y $a \notin Q$. Consecuentemente, $P \in W_a$; como

Q es maximal, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que: $\neg n.a \in Q$. Por lo cual; $Q \in W_{\neg n.a}$ y $W_a \cap W_{\neg n.a} = \varnothing$.

(3) $\Rightarrow$ (1)
Si A no es arquimediana entonces, existe P un ideal primo no maximál, consecuentemente existe $Q \supset P$ primo. Esta última afirmación implica que todo abierto que contenga a P contiene a Q; es decir no es posible separalos con dos conjuntos abiertos disjuntos; esto implica que $\mathfrak{Z}_A$ no es Hausdorff.

(3) $\Rightarrow$ (4)
la función identidad $id : \mathfrak{X}(A) \to \mathfrak{Z}_A$ es continua, debido a que los W_a son clopen en $\mathfrak{X}_A$ (demostrado en [3, lema 4.5]). Como $\mathfrak{Z}_A$ es Hausdorff y $\mathfrak{X}(A)$ es compacto, entonces id es homeomorfismo.

(4) $\Rightarrow$ (5)
Se sigue puesto que W_a es cerrado en $\mathfrak{X}(A)$ y abierto en $\mathfrak{M}_A$.

(5) $\Rightarrow$ (2)
Se demostrará que todo ideal primo es maximal.
Sea P ideal primo; sea $a \notin P$. Por hipótesis $W'_a = \{P|a \notin P\}$ es abierto. Consecuentemente:

$$W'_a = \bigcup_{b \in I} W_b$$

Entonces **todo ideal primo que tiene algún $b \in I$ no tiene a** a. Como $P \in W'_a$ entonces $b \in P$ para algún $b \in I$; consecuentemente el ideal generado $J = \langle P, a\rangle = A$, de lo contrario J sería un ideal primo que tiene a algún $b \in I$ y tiene a a.

(3) $\Rightarrow$ (6)
Sea $[a]_P \neq [b]_Q$. Si $P \neq Q$, entonces existen abiertos U, V en $\mathfrak{Z}_A$ de P y Q respectivamente, que los separan. Consecuentemente $\widehat{a}(U)$ y $\widehat{b}(V)$ son abiertos de $\mathbf{E}$ que separan a $[a]_P$ y $[b]_Q$.

Si $P = Q$, como $W'_{dist(a,b)} = \{P|[a]_P \neq [b]_P\}$ es abierto de $\mathfrak{Z}_A$, entonces $\widehat{a}(W'_{dist(a,b)})$ y $\widehat{b}(W'_{dist(a,b)})$ son abiertos de $\mathbf{E}$ que separan a $[a]_P$ y $[b]_P$.

(6) $\Rightarrow$ (5)
Es un resultado conocido que si $\mathbf{E}$ es Hausdorff, entonces

$$W_{dist(a,b)} = \{P \mid [a]_P = [b]_P\}$$

es clopen, para todo $a, b \in A$. Consecuentemente (5) se sigue directamente de (6) tomando $b = 0$.

Observación: Del teorema anterior se sigue el importante hecho que $\mathfrak{Z}_A$ es **compacto** para A arquimediana, debido a que $\mathfrak{X}(A) = \mathfrak{Z}_A$. En este trabajo se verá que este espació es compacto para cualquier mv-álgebra A.

Teorema 2.3. *A semisimple y $W_{a,r}$ clopen para todo $a \in A$ y $r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, si y solo si, A es una mv-álgebra arquimediana.*

Demostración. ($\Rightarrow$)

Recordemos que,

$$W_{a,r} = \{\, f \in \mathfrak{X}(A) \quad | \quad f(a) = r \,\} \tag{2.2}$$

En particular

$$W_{a,0} = \{\, f \in \mathfrak{X}(A) \quad | \quad f(a) = 0 \,\} \tag{2.3}$$

es clopen. Pero $W_{a,0} = \widehat{a}^{-1}(0)$; luego se sigue de (Hechos 1; 8)

que $\widehat{a}$ es un elemento arquimediano de $Cont(\mathfrak{X}(A), [0,1])$. Es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \cdot \widehat{a} = (n+1) \cdot \widehat{a}$$

consecuentemente, para todo $f \in \mathfrak{X}(A)$

$$f(\, n \cdot a\,) = f(\,(n+1) \cdot a\,)$$

consecuentemente, para todo $f \in \mathfrak{X}(A)$,

$$f\,(dist(\,(n+1) \cdot a, \quad n \cdot a\,)) = 0$$

como A es semisimple, $n \cdot a \;=\; (n+1) \cdot a$.

($\Leftarrow$)

Si A es arquimediana se sabe que

$$W_a = W_{a,0}$$

y W_a es clopen (Teorema 2.2, 5). Se debe verificar que $W_{a,r}$ es clopen para todo $r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$.

W_a clopen, significa que existe un abierto $\mathcal{U} \in \mathcal{O}([0,1])$ tal que $\mathcal{U} \ni 0$ y para todo $g \in \mathfrak{X}(A)$

$$g(a) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad g(a) \notin \mathcal{U}$$

Supongamos que para algún $r \in (0,1] \cap \mathbb{Q}$, $W_{a,r}$ no es clopen. Entonces para todo abierto $\mathcal{V} \ni r$ existe $g \in \mathfrak{X}(A)$ tal que

$$g(a) \neq r \quad \text{y} \quad g(a) \in \mathcal{V}$$

consecuentemente, para todo $\epsilon > 0$ existe $g \notin W_{a,r}$ tal que para todo $f \in W_{a,r}$

$$0 < |g - f|(a) < \epsilon$$

con $|g - f|(a) = dist(g,f)(a) = [g(a) \ominus f(a)] \oplus [f(a) \ominus g(a)]$.

La afirmación precedente implica que $W_{a,0}$ no es clopen; para todo $\mathcal{U} \ni 0$ y para todo $h \in W_{a,0}$, existe $|g - f| \in \mathfrak{X}(A)$, con $f \in W_{a,r}$ tal que

$$|g - h|(a) \neq 0 \quad \text{y} \quad |g - h|(a) \in \mathcal{U}$$

■

Nota

Si no se pide que A sea semisimple, la implicación ($\Rightarrow$) es falsa.

Basta tomar A una mv-álgebra cadena con infinitesimales; entonces el único ideal maximal es el conjunto S, formado por los infinitesimales.

$\mathfrak{X}(A) = \{S\}$, consecuentemente, los conjuntos $W_{a,r}$ son clopen.

■

El lema que se presenta a continuación relaciona cada ideal principal con el conjunto de ideales primos que lo contienen. Este hecho permitirá demostrar el isomorfismo entre una mv-álgebra arquimediana A y el conjunto de las secciones globales del haz $Spec_A$.

Lema 2.4. *Dada A una mv-álgebra, para todo* $a, b, c \in A$

$$\widehat{a}|_{W_c} = \widehat{b}|_{W_c} \quad \Leftrightarrow \quad [a]_{\langle c \rangle} = [b]_{\langle c \rangle}$$

con $\langle c \rangle$ el ideal generado por c.

Demostración

$(\Leftarrow)$ se tiene por definición de W_c.

$(\Rightarrow)$ $\widehat{a}|_{W_c} = \widehat{b}|_{W_c}$, si y solo si, por definición, para todo $P \ni c$;

$$[a]_P = [b]_P$$

lo cual implica $[a]_{\langle c \rangle} = [b]_{\langle c \rangle}$; debido a que si $a \ominus b \notin \langle c \rangle$ como,

$$\langle c \rangle = \bigcap_{c \in P} P$$

existe un ideal primo P tal que $c \in P$ y $a \ominus b \notin P$. Consecuentemente $\widehat{a}(P) \neq \widehat{b}(P)$.

Demostrar que todo ideal es intersección de ideales primos usa el lema de Zorn (ver [2, prop 1.2.13]), consecuentemente el lema anterior depende del lema de Zorn.

Notación. Recordar que $\mathbf{\Gamma}(Spec_A) = \Gamma(\mathfrak{Z}_A, E_A)$, denota la mv-álgebra secciones globales del haz $Spec_A$.

Teorema 2.5. *Dada A una mv-álgebra arquimediana,*

$$A \underset{iso}{\approx} \mathbf{\Gamma}(Spec_A)$$

Demostración:

Se sabe por [2] que la aplicación $\eta_A : A \to \mathbf{\Gamma}(Spec_A)$ es inyectiva; En [2] se demuestra que $\eta_A : A \to Cont(\mathfrak{X}(A), [0,1])$ es inyectiva si y solo si A es semisimple; como $\mathbf{\Gamma}(Spec_A) \subset Cont(\mathfrak{X}(A), [0,1])$ y las mv-álgebras arquimedianas son semisimples, vale para este caso.

Se quiere ver que η_A es suryectiva.

Como $\mathfrak{Z}_A$ es compacto. haremos la prueba para cubrimientos finitos del espacio base. Se sabe que las secciones locales están dadas por $\widehat{a}$ con $a \in A$, por construcción de $Spec_A$.

Primero se hará la demostración para un cubrimiento con dos abiertos de la base, después se demostrará que es suficiente probarlo para un cubrimiento con dos abiertos.

Supongamos $W_a \cup W_b = \mathfrak{Z}_A$ y

$$\widehat{c}|_{W_a} : W_a \to \mathbf{E} \quad \text{y} \quad \widehat{d}|_{W_b} : W_b \to \mathbf{E}$$

dos secciones locales, que coinciden en la intersección.

Se debe demostrar que existe una única $e \in A$, tal que $\widehat{e} : \mathfrak{Z}_A \to \mathbf{E}$ es una sección global tal que,

$$\widehat{e}|_{W_a} = \widehat{c}|_{W_a} \text{ y } \widehat{e}|_{W_b} = \widehat{d}|_{W_b}$$

Se hace notar que

$$W_a \cup W_b = W_{a \wedge b}$$

debido a la primalidad de los ideales.

También $W_a \cap W_b = W_{a \oplus b}$, por definición de ideales de mv-álgebras.

Consecuentemente, $W_{a \wedge b} = \mathfrak{Z}_A$; como la intersección de los ideales primos es cero, entonces, $a \wedge b = 0$.

Las dos secciones coinciden en la intersección de sus dominios, si y solo si,

$$\widehat{c}|_{W_{a \oplus b}} = \widehat{d}|_{W_{a \oplus b}}$$

por el lema (2.4),

$$[c]_{\langle a\oplus b\rangle} = [d]_{\langle a\oplus b\rangle}$$

De otra parte, la existencia de una única sección global $\widehat{e}$ con las propiedades pedidas; usando el lema (2.4), es equivalente a la existencia de un único elemento $e \in A$ tal que

$$[e]_{\langle a\rangle} = [c]_{\langle a\rangle} \quad \text{y} \quad [e]_{\langle b\rangle} = [d]_{\langle b\rangle}$$

Consecuentemente demostrar la suryectividad de η_A es equivalente a mostrar el siguiente hecho.

Lema 2.6 (Lema pushout - pullback, caso arquimediano). *El pushout,*

$$\begin{tikzcd}
 & A/\langle a\rangle \arrow[dr] & \\
A \arrow[ur] \arrow[dr] & & A/\langle a\oplus b\rangle \\
 & A/\langle b\rangle \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

es pullback.

Antes de hacer la demostración de la afirmación precedente; se presentarán dos ejemplos particulares que ilustrarán la heurística de la demostración general para el caso arquimediano.

Ejemplo 1. $A = [0,1]^3$, $a = (x,0,0)$, con $x \neq 0$, $b = (0,y,0)$, con $y \neq 0$, $c = (c_1,c_2,c_3)$, y $d = (d_1,d_2,d_3)$.

Se quiere ver que existe un único $e \in A$ con las condiciones pedidas.

Del ejemplo se sigue,

$$[c]_{\langle a\rangle} = (0,c_2,c_3) \quad \text{y} \quad [d]_{\langle b\rangle} = (d_1,0,d_3)$$

$$(\quad [c]_{\langle a\oplus b\rangle} \quad = \quad [d]_{\langle a\oplus b\rangle} \quad) \quad \Rightarrow \qquad c_3 = d_3 := f$$

Consecuentemente, $z = (d_1, c_2, f) \in [0,1]^3$ es el único que cumple las condiciones del teorema.

Ejemplo 2. A producto subdirecto de $[0,1]^3$ y los elementos $a, b, c, d \in A$ tomados igual que en el ejemplo anterior.

La búsqueda de z se hace de la misma forma que en el ejemplo precedente; pero ahora se tiene que demostrar que $z \in A$, debido a que en general A no es isomorfo a $[0,1]^3$.

Como $x, y \in (0,1]$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n.x = n.y = 1$. Tomando este n, z se puede expresar como sigue:

$$z = (c \wedge d) \vee (n.a \wedge d) \vee (n.b \wedge c)$$

lo cual demuestra que z está en A, debido a que se obtiene como combinaciones de operaciones cerradas en cualquier mv-álgebra.

Demostración general: caso A arquimediana
Supongamos que se tienen $a, b, c, d \in A$ con las condiciones que pide el teorema.

Como A es arquimediana, entonces,

$$\bigcap_{P \in \mathfrak{M}_A} P = \{0\}$$

consecuentemente A es producto subdirecto de subalgebras de $[0,1]$.

En adelante nos referiremos a los elementos de A como elementos del producto subdirecto del cual es isomorfo.

A arquimediana implica que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n.a = (n+1).a \quad \text{y} \quad n.b = (n+1).b$$

Suponemos que π_k es la $k - sima$ proyección de A en $[0,1]$;

consecuentemente,

$$n.a \wedge d$$

tiene la propiedad,

$$(\pi_k a \neq 0) \quad \Rightarrow \quad (\,\pi_k(n.a)\wedge d_k = d_k\,) \quad \text{y} \quad (\,\pi_k a = 0\,) \quad \Rightarrow \quad (\,\pi_k(n.a)\wedge d_k = 0\,)$$

de manera análoga el elemento $n.b \wedge c$ tiene la propiedad,

$$\pi_k b \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_k n.b \wedge c_k = c_k$$

de la observación precedente,

$$z = (c \wedge d) \vee (n.a \wedge d) \vee (n.b \wedge c)$$

es el buscado.

$g = (n.a \wedge d) \vee (n.b \wedge c)$, tiene la propiedad

$$\begin{array}{lcr} \pi_k g = 0 & \text{si} & \pi_k a = \pi_k b = 0 \\ \pi_k g = c_k & \text{si} & \pi_k b \neq 0 \\ \pi_k g = d_k & \text{si} & \pi_k a \neq 0 \end{array}$$

análoga a la situación planteada en los ejemplos heurísticos.

Ahora se deduce directamente que z satisface las condiciones del teorema. Consecuentemente

$$A \underset{iso}{\approx} \mathbf{\Gamma}(Spec_A)$$

como se quería demostrar.

Si en lugar de tener dos abiertos que cubren, se tienen tres, el procedimiento es análogo. Lo único a tener en cuenta es que se debe usar el hecho: cociente de una mv-álgebra arquimediana por un ideal finitamente generado; es una mv-álgebra arquimediana.

$\blacksquare$

Nota

La construcción precedente es efectivamente una generalización de la representación hecha en [3] para mv-álgebras localmente finitas. En efecto en el teorema 2.2 se establece que las bases $\mathfrak{Z}_A$ y $\mathfrak{X}(A)$ son homeomorfas y, como las fibras son las mismas, necesariamente los espacios topológicos al ser homeomorfismos locales sobre sus bases, resultan también homeomorfos.

3

El topos clasificante de las mv-álgebras y las mv-álgebras cadena

En este capítulo construimos explícitamente los topos clasificantes de mv-álgebras y mv-cadenas. Los detalles de nuestras construcciones resultan necesarios para poder demostrar después las propiedades específicas válidas en esta instancia de la teoría de topos clasificantes y no válidas en general. Estas propiedades son las que permitirán obtener el teorema de representación, y son las siguientes: el topos clasificante de mv-cadenas es un topos espacial con suficientes puntos y la topología de Grothendieck que corresponde al axioma de cadena es subcanónica.

3.1. El topos clasificador de mv-álgebras

Definición 3.1. *Se llamará $mv\mathcal{A}_{pf}$ a la categoría de mv-álgebras de presentación finita.*

Cada objeto de $mv\mathcal{A}_{pf}$, es el cociente de una mv-álgebra libre finitamente generada por un ideal finitamente generado; es decir elementos de la forma

$$F[x_1, \cdots, x_n]/\langle a_1, \cdots, a_k\rangle$$

donde $a_i \in F[x_1, \cdots, x_n]$ y $\langle a_1, \cdots, a_k\rangle$ el ideal generado por los elementos a_i.

Proposición 3.2. *En toda mv-álgebra vale* $\langle a_1, \cdots, a_k\rangle = \langle a_1 \oplus \cdots, \oplus a_k\rangle$ *es decir, los ideales finitamente generados son principales (ver [2]).*

Demostración. $a_i \leq a_1 \oplus \cdots \oplus a_k$ para todo $1 \leq i \leq k$, donde el orden es el munido a la mv-álgebra. Consecuentemente $\langle a_1, \cdots, a_k\rangle \subseteq \langle a_1 \oplus \cdots, \oplus a_k\rangle$

De otra parte, $a_1 \oplus \cdots \oplus a_k \in \langle a_1, \cdots, a_k\rangle$ por definición; consecuentemente se sigue la otra contenencia. ■

Corolario 3.3. $\langle a \vee b\rangle = \langle a \oplus b\rangle$

Demostración. como $a \vee b \leq a \oplus b$ entonces

$$\langle a \oplus b\rangle = \langle a, b\rangle \subseteq \langle a \vee b\rangle \subseteq \langle a \oplus b\rangle$$

■

Así los objetos de $mv\mathcal{A}_{pf}$ son de la forma

$$F[x_1, \cdots, x_n]/\langle a\rangle$$

y los morfismos son los homomorfismos de mv-álgebras.

Definición 3.4. *Se llamará* $\mathcal{V}$ *a la categoría* $mv\mathcal{A}_{pf}^{op}$. *Es bien conocido que* $\mathcal{V}$ *es una categoría con límites finitos.*

Definición 3.5. *Un punto de una categoría pequeña* $\mathcal{C}$ *con límites finitos, es un funtor* $p : \mathcal{C} \to \mathcal{E}ns$ *exacto a izquierda (es decir, que preserva límites finitos). El conjunto de puntos de* $\mathcal{C}$ *se suele notar como* $Lex(\mathcal{C}, \mathcal{E}ns)$.

Recordemos por [8], la defininción de diagrama de p.

Definición 3.6. *Dado* $p : \mathcal{C} \to \mathcal{E}ns$*, se llamará* Γ_p *a la categoría de elementos de* p*, cuyos objetos son las parejas* (X, α) *con* $\alpha \in p(X)$ *y cada morfismo* $f : (X, \alpha) \to (Y, \beta)$*, está dado por un morfismo* $f : X \to Y$ *en* $\mathcal{C}$ *con* $pf(\alpha) = \beta$*.*

Recordemos que Γ_p^{op}, es filtrante si y solo si p preserva límites finitos ver [8].

Definición 3.7. *Dado* $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{E}ns$*, se llamará* Γ_F *a la categoría de elementos de* F*, cuyos objetos son las parejas* (C, α) *con* $\alpha \in F(C)$ *y cada morfismo* $f : (C, \alpha) \to (D, \beta)$*, está dado por un morfismo* $f : C \to D$ *en* $\mathcal{V}$ *con* $Ff(\beta) = \alpha$*.*

Lema 3.8. *Existe una equivalencia natural*

$$Lex(\mathcal{V},\ \mathcal{E}ns) \underset{equiv}{\approx} mv\mathcal{A}$$

Bosquejo de la demostración

1. $\mathcal{V}$ es una categoría generada libremente tomando límites finitos de $\overline{F[x]}$; la mv-álgebra libre con un generador. Es decir; cualquier mv-álgebra $\overline{A} \in \mathcal{V}$ (salvo isomorfismo) se obtiene de $\overline{F[x]}$ por límites finitos.

   a) $\overline{F[x]} \times \cdots \times \overline{F[x]} \cong \overline{F[x_1, \cdots, x_n]}$

   b) $\overline{F[x_1, \cdots, x_n]/\langle a \rangle}$ es el dominio del egalizador

   $$\overline{F[x_1, \cdots, x_n]/\langle a \rangle} \rightarrowtail \overline{F[x_1, \cdots, x_n]} \underset{\widehat{0}}{\overset{\widehat{a}}{\rightrightarrows}} \overline{F[x]}$$

   donde $\widehat{a}$ corresponde al morfismo en $\mathcal{V}^{op}$

   $$x \longmapsto a$$

   con $x \in F[x]$ y $a \in F[x_1, \cdots, x_n]$.

2. $\overline{F[x]}$ es un objeto mv-algebra en $\mathcal{V}$; los morfismos

   a) $\overline{F[x]} \times \overline{F[x]} \xrightarrow{\oplus} \overline{F[x]}$

   b) $\overline{F[x]} \xrightarrow{\neg} \overline{F[x]}$

   c) $\overline{\{0,1\}} \xrightarrow{0} \overline{F[x]}$

   donde $\{0,1\}$ es la mv-álgebra inicial; es decir su dual $\overline{\{0,1\}}$ es el objeto terminal 1 de $\mathcal{V}$;

   están dados por los morfismos

   a) $$\begin{array}{ccc} F[x,y] & \xleftarrow{\oplus} & F[x] \\ x \oplus y & \longleftarrow\!\shortmid & x \end{array}$$

   b) $$\begin{array}{ccc} F[x] & \xrightarrow{\neg} & F[x] \\ x & \longmapsto & \neg x \end{array}$$

   c) $$\begin{array}{ccc} \{0,1\} & \xleftarrow{0} & F[x] \\ 0 & \longleftarrow\!\shortmid & x \end{array}$$

   en $\mathcal{V}^{op} = mv\mathcal{A}_{pf}$

3. Sea

$$\begin{array}{ccc} Lex(\mathcal{V},\ \mathcal{E}ns) & \xrightarrow{\Theta} & mv\mathcal{A} \\ p & \longmapsto & p\left(\overline{F[x]}\right) \end{array} \tag{3.1}$$

   con $p\left(\overline{F[x]}\right) = \left(p\left(\overline{F[x]}\right),\ \widetilde{\oplus}, \neg,\ 0\right)$ la mv-álgebra determinada por p. Observemos que todo funtor que preserva productos, envía objetos mv-álgebra en objetos mv-álgebra.

   y para cada $A \in mv\mathcal{A}$; sea $p_A \in Lex(\mathcal{V},\ \mathcal{E}ns)$ definido por,

$$p_A\left(\overline{F[x]}\right) = A$$

Que Θ es una equivalencia natural, se sigue de la proposición:.

Proposición 3.9. *Los puntos de $\mathcal{V}$ son representables desde afuera; es decir, $p \approx [\_,\, A]$, dada $B \in mv\mathcal{A}_{pf}$, $\overline{B} \in \mathcal{V}$,*

$$p(\,\overline{B}\,) \approx [\,B, A\,]$$

donde A es la mv-álgebra $A = p(\,\overline{F[x]}\,)$

Demostración
Tanto p como $[\_,\, A]$ preservan límites finitos, luego de la demostración del lema 3.8, item 1. se sigue que basta demostrar el isomorfismo

$$p\left(\overline{F[x]}\right) \approx [F[x], A]$$

Este isomorfismo está dado por

$$\begin{array}{rcl} A & \xrightarrow{\approx} & [\,F[x], A\,] \\ a & \longmapsto & x \to a \end{array} \qquad (3.2)$$

que vale porque $F[x]$ es libre en un generador.

■

Nota observemos que de la proposición precedente, se sigue

$$p(1) = p\left(\overline{\{0,1\}}\right) = \left[\,\{0,1\},\, p\left(\,\overline{F[x]}\,\right)\right] = 1$$

Corolario 3.10. *Los puntos de $\mathcal{V}$ son las mv-álgebras.*

■

Por comodidad y abuso de notación, se escribirá $p\left(\overline{F[x]}\right)$ para referirse a la mv-álgebra correspondiente a p.

Topos clasificador

Recordemos que un topos $\mathcal{B}$ se dice "topos clasificador de mv-álgebras", si se tiene una equivalencia (natural en $\mathcal{E}$), entre la categoría de morfismos geométricos $\mathcal{E} \to \mathcal{B}$ y las categoría de objetos mv-álgebra en $\mathcal{E}$; con $\mathcal{E}$ un topos de Grothendieck cualquiera.

Un morfismo geométrico, $p : \mathcal{E} \to \mathcal{B}$, está dado por un funtor $p^* : \mathcal{B} \to \mathcal{E}$, el funtor "imagen inversa", que preserva límites finitos y posee adjunto a derecha p_*, el funtor "imagen directa".

En este trabajo nos circunscribiremos a considerar que el topos $\mathcal{E}$ es el topos $\mathcal{E}ns$ de conjuntos.

Teorema 3.11. *El topos clasificador de las mv-álgebras, es el topos de prehaces $\mathcal{E}ns^{\mathcal{V}^{op}}$.*

Demostración. Este resultado es un caso particular del caso más general para álgebras universales. Aquí hacemos el bosquejo de un tratamiento original de este teorema que no es posible encontrar en la literatura. Además, más adelante necesitaremos las construcciones hechas en esta demostración.

El caso $\mathcal{E} = \mathcal{E}ns$

Veremos que el funtor de Yoneda $h : \mathcal{V} \to \mathcal{E}ns^{\mathcal{V}^{op}}$, induce una equivalencia de categorías:

$$\begin{array}{rccc} h: & Top[\mathcal{E}ns, \mathcal{E}ns^{\mathcal{V}^{op}}] & \longrightarrow & Puntos[\mathcal{V}, \mathcal{E}ns] \\ & p^* & \longmapsto & p^* \circ h \end{array} \tag{3.3}$$

donde $Top[\mathcal{E}ns, \mathcal{E}ns^{\mathcal{V}^{op}}]$ es la categoría de morfismos geométricos, entre el topos $\mathcal{E}ns$ y el topos $\mathcal{E}ns^{\mathcal{V}^{op}}$ (vista como subcategoría de $\mathcal{C}at[\mathcal{E}ns^{\mathcal{V}^{op}}, \mathcal{E}ns]$).

La afirmación precedente significa que para todo punto $p \in Lex(\mathcal{V}, \mathcal{E}ns)$ existe una extensión p^* que hace conmutativo (salvo isomorfismo) el siguiente digrama:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V} \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "p"'] & \mathcal{E}ns^{\mathcal{V}^{op}} \arrow[d, dashed, "!p^*"] \arrow[dl, phantom, "\approx"] \\ & \mathcal{E}ns \end{tikzcd} \tag{3.4}$$

es decir, $\quad p^*h \xrightarrow{\varepsilon} p$ es un isomorfismo.

La extensión p^* es única en el siguiente sentido:

Dados (p^*, ε) y (p', δ), $\quad$ dos extensiones de p existe un isomorfismo natural $\Theta : p^* \to p'$ $\quad$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} p^*h \arrow[r, "\Theta h"] \arrow[d, "\epsilon"'] & p'h \arrow[dl, "\delta"] \\ p \end{tikzcd} \tag{3.5}$$

Construcción del funtor p^*

Es sabido que, (ver [7])

Proposición 3.12. *Para todo* $\quad F : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{E}ns \quad$ *y* $\quad p : \mathcal{C} \to \mathcal{E}ns$

1. $\varinjlim_{\Gamma_F} [\_, C] = F$, $\quad$ *donde* Γ_F *es la categoría de elementos de* F *(ver definición 3.7).*

2. $\varinjlim_{\Gamma_p^{op}} [X, \_\,] = p$ *donde* Γ_p^{op} *es la categoría filtrante opuesta a la categoría de elementos de* p *(ver definición 3.6).*

Notación. Se usará el abuso de notación de Grothendieck, que no presenta inconsistencias

$$[\_, C] \equiv C$$

Se define,

$$p^*(F) = p^*(\varinjlim_{\Gamma_F} C) := \varinjlim_{\Gamma_F} pC$$

la extensión de Kan de p a lo largo de h (ver [7]).

Para verificar que p^* es la extensión que induce la equivalencia a lo largo de h, se deben verificar tres propiedades:

1. $p^* h \approx p$
2. p^* preserva límites finitos.
3. existe $p_* \vdash p^*$

Demostración
(1) Sale de que h es plenamente fiel.

(2) Demostremos primero el siguiente lema:

Lema 3.13. $[X,\_\,]^* = ev_X$

Basta considerar la siguiente cadena de igualdades,

$$[X,\_\,]^*(F) \overset{(a)}{=} \varinjlim_{\Gamma_F} [X, C] \overset{(b)}{=} \left(\varinjlim_{\Gamma_F} [\_, C] \right) (X) \overset{(c)}{=} FX = ev_X(F)$$

La igualdad (a) se tiene por definición del funtor extensión, (b) se tiene por que los límites se calculan punto a punto, (c) se tiene de la proposición 3.12 y la última igualdad se tiene por definición del funtor evaluación. ■

Debido a que el pasaje,

$$p \mapsto p^*$$

preserva colímites (como se verá en el lema 3.14) y

$$p = \varinjlim_{\Gamma_p^{op}} [X,\_\,]$$

se tiene que

$$p^* = (\varinjlim_{\Gamma_p^{op}} [X, \_\,])^* = \varinjlim_{\Gamma_p^{op}} [X, \_\,]^* = \varinjlim_{\Gamma_p^{op}} ev_X$$

Es decir p^* es un colímite filtrante de funtores evaluación; consecuentemente, p^* preserva límites finitos; debido a que el funtor evaluación perserva límites finitos y colímites filtrantes conmutan con límites finitos.

Se observa que de la igualdad precedente se llega a esta otra fórmula para p^*

$$p^*(F) = \varinjlim_{\Gamma_p^{op}} FX \tag{3.6}$$

Lema 3.14. *El pasaje* $\quad p \mapsto p^* \quad$ *preserva colímites*

Sea $\quad p = \varinjlim_{\alpha} p_\alpha \;; \quad$ se debe verificar que,

$$p^* F = \varinjlim_{\alpha} (p_\alpha^* F)$$

Consecuentemente, usando la definición, se debe verificar que:

$$\varinjlim_{\Gamma_F} pC = \varinjlim_{\alpha} \left(\varinjlim_{\Gamma_F} p_\alpha C \right)$$

La igualdad precedente se obtiene directamente, usando el hecho de que colímites conmutan con colímites y la propiedad de evaluación punto a punto de los colímites. ■

(3) Si se define $\quad p_* S := [p(\_), S]$ (el haz rascacielos), entonces

$$p^* \dashv p_*$$

En efecto, si usamos que $\quad p^* F = \varinjlim_{\Gamma_p} FX$, entonces se tienen las siguientes equivalencias naturales en X

$$p^* F \xrightarrow{f} S$$

$$FX \xrightarrow{f[X,-]\overset{x}{\to}p} S$$

$$x \in p(X) \to [FX, S]$$

$$y \in FX \to [p(X), S]$$

$$FX \longrightarrow p_* S(X)$$

$$F \to p_* S$$

Con respecto a las equivalencias precedentes, de arriba hacia abajo: la primera equivalencia es por la definición de p^*; la segunda equivalencia se tiene por lema de Yoneda; las demás equivalencias se siguen por construcción.

Nota. la construcción precedente termina la demostración para el caso $\mathcal{E} = \mathcal{E}ns$. El caso de un topos arbitrario $\mathcal{E}$, puede demostrarse a partir de ello tomando los funtores representables

$$\mathcal{E} \xrightarrow{[E,-]} \mathcal{E}ns$$

para cada objeto E de $\mathcal{E}$, pero no nos concierne aquí.

3.2. El topos clasificador de mv-cadenas

El topos clasificador de mv-cadenas se obtiene a partir de las mv-álgebras, introduciendo una topología de Grothendieck que corresponde a los axiomas de mv-cadena.

Comenzamos por recordar algunas propiedades de las mv-cadenas.

Lema 3.15. *Un ideal P de una mv-algebra A, es primo si y solo sí para todo $a, b \in A$*

$$a \wedge b = 0 \Rightarrow a \in P \quad \text{ó} \quad b \in P \tag{3.7}$$

La demostración se puede consultar en [2].

3.2.1. Propiedades de factorización

1. Dado un ideal P de una mv-álgebra A,

$$A/P \quad \text{es cadena} \quad \Leftrightarrow \quad P \quad \text{es primo}$$

2. Dados L una mv-cadena, A una mv-álgebra y $A \xrightarrow{f} L$ un morfismo de mv-álgebras, el núcleo de f, $Ker(f)$ es un ideal primo y se tiene la factorización

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & L \\ & A/Ker(f) \arrow[u, dashed, "k!"'] \end{tikzcd} \tag{3.8}$$

3. Para todo $a \in A$, todo ideal primo P y λ, γ morfismos canónicos de pasar al cociente; existe un único epimorfismo k tal que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "\lambda"] \arrow[dr, "\gamma"'] & A/\langle a \rangle \arrow[d, dashed, "!k"] \\ & A/P \end{tikzcd} \tag{3.9}$$

el triángulo conmuta si y solo si, $a \in P$.

4. *Propiedad de factorización*
Para todo ideal primo P de una mv-álgebra A y todo $a, b \in A$ tal que $a \wedge b = 0$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "\lambda"] \arrow[dr, "\gamma"'] & A/\langle a \rangle \arrow[d, dashed, "k"] \\ & A/P \end{tikzcd} \quad \text{ó} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "\lambda"] \arrow[dr, "\gamma"'] & A/\langle b \rangle \arrow[d, dashed, "k'"] \\ & A/P \end{tikzcd} \tag{3.10}$$

existe k ó existe k', tal que el triángulo conmuta.

Esta propiedad se sigue del lema 3.15.

Consecuentemente, si $a \wedge b = 0$ todos los morfismos $A \to A/P$ se factorizan por $A/\langle a\rangle$ ó por $A/\langle b\rangle$.

3.2.2. La topología de Grothendieck

Sea $\mathcal{C}$ una categoría cualquiera con productos fibrados, y para cada $X \in Ob(\mathcal{C})$, sea $\mathfrak{A}_X$ una familia con las siguientes propiedades:

F_0) $id_X : X \to X \in \mathfrak{A}_X$

F_1) (estable por productos fibrados)

$$\begin{tikzcd} Y_\alpha \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "p.f"] & X_\alpha \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

$$\overline{}$$

$$X_\alpha \to X \in \mathfrak{A}_X \quad \Rightarrow \quad Y_\alpha \to Y \in \mathfrak{A}_X$$

F_2) (cerrada por composiciones)

$$\begin{tikzcd} Y_{\alpha\, i} \arrow[r, "l_{\alpha,i}"] \arrow[dr, dashed] & X_\alpha \arrow[d, "f_\alpha"] \\ & X \end{tikzcd}$$

$$\overline{}$$

$$f_\alpha \in \mathfrak{A}_X, \quad \text{y} \quad l_{\alpha,i} \in \mathfrak{A}_X \quad \Rightarrow \quad f_\alpha l_{\alpha,i} \in \mathfrak{A}_X$$

Definición 3.16. *Una topología de Grothendieck en $\mathcal{C}$, es una colección de familias $\mathfrak{A}_X := cov_X$ para cada $X \in Ob(\mathcal{C})$; donde vale F_0, F_1, y F_2*

Una topología de Grothendieck generada por una colección de familias, se obtiene cerrando las familias por los axiomas F_0, F_1 y F_2.

Definición 3.17 (Topología del sitio). *Dado $Q \in mv\mathcal{A}_{p.f}$, definimos para cada $\overline{Q} \in \mathcal{V}$ la familia de cubrimientos $cov(\overline{Q})$ como sigue:*

$$\overline{Q} \longleftarrow \overline{Q/\langle q_i \rangle} \quad \in cov(\overline{Q}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \bigwedge q_i = 0 \tag{3.11}$$

con $0 \leq i \leq n$ *y* $q_i \in Q$.

la barra indica el objeto en la categoría dual.

Se debe verificar que las familias cubrientes definidas (3.11) son cerradas para los axiomas F_0, F_1, y F_2.

Demostración
(F_0) se tiene directamente tomando $n = 1$ y $q_1 = 0$.

(F_1) Para demostrar esta propiedad se requiere el siguiente lema:

Lema 3.18. *Dado Q una mv-álgebra de presentación finita y A una mv-álgebra cualquiera, el siguiente cuadrado es un pushout*

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\varphi"'] & Q/\langle q \rangle \arrow[d, "\tilde{\varphi}"] \\ A \arrow[r, "\alpha"] & A/\langle \varphi(q) \rangle \end{tikzcd} \tag{3.12}$$

con α y β, los morfismos de paso al cociente.

Demostración.

1. $\alpha\varphi = \tilde{\varphi}\beta$ por construcción.

2. Sean λ_1 y λ_2 tales que

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, two heads, "\beta"] \arrow[d, "\varphi"'] & Q/\langle q\rangle \arrow[d, "\tilde{\varphi}"] \arrow[ddr, bend left, "\lambda_2"] & \\
A \arrow[r, two heads, "\alpha"] \arrow[drr, bend right, "\lambda_1"'] & A/\langle \varphi(q)\rangle & \\
 & & C
\end{tikzcd}$$

el diagrama externo conmuta.

Se debe demostrar que exite un único k, tal que

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, two heads, "\beta"] \arrow[d, "\varphi"'] & Q/\langle q\rangle \arrow[d, "\tilde{\varphi}"] \arrow[ddr, bend left, "\lambda_2"] & \\
A \arrow[r, two heads, "\alpha"] \arrow[drr, bend right, "\lambda_1"'] & A/\langle \varphi(q)\rangle \arrow[dr, dashed, "k"] & \\
 & & C
\end{tikzcd}$$

$k\alpha = \lambda_1$ y $k\tilde{\varphi} = \lambda_2$

Dado $b \in A/\langle \varphi(q)\rangle$ se define $k(b) = \lambda_1(z)$ con $z \in \alpha^{-1}(b)$. Se verifica directamente que k está bien definida, debido a que

$$\lambda_1(\varphi(q)) = \lambda_2(\beta(q)) = \lambda_2(0) = 0$$

La unicidad de k se sigue de que α es epi.

■

Lema 3.19. *Para cualquier mv-álgebra A, se tiene el isomorfismo*

$$\left(A/\langle a\rangle\right)/\langle [b]_a\rangle \approx A/\langle a \oplus b\rangle$$

Demostración. Se sigue del hecho que

$$a \oplus b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \quad \text{y} \quad b = 0$$

Consecuentemente, del lema 3.18 y del lema 3.19 se sigue que el siguiente cuadrado es pushout.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & A/\langle a \rangle \arrow[d] \\ A/\langle b \rangle \arrow[r] & A/\langle a \oplus b \rangle \end{tikzcd} \tag{3.13}$$

Ahora podemos demostrar (F_1) :

1. *Generados por pushout*: dado Q una mv-álgebra de presentación finita, y el co-cubrimiento

$$\begin{tikzcd} & Q/\langle q_1 \rangle \\ Q \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & Q/\langle q_2 \rangle \end{tikzcd}$$

con $q_1 \wedge q_2 = 0$; consideremos el siguiente diagrama generado por pushout a partir del co-cubrimiento precedente, con A una mv-álgebra de presentación finita:

$$\begin{tikzcd} & Q/\langle q_1 \rangle \arrow[dd, dashed] & \\ Q \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd, "\varphi"'] & & Q/\langle q_2 \rangle \arrow[dd, dashed] \\ & A/\langle \varphi(q_1) \rangle & \\ A \arrow[ur] \arrow[rr] & & A/\langle \varphi(q_2) \rangle \end{tikzcd} \tag{3.14}$$

Para ver que este nuevo co-cubrimiento, pertence a $cov(\overline{A})$ se debe verificar que,

$$\varphi(q_1) \wedge \varphi(q_2) = 0 \in A$$

Como φ es un morfismo de mv-algebras,

$$\varphi(q_1) \wedge \varphi(q_2) = \varphi(q_1 \wedge q_2) = \varphi(0) = 0$$

Consecuentemente las familias son cerradas por pushout.

Se presentará un resultado más general que el del lema 1.1.8 de [2] y que será util para demostrar (F_2).

Lema 3.20. *Para todo número natural m;*

$$m.(a \wedge b) = m.a \wedge m.b$$

Demostración. La mv-ecuación precedente es satisfecha por toda mv-cadena, entonces por corolario 1.4.7 de [2]; es satisfecha por toda mv-álgebra.

La ecuación de la proposición anterior es mucho más general que el lema 1.1.8 de [2]. Muestra la fuerza del teorema 1.4.6 de [2]; debido a que un corolario inmediato de la mv-ecuación es

$$\langle a \wedge b \rangle = \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$$

Ahora podemos demostrar (F_2)

las familias cubrientes son cerradas por composición: dada A una mv-álgebra de presentación finita y las familias cubrientes de $cov(\overline{A})$

1. $A/\langle a \rangle \to A/\langle a_i \rangle$ con $1 \leq i \leq n$ y $\langle \bigwedge a_i \rangle = \langle a \rangle, \quad a_i \geq a$

2. $$\begin{tikzcd}[row sep=small] & A/\langle a \rangle \\ A \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & A/\langle a_{n+1} \rangle \end{tikzcd} \qquad \text{donde} \quad a \wedge a_{n+1} = 0 \in A$$

   de la composición de (1) y (2) se obtiene

$$\begin{tikzcd}
 & & A/\langle a_i \rangle \\
 & A/\langle a \rangle \arrow[ur] & \\
A \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & A/\langle a_{n+1} \rangle &
\end{tikzcd} \tag{3.15}$$

Ahora se debe verificar que

$$A \to A/\langle a_i \rangle \quad \text{con} \quad 1 \leq i \leq n+1$$

cumple

$$\bigwedge_{i=1}^{n+1} a_i = 0$$

Demostración.

$$0 = \langle a \wedge a_{n+1} \rangle = \langle a \rangle \cap \langle a_{n+1} \rangle = \left\langle \bigwedge_{i=1}^{n} a_i \right\rangle \cap \langle a_{n+1} \rangle$$

y

$$\left\langle \bigwedge_{i=1}^{n} a_i \right\rangle \cap \langle a_{n+1} \rangle = \left\langle \left(\bigwedge_{i=1}^{n} a_i \right) \wedge a_{n+1} \right\rangle = \left\langle \bigwedge_{i=1}^{n+1} a_i \right\rangle$$

■

Veremos ahora que esta topología está generada por el único ***cubrimiento básico:***

$$\begin{tikzcd}
 & F[x,y]/\langle x \ominus y \rangle \\
F[x,y] \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & F[x,y]/\langle y \ominus x \rangle
\end{tikzcd} \tag{3.16}$$

que corresponde al axioma que define las cadenas. Recordar que

$$(x \ominus y) \wedge (y \ominus x) = 0$$

En efecto, dado

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & A/\langle a\rangle \\ A \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{con} \quad a \wedge b = 0 \\ & A/\langle b\rangle \end{tikzcd} \tag{3.17}$$

el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & F[x,y]/\langle x \ominus y\rangle \arrow[dd, dashed] & \\ F[x,y] \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd, "\varphi"'] & & F[x,y]/\langle y \ominus x\rangle \arrow[dd, dashed] \\ & A/\langle a\rangle & \\ A \arrow[ur] \arrow[rr] & & A/\langle b\rangle \end{tikzcd} \tag{3.18}$$

con $\quad \varphi(x) = a \quad$ y $\quad \varphi(y) = b$, es un pushout.

La demostración se sigue directamente del lema 3.18 y del siguiente lema:

Lema 3.21. $a \wedge b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = a \ominus b \quad y \quad b = b \ominus a$

Demostración.
$(\Rightarrow)$

$$0 = a \wedge b = a \ominus (a \ominus b)$$

la igualdad precedente implica

$$a \leq a \ominus b$$

de otra parte, se sabe directamente de la definición que

$$a \ominus b \leq a$$

consecuentemente

$$a = a \ominus b$$

Para b se demuestra de manera análoga.
($\Leftarrow$)
Se sigue directamente de la hipótesis.

De los lemas 3.18 y 3.21 se sigue que el diagrama (3.18) es pushout.

■

Consecuentemente, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 3.22. *El cubrimiento básico genera por pushout y composición cualquier cubrimiento*

$$Q \to Q/\langle q_i \rangle \quad con \quad 1 \leq i \leq n \quad y \quad \bigwedge_i q_i = 0$$

de la topología dada en la definición 3.17

Demostración. La afirmación se sigue por una inducción hecha sobre el número de componentes del cubrimiento usando la composición de cubrimientos descrita en el diagrama (3.15) y lo demostrado para las familias de dos componentes como la dada en (3.17).

■

Notación. En adelante se llamará $\mathcal{V}$ al sitio

$$\mathcal{V} = (\mathcal{V}, \tau)$$

con τ la topología de Grothendieck definida en 3.17.

Definición 3.23. *Un punto del sitio $(\mathcal{C}, \tau)$ en $\mathcal{E}ns$, con $\mathcal{C}$ categoría con límites finitos; es un funtor*

$$p : \mathcal{C} \to \mathcal{E}ns$$

que preserva límites finitos y envía familias cubrientes en familias epimorfas.

Las familias epimorfas corresponden a los cubrimientos canónicos en $\mathcal{E}ns$, y son las familias suryectivas de funciones.

Observación. Se sigue de la definición de punto de un sitio que si

$$\overline{Q} \longleftarrow \overline{Q/\langle q_i \rangle} \quad \in cov(\overline{Q}) \qquad \text{con} \quad \bigwedge q_i = 0 \tag{3.19}$$

entonces L es punto del sitio, si y solo si, para todo $Q \xrightarrow{\varphi} L$, existe un i y una factorización como la indicada:

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r] \arrow[dr, "\varphi"'] & Q/\langle q_i \rangle \arrow[d, dashed, "q_i"] \\ & L \end{tikzcd} \tag{3.20}$$

Lema 3.24. *Los puntos del sitio $\mathcal{V}$ son las mv-cadenas*

Demostración. Veamos primero que toda cadena es un punto.

Hay que ver que dado un cubrimiento $Q \to Q/\langle q_i \rangle$ con $\bigwedge\limits_i q_i = 0$ y un morfismo $Q \xrightarrow{\varphi} L$:

Si L es una cadena entonces existe una factorización como la indicada en (3.20).

La afirmación precedente es inmediata porque $Ker(\varphi)$ es un ideal primo, consecuentemente existe i y $q_i \in Ker(\varphi)$, o sea se tiene la factorización

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r] \arrow[dr, "\varphi"'] & Q/\langle q_i \rangle \arrow[d] \\ & L \end{tikzcd} \tag{3.21}$$

(ver sección 3.2.1)

Ahora veamos que todo punto es una cadena.

Dado un punto p, $L = p(F[x])$; hay que ver que L es una cadena.

Sean $a, b \in L$, consideremos el co - cubrimiento básico

$$\begin{tikzcd} & F[x,y]/\langle x \ominus y \rangle \\ F[x,y] \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & F[x,y]/\langle y \ominus x \rangle \end{tikzcd} \tag{3.22}$$

Sea $\varphi : F[x,y] \to L$ con $\varphi(x) = a$, $\varphi(y) = b$; de la factorización indicada en 3.2.1 se tiene:

$$\begin{tikzcd} F[x,y] \arrow[r, two heads, "\lambda"] \arrow[dr, two heads, "\varphi"'] & F[x,y]/\langle x \ominus y \rangle \arrow[d, dashed, "k"] \\ & L \end{tikzcd} \quad \text{ó} \quad \begin{tikzcd} F[x,y] \arrow[r, two heads, "\lambda"] \arrow[dr, two heads, "\varphi"'] & F[x,y]/\langle y \ominus x \rangle \arrow[d, dashed, "k'"] \\ & L \end{tikzcd} \tag{3.23}$$

Entonces,

$$a \ominus b = \varphi(x \ominus y) = k\lambda(x \ominus y) = k(0) = 0$$

o similarmente $b \ominus a = 0$, lo que muestra que L es una cadena. ■

El topos clasificador $Sh(\mathcal{V})$

A continuación recordamos la definición de haz. Se usara el abuso de notación de Grothendieck; la cuál no presenta inconsistencias

$$[\_, C] \equiv C$$

Definición 3.25. *Dato $\mathcal{C}$ un sitio, y F un prehaz del sitio; se dice que F es* *un haz si y solo si*

$$\begin{tikzcd} C_\alpha \arrow[r] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & C \arrow[d, dashed, "!\sigma"] \\ & F \end{tikzcd} \tag{3.24}$$

para todo cubrimiento $C_\alpha \to C$ y toda familia compatible $f_\alpha : C_\alpha \to F$ existe una única transformación natural σ tal que el triángulo precedente conmuta.

Definición 3.26. *Una familia $\{f_\alpha\}$ se dice compatible con otra familia $\{\varphi_\alpha\}$ si solo si:*

1. *el dominio de φ_α es igual al dominio de f_α para cada α*
2. *dados dos morfismos $x : Z \to X_\alpha$, $y : Z \to X_\beta$,*

$$\varphi_\alpha \circ x = \varphi_\beta \circ y \quad \textit{implica} \quad f_\alpha \circ x = f_\beta \circ y$$

Definición 3.27. *Llamaremos $Sh(\mathcal{V})$, a la subcategoría plena de la categoría de prehaces $\mathcal{E}ns^{\mathcal{V}^{op}}$; cuyos objetos son los haces del sitio.*

$$i : Sh(\mathcal{V}) \hookrightarrow \mathcal{E}ns^{\mathcal{V}^{op}}$$

Recordemos que existe el haz asociado $\#$, adjunto a izquierda de la inclusión,

$$\# \dashv i$$

El haz asociado preserva límites finitos y define un morfismo geométrico $Sh(\mathcal{V}) \to \mathcal{E}ns^{\mathcal{V}^{op}}$

la situación que se tiene se describe a continuación

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V} \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend left=60, dashed, "\varepsilon"] & \mathcal{E}ns^{\mathcal{V}^{op}} \arrow[r, bend left, "\#"] & Sh(\mathcal{V}) \arrow[l, hook'] \end{tikzcd} \tag{3.25}$$

con $\epsilon = \# \circ h : \mathcal{V} \to Sh(\mathcal{V})$

Teorema 3.28. *$Sh(\mathcal{V})$ es el topos clasificador de las mv-cadenas*

Demostración. consideremos

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V} \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "p"'] & \mathcal{E}ns^{\mathcal{V}^{op}} \arrow[d, dashed, "!p^*"] \arrow[r, bend left, "\#"] & Sh(\mathcal{V}) \arrow[l, hook'] \arrow[dl, dashed, "p^*"] \\ & \mathcal{E}ns & \end{tikzcd} \tag{3.26}$$

Dado un punto $p : \mathcal{V} \to \mathcal{E}ns$, el p^* de los haces, es la restricción del p^* de los prehaces; por lo que se define por la misma fórmula. Consecuentemente preserva límites finitos.

Además se tiene el adjunto p_*, que es el mismo de los prehaces, debido a que vale el siguiente lema:

Lema 3.29. *Dado T un conjunto,*

$$p_*(T) \quad \textit{es un haz} \quad \Leftrightarrow \quad p \quad \textit{es un punto del sitio}$$

Demostración($\Leftarrow$)
Recordemos que $p_*(T) = [\,p(\_),\, T\,]$; queremos ver que dado

$$\begin{tikzcd} C_\alpha \arrow[r] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & C \arrow[d, dashed, "!\sigma"] \\ & {[\,p(\_),\, T\,]} \end{tikzcd}$$

con $C_\alpha \to C$ un cubrimiento y $f_\alpha : C_\alpha \to [\,p(\_),\, T\,]$, una familia compatible; existe una única transformación natural σ tal que el triángulo precedente conmuta.

Como p es punto, entonces $p(\alpha) : p(C_\alpha) \to p(C)$ es una familia cubriente en $\mathcal{E}ns$; consecuentemente, para todo $c \in p(C)$; existe α_0 y $x \in p(C_{\alpha_0})$ tales que $\alpha_0(x) = c$.

Por Yoneda, encontrar la transformación σ es equivalente a encontrar una función,

$$\sigma : P(C) \to T$$

tal que $\sigma \circ \alpha = f_\alpha$.

Definimos

$$\sigma(c) = f_{\alpha_0}(x)$$

La buena definición de la función se sigue de la compatibilidad de la familia $\{f_\alpha\}$.

La otra implicación del lema, se sigue de manera directa de la definicón de haz.

■

Como antes en el caso de las mv-álgebras esto demuestra que el topos $Sh(\mathcal{V})$ clasifica puntos $\mathcal{V} \to \mathcal{E}ns$ en el topos de los conjuntos.

Este topos también clasifica puntos $\mathcal{V} \to \mathcal{E}$ con $\mathcal{E}$ un topos cualquiera, pero este hecho no nos concierne aquí.

4

Localización de una mv-álgebra

En este capítulo construimos el topos $\gamma : \mathcal{E}_A = Sh(\mathcal{V}_A) \rightarrow \mathcal{E}ns$, demostramos que es un topos espacial compacto con suficientes puntos y, que resulta isomorfo al topos de haces $\Gamma : Sh(\mathfrak{Z}_A) \rightarrow \mathcal{E}ns$ introducido en el capítulo 1 (se deduce en particular que este último espacio es compacto).

4.1. La categoría $\mathcal{V}_A$

Definición 4.1. *Dada A una mv-álgebra; $\mathcal{V}_A^{op}$ es la subcategoría plena de la categoría coma $(A, \mathcal{A})$ definida de la siguiente manera:*

Los elementos de $\mathcal{V}_A^{op}$ son de la forma $A \rightarrow A/\langle a \rangle$; y cada uno se obtiene de alguna mv-álgebra de presentación finita Q mediante pushout como sigue:

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r] \arrow[d, dashed] & Q/\langle f \rangle \arrow[d, dashed] & \in \mathcal{V}^{op} \\ A \arrow[r, two heads] & A/\langle a \rangle & \end{tikzcd}$$

Observemos que por defición de categoría coma, los morfismos en $\mathcal{V}_A^{op}$ son triangulos conmutativos. De ello se sigue que son epimorfos y consecuentemente $\mathcal{V}_A$ es un poset que resulta ser un inf-reticulado con ínfimo dado por el pushout en la categoría coma.

El órden en $\mathcal{V}_A$

Notación.

Dado $\quad A \to A/\langle a\rangle \in \mathcal{V}_A^{op}\quad$ indicaremos con una barra:

$$\overline{A/\langle a\rangle} \rightarrowtail \overline{A}$$

el objeto correspondiente en $\quad \mathcal{V}_A \quad$ y lo denotaremos $\quad \bar{a}$.

Dado

$$\begin{tikzcd} \overline{A} & \overline{A/\langle a\rangle} \arrow[l, tail, "\bar{a}"'] \\ & \overline{A/\langle b\rangle} \arrow[ul, tail, "\bar{b}"] \arrow[u, tail, dashed, "\bar{k}"'] \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

Si exite $\overline{k}$, tal que el triangulo precedente conmuta, ello define el orden en $\mathcal{V}_A$

$$\bar{b} \preceq \bar{a}$$

Lema 4.2. *Las siguientes propiedades se siguen de la definición:*

1. $\overline{b} \preceq \overline{a} \quad \Leftrightarrow \quad \langle a\rangle \subseteq \langle b\rangle$
2. $\langle a\rangle = \langle c\rangle \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{c}$
3. $\overline{a} \wedge \overline{b} = \overline{a \oplus b} = \overline{a \vee b}$
4. $\overline{a} \vee \overline{b} = \overline{a \wedge b}$
5. $\overline{1} = 0 \in \mathcal{V}_A$
6. $\overline{0} = 1 \in \mathcal{V}_A$

Demostración

(1):
($\Rightarrow$) por la definición descrita en el diagrama 4.1, existe $\overline{k} : \overline{A/\langle b\rangle} \to \overline{A/\langle a\rangle}$.
Consecuentemente exite

$$k : A/\langle a\rangle \to A/\langle b\rangle$$

en la categoría $\mathcal{V}_A^{op}$, consecuentemente $\langle a\rangle \subseteq \langle b\rangle$.

($\Leftarrow$) el morfismo k existe, si y solo si, $\langle a\rangle \subseteq \langle b\rangle$ $\blacksquare$

(2): se sigue directamente de (1).

(3): se sigue directamente del lema 3.18, aplicado al caso particular descrito en el diagrama 3.13.

(4):
Se quiere ver que $\overline{a} \vee \overline{b} = \overline{a \wedge b}$

Como $\langle a \wedge b\rangle = \langle a\rangle \cap \langle b\rangle$ entonces

$$\langle a \wedge b\rangle \subseteq \langle a\rangle \quad \text{y} \quad \langle a \wedge b\rangle \subseteq \langle b\rangle$$

consecuentemente $\overline{a \wedge b}$ es cota superior de $\{\overline{a}, \overline{b}\}$.

supongamos

$$\overline{s} \geq \overline{a} \quad \text{y} \quad \overline{s} \geq \overline{b}$$

entonces la situación es como se muestra en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & A/\langle a\rangle \\
A/\langle a \wedge b\rangle \arrow[urr] \arrow[drr] & A/\langle s\rangle \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & A/\langle b\rangle
\end{tikzcd}$$

los morfismos descritos en el diagrama precedente existen si y solo si,

$$\langle s\rangle \subseteq \langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \langle a \wedge b\rangle$$

consecuentemente, $\overline{s} \leq \overline{a \wedge b}$

Las propiedades (5) y (6) se siguen directamente de la definición de los elementos de $\mathcal{V}_A$.
■

Definición 4.3. *Un punto del inf-retículo $\mathcal{V}_A$ es un funtor con valores en $\{0, 1\}$*

$$p : \mathcal{V}_A \to \{0, 1\}$$

que preserva límites finitos

La condición precedente es equivalente a que p es un morfismo de inf-retículos; es decir un morfismo de conjuntos parcialmente ordenados, que preserva ínfimos.
■

Proposición 4.4. *Puntos($\mathcal{V}_A$) = ideales de la mv-álgebra A*

Demostración. Se sabe que los puntos de un inf-retículo se corresponden con los filtros del mismo inf-retículo. Cada punto p de $\mathcal{V}_A$ se corresponde con el filtro:

$$\overline{P} = \{\overline{a} \,|\, p(\overline{a}) = 1\}, \quad \overline{P} \subseteq A$$

Consecuentemente cada punto p de $\mathcal{V}_A$ se corresponde con el conjunto

$$P = \{a \,|\, p(\overline{a}) = 1\}, \quad P \subseteq A$$

Para demostrar la proposición se verá que P es un ideal de la mv-álgebra A.

De la definición se sigue:

1. Para todo $a \in A$ $\overline{a} \preceq \overline{0}$, consecuentemente $\overline{0}$ es el objeto terminal del inf-retículo; luego $p(\overline{0}) = 1$ y consecuentemente

$$0 \in P$$

2. Si $a \leq b$ y $b \in P$, entonces

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad \langle a\rangle \subseteq \langle b\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \bar{b} \preceq \overline{a}$$

como $p(\bar{b}) = 1$ entonces $p(\overline{a}) = 1$ y consecuentemente

$$a \in P$$

3. Si $a, b \in P$ entonces

$$1 = p(\overline{a}) \wedge p(\bar{b}) = p(\overline{a} \wedge \bar{b}) = p(\overline{a \oplus b})$$

consecuentemente

$$a \oplus b \in P$$

Vemos entonces que el conjunto P asociado al punto p es un ideal de la mv-álgebra A.

Recíprocamente todo ideal P de A le corresponde un punto p definido así:

$$p(\overline{a}) = 1 \Leftrightarrow a \in P$$

4.2. La topología inducida por el sitio $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}_A$

Dada A una mv-álgebra cualquiera, como se dijo en la definición 4.1 los elementos de $\mathcal{V}_A^{op}$ vienen dados por los pushouts

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, dashed, two heads] \arrow[d, dashed, "\phi"'] & Q/\langle f\rangle \arrow[d, "\tilde{\phi}"] & \in \mathcal{V}^{op} \\ A \arrow[r, two heads] & A/\langle a\rangle & \in \mathcal{V}_A^{op} \end{tikzcd}$$

Donde,

$$\phi(f) = a$$

Los cubrimientos de $\mathcal{V}_A$ son los cubrimientos inducidos por pushout de los cubrimientos de $\mathcal{V}$.

Es decir, $A \to A/\langle a_i \rangle$ cubre si y solo si, existe un cubrimiento en $\mathcal{V}$ (definidos en 3.17)

$$Q \to Q/\langle q_i \rangle, \quad \text{con} \quad \bigwedge_i q_i = 0$$

y un morfismo $F \xrightarrow{\phi} A$ tal que $\phi(q_i) = a_i$.

Observar que se tienen los pushout

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & Q/\langle q_i \rangle \arrow[d, "\tilde{\phi}"] \\ A \arrow[r] & A/\langle a_i \rangle \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

y también,

$$\bigwedge a_i = \bigwedge \phi(q_i) = \phi\left(\bigwedge q_i\right) = \phi(0) = 0$$

Consecuentemente, los cubrimientos inducidos son análogos a los cubrimientos del sitio $\mathcal{V}$, de las mv-álgebras de presentación finita.

Proposición 4.5. *la topología en $\mathcal{V}_A$ es la topología canónica finita, en el sentido que los cubrimientos son los supremos finitos en el reticulado $\mathcal{V}_A$.*

Demostración. se sigue directamente debido a que la familia

$$\begin{tikzcd} & A/\langle a_1 \rangle \\ A/\langle l \rangle \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & A/\langle a_2 \rangle \end{tikzcd}$$

es cubriente si y solo si

$$\langle a_1 \wedge a_2 \rangle = \langle l \rangle$$

y por las propiedades (2). y (4). del lema 4.2

$$\overline{a_1} \vee \overline{a_2} = \overline{a_1 \wedge a_2} = \overline{l}$$

■

Ahora damos la definición de punto de un reticulado munido de una topología de Grothendieck.

Definición 4.6. *Un punto del sitio* $(\mathcal{V}_A, \tau_A)$ *en* $\{0,1\}$*, es un funtor con valores en el conjunto* $\{0,1\}$

$$p : \mathcal{V}_A \to \{0,1\}$$

tal que

1. *preserva ínfimos finitos.*
2. *manda familias cubrientes en familias epimorfas.*

De (1) se sigue que en particular $p(1) = 1$.

La propiedad (2) significa que p envía cubrimientos (supremos del inf-retículo) en supremos de subconjuntos de $\{0,1\}$.

Proposición 4.7. *Los puntos del sitio* $(\mathcal{V}_A, \tau_A)$ *sobre* $\{0,1\}$*, son los ideales primos de la mv-álgebra A.*

Demostración.
de la proposición 4.4, se sabe que los puntos son ideales. Consecuentemente, basta demostrar que son primos.

$\{\overline{a}, \overline{b}\}$ es una familia cubriente, si y solo si, $a \wedge b = 0$, si y solo si,

$$1 = p(\overline{0}) = p(\overline{a \wedge b}) = p(\overline{a} \vee \overline{b}) = p(\overline{a}) \vee p(\overline{b})$$

la igualdad precedente equivale a decir que $a \in P$ ó $b \in P$, consecuentemente el ideal P es primo.

■

4.3. El local L_A asociado a $\mathcal{V}_A$

Definición 4.8. *Un retículo completo L se llama local si y solo si, para todo elemento $h \in L$ y cualquier familia $l_i \in L$ se satisface la ecuación*

$$h \wedge \bigvee_i l_i = \bigvee_i (h \wedge l_i)$$

Un ejemplo de local está dado por el retículo de los abiertos de un espacio topológico; en efecto, la intersección finita de abiertos es un abierto, la unión arbitraria de abiertos es un abierto y la intersección conjuntista distribuye con uniones arbitrarias.

Definición 4.9. *Los puntos de un local* L *son los morfismos*

$$L \to \{0,1\}$$

de locales, es decir, morfismos que preservan ínfimos finitos y supremos arbitrarios.

Dado $\mathcal{V}_A$ el inf-retículo con topología de Grothendieck definida en 4.5 y con el orden

$$\overline{a} \preceq \overline{b}$$

correspondiente al lema 4.2

Consideremos el topos de haces de conjuntos $Sh(\mathcal{V}_A)$; un subobjeto de $\mathbf{1}$ en $Sh(\mathcal{V}_A)$ es un haz con valores en $\{0,1\} \subset \mathcal{E}ns$

$$u : \mathcal{V}_A^{op} \to \{0,1\}$$

Definición 4.10. $L_A = Sh\left(\mathcal{V}_A, \{0,1\}\right)$, *los haces en el conjunto* $\{0,1\}$.

Observar que se tiene:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V}_A \arrow[r, tail] \arrow[rr, dashed, bend right, "\varepsilon"'] & \{0,1\}^{\mathcal{V}_A^{op}} \arrow[r, bend left, "\#"] & L_A \arrow[l, hook']
\end{tikzcd} \tag{4.3}$$

donde $\quad \# \quad$ es el haz asociado.

De la proposición 4.5 se sigue que ε es plenamente fiel; esto significa que

$$\overline{a} \preceq \overline{b} \Leftrightarrow \varepsilon(\overline{a}) \leq \varepsilon(\overline{b}) \tag{4.4}$$

consecuentemente podemos considerar que $\mathcal{V}_A \subset L_A$.

Recordemos que los puntos de $\mathcal{V}_A$ se extienden de manera única a puntos de L_A

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V}_A \arrow[rr, tail, "\varepsilon"] \arrow[dr, "p"'] & & L_A \arrow[dl, dashed, "p^*"] \\ & \{0,1\} & \end{tikzcd} \tag{4.5}$$

Consecuentemente:

Proposición 4.11. *El morfismo* $\quad \mathcal{V}_A \xrightarrow{\varepsilon} L_A \quad$ *induce un isomorfismo de conjuntos parcialmente ordenados*

$$Puntos\,(L_A,) \xrightarrow{\varepsilon^*} Puntos(\mathcal{V}_A)$$

con $\qquad \varepsilon^*(p) = p^* \circ \varepsilon.$

Como $\quad p^* \quad$ preserva supremos y $\quad u = \bigvee\limits_{u(\overline{a})=1} \overline{a} \quad$ se tiene que

$$p^*(u) = p^* \left(\bigvee_{u(\overline{a})=1} \overline{a} \right) = \bigvee_{u(\overline{a})=1} p^*\,(\overline{a})$$

Por lo tanto se tiene:

Proposición 4.12. *Los puntos de L_A están en correspondencia biunívoca con los **ideales primos** de la mv-álgebra A, con el orden conjuntista asociado al conjunto de los ideales de la mv-álgebra A, mediante la correspondencia definida por*

$$P = \{a \in A \,|\, p^*(\overline{a}) = 1\}$$

■

Descripción de los elementos de L_A

L_A tiene elemento máximo, para todo $a \in A$

$$\begin{aligned} \mathbf{1}: \quad & \mathcal{V}_A^{op} \to \{0,1\} \\ & \overline{a} \longmapsto 1 \end{aligned}$$

Los elementos u de L_A y en general los prehaces en $\{0,1\}^{\mathcal{V}_A^{op}}$ se identifican con los subconjuntos

$$U = \{a \in A | u(\overline{a}) = 1\} \subseteq A \tag{4.6}$$

Lema 4.13. *propiedades del los elementos de L_A:*

1. *$U = A$ es el $\mathbf{1}$ de L*
2. *Condición de prehaz. si $\overline{a} \preceq \overline{b}$ entonces,*

   $$u(\overline{b}) \leq u(\overline{a})$$

   consecuentemente si u es prehaz

   $$\overline{a} \preceq \overline{b} \quad y \quad b \in U \Rightarrow a \in U$$

   la condición de prehaz, también equivale a,

   $$(b \leq a \quad y \quad b \in U) \Rightarrow a \in U$$

   con "$\leq$" orden en A.
3. *Condición de haz. supongamos que $\overline{a_i} \preceq \overline{a} \in cover(\overline{a})$ entonces se tiene*

   $$\begin{tikzcd} \overline{a_i} \arrow[dr] & \preceq & \overline{a} \arrow[dl, dashed] \\ & u & \end{tikzcd}$$

o sea $\quad u(\overline{a_i}) = 1 \quad \forall i \quad \Rightarrow \quad u(\overline{a}) = 1$ *es decir,*

$$(a_i \in U \quad \forall i) \quad \Rightarrow \quad a \in U$$

como la topología es la canónica, la condición de haz implica que U es cerrado para infimos finitos.

Recordemos que $\overline{a_i} \preceq \overline{a} \in cover(\overline{a})$, si solo si,

$$\overline{a} = \bigvee_i \overline{a_i} = \overline{\bigwedge_i a_i} \quad con \quad 1 \leq i \leq n$$

luego esta condición también equivale a,

$$a_i \in U \quad con \quad 1 \leq i \leq n \quad \Rightarrow \quad \wedge a_i \in U$$

4. *Propiedad descendente: Dado $n \in \mathbb{N}$*

$$n \cdot a \in U \quad \Leftrightarrow \quad a \in U$$

Si $\quad a \in U$, se sigue directamente que $\quad n \cdot a \in U$, debido a que U es un filtro y $\quad a \leq n \cdot a$.

De otra parte

$$n \cdot a \in U \quad \Rightarrow \quad u(\overline{n \cdot a}) = 1$$

como por propiedad (3) del lema 4.2

$$\overline{n \cdot a} = \overline{a}$$

entonces se sigue que $\quad u(\overline{a}) = 1$ y consecuentemente $\quad a \in U$.

5. *consecuentemente, de los item precedentes se sigue que U es un haz si y solo si, $\quad U \quad$ es un **Filtro** del reticulado asociado a la mv-álgebra A, con la propiedad descendente (ver item 4.).*

Proposición 4.14. *los elementos de L_A están en correspondencia biunívoca con los **filtros** del reticulado asociado a la mv-álgebra A, que tienen la **propiedad descendente** (item 4. lema 4.13), con el orden conjuntista, mediante la correspondencia definida por*

$$U = \{a \in A \mid u(\overline{a}) = 1\}$$

Proposición 4.15. *En términos de los subconjuntos asociados a los prehaces* $u \in \{0,1\}^{\mathcal{V}_A^{op}}$, *el haz asociado* $\#u$ *es el filtro generado por* U *que denotaremos* $\langle U \rangle$.

Demostración

$$\#u = \left\{ x |\ \exists b_j \in U,\ \text{con } 1 \leq j \leq n \quad \text{tal que} \quad \overline{x} \preceq \bigvee_j \overline{b_j} \right\}$$

como

$$\bigvee_j \overline{b_j} = \overline{\bigwedge_{1 \leq j \leq n} b_j}$$

entonces

$$\#u = \langle U \rangle = \left\{ x |\ \exists b_j \in U,\ \text{con } 1 \leq j \leq n \quad \text{tal que} \quad \bigwedge_{1 \leq j \leq n} b_j \leq x \right\}$$

Es interesante e importante describir un poco más los elementos de L_A; especialmente porque los relacionaremos con los abiertos del espacio topológico $\mathcal{O}(\mathfrak{Z}_A)$.

De la proposición 4.5, para cualquier $a \in A$ el filtro asociado lo notaremos

$$\varepsilon(\overline{a}) = U_a = \{x \in A | \exists n \in \mathbb{N}, \quad \text{con} \quad a \leq n.x\} \tag{4.7}$$

Además de (4.4) y de la proposición 4.14 se sigue que

$$\overline{a} \preceq \overline{b} \quad \Leftrightarrow \quad U_a \subset U_b$$

Lema 4.16. *Para todo haz* u, U:

$$u = \bigvee_{a \in U} \varepsilon(\overline{a}), \qquad U = \bigcup_{a \in U} U_a$$

Demostración. si $a \in U$ claramente $U_a \subset U$ y puesto que $a \in U_a$, esto termina la demostración.

■

Veremos ahora cuáles son el ínfimo y el supremo de dos elementos de L_A y el supremo arbitrario de elementos de L_A en términos de los conjuntos U asociados en (4.6).

1. Se verifica directamente de la definición
$$U_a \wedge U_b = U_{a \vee b}$$
2. En general la unión conjuntista de dos haces no es un haz (la unión de dos filtros en general no es filtro).
3. Consecuentemente, el supremo finito sera el filtro generado
$$U_a \vee U_b = \langle U_a \cup U_b \rangle$$
4. En general
$$\bigvee_{\alpha \in \Gamma} U_{a_\alpha} = \left\langle \bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_{a_\alpha} \right\rangle$$

Lema 4.17. *para todo $a, b \in A$*
$$U_a \vee U_b = U_{a \wedge b}$$

Demostración. Se sigue directamente de la proposición 4.15. ■

Corolario 4.18. *El supremo en L es el haz asociado*
$$\bigvee_{\alpha \in \Gamma} U_{a_\alpha} = \left\langle \bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_{a_\alpha} \right\rangle$$

se sigue directamente de la proposición 4.15.

Un importante resultado es el siguiente:

Teorema 4.19. *Para cada mv-álgebra A, el local L_A es compacto.*

Demostración. del lema 4.16 se sigue que basta considerar

$$1 = \bigvee_{\alpha\in\Gamma} \varepsilon(\overline{a_\alpha})$$

o sea, $\bigvee\limits_{\alpha\in\Gamma} U_{a_\alpha} = A$. Como

$$\bigvee_{\alpha\in\Gamma} U_{a_\alpha} = \# \bigcup_{\alpha\in\Gamma} U_{a_\alpha}$$

entonces de la proposición 4.15 se sigue que

$$\bigvee_{\alpha\in\Gamma} U_{a_\alpha} = \{x|\exists b_j \in U_{a_j}, \quad \text{con } 1 \leq j \leq n \quad \text{tal que} \quad \overline{x} \preceq \overline{\textstyle\bigwedge_{1\leq j\leq n} b_j}\}$$

como $0 \in \bigvee\limits_{\alpha\in\Gamma} U_{a_\alpha}$ entonces,

$$\overline{0} \quad = \quad \overline{\bigwedge_{1\leq j\leq n} b_j}$$

consecuentemente

$$A = U_0 = U_{\wedge a_{\alpha_j}} = \bigvee_{1\leq j\leq n} U_{a_{\alpha_j}}$$

lo que demuestra que el local L_A es compacto.

■

Recordar: Un local $\mathcal{L}$ tiene suficientes puntos si para todo $u, v \in \mathcal{L}$ existe un punto p^* de $\mathcal{L}$ tal que

$$u \neq v \Rightarrow p^*(u) \neq p^*(v)$$

Teorema 4.20. L_A *tiene suficientes puntos*

Demostración. Utilizaremos las correspondencias descritas en las proposiciones 4.14 y 4.12.

Sean $U, V \in L_A$ tales que $U \neq V$. Sea $x \in V$ tal que $x \notin U$ entonces:

1. para el ideal de la mv-álgebra A generado por x, $\langle x \rangle$, se tiene que

$$\langle x \rangle \cap U = \varnothing$$

en efecto si $z \in \langle x \rangle$ entonces $z \leq n \cdot x$, asi,

$$z \in U \quad \Rightarrow \quad n \cdot x \in U$$

como U tiene la propiedad descendente (demostrada en el item 4. del lema 4.13), lo anterior implicaría que $x \in U$, lo cuál es absurdo.

2. Consideremos el conjunto de ideales

$$\mathfrak{A} = \{I \mid x \in I; \quad I \cap U = \varnothing\}$$

$\langle x \rangle \in \mathfrak{A}$ luego $\mathfrak{A} \neq \varnothing$.

El conjunto $\mathfrak{A}$ es inductivo superiormente: dada una cadena de ideales $I_i \in \mathfrak{A}$ con el orden conjuntista dado por la contenencia, se tiene que

$$J = \bigcup I_i \in \mathfrak{A}$$

que J es un ideal se sigue directamente de la definición de ideal. Además $x \in J$.

De otra parte

$$J \cap U = \left(\bigcup I_i\right) \cap U = \bigcup (I_i \cap U) = \varnothing$$

consecuentemente por el lema de Zorn existe $P \in \mathfrak{A}$ que es maximál. Queremos ver que P es primo.

3. sean $a, b \in A$ tales que $a \wedge b = 0$; se quiere ver que $a \in P$ ó $b \in P$.

Supongamos que $a \notin P$ y $b \notin P$. Como P es maximál en $\mathfrak{A}$, se sigue que

$$\langle P \cup \{a\} \rangle \cap U \neq \varnothing \quad \text{y} \quad \langle P \cup \{b\} \rangle \cap U \neq \varnothing$$

consecuentemente existen $p, q \in P$, $z, z' \in U$ y $m, m' \in \mathbb{N}$ tales que

$$z' \leq p \oplus m' \cdot a \quad \text{y} \quad z \leq q \oplus m \cdot b$$

como U es filtro entonces

$$(p \oplus m' \cdot a) \in U \qquad \text{y} \qquad (q \oplus m \cdot b) \in U$$

si tomamos $n = max\{m, m'\}$ se sigue que

$$(p \oplus q \oplus n \cdot a) \in U \quad \text{y} \quad (p \oplus q \oplus n \cdot b) \in U$$

Si llamamos $r = p \oplus q$ se verifica directamente que $r \in P$, debido a que P es ideal de la mv-álgebra. Como U es cerrado para ínfimos finitos, entonces

$$(r \oplus n \cdot a) \wedge (r \oplus n \cdot b) \in U$$

sin embargo

$$(r \oplus n \cdot a) \wedge (r \oplus n \cdot b) = r \oplus (n \cdot a \wedge n \cdot b) = r \oplus n \cdot (a \wedge b) = r \oplus 0 = r \in U$$

consecuentemente

$$r \in P \cap U$$

que contradice la hipótesis $\quad P \cap U = \varnothing; \quad$ luego $a \in P \quad$ ó $\quad b \in P$.

4. consecuentemente existe un ideal primo $P \ni x$ y $P \cap U = \varnothing$ y $x \in V$.

   consecuentemente

$$p^*(u) = 0 \neq 1 = p^*(v)$$

■

4.4. Relación entre L_A y $\mathcal{O}(\mathfrak{Z}_A)$

Recordemos que $\mathfrak{Z}_A$ es el espacio topológico cuyos puntos son los ideales primos de A y cuyos abiertos básicos están dados por los conjuntos

$$W_a = \{P \mid P \text{ es ideal primo de } A; \quad a \in P\}$$

Se obtiene que

$$\text{Puntos}(\mathcal{V}_{\mathcal{A}}) = \mathfrak{Z}_A$$

como conjuntos.

Utilizaremos las correspondencias descritas en las proposiciones 4.14 y 4.12.

Consideremos el siguiente morfismo de locales,

$$\begin{aligned} L_A &\xrightarrow{\rho} \mathcal{O}(\mathfrak{Z}_A) \\ u &\longmapsto \bigcup_{a\in U} W_a \end{aligned} \tag{4.8}$$

es decir, $\rho(u) = \{P \in \mathfrak{Z}_A \,|\, \exists\, a \in U, \quad a \in P\} \;=\; \{P \in \mathfrak{Z}_A \,|\, P \cap U \neq \varnothing\}$

Observemos que

$$\rho(U_a) = W_a$$

debido a que para todo $x \in U_a$ $\langle a\rangle \subseteq \langle x\rangle$ lo cual implica $W_x \subseteq W_a$, (ver (4.7)).

Se verifica sin dificultad de la definición que ρ es un morfismo de locales.

Proposición 4.21. *Como L_A tiene suficientes puntos (ver teorema 4.20)*

$$\rho: \quad L_A \underset{iso}{\approx} \mathcal{O}(\mathfrak{Z}_A)$$

Demostración. ρ es suryectivo por definición, y como L_A tiene suficientes puntos se sigue que para todo $u, v \in L_A$ existe un ideal primo P tal que

$$P \cap U = \varnothing \quad \text{y} \quad P \cap V \neq \varnothing$$

consecuentemente $\rho(U) \neq \rho(V)$.

■

Corolario 4.22. *$\mathfrak{Z}_A$ es un espacio topológico compacto.*

Demostración. se sigue directamente de que L_A es compacto (proposición 4.19) y de la proposición 4.21.

Lema 4.23. *Dados* $a_1, \cdots, a_n \in A$,

$$A \to A/\langle a_i \rangle \in cover(\overline{A}) \quad \Leftrightarrow \quad \bigcup_{1\leq i\leq n} W_{a_i} = \mathfrak{Z}_A$$

Demostración.
($\Rightarrow$)
se tiene porque $\underset{\leq i\leq n}{\wedge} a_i = 0 \quad \Rightarrow \quad$ para todo ideal primo P, $\exists i \in \{1, \cdots, n\}$, tal que $a_i \in P$.

($\Leftarrow$)
$\mathfrak{Z}_A = \bigcup_{1\leq i\leq n} W_{a_i} = W_{\underset{i}{\wedge} a_i}$ (ver lema 4.17), como la intersección de los ideales primos es cero, se tiene que

$$W_a = \mathfrak{Z}_A \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$$

consecuentemente $\underset{i}{\wedge} a_i = 0$ lo cual implica que la familia $\overline{a_i}$ cubre a $\mathbf{1} \in \mathcal{V}_A$.

■

Por otro lado si $\bigcup W_{a_i} = \mathfrak{Z}_A$ de la compacidad de $\mathfrak{Z}_A$, se sigue que existe un subcubrimiento finito tal que

$$\mathfrak{Z}_A = \bigcup_{1\leq i\leq n} W_{a_i}$$

donde la familia $\overline{a_i} \to \mathbf{1}$ es un cubrimiento de la topología de $\mathcal{V}_A$.

Es decir, existe una correspondencia biunívoca entre los cubrimientos de los espacios topógicos $\mathfrak{Z}_A$ y $\mathcal{V}_A$, en consecuencia tenemos:

Corolario 4.24. *El isomorfismo* $\rho : L_A \to \mathcal{O}(\mathfrak{Z}_A)$ *establece un isomorfismo entre los topos de haces*

$$Sh(\mathfrak{Z}_A) \underset{iso}{\approx} Sh(\mathcal{V}_A)$$

5

Las topologías son subcanónicas

En este capítulo demostramos que las topologías de Grothendieck definidas en los capítulos precedentes son subcanónicas. Este es el hecho esencial que se necesita en la demostración del teorema de representación.

Definición 5.1. *Una topología de Grothendieck de un sitio $\mathcal{C}$ se dice subcanónica, si los funtores representables son haces.*

Teorema 5.2. *La topología del sitio $\mathcal{V}$ es subcanónica; es decir, dados $Q, R \in \mathcal{V}^{op}$ mv-álgebras de presentación finita,*

$$\begin{tikzcd} \overline{Q/q_\alpha} \arrow[r] \arrow[dr, "\overline{f_\alpha}"'] & \overline{Q} \arrow[d, dashed, "!\overline{\sigma}"] \\ & \overline{R} \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

para todo cubrimiento $\overline{Q/q_\alpha} \to \overline{Q}$ y toda familia compatible $\overline{f_\alpha} : \overline{Q/q_\alpha} \to \overline{R}$; se debe demostrar que existe un único morfismo $\overline{\sigma} : \overline{Q} \to \overline{R}$ que hace conmutar el triángulo (5.1).

En el caso que nos concierne, es suficiente tomar cubrimientos de la forma, $Q \to Q/\langle q_1 \rangle$, $Q \to Q/\langle q_2 \rangle$ con $q_1 \wedge q_2 = 0 \in Q$; donde Q es una mv-álgebra de presentación finita. La demostración del teorema se reduce entonces al lema 5.3.

■

Lema 5.3 (Lema pushout - pullback, caso presentación finita). *El pushout (ver diagrama (3.13))*

$$\begin{tikzcd} & Q/\langle q_1 \rangle \arrow[dr] & \\ Q \arrow[ur] \arrow[dr] & & Q/\langle q_1 \oplus q_2 \rangle \\ & Q/\langle q_2 \rangle \arrow[ur] & \end{tikzcd} \tag{5.2}$$

es pullback

Demostración. Ver que la topología de $\mathcal{V}$ es subcanónica, es equivalente a demostrar que el pushout precedente es un pullback, debido a que por la propiedad universal se sigue que,

$$\begin{tikzcd} & & Q/\langle q_1 \rangle \arrow[dr] & \\ R \arrow[r, dashed, "!\sigma"] \arrow[urr, bend left, "f_1"] \arrow[drr, bend right, "f_2"'] & Q \arrow[ur] \arrow[dr] & & Q/\langle q_1 \oplus q_2 \rangle \\ & & Q/\langle q_2 \rangle \arrow[ur] & \end{tikzcd} \tag{5.3}$$

existe un único σ correspondiente a $\overline{\sigma}$ buscado.

Consecuentemente, un hecho crucial consiste en interpretar qué significa que el cuadrado 5.2 es pullback.

Interpretación.

1. El cuadrado 5.2 es pullback si y solo sí, para todo $c, d \in Q$ tales que

$$[c]_{\langle q_1 \oplus q_2 \rangle} = [d]_{\langle q_1 \oplus q_2 \rangle}$$

existe un único $q \in Q$ tal que

$$[q]_{\langle q_1 \rangle} = [c]_{\langle q_1 \rangle} \quad \text{y} \quad [q]_{\langle q_2 \rangle} = [d]_{\langle q_2 \rangle}$$

La interpretación anterior corresponde a que el cuadrado de los conjuntos subyacentes sea pullback.

2. La notación $[q]_{\langle b\rangle}$ se usa en este trabajo para la clase de a módulo el ideal $\langle b\rangle$.

3. Como $Q \in \mathcal{V}$ entonces Q es una mv-álgebra de presentación finita; es decir,
$$Q = F[x_1, \cdots x_n]/\langle b\rangle$$

4. Se notará $F[x_1, \cdots, x_n] := F_n$ siempre que no sea confuso.

5. Supongamos que exiten c, d como en el item (1) y un cubrimiento

$$\begin{tikzcd} & F_n/\langle q_1\rangle \arrow[dr] & \\ F_n/\langle b\rangle \arrow[ur] \arrow[dr] & & F_n/\langle q_1 \oplus q_2\rangle \\ & F_n/\langle q_2\rangle \arrow[ur] & \end{tikzcd} \tag{5.4}$$

con $\langle q_1 \wedge q_2\rangle = \langle b\rangle$.

Se tiene que $q_1, q_2, b, c, d \in F_n$; lo cual significa, por la proposición 3.1.8 de [2], que son funciones de McNaughton.

6. El lema 3.4.8 de [2] es crucial en la interpretación del teorema 5.2 y en la demostración del lema 5.4. A continuación se presenta su enunciado:

lema. dados $f, g \in F_n$
$$g \in \langle f\rangle \quad \text{sii} \quad Ceros(g) \supseteq Ceros(f)$$

Lema 5.4. *Dados $f, g, h \in F_n$*
$$[f]_{\langle g\rangle} = [h]_{\langle g\rangle} \quad sii \quad f|_{Ceros(g)} = h|_{Ceros(g)}$$

Demostración. $\quad (\Rightarrow) \quad [f]_{\langle g\rangle} = [h]_{\langle g\rangle}$ es equivalente a

$$f \ominus h;\ h \ominus f \in \langle g\rangle$$

$f \ominus h \in \langle g\rangle$ es equivalente a

$$f \ominus h \leq n.g$$

para algún $n \in \mathbb{N}$; de esta propiedad se sigue que para todo $\overrightarrow{x} \in Ceros(g)$ $f \ominus h(\overrightarrow{x}) = 0$.

El caso $h \ominus f$ se demuestra de manera análoga. Consecuentemente

$$f|_{Ceros(g)} = h|_{Ceros(g)}$$

$(\Leftarrow) \quad$ ahora supongamos que $\quad f|_{Ceros(g)} = h|_{Ceros(g)}; \quad$ entonces

$$Ceros(f \ominus h) \supseteq Ceros(g) \quad \text{y} \quad Ceros(h \ominus f) \supseteq Ceros(g)$$

por el lema 3.4.8 de [2] (enunciado en el item (6) del listado precedente)

$$f \ominus h \in \langle g\rangle \quad \text{y} \quad h \ominus f \in \langle g\rangle$$

$\blacksquare$

Demostración del lema 5.3

Sea

$$\begin{tikzcd} & F_n/\langle q_1\rangle \arrow[dr] & \\ F_n/\langle b\rangle \arrow[ur] \arrow[dr] & & F_n/\langle q_1 \oplus q_2\rangle \\ & F_n/\langle q_2\rangle \arrow[ur] & \end{tikzcd} \tag{5.5}$$

un cubrimiento con $\langle q_1 \wedge q_2\rangle = \langle b\rangle$

Se debe demostrar que para todo $c, d, q_1, q_2 \in F_n$ tales que

$$[c]_{\langle q_1 \oplus q_2\rangle} = [d]_{\langle q_1 \oplus q_2\rangle}$$

existe un $q \in F_n$ tal que

$$[q]_{\langle q_1 \rangle} = [c]_{\langle q_1 \rangle} \quad \text{y} \quad [q]_{\langle q_2 \rangle} = [d]_{\langle q_2 \rangle}$$

Como

$$\langle b \rangle = \langle q_1 \rangle \cap \langle q_2 \rangle$$

cualquier otro $q' \in F_n$ tal que

$$[q']_{\langle q_1 \rangle} = [c]_{\langle q_1 \rangle} = [q]_{\langle q_1 \rangle} \quad \text{y} \quad [q']_{\langle q_2 \rangle} = [c]_{\langle q_2 \rangle} = [q]_{\langle q_2 \rangle}$$

cumple

$$[q']_{\langle b \rangle} = [q]_{\langle b \rangle}$$

es decir si existe q con las condiciones del teorema, es único en $F_n/\langle b \rangle$.

Por la hipótesis

$$c|_{Ceros(q_1 \oplus q_2)} = d|_{Ceros(q_1 \oplus q_2)}$$

por definición

$$Ceros(q_1 \oplus q_2) = Ceros(q_1) \cap Ceros(q_2)$$

Sea

$$f : [0,1]^n \to [0,1]$$

definida como sigue:

1. $f(\overrightarrow{x}) = c(\overrightarrow{x})$ si $\overrightarrow{x} \in ceros(q_1)$
2. $f(\overrightarrow{x}) = d(\overrightarrow{x})$ si $\overrightarrow{x} \in ceros(q_2)$
3. $f(\overrightarrow{x}) = 0$ en otro caso.

Esta es una función $[0,1]$ valuada que coincide con la libre c en el conjunto de ceros de la libre q_1 y coincide con la libre d en el conjunto de ceros de la libre q_2. Entonces por lema 5.3 de [9] (pg 185), existe una libre q tal que coincide con f en $Ceros(q_1) \cup Ceros(q_2)$. Consecuentemente q es la buscada.

■

Nota. En el libro [9], se describe q de manera constructiva:

$$q := (c \odot \quad n \cdot q_1) \vee (d \odot \quad m \cdot q_2)$$

con n, m números naturales suficientemente grandes.

Ahora demostraremos que si la topología del sitio $\mathcal{V}$ es subcanónica en $\mathcal{E}ns$, entonces para toda mv-álgebra A, la topología del sitio $\mathcal{V}_A$, inducida por la topología del sitio $\mathcal{V}$, también es subcacónica en $\mathcal{E}ns$.

La demostración se basa en el hecho de que en $\mathcal{E}ns$ límites finitos conmutan con colímites filtrantes.

Teorema 5.5. *Dada A una mv-álgebra cualquiera, la topología de Grothendieck en $\mathcal{V}_A$ es subcanónica en $\mathcal{E}ns$.*

Como antes, la demostración de este teorema se sigue del lema 5.6:

■

Lema 5.6 (pushout - pullback, caso general). *El pushout*

$$\begin{tikzcd} & A/\langle a_1\rangle \arrow[dr] & \\ A \arrow[ur] \arrow[dr] & & A/\langle a_1 \oplus a_2\rangle \\ & A/\langle a_2\rangle \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

con $a_1 \wedge a_2 = 0$, es pullback

Demostración. Supongamos que el cubrimiento precedente fue inducido por el cubrimiento

$$\begin{tikzcd}
 & F/\langle f\rangle \arrow[rr] \arrow[dd] & & F/\langle f\oplus g\rangle \arrow[dd] \\
F \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd, "\phi"'] & & F/\langle g\rangle \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
 & A/\langle a_1\rangle \arrow[rr] & & A/\langle a_1\oplus a_2\rangle \\
A \arrow[ur] \arrow[rr] & & A/\langle a_2\rangle \arrow[ur] &
\end{tikzcd} \tag{5.6}$$

de $\mathcal{V}^{op}$ (ver sección 4.2).

Como A es modelo de una lím-teoría, se sabe que

$$\begin{tikzcd}
 & F/\langle f\rangle \arrow[rr] \arrow[dd, dashed] & & F/\langle f\oplus g\rangle \arrow[dd, dashed] \\
F \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd, dashed, "\phi_i"'] & & F/\langle g\rangle \arrow[ur] \arrow[dd, dashed] & \\
 & F_i/\langle f_i\rangle \arrow[rr] \arrow[dd] & & F_i/\langle f_i\oplus g_i\rangle \arrow[dd] \\
F_i \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd, "\mu_i"'] & & F_i/\langle g_i\rangle \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
 & A/\langle a_1\rangle \arrow[rr] & & A/\langle a_1\oplus a_2\rangle \\
A \arrow[ur] \arrow[rr] & & A/\langle a_2\rangle \arrow[ur] &
\end{tikzcd} \tag{5.7}$$

El diagrama en $\mathcal{V}_A^{op}$, de vértice A (descrito en el gráfico precedente), es colímite filtrante de todos los pulback's en $\mathcal{V}^{op}$, cuyo vértice es F_i que están "por debajo" del pullback de vértice F y que lo inducen.

consecuentemente, dados $c, d \in A$ tales que

$$[c]_{\langle a_1 \oplus a_2 \rangle} = [d]_{\langle a_1 \oplus a_2 \rangle}$$

existen j y $h_1, h_2 \in F_j$ tales que

$$\mu_j(h_1) = c; \quad \mu_j(h_2) = d; \quad \mu_j(f_j) = a_1; \quad \mu_j(g_j) = a_2; \quad \text{y}$$

$$[h_1]_{\langle f_j \oplus g_j \rangle} = [h_2]_{\langle f_j \oplus g_j \rangle}$$

como el teorema vale para las álgebras de presentación finita, entonces cada

$$\begin{tikzcd} & F_j/\langle f_j \rangle \arrow[dr] & \\ F_j \arrow[ur] \arrow[dr] & & F_j/\langle f_j \oplus g_j \rangle \\ & F_j/\langle g_j \rangle \arrow[ur] & \end{tikzcd} \tag{5.8}$$

es pullback. Consecuentemente, existe un único $h \in F_j$ tal que

$$[h]_{\langle f_j \rangle} = [h_1]_{\langle f_j \rangle} \quad \text{y} \quad [h]_{\langle g_j \rangle} = [h_2]_{\langle g_j \rangle}$$

consecuentemente, existe $a = \mu_j(h) \in A$ tal que

$$[a]_{\langle a_1 \rangle} = [c]_{\langle a_1 \rangle} \quad \text{y} \quad [a]_{\langle a_2 \rangle} = [d]_{\langle a_2 \rangle}$$

la unicidad de a se deduce de manera análoga al caso libre, debido a que

$$a_1 \wedge a_2 = 0 \in A$$

.

■

6

El teorema de representación para mv-álgebras

En este capítulo construimos un objeto mv-cadena S_A en el topos $\gamma : \mathcal{E}_A = Sh(\mathcal{V}_A) \to \mathcal{E}ns$ y demostramos el teorema de representación bajo la forma de un isomorfismo $A \approx \gamma_* S_A$. Demostramos además que bajo el isomorfismo entre ese topos y el topos $\Gamma : Sh(\mathfrak{Z}_A) \to \mathcal{E}ns$ de haces sobre el espectro primo $\mathfrak{Z}_A$, al objeto S_A le corresponde el haz de mv-cadenas $Spec_A$ construido en el capítulo 1; consecuentemente se tiene un isomorfismo $A \approx \Gamma(Spec_A)$ entre A y el álgebra de secciones globales $Spec_A$.

6.1. El espectro de una mv-álgebra

Consideramos el topos de haces de conjuntos

$$Sh(\mathcal{V}_A) \hookrightarrow \mathcal{E}ns^{\mathcal{V}_A^{op}}$$

Recordar que el local L_A coincide con el local de subobjetos de $\mathbf{1}$ en $Sh(\mathcal{V}_A)$.

6.2. $Spec_A$

Definición 6.1. *Consideremos el prehaz*

$$\begin{array}{rl} \mathcal{P}_A : & \mathcal{V}_A^{op} \longrightarrow \mathcal{E}ns \\ & \overline{a} \longmapsto A/\langle a \rangle \end{array} \qquad (6.1)$$

$\mathcal{P}_A$ es un prehaz debido a que

$$\overline{b} \preceq \overline{a} \quad \Leftrightarrow \quad a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad A/\langle a \rangle \to A/\langle b \rangle$$

Además el objeto $\mathcal{P}_A \in \mathcal{E}ns^{\mathcal{V}_A^{op}}$ es un objeto mv-álgebra en el topos $\mathcal{E}ns^{\mathcal{V}_A^{op}}$; esto significa que $\mathcal{P}_A(\overline{a}) = A/\langle a \rangle$ es una mv-álgebra en $\mathcal{E}ns$.

Definición 6.2. *Llamaremos* $\mathbf{S}_A \in Sh(\mathcal{V}_A)$ *al haz asociado del prehaz* $\mathcal{P}_A$*; es decir*

$$\mathbf{S}_A \quad = \quad \#\mathcal{P}_A$$

Por construcción, existe una transformación natural

$$\mathcal{P}_A \xrightarrow{\eta} \mathbf{S}_A \quad = \quad \#\mathcal{P}_A$$

Recordemos que $id_{\overline{A}} : \overline{A} \to \overline{A}$ es el objeto $\mathbf{1} \in \mathcal{V}_A$ (corresponde al elemento $\overline{0} \in \mathcal{V}_A$)

Consecuentemente

$$\eta_1 : A = \mathcal{P}_A(1) \to \mathbf{S}_A(1)$$

es decir,

$$A \quad \xrightarrow{\eta_1} \quad \Gamma(\mathbf{S}_A)$$

con $\Gamma(\mathbf{S}_A)$, el conjunto de las secciones globales del haz $\mathbf{S}_A$ (recordar que una sección global es una transformación natural $\mathbf{1} \to \mathbf{S}_A$).

En lo que sigue se demostrará que para toda mv-álgebra A, η_1 es un isomorfismo.

Teorema 6.3. $\mathcal{P}_A$ *es un haz.*

Demostración Debemos demostrar que,

$$\begin{tikzcd} \overline{A/a_\alpha} \arrow[r] \arrow[dr, "x_\alpha"'] & \overline{A} \arrow[d, dashed, "!x"] \\ & \mathcal{P}_A \end{tikzcd} \tag{6.2}$$

para todo cubrimiento $\overline{A/a_\alpha} \to \overline{A}$ y toda familia compatible x_α : $\overline{A/a_\alpha} \to \mathcal{P}_A$; existe un único morfismo $x : \overline{A} \to \mathcal{P}_A$ que hace conmutar el triángulo 6.2

Por Yoneda y por la definición de $\mathcal{P}_A$, esto quiere decir que para todo $x_\alpha \in A/\langle a_\alpha \rangle$ tales que

$$[x_{\alpha_i}]_{\langle \oplus a_\alpha \rangle} = [x_{\alpha_j}]_{\langle \oplus a_\alpha \rangle}$$

existe un único $x \in A$ tal que para todo α

$$[x]_{\langle a_\alpha \rangle} = x_\alpha$$

La afirmación precedente es equivalente a demostrar que la topología de Grothendieck en $\mathcal{V}_A$ es subcanónica en $\mathcal{E}ns$; resultado que fue demostrado en el teorema 5.5.

■

El teorema precedente implica que

$$\mathbf{S}_A \approx \mathcal{P}_A$$

consecuentemente,

Corolario 6.4. $A \overset{\eta_1}{\approx} \Gamma(\mathbf{S}_A)$

Proposición 6.5. $\mathbf{S}_A$ *es un objeto mv-cadena en* $Sh(\mathcal{V}_A)$.

Demostracion. como $Sh(\mathcal{V}_A)$ tiene suficientes puntos, para ver que $\mathbf{S}_A$ es un objeto cadena basta ver que para cada punto p^*, se tiene que $p^*(\mathbf{S}_A)$ es una mv-cadena en $\mathcal{E}ns$ (comparar con la definición 1.6 y ver [6]).

Observemos que

$$p^*(\mathbf{S}_A) = p^*(\#\mathcal{P}_A) = p^*(\mathcal{P}_A)$$

De otra parte

$$p^*\left(\mathcal{P}_A\right) \underset{(1)}{=} \varinjlim_{\Gamma_p^{op}} \mathcal{P}_A(\overline{a}) \underset{(2)}{=} \varinjlim_{a\in P} \mathcal{P}_A(\overline{a}) \underset{(3)}{=} \varinjlim_{a\in P} A/\langle a\rangle \underset{(4)}{=} A/P$$

con P ideal primo.

La igualdad (1) se tiene por la definición de p^* (ver fórmula (3.6)); (2) se sigue de la definición 3.6; (3) se tiene por definición del funtor $\mathcal{P}_A$ y (4) fue demostrada en la proposición 1.10.

■

Lema 6.6. *del isomorfismo* $Sh(\mathfrak{Z}_A) \approx Sh(\mathcal{V}_A)$ *descrito en el corolario 4.24 se sigue que los objetos* $Spec_A$ *y* $\mathbf{S}_A$ *se corresponden, en particular se tiene el diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} \Gamma(\mathbf{S}_A) \arrow[r, phantom, "\approx"] & \Gamma(Spec_A) \\ & A \arrow[ul, "\eta"] \arrow[u, "\eta"'] \end{tikzcd} \tag{6.3}$$

Demostración.
Como los puntos y los cubrimientos se corresponden, basta verificar que el haz asociado por la construcción de Godement al prehaz $\mathcal{P}_A$ es justamente el objeto $Spec_A$.

Pero esto se sigue directamente de la definición 1.7 y de la proposición 1.10.

■

Un corolario inmediato del lema precedente es el siguiente teorema:

Teorema 6.7. *Toda mv-álgebra A es isomorfa a las secciones globales del haz de cadenas* $\Gamma(Spec_A)$. *Concretamente el isomorfismo viene dado por*

$$A \xrightarrow{\eta} \Gamma Spec_A \tag{6.4}$$

$$a \longmapsto \widehat{a}(P) = [a]_P$$

con $[a]_P$ *la clase de equivalencia de* a *en la mv-álgebra* A/P. *(ver definición 1.9).*

Demostración
se sigue directamente del lema 6.6 y del corolario 6.4.

■

Como en el caso arquimediano el espectro primo y el espectro maximal coinciden, es decir

$$\mathfrak{Z}_A = \mathfrak{M}_A$$

entonces el objeto $Spec_A$ descrito en la definición 1.11, es el mismo que el descrito para esta teoría general, consecuentemente,

Corolario 6.8. *La representación descrita en el capítulo 2 para mv-álgebras arquimedianas, es un caso particular de la representación descrita en el teorema 6.7.*

■

7

El teorema de McNaughton

En este último capítulo establecemos una nueva demostración del famoso teorema de McNaughton y establecemos un marco conceptual para el mismo. La misma naturaleza local de la definición de función de McNaughton (y el hecho de que los polinomios enteros determinan en particular fórmulas de la teoría de mv-álgebras) muestra que una función de McNaughton no es otra cosa que una sección global del haz $Spec_A$. Así el teorema de McNaughton resulta un corolario del teorema de representación para mv-álgebras libres.

Observemos que toda fórmula $a \in F[x_1, \cdots, x_n]$ determina una función de $[0,1]^n \to [0,1]$ que denotaremos por abuso con la misma letra a. Dados $(r_1, \cdots, r_n) \in [0,1]^n$, $a(r_1, \cdots, r_n)$ es la evaluación de la fórmula en la mv-álgebra $[0,1]$.

Recordemos algunas definiciones básicas y un par de resultados del libro [2], que se usarán en la demostración.

Definición 7.1 (Función de McNaughton). *Sea* $n \geq 1$ *un entero. Una función*

$$f : [0,1]^n \to [0,1]$$

es llamada función de McNaughton sobre $[0,1]^n$ *si y solo si, satisface las siguientes condiciones:*

1. *f es continua con respecto a la topología natural de* $[0,1]^n$

2. *existen polinomios lineales* $p_1, \cdots, p_k$ *con coeficientes enteros,*

$$p_i(x_1, \cdots, x_n) = b_i + m_{i1}x_1 + \cdots + m_{in}x_n$$

   tales que para cada $y \in [0,1]^n$ *existe* $j \in \{1, \cdots, k\}$ *tal que*

$$f(y) = p_j(y)$$

Consideremos los siguientes resultados conocidos:

Proposición 7.2. *Se tienen las siguientes relaciones:*

1. *(proposición 3.1.8 de [2]) la función determinada por cada fórmula* $a \in F[x_1, \cdots, x_n]$ *es de McNaughton.*

2. *(lema 3.1.9 de [2]) Dado un polinomio* $p \in \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_n]$ *la función* $p^{\#}$ *definida por* $p^{\#} = (p \vee 0) \wedge 1$*, está dada por una fórmula* $a \in F[x_1, \cdots, x_n]$*. Con el abuso de notación,* $p^{\#} = a$*.*

consecuentemente toda función de McNaughton que pueda describirse con un solo polinomio lineal es una fórmula.

Proposición 7.3. *(proposición 3.3.1 de [2]) Dada* f *una función de McNaughton en n-variables con componentes lineales* $p_1, \cdots, p_k$ *existe un conjunto* $\mathcal{S}$ *de simplex n-dimensionales compactos con vértices racionales tales que*

1. *La unión de los simplex en* $\mathcal{S}$ *coincide con el cubo* $[0,1]^n$*.*

2. *Dos simplex cualquiera en* $\mathcal{S}$ *son disjuntos o se intersectan en una cara común.*

3. *Para cada simplex* $W \in \mathcal{S}$ *existe* $j \in \{1, \cdots, k\}$ *tal que* f *restringido a* W *coincide con* p_j*.*

Notación.

1. llamaremos $\mathcal{M}_n$ al conjunto de funciones de McNaughton cuyo dominio es $[0,1]^n$
2. llamaremos F_n al conjunto de fórmulas dado por la mv.álgebra libre con n generadores $F[x_1, \cdots, x_n]$.
3. llamaremos D_a al conjunto de ideales maximales que contienen al elemento a.
4. recordemos que W_a es el conjunto de ideales primos que contienen al elemento a.

Lema 7.4. *Dada una mv-álgebra semisimple A, para todo $a, b, c \in A$*

$$\widehat{a}|_{D_c} = \widehat{b}|_{D_c} \quad \Leftrightarrow \quad a/\langle c\rangle = b/\langle c\rangle$$

con $\langle c\rangle$ el ideal generado por c.

Demostración. La demostración es análoga a la del lema 2.4, pero ahora se usa que en las mv-álgebras semisimples la intersección de los ideales máximales es cero.

Corolario 7.5. *Para todo $a, b, c \in F_n$ se tiene que*

$$\widehat{a}|_{W_c} = \widehat{b}|_{W_c} \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{a}|_{D_c} = \widehat{b}|_{D_c}$$

Demostración. se sigue directamente de que las mv-álgebras libres son semisimples y de los lemas 7.4 y 2.4.

Recordemos que el lema 2.4 dice que dada A una mv-álgebra, para todo $a, b, c \in A$

$$\widehat{a}|_{W_c} = \widehat{b}|_{W_c} \quad \Leftrightarrow \quad a/\langle c\rangle = b/\langle c\rangle$$

con $\langle c\rangle$ el ideal generado por c.

Dada una fórmula $a \in F_n$, denotaremos con $Z(a)$ al conjunto de ceros de la función a, $Z(a) \subseteq [0,1]^n$

$$Z(a) = \{x \in [0,1]^n \,|\, a(x) = 0\}$$

Proposición 7.6. *Dado un simplex n-dimensional* S *con vértices racionales, existe* $a \in F_n$ *tal que*

$$Z(a) = S$$

Demostración.
Primero haremos la demostración para F_2, se verá que el caso general es análogo.

1. Caso F_2

   Lema 7.7. *Para toda línea L que une dos puntos racionales de dos lados distintos del cuadrado* $[0,1]^2$ *existe una formula* $b \in F_2$ *tal que*

   $$Z(b) = A$$

   con A *uno de los lados en los que la recta L divide al cuadrado.*

   Demostración.
   si (q_1, q_2) y (q_3, q_4) son los puntos de corte entre L y el cuadrado $[0,1]^2$ con $q_i \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ entonces si $q_1 \neq q_3$,

   $$L \equiv \quad y = \frac{q_4 - q_2}{q_3 - q_1} x + q_5$$

   si $q_1 = q_3$,

   $$L \equiv \quad x = q_1$$

   consecuentemente en cualquier caso, existen $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}$ tales que

   $$L \equiv \quad 0 = -m_2 y + m_1 x + m_3$$

   así la fórmula

   $$(m_1 x - m_2 y + m_3)^{\#} \quad = \quad \mathbf{b} \in F_2$$

   ó

   $$(-(m_1 x - m_2 y + m_3)\ )^{\#} \quad = \quad \mathbf{b} \in F_2$$

   cumple que

   $$Z(b) = A$$

Ahora es fácil construir una fórmula $a \in F_2$ tal que para un simplex S con vértices racionales $Z(a) = S$, debido a que las caras del simplex son tres líneas L_1, L_2, L_3 como la descrita antes, y S es la región interior compredida por las tres líneas unido el borde; con lo cual se contruyen las fórmulas b_1, b_2, b_3 y a tales que b_i es la correspondiente a L_i y

$$Z(b_i) = A_i, \quad A_i \cap S = S, \qquad \bigcap_i A_i = S, \quad \text{y} \quad a = b_1 \vee b_2 \vee b_3$$

2. Caso F_n
Todo hiperplano que corta el n-cubo $[0,1]^n$, lo divide en dos regiones. Como las caras del simplex corresponden a hiperplanos L_i con la forma

$$L_i \equiv \quad 0 = m_1x_1 + \cdots + m_nx_n + m_{n+1} \quad \text{con} \quad m_i \in \mathbb{Z}$$

entonces, las fórmulas $b_i \in F_n$ y $a = b_1 \vee \cdots \vee b_{n+1} \in F_n$ costruidas de forma análoga al caso F_2 validan el teorema.

■

Recordemos que de la proposición 3.4.7 de [2], se sabe que que existe una biyección conjuntista

$$\begin{array}{ccc} [0,1]^n & \approx & \mathfrak{M}_{F_n} \\ x & \longmapsto & J_x \end{array} \tag{7.1}$$

con $J_x = \{b \in F_n \,|\, b(x) = 0\}$

Lema 7.8. *Bajo la biyección dada por la relación (7.1), para toda fórmula $b \in F_n$ se tiene la biyección conjuntista :*

$$Z(b) \approx D_b$$

Demostración. dado $x \in Z(b)$ se sigue de la defición que $J_x \in D_b$. De otra parte dado $J_y \in D_b$ se tiene que $b(y) = 0$ con lo cual $y \in Z(b)$.

■

Si $\quad P \in \mathfrak{M}_{F_n}, \quad$ se sabe que

$$F_n/P \hookrightarrow [0,1]$$

es una subalgebra de $\quad [0,1]$.

Además para $\quad a \in F_n$

$$[a]_{J_x} \approx a(x) \tag{7.2}$$

Corolario 7.9. *Si* $\quad S = Z(b) \quad$ *con* $\quad b \in F_n, \quad$ *entonces para todo* $\quad a \in F_n$

$$a|_S = \widehat{a}|_{D_b}$$

en el sentido que para todo $\quad x \in Z(b) \quad a(x) = \widehat{a}(J_x)$

Demostración $\quad$ se sigue directamente del lema 7.8 y de la relación descrita en (7.2).

■

Teorema 7.10. $\qquad \mathcal{M}_n \underset{iso}{\approx} \Gamma(Spec_{F_n})$

Demostración $\quad$ definamos

$$\mathcal{M}_n \xrightarrow{\theta} \Gamma(Spec_{F_n})$$

como sigue:

Dada $\quad f \in \mathcal{M}_n \quad$ con componentes lineales $a_1, \cdots, a_k \quad$ definidas en los simplex $\quad S_1, \cdots, S_k, \quad$ con

$$f|_{S_i} = a_i|_{S_i}$$

como cada $S_i = Z(b_i)$ con $b_i \in F_n$, entonces

$$a_i|_{S_i} = a|_{Z(b_i)} = \widehat{a_i}|_{D_{b_i}}$$

Como $\bigcup S_i = [0,1]^n$ entonces $\bigwedge b_i = 0$, consecuentemente los W_{b_i} cubren $\mathfrak{Z}_{F_n}$. Entonces definimos $\theta(f)$ en este cubrimiento por:

$$\theta(f)|_{W_{b_i}} = \widehat{a_i}|_{W_{b_i}} \qquad 1 \leq i \leq k$$

La compatibilidad se tiene directamente de la compatibilidad de las componentes lineales de la f y del lema 7.5.

Se observa que $\theta(f)$ como función es una extensión de f del conjunto de los ideales maximales al conjunto de los ideales primos. Se sigue del lema 7.5, que la extensión es única y no depende del conjunto de simplex dado en la proposición 7.3.

De otra parte toda sección global $\sigma \in \Gamma(Spec_{F_n})$ determina por restricción a los ideales maximales una función $f : [0,1]^n \to [0,1]$, $f(x) = \sigma(x)$.

La sección σ está compuesta de secciones locales que son fórmulas, es decir, existe una familia cubriente $\{W_{b_i}\}$ (finita), tal que

$$\sigma|_{W_{b_i}} = \widehat{a_i}|_{W_{b_i}}$$

f resulta continua para la topología usual, debido a que sus restricciones a una familia cubriente de finitos cerrados $Z(b_i)$ están dadas por fórmulas a_i que son aplicaciones continuas. Esto mismo prueba por la proposición 7.2 que f es una función de McNaughton.

Consecuentemente existe una aplicación

$$\delta : \Gamma(Spec_{F_n}) \to \mathcal{M}_n$$

dada por la restricción de cada a_i asociada a σ, a los ideales maximales. Esta aplicación resulta inyectiva del lema 7.5 y claramente

$$\delta \circ \theta = id_{\mathcal{M}_n}$$

es decir δ es suryectiva.

Consecuentemente el par (θ, δ) define una biyección.

Como hay compatibilidad en las operaciones punto a punto, θ es un isomorfismo de mv-álgebras.

■

Teorema 7.11 (Teorema de McNaughton). *Toda función f de McNaughton sobre $[0,1]^n$, esta dada por una fórmula $a \in F[x_1, \cdots, x_n]$, $f = a$.*

Demostración se sigue directamente del teorema 7.10 y del teorema 6.7:

$$\mathcal{M}_n \approx \Gamma(Spec_{F_n}) \approx F_n$$

■

Bibliografía

[1] Manuela Busaniche, Daniele Mundici, *Geometry Of Robinson Consistency in Lukasiewics Logic*, por aparecer.

[2] Roberto Cignoli, Itala M. L. D'Ottaviano, Daniele Mundici, *Algebraic Foundations of Many-valued Reasoning.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[3] Roberto Cignoli, Eduardo Dubuc, Daniele Mundici, *Extending Stone duality to multisets and locally finite MV-algebras.* Journal of pure and applied algebra (189), 2004.

[4] Michel Coste, *Localisation, Spectra and Sheaf Representation.* Lecture Notes in Math (753), Springer-Verlag, New York, 1979, 212-238.

[5] Eduardo Dubuc, *Temas Básicos de Categorías*, Notas del curso, Universidad de Buenos Aires, 2000.

[6] Michael Makkai, Gonzalo E. Reyes, *First Order Categorical Logic.* Lecture Notes in Mathematics, 611, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1977.

[7] Sanders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, 2nd ed, Springer Verlag, New York 1998.

[8] Saunders Mac Lane, Ieke Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic, A Firts Introduction to Topos Theory.* Springer Verlag, New York 1992.

[9] Vilém Novák, Irina Perfilieva, Jirí Mockor, *Mathematical Principles of Fuzzy Logic*, Kluwer Academic Publishers, Boston 1999.