UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

Dos Aspectos de Teorías de Campos Supersimétricas

Tesis para optar por el título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires
en el área de Ciencias Físicas

León Gabriel Aldrovandi

Director de Tesis: Dr. Fidel A. Schaposnik
Consejero de Estudios: Dr. Gustavo Lozano

Lugar de Trabajo: Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata

Buenos Aires, 2007

Resumen

Esta tesis está dedicada a estudiar diversas características de las teorías cuánticas de campos supersimétricas. En particular, se analizan en detalle dos aspectos de las mismas: las deformaciones no(anti)conmutativas del superespacio y las propiedades de las configuraciones clásicas BPS-saturadas del tipo cuerda no abeliana.

En lo que concierne al superespacio no(anti)conmutativo, se analiza, tanto desde el punto de vista de la teoría de campos como del de la teoría de cuerdas, la posibilidad de generalizar este tipo de deformaciones al caso en el que la deformación depende de las coordenadas del espacio-tiempo. Por otro lado, se estudian las propiedades de la mecánica cuántica supersimétrica en superespacios no(anti)conmutativos.

Respecto de los solitones tipo cuerda no abeliana, las investigaciones consisten en la busqueda y posterior análisis de este tipo de soluciones en dos contextos bien distintos. En el primero se estudian vórtices no abelianos eléctricamente cargados en teorías de Chern-Simons-Higgs en $d = 2+1$*. Por su parte, en el segundo construimos cuerdas no abelianas autogravitantes en una teoría de Einstein-Yang-Mills-Higgs en* $d = 3+1$*. En ambos casos se analiza en detalle la teoría efectiva de bajas energías de la correspondiente configuración de campos.*

Palabras clave: teoría de campos, teoría de cuerdas, supersimetría, deformaciones, solitones

Abstract

This thesis is devoted to the study of several characteristics of supersymmetric quantum field theories. In particular, we analyze in detail two aspects of them: non(anti)commutative deformations of superspace and the properties of genuinely non-Abelian string-like BPS-saturated configurations.

Concerning non(anti)commutative superspaces, we analyze the possibility of generalizing this kind of deformations to the case of coordinate-dependent non(anti)commutative deformations, both from the point of view of quantum field theory and string theory. Besides, we study the properties of supersymmetric quantum mechanics in non(anti)commutative superspaces.

With respect to non-Abelian string-like solitons, the research consists in the search and further analysis of this kind of solutions in two different contexts. On the one hand, we study electrically charged non-Abelian vortices in Chern-Simons-Higgs theories in $d = 2 + 1$*. On the other hand, we construct self-gravitating non-Abelian strings in Einstein-Yang-Mills-Higgs theories in* $d = 3 + 1$*. In both cases, we analyze in detail the low-energy effective theory of the correspondent field configuration.*

Keywords: quantum field theory, string theory, supersymmetry, deformations, solitons

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecerle a Fidel, por la paciencia y la confianza que me brindó, y por su paternal manera de guiarme y ayudarme en estos primeros años de investigación.

A mi vieja, obviamente, que todavía se banca mis bondades y maldades, sin decir palabra ni pedir nada a cambio.

A mi viejo por estar siempre, dispuesto y atento, para darme una mano cuando lo necesito.

A Guille, por enseñarme, entre muchas otras cosas, cuán importante es laburar entre amigos.

A Dieguito, por ser tan buen copiloto en estos últimos meses del doctorado.

A mi hermano de vida Julián (y flia, jeje), por tantos años de amistad verdadera.

A mis compas platenses Nico, Pablo, Diego (C.), Viri, Carlos y Diego (R.) (y que nunca falten los bifes del viejo!)

A mis amigos académicos: Aleshi, Ceci, Di, Fan, Fer (aguante Saint Genis), Fla, Lea, Leo, Lore, Rolo y Willy.

A mis poco académicos amigos Tonchi y Kurgan, por muchos años más del comando Potopass.

A mis hermanoviecitas Maca y Dani, aunque constantemente me pidan el divorcio.

A la abuela Yeye, de quien pretendo me siga malcriando y engordando por al menos otros 81 años.

Y por supuesto, a la patita más linda, por ese tiempo hermoso en el que volvimos posible lo imposible.

Índice general

1. Introducción **11**

2. Introducción a la Supersimetría **19**
2.1. Álgebra de Supersimetría . . . 19
2.2. Representaciones Irreducibles de la Supersimetría . . . 21
2.2.1. Estados No Masivos . . . 23
2.2.2. Estados Masivos . . . 25
2.3. Cargas Centrales I . . . 26
2.3.1. Cargas Centrales en Superálgebras . . . 26
2.3.2. Representaciones Irreducibles - Estados BPS . . . 27
2.4. Superespacio y Supercampos para $\mathcal{N} = 1$ . . . 29
2.4.1. Superespacio $\mathcal{N} = 1$ . . . 29
2.4.2. Supercampos . . . 32
2.4.3. Representaciones Irreducibles . . . 32
2.5. Cargas Centrales II . . . 37
2.5.1. Modelo de Wess-Zumino . . . 38
2.5.2. Configuraciones BPS . . . 39

3. Superespacio No(Anti)Conmutativo I **41**
3.1. Breve Introducción a la Geometría No Conmutativa . . . 42
3.1.1. Del Conjunto de Puntos al Álgebra de Funciones . . . 43
3.1.2. Cuantización por Deformación . . . 43
3.2. Superespacio Deformado $\mathcal{N} = \frac{1}{2}$ . . . 46
3.2.1. Superespacio . . . 46
3.2.2. Supercampos Quiral y Vectorial . . . 48
3.3. Superespacio NAC a partir de la Teoría de Cuerdas . . . 51
3.3.1. Formalismo Híbrido de Supercuerdas en un Campo de Fondo de Gravifotón . 51
3.3.2. D-branas y Condiciones de Contorno . . . 53
3.3.3. Propagadores y Relaciones de Anticonmutación . . . 54

4. Superespacio No(Anti)Conmutativo II **57**
4.1. Superespacio Deformado . . . 58
4.2. Supercampos Quiral y Vectorial . . . 60

4.3. Super QCD $\mathcal{N} = 1/2$ en Superespacio Deformado . . . 63
4.3.1. Anomalía Konishi . . . 67
4.4. Deformación $C(y)$ desde Teoría de Cuerdas . . . 68
4.4.1. Cuerdas en un Campo de Gravifotón No Constante . . . 68
4.5. Propagadores y Relaciones de (Anti)Conmutación . . . 70
4.6. Resumen y Discusión . . . 72

5. Mecánica Cuántica en Superespacios Deformados 75
5.1. Superespacio $d = 1 + 0$ $\mathcal{N} = 2$ deformado . . . 76
5.2. Lagrangiano y Supersimetrías Clásicas . . . 78
5.3. Supersimetrías Cuánticas . . . 81
5.4. Cryptorealidad del Hamiltoniano No(Anti)Conmutativo . . . 83
5.5. El Supermultiplete $(\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{0})$ . . . 84
5.6. Resumen y Discusión . . . 85

6. Cuerdas No Abelianas - Efecto Meissner No Abeliano 87
6.1. Modelo Básico: $\mathcal{N} = 2$ SQCD . . . 88
6.1.1. $SU(N) \times U(1)$ $\mathcal{N} = 2$ SQCD . . . 89
6.1.2. La Estructura de Vacío . . . 90
6.2. Cuerdas Abelianas Z_N Elementales . . . 91
6.3. Cuerdas Elementales No Abelianas . . . 94
6.4. Teoría Efectiva en la Hoja de Mundo . . . 94
6.4.1. Derivación del Modelo $\mathbf{CP}^{N-1}$ . . . 95
6.4.2. Dinámica del Modelo $\mathbf{CP}^{N-1}$ con Supersimetría $\mathcal{N} = 2$ . . . 97
6.4.3. Masas de Quarks Distintas . . . 98
6.5. Monopolos Confinados como Kinks del Modelo $\mathbf{CP}^{N-1}$ . . . 99

7. Vórtices No Abelianos en Teorías de Chern-Simons 103
7.1. La Teoría . . . 104
7.2. Vortices No Abelianos . . . 106
7.2.1. Cota de Bogomol'nyi y Ecuaciones de Autodualidad . . . 106
7.2.2. Solución de Multivórtice No Abeliano . . . 108
7.3. Teoría Efectiva en la Línea de Mundo del Vórtice . . . 111
7.4. Cuantización del Modelo $\mathbf{CP}^1$ $\mathcal{N} = 2$ Unidimensional . . . 114
7.4.1. Variables Canónicas . . . 115
7.4.2. Cuantización Canónica . . . 116
7.5. Resumen y Discusión . . . 118

8. Cuerdas No Abelianas Auto-Gravitantes 121
8.1. La Teoría . . . 123
8.2. Ecuaciones de Bogomol'nyi . . . 125
8.2.1. La Cota de Bogomol'nyi . . . 128
8.3. Cuerdas No Abelianas Locales - $N_c = N_s = N$ . . . 129
8.4. Cuerdas No Abelianas Semilocales - $N_c = N$, $N_s = N + N_e$ . . . 133

8.4.1. Lump de Modelo Sigma Grassmanniano 136
8.5. Acción Efectiva para la Dinámica de Bajas Energías de la Cuerda 137
8.5.1. Teoría en la Hoja de Mundo para Cuerdas Locales 138
8.5.2. Teoría en la Hoja de Mundo para Cuerdas Semilocales 139
8.6. Resumen y Discusión 143

9. Conclusiones 145

Capítulo 1

Introducción

Dado que esta tesis tiene como objeto de estudio las teorías supersimétricas, comenzaremos esta introducción con una descripción del papel que juegan las simetrías en la comprensión de las interacciones fundamentales que existen en la naturaleza para luego discutir en más detalle una de estas simetrías, la llamada supersimetría. Cumplido esto, pasaremos a describir los dos aspectos fundamentales en los que esta tesis se ha centrado: el análisis de superespacios no(anti)conmutativos y el estudio de configuraciones del tipo cuerda en el sector bosónico de relevantes modelos supersimétricos

Las simetrías juegan un rol cada vez más importante en la física, no solo como una herramienta que simplifica el análisis de los sistemas físicos, sino que son usadas como un principio fundamental que permite determinar vínculos que debe satisfacer la teoría física correcta. Quizás el mejor ejemplo de ésto sea la teoría cuántica de campos (i.e. la mecánica cuántica con los observables definidos sobre el espacio-tiempo), que es el modelo matemático subyacente de nuestro conocimiento actual del comportamiento de la materia a muy cortas distancias. Así, el extremadamente exitoso modelo Estándar describe todas las fuerzas conocidas de la naturaleza, con excepción de la gravedad, en términos de principios de simetrías locales.

En el contexto de la teoría cuántica de campos, las simetrías pueden ser tanto globales como locales. Las primeras poseen los parámetros de la transformación constantes, mientras que en las segundas, también conocidas como simetrías de gauge, dichos parámetros dependen de las coordenadas espaciales. A nivel clásico, las simetrías globales proporcionan una explicación a la fenomenología de muchas de las regularidades (exactas o aproximadas) que observamos en la naturaleza, mientras que las simetrías locales permiten entender y unificar las interacciones de los constituyentes básicos de la materia. A nivel cuántico, las simetrías facilitan (vía "identidades de Ward") el estudio del comportamiento ultravioleta (i.e. a altas energías) de las teorías de campos y su renormalización. En particular, la construcción de modelos de Yang-Mills (con simetrías de gauge) que son asintóticamente libres han permitido entender más profundamente la física a muy altas energías. Si este entendimiento pudiera ser extendido a la interacción gravitatoria mediante una teoría de gravedad cuántica, nos encontraríamos con una descripción de la naturaleza en términos de constituyentes básicos fermiónicos que forman multipletes de algún grupo unificador, y partículas de gauge bosónicas responsables de su interacción. Incluso más satisfactoria sería la existencia en la naturaleza de una simetría (la supersimetría) que vincule a bosones y fermiones, los constituyentes y las fuerzas, en una única entidad.

En este sentido, la supersimetría puede ser considerada como la simetría suprema, ya que unifica las simetrías del espacio-tiempo con las simetrías internas, los fermiones con los bosones, y la gravedad (en el caso de supersimetría local) con la materia. De hecho, bajo suposiciones bastante generales la supersimetría es la mayor simetría posible de la matriz S. A nivel cuántico, los modelos globalmente supersimétricos exhiben un comportamiento ultravioleta mejorado. En efecto, debido a cancelaciones entre las contribuciones fermiónicas y bosónicas, las divergencias cuadráticas están ausentes; más aún, algunos modelos supersimétricos, en particular las teorías de Yang-Mills máximamente supersimétricas, son los únicos ejemplos conocidos de teorías de campos en cuatro dimensiones que puede mostrarse que son finitas a todos los ordenes en teoría de perturbaciones. Similarmente, las teorías de gravedad localmente supersimétricas (supergravedad) exhiben un comportamiento menos divergente a distancias cortas que las teorías gravitatorias ordinarias (cálculos recientes muestran indicios de que supergravedad $\mathcal{N} = 8$ incluso podría ser finita en el ultravioleta!).

Vale la pena señalar que fuera del marco de las teorías de campos estándar existe una manera alternativa de eliminar las divergencias que aparecen en las teorías cuánticas de campos de gravedad. Ésta es la teoría de cuerdas, que permite unificar las cuatro interacciones fundamentales. Aún en este caso, solo pueden construirse teorías de cuerdas razonables (i.e, aquellas con fermiones y sin inconsistencian cuánticas) una vez que la supersimetría es introducida (las teorías de supercuerdas).

Al momento de escribir esta tesis, 36 años después de su descubrimiento, todavía no hay ninguna evidencia experimental de que la supersimetría sea una simetría de la naturaleza. En este sentido, su desarrollo, que la ha llevado a ocupar actualmente una posición dominante en la física teórica de altas energías, tiene pocos precedentes en la historia de la física (la relatividad general de Einstein, otro ejemplo de un descubrimiento puramente teórico, fue confirmada experimentalmente a los pocos años de su creación).

A pesar de no ser numerosas ni concluyentes, existen varias razones que justifican los esfuerzos dedicados a estudiar la supersimetría. Ellos son: (a) la supersimetría permite una jerarquía estable entre la escala débil y las escalas de distancia más cortas tales como la escala de Planck o la de unificación; (b) la supersimetría provee una manera de entender cómo se rompe la simetría electrodébil $SU(2) \times U(1)$; (c) los acoplamientos de gauge se unifican (con gran aproximación) cuando los compañeros supersimétricos son incluidos en los cálculos; y (d) la supersimetría predice un bosón de Higgs liviano. Incluso si la supersimetría (global o local) no formara parte de la teoría última, es un hecho que se ha transformado en una poderosa herramienta para estudiar la dinámica altamente no trivial de teorías no supersimétricas fuertemente acopladas.

Entendemos por supersimetría (de Poincaré) a la extensión de las simetrías de Poincaré ordinarias que se obtienen al introducir generadores espinoriales Q que no conmutan y cuyo anticonmutador da el generador de traslaciones P. Esta simetría puede ser realizada en términos de campos ordinarios (funciones del espacio-tiempo) mediante transformaciones que mezclan bosones y fermiones.

Tales realizaciones son suficientes para estudiar supersimetría (uno puede escribir acciones invariantes, etc.) pero rápidamente se encuentra que es extremadamente complejo e inconveniente trabajar componente por componente.

Una alternativa útil a este tratamiento en campos componentes es el formalismo de superespacio-supercampos. El superespacio es una extensión del espacio-tiempo ordinario que incluye además coordenadas anticonmutantes. En el superespacio la supersimetría es manifiesta: el álgebra de supersimetría es representada por traslaciones y rotaciones que involucran tanto a las coordenadas ordinarias conmutantes como a las anticonmutantes. Otra de las ventajas del formalismo de supercampos es que ellos incluyen, además de los grados de libertad dinámicos, ciertos campos no físicos, a saber: los campos auxiliares, necesarios para la clausura "off-shell" del álgebra de supersimetría, y los campos compensadores, que aumentan las transformaciones de gauge usuales a un supermultiplete de transformaciones de gauge. Estos últimos son particularmente importantes en la teoría cuántica, ya que permiten realizar una cuantización manifíestamente supersimétrica.

Como adelantamos arriba, la teoría de supercuerdas representa el mejor candidato actual para una teoría cuántica de la gravedad, unificada consistentemente con las otras interacciones fundamentales. Debido a la extrema importancia de entender los diversos aspectos de su dinámica, la teoría de cuerdas ha actuado como disparador para el estudio de distintas ramas de la física teórica y la matemática. Uno de los casos más claros es el de la geometría no conmutativa y, en particular, la teoría de campos no conmutativas.

En realidad, la idea de que a pequeñas escalas de longitud la estructura del espacio-tiempo sea no conmutativa no es nueva en absoluto. De hecho, la posibilidad de que las coordenadas satisfacieran un álgebra no conmutativa del tipo

$$[x^\mu, x^\nu] = x^\mu x^\nu - x^\nu x^\mu = \Theta^{\mu\nu} \tag{1.1}$$

fue sugerida por Heisenberg [1] ya en 1939 como una posible manera de controlar las divergencias infrarrojas presentes en las teorías de campos. Sin embargo las teorías de campos no conmutativas no despertaron gran interés hasta finales de los años 1990, cuando, gracias a los trabajos de Connes, Douglas y Schwarz [2], de Douglas y Hull [3] y de Seiberg y Witten [4], se descubrieron diversos límites de bajas energías de la teoría de cuerdas y de la teoría M, que corresponden a teorías de campos no conmutativas.

La teoría de cuerdas solo es consistente en presencia de supersimetría. En particular, en las formulaciones de Green-Schwarz [5] y de Berkovits [6],[7] la supersimetría del espacio "target" es manifiesta, i.e. la acción del modelo sigma que describe la dinámica de la cuerda tiene como espacio "target" el superespacio 10-dimensional. Ya que la teoría de cuerdas da origen a un álgebra del espacio-tiempo no conmutativa, resulta natural investigar la posibilidad de deformar consistentemente el álgebra de las coordenadas del superespacio.

Varios autores estudiaron la posibilidad de definir tales supergeometrías, independientemente del contexto de teoría de cuerdas (ver por ejemplo [8]-[10]). En la versión euclídea del superespacio $\mathcal{N} =$

1, que está parametrizado por las coordenadas conmutantes (vectoriales) x^μ y las anticonmutantes (espinoriales) θ^α y $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$, es posible deformar de manera consiste el álgebra de las supercoordenadas de manera que las coordenadas quirales satisfagan [11]

$$\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = \theta^\alpha\theta^\beta + \theta^\beta\theta^\alpha = C^{\alpha\beta} \tag{1.2}$$

con $C^{\alpha\beta}$ una matriz simétrica constante (comparar con la deformación no conmutativa dada por el álgebra (1.1)), mientras que las restantes relaciones de (anti)conmutación de las supercoordenadas en la base quiral pueden tomarse a ser las usuales. Los parámetros $C^{\alpha\beta}$ deforman el álgebra de los supercampos sobre el superespacio $\mathcal{N} = 1$. Si tal deformación no(anti)conmutativa es introducida, la supersimetría euclídea $\mathcal{N} = 1$ resulta rota a $\mathcal{N} = 1/2$. La posibilidad de deformar el álgebra de las coordenadas θ^α manteniendo $\{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\} = \{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \theta^\alpha\} = 0$ posibilita definir representaciones de supersimettría quirales, las cuales son imprescindibles para la construcción de teorías de campos supersimétricas.

Las teorías de campos definidas sobre los superespacios deformados $\mathcal{N} = 1/2$ son conocidas como teorías no(anti)conmutativas (NAC) $\mathcal{N} = 1/2$ supersimétricas. Si bien la principal motivación para estudiar estas teorías reside en que ellas aparecen (como veremos debajo) en las teorías de cuerdas como modelos efectivos de bajas energías, las teorías NAC poseen varias propiedades atractivas *perse*. Por ejemplo, fue establecido en [12]-[15] que tanto el modelo de Wess-Zumino $\mathcal{N} = 1/2$ supersimétrico como las teorías de Yang-Mills $\mathcal{N} = 1/2$ supersimétricas heredan la renormalizabilidad de sus parientes no defomados.

Volviendo a la teoría de cuerdas, podríamos preguntarnos si existen configuraciones de cuerdas para las cuales, en el límite de bajas energías, se obtiene una teoría de campos supersimétrica efectiva definida sobre tal superespacio deformado. Esta cuestión fue recientemente resuelta en una serie de trabajos destacables [11],[16]-[18] donde se mostró que en el límite de bajas energías, cuerdas tipo IIB con $D3$-branas compactificadas sobre una variedad 6-dimensional de tipo Calabi-Yau en presencia de un campo de fondo de gravifotón autodual constante $F_{\alpha\beta}$ da lugar a un superespacio NAC deformado que satisface $\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = \alpha^2 F_{\alpha\beta}$. El gravifotón, un compañero supersimétrico del gravitón que se comporta como el fotón, debe ser autodual para evitar modificaciones a la métrica 4-dimensional, que permanece plana. Por otro lado, el gravifotón puede ser tomado autodual solo en signatura euclídea, consistentemente con el hecho de que solo el superespacio euclídeo permite $\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} \neq 0$ con $\{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\} = \{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \theta^\alpha\} = 0$.

Una de las propiedades más importantes de la teorías de campos supersimétricas es la presencia de los llamados sectores BPS (por Bogomol'nyi, Prasad y Sommerfield), que son multipletes supersimétricos caracterizados por ser invariantes frente a una fracción del total de cargas supersimétricas. Las propiedades de estos sectores están protegidas por la supersimetría, en el sentido de que se mantienen válidas en todo el rango de energías. Esto permite obtener resultados exactos a nivel cuántico, incluso en el régimen de acoplamiento fuerte donde la dinámica de la teoría es altamente no trivial.

Los solitones BPS son configuraciones de campos puramente bosónicas que forman parte de un multiplete BPS. Son estáticas, de energá finita y están caracterizadas por invariantes topológicos.

Estas configuraciones BPS-saturadas existen en teorías supersimétricas en las que la superálgebra posee extensiones centrales, las que están relacionadas con los invariantes topológicos. Como consecuencia de esta superálgebra, la energía de la configuración de campo queda acotada inferiormente por la carga central, expresada en términos de la carga topológica del solitón. Las configuraciones de campo que saturan tal cota (llamada cota de Bogomol'nyi [19]) satisfacen ecuaciones de primer orden conocidas como ecuaciones BPS [19],[20], y también las ecuaciones de Euler-Lagrange de segundo orden. Los primeros estudios de solitones BPS (también conocidos como solitones críticos o autoduales) en teorías supersimétricas en acoplamiento débil datan de la década de 1970. Ya en 1976, De Vega y Schaposnik [21] observaron que modelos para los cuales las ecuaciones de movimiento pueden ser reducidas a las ecuaciones BPS son, de hecho, reducciones bosónicas de alguna teoría supersimétrica. En 1977 fueron obtenidas soluciones críticas en el formalismo de supercampos en algunos modelos bidimensionales [22], mientras que en el mismo año fue notado que cancelaciones notables tenían lugar en el cálculo de las correcciones cuánticas para las masas de los solitotes [23],[24]. Estas cancelaciones tenían su origen en la degeneración existente entre modos fermiónicos y bosónicos, lo que resultaba en que su número estuviera balanceado. De hecho, en la mayoría de los casos, tanto la carga topológica como la masa reciben correcciones cuánticas, pero debido a la naturaleza BPS de la configuración, las correcciones son tales que sigue siendo válida la saturación de la cota. Ya que los solitones BPS no interactúan entre sí, se pueden construir soluciones de solitones múltiples, que dependerán de parámetros correspondiendo a la posición de los solitones. Éstos representan, junto con los parámetros de algún posible espacio interno, el conjunto de parámetros conocidos como coordenadas colectivas. El espacio parametrizado por las coordenadas colectivas es un espacio curvo llamado espacio móduli, el cual es una de las herramientas más importantes a la hora de estudiar la dinámica de los solitones BPS.

Existe una gran variedad de solitones BPS-saturados en teorías de campos: paredes de dominio, vórtices (cuerdas), monopolos y diones, y las varias uniones entre los anteriores objetos. En particular, los vórtices se caracterizan por estar presentes en las más diversas ramas de la física. Por un lado, aparecen en el estudio de la materia condensada como tubos de flujo magnético en superconductores y como cuasi-excitaciones fraccionalmente cargadas en fluidos de Hall cuánticos. En el universo, los vórtices, considerados como cuerdas cósmicas, han sido uno de los temas más investigados en cosmología. Finalmente, y más formalmente, los vórtices juegan un rol crucial en la determinación de las fases de sistemas cuánticos de baja dimensionalidad: desde el estudio de deslizamientos en cables superconductores hasta la física de cuerdas que se propagan en variedades de Calabi-Yau, los vórtices son la pieza clave para entender el problema. En el contexto de teorías de campos en 4 dimensiones, los vórtices son objetos tipo cuerda que poseen flujo magnético distribuido alrededor de su eje. Las configuraciones clásicas vórtices fueron primero encontradas por Abrikosov [25] y Nielsen y Olesen [26] en teorías de gauge $U(1)$ acopladas a un campo escalar de Higgs complejo. Dichos vórtices son conocidos actualmente como vórtices ANO y su móduli consta de dos coordenadas colectivas que corresponden a la posición del centro de masa del mismo (en el plano transverso).

En los últimos 5 años se ha efectuado un análisis exhaustivo de un nuevo tipo de soluciones tipo cuerda no abeliana, las cuales aparecen en cierto régimen de teorías de gauge con $\mathcal{N} = 2$ supersimetrías [27]-[30]. La propiedad más importante de estas cuerdas es que ellas adquieren coordenadas colectivas orientacionales asociadas con rotaciones del flujo de color dentro de un subgrupo no abeliano $SU(N)$ del grupo de gauge. La existencia de estas coordenadas colectivas vuelve a estas cuerdas genuinamente no abelianas. Los tubos de flujo en teorías no abelianas en acoplamiento débil fueron estudiadas en numerosos trabajos en el pasado [31]-[38]. Estas cuerdas son conocidas como cuerdas Z_N debido a que ellas están relacionadas al dentro del grupo de gauge $SU(N)$. Consideremos, por ejemplo, la teoría de gauge $SU(N)$ con campos escalares en la representación adjunta. Si suponemos que los campos escalares condensan de tal manera que el grupo de gauge $SU(N)$ es roto a su centro Z_N, luego las soluciones de cuerdas resultan clasificadas de acuerdo a $\pi_1(SU(N)/Z_N) = Z_N$. En todas las construcciones previas de las cuerdas Z_N el flujo estaba siempre dirigido en una dirección fija del grupo (correspondiendo a la subálgebra de Cartan), y en ningún caso aparecía un móduli que permitiera a la cuerda rotar libremente su orientación. Una de las características más importante de las cuerdas no abelianas es que ellas llevan naturalmente al confinamiento de monopolos no abelianos. Así, las cuerdas no abelianas pueden ser utilizadas para mostrar cómo los monopolos magnéticos son fuentes (sumideros) en los cuales los tubos de flujo magnético comienzan (finalizan).

Como señalamos en el inicio de esta introducción, la presente tesis se inscribe en el marco de las teorías de campos supersimétricas, enfocándose principalmente en dos aspectos de las mismas, que fueron descriptos en los parrafos precedentes y que han despertado gran interés en los últimos años. El primero de ellos es el estudio de los superespacios no(anti)conmutativos y las teorías $\mathcal{N} = \frac{1}{2}$ supersimétricas definidas sobre éstos; en cuanto que el segundo es la busqueda de solitones BPS del tipo cuerda no abeliana y el análisis de sus propiedades. En consecuencia, en esta tesis se presentan resultados originales, producto de nuestra investigación, que cubren varios de los problemas abiertos, tanto en el contexto de teorías NAC como en el caso de vórtices no abelianos.

Más en detalle, comenzamos desarrollando en el capítulo 2 una introducción a la supersimetría. En primer lugar, presentamos el álgebra de supersimetría y de las correspondientes representaciones irreducibles realizadas por estados de una partícula. Seguidamente extendemos dicho análisis al caso de superálgebras que poseen extensiones centrales, lo que nos permitirá introducir los importantes conceptos de estados BPS y multipletes reducidos (o acortados). A continuación presentamos el formalismo de superspacio y supercampos para el caso de supersimetría $\mathcal{N} = 1$ y definimos las representaciones irreducibles correpondiendo a los supercampos quiral y vectorial. En base a estos supercampos construimos lagrangianos $\mathcal{N} = 1$ supersimétricos interactuantes invariantes de gauge. Finalizamos el capítulo mostrando la relación entre la cota de Bogomol'nyi y el álgebra de supersimetría centralmente extendida. Para ello hacemos uso de un ejemplo simple dado por las configuraciones BPS de tipo pared de dominio que aparecen en el modelo de Wess-Zumino $\mathcal{N} = 1$.

El capítulo 3 está dedicado a presentar detalladamente la deformación no(anti)conmutativa del superespacio $\mathcal{N} = 1$. Comenzamos el capítulo dando una breve introducción a la geometría no conmutativa y mostrando como un espacio conmutativo pueden ser deformado a otro no conmutativo mediante el uso de un producto estrella (o Moyal) para la multiplicación de las funciones definidas en dicho espacio. Procediendo de esta manera encontramos la deformación NAC más simple del superespacio $\mathcal{N} = 1$ definido en el capítulo 2. Este superespacio, conocido como superespacio $\mathcal{N} = \frac{1}{2}$, es tal que el álgebra de las coordenadas espinoriales θ^α resulta deformada a la forma (1.2) con $C^{\alpha\beta}$ constante, mientras que las restantes supercoordenadas (en la base quiral) permanecen (anti)conmutativas. Definiendo los supercampos quiral y vectorial, construimos la teoría de super Yang-Mills $\mathcal{N}=\frac{1}{2}$ supersimétrica. Culminamos el capítulo mostrando cómo esta deformación del superespacio aparece naturalmente en el contexto de teoría de cuerdas, más precisamete, sobre el supervolumen de mundo de una $D3$-brana en presencia de un campo de fondo de gravifotón autodual constante.

En el capítulo 4 estudiamos la posibilidad de extender el análisis del capítulo 3 al caso en el que el parámetro de la deformación es una función de las coordenadas espacio-temporales. Los resultados presentados en este capítulo constituyen los primeros aportes originales descriptos en esta tesis y se hallan parcialmente expuestos en las publicaciones [39],[40]. Para comenzar estudiamos el problema desde el punto de vista de teorías de campos [39]. Mostramos cómo deformar el superespacio y encontramos que en este caso el superespacio correspondiente también es $\mathcal{N}=\frac{1}{2}$ supersimétrico. Luego vemos cómo definir supercampos quiral y vectorial y estudiamos bajo qué condiciones se puede construir consistentemente teorías de super Yang Mills deformadas. A continuación construimos la versión supersimétrica de QCD en el superespacio deformado y analizamos algunas de sus propiedades. Culminamos el capítulo investigando la posibilidad de obtener deformaciones NAC dependientes de las posición en el marco de la teoría de cuerdas [40]. Considerando campos de fondo más generales que en el capítulo anterior, encontramos que el superespacio deformado postulado al principio del capítulo aparece sobre la $D3$-brana cuando el gravifotón pertenece a cierta familia de campos de fondo lineales.

En el capítulo 5 estudiamos teorías de Mecánica Cuántica supersimétricas definidas sobre el superespacio no(anti)conmutativo $d=1$ $\mathcal{N}=\frac{2}{2}$. La simplicidad de las teorías de Mecánica Cuántica (en comparación con las teorías de campos) permite investigar una cuestión de gran relevancia para las teorías NAC, como es la de saber cuál es la cantidad real de supercargar rotas por la deformación. Comenzamos analizando los tipos posibles de deformaciones del superespacio $d=1$ $\mathcal{N}=2$ y las consecuencias de esta deformación sobre el lagrangiano de la teoría. El análisis canónico clásico de la teoría nos lleva a encontrar que el modelo posee (a nivel clásico) tantas supesimetrías conservadas como la teoría original (no deformada). Finalmente, hacemos el correspondiente análisis cuántico del problema mediante el uso del índice de Witten. Dicho análisis permite llegar a la curiosa conclusión de que las supercargas de la teoría NAC permanecen conservadas en aquellos casos en los que el modelo no deformado no tiene a la supersimetría espontáneamente rota. Estos resultados constituyen otros de los aportes originales de la tesis y son, en parte, presentados en la publicación [41].

El capítulo 6 tiene como fin presentar el contexto en el cual aparecen las configuraciones BPS del tipo cuerda no abeliana e introducir los elementos necesarios para su estudio. Para ello exponemos una de las principales aplicaciones que tiene este tipo de cuerda, la cual es su empleo para mostrar la presencia del efecto Meissner no abeliano y el confinamiento de monopolos no abelianos en ciertas teorías con $\mathcal{N}=2$ supersimetrías, grupo de gauge $U(N)$ y N sabores. Esto puede hacerse mediante el estudio de la teoría efectiva que describe la dinámica de bajas energías de la cuerda no abeliana, que consiste en un modelo sigma $\mathbf{CP}^{N-1}$ definido sobre la hoja de mundo de la cuerda. De esta manera, es posible seguir la evolución del monopolo de 't Hooft-Polyakov en el "medio" de

Higgs, desde un estado de monopolos libres, a través de un régimen débilmente confinado, hasta un régimen altamente cuántico en el cual los monopolos confinados se manifientan como kinks en la teoría efectiva sobre la hoja de mundo de la cuerda.

El capítulo 7 está destinado a estudiar soluciones tipo vórtice no abeliano en teorías de Chern-Simons. Para obtener tales configuraciones consideramos una teoría de Chern-Simons-Higgs en $d = 2 + 1$ con $\mathcal{N} = 2$ supersimetrías, grupo de gauge $U(N)$ y N campos escalares de Higgs en la representación fundamental. Para este modelo obtenemos el patrón de rotura de simetría y mostramos que en el vacío asimétrico un grupo global $SU(N)$ de sabor-color permanece no roto. Utilizando el método de Bogomol'nyi obtenemos las ecuaciones de auto-dualidad y encontramos soluciones para las misma en el sector topológico mediante un ansatz rotacionalmente simétrico. Estas soluciones son $\frac{1}{2}$-BPS saturadas y poseen un carácter verdaderamente no abeliano debido a la presencia de un conjunto de coordenadas colectivas orientacionales. Seguidamente hallamos la teoría de bajas energías sobre la línea de mundo que describe la dinámica del móduli. Dicha teoría resulta ser el modelo sigma unidimensional $\mathbf{CP}^{N-1}$ $\mathcal{N} = 2$ supersimétrico. Finalmente, analizamos la mecánica cuántica de la teoría efectiva en el caso $N = 2$. El estudio aquí presentado, basado en nuestra publicación [42], constituye otro de los resultados originales de esta tesis.

En el capítulo 8 buscamos teorías de Einstein-Yang-Mills-Higgs que admitan soluciones de cuerdas no abelianas auto-gravitante, tanto locales como semilocales. Ya que estamos interesados en soluciones autoduales, nos interesará encontrar el límite Bogomol'nyi de dichas teorías. Comenzamos el capítulo presentando el modelo 4-dimensional de Einstein-Yang-Mills-Higgs con grupo de gauge $U(1)SU(N_c)$, N_s sabores y un potencial de Higgs arbitrario. Seguidamente mostramos que la elección de un ansatz adecuado para la métrica y cierta forma cuártica para el potencial de Higgs permite reducir las complicadas ecuaciones de movimiento a un conjunto de ecuaciones (de Bogomol'nyi) de primer orden. Utilizando un ansatz similar al de los capítulos precedentes encontramos cuerdas no abelianas locales auto-gravitantes cuando $N_c = N_s$, las cuales poseen un móduli orientacional. Una pequeña variación del ansatz anterior nos permite generalizar el análisis anterior al caso $N_c < N_f$, lo que nos lleva a obtener cuerdas no abelianas semilocales. Estas cuerdas, admás del móduli orientacional, poseen nuevas coordenadas colectivas relacionadas a variaciones del tamaño transverso. Seguidamente estudiamos la teoría efectiva de bajas energías del móduli, tanto en el caso local como en el semilocal. Para cuerdas locales encontramos que el la teoría efectiva es un modelo sigma bidimensional $\mathbf{CP}^{N-1}$, al igual que en espacio-tiempo plano. Por otro lado, para cuerdas semilocales mostramos que, en el límite de tamaño transverso grande, exiten tres tipos diferentes de teorías de bajas energías, dependiendo de cuán fuerte es el acoplamiento gravitacional. Curiosamente, encontramos que, contrario a lo que pasa en espacio-tiempo plano, todos las coordenadas del móduli son normalizables. Lo expuesto en este capítulo se basa en nuestra publicación [43] y forma parte de los trabajos originales de esta tesis.

Finalmente, en las conclusiones analizamos en conjunto los resultados obtenidos en los capítulos 4, 5, 7 y 8, y discutimos posibles extensiones y aplicaciones futuras de ellos.

Capítulo 2

Introducción a la Supersimetría

En este capítulo presentaremos una introducción a la supersimetría. En primer lugar definiremos el álgebra de supersimetría y obtendremos las correspondientes representaciones irreducibles para estados asintóticos de una partícula para $\mathcal{N} = 1$ supersimetrías. Posteriormente extenderemos dicho análisis al caso de superálgebras centralmente extendidas. Esto nos permitirá arribar al importante concepto de saturación BPS, que será ampliamente utilizado en capítulos posteriores. A continuación expondremos el formalismo de superespacio-supercampos, nuevamente para el caso de supersimetría $\mathcal{N} = 1$. Definiremos las representaciones irreducibles dadas por los supercampos quiral y vectorial, a través de las cuales construiremos lagrandianos $\mathcal{N} = 1$ supersimétricos invariantes de gauge. Finalmente, retomaremos el concepto de estados BPS-saturados dentro del contexto de teorías de campos, mostrando como se relaciona la conservación de parte de las cargas supersimétricas con las ecuaciones de Bogomol'nyi de primer orden. Para ello utilizaremos un sencillo ejemplo proporcionado por paredes de dominio BPS-saturadas presentes en teorías de Wess-Zumino $\mathcal{N} = 1$.

2.1. Álgebra de Supersimetría

A principios de la década de 1960, la simetría $SU(3)$ de Gell-Mann y Ne'eman explicaba exitosamente las relaciones entre las varias partículas de diferente carga y extrañeza pero de igual spin que interactuaban a través de la fuerza fuerte [44]. De manera natural nació así la idea de que $SU(3)$ quizás fuera parte de una simetría mayor, que tuviera el efecto poco convencional de unir multipletes de $SU(3)$ de diferente spin. Sin embargo, la búsqueda de una simetría que combine de manera no trivial el grupo de Poincaré con un grupo de simetría interno resultó fallida. De hecho, varios autores mostraron, en distinto grado de generalidad, que esta simetría no existe. El teorema de no existencia ("no-go") más general en este sentido fue demostrado en 1967 por Coleman y Mandula [45]. Los autores se basaron en suposiciones razonables y generales como: (1) la existencia de un número finito de tipos de partículas con masa menor a cualquier masa dada, (2) la existencia de scattering para casi todas las energías y (3) la analiticidad de la matriz S. A partir de estos supuestos, mostraron que el álgebra de Lie más general de operadores de simetría que: (1) conmutan con la matriz S, (2) mapean estados de una partícula a estados de una partícula y (3) actúan sobre estados de multi-partículas como la suma directa de su acción sobre estados de una partícula, consiste de los generadores P_μ y $J_{\mu\nu}$ del grupo de Poincaré P, que satisfacen las relaciones

$$
\begin{aligned}
&[P_\mu, P_\nu] = 0 \\
&[P_\mu, J_{\nu\rho}] = i(\eta_{\mu\nu} P_\rho - \eta_{\mu\rho} P_\nu) \\
&[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i(-\eta_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma} J_{\mu\rho} + \eta_{\mu\sigma} J_{\nu\rho} + \eta_{\nu\rho} J_{\mu\sigma}),
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

junto con generadores T_s de un grupo de simetría interna G que satisfacen el álgebra de un grupo de Lie

$$[T_r, T_s] = i f_{rst} T_t \tag{2.2}$$

y que deben ser independientes del y diagonales en momento y spin, o sea,

$$[P_\mu, T_r] = 0 = [J_{\mu\nu}, T_r] \tag{2.3}$$

Además, mostraron que G debe ser de la forma de un grupo semi-simple con factores $U(1)$ adicionales.

Unos pocos años después, en 1971, Golfand y Likhtman [46] encontraron una manera posible de evadir el teorema de Coleman-Mandula. Más precisamente, el teorema asume que el álgebra de simetrías de la matriz S involucra solo conmutadores. Así, si se debilitara esta condición de modo que el álgebra de los generadores de simetría incorpore no solo conmutadores sino también anticonmutadores, podría tenerse una simetría que incluya al grupo de Poincaré y a un grupo de simetría interna en una manera no trivial. De hecho, esta generalización del concepto de álgebra de Lie, conocida como álgebra de Lie gradada o superálgebra, llevó a encontrar el grupo de supersimetría. La supersimetría aparece entonces como resultado de considerar generadores de simetría Q^A que satisfacen

$$\{Q^A, Q^B\} = Q^A Q^B + Q^B Q^A = \text{algún otro generador} \tag{2.4}$$

Finalmente, Haag, Lopuszanski y Sohnius [47] generalizaron en 1975 el teorema de Coleman-Mandula al caso de álgebras gradadas y probaron que la supersimetría es la única simetría adicional de la matriz S permitida por este conjunto más débil de hipótesis. De este trabajo se deriva que el conjunto de simetrías más general que admite la matriz S viene dada por los generadores "bosónicos" P_μ, $J_{\mu\nu}$ y T_r, que satisfacen reglas de conmutacion, y por generadores "fermiónicos" Q_α^A y su hermítico conjugado $\bar{Q}_{\dot{\alpha}A}$ ($\alpha, \dot{\alpha} = 1, 2$ denotan las 2 componentes de los spinores de Weyl en $d = 3+1$), que satisfacen reglas de anticonmutación. Las supercargas Q_α^A y $\bar{Q}_{\dot{\alpha}A}$ transforman respectivamente en las representaciones spinoriales del grupo de Lorentz $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(0, \frac{1}{2})$, mientras que el índice capital $A, B, ... = 1, ..., \mathcal{N}$ da cuenta del número de supersimetrías.[1] En suma, el álgebra de simetrías más general de la matriz S resulta ser el álgebra de supersimetría, el cual consiste

[1] Por convención, los índices $A, B, ...$ se colocan abajo en spinores en la representación $(0, \frac{1}{2})$.

de las relaciones (2.1)-(2.3), más aquellas incluyendo a las cargas supersimétricas, que toman la forma[2]

$$
\begin{aligned}
&\{Q^A_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}B}\} = 2\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} P_\mu \delta^A_B \\
&\{Q^A_\alpha, Q^B_\beta\} = 0 \\
&\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}A}, \bar{Q}_{\dot{\beta}B}\} = 0 \\
&[Q^A_\alpha, P_\mu] = [\bar{Q}_{\dot{\alpha}A}, P_\mu] = 0 \\
&[Q^A_\alpha, J_{\mu\nu}] = (\sigma_{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta} Q^A_\beta \\
&[\bar{Q}^{\dot{\alpha}}_A, J_{\mu\nu}] = (\bar{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}_{\ \dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}}_A \\
&[Q^A_\alpha, T_r] = S^A_{rB} Q^B_\alpha \\
&[\bar{Q}_{\dot{\alpha}A}, T_r] = -S^{*\ B}_{rA} \bar{Q}_{\dot{\alpha}B}
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

2.2. Representaciones Irreducibles de la Supersimetría

Antes de discutir las teorías de campos supersimétricas, es instructivo considerar las representaciones irreducibles del álgebra supersimétrica que puedan ser realizadas por estados de una partícula. De esta manera podremos conocer cuál es el contenido posible de partículas de una teoría supersimétrica.

Comencemos primero probando dos resultados distintivos de cualquier teoría supersimétrica. El primero reside en el hecho de que cada representación del álgebra de supersimetría contiene igual número de estados bosónicos y fermiónicos. Para demostrar ésto, definamos el operador número fermiónico N_F, tal que $(-)^{N_F}$ tiene autovalor $+1$ para estados bosónicos y -1 para estados fermiónicos. En consecuencia,

$$(-)^{N_F} Q^A_\alpha = -Q^A_\alpha (-)^{N_F} \tag{2.8}$$

Para cualquier representación finito-dimensional (de manera que la traza esté bien definida), tenemos que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}[(-)^{N_F}\{Q^A_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}B}\}] &= \mathrm{Tr}[(-)^{N_F}(Q^A_\alpha \bar{Q}_{\dot{\alpha}B} + \bar{Q}_{\dot{\alpha}B} Q^A_\alpha)] = \\
&= \mathrm{Tr}[-Q^A_\alpha(-)^{N_F}\bar{Q}_{\dot{\alpha}B} + Q^A_\alpha(-)^{N_F}\bar{Q}_{\dot{\alpha}B})] = 0
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

[2] Las matrices σ^μ y $\bar{\sigma}^\mu$ se obtienen a partir de la realización de las matrices γ de Dirac en la base de Weyl,

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Por su parte, los generadores del grupo de Lorentz en la representación espinorial vienen definidos por

$$
\begin{aligned}
(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta} &= \frac{1}{4}(\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{\nu\dot{\alpha}\beta} - \sigma^\nu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta}) \\
(\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}_{\ \dot{\beta}} &= \frac{1}{4}(\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha}\sigma^\nu_{\alpha\dot{\beta}} - \bar{\sigma}^{\nu\dot{\alpha}\alpha}\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}})
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

donde hemos usado (2.8) y la ciclicidad de la traza. Dado que del álgebra de supersimetría

$$\{Q^A_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}B}\} = 2\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} P_\mu \delta^A_B, \tag{2.10}$$

luego

$$\mathrm{Tr}[(-)^{N_F} P_\mu] = 0. \tag{2.11}$$

Para un dado valor fijo de P_μ no nulo, debemos concluir que $\mathrm{Tr}(-)^{N_F} = 0$, lo que prueba que las representaciones de supersimetría contienen igual número de estados bosónicos y fermiónicos.

El segundo resultado consiste en la positividad de la energía de los estados de teorías supersimétricas. De la relación (2.10) y la identidad $\mathrm{tr}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu) = -2\eta^{\mu\nu}$, obtenemos que

$$\bar{\sigma}^{\alpha\dot{\alpha}}_\mu \{Q^A_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}B}\} = -4P_\mu \delta^A_B, \tag{2.12}$$

Luego el valor medio del operador $H = P_0$ puede escribirse como

$$\begin{aligned} 4\langle\psi|H|\psi\rangle &= \langle\psi|Q^A_1 \bar{Q}_{\dot{1}A} + \bar{Q}_{\dot{1}A} Q^A_1 + Q^A_2 \bar{Q}_{\dot{2}A} + \bar{Q}_{\dot{2}A} Q^A_2|\psi\rangle \qquad \text{(sin suma sobre } A) \\ &= \sum_{\alpha=1,2} (|Q^A_\alpha|\psi\rangle|^2 + |(Q^A_\alpha)^*|\psi\rangle|^2) \qquad A = 1, ..., \mathcal{N} \end{aligned} \tag{2.13}$$

donde hemos usado que $(Q^A_\alpha)^* = \bar{Q}_{\dot{\alpha}A}$ y que $\bar{\sigma}_0 = -1$. De requirir que la norma de los estados físicos sea definida positiva y que se anule sólo si el vector es el vector nulo, podemos concluir que el valor medio de H será siempre mayor o igual a cero para cualquier estado. Además, vemos que el vacío tendrá energía nula si y solo si es aniquilado por todas las cargas supersimétricas o, en otras palabras, es condición necesaria y suficiente para que la supersimetría no esté rota que el vacío tenga energía nula.

Ahora sí nos ocuparemos de caracterizar las representaciones irreducibles para estados asintóticos de una partícula. Por simplicidad nos limitaremos al caso $\mathcal{N} = 1$, siendo trivial la generalización al caso de supersimetría extendida.

Como es bien sabido, las representaciones irreducibles del grupo de Poincaré pueden obtenerse a través del método de Wigner de las representaciones inducidas [48]. Este método consiste en encontrar una representación de un subgrupo del grupo de Poincaré P y luego “boostear” ésta a una representación del grupo completo. En la práctica se adopta la siguiente receta: se elige un momento q_μ el cual satisface $q_\mu q^\mu = 0$ o $q_\mu q^\mu = m^2$ dependiendo del caso en consideración (recordar que supersimetría no admite estados taquiónicos). Posteriormente se busca el subgrupo H que deja q_μ intacto y una representación de H sobre los estados $|q_\mu\rangle$. Finalmente inducimos esta representación al grupo de Poincaré P completo de la manera usual. Este procedimiento también es aplicable al grupo de supersimetría y de hecho lleva a obtener todas las representaciones del grupo de super-Poincaré.

El álgebra de super-Poincaré $\mathcal{N} = 1$ posee dos operadores de Casimir. Dado que las supercargas $Q, \bar{Q}$ conmutan con el operador cuadrimomento P_μ, $P^2 = P_\mu P^\mu$ es un Casimir para el álgebra de super-Poincaré. Luego, todos los estados en una representación dada tienen la misma masa. El nuevo Casimir que reemplaza al cuadrado del vector de Pauli-Ljubanskí W_μ es $C^2 = C_{\mu\nu} C^{\mu\nu}$,

donde

$$
\begin{aligned}
C_{\mu\nu} &= B_\mu P_\nu - B_\nu P_\mu, \\
B_\mu &= W_\mu - \frac{1}{4}\bar{Q}_{\dot\alpha}\bar\sigma_\mu^{\dot\alpha\alpha}Q_\alpha, \\
W_\mu &= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\nu J^{\rho\sigma}
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

2.2.1. Estados No Masivos

Consideremos primero el caso no masivo $q_\mu q^\mu = 0$, para el cual elegimos el momento estándar $q_s^\mu = (m, 0, 0, m)$ para nuestro “sistema en reposo”. El subgrupo H que deja q_s^μ invariante claramente debe contener a $Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot\alpha}, P_\mu$ y T_r, ya que todos estos generadores conmutan con P_μ.

La acción del generador del grupo de Lorentz $\frac{1}{2}\Lambda^{\mu\nu}J_{\mu\nu}$ produce una transformación infinitesimal $q^\mu \to q^\mu + \Lambda^\mu{}_\nu q^\nu$. Luego, q_s^μ queda invariante para parámetros que satisfacen

$$
\Lambda_{30} = 0, \quad \Lambda_{10} + \Lambda_{13} = 0, \quad \Lambda_{20} + \Lambda_{23} = 0. \tag{2.15}
$$

Así, los generadores de Lorentz en H son

$$
T_1 = J_{10} + J_{13}, \quad T_2 = J_{20} + J_{23}, \quad J = J_{12}. \tag{2.16}
$$

Estos generadores satisfacen el álgebra de Lie de E_2, el grupo de traslaciones y rotaciones en un plano bidimensional, o sea

$$
\begin{aligned}
&[T_1, J] = -T_2 \\
&[T_2, J] = T_1 \\
&[T_1, T_2] = 0
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

Ya que todas las representaciones unitarias no triviales de grupos no compactos son infinito-dimensionales, requerir que la representación de H buscada sea de dimensión finita lleva a que

$$
T_1|q_s^\mu\rangle = T_2|q_s^\mu\rangle = 0 \tag{2.18}
$$

Luego, para el grupo de Poincaré, en el caso de partículas no masivas, encontrar representaciones de H se reduce a encontrar una representación del generador J. De hecho, J es el operador helicidad, i.e. $J = \vec{q}.\vec{J}/|\vec{q}|$ evaluado en $\vec{q} = (0, 0, m)$ donde $J_i = \epsilon_{ijk}J_{jk}$. De esta manera, elegimos a nuestros estados tal que

$$
J|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle \tag{2.19}
$$

con λ entero o semi-entero.

Veamos ahora cómo actúan las supercargas $Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot\alpha}$ sobre los estados $|q_s^\mu\rangle$. El álgebra de estas cargas sobre estados no masivos en reposo toma la forma

$$
\begin{aligned}
&\{Q^\alpha, \bar{Q}^{\dot\alpha}\} = 2\sigma_\mu^{\alpha\dot\alpha}q_s^\mu = 4m\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\alpha\dot\alpha}, \\
&\{Q^\alpha, Q^\beta\} = \{\bar{Q}^{\dot\alpha}, \bar{Q}^{\dot\beta}\} = 0
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

De la anterior ecuación es fácil ver que Q_2 y $\bar{Q}_{\dot{2}}$ también actúan trivialmente sobre los estados $|q_s^\mu\rangle$. Esto es,

$$\langle q_s^\mu|Q^1\bar{Q}^{\dot{1}} + \bar{Q}^{\dot{1}}Q^1|q_s^\mu\rangle = |Q^1|q_s^\mu\rangle|^2 + |\bar{Q}^{\dot{1}}|q_s^\mu\rangle|^2 = 0 \Longrightarrow Q_2|q_s^\mu\rangle = \bar{Q}_{\dot{2}}|q_s^\mu\rangle = 0 \tag{2.21}$$

Por otro lado, del álgebra de supersimetría ec.(2.7) encontramos que

$$\begin{aligned}
[Q_1, J] &= \frac{1}{2}(\sigma_{12})_1^{\ 1}Q_1 = -\frac{i}{2}Q_1 \\
[(Q_1)^*, J] &= +\frac{i}{2}(Q_1)^*
\end{aligned} \tag{2.22}$$

De las anteriores relaciones de conmutación queda claro que Q_1 y $(Q_1)^*$ forman un algebra de Clifford, y que actúan como operadores de subida y de bajada para el operador helicidad J. Las representaciones de este álgebra se obtienen de la forma usual. Elegimos un estado de una dada helicidad e imponemos que sea un estado de vaco del operador $(Q_1)^*$, i.e.

$$(Q_1)^*|\lambda\rangle = 0, \qquad J|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle \tag{2.23}$$

Luego las representaciones irreducibles de supersimetría $\mathcal{N} = 1$ comprenden sólo dos estados.

$$\begin{aligned}
&|\lambda\rangle \\
&|\lambda - \frac{1}{2}\rangle = Q_1|\lambda\rangle
\end{aligned} \tag{2.24}$$

con helicidades λ y $\lambda - \frac{1}{2}$.

Para obtener una teoría CPT-invariante debemos agregar estados de helicidad opuesta, i.e. $-\lambda$ y $-\lambda + \frac{1}{2}$. Las más comunes de estas representaciones corresponden a helicidades $\lambda = \frac{1}{2}, 1, 2$ (junto con sus representaciones CPT-conjugadas) El supermultiplete $\lambda = \frac{1}{2}$ consiste de un spinor de Weyl con helicidad 1/2 y una partícula escalar. Para construir la teoría de campos invariante de Lorentz es necesario también incluir la representación CPT-conjugada, que posee un fermión de Weyl con helicidad $-1/2$ y otro escalar. Juntas, estas dos representaciones forman un fermión de Majorana y un campo escalar complejo. Estos "supermultipletes quirales" aparecen en aplicaciones en las que se consideran campos de materia (quarks y leptones), como así también para campos de Higgs. Los compañeros escalares de los quarks son llamados "squarks", y los compañeros escalares de los leptones, "sleptones". Por su parte, los compañeros fermiónicos de las partículas de Higgs son usualmente llamados "Higgsinos". El bosón en la representación $\lambda = 1$ tiene helicidad 1, por lo que junto con su conjugado CPT, el cual tiene helicidad -1, describen una partícula vectorial no masiva, la clase de partículas que aparecen en teorías invariantes de gauge. Los supermultipletes $\lambda = 1$ son luego llamados "supermultipletes vectoriales". Los compañeros fermiónicos de las partículas de gauge (que tienen helicidad $\lambda = \pm\frac{1}{2}$) son llamados "gauginos"en general, y "fotinos", "Winos", "Zinos" y "gluinos" en particular. Evidéntemente, la representación $\lambda = 1$ y su CPT-conjugada constituyen un campo (de gauge) vectorial y un campo (gaugino) de Majorana. De la misma manera, la partícula de helicidad $\pm\frac{3}{2}$, la cual es la compañera del gravitón de helicidad ± 2 que media las interacciones gravitacionales, es llamado "gravitino".

2.2.2. Estados Masivos

Consideremos ahora las representaciones irreducibles masivas del álgebra de supersimetría $\mathcal{N} = 1$. Tomamos el momento estándar en el "sistema en reposo" a ser

$$q_s^\mu = (m, 0, 0, 0) \tag{2.25}$$

El correspondiente grupo H es

$$P^\mu, \quad Q^\alpha, \quad \bar{Q}^{\dot{\alpha}}, \quad T^r, \quad J_i = 1/2\epsilon_{ijk}J^{jk} \tag{2.26}$$

Ya que los generadores J_i satisfacen el álgebra de $SU(2)$, podemos considerar a los estados $|q_s^\mu\rangle$ como autoestados de $J^2 = J_iJ_i$ y J_3. Es decir, $|q_s^\mu\rangle = |m, j, j_3\rangle$ y

$$\begin{aligned} J^2|m, j, j_3\rangle &= j(j+1)|m, j, j_3\rangle, \\ J_3|m, j, j_3\rangle &= j_3|m, j, j_3\rangle, \end{aligned} \tag{2.27}$$

con j entero o semi-entero y j_3 tomando valores $-j, ..., j$.

Por otro lado, cuando actúan sobre estados $|q_s^\mu\rangle$, las supercargas obedecen el álgebra

$$\begin{aligned} &\{Q_\alpha, (Q_\beta)^*\} = 2\delta_{\alpha\beta}m \\ &\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Encontramos así que, a diferencia del caso no masivo, ninguna de las supercargas es realizada trivialmente y, por lo tanto, el álgebra de Clifford que ellas forman tiene cuatro elementos. Podemos hallar la única representación irreducible de este álgebra de la manera usual. Si definimos un vacío de Clifford

$$Q_\alpha|q_s^\mu\rangle = 0, \qquad \alpha = 1, 2 \tag{2.29}$$

la representación resulta formada por los estados

$$|q_s^\mu\rangle, \quad \bar{Q}_{\dot{1}}|q_s^\mu\rangle, \quad \bar{Q}_{\dot{2}}|q_s^\mu\rangle, \quad \bar{Q}_{\dot{1}}\bar{Q}_{\dot{2}}|q_s^\mu\rangle \tag{2.30}$$

Para determinar los números cuánticos de momento angular de estos estados usamos nuevamente el álgebra de supersimetría ec.(2.7), del que se obtienen las relaciones

$$\begin{aligned} &[J_3, \bar{Q}_{\dot{1}}] = -\frac{1}{2}\bar{Q}_{\dot{1}} \\ &[J_3, \bar{Q}_{\dot{2}}] = +\frac{1}{2}\bar{Q}_{\dot{2}} \\ &[J_1 + iJ_2, \bar{Q}_{\dot{1}}] = 0 = [J_1 - iJ_2, \bar{Q}_{\dot{2}}] \end{aligned} \tag{2.31}$$

Así, si comenzamos por ejemplo con un estado original con spin cero $|m, j = 0, j_3 = 0\rangle$, es fácil ver que los dos estados

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2m}}\bar{Q}_{\dot{1}}|m, 0, 0\rangle = |m, 1/2, 1/2\rangle \\ &\frac{1}{\sqrt{2m}}\bar{Q}_{\dot{2}}|m, 0, 0\rangle = |m, 1/2, -1/2\rangle \end{aligned} \tag{2.32}$$

forman un doblete de spin 1/2. Por su parte, el otro estado independiente de este sistema es

$$\frac{1}{2m}\bar{Q}_{\dot{2}}\bar{Q}_{\dot{1}}|m,0,0\rangle = |m,0,0\rangle' \tag{2.33}$$

La prima es para distinguir a éste del estado original, que tiene los mismos números cuánticos. Así, en este caso tenemos dos estados de spin 0 y un doblete de spin 1/2, y

$$n_B = n_F = 2 \tag{2.34}$$

En general, si empezamos con un multiplete de spin $j > 0$ de $(2j+1)$ componentes, generamos un multiplete de spin $(j+1/2)$, un multiplete de spin $(j-1/2)$ y dos multipletes de spin j. Así, la representación masiva general tiene

$$n_B = n_F = 2(2j+1) \tag{2.35}$$

2.3. Cargas Centrales I

2.3.1. Cargas Centrales en Superálgebras

Como mencionamos anteriormente, la primera superálgebra en teorías de campos 4-dimensionales fue obtenida por Golfand y Likhtman [46] en la forma

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}P_\mu \qquad \{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0, \tag{2.36}$$

i.e. sin cargas centrales (elementos de la superálgebra que conmutan con todos los otros generadores). La posible ocurrencia de cargas centrales fue mencionada primero en un paper no publicado de Lopuszanski y Sohnius [49], donde los dos últimos anticonmutadores eran modificados a

$$\{Q^A_\alpha, Q^B_\beta\} = 2\epsilon_{\alpha\beta}Z^{AB} \qquad \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}A}, \bar{Q}_{\dot{\beta}B}\} = -2\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}Z^*_{AB} \tag{2.37}$$

donde los indices A, B denotan supersimetría extendida. Un análisis más completo de las superálgebras que contienen cargas centrales fue realizado en [47], aunque siempre limitándose al caso de cargas centrales escalares de Lorentz, relevantes sólo en el caso de supersimetría extendida.

Unos pocos años más tarde, Witten y Olive [50] encontraron un resultado sorprendente, quizás el de mayor importancia en lo que a cargas centrales en supersimetría se refiere. Mostraron que en teorías supersimétricas que admiten solitones, las extensiones centrales son típicas; siendo los números topológicos de los solitones los que juegan el rol de cargas centrales. Ello permitió finalmente comprender la relación existente entre la supersimetría y cierto tipo de solitones que satisfacen ecuaciones de primer orden, conocidas como ecuaciones de Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (ecuaciones BPS) [19],[20]. Hacia el final del presente capítulo volveremos a este importante aspecto de las teorías supersimétricas, analizándolo en profundidad a través de ejemplos.

Retomando la construcción de superálgebras, la extensión ec.(2.37) todavía no da la superálgebra más general. De hecho, es sabido desde principios de los '80 [51] que pueden obtenerse superálgebras más generales si se consideran cargas solo conmutantes con el subgrupo de supertraslaciones, esto es, cargas centrales que posean la estructura de Lorentz de vectores y tensores de Lorentz. Sin embargo, el rol dinámico de estas cargas no fue reconocido hasta finales de los '90, cuando se encontró que son relevantes para objetos extendidos del tipo paredes de dominio (o también en presencia de p-branas en el contexto de supergravedad).

Así, la extensión más general de la superálgebra toma la forma

$$
\begin{aligned}
\{Q^A_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}B}\} &= 2\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}(P_\mu \delta^A_B + Z^A_{\mu B}) \quad (Z^A_{\mu A} = 0) \\
\{Q^A_\alpha, Q^B_\beta\} &= 2(\epsilon_{\alpha\beta} Z^{[AB]} + \sigma^{\mu\nu}_{\alpha\beta} Z^{(AB)}_{\mu\nu}) \\
\{\bar{Q}^{\dot{\alpha}}_A, \bar{Q}^{\dot{\beta}}_B\} &= -2(\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} Z^*_{[AB]} + \bar{\sigma}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}_{\mu\nu} Z^{*\mu\nu}_{(AB)})
\end{aligned}
\tag{2.38}
$$

donde $A, B, ... = 1, 2, ..., \mathcal{N}$. Aquí, $Z^{[AB]}$ es una matriz compleja antisimétrica de $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ escalar de Lorentz, $Z^A_{\mu B}$ es una matriz hermítica de traza nula de $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ que transforma como un vector de Lorentz y $Z^{(AB)}_{\mu\nu}$ es una matriz compleja simétrica de $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ que transforma como un tensor de Lorentz simétrico.

2.3.2. Representaciones Irreducibles - Estados BPS

La aparición de cargas centrales en la superálgebra tiene varias aplicaciones interesantes que resultan de gran utilidad ya que permiten obtener propiedades cuánticas de teorías de campos, incluso en el régimen de acoplamiento fuerte. Como veremos a continuación, una consecuencia de la presencia de cargas centrales es que la masa de las representaciones resulta estar acotada inferiormente por la carga central. Más relevante aún, aquellos estados que saturan esta cota inferior son estados invariantes ante parte de la supersimetría. Así, en el caso de supersimetría $\mathcal{N} = 1$, se pueden encontrar representaciones que conservan una, dos o tres de las cuatro supercargas. Estos estados se conocen como $\frac{1}{4}-$, $\frac{1}{2}-$ y $\frac{3}{4}-$BPS, respectivamente. Además, ya que los estados de representaciones BPS son aniquilados por cierta fracción de las supercargas, dichas representaciones poseen un número menor de estados. Este fenómeno se conoce como acortamiento del supermultiplete y es análogo a lo que ocurre en el caso no masivo en ausencia de cargas centrales, donde la mitad de las supercargas son realizadas trivialmente. Historicamente, fue gracias a los sectores BPS de teorías supersimétricas que los primeros resultados exactos sobre el espectro de partículas pudieron ser obtenidos [50]. Los resultados derivados por Seiberg y Witten a mediados de los '90 [52],[53] dieron una motivación adicional al estudio de los sectores BPS.

Veamos explícitamente cómo derivar estas propiedades de las representaciones BPS en el caso de supersimetría $\mathcal{N} = 1$. Para ello consideramos el momento estándar de una representación masiva en el "sistema en reposo"

$$
q^\mu_s = (m, 0, 0, 0) \tag{2.39}
$$

y una configuración de cargas centrales tal que las únicas componentes no nulas son $Z_{12} = -Z_{21} = Z$. Luego, el álgebra de las supercargas toma la forma,

$$
\begin{aligned}
\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} &= 2m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{\alpha\dot{\alpha}}, \\
\{Q_\alpha, Q_\beta\} &= 2iZ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\beta}
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

Como veremos hacia el final de este capítulo cuando estudiemos el modelo de Wess-Zumino, éste es el álgebra correspondiendo a una configuración de campos clásica tipo pared de dominio que se extiende a lo largo del eje z.

Las representaciones de este álgebra son evidentes si definimos los nuevos operadores de creación y destrucción

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_2 + i\bar{Q}_{\dot{1}}) \\ S_1^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{Q}_{\dot{2}} - iQ_1) \\ S_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_2 - i\bar{Q}_{\dot{1}}) \\ S_2^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{Q}_{\dot{2}} + iQ_1) \end{aligned} \tag{2.41}$$

Es fácil verificar que estos operadores satisfacen el álgebra de Clifford

$$\{S_1, S_1^\dagger\} = 2(m - Z) \tag{2.42}$$

$$\{S_2, S_2^\dagger\} = 2(m + Z) \tag{2.43}$$

$$\{S_1, S_1\} = \{S_2, S_2\} = 0 \tag{2.44}$$

De estas expresiones se deduce la cota conocida como “cota de Bogomol'nyi”. Dado que el lado izquierdo en las ecuaciones (2.42) y (2.43) es definido positivo, encontramos que la energía está acotada inferiormente por el valor absoluto de la carga topológica, i.e.

$$m \geq |Z| \tag{2.45}$$

Notar que debido a la cota de Bogomol'nyi, esta configuración de las cargas centrales solo es consistente con representaciones masivas.

Veamos ahora cómo ocurre el fenómeno de acortamiento del supermultiplete. Para encontrar las representaciones irreducibles debemos seguir el mismo procedimiento que en el caso sin cargas centrales. El punto crucial aquí será si $Z < m$ o si la cota de Bogomol'nyi es saturada, $Z = m$ (podemos considerar sin pérdida de generalidad que $Z > 0$).

El caso en el que la carga central no iguala a la masa de la representación es análogo al caso masivo sin cargas centrales discutido anteriormente. El lado derecho en las ecuaciones (2.42) y (2.43) es no nulo. Luego, si definimos al vacío tal que sea aniquilado por S_1 y S_2, los estados serán los dados por los operadores de creación $S_1^\dagger$ y $S_2^\dagger$ al actuar sobre el vacío. La representación resultante está compuesta por cuatro estados y tiene la misma estructura que para el caso masivo en ausencia de cargas centrales.

Cuando la carga central satura la cota (2.45), el lado derecho de la ec.(2.42) se anula. Así vemos que en este caso los osciladores S_1 y $S_1^\dagger$ proyectan sobre estados nulos, es decir

$$S_1|B\rangle = 0 = S_1^\dagger|B\rangle \tag{2.46}$$

Este argumento es el mismo que el usado en el caso no masivo para eliminar la mitad de las supercargas. De esta manera se ve claramente que en una representación en la que la carga central es igual a la masa, el número de operadores de creación se reduce a la mitad y, por lo tanto, dicha representación posee la mitad de estados que la representación en la que todas las cargas centrales son nulas. Es por esto que a este tipo de representaciones se las denomina representaciones cortas del álgebra supersimétrica. Además, al poseer solo dos supercargas realizadas no trivialmente, esta representación es $\frac{1}{2}$-BPS. Como mencionamos anteriormente, otras configuraciones de las cargas centrales pueden llevar a configuraciones $\frac{1}{4}$- y $\frac{3}{4}$-BPS.

2.4. Superespacio y Supercampos para $\mathcal{N} = 1$

Hasta aquí solo hemos discutido representaciones de supersimetría sobre estados asintóticos, no sobre campos cuánticos. Veremos ahora de qué manera Q_α y $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ pueden ser representados como operadores diferenciales actuando sobre campos. Dicha construcción se facilita enormemente con la introducción de supercampos, funciones definidas sobre una extensión del espacio-tiempo conocida como superespacio. De esta manera, las cargas satisfaciendo el álgebra de supersimetría serán operadores diferenciales sobre este superespacio. El empleo del superespacio y los supercampos simplifica la adición y multiplicación de representaciones, a la vez que lleva a un método sistemático de construcción de lagrangianos supersimétricos interactuantes. Los campos ordinarios (funciones de las coordenadas espacio-temporales) aparecen luego como los coeficientes en la expansión del supercampo en serie de potencias.

2.4.1. Superespacio $\mathcal{N} = 1$

El superespacio es la extensión del espacio-tiempo ordinario que resulta de introducir coordenadas espinoriales anticonmutantes ademas de las vectoriales conmutantes usuales. Así, si el espacio tiempo convencional está parametrizado por las coordenadas cuadrivectoriales x^μ, el superespacio estará parametrizado por x^μ y dos variables Grassmann, θ y $\bar{\theta}$. Los números Grassmann obedecen todas las reglas aritméticas estándar excepto que ellas anticonmutan en vez de conmutar entre ellas. En particular, por esta razón el producto de un número Grassmann consigo mismo es cero.

Con respecto a las propiedades de Lorentz, θ y $\bar{\theta}$ son espinores. Como es bien sabido, el grupo de Lorentz 4-dimensional (que deja invariante la métrica $diag(-1, +1, +1, +1)$) es equivalente a $SU(2) \times SU(2)$. Luego, existen dos tipos de espinores, los quirales, perteneciendo a la representación $(1/2, 0)$ y denotados θ^α; y los antiquirales, perteneciendo a la representación $(0, 1/2)$ y denotados $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$.

Los escalares de Lorentz pueden ser formados contrayendo dos espinores con índices sin puntos o dos con índices con puntos, $\theta^\alpha\theta_\alpha$ o $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$. Los índices son subidos o bajados con el símbolo antisimétrico, $\theta_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\theta^\beta$, $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\theta^{\dot{\beta}}$

En capítulos subsiguientes también utilizaremos la extensión al superespacio del espacio-tiempo euclídeo (con métrica $diag(+1, +1, +1, +1)$ y del espacio-tiempo de Atiyah-Ward (con métrica $diag(+1, +1, +1, +1)$). Una de las principales diferencias entre estos espacios y el de Minkowski (y la razón por la cual serán de utilidad) es que solo en este último caso la conjugación compleja cambia la quiralidad de los espinores. Así, mientras que en Minkowski $(\theta^\alpha)^\dagger$ transforma en la representación $(0, 1/2)$, en signatura euclídea y de Atiyah-Ward $(\theta^\alpha)^\dagger$ transforma en la representación $(1/2, 0)$ al igual que θ^α.

En resumen, la extensión del espacio de Minkowski conocida como superespacio $\mathcal{N}=1$ resulta parametrizada por las supercoordenadas $(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}})$, que satisfacen las reglas de (anti)conmutación

$$\begin{aligned} &[x^\mu, x^\nu] = [x^\mu, \theta^\alpha] = [x^\mu, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}] = 0 \\ &\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = \{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\} = \{\theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\} = 0 \end{aligned} \tag{2.47}$$

El próximo paso será estudiar funciones definidas sobre el superespacio, por lo que resultará útil definir la diferenciación e integración sobre el superespacio, más precisamente, sobre las coordenadas Grassmann de éste. Las derivadas con respecto a θ^α y $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ son definidas de la manera obvia,

$$\frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}\theta^\beta = \delta_\alpha^\beta, \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}. \tag{2.48}$$

Debido al carácter Grassmann de las variables, los operadores diferenciales satisfacen las reglas de anticonmutación

$$\{\frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}, \theta^\beta\} = \delta_\alpha^\beta \qquad \{\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \tag{2.49}$$

Por su parte, para integrar sobre el superespacio utilizamos la integral de Berezin, que para un único parámetro Grassmann θ viene definida por

$$\int d\theta\theta = 1, \qquad \int d\theta 1 = 0 \tag{2.50}$$

Si usamos el hecho que una función arbitraria de un único parámetro Grassmann tiene la expansión en serie de Taylor $f(\theta) = f_0 + \theta f_1$, obtenemos que

$$\int d\theta f(\theta) = f_1 \tag{2.51}$$

Utilizando la anterior definición para la integración de variables Grassmann, es directo verificar que la integración de Berezin es: traslacionalmente invariante

$$\begin{aligned} \int d(\theta+\xi) f(\theta+\xi) &= \int d\theta f(\theta) \\ \int d\theta \frac{d}{d\theta} f(\theta) &= 0 \end{aligned} \tag{2.52}$$

y equivalente a la diferenciación

$$\frac{d}{d\theta} f(\theta) = f_1 = \int d\theta f(\theta) \tag{2.53}$$

Veamos ahora cómo realizar la superálgebra $\mathcal{N}=1$ sobre el superespacio correspondiente. El primer paso es rescribir el álgebra de supersimetría $\mathcal{N}=1$ como un álgebra de Lie. Para esto introduciremos espinores Grassmann constantes $\xi^\alpha, \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}$, que satisfacen las reglas de anticonmutación

$$\{\xi^\alpha, \xi^\beta\} = \{\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}, \bar{\xi}^{\dot{\beta}}\} = \{\xi^\alpha, \bar{\xi}^{\dot{\beta}}\} = 0 \tag{2.54}$$

Esto permite reemplazar los anticonmutadores en la superálgebra $\mathcal{N}=1$ por conmutadores

$$\begin{aligned}
&[\xi Q, \bar{\xi}\bar{Q}] = 2\xi\sigma^{\mu}\bar{\xi}P_{\mu} \\
&[\xi Q, \xi Q] = [\bar{\xi}\bar{Q}, \bar{\xi}\bar{Q}] = 0 \\
&[P_{\mu}, \xi Q] = [P_{\mu}, \bar{\xi}\bar{Q}] = 0
\end{aligned} \tag{2.55}$$

donde además los parámetros anticonmutantes satisfacen

$$\{\xi^{\alpha}, Q_{\beta}\} = ... = [\xi^{\alpha}, P_{\mu}] = 0 \tag{2.56}$$

En la ec.(2.55) hemos usado la convención de suma $\xi Q = \xi^{\alpha} Q_{\alpha}$, $\bar{\xi}\bar{Q} = \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}}$.

Motivados por el álgebra (2.55), definimos un elemento del grupo correspondiente:

$$G(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{i(-x^{\mu}P_{\mu} + \theta Q + \bar{\theta}\bar{Q})}. \tag{2.57}$$

Usando la formula de Hausdorff

$$e^{A}e^{B} = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots} \tag{2.58}$$

podemos multiplicar dos elementos del grupo. Así, encontramos que

$$G(0, \xi, \bar{\xi})G(x^{\mu}, \theta, \bar{\theta}) = G(x^{\mu} + i\theta\sigma^{\mu}\bar{\xi} - i\xi\sigma^{\mu}\bar{\theta}, \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi}). \tag{2.59}$$

Como es usual, la multiplicación de elementos del grupo induce un movimiento en el espacio de parámetros,

$$g(\xi, \bar{\xi}) : (x^{\mu}, \theta, \bar{\theta}) \longrightarrow (x^{\mu} + i\theta\sigma^{\mu}\bar{\xi} - i\xi\sigma^{\mu}\bar{\theta}, \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi}) \tag{2.60}$$

Es fácil ver que esta traslación en el superespacio puede ser generada por los operadores diferenciales Q y $\bar{Q}$:

$$\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q} = \xi^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} - i\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right) + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\left(\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} - i\theta^{\alpha}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\beta}}\varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right) \tag{2.61}$$

Hemos usado las mismas letras Q y $\bar{Q}$ tanto para los operadores diferenciales como para los generadores del grupo debido a que los operadores diferenciales de hecho representan la acción infinitesimal del grupo sobre el espacio de parámetros:

$$\begin{aligned}
&\{Q_{\alpha}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2i\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu} \\
&\{Q_{\alpha}, Q_{\beta}\} = \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0
\end{aligned} \tag{2.62}$$

A pesar que el operador $P_{\mu} = \partial_{\mu}$ conmuta con la supersimetría, $[Q_{\alpha}, P_{\mu}] = 0$, las derivadas espinoriales $\partial/\partial\theta^{\alpha}, \partial/\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ no transforman covariantemente frente a transformaciones de supersimetría. Conviene luego definir las derivadas covariantes D y $\bar{D}$

$$\begin{aligned}
D_{\alpha} &= \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} + i\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \\
\bar{D}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^{\alpha}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Es directo verificar que D y $\bar{D}$ conmutan con las supercargas

$$\{D_\alpha, Q_\beta\} = \{D_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, Q_\beta\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 \tag{2.64}$$

a la vez que satisfacen el álgebra

$$\begin{aligned} \{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\} &= -2i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^\mu} \\ \{D_\alpha, D_\beta\} &= \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} = 0 \end{aligned} \tag{2.65}$$

2.4.2. Supercampos

Estamos listos ahora para introducir el concepto de supercampo. Como vimos en la sección anterior, los elementos del superespacio $\mathcal{N}=1$ son determinados por las coordenadas $z=(x,\theta,\bar{\theta})$. Los supercampos son funciones definidas sobre dicho superespacio y deben ser entendidos en término de sus expansiones en series de potencia en θ y $\bar{\theta}$. Así, un supercampo escalar arbitrario toma la forma

$$\begin{aligned} F(x,\theta,\bar{\theta}) &= f(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) \\ &+ \theta\theta m(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}n(x) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}v_\mu(x) \\ &+ \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\psi(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}d(x) \end{aligned} \tag{2.66}$$

Todas las potencias de $\theta, \bar{\theta}$ de grado mayor se anulan por la naturaleza Grassmann de estas variables. La ley de transformación para supercampos es definida como:

$$\begin{aligned} \delta_\xi F(x,\theta,\bar{\theta}) &= \delta_\xi f(x) + \theta\delta_\xi\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\delta}_\xi\chi(x) \\ &+ \theta\theta\delta_\xi m(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\delta_\xi n(x) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}\delta_\xi v_\mu(x) \\ &+ \theta\theta\bar{\theta}\delta_\xi\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\delta_\xi\psi(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\delta_\xi d(x) \\ &= (\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q})F, \end{aligned} \tag{2.67}$$

donde Q y $\bar{Q}$ son los operadores diferenciales (2.61). Las leyes de transformación para los campos componentes $(f, \phi, \bar{\chi}, ...)$ pueden obtenerse de (2.67) comparando apropiadamente los desarrollos de potencias a ambos lados.

Es fácil ver que los supercampos forman una representación lineal del álgebra de supersimetría $\mathcal{N}=1$. Sin embargo, esta representación es reducible. La forma en que se obtienen las distintas representaciones irreducibles es imponiendo vínculos al supercampo. Señalemos sin embargo, que el supercampo escalar genérico no es completamente reducible, esto significa que la representación reducible F no es una suma de representaciones irreducibles.

2.4.3. Representaciones Irreducibles

Supercampos Quirales

Los supercampos quirales se definen a través de la condición

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0. \tag{2.68}$$

Este vínculo es fácil de resolver en término de las coordenadas quirales $y^\mu = x^\mu + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}$ y θ, ya que

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}(x^\mu + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}) = 0 \qquad y \qquad \bar{D}_{\dot{\alpha}}\theta = 0 \tag{2.69}$$

En consecuencia, la solución más general de (2.68) es

$$\begin{aligned} \Phi &= \phi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y) \\ &= \phi(x) + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\phi(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box\phi(x) \\ &+ \sqrt{2}\theta\psi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_\mu\psi(x)\sigma^\mu\bar{\theta} + \theta\theta F(x) \end{aligned} \tag{2.70}$$

De la definición ec.(2.67) encontramos que ante una transformación de supersimetría, los campos componentes transforman:

$$\begin{aligned} \delta_\xi\phi &= \sqrt{2}\xi\psi \\ \delta_\xi\psi &= i\sqrt{2}\sigma^\mu\bar{\xi}\partial_\mu\phi + \sqrt{2}\xi F \\ \delta_\xi F &= i\sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi \end{aligned} \tag{2.71}$$

Los supercampos antiquirales satisfacen

$$D_\alpha\bar{\Phi} = 0. \tag{2.72}$$

Así, $\bar{\Phi}$ resulta una función de las coordenadas antiquirales $\bar{y}^\mu = x^\mu - \theta\sigma^\mu\bar{\theta}$ y $\bar{\theta}$, y su desarrollo en serie se obtiene de (2.70) por conjugación compleja:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= \bar{\phi}(\bar{y}) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(\bar{y}) + \bar{\theta}\bar{\theta}\bar{F}(\bar{y}) \\ &= \bar{\phi}(x) - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\bar{\phi}(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box\bar{\phi}(x) \\ &+ \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\bar{F}(x) \end{aligned} \tag{2.73}$$

Es fácil ver que, por ser D y $\bar{D}$ operadores diferenciales (i.e. obedecen la regla de Leibniz), tanto el conjunto de supercampos quirales como el de antiquirales es cerrado ante el producto. Además, las componentes más altas de Φ y $\bar{\Phi}$, llamadas términos F y $\bar{F}$ respectivamente, transforman como derivadas totales ante transformanciones supersimétricas, un resultado que será útil a la hora de construir lagrangianos supersimétricos.

Supercampo Vectorial

El supercampo vectorial satisface la condición de realidad

$$V = V^\dagger \tag{2.74}$$

En término de su expansión en serie de potencias en θ y $\bar{\theta}$ toma la forma

$$\begin{aligned} V(x,\theta,\bar{\theta}) &= C(x) + i\theta\chi(x) - i\bar{\theta}\bar{\chi}(x) \\ &+ \frac{i}{2}\theta\theta[M(x)+iN(x)] - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}[M(x)-iN(x)] \\ &- \theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}A_{\mu}(x) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta[\lambda(x) + \frac{i}{2}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\chi}(x)] \\ &+ i\theta\theta\bar{\theta}[\bar{\lambda}(x) + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\chi(x)] + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}[D(x) + \frac{1}{2}\Box C(x)] \end{aligned} \tag{2.75}$$

donde los campos $C.D, M, N$ y A_{μ} deben ser todos reales. Esta elección tan particular de los coeficientes del desarrollo de V viene motivada por el supercampo hermítico $\Phi + \Phi^{\dagger}$, donde Φ es un supercampo quiral:

$$\begin{aligned} \Phi + \Phi^{\dagger} &= \phi + \bar{\phi} + \sqrt{2}(\theta\psi + \bar{\theta}\bar{\psi}) + \theta\theta F(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\bar{F}(x) \\ &+ i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}(\phi - \bar{\phi}) + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi \\ &+ \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\psi} + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box(\phi + \bar{\phi}) \end{aligned} \tag{2.76}$$

Esta combinación tiene el gradiente $i\partial_{\mu}(\phi - \bar{\phi})$ como coeficiente de $\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}$, llevándonos a definir la siguiente generalización supersimétrica de una transformación de gauge:

$$V \longrightarrow V + \Phi + \Phi^{\dagger}. \tag{2.77}$$

Comparando los desarrollos (2.75) y (2.76) vemos que los campos C, χ, M y N siempre pueden ser eliminados mediante una transformación de gauge. El gauge en el cual estos campos son cero es conocido como el gauge de Wess-Zumino (W-Z). El fijado de este gauge rompe supersimetría pero todavía permite transformaciones de gauge usuales $A_{\mu} \to A_{\mu} + \partial_{\mu}\phi^{I}$ ($\phi^{I} = 2\mathrm{Im}\phi$). Es muy fácil calcular potencias de V en este gauge:

$$\begin{aligned} V_{WZ} &= -\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}A_{\mu}(x) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x) \qquad (2.78) \\ V_{WZ}^{2} &= -\frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}A_{\mu}A^{\mu} \\ V_{WZ}^{3} &= 0 \end{aligned}$$

Las transformaciones supersimétricas para los campos componentes del multiplete vectorial toman la forma:[3]

$$\begin{aligned} \delta_{\xi}A_{\mu} &= -i\bar{\lambda}\bar{\sigma}_{\mu}\xi + i\bar{\xi}\bar{\sigma}_{\mu}\lambda \\ \delta_{\xi}\lambda &= i\xi D + \sigma^{\mu\nu}\xi F_{\mu\nu} \\ \delta_{\xi}\bar{\lambda} &= -i\bar{\xi}D + \bar{\sigma}^{\mu\nu}\bar{\xi}F_{\mu\nu} \\ \delta_{\xi}D &= -\xi\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\lambda} - \partial_{\mu}\lambda\sigma^{\mu}\bar{\xi} \end{aligned} \tag{2.79}$$

[3]La tranformación de supersimetría es implementada por (2.67). Pero, ya que el gauge de W-Z no es invariante ante supersimetría, para permanecer en dicho gauge debemos componer la tranformación SUSY con una transformación de gauge adicional. Por lo tanto, la variación δ_{ξ} debe entenderse como $\delta_{\xi} = \delta^{SUSY} + \delta^{G}$, donde δ^{G} corresponde a la transformación de gauge que es necesario realizar sobre el supercampo $V' = V + \delta^{SUSY}V$ para llevarlo al gauge de W-Z.

En esta última ecuación encontramos además un resultado útil, análogo a lo que ocurría en el caso de supercampos quirales, que es que también en el caso de supercampos reales la componente más alta, conocida como término D, transforma como una derivada total ante transformaciones supersimétricas.

Podemos entonces ver al campo vectorial V como una generalización supersimétrica del potencial de Maxwell. La correspondiente generalización del tensor de curvatura (o de campo) viene dada por los supercampos (spinoriales) de curvatura

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha V$$
$$\bar{W}_{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{4}DD\bar{D}_{\dot{\alpha}} V \tag{2.80}$$

Es directo verificar que W y $\bar{W}$ son respectivamente supercampos quirales y antiquirales, a la vez que son invariantes ante transformaciones de gauge (2.77). Gracias a esta invarianza, podemos obtener sin pérdida de generalidad su dessarrollo en serie de potencias en el gauge de Wess-Zumino

$$W_\alpha = -i\lambda_\alpha(y) + [\delta_\alpha^{\ \beta} D(y) - i(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta} F_{\mu\nu}(y)]\theta_\beta + \theta\theta\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}(y) \tag{2.81}$$
$$\bar{W}_{\dot{\alpha}} = i\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}(\bar{y}) + [\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} D(\bar{y}) + i\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}(\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\gamma}}_{\ \dot{\beta}} F_{\mu\nu}(\bar{y})]\bar{\theta}^{\dot{\beta}} + \bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu_{\dot{\alpha}\alpha}\partial_\mu\lambda^\alpha(\bar{y}) \tag{2.82}$$

donde y^μ ($\bar{y}^\mu$) son las coordenadas quirales (antiquirales) y $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

En la generalización no abeliana V pertenece a la representación adjunta del álgebra, $V = V^r T^r$ y las transformaciones de gauge se implementan como

$$\exp(-2gV) \to \exp(-2gV') = \exp(ig\bar{\Lambda})\exp(-2gV)\exp(-ig\Lambda), \tag{2.83}$$

donde $\Lambda = \Lambda^r T^r$, $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Lambda = 0$ y $D_\alpha\bar{\Lambda} = 0$.[4] Expandiendo la ley de transformación tenemos,

$$V' = V + \frac{i}{2}(\Lambda - \bar{\Lambda}) + ... \tag{2.84}$$

por lo que en teorías no abelianas también existe un gauge de Wess-Zumino en el que el supercampo vectorial toma la forma (2.79), y por lo tanto $V^3 = 0$.

La generalización no abeliana de los supercampos de curvatura viene dada por

$$W_\alpha = \frac{1}{8g}\bar{D}\bar{D}\exp(2gV)D_\alpha\exp(-2gV) \tag{2.85}$$
$$= -i\lambda_\alpha(y) + [\delta_\alpha^{\ \beta} D(y) - i(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta} F_{\mu\nu}(y)]\theta_\beta + \theta\theta\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\mathcal{D}_\mu\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}(y) \tag{2.86}$$

donde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu], \qquad \mathcal{D}_\mu\lambda_\alpha = \partial_\mu\lambda_\alpha - ig[A_\mu, \lambda_\alpha]. \tag{2.87}$$

Es fácil de verificar que la transformación de gauge (2.83) actúa sobre los supercampos de curvatura de manera covariante

$$W_\alpha \to W'_\alpha = \exp(ig\Lambda)W_\alpha\exp(-ig\Lambda). \tag{2.88}$$

[4]En la representación adjunta, normalizamos los generadores del grupo de gauge $\mathrm{tr}(T^aT^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$, mientras que las constantes de estructura f^{abc} que satisfacen $[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$ son completamente antisimétricas.

La transformación de gauge que preserva el gauge de W-Z, dada por

$$\Lambda(y,\theta) = \varphi(y) \qquad\qquad \bar{\Lambda}(\bar{y},\bar{\theta}) = \varphi(\bar{y}), \tag{2.89}$$

induce sobre los campos componentes la transformación

$$\begin{aligned} \delta A_\mu &= \mathcal{D}_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi - ig[A_\mu, \varphi] \\ \delta \lambda_\alpha &= -ig[\lambda_\alpha, \varphi] \\ \delta \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} &= -ig[\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}, \varphi] \\ \delta D &= -ig[D, \varphi]. \end{aligned} \tag{2.90}$$

Vemos así que (2.89) corresponde a nivel de supercampos a las transfomaciones de gauge usuales.

Interacciones Invariantes de Gauge

Si el campo quiral Φ pertenece a la representación fundamental del grupo de gauge y el antiquiral $\bar{\Phi}$ a la antifundamental, requerimos que ante una tranformación de gauge tranformen como

$$\Phi \to \Phi' = \exp(ig\Lambda)\Phi, \qquad \bar{\Phi} \to \bar{\Phi}' = \bar{\Phi}\exp(-ig\bar{\Lambda}). \tag{2.91}$$

En componentes, la tranformación infinitesimal que preserva el gauge de Wess-Zumino, ec.(2.89), toma la forma

$$\begin{aligned} \delta\phi &= ig\varphi\phi & \qquad \delta\bar{\phi} &= -ig\bar{\phi}\varphi \\ \delta\psi &= ig\varphi\psi & \qquad \delta\bar{\psi} &= -ig\bar{\psi}\varphi \\ \delta F &= ig\varphi F & \qquad \delta\bar{F} &= -ig\bar{F}\varphi \end{aligned} \tag{2.92}$$

Con los anteriores supercampos escalares y vectorial podemos construir un lagrangiano invariante frente a transformaciones de gauge

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{\mathrm{tr}}{2}\left(\int d^2\theta\ W^\alpha W_\alpha + \int d^2\bar{\theta}\ \bar{W}_{\dot{\alpha}}\bar{W}^{\dot{\alpha}}\right) \\ &+ \int d^2\theta d^2\bar{\theta}\ \bar{\Phi}\exp(-2gV)\Phi + \left(\int d^2\theta\ \mathcal{W}(\Phi) + \mathrm{h.c.}\right). \end{aligned} \tag{2.93}$$

La primera línea del lado derecho de la ec.(2.93) corresponde a la extensión supersimétrica en términos de supercampos del modelo de Yang-Mills, mientras que la segunda línea da cuenta de la interacción de los campos de gauge con los campos de materia y de la autointeracción de los campos de materia. Esta última viene dada a través del superpotencial $\mathcal{W}(\Phi)$, el cual debe ser una función holomorfa de los supercampos quirales y de los distintos parámetros (términos de masa, constantes de acoplamiento, etc.). Para obtener un lagrangiano renormalizable, $\mathcal{W}(\Phi)$ debe poseer slo hasta potencias cúbicas de los campos quirales. Así, para n campos quirales podemos escribir

$$\mathcal{W}(\Phi) = \frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}\lambda_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k, \tag{2.94}$$

donde $i, j, k = 1, ..., n$. Además, la invarianza de gauge requiere que la matriz de masas m_{ij} y las constantes de acoplamiento λ_{ijk} sean tensores totalmente simétricos.

En componentes, los términos del lagrangiano resultan

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\, W^\alpha W_\alpha \mid_{\theta\theta} &= \mathrm{tr}\left(-2i\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu \lambda - \frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + D^2 + \frac{i}{4}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\right) &(2.95)\\
\mathrm{tr}\, \bar{W}_{\dot\alpha} \bar{W}^{\dot\alpha} \mid_{\bar\theta\bar\theta} &= \mathrm{tr}\left(-2i\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu \lambda - \frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + D^2 - \frac{i}{4}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\right) &(2.96)\\
\bar\Phi \exp(-2gV)\Phi \mid_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} &= \bar{F}F - i\bar\psi\bar\sigma^\mu D_\mu \psi - \overline{D_\mu\phi}D^\mu\phi - g\bar\phi D\phi - \sqrt{2}ig(\bar\phi\lambda\psi - \bar\psi\bar\lambda\phi) &(2.97)\\
\mathcal{W}(\Phi) \mid_{\theta\theta} &= m_{ij}\phi_i F_j - \frac{1}{2}m_{ij}\psi_i\psi_j + \lambda_{ijk}\phi_i\phi_j F_k - \lambda_{ijk}\psi_i\psi_j\phi_k &(2.98)
\end{aligned}$$

donde

$$D_\mu\psi = \partial_\mu\psi - igA_\mu\psi, \qquad D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - igA_\mu\phi, \qquad \mathcal{D}_\mu\lambda = \partial_\mu\lambda - ig[A_\mu, \lambda]. \tag{2.99}$$

Las transformaciones supersimétricas para los campos que dejan invariante el lagrangiano son

$$\begin{aligned}
\delta_\xi\phi &= \sqrt{2}\xi\psi\\
\delta_\xi\bar\phi &= \sqrt{2}\bar\psi\bar\xi\\
\delta_\xi\psi &= i\sqrt{2}\sigma^\mu\bar\xi D_\mu\phi + \sqrt{2}\xi F\\
\delta_\xi\bar\psi &= -i\sqrt{2}\,\overline{D_\mu\phi}\bar\sigma^\mu\xi + \sqrt{2}\bar\xi\bar{F}\\
\delta_\xi F &= i\sqrt{2}\bar\xi\bar\sigma^\mu D_\mu\psi - 2ig\bar\xi\bar\lambda\phi\\
\delta_\xi \bar{F} &= i\sqrt{2}\,\overline{D_\mu\psi}\bar\sigma^\mu\xi + 2ig\bar\phi\lambda\xi\\
\delta_\xi A_\mu &= -i\bar\lambda\bar\sigma_\mu\xi + i\bar\xi\bar\sigma_\mu\lambda\\
\delta_\xi\lambda &= i\xi D + \sigma^{\mu\nu}\xi F_{\mu\nu}\\
\delta_\xi\bar\lambda &= -i\bar\xi D + \bar\sigma^{\mu\nu}\bar\xi F_{\mu\nu}\\
\delta_\xi D &= -\xi\sigma^\mu\mathcal{D}_\mu\bar\lambda - \mathcal{D}_\mu\lambda\bar\sigma^\mu\bar\xi
\end{aligned} \tag{2.100}$$

2.5. Cargas Centrales II

En 1975, Belavin, Polyakov, Schwartz y Tyupkin [54] encontraron soluciones a las ecuaciones de movimiento de la teoría de Yang-Mills euclídea (los instantones) mediante la obtención de una cota inferior para la acción. Cuando la cota, que es de naturaleza topológica, es saturada, las soluciones pueden ser construidas mediante la resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden. Casi inmediatamente [21],[19] fueron encontrados otros sistemas que exhibían ecuaciones de primer orden (conocidas como ecuaciones de Bogomol'nyi). Sus soluciones son solitones (vórtices, monopolos, etc.) estáticos que saturan una cota de carácter topológico, esta vez para la energía.

Ya en 1976, de Vega y Schaposnik [21] encontraron, en el modelo de Higgs abeliano, que las condiciones necesarias para la existencia de ecuaciones de primer orden eran las mismas que las requeridas para obtener una extensión supersimétrica del modelo (es decir, un modelo supersimétrico cuyo sector bosónico coincida con el de Maxwell-Higgs). De hecho, es una propiedad generalmente válida que aquellas teorías bosónicas que admiten ecuaciones de primer orden poseen una extensión supersimétrica. Más aún, fue justamente el estudio de las extensiones supersimétricas lo que permitió tener una una visión global del origen matemático y las implicancias de ecuaciones de Bogomol'nyi. En este sentido, la mayor contribución se debe a un trabajo de Witten y Olive [50] en el que revelaron la conexión entre las ecuaciones de Bogomol'nyi y las cargas centrales presentes en la superálgebra. Más en detalle, encontraron que las cargas topológicas juegan el rol de cargas centrales en la superálgebra. De esta manera, al analizar la superálgebra encontramos que la saturación de la cota de Bogomol'nyi es equivalente a requerir que la configuración conserve parte de la supersimetría, o sea, que sea aniquilada por cierta fracción de las supercargas. De hecho, podemos verificar esta afirmación reobteniendo las ecuaciones BPS a partir de requerir la anulación de las variaciones supersimétricas de los campos. A continuación veremos con un ejemplo sencillo como se realiza ésto en una teoría de campos.

2.5.1. Modelo de Wess-Zumino

El modelo de Wess-Zumino es el más simple de los que poseen cargas centrales tensoriales en el álgebra de supercargas. Dichas cargas aparecen, en este caso, debido a la presencia de paredes de dominio, i.e. soluciones de las ecuaciones movimiento que interpolan entre dos vacíos del modelo. El modelo consiste de un multiplete quiral cuya dinámica viene dada por el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \bar{\Phi}\Phi\mid_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + [\,\mathcal{W}(\Phi)\mid_{\theta\theta} + \text{h.c.}] \tag{2.101}$$

donde $\mathcal{W}$ representa un superpotencial genérico restringido por la condición de poseer más de un mínimo. En componentes

$$\mathcal{L} = \bar{\phi}\Box\phi + i\partial_\mu\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\psi + \bar{F}F + \left[-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{W}}{\partial\phi^2}(\phi)\psi\psi + \frac{\partial\mathcal{W}}{\partial\phi}(\phi)F + \text{ h.c.}\right] \tag{2.102}$$

Las tranformaciones de supersimetría que dejan invariante a $\mathcal{L}$ son

$$\begin{aligned}
\delta_\xi\phi &= \sqrt{2}\xi\psi \\
\delta_\xi\psi &= i\sqrt{2}\sigma^\mu\bar{\xi}\partial_\mu\phi + \sqrt{2}\xi F \\
\delta_\xi F &= i\sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi
\end{aligned} \tag{2.103}$$

Los campos auxiliares pueden ser eliminados usando las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{F}} &= F + \frac{\partial\bar{\mathcal{W}}}{\partial\bar{\phi}}(\bar{\phi}) = 0 \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F} &= \bar{F} + \frac{\partial\mathcal{W}}{\partial\phi}(\phi) = 0
\end{aligned} \tag{2.104}$$

De manera que el lagrangiano puede reescribirse en término de los campos dinámicos ϕ y χ como

$$\mathcal{L} = \bar{\phi}\Box\phi + i\partial_\mu\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\psi - \left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{W}}{\partial\phi^2}\psi\psi + \text{ h.c.}\right] - V(\phi,\bar{\phi}) \tag{2.105}$$

donde

$$V(\phi,\bar{\phi}) = \left|\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial\phi}\right|^2 \tag{2.106}$$

2.5.2. Configuraciones BPS

Consideremos una configuración puramente bosónica de tipo pared de dominio que se extiende a lo largo del eje z, i.e. $\phi = \phi(z), \chi = 0$. Es claro a partir del lagrangiano (2.105) que la energía (por unidad de superficie) toma la forma

$$\mathcal{E} = \int dz \left(\partial_z \bar{\phi} \partial_z \phi + V(\phi, \bar{\phi})\right) \tag{2.107}$$

El método de Bogomol'nyi para obtener la cota y ecuaciones BPS consiste en "completar cuadrados" dentro de la integral de manera que la energía resulte acotada inferiormente por una cantidad topológica. En este ejemplo sencillo el método lleva a

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_{\infty}^{\infty} dz \left(\left| \partial_z \bar{\phi} \pm \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \phi} \right|^2 \mp 2\mathrm{Re}(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \phi} \partial_z \phi) \right) \\ &\geq 2 \int_{\infty}^{\infty} dz \left| \mathrm{Re} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \phi} \partial_z \phi \right| = |\mathcal{Z}| \end{aligned} \tag{2.108}$$

donde $\mathcal{Z} = 2\mathrm{Re}(\mathcal{W}(\infty) - \mathcal{W}(-\infty))$. La cota de Bogomol'nyi para la energía es saturada por configuraciones que satisfacen

$$\partial_z \bar{\phi} = \eta \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \phi} \tag{2.109}$$

donde $\eta = -\mathrm{sgn}\mathcal{Z}$. Pueden obtenerse soluciones no triviales si existen varios mínimos degenerados (vacíos clásicos) de la energía potencial entre los cuales ϕ puede interpolar. Un ejemplo bien conocido es el modelo seno-Gordon con $\mathcal{W}(\phi) = \cos(\phi) - 1$; mientras que un ejemplo de teoría polinómica renormalizable lo da $\mathcal{W}(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{3}\lambda\phi^3$.

Como es usual en teorías que admiten cotas de Bogomol'nyi, se puede probar que soluciones de las ecuaciones de primer orden (2.109) son soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Otro comportamiento característico que puede verificarse en este ejemplo es que el tensor de energía-momento se anula idénticamente, lo que muestra que en una configuración BPS de varias paredes de dominio, éstas resultan no interactuantes. Esto también puede verse del hecho de que la energía es igual a la carga topológica, que depende del número de paredes de dominio, pero no de la distancia entre ellas.

Veamos cómo se relacionan la cota y las ecuaciones de Bogomol'nyi con la supersimetría del modelo. Para empezar, utilizando el método de Noether para las variaciones ec.(2.103) obtenemos la supercorriente:

$$J^\mu_\alpha = \sqrt{2}\left[(\sigma^\rho)_{\alpha\dot{\beta}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\beta}\beta}(\partial_\rho\bar{\phi})\psi_\beta + i\epsilon_{\alpha\beta}(\sigma^\mu)^{\beta\dot{\beta}}\bar{\psi}_{\dot{\beta}}F\right] \tag{2.110}$$

La dependencia de la supercorriente con el superpotencial se obtiene a través de la ec.(2.104). Por su parte, la supercarga es definida por

$$Q_\alpha = \int d^3x J^0_\alpha \tag{2.111}$$

El anticonmutador de dos supercargas, obtenido utilizando las relaciones canónicas a igual tiempo habituales entre los campos y sus momentos conjugados da

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = -4\Sigma_{\alpha\beta}\mathcal{Z} \tag{2.112}$$

Donde $\Sigma_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\int dx_{[\mu}dx_{\nu]}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{\alpha}}_{\beta}$ es el tensor área de la pared y $\mathcal{Z} = 2\Delta \mathrm{Re}\mathcal{W}$, donde Δ implica tomar la diferencia entre los dos infinitos espaciales en la dirección perpendicular a la superficie de la pared.

De esta manera, para una pared que se extiende a lo largo del eje z, el tensor área toma la forma $\Sigma_{\alpha\beta} = -\frac{i}{2}A\sigma^1_{\alpha\beta}$. El álgebra resultante no es más que el estudiado en la sección 2.3.2 (ver ec.(2.40)), donde ahora la carga topológica del modelo juega el rol de carga central en la superálgebra. Como vimos en la sección 2.3.2, el álgebra de las supercargas impone que la masa de sus representaciones este acotada inferiormente por el valor absoluto de la carga central (en este caso, $Z = A\mathcal{Z}$). Este resultado es equivalente al encontrado mediante el método de Bogomol'nyi (ec.(2.108)), el cual lleva la cota para la energía por unidad de área $\mathcal{E} \geq \mathcal{Z}$. Además, en la sección 2.3.2 encontramos que las configuraciones que satisfacen la cota de Bogomol'nyi son aniquiladas por la mitad de las supercargas. Más presisamente, de las ecs.(2.41),(2.46) se deriva que si la configuración $|B\rangle$ satura la cota, luego

$$\begin{aligned} (Q_2 + i\bar{Q}_{\dot{1}})|B\rangle = 0 \\ (\bar{Q}_{\dot{2}} - iQ_1)|B\rangle = 0 \end{aligned} \tag{2.113}$$

(donde suponemos $Z > 0$).

Las condiciones (2.113) equivalen a imponer la anulación de las tranformaciones de supersimetría de los campos componentes (dadas por la ec.(2.103)) cuando los parámetros de la transformación $\xi_\alpha, \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}$ satisfacen $\xi_2 = -i\bar{\xi}_{\dot{1}}$. Así, las condiciones (2.113) se traducen en

$$\delta\psi = i\sqrt{2}\sigma^\mu \begin{pmatrix} i\xi_1 \\ -i\xi_2 \end{pmatrix} \partial_\mu\phi + \sqrt{2}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} F = 0, \tag{2.114}$$

siendo las variaciones de los campos bosónicos automáticamente nulas por considerar configuraciones puramente bosónicas. Si suponemos al campo ϕ como una función solo dependiente de la coordenada z, encontramos que las condiciones (2.113) se satisfacen si y solo si ϕ es solución de las ecuaciones de Bogomol'nyi

$$\partial_z\bar{\phi} = \bar{F} = -\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial\phi} \tag{2.115}$$

Vemos así que configuraciones clásicas que satisfacen ecuaciones de tipo Bogomol'nyi equivalen, desde el punto de vista de supersimetría, a configuraciones que permanecen invariantes ante parte de las transformaciones supersimétrica, es decir, a configuraciones BPS. En el caso considerado, la pared de dominio resulta ser $\frac{1}{2}$-BPS, ya que es aniquilada por la mitad de las cargas supersimétricas.

Capítulo 3

Superespacio No(Anti)Conmutativo I

Deformación Constante

En este capítulo de la tesis repasaremos cómo realizar la deformación no(anti)conmutativa del superespacio euclídeo $\mathcal{N} = 1$ 4 dimensional. Comenzaremos el capítulo dando una breve introducción a la geometría no conmutativa. Mostraremos como un espacio no conmutativo puede obtenerse a partir uno conmutativo mediante el uso de un producto estrella (o Moyal) que deforme el álgebra de las definidas en dicho espacio. Procediendo de esta manera deformaremos el superespacio $\mathcal{N} = 1$ ordinario, de forma tal que las coordenadas fermiónicas quirales satisfagan un álgebra de Clifford en vez de anticonmutar. Veremos que requerir consistencia determina las relaciones de (anti)conmutación de las otras coordenadas. En particular, las coordenadas ordinarias del espacio-tiempo x^μ no podrán seguir siendo conmutativas. Encontraremos un comportamiento característico de este tipo de deformaciones, que es la rotura de la mitad de la supersimetría. Estudiaremos los supercampos quiral y vectorial, y sus interacciones. Como en teorías de campos no conmutativas ordinarias, un cambio de variables nos permitirá expresar las interacciones de gauge en términos de campos componentes que satisfacen leyes de transformaciones de gauge estándar. Finalizaremos el capítulo mostrando cómo este tipo de deformación no(anti)conmutativa aparece en teorías de supercuerdas en presencia de un campo de fondo de gravifotón autodual constante.

El estudio de Teorías de Campos No Conmutativas (NC) tiene una larga historia que comienza en 1930 [1] con la observación de Heisenberg sobre la posibilidad de introducir relaciones de incerteza $[x^\mu, x^\nu] = \Theta^{\mu\nu}$ para las coordenadas, motivado por la necesidad de controlar los infinitos que plagaban las teorías de campos.[1] Sin embargo, fue recién a finales de la década de 1990 que las teorías NC despertaron gran interés, luego de que se decubriera que diversos límites de bajas energías de la teoría de cuerdas y de la teoría M pueden ser descriptos en términos de teorías de

[1]Notar que, estrictamente hablando, el superespacio ordinario es también un espacio no conmutativo. A pesar de que nosotros, por simplicidad de exposición, identificamos a $(x, \theta, \bar{\theta})$ como sus coordenadas, no hay puntos que correspondan a θ o $\bar{\theta}$ (sino más bien, elementos nilpotentes en el álgebra -no conmutativa- de funciones). Así, preguntas del tipo "Cuál es el punto con coordenadas $x^\mu - i\bar{\theta}\sigma^\mu\theta$?" carecen de sentido, ya que mientras x^μ asigna un número real a cada punto, el objeto $i\bar{\theta}\sigma^\mu\theta$ ciertamente no es un número.

campos NC [2]-[4].

En 2003, Seiberg [11] encontró que una nueva clase de teorías con supersimetría reducida pueden ser obtenidas al deformar las reglas de anticonmutación de las coordenadas fermiónicas del superespacio euclídeo $\mathcal{N}=1$. Formalmente, tanto el álgebra de las coordenadas bosónicas como el de las fermiónicas puede ser deformada en el superespacio. En signatura minkowskiana, la relación de conjugación entre θ y $\bar{\theta}$, $(\theta^\alpha)^\dagger = \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$, produce que la deformación del álgebra del sector fermiónico no esté bien definida, ya que dificulta tener simultáneamente hermiticidad, asociatividad y representaciones de supersimetría quirales. En la versión euclídea del superespacio $\mathcal{N}=1$, en contraste, θ y $\bar{\theta}$ no están relacionadas por conjugación hermítica. En consecuencia, se puede deformar de forma consiste el álgebra de las coordenadas fermiónicas del superespacio $\mathcal{N}=1$ de manera que las coordenadas quirales satisfagan [11]

$$\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = C^{\alpha\beta} \tag{3.1}$$

con $C^{\alpha\beta}$ una matriz simétrica constante, mientras que $\{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\} = \{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \theta^\alpha\} = 0$. Estas relaciones de anticonmutación inducen una deformación en el álgebra de supersimetría $\mathcal{N}=1$ de manera que solo la mitad de las supercargas generan simetrías de la teoría deformada. Debido a esto, al superespacio deformado se lo conoce como superespacio NAC $\mathcal{N}=\frac{1}{2}$. Como veremos al final de este capítulo, la no(anti)conmutatividad aparece naturalmente en teoría de cuerdas sobre el (super)volumen de mundo de una $D3$-brana[2] en presencia de un gravifotón constante.

Antes de describir en detalle las características del superespacio no(anti)conmutativo y de las teorías de campos definidas sobre éste, será conveniente primero repasar brevemente las ideas básicas de la geometría no conmutativa.

3.1. Breve Introducción a la Geometría No Conmutativa

La no conmutatividad de coordenadas no es un aspecto ajeno a la física actual. Existe una amplia gama de ejemplos de espacios cuyo álgebra de coordenadas no es conmutativa. Probablemente el caso más conocido sea el del espacio de fases en mecánica cuántica, donde la no conmutatividad es el concepto matemático central que produce las relaciones de incerteza entre posición y momento. Incluso las componentes del momento dejan de conmutar entre ellas en presencia de un campo magnético. Otros ejemplos son la zona de Brillouin en física del estado sólido, el toro no conmutativo que aparece naturalmente en teoría de cuerdas y en teoría M, los duales de grupos no abelianos o el caso que nos ocupa ahora, los modelos deformados de (super) espacio-tiempo.

Encontrar la geometría correspondiente a una dada estructura algebraica es una tarea usualmente difícil (sino imposible), mientras que el camino inverso es a menudo mucho más fácil. Una manera constructiva de empezar a estudiar geometrías no conmutativas es reformular tanto como sea posible la geometría de una variedad en términos de un álgebra de funciones definida sobre

[2]Una Dp-brana es un objeto p-dimensional presente en cualquier teoría de cuerdas que admita cuerdas abiertas. Todas las cuerdas abiertas poseen sus extremos unidos a una D-brana. Esta D-brana determina si una coordenada particular de la cuerda obedece condiciones de contorno de Dirichlet o de Neumann: las direcciones paralelas a la brana son de Neumann, mientras que las direcciones perpendiculares a ésta son de Dirichlet. Dp-branas con p par aparecen en teorías de cuerdas tipo IIA y con p impar en teorías tipo IIB.

ésta[3], y luego generalizar los resultados correspondientes a la geometría diferencial al caso de un álgebra de funciones no conmutativa. Así, la noción principal que se pierde en esta generalización es la de punto [55]. (Esto es lo que von Neumann llamaba "geometría sin puntos".)

3.1.1. Del Conjunto de Puntos al Álgebra de Funciones

La geometría y topología ordinarias tienen como objeto de estudio básico a conjuntos de puntos V con alguna estructura particular. Tales conjuntos reciben el nombre de "espacios". En muchos casos, estos conjuntos son completamente caracterizados por el álgebra $\mathcal{A}$ de funciones con valores en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ definidas sobre ellos. Un ejemplo familiar de esto es el de un espacio vectorial V de dimensión finita. Las funcionales $f \to \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ constituyen el espacio vectorial dual V^*, el cual es isomorfo a V. Una base en V^* viene dada por las funcionales x^i, dual a la base de vectores v_j de V: $x^i(v_j) = \delta^i_j$. De esta manera, el estudio de la variedad V o del álgebra de funciones sobre la variedad es completamente equivalente

Lo que ocurre en el ejemplo finito dimensional se extiende a conjuntos infinitos si ellos tienen una topología. De hecho, si V es un espacio compacto, luego el álgebra $C^0(V)$ de funciones continuas sobre V es una C^* álgebra conmutativa[4]. Inversamente, cualquier C^* álgebra $\mathcal{A}$ conmutativa es isomorfa al álgebra de funciones complejas continuas sobre algún espacio compacto V. Además, este último puede ser descripto como un conjunto de puntos en geometría ordinaria.

Al reemplazar el álgebra conmutativa $\mathcal{A}$ con una no conmutativa, el "espacio" V pueder ser difícil de encontrar, incluso imposible. Sin embargo, la existencia de tal espacio puede no ser necesaria si toda la información relevante para una teoría física puede ser extraída de $\mathcal{A}$.

Existen varias maneras de construir geometrías no conmutativas. Una de ellas consiste en deformar de manera continua el álgebra conmutativa $\mathcal{A}$ en una no conmutativa $\mathcal{A}_\vartheta$. Ejemplos de esto son los grupos cuánticos y las deformaciones de estructuras de Poisson. En estos casos existe un parámetro continuo ϑ que controla la no conmutatividad, mientras que el caso conmutativo (el "límite clásico") es recobrado para algún valor específico de este parámetro. Por otro lado, hay álgebras no conmutativas que no poseen un límite conmutativo (o "clásico"), como es el caso de las matrices cuadradas complejas cuyas entradas son funciones sobre alguna variedad V.

3.1.2. Cuantización por Deformación

El concepto de $deformaciones\ en\ física$ puede aplicarse a una amplia gama de teorías y en su forma más ambiciosa expresa que el pasaje de un nivel de teoría física a otro, más refinado y abarcativo, puede ser entendido (o incluso haber sido predicho) usando lo que los matemáticos llaman teoría de las deformaciones. Por ejemplo, se puede pasar de la física newtoniana a la relatividad especial mediante la deformación del grupo de Galileo al grupo de Poincaré con el parámetro de deformación c^{-1}, donde c es la velocidad de la luz. Ésta es la filosofía detrás de la cuantización por deformación, una reformulación del problema de cuantización de un sistema clásico, alternativa a la cuantización canónica y la integral funcional [56].

[3]Por ejemplo, los vectores tangentes sobre una variedad V pueden ser vistos como derivaciones sobre las funciones en V.

[4]Un *álgebra* $\mathcal{A}$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$ con un producto $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \ni (a, b) \mapsto ab \in \mathcal{A}$ distributivo en adición, mientras que un álgebra $\mathcal{A}$ es llamada un $^* - \acute{a}lgebra$ si ésta admite una norma y una involución (o conjugación compleja) antilineal.

Consideremos primero el álgebra de observables $\mathcal{A}$ del problema clásico; si se empieza con un espacio de fases V (con una cierta estructura de Poisson $\{,\}_{\mathrm{P}}$) luego $\mathcal{A}$ será el álgebra de funciones (suaves) $C(V)$. La cuantización por deformación consiste esencialmente en deformar el producto conmutativo entre funciones usual en un producto asociativo no conmutativo, el producto "estrella":

$$f * g = fg + i\frac{\vartheta}{2}\{f,g\}_{\mathrm{P}} + O(\vartheta^2) \tag{3.2}$$

donde ϑ es un parámetro ($\vartheta \to 0$ corresponde al límite conmutativo) y $\{f,g\}_{\mathrm{P}}$ es el corchete de Poisson de las dos funciones del espacio de fases $f(q,p)$, $g(q,p)$. Los términos de mayor orden $O(\vartheta^2)$ quedan determinados al imponer asociatividad del producto. Como es usual, la estructura de Poisson $\{,\}_{\mathrm{P}}$ puede ser parametrizada por un tensor antisimétrico $\omega^{ij}(x)$ de manera que $\{f,g\}_{\mathrm{P}} = \omega^{ij}(x)(\partial_i f)(\partial_j g)$ (con $\omega^{ij}(x)$ satisfaciendo las identidades diferenciales correspondientes a la identidad de Jacobi del corchete de Poisson). Así, esta deformación lleva a una familia de álgebras $\mathcal{A}_\vartheta$ que se reducen a $C(V)$ en el límite clásico.

Vemos entonces que en el contexto de cuantización por deformación, la cuantización es entendida como una deformación de la estructura algebraica de funciones y no como un cambio radical en la naturaleza de los observables físicos. En este sentido, el producto estrella es introducido con el fin de implementar dicha deformación en el álgebra de funciones. En [56] se realizó un análisis de los posibles productos asociativos que pueden ser obtenidos como una serie perturbativa en el parámetro ϑ. Los resultados obtenidos resultan de gran utilidad desde el punto de vista de las nuevas ideas de geometría no conmutativa.

En general, dada una variedad V con una estructura de Poisson, hay esencialmente un producto estrella, módulo equivalencias de gauge que corresponden a redefiniciones lineales (e invertibles) de las funciones:

$$f \to D(\vartheta)f = f + \vartheta D_1(f) + \vartheta^2 D_2(f) + ..., \tag{3.3}$$

donde $D_i : fun(V) \to fun(V)$ son operadores diferenciales [57],[58]. Esto significa que si describimos a nuestro sistema con dos productos estrella $*_1$ y $*_2$, éstos estarán relacionados a través de un operador invertible D (del tipo (3.3)) por la fórmula

$$f *_2 g = D^{-1}(D(f) *_1 D(g)) \tag{3.4}$$

Consideremos ahora una variedad V con una estructura de Poisson $\{,\}_{\mathrm{P}}$ dada por el tensor $\omega^{ij}(x)$ y un conjunto de derivadas ∇_i tales que $\nabla\omega = 0$. Además, supondremos que este conjunto de derivadas posee torsión y curvatura nulas. Si definimos un producto estrella $*$ generico sobre V como una serie formal en el parámetro ϑ

$$f * g = \sum_{r=0}^{\infty} \vartheta^r \frac{a_r}{r!}\omega^r(f,g) \tag{3.5}$$

donde

$$\omega^r(f,g) = \omega^{i_1 j_1}...\,\omega^{i_r j_r}\nabla_{i_1}...\nabla_{i_r} f\ \nabla_{j_1}...\nabla_{j_r} g \tag{3.6}$$

se puede mostrar que imponer orden a orden que el producto sea asociativo, i.e.

$$(f * g) * h = f * (g * h), \tag{3.7}$$

restringe los coeficientes a ser $a_r = 1\ \forall r$. De esta manera, bajo las anteriores suposiciones para V, ∇ y ω, el único producto estrella que es asociativo tiene la forma

$$(f * g)(x) = e^{\vartheta\omega^{ij}\nabla_i\nabla'_j} f(x)g(x')|_{x=x'} \tag{3.8}$$

Esta forma particular del producto estrella se conoce como producto Moyal, ya que fue Moyal [59] el primero que encontró y estudió este producto, en el contexto de la formulación de Weyl de la mecánica cuántica[5].

Una vez que el producto estrella es conocido, las relaciones de conmutación entre las coordenadas pueden ser determinadas de considerar el caso especial de dos coordenadas cumpliendo el papel de funciones f y g. Así, por ejemplo, en el caso del espacio de fases cuántico el producto Moyal toma la forma

$$f(q,p) * g(q,p) = f(q,p) \exp i\frac{\hbar}{2}(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q})g(q,p) \tag{3.13}$$

Utilizando este producto en el caso especial $f = q$, $g = p$, obtenemos el álgebra de las coordenadas canónicas

$$q * p - p * q = [q,p]_* = i\hbar \tag{3.14}$$

Luego, las relaciones de conmutación cuánticas son reobtenidas en este formalismo como conmutadores $*$.

[5]En 1927, Weyl dio a conocer su regla de cuantización [60]. Si empezamos con un observable $f(q,p)$, donde f es alguna función sobre el espacio de fases (plano) $\mathbb{R}^{2l}$, podemos asociar a ésta un operador (el correspondiente observable cuántico) $\hat{f}$ en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^l)$ mediante la siguiente receta general:

$$f \mapsto \hat{f}_w = \frac{1}{(2\pi\hbar)^l}\int_{\mathbb{R}^{2l}} d^l\xi d^l\eta \tilde{f}(\xi,\eta)\exp(i(\hat{P}\xi + \hat{Q}\eta)/\hbar)w(\xi,\eta) \tag{3.9}$$

donde $\tilde{f}$ es la transformada de Fourier de f, $\hat{P}_i$ y $\hat{Q}_i$ son operadores que satisfacen las relaciones de conmutación canónica $[\hat{P}_i, \hat{Q}_j] = i\hbar\delta_{ij}$ $(i,j = 1,...,l)$ y w es una función peso. Lo que ahora se conoce como orden normal corresponde a $w(\xi,\eta) = \exp(-\frac{1}{4}(\xi^2 \pm \eta^2))$, el orden estándar a $w(\xi,\eta) = \exp(-\frac{i}{2}\xi\eta)$ y el orden de Weyl (o simétrico) a $w = 1$. Poco después, Wigner [61] encontró una fórmula inversa S que mapea un operador en lo que los matemáticos llaman su símbolo a través de un tipo de fórmula de traza. Por ejemplo, para $w = 1$ el mapa $S : \hat{f} \mapsto S[\hat{f}]$ es tal que

$$\tilde{f}(\xi,\eta) = \widetilde{S[\hat{f}]} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^l}\int \mathrm{Tr}\hat{f}(\hat{P},\hat{Q})\exp(-i(\hat{P}\xi + \hat{Q}\eta)/\hbar) \tag{3.10}$$

y el símbolo correspondiente en espacio de posición resulta

$$f(p,q) = S[\hat{f}] = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{2l}}\int_{\mathbb{R}^{2l}} d^l\xi d^l\eta \int \mathrm{Tr}\hat{f}(\hat{P},\hat{Q})\exp(i((p-\hat{P})\xi + (q-\hat{Q})\eta)/\hbar) \tag{3.11}$$

Quince años después del trabajo de Wigner, Blackett y su estudiante Moyal investigaron cuál podía ser la interpretación física de la función clásica $f = S[\hat{f}]$, símbolo del operador cuántico $\hat{f}$. Buscando una expresión explícita para el símbolo de un producto de operadores cuánticos, Moyal demostr que en el caso de operadores con orden de Weyl (w=1), el producto de símbolos viene dado precisamente por el producto estrella Moyal (3.8). De esta manera,

$$\hat{f}\hat{g} = S^{-1}[S[\hat{f}] * S[\hat{g}]], \tag{3.12}$$

lo que puede ser fácilmente verificado usando las definiciones (3.9),(3.11).

Por supuesto, ordenamientos diferentes al de Weyl darán otras reglas de cuantización. De hecho, las distintas reglas de cuantización corresponden a productos estrella conectados por transformaciones de gauge (3.3).

3.2. Superespacio Deformado $\mathcal{N} = \frac{1}{2}$

3.2.1. Superespacio

Nos ocuparemos ahora de estudiar las consecuencias de deformar el superespacio $\mathcal{N} = 1$. Como vimos en el capítulo anterior, el superespacio $\mathcal{N} = 1$ está parametrizado por las supercoordenadas $(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\theta}})$, que satisfacen las reglas de (anti)conmutación

$$
\begin{aligned}
&[x^\mu, x^\nu] = [x^\mu, \theta^\alpha] = [x^\mu, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}] = 0 \\
&\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = \{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\} = \{\theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\} = 0
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

En este capítulo nos interesará analizar una deformación mínima de este superespacio, en la cual las coordenadas fermiónicas θ^α satisfagan las reglas de anticonmutación no triviales

$$
\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = C^{\alpha\beta} \tag{3.16}
$$

con $C^{\alpha\beta}$ una matriz simétrica constante, a la vez que intentaremos mantener las relaciones de (anti)conmutación de las otras supercoordenadas tan simples como sea posible [11].

Como vimos en la sección anterior, una manera de implementar la deformación (3.16) consiste en deformar el álgebra de los supercampos a través de un producto estrella. Es fácil ver que el producto Moyal que reproduce (3.16) es[6]

$$
\begin{aligned}
f(\theta) * g(\theta) &= f(\theta) \exp\left(-\frac{C^{\alpha\beta}}{2} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^\alpha} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta^\beta} \right) g(\theta) \\
&= f(\theta) \left(1 - \frac{C^{\alpha\beta}}{2} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^\alpha} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta^\beta} - \det C \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta\theta} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta\theta} \right) g(\theta)
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

con

$$
\begin{aligned}
&\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta^\alpha}\theta^\beta \equiv \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\theta^\beta = \delta_\alpha^\beta \\
&\theta^\alpha \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^\beta} \equiv -\delta_\alpha^\beta \\
&\frac{\partial}{\partial\theta\theta} \equiv \frac{1}{4}\epsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \frac{\partial}{\partial\theta^\beta}
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

Veamos qué ocurre ahora con el resto de las coordenadas. Es claro que si f o g dependen de variables adicionales que tienen relaciones de conmutación no triviales, la expresión (3.17) debe ser apropiadamente modificada. Consideremos primero la posibilidad más simple para $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$, en la que satisface las relaciones de conmutación estándar

$$
\{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\} = \{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \theta^\beta\} = \{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, x^\mu\} = 0 \tag{3.19}
$$

[6] A pesar de que las coordenadas θ^α ya no son variables Grassmann, seguiremos considerando las mismas reglas que teníamos en el caso no deformado para la diferenciación e integración de las coordenadas fermiónicas del superespacio θ y $\bar{\theta}$. Esto es, aún para superespacios no(anti)conmutativos siguen siendo válidas las definiciones y propiedades dadas en el capítulo anterior por las ecs.(2.48)-(2.53).

Esto significa que $\bar{\theta}$ no es el complejo conjugado de θ, lo cual solo es posible en espacio euclídeo $\mathbb{R}^4$ (o, como veremos en el próximo capítulo, en espacio $\mathbb{R}^{2,2}$). En lo que resta de este capítulo trabajaremos en el espacio euclídeo, pero continuaremos utilizando la notación de signatura lorentziana.

En lo que respecta a las relaciones de conmutación de x, la posibilidad más simple sería $[x^\mu, x^\nu] = [x^\mu, \theta^\alpha] = 0$. Sin embargo, estas relaciones hacen difícil definir supercampos quirales y antiquirales debido a que las superderivadas covariantes D, $\bar{D}$ ordinarias dejan de actuar como derivaciones (ver debajo). Esto no ocurre si, en cambio, complementamos (3.16) y (3.19) con

$$[y^\mu, y^\nu] = [y^\mu, \theta^\alpha] = [y^\mu, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}] = 0, \tag{3.20}$$

donde $y^\mu = x^\mu + i\theta^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ son las coordenadas quirales. Esto significa que las coordenadas espaciales x satisfacen

$$\begin{aligned} [x^\mu, \theta^\alpha] &= iC^{\alpha\beta} \sigma^\mu_{\beta\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \\ [x^\mu, x^\nu] &= \bar{\theta}\bar{\theta} C^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{3.21}$$

donde $C^{\mu\nu} = C^{\alpha\beta} \varepsilon_{\beta\gamma} (\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \gamma}$.

Cuando las funciones sobre el superespacio deformado son expresadas en términos de $y, \theta, \bar{\theta}$, podemos usar el producto Moyal (3.17), donde las derivadas con respecto a θ deben ser tomadas a y y $\bar{\theta}$ fijos.

Podemos ahora definir las derivadas covariantes. Ya que las derivadas con respecto a θ y $\bar{\theta}$ son a y fijo (en vez de x fijo), podemos usar las expresiones ordinarias:

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + 2i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial y^\mu}\ , \qquad \bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} \tag{3.22}$$

Claramente, satisfacen

$$\begin{aligned} \{D_\alpha, D_\beta\} &= 0 \\ \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} &= 0 \\ \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, D_\alpha\} &= -2i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial y^\mu} \end{aligned} \tag{3.23}$$

como en el espacio (anti)conmutativo ordinario (con $C = 0$).[7]

Por su parte, las supercargas de la teoría conmutativa en coordenadas quirales toman la forma

$$Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}\ , \qquad \bar{Q}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + 2i\theta^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial y^\mu}, \tag{3.24}$$

[7] Con { , } debe entenderse que los productos al evaluar el anticonmutador se realizan utilizando el producto Moyal.

y cumplen

$$
\begin{aligned}
\{D_\alpha, Q_\beta\} &= \{\bar{D}_{\dot\alpha}, Q_\beta\} = \{D_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta}\} = \{\bar{D}_{\dot\alpha}, \bar{Q}_{\dot\beta}\} = 0 \\
\{Q_\alpha, Q_\beta\} &= 0 \\
\{\bar{Q}_{\dot\alpha}, Q_\alpha\} &= 2i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial y^\mu} \\
\{\bar{Q}_{\dot\alpha}, \bar{Q}_{\dot\beta}\} &= -4C^{\alpha\beta}\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\sigma^\nu_{\beta\dot\beta}\frac{\partial^2}{\partial y^\mu \partial y^\nu}
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

Todos los anticonmutadores en (3.25), salvo el último, coinciden con aquellos del caso conmutativo. Ya que en estas coordenadas $\partial_\alpha = Q_\alpha$, el producto $*$ (3.17) queda expresado en términos de las supercargas Q. En base a los anticonmutadores (3.25) vemos que el producto $*$ es invariante ante Q y por ello esperamos que Q siga siendo una simetría del espacio. Sin embargo, ya que $\bar{Q}$ depende explicitamente de θ, es claro que el producto $*$ no es invariante ante $\bar{Q}$. De manera que $\bar{Q}$ ya no será un generador asociado a una simetría.[8] Dado que la mitad de la supersimetría $\mathcal{N} = 1$ está rota, nos referirenos a la supersimetría Q no rota como $\mathcal{N} = \frac{1}{2}$

Pueden buscarse generalizaciones para este superespacio deformado. Algunas condiciones razonables a imponer sobre estas generalizaciones son que D y $\bar{D}$, dadas por la ec.(3.22), actúen como derivaciones sobre funciones del superespacio y que ellas continúen satisfaciendo (3.23). Es claro que estas condiciones prohiben una deformación de los conmutadores de $\bar\theta$ (3.19), debido a que $\bar\theta$ aparece explícitamente en D. Sin embargo, todavía existe la posibilidad de deformar (3.20) a

$$
[y^\mu, y^\nu] = i\Theta^{\mu\nu}, \qquad [y^\mu, \theta^\alpha] = \Psi^{\mu\alpha}, \tag{3.26}
$$

con $\Theta^{\mu\nu}$ y $\Psi^{\mu\alpha}$ números complejos conmutantes y anticonmutantes independientes de y, θ y $\bar\theta$. $\Theta^{\mu\nu}$ tiene el efecto de la no conmutatividad estándar [62]. Aquí nos limitaremos a la deformación más simple del superespacio y tomaremos a $\Theta^{\mu\nu}$ y $\Psi^{\mu\alpha}$ nulos. Sin embrago, en el próximo capítulo sí estudiaremos en detalle otra posible generalización que consiste en deformaciones del tipo (3.16), pero con el parámetro $C^{\alpha\beta}$ dependiente de las coordenadas espaciales (i.e. $C = C(y)$)

3.2.2. Supercampos Quiral y Vectorial

El supercampo quiral, que satisface $\bar{D}_{\dot\alpha} * \Phi = 0$, puede expresarse en términos de los campos componentes como

$$
\Phi(y, \theta) = \phi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y) \tag{3.27}
$$

En cuanto al campo antiquiral, éste cumple $D_\alpha * \bar\Phi = 0$, por lo que es solo función de $(\bar{y}, \bar\theta)$. Ya que

$$
[\bar{y}^\mu, \bar{y}^\nu] = -4\bar\theta\bar\theta C^{\mu\nu}, \tag{3.28}
$$

[8] Podríamos agregar a $\bar{Q}_{\dot\alpha}$ términos de la forma $C^{\alpha\beta}\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\sigma^\nu_{\beta\dot\beta}\frac{\partial^2}{\partial y^\mu \partial y^\nu}$ y $C^{\alpha\beta}\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\frac{\partial^2}{\partial y^\mu \partial\theta^\beta}$ para remover el último término en (3.25). El problema con tales modificaciones de $\bar{Q}$ es que ellas incluyen derivadas segundas y luego no actúan sobre productos de campos como derivaciones (o sea, dejan de satisfacer la regla de Leibniz).

el campo antiquiral $\bar{\Phi}(\bar{y}, \bar{\theta})$ debe ser ordenado. Una elección natural es expresarlo en términos de (y, θ) y ordenar Weyl las θ's

$$\begin{aligned}
\bar{\Phi}(y - 2\theta\sigma\bar{\theta}, \bar{\theta}) &= \bar{\phi}(y - 2\theta\sigma\bar{\theta}, \bar{\theta}) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(y - 2\theta\sigma\bar{\theta}, \bar{\theta}) + \bar{\theta}\bar{\theta}\bar{F}(y - 2\theta\sigma\bar{\theta}, \bar{\theta}) \\
&= \bar{\phi}(y) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(y) - 2\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}\bar{\phi}(y) \\
&\quad + \bar{\theta}\bar{\theta}\left(\bar{F}(y) + \sqrt{2}\theta\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\psi}(y) + \theta\theta\partial^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\phi}\right) \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

Debido que D y $\bar{D}$ actuan como derivadas ante el producto $*$, los supercampos quirales y antiquirales forman subálgebras bajo el producto $*$.

El paso siguiente es introducir el supercampo vectorial V para describir campos de gauge. En el caso del superespacio euclídeo $\mathcal{N} = 1$ 4-dimensional ninguna condición de realidad análoga al caso minkowskiano puede imponerse sobre los supercampos (ya que θ y $\bar{\theta}$ dejan de estar relacionadas por conjugación compleja). Luego, definiremos al supercampo vectorial V, que contiene al campo de gauge, simplemente como aquel que ante una tranformación de supergauge cambia como

$$\exp(-2gV) \to \exp(-2gV') = \exp(ig\bar{\Lambda}) * \exp(-2gV) * \exp(-ig\Lambda), \qquad (3.30)$$

donde Λ y $\bar{\Lambda}$ son matrices (en el álgebra de Lie del grupo) de supercampos quirales y antiquirales, respectivamente. En todas las expresiones anteriores las exponenciales son definidas a través de su expansión en producto $*$,

$$\exp(i\Omega) \equiv 1 + i\Omega + \frac{i^2}{2}\Omega * \Omega + \dots . \qquad (3.31)$$

Utilizando la libertad de gauge podemos expresar V en el gauge de W-Z

$$\begin{aligned}
V(y, \theta.\bar{\theta}) &= i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}A_{\mu}(y) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta^{\alpha}\left(\lambda_{\alpha}(y) + \frac{i}{2}g\,\varepsilon_{\alpha\beta}C^{\beta\gamma}\sigma^{\mu}_{\gamma\dot{\gamma}}\{\bar{\lambda}^{\dot{\gamma}}(y), A_{\mu}(y)\}\right) \\
&\quad + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(y) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}(D(y) - i\partial_{\mu}A^{\mu}(y)) \qquad (3.32)
\end{aligned}$$

La parte C-deformada en V se introduce para que las componentes de los campos transformen canónicamente ante una tranformación de gauge. Nótese además que el término C-deformado incorpora un anticonmutador, lo que vuelve necesario trabajar con grupos de gauge cuya álgebra de generadores también cierre ante anticonmutación (e.g. $U(N)$).

Debido a la no conmutatividad, las potencias de V se ven deformadas respecto de su expresión estándar

$$\begin{aligned}
V^2 &\equiv V * V = -\frac{1}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\left[\theta\theta A_{\mu}A^{\mu} - C^{\mu\nu}A_{\mu}A_{\nu} - \theta_{\alpha}C^{\alpha\beta}\sigma^{\mu}_{\beta\dot{\beta}}[A_{\mu}, \bar{\lambda}^{\dot{\beta}}] + \frac{1}{4}|C|^2\bar{\lambda}\bar{\lambda}\right] \\
V^3 &= 0 \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

donde $|C|^2 = C^{\mu\nu}C_{\mu\nu}$.

La transformación de gauge infinitesimal que preserva el gauge de W-Z (3.32) viene dada por

$$\begin{aligned}
\Lambda(y, \theta) &= \varphi(y) \\
\bar{\Lambda}(\bar{y}, \bar{\theta}) &= \varphi(\bar{y}) + ig\bar{\theta}\bar{\theta}C^{\mu\nu}\{\partial_{\mu}\varphi, A_{\nu}\} \\
&= \varphi(y) - 2\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}\bar{\varphi}(y) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\varphi} + ig\bar{\theta}\bar{\theta}C^{\mu\nu}\{\partial_{\mu}\varphi, A_{\nu}\} \qquad (3.34)
\end{aligned}$$

Ante estas transformaciones los campos componentes transforman de la manera estándar (2.90).

Usamos las expresiones ordinarias para los supercampos de curvatura quirales y antiquirales

$$
\begin{aligned}
W_\alpha &= \frac{1}{8g}\bar{D}*\bar{D}*\exp(2gV)*D_\alpha*\exp(-2gV) && (3.35)\\
\bar{W}_{\dot\alpha} &= -\frac{1}{8g}D*D*\exp(-2gV)*\bar{D}_{\dot\alpha}*\exp(2gV) && (3.36)
\end{aligned}
$$

pero con producto $*$. Como en el caso $C=0$, ellos transforman covariantemente ante (3.30)

$$
\begin{aligned}
W_\alpha &\rightarrow W'_\alpha = \exp(ig\Lambda)*W_\alpha*\exp(-ig\Lambda)\\
\bar{W}_{\dot\alpha} &\rightarrow \bar{W}'_{\dot\alpha} = \exp(-i\bar\Lambda)*\bar{W}_{\dot\alpha}*\exp(-ig\bar\Lambda). && (3.37)
\end{aligned}
$$

En el gauge de Wess-Zumino el desarrollo en serie de W_α y $\bar{W}_{\dot\alpha}$ resulta

$$
\begin{aligned}
W_\alpha &= W_\alpha(C=0) - 2g\,\varepsilon_{\alpha\gamma}C^{\gamma\beta}\theta_\beta\bar\lambda\bar\lambda(y) && (3.38)\\
\bar{W}_{\dot\alpha} &= \bar{W}_{\dot\alpha}(C=0)\\
&\quad -\bar\theta\bar\theta\left[g\,C^{\mu\nu}\{F_{\mu\nu},\bar\lambda_{\dot\alpha}\} + 2g\,C^{\mu\nu}\{A_\nu,\mathcal{D}_\mu\bar\lambda_{\dot\alpha} + \frac{i}{2}g\,[A_\mu,\bar\lambda_{\dot\alpha}]\} + \frac{i}{4}g^2\,|C|^2\{\bar\lambda\bar\lambda,\bar\lambda_{\dot\alpha}\}\right] && (3.39)
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu,A_\nu]\\
\mathcal{D}_\mu\lambda_\alpha &= \partial_\mu\lambda_\alpha - ig[A_\mu,\lambda_\alpha]
\end{aligned}
$$

y $W_\alpha(C=0)$, $\bar{W}_{\dot\alpha}(C=0)$ vienen dados por las ecs. (2.81) y (2.82).

Consideraremos ahora una teoría con un supercampo quiral Φ en la representación fundamental y un supercampo antiquiral $\bar\Phi$ en la antifundamental, cuyos desarrollos en serie de potencias vienen dados por

$$
\begin{aligned}
\Phi(y,\theta) &= \phi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y) && (3.40)\\
\bar\Phi(\bar y,\bar\theta) &= \bar\phi(\bar y) + \sqrt{2}\,\bar\theta\bar\psi(\bar y) + \bar\theta\bar\theta\left(\bar F(\bar y) - 2ig\,C^{\mu\nu}\partial_\mu(\bar\phi A_\nu)(\bar y) - g^2\,C^{\mu\nu}\bar\phi A_\mu A_\nu(\bar y)\right). && (3.41)
\end{aligned}
$$

Bajo una transformación de gauge Φ y $\bar\Phi$ transforman como

$$
\Phi \rightarrow \Phi' = \exp(ig\Lambda)*\Phi, \qquad \bar\Phi \rightarrow \bar\Phi' = \bar\Phi*\exp(-ig\bar\Lambda). \tag{3.42}
$$

Nuevamente el término dependiente de C agregado en la definición de $\bar\Phi$ (3.41) hace que los campos componentes transformen de la manera estándar (2.92) [63].

El lagrangiano invariante de gauge se define como

$$
\mathcal{L} = \int d^2\theta d^2\bar\theta\;\bar\Phi*\exp(-2gV)*\Phi + \frac{\mathrm{tr}}{2}\left(\int d^2\theta\;W^\alpha*W_\alpha + \int d^2\bar\theta\;\bar{W}_{\dot\alpha}*\bar{W}^{\dot\alpha}\right). \tag{3.43}
$$

Los términos F en campos componentes resultan

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\, W^\alpha * W_\alpha\,|_{\theta\theta} &= \mathrm{tr}\, W^\alpha W_\alpha(C=0)\,|_{\theta\theta} -2igC^{\mu\nu}\mathrm{tr}F_{\mu\nu}\bar{\lambda}\bar{\lambda} + g^2|C|^2\mathrm{tr}(\bar{\lambda}\bar{\lambda})^2 &(3.44)\\
\mathrm{tr}\, \bar{W}_{\dot\alpha} * \bar{W}^{\dot\alpha}\,|_{\bar\theta\bar\theta} &= \mathrm{tr}\, \bar{W}_{\dot\alpha}\bar{W}^{\dot\alpha}(C=0)\,|_{\bar\theta\bar\theta} -2igC^{\mu\nu}\mathrm{tr}F_{\mu\nu}\bar{\lambda}\bar{\lambda} + g^2|C|^2\mathrm{tr}(\bar{\lambda}\bar{\lambda})^2 \\
&\quad + \text{ derivada total} &(3.45)
\end{aligned}$$

donde tr $W^\alpha W_\alpha(C=0)\,|_{\theta\theta}$ y tr $\bar{W}_{\dot\alpha}\bar{W}^{\dot\alpha}(C=0)\,|_{\bar\theta\bar\theta}$ son los términos dados por las ecs. (2.95) y (2.96), respectivamente.

Por su parte, el desarrollo del término que contiene los campos de materia es

$$\begin{aligned}
\bar{\Phi} * \exp(-2gV) * \Phi\,|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} &= \bar{\Phi}\exp(-2gV)\Phi(C=0)\,|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} + ig\, C^{\mu\nu}\bar{\phi}F_{\mu\nu}F - \frac{1}{4}g^2\,|C|^2\bar{\phi}\bar{\lambda}\bar{\lambda}F \\
&\quad -i\sqrt{2}\,g\,C^{\alpha\beta}\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\overline{D_\mu\phi}\bar{\lambda}^{\dot\alpha}\psi_\beta, &(3.46)
\end{aligned}$$

donde

$$\overline{D_\mu\phi} = \partial_\mu\bar{\phi} + ig\bar{\phi}A_\mu \tag{3.47}$$

y $\bar{\Phi}\exp(-2gV)\Phi(C=0)$ es dado por la ec. (2.97).

3.3. Superespacio NAC a partir de la Teoría de Cuerdas

En esta sección encararemos el problema de encontrar un “background” de supercuerdas adecuado que, en presencia de $D3$-branas, induzca una deformación no(anti)conmutativa de las variables fermiónicas del espacio target (del tipo (3.16)) sobre el volumen de mundo de las branas. Dado que dicho espacio target debe ser un superespacio, es necesario considerar una versión manifiestamente supersimétrica de teoría de cuerdas. Un ejemplo de este tipo de formulación es la supercuerda de Green-Schwarz [5]. Desafortunadamente, a pesar de que la acción de Green-Schwarz es manifiestamente supersimétrica, la teoría es altamente no lineal, lo que vuelve imposible llevar a cabo su cuantización en una manera covariante de Lorentz.

Recientemente, Berkovits [6],[7] propuso un nuevo formalismo para la acción de supercuerdas, el cual es manifiestamente supersimétrico en el espacio target y es cuadrático en espacio plano. Cuando el espacio target es el producto entre un espacio plano 4-dimensional y una variedad compacta 6-dimensional de tipo Calabi-Yau, el formalismo lleva a una teoría particularmente simple y es conocido como *formalismo híbrido*.

3.3.1. Formalismo Híbrido de Supercuerdas en un Campo de Fondo de Gravifotón

La teoría de supercuerdas tipo II definida sobre $\mathbb{R}^4\times CY_6$, en el formalismo híbrido de Berkovits viene descripta por la acción

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} = \frac{1}{\alpha'}\int d^2z\,\Bigg(&\frac{1}{2}\tilde{\partial}x^\mu\partial x_\mu + p_\alpha\tilde{\partial}\theta^\alpha + \bar{p}_{\dot\alpha}\tilde{\partial}\bar{\theta}^{\dot\alpha} + \tilde{p}_\alpha\partial\tilde{\theta}^\alpha + \bar{\tilde{p}}_{\dot\alpha}\partial\bar{\tilde{\theta}}^{\dot\alpha} \\
&- \frac{\alpha'}{2}\tilde{\partial}\rho\partial\rho + \frac{\alpha'}{2}\tilde{\partial}\bar{\rho}\partial\bar{\rho}\Bigg) + \mathcal{S}_C
\end{aligned} \tag{3.48}$$

donde $\mathcal{S}_C$ es la acción para la teoría superconforme dependiente de la compactificación.[9] Esta acción, que ya está expresada en el gauge superconforme, tiene supersimetría $\mathcal{N}=2$. La parte 4-dimensional de la acción posee un sector bosónico compuesto por las variables espaciales, x^μ ($\mu=0,...,3$), un bosón left-moving ρ (con el signo "incorrecto" en su energía cinética) y un bosón right-moving $\tilde{\rho}$. En el sector fermiónico, la parte left-moving está formada por las coordenadas fermiónicas θ^α y $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ ($\alpha,\dot{\alpha}=1,2$) y sus momentos canónicos conjugados, p_α y $\bar{p}_{\dot{\alpha}}$, mientras que la parte right-moving la forman $\tilde{\theta}^\alpha$ y $\tilde{\bar{\theta}}^{\dot{\alpha}}$ y sus momentos, $\tilde{p}_\alpha$ y $\tilde{\bar{p}}_{\dot{\alpha}}$. Ya que el formalismo de Berkovits es de primer orden para las variables fermiónicas, sus momentos conjugados p's deben ser considerados como campos independientes. Estos son la versión en la hoja de mundo de $-\frac{\partial}{\partial\theta}\mid_x$, etc.; donde estas derivadas son tomadas a x fijo debido a que x aparece como otro campo independiente en (3.48). En adelante nos interesará solo los campos de la acción asociados al superespacio target, por lo que ignoraremos los campos ρ y el sector de Calabi-Yau.

Es conveniente realizar el cambio de variables

$$\begin{aligned}
y^\mu &= x^\mu + i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + i\tilde{\theta}^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\tilde{\bar{\theta}}^{\dot{\alpha}} \\
\bar{d}_{\dot{\alpha}} &= \bar{p}_{\dot{\alpha}} - i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial x_\mu - \theta\theta\,\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} + \frac{1}{2}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\partial(\theta\theta) \\
q_\alpha &= -p_\alpha - i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial x_\mu + \frac{1}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\,\partial\theta_\alpha - \frac{3}{2}\partial(\theta_\alpha\bar{\theta}\bar{\theta}) \\
\tilde{\bar{d}}_{\dot{\alpha}} &= \tilde{\bar{p}}_{\dot{\alpha}} - i\tilde{\theta}^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\tilde{\partial}x_\mu - \tilde{\theta}\tilde{\theta}\,\tilde{\partial}\tilde{\bar{\theta}}_{\dot{\alpha}} + \frac{1}{2}\tilde{\bar{\theta}}_{\dot{\alpha}}\tilde{\partial}(\tilde{\theta}\tilde{\theta}) \\
\tilde{q}_\alpha &= -\tilde{p}_\alpha - i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\tilde{\bar{\theta}}^{\dot{\alpha}}\tilde{\partial}x_\mu + \frac{1}{2}\tilde{\bar{\theta}}\tilde{\bar{\theta}}\,\tilde{\partial}\tilde{\theta}_\alpha - \frac{3}{2}\tilde{\partial}(\tilde{\theta}_\alpha\tilde{\bar{\theta}}\tilde{\bar{\theta}})
\end{aligned} \tag{3.49}$$

en término de las cuales el lagrangiano toma la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\alpha'}\left(\frac{1}{2}\tilde{\partial}y^\mu\partial y_\mu - q_\alpha\tilde{\partial}\theta^\alpha + \bar{d}_{\dot{\alpha}}\tilde{\partial}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} - \tilde{q}_\alpha\partial\tilde{\theta}^\alpha + \tilde{\bar{d}}_{\dot{\alpha}}\partial\tilde{\bar{\theta}}^{\dot{\alpha}} + \text{derivadas totales}\right) \tag{3.50}$$

Podemos ver que las nuevas variables en (3.49) son la versión en la hoja de mundo de $\bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}\mid_y$, $Q_\alpha = -\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\mid_y$, etc; donde ahora las derivadas son tomadas a y fijo ya que son éstas las coordenadas que aparecen en (3.50) como campos independientes.

En el formalismo híbrido, el operador de vértice para un campo de gravifotón autodual constante es

$$V = \int d^2z\, q_\alpha\tilde{q}_\beta F^{\alpha\beta} \tag{3.51}$$

Notar que la condición de autodualidad

$$F^{\alpha\beta} \neq 0 \qquad\qquad F^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = 0 \tag{3.52}$$

solo es posible en signatura euclídea (o en signatura $2+2$). Vemos así que la condición de autodualidad es el equivalente desde el lado de teoría de cuerdas a poder tener $\{\theta,\theta\}\neq 0$ manteniendo

[9] Utilizamos la barra para denotar la quiralidad espacio-temporal, mientras que el tilde denota la quiralidad en la hoja de mundo. Además, parametrizamos la hoja de mundo de signatura euclídea con coordenadas $z, \tilde{z}$ y escribimos $\partial = \partial/\partial z$ y $\tilde{\partial} = \partial/\partial\tilde{z}$

$\{\bar{\theta}, \bar{\theta}\}$ nulo. La utilidad de requerir que el campo de gravifotón sea autodual radica en que (3.52) (junto con la métrica de $\mathbb{R}^4 \times CY_6$) es una solución exacta de las ecuaciones de movimiento completas de teoría de cuerdas. Esto puede verse del hecho de que un tensor autodual no contribuye al tensor de energía momento, por lo que no es una fuente en las ecuaciones de movimiento del campo gravitatorio; a la vez que, debido a que el término cinético del gravifotón no depende del dilatón, el campo $F^{\alpha\beta}$ tampoco lleva a una fuente en las ecuaciones del dilatón.[10]

De esta manera, el lagrangiano que describe el acoplamiento de las cuerdas a un campo de fondo de gravifotón autodual es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\alpha'}\left(\frac{1}{2}\tilde{\partial}y^\mu\partial y_\mu - q_\alpha\tilde{\partial}\theta^\alpha + \bar{d}_{\dot{\alpha}}\tilde{\partial}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} - \tilde{q}_\alpha\partial\tilde{\theta}^\alpha + \tilde{\bar{d}}_{\dot{\alpha}}\partial\tilde{\bar{\theta}}^{\dot{\alpha}} + \alpha' q_\alpha\tilde{q}_\beta F^{\alpha\beta}\right). \tag{3.53}$$

Ya que el lagrangiano (3.53) es cuadrático en $q, \tilde{q}$, puede calcularse fácilmente la integral (funcional) en dichas variables. De hecho, si definimos la función de partición como

$$Z[\theta,\tilde{\theta};F] \equiv \int\mathcal{D}\tilde{q}\mathcal{D}q\exp\left(-\frac{1}{\alpha'}\int d^2z\left(-q_\alpha\tilde{\partial}\theta^\alpha - \tilde{q}_\alpha\partial\tilde{\theta}^\alpha + \alpha' q_\alpha\tilde{q}_\beta F^{\alpha\beta}\right)\right), \tag{3.54}$$

es claro que Z es igual a

$$Z[\theta,\tilde{\theta};F] = \exp\left(-\int d^2z\frac{1}{\alpha'^2}F^{-1}_{\alpha\beta}\partial\tilde{\theta}^\alpha\tilde{\partial}\theta^\beta\right) \tag{3.55}$$

Utilizando esta relación, podemos escribir un lagrangiano efectivo

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{1}{\alpha'}\left(\frac{1}{2}\tilde{\partial}y^\mu\partial y_\mu + \bar{d}_{\dot{\alpha}}\tilde{\partial}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + \tilde{\bar{d}}_{\dot{\alpha}}\partial\tilde{\bar{\theta}}^{\dot{\alpha}} + \frac{1}{\alpha'}F^{-1}_{\alpha\beta}\partial\tilde{\theta}^\alpha\tilde{\partial}\theta^\beta\right) \tag{3.56}$$

3.3.2. D-branas y Condiciones de Contorno

Consideremos ahora que la hoja de mundo de la cuerda (abierta) termina sobre una $D3$-brana, cuyo volumen de mundo llena el espacio plano 4-dimensional. Las condiciones de contorno apropiadas para cuerdas abiertas se obtienen de imponer la cancelación de los términos de borde que aparecen al variar la acción. Si trabajamos a nivel arbol, el disco puede ser mapeado al semiplano superior, de manera que las condiciones de contorno deben imponerse en $z = \tilde{z}$

Del lagrangiano (3.53) resultan las condiciones

$$\begin{gathered}\int_{z=\tilde{z}}(dz\,\delta y^\mu\,\partial y_\mu - d\tilde{z}\,\delta y^\mu\,\tilde{\partial}y_\mu) = 0\\ \int_{z=\tilde{z}}(dz\,q_\alpha\delta\theta^\alpha - d\tilde{z}\,\tilde{q}_\alpha\delta\tilde{\theta}^\alpha) = 0,\end{gathered} \tag{3.57}$$

que llevan a las condiciones de contorno de Neumann

$$\begin{aligned}(\partial - \tilde{\partial})y^\mu\,|_{z=\tilde{z}} &= 0\\ (q_\alpha - \tilde{q}_\alpha)\,|_{z=\tilde{z}} &= 0\\ (\theta^\alpha - \tilde{\theta}^\alpha)\,|_{z=\tilde{z}} &= 0.\end{aligned} \tag{3.58}$$

[10]Por el contrario, si ambos tensores autodual y antiautodual son no nulos, hay una “backreaction” que deforma la métrica del espacio-tiempo a ser la de $AdS_2 \times S^2$ euclídeo.

Por su parte, el lagrangiano (3.53) también implica las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned}\tilde{\partial}\theta^\alpha - \alpha' F^{\alpha\beta}\tilde{q}_\beta &= 0\\ \partial\tilde{\theta}^\alpha + \alpha' F^{\alpha\beta} q_\beta &= 0.\end{aligned} \tag{3.59}$$

Por lo tanto, consistencia entre (3.58) y (3.59) requiere que

$$(\tilde{\partial}\theta^\alpha + \partial\tilde{\theta}^\alpha)\mid_{z=\bar{z}} = 0. \tag{3.60}$$

3.3.3. Propagadores y Relaciones de Anticonmutación

Para obtener las relaciones de anticonmutación de las coordenadas fermiónicas necesitamos primero calcular los siguientes propagadores

$$\begin{aligned}G_1^{\alpha\beta}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}) &\equiv \langle\theta^\alpha(z,\tilde{z})\theta^\beta(w,\tilde{w})\rangle\\ G_2^{\alpha\beta}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}) &\equiv \langle\theta^\alpha(z,\tilde{z})\tilde{\theta}^\beta(w,\tilde{w})\rangle\\ G_3^{\alpha\beta}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}) &\equiv \langle\tilde{\theta}^\alpha(z,\tilde{z})\tilde{\theta}^\beta(w,\tilde{w})\rangle\end{aligned} \tag{3.61}$$

los cuales, de acuerdo al lagrangiano (3.56), deben satisfacer las siguiente ecuación diferencial

$$\partial_z\tilde{\partial}_{\tilde{z}}G_i^{\alpha\beta}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}) = -\alpha'^2 F^{\alpha\beta}\,\delta^2(z-w)\,\delta_i^2 \tag{3.62}$$

Las condiciones (3.58) y (3.60) en $w=\tilde{w}$ implican las siguientes condiciones entre los propagadores G_i

$$G_1^{\alpha\beta}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}) = G_2^{\alpha\beta}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}) \tag{3.63}$$

$$G_2^{\alpha\beta}(w,\tilde{w}|z,\tilde{z}) = G_3^{\alpha\beta}(w,\tilde{w}|z,\tilde{z}) \tag{3.64}$$

$$\tilde{\partial}_{\tilde{w}}G_1^{\alpha\beta}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}) = -\partial_w G_2^{\alpha\beta}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}) \tag{3.65}$$

$$\tilde{\partial}_{\tilde{w}}G_2^{\alpha\beta}(w,\tilde{w}|z,\tilde{z}) = -\partial_w G_3^{\alpha\beta}(w,\tilde{w}|z,\tilde{z}) \tag{3.66}$$

A su vez, el carácter Grassmann de θ y las relaciones de conjugación compleja entre las coordenadas fermiónicas θ y $\tilde{\theta}$ imponen los vínculos

$$G_1^{\alpha\beta}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}) = -G_1^{\beta\alpha}(w,\tilde{w}|z,\tilde{z}) \tag{3.67}$$

$$G_3^{\alpha\beta}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}) = -G_3^{\beta\alpha}(w,\tilde{w}|z,\tilde{z}) \tag{3.68}$$

$$(G_1^{\alpha\beta}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}))^* = G_3^{\beta\alpha}(w,\tilde{w}|z,\tilde{z}) \tag{3.69}$$

$$(G_2^{\alpha\beta}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}))^* = G_2^{\beta\alpha}(w,\tilde{w}|z,\tilde{z}) \tag{3.70}$$

Ya que las condiciones de contorno (3.58) y (3.60) son preservadas bajo conjugación compleja, solo necesitamos encontrar G_1 y G_2, ya que G_3 puede ser obtenido como el complejo conjugado de G_1 (ver ec.(3.69)). Se puede verificar que los propagadores que satisfacen las condiciones de contorno

(3.58) y (3.60) son

$$
\begin{aligned}
G_1^{\alpha\beta}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}) &= -\frac{\alpha'^2}{2\pi}F^{\alpha\beta}(z,w)\ln\frac{\tilde{z}-w}{z-\tilde{w}} \\
G_2^{\alpha\beta}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}) &= -\frac{\alpha'^2}{2\pi}F^{\alpha\beta}(z,\tilde{w})\ln\frac{|z-w|^2}{(z-\tilde{w})^2} \\
G_3^{\alpha\beta}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}) &= -\frac{\alpha'^2}{2\pi}F^{\alpha\beta}(\tilde{z},\tilde{w})\ln\frac{\tilde{z}-w}{z-\tilde{w}} \qquad (3.71)
\end{aligned}
$$

Tomando z y w tal que estén sobre el contorno $z=\tilde{z}=\tau,\ w=\tilde{w}=\tau'$ se obtiene

$$
\langle\theta^\alpha(\tau)\theta^\beta(\tau')\rangle = \frac{i}{2}\alpha'^2F^{\alpha\beta}\,\mathrm{sgn}(\tau-\tau') \qquad (3.72)
$$

lo que resulta en el siguiente anticonmutador para θ

$$
\begin{aligned}
\{\theta^\alpha,\theta^\beta\} &= \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\theta^\alpha(\tau+\epsilon)\theta^\beta(\tau)+\theta^\beta(\tau)\theta^\alpha(\tau-\epsilon)\Big) \qquad (3.73)\\
&= i\alpha'^2F^{\alpha\beta} \qquad (3.74)
\end{aligned}
$$

Ya que las coordenadas y y $\bar{\theta}$ no son afectadas por el acoplamiento al gravifotón, ellas permanecen (anti)conmutantes.

Encontramos así que la deformación del superespacio estudiada en la sección 3.2 aparece naturalmente sobre el volumen de mundo de una $D3$-brana cuando un campo de fondo de gravifotón autodual está presente. Además, vemos que el parámetro de la deformación es directamente proporcional al gravifotón, i.e. $C^{\alpha\beta}=\alpha'^2F^{\alpha\beta}$. Por lo tanto, ya que el campo de gravifotón considerado es constante, la consecuente deformación del superespacio también lo es. Veremos en el próximo capítulo que deformaciones más generales del superespacio (producto de considerar campos de gravifotón no constantes) también pueden originarse en teorías de cuerdas.

Capítulo 4

Superespacio No(Anti)Conmutativo II

Deformación Dependiente de la Posición

Este capítulo estará dedicado a estudiar la posibilidad de extender las deformaciones no(anti)conmutativas descriptas en el capítulo anterior al caso de deformaciones dependientes de la posición. Los resultados presentados serán los primeros aportes originales de esta tesis. La primera mitad del capítulo estará dedicada a estudiar el problema dentro del contexto de teorías de campos. Comenzaremos definiendo el álgebra de Clifford para las coordenadas fermiónicas quirales de manera tal que el parámetro de la deformación $C^{\alpha\beta}$ dependa de las coordenadas quirales y^μ. Mostraremos que la supersimetría quiral $\mathcal{N} = 1/2$ aún puede ser definida, y que los supercampos quiral y antiquiral son todavía cerrados ante el producto Moyal asociativo que implementa la deformación. Una teoría de super Yang-Mills $\mathcal{N} = 1/2$ deformada podrá ser construida consistentemente si y solo si $C^{\alpha\beta}$ satisface cierta ecuación diferencial. En la segunda mitad del capítulo analizaremos el problema desde el lado de teoría de cuerdas. Comenzando con el modelo de supercuerdas tipo II definida sobre $R^{2,2} \times CY_6$ en un campo de fondo de gravifotón lineal, seremos capaces de derivar las relaciones de (anti)conmutación para las coordenadas del superespacio postuladas al principio del capítulo. Además, encontraremos una relación de proporcionalidad entre el tensor de campo de gravifotón y el parámetro de la deformación. De esta manera, la ecuación diferencial para el parámetro $C^{\alpha\beta}$ anteriormente mencionada podrá ser conectada a la ecuación de movimiento del gravifotón.

En el capítulo anterior mostramos que si se considera una teoría de supercuerdas tipo II con supersimetría $\mathcal{N} = 2$ en $\mathbb{R}^4$ en presencia de una gravifotón autodual constante, el álgebra efectiva de las coordenadas fermiónicas θ^α resulta deformada a $\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = C^{\alpha\beta}$, con la matriz de la deformación $C^{\alpha\beta}$ y el tensor de campo de gravifotón $F^{\alpha\beta}$ relacionados por $C^{\alpha\beta} = \alpha'^2 F^{\alpha\beta}$.

Poco después del trabajo de Seiberg [11], Gorsky y Shifman [64] encontraron que la existencia de las teorías de super Yang-Mills C-deformadas $\mathcal{N} = \frac{1}{2}$ está relacionada con la degeneración espectral de la teorías de super Yang-Mills $\mathcal{N} = 1$ convencional. Más aún, según este último trabajo, las anterior degeneración espectral sugiere que la supersimetría $\mathcal{N} = \frac{1}{2}$ debería permanecer válida incluso cuando el parámetro $C^{\alpha\beta}$ depende de las coordenadas.

En este capítulo se estudia la posibilidad de obtener deformaciones NAC del superespacio dependientes de la posición, primero desde el punto de vista de teorías de campo y luego desde la teoría de cuerdas. Los resultados obtenidos representan las primeras contribuciones originales de esta tesis. Más en detalle, en lo que se refiere a teorías de campos NAC, consideramos la deformación del álgebra de las coordenadas fermiónicas θ^α con $C^{\alpha\beta}$ dependiendo de la variable quiral y, esto es,

$$\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = C^{\alpha\beta}(y), \tag{4.1}$$

con $C^{\alpha\beta}(y)$ una matriz simétrica cuyas entradas son funciones arbitrarias de y^μ. De manera análoga a lo que ocurre con $C^{\alpha\beta}$ constante, se encuentra que la subálgebra generada por Q_α es preservada, de manera que es posible definir una supersimetría quiral $\mathcal{N} = \frac{1}{2}$. También se muestra que los supercampos quirales y antiquirales todavía son cerrados ante el producto asociativo Moyal que implementa la deformación. El caso de los supercampos antiquirales debe ser manejado con cuidado debido a que la derivada covariante quiral D_α viola la regla de Leibnitz. De hecho, como consecuencia de esto último resulta que los supercampos de curvatura quiral y antiquiral dejan de transformar covariantemente ante transformaciones de supergauge generales. Sin embargo, se muestra que todavía es posible definir consistentemente una teoría de super Yang-Mills deformada si se adopta desde el principio el gauge de Wess-Zumino y se restringen las transformaciones de supergauge apropiadamente. También se observa que el requerimiento de invarianza de gauge de la teoría deformada impone una llamativa condición sobre el parámetro de la deformación, la cual es

$$\partial_\mu C^{\mu\nu} = 0. \tag{4.2}$$

Una vez encontradas las condiciones necesarias para poder construir una teoría de gauge consistente sobre este superespacio deformado, la siguiente cuestión a resolver es saber si este tipo de deformaciones dependientes de las coordenadas puede tener su origen en teorías de cuerdas. Evidentemente, será necesario considerar a la teoría de cuerdas inmersa en campos de fondo de gravifotón más generales que los considerados por Seiberg en [11]. Como se muestra al final del capítulo, relaciones de anticonmutación del tipo (4.1) aparecen sobre el volumen de mundo de $D3$-branas en modelos de supercuerdas tipo IIB definida sobre $\mathbb{R}^{2,2}$ en presencia de una determinada familia de campos de fondo de gravifotón autoduales $F^{\alpha\beta}(y)$. Más aún, la relación existente entre el tensor de campo de gravifotón $F^{\alpha\beta}(y)$ y el parametro de la deformación $C^{\alpha\beta}(y)$ permite entender el origen de la condición impuesta sobre este último ec.(4.2), necesaria para definir consistentemente la teoría de campos.

4.1. Superespacio Deformado

Consideremos el superespacio $\mathcal{N} = 1$ con 4 dimensiones espacio-temporales parametrizado por coordenadas bosónicas quirales $y^\mu = x^\mu + i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ y coordenadas fermiónicas quiral y antiquiral $\theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$. Dado este superespacio, nos interesará analizar la posibilidad de generalizar la deformación estudiada en el capítulo 3 al caso en el que el parámetro de la deformación depende de las coordenadas espaciales. Dicho análisis representa el primer aporte original de esta tesis. De esta manera, empezaremos postulando el siguiente álgebra para las supercoordenadas,

$$\begin{aligned}
&\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = C^{\alpha\beta}(y)\ , \qquad \{\bar\theta^{\dot\alpha}, \bar\theta^{\dot\beta}\} = 0\ , \qquad \{\theta^\alpha, \bar\theta^{\dot\beta}\} = 0 \\
&[y^\mu, y^\nu] = [y^\mu, \theta^\alpha] = [y^\mu, \bar\theta^{\dot\alpha}] = 0
\end{aligned} \tag{4.3}$$

donde $C^{\alpha\beta}$ es una matriz simétrica que depende de las coordenadas quirales.

De idéntica manera a lo hecho en el capítulo anterior, podemos implementar la deformación (4.3) mediante el producto Moyal

$$\begin{aligned}
f(y,\theta,\bar\theta) * g(y,\theta,\bar\theta) &\equiv f(y,\theta,\bar\theta) \exp\left(-\frac{1}{2} C^{\alpha\beta}(y) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^\alpha} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta^\beta}\right) g(y,\theta,\bar\theta) \\
&= f(y,\theta,\bar\theta)\left(1 - \frac{1}{2} C^{\alpha\beta}(y) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^\alpha} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta^\beta} - \det C(y) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta\theta} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta\theta}\right) g(y,\theta,\bar\theta)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

donde $f(y,\theta,\bar\theta)$ y $g(y,\theta,\bar\theta)$ son funciones del superespacio ordinario.

El paso siguiente es estudiar cómo resultan afectadas el álgebra de las superderivadas covariantes y de las supercargas cuando es introducida la deformación $C(y)$. Si consideramos las expresiones ordinarias para Q y D correspondientes a la base quiral,

$$Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\ , \qquad \bar Q_{\dot\alpha} = -\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} + 2i\theta^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha} \frac{\partial}{\partial y^\mu}, \tag{4.5}$$

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + 2i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha} \bar\theta^{\dot\alpha} \frac{\partial}{\partial y^\mu}\ , \qquad \bar D_{\dot\alpha} = -\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} \tag{4.6}$$

es fácil verificar que las relaciones de anticonmutación de las superderivadas permanecen invariante ante la deformación,

$$\begin{aligned}
\{D_\alpha, D_\beta\} &= \{\bar D_{\dot\alpha}, \bar D_{\dot\beta}\} = 0 \\
\{\bar D_{\dot\alpha}, D_\alpha\} &= -2i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha} \frac{\partial}{\partial y^\mu} \\
\{D_\alpha, Q_\beta\} &= \{\bar D_{\dot\alpha}, Q_\beta\} = \{D_\alpha, \bar Q_{\dot\beta}\} = \{\bar D_{\dot\alpha}, \bar Q_{\dot\beta}\} = 0
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Por el contrario, el álgebra de las supercargas resulta deformada de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\{Q_\alpha, Q_\beta\}_* &= 0 \\
\{\bar Q_{\dot\alpha}, Q_\alpha\}_* &= 2i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha} \frac{\partial}{\partial y^\mu} \\
\{\bar Q_{\dot\beta}, \bar Q_{\dot\alpha}\}_* &= -2\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\sigma^\nu_{\beta\dot\beta}(\partial_\mu C^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial y^\nu} + \partial_\nu C^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial y^\mu} + 2C^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial y^\mu \partial y^\nu})
\end{aligned} \tag{4.8}$$

De forma análoga al caso C constante, solo el subálgebra quiral generada por Q_α es preservada. Ya que el álgebra de supercargas del superespacio deformado queda reducido a la mitad, este superespacio también será considerado como correspondiendo a supersimetría $\mathcal{N} = 1/2$.

4.2. Supercampos Quiral y Vectorial

Un supercampo quiral Φ satisface la condición $\bar{D}_{\dot{\alpha}} * \Phi = 0$. Luego, como es usual, éste puede ser expresado

$$\Phi(y,\theta) = \phi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y). \tag{4.9}$$

La multiplicación Moyal de dos supercampos quirales $\Phi_1(y,\theta)$ y $\Phi_2(y,\theta)$ toma la forma

$$\begin{aligned}\Phi_1(y,\theta) * \Phi_2(y,\theta) &= \Phi_1(y,\theta)\Phi_2(y,\theta) - C^{\alpha\beta}(y)\psi_{1\alpha}(y)\psi_{2\beta}(y) \\ &+ \sqrt{2}C^{\alpha\beta}(y)\theta_\beta(\psi_{1\alpha}(y)F_2(y) - \psi_{2\alpha}(y)F_1(y)) \\ &- \det C(y)F_1(y)F_2(y). \end{aligned}\tag{4.10}$$

Es fácil ver que el lado derecho de esta igualdad en una función de y y θ solamente, por lo que el producto de dos supercampos quirales es un supercampo quiral. Este resultado podría haber sido predicho a partir de observar que la derivada covariante $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ satisface la regla de Leibniz. Esto es, si consideramos a $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ actuando sobre un producto de supercampos,

$$\begin{aligned}\bar{D}_{\dot{\alpha}}(\Phi(y,\theta,\bar{\theta}) * \Psi(y,\theta,\bar{\theta})) &= \bar{D}_{\dot{\alpha}}\left[\Phi \exp\left(-\frac{1}{2}C^{\alpha\beta}(y)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^\alpha}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta^\beta}\right)\Psi\right] \\ &= \bar{D}_{\dot{\alpha}}(\Phi)\exp\left(-\frac{1}{2}C^{\alpha\beta}(y)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^\alpha}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta^\beta}\right)\Psi + (-1)^{F[\Phi]}\Phi\exp\left(-\frac{1}{2}C^{\alpha\beta}(y)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^\alpha}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta^\beta}\right)\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Psi \\ &= \bar{D}_{\dot{\alpha}}(\Phi) * \Psi + (-1)^{F[\Phi]}\Phi * \bar{D}_{\dot{\alpha}}\Psi \end{aligned}\tag{4.11}$$

El caso de supercampos antiquirales es un poco menos evidente. Un supercampo antiquiral es definido por $D_\alpha * \bar{\Phi} = 0$. Así, $\bar{\Phi}$ solo depende de $\bar{\theta}$ y las coordenadas antiquirales $\bar{y}^\mu = y^\mu - 2i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$. Escrito en la base quiral y^μ, $\bar{\Phi}$ toma la forma

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}(y - 2i\theta\sigma\bar{\theta},\bar{\theta}) &= \bar{\phi}(y - 2i\theta\sigma\bar{\theta}) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(y - 2i\theta\sigma\bar{\theta}) + \bar{\theta}\bar{\theta}\bar{F}(y - 2i\theta\sigma\bar{\theta}) \\ &= \bar{\phi}(y) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(y) - 2i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\bar{\phi}(y) + \bar{\theta}\bar{\theta}(\bar{F}(y) + i\sqrt{2}\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}(y) \\ &+ \theta\theta\partial^\mu\partial_\mu\bar{\phi}) \end{aligned}\tag{4.12}$$

Por su parte, el producto de supercampos antiquirales resulta

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_1(y - 2i\theta\sigma\bar{\theta},\bar{\theta}) * \bar{\Phi}_2(y - 2i\theta\sigma\bar{\theta},\bar{\theta}) &= \bar{\Phi}_1(y - 2i\theta\sigma\bar{\theta},\bar{\theta})\bar{\Phi}_2(y - 2i\theta\sigma\bar{\theta},\bar{\theta}) \\ &+ 2\bar{\theta}\bar{\theta}C^{\mu\nu}(y)\partial_\mu\bar{\phi}_1(y)\partial_\nu\bar{\phi}_2(y) \end{aligned}\tag{4.13}$$

Ya que el término $C^{\mu\nu}(y)\partial_\mu\bar{\phi}_1(y)\partial_\nu\bar{\phi}_2(y)$ aparece multiplicado por $\bar{\theta}\bar{\theta}$, su argumento puede ser tomado equivalentemente a ser las coordenadas antiquirales $\bar{y}^\mu$. Luego, es claro que el producto de dos supercampos antiquirales es otro supercampo antiquiral. Sin embargo, este resultado no era del todo esperable si tenemos en cuenta que, debido a la dependencia en las coordenadas de la deformación $C^{\alpha\beta}$, la derivada covariante D_α viola la regla de Leibniz. Esto puede ser visto de actuar con D_α sobre un producto de supercampos genéricos

$$
\begin{aligned}
& D_\alpha(\Phi(y,\theta,\bar\theta) * \Psi(y,\theta,\bar\theta)) = D_\alpha \left[\Phi \exp\left(-\frac{1}{2}C^{\alpha\beta}(y)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^\alpha}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta^\beta}\right)\Psi\right] \\
& = D_\alpha(\Phi)\exp\left(-\frac{1}{2}C^{\alpha\beta}(y)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^\alpha}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta^\beta}\right)\Psi + (-1)^{F[\Phi]}\Phi\exp\left(-\frac{1}{2}C^{\alpha\beta}(y)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^\alpha}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta^\beta}\right)D_\alpha\Psi \\
& +\Phi D_\alpha\left[\exp\left(-\frac{1}{2}C^{\alpha\beta}(y)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^\alpha}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta^\beta}\right)\right]\Psi \\
& = D_\alpha(\Phi) * \Psi + (-1)^{F[\Phi]}\Phi * D_\alpha\Psi + \Phi D_\alpha(*)\Psi
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

donde hemos introducido la notación $D_\alpha(*)$ definida por

$$
\Phi D_\alpha(*)\Psi = -2i(\sigma^\mu\bar\theta)_\alpha\left(\frac{1}{2}\partial_\mu(C^{\beta\gamma})\Phi\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^\beta}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta^\gamma}\Psi + \partial_\mu(\det C)\Phi\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta\theta}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta\theta}\Psi\right) \tag{4.15}
$$

Discutamos ahora el caso del supercampo vectorial. De igual manera que en el caso de C constante, el supercampo V es una matriz sobre la que la simetría de gauge actúa como

$$
\exp(-2gV) \to \exp(-2gV') = \exp(ig\bar\Lambda) * \exp(-2gV) * \exp(-ig\Lambda) \tag{4.16}
$$

donde $V = V^aT^a$, $\Lambda = \Lambda^aT^a$ y $\bar\Lambda = \bar\Lambda^aT^a$, con $\Lambda^a(\bar\Lambda^a)$ supercampos quirales (antiquirales) y T^a generadores de $U(N)$.

Si consideramos las expresiones estándar para los supercampos de curvatura quiral y antiquiral,

$$
W_\alpha = \frac{1}{8g}\bar D * \bar D * \exp(2gV) * D_\alpha * \exp(-2gV) \tag{4.17}
$$

$$
\bar W_{\dot\alpha} = -\frac{1}{8g}D * D * \exp(-2gV) * \bar D_{\dot\alpha} * \exp(2gV) \tag{4.18}
$$

y usamos las ecs.(4.11),(4.14), se puede verificar que estos supercampos transforman ante una transformación infinitesimal de supergauge de acuerdo a

$$
\begin{aligned}
\delta W_\alpha &= ig\left(\Lambda * W_\alpha - W_\alpha * \Lambda\right) \\
&+ \frac{ig}{4}\bar D\bar D\left[e^{2gV} * \left(e^{-2gV}D_\alpha(*)\Lambda - \bar\Lambda D(*)e^{-2gV}\right)\right] \\
\delta\bar W_{\dot\alpha} &= ig\left(\bar\Lambda * \bar W_{\dot\alpha} - \bar W_{\dot\alpha} * \bar\Lambda\right) \\
&- \frac{ig}{2}D_\alpha(e^{-2gV} * \bar D_{\dot\alpha}e^{2gV})D^\alpha(*)\bar\Lambda - ig^2\bar\Lambda D^\alpha(*)D_\alpha(e^{-2gV} * \bar D_{\dot\alpha}e^{2gV})
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

Así, queda claro que ni el supercampo de curvatura quiral ni el antiquiral transforman covariantemente ante una transformación de supergauge general a menos que el parámetro de la deformación $C^{\alpha\beta}$ sea constante. Como resultado de esto, no podemos utilizar la covarianza de gauge para pasar de un supercampo vectorial arbitrario a otro en el gauge de Wess-Zumino. Sin embargo, podemos todavía construir teorías de gauge en presencia de deformaciones $C = C(y)$ si requerimos que el supercampo vectorial V esté en el gauge de Wess-Zumino desde el principio. Como en el caso de deformaciones constantes, es conveniente identificar los campos componentes en V de acuerdo a

$$\begin{aligned} V(y,\theta,\bar\theta) &= i\theta\sigma^\mu\bar\theta A_\mu(y) - i\bar\theta\bar\theta\theta^\alpha\left(\lambda_\alpha(y) + \frac{i}{2} g\,\varepsilon_{\alpha\beta}C^{\beta\gamma}(y)\sigma^\mu_{\gamma\dot\gamma}\{\bar\lambda^{\dot\gamma}(y), A_\mu(y)\}\right) \\ &\quad + i\theta\theta\bar\theta\bar\lambda(y) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar\theta\bar\theta(D(y) - i\partial_\mu A^\mu(y)) \end{aligned} \tag{4.20}$$

Ya que V está en el gauge de Wess-Zumino

$$\begin{aligned} V^2 &\equiv V * V = -\frac{1}{2}\bar\theta\bar\theta\left[\theta\theta A_\mu A^\mu - C^{\mu\nu}A_\mu A_\nu - \theta_\alpha C^{\alpha\beta}\sigma^\mu_{\beta\dot\beta}[A_\mu, \bar\lambda^{\dot\beta}] + \frac{1}{4}|C|^2\bar\lambda\bar\lambda\right] \\ V^3 &= 0 \end{aligned} \tag{4.21}$$

donde $C^{\mu\nu} = C^{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\gamma}(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \gamma}$ es autodual, y $|C|^2 \equiv C^{\mu\nu}C_{\mu\nu} = 4\,\mathrm{det}C$.

Los supercampos de curvatura, escritos en componentes, toman la forma

$$W_\alpha = W_\alpha(C=0) - 2g\,\varepsilon_{\alpha\gamma}C^{\gamma\beta}\theta_\beta\bar\lambda\bar\lambda(y) \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned} \bar W_{\dot\alpha} &= \bar W_{\dot\alpha}(C=0) - \bar\theta\bar\theta\Big[g\,C^{\mu\nu}\{F_{\mu\nu}, \bar\lambda_{\dot\alpha}\} + 2g\,C^{\mu\nu}\{A_\nu, \mathcal{D}_\mu\bar\lambda_{\dot\alpha} + \frac{i}{2}g\,[A_\mu, \bar\lambda_{\dot\alpha}]\} \\ &\quad + \frac{i}{4}g^2\,|C|^2\{\bar\lambda\bar\lambda, \bar\lambda_{\dot\alpha}\} + 2g\partial_\mu C^{\mu\nu}\{\bar\lambda_{\dot\alpha}, A_\nu\}\Big] \end{aligned} \tag{4.23}$$

donde

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] \\ \mathcal{D}_\mu\lambda_\alpha &= \partial_\mu\lambda_\alpha - ig[A_\mu, \lambda_\alpha] \end{aligned}$$

y $W_\alpha(C=0)$, $\bar W_{\dot\alpha}(C=0)$ vienen dados por las ecs. (2.81) y (2.82). Todavía podemos realizar una transformación de supergauge infinitesimal que preserve el gauge de Wess-Zumino (4.20) mediante

$$\begin{aligned} \Lambda(y,\theta) &= \varphi(y) \\ \bar\Lambda(\bar y,\bar\theta) &= \varphi(y) - 2\theta\sigma^\mu\bar\theta\partial_\mu\bar\varphi(y) + \theta\theta\bar\theta\bar\theta\partial^\mu\partial_\mu\bar\varphi + ig\bar\theta\bar\theta C^{\mu\nu}\{\partial_\mu\varphi, A_\nu\} \end{aligned} \tag{4.24}$$

Como en el capítulo anterior, la parametrización particular del coeficiente de $\bar\theta\bar\theta\theta$ en V permite que la anterior transformación de gauge actúe sobre los campos componentes en la manera estándar (ver ec.(2.90)).

Para el caso de la transformación de supergauge (4.24), la transformación de los supercampos de curvatura se reduce a

$$\begin{aligned} \delta W_\alpha &= ig\,(\Lambda * W_\alpha - W_\alpha * \Lambda) \\ \delta\bar W_{\dot\alpha} &= ig\left(\bar\Lambda * \bar W_{\dot\alpha} - \bar W_{\dot\alpha} * \bar\Lambda\right) + 2g\bar\theta\bar\theta\partial_\mu C^{\mu\nu}\{\bar\lambda_{\dot\alpha}, \partial_\nu\varphi\} \end{aligned} \tag{4.25}$$

Finalmente, la covarianza de gauge ante el conjunto de transformaciones (4.24) es obtenida si imponemos la condición

$$\partial_\mu C^{\mu\nu} = 0 \tag{4.26}$$

Como discutimos en el capítulo anterior, en el caso de deformaciones constantes el parámetro $C^{\alpha\beta}$ está relacionado al campo de fondo de gravifotón a través de la fórmula $(\alpha')^2 F^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta}$. Luego, resulta natural interpretar la condición (4.26) como equivalente a la ecuación de movimiento del gravifotón, suponiendo que la relación entre el parámetro de la deformación y el campo de gravifotón autodual sigue siendo válida. De hecho, en la siguiente sección mostraremos desde el lado de teoría de cuerdas que la anterior afirmación es correcta, al menos para una determinada familia de deformaciones no constantes.

Finalizaremos esta sección con algunos comentarios sobre las transformaciones de supersimetrías de las teorías deformadas. Como vimos anteriormente, tanto en el caso de deformaciones constantes como en el de las dependientes de la posición, las supercargas antiquirales $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ ya no satisfacen el álgebra supersimétrica ni actúan como operadores diferenciales, por lo que no esperamos que las variaciones de los campos obtenidas a partir de estas cargas sean simetrías de las teorías supersimétricas deformadas. Por otro lado, las supercargas Q_α sí siguen siendo buenos generadores de supersimetría. De esta manera, podemos obtener las variaciones correspondientes a la supersimetría $\mathcal{N} = \frac{1}{2}$ aplicando estos generadores a los supercampos de la manera

$$\delta f = \xi Q * f \tag{4.27}$$

Sin embargo, debe tenerse cierto cuidado con esta operación cuando el supercampo es el vectorial V ya que, como es bien sabido, las transformaciones de supersimetría sacan a V del gauge de Wess-Zumino. Así, por consistencia deberíamos ser capaces de restaurar el gauge de Wess-Zumino en V después de cada transformación supersimétrica mediante una transformación de supergauge ante la cual $\operatorname{tr} W^2$ y $\operatorname{tr} \bar{W}^2$ permanezcan invariantes. En el caso que nos ocupa, la transformación de supergauge que restaura el gauge de Wess-Zumino es generada por

$$\Lambda = 0\,, \qquad \bar{\Lambda} = i\xi\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu - \bar{\theta}\bar{\theta}\left(\xi\lambda + g\xi\sigma_\mu\bar{\lambda}C^{\mu\nu}A_\nu\right) \tag{4.28}$$

Como puede verse de (4.19), ambos W y $\bar{W}$ transforman covariantemente ante la transformación (4.28), tal como es requerido por consistencia. La composición de las transformaciones de gauge y supersimetría dan como resultado las siguientes variaciones de los campos componentes

$$\begin{aligned}
&\delta A_\mu = -i\bar{\lambda}\bar{\sigma}_\mu\xi \quad \rightarrow \quad \delta F_{\mu\nu} = i\xi(\sigma_\nu\mathcal{D}_\mu - \sigma_\mu\mathcal{D}_\nu)\bar{\lambda} \\
&\delta\lambda = iD\xi + \sigma^{\mu\nu}\xi\left(F_{\mu\nu} - g\,C_{\mu\nu}\bar{\lambda}\bar{\lambda}\right) \\
&\delta\bar{\lambda} = 0 \\
&\delta D = -\xi\sigma^\mu\mathcal{D}_\mu\bar{\lambda}
\end{aligned} \tag{4.29}$$

4.3. Super QCD $\mathcal{N} = 1/2$ en Superespacio Deformado

De los resultados anteriores vemos que, una vez impuesta la condición (4.26), es posible construir consistentemente una teoría de gauge supersimétrica en el superespacio deformado. El lagrangiano correspondiente, en término de los supercampos, es invariante tanto ante transformaciones de supersimetría generales como ante ciertas transformaciones de supergauge particulares, que a nivel de campos componentes corresponden a las tranformaciones de gauge estándar.

El lagrangiano de super Yang-Mills en el superespacio $C(y)$-deformado toma la forma

$$\mathcal{L}^{SYM} = \frac{\text{tr}}{2}\left(\int d^2\theta\, W^\alpha * W_\alpha + \int d^2\bar{\theta}\, \bar{W}_{\dot{\alpha}} * \bar{W}^{\dot{\alpha}}\right) \tag{4.30}$$

Usando las expresiones (4.23) para los supercampos de curvatura, los términos F son

$$\begin{aligned} \text{tr}\, W^\alpha * W_\alpha\,|_{\theta\theta} &= \text{tr}\, W^\alpha W_\alpha(C=0)\,|_{\theta\theta} - 2igC^{\mu\nu}\text{tr}F_{\mu\nu}\bar{\lambda}\bar{\lambda} + g^2|C|^2\text{tr}(\bar{\lambda}\bar{\lambda})^2 && (4.31) \\ \text{tr}\, \bar{W}_{\dot{\alpha}} * \bar{W}^{\dot{\alpha}}\,|_{\bar{\theta}\bar{\theta}} &= \text{tr}\, \bar{W}_{\dot{\alpha}}\bar{W}^{\dot{\alpha}}(C=0)\,|_{\bar{\theta}\bar{\theta}} - 2igC^{\mu\nu}\text{tr}F_{\mu\nu}\bar{\lambda}\bar{\lambda} + g^2|C|^2\text{tr}(\bar{\lambda}\bar{\lambda})^2 \\ &\quad + \text{ derivada total} - 4ig\text{tr}\partial_\mu(C^{\mu\nu}A_\nu\bar{\lambda}\bar{\lambda}) && (4.32) \end{aligned}$$

Luego, despreciando términos de superficie, el lagrangiano de super Yang-Mills $\mathcal{N} = 1/2$ en término de los campos componentes es

$$\mathcal{L}_C^{SYM} = \mathcal{L}_{C=0}^{SYM} - 2igC^{\mu\nu}(y)\text{tr}F_{\mu\nu}\bar{\lambda}\bar{\lambda} + g^2|C(y)|^2\text{tr}(\bar{\lambda}\bar{\lambda})^2 \tag{4.33}$$

Veamos ahora como agregar campos de materia, de manera de poder construir en el superespacio deformado una versión supersimétrica de QCD con grupo de gauge $U(N_c)$ y N_f sabores. Los campos de materia son pares de supercampos quirales $\{\Phi, \Psi\}$ que transforman como multipletes $\{\mathbf{N_c}, \bar{\mathbf{N}}_\mathbf{c}\}$ del grupo de color. El lagrangiano deformado de super QCD (SQCD) es definido como

$$\mathcal{L}^{SQCD} = \mathcal{L}_C^{SYM} + \mathcal{L}_C^{mat} \tag{4.34}$$

donde el lagrangiano de materia es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_C^{mat} &= \int d^4\theta\, \left(\bar{\Phi} * \exp(-2gV) * \Phi + \Psi * \exp(2gV) * \bar{\Psi}\right) \\ &+ \int d^2\theta\, m\, \Psi * \Phi + \int d^2\bar{\theta}\, \bar{m}\, \bar{\Phi} * \bar{\Psi} \end{aligned} \tag{4.35}$$

El lagrangiano de materia (4.35) es invariante ante las transformaciones de supergauge $U(N_c)$,

$$\begin{aligned} (\Phi, \bar{\Phi}) &\to (e^{ig\Lambda} * \Phi, \bar{\Phi} * e^{-ig\bar{\Lambda}}), \\ (\Psi, \bar{\Psi}) &\to (\Psi * e^{-ig\Lambda}, e^{ig\bar{\Lambda}} * \bar{\Psi}), \\ e^{-2gV} &\to e^{ig\bar{\Lambda}} * e^{-2gV} * e^{-ig\Lambda}, \end{aligned} \tag{4.36}$$

Para obtener las transformaciones de gauge ordinarias para los campos componentes a partir de las transformaciones de supergauge generadas por (4.24) debemos parametrizar los supercampos de material como en el capítulo anterior [63],

$$\begin{aligned} &\Phi(y,\theta) = \phi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F_\phi(y) \\ &\bar{\Phi}(\bar{y},\bar{\theta}) = \bar{\phi}(\bar{y}) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(\bar{y}) + \bar{\theta}\bar{\theta}\left(\bar{F}_{\bar{\phi}} - 2igC^{\mu\nu}\partial_\mu\left(\bar{\phi}A_\nu\right) - g^2C^{\mu\nu}\bar{\phi}A_\mu A_\nu\right)(\bar{y}) \\ &\Psi(y,\theta) = \eta(y) + \sqrt{2}\theta\chi(y) + \theta\theta F_\eta(y) \\ &\bar{\Psi}(\bar{y},\bar{\theta}) = \bar{\eta}(\bar{y}) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\chi}(\bar{y}) + \bar{\theta}\bar{\theta}\left(\bar{F}_{\bar{\eta}} - 2igC^{\mu\nu}\partial_\mu\left(A_\nu\bar{\eta}\right) - g^2C^{\mu\nu}A_\mu A_\nu\bar{\eta}\right)(\bar{y}) \end{aligned} \tag{4.37}$$

Así, escritas en componentes, las transformaciones infinitesimales resultan

$$\begin{aligned} \delta\phi &= ig\varphi\phi & \delta\bar{\phi} &= -ig\bar{\phi}\varphi \\ \delta\psi &= ig\varphi\psi & \delta\bar{\psi} &= -ig\bar{\psi}\varphi \\ \delta F_\phi &= ig\varphi F_\phi & \delta\bar{F}_{\bar{\phi}} &= -ig\bar{F}_{\bar{\phi}}\varphi \\ \\ \delta\bar{\eta} &= ig\varphi\bar{\eta} & \delta\eta &= -ig\eta\varphi \\ \delta\bar{\chi} &= ig\varphi\bar{\chi} & \delta\chi &= -ig\chi\varphi \\ \delta\bar{F}_{\bar{\eta}} &= ig\varphi\bar{F}_{\bar{\eta}} & \delta F_\eta &= -igF_\eta\varphi \end{aligned} \tag{4.38}$$

Los diferentes términos en el lagrangiano de materia escritos en término de los campos componentes toman la forma

$$m\,\Psi * \Phi \mid_{\theta\theta} = m\eta F_\phi + mF_\eta\phi - m\chi\psi \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned} &\bar{m}\,\bar{\Phi} * \bar{\Psi} \mid_{\bar{\theta}\bar{\theta}} = \bar{m}\bar{\phi}\bar{F}_{\bar{\eta}} + \bar{m}\bar{F}_{\bar{\phi}}\bar{\eta} - \bar{m}\bar{\psi}\bar{\chi} \\ &\qquad -ig\bar{m}C^{\mu\nu}\bar{\phi}F_{\mu\nu}\bar{\eta} - 2ig\bar{m}C^{\mu\nu}\partial_\mu\left(\bar{\phi}A_\nu\bar{\eta}\right) + 2\bar{m}C^{\mu\nu}\partial_\mu\bar{\phi}\partial_\nu\bar{\eta} \end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned} &\bar{\Phi} * e^{-2gV} * \Phi \mid_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + \Psi * e^{2gV} * \bar{\Psi} \mid_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} = \bar{\Phi}e^{-2gV}\Phi(C=0) \mid_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + \Psi e^{2gV}\bar{\Psi}(C=0) \mid_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \\ &\qquad + igC^{\mu\nu}\bar{\phi}F_{\mu\nu}F_\phi - \frac{1}{4}g^2\,|C|^2\bar{\phi}\bar{\lambda}\bar{\lambda}F_\phi - \sqrt{2}ig\,\overline{D_\mu\phi}(\sigma^\mu\bar{\lambda})_\alpha C^{\alpha\beta}\psi_\beta \\ &\qquad + igC^{\mu\nu}F_\eta F_{\mu\nu}\bar{\eta} - \frac{1}{4}g^2\,|C|^2F_\eta\bar{\lambda}\bar{\lambda}\bar{\eta} - \sqrt{2}ig\,\chi_\alpha C^{\alpha\beta}(\sigma^\mu\bar{\lambda})_\beta D_\mu\bar{\eta} \end{aligned} \tag{4.41}$$

donde

$$\bar{\Phi}e^{-2gV}\Phi(C=0) \mid_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} = \bar{F}_{\bar{\phi}}F_\phi - i\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu D_\mu\psi - \overline{D_\mu\phi}D^\mu\phi - g\bar{\phi}D\phi - \sqrt{2}ig(\bar{\phi}\lambda\psi - \bar{\psi}\bar{\lambda}\phi) \tag{4.42}$$

$$\Psi e^{2gV}\bar{\Psi}(C=0) \mid_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} = F_\eta\bar{F}_{\bar{\eta}} - i\chi\sigma^\mu D_\mu\bar{\chi} - \bar{D}_\mu\eta D^\mu\bar{\eta} + g\eta D\bar{\eta} - \sqrt{2}ig(\eta\bar{\lambda}\bar{\chi} - \chi\lambda\bar{\eta}) \tag{4.43}$$

y

$$\begin{aligned} D_\mu\phi &= \partial_\mu\phi - igA_\mu\phi & \overline{D_\mu\phi} &= \partial_\mu\bar{\phi} + ig\bar{\phi}A_\mu & D_\mu\psi &= \partial_\mu\psi - igA_\mu\psi \\ D_\mu\bar{\eta} &= \partial_\mu\bar{\eta} - igA_\mu\bar{\eta} & \bar{D}_\mu\eta &= \partial_\mu\eta + ig\eta A_\mu & D_\mu\bar{\chi} &= \partial_\mu\bar{\chi} - igA_\mu\bar{\chi} \end{aligned} \tag{4.44}$$

Poniendo todo esto junto, el lagrangiano SQCD $\mathcal{N} = 1/2$ en componentes es

$$\mathcal{L}^{SQCD} = \mathcal{L}^{SQCD}_{C=0} + \sum_{i=1}^{6}\mathcal{L}_i \tag{4.45}$$

donde

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 &= -2igC^{\mu\nu}(y)\mathrm{tr}F_{\mu\nu}\bar{\lambda}\bar{\lambda} + g^2|C(y)|^2\mathrm{tr}(\bar{\lambda}\bar{\lambda})^2 \\
\mathcal{L}_2 &= igC^{\mu\nu}(y)\bar{\phi}F_{\mu\nu}F_\phi - \frac{1}{4}g^2\,|C(y)|^2\bar{\phi}\bar{\lambda}\bar{\lambda}F_\phi \\
\mathcal{L}_3 &= -i\sqrt{2}g\,\overline{D_\mu\phi}(\sigma^\mu\bar{\lambda})_\alpha C^{\alpha\beta}(y)\psi_\beta \\
\mathcal{L}_4 &= igC^{\mu\nu}(y)F_\eta F_{\mu\nu}\bar{\eta} - \frac{1}{4}g^2\,|C(y)|^2F_\eta\bar{\lambda}\bar{\lambda}\bar{\eta} \\
\mathcal{L}_5 &= -i\sqrt{2}g\,C^{\alpha\beta}(y)\chi_\alpha(\sigma^\mu\bar{\lambda})_\beta D_\mu\bar{\eta} \\
\mathcal{L}_6 &= -ig\bar{m}C^{\mu\nu}(y)\bar{\phi}F_{\mu\nu}\bar{\eta}
\end{aligned}
\tag{4.46}
$$

En la obtención de (4.46) hemos usado la condición (4.26) y descartado términos de superficie. Los campos auxiliares pueden ser eliminados usando sus ecuaciones de movimiento,

$$
\begin{aligned}
F_\phi &= -\bar{m}\bar{\eta} \\
\bar{F}_{\bar{\phi}} &= -m\eta - igC^{\mu\nu}\bar{\phi}F_{\mu\nu} + \frac{1}{4}g^2|C|^2\bar{\phi}\bar{\lambda}\bar{\lambda} \\
F_\eta &= -\bar{m}\bar{\phi} \\
\bar{F}_{\bar{\eta}} &= -m\phi - igC^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\bar{\eta} + \frac{1}{4}g^2|C|^2\bar{\lambda}\bar{\lambda}\bar{\eta}
\end{aligned}
\tag{4.47}
$$

Las variaciones supersimétricas $\mathcal{N} = 1/2$ de los campos componentes de materia que dejan invariante este lagrangiano son [63]

$$
\begin{aligned}
&\delta\phi = \sqrt{2}\xi\psi, \qquad \delta\bar{\phi} = 0, \qquad \delta\psi = \sqrt{2}\xi F_\phi, \qquad \delta\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} = -i\sqrt{2}\overline{D_\mu\phi}(\xi\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}}, \\
&\delta F_\phi = 0, \qquad \delta\bar{F}_{\bar{\phi}} = -i\sqrt{2}\,\overline{D_\mu\psi}\bar{\sigma}^\mu\xi - i\bar{\phi}\xi\lambda + C^{\mu\nu}\bar{D}_\mu\left(\bar{\phi}\xi\sigma_\nu\bar{\lambda}\right), \\
&\delta\eta = \sqrt{2}\xi\chi, \qquad \delta\bar{\eta} = 0, \qquad \delta\chi = \sqrt{2}\xi F_\eta, \qquad \delta\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} = -i\sqrt{2}D_\mu\bar{\eta}(\xi\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}}, \\
&\delta F_\eta = 0, \qquad \delta\bar{F}_{\bar{\eta}} = -i\sqrt{2}\,D_\mu\bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\xi - i\xi\lambda\bar{\eta} + C^{\mu\nu}D_\mu\left(\xi\sigma_\nu\bar{\lambda}\bar{\eta}\right).
\end{aligned}
\tag{4.48}
$$

Un hecho interesante, enunciado en [65] en el caso de deformaciones constantes, es que la variación del lagrangiano de teorías super Yang Mills C-deformadas puede ser escrita como un Q-conmutador. Luego, si la supersimetría no está espontáneamente rota, la función de partición y, en general, las funciones de correlación de operadores Q-invariantes no dependerán de C. La extensión al caso en el cual campos de materia no masivos están presentes fue considerada en [66], también para el caso C constante. Tal análisis formal también puede hacerse en el caso del lagrangiano SQCD $\mathcal{N} = 1/2$ (4.45),(4.46) con $C = C(y)$. De hecho, después de algunos cálculos directos encontramos que

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{L}_1}{\delta C^{\mu\nu}} &= ig\mathrm{tr}\{Q^\alpha, (\sigma_{\mu\nu})_{\alpha\beta}\lambda^\beta \bar{\lambda}\bar{\lambda}\} \\
\frac{\delta \mathcal{L}_2}{\delta C^{\mu\nu}} &= \frac{i}{2} g\{Q^\alpha, \bar{\phi}(\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta \lambda_\beta F_\phi \ - i\frac{\sqrt{2}}{4} g C_{\mu\nu}\bar{\phi}\bar{\lambda}\bar{\lambda}\psi_\alpha\} \\
\frac{\delta \mathcal{L}_3}{\delta C^{\mu\nu}} &= \frac{i}{2} g\{Q^\alpha, \bar{\psi}\bar{\lambda}(\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta \psi_\beta\} \\
\frac{\delta \mathcal{L}_4}{\delta C^{\mu\nu}} &= \frac{i}{2} g\{Q^\alpha, F_\eta(\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta \lambda_\beta \bar{\eta} - i\frac{\sqrt{2}}{4} g C_{\mu\nu}\chi_\alpha \bar{\lambda}\bar{\lambda}\bar{\eta}\} \\
\frac{\delta \mathcal{L}_5}{\delta C^{\mu\nu}} &= -\frac{i}{2} g\{Q^\alpha, (\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta \chi_\beta \bar{\lambda}\bar{\chi}\} \\
\frac{\delta \mathcal{L}_6}{\delta C^{\mu\nu}} &= g\bar{m}\{Q^\alpha, \bar{\phi}(\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta \lambda_\beta + \frac{1}{2} g C_{\mu\nu}\bar{\phi} A_\rho (\sigma^\rho \bar{\lambda})_\alpha \bar{\eta}\}
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Por lo tanto, a un nivel formal, si suponemos que la supersimetría no está espontáneamente rota (y luego $Q|0\rangle = 0$), podemos escribir

$$\frac{1}{Z}\frac{\delta Z}{\delta C^{\mu\nu}(y)} = 0 \tag{4.50}$$

con

$$Z = \int \mathcal{D}f \exp\left(-\int d^4x \mathcal{L}^{SQCD}\right) \tag{4.51}$$

donde $\mathcal{D}f$ denota la integración sobre todos los campos presentes en $\mathcal{L}^{SQCD}$. Conviene aclarar que para escribir los diferentes términos C-dependientes en el lagrangiano como Q-conmutadores hemos usado las transformaciones supersimétricas (4.48). Sin embargo, para poder afirmar que estas relaciones todavía son válidas a nivel cuántico se debe analizar si alguna contribución anómala modifica a las identidades clásicas. Para esto deberíamos realizar un cálculo similar al que lleva a la anomalía Konishi, el cual mostramos a modo de ejemplo a continuación.

4.3.1. Anomalía Konishi

Dado el lagrangiano (4.45), es fácil verificar que el conmutador anómalo estudiado por Konishi en teorías de super QCD $\mathcal{N} = 1$ toma la misma forma en la teoría supersimétrica $\mathcal{N} = 1/2$ con la deformación dependiente de y. Para esto basta con ver que la siguiente relación se mantiene en teorías deformadas,

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\{Q^\alpha, \chi_\alpha(y)\bar{\eta}(y)\} = -\bar{m}\bar{\phi}\bar{\eta}(y) + \frac{g^2}{32\pi^2}\bar{\lambda}\bar{\lambda}(y) \tag{4.52}$$

donde el ultimo término, que corresponde a la anomalía Konishi [67],[68], se debe a una regularización del producto mal definido en el conmutador. Consideremos, por ejemplo, el método de "point splitting" en el cual definimos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\sqrt{2}}\{Q^\alpha, \chi_\alpha(y)\bar{\eta}(y)\}\Big|_{reg} &\equiv \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\sqrt{2}}\{Q^\alpha, \chi_\alpha(y+\epsilon)\exp(-i\epsilon^\mu A_\mu)\bar{\eta}(y-\epsilon)\} \\
&= \{Q^\alpha, \chi_\alpha(y)\bar{\eta}(y)\}|_{naive} + \lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^\mu \chi_\alpha(y+\epsilon)\sigma_\mu^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}(y)\bar{\eta}(y-\epsilon)
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Cuando es insertado en una función de correlación que contiene un producto de operadores locales, el segundo término en el lado derecho de (4.53) da una contribución finita en el límite $\epsilon \to 0$. Esto se debe a la contribución de un término linealmente divergente en el ultravioleta que se origina en las integrales correspondiendo al orden de un loop. Estas integrales contienen propagadores que aparecen debido a contracciones con el término de interacción tipo Yukawa $\eta\bar{\lambda}\bar{\chi}$ presentes en $\mathcal{L}^{SQCD}_{C=0}$. La respuesta final coincide con la ec.(4.52). También puede verificarse que los nuevos vértices $C(y)$-dependientes que aparecen en el lagrangiano (4.46)-(4.47) no llevan a nuevas contribuciones finitas, de manera que la ec.(4.52) se mantiene para $C(y) \neq 0$.

4.4. Deformación $C(y)$ desde Teoría de Cuerdas

4.4.1. Cuerdas en un Campo de Gravifotón No Constante

En esta sección mostraremos cómo la teoría de cuerdas también da origen a deformaciones dependientes de las coordenadas y. Éste es otro de los resultados originales de esta tesis. Para ello realizaremos un análisis similar al mostrado en la sección 3.3, pero considerando campos de fondo de gravifotón más generales. Más en detalle, consideraremos la teoría de supercuerdas tipo II definida sobre $\mathbb{R}^{(2,2)} \times CY_6$ en presencia de un campo de gravifotón autodual (el porqué de la elección de la signatura $2+2$ quedará claro más adelante). En el formalismo híbrido de Berkovits, el lagrangiano en coordenadas quirales (ver subsección 3.3.1 para notación) que describe el acoplamiento de las cuerdas al gravifotón toma la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\alpha'}\left(\frac{1}{2}\tilde{\partial} y^\mu \partial y_\mu - q_\alpha \tilde{\partial}\theta^\alpha + \bar{d}_{\dot{\alpha}}\tilde{\partial}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} - \tilde{q}_\alpha \partial\tilde{\theta}^\alpha + \tilde{\bar{d}}_{\dot{\alpha}}\partial\tilde{\bar{\theta}}^{\dot{\alpha}} + \alpha' q_\alpha \tilde{q}_\beta F^{\alpha\beta}(y)\right). \tag{4.54}$$

Como fue explicado en la subsección 3.3.1, el campo de fondo debe ser autodual para evitar "back-reaction" del gravifotón sobre la métrica, siendo posible tener campos de gravifotón autoduales solo en signaturas $4+0$ y $2+2$.

Realizando la integral funcional de q y $\tilde{q}$, obtenemos el lagrangiano efectivo

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{1}{\alpha'}\left(\frac{1}{2}\tilde{\partial} y^\mu \partial y_\mu + \bar{d}_{\dot{\alpha}}\tilde{\partial}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + \tilde{\bar{d}}_{\dot{\alpha}}\partial\tilde{\bar{\theta}}^{\dot{\alpha}} + \frac{1}{\alpha'}F^{-1}_{\alpha\beta}(y)\partial\tilde{\theta}^\alpha\tilde{\partial}\theta^\beta\right) \tag{4.55}$$

En un background puramente bosónico, la ecuación de movimiento para el tensor de curvatura del gravifotón al orden más bajo en α' se reduce a la ecuación de Maxwell sin fuentes

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \tag{4.56}$$

Dado el carácter autodual del gravifotón, $F^{\mu\nu}(y) = \varepsilon_{\beta\gamma}(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \gamma} F^{\alpha\beta}(y)$, por lo que la ec.(4.56) puede reescribirse como

$$\bar{\sigma}^\mu_{\dot{\alpha}\alpha}\partial_\mu F^{\alpha\beta} = 0. \tag{4.57}$$

Siendo $F^{\mu\nu}$ real, las componentes de $F^{\alpha\beta}$ también son reales en $2+2$ dimensiones.

Introduciendo las coordenadas cono de luz

$$U_1 = y_1 + y_4,\ V_1 = y_1 - y_4$$

$$U_2 = y_2 + y_3,\ V_2 = y_2 - y_3, \tag{4.58}$$

las ecuaciones (4.57) para el gravifotón pueden escribirse como

$$\begin{aligned}
&\partial_{U_1} F^{11} - \partial_{V_2} F^{21} = 0 \\
&\partial_{U_2} F^{11} + \partial_{V_1} F^{21} = 0 \\
&\partial_{V_2} F^{22} - \partial_{U_1} F^{12} = 0 \\
&\partial_{V_1} F^{22} + \partial_{U_2} F^{12} = 0.
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Los términos relevantes para nuestros cálculos, considerando el lagrangiano (4.55) en término de las variables cono de luz (4.58), son

$$\mathcal{L}^{quiral}_{eff} = -\frac{1}{4\alpha'}(\partial U_i \tilde{\partial} V_i + \tilde{\partial} U_i \partial V_i) + \frac{1}{\alpha'^2} F^{-1}_{\alpha\beta}(U,V)\, \partial\tilde{\theta}^\alpha \tilde{\partial}\theta^\beta. \tag{4.60}$$

Las ecuaciones de movimiento para las coordenadas bosónicas (U,V) son

$$\begin{aligned}
\partial\tilde{\partial} U_i &= -\frac{2}{\alpha'}\partial_{V_i} F^{-1}_{\alpha\beta}\, \partial\tilde{\theta}^\alpha \tilde{\partial}\theta^\beta \\
\partial\tilde{\partial} V_i &= -\frac{2}{\alpha'}\partial_{U_i} F^{-1}_{\alpha\beta}\, \partial\tilde{\theta}^\alpha \tilde{\partial}\theta^\beta
\end{aligned} \tag{4.61}$$

El paso siguiente es elegir un campo de fondo de gravifotón adecuado que satisfaga las ecuaciones de movimiento (4.59). Teniendo en mente el caso de la pp-wave [69], si tomamos F^{12} constante, obtenemos de (4.59) que $F^{11} = F^{11}(V_1, V_2)$ y $F^{22} = F^{22}(U_1, U_2)$. Luego, si elegimos también F^{11} constante, ec.(4.61) implica que

$$\Box U_i = 0. \tag{4.62}$$

La invarianza conforme del lagrangiano (4.55) nos permite elegir el gauge cono de luz, mediante el cual podemos eliminar los osciladores de una de las coordenadas U_i. Eligiendo que ésta sea U_1, tenemos

$$U_1 = z + \bar{z}. \tag{4.63}$$

Si ahora tomamos $F^{22} = F(U_1)$ encontramos que en el gauge cono de luz el lagrangiano es cuadrático. Notemos también que la elección $F^{22} = F^{22}(U_1, U_2)$ y F^{11} constante solo es posible en signatura $2+2$, ya que en signatura $4+0$ las componentes F^{11} y F^{22} están relacionadas por conjugación compleja. Finalmente, aclaremos que la elección (4.63) es consistente con las condiciones de contorno (4.65) (ver debajo).

En resumen, nuestro campo de fondo de gravifotón toma la forma

$$F^{\alpha\beta} = F_0^{\alpha\beta} + \delta_2^\alpha \delta_2^\beta F(U_1) \tag{4.64}$$

con $F_0^{\alpha\beta}$ una matriz simétrica constante y $F(U_1)$ una función arbitraria. La elección (4.64) más la invarianza conforme resulta en un lagrangiano gaussiano para las coordenadas del superespacio en el gauge cono de luz.

4.5. Propagadores y Relaciones de (Anti)Conmutación

Si ahora consideramos la hoja de mundo de las cuerdas (abiertas) finalizando sobre una $D3$-brana que llena el espacio $2+2$, las condiciones de contorno de Neumann correspondientes al lagrangiano (4.54) en $z = \bar{z}$ son

$$(\partial - \tilde{\partial})U_i\Big|_{z=\tilde{z}} = 0, \qquad (\partial - \tilde{\partial})V_i\Big|_{z=\tilde{z}} = 0. \tag{4.65}$$

para las coordenadas bosónicas, mientras que las correspondientes al sector fermiónico son

$$(q_\alpha - \tilde{q}_\alpha)|_{z=\tilde{z}} \;=\; 0 \tag{4.66}$$
$$(\theta^\alpha - \tilde{\theta}^\alpha)\Big|_{z=\tilde{z}} \;=\; 0. \tag{4.67}$$

Las ecuaciones de movimiento obtenidas del lagrangiano (4.34) toman la forma

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}\theta^\alpha - \alpha' F^{\alpha\beta}\tilde{q}_\beta = 0 \\ \partial\tilde{\theta}^\alpha + \alpha' F^{\alpha\beta} q_\beta = 0. \end{aligned} \tag{4.68}$$

Consistencia con (4.66) impone

$$(\tilde{\partial}\theta^\alpha + \partial\tilde{\theta}^\alpha)\Big|_{z=\bar{z}} = 0. \tag{4.69}$$

Al igual que en el caso de gravifotón constante, obtendremos las relaciones de anticonmutación de las coordenadas fermiónicas a través del cálculo de los siguientes propagadores,

$$\begin{aligned} G_1^{\alpha\beta}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}) &\equiv \langle \theta^\alpha(z,\tilde{z})\theta^\beta(w,\tilde{w})\rangle \\ G_2^{\alpha\beta}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}) &\equiv \langle \theta^\alpha(z,\tilde{z})\tilde{\theta}^\beta(w,\tilde{w})\rangle \\ G_3^{\alpha\beta}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}) &\equiv \langle \tilde{\theta}^\alpha(z,\tilde{z})\tilde{\theta}^\beta(w,\tilde{w})\rangle \end{aligned} \tag{4.70}$$

Éstos, de acuerdo al lagrangiano (4.55), obedecen las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\partial_z\left(F^{-1}_{\alpha\beta}(z,\tilde{z})\tilde{\partial}_{\tilde{z}} G_i^{\beta\gamma}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w})\right) = -\alpha'^2\delta^\gamma_\alpha\,\delta^2(z-w)\,\delta^2_i \tag{4.71}$$

Las condiciones (4.67) y (4.69) en $w = \tilde{w}$ implican las relaciones entre los propagadores G_i

$$G_1^{\alpha\beta}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}) \;=\; G_2^{\alpha\beta}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}) \tag{4.72}$$
$$G_2^{\alpha\beta}(w,\tilde{w}|z,\tilde{z}) \;=\; G_3^{\alpha\beta}(w,\tilde{w}|z,\tilde{z}) \tag{4.73}$$
$$\tilde{\partial}_{\tilde{w}} G_1^{\alpha\beta}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}) \;=\; -\partial_w G_2^{\alpha\beta}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}) \tag{4.74}$$
$$\tilde{\partial}_{\tilde{w}} G_2^{\alpha\beta}(w,\tilde{w}|z,\tilde{z}) \;=\; -\partial_w G_3^{\alpha\beta}(w,\tilde{w}|z,\tilde{z}) \tag{4.75}$$

Mientras que el carácter Grassmann de θ y las relaciones de conjugación entre ellas imponen los vínculos

$$G_1^{\alpha\beta}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}) \;=\; -G_1^{\beta\alpha}(w,\tilde{w}|z,\tilde{z}) \tag{4.76}$$
$$G_3^{\alpha\beta}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}) \;=\; -G_3^{\beta\alpha}(w,\tilde{w}|z,\tilde{z}) \tag{4.77}$$
$$(G_1^{\alpha\beta}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}))^* \;=\; G_3^{\beta\alpha}(w,\tilde{w}|z,\tilde{z}) \tag{4.78}$$
$$(G_2^{\alpha\beta}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}))^* \;=\; G_2^{\beta\alpha}(w,\tilde{w}|z,\tilde{z}) \tag{4.79}$$

Para poder proseguir en el cálculo será necesario considerar el siguiente campo de gravifotón

$$F^{\alpha\beta}(U,V) = F_0^{\alpha\beta} + \lambda\, U_1\, \delta_2^\alpha \delta_2^\beta. \tag{4.80}$$

Como vimos arriba, usando la invarianza conforme de la acción podemos fijar $U_1 = z + \tilde{z}$. Para esta elección, solo la componente 22 de los propagadores calculados en la sección 3.3 recibe modificaciones. Además, ya que las condiciones de contorno (4.67) y (4.69) son preservadas bajo conjugación compleja, solo necesitamos resolver para G_1 y G_2, ya que G_3 puede obtenerse conjugando G_1 (ver ec.(4.78)).

Resolviendo las ecuaciones (4.71) se encuentra que los propagadores consistentes con las condiciones de contorno (4.67) y (4.69) son

$$\begin{aligned}
G_1^{\alpha\beta}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}) &= -\frac{\alpha'^2}{2\pi}\left(F^{\alpha\beta}(z,w)\ln\frac{\tilde{z}-w}{z-\tilde{w}} + \lambda(\tilde{z}-z+w-\tilde{w})\delta_2^\alpha\delta_2^\beta\right)\\
G_2^{\alpha\beta}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}) &= -\frac{\alpha'^2}{2\pi}\left(F^{\alpha\beta}(z,\tilde{w})\ln\frac{|z-w|^2}{(z-\tilde{w})^2} + \lambda(\tilde{z}-z+w-\tilde{w})\delta_2^\alpha\delta_2^\beta\right)\\
G_3^{\alpha\beta}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}) &= -\frac{\alpha'^2}{2\pi}\left(F^{\alpha\beta}(\tilde{z},\tilde{w})\ln\frac{\tilde{z}-w}{z-\tilde{w}} + \lambda(\tilde{z}-z+w-\tilde{w})\delta_2^\alpha\delta_2^\beta\right)
\end{aligned} \tag{4.81}$$

donde

$$F^{\alpha\beta}(z,w) = F_0^{\alpha\beta} + \lambda(z+w)\delta_2^\alpha\delta_2^\beta. \tag{4.82}$$

Si tomamos z y w sobre el contorno, $z = \tilde{z} = \tau,\ w = \tilde{w} = \tau'$, obtenemos que

$$\langle\theta^\alpha(\tau)\theta^\beta(\tau')\rangle = \frac{i}{2}\alpha'^2 F^{\alpha\beta}(\tau,\tau')\,\mathrm{sgn}(\tau-\tau') \tag{4.83}$$

de lo cual resulta que el anticonmutador de θ's es

$$\begin{aligned}
\{\theta^\alpha,\theta^\beta\} &= \lim_{\epsilon\to 0}\left(\theta^\alpha(\tau+\epsilon)\theta^\beta(\tau) + \theta^\beta(\tau)\theta^\alpha(\tau-\epsilon)\right) &(4.84)\\
&= i\alpha'^2(F_0^{\alpha\beta} + \lambda U_1\delta_2^\alpha\delta_2^\beta) &(4.85)
\end{aligned}$$

o

$$\{\theta^\alpha,\theta^\beta\} = i\alpha'^2 F^{\alpha\beta}(y). \tag{4.86}$$

Vemos así que, como en el caso de un campo de fondo constante, la deformación del álgebra de las coordenadas θ es proporcional al tensor de curvatura del gravifotón. A partir de (4.56) inmediatamente se verifica que el parámetro de la deformación satisface la condición (4.26), encontrada en el contexto de teorías de gauge al requerir consistencia de la teoría. A pesar de que nosotros hemos obtenido este resultado para una cierta familia de campos de gravifotón de la forma (4.80), es de esperar que un resultado análogo se mantenga para casos más generales.

Ya que las coordenadas $\bar{\theta}$ no se ven afectadas por el acoplamiento al campo de fondo, las relaciones de conmutación de $\bar{\theta}$ con y^μ y θ no son modificadas. Lo mismo pasa con el conmutador entre θ e y^μ.

En lo que respecta a las relaciones de conmutación entre las coordenadas bosónicas espacio-temporales, los propagadores relevantes que debemos considerar son

$$\begin{aligned}
K_1^{ij}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}) &= \langle U_i(z,\tilde{z})U_j(w,\tilde{w})\rangle \\
K_2^{ij}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}) &= \langle U_i(z,\tilde{z})V_j(w,\tilde{w})\rangle \\
K_3^{ij}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}) &= \langle V_i(z,\tilde{z})V_j(w,\tilde{w})\rangle
\end{aligned} \tag{4.87}$$

los cuales, de acuerdo al lagrangiano (4.55) deben obedecer las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
\Box_z K_1^{ij}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}) &= 0 \\
\Box_z K_2^{ij}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}) &= 2\alpha'\delta^{ij}\delta^2(z-w) \\
\Box_w K_2^{ij}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}) &= 2\alpha'\delta^{ij}\delta^2(z-w) - \\
&\quad \frac{2}{\alpha'}\langle U_i(z,\tilde{z})\,\partial_{U_j}F^{-1}_{\alpha\beta}(w,\tilde{w})\,\partial\tilde{\theta}^{\alpha}(w,\tilde{w})\tilde{\partial}\theta^{\beta}(w,\tilde{w})\rangle \\
\Box_z K_3^{ij}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}) &= \frac{2}{\alpha'}\langle \partial_{U_i}F^{-1}_{\alpha\beta}(z,\tilde{z})\tilde{\partial}\theta^{\alpha}(z,\tilde{z})\partial\tilde{\theta}^{\beta}(z,\tilde{z})\,V_j(w,\tilde{w})\rangle
\end{aligned} \tag{4.88}$$

donde aquí $\Box_z = \partial_z\tilde{\partial}_{\tilde{z}}$. El término divergente $\delta(0)$ aparece en (4.88) debido al gráfico "tadpole" por la contracción de derivadas de campos θ en las dos últimas líneas. Ellos pueden ser puestos a cero mediante una regularización apropiada. Una vez hecho esto, las ecuaciones (4.88) son reemplazadas por

$$\begin{aligned}
\partial_z\tilde{\partial}_{\tilde{z}}K_1^{ij}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}) &= 0 \\
\partial_z\tilde{\partial}_{\tilde{z}}K_2^{ij}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}) &= 2\alpha'\delta^{ij}\delta^2(z-w) \\
\partial_z\tilde{\partial}_{\tilde{z}}K_2^{ij}(w,\tilde{w}|z,\tilde{z}) &= 2\alpha'\delta^{ij}\delta^2(z-w) \\
\partial_z\tilde{\partial}_{\tilde{z}}K_3^{ij}(z,\tilde{z}|w,\tilde{w}) &= 0
\end{aligned} \tag{4.89}$$

Estas ecuaciones son simplemente las obtenidas en el caso de $F_{\alpha\beta}$ constante, las cuales llevan a relaciones de conmutación triviales para las coordenadas quirales y^{μ}. De esta manera, también en nuestro campo de fondo dependiente de las coordenadas vale que

$$[y^{\mu}, y^{\nu}] = 0. \tag{4.90}$$

4.6. Resumen y Discusión

A lo largo de este capítulo estudiamos la posibilidad de definir una nuevo tipo de deformación no(anti)conmutativa del superespacio $\mathcal{N}=1$, caracterizada por tener al parámetro que implementa la deformación dependiendo de las coordenadas bosónicas (quirales). El análisis fue realizado tanto en el contexto de teoría de campos como en el de teoría de cuerdas. La principal motivación para estudiar este tipo de deformaciones tiene su origen en el trabajo [64], en el que la C-deformación del álgebra de las coordenadas fermiónicas de superespacio $\mathcal{N}=1$ es relacionada con la degeneración espectral presente la teoría de super Yang-Mills $\mathcal{N}=1$ ordinaria. Utilizando la anterior relación, los autores conjeturan que la supersimetría $\mathcal{N}=\frac{1}{2}$ también podría ser definida cuando el parámetro de la deformación depende de las coordenadas.

En la primer mitad del capítulo nos dedicamos a estudiar bajo qué condiciones una teoría de campos (de gauge) podía ser definida sobre un superespacio NAC con $C = C(y)$. Comenzando con la definición del álgebra $\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = C^{\alpha\beta}(y)$ para las coordenadas fermiónicas quirales, encontramos que este álgebra era compatible con considerar al resto de las supercoordenadas (de la base quiral) (anti)conmutantes, a la vez que mostramos que la deformación podía ser implementada por un producto Moyal asociativo. Una vez determinado el producto Moyal, encontramos que la subálgebra generada por Q_α es preservada por la deformación, lo que lleva a que, al igual que en el caso de deformaciones constantes, una supersimetría quiral $\mathcal{N} = \frac{1}{2}$ puede ser definida. Definiendo los supercampos quirales y antiquirales de la manera usual, encontramos que la multiplicación de supercampos quirales es igual a como es en el caso de C constante, mientras que el producto de supercampos antiquirales es más complejo como consecuencia de que las derivadas covariantes quirales dejan de satisfacer la regla de Leibnitz cuando actúan sobre un producto. Más aún, cuando consideramos el supercampo vectorial, la anterior propiedad de las derivadas covariantes lleva a que solo sea posible definir supercampos de curvatura covariantes si el parámetro de la deformación C satisface la ecuación diferencial $\partial_\mu C^{\mu\nu} = 0$. Con todos estos ingredientes construimos la versión $\mathcal{N} = \frac{1}{2}$ $C(y)$-deformada del lagrangiano de super QCD y, a partir de su expresión en componentes, pudimos obtener los efectos de la deformación. En particular, encontramos que el conmutador anómalo que lleva a la anomalía Konishi toma la misma forma que para el caso del superespacio ordinario.

En la segunda mitad del capítulo fuimos capaces de obtener en el contexto de teorías de cuerdas este tipo de deformaciones del superespacio $\mathcal{N} = 1$ con $C = C(y)$ sobre el volumen de mundo de $D3$-branas. Para ello fue necesario considerar el modelo de supercuerdas tipo IIB definido sobre $\mathbb{R}^{2,2} \times CY^6$, por lo que la deformación encontrada corresponde al superespacio NAC $\mathcal{N} = \frac{1}{2}$ $d = 2+2$. Al igual que en el caso de deformaciones constantes, la teoría de cuerdas debe poseer un campo de fondo de gravifotón no nulo, por lo que el formalismo idóneo para estudiar el problema es nuevamente el formalismo híbrido de Berkovits. Restringiéndonos a cierta familia de campos lineales de gravifotón fuimos capaces de calcular los propagadores para las coordenadas del superespacio, y a partir de ellos obtener el álgebra deformada de las coordenadas del superespacio $\mathcal{N} = 1$ sobre el volumen de mundo de la brana. La deformación que resulta del tipo de campos de gravifotón utilizado es exactamente la misma que la considerada en la primer mitad del capítulo al estudiar teorías de campos NAC. Esto es, las coordenadas fermiónicas quirales θ^α dejan de ser variables Grassmann para pasar a satisfacer un álgebra de Clifford del tipo $\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = C^{\alpha\beta}(y)$, mientras que las otras coordenadas de la base quiral $y^\mu, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ permanecen (anti)conmutantes. Además, encontramos que la relación de proporcionalidad entre el parámetro de la deformación $C^{\alpha\beta}$ y el tensor de campo del gravifotón $F^{\alpha\beta}$, válida para el caso de deformaciones constantes, sigue siendo válida para la familia de campos de gravifotón considerada, o sea, $C^{\alpha\beta}(y) = \alpha'^2 F^{\alpha\beta}(y)$. Esta relación explica cuál es el origen de la ecuación diferencial para el parámetro de la deformación encontrada en el contexto de teorías de campos, ya que dicha ecuación resulta ser equivalente a la ecuación de movimiento del gravifotón.

Capítulo 5

Mecánica Cuántica en Superespacios Deformados

En este capítulo presentaremos otro de los resultados originales de esta tesis, que resulta de estudiar las consecuencias de una deformación no(anti)conmutativa del superespacio $d = 1$ $\mathcal{N} = 2$. Encontraremos que, en la base quiral, la deformación preserva solo la mitad del álgebra de supercargas original, como pasa usualmente en teorías de campos NAC. En términos de un supermultiplete real obtendremos una expresión cerrada para el lagrangiano deformado de Mecánica Cuántica. En dicha expresión, el potencial original debe ser reemplazado por un potencial efectivo difuminado, de manera similar a lo que ocurre en el modelo sigma bidimensional C-deformado. De manera inesperada, encontraremos que una segunda carga conservada puede ser construida, lo que lleva a una realización no lineal de la superálgebra $\mathcal{N} = 2$. Esto conduce a que la teoría deformada posea a nivel clásico tantas supercargas conservadas como la teoría no deformada. Finalmente, analizaremos el comportamiento cuántico de estas supercargas y estudiaremos en que casos éstas están espontáneamente rotas.

La Mecánica Cuántica puede interpretarse como una teoría de campos en 0+1 dimensiones, por lo que provee un marco de referencia simple y, a la vez muy adecuado para entender distinos fenómenos que tienen lugar en teorías de campos más complicadas. Un buen ejemplo de esto es el uso que hizo Witten de la Mecánica Cuántica Supersimétrica (MC SUSY) [70],[71] para estudiar la rotura (dinámica) de supersimetría. En particular, después de la introducción del índice de Witten [71], muchos aspectos topológicos interesantes de MC SUSY fueron clarificados, lo que permitió entender problemas más complejos de rotura de supersimetría en teorías cuánticas de campos. Por ejemplo, la conexión entre el índice de Witten y MC llevó a una derivación alternativa del teorema del índice de Atiyah-Singer [72],[73], relevante en el análisis de teorías de campos supersimétricas. Debido a esta mayor simplicidad, el estudio de deformaciones NAC del superespacio $d = 1 + 0$ $\mathcal{N} = 2$ y de la posibilidad de formular Mecánica Cuántica es tales superespacios resulta altamente conveniente.

A pesar de que dicho estudio de la MC NAC es interesante por si mismo, y también por sus posibles aplicaciones en problemas de materia condensada, nuestra principal motivación es otra. Como consecuencia de ser comparativamente más simples respecto de las teorías de campos, usaremos modelos de MC NAC para profundizar en una cuestión fundamental de las teorías no(anti)conmutativas, que es entender cuántas supercargas son realmente rotas por la deformación. Como vimos en los capítulos precedentes, una vez que la deformación es implementada, solo una fracción (usualmente la mitad) del álgebra original linealmente realizada sobrevive. En este capítulo mostraremos, en lo que constituye otro de los aportes originales de esta tesis, que en el caso de Mecanica Cuántica NAC una nueva supercarga (deformada) puede ser construida. Dicha carga corresponde a una realización no lineal del álgebra de supersimetría. Gracias a esta construcción llegamos a la interesante conclusión de que las teorías de MC deformadas poseen tantas supercargas conservadas como en el caso no deformado.

5.1. Superespacio $d = 1 + 0$ $\mathcal{N} = 2$ deformado

En la formulación de la Mecánica Cuántica supersimétrica que utiliza el superespacio, además de la variable temporal real (conmutante) τ, se introducen variables Grassmann (anticonmutantes) θ y su complejo conjugado $\bar\theta$. El superespacio deformado puede luego ser definido a partir de modificar las relaciones de anticonmutación entre las variables θ y $\bar\theta$, e incluso sus relaciones de conmutación con τ.

Así, en el caso ordinario, el superespacio $d = 1 + 0$ $\mathcal{N} = 2$ $\mathbb{R}^{(1|2)}$ puede ser paramétrizado por las coordenadas

$$\mathbb{R}^{(1|2)} = (\tau, \theta, \bar\theta), \quad \tau \in \mathbb{R}, \ (\theta)^\dagger = \bar\theta. \tag{5.1}$$

La deformación más general del sector fermiónico de este superespacio es

$$\{\theta, \theta\} = C, \qquad \{\bar\theta, \bar\theta\} = \bar C, \qquad \{\theta, \bar\theta\} = \widehat{C} \tag{5.2}$$

donde C, $\bar C$ y $\widehat{C}$ son números complejos con dimensión m^{-1} ya que tomamos $[\theta] = [\bar\theta] = \mathrm{m}^{-1/2}$. En lo que respecta a las reglas de conmutación entre la variable temporal y θ, $\bar\theta$, pospondremos su elección hasta la introducción de una variable temporal "quiral" (ver debajo).

Como en el caso de las deformaciones del espacio-tiempo, una teoría $d = 1$ en el superespacio no(anti)conmutativo definido por (5.2) puede realizarse usando coordenadas Grassmann ordinarias pero multiplicando los supercampos con un producto Moyal apropiado. De hecho, dado un supercampo escalar de la forma

$$\Phi(\tau, \theta, \bar\theta) = \phi(\tau) + \theta\psi(\tau) + \bar\psi(\tau)\bar\theta + \theta\bar\theta F(\tau) \tag{5.3}$$

con ϕ un escalar, ψ un fermión y F un campo auxiliar, podemos definir el producto Moyal que implementa la deformación (5.2) como

$$\begin{aligned}
\Phi_1(\tau, \theta, \bar\theta) * \Phi_2(\tau, \theta, \bar\theta) &= \Phi_1 \exp(-\frac{C}{2}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta} - \frac{\widehat{C}}{2}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\bar\theta} - \frac{\widehat{C}}{2}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\bar\theta}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta} - \frac{\bar C}{2}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\bar\theta}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\bar\theta})\Phi_2 \\
&= \Phi_1 \left[1 - \frac{C}{2}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta} - \frac{\widehat{C}}{2}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\bar\theta} - \frac{\widehat{C}}{2}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\bar\theta}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta} - \frac{\bar C}{2}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\bar\theta}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\bar\theta} - \frac{1}{4}c^2\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\bar\theta}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\bar\theta}\right]\Phi_2
\end{aligned} \tag{5.4}$$

con $c^2 = C\bar{C} - \widehat{C}\widehat{C}$ y $\Phi\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta} = (-1)^{f[\Phi]}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}$, donde $f[\Phi]$ es el caracter Grassmann del supercampo Φ.

En el caso no deformado, los operadores diferenciales Q y $\bar{Q}$ que generan las transformaciones supersimétricas son dados por

$$Q = \frac{\partial}{\partial\theta} + i\bar{\theta}\frac{\partial}{\partial\tau}, \qquad \bar{Q} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - i\theta\frac{\partial}{\partial\tau}, \tag{5.5}$$

y satisfacen el álgebra supersimétrica $\mathcal{N} = 2, d = 1$ no deformada

$$\{Q, Q\} = 0, \qquad \{\bar{Q}, \bar{Q}\} = 0, \qquad \{Q, \bar{Q}\} = -2i\frac{\partial}{\partial\tau}. \tag{5.6}$$

A veces es más útil trabajar con las realizaciones de las supercargas

$$Q = \frac{\partial}{\partial\theta} + ib\bar{\theta}\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \bar{Q} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - i\bar{b}\theta\frac{\partial}{\partial t}. \tag{5.7}$$

las cuales pueden ser obtenidas de (5.5) a través del cambio de variables

$$\tau \to t = \tau - i(1-b)\theta\bar{\theta} \tag{5.8}$$

y satisfacen el álgebra supersimétrica usual cuando $b + \bar{b} = 2$. Respecto de las derivadas covariantes D y $\bar{D}$, anticonmutantes con las supercargas, ellas toman la forma

$$D = \frac{\partial}{\partial\theta} - i\bar{b}\bar{\theta}\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \bar{D} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} + ib\theta\frac{\partial}{\partial t}. \tag{5.9}$$

Es conveniente aclarar que siempre consideraremos la misma expresión formal del producto Moyal (5.4), independientemente de haber cambiado la variable temporal de acuerdo a (5.8). Esto significa que después del cambio $\tau \to t$, las derivadas con respecto a θ y $\bar{\theta}$ en (5.4) deben ser tomadas a t fijo.

En el caso deformado, el álgebra de las supercargas Q y $\bar{Q}$ cambia a

$$\begin{aligned}
\{Q, Q\} &= -b^2\bar{C}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \\
\{\bar{Q}, \bar{Q}\} &= -\bar{b}^2 C\frac{\partial^2}{\partial t^2} \\
\{Q, \bar{Q}\} &= -i(b + \bar{b})\frac{\partial}{\partial t} + b\bar{b}\widehat{C}\frac{\partial^2}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Elecciones diferentes de b, $\bar{b}$ y los parámetros C harán posible preservar diferentes sectores del álgebra supersimétrica no deformada. Para seleccionar valores adecuados de estos parámetros, es conveniente ver bajo que condiciones los operadores Q y $\bar{Q}$ siguen satisfaciendo la regla de Leibnitz. Cuando Q y $\bar{Q}$ actúan sobre un producto $*$ de supercampos, se obtiene

$$\begin{aligned}
Q * (\Phi_1 * \Phi_2) &= (Q * \Phi_1) * \Phi_2 + \Phi_1 * (Q * \Phi_2) \\
&+ ib[\bar{\theta}\frac{\partial}{\partial t}(\Phi_1 * \Phi_2) - (\bar{\theta}\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}) * \Phi_2 - \Phi_1 * (\bar{\theta}\frac{\partial\Phi_2}{\partial t})] \\
\bar{Q} * (\Phi_1 * \Phi_2) &= (\bar{Q} * \Phi_1) * \Phi_2 + \Phi_1 * (\bar{Q} * \Phi_2) \\
&- i\bar{b}[\theta\frac{\partial}{\partial t}(\Phi_1 * \Phi_2) - (\theta\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}) * \Phi_2 - \Phi_1 * (\theta\frac{\partial\Phi_2}{\partial t})]
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Se puede ver que ambos generadores de supersimetría no pueden satisfacer simultáneamente la regla de Leibnitz debido al vínculo $b + \bar{b} = 2$. A partir de aquí elegiremos trabajar en la base quiral, la cual corresponde al caso $b = 0$, $\bar{b} = 2$ y luego, de acuerdo a (5.10), solo será preservada el subálgebra supersimétrica $\mathcal{N} = \frac{2}{2}$ asociada al generador Q. Notar que esta elección es consistente con

$$[t, \theta] = [t, \bar{\theta}] = 0 \tag{5.12}$$

que corresponde, en término de las coordenadas originales $(\tau, \theta, \bar{\theta})$, a

$$[\tau, \tau] = 0, \qquad [\tau, \theta] = i(\hat{C}\theta - C\bar{\theta}), \qquad [\tau, \bar{\theta}] = i(\bar{C}\theta - \hat{C}\bar{\theta})\,. \tag{5.13}$$

Finalmente, las supercargas y las derivadas covariantes toman la forma

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\partial}{\partial\theta}\,, \qquad\qquad \bar{Q} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - 2i\theta\frac{\partial}{\partial t}, \\ D &= \frac{\partial}{\partial\theta} - 2i\bar{\theta}\frac{\partial}{\partial t}\,, \qquad \bar{D} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}\,. \end{aligned} \tag{5.14}$$

5.2. Lagrangiano y Supersimetrías Clásicas

Hay básicamente dos tipos de supermultipletes $\mathcal{N} = 2$ en $d = 1$ dimensiones. Para clasificarlos es conveniente introducir la notación $(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{n} - \mathbf{m})$ para identificar un supermultiplete "off-shell" $\mathcal{N} = \mathbf{n}$, $d = 1$ con $\mathbf{m}$ bosones físicos, $\mathbf{n}$ fermiones y $\mathbf{n} - \mathbf{m}$ componentes bosónicas auxiliares. Así, el supermultiplete $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$, también conocido como modelo $\mathcal{N} = 2a$, es construido a partir de un supercampo real $\mathcal{N} = 2$ mientras que el supermultiplete $(\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{0})$ o modelo $\mathcal{N} = 2b$ utiliza supercampos quirales complejos.

La acción supersimétrica $\mathcal{N} = 2$ deformada construida a partir del supermultiplete $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$ toma la forma

$$S = \int dt d\theta d\bar{\theta} \left[-\frac{1}{2}(D * \Phi) * (\bar{D} * \Phi) - W_*(\Phi) \right] \tag{5.15}$$

donde definimos el superpotencial deformado $W_*(\Phi)$ a partir de la función $W(\Phi)$ mediante

$$W(\Phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} W^{(n)}\, \Phi \overset{(n)}{\cdots} \Phi \longrightarrow W_*(\Phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} W^{(n)}\, \Phi * \overset{(n)}{\cdots} * \Phi \tag{5.16}$$

donde el supercampo Φ tiene la expansión en componentes (5.3),

$$\Phi(t, \theta, \bar{\theta}) = \phi(t) + \theta\psi(t) + \bar{\psi}(t)\bar{\theta} + \theta\bar{\theta}F(t) \tag{5.17}$$

En término de las coordenadas $(\tau, \theta, \bar{\theta})$, el supercampo Φ es real, esto es, $\phi^\dagger(\tau) = \phi(\tau)$, $\psi^\dagger(\tau) = \bar{\psi}(\tau)$ y $F^\dagger(\tau) = F(\tau)$. Sin embargo, el cambio de variables $\tau \to t$ complexifica la coordenada temporal y luego las relaciones de realidad para el campo auxiliar se pierden.

En el contexto de modelos sigma $\mathcal{N} = 2$ NAC bidimensionales [74]-[76] fue obtenida una fórmula explícita no perturbativa para el superpotencial holomorfo deformado . Esta fórmula también puede ser aplicada al caso $d = 1$ y permite expresar la componente más alta del superpotencial como

$$\int d\theta d\bar{\theta}\, W_*(\Phi) = F\frac{\partial}{\partial\phi}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} d\xi\, W(\phi + \xi c F) - \bar{\psi}\psi\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} d\xi\, W(\phi + \xi c F) \tag{5.18}$$

como

$$c = \sqrt{C\bar{C} - \widehat{C}\widehat{C}}. \tag{5.19}$$

Como es notado en [75], esta deformación corresponde físicamente a una difusión del espacio target de coordenadas. De acuerdo a esto, puede obtenerse un superpotencial efectivo $\tilde{W}$ promediando su valor no deformado entre $\phi - cF$ y $\phi + cF$, esto es

$$\tilde{W}(\phi, F) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} d\xi \, W(\phi + \xi c F). \tag{5.20}$$

Así, escrita en componentes, la acción deformada de Mecánica Cuántica toma la forma

$$S = \int dt \left[-\left(i\frac{d\phi}{dt} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \phi} \right) F + \frac{1}{2}F^2 + \bar{\psi}\left(i\frac{d}{dt} + \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \phi^2} \right)\psi \right] \tag{5.21}$$

Con el fin de estudiar aspectos clásicos de esta teoría deformada, usaremos las definiciones usuales para los momentos, el hamiltoniano y los corchetes de Poisson

$$\Pi^i = \frac{\partial_r \mathcal{L}}{\partial \dot{\Theta}_i}, \qquad \mathcal{H} = \Pi^i \dot{\Theta}_i - \mathcal{L}, \qquad \{X, Y\}_P = \frac{\partial_r X}{\partial \Theta_i}\frac{\partial_l Y}{\partial \Pi^i} - (-1)^{XY}\frac{\partial_r Y}{\partial \Theta_i}\frac{\partial_l X}{\partial \Pi^i}, \tag{5.22}$$

donde los subíndices r y l denotan la derivación derecha e izquierda, respectivamente. Luego, con $\Theta = (\phi, \psi)$, los momentos conjugados son $\Pi = (-iF, i\bar{\psi})$ y el hamiltoniano asociado con la acción deformada (5.21) es

$$\mathcal{H} = -iF\dot{\phi} + i\bar{\psi}\dot{\psi} - \mathcal{L} = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \phi}F - \frac{1}{2}F^2 - \bar{\psi}\frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \phi^2}\psi \tag{5.23}$$

Nótese que en las definiciones (5.22) los campos componentes son multiplicados utilizando el producto usual, el producto Moyal deja de ser usado una vez que la integración en las coordenadas $\theta, \bar{\theta}$ es realizada. Puede verificarse fácilmente que la acción (5.21) todavía es invariante ante las transformaciones de supersimetría generadas por Q

$$\delta_Q \phi = \psi, \qquad \delta_Q \psi = 0, \qquad \delta_Q \bar{\psi} = F, \qquad \delta_Q F = 0, \tag{5.24}$$

donde las transformaciones para los campos componentes son obtenidas a partir de

$$\delta_Q \Phi = Q * \Phi = \delta_Q \phi - \theta \delta_Q \psi + \delta_Q \bar{\psi}\, \bar{\theta} + \theta\bar{\theta}\delta_Q F. \tag{5.25}$$

Por otro lado, ya hemos visto que el operador $\bar{Q}$ definido en (5.14) y satisfaciendo $\{\bar{Q}, \bar{Q}\} \neq 0$, no puede ser usado como un generador de supersimetría. Además, es fácil ver que las $\bar{Q}$-variaciones de los campos componentes correspondiendo al caso no deformado dejan de ser una simetría una vez que la deformación es implementada. Esto es, dadas las variaciones

$$\delta_{\bar{Q}_{c=0}} \phi = \bar{\psi}, \qquad \delta_{\bar{Q}_{c=0}} \psi = 2i\dot{\phi} - F, \qquad \delta_{\bar{Q}_{c=0}} \bar{\psi} = 0, \qquad \delta_{\bar{Q}_{c=0}} F = 2i\dot{\bar{\psi}}, \tag{5.26}$$

el lagrangiano no permanence invariante, sino que cambia de acuerdo a

$$\delta_{\bar{Q}_{c=0}} \mathcal{L} = 2i\bar{\psi}\frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial F \partial \phi}\dot{F} - 2i\dot{\bar{\psi}}\frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial F \partial \phi}F - 2i\bar{\psi}\dot{\bar{\psi}}\frac{\partial^3 \tilde{W}}{\partial F \partial \phi^2}\psi, \tag{5.27}$$

Luego, solo para $c = 0$ (el caso no deformado) $\delta_{\bar{Q}_{c=0}}\mathcal{L}$ se anula. Este hecho es esperado a partir de la forma del álgebra deformada de la supercarga (5.10), la cual, después de tomar $b = 0$, $\bar{b} = 2$, se rompe en el sector $\bar{Q}$. Esto es similar a lo que vimos en los dos capítulos precedentes para el caso de teorías de campos NAC, donde parte de supersimetría original es rota por la deformación.

Volviendo a la supersimetría que es preservada, podemos obtener una expresión de la supercarga Q en término de los campos a partir del método de Noether,

$$\mathcal{Q} = -\sum_{\chi} \frac{\partial_r \mathcal{L}}{\partial \dot{\chi}} \delta_Q \chi = i\psi F, \tag{5.28}$$

(con χ denotamos los campos componentes de la teoría). Se puede ver que $\mathcal{Q}$ satisface

$$\{\mathcal{Q}, \mathcal{Q}\}_P = 0\,, \qquad \{\mathcal{Q}, \chi\}_P = \delta_Q \chi \tag{5.29}$$

para las variaciones (5.24). Además, es trivial verificar que el hamiltoniano es $\mathcal{Q}$-exacto, esto es,

$$\mathcal{H} = \left\{ \mathcal{Q}, \frac{1}{2}\bar{\psi}\left(-F + 2\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \phi} \right) \right\}_P \tag{5.30}$$

Esta expresión sugiere la existencia de una segunda carga $\bar{\mathcal{Q}}$ de manera que, como en el caso no deformado, el hamiltoniano pueda expresarse como

$$\mathcal{H} = \frac{i}{2}\{\mathcal{Q}, \bar{\mathcal{Q}}\}_P. \tag{5.31}$$

Para lograr esto definimos la carga $\bar{\mathcal{Q}}$ tal que, en término de los campos componentes, toma la forma

$$\bar{\mathcal{Q}} = i\bar{\psi}\left(F - 2\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \phi} \right) \tag{5.32}$$

Sorprendentemente, la carga $\bar{\mathcal{Q}}$ es conservada, $\{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{Q}}\}_P = 0$ y también es nilpotente, $\{\bar{\mathcal{Q}}, \bar{\mathcal{Q}}\}_P = 0$. Cuando actúa sobre los campos, la segunda supercarga lleva a las transformaciones

$$\begin{aligned}
&\{\bar{\mathcal{Q}}, \phi\}_P = \bar{\psi} - 2\bar{\psi}\frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \phi \partial F}, \qquad && \{\bar{\mathcal{Q}}, \bar{\psi}\}_P = 0, \\
&\{\bar{\mathcal{Q}}, \psi\}_P = F - 2\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \phi}, && \{\bar{\mathcal{Q}}, F\}_P = 2\bar{\psi}\,\frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \phi^2}.
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Notar que en el límite $c \to 0$, $\bar{\mathcal{Q}} \to \bar{Q}_{c=0}$, como puede verificarse por comparar las transformaciones (5.26) y (5.33), y usar las ecuaciones de movimiento de los campos componentes.

Es importante resaltar que, a diferencia del caso de las transformaciones (5.24),(5.26), las cuales dan una realización lineal del álgebra de supersimetría en el caso no deformado, $\bar{\mathcal{Q}}$ provee, junto con $\mathcal{Q}$, una realización no lineal definida por las ecs.(5.29),(5.33).

Concluimos así que, al menos clásicamente, la teoría deformada tiene tantas supercargas como la no deformada. En otras palabras, dado que la teoría defomada posee cargas $\mathcal{Q}$ y $\bar{\mathcal{Q}}$ satisfaciendo la superálgebra $d = 1$ $\mathcal{N} = 2$

$$\mathcal{H} = \frac{i}{2}\{\mathcal{Q}, \bar{\mathcal{Q}}\}_P, \qquad \{\mathcal{Q}, \mathcal{Q}\}_P = \{\bar{\mathcal{Q}}, \bar{\mathcal{Q}}\}_P = 0 \tag{5.34}$$

encontramos que la teroía NAC-deformada tambien es $\mathcal{N}=2$ supersimétrica. Este resultado está en clara oposición con lo que es usualmente esperado a partir de observar la superálgebra deformada $\mathcal{N}=\frac{2}{2}$ ec.(5.10) con $b=0$, $\bar{b}=2$.

5.3. Supersimetrías Cuánticas

Para estudiar la teoría cuántica, debemos reemplazar los corchetes de Poisson por conmutadores, $\{\ ,\ \}_P \to -i[\ ,\ ]$ y representar las relaciones de conmutación canónicas

$$[\phi,\Pi_\phi]=i, \qquad \{\psi,i\bar{\psi}\}=1. \tag{5.35}$$

sobre un espacio de Hilbert. La primera relación puede ser representada de la manera estándar en término de funciones de onda en $L^2(\mathbb{R})$. Para representar la segunda relación, la cual corresponde a un álgebra de Clifford, podemos usar matrices de 2×2,

$$\psi=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad i\bar{\psi}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.36}$$

Para estudiar las supersimetrías a nivel cuántico, será conveniente trabajar con una nueva carga

$$\hat{\mathcal{Q}}_+=\hat{\mathcal{Q}}+\hat{\bar{\mathcal{Q}}} \tag{5.37}$$

(o equivalentemente con $\hat{\mathcal{Q}}_-=i(\hat{\mathcal{Q}}-\hat{\bar{\mathcal{Q}}})$) la cual satisface $\hat{\mathcal{H}}=(\hat{\mathcal{Q}}_+)^2$. Notar que la validez de esta relación impone un vínculo a los posibles ordenamientos de $\hat{\mathcal{H}}$ y $\hat{\mathcal{Q}}_+$.[1]

Para determinar si la supersimetría $\mathcal{Q}$ está espontáneamente rota en la teoría deformada podemos utilizar el índice de Witten. Ya que el hamiltoniano es el cuadrado de $\hat{\mathcal{Q}}_+$, luego $[\hat{\mathcal{H}},\hat{\mathcal{Q}}_+]=0$. Así, excepto para estados aniquilados por $\hat{\mathcal{Q}}_+$, existe un par de estados bosón/fermión con la misma energía y el índice de Witten resulta

$$\mathcal{W}=\mathrm{Tr}\left[(-1)^F e^{-\beta\mathcal{H}}\right]=\{\sharp \text{ bosón } \Upsilon_+^{\text{estados cerrados}}\}-\{\sharp \text{ fermión } \Upsilon_+^{\text{estados cerrados}}\} \tag{5.38}$$

donde $\Upsilon_+^{\text{estados cerrados}}$ son aquellos estados aniquilados por $\hat{\mathcal{Q}}_+$.

Si $\hat{\mathcal{Q}}_+$ es un operador hermítico, luego es válida la siguiente relación

$$\langle\chi\mid\hat{\mathcal{H}}\mid\chi\rangle=\mid\hat{\mathcal{Q}}_+\mid\chi\rangle\mid^2, \tag{5.39}$$

y, por lo tanto, los estados aniquilados por $\hat{\mathcal{Q}}_+$ son estados de vacío. Consecuentemente, un índice de Witten no nulo implica que la simetría $\mathcal{Q}_+$ no está rota. De hecho, esto es lo que ocurre en teorías supersimétricas en el caso no deformado. Sin embargo, cuando la deformación está presente la situación cambia radicalmente: como es común en teorías de campos NAC, la acción, y luego el hamiltoniano, son en general complejos. Luego, de acuerdo a (5.28),(5.32), $\hat{\bar{\mathcal{Q}}}$ ya no es el hermítico conjugado de $\hat{\mathcal{Q}}$, lo que lleva en general a cargas no hermíticas $\hat{\mathcal{Q}}_\pm$. Veremos en la próxima sección que esta imagen puede ser alterada mediante la introducción del concepto de cryptorealidad.

[1] En este capítulo utilizaremos un "sombrero" para diferenciar a los operadores cuánticos de los correspondientes observables clásicos.

Como fue probado en [77], el índice de Witten [71] puede obtenerse a partir de la función de partición Z en tiempo euclídeo,

$$\mathcal{W} = \int_{PBC} \mathcal{D}\Theta\, \mathcal{D}\Pi \, \exp\left(-\int_0^\beta dt \, (\Pi^i \dot{\Theta}_i - \mathcal{H}) \right), \tag{5.40}$$

con $\Theta = (\phi, \psi)$, $\Pi = (iF, -i\bar{\psi})$. La integral funcional es tomada sobre configuraciones que satisfacen condiciones de contorno periódicas: $\Theta(t+\beta) = \Theta(t)$. Además, las variables canónicas en el operador hamiltoniano deben ser ordenados tal que se satisfaga $\mathcal{H} = e^{ip_\phi \phi}\langle p_\phi|\hat{\mathcal{H}}|\phi\rangle$. Con esta representación para el índice de Witten, su cálculo puede realizarse fácilmente ya que la función de partición deformada coincide con la correspondiente al caso no deformado cuando en esta última la simetría $\mathcal{Q}$ no está rota. Para verificar esto, veamos primero que la acción deformada es $\mathcal{Q}$-exacta, esto es,

$$S = \int dt \left\{ \mathcal{Q}, \bar{\psi}\left(\frac{d\phi}{dt} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \phi} - \frac{i}{2}F \right) \right\}_P = S(c=0) + \int dt \left\{ \mathcal{Q}, \bar{\psi}\frac{\partial}{\partial \phi}(\tilde{W} - W) \right\}_P \tag{5.41}$$

En consecuencia, podemos expresar la function de partición como

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\psi\mathcal{D}F \exp(-S) = \int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\psi\mathcal{D}F \exp\left(-S(c=0) - \int dt \left\{ \mathcal{Q}, \bar{\psi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\tilde{W} - W) \right\}_P (t) \right) \\ &= Z(c=0) + \sum_{n>0} (-1)^n \int dt_1 \, ... \int dt_n \, \times \\ &\qquad \left\langle \left\{ \mathcal{Q}_{c=0}, \bar{\psi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\tilde{W} - W) \right\}(t_1) ... \left\{ \mathcal{Q}_{c=0}, \bar{\psi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\tilde{W} - W) \right\}(t_n) \right\rangle_{c=0} \end{aligned} \tag{5.42}$$

donde $\langle\ \rangle_{c=0}$ denota el valor de expectación de vacío correspondiendo a la teoría no deformada. Notar que el reemplazo $\{\mathcal{Q},\ \} \to \{\mathcal{Q}_{c=0},\ \}$ puede hacerse ya que las transformaciones $\mathcal{Q}$ de los campos componentes no se ven afectadas por la deformación. Si la simetría $\mathcal{Q}_{c=0}$ no está rota en el caso no deformado (i.e. $\mathcal{Q}_{c=0}|vac\rangle_{c=0} = 0$), los valores de expectación de operadores $\mathcal{Q}_{c=0}$-exactos se anulan. Así, obtenemos que $Z = Z(c=0)$ y, debido a la relación (5.40), $\mathcal{W} = \mathcal{W}(c=0)$ cuando la teoría no deformado es supersimétrica.

Podemos resumir los anteriores resultados como sigue,

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \{\sharp \text{ bosonic } \Upsilon_+^{\text{estados cerrados}}\} - \{\sharp \text{ fermionic } \Upsilon_+^{\text{estados cerrados}}\} \\ &= \begin{cases} -1 & \text{for}\, W(\phi) \to a\phi^{2n} \ \text{ as}\, \phi \to \pm\infty, \ a > 0 \\ \ \ 1 & \text{for}\, W(\phi) \to -a\phi^{2n} \ \text{ as}\, \phi \to \pm\infty \\ & \text{desconocido en otro caso.} \end{cases} \end{aligned} \tag{5.43}$$

Si tomamos los estados de vacío como aquellos para los cuales el v.e.v. de $\hat{\mathcal{H}}$ se anula, los estados aniquilados por $\mathcal{Q}_+$ serán estados de vacío. Luego, aquellos casos en los cuales $\mathcal{W} \neq 0$ corresponden a teorías con supersimetría no rota. En conclusión, si bien los razonamientos anteriores que llevan a la ec.(5.42) no permiten saber que ocurre cuando la teoría original (no deformada) no es supersimétrica, sí nos posibilita afirmar que la teora deformada poseerá vacíos supersimétricos en todos los casos en los que la teoría no deformada los tiene.

5.4. Cryptorealidad del Hamiltoniano No(Anti)Conmutativo

En [78], Ivanov y Smilga encontraron que el hamiltoniano (5.23), a pesar de ser complejo en apariencia, es verdaderamente hermítico, en el sentido de que es posible definir un espacio de Hilbert apropiado de manera que el espectro de $\mathcal{H}$ sea real. Tales hamiltonianos son conocidos como "cryptohermíticos" (o "cryptoreales"). La manera más simple de ver esto es observar la existencia de un operador R tal que el hamiltoniano conjugado

$$\tilde{\mathcal{H}} = e^{R}\mathcal{H}e^{-R} \tag{5.44}$$

es manifiestamente autoadjunto. En el caso del modelo de Mecánica Cuántica NAC, la R-conjugación también lleva a supercargas rotadas $e^{R}\mathcal{Q}e^{-R}$ y $e^{R}\bar{\mathcal{Q}}e^{-R}$ que son hermíticas conjugadas entre sí.

Veamos cómo ocurre esto en el caso no trivial más simple, con $W(\phi) = \lambda\phi^3/3$, para el cual

$$\tilde{W}(\phi, F) = \frac{\lambda}{3}\phi^3 + \frac{\lambda c^2}{12}\phi F^2 \tag{5.45}$$

El hamiltoniano canónico correspondiente es

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2} + i\lambda p\phi^2 - i\beta p^3 - 2\lambda\phi\bar{\psi}\psi, \tag{5.46}$$

con $p = -iF$ y $\beta = \lambda c^2/12$. El lagrangiano y hamiltoniano deformados lucen así inherentemente complejos. Para eliminar el carácter complejo en los términos $\sim p\phi^2$ y $\sim p^3$, definimos el operador R

$$R = -\frac{\lambda}{3}\phi^3 + \beta\phi p^2 - 2\lambda\beta\phi^2\bar{\psi}\psi + ..., \tag{5.47}$$

donde los puntos suspensivos denotan términos de tercer o mayor orden en λ y/o β. El hamitoniano conjugado es

$$\tilde{\mathcal{H}} = e^{R}\mathcal{H}e^{-R} = \frac{p^2}{2} - 2\lambda\phi\bar{\psi}\psi + \frac{1}{2}[\lambda^2\phi^4 + 3\beta^2 p^4] + \frac{1}{2}\lambda\beta + O(\lambda^3, \beta^3, \lambda^2\beta, \lambda\beta^2). \tag{5.48}$$

Este hamiltoniano es hermítico. Por su parte, las supercargas rotadas son

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{Q}} &= e^{R}\mathcal{Q}e^{-R} = \psi[p - i(\lambda\phi^2 - \beta p^2) + \lambda\beta\phi^2 p - \beta^2 p^3 + ...], \\ \tilde{\bar{\mathcal{Q}}} &= e^{R}\bar{\mathcal{Q}}e^{-R} = \bar{\psi}[p + i(\lambda\phi^2 - \beta p^2) + \lambda\beta\phi^2 p + 3\beta^2 p^3 + ...]. \end{aligned} \tag{5.49}$$

Puede verse que ellas no son todavía una adjunta de la otra. Para hacerlas mutuamente adjuntas al orden en β, λ considerado, debemos agregar al operador R un término más

$$\breve{R} = R - 2\beta^2 p^2\bar{\psi}\psi. \tag{5.50}$$

Es fácil verificar que esta modificación no cambia al hamiltoniano rotado, pero vuelve a las supercargas rotadas conjugadas herméticas entre sí,

$$\begin{aligned} \breve{\mathcal{Q}} &= e^{\breve{R}}\mathcal{Q}e^{-\breve{R}} = \psi[p - i(\lambda\phi^2 - \beta p^2) + \lambda\beta\phi^2 p + \beta^2 p^3 + ...], \\ \breve{\bar{\mathcal{Q}}} &= e^{\breve{R}}\bar{\mathcal{Q}}e^{-\breve{R}} = \psi[p + i(\lambda\phi^2 - \beta p^2) + \lambda\beta\phi^2 p + \beta^2 p^3 + ...]. \end{aligned} \tag{5.51}$$

Por construcción, los operadores $\breve{\mathcal{Q}}$, $\breve{\bar{\mathcal{Q}}}$ y $\tilde{\mathcal{H}}$ satisfacen el álgebra supersimétrica estándar. No es difícil convencerse además que, orden por orden en λ, β, los términos complejos en $\mathcal{H}$ pueden ser eliminados exitosamente mediante una rotación adecuada, a la vez que se mantiene la relación de conjugación entre $\mathcal{Q}$ y $\bar{\mathcal{Q}}$. De hecho, esta posibilidad es cierta para superpotenciales W de cualquier grado, y así para cualquier superpotencial analítico.

5.5. El Supermultiplete $(\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{0})$

Cuando la teoría deformada es formulada en términos del supermultiplete $(\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{0})$, esto es, cuando usamos supercampos quirales complejos en vez de reales, no aparecen campos auxiliares en la teoría. Puede entonces ser prometedor analizar este caso ya que era la presencia del campo auxiliar lo que dificultaba el análisis de rotura de supersimetría en el caso del multiplete $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$.

En la base quiral, un supercampo quiral Ψ y un supercampo antiquiral $\bar{\Psi}$ tienen la expansión en componentes

$$\begin{aligned} \Psi(t,\theta) &= z(t) + \theta\chi(t) \\ \bar{\Psi}(t - 2i\theta\bar{\theta}, \bar{\theta}) &= \bar{z}(t - 2i\theta\bar{\theta}) + \bar{\chi}(t)\bar{\theta} = \bar{z}(t) + \bar{\chi}(t)\bar{\theta} - 2i\theta\bar{\theta}\dot{\bar{z}}(t) \end{aligned} \tag{5.52}$$

En término de las coordenadas $(\tau, \theta, \bar{\theta})$, los campos componentes satisfacen $z^\dagger(\tau) = \bar{z}(\tau)$ y $\chi^\dagger(\tau) = \bar{\chi}(\tau)$. Ahora, para poder hacer uso de estos multipletes es necesario tener un producto Moyal que preserve la condición de quiralidad de los supercampos. Con la deformación genérica (5.2), el producto de supercampos quirales y antiquirales toma la forma

$$\begin{aligned} \Psi_1 * \Psi_2 &= \Psi_1\Psi_2 - \frac{C}{2}\chi_1\chi_2 \\ \bar{\Psi}_1 * \bar{\Psi}_2 &= \bar{\Psi}_1\bar{\Psi}_2 - \frac{\bar{C}}{2}\bar{\chi}_1\bar{\chi}_2 + c^2\dot{\bar{z}}_1\dot{\bar{z}}_2 + i\bar{C}\theta\left(\dot{\bar{z}}_1\bar{\chi}_2 - \dot{\bar{z}}_2\bar{\chi}_1\right) + i\widehat{C}\left(\dot{\bar{z}}_1\bar{\chi}_2 - \dot{\bar{z}}_2\bar{\chi}_1\right)\bar{\theta} \end{aligned} \tag{5.53}$$

Podemos ver que el producto de supercampos quirales es todavía quiral. Sin embargo, para preservar la condición de antiquiralidad, la deformación tiene que satisfacer $\bar{C} = c^2 = 0$. Luego, solo el álgebra de θ resulta deformada.

Consideremos una teoría con un término cinético canónicamente normalizado y un prepotencial real Kähler $K(z, \bar{z})$. La acción deformada es

$$S = \int dtd\theta d\bar{\theta}\left[\frac{1}{4}(D * \Psi) * (\bar{D} * \bar{\Psi}) + K_*(\Psi, \bar{\Psi})\right]\Big), \tag{5.54}$$

con el prepotencial definido por

$$K_*(\Psi, \bar{\Psi}) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{(n+m)!}\frac{\partial^{n+m}K}{\partial z^n \partial \bar{z}^m}\left[\Psi * \overset{(n)}{\cdots} * \Psi * \bar{\Psi} * \overset{(m)}{\cdots} * \bar{\Psi}\right] \tag{5.55}$$

donde los corchetes [...] denotan todas las posibles permutaciones de los supercampos.

Una expresión no perturbativa para el prepotencial Kähler deformado puede obtenerse usando una generalización de la ec.(5.18) para el caso de varios supercampos [74]-[76]. Sin embargo, como en el caso de un único supercampo, la deformación del prepotencial es controlada por el parámetro c^2, el cual en este caso es cero. Por lo tanto, el prepotencial no recibe correcciones debido a la deformación. Como el término cinético tampoco es afectado por la deformación, la acción (5.54) coincide con la del caso no deformado.

5.6. Resumen y Discusión

En este capítulo analizamos deformaciones NAC del superespacio $d = 1$ $\mathcal{N} = 2$ y estudiamos como definir sobre éste modelos de Mecánica Cuántica. En particular, el énfasis fue puesto en la determinación del número de supercargas rotas por la deformación NAC. Comenzando con una deformación general del álgebra de las coordenadas fermiónicas del superespacio y trabajando en la base quiral, encontramos que la mitad del álgebra de supersimetría original (correspondiendo a la subálgebra generada por Q) puede ser preservada, de manera equivalente a lo que ocurre en teorías de campos NAC. Mediante el empleo de un producto Moyal para implementar la deformación, construimos una teoría supersimétrica $\mathcal{N} = 2$ deformada en términos del supermultiplete $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$ y con un superpotencial arbitrario. El lagrangiano resultante toma la misma forma que el correspondiente al superespacio no deformado, pero con un superpotencial efectivo tomando el lugar del superpotencial original. Dicho superpotencial efectivo fue obtenido haciendo uso de una fórmula no perturbativa hallada en el contexto de modelos sigma NAC bidimensionales.

Una vez obtenido el lagrangiano en término de los campos componentes, el paso siguiente fue estudiar la cantidad de supercargas admitidas por dicho modelo. La expresión para la supercarga $\mathcal{Q}$ en término de los campos componentes es fácilmente obtenida, ya que corresponde a la subálgebra SUSY $\mathcal{N} = \frac{1}{2}$ que sobrevive a la deformación. El hecho de que el hamiltoniano $\mathcal{H}$ deformado es todavía $\mathcal{Q}$-exacto nos permitió hallar una segunda carga supersimétrica $\bar{\mathcal{Q}}$, la cual, junto con $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{H}$, satisfacen el álgebra de supersimetría $d = 1$ $\mathcal{N} = 2$. En consecuencia, llegamos a la llamativa conclusión de que el modelo deformado tiene (al menos a nivel clásico) tantas supercargas conservadas como el modelo no deformado. Al pasar a la versión cuántica de la teoría, hallamos que la no hermiticidad de las supercargas (consecuencia de la no hermiticidad del modelo deformado) dificulta realizar un análisis análogo sobre la conservación de las mismas. A pesar de esta dificultad, encontramos que en los casos en los que la teoría no deformada es supersimétrica, el índice de Witten no cambia al encender la deformación. Este resultado nos permitió saber en qué casos las supercargas de la teoría cuántica no están espontáneamente rotas.

A continuación y basándonos en el trabajo de Ivanov y Smilga [78], mostramos que el hamiltoniano de la teoría deformada pertenece a una categoría de operadores conocida como operadores crytohermíticos. Esto significa que, a pesar de ser en apariencia no hermíticos, es posible definir un espacio de Hilbert apropiado de manera que el espectro del hamiltoniano sea real. De hecho, mostramos que existe un operador R tal que el hamiltoniano conjugado es manifiestamente autoadjunto. Más aún, la R-conjugación de las supercargas $\mathcal{Q}$ y $\bar{\mathcal{Q}}$ lleva a supercargas rotadas que son hermíticas conjugadas entre sí.

Finalizamos el capítulo formulando la teoría deformada en términos del supermultiplete $(\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{0})$, esto es, utilizando supercampos quirales complejos en vez de supercampos reales. En este caso, requirir que el producto Moyal preserve la condición de quiralidad restringe la clase de deformaciones posibles. De hecho, estos vínculos sobre el parámetro de la deformación resultan ser demasiado restrictivos, ya que la acción deformada termina coincidiendo con la no deformada.

Capítulo 6

Cuerdas No Abelianas - Efecto Meissner No Abeliano

Este capítulo servirá principalmente para presentar el contexto en el cual aparecen las configuraciones BPS del tipo cuerda no abeliana y, a la vez, introducir las herramientas necesarias para los estudios originales que expondremos en los capítulos siguientes. Esto será logrado mediante la exposición de una de las principales aplicaciones que tiene este tipo de cuerda, que consiste en su utilización para obetener, mediante el efecto Meissner no abeliano, el confinamiento de monopolos no abelianos en ciertas teorías con $\mathcal{N} = 2$ supersimetrías. Más precisamente, el modelo (microscópico) con el que trabajaremos tendrá un grupo de gauge $U(N)$, un término de Fayet-Iliopoulos para el factor $U(1)$ y términos de masa grandes y (aproximadamente) degeneradas para los N hipermultipletes de materia. Presentaremos un completo tratamiento cuasi-clásico del sector BPS de este modelo, que incluirá la obtención del conjunto de ecuaciones de primer orden y la derivación de una teoría efectiva de bajas energías para las coordenadas colectivas. Esta descripción (macroscópica) efectiva vendrá dada por un modelo sigma $\mathbf{CP}^{N-1}$ con y sin términos de masa. Los monopolos confinados (unión de cuerdas en el modelo microscópico) serán mapeados sobre kinks BPS del modelo $\mathbf{CP}^{N-1}$. Finalmente, estudiaremos que ocurre con los monopolos confinados en el límite no abeliano de términos de masa degenerados, donde una simetría global $SU(N)$ es restaurada.

A lo largo de la última década quedó claro que los métodos y técnicas basados en la supersimetría constituyen una de las pocas y más adecuadas herramientas para estudiar la cromodinámica cuántica y otras teorías de gauge en el régimen de acoplamiento fuerte. En este sentido, resultan especialmente útiles los sectores BPS (ver capítulo 2) presentes en algunas teorías supersimétricas, ya que permiten obtener resultados exactos a nivel cuántico, incluso en acoplamiento fuerte.

Los solitones BPS aparecen en aquellas teorías supersimétricas en las cuales la superálgebra posee extensiones centrales. En general estas cargas centrales están presentes ya a nivel clásico, aunque también existen varios casos interesantes en los que dichas cargas aparecen como una anomalía cuántica. Un ejemplo del poder de la supersimetría es la milagrosa cancelación que tiene lugar en el cálculo de correcciones cuánticas de cantidades tales como la masa o la carga topológica del solitón. Debido a que los solitones BPS preservan parte de la supersimetría, los modos bosónicos y fermiónicos están degenerados y su número resulta balanceado. Así, por ejemplo, si un solitón es BPS-saturado (y por lo tanto, pertenece a un supermultiplete corto), éste seguirá siendo BPS-saturado después de las correcciones cuánticas, y su masa continuará coincidiendo exactamente con la carga central. Como hemos visto en el capítulo 2, debido a la saturación de la cota de Bogomol'nyi, los solitones BPS se caracterizan además por satisfacer ecuaciones diferenciales de primer orden (conocidas como ecuaciones de Bogomol'nyi o de autodualidad), lo que facilita enormemente la busqueda y el análisis de las correspondientes soluciones.

Existe una gran variedad de solitones BPS en teorías de campos en 4 dimensiones: paredes de dominio, tubos de flujo (vórtices), monopolos y diones, y las varias uniones entre estos objetos. De todos ellos, nosotros estaremos particularmente interesados en un tipo de configuraciones BPS tipo cuerda, encontrada muy recientemente y conocida como cuerdas no abelianas [27]-[30]. Este tipo de cuerdas es considerada actualmente como una pieza básica para la futura comprensión del fenómeno de confinamiento presente en teorías de gauge tipo QCD.

En 1994, Seiberg y Witten [53],[52] presentaron la primera demostración de la presencia del efecto Meissner dual en una teoría no abeliana. Su celebrada prueba analítica del confinamiento lineal de quarks causó una gran conmoción en la comunidad científica. Tomó tres años advertir [79] que los tubos de flujo en la solución de Seiberg-Witten no son el tipo de cuerdas que aparecen en QCD. Hanany, Strassler y Zaffaroni analizaron en 1997 los tubos de flujo cromoeléctrico en la solución de Seiberg-Witten y mostraron que ellos eran esencialmente abelianos, por lo que los hadrones que ellos confinaran tendrían muy poco que ver con los de QCD. El espectro hadrónico sería significativamente más rico. Por ejemplo, en el caso $SU(3)$, tres tubos de flujo de Seiberg-Witten no se aniquilarán entre sí, como si ocurre en QCD. Desde entonces, la búsqueda de tubos de flujo y monopolos genuinamente no abelianos continuó, hasta que finalmente fueron descubiertos en 2003-04.

En este capítulo introduciremos las cuerdas no abelianas y mostraremos, en lo que constituye una de sus principales aplicaciones, como pueden ser utilizadas para demostrar la presencia del efecto Meissner no abeliano y el confinamiento de monopolos no abelianos en ciertas teorías con $\mathcal{N} = 2$ supersimetrías. Además de esta interesantísima aplicación, dicha exposición nos permitirá introducir los elementos básicos necesarios para los estudios que encararemos en los capítulos siguientes.

6.1. Modelo Básico: $\mathcal{N} = 2$ SQCD

El modelo con el que trabajaremos deriva de la cromodinámica supersimétrica (SQCD) $\mathcal{N} = 2$ con grupo de gauge $SU(N + 1)$ y con $N_f = N$ sabores de hipermultipletes de materia en la representación fundamental del grupo de gauge, a los que llamaremos quarks [52]. En un punto genérico de la rama de Coulomb de esta teoría, el grupo de gauge es roto a $U(1)^N$. Sin embargo, nosotros estaremos interesados en un subespacio particular de la rama de Coulomb sobre el cual el grupo de gauge se rompe a $SU(N) \times U(1)$. Para ubicarnos en este régimen debemos realizar una determinada elección de los términos de masa de los quarks.

La rotura $SU(N + 1) \to SU(N) \times U(1)$ ocurre a una escala m, que suponemos muy alta,

$m \gg \Lambda_{SU(N+1)}$, donde $\Lambda_{SU(N+1)}$ es la escala de la teoría $SU(N+1)$. Consecuentemente, las masas de los bosones de gauge del sector $SU(N+1)/SU(N) \times U(1)$ y las de sus supercompañeros son muy grandes -proporcionales a m- y lo mismo ocurre con la $(N+1)$-ésima componente de color de los campos de quarks.

Dado que estamos interesados en fenómenos a escalas $\ll m$, nuestro punto de partida será entonces el modelo $SU(N) \times U(1)$ con $N_f = N$ en la representación fundamental de $SU(N)$, que emerge luego de la rotura $SU(N+1) \to SU(N) \times U(1)$. Tanto o más importante aún, la elección de los parámetros de masa de los quarks escalares (squarks) m_r de manera que $m_r \gg \Lambda_{SU(N+1)}$ nos permitirá asegurarnos que la teoría de gauge se encuentra en un régimen de acoplamiento débil. Trabajar con una teoría en la que las interacciones permanecen débiles a toda escala es de fundamental importancia, ya que nos posibilitará realizar el análisis de manera confiable en un contexto donde la dinámica del modelo es bien entendida y donde, en particular, los vórtices no abelianos pueden ser estudiados en un régimen semi-clásico.

6.1.1. $SU(N) \times U(1)$ $\mathcal{N}=2$ SQCD

El contenido de campos de $SU(N) \times U(1)$ $\mathcal{N} = 2$ SQCD con N sabores es el siguiente. El multiplete vectorial $\mathcal{N} = 2$ consiste del campo de gauge $U(1)$ A_μ y el campo de gauge $SU(N)$ A_μ^A $(A = 1, ..., N^2 - 1)$, y sus supercompañeros fermiones de Weyl $(\lambda^1_\alpha, \lambda^2_\alpha)$ y $(\lambda^{1A}_\alpha, \lambda^{2A}_\alpha)$, más los campos escalares complejos a y a^A. Estos últimos están en la representación adjunta de $SU(N)$, mientras que el índice espinorial de los λ's toma valores $\alpha = 1, 2$.

Los hipermultipletes de quarks de la teoría $SU(N) \times U(1)$ consiste en campos escalares complejos $q^a_{\ r}$ y $\tilde{q}^r_{\ a}$ (squarks) y fermiones de Weyl $\psi^a_{\ r}$ y $\tilde{\psi}^r_{\ a}$, todos en la representación fundamental de $SU(N)$. Aquí $a = 1, ..., N$ es el índice de color mientras que $r = 1, ..., N$ es el índice de sabor.

La acción que corresponde a la parte bosónica de la teoría toma la forma [28]

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int d^4x \Big\{ -\frac{1}{4e_1^2} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4e_2^2} F^A_{\mu\nu}F^{A\mu\nu} + \frac{1}{e_1^2}\partial_\mu a \partial^\mu a + \frac{1}{e_2^2}\nabla_\mu a^A \nabla^\mu a^A \\ &+ \mathcal{D}_\mu \bar{q}^r \mathcal{D}^\mu q_r + \mathcal{D}_\mu \tilde{q}^r \mathcal{D}^\mu \bar{\tilde{q}}_r - V(q, \tilde{q}, a^A, a) \Big\} \end{aligned} \tag{6.1}$$

donde

$$\bar{q}^r_{\ a} \equiv (q^a_{\ r})^*, \quad \bar{\tilde{q}}^a_{\ r} \equiv (\tilde{q}^r_{\ a})^*, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad F^A_{\mu\nu} = \partial_\mu A^A_\nu - \partial_\nu A^A_\mu - f^{ABC} A^B_\mu A^C_\nu, \tag{6.2}$$

∇_μ es la derivada covariante en la representación adjunta de $SU(N)$, y

$$\mathcal{D}_\mu q^a_{\ r} \equiv \partial_\mu q^a_{\ r} - \frac{i}{\sqrt{2N}} A_\mu q^a_{\ r} - A^A_\mu (T^A)^a_{\ b} q^b_{\ r}, \qquad \mathcal{D}_\mu \tilde{q}^r_{\ a} \equiv \partial_\mu \tilde{q}^r_{\ a} + \frac{i}{\sqrt{2N}} A_\mu \tilde{q}^r_{\ a} + A^A_\mu (T^A)^b_{\ a} \tilde{q}^r_{\ b}. \tag{6.3}$$

Por simplicidad suprimimos los índices del grupo de gauge que están sumados, e.g.

$$(\bar{\phi}^r T^A \phi_r) \equiv (T^A)^a_{\ b} \bar{\phi}^r_{\ a} \phi^b_{\ r} \tag{6.4}$$

Además, consideramos a los generadores T^A de la representación fundamental $\mathbf{N}$ de $SU(N)$ como matrices antihermíticas que satisfacen

$$[(T^A)^a_{\ b}]^* = -(T^A)^b_{\ a}, \qquad [T^A, T^B] = f^{ABC} T^C, \qquad (T^A T^B)^a_{\ a} = -\frac{1}{2}\delta^{AB}. \tag{6.5}$$

El potencial $V(q,\tilde{q},a^A,a)$ en la acción (6.1) es la suma de términos F y D,

$$
\begin{aligned}
V(q,\tilde{q},a^A,a) &= \frac{e_2^2}{2}\left(\frac{1}{e_2^2}f^{ABC}\bar{a}^B a^C - \bar{q}^r T^A q_r + \tilde{q}^r T^A \bar{\tilde{q}}_r\right)^2 \\
&+ \frac{e_1^2}{4N}(\bar{q}^r q_r - \tilde{q}^r \bar{\tilde{q}}_r - N\xi)^2 \\
&+ 2e_2^2 |\,\tilde{q}^r T^A q_r|^2 + \frac{e_1^2}{2}|\,\tilde{q}^r q_r|^2 \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N}\Big\{|(a+\sqrt{2}m_r + 2T^A a^A)q_r|^2 \\
&+ |(a+\sqrt{2}m_r + 2T^A a^A)\bar{\tilde{q}}_r|^2\Big\}
\end{aligned} \tag{6.6}
$$

La primera y segunda línea representan téminos D mientras que las restantes corresponden a términos F. Por su parte, ξ es un parámetro real conocido como parámetro de Fayet-Iliopoulos (FI).

6.1.2. La Estructura de Vacío

Revisemos brevemente cómo es la estructura de vacío de nuestro modelo $SU(N)\times U(1)$. La teoría subyacente $\mathcal{N}=2$ SQCD con grupo de gauge $SU(N+1)$ tiene una gran variedad de vacíos [38],[80],[81]. Existen N vacíos con acoplamiento fuerte, conocidos como vacíos Seiberg-Witten, cada uno de los cuales corresponde a una teoría de gauge $SU(N+1)$ puro. En adición a estos, hay un número de vacíos conocidos como vacíos de quarks r, donde r es el número de sabores de quarks que desarrollan un VEV en dicho vacío. Aquí nos enfocaremos en el vacío aislado con el máximo valor posible de r,

$$r = N. \tag{6.7}$$

La teoría (6.1) no es más que el trucado de bajas energías de la teoría $SU(N+1)$ SQCD completa, describiendo la física alrededor de este vacío.

Los vacíos de la teoría (6.1) son determinados por los ceros del potencial (6.6). Los campos en la representación adjunta desarrollan el siguiente VEV

$$\langle \mathcal{A} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} m_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & m_N \end{pmatrix}, \tag{6.8}$$

donde hemos definido la matriz escalar

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}a + T^A a^A. \tag{6.9}$$

Para valores genéricos de las masas de los quarks, el subgrupo $SU(N)$ del grupo de gauge es roto a $U(1)^{N-1}$. Sin embargo, para la elección especial

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_N, \tag{6.10}$$

que es la que nos interesará en este capítulo, el grupo de gauge $SU(N) \times U(1)$ permanece clásicamente no roto.

Si el valor del parámetro FI es tomado real, podemos explotar las rotaciones de gauge para hacer también reales a los VEV de los quarks. Luego, en el caso considerado, ellos toman la forma diagonal en color-sabor

$$\langle q^a_{\ r} \rangle = \sqrt{\xi} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \qquad \langle \tilde{q}^r_{\ a} \rangle = 0, \tag{6.11}$$

donde hemos escrito a los campos de quarks como matrices de $N \times N$ en los índices de color y sabor. Esta forma particular del condensado de squarks es dictada por la segunda y tercer línea en la eq.(6.1).

Los campos de vacío (6.11) llevan a la rotura de los grupos $SU(N)$ de sabor y de color. Sin embargo, un grupo $SU(N)$ global sobrevive,

$$U(1) \times SU(N)_{\rm c} \times SU(N)_{\rm s} \longrightarrow SU(N)_{\rm c+s} \tag{6.12}$$

que implica una rotación simultánea en los grupos de sabor y de color.

Concluiremos esta sección discutiendo efectos cuánticos en la teoría (6.1). A una escala alta m (del orden de las masas de los quarks) el grupo de gauge $SU(N+1)$ es roto a $SU(N) \times U(1)$ por condensación de los campos en la adjunta cuando la condición (6.10) se satisface. El sector $SU(N)$ es asintóticamente libre. Al decrecer la energía, la evolución de la constante de acoplamiento, si no es interrumpida, llevará a la teoría a un régimen de acoplamiento fuerte. Esto invalidaría nuestro análisis semiclásico. Una manera de evitar esto es tomar un parámetro FI ξ grande,

$$\xi \gg \Lambda_{SU(N)}. \tag{6.13}$$

Esta condición asegura un acoplamiento débil en el sector $SU(N)$ debido a que el acoplamiento de gauge $SU(N)$ deja de correr debajo de la escala de VEV de los quarks, la cual es determinada por ξ. Más explícitamente,

$$\frac{8\pi^2}{e_2^2(\xi)} = N \log \frac{\sqrt{\xi}}{\Lambda_{SU(N)}} \gg 1. \tag{6.14}$$

6.2. Cuerdas Abelianas Z_N Elementales

Veamos cómo son las soluciones de cuerda BPS [38],[27],[28] en el modelo (6.1). Consideraremos primero el caso de masas de quarks iguales (6.10), donde el grupo global $SU(N)_{\rm c+s}$ permanece no roto. Primero encontraremos las soluciones abelianas para las cuerdas Z_N, y luego, en la sección siguiente, mostraremos que en este límite ellas adquieren un moduli orientacional.

De hecho, en el caso genérico de masas distintas, el grupo $SU(N)_{\rm c+s}$ es explícitamente roto y solo las cuerdas Z_N sobreviven a esta rotura. Al tomar masas iguales, el grupo $SU(N)_{\rm c+s}$ es restaurado y la solución general para las cuerdas elementales no abelianas adquiere un espacio móduli isomorfo a $\mathbf{CP}^{N-1}$, mientras que las cuerdas Z_N son solo N puntos discretos sobre este espacio móduli.

Las soluciones de cuerda no involucran a los campos adjuntos a y a^A, ni a los squarks $\tilde{q}$. Luego, para encontrar las soluciones clásicas podemos fijar el valor de estos campos a ser el de sus VEV's. Esto es consistente con las ecuaciones de movimiento. Por supuesto, a nivel cuántico los campos empezarán a fluctuar, desviándose de sus VEV's.

Con esta simplificación la acción del modelo resulta

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4e_1^2} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4e_2^2} F^A_{\mu\nu}F^{A\mu\nu} \right. \\ &+ \left. \mathcal{D}_\mu \bar{q}^r \mathcal{D}^\mu q_r - \frac{e_1^2}{4N}(\bar{q}^r q_r - N\xi)^2 + \frac{e_2^2}{2}(\,\tilde{q}^r T^A q_r)^2 \right\} \end{aligned} \tag{6.15}$$

Ya que en el modelo considerado se da la rotura espontánea del sector $U(1)$, dicho modelo debe admitir cuerdas de Abrikosov-Nielsen-Olesen (ANO) convencionales [25],[26] , obtenidas al descartar la parte $SU(N)_c$ de la acción. Sin embargo, éstas no son las cuerdas en las que estamos interesados. Para construir cuerdas elementales Z_N embeberemos una solución de cuerda abeliana en uno de los elementos diagonales de q y A_μ. Así, por ejemplo, si q^* y A^*_μ denotan los perfiles de los campos de Higgs y gauge del vórtice abeliano, el análogo no abeliano tendrá la forma:

$$\begin{aligned} q^a_r &= \sqrt{\xi}\mathrm{diag}(1,1,...,q^*), \\ (A_\mu)^a_b &= \mathrm{diag}(0,0,...,A^*_\mu), \qquad x \to \infty \end{aligned} \tag{6.16}$$

Tales cuerdas pueden ser llamadas elementales; su tensión es 1/N-ésimo de la tensión de la cuerda ANO. Así, la cuerda ANO puede ser vista como un estado ligado de N cuerdas elementales.

Más concretamente, la solución de la cuerda Z_N (un progenitor de la cuerda no-abeliana) puede ser escrita como sigue [28]:

$$\begin{aligned} q &= \begin{pmatrix} \varphi(r) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \varphi(r) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \varphi(r) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{in\theta}\tilde{\varphi}(r) \end{pmatrix}, \\ A_i^A T^A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -(N-1) \end{pmatrix} \frac{i}{N}(\partial_i\theta)(f_N(r)-n), \\ A_i &= \sqrt{\frac{2}{N}}(\partial_i\theta)(-f(r)+n), \end{aligned} \tag{6.17}$$

donde (r,θ) son las coordenadas polares en el espacio transverso bidimensional.

Las condiciones de contorno en el origen siguen del requerimiento de que los campos sean no singulares. Esto implica que

$$n\tilde{\varphi}(0) = 0, \quad f_N(0) = n, \quad f(0) = n. \tag{6.18}$$

Por otro lado, en el infinito espacial las configuraciones deben tender asintóticamente a sus valores de vacío y luego

$$\varphi(\infty) = \tilde{\varphi}(\infty) = \sqrt{\xi}, \quad f(\infty) = f_N(\infty) = 0 \tag{6.19}$$

Derivemos ahora las ecuaciones de primer orden que determinan las funciones perfil haciendo uso de la representación de Bogomol'nyi del modelo (6.15). Mediante el método de Bogomol'nyi [19], la densidad de energía del sector bosónico toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \int d^2x \left\{ \frac{1}{2e_1^2}[B - \eta \frac{e_1^2}{\sqrt{2N}}(\bar{q}^r \phi_r - N\xi)]^2 + \frac{1}{2e_2^2}[B^A + i\eta e_2^2 \bar{q}^r T^A q_r]^2 \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2}|\mathcal{D}_i q_r + i\eta \epsilon_i^{\ j} \mathcal{D}_j q_r|^2 - \eta\sqrt{\frac{N}{2}}\xi B \right\} \end{aligned} \tag{6.20}$$

donde

$$B = \frac{1}{2}\epsilon^{ij}F_{ij}, \qquad B^A = \frac{1}{2}\epsilon^{ij}F^A_{ij} \tag{6.21}$$

La representación de Bogomol'nyi lleva a las siguientes ecuaciones de primer orden

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}_i q_r + i\eta \epsilon_i^{\ j} \mathcal{D}_j q_r = 0, \\ &B = \eta \frac{e_1^2}{\sqrt{2N}}(\bar{q}^r q_r - N\xi), \\ &B^A = -i\eta e_2^2 \bar{q}^r T^A q_r, \end{aligned} \tag{6.22}$$

Para las configuraciones que satisfacen (6.22), la energía del objeto BPS es dada por el último término de superficie en (6.20).

Sustituyendo el ansatz (6.17) en las ecs.(6.22) obtenemos las ecuaciones de primer orden para las funciones perfil de la cuerda Z_N [38],[28]

$$\begin{aligned} &r\partial_r \varphi + \frac{\eta}{N}(f - f_N)\varphi = 0 \\ &r\partial_r \tilde{\varphi} + \frac{\eta}{N}(f - (1-N)f_N)\tilde{\varphi} = 0 \\ &\frac{1}{r}\partial_r f + \eta\frac{e_1^2}{2}((N-1)\varphi^2 + \tilde{\varphi}^2 - N\xi) = 0 \\ &\frac{1}{r}\partial_r f_N + \eta\frac{e_2^2}{2}(\tilde{\varphi}^2 - \varphi^2) = 0 \end{aligned} \tag{6.23}$$

Claramente, el ansatz (6.17) admite permutaciones, que llevan a otras soluciones de cuerdas Z_N del tipo (6.17). Estas pueden obtenerse cambiando en (6.17) la posición del campo que se enrrolla. En suma, tenemos N cuerdas Z_N elementales.

6.3. Cuerdas Elementales No Abelianas

Las cuerdas Z_N elementales en el modelo (6.1) dan lugar a cuerdas auténticamente no abelianas cuando se satisface la condición (6.10) [27]-[30]. Esto significa que, en adición al móduli traslacional usual, ellas poseen móduli extra correspondiendo a la rotura espontánea de una simetría no abeliana. De hecho, mientras el vacío "plano" (6.11) es $SU(N)_{\text{c+s}}$ simétrico, la solución (6.17) rompe esta simetría a $U(1) \times SU(N-1)$ (para $N > 2$). Esto asegura la existencia de un móduli orientacional de $2(N-1)$ dimensiones.

Para obtener la solución de cuerda no abeliana a partir de la cuerda Z_N (6.17) debemos actuar con una rotación de color-sabor que preserva el vacío (6.11). Con este fin, es conveniente primero pasar al gauge singular donde los campos escalares no se enrrollan en el infinito, mientras que el flujo viene de la vecindad del origen. En este gauge tenemos

$$
\begin{aligned}
q &= \mathcal{U} \begin{pmatrix} \varphi(r) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \varphi(r) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varphi(r) & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{\varphi}(r) \end{pmatrix} \mathcal{U}^{-1}, \\
A_i^A T^A &= \mathcal{U} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -(N-1) \end{pmatrix} \mathcal{U}^{-1} \frac{i}{N} (\partial_i \theta) f_N(r), \\
A_i &= -\sqrt{\frac{2}{N}} (\partial_i \theta) f(r),
\end{aligned}
\tag{6.24}
$$

donde $\mathcal{U}$ es una matriz de $SU(N)_{\text{c+s}}$. Esta matriz parametriza los modos cero orientacionales de la cuerda asociados con la dirección de flujo en el grupo $SU(N)_{\text{c+s}}$. Ya que la simetría de color-sabor no es rota por el VEV de los campos escalares, los modos cero orientacionales son físicos y no meros artificios de la invarianza de gauge.

6.4. Teoría Efectiva en la Hoja de Mundo

Como vimos en la sección anterior, la solución de cuerda no abeliana (6.24) está caracterizada por dos móduli traslacionales (la posición de la cuerda en el plano x-y) y $2(N-1)$ móduli orientacionales. En esta sección encontraremos la teoría bidimensional efectiva de bajas energías sobre la hoja de mundo de la cuerda para el móduli. Como es usual, el móduli traslacional se desacopla, por lo que nos enfocaremos en la dinámica del móduli orientacional interno. Nuestra cuerda es un estado 1/2-BPS en la teoría de gauge supersimétrica $\mathcal{N} = 2$ con ocho supercargas. Por lo tanto, hay cuatro supercargas que actúan en la teoría de la hoja de mundo. Esto significa que la teoría efectiva sobre la hoja de mundo posee $\mathcal{N} = 2$ supersimetrías. Como veremos, esta teoría resultará ser un modelo bidimensional $\mathbf{CP}^{N-1}$ [27]-[30].

6.4.1. Derivación del Modelo $\mathbf{CP}^{N-1}$

Como es claro de la solución de cuerda (6.24), no cada elemento de $\mathcal{U}$ da lugar a un modulus. El subgrupo $SU(N-1)\times U(1)$ permanece no roto por la solución de cuerda en consideración, luego el espacio moduli es

$$\frac{SU(N)_{\rm c+s}}{SU(N-1)\times U(1)} \cong \mathbf{CP}^{N-1} \tag{6.25}$$

Con esto en mente, parametrizamos la matrices que entran en (6.24) como sigue:

$$\frac{1}{N}\left\{\mathcal{U}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -(N-1) \end{pmatrix}\mathcal{U}^{-1}\right\}^a_b = -n^a n^*_b + \frac{1}{N}\delta^a_b, \tag{6.26}$$

donde n^a es un vector complejo en la representación fundamental de $SU(N)$ que satisface

$$n^*_a n^a = 1. \tag{6.27}$$

Como veremos más abajo, una fase $U(1)$ resultará gaugeada en el modelo sigma efectivo. Esto implica que el número correcto de grados de libertad es $2(N-1)$.

Con la anterior parametrización, la solución de cuerda (6.24) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{N}(\tilde{\varphi}(r)+(N-1)\varphi(r)) + (\tilde{\varphi}(r)-\varphi(r))\left(n\cdot n^* - \frac{1}{N}\right) \\ A^A_i T^A &= -i\left(n\cdot n^* - \frac{1}{N}\right)\partial_i\theta f_N(r) \\ A_i &= -\sqrt{\frac{2}{N}}\partial_i\theta f(r) \end{aligned} \tag{6.28}$$

donde por brevedad suprimimos todos los índices de $SU(N)$. La notación es evidente.

Asumamos que el móduli orientacional son funciones de las coordenadas de la hoja de mundo x_k ($k=0,3$) que varían muy lentamente. De esta manera, el móduli n^a pasan a ser campos de un modelo sigma $(1+1)$-dimensional sobre la hoja de mundo. Ya que n^a parametriza los modos cero de la cuerda, no hay término potencial en este modelo sigma.

Para obtener el término cinético debemos sustituir nuestra solución (6.28), la cual depende del móduli n^a, en la acción (6.15), suponiendo que los campos adquieren una dependencia de las coordenadas x_k ($k=0,3$) via $n^a(x_k)$. Al hacer esto, inmediatamente se observa que nuestra solución debe ser modificada: debemos incluir en ésta las componentes $k=0,3$ del potencial de gauge, las cuales dejan de ser nulas. Un ansatz adecuado (lo cual solo podrá ser verificado a posteriori) [28],[82] es

$$A^A_\alpha (T^A)^a_b = (\partial_\alpha n^a n^*_b - n^a\partial_\alpha n^*_b - 2n^a n^*_b(n^*\partial_\alpha n))\rho(r) \qquad \alpha = 0,3 \tag{6.29}$$

donde hemos introducido una nueva función perfil $\rho(r)$ que será determinada por su ecuación de movimiento a través de un procedimiento de minimización.

Usando el ansatz anterior para el potencial de gauge podemos calcular el tensor de curvatura de $SU(N)$, el cual toma la forma

$$F^A_{\alpha i}(T^A)^a_b = -(\partial_\alpha n^a n^*_b - n^a\partial_\alpha n^*_b - 2n^a n^*_b(n^*\partial_\alpha n))\partial_i\rho(r) - i(\partial_\alpha n^a n^*_b + n^a\partial_\alpha n^*_b)\partial_i\theta f_N(1-\rho) \quad (6.30)$$

Notar que para tener una contribución finita de los campos de gauge en la acción debemos imponer las condiciones de contorno

$$\rho(0) = 1 \qquad\qquad \rho(\infty) = 0 \quad (6.31)$$

Después de introducir el ansatz modificado en la acción (6.15) arrivamos al sector bosónico de la acción efectiva de bajas energías

$$\mathcal{S}_{eff} = 2\beta\int dtdx^3(\partial^\alpha n^*\partial_\alpha n - (n^*\partial^\alpha n)(\partial_\alpha n^* n)) \quad (6.32)$$

donde la constante de acoplamiento β es dada por

$$\beta = \frac{2\pi}{e_2^2}I \quad (6.33)$$

e I es la integral

$$I = \int_0^\infty rdr[(\partial_r\rho)^2 + \frac{1}{r^2}f_N^2(1-\rho)^2 + \frac{e_2^2}{2}(2(\tilde{\varphi}-\varphi)^2(1-\rho) + (\tilde{\varphi}^2+\varphi^2)\rho^2)] \quad (6.34)$$

La teoría definida por la ec.(6.32) no es más que el modelo bidimensional $\mathbf{CP}^{N-1}$. Para ver esto, podemos eliminar el segundo término en (6.32) introduciendo un campo de gauge $U(1)$ no propagante (auxiliar). Por otro lado, debido a la naturaleza BPS de las cuerdas en consideración, la teoría efectiva en la hoja de mundo debe poseer cuatro supercargas. Así, la teoría efectiva será un modelo $\mathcal{N}=2$ supersimétrico, del cual (6.32) es el sector bosónico. En la próxima sección revisaremos estas cuestiones, a la vez que discutiremos la física subyacente.

Así, vemos que el modelo $\mathbf{CP}^{N-1}$ resulta ser (el sector bosónico de) la teoría efectiva de bajas energías sobre la hoja de mundo de la cuerda no abeliana. Su constante de acoplamiento está relacionada a la constante de acoplamiento e_2^2 en cuatro dimensiones via la integral (6.34). Esta integral debe ser vista como una "acción" para la función perfil ρ.

Variando (6.34) con respecto a ρ obtenemos la ecuación de segundo orden que debe satisfacer la función ρ,

$$-\frac{d^2\rho}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d\rho}{dr} - \frac{1}{r^2}f_N^2(1-\rho) + \frac{e_2^2}{2}((\tilde{\varphi}^2+\varphi^2)\rho - (\tilde{\varphi}-\varphi)^2) = 0 \quad (6.35)$$

Después de algo de álgebra y haciendo uso extensivo de las ecuaciones de primer orden (6.23), se puede mostrar que la solución de (6.35) es

$$\rho = 1 - \frac{\tilde{\varphi}}{\varphi} \quad (6.36)$$

Además, esta solución satisface las condiciones de contorno (6.31). Sustituyendo esta solución en la expresión (6.34), encontramos que I se reduce a una derivada total con un valor dado por el flujo de la cuerda. Esto es,

$$I = \int_0^\infty dr\left[2\partial_r\left(\frac{\tilde{\varphi}}{\varphi}\right)\left(-\eta\frac{\tilde{\varphi}}{\varphi}f_N\right) + \left(1-\left(\frac{\tilde{\varphi}}{\varphi}\right)^2\right)\eta\partial_r f_N\right] = -\eta\left[\left(\frac{\tilde{\varphi}}{\varphi}\right)^2 f_N - f_N\right]\Bigg|_0^\infty = |n| \quad (6.37)$$

La ecuación (6.37) luego implica que en el caso de un vórtice de carga 1 vale que

$$\beta = \frac{2\pi}{e_2^2} \tag{6.38}$$

La constante de acoplamiento bidimensional es así determinada por el acoplamiento no abeliano en 4 dimensiones. Esta relación es obtenida a nivel clásico. En la teoría cuántica ambas constantes corren y luego debemos especificar a que escala la relación (6.38) toma lugar. El modelo bidimensional $\mathbf{CP}^{N-1}$ es una teoría efectiva apropiada para describir la dinámica interna de la cuerda a bajas energías, menores que la inversa del espesor de la cuerda. Éste a su vez viene dado por las masas de los multipletes de gauge/quarks en la teoría $SU(N) \times U(1)$, que son del orden de $e\sqrt{\xi}$. Así, el parámetro $e\sqrt{\xi}$ juega el rol de un cutoff físico ultravioleta (UV) en la acción (6.32). Ésta será la escala a la cual es válida la ec.(6.38). Debajo de esta escala, el acoplamiento β corre de acuerdo a su flujo del grupo de renormalización.

6.4.2. Dinámica del Modelo $\mathbf{CP}^{N-1}$ con Supersimetría $\mathcal{N} = 2$

El modelo $\mathbf{CP}^{N-1}$ fue resuelto por Witten en el límite de N grande [83]. Aquí repasaremos brevemente algunos de sus resultados y estudiaremos sus implicancias sobre las cuerdas en 4 dimensiones.

El modelo sigma $\mathbf{CP}^{N-1}$ es asintóticamente libre y fluye a acoplamiento fuerte en el infrarojo [84]. Como una función de la energía E, el flujo de la constante de acoplamiento β viene dada por

$$4\pi\beta = N \log \frac{E}{\Lambda_\sigma}, \tag{6.39}$$

donde Λ_σ es la escala dinámica del modelo sigma. El cut-off UV del modelo sigma es determinado por $e_2\sqrt{\xi}$.

Por su parte, la ec.(6.38) que relaciona los acoplamientos en 2 y 4 dimensiones es válida a esta energía. Luego,

$$\Lambda_\sigma^N = e_2^N \xi^{\frac{N}{2}} e^{-\frac{8\pi^2}{e_2^2}} = \Lambda_{SU(N)}^N \tag{6.40}$$

donde usamos la relación (6.14) para la escala dinámica $\Lambda_{SU(N)}$. Vemos así que las escalas dinámicas de las teorías microscópica (6.15) y macroscópica (6.32) coinciden! Por otro lado, debido al VEV de los quarks, la constante de acoplamiento 4-dimensional se congela a $e_2\sqrt{\xi}$, no hay términos logarítmicos debajo de esta escala. Son los logaritmos de la teoría en la hoja de mundo los que dominan.

Clásicamente, el campo n^a puede orientarse en una dirección arbitraria. Luego, podría esperarse una rotura espontánea de $SU(N)$ y la aparición de bosones goldstone. Sin embargo, esto no es lo que ocurre. Efectos cuánticos restauran la simetría. Más aún, la condición (6.27) deja de satisfacerse. Debido al acoplamiento fuerte tenemos más grados de libretad que en la teoría original, esto es, N campos n devienen dinámicos y adquieren una masa Λ_σ.

El modelo tiene N vacíos, los cuales difieren entre sí por el VEV del operador bifermiónico quiral [83]. En el régimen de acoplamiento fuerte el condensado quiral es el parámetro de orden. La simetría quiral $U(1)$ del modelo $\mathbf{CP}^{N-1}$ es explícitamente rota a una simetría discreta Z_{2N} por la anomalía quiral. Mientras que el condensado quiral rompe Z_{2N} a Z_2. Este es el origen de la degeneración de los estados de vacío.

En términos de la teoría 4-dimensional, esto resulta en que la orientación de la cuerda no tiene ninguna dirección particular, esta difuminada por todo el móduli. Estas cuerdas son genuinamente no abelianas. Los N vacíos de la teoría efectiva $\mathbf{CP}^{N-1}$ son herederas de las N cuerdas elementales no abelianas. Notar que estas cuerdas se encuentran en un régimen altamente cuántico. Ellas no son las cuerdas Z_N de la teoría semiclásica, ya que n^a no está alineado en el vacío.

6.4.3. Masas de Quarks Distintas

Para entender de qué manera los efectos cuánticos rompen la degeneración continua del vacío en el modelo sigma $\mathbf{CP}^{N-1}$ $\mathcal{N}=2$ es instructivo empezar con una teoría microscópica deformada de manera que el móduli posea esta degeneración rota ya clásicamente. Una vez hecho esto, podemos recuperar el caso original suprimiendo suavemente la deformación.

Supongamos ahora que la igualdad de las masas (6.10) deja de ser válida e introduzcamos una pequeña diferencia entre las masas. Con masas distintas el grupo de gauge $U(N)$ es roto a $U(1)^N$ por la condensación de los escalares adjuntos (ver ec.(6.8)). Los bosones de gauge fuera de la diagonal, como así también los campos de quarks q^a_r fuera de la diagonal, adquieren masas proporcionales a las varias diferencias de masa ($\Delta m_{rs} = m_r - m_s$). Luego, la teoría efectiva de bajas energías (i.e., energías $\ll \Delta m_{rs}$) solo contiene campos de gauge y quarks diagonales. La acción correspondiente toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4e_1^2} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4e_2^2} F^H_{\mu\nu}F^{H\mu\nu} \right. \\ &+ \left. \mathcal{D}_\mu \bar{q}^r \mathcal{D}^\mu q_r - \frac{e_1^2}{4N}(\bar{q}^r q_r - N\xi)^2 + \frac{e_2^2}{2}(\tilde{q}^r T^H q_r)^2 \right\} \end{aligned} \tag{6.41}$$

donde $H = 1, ..., N-1$ corre sobre los generadores de Cartan del grupo de gauge $SU(N)$, mientras que q^a_r solo incluye las componentes diagonales.

Las ecuaciones de primer orden obtenidas de la acción (6.41) son

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}_i q_r + i\eta \epsilon_i^{\,j} \mathcal{D}_j q_r = 0, \\ &B = \eta \frac{e_1^2}{\sqrt{2N}} (\bar{q}^r q_r - N\xi), \\ &B^H = -i\eta e_2^2 \bar{q}^r T^H q_r, \end{aligned} \tag{6.42}$$

Dado que las soluciones de cuerdas Z_N (6.17) tienen una forma diagonal, ellas automáticamente satisfacen las ecs.(6.42).

Sin embargo, ahora las cuerdas Z_N elementales (6.17) son las únicas soluciones. La familia de soluciones se volvió discreta. El grupo global $SU(N)_{\text{c+s}}$ es roto a $U(1)^{N-1}$ y los vectores n^a solo pueden tomar N posiciones fijas,

$$n^a = \delta^{aa_0}, \qquad a_0 = 1, ..., N \tag{6.43}$$

Estas N soluciones corresponden obviamente a las cuerdas Z_N elementales.

Veamos qué ocurre a nivel de la teoría efectiva en la hoja de mundo. Si la diferencia de masas es mucho menor que $\sqrt{\xi}$, el conjunto de parámetros n^a deviene cuasimóduli. Introduciendo los cuasimóduli orientacionales n^a, las masas distintas generan un término de potencial en la teoría efectiva bidimensional. De hecho, para la elección genérica de masas m_a (con $m_a \ll \sqrt{\xi}$), el potencial toma la forma [30]

$$V_{\mathbf{CP}^{N-1}} = 2\beta \left\{ \sum_{a=1}^{N} |\tilde{m}_a|^2 |n^a|^2 - |\sum_{a=1}^{N} \tilde{m}_a |n^a|^2\,|^2 \right\} \tag{6.44}$$

donde $\tilde{m}_a = m_a - m$ y $m = \sum_{a=1}^{N} m_a/N$. Este potencial tiene N vacíos, los cuales coinciden con las N cuerdas Z_N en la teoría microscópica. El modelo $\mathbf{CP}^{N-1}$ con el potencial (6.44) no es más que la truncación bosónica del modelo sigma bidimensional $\mathcal{N} = 2$ conocido como modelo $\mathbf{CP}^{N-1}$ *con retorcimiento de masa* (*masa "twisted"*). Éste es una generalización del modelo $\mathbf{CP}^{N-1}$ $\mathcal{N} = 2$ no masivo, que preserva cuatro supercargas.

Como ya fue mencionado, el modelo sigma da una descripción efectiva de la dinámica de las cuerdas no abelianas a bajas energías, i.e. a energías mucho menores que la inversa del espesor de la cuerda. Momentos típicos en la teoría $\mathbf{CP}^{N-1}$ *con masa twisted* son del orden de $\tilde{m}$. Luego, para que la dinámica de bajas energías pueda ser dada en buena aproximación por el modelo sigma bidimensional imponemos la condición

$$|\tilde{m}| \ll e_2\sqrt{\xi} \tag{6.45}$$

La descripción en términos del modelo sigma $\mathbf{CP}^{N-1}$ *con masa twisted* da un entendimiento mucho más claro de la dinámica de las cuerdas no abelianas. Si las masas $\tilde{m}_a$ son mucho mayores que la escala del modelo $\mathbf{CP}^{N-1}$ Λ_σ, la constante de acoplamiento β se congela a una escala grande (del orden de las masas $\tilde{m}_a$) y la teoría está en un régimen de acoplamiento débil. Luego el análisis semiclásico es aplicable. El modelo sigma anteriormente mencionado tiene N vacíos que corresponden a

$$n^a = \delta^{aa_0}, \qquad a_0 = 1, ..., N \tag{6.46}$$

Ellos corresponden a las cuerdas abelianas Z_N. Al reducir las diferencias de masas $\tilde{m}_a$ hasta que alcanzan el valor Λ_σ, el modelo $\mathbf{CP}^{N-1}$ entra en un régimen de acoplamiento fuerte. A $\tilde{m}_a = 0$ la simetría global $SU(N)_{\text{c+s}}$ de la teoría microscópica es restaurada. Ahora n^a ya no tiene una dirección particular y la condición (6.27) deja de valer. La teoría de la hoja de mundo todavía tiene N vacíos (por el índice de Witten! [71]). Estos vacíos corresponden a N cuerdas no abelianas elementales en un régimen cuántico de acoplamiento fuerte.

6.5. Monopolos Confinados como Kinks del Modelo $\mathbf{CP}^{N-1}$

La teoría (6.1) está en la fase de Higgs y luego los monopolos magnéticos de esta teoría deben estar en la fase confinante. Si empezamos con una teoría con grupo de gauge $SU(N+1)$ roto a $SU(N) \times U(1)$ por condensación del escalar adjunto a (a partir de la cual emerge la teoría (6.1)), los monopolos del sector $SU(N+1)/SU(N) \times U(1)$ pueden ser ubicados en los puntos finales de las cuerdas Z_N considerados previamente. Estos monopolos son infinitamente pesados cuando $m \to \infty$. Así, en la teoría de bajas energías (6.1), estos monopolos pueden ser considerados como infinitamente pesados y luego, las cuerdas Z_N son estables. Sin embargo, los monopolos que residen en el grupo de gauge $SU(N)$ todavía están presentes en la teoría (6.1). Al encender el parámetro FI ξ, los squarks condensan, lo que lleva al confinamiento de estos monopolos. Como veremos a continuación, estos monopolos aparecen en la unión de dos cuerdas no abelianas y pueden interpretarse como kinks en la teoría sobre la hoja de mundo que interpolan entre distintos vacíos del modelo $\mathbf{CP}^{N-1}$ [85],[29],[30].

El resto de esta sección lo dedicaremos a seguir la evolución de estos monopolos confinados, desde el régimen semiclásico hasta bien dentro del régimen cuántico. Comencemos desde el régimen en el que los monopolos están débilmente confinados. Supongamos $|\Delta m_{rs}| \gg \sqrt{\xi}$ y asumamos a todas las masas del mismo orden. En este límite los VEV de los squarks pueden ser despreciados, y la estructura de vacío es determinada por los VEV de los campos adjuntos a^A, ver (6.8). En el caso no degenerado la simetría de gauge $SU(N)$ es rota a $U(1)^{N-1}$. Esta es la situación de manual para la aparición de monopolos de 't Hooft-Polyakov $SU(N)$. El tamaño del monopolo es del orden de $|\Delta m_{rs}|^{-1}$. La solución permanece válida hasta distancias mucho mayores, del orden de $\xi^{-1/2}$. A distancias mayores que $\xi^{-1/2}$ el VEV de los squarks deviene importante. Como es usual, la condensación de carga $U(1)$ lleva a la formación de tubos de flujo magnético $U(1)$, con tamaño transverso del orden de $\xi^{-1/2}$. Así, en este límite tenemos monopolos de 't Hooft-Polyakov muy débilmente confinados.

Verifiquemos que estos monopolos magnéticos corresponden a la unión de dos cuerdas. Consideremos la unión de dos cuerdas Z_N que corresponden a dos vacíos "vecinos" del modelo $\mathbf{CP}^{N-1}$. Para el a_0-ésimo vacío, n^a es dado por (6.46), mientras que para el a_0+1-ésimo vacío, n^a es dado por la misma ecuación con $a_0 \to a_0 + 1$. El flujo de la unión de estas cuerdas es dado por la diferencia de los flujos de cada una de ellas. Usando (6.28) se obtiene que el flujo de la unión es

$$4\pi \times \mathrm{diag}\frac{1}{2}\{..,0,1,-1,0,...\}, \tag{6.47}$$

con la entradas no nulas ubicadas en las posiciones a_0 y a_0+1. Estos son precisamente los flujos de $N-1$ monopolos de 't Hooft-Polyakov distintos ocurriendo en la teoría de gauge $SU(N)$, si $SU(N)$ es espontáneamente roto a $U(1)^{N-1}$. Vemos así que el en límite semiclásico de $|\Delta m_{rs}|$ grande, los monopolos abelianos juegan el rol de unión de las cuerdas abelianas Z_N.

Ahora reduzcamos el valor de $|\Delta m_{rs}|$. Si este parámetro se encuentra en el intervalo

$$\Lambda_\sigma \ll |\Delta m_{rs}| \ll \sqrt{\xi}, \tag{6.48}$$

el tamaño del monopolo ($\sim |\Delta m_{rs}|^{-1}$) deviene mayor al tamaño transverso de las cuerdas que conecta. De esta manera, el flujo magnético que se origina en el monopolo está verdaderamente confinado. Una pregunta natural es cómo este monopolo confinado es visto desde el punto de vista de la teoría efectiva $\mathbf{CP}^{N-1}$ sobre la hoja de mundo. Notemos primero que en el rango (6.48) $|\Delta m_{rs}|$ es suficientemente pequeña como para que sea válida la descripción de la dinámica de bajas energías en término del modelo $\mathbf{CP}^{N-1}$ *con masa twisted*. Por otro lado, al ser $|\Delta m_{rs}|$ mucho mayor que la escala dinámica del modelo $\mathbf{CP}^{N-1}$, éste último se encuentra en el régimen de acoplamiento débil, lo que nos permite utilizar un tratamiento semiclásico. En este régimen se encuentra que, mientras las cuerdas elementales Z_N de la teoría microscópica corresponden a N vacíos del modelo $\mathbf{CP}^{N-1}$, el monopolo (que en la teoría microscópica actúa como unión de dos cuerdas Z_N) es un kink que

que interpola entre estos vacíos. Esto es, gracias a que ambas teorías (microscópica y macroscópica) se encuentran en acoplamiento débil, puede mostrarse explícitamente que la solución clásica de la teoría microscópica que corresponde a la unión de dos cuerdas Z_N está en correspondencia uno-a-uno con las soluciones tipo kink de la teoría en la hoja de mundo. Además, se encuentra que las masas del monopolo y el kink son idénticamente iguales [29].

Si seguimos disminuyendo $|\Delta m_{rs}|$ hasta alcanzar Λ_σ y luego enviando Δm_{rs} a cero, la teoría efectiva en la hoja de mundo entra en un régimen de acoplamiento fuerte, a la vez que la simetría $SU(N)_{\text{c+s}}$ es restaurada. El monopolo para a ser un objeto verdaderamente no abeliano. En este límite el tamaño del monopolo crece hasta, a un nivel clásico, explotar. Así, clásicamente diríamos que el monopolo desaparece. Aquí es donde dominan los efectos cuánticos en la teoría sobre la hoja de mundo. Mientras que el espesor de la cuerda (en la dirección transversa) es $\sim \xi^{-1/2}$, el tamaño en la dirección z del kink (que representa al monopolo confinado en un régimen altamente cuántico) es mucho mayor, $\sim \Lambda_\sigma^{-1}$. Por lo tanto, su tamaño no diverge como predice la teoría clásica, sino que permanece finito en el límite $\Delta m_{rs} \to 0$, estabilizado por efectos no perturbativos en el modelo $\mathbf{CP}^{N-1}$. Más aún, el modelo sigma en la hoja de mundo desarrolla un "mass gap", y ningún estado no masivo está presente en el espectro. Así, la masa del monopolo confinado (el kink en el modelo $\mathbf{CP}^{N-1}$) resulta también determinada por la escala Λ_σ. Esto nos da una noción de lo que es un monopolo no abeliano confinado; esto es, un kink en el modelo bidimensional $\mathbf{CP}^{N-1}$ no masivo [29].

Capítulo 7

Vórtices No Abelianos en Teorías de Chern-Simons

En este capítulo construiremos vórtices no abelianos para una teoría de Chern-Simons-Higgs en $d = 2+1$ con $\mathcal{N} = 2$ supersimetrías. Los resultados expuestos representan nuevos aportes originales de esta tesis. La introducción de N campos de Higgs en la representación fundamental del grupo de gauge $U(N)$ nos permitirá tener un grupo de color-sabor $SU(N)$ que permanece no roto en la fase asimétrica. Mediante el método de Bogolol'nyi, encontraremos las ecuaciones de autodualidad de primer orden. Para resolver las mismas consideraremos un ansatz rotacionalmente simétrico. Mostraremos que estas soluciones son verdaderamente no abelianas parametrizándolas en términos de coordenadas colectivas orientacionales. La teoría efectiva de bajas energías para el móduli orientacional resultará ser el modelo sigma $\mathbf{CP}^{N-1}$ unidimensional $\mathcal{N} = 2$ supersimétrico. Finalizaremos el estudio de estas soluciones analizando la mecánica cuántica de esta teoría efectiva en el caso $N = 2$.

Las teorías de Chern-Simons en 3 dimensiones espacio-temporales ocupan un lugar relevante en el contexto de Teorías Cuánticas de Campos por diversos motivos. Para comenzar, proveen un método alternativo invariante de gauge de generación de masa [86],[87]. Además, el límite de alta temperatura de teorías de campos en $d = 4$ dimensiones son efectivamente tridimensionales y términos de Chern-Simons son inducidos en $d = 3$ dimensiones a través de la anomalía de paridad [88],[89]. Teorías de tipo Chern-Simons también juegan un rol en interesantes fenómenos de materia condensada [90],[91],[92] y en el cálculo de invariantes topológicos de variedades 3-dimensionales [93],[94], a la vez que están relacionadas con teorías de campos conformes bidimensionales [95].

Sistemas abelianos de Chern-Simons-Higgs autoduales fueron encontrados en [96],[97]. Allí se mostró que el potencial de Higgs debía tomar una forma especial de sexto orden, en cuyo caso la funcional energía del sistema posee una cota de Bogomol'nyi. Esta cota es saturada por soluciones de las ecuaciones de autodualidad, que describen configuraciones tipo vórtice, tanto topológicas como no topológicas [98].

Las teorías de Chern-Simons-Higgs con grupos de gauge no abelianos habían sido estudiadas anteriormente en [31],[32]. Al incluir N campos de gauge en la representación adjunta de $SU(N)$

(lo que asegura máxima rotura del grupo de gauge), fueron halladas soluciones de vórtices. Ya que el potencial considerado era de cuarto orden, estas soluciones no eran autoduales. Soluciones autoduales análogas para el grupo de gauge $SU(2)$ y potencial sexto fueron encontradas en [99]. Sin embargo, en estas construcciones el flujo magnético está siempre dirigido a lo largo de un vector fijo en el sugálgebra de Cartan del grupo de gauge. Al no poseer un móduli relacionado con la orientación del flujo magnético, estas soluciones son en este sentido abelianas.

El propósito de este capítulo será la búsqueda de soluciones de vórtice no abelianas cuando la dinámica del campo de gauge es gobernada por una acción de Chern-Simons. Para hallar dichos vórtices consideraremos la teoría de Chern-Simons supersimétrica $\mathcal{N}=2$ con grupo de gauge $U(N)$ acoplada a N multipletes escalares. De esta manera, el patrón de rotura de simetría debido al potencial de sexto orden es tal que un grupo global $SU(N)$ permanece no roto, lo que nos permitirá hallar vórtices con un espacio móduli orientacional. No está de más enfatizar que solo es presencia de un término de Chern-Simons existen soluciones de vórtice (con energía finita) eléctricamente cargados. Luego, el modelo en el que estamos interesados lleva a nuevas soluciones de cuerdas no abelianas, distintas a las estudiadas en el capítulo anterior. Además, la existencia de un tipo de anión con nuevos grados de libertad, como aquellos debido al espacio móduli orientacional, podría resultar muy útil en problemas de materia condensada.

7.1. La Teoría

Consideremos la extensión $\mathcal{N}=2$ supersimétrica del modelo de Chern-Simons-Higgs no abeliano $d=2+1$-dimensional. El contenido de campos de la teoría viene dado por un multiplete vectorial $U(N)$ que consiste del potencial de gauge A_μ (donde $\mu,\nu,...=0,1,2$ son índices de Lorentz), acoplado a N multipletes escalares, cada uno de los cuales contiene un escalar complejo q y un fermión de Dirac χ. Además de la simetría de gauge $U(N)$, el lagrangiano también posee una simetría de sabor $SU(N)$. Bajo estos dos grupos, los multipletes escalares transforman como $(\mathbf{N},\bar{\mathbf{N}})$. Así, los campos q y χ pueden ser vistos como matrices de $N\times N$ $q=q^a_{\ r}$ y $\chi=\chi^a_{\ r}$, donde los índices $a,b,...=1,2,...,N$ refieren al grupo de gauge y $r,s,...=1,2,...,N$ al grupo de sabor.

Respecto de los campos de gauge, los escribiremos en términos de matrices en la representación fundamental de $U(N)$, esto es, $A_\mu=A^A_\mu T^A$, donde T^A $(A,B,...=1,2,...,N^2)$ son los generadores de la representación $\mathbf{N}$. Siguiendo la notación de [100], tomamos la métrica del espacio-tiempo $\eta_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(+1,-1,-1)$, $\epsilon^{012}=+1$ y usamos generadores antihermíticos T^A que satisfacen

$$[(T^A)^a_{\ b}]^*=-(T^A)^b_{\ a},\qquad [T^A,T^B]=f^{ABC}T^C,\qquad (T^AT^B)^a_{\ a}=-\frac{1}{2}\delta^{AB}. \tag{7.1}$$

Una vez que los campos auxiliares son eliminados por medio de las ecuaciones de movimiento, el lagrangiano para el sistema de Chern-Simons-Higgs $\mathcal{N}=2$ (sin superpotencial holomorfo) toma la forma [100],[101]

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\;& \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}\left(F^A_{\mu\nu}A^A_\rho-\frac{e}{3}f^{ABC}A^A_\mu A^B_\nu A^C_\rho\right)+\mathcal{D}_\mu\bar{q}^r\mathcal{D}^\mu q_r+\frac{i}{2}\bar{\chi}^r\,\not{\mathcal{D}}\chi_r\\ &-\frac{e^2}{4\kappa}(\bar{q}^rT^Aq_r-i\xi^A)(\bar{\chi}^sT^A\chi_s)-\frac{e^2}{2\kappa}(\bar{\chi}^rT^Aq_r)(\bar{q}^sT^A\chi_s)\\ &-\frac{e^4}{8\kappa^2}(\bar{q}^r\{T^A,T^B\}q_r)(\bar{q}^sT^Aq_s-i\xi^A)(\bar{q}^tT^Bq_t-i\xi^B)\end{aligned} \tag{7.2}$$

donde

$$\bar{q}^r{}_a \equiv (q^a{}_r)^*, \qquad \bar{\chi}^r{}_a \equiv (\chi^a_{;r})^*, \qquad F^A_{\mu\nu} = \partial_\mu A^A_\nu - \partial_\nu A^A_\mu + ef^{ABC} A^B_\mu A^C_\nu \tag{7.3}$$

y

$$\mathcal{D}_\mu q^a{}_r \equiv \partial_\mu q^a{}_r + eA^A_\mu (T^A)^a{}_b q^b{}_r, \quad \mathcal{D}_\mu \bar{q}^r{}_a \equiv \partial_\mu \bar{q}^r{}_a - eA^A_\mu (T^A)^b{}_a \bar{q}^r{}_b, \quad \not{\mathcal{D}}\chi^a{}_r \equiv \not{\partial}\chi^a{}_r + e\not{A}^A (T^A)^a{}_b \chi^b{}_r. \tag{7.4}$$

Por simplicidad no escribimos los índices del grupo de gauge que están sumados, e.g.,

$$(\bar{q}^r T^A q_r) \equiv (T^A)^a{}_b \bar{q}^r{}_a q^b{}_r, \qquad (\bar{\chi}^r T^A \chi_r) \equiv (T^A)^a{}_b \bar{\chi}^r{}_a \chi^b{}_r, \qquad \text{etc.} \tag{7.5}$$

La barra sobre los espinores denota la conjugación compleja de los mismos (sin multiplicación por la matriz γ^0).

Los parámetros de Fayet-Iliopoulos ξ^A son nulos salvo para el factor $U(1)$ del grupo de gauge total (tomamos $\xi^{A=1} \equiv \sqrt{N/2}\,\xi$). Como es usual para teorías C-S no abelianas, una cuantización (invariante de gauge) consistente requiere que el coeficiente κ satisfaga [86]:

$$\kappa = \frac{me^2}{8\pi} \quad (m = \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{7.6}$$

Notar que el potencial renormalizable de sexto orden para el campo escalar no está relacionado al superpotencial (el cual en nuestro caso es cero) y es unívocamente determinado por la supersimetría $\mathcal{N} = 2$ del modelo.

Las ecuaciones de movimiento obtenidas a partir de la variación de la acción son

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu q_r &= -\frac{e^2}{4\kappa} T^A q_r (\bar{\chi}^s T^A \chi_s) + \frac{e^2}{2\kappa} T^A \chi_r (\bar{\chi}^s T^A q_s) \\
&\quad - \frac{e^4}{8\kappa^2} \{T^A, T^B\} q_r (\bar{q}^s T^A q_s - i\xi^A)(\bar{q}^t T^B q_t - i\xi^B) \\
&\quad - \frac{e^4}{4\kappa^2} T^A q_r (\bar{q}^s \{T^A, T^B\} q_s)(\bar{q}^t T^B q_t - i\xi^B), && (7.7) \\
i\not{\mathcal{D}}\chi_r &= \frac{e^2}{2\kappa} T^A \chi_r (\bar{q}^s T^A q_s - i\xi^A) + \frac{e^2}{\kappa} T^A q_r (\bar{q}^s T^A \chi_s), && (7.8) \\
\kappa \epsilon^{\mu\nu\rho} F^A_{\nu\rho} &= eJ^{A\mu}, && (7.9)
\end{aligned}$$

donde la corriente de materia conservada $J^{A\mu} = (\rho^A, \mathbf{J}^A)$ es dada por

$$J^{A\mu} = \mathcal{D}^\mu \bar{q}^r T^A q_r - \bar{q}^r T^A \mathcal{D}^\mu q_r + \frac{i}{2} \bar{\chi}^r \gamma^\mu T^A \chi_r. \tag{7.10}$$

La componente 0 de la ec.(7.9),

$$2\kappa B^A = e\rho^A \tag{7.11}$$

no es más que la versión Chern-Simons de la ley de Gauss e implica que cualquier objeto con carga magnética debe poseer además carga eléctrica.

Las transformaciones de supersimetría $\mathcal{N}=2$ del lagrangiano (7.2) son

$$\begin{aligned}
\delta A_\mu^A &= \frac{ie}{2\kappa}\left(\bar{\epsilon}\gamma_\mu\bar{q}^r T^A\chi_r + \epsilon\gamma_\mu\bar{\chi}^r T^A q_r\right), \\
\delta q_r &= \bar{\epsilon}\chi_a, \qquad\qquad \delta\bar{q}^r = \epsilon\bar{\chi}^a, \\
\delta\chi_r &= -2i\gamma^\mu\epsilon\mathcal{D}_\mu q_r + \frac{e^2}{\kappa}\epsilon T^A q_r(\bar{q}^s T^A q_s b - i\xi^A), \\
\delta\bar{\chi}^r &= -2i\gamma^\mu\bar{\epsilon}\mathcal{D}_\mu\bar{q}^r + \frac{e^2}{\kappa}\bar{\epsilon}\bar{q}^r T^A(\bar{q}^s T^A q_s - i\xi^A).
\end{aligned} \tag{7.12}$$

Los vacíos supersimétricos de la teoría corresponden a aquellas configuraciones constantes para las que potencial se anula. Esto ocurre con las configuraciones del campo escalar que satisfacen

$$0 = \left(\bar{q}^r{}_c(T^A)^c{}_d q^d{}_r - i\xi^A\right)(T^A)^a{}_b q^b{}_s = -\frac{1}{2}\left(q^a{}_r\bar{q}^r{}_b - \xi\delta^a_b\right)q^b{}_s, \tag{7.13}$$

Para obtener el último término es útil la relación válida para las matrices de la representación fundamental de $U(N)$,

$$(T^A)^a{}_b(T^A)^c{}_d = -\frac{1}{2}\delta^a_d\delta^c_b. \tag{7.14}$$

De la ec.(7.13) puede verse que existen dos tipos de vacíos. La fase (gauge) simétrica, donde

$$q^a{}_r = 0 \tag{7.15}$$

y la fase asimétrica, donde

$$q^a{}_r\bar{q}^r{}_b = \xi\delta^a_b. \tag{7.16}$$

Es claro que en la fase asimétrica hay solo un vacío el cual, a menos de rotaciones de gauge, toma la forma

$$q^a{}_r = \sqrt{\xi}\delta^a_r. \tag{7.17}$$

El vacío (7.17) tiene el patrón de rotura de simetría [27],[28]

$$U(N)_{\rm c}\times SU(N)_{\rm s} \longrightarrow SU(N)_{\rm c+s}, \tag{7.18}$$

donde el grupo no roto $SU(N)_{\rm c+s}$ es una rotación simultánea de gauge y sabor.

7.2. Vortices No Abelianos

7.2.1. Cota de Bogomol'nyi y Ecuaciones de Autodualidad

El hamiltoniano para el sector bosónico de la teoría es

$$\mathcal{H} = \int d^2x\left(\mathcal{D}_0\bar{q}^r\mathcal{D}_0 q_r + \vec{\mathcal{D}}\bar{q}^r\cdot\vec{\mathcal{D}}q_r + \frac{e^4}{8\kappa^2}(\bar{q}^r\{T^A,T^B\}q_r)(\bar{q}^s T^A q_s - i\xi^A)(\bar{q}^t T^B q_t - i\xi^B)\right) \tag{7.19}$$

A partir de éste, podemos encontrar ecuaciones de primer orden para el vórtice mediante el método de Bogomol'nyi usual. Esto es, si usamos la relación

$$\overrightarrow{\mathcal{D}}\bar{q}^r \cdot \overrightarrow{\mathcal{D}}q_r = (\mathcal{D}_1 \mp i\mathcal{D}_2)\bar{q}^r(\mathcal{D}_1 \pm i\mathcal{D}_2)q_r \pm ieB^A\bar{q}^rT^Aq_r \mp i\mathrm{tr}\,(\partial_1\, J_2^A - \partial_2\, J_1^A)T^A \tag{7.20}$$

y la ley de Gauss ec.(7.11), el hamiltoniano puede ser escrito como

$$\begin{aligned}\mathcal{H} \;&=\; \int d^2x \left\{ \left(\mathcal{D}_0\bar{q}^r \mp \frac{ie^2}{2\kappa}(\bar{q}^sT^Aq_s - i\xi^A)\bar{q}^rT^A\right)\left(\mathcal{D}_0q_r \pm \frac{ie^2}{2\kappa}(\bar{q}^tT^Bq_t - i\xi^B)T^Bq_r\right)\right.\\ &\quad \left. + (\mathcal{D}_1 \mp i\mathcal{D}_2)\bar{q}^r(\mathcal{D}_1 \pm i\mathcal{D}_2)q_r\right\} \pm e\xi\Phi\end{aligned} \tag{7.21}$$

La integral en el último término del lado derecho de la ec.(7.20) no contribuye a la energía ya que puede escribirse como un término de superficie que desaparece en el infinito espacial para cualquier solución de energía finita. Por otro lado, Φ es la carga topológica dada por

$$\Phi = -i\int d^2x\,\mathrm{tr}B \tag{7.22}$$

la cual coincide con el flujo magnético $U(1)$.

La energía es así acotada de acuerdo con

$$\mathcal{H} \geq e\xi|\Phi| \tag{7.23}$$

Es claro de la ec.(7.21) que la cota es saturada por configuraciones que satisfacen la ley de Gauss y las ecuaciones de autodualidad (de Bogomol'nyi):

$$\begin{aligned}&\mathcal{D}_0q_r - \frac{ie^2}{2\kappa}\eta(\bar{q}^sT^Aq_s - i\xi^A)T^Aq_r = 0\\ &(\mathcal{D}_1 - i\eta\mathcal{D}_2)q_r = 0\end{aligned} \tag{7.24}$$

con $\eta = \pm$ siendo el signo de la carga topológica. Ya que configuraciones estáticas que son puntos estacionarios de la energía también son puntos estacionarios de la acción, las ecuaciones de Euler-Lagrange serán satisfechas por configuraciones estáticas que obedezcan la ley de Gauss y las ecuaciones de autodualidad.

Como es bien sabido, la existencia de una cota de Bogomol'nyi para la energía está estrechamente relacionada con la supersimería $\mathcal{N} = 2$ de la teoría [50]. De hecho, requerir la saturación de la cota de Bogomol'nyi (7.23) es equivalente a buscar configuraciones invariantes ante la mitad de las transformaciones de supersimetría (7.12). Para verificar esto definamos primero los parámetros

$$\epsilon^{\pm} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \eta\gamma^0\right)\epsilon. \tag{7.25}$$

La variación supersimétrica del campo fermiónico χ en un background bosónico que satisfacen la ec.(7.24) resulta

$$\delta\chi_r = -2i(\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu q_r + \eta\mathcal{D}_0q_r)\epsilon^+ \tag{7.26}$$

y luego el campo χ permanece invariante ante cualquier transformación de supersimetría con parámetro $\epsilon^+ = 0$. Respecto de la variación supersimétrica de los campos bosónicos, ellas son automáticamente nulas ya que la configuración inicial es puramente bosónica. De esta manera queda claro que las soluciones autoduales son 1/2 BPS, con ϵ^+ los parámetros de la supersimetría rota y ϵ^- los parámetros de la supersimetría conservada.

7.2.2. Solución de Multivórtice No Abeliano

Comencemos la busqueda de vortices no abelianos en este modelo considerando el siguiente ansatz para los vórtices Z_N elementales [28]:

$$
\begin{aligned}
q &= \begin{pmatrix} \varphi(r) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \varphi(r) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \varphi(r) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{in\theta}\tilde{\varphi}(r) \end{pmatrix}, \\
A_i^{\mathrm{SU(N)}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -(N-1) \end{pmatrix} \frac{i}{Ne}(\partial_i\theta)[n - f_N(r)], \\
A_0^{\mathrm{SU(N)}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -(N-1) \end{pmatrix} ig_N(r), \\
A_i^{\mathrm{U(1)}} &= \sqrt{\frac{2}{N}}\frac{1}{e}(\partial_i\theta)[-n + f(r)], \\
A_0^{\mathrm{U(1)}} &= \sqrt{2N}g(r), \qquad (7.27)
\end{aligned}
$$

donde $i = 1, 2$ denota las coordenadas del espacio transverso y (r, θ) son las coordenadas polares en este espacio.

Si insertamos este ansatz en la ley de Gauss (7.11) y en las ecuaciones de autodualidad (7.24) obtenemos las ecuaciones diferenciales de primer orden satisfechas por las funciones perfil

$$
\begin{aligned}
& r\partial_r\varphi + \frac{\eta}{N}(f - f_N)\varphi = 0 \\
& r\partial_r\tilde{\varphi} + \frac{\eta}{N}(f - (1-N)f_N)\tilde{\varphi} = 0 \\
& \frac{1}{r}\partial_r(f - f_N) - \eta\frac{Ne^4}{8\kappa^2}\varphi^2(\varphi^2 - \xi) = 0 \\
& \frac{1}{r}\partial_r(f - (1-N)f_N) - \eta\frac{Ne^4}{8\kappa^2}\tilde{\varphi}^2(\tilde{\varphi}^2 - \xi) = 0 \\
& g_N = \frac{\eta e}{4N\kappa}(\tilde{\varphi}^2 - \varphi^2) \\
& g = -\frac{\eta e}{4N\kappa}(\tilde{\varphi}^2 - (1-N)\varphi^2 - N\xi) \qquad (7.28)
\end{aligned}
$$

Las condiciones de contorno en el origen se obtienen de imponer que los campos sean no singulares. Esto implica que

$$n\tilde{\varphi}(0) = 0, \quad f_N(0) = n, \quad f(0) = n. \tag{7.29}$$

Mientras que en el infinito espacial, la finitud de la energía requiere que

$$\varphi(\infty) = \tilde{\varphi}(\infty) = 0 \text{ or } \sqrt{\xi}, \quad \varphi(\infty)f(\infty) = \varphi(\infty)f_N(\infty) = 0 \tag{7.30}$$

Al buscar soluciones de las ecs.(7.28) consideraremos solo el caso $\Phi > 0$. Soluciones con flujo magnético negativo están relacionadas con las anteriores por medio de la transformación

$$\varphi \to \varphi, \quad \tilde{\varphi} \to \tilde{\varphi}, \quad f \to -f, \quad f_N \to -f_N, \quad g \to -g, \quad g_N \to -g_N. \tag{7.31}$$

Notar que, con este ansatz, el flujo magnético (7.22) y la carga eléctrica $U(1)$ toman la forma

$$\Phi = \sqrt{\frac{N}{8}}\frac{e}{\kappa}\,Q^{\mathrm{U}(1)} = \frac{2\pi}{e}(f(0) - f(\infty)) = \frac{2\pi}{e}(n + \alpha) \tag{7.32}$$

donde hemos escrito $f(\infty) \equiv -\alpha$, siendo $\alpha = 0$ cuando $\varphi(\infty) \neq 0$ o una constante indeterminada cuando $\varphi(\infty) = 0$.

Para lograr un mayor entendimiento de estas soluciones es conveniente definir nuevas funciones perfil $h(r)$ y $\tilde{h}(r)$ como:

$$h(r) = \frac{1}{N}(f(r) - f_N(r)), \quad \tilde{h}(r) = \frac{1}{N}(f(r) - (1 - N)f_N(r)). \tag{7.33}$$

En término de estas funciones, las ecs.(7.28) se reducen a dos conjuntos de ecuaciones. Cada uno de éstos es idéntico al conjunto de ecuaciones satisfecho por los perfiles del vórtice autodual de Chern-Simos abeliano [96],[98]. Esto es, un primer conjunto de ecuaciones para las funciones (φ, h)

$$r\partial_r\varphi + h\varphi = 0, \qquad \frac{1}{r}\partial_r h - \frac{e^4}{8\kappa^2}\varphi^2(\varphi^2 - \xi) = 0 \tag{7.34}$$

con las condiciones de contorno

$$h(0) = 0, \quad \varphi(\infty) = 0 \text{ or } \sqrt{\xi}, \quad \varphi(\infty)f(\infty) = 0, \tag{7.35}$$

y un conjunto de ecuaciones idéntico para las funciones $(\tilde{\varphi}, \tilde{h})$

$$r\partial_r\tilde{\varphi} + \tilde{h}\tilde{\varphi} = 0, \qquad \frac{1}{r}\partial_r\tilde{h} - \frac{e^4}{8\kappa^2}\tilde{\varphi}^2(\tilde{\varphi}^2 - \xi) = 0 \tag{7.36}$$

pero con las condiciones de contorno menos restrictivas

$$n\tilde{\varphi}(0) = 0, \quad \tilde{h}(0) = n, \quad \tilde{\varphi}(\infty) = 0 \text{ or } \sqrt{\xi}, \quad \tilde{\varphi}(\infty)\tilde{h}(\infty) = 0. \tag{7.37}$$

Como es mostrado en [96], estas ecuaciones admiten soluciones tipo vórtice para las cuales $\varphi \to \sqrt{\xi}$ y $\tilde{\varphi} \to \sqrt{\xi}$ a largas distancias. Éstas son configuraciones topológicas no triviales que tienen, como puede verse de la ec.(7.32), flujo magnético cuántizado $\Phi = 2\pi n/e$. Por lo tanto, argumentos topológicos impiden que puedan ser deformadas de manera continua a la solución de vacío. Por otro lado, también existen soluciones no topológicas para las cuales el campo de Higgs q se aproxima al mínimo simétrico a largas distancias [98]. Su flujo no está cuantizado, de hecho resulta expresado en términos del parámetro arbitrario α que describe la solución. El resto de este capítulo nos restringiremos al estudio de configuraciones del primer tipo, esto es, soluciones en el sector topológico. En este caso, las ecs.(7.34), (7.36) admiten solución para cada entero no nulo n. Como veremos a continuación, estas soluciones llevan a una generalización verdaderamente no abeliana de los vórtice abelianos primero discutidos en [96].

Una simplificación importante del ansatz (7.27) aparece como resultado de que la solución de vacío

$$\varphi(r) \equiv \sqrt{\xi}, \quad h(r) \equiv 0, \tag{7.38}$$

es la única solución de las ecs.(7.34)[98]. Luego, los campos de Higgs y de gauge en la ec.(7.27) toman la forma simple

$$\begin{aligned} q &= \mathrm{diag}(\sqrt{\xi}, \sqrt{\xi}, ..., \sqrt{\xi}, e^{in\theta}\tilde{\varphi}(r)) \\ A_i &= \mathrm{diag}(0,0,...,0,1)\frac{i}{e}\partial_i\theta(f(r)-n), \quad i=1,2 \\ A_0 &= \mathrm{diag}(0,0,...,0,1)\frac{ie}{4\kappa}(\xi-\tilde{\varphi}^2) \end{aligned} \tag{7.39}$$

donde $A_\mu = A_\mu^{\mathrm{SU(N)}} + \frac{i}{\sqrt{2N}}A_\mu^{\mathrm{U(1)}}I$, $\mu = 0,1,2$. Además, las funciones perfil $(\tilde{\varphi}(r), f(r))$ satisfacen las siguientes ecuaciones de primer orden y condiciones de contorno

$$\begin{aligned} &r\partial_r\tilde{\varphi} + f\tilde{\varphi} = 0, \qquad \frac{1}{r}\partial_r f - \frac{e^4}{8\kappa^2}\tilde{\varphi}^2(\tilde{\varphi}^2-\xi) = 0, \\ &n\tilde{\varphi}(0) = 0, \quad f(0) = n, \quad \tilde{\varphi}(\infty) = \sqrt{\xi}, \quad f(\infty) = 0 \end{aligned} \tag{7.40}$$

y luego coinciden con los perfiles de un vórtice de Chern-Simons abeliano autodual con n unidades de carga topológica [96].

Discutamos ahora algunas propiedades del espacio móduli de los vórtices. Mientras que el vacío en la fase asimétrica es $SU(N)_{\mathrm{c+s}}$-simetrico, la solución dada por la ec.(7.27) rompe esta simetría a $U(1)\times SU(N-1)$. Esto significa que existe un conjunto de soluciones con la misma carga topológica parametrizado por el cociente [27],[28]

$$\frac{SU(N)_{\mathrm{c+s}}}{SU(N-1)\times U(1)} \cong \mathbf{CP}^{N-1} \tag{7.41}$$

De esta manera, en el caso de vórtices de carga unitaria el espacio móduli se descompone como

$$\mathcal{M} \cong \mathbf{C} \times \mathbf{CP}^{N-1} \tag{7.42}$$

donde $\mathbf{C}$ parametriza el centro de masa de la configuración del vórtice. La presencia de estas coordenadas colectivas orientacionales extra le dan al vórtices un carácter genuinamente no abeliano.

Respecto de vórtices de carga n, es de esperar que, debido a su naturaleza BPS, existan soluciones correspondiendo a $|n|$ vórtices de carga unidad bien separados. Luego, como pasa usualmente con solitones que satisfacen ecuaciones de tipo Bogomol'nyi, el espacio moduli de vórtices de carga

$|n|$ debe poseer tantos parámetros independientes como sea necesario para determinar el estado de $|n|$ vórtices independientes de carga 1. Como hemos visto, cada vórtice de carga 1 es caracterizado por su posición en el plano, más $2(N-1)$ parámetros que describen la orientación del vórtice en el grupo $SU(N)_{\rm c+s}$. Luego, la dimensión del espacio móduli de vórtices de carga $|n|$ será $2|n|N$.

Podemos mostrar explícitamente la naturaleza no abeliana de la solución (7.27) aplicando una rotación de color-sabor que preserve el vacío asimétrico. Con este fin, es conveniente primero pasar al gauge singular, donde los campos escalares no se enrrollan en el infinito mientras que el flujo del vórtice aparece en la vecindad del origen. En este gauge, los campos de Higgs y gauge pueden ser escritos como

$$
\begin{aligned}
q &= \mathcal{U}\begin{pmatrix} \sqrt{\xi} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\xi} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\xi} & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{\varphi}(r) \end{pmatrix}\mathcal{U}^{-1}, \\
A_i^{\rm SU(N)} &= -\mathcal{U}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -(N-1) \end{pmatrix}\mathcal{U}^{-1}\frac{i}{Ne}(\partial_i\theta)f(r), \\
A_0^{\rm SU(N)} &= \mathcal{U}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -(N-1) \end{pmatrix}\mathcal{U}^{-1}\frac{i\eta e}{4N\kappa}(\tilde{\varphi}^2-\xi), \\
A_i^{\rm U(1)} &= \sqrt{\frac{2}{N}}\frac{1}{e}(\partial_i\theta)f(r), \\
A_0^{\rm U(1)} &= -\frac{\eta e}{\sqrt{8N}\kappa}(\tilde{\varphi}^2-\xi),
\end{aligned}
\tag{7.43}
$$

donde $\mathcal{U} \in SU(N)$ parametriza las coordenadas colectivas orientacionales asociadas con la rotación del flujo en $SU(N)$.

7.3. Teoría Efectiva en la Línea de Mundo del Vórtice

En esta sección derivaremos una teoría efectiva de bajas energías para las coordenadas colectivas orientacionales en la línea de mundo del vórtice. Al igual que en el capítulo anterior, parametrizamos las matrices presentes en la ec.(7.43) como sigue:

$$\frac{1}{N}\left\{\mathcal{U}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -(N-1) \end{pmatrix}\mathcal{U}^{-1}\right\}^a_b = -n^a n^*_b + \frac{1}{N}\delta^a_b, \tag{7.44}$$

donde n^a es un vector complejo en la representación fundamental de $SU(N)$, y

$$n^*_a n^a = 1 \qquad a = 1, ..., N \tag{7.45}$$

Con esta parametrización la solución de vórtice (7.43) toma la forma

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{N}[\tilde{\varphi} + (N-1)\sqrt{\xi}] + (\tilde{\varphi} - \sqrt{\xi})\left(n \cdot n^* - \frac{1}{N}\right) \\ A_i^{SU(N)} &= \frac{i}{e}\left(n \cdot n^* - \frac{1}{N}\right)\partial_\alpha \theta f(r) \\ A_\alpha^{U(1)} &= \sqrt{\frac{2}{N}}\frac{1}{e}\partial_i \theta f(r) \\ A_0^{SU(N)} &= -\frac{i\eta e}{4\kappa}(\tilde{\varphi}^2 - \xi)\left(n \cdot n^* - \frac{1}{N}\right) \\ A_0^{U(1)} &= \frac{\eta e}{\sqrt{8N}\kappa}(\tilde{\varphi}^2 - \xi) \end{aligned} \tag{7.46}$$

donde $i = 1, 2$. Por simplicidad hemos suprimido todos los índices de $SU(N)$.

Para obtener la teoría efectiva de bajas energías supondremos que los móduli n^a son funciones suficientemente suaves de la coordenada t, lo que promueve las $2(N-1)$ coordenadas colectivas a campos dinámicos sobre la línea de mundo del vórtice. Introduciendo la configuración resultante en el lagrangiano (7.2) y realizando la integral sobre el plano (x^1, x^2) finalizamos con un modelo sigma unidimensional para las coordenadas bosónicas n^a. Sin embargo, antes de hacer esto, será necesario modificar nuestro ansatz. El punto es que nuestra solución fue obtenida a través de una rotación de color-sabor, la cual ahora posee una dependencia en la coordenada t. En consecuencia, la componente 0 del potencial de gauge debe ser modificada. Siguiendo un ansatz similar al usado en el capítulo anterior, proponemos

$$\begin{aligned} A_0^{SU(N)} &= -\frac{i\eta\, e}{4\kappa}(\tilde{\varphi}^2 - \xi)\left(n \cdot n^* - \frac{1}{N}\right) - \frac{1}{e}[\partial_0 n \cdot n^* - n \cdot \partial_0 n^* - 2n \cdot n^*(n^* \partial_0 n)]\rho(r) \\ A_0^{U(1)} &= \frac{\eta\, e}{\sqrt{8N}\kappa}(\tilde{\varphi}^2 - \xi) \end{aligned} \tag{7.47}$$

donde hemos introducido una nueva función perfil $\rho(r)$ que será determinada por su ecuación de movimiento a través de un procedimiento de minimización.

El término cinético para n^a se origina en los términos cinéticos de los campos de gauge y escalar en la ec.(7.2), mientras que, debido a que n^a parametriza los modos cero del vórtice, ningún término potencial aparece en este modelo sigma.

Usando el ansatz anterior para el potencial de gauge podemos calcular el tensor de curvatura del campo de gauge $U(N)$,

$$\begin{aligned} F_{0i} &= -\frac{i}{e}(\partial_0 n \cdot n^* + n \cdot \partial_0 n^*)\varepsilon_{ij}\frac{x^j}{r^2}f(r)(1-\rho(r)) + \frac{i\eta e}{4\kappa}\frac{x_i}{r}\partial_r\tilde{\varphi}^2(r)\, n\cdot n^* \\ &\quad + \frac{1}{e}[\partial_0 n \cdot n^* - n\cdot\partial_0 n^* - 2n\cdot n^*(n^*\partial_0 n)]\frac{x_i}{r}\partial_r\rho(r) \end{aligned} \tag{7.48}$$

Luego, el término de Chern-Simons en el lagrangiano (7.2) es tal que

$$\epsilon^{\mu\nu\rho}(F^A_{\mu\nu}A^A_\rho - \frac{e}{3}f^{ABC}A^A_\mu A^B_\nu A^C_\rho) = -\frac{\eta}{\kappa r}f\partial_r\tilde{\varphi}^2 \tag{7.49}$$

La ec.(7.49) implica que cuando el término de Chern-Simons domina la dinámica del campo de gauge, los únicos términos dependientes de t que contribuyen al lagrangiano efectivo vendrán del término cinético del campo escalar.

Se tiene finalmente

$$S_{eff} = \frac{2\pi}{e^2}I_0\int dt\,[\partial_t n^*\partial_t n + (n^*\partial_t n)^2] \tag{7.50}$$

donde la constante I_0 está dada por la siguiente integral definida en término de las cantidades adimensionales $\hat{r} = e^2 r$, $\hat{\varphi} = e^{-1}\tilde{\varphi}$ y $\hat{\xi} = e^{-2}\xi$,

$$I_0 = \int_0^\infty d\hat{r}\,\hat{r}\left[(\hat{\varphi}^2 + \hat{\xi})\rho^2 + 2(1-\rho)(\hat{\varphi} - \sqrt{\hat{\xi}})^2\right]. \tag{7.51}$$

La minimización de la integral I_0 da la ecuación de movimiento para ρ. Nótese que, al contrario de lo que vimos en el capítulo anterior para el caso de teorías de Yang-Mills, en este caso ρ resulta un campo no dinámico que puede ser puesto fácilmente en términos de $\tilde{\varphi}$, tomando la forma

$$\rho = \frac{(\tilde{\varphi} - \sqrt{\xi})^2}{\tilde{\varphi}^2 + \xi}. \tag{7.52}$$

Debido a que la acción (7.50) es invariante ante las transformaciones de gauge $U(1)$

$$n^i \to e^{i\vartheta(t)}n^i, \quad n^*_i \to e^{-i\vartheta(t)}n^*_i \tag{7.53}$$

y a que los campos n^a deben satisfacer el vínculo

$$n^*_a n^a = 1, \tag{7.54}$$

la teoría efectiva sobre la línea de mundo resulta corresponder al modelo sigma $\mathbf{CP}^{N-1}$ unidimensional, como ya había sido anticipado utilizando argumentos de simetría.

7.4. Cuantización del Modelo $\mathbf{CP}^1$ $\mathcal{N}=2$ Unidimensional

En esta sección analizaremos el modelo definido por la ec.(7.50) en el caso $N=2$, tanto a nivel clásico como cuántico, como una manera de describir las propiedades de bajas energías de los vórtices de Chern-Simons no abelianos $U(2)$. Como hemos visto en la sección anterior, la dinámica de las coordenadas colectivas $n^1(t), n^2(t)$ viene dada por una teoría $\mathbf{CP}^1$ unidimensional. El lagrangiano correspondiente toma la forma

$$\mathcal{L}_B = \frac{2\pi}{e^2} I_0 \left[\partial_t n^* \partial_t n + (n^* \partial_t n)^2\right] \tag{7.55}$$

con las coordenadas n^1, n^2 satisfaciendo el vínculo

$$n^* n = n_1^* n^1 + n_2^* n^2 = 1 \tag{7.56}$$

Con el fin de cuantizar esta teoría será conveniente resolver primero el vínculo (7.56) a través de la proyección estereográfica. Esto nos lleva a utilizar la representación holomorfa del lagrangiano (7.55). La representación holomorfa es definida en términos de un campo complejo $z(t)$ y su complejo conjugado $\bar{z}(t)$, los cuales son funciones del tiempo y toman valores sobre la variedad Kahler $\mathbf{CP}^1$. De esta manera, el lagrangiano efectivo (7.55) puede ser reescrito como

$$\mathcal{L}_B = g_{z\bar{z}} \dot{z} \dot{\bar{z}} \tag{7.57}$$

donde los campos $z, \bar{z}$ no están sujetos a ningún vínculo. En (7.57) usamos la notación $\dot{z} = \partial_t z$, mientras que $g_{z\bar{z}}$ es la métrica de $\mathbf{CP}^1$

$$g_{z\bar{z}} = \frac{r_0^2}{(1+z\bar{z})^2}. \tag{7.58}$$

Además, hemos renombrado la constante de acoplamiento como r_0^2, de manera que $r_0 \propto e^{-1}$. En el caso del espacio target $\mathbf{CP}^1$, esto implica que el escalar de curvatura R resulta $R \propto e^2$. Notar que debido a la condición Kahler de esta variedad, $g_{z\bar{z}}$ puede ser derivado a partir de un potencial Kahler. Esto es, $g_{z\bar{z}} = \partial_z \bar{\partial}_{\bar{z}} \mathcal{K}$ con $\mathcal{K} = r_0^2 \log(1+z\bar{z})$.

El lagrangiano (7.57) aún no determina el modelo en el que estamos interesados. Ya que los vórtices permanecen invariantes ante la acción de la mitad de las supersimetrías (esto es, ante una supercarga compleja), la teoría en la línea de mundo debe tener $\mathcal{N}=2$ supersimetrías. Así, podemos usar la supersimetría no rota para reconstruir el sector bosónico de la teoría. Esto lleva a que la mecánica cuántica del móduli orientacional en el régimen de bajas energías viene dado por un modelo sigma unidimensional $\mathbf{CP}^1$ $\mathcal{N}=2$ supersimétrico. El lagrangiano para esta teoría es

$$\mathcal{L} = g_{z\bar{z}} \dot{z} \dot{\bar{z}} + \frac{i}{4} g_{z\bar{z}} \left(\bar{\psi} \mathcal{D}_t \psi - \bar{\mathcal{D}}_t \bar{\psi} \psi\right) \tag{7.59}$$

donde $\psi(t)$ es una variable grassmann compleja y $\bar{\psi}(t)$ su complejo conjugado. Ademas, $\mathcal{D}_t$ y $\bar{\mathcal{D}}_t$ son las derivadas covariantes

$$\mathcal{D}_t \psi = \dot{\psi} + \Gamma \dot{z} \psi, \qquad \bar{\mathcal{D}}_t \bar{\psi} = \dot{\bar{\psi}} + \bar{\Gamma} \dot{\bar{z}} \bar{\psi}, \tag{7.60}$$

con $\Gamma = g^{\bar{z}z}\partial_z g_{z\bar{z}}$ y $\bar{\Gamma} = g^{\bar{z}z}\bar{\partial}_{\bar{z}} g_{z\bar{z}}$ siendo los simbolos de Christoffel. El lagrangiano (7.59) es invariante ante la transformación de supersimetría $\mathcal{N} = 2$

$$\begin{aligned} \delta z &= \epsilon\psi, & \delta\psi &= -2i\bar{\epsilon}\dot{z}, \\ \delta\bar{z} &= \bar{\psi}\bar{\epsilon}, & \delta\bar{\psi} &= 2i\epsilon\dot{\bar{z}}. \end{aligned} \tag{7.61}$$

7.4.1. Variables Canónicas

Con el fin de realizar la cuantización canónica de la teoría necesitamos obtener, a partir de la ec.(7.59), los momentos canónicos, los cuales toman la forma

$$\begin{aligned} p &\equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}} = g_{z\bar{z}}\dot{\bar{z}} + \frac{i}{4}g_{z\bar{z},z}\bar{\psi}\psi, & \pi \equiv \frac{\partial_l\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = -\frac{i}{4}g_{z\bar{z}}\bar{\psi}, \\ \bar{p} &\equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\bar{z}}} = g_{z\bar{z}}\dot{z} + \frac{i}{4}g_{z\bar{z},\bar{z}}\psi\bar{\psi}, & \bar{\pi} \equiv \frac{\partial_l\mathcal{L}}{\partial\dot{\bar{\psi}}} = -\frac{i}{4}g_{z\bar{z}}\psi. \end{aligned} \tag{7.62}$$

donde ∂_l denota la derivada izquierda.

El hamiltoniano puede escribirse como

$$\mathcal{H} \equiv \dot{z}\,p + \dot{\bar{z}}\bar{p} + \dot{\psi}\pi + \dot{\bar{\psi}}\bar{\pi} - \mathcal{L} = \dot{z}g_{z\bar{z}}\dot{\bar{z}} \tag{7.63}$$

De la ec.(7.62) inmediatamente encontramos que el formalismo canónico involucra los vínculos fermiónicos de segunda clase

$$\mathrm{c}^1 = \pi + \frac{i}{4}g_{z\bar{z}}\bar{\psi}, \quad \mathrm{c}^2 = \bar{\pi} + \frac{i}{4}g_{z\bar{z}}\psi. \tag{7.64}$$

Debido a estos vínculos, resulta necesario utilizar el formalismo de Dirac [102]. Comenzando con los corchetes de Poisson usuales

$$\{z,p\}_{\mathrm{PB}} = 1, \quad \{\bar{z},\bar{p}\}_{\mathrm{PB}} = 1, \quad \{\psi,\pi\}_{\mathrm{PB}} = -1, \quad \{\bar{\psi},\bar{\pi}\}_{\mathrm{PB}} = -1, \tag{7.65}$$

definimos los corchetes de Dirac para dos campos variables f y g como

$$\{f,g\}_{\mathrm{DB}} \equiv \{f,g\}_{\mathrm{PB}} - \{f,\mathrm{c}^a\}_{\mathrm{PB}}\mathrm{C}^{-1}_{ab}\{\mathrm{c}^b,g\}_{\mathrm{PB}}, \qquad a,b = 1,2 \tag{7.66}$$

donde

$$\mathrm{C}^{ab} \equiv \{\mathrm{c}^a,\mathrm{c}^b\}_{\mathrm{PB}} \tag{7.67}$$

Ahora, dentro del formalismo de Dirac, los corchetes de Dirac básicos resultan

$$\{z,p\}_{\mathrm{DB}} = \{\bar{z},\bar{p}\}_{\mathrm{DB}} = 1, \quad \{\psi,\bar{\psi}\}_{\mathrm{DB}} = -2ig^{\bar{z}z}, \tag{7.68}$$

$$\{\psi,p\}_{\mathrm{DB}} = -\frac{1}{2}\Gamma\psi = (\{\bar{\psi},\bar{p}\}_{\mathrm{DB}})^*, \tag{7.69}$$

$$\{\psi,\bar{p}\}_{\mathrm{DB}} = -\frac{1}{2}\bar{\Gamma}\psi = (\{\bar{\psi},p\}_{\mathrm{DB}})^*, \tag{7.70}$$

con todas las otras reglas de conmutación triviales omitidas.

Las supercargas $\mathcal{N}=2$ Q, $\bar{Q}$ que corresponden a las transformaciones (7.61) toman la forma

$$Q = p\,\psi, \qquad \bar{Q} = \bar{p}\,\bar{\psi}. \tag{7.71}$$

Es fácil ver que estas cargas satisfacen la superálgebra $\mathcal{N}=2$

$$\{Q,\bar{Q}\}_{\mathrm{DB}} = -2i\mathcal{H}, \qquad \{Q,Q\}_{\mathrm{DB}} = \{\bar{Q},\bar{Q}\}_{\mathrm{DB}} = 0 \tag{7.72}$$

Existe un conjunto obvio más simple de variables canónicas, las cuales separan las variables grassmann de las ordinarias y que permiten pasar más fácilmente a una representación explícita de la mecánica cuántica. Así, si introducimos la tetrada e, $\bar{e}$ dada por

$$e\bar{e} = g \Longrightarrow e = \bar{e} = \frac{r_0}{1+z\bar{z}}, \tag{7.73}$$

podemos definir

$$\lambda = e\psi, \qquad \bar{\lambda} = \bar{e}\bar{\psi}. \tag{7.74}$$

Luego, el conjunto z, p, λ y sus complejos conjugados satisfacen

$$\{z,p\}_{\mathrm{DB}} = \{\bar{z},\bar{p}\}_{\mathrm{DB}} = 1, \qquad \{\lambda,\bar{\lambda}\}_{\mathrm{DB}} = -2i \tag{7.75}$$

como las únicas ecuaciones canónicas no triviales.

7.4.2. Cuantización Canónica

Como es usual, el pasaje de la teoría clásica a la teoría cuántica se hace reemplazando las variables reales por operadores hermíticos, junto con el cambio de corchetes

$$\{\,,\,\}_{\mathrm{DB}} \longrightarrow -i[\,,\,]. \tag{7.76}$$

Es inmediato encontrar una representación mecano-cuántica del álgebra ec.(7.75). Para las variables p y $\bar{p}$ utilizamos la representación

$$p = e^{-1}(-i\partial_z)e, \quad \bar{p} = \bar{e}^{-1}(-i\bar{\partial}_{\bar{z}})\bar{e}, \tag{7.77}$$

donde los factores que involucran la tetrada son necesarios para mantener la relación de hermiticidad entre p y $\bar{p}$ ante el produto interno

$$\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle = \int d^2z g_{z\bar{z}}\Psi_1^\dagger(z,\bar{z})\Psi_2(z,\bar{z}) \tag{7.78}$$

donde $\Psi(z,\bar{z})$ denota la función de onda "invariante" asociada con el ket $|\Psi\rangle$. Con respecto a las variables fermiónicas, es conveniente emplear una representación de matrices de 2×2 para $\psi, \bar{\psi}$, las cuales así toman la forma

$$\psi = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \bar{\psi} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.79}$$

En lo que respecta a las supercargas $\mathcal{N}=2$ Q y $\bar{Q}$, generalizaremos la expresión clásica ec.(7.71) adoptando el siguiente ordenamiento para los operadores cuánticos correspondientes

$$Q \equiv \frac{1}{2}\{p,\psi\} = \psi(p - \frac{i}{4}\Gamma), \quad \bar{Q} \equiv \frac{1}{2}\{\bar{p},\bar{\psi}\} = \bar{\psi}(\bar{p} + \frac{i}{4}\bar{\Gamma}) \tag{7.80}$$

Para asegurar la supersimetría del sistema, requerimos además que el operador hamiltoniano esté definido por

$$\mathcal{H} \equiv \frac{1}{2}\{Q,\bar{Q}\} \tag{7.81}$$

Luego, usando las expresiones dadas por las ecs.(7.77),(7.79), el hamiltoniano toma la forma

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \bar{A}A & 0 \\ 0 & A\bar{A} \end{pmatrix}. \tag{7.82}$$

con

$$A = ie^{-1}(\partial_z + \frac{3}{4}\Gamma), \qquad \bar{A} = i\bar{e}^{-1}(\bar{\partial}_{\bar{z}} - \frac{1}{4}\bar{\Gamma}) \tag{7.83}$$

Como es bien sabido, las autofunciones de $\bar{A}A$ y $A\bar{A}$ están estrechamente relacionadas debido a la supersimetría. Más explícitamente, si φ_n es una autofunción de $A\bar{A}$ con autovalor no nulo E_n, luego $\bar{A}\varphi_n$ es una autofunción de $A\bar{A}$ con el mismo autovalor E_n. Respecto al caso de autovalor nulo, a partir del hecho que $A^\dagger = \bar{A}$ para el producto interno (7.78), se encuentra que los modos cero de $A\bar{A}$ y $\bar{A}A$ corresponden a estados aniquilados por $\bar{A}$ y A, respectivamente. Es fácil ver que el operador A dado por la ec.(7.83) no tiene modos ceros normalizables, y por lo tanto tampoco el operador $\bar{A}A$. Basándonos en estos argumentos, podemos resolver el problema de autovalores para el operador hamiltoniano $\mathcal{H}$ mediante la siguiente prescripción

$$\mathcal{H}\Psi_n = E_n\Psi_n \Longleftrightarrow \Psi_n = \begin{pmatrix} \bar{A}\varphi_n \\ \varphi_n \end{pmatrix} \tag{7.84}$$

donde (E_n,φ_n) resuelve el problema de autovalores para el operador $A\bar{A}$, esto es, $A\bar{A}\varphi_n = E_n\varphi_n$.

Para determinar el espacio de autoestados del operador $h = A\bar{A}$, rescribamoslo como [103]

$$h = -e^{-1}\bar{e}^{-1}\left(\partial_z + \frac{\Gamma}{4}\right)\left(\bar{\partial}_{\bar{z}} - \frac{\bar{\Gamma}}{4}\right) = -\frac{1}{2r_0^2\partial_z\bar{\partial}_{\bar{z}}\Theta}(\partial_z - \partial_z\Theta)(\bar{\partial}_{\bar{z}} + \bar{\partial}_{\bar{z}}\Theta) \tag{7.85}$$

con $\Theta = \mathcal{K}/r_0^2 = \log\sqrt{1+z\bar{z}}$. Dado un operador de la forma (7.85), resulta natural definir las funciones de onda “reducidas” $\hat{\varphi}$,

$$\varphi(z,\bar{z}) \equiv e^{-\Theta}\,\hat{\varphi}(z,\bar{z}) \tag{7.86}$$

Así, el operador “reducido” $\hat{h}$ es

$$\hat{h} = e^{\Theta}\,h\,e^{-\Theta} = -\frac{1}{2r_0^2\partial_z\bar{\partial}_{\bar{z}}\Theta}(\partial_z - 2\partial_z\Theta)\bar{\partial}_{\bar{z}} \tag{7.87}$$

El generador de rotaciones sobre el origen en el plano proyectado $\hat{J} = z\partial_z - \bar{z}\bar{\partial}_{\bar{z}}$ conmuta con $\hat{h}$. Luego, podemos diagonalizar a ambos simultáneamente y descomponer $\hat{\varphi}$ como

$$\hat{\varphi} = z^j P(z\bar{z}). \tag{7.88}$$

Si escribimos a la función indeterminada P como una función de x

$$x \equiv \frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z}}, \tag{7.89}$$

la condición de autoestado $\hat{h}\hat{\varphi} = E\hat{\varphi}$ lleva a la siguiente ecuación diferencial ordinaria para la función $P(x)$,

$$(1 - x^2)\frac{d^2P}{dx^2} + (1 - 2j - 3x)\frac{dP}{dx} + r_0^2 EP = 0. \tag{7.90}$$

Ésta es una ecuación diferencial de la forma de Jacobi, cuyas soluciones regulares en el intervalo [-1,1] son los polinomios de Jacobi

$$\begin{aligned} P_n^{(j,1-j)}(x) &\equiv \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-j}(1+x)^{j-1}\frac{d^n}{dx^n}\{(1-x)^{n+j}(1+x)^{n-j+1}\} \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{n}\begin{pmatrix} n+j \\ m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n-j+1 \\ n-m \end{pmatrix}(1-x)^{n-m}(1+x)^m \end{aligned} \tag{7.91}$$

Notar también que los polinomios de Jacobi $P_n^{(j,1-j)}$ están definidos para $j \geq -n$, $1 - j \geq -n$, lo que lleva a cotas superior e inferior para los valores permitidos de j.

Finalmente, juntando estos últimos resultados encontramos que

$$\begin{aligned} \varphi_n^j &= \frac{1}{r_0}\sqrt{\frac{2n!(n+1)\Gamma(n+2)}{\pi\Gamma(n+j+1)\Gamma(n-j+2)}}\frac{z^j}{\sqrt{1+z\bar{z}}}P_n^{(j,1-j)}\left(\frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right), \\ E_n &= \frac{1}{r_0^2}n(n+2), \qquad n = 0,1,2,... \qquad j = -n,-n+1,...,n+1 \end{aligned} \tag{7.92}$$

corresponden al conjunto ortonormal de autofunciones de $h = A\bar{A}$ y sus respectivos autovalores.

7.5. Resumen y Discusión

Este capítulo tuvo como fin presentar la construcción y posterior análisis de un nuevo tipo de configuración tipo cuerda presente en ciertas teorías de Chern-Simons, caracterizada por ser verdaderamente no abeliana. Para lograr esto adaptamos al caso de modelos de Chern-Simons los resultados obtenidos en el contexto de teorías de Yang-Mills 4-dimensionales descriptos en el capítulo anterior. Comenzamos construyendo una teoría de Chern-Simons $\mathcal{N} = 2$ supersimétrica con grupo de gauge $SU(N)$ acoplada a N multipletes escalares. Para esta teoría obtuvimos una cota de tipo Bogomol'nyi para la energía, cuya saturación permitió encontrar un conjunto ecuaciones de autodualidad de primer orden.

Nuestros resultados originales incluyeron la solución de las ecuaciones de autodualidad mediante un ansatz particular rotacionalmente simétrico, que nos permitió obtener soluciones análogas a las de las cuerdas Z_N elementales descriptas en el capítulo anterior. Además, encontramos que con este ansatz las ecuaciones para las funciones perfil se reducen a aquellas del modelo de Chern-Simons abeliano. Posteriormente, utilizando las rotaciones de color-sabor que dejan invariante al vacío asimétrico, obtuvimos genuinas cuerdas elementales no abelianas. La existencia del espacio móduli orientacional no trivial de estas cuerdas fue mostrada explícitamente mediante la parametrización de los campos de gauge y Higgs en términos de las coordenadas colectivas orientacionales.

Otro de los resultados originales obtenidos fue el estudio de la teoría de bajas energías para las coordenadas del espacio móduli orientacional. La misma fue derivada considerando al móduli como una función lentamente variable de la coordenada temporal e introduciendo la configuración resultante en el lagrangiano original. La teoría efectiva así obtenida corresponde a un modelo sigma $\mathbf{CP}^{N-1}$ unidimensional definido sobre la línea de mundo del vórtice. Debido a que los vórtices autoduales son 1/2 BPS, la verdadera teoría efectiva resulta ser el modelo sigma $\mathbf{CP}^{N-1}$ $\mathcal{N}=2$. Finalmente, completamos el análisis de la teoría efectiva supersimétrica realizando la cuantización de la misma en el caso $N=2$.

Capítulo 8

Cuerdas No Abelianas Auto-Gravitantes

En este capítulo completamos la presentación de los resultados originales de esta tesis, que consisten en la construcción explícita de cuerdas no abelianas auto-gravitantes para teorías de Einstein-Yang-Mills-Higgs. Consideraremos N_s campos de Higgs en la representación fundamental del grupo de gauge $U(1) \times SU(N_c)$ de manera de tener un grupo $SU(N_c)$ de color-sabor que permanezca no roto. La elección de un ansatz adecuado para la métrica nos permitirá encontrar ecuaciones de Bogomol'nyi de primer orden. Éstas serán resueltas mediante un ansatz rotacionalmente simétrico. En el caso $N_c = N_s$, las soluciones son cuerdas locales y son genuinamente no abelianas, ya que están parametrizadas por coordenadas colectivas orientacionales. Cuando $N_c < N_s$, las soluciones corrresponden a cuerdas semilocales, las que, ademas de los grados de libertad orientacionales, adquieren coordenadas colectivas adicionales relacionadas con su tamaño transverso. Las teorías efectivas para el móduli correspondiente son halladas, mostrando que todos los modos cero son normalizables en presencia de gravedad, incluso en el caso semilocal.

Las configuraciones tipo vórtice en teorías de campos en espacio-tiempo curvos fueron estudiadas exhaustivamente en el pasado. El modelo más simple y más común en el cual estas configuraciones aparecen es el modelo de Einstein-Maxwell-Higgs [104]-[110]. En general, las teorías de Einstein-Maxwell-Higgs admiten dos tipos de soluciones, que pueden ser distinguidas por sus geometrías asintóticas. Así, los comportamientos asintóticos deben corresponder a una de las dos métricas de Levi-Civita [111],

$$ds^2 = dt^2 - (dx^3)^2 - d\rho^2 - (a_1\rho + a_2)d\theta^2, \tag{8.1}$$

que es el cono, o

$$ds^2 = (b_1\rho + b_2)^{\frac{4}{3}}(dt^2 - (dx^3)^2) - d\rho^2 - (b_1\rho + b_2)^{-\frac{2}{3}}d\theta^2, \tag{8.2}$$

que es una métrica Kasner. La rama Kasner no tiene las características requeridas para describir una cuerda cósmica "estándar", y por ello es usualmente descartada en las aplicaciones físicas.

Dependiendo de cuán fuerte es el acoplamiento gravitacional (medido por el parámetro $G\xi$), cada una de las métricas (8.1) y (8.2) puede tener a su vez dos comportamientos totalmente distintos. Esto es, para el rango $G\xi << 1$, que incluye la escala de rotura de simetría GUT y la mayoría de las aplicaciones en cosmología, a_1 y b_1 son positivos, y luego, (8.1) es el cono estándar [104],[105], mientras que (8.2) es la forma asintótica del universo magnético de Melvin [106]. Para cuerdas supermasivas, las cuales tienen $G\xi \gtrsim 1$, a_1 y b_1 son negativos y luego hay una singularidad cónica tanto en la métrica tipo Kasner [107] como en la métrica cónica [108]. Cuando consideramos a la teoría de Einstein-Maxwell-Higgs en el límite de Bogomol'nyi, el acoplamiento crítico lleva a una simplificación considerable del problema, ya que todas las ecuaciones de segundo orden pueden ser reemplazadas por un análogo en espacio curvo de las ecuaciones de Bogomol'nyi [109]. Soluciones tipo cuerda en el límite de Bogomol'nyi de la teoría con un único campo de Higgs fueron analizadas en [109],[110]. La generalización a más de un campo de Higgs fue considerada en [112],[113], donde las soluciones estudiadas correspondían a vórtices gravitantes semilocales. Una consecuencia inmediata de las ecuaciones de Bogomol'nyi es que la métrica toma necesariamente la forma asintótica cónica (8.1) (ver [109],[108]). Este comportamiento también es heredado por las extensiones localmente supersimétricas del modelo de Maxwell-Higgs [114],[115].

Resultados análogos para el caso de soluciones tipo cuerda en teorías de Einstein-Yang-Mills-Higgs son bastante incompletos (para un análisis reciente de cuerdas en teorías de Einstein-Yang-Mills ver [116]). El propósito de este capítulo apunta justamente a estudiar aspectos relacionados con este tipo de soluciones, no analizados anteriormente. Para ello buscaremos teorías de Einstein-Yang-Mills-Higgs que admitan soluciones de cuerdas no abelianas locales y semilocales. Ya que estaremos interesados en el límite de Bogomol'nyi del modelo, solo cuerdas con métricas asintóticamente cónicas serán análizadas. Más en detalle, la teoría que consideraremos es el modelo de Einstein-Yang-Mills-Higgs en 4 dimensiones con grupo de gauge $U(1) \times SU(N_c)$, N_f sabores y un potencial de Higgs arbitrario. Dicho potencial de Higgs será determinado a posteriori cuando busquemos el límite de Bogomol'nyi de la teoría. De esta manera, al considerar un ansatz conveniente para la métrica y una determinada forma cuártica para el potencial lograremos reducir las complejas ecuaciones de movimiento a un conjunto de ecuaciones (de Bogomol'nyi) de primer orden. Una vez obtenidas las ecuaciones de Bogomol'nyi, buscaremos mediante un ansatz rotacionalmente simétrico el análogo auto-gravitante de las cuerdas Z_N elementales. Utilizando la simetría global de sabor-color que deja invariante el vacío, mostraremos que dichas cuerdas son genuinamente no abelianas. Más aún, encontraremos que en el caso $N_f = N_c$ las cuerdas son locales y están parametrizadas por las coordenadas del móduli orientacional, mientras que en el caso $N_f > N_c$ las cuerdas son semilocales y además del móduli orientacional adquieren nuevas coordenadas colectivas relacionadas con variaciones del tamaño transverso. Finalizaremos el capítulo estudiando las teorías de bajas energías sobre la hoja de mundo de la cuerda para las coordenadas del móduli, tanto en el caso local como en el semilocal.

Antes de comenzar con la exposición de los resultados obtenidos, es conveniente hacer un breve comentario sobre las ecuaciones de Bogomol'nyi. A lo largo de los capítulos precedentes hemos visto la estrecha relación existente entre la supersimetría global y las cotas de Bogomol'nyi de una teoría. Dicha conexión sigue existiendo en el caso de supergravedad, esto es, sigue siendo válida la relación entre la supersimetría local y las cotas de Bogomol'nyi para solitones gravitantes. Por lo tanto, a pesar de que para los fines buscados en este capítulo es suficiente (y más conveniente) limitarnos a trabajar con una teoría puramente bosónica, es fácil presentar una manera alternativa de obtener las ecuaciones de Bogomol'nyi. Para ello basta con considerar la teoría de supergravedad de la cual nuestro modelo representa el sector bosónico, y luego obtener las ecuaciones de Bogomol'nyi buscando configuraciones que anulen la mitad de las transformaciones de supersimetría.

8.1. La Teoría

El contenido de campos de la teoría viene dado por la métrica del espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$, donde $\mu, \nu, ... = 0, 1, 2, 3$ son índices espacio-temporales, un campo de gauge A_μ del grupo $SU(N_c) \times U(1)$ y N_s escalares complejos q. Además de la simetría $SU(N_c) \times U(1)$, el lagrangiano también posee una simetría de sabor $SU(N_s)$. Bajo estos dos grupos, los campos escalares transforman como $(\mathbf{N_c}, \bar{\mathbf{N}}_\mathbf{s})$. Así, q puede ser visto como una matriz de $N_c \times N_s$ $q = q^a_{\ r}$, donde los índices $a, b, ... = 1, 2, ..., N_c$ refieren al grupo de gauge y $r, s, ... = 1, 2, ..., N_s$ al grupo de sabor.

Los campos de gauge serán representados por matrices en la representación fundamental de $SU(N_c) \times U(1)$, o sea, $\mathrm{A}_\mu = A^A_\mu T^A + i/\sqrt{2N_c} A_\mu$, donde T^A $(A, B, ... = 1, 2, ..., N_c^2 - 1)$ son los generadores de la representación $\mathbf{N_c}$ de $SU(N_c)$. Usaremos generadores anti-hermíticos T^A que satisfacen

$$[(T^A)^a_{\ b}]^* = -(T^A)^b_{\ a}, \qquad [T^A, T^B] = f^{ABC} T^C, \qquad (T^A T^B)^a_{\ a} = -\frac{1}{2}\delta^{AB}. \tag{8.3}$$

La acción toma la forma

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{g} \left\{ -\frac{1}{16\pi G} R - \frac{1}{4e_1^2} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} - \frac{1}{4e_2^2} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F^A_{\mu\nu} F^A_{\rho\sigma} + \mathcal{D}_\mu \bar{q}^r \mathcal{D}^\mu q_r - V(q, \bar{q}) \right\} \tag{8.4}$$

donde

$$\bar{q}^r_{\ a} \equiv (q^a_{\ r})^*, \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \qquad F^A_{\mu\nu} = \partial_\mu A^A_\nu - \partial_\nu A^A_\mu - f^{ABC} A^B_\mu A^C_\nu \tag{8.5}$$

y

$$\mathcal{D}_\mu q^a_{\ r} \equiv \partial_\mu q^a_{\ r} - \frac{i}{\sqrt{2N_c}} A_\mu q^a_{\ r} - A^A_\mu (T^A)^a_{\ b} q^b_{\ r}, \qquad \mathcal{D}_\mu \bar{q}^r_{\ a} \equiv \partial_\mu \bar{q}^r_{\ a} + \frac{i}{\sqrt{2N_c}} A_\mu \bar{q}^r_{\ a} + A^A_\mu (T^A)^b_{\ a} \bar{q}^r_{\ b}. \tag{8.6}$$

Además, usamos las convenciones $R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \Gamma^\mu_{\nu\sigma,\rho} - \Gamma^\mu_{\nu\rho,\sigma} + \Gamma^\mu_{\omega\sigma}\Gamma^\omega_{\nu\rho} - \Gamma^\mu_{\omega\rho}\Gamma^\omega_{\nu\sigma}$, $R_{\mu\nu} = R^\rho_{\mu\rho\nu}$, signatura $(+, -, -, -)$ and $g = -\mathrm{det} g_{\mu\nu}$.

Por simplicidad no escribimos los índices del grupo de gauge que están sumados, e.g.,

$$(\bar{q}^r T^A q_r) \equiv (T^A)^a_{\ b} \bar{q}^r_{\ a} q^b_{\ r} \tag{8.7}$$

Las ecuaciones de movimiento obtenidas a partir de la variación de la acción son

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G (T^{\mathrm{U(1)}}_{\mu\nu} + T^{\mathrm{SU(N_c)}}_{\mu\nu} + T^{\mathrm{mat}}_{\mu\nu}), \tag{8.8}$$

$$\partial_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma}) = e_1^2 \sqrt{g} j^\nu, \tag{8.9}$$

$$(\partial_\mu \delta^{AB} + f^{ABC} A^C_\mu)(\sqrt{g} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F^B_{\rho\sigma}) = e_2^2 \sqrt{g} j^{A\nu}, \tag{8.10}$$

$$[\mathcal{D}_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \mathcal{D}_\mu q)]^a_{\ r} = -\sqrt{g} \frac{\partial V}{\partial \bar{q}^r_{\ a}}, \tag{8.11}$$

donde los tensores de energía-impulso y las corrientes de gauge vienen dados por

$$T^{\mathrm{U}(1)}_{\mu\nu} = \frac{1}{e_1^2}\left(-F_{\mu\rho}F_\nu^{\ \rho} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right), \tag{8.12}$$

$$T^{\mathrm{SU(N_c)}}_{\mu\nu} = \frac{1}{e_2^2}\left(-F^A_{\mu\rho}F_\nu^{A\,\rho} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^A_{\rho\sigma}F^{A\rho\sigma}\right), \tag{8.13}$$

$$T^{\mathrm{mat}}_{\mu\nu} = \mathcal{D}_\mu\bar{q}^r\mathcal{D}_\nu q_r + \mathcal{D}_\nu\bar{q}^r\mathcal{D}_\mu q_r - g_{\mu\nu}\mathcal{D}_\rho\bar{q}^r\mathcal{D}^\rho q_r + g_{\mu\nu}V, \tag{8.14}$$

$$j^\mu = \frac{i}{\sqrt{2N_c}}(\mathcal{D}^\mu\bar{q}^r q_r - \bar{q}^r\mathcal{D}^\mu q_r), \tag{8.15}$$

$$j^{A\mu} = \mathcal{D}^\mu\bar{q}^r T^A q_r - \bar{q}^r T^A\mathcal{D}^\mu q_r. \tag{8.16}$$

Con el fin de estudiar soluciones tipo cuerda, suponemos que la métrica y los campos de gauge y de materia son estáticos y simétricos ante traslaciones en x^3. Además, nos restringiremos a configuraciones puramente magnéticas. Así, consideraremos el siguiente ansatz para la métrica y los campos de gauge,

$$ds^2 = L^2dt^2 + h_{ij}dx^idx^j - K^2(dx^3)^2, \tag{8.17}$$

$$\mathrm{A}_\mu dx^\mu = \mathrm{A}_i dx^i, \qquad\qquad i,j = 1,2 \tag{8.18}$$

donde los campos L, K, A_i y h_{ij} dependen solo de las coordenadas transversas x^k $(k = 1,2)$.

Con este ansatz las componentes del tensor de Ricci toman la forma

$$R_{00} = -L[(h^{ij}L_{,j})_{,i} + \gamma^k_{ik}h^{ij}L_{,j}] - \frac{L}{K}h^{ij}K_{,i}L_{,j} = -\frac{L}{K}(KL^{,i})_{;i}, \tag{8.19}$$

$$R_{33} = K[(h^{ij}K_{,j})_{,i} + \gamma^k_{ik}h^{ij}K_{,j}] + \frac{K}{L}h^{ij}L_{,i}K_{,j} = \frac{K}{L}(LK^{,i})_{;i}, \tag{8.20}$$

$$R_{ij} = r_{ij} - \frac{1}{L}(L_{,i,j} - \gamma^k_{ij}L_{,k}) - \frac{1}{K}(K_{,i,j} - \gamma^k_{ij}K_{,k}) \tag{8.21}$$

$$= r_{ij} - \frac{L_{,i;j}}{L} - \frac{K_{,i;j}}{K}, \tag{8.22}$$

$$R_{i0} = R_{i3} = 0, \quad R_{03} = 0, \tag{8.23}$$

donde γ^k_{ij}, r_{ij} y ";"denotan la conexión, el tensor de Ricci y la derivada covariante correspondiendo a la métrica transversa bidimensional h_{ij}.

En lo que concierne al tensor de curvatura del campo de gauge, sus componentes no nulas son determinadas por una única componentes magnética, o sea,

$$F_{ij} = \epsilon_{ij}B, \tag{8.24}$$

$$F^A_{ij} = \epsilon_{ij}B^A, \tag{8.25}$$

donde introducimos el campo tensorial covariantemente constante $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$, normalizado tal que $\epsilon_{ij}\epsilon^{jk} = \delta^k_i$.

8.2. Ecuaciones de Bogomol'nyi

Podemos simplificar significativamente el problema si encontramos condiciones de autodualidad similares a las de espacio-tiempo plano, i.e. si el sistema admite un límite de Bogomol'nyi. Es bien sabido [109]-[110] que en el modelo abeliano de Higgs se obtienen propiedades de autodualidad en espacio-tiempo curvo si $L(x^i)$ y $K(x^i)$ son constantes. A continuación veremos que también en el presente modelo de Higgs generalizado podemos encontrar un límite de Bogomol'nyi si tomamos

$$L(x^i) = 1, \qquad K(x^i) = 1. \tag{8.26}$$

Usando estas condiciones es fácil verificar que $R_{ij} = r_{ij}$ y $R = r$, lo que lleva a que G_{ij} se anula idénticamente. La ecuación de Einstein (8.8) luego implica la anulación de T_{ij}, o sea,

$$-\frac{1}{2e_1^2}B^2 h_{ij} - \frac{1}{2e_1^2}B^2 h_{ij} + \mathcal{D}_i\bar{q}^r\mathcal{D}_j q_r + \mathcal{D}_j\bar{q}^r\mathcal{D}_i q_r - h_{ij}\mathcal{D}_k\bar{q}^r\mathcal{D}^k q_r + h_{ij}V = 0 \tag{8.27}$$

La última ecuación implica

$$\mathcal{D}_i\bar{q}^r\mathcal{D}_j q_r + \mathcal{D}_j\bar{q}^r\mathcal{D}_i q_r \propto h_{ij} \tag{8.28}$$

Sin pérdida de generalidad podemos tomar la métrica bidimensional h_{ij} a ser conformemente plana, i.e.

$$h_{ij} = -\Omega^2\delta_{ij} \tag{8.29}$$

Luego, podemos escribir la condición (8.28) como

$$\mathcal{D}_z\bar{q}^r\mathcal{D}_z q_r = 0 \tag{8.30}$$

con $z = x + iy$. La manera más simple de resolver esta ecuación es requiriendo que $\mathcal{D}_z q^a_r = 0$ o $\mathcal{D}_z\bar{q}^r{}_a = 0$. Volviendo a un sistema de coordenadas espaciales arbitrario, encontramos la condición de autodualidad covariante para el campo de Higgs

$$\mathcal{D}_i q_r + i\eta\epsilon_i^{\ j}\mathcal{D}_j q_r = 0, \tag{8.31}$$

donde $\eta = \pm 1$ corresponde a las soluciones autodual y antiautodual. Notar, sin embargo que, en contraste con lo que ocurre en el caso abeliano ($N_s = 1$)[117], las ecuaciones (8.26) no implican *a priori* las ecuaciones de autodualidad (8.31).

Si ahora volvemos a la ec.(8.27) y usamos la ecuación de autodualidad del Higgs, obtenemos la siguiente condición para el potencial de Higgs

$$V = \frac{B^2}{2e_1^2} + \frac{B^A B^A}{2e_2^2}. \tag{8.32}$$

Para obtener ecuaciones de primer orden para los campos de gauge debemos considerar las ecuaciones del Higgs y notar que para configuraciones de Higgs autoduales, ecs.(8.11) devienen

$$\left(B^A(T^A)^a_{\ b} + \frac{i}{\sqrt{2N_c}}B\delta^a_b\right)q^b_{\ r} = i\eta\frac{\partial V}{\partial\bar{q}^r{}_a} \tag{8.33}$$

Ahora, si consideramos a B y B^A como funciones de q, de las ecuaciones de Yang-Mills (8.9),(8.10) se ve que estas funciones deben ser cuadráticas en q. Luego, con el fin de satisfacer la relación (8.33), deberemos considerar un potencial cuártico para la teoría. El potencial cuártico más general que respeta las simetrías de gauge y de sabor puede escribirse como:

$$V(q,\bar{q}) = c_1 + c_2\bar{q}^r q_r + c_3(\bar{q}^r q_r)^2 + c_4(\bar{q}^r T^A q_r)^2 \tag{8.34}$$

De la ec.(8.33) obtenemos que

$$B = \eta\sqrt{2N_c}(c_2 + 2c_3\bar{q}^r q_r), \qquad B^A = 2i\eta c_4\bar{q}^r T^A q_r. \tag{8.35}$$

Las constantes c_α $(\alpha = 1, ..., 4)$ son determinadas por requerir: primero, que configuraciones que satisfacen las condiciones de autodualidad (8.31) y (8.35) sean solución de las ecuaciones de Yang-Mills (8.9),(8.10) y segundo, que el potencial de Higgs alcance un mínimo para $\bar{q}^r q_r = N_c\xi$. Luego, las ecuaciones de autodualidad para los campos de gauge toman la forma

$$\begin{aligned} B &= \eta\frac{e_1^2}{\sqrt{2N_c}}(\bar{q}^r q_r - N_c\xi), \\ B^A &= -i\eta e_2^2\bar{q}^r T^A q_r, \end{aligned} \tag{8.36}$$

mientras que el potencial resulta

$$V(q,\bar{q}) = \frac{e_1^2}{4N_c}(\bar{q}^r q_r - N_c\xi)^2 - \frac{e_2^2}{2}(\bar{q}^r T^A q_r)^2. \tag{8.37}$$

En resumen, las ecuaciones de primer orden de autodualidad para los campos de gauge y Higgs son

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}_i q_r + i\eta\epsilon_i^{\ j}\mathcal{D}_j q_r = 0, \\ &B = \frac{1}{2}\epsilon^{ji}F_{ij} = \eta\frac{e_1^2}{\sqrt{2N_c}}(\bar{q}^r q_r - N_c\xi), \\ &B^A = \frac{1}{2}\epsilon^{ji}F_{ij}^A = -i\eta e_2^2\bar{q}^r T^A q_r, \end{aligned} \tag{8.38}$$

Vale la pena mencionar que la existencia de las ecuaciones de primer orden (8.38) está estrechamente relacionada con la posibilidad de tener una teoría localmente supersimétrica cuyo sector bosónico coincida con nuestro modelo. De hecho, esta teoría de supergravedad podría ser usada para obtener no solo las ecuaciones de Bogomol'nyi para los campos de materia (8.38), sino también ecuaciones de primer orden (de Bogomol'nyi) para el campo gravitatorio [118]. Más precisamente, las ecuaciones de Bogomol'nyi pueden ser obtenidas de requerir la anulación de la variación supersimétrica de los campos fermiónicos. En particular, la transformación supersimétrica del gravitino debe conducir a una ecuación espinorial de Killing de primer orden para el parámetro supersimétrico. Las ecuaciones de Einstein luego son automáticamente satisfechas como consecuencia de la condición de integrabilidad de esta ecuación de Killing.

Claramente, el potencial de Higgs (8.37) es definido positivo. Requerir su anulación lleva, debido al primer término, a que q desarrolle un valor de expectación de vacío (VEV) y, debido al segundo, a que este VEV satisfaga

$$q^a_{\ r}\bar{q}^r_{\ b} = \xi\delta^a_b. \tag{8.39}$$

Discutamos brevemente como es el vacío del potencial de Higgs (8.37), y como depende éste de N_c y N_s. Es claro a partir de (8.39) que no hay ningún vacío con potencial nulo para $N_s < N_c$, por lo que este caso es trivial. En el caso $N_s = N_c$ existe un único vacío aislado que, a menos de transformaciones de gauge, toma la forma

$$q^a_r = \sqrt{\xi}\delta^a_r. \tag{8.40}$$

La configuración de vacío (8.40) tiene el patrón de rotura de simetría [27]-[28]

$$U(1) \times SU(N_c) \times SU(N_s) \longrightarrow SU(N)_{\text{c+s}}, \tag{8.41}$$

donde el grupo sobreviviente no roto $SU(N)_{\text{c+s}}$ es una rotación simultánea de color y sabor. Finalmente, en el caso $N_s > N_c$ la teoría tiene una rama de vacíos de Higgs, denotada $\mathcal{N}_{N_c,N_s}$ [27]. Por ejemplo, para teorías abelianas, las cuales admiten cuerdas semilocales [119]-[120], el vacío es simplemente $\mathcal{N}_{1,N_s} = \mathbf{CP}^{N_s-1}$. En general, la rama de Higgs es el grassmanniano de N_c planos en $\mathbf{C}^{N_s}$,

$$\mathcal{N}_{N_c,N_s} = Gr(N_c, N_s) = \frac{SU(N_s)}{U(1) \times SU(N_c) \times SU(N_s - N_c)} \tag{8.42}$$

Éste es un espacio simétrico, y podemos elegir cualquiera de los vacíos para trabajar, sin perdida de generalidad. Acá tomaremos,

$$\begin{array}{ll} q^a_r = \sqrt{\xi}\delta^a_r & \quad r = 1, ..., N_c \\ q^a_r = 0 & \quad r = N_c + 1, ..., N_s \end{array} \tag{8.43}$$

En este vacío, el esquema de rotura de simetría es

$$U(1) \times SU(N_c) \times SU(N_s) \longrightarrow S[U(N_c)_{\text{c+s}} \times U(N_s - N_c)] \tag{8.44}$$

donde $S[\otimes_i U(N_i)]$ significa que eliminamos el factor $U(1)$ diagonal de $\otimes_i U(N_i)$.

Volviendo a las ecuaciones de movimiento, es claro que con el potencial de Higgs ec.(8.37), la condición (8.32) es satisfecha automáticamente por configuraciones de gauge autoduales. Así, las únicas ecuaciones de segundo orden que quedan por resolver son las componentes 00 y 33 de las ecuaciones de Einstein. Ambas llevan a la siguiente expresión para el escalar de Ricci bidimensional r,

$$r = 16\pi G(h^{ij}\mathcal{D}_i\bar{q}^r\mathcal{D}_jq_r - 2V) \tag{8.45}$$

Usando la identidad

$$\begin{aligned} h^{ij}\mathcal{D}_i\bar{q}^r\mathcal{D}_jq_r &= \frac{1}{2}h^{ij}(\mathcal{D}_i\bar{q}^r - i\eta\epsilon_i^{\ l}\mathcal{D}_l\bar{q}^r)(\mathcal{D}_jq_r + i\eta\epsilon_j^{\ k}\mathcal{D}_kq_r) \\ &- i\eta B^A\bar{q}^rT^Aq_r + \eta\frac{1}{\sqrt{2N_c}}B\bar{q}^rq_r + \eta\sqrt{\frac{N_c}{2}}\epsilon^{ik}j_{i;k} \end{aligned} \tag{8.46}$$

y las ecuaciones de autodualidad (8.38), podemos reescribir la ecuación (8.45) para r como,

$$r = 8\pi\sqrt{2N_c}G\eta(\xi B + \epsilon^{ik}j_{i;k}), \tag{8.47}$$

donde para configuraciones autoduales la corriente $U(1)$ toma la forma

$$j_i = -\frac{\eta}{\sqrt{2N_c}}\epsilon_i^{\ j}(\bar{q}^r q_r)_{,j}. \tag{8.48}$$

Ahora, en el sistema de coordenadas conforme r puede expresarse de manera simple,

$$r = \Omega^{-2}\Delta \log \Omega^2 \tag{8.49}$$

donde Δ es el laplaciano del espacio plano, i.e., $\Delta = \delta^{ij}\partial_i\partial_j$. A partir de la ec.(8.47) obtenemos la siguiente ecuación para Ω^2:

$$\Delta(\log \Omega^2) = -8\pi G[\Delta(\bar{q}^r q_r) + \sqrt{2N_c}\eta\xi F_{12}] \tag{8.50}$$

8.2.1. La Cota de Bogomol'nyi

Como es bien sabido, la noción de energía en relatividad general plantea problemas ausentes en el caso de relatividad especial. En el presente caso, ya que estamos considerando configuraciones de materia estáticas y axisimétricas, las cuales tienden asintóticamente a sus valores de vacío, la métrica transversa bidimensional tenderá asintóticamente a la de un cono plano. Luego, podemos tomar al ángulo de déficit total δ como una medida de la energía gravitacional por unidad de longitud (ver [110] y sus referencias). En nuestro caso, el ángulo de déficit δ toma la forma,

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{8\pi G} &= \int d^2x\sqrt{g}T_0^{\ 0} \\ &= \int d^2x\sqrt{h}\left\{\frac{1}{2e_1^2}B^2 + \frac{1}{2e_2^2}B^A B^A - h^{ij}\mathcal{D}_i\bar{q}^r\mathcal{D}_j q_r + V\right\} \end{aligned} \tag{8.51}$$

Por medio de la identidad (8.46) y el método de Bogomol'nyi, la densidad de energía $T_0^{\ 0}$ puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} T_0^{\ 0} &= \frac{1}{2e_1^2}[B - \eta\frac{e_1^2}{\sqrt{2N_c}}(\bar{q}^r q_r - N_c\xi)]^2 + \frac{1}{2e_2^2}[B^A + i\eta e_2^2\bar{q}^r T^A q_r]^2 \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{h}}|\mathcal{D}_i q_r + i\eta\epsilon_i^{\ j}\mathcal{D}_j q_r|^2 - \eta\sqrt{\frac{N_c}{2}}\xi B + \eta\sqrt{\frac{N_c}{2}}\epsilon^{ki}j_{i;k} \end{aligned} \tag{8.52}$$

Así, la integración de (8.52) lleva a una cota de Bogomol'nyi para la energía, i.e.

$$\frac{\delta}{8\pi G} \geq \xi|\Phi|, \tag{8.53}$$

donde Φ es un número topológico definido por

$$\Phi = \sqrt{\frac{N_c}{2}}\int d^2x\sqrt{h}B = \sqrt{\frac{N_c}{2}}\oint A_i d\sigma^i = 2\pi n. \tag{8.54}$$

Como era de esperarse, podemos ver que la cota es saturada justamente por aquellas configuraciones que satisfacen las ecuaciones de autodualidad (8.38).

8.3. Cuerdas No Abelianas Locales - $N_c = N_s = N$

Para encontrar soluciones tipo vórtice no abeliano de las ecuaciones de autodualidad consideramos configuraciones rotacionalmente simétricas a través del ansatz para cuerdas Z_N elementales [28]:

$$
\begin{aligned}
q &= \begin{pmatrix} \varphi(r) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \varphi(r) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \varphi(r) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{in\theta}\tilde{\varphi}(r) \end{pmatrix}, \\
A_i^A T^A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -(N-1) \end{pmatrix} \frac{i}{N}(\partial_i\theta)(f_N(r) - n), \\
A_i &= \sqrt{\frac{2}{N}}(\partial_i\theta)(-f(r) + n),
\end{aligned} \tag{8.55}
$$

donde (r, θ) son las coordenadas polares en el espacio bidimensional transverso.

Insertando este ansatz en las ecuaciones de autodualidad (8.38), llegamos a las ecuaciones diferenciales de primer orden para las funciones perfil

$$
\begin{aligned}
& r\partial_r\varphi + \frac{\eta}{N}(f - f_N)\varphi = 0 \\
& r\partial_r\tilde{\varphi} + \frac{\eta}{N}(f - (1-N)f_N)\tilde{\varphi} = 0 \\
& \frac{1}{r}\partial_r f + \eta\frac{e_1^2}{2}\Omega^2((N-1)\varphi^2 + \tilde{\varphi}^2 - N\xi) = 0 \\
& \frac{1}{r}\partial_r f_N + \eta\frac{e_2^2}{2}\Omega^2(\tilde{\varphi}^2 - \varphi^2) = 0
\end{aligned} \tag{8.56}
$$

Las condiciones de contorno en el origen se obtienen de pedir que los campos sean no singulares. Esto implica que

$$
n\tilde{\varphi}(0) = 0, \quad f_N(0) = n, \quad f(0) = n. \tag{8.57}
$$

En el infinito espacial, las configuraciones deben tender asintóticamente a sus valores de vacío, y luego

$$
\varphi(\infty) = \tilde{\varphi}(\infty) = \sqrt{\xi}, \quad f(\infty) = f_N(\infty) = 0 \tag{8.58}
$$

La primera y segunda ecuación de (8.56) puede ser resuelta para los perfiles de los campos de gauge

$$
\begin{aligned}
f &= \frac{\eta}{2}r\partial_r((1-N)\log\varphi^2 - \log\tilde{\varphi}^2), \\
f_N &= \frac{\eta}{2}r\partial_r(\log\varphi^2 - \log\tilde{\varphi}^2)
\end{aligned} \tag{8.59}
$$

Es claro que $\tilde{\varphi}$ debe tener un cero solo en $r=0$, mientras que φ, que no se enrolla en el infinito, no debería tener ceros. Luego, la ec.(8.59) será válida en todo el plano salvo el origen.

Respecto del campo Ω^2, después de usar las ecs.(8.55) y (8.59), su ecuación de movimiento (8.50) deviene

$$\Delta\{\log\Omega^2 + 8\pi G[(N-1)\varphi^2 + \tilde{\varphi}^2 - \xi\log(\varphi^{2(N-1)}\tilde{\varphi}^2)]\} = 0 \tag{8.60}$$

Para una solución de vórtice de carga $|n|$, $\tilde{\varphi}$ tendrá un comportamiento $\tilde{\varphi}\sim \text{const}\, r^{|n|}$ cuando $r\to 0$. De esto se obtiene que

$$\log\Omega^2 + 8\pi G[(N-1)\varphi^2 + \tilde{\varphi}^2 - \xi\log(\frac{\varphi^{2(N-1)}\tilde{\varphi}^2}{r^{2|n|}})] \tag{8.61}$$

es armónica y acotada, y por lo tanto es constante. En particular, esto implica que el factor conforme tiene el siguiente comportamiento en el infinito

$$\Omega^2 \sim \text{const}\ r^{2(B-1)} \qquad \text{if } r\to\infty, \tag{8.62}$$

donde $B = 1-8\pi|n|G\xi$. Imponiendo que la constante en la ec.(8.62) sea ξ^{B-1}, podemos escribir la forma asintótica de la métrica como

$$ds^2 \sim dt^2 - (dx^3)^2 - (\xi r^2)^{B-1}(dr^2 + r^2 d\theta^2) \tag{8.63}$$

Así, encontramos que la métrica correspondiendo a una única cuerda no abeliana local tiene el mismo comportamiento asintótico que una cuerda abeliana gravitante (dada por la ec.(8.1)). Este comportamiento está caracterizado por el parámetro adimensional $G\xi$, el cual determina cuan fuerte es el acoplamiento gravitacional de la cuerda [104]. Si $G\xi < \frac{1}{8\pi}$ (i.e. $B>0$), la métrica es asintóticamente cónica. Esto puede ser visto fácilmente de considerar una nueva coordenada radial ρ dada por $\sqrt{\xi}\rho = B^{-1}(\sqrt{\xi}r)^B$, que lleva a la forma minkowskiana (8.1) para la métrica asintótica:

$$ds^2 \sim dt^2 - (dx^3)^2 - d\rho^2 - B^2\rho^2 d\theta^2. \tag{8.64}$$

El ángulo de déficit que corresponde a la métrica (8.64) es

$$\delta = 2\pi(1-B) = 16\pi^2|n|G\xi. \tag{8.65}$$

Cuando la escala de rotura de simetría crece, δ se vuelve mayor que 2π, y la imagen de un espacio-tiempo de la cuerda cónico debe ser abandonado. Para una cuerda crítica (con $G\xi = 1/8\pi$ y $\delta = 2\pi$), el espacio bidimensional es como un cilindro en el infinito. Finalmente, las cuerdas supercríticas tienen un ángulo de déficit mayor que 2π, lo que ocurre para $G\xi > 1/8\pi$. Esto significa que en el infinito el espacio-tiempo es como un cono invertido, que se cierra con una singularidad cónica a una distancia propia finita. Aquellas cuerdas que tienen un ángulo de déficit $\delta \geq 2\pi$ son conocidas como cuerdas supermasivas [108]. Debido a la presencia de una singularidad en la métrica, las cuerdas supermasivas son consideradas como de poco interés físico.

Ya que la ecuación de Einstein restante puede ser integrada explícitamente, en este punto quedamos solo con un sistema de ecuaciones acopladas para las funciones perfil del Higgs,

$$\begin{aligned}\Delta\log(\varphi^{2(N-1)}\tilde{\varphi}^2) &= e_1^2\Omega^2((N-1)\varphi^2 + \tilde{\varphi}^2 - N\xi)\\ \Delta\log(\varphi^{-2}\tilde{\varphi}^2) &= e_2^2\Omega^2(\tilde{\varphi}^2 - \varphi^2),\end{aligned} \tag{8.66}$$

donde Ω^2 es determinado a partir de la ec.(8.61). Desafortunadamente, al igual que en el caso plano $G = 0$, no es posible resolver estas ecuaciones analíticamente. Sin embargo, podemos establecer a partir de ec.(8.56) los comportamientos asintóticos de las soluciones cerca de $r = 0$ y para r grande. Cerca del eje polar, los primeros términos del desarrollo en serie de potencias de r son

$$\begin{aligned}
\varphi &\sim \varphi_0 + \frac{\varphi_0}{8N}\left((e_2^2 - e_1^2)\varphi_0^2 + e_1^2 N(\varphi_0^2 - \xi)\right) r^2, \\
\tilde{\varphi} &\sim \tilde{\varphi}_0 r^{|n|}, \\
f &\sim n + \frac{\eta}{4} e_1^2 \Omega_0^2 (\varphi_0^2 - N(\varphi_0^2 - \xi)) r^2, \\
f_N &\sim n + \frac{\eta}{4} e_2^2 \Omega_0^2 \varphi_0^2 r^2, \qquad r \to 0
\end{aligned} \tag{8.67}$$

donde φ_0 y $\tilde{\varphi}_0$ son dos constantes arbitrarias y $\Omega_0^2 = \Omega^2(r = 0)$ puede ser determinado a través de (8.61). Respecto del comportamiento para r grande, las funciones perfil son claramente modificadas por la métrica no trivial. A pesar de esto, pasando a las coordenadas minkowskianas podemos obtener el comportamiento exponencial usual de las cuerdas ANO [25],[26]. Así, usando la coordenada radial ρ definida por $\sqrt{\xi}\rho = B^{-1}(\sqrt{\xi}r)^B$ (para $B > 0$), el comportamiento a grandes distancias resulta ser

$$\begin{aligned}
\varphi &\sim \sqrt{\xi} + \varphi_\infty \rho^{-\frac{1}{2}}(e^{-M_1\rho} - e^{-M_2\rho}), \\
\tilde{\varphi} &\sim \sqrt{\xi} + \varphi_\infty \rho^{-\frac{1}{2}}(e^{-M_1\rho} - (1 - N)e^{-M_2\rho}), \\
f &\sim \varphi_\infty \eta N e_1 B \rho^{\frac{1}{2}} e^{-M_1\rho}, \\
f_N &\sim \varphi_\infty \eta N e_2 B \rho^{\frac{1}{2}} e^{-M_2\rho}, \qquad \rho \to \infty
\end{aligned} \tag{8.68}$$

donde φ_∞ es una constante arbitraria y $M_i = e_i\sqrt{\xi}$ $(i = 1, 2)$. El comportamiento dominante de φ, $\tilde{\varphi}$ viene dado por la mayor exponencial en
(8.68).

Discutamos ahora algunas características del espacio móduli. Mientras que el vacío tiene simetría $SU(N)_{\text{c+s}}$, la solución dada por la ec.(8.55) rompe esta simetría a $U(1) \times SU(N-1)$. Esto significa que existe un conjunto de soluciones con la misma carga topológica parametrizado por el cociente [27],[28]

$$\frac{SU(N)_{\text{c+s}}}{SU(N-1) \times U(1)} \cong \mathbf{CP}^{N-1} \tag{8.69}$$

Así, si suponemos que las coordenadas colectivas del centro de masa están desacopladas, el espacio móduli en el caso de un vórtice de carga unidad toma la forma

$$\mathcal{M} \cong \mathbf{C} \times \mathbf{CP}^{N-1} \tag{8.70}$$

donde $\mathbf{C}$ parametriza el centro de masa de la configuración de vórtice. La presencia de estas coordenadas colectivas orientacionales hace que el vórtice sea genuinamente no abeliano. Podemos hacer explícita la naturaleza no abeliana de la solución (8.55) actuando con el grupo global $SU(N)_{\mathrm{c+s}}$ que preserva el vacío. Para esto, es conveniente primero pasar al gauge singular donde los campos escalares no se enrollan en el infinito, mientras que el flujo se origina en la vecindad del origen. En este gauge, los campos de gauge y Higgs pueden ser escritos como

$$
\begin{aligned}
q &= \mathcal{U}\begin{pmatrix} \varphi(r) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \varphi(r) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varphi(r) & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{\varphi}(r) \end{pmatrix}\mathcal{U}^{-1}, \\
A_i^A T^A &= \mathcal{U}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -(N-1) \end{pmatrix}\mathcal{U}^{-1}\frac{i}{N}(\partial_i\theta)f_N(r), \\
A_i &= -\sqrt{\frac{2}{N}}(\partial_i\theta)f(r),
\end{aligned}
\tag{8.71}
$$

donde $\mathcal{U} \in SU(N)$ parametriza las coordenadas colectivas orientacionales asociadas con la rotación del flujo en $SU(N)$. Repitiendo lo hecho en los capítulos 6 y 7, parametrizamos estas matrices como sigue:

$$
\frac{1}{N}\left\{\mathcal{U}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -(N-1) \end{pmatrix}\mathcal{U}^{-1}\right\}^a_b = -n^a n^*_b + \frac{1}{N}\delta^a_b,
\tag{8.72}
$$

donde n^a es un vector complejo en la representación fundamental de $SU(N)$, y

$$
n^*_a n^a = 1 \qquad a = 1, ..., N
\tag{8.73}
$$

Con esta parametrización, la solución de vórtice (8.71) toma la forma

$$
\begin{aligned}
q^a_b &= \frac{1}{N}(\tilde{\varphi}(r) + (N-1)\varphi(r))\delta^a_b + (\tilde{\varphi}(r) - \varphi(r))\left(n^a n^*_b - \frac{1}{N}\delta^a_b\right) \\
A_i^A (T^A)^a_b &= -i\left(n^a n^*_b - \frac{1}{N}\delta^a_b\right)\partial_i\theta f_N(r) \\
A_i &= -\sqrt{\frac{2}{N}}\partial_i\theta f(r)
\end{aligned}
\tag{8.74}
$$

Vale la pena mencionar que el factor conforme Ω^2, obtenido a partir de la ec.(8.61), resulta independiente de las coordenadas colectivas orientacionales n^a. Este hecho será utilizado más adelante cuando estudiemos la teoría efectiva de bajas energías.

8.4. Cuerdas No Abelianas Semilocales - $N_c = N$, $N_s = N + N_e$

Podemos escribir fácilmente la extensión del ansatz (8.55) para el caso $N_s > N_c$ como sigue

$$
\begin{aligned}
q &= \begin{pmatrix}
\varphi(r) & 0 & \cdots & 0 & 0 & \rho^1_{\ 1}(r) & \cdots & \cdots & \rho^1_{\ N_e}(r) \\
0 & \varphi(r) & \cdots & 0 & 0 & \rho^2_{\ 1}(r) & \cdots & \cdots & \rho^2_{\ N_e}(r) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \varphi(r) & 0 & \vdots & & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & e^{in\theta}\tilde{\varphi}(r) & \rho^N_{\ 1}(r) & \cdots & \cdots & \rho^N_{\ N_e}(r)
\end{pmatrix}, \\
A_i^A T^A &= \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & -(N-1)
\end{pmatrix} \frac{i}{N}(\partial_i\theta)(f_N(r) - n), \\
A_i &= \sqrt{\frac{2}{N}}(\partial_i\theta)(-f(r) + n),
\end{aligned}
\tag{8.75}
$$

Con este ansatz, las ecuaciones de autodualidad (8.31) llevan a las siguientes ecuaciones de primer orden para las funciones perfil

$$
\begin{aligned}
& r\partial_r\varphi + \frac{\eta}{N}(f - f_N)\varphi = 0 \\
& r\partial_r\tilde{\varphi} + \frac{\eta}{N}(f - (1-N)f_N)\tilde{\varphi} = 0 \\
& r\partial_r\rho^a_{\ r} + \frac{\eta}{N}(f - f_N)\rho^a_{\ r} = 0 \\
& r\partial_r\rho^N_{\ r} + \frac{\eta}{N}(f - (1-N)f_N - Nn)\rho^N_{\ r} = 0
\end{aligned}
\tag{8.76}
$$

donde $a = 1, ..., N-1$ y $r = 1, ..., N_e$. Además, necesitamos especificar las condiciones de contorno, las que determinarán las soluciones de estas ecuaciones. No es difícil ver que para

tener campos no singulares que tienden asintóticamente a configuraciones de vacío, las condiciones de contorno para las funciones perfil del campo de Higgs deben ser

$$
\begin{aligned}
& n\tilde{\varphi}(0) = 0, \quad \varphi(\infty) = \tilde{\varphi}(\infty) = \sqrt{\xi}, \\
& \rho^a_{\ r}(\infty) = \rho^N_{\ r}(\infty) = 0.
\end{aligned}
\tag{8.77}
$$

Las ecuaciones para $\rho^a_{\ r}$ y $\rho^N_{\ r}$ pueden ser resueltas en términos de φ y $\tilde{\varphi}$ a través de las relaciones

$$
\rho^a_{\ r}(r) = \chi^a_{\ r}\varphi(r), \qquad \rho^N_{\ r}(r) = \chi_r \frac{\tilde{\varphi}(r)}{r^{|n|}}
\tag{8.78}
$$

donde $\chi^a_{\ r}$ y χ_r ($a = 1, ..., N-1$; $r = 1, ..., N_e$) son parámetros complejos. Ahora, la primera relación en la ec.(8.78) solo puede ser compatible con las condiciones de contorno (8.77) si $\chi^a_{\ r}$, y luego $\rho^a_{\ r}$, son idénticamente cero.

Respecto a los campos de gauge, las ecuaciones para las funciones perfil toman la forma

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r}\partial_r f+\eta\frac{e_1^2}{2}\Omega^2((N-1)\varphi^2+(1+\frac{\bar{\chi}^r\chi_r}{r^{2|n|}})\tilde{\varphi}^2-N\xi)=0\\&\frac{1}{r}\partial_r f_N+\eta\frac{e_2^2}{2}\Omega^2((1+\frac{\bar{\chi}^r\chi_r}{r^{2|n|}})\tilde{\varphi}^2-\varphi^2)=0,\end{aligned}\tag{8.79}$$

las cuales deben ser complementadas con las condiciones de contorno

$$f_N(0)=f(0)=n,\quad f(\infty)=f_N(\infty)=0\tag{8.80}$$

Obtenemos así una familia de soluciones para los campos de Higgs y gauge parametrizada por N_e parámetros complejos χ_r, los cuales, como veremos a continuación, determinan el tamaño y la orientación de las soluciones. Estas configuraciones de cuerdas no son las cuerdas ANO convencionales, sino las cuerdas conocidas como semilocales. Éstas pueden ser consideradas como un híbrido entre una cuerda ANO y un "lump" de modelo sigma. Como queda claro a partir de las ecs.(8.75), (8.76) y (8.79), cuando los parámetros χ_r tienden a cero, reobtenemos las cuerdas no abeliana locales de la sección anterior. Por otro lado, cuando $|\chi_r|$ tiende a infinito, la solución (8.75) deviene un lump de modelo sigma sobre el espacio target $\mathcal{N}_{N,N+N_e}$ (ver debajo). Mientras los vórtices son estables debido a que $\Pi_1(U(N))=\mathbf{Z}$, los lumps lo son por que $\Pi_2(\mathcal{N}_{N,N+N_e})=\mathbf{Z}$.

En lo que concierne a la métrica del espacio-tiempo correspondiendo a estas configuraciones, después de obtener las funciones perfil del campo de gauge f_N y f usando la primera y segunda ecuación de (8.76), la ecuación (8.50) para el factor conforme Ω^2 puede rescribirse como

$$\Delta\{\log\Omega^2+8\pi G[(N-1)\varphi^2+(1+\frac{\bar{\chi}^r\chi_r}{r^{2|n|}})\tilde{\varphi}^2-\xi\log(\varphi^{2(N-1)}\tilde{\varphi}^2)]\}=0\tag{8.81}$$

Siguiendo el mismo razonamiento que en la sección anterior podemos inferir que

$$\log\Omega^2+8\pi G[(N-1)\varphi^2+(1+\frac{\bar{\chi}^r\chi_r}{r^{2|n|}})\tilde{\varphi}^2-\xi\log(\frac{\varphi^{2(N-1)}\tilde{\varphi}^2}{r^{2|n|}})]\tag{8.82}$$

es una constante. Esto lleva al mismo comportamiento en el infinito que en el caso de las cuerdas locales, i.e.

$$\Omega^2\sim\text{const }r^{2(B-1)}\qquad\text{if }r\to\infty,\tag{8.83}$$

con $B=1-8\pi|n|G\xi$. Luego, el análisis del comportamiento de la métrica como una función de $G\xi$ hecho para las cuerdas locales (ver discusión posterior a la ec.(8.62)) es también válido para las cuerdas semilocales.

Al igual que en el caso local, podemos obtener el comportamiento asintótico de los campos de gauge y de Higgs a partir de las ecuaciones de primer orden (8.76) y (8.79). Cerca del eje polar, el comportamiento de las funciones perfil es

$$\begin{aligned}\varphi&\sim\varphi_0+\frac{\varphi_0}{8N}\left((e_2^2-e_1^2)(\varphi_0^2-\bar{\chi}^r\chi_r\tilde{\varphi}_0^2)+e_1^2N(\varphi_0^2-\xi)\right)r^2,\\\tilde{\varphi}&\sim\tilde{\varphi}_0r^{|n|},\\f&\sim n+\frac{\eta}{4}e_1^2\Omega_0^2(\varphi_0^2-\bar{\chi}^r\chi_r\tilde{\varphi}_0^2-N(\varphi_0^2-\xi))r^2,\\f_N&\sim n+\frac{\eta}{4}e_2^2\Omega_0^2(\varphi_0^2-\bar{\chi}^r\chi_r\tilde{\varphi}_0^2)r^2,\qquad r\to0\end{aligned}\tag{8.84}$$

donde φ_0 y $\tilde{\varphi}_0$ son constantes arbitrarias. Para estudiar el comportamiento a grandes distancias es conveniente pasar a coordenadas minkowskianas, de la misma manera que como fue hecho en el caso local. Así, fijando $\sqrt{\xi}\rho = B^{-1}(\sqrt{\xi}r)^B$ (para $B > 0$), la métrica toma la forma asintótica (8.64) y el comportamiento de la función perfil para ρ grande resulta

$$\begin{aligned}
\varphi &\sim \sqrt{\xi}\left(1 + \frac{2n^2(e_1^2 - e_2^2)}{Ne_1^2e_2^2}\xi^{|n|}\bar{\chi}^r\chi_r(B\sqrt{\xi}\rho)^{-\alpha-2}\right), \\
\tilde{\varphi} &\sim \sqrt{\xi}\left(1 - \frac{1}{2}\xi^{|n|}\bar{\chi}^r\chi_r(B\sqrt{\xi}\rho)^{-\alpha} - \frac{2n^2((N-1)e_1^2 + e_2^2)}{Ne_1^2e_2^2}\xi^{|n|}\bar{\chi}^r\chi_r(B\sqrt{\xi}\rho)^{-\alpha-2}\right), \\
f &\sim n\xi^{|n|}\bar{\chi}^r\chi_r(B\sqrt{\xi}\rho)^{-\alpha} - \frac{2\eta(\alpha+2)Bn^2}{e_1^2}\xi^{|n|}\bar{\chi}^r\chi_r(B\sqrt{\xi}\rho)^{-\alpha-2}, \\
f_N &\sim n\xi^{|n|}\bar{\chi}^r\chi_r(B\sqrt{\xi}\rho)^{-\alpha} - \frac{2\eta(\alpha+2)Bn^2}{e_2^2}\xi^{|n|}\bar{\chi}^r\chi_r(B\sqrt{\xi}\rho)^{-\alpha-2}, \qquad \rho \to \infty
\end{aligned} \tag{8.85}$$

donde $\alpha = 2|n|B^{-1}$. El decrecimiento como potencia del campo magnético en el infinito es una diferencia significativa respecto del decaimiento exponencial usual de las cuerdas ANO, el cual está asociado con el confinamiento del flujo magnético [120]. Más aún, las cuerdas semilocales desarrollan coordenadas colectivas adicionales χ_r relacionadas a variaciones ilimitadas de su tamaño transverso. El ancho del tubo de flujo resulta así completamente indeterminado, en vez de ser la longitud de onda Compton de la partícula vectorial como en la cuerda ANO. Esto lleva a un efecto dramático: las cuerdas semilocales, en contradistinción con las cuerdas ANO, no llevan a un confinamiento lineal.

Con el fin de parametrizar la solución de cuerda semilocal (8.75) en términos de las coordenadas colectivas orientacionales, pasamos los campos al gauge singular y luego aplicamos una rotación de color-sabor $SU(N)_{c+s}$. Una vez hecho esto, los campos de gauge y de Higgs pueden ser expresados como

$$\begin{aligned}
q_r^a &= (\tilde{\varphi}(r) - \varphi(r))\left(n^a n_r^* - \frac{1}{N}\delta_r^a\right) \\
&+ \frac{1}{N}(\tilde{\varphi}(r) + (N-1)\varphi(r))\delta_r^a \qquad r = 1, ..., N \\
q_r^a &= \tilde{\varphi}(r)\frac{e^{-in\theta}}{r^{|n|}}e^{i\delta}n^a\chi_r \qquad r = N+1, ..., N+N_e \\
A_i^A(T^A)^a_{\ b} &= -i\left(n^a n_b^* - \frac{1}{N}\delta_b^a\right)\partial_i\theta f_N(r) \\
A_i &= -\sqrt{\frac{2}{N}}\partial_i\theta f(r)
\end{aligned} \tag{8.86}$$

donde usamos la misma parametrización para las matrices $SU(N)_{c+s}$ que en la sección anterior. Así, n^a es un vector complejo en la representación fundamental de $SU(N)$ que satisface

$$n_a^* n^a = 1 \qquad a = 1, ..., N \tag{8.87}$$

Además, la fase δ es una función arbitraria del móduli orientacional, i.e. $\delta = \delta(n, n^*)$. Esta arbitrariedad en la parametrización (8.72) resultará útil cuando estudiemos la acción efectiva de bajas energías.

Podemos ver además que, en el caso de la configuración de vórtice de carga 1, la ec.(8.86) da la solución parametrizada en término de todos los grados de libertad esperados, esto es, $2(N-1)$ coordenadas colectivas orientacionales dadas por n^a y $2N_e$ coordenadas colectivas del tamaño transverso dadas por χ_r (por supuesto, además hay que agregar las dos coordenadas colectivas correspondiendo a la posición del centro de masa).

8.4.1. Lump de Modelo Sigma Grassmanniano

El límite de gran tamaño transverso de la cuerda, la solución (8.75) se aproxima a un instantón del modelo sigma bidimensional sobre la rama de Higgs del vacío $\mathcal{N}_{N,N+N_e} = Gr(N, N+N_e)$, i.e., un lump grassmanniano. El propósito de esta subsección será estudiar con un poco más de detalle esta cuestión. De hecho, como mostraremos a continuación, en el límite de tamaño transverso grande seremos capaces de resolver de forma analítica las ecs.(8.76), (8.79) y (8.82) para los campos de materia y la métrica espacio-temporal, lo que nos permitirá tener una prueba directa de la relación anteriormente enunciada.

Con este fin, será conveniente primero suponer la igualdad de las constantes de acoplamiento, $e_1 = e_2 = e$. Esto simplifica enormemente el problema sin llevar a una pérdida substancial de generalidad. Una vez hecha esta suposición, definimos una nueva función perfil $k(r) = f(r) - f_N(r)$, la cual en adición a φ satisface las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} & r\partial_r\varphi + \frac{\eta}{N}k\varphi = 0 \\ & \frac{1}{r}\partial_r k + \eta\frac{e^2}{2}N\Omega^2(\varphi^2 - \xi) = 0 \end{aligned} \tag{8.88}$$

complementadas por las condiciones de contorno

$$k(0) = 0, \quad k(\infty) = 0, \quad \varphi(\infty) = \sqrt{\xi}. \tag{8.89}$$

Claramente, las soluciones para k y φ son las de vacío, esto es,

$$k(r) \equiv 0, \qquad \varphi(r) \equiv \sqrt{\xi}. \tag{8.90}$$

En lo que respecta al resto de las ecuaciones, luego de usar (8.90) ellas se reducen a

$$\begin{aligned} & r\partial_r\tilde{\varphi} + \eta f\tilde{\varphi} = 0 \\ & \frac{1}{r}\partial_r f + \eta\frac{e^2}{2}\Omega^2((1 + \frac{\bar{\chi}^r\chi_r}{r^{2|n|}})\tilde{\varphi}^2 - \xi) = 0 \\ & \log\Omega^2 + 8\pi G[(1 + \frac{\bar{\chi}^r\chi_r}{r^{2|n|}})\tilde{\varphi}^2 - \xi\log(\frac{\tilde{\varphi}^2}{r^{2|n|}})] = \text{const} \end{aligned} \tag{8.91}$$

con las condiciones de contorno

$$f(0) = n, \quad f(\infty) = 0, \quad \tilde{\varphi}(0) = 0, \quad \tilde{\varphi}(\infty) = \sqrt{\xi}. \tag{8.92}$$

Notar que en el límite de tamaño grande, i.e., $\bar{\chi}^r\chi_r >> (e^2\xi)^{-|n|}$, podemos considerar

$$\frac{\bar{\chi}^r\chi_r r^{2(|n|-1)}}{e^2\xi(r^{2|n|} + \bar{\chi}^r\chi_r)^2} \cong 0. \tag{8.93}$$

Luego, las soluciones de (8.91) tienen la forma

$$\tilde{\varphi} = \sqrt{\xi}\frac{r^{|n|}}{\sqrt{r^{2|n|}+\bar{\chi}^r\chi_r}}, \tag{8.94}$$

$$f = \frac{n\bar{\chi}^r\chi_r}{r^{2|n|}+\bar{\chi}^r\chi_r}, \tag{8.95}$$

$$\Omega^2 = \text{const}(r^{2|n|}+\bar{\chi}^r\chi_r)^{-8\pi G\xi} \tag{8.96}$$

De esta manera, vemos que mientras estas expresiones sean válidas, el campo de Higgs q en la ec.(8.75) toma la forma

$$q = \begin{pmatrix} \sqrt{\xi} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\xi} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\xi} & 0 & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{in\theta}\tilde{\varphi}(r) & \chi_1\frac{\tilde{\varphi}(r)}{r^{|n|}} & \cdots & \cdots & \chi_{N_e}\frac{\tilde{\varphi}(r)}{r^{|n|}} \end{pmatrix}, \tag{8.97}$$

con $\tilde{\varphi}$ dado por la ec.(8.94). Usando esta expresión para q es fácil verificar que la condición de vacío

$$q^a_r\bar{q}^r_b = \xi\delta^a_b. \tag{8.98}$$

se satisface para todo r. Así, el campo de Higgs define un mapa del plano $\mathbf{R}^2$ sobre la variedad de vacío $Gr(N, N+N_e)$. Este mapa es analítico y de grado n, i.e. un lump grassmanniano de carga $|n|$.

8.5. Acción Efectiva para la Dinámica de Bajas Energías de la Cuerda

El conocimiento del espacio móduli de las configuraciones de vórtices es un ingrediente necesario en la aplicación de éstos a distintos problemas físicos, como por ejemplo su empleo en cosmología como cuerdas cósmicas. Como vimos en los capítulos anteriores, la dinámica de bajas energías de los vórtices puede ser descripta por medio de la aproximación geodésica introducida por Manton [121], según la cual la dinámica clásica de los solitones es aproximada por su movimiento geodésico en el espacio de soluciones estáticas/estacionarias. En el caso de soluciones tipo vórtice, el procedimiento seguido en los capítulos 6 y 7 fue suponer que las coordenadas colectivas son funciones de las coordenadas de la hoja de mundo de la cuerda t, x_3 que varían lentamente. Reinsertando el ansatz en la acción original, las coordenadas del móduli devienen así campos de un modelo sigma (1+1)-dimensional sobre la hoja de mundo. Aunque aquí seguiremos estos mismos pasos, la generalización del método de Manton al caso de solitones gravitantes, al momento, no está totalmente bien desarrollada (ver [122] para un tratamiento formal del tema y algunas aplicaciones previas a agujeros negros y lumps en $\mathbf{CP}^1$ en [123]-[126]).

8.5.1. Teoría en la Hoja de Mundo para Cuerdas Locales

En el caso de vórtices locales ($N_s = N_c$), consideramos el ansatz ec.(8.74) y suponemos que el móduli orientacional son funciones lentamente variables de las coordenadas de la hoja de mundo, i.e. $n^a = n^a(t, x^3)$. Sustituyendo la solución (8.74) en la acción (8.4) y realizando la integral sobre el plano (x^1, x^2), finalizamos con un modelo sigma bidimensional para los campos n^a. Ya que n^a parametriza los modos cero de la cuerda, ningún término potencial estará presente en este modelo sigma.

Sin embargo, los parámetros del móduli entran en (8.74) a través de una rotación de color-sabor la cual ahora obtiene una dependencia en las coordenadas t y x^3. Esto lleva a que el ansatz original deba ser complementado agregando componentes A_0 y A_3 del campo de gauge no triviales. Repitiendo lo hecho en el capítulo 6, proponemos

$$A^A_\alpha (T^A)^a_b = (\partial_\alpha n^a n^*_b - n^a \partial_\alpha n^*_b - 2n^a n^*_b (n^* \partial_\alpha n))\rho(r) \qquad \alpha = 0,3 \tag{8.99}$$

donde una nueva función perfil $\rho(r)$ fue introducida, la cual será determinada por su ecuación de movimiento a través de un proceso de minimización.

Dado que el tensor de curvatura del campo de gauge $SU(N)$ toma la forma

$$F^A_{\alpha i}(T^A)^a_b = -(\partial_\alpha n^a n^*_b - n^a \partial_\alpha n^*_b - 2n^a n^*_b (n^* \partial_\alpha n))\partial_i \rho(r) - i(\partial_\alpha n^a n^*_b + n^a \partial_\alpha n^*_b)\partial_i \theta f_N (1-\rho) \tag{8.100}$$

vemos que para tener una contribución finita en la acción, $\rho(r)$ debe satisfacer

$$\rho(0) = 1 \qquad \rho(\infty) = 0 \tag{8.101}$$

Después de insertar el ansatz modificado en la acción (8.4), obtenemos la acción efectiva de bajas energías

$$\mathcal{S}_{eff} = 2\beta \int dt dx^3 (\partial^\alpha n^* \partial_\alpha n - (n^* \partial^\alpha n)(\partial_\alpha n^* n)) \tag{8.102}$$

La constante de acoplamiento β está relacionada al acoplamiento 4-dimensional e_2^2 a través de la relación

$$\beta = \frac{2\pi}{e_2^2} I \tag{8.103}$$

donde I es la integral

$$I = \int_0^\infty r dr [(\partial_r \rho)^2 + \frac{1}{r^2} f_N^2 (1-\rho)^2 + \frac{e_2^2}{2}\Omega^2 (2(\tilde{\varphi} - \varphi)^2 (1-\rho) + (\tilde{\varphi}^2 + \varphi^2)\rho^2)] \tag{8.104}$$

La integral I puede ser vista como una acción para la función perfil ρ. Así, I es extremada por configuraciones ρ satisfaciendo la ecuación de segundo orden

$$-\frac{d^2\rho}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d\rho}{dr} - \frac{1}{r^2} f_N^2 (1-\rho) + \frac{e_2^2}{2}\Omega^2 ((\tilde{\varphi}^2 + \varphi^2)\rho - (\tilde{\varphi} - \varphi)^2) = 0 \tag{8.105}$$

Como fue hecho en el capítulo 6 para el caso de espacio-tiempo plano, usando las ecuaciones de primer orden (8.56) puede mostrarse que la solución de (8.105) viene dada por

$$\rho = 1 - \frac{\tilde{\varphi}}{\varphi} \tag{8.106}$$

Además, esta solución satisface las condiciones de contorno (8.101). Sustituyendo esta solución en la expresión (8.104) para la integral I, puede verificarse que esta integral se reduce a una derivada total con un valor dado por el flujo de la cuerda. Esto es,

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty dr \left[2\partial_r \left(\frac{\tilde{\varphi}}{\varphi} \right) \left(-\eta \frac{\tilde{\varphi}}{\varphi} f_N \right) + \left(1 - \left(\frac{\tilde{\varphi}}{\varphi} \right)^2 \right) \eta \partial_r f_N \right] \\
&= -\eta \left[\left(\frac{\tilde{\varphi}}{\varphi} \right)^2 f_N - f_N \right] \Bigg|_0^\infty = |n|
\end{aligned}
\tag{8.107}
$$

Volviendo a la teoría efectiva para las coordenadas orientacionales dada por la ec.(8.102), esta corresponde a un modelo sigma $\mathbf{CP}^{N-1}$ bidimensional, como ya había sido anticipado mediante argumentos de simetría. Esto puede ser fácilmente verificado a partir de la invariancia la acción (8.102) ante las transformaciones de gauge $U(1)$

$$
n^a \to e^{i\vartheta(t,x^3)} n^a, \qquad n_a^* \to e^{-i\vartheta(t,x^3)} n_a^* \tag{8.108}
$$

y del vínculo $n^a n_a^* = 1$ para los campos. Como fue mostrado en el capítulo 6, el modelo sigma $\mathbf{CP}^{N-1}$ es también la teoría que gobierna la dinámica efectiva de los vórtices en espacio-tiempo plano. Como consecuencia de esto podemos concluir que, a este nivel de aproximación, la dinámica del móduli orientacional de una única cuerda local no parece verse afectada por la presencia del acoplamiento gravitacional. Varias propiedades de la dinámica de la teoría dependen de cómo es el espacio móduli (como, por ejemplo, la probabilidad de reconexión de cuerdas cósmicas en el régimen de bajas energías). Así, si el espacio móduli de un número arbitrario de solitones tampoco cambiara, la física de bajas energías de cuerdas locales gravitantes sería la misma que la correspondiente a cuerdas locales en espacio-tiempo plano. Como veremos a continuación, esta situación cambia considerablemente en el caso de vórtices semilocales.

8.5.2. Teoría en la Hoja de Mundo para Cuerdas Semilocales

Estudiemos el caso $N_s > N_c$. Ahora debemos considerar que tanto el móduli orientacional n^a como el de tamaño χ_r son funciones lentamente variables de las coordenadas de la hoja de mundo de la cuerda t, x^3. Por simplicidad tomaremos iguales a las constantes de acoplamiento de gauge, $e_1 = e_2 = e$. Podemos así tomar $f_N = f$ y $\varphi = \sqrt{\xi}$ en las expresiones de la ec.(8.86) para los campos en el gauge singular. Además, debemos proponer un ansatz para las componentes A_α ($\alpha = 0, 3$) del campo de gauge, por lo que consideraremos la misma expresión (8.99) que en el caso de las cuerdas locales. Respecto de la métrica del espacio-tiempo, debido a la dependencia del factor conforme Ω^2 con el móduli de tamaño χ_r (ver la ec.(8.82)), en el caso de cuerdas semilocales también la métrica deviene dependiente de las coordenadas de la hoja de mundo.

Introduciendo el ansatz (8.86) y (8.99) en la acción (8.4) llegamos a la acción efectiva para las coordenadas del móduli. El lagrangiano correspondiente $\mathcal{L}_{eff}$ puede descomponerse en dos partes,

$$
\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_{\chi,n} + \mathcal{L}_\chi. \tag{8.109}
$$

La primera parte $\mathcal{L}_{\chi,n}$ da la acción efectiva para las coordenadas orientacionales n^a, mientras que la segunda $\mathcal{L}_\chi$ incluye los términos cinéticos del móduli de tamaño χ_r y es independiente de n^a.

Las expresiones para estos lagrangianos son

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\chi,n} &= 2\beta I_0(\partial^\alpha n^*\partial_\alpha n - (n^*\partial^\alpha n)(\partial_\alpha n^* n)) \\
&+ \beta I_1(n^*\partial^\alpha n + i\partial^\alpha\delta)(\partial_\alpha\bar{\chi}^r\chi_r - \bar{\chi}^r\partial_\alpha\chi_r + \bar{\chi}^r\chi_r(n^*\partial_\alpha n + i\partial_\alpha\delta)) \qquad (8.110)\\
\mathcal{L}_\chi &= -\frac{1}{8G}\int_0^\infty rdr\left(\frac{1}{2}\Omega^{-2}\partial^\alpha(\Omega^2)\partial_\alpha(\Omega^2) - 2\partial^\alpha\partial_\alpha(\Omega^2) + \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r(\log\Omega^2))\right) \\
&+ \beta\int_0^\infty rdr\left\{\frac{1}{r^2}\partial^\alpha f\partial_\alpha f + e^2\Omega^2\left[\partial^\alpha\tilde{\varphi}\partial_\alpha\tilde{\varphi} + \frac{1}{r^{2|n|}}\partial^\alpha(\tilde{\varphi}\bar{\chi}^r)\partial_\alpha(\tilde{\varphi}\chi_r)\right]\right. \\
&- \left. e^2\left[\partial_r\tilde{\varphi}\partial_r\tilde{\varphi} + \left(\frac{1}{r}f\tilde{\varphi}\right)^2 + (\partial_r\tilde{\varphi} - |n|\frac{1}{r}\tilde{\varphi})^2\frac{\bar{\chi}^r\chi_r}{r^{2|n|}} + \left(\frac{1}{r}(f-n)\tilde{\varphi}\right)^2\frac{\bar{\chi}^r\chi_r}{r^{2|n|}}\right]\right\} \qquad (8.111)
\end{aligned}$$

donde $\beta = 2\pi/e^2$ y I_i $(i = 0, 1)$ son las integrales dadas por

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^\infty rdr[(\partial_r\rho)^2 + \frac{1}{r^2}f^2(1-\rho)^2 + \frac{e^2}{2}\Omega^2(2(\tilde{\varphi} - \sqrt{\xi})^2(1-\rho) \\
&+ (\tilde{\varphi}^2 + \xi)\rho^2 + \tilde{\varphi}^2\frac{\bar{\chi}^r\chi_r}{r^{2|n|}}(1-\rho)^2] \qquad (8.112)\\
I_1 &= e^2\int_0^\infty rdr\frac{\Omega^2}{r^{2|n|}}\tilde{\varphi}^2 \qquad (8.113)
\end{aligned}$$

El primer término en $\mathcal{L}_{\chi,n}$ coincide con el lagrangiano de un modelo sigma $\mathbf{CP}^{N-1}$ bidimensional para los campos n^a multiplicado por la integral I_0, que depende del móduli de tamaño χ_r. Por otro lado, el segundo término en $\mathcal{L}_{\chi,n}$ incluye términos cinéticos que mezclan el móduli orientacional n^a y el de tamaño χ_r. Estos términos son similares a los términos encontrados en [127]. En nuestro caso, el segundo término en $\mathcal{L}_{\chi,n}$ puede ser eliminado eligiendo la fase δ tal que

$$\partial_\alpha\delta = in^*\partial_\alpha n. \qquad (8.114)$$

Con respecto a $\mathcal{L}_\chi$, la primera línea en (8.111) representa la contribución del término de Hilbert-Einstein en la acción (8.4), mientras que la segunda y tercera línea vienen del sector de Yang-Mills-Higgs. Es claro que en la primera línea en $\mathcal{L}_\chi$ sólo el primer término debe ser considerado, ya que el resto son derivadas totales. Además, el factor conforme Ω^2 puede ser puesto en término de $\tilde{\varphi}$ y χ_r simplemente usando la relación (8.82).

Como hicimos en el caso $N_s = N_c$, consideramos la integral I_0 como una acción para la función perfil ρ. Así, a partir de I_0 obtenemos la ecuación de segundo orden que debe satisfacer la función ρ

$$-\frac{d^2\rho}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d\rho}{dr} - \frac{1}{r^2}f^2(1-\rho) + \frac{e^2}{2}\Omega^2((\tilde{\varphi}^2+\xi)\rho - (\tilde{\varphi}-\sqrt{\xi})^2 - \tilde{\varphi}^2\frac{\bar{\chi}^r\chi_r}{r^{2|n|}}(1-\rho)) = 0 \qquad (8.115)$$

con las condiciones de contorno $\rho(0) = 1$, $\rho(\infty) = 0$. Esta ecuación es resuelta por

$$\rho = 1 - \frac{\tilde{\varphi}}{\sqrt{\xi}} \qquad (8.116)$$

como puede verificarse usando las ecuaciones de primer orden (8.76) y (8.79) para las funciones perfil. Sustituyendo esta solución en I_0, encontramos que la integral se reduce a

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^\infty dr \left[2\partial_r\left(\frac{\tilde{\varphi}}{\sqrt{\xi}}\right)\left(-\eta\frac{\tilde{\varphi}}{\sqrt{\xi}}f\right) + \left(1-\frac{\tilde{\varphi}^2}{\xi}\right)\eta\partial_r f + r\frac{e^2}{2}\Omega^2\frac{\bar{\chi}^r\chi_r}{r^{2|n|}}\tilde{\varphi}^2\right] \\ &= |n| + \frac{e^2}{2}\int_0^\infty r dr \Omega^2 \frac{\bar{\chi}^r\chi_r}{r^{2|n|}}\tilde{\varphi}^2 \end{aligned} \tag{8.117}$$

Usando esta última expresión para I_0 y la fase δ dada por la ec.(8.114), el lagrangiano $\mathcal{L}_{\chi,n}$ toma una forma más simple dada por

$$\mathcal{L}_{\chi,n} = 2\beta(|n| + \frac{e^2}{2}\int_0^\infty r dr \Omega^2 \frac{\bar{\chi}^r\chi_r}{r^{2|n|}}\tilde{\varphi}^2)(\partial^\alpha n^*\partial_\alpha n - (n^*\partial^\alpha n)(\partial_\alpha n^* n)) \tag{8.118}$$

A esta altura ya tenemos las herramientas para encarar una cuestión de gran importancia en lo que respecta a cuerdas semilocales, que es la normalizabilidad de los modos cero. El espacio móduli de cuerdas no abelianas semilocales en espacio plano ($\Omega^2 = 1$) fue obtenido recientemente en [127]-[129], mediante el procedimiento de Manton. A pesar de algunas diferencias entre los resultados de estos trabajos, en todos ellos se encuentra que algunos de los modos cero orientacional y de tamaño son no normalizables. De hecho, ellos encuentran que para un único vórtice semilocal, todos los móduli son no normalizables. La no normalizabilidad de un modo cero se manifiesta a través de un término cinético infinito para este modo, producido por divergencias logarítmicas en el infrarrojo. Como consecuencia de esto, el correspondiente móduli resulta estar "congelado" en esta aproximación, ya que cualquier cambio en éste está impedido por una inercia infinita. Por otro lado, se encontró en el caso de lumps $\mathbf{CP}^1$ auto-gravitantes [126] que la deformación del espacio-tiempo introducida por la gravedad es suficiente para remover la singularidad. Podría esperarse, luego, que en el caso de cuerdas semilocales, el espacio móduli previamente congelado se descongele una vez que los efectos gravitacionales son tomados en cuenta. De hecho, se puede ver fácilmente que esto es lo que ocurre simplemente usando las expansiones asintóticas en el infrarrojo obtenidas de las ecs.(8.83) y (8.85),

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} &\sim \sqrt{\xi} - \frac{\sqrt{\xi}}{2}\frac{\bar{\chi}^r\chi_r}{r^{2|n|}} \\ f &\sim n\frac{\bar{\chi}^r\chi_r}{r^{2|n|}} \\ \Omega^2 &\sim \text{const } r^{2(B-1)} \qquad\qquad \text{if } r\to\infty \end{aligned} \tag{8.119}$$

donde $B = 1 - 8\pi|n|G\xi$ (notar que estas expansiones son válidas si $B > 0$). Así, introduciendo estas expansiones en las expresiones (8.111) y (8.118) para los lagrangianos efectivos, se puede verificar fácilmente que todos los modos son normalizables cuando las cuerdas son acopladas a gravedad.

Volviendo a $\mathcal{L}_\chi$, para poder escribir este lagrangiano como un modelo sigma sería necesario poner a la expresión (8.111) explícitamente en términos de los campos χ_r. Desafortunadamente, esto no es posible ya que no conocemos como dependen las funciones perfil f y $\tilde{\varphi}$ del móduli de tamaño. Lo que podemos hacer, sin embargo, es utilizar el límite de gran tamaño transverso

$$\bar{\chi}^r\chi_r m_W^2 >> 1 \tag{8.120}$$

(donde tomamos el enrollamiento n igual a 1 y llamamos $m_W^2 = e^2\xi$). Como fue mostrado previamente, en este límite tenemos soluciones analíticas explícitas dadas por las ecs.(8.94)-(8.96), no solo para los campos de materia sino también para la métrica espacio-temporal. Respecto de este último campo, aquí elegiremos a la constante arbitraria en (8.96) tal que el factor conforme tome la forma

$$\Omega^2 = \frac{1}{(m_W^2(r^2 + \bar{\chi}^r\chi_r))^{8\pi G\xi}} \tag{8.121}$$

Es conveniente recordar que el comportamiento de la correspondiente métrica bidimensional $h_{ij} = \Omega^2\delta_{ij}$ depende del parámetro $G\xi$ (o, equivalentemente, del valor del ángulo de déficit δ). Si $G\xi < 1/8\pi$, esta métrica es asintóticamente cónica, con un ángulo de déficit $\delta = 16\pi^2 G\xi$. Si $G\xi = 1/8\pi$, el ángulo de déficit es 2π y luego el espacio transverso es asintóticamente cilíndrico. Finalmente, un ángulo de déficit mayor que 2π, correspondiendo a $G\xi > 1/8\pi$, significa que el infinito espacial es como un cono invertido, con una singularidad cónica a una distancia propia finita.

Así, introduciendo las expresiones (8.94)-(8.96) para las funciones perfil en (8.111) y (8.118), obtenemos los siguientes lagrangianos efectivos $\mathcal{L}_\chi$ y $\mathcal{L}_{\chi,n}$:

$$\begin{aligned}
\beta^{-1}\mathcal{L}_\chi &= \left(\frac{1}{12} - \frac{(9-B)(m_W^2\bar{\chi}^r\chi_r)^B}{8(2-B)}\right)\frac{\partial^\alpha(\bar{\chi}^s\chi_s)\partial_\alpha(\bar{\chi}^t\chi_t)}{(\bar{\chi}^u\chi_u)^2} + \frac{(m_W^2\bar{\chi}^r\chi_r)^B}{1-B}\frac{\partial^\alpha\bar{\chi}^s\partial_\alpha\chi_s}{\bar{\chi}^t\chi_t} - m_W^2 \\
\beta^{-1}\mathcal{L}_{\chi,n} &= 2\left(1 + \frac{(m_W^2\bar{\chi}^r\chi_r)^B}{4(1-B)}\right)(\partial^\alpha n^*\partial_\alpha n - (n^*\partial^\alpha n)(\partial_\alpha n^* n))
\end{aligned} \tag{8.122}$$

Finalmente, dependiendo otra vez del valor del parámetro $G\xi$, tres teorías diferentes resultan de (8.122) para la dinámica efectiva del vórtice en el límite de tamaño transverso grande:

- Primer caso: $0 < B < 1$ o $G\xi < \frac{1}{8\pi}$, métrica asintótica cónica

$$\begin{aligned}
\beta^{-1}\mathcal{L}_{eff} &= \frac{(m_W^2\bar{\chi}^r\chi_r)^B}{1-B}\left(\frac{\partial^\alpha\bar{\chi}^s\partial_\alpha\chi_s}{\bar{\chi}^t\chi_t} - \frac{(1-B)(9-B)}{8(2-B)}\frac{\partial^\alpha(\bar{\chi}^s\chi_s)\partial_\alpha(\bar{\chi}^t\chi_t)}{(\bar{\chi}^u\chi_u)^2}\right. \\
&+ \left.\frac{1}{2}(\partial^\alpha n^*\partial_\alpha n - (n^*\partial^\alpha n)(\partial_\alpha n^* n))\right)
\end{aligned} \tag{8.123}$$

- Segundo caso: $B = 0$ o $G\xi = \frac{1}{8\pi}$, métrica asintótica cilíndrica

$$\beta^{-1}\mathcal{L}_{eff} = \frac{\partial^\alpha\bar{\chi}^r\partial_\alpha\chi_r}{\bar{\chi}^s\chi_s} - \frac{23}{48}\frac{\partial^\alpha(\bar{\chi}^r\chi_r)\partial_\alpha(\bar{\chi}^s\chi_s)}{(\bar{\chi}^t\chi_t)^2} + \frac{5}{2}(\partial^\alpha n^*\partial_\alpha n - (n^*\partial^\alpha n)(\partial_\alpha n^* n)) \tag{8.124}$$

- Tercer caso: $B < 0$ o $G\xi > \frac{1}{8\pi}$, métrica asintótica cónicamente singular

$$\beta^{-1}\mathcal{L}_{eff} = \frac{1}{12}\frac{\partial^\alpha(\bar{\chi}^r\chi_r)\partial_\alpha(\bar{\chi}^s\chi_s)}{(\bar{\chi}^t\chi_t)^2} + 2(\partial^\alpha n^*\partial_\alpha n - (n^*\partial^\alpha n)(\partial_\alpha n^* n)) \tag{8.125}$$

Es interesante notar que para cuerdas supermasivas ($G\xi \geq 1/8\pi$) la dinámica de los modos orientacionales se desacopla de la de los modos de tamaño. Más aún, el lagrangiano para el móduli orientacional de cuerdas semilocales supermasivas corresponde a aquel del modelo sigma $\mathbf{CP}^{N-1}$ bidimensional, al igual que en el caso de cuerdas locales.

Por otro lado, el caso de mayor relevancia resulta ser el primero, con $G\xi < 1/8\pi$, ya que éste incluye el rango de aplicaciones físicas (e.g., los datos cosmológicos dan un límite superior $G\xi < 10^{-6}$ para cuerdas cósmicas -ver [130] y sus referencias-). En este caso, el lagrangiano (8.123) presenta términos que mezclan los móduli de tamaño y orientacionales, lo que lleva a una teoría mucho más compleja. Es de esperar que aparezcan este tipo de términos en el lagrangiano debido a que nuestra teoría efectiva debe ser considerada una deformación de la teoría obtenida en espacio-tiempo plano en [128],[127].

A partir de las expresiones (8.123)-(8.125) es claro que en el límite de tamaño transverso grande todos los modos son normalizables, para cualquier valor del parámetro B. Esto podría tener varias consecuencias en la física de bajas energías de la teoría. Si un efecto de descongelamiento similar toma lugar también en el espacio móduli de un número arbitrario de cuerdas acopladas a gravedad, varios análisis previos de la dinámica de cuerdas (como aquellos hechos en [131],[129], donde fue estudiada la reconexión de cuerdas cósmicas no abelianas), podrían verse afectados considerablemente. Vemos así que, contrario a lo que pasa para una única cuerda local, la presencia de gravedad produce importantes cambios en el espacio móduli de las cuerdas semilocales, los cuales pueden ser relevantes para las propiedades físicas de este tipo de defecto topológico.

8.6. Resumen y Discusión

El principal resultado obtenido en este capítulo fue la construcción de un nuevo tipo de soluciones de cuerdas auto-gravitantes, caracterizadas principalmente por ser genuinamente no abelianas. Para esto consideramos una teoría de Einstein-Yang-Mills-Higgs en cuatro dimensiones con grupo de gauge $G = U(1) \times SU(N_c)$, N_f campos escalares en la representación fundamental de G y un potencial de Higgs a priori indeterminado. Guiados por resultados obtenidos en el caso abelianos [109]-[110], propusimos un ansatz para la métrica del espacio-tiempo, el cual nos permitió encontrar ecuaciones de Bogomol'nyi de primer orden. Además, la consistencia del procedimiento fijó el potencial de Higgs a tener la forma cuártica dada por la ecuación (8.37). El potencial resultante lleva a un patrón de rotura de simetría que contiene un grupo global no roto $SU(N)_{\mathrm{s+c}}$. Como vimos en los capítulos precedentes, esta propiedad del potencial es necesaria para poder encontrar soluciones de cuerda que tengan un espacio móduli orientacional.

Para resolver las ecuaciones de Bogomol'nyi propusimos un ansatz rotacionalmente simétrico, similar al utilizado en los capítulos anteriores para obtener las cuerdas Z_N elementales. En el caso $N_f = N_c$ mostramos que este ansatz lleva a cuerdas locales no abelianas auto-gravitantes. El carácter no abeliano resulta evidente a partir de la existencia de un conjunto de coordenadas colectivas orientacionales que parametrizan la solución. Con respecto al caso $N_f > N_c$, una generalización del ansatz anterior nos permitió construir cuerdas semilocales no abelianas auto-gravitantes. En este caso, las cuerdas semilocales adquieren, además de los grados de libertad orientacionales, nuevas coordenadas colectivas relacionadas con variaciones del tamaño transverso. En el límite de gran tamaño transverso fuimos capaces de encontrar soluciones analíticas explícitas, tanto para los campos de materia como para la métrica del espacio-tiempo. Dichas soluciones nos permitieron mostrar la relación existente entre el vórtice semilocal y el lump del modelo sigma grassmanniano.

Finalmente, fueron obtenidas las acciones efectivas sobre la hoja de mundo de la cuerda para las coordenadas del móduli. En el caso de cuerdas locales, la dinámica del móduli orientacional resultó ser la misma que la correspondiente al espacio-tiempo plano, esto es, la dada por el modelo sigma $\mathbf{CP}^{N-1}$ bidimensional. Por el contrario, cuando consideramos cuerdas semilocales, los efectos gravitacionales ya aparecen a nivel de la teoría de bajas energías, cambiando radicalmente la dinámica del móduli. Encontramos que la gravedad altera completamente la situción correspondiente a $G = 0$, ya que, sorprendentemente, todos los modos orientacionales y de tamaño que estaban "congelados" en espacio-tiempo plano devienen normalizables cuando las cuerdas son acopladas a gravedad.

Capítulo 9

Conclusiones

Presentamos aquí el conjunto de conclusiones a las que llegamos en los capítulos previos, sobre los trabajos originales que contituyen esta tesis, de manera de ponerlos en perspectiva y señalar además líneas de posibles trabajos futuros que se dejan abiertas.

Nuestro trabajo tuvo por marco la supersimetría y su realización en teorías de campos. En particular, hemos estudiado en profundidad dos aspectos de las teorías de campos supersimétrica que han despertado un notable interés en los últimos 5 años, a saber: los superespacios no(anti)conmutativos y las configuraciones BPS-saturadas del tipo cuerdas no abelianas.

En lo que concierne a los superespacios NAC, un aporte importante de esta tesis fue el estudio, en el capítulo 4, de deformaciones dependientes de la posición espacio-temporal, tanto en el contexto de teorías de campos como en el de teorías de cuerdas. Comenzamos analizando la posibilidad de definir teorías de campos (de gauge) sobre tales superespacios deformados. Nuestras investigaciones estuvieron motivadas por una interesante observación hecha por Shifman y Gorsky en [64], en donde relacionan la deformación de las coordenadas espinoriales del superespacio con la degeneración espectral de las teorías ordinarias de Yang-Mills con $\mathcal{N} = 1$ supersimetría. A partir de esta relación, los autores mencionados conjeturaron que la supersimetría $\mathcal{N} = \frac{1}{2}$ podría ser definida para un parámetro $C^{\alpha\beta}$ dependiente de las cooordenadas del espacio-tiempo. Ya que hasta entonces solo el caso $C^{\alpha\beta}$ constante había sido considerado, analizar este nuevo tipo de deformaciones es importante debido a la relación que existe entre $C^{\alpha\beta}$ y el tensor de campo del gravifotón.

En el caso de la geometría no conmutativa ordinaria, la implementación de un producto estrella asociativo cuando el parámetro de la deformación $\Theta^{\mu\nu}(x)$ depende de las coordenadas es extremadamente complicada [58] (ver también [132],[133] y sus referencias). En contraste, la deformación no(anti)conmutativa del superespacio $\mathcal{N} = 1$ que posee coordenadas espinoriales θ^α satisfaciendo

$$\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = C^{\alpha\beta}(y) \tag{9.1}$$

(donde $C^{\alpha\beta}$ es una función de las coordenadas quirales y^μ) y el resto de las supercoordenadas, y^μ y $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$, permaneciendo (anti)conmutantes puede obtenerse de manera natural y simple a partir de un simple producto Moyal (dado por la ec.(4.4)), de manera que la asociatividad y otras propiedades básicas puedan ser preservadas.

Los resultados obtenidos muestran que la subálgebra generada por Q_α sobrevive a la deformación y luego, al igual que en el caso de $C^{\alpha\beta}$ constante, es posible definir una supersimetría $\mathcal{N} = \frac{1}{2}$. Mostramos que la multiplicación de supercampos quirales es igual al caso de deformaciones constantes, mientras que el caso de supercampos quirales es más complejo debido a que la regla de Leibnitz para la derivación de un producto deja de ser válida. Al estudiar el multiplete vectorial, encontramos la sugerente condición

$$\partial_\mu C^{\mu\nu} = 0, \tag{9.2}$$

que debe ser satisfecha por el parámetro de la deformación para lograr que supercampos de curvatura transformen de manera covariante de gauge.

Con todos estos ingredientes, construimos el lagrangiano de QCD con $\mathcal{N} = \frac{1}{2}$ supersimetrías y el parámetro de la deformación $C^{\alpha\beta}$ dependiente de la posición. En base a la expresión en campos componentes de este último modelo discutimos los efectos de la deformación. En particular, estudiando la anomalía Konishi confirmamos la conjetura hecha en [64] de que la contribución anómala al conmutador que lleva a la condensación de gluinos tiene la misma forma que en el superespacio ordinario.

Al respecto, quedan por cubrir varios asuntos interesantes relacionados con nuestro trabajo. En particular, una cuestion importante que resta por analizar es ver si términos anómalos como aquellos presentes en (4.53) aparecen a nivel cuantico en los conmutadores de la ec.(4.49). Otra interesante línea de investigación dentro del marco de la teoría de campos es el estudio de las correcciones introducidas por la deformación dependiente de las coordenadas a las ecuaciones BPS o de auto-dualidad. Dichas correcciones fueron analizadas anteriormente para instantones [11],[134]-[136], monopolos [137] y lumps en modelos sigma [138], pero únicamente en el caso de deformaciones constantes.

El paso siguiente fue investigar si tales deformaciones dependientes de la posición podían tener su origen en la teoría de cuerdas. Para llevar a cabo dicho análisis fue necesario utilizar el formalismo híbrido de cuantización de la teoría de cuerdas, que permite calcular los propagadores para las coordenadas del superespacio, y a partir de ellos inferir el álgebra de las supercoordenadas. Más en detalle, comenzando con el modelo de supercuerdas tipo II definido sobre $\mathbb{R}^{2,2} \times CY_6$ en presencia de un campo de fondo de gravifotón autodual lineal fuimos capaces de construir un superespacio $\mathcal{N} = 1$, $d = 2{+}2$ deformado de manera que el álgebra de las supercoordenadas coincidía exactamente con la deformación considerada al comienzo del capítulo.

Además, encontramos que sigue siendo válida la relación de proporcionalidad entre el parámetro de la deformación $C^{\alpha\beta}$ y el tensor de campo del gravifotón $F^{\alpha\beta}$, $C^{\alpha\beta}(y) = \alpha'^2 F^{\alpha\beta}(y)$. Esta relación permitió entender el origen de la ecuación diferencial (9.2), que es necesaria para definir de manera consistente teorías de super Yang-Mills en el superespacio deformado. En el marco de la teoría de cuerdas, dicha ecuación no es más que la ecuación de movimiento del campo de gravifotón que se deriva de la teoría de supergravedad.

Es importante aclarar que los resultados anteriores fueron obtenidos al orden más bajo en α'. Para extender su validez a todos los ordenes es necesario estudiar la invarianza conforme de la teoría definida por el lagrangiano (4.55). No es difícil ver que la invarianza conforme se mantiene a todos los ordenes en α'. De hecho, nuestra elección del campo de fondo es independiente de las coordenadas nulas V_1 y V_2 (o, alternativamente, U_1 y U_2). Luego, cuando separamos los campos U_i de la forma $U_i = U_i^b + U_i^c$, donde U_i^b es un background clásico y U_i^c son las fluctuaciones cuánticas, esta última no posee términos con los que contraerse y, por lo tanto, no contribuye a la acción efectiva. Esto nos permite fijar $U_i = U_i^b$, lo que deja al lagrangiano (4.55) cuadrático en los campos cuánticos. Es directo verificar que para este lagrangiano cuadrático la anomalía conforme es nula.

Volviendo a la superálgebra deformada que obtuvimos, vale la pena realizar algunos comentarios. Primero, es interesante notar que este álgebra de las supercoordenadas implica que las coordenadas bosónicas $x = y - i\theta\sigma\bar{\theta}$ son no conmutativas, y el parámetro de la correspondiente deformación también depende de las coordenadas espacio-temporales. Por otro lado, la deformación resultante puede ser fácilmente generalizada. De hecho, como fue mostrado en [16], puede obtenerse un conmutador no nulo entre las coordenadas bosónicas quirales y al introducir una 2 forma B NS-NS no nula, mientras que un resultado similar para el conmutador $y-\theta$ se obtiene a través del gravitini Ψ. Finalmente, otro hecho interesante es que la dependencia lineal del parámeto C con las coordenadas del espacio-tiempo es muy similar a una vieja propuesta de Schwarz y van Nieuwenhuizen [8], donde analizan una posible subestructura del espacio-tiempo a través de la relación $\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = \gamma_\mu^{\alpha\beta} x^\mu$.

Siguiendo con el estudio de superespacios no(anti)conmutativos, en el quinto capítulo de esta tesis analizamos deformaciones NAC del superespacio $d = 1 + 0$ $\mathcal{N} = 2$ y estudiamos cómo definir sobre éste modelos de Mecánica Cuántica. En particular, el énfasis fue puesto en la determinación de cuántas supercargas resultaban rotas como consecuencia de la deformación NAC.

Comenzando con una deformación general del álgebra de las coordenadas fermiónicas del superespacio y trabajando en la base quiral, encontramos que la mitad del álgebra de supersimetría original (correspondiendo a la supercarga Q) puede ser preservada, de igual manera a lo que ocurre en teorías de campos NAC. Utilizamos un producto Moyal adecuado para implementar la deformación. Mediante este producto definimos la teoría SUSY $\mathcal{N} = 2$ deformada, expresada en términos del supermultiplete $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$ y con un superpotencial genérico. La introducción de este potencial fue lograda gracias al uso de un resultado notable (ver ec.(5.18)), hallado en el contexto de modelos sigma bidimensionales NAC-deformados, que permitió obtener una expresión cerrada para el superpotencial deformado. De esta manera encontramos que el lagrangiano resultante toma la misma forma que el original no deformado, pero con el superpotencial reemplazado por un superpotencial efectivo. Por su parte, este superpotencial efectivo se obtiene promediando el valor del superpotencial original en el intervalo $(\phi - cF/2, \phi + cF/2)$, donde c está relacionado con los parámetros de la deformación a través de la fórmula (5.19). Como consecuencia, el superpotencial NAC-deformado depende no solo de ϕ, sino también de F.

En lo que respecta a las supersimetrías del modelo deformado, la expresión en término de los campos componentes para la carga $\mathcal{Q}$ sobreviviente fue fácilmente hallada mediante el uso del operador diferencial correspondiente. Sorprendentemente, encontramos además una segunda carga $\bar{\mathcal{Q}}$ utilizando el hecho de que el hamiltoniano aún en el caso deformado es $\mathcal{Q}$-exacto. Esta carga $\bar{\mathcal{Q}}$, la cual está conservada y es nilpotente, define junto con $\mathcal{Q}$ una realización no lineal del álgebra de supersimetría $\mathcal{N}=2$:

$$\{\mathcal{Q},\bar{\mathcal{Q}}\}_{\mathrm{P}}=\mathcal{H}, \qquad \{\mathcal{Q},\mathcal{Q}\}_{\mathrm{P}}=0, \qquad \{\bar{\mathcal{Q}},\bar{\mathcal{Q}}\}_{\mathrm{P}}=0 \tag{9.3}$$

Como resultado de esto, encontramos el inesperado resultado de que (al menos clásicamente) el modelo deformado tiene tantas supercargas conservadas como el no deformado.

Seguidamente analizamos la conservación de estas supercargas en la teoría cuántica y estudiamos en que casos ellas estaban espontáneamente rotas. El hecho de que el hamiltoniano era, en apariencia, no hermítico dificultó el análisis debido a que un hamiltoniano no hermítico lleva a supercargas no hermíticas. A pesar de esto, fuimos capaces de encontrar que el índice de Witten de la teoría no se ve afectado por la deformación en aquellos casos en los que la teoría original no deformada es supersimétrica. Este resultado nos permitió determinar la diferencia entre el número de estados bosónicos y fermiónicos aniquilados por la supercarga, y luego saber en qué casos la supercarga no está espontáneamente rota

Finalmente, formulamos la teoría deformada en términos del supermultiplete $(\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{0})$, o sea, mediante el uso de supercampos quirales complejos en vez de supercampos reales. En este caso, el requerimiento de que el producto Moyal preserve la condición de quiralidad impone vínculos sobre los tipos posibles de deformaciones. De hecho, estos vínculos resultan ser demasiado restrictivos, ya que la acción deformada resultante toma la misma forma que la no deformada.

Nuestro trabajo sugiere que las teorías de campos NAC podrían tener más supersimetrías que la cantidad usualmente esperada a partir de la rotura del superálgebra. Sería interesante, con vistas a futuras investigaciones, obtener un entendimiento más profundo de esta importante cuestión. Al respecto, cabe mencionar además la publicación de Ivanov y Smilga [78], en la que mostraron, basándose en nuestro trabajo [39], que el hamiltoniano deformado (5.23), a pesar de ser aparentemente complejo, posee un espectro real. Esto puede ser visto mediante la construcción de un operador R tal que el hamiltoniano conjugado $\tilde{\mathcal{H}}=e^R\mathcal{H}e^{-R}$ sea manifiestamente autoadjunto. En el caso del modelo de Mecánica Cuántica NAC, fue mostrado en [78] que la R-conjugación también lleva a supercargas rotadas $e^R\mathcal{Q}e^{-R}$ y $e^R\bar{\mathcal{Q}}e^{-R}$ que son hermíticas conjugadas entre sí.

La Mecánica Cuántica no(anti)conmutativa es un tema de mucho interés también por su conección con los modelos sigma no lineales. Es sabido que la adición de más estructura al superespacio por medio de deformaciones NAC lleva a nuevas deformaciones en geometría compleja, cuyo significado geométrico todavía no es entendido [139]. El estudio de modelos sigma no lineales unidimensionales, debido a su mayor simplicidad, puede resultar útil en este contexto. Finalmente, de similar manera a lo que ocurre con la Mecánica Cuántica no conmutativa, la MC NAC puede tener aplicaciones en problemas de materia condensada. Por ejemplo, fue mostrado en [140] que en modelos de supermatrices aparecen como soluciones clásicas superesferas difusas, y sus fluctuaciones dan origen a teorías de campos NAC. También fueron reportadas en [141],[142] interesantes relaciones entre los niveles más bajos de Landau y la geometría NAC. Según estos desarrollos recientes, los sistemas Hall cuánticos supersimétricos se muestran como el "set-up" físico más simple de la geometría NAC.

Los últimos dos capítulos fueron dedicados a presentar el otro aspecto de las teorías de campos supersimétricas investigado en esta tesis. En ellos expusimos los resultados de nuestras investigaciones sobre las configuraciones clásicas de campos BPS-saturadas conocidas como cuerdas no abelianas. Analizamos su existencia en contextos previamente no considerados, a la vez que para cada caso estudiamos su correspondiente dinámica de bajas energías.

Más en detalle, los resultados originales mostrados en el capítulo 7 tuvieron como principal fin la construcción y posterior análisis de este nuevo tipo de cuerda (vórtice) genuinamente no abeliana en teorías de Chern-Simons en espacio-tiempos tridimensionales. Para lograr esto adaptamos resultados obtenidos recientemente en el contexto de teorías de Yang-Mills en $d = 4$ dimensiones, donde fueron encontradas (ver capítulo 6) cuerdas no abelianas con varias características comunes a las cuerdas de QCD. Comenzamos el capítulo con la construcción de la teoría de Chern-Simons $\mathcal{N} = 2$ supersimétrica con grupo de gauge $U(N)$ acoplada a N multipletes escalares. Para esta teoría encontramos una cota de Bogomol'nyi para la energía, a partir de la cual arrivamos al conjunto de ecuaciones de autodualidad de primer orden. Para resolver las ecuaciones de autodualidad propusimos un ansatz particular rotacionalmente simétrico. Con este ansatz, mostramos que las ecuaciones diferenciales para las funciones perfil toman la misma forma que las correspondientes al caso abeliano. Sin embargo, gracias a la presencia de rotaciones de sabor-color que dejan el vacío asimétrico invariante, encontramos que la solución propuesta tiene un espacio móduli orientacional no trivial. Mediante la aplicación de esta rotación de sabor-color fuimos capaces de expresar a los campos de gauge y de Higgs en términos de las coordenadas colectivas orientacionales.

Otro de los resultados relevantes dado en este capítulo fue la obtención de la teoría de bajas energías para el espacio móduli orientacional. Esto fue logrado suponiendo a las coordenadas del móduli como funciones lentamente variables de la línea de mundo del vórtice y luego, sustituyendo la configuración resultante en el lagrangiano original. La teoría efectiva así obtenida corresponde al modelo sigma $\mathbf{CP}^{N-1}$ unidimensional. Ya que los vórtices autoduales son 1/2-BPS, la extensión supersimétrica del modelo corresponde al modelo sigma $\mathbf{CP}^{N-1}$ $\mathcal{N} = 2$ supersimétrico. Para completar el análisis de la teoría efectiva supersimétrica llevamos a cabo la cuantización de esta teoría de bajas energías en el caso $N = 2$.

Existen varios aspectos relacionados con nuestros resultados que merecen futuros análisis. En particular, un punto importante es el estudio de las soluciones correspondiendo a vórtices múltiples. Para este propósito sería interesante buscar soluciones similares a las encontradas en [143],[144], que consisten en un estado compuesto de dos vórtices no abelianos coincidentes en la teoría de Yang-Mills. Otro aspecto que podría ser de relevancia corresponde al caso de vórtices no abelianos semilocales en teorías de Chern-Simons, que aparecen cuando el número de sabores es mayor que N [145]. De particular interés es el estudio de la dinámica cuántica de los vórtices no abelianos de Chern-Simons, ya que ellos podrían estar relacionados con un nuevo tipo de objeto tipo anión, con posibles aplicaciones en sistemas planares. Con esto en mente, sería útil analizar en el futuro la mecánica cuántica de las teorías de bajas energías para el móduli orientacional, en particular, realizar la extensión para N genérico del análisis dado en esta tesis del modelo $\mathbf{CP}^{N-1}$ para $N = 2$.

Completamos la exposición de nuestros estudios sobre cuerdas no abelianas analizando en el capítulo 8 las propiedades de este tipo de soluciones en presencia de gravedad. En el pasado, el estudio de soluciones tipo vórtice en espacio-tiempo curvos se limitó a las teorías de Einstein-Maxwell-Higgs, es decir, a generalizaciones auto-gravitantes de las cuerdas ANO. De manera que el principal objetivo del capítulo 8 radicó en presentar una generalización verdaderamente no abeliana de las cuerdas autogravitantes anteriormente citadas.

Comenzamos la búsqueda de estas soluciones considerando una teoría de Einstein-Yang-Mills-Higgs con grupo de gauge $G = U(1) \times SU(N_c)$, N_s sabores en la representación fundamental de G y un potencial arbitrario que sería determinado “a posteriori” de manera consistente. Un ansatz adecuado para la métrica del espacio-tiempo nos permitió encontrar ecuaciones de autodualidad (de primer orden), tanto para los campos de gauge como para los de Higgs. El procedimiento seguido para obtener dichas ecuaciones determinó la forma del potencial de Higgs. Al estudiar los vacíos de este potencial encontramos que para el caso $N_s \geq N_c$ existen configuraciones de energía nula en las que un subgrupo global $SU(N_c)_{\mathrm{c+f}}$ de rotaciones de sabor-color permanece no roto. La presencia de este potencial es esencial para tener cuerdas no abelianas, i.e. cuerdas que posean un espacio moduli orientacional.

Basándonos en las cuerdas elementales Z_N halladas en el espacio-tiempo plano, propusimos en el caso $N_c = N_s$ un ansatz rotacionalmente simétrico. A partir de este ansatz obtuvimos, mediante rotaciones de sabor-color que dejan invariante al vacío, cuerdas locales autogravitantes genuinamente no abelianas. El carácter no abeliano de estas cuerdas fue hecho explícito parametrizándolas en términos de las coordenadas colectivas orientacionales. Para el caso $N_c < N_s$, una generalización del ansatz anterior nos permitió construir cuerdas semilocales autogravitantes no abelianas. En este caso, las cuerdas semilocales adquieren, además de los grados de libertad orientacionales, nuevas coordenadas colectivas relacionadas con variaciones del tamaño transverso. Haciendo uso de resultados obtenidos en el pasado en el caso abeliano fuimos capaces de resolver exactamente las ecuaciones de autodualidad en el límite de gran tamaño transverso. Las expresiones analíticas para la métrica y los campos de gauge y Higgs nos posibilitaron mostrar explícitamente la relación existente entre los vórtices semilocales y los lumps del modelo sigma grassmanniano.

Respecto a las propiedades gravitacionales de las cuerdas, encontramos que el comportamiento asintótico de la métrica del espacio-tiempo, tanto en el caso local como en el semilocal, coincide con el de la métrica de las cuerdas abelianas ANO. Más precisamente, el comportamiento está caracterizado por el parámetro adimensional $G\xi$ (o, equivalentemente, por el ángulo de déficit δ, $\delta \propto G\xi$). Dependiendo de si $G\xi$ es mayor, igual o menor a $1/8\pi$, la métrica asintótica será respectivamente cónica, cilíndrica o cónicamente singular.

Finalmente, estudiamos la dinámica efectiva de bajas energías de las cuerdas no abelianas autogravitantes. Esto fue hecho utilizando el método de Manton, mediante el cual hallamos la acción efectiva para las coordenadas colectivas. En el caso de cuerdas locales, la dinámica del móduli orientacional resultó ser la misma que la correspondiente al espacio-tiempo plano, esto es, la dada por el modelo sigma $\mathbf{CP}^{N_c-1}$ bidimensional. Esto nos llevó a concluir que, a este nivel de aproximación, la dinámica del móduli orientacional de una única cuerda local no se ve afectada por la presencia del acoplamiento gravitacional. Por el contrario, cuando consideramos cuerdas semilocales encontramos que los efectos gravitacionales cambian drásticamente la dinámica del móduli, incluso en el caso de un único vórtice. De hecho, gracias al acoplamiento de gravedad, todos los modos cero, tanto orientacionales como de tamaño, son normalizables (en franco contraste con lo que ocurre en espacio-tiempo plano).

En vista de los resultados descriptos arriba, sería interesante estudiar su relevancia en lo que respecta a la física de las cuerdas cósmicas. Por ejemplo, los cambios en el espacio móduli inducidos por la gravedad podrían llevar a una probabilidad de reconección menor a 1. Para analizar esto, sería necesario buscar soluciones correspondiendo a vortices gravitantes compuestos, análogos a los encontrados en espacio-tiempo plano en [143],[144], lo que permitiría obtener información sobre la dinámica de dos vórtices intersecándose. Para llevar a cabo dicho estudio también resultaría muy útil obtener una generalización al caso de solitones gravitantes del método de matriz de móduli descripto en [146].

Bibliografía

[1] Ver *Wolfgang Pauli, Scientific Correspondence*, Vol II, p.15, Ed. Karl von Meyenn, Springer-Verlag, 1985.

[2] A. Connes, M. R. Douglas y A. S. Schwarz, "Noncommutative geometry and matrix theory: Compactification on tori," JHEP **9802**, 003 (1998) [arXiv:hep-th/9711162].

[3] M. R. Douglas y C. M. Hull, "D-branes and the noncommutative torus," JHEP **9802**, 008 (1998) [arXiv:hep-th/9711165].

[4] N. Seiberg y E. Witten, "String theory and noncommutative geometry," JHEP **9909**, 032 (1999) [arXiv:hep-th/9908142].

[5] M. B. Green y J. H. Schwarz, "Superstring Field Theory," Nucl. Phys. B **243**, 475 (1984).

[6] N. Berkovits, "Covariant quantization of the Green-Schwarz superstring in a Calabi-Yau background," Nucl. Phys. B **431**, 258 (1994) [arXiv:hep-th/9404162].

[7] N. Berkovits, "A new description of the superstring," arXiv:hep-th/9604123.

[8] J. H. Schwarz y P. Van Nieuwenhuizen, "Speculations Concerning A Fermionic Substructure Of Space-Time," Lett. Nuovo Cim. **34**, 21 (1982).

[9] S. Ferrara y M. A. Lledo, "Some aspects of deformations of supersymmetric field theories," JHEP **0005**, 008 (2000) [arXiv:hep-th/0002084].

[10] D. Klemm, S. Penati y L. Tamassia, "Non(anti)commutative superspace," Class. Quant. Grav. **20**, 2905 (2003) [arXiv:hep-th/0104190].

[11] N. Seiberg, "Noncommutative superspace, N = 1/2 supersymmetry, field theory and string theory," JHEP **0306**, 010 (2003) [arXiv:hep-th/0305248].

[12] R. Britto, B. Feng y S. J. Rey, "Deformed superspace, N = 1/2 supersymmetry and (non)renormalization theorems," JHEP **0307**, 067 (2003) [arXiv:hep-th/0306215].

[13] R. Britto y B. Feng, "N = 1/2 Wess-Zumino model is renormalizable," Phys. Rev. Lett. **91**, 201601 (2003) [arXiv:hep-th/0307165].

[14] M. T. Grisaru, S. Penati y A. Romagnoni, "Two-loop renormalization for nonanticommutative N = 1/2 supersymmetric WZ model," JHEP **0308**, 003 (2003) [arXiv:hep-th/0307099].

[15] S. Penati y A. Romagnoni, “Covariant quantization of N = 1/2 SYM theories and supergauge invariance,” JHEP **0502**, 064 (2005) [arXiv:hep-th/0412041].

[16] J. de Boer, P. A. Grassi y P. van Nieuwenhuizen, “Non-commutative superspace from string theory,” Phys. Lett. B **574**, 98 (2003) [arXiv:hep-th/0302078].

[17] H. Ooguri y C. Vafa, “The C-deformation of gluino and non-planar diagrams,” Adv. Theor. Math. Phys. **7**, 53 (2003) [arXiv:hep-th/0302109].

H. Ooguri y C. Vafa, “Gravity induced C-deformation,” Adv. Theor. Math. Phys. **7**, 405 (2004) [arXiv:hep-th/0303063].

[18] N. Berkovits y N. Seiberg, “Superstrings in graviphoton background and N = 1/2 + 3/2 supersymmetry,” JHEP **0307**, 010 (2003) [arXiv:hep-th/0306226].

[19] E. B. Bogomolny, “Stability Of Classical Solutions,” Sov. J. Nucl. Phys. **24**, 449 (1976) [Yad. Fiz. **24**, 861 (1976)].

[20] M. K. Prasad y C. M. Sommerfield, “An Exact Classical Solution For The ’T Hooft Monopole and The Julia-Zee Dyon,” Phys. Rev. Lett. **35**, 760 (1975).

[21] H. J. de Vega y F. A. Schaposnik, “A Classical Vortex Solution Of The Abelian Higgs Model,” Phys. Rev. D **14**, 1100 (1976).

[22] P. Di Vecchia y S. Ferrara, “Classical Solutions In Two-Dimensional Supersymmetric Field Theories,” Nucl. Phys. B **130**, 93 (1977).

[23] A. D’Adda, R. Horsley y P. Di Vecchia, “Supersymmetric Magnetic Monopoles and Dyons,” Phys. Lett. B **76**, 298 (1978).

[24] J. Hruby, “On The Supersymmetric Solitons and Monopoles,” Nucl. Phys. B **162**, 449 (1980).

[25] A. Abrikosov, “On the magnetic properties of superconductors of the second group,” Sov. Phys. JETP **32** 1442 (1957)(Reprinted in *Rebbi, C. (Ed.), Soliani, G. (Ed.): Solitons y Particles*, 356-364);

[26] H. B. Nielsen y P. Olesen, “Vortex-line models for dual strings,” Nucl. Phys. B **61**, 45 (1973) (Reprinted in *Rebbi, C. (Ed.), Soliani, G. (Ed.): Solitons y Particles*, 365-381).

[27] A. Hanany y D. Tong, “Vortices, instantons and branes,” JHEP **0307**, 037 (2003) [arXiv:hep-th/0306150].

[28] R. Auzzi, S. Bolognesi, J. Evslin, K. Konishi y A. Yung, “Nonabelian superconductors: Vortices and confinement in N = 2 SQCD,” Nucl. Phys. B **673**, 187 (2003) [arXiv:hep-th/0307287].

[29] M. Shifman y A. Yung, “Non-Abelian string junctions as confined monopoles,” Phys. Rev. D **70**, 045004 (2004) [arXiv:hep-th/0403149].

[30] A. Hanany y D. Tong, “Vortex strings and four-dimensional gauge dynamics,” JHEP **0404**, 066 (2004) [arXiv:hep-th/0403158].

[31] H. J. de Vega y F. A. Schaposnik, "Electrically charged vortices in nonAbelian gauge theories with Chern-Simons term," Phys. Rev. Lett. **56**, 2564 (1986).

[32] H. J. de Vega y F. A. Schaposnik, "Vortices and electrically charged vortices in nonAbelian gauge theories," Phys. Rev. D **34**, 3206 (1986).

[33] J. Heo y T. Vachaspati, "Z(3) strings and their interactions," Phys. Rev. D **58**, 065011 (1998) [arXiv:hep-ph/9801455].

[34] P. Suranyi, "Vortex solutions in SU(N) adjoint Higgs theories," Phys. Lett. B **481**, 136 (2000) [arXiv:hep-lat/9912023].

[35] F. A. Schaposnik y P. Suranyi, "New vortex solution in SU(3) gauge-Higgs theory," Phys. Rev. D **62**, 125002 (2000) [arXiv:hep-th/0005109].

[36] M. A. C. Kneipp y P. Brockill, "BPS string solutions in non-Abelian Yang-Mills theories," Phys. Rev. D **64**, 125012 (2001) [arXiv:hep-th/0104171].

[37] K. Konishi y L. Spanu, "Non-Abelian vortex and confinement," Int. J. Mod. Phys. A **18**, 249 (2003) [arXiv:hep-th/0106175].

[38] A. Marshakov y A. Yung, "Non-Abelian confinement via Abelian flux tubes in softly broken N = 2 SUSY QCD," Nucl. Phys. B **647**, 3 (2002) [arXiv:hep-th/0202172].

[39] L. G. Aldrovandi, F. A. Schaposnik y G. A. Silva, "Non(anti)commutative superspace with coordinate-dependent deformation," Phys. Rev. D **72**, 045005 (2005) [arXiv:hep-th/0505217].

[40] L. G. Aldrovandi, F. A. Schaposnik y G. A. Silva, "A coordinate-dependent superspace deformation from string theory," JHEP **0603**, 038 (2006) [arXiv:hep-th/0602108].

[41] L. G. Aldrovandi y F. A. Schaposnik, "Quantum mechanics in non(anti)commutative superspace," JHEP **0608**, 081 (2006) [arXiv:hep-th/0604197].

[42] L. G. Aldrovandi y F. A. Schaposnik, "Non-Abelian vortices in Chern-Simons theories and their induced effective theory," Phys. Rev. D **76**, 045010 (2007) [arXiv:hep-th/0702209].

[43] L. G. Aldrovandi, "Strings in Yang-Mills-Higgs theory coupled to gravity," Phys. Rev. D **76**, 085015 (2007), arXiv:0706.0446 [hep-th].

[44] Pueden encontrarse varias aplicaciones de $SU(3)$ (y muchas de las publicaciones clásicas en el tema) en la antología de Gell-Mann y Ne'eman: M. Gell-Mann and Y. Ne'eman,"The eightfold way: a review with a collection of reprints," http://www.slac.stanford.edu/spires/find/hep/www?irn=6658075SPIRES entry

[45] S. R. Coleman y J. Mandula, "All Possible Symmetries Of The S Matrix," Phys. Rev. **159** (1967) 1251.

[46] Yu. A. Golfy y E. P. Likhtman, "Extension of the Algebra of Poincare Group Generators and Violation of p Invariance," JETP Lett. **13**, 323 (1971) [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **13**, 452 (1971)].

[47] R. Haag, J. T. Lopuszanski y M. Sohnius, "All Possible Generators Of Supersymmetries Of The S Matrix," Nucl. Phys. B **88**, 257 (1975).

[48] E. P. Wigner, "On Unitary Representations Of The Inhomogeneous Lorentz Group," Annals Math. **40** (1939) 149 [Nucl. Phys. Proc. Suppl. **6** (1989) 9].

[49] J. T. Lopuszanski y M. Sohnius, Karlsruhe Report Print-74-1269 (unpublished).

[50] E. Witten y D. I. Olive, "Supersymmetry Algebras That Include Topological Charges," Phys. Lett. B **78**, 97 (1978).

[51] J. W. van Holten y A. Van Proeyen, "N=1 Supersymmetry Algebras In D=2, D=3, D=4 Mod-8," J. Phys. A **15**, 3763 (1982).

[52] N. Seiberg y E. Witten, "Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in N=2 supersymmetric QCD," Nucl. Phys. B **431**, 484 (1994) [arXiv:hep-th/9408099].

[53] N. Seiberg y E. Witten, "Electric - magnetic duality, monopole condensation, and confinement in N=2 supersymmetric Yang-Mills theory," Nucl. Phys. B **426**, 19 (1994) [Erratum-ibid. B **430**, 485 (1994)] [arXiv:hep-th/9407087].

[54] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Shvarts y Yu. S. Tyupkin, "Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations," Phys. Lett. B **59**, 85 (1975).

[55] L. Castellani, "Noncommutative geometry and physics: A review of selected recent results," Class. Quant. Grav. **17**, 3377 (2000) [arXiv:hep-th/0005210].

[56] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz y D. Sternheimer, "Deformation Theory and Quantization. 1. Deformations Of Symplectic Structures," Annals Phys. **111**, 61 (1978).

[57] B. v. Fedosov, "A Simple Geometrical Construction Of Deformation Quantization," J. Diff. Geom. **40**, 213 (1994).

[58] M. Kontsevich, "Deformation quantization of Poisson manifolds, I," Lett. Math. Phys. **66** (2003) 157 [arXiv:q-alg/9709040].

[59] J. Moyal, "Quantum mechanics as a statistical theory," Proc. Cambridge Phil. Soc. **45** (1949), 99-124.

[60] H. Weyl, "The theory of groups and quantum mechanics," Dover, New-York 1931, translated from "Gruppentheorie und Quantenmechanik," Hirzel Verlag, Leipzig 1928; "Quantenmechanik und Gruppentheorie," Z. Physik **46** (1927), 1-46.

[61] E. Wigner, "Quantum corrections for thermodynamic equilibrium," Phys. Rev. **40** (1932), 749-759.

[62] M. R. Douglas y N. A. Nekrasov, "Noncommutative field theory," Rev. Mod. Phys. **73**, 977 (2001) [arXiv:hep-th/0106048].

[63] T. Araki, K. Ito y A. Ohtsuka, "Supersymmetric gauge theories on noncommutative superspace," Phys. Lett. B **573**, 209 (2003) [arXiv:hep-th/0307076].

[64] A. Gorsky y M. Shifman, "Spectral degeneracy in supersymmetric gluodynamics and one-flavor QCD related to N = 1/2 SUSY," Phys. Rev. D **71**, 025009 (2005) [arXiv:hep-th/0410099].

[65] A. Imaanpur, "Comments on gluino condensates in N = 1/2 SYM theory," JHEP **0312**, 009 (2003) [arXiv:hep-th/0311137].

[66] S. Giombi, R. Ricci, D. Robles-Llana y D. Trancanelli, "Instantons and matter in N = 1/2 supersymmetric gauge theory," JHEP **0510**, 021 (2005) [arXiv:hep-th/0505077].

[67] K. Konishi, "Anomalous Supersymmetry Transformation Of Some Composite Operators In Sqcd," Phys. Lett. B **135**, 439 (1984).

[68] K. i. Konishi y K. i. Shizuya, "Functional Integral Approach To Chiral Anomalies In Supersymmetric Gauge Theories," Nuovo Cim. A **90**, 111 (1985).

[69] D. E. Berenstein, J. M. Maldacena y H. S.Ñastase, "Strings in flat space and pp waves from N = 4 super Yang Mills," JHEP **0204**, 013 (2002) [arXiv:hep-th/0202021].

[70] E. Witten, "Dynamical Breaking Of Supersymmetry," Nucl. Phys. B **188**, 513 (1981).

[71] E. Witten, "Constraints On Supersymmetry Breaking," Nucl. Phys. B **202**, 253 (1982).

[72] L. Alvarez-Gaume, "Supersymmetry And The Atiyah-Singer Index Theorem," Commun. Math. Phys. **90**, 161 (1983).

[73] D. Friedan and P. Windey, "Supersymmetric Derivation Of The Atiyah-Singer Index And The Chiral Anomaly," Nucl. Phys. B **235**, 395 (1984).

[74] T. Hatanaka, S. V. Ketov, Y. Kobayashi y S. Sasaki, "Non-anti-commutative deformation of effective potentials in supersymmetric gauge theories," Nucl. Phys. B **716**, 88 (2005) [arXiv:hep-th/0502026].

[75] L. Alvarez-Gaume y M. A. Vazquez-Mozo, "On nonanticommutative N = 2 sigma-models in two dimensions," JHEP **0504**, 007 (2005) [arXiv:hep-th/0503016].

[76] T. Hatanaka, S. V. Ketov, Y. Kobayashi y S. Sasaki, "N = 1/2 supersymmetric four-dimensional non-linear sigma-models from non-anti-commutative superspace," Nucl. Phys. B **726**, 481 (2005) [arXiv:hep-th/0506071].

[77] S. Cecotti y L. Girardello, "Functional Measure, Topology Y Dynamical Supersymmetry Breaking," Phys. Lett. B **110**, 39 (1982).

[78] E. A. Ivanov y A. V. Smilga, "Cryptoreality of nonanticommutative Hamiltonians," JHEP **0707**, 036 (2007) [arXiv:hep-th/0703038].

[79] A. Hanany, M. J. Strassler y A. Zaffaroni, "Confinement and strings in MQCD," Nucl. Phys. B **513**, 87 (1998) [arXiv:hep-th/9707244].

[80] P. C. Argyres, M. R. Plesser y N. Seiberg, "The Moduli Space of N=2 SUSY QCD and Duality in N=1 SUSY QCD," Nucl. Phys. B **471**, 159 (1996) [arXiv:hep-th/9603042].

[81] G. Carlino, K. Konishi y H. Murayama, "Dynamical symmetry breaking in supersymmetric SU(n(c)) and USp(2n(c)) gauge theories," Nucl. Phys. B **590**, 37 (2000) [arXiv:hep-th/0005076].

[82] A. Gorsky, M. Shifman y A. Yung, "Non-Abelian Meissner effect in Yang-Mills theories at weak coupling," Phys. Rev. D **71**, 045010 (2005) [arXiv:hep-th/0412082].

[83] E. Witten, "Instantons, The Quark Model, Y The 1/N Expansion," Nucl. Phys. B **149**, 285 (1979).

[84] A. M. Polyakov, "Interaction Of Goldstone Particles In Two-Dimensions. Applications To Ferromagnets and Massive Yang-Mills Fields," Phys. Lett. B **59**, 79 (1975).

[85] D. Tong, "Monopoles in the Higgs phase," Phys. Rev. D **69**, 065003 (2004) [arXiv:hep-th/0307302].

[86] S. Deser, R. Jackiw y S. Templeton, "Three-Dimensional Massive Gauge Theories," Phys. Rev. Lett. **48**, 975 (1982).

[87] S. Deser, R. Jackiw y S. Templeton, "Topologically massive gauge theories," Annals Phys. **140**, 372 (1982) [Erratum-ibid. **185**, 406.1988 APNYA,281,409 (1988 APNYA,281,409-449.2000)].

[88] A.Ñ. Redlich, "Gauge Noninvariance and Parity Nonconservation of Three-Dimensional Fermions," Phys. Rev. Lett. **52**, 18 (1984).

[89] A.Ñ. Redlich, "Parity Violation and Gauge Noninvariance Of The Effective Gauge Field Action In Three-Dimensions," Phys. Rev. D **29**, 2366 (1984).

[90] A. M. Polyakov, "Fermi-Bose Transmutations Induced by Gauge Fields," Mod. Phys. Lett. A **3**, 325 (1988).

[91] See F. Wilczek, Fractional Statistics and Anyon Superconductivity, (World Scientific, Singapore, 1990) y references therein.

[92] See Composite Fermions: A Unified View of the Quantum Hall Regime Ed. O.Heinonen, y references therein.

[93] E. Witten, "Quantum field theory and the Jones polynomial," Commun. Math. Phys. **121**, 351 (1989).

[94] E. Witten, "(2+1)-Dimensional Gravity as an Exactly Soluble System," Nucl. Phys. B **311**, 46 (1988).

[95] S. Elitzur, G. W. Moore, A. Schwimmer y N. Seiberg, "Remarks On The Canonical Quantization Of The Chern-Simons-Witten Theory," Nucl. Phys. B **326**, 108 (1989).

[96] J. Hong, Y. Kim y P. Y. Pac, "On The Multivortex Solutions Of The Abelian Chern-Simons-Higgs Theory," Phys. Rev. Lett. **64**, 2230 (1990).

[97] R. Jackiw y E. J. Weinberg, "Selfdual Chern-Simons Vortices," Phys. Rev. Lett. **64**, 2234 (1990).

[98] R. Jackiw, K. M. Lee y E. J. Weinberg, "Selfdual Chern-Simons solitons," Phys. Rev. D **42**, 3488 (1990).

[99] L. F. Cugliandolo, G. Lozano, M. V. Manias y F. A. Schaposnik, "Bogomolny equations for nonAbelian Chern-Simons Higgs theories," Mod. Phys. Lett. A **6**, 479 (1991).

[100] H.Ñishino y S. J. J. Gates, "Chern-Simons theories with supersymmetries in three-dimensions," Int. J. Mod. Phys. A **8**, 3371 (1993).

[101] S. J. J. Gates y H.Ñishino, "Remarks on the N=2 supersymmetric Chern-Simons theories," Phys. Lett. B **281**, 72 (1992).

[102] P. A. M. Dirac, "Generalized Hamiltonian dynamics," Can. J. Math. **2**, 129 (1950).

[103] G. V. Dunne, "Hilbert Space For Charged Particles In Perpendicular Magnetic Fields," Annals Phys. **215**, 233 (1992).

[104] D. Garfinkle, "General Relativistic Strings," Phys. Rev. D **32**, 1323 (1985).

[105] P. Laguna-Castillo y R. A. Matzner, "Coupled Field Solutions For U(1) Gauge Cosmic Strings," Phys. Rev. D **36**, 3663 (1987).

[106] M. Christensen, A. L. Larsen y Y. Verbin, "Complete classification of the string-like solutions of the gravitating Abelian Higgs model," Phys. Rev. D **60**, 125012 (1999) [arXiv:gr-qc/9904049].

[107] P. Laguna y D. Garfinkle, "Space-Time Of Supermassive U(1) Gauge Cosmic Strings," Phys. Rev. D **40**, 1011 (1989).

[108] M. E. Ortiz, "A New look at supermassive cosmic strings," Phys. Rev. D **43**, 2521 (1991).

[109] B. Linet, "A vortex line model for infinite straight cosmic strings," Phys. Lett. A **124**, 240 (1987).

[110] A. Comtet y G. W. Gibbons, "Bogomolny bounds for cosmic strings," Nucl. Phys. B **299**, 719 (1988).

[111] A. Vilenkin, "Gravitational Field Of Vacuum Domain Walls and Strings," Phys. Rev. D **23**, 852 (1981).

[112] G. W. Gibbons, M. E. Ortiz, F. Ruiz Ruiz y T. M. Samols, "Semilocal Strings and Monopoles," Nucl. Phys. B **385**, 127 (1992) [arXiv:hep-th/9203023].

[113] J. D. Edelstein, “Semi-local cosmic strings and the cosmological constant problem,” Phys. Lett. B **390**, 101 (1997) [arXiv:hep-th/9610163].

[114] G. Dvali, R. Kallosh y A. Van Proeyen, “D-term strings,” JHEP **0401**, 035 (2004) [arXiv:hep-th/0312005].

[115] A. Achucarro, A. Celi, M. Esole, J. Van den Bergh y A. Van Proeyen, “D-term cosmic strings from N = 2 supergravity,” JHEP **0601**, 102 (2006) [arXiv:hep-th/0511001].

[116] D. V. Gal'tsov, E. A. Davydov y M. S. Volkov, “Einstein-Yang-Mills strings,” Phys. Lett. B **648**, 249 (2007) [arXiv:hep-th/0610183], D. V. Gal'tsov y E. A. Davydov, “Cylindrically symmetric solitons in Einstein-Yang-Mills theory,” Phys. Rev. D **75**, 084016 (2007) [arXiv:hep-th/0612273].

[117] G. Clement, “Gravitating Chern-Simons vortices,” Phys. Rev. D **54**, 1844 (1996) [arXiv:gr-qc/9512021].

[118] G. W. Gibbons y C. M. Hull, “A Bogomolny Bound For General Relativity and Solitons In N=2 Supergravity,” Phys. Lett. B **109**, 190 (1982); M. Cvetic, S. Griffies y S. J. Rey, “Static domain walls in N=1 supergravity,” Nucl. Phys. B **381**, 301 (1992) [arXiv:hep-th/9201007]; G. W. Gibbons, D. Kastor, L. A. J. London, P. K. Townsend y J. H. Traschen, “Supersymmetric selfgravitating solitons,” Nucl. Phys. B **416**, 850 (1994) [arXiv:hep-th/9310118]; J. D. Edelstein, C.Ñunez y F. A. Schaposnik, “Supergravity and a Bogomolny bound in three-dimensions,” Nucl. Phys. B **458**, 165 (1996) [arXiv:hep-th/9506147];

[119] T. Vachaspati y A. Achucarro, “Semilocal cosmic strings,” Phys. Rev. D **44** (1991) 3067.

[120] M. Hindmarsh, “Existence and stability of semilocal strings,” Phys. Rev. Lett. **68**, 1263 (1992).

[121] N. S. Manton, “A Remark On The Scattering Of Bps Monopoles,” Phys. Lett. B **110**, 54 (1982).

[122] B. de Wit y J. Kappeli, “On a gauge invariant description of soliton dynamics,” Fortsch. Phys. **51**, 690 (2003) [arXiv:hep-th/0211228],

J. Kappeli, “Spacetime diffeomorphisms and the geodesic approximation,” arXiv:hep-th/0212249.

[123] G. W. Gibbons y P. J. Ruback, “The motion of extreme Reissner-Nordstrom black holes in the low velocity limit,” Phys. Rev. Lett. **57**, 1492 (1986).

[124] R. C. Ferrell y D. M. Eardley, “Slow Motion Scattering and Coalescence Of Maximally Charged Black Holes,” Phys. Rev. Lett. **59**, 1617 (1987).

[125] J. Michelson y A. Strominger, “Superconformal multi-black hole quantum mechanics,” JHEP **9909**, 005 (1999) [arXiv:hep-th/9908044].

[126] J. M. Speight y I. A. B. Strachan, “Gravity thaws the frozen moduli of the CP(1) lump,” Phys. Lett. B **457**, 17 (1999) [arXiv:hep-th/9903264].

[127] M. Eto *et al.*, "On the moduli space of semilocal strings and lumps," arXiv:0704.2218 [hep-th].

[128] M. Shifman y A. Yung, "Non-Abelian semilocal strings in N = 2 supersymmetric QCD," Phys. Rev. D **73**, 125012 (2006) [arXiv:hep-th/0603134].

[129] M. Eto, K. Hashimoto, G. Marmorini, M.Ñitta, K. Ohashi y W. Vinci, "Universal reconnection of non-Abelian cosmic strings," Phys. Rev. Lett. **98**, 091602 (2007) [arXiv:hep-th/0609214].

[130] J. Polchinski, "Introduction to cosmic F- and D-strings," arXiv:hep-th/0412244.

[131] K. Hashimoto y D. Tong, "Reconnection of non-abelian cosmic strings," JCAP **0509**, 004 (2005) [arXiv:hep-th/0506022].

[132] V. Gayral, J. M. Gracia-Bondia y F. Ruiz Ruiz, "Position-dependent noncommutative products: Classical construction and field theory," Nucl. Phys. B **727**, 513 (2005) [arXiv:hep-th/0504022].

[133] D. H. Correa, C. D. Fosco, F. A. Schaposnik y G. Torroba, "On coordinate transformations in planar noncommutative theories," JHEP **0409**, 064 (2004) [arXiv:hep-th/0407220].

[134] A. Imaanpur, "On instantons and zero modes of N = 1/2 SYM theory," JHEP **0309**, 077 (2003) [arXiv:hep-th/0308171].

[135] P. A. Grassi, R. Ricci y D. Robles-Llana, "Instanton calculations for N = 1/2 super Yang-Mills theory," JHEP **0407**, 065 (2004) [arXiv:hep-th/0311155].

[136] R. Britto, B. Feng, O. Lunin y S. J. Rey, "U(N) instantons on N = 1/2 superspace: Exact solution and geometry of moduli space," Phys. Rev. D **69**, 126004 (2004) [arXiv:hep-th/0311275].

[137] L. G. Aldrovandi, D. H. Correa, F. A. Schaposnik y G. A. Silva, "BPS analysis of gauge field - Higgs models in non-anticommutative superspace," Phys. Rev. D **71**, 025015 (2005) [arXiv:hep-th/0410256].

[138] K. Araki, T. Inami y H.Ñakajima, "Instanton equations for the supersymmetric CP(N-1) sigma model on non(anti)commutative superspace," Prog. Theor. Phys. **116**, 975 (2007) [arXiv:hep-th/0608130].

[139] S. V. Ketov, "Non-anti-commutative deformation of complex geometry," arXiv:hep-th/0602066.

[140] S. Iso y H. Umetsu, "Gauge theory on noncommutative supersphere from supermatrix model," Phys. Rev. D **69**, 105003 (2004) [arXiv:hep-th/0311005].

[141] M. Hatsuda, S. Iso y H. Umetsu, "Noncommutative superspace, supermatrix and lowest Landau level," Nucl. Phys. B **671**, 217 (2003) [arXiv:hep-th/0306251].

[142] E. Ivanov, L. Mezincescu y P. K. Townsend, "Fuzzy CP(n—m) as a quantum superspace," arXiv:hep-th/0311159.

[143] R. Auzzi, M. Shifman y A. Yung, “Composite non-Abelian flux tubes in N = 2 SQCD,” Phys. Rev. D **73**, 105012 (2006) [arXiv:hep-th/0511150].

[144] M. Eto, K. Konishi, G. Marmorini, M.Ñitta, K. Ohashi, W. Vinci y N. Yokoi, “Non-Abelian vortices of higher winding numbers,” Phys. Rev. D **74**, 065021 (2006) [arXiv:hep-th/0607070].

[145] G. S. Lozano, D. Marques, E. F. Moreno y F. A. Schaposnik, “Non-Abelian Chern-Simons Vortices,” Phys. Lett. B **654**, 27 (2007) [arXiv:0704.2224 [hep-th]].

[146] M. Eto, Y. Isozumi, M.Ñitta, K. Ohashi y N. Sakai, “Solitons in the Higgs phase: The moduli matrix approach,” J. Phys. A **39**, R315 (2006) [arXiv:hep-th/0602170].