



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

Simulaciones Ópticas de Algoritmos Cuánticos

Por

Diego Hernán Francisco

Director del trabajo: Dra. Silvia Ledesma

Lugar de trabajo: Departamento de Física, FCEyN, UBA

Trabajo de Tesis para optar por el título de Doctor de la Universidad de
Buenos Aires

19 de Noviembre de 2007

Simulaciones Ópticas de Algoritmos Cuánticos

Diego Francisco

Noviembre 2007

Resumen

En este trabajo se ha desarrollado teórica y experimentalmente, una analogía completa entre el procesamiento de imágenes con iluminación coherente y el modelo circuital de computación cuántica. Se ha probado la validez de la analogía mediante la simulación óptica de algoritmos de relevancia en procesamiento cuántico de la información. Se ha discutido la representación óptica de los estados cuánticos como imágenes espacialmente organizadas y se han diseñado estrategias de simulación óptica de las evoluciones temporales unitarias a partir de la representación óptica de las compuertas cuánticas universales. Los operadores unitarios de un qbit son representados mediante procesadores ópticos coherentes donde las funciones de entrada y salida codifican los estados cuánticos inicial y final de la evolución temporal. Dicha representación, incluye corrimientos de fase sobre la codificación de los estados en los planos de entrada y salida y utiliza una red de transmisión de fase en el plano de Fourier como función de transferencia. La compuerta *CNOT* sobre el espacio de dos qbits completa el conjunto de compuertas cuánticas universales y es simulada mediante un prisma cúbico que permuta las amplitudes complejas asociadas a un par de rayos luminosos adyacentes. Los aportes originales del trabajo, enfatizan la validez de la analogía desarrollada y consisten en la implementación experimental de tres algoritmos cuya relevancia en información cuántica es no solo histórica o académica sino decisiva por sus potenciales aplicaciones. Se han realizado implementaciones ópticas del algoritmo de Deutsch, de la caminata al azar cuántica y finalmente del proceso de teleportación. En todos los casos, se han obtenido resultados experimentales que demuestran la viabilidad de las simulaciones ópticas de cada proceso y se han discutido sus derivaciones conceptuales, sus limitaciones y sus posibles aplicaciones.

Palabras Clave: Procesamiento cuántico de la información, procesamiento de imágenes, computación cuántica universal, procesador óptico coherente, algoritmos cuánticos, simulaciones ópticas.

Abstract

In this work, it has developed in a theoretical and experimental way, a complete analogy between the image processing with coherent optical fields and the circuitual model of quantum computation. The validity of the analogy by means of optical simulations of quantum algorithms with relevance in quantum information processing was proven. The optical representation of quantum states as spatially organized images and the strategies of optical simulation of the universal quantum gates were discussed. The single qbit gates are represented by means of coherent optical processors where the input and output signals are used for encode the initial and final quantum states of the temporal evolution. This representation, includes phase shifts on the codified states in the input and output planes and make use of a phase grating in the Fourier plane as the transfer function of the system. *CNOT* gate on two qbit space completes the set of universal quantum gates and it is simulated by means of a cube prism that flips the complex amplitude of the electromagnetic field associated with a pair of adjacent rays. The original contributions of this work, emphasize the validity of the developed analogy and consist in the optical implementation of three quantum algorithm whose relevance in quantum information are not only historical and academical but also crucial for its possible applications. Optical implementations of the Deutsch algorithm, the quantum random walk and finally of the quantum teleportation process have been performed. In all cases experimental results that demonstrates the viability of the optical simulations of these processes were obtained and their conceptual derivations, their limitations and their possible applications were discussed.

Keywords: Quantum information processing, image processing, universal quantum computation, coherent optical processor, quantum algorithms, optical simulations.

*A mis dos amores:
Natalia y Vladimir
(como todo)*

La explicación es obvia: *El jardín de los senderos que se bifurcan* es una imagen incompleta, pero no falsa, del universo tal como lo concebía Ts'ui Pên. A diferencia de Newton y de Schonpenhauer, su antepasado no creía en un tiempo uniforme, absoluto. Creía en infinitas series de tiempos, en una red creciente y vertiginosa de tiempos divergentes, convergentes y paralelos. Esa trama de tiempos que se aproximan, se bifurcan, se cortan o que secularmente se ignoran, abarca *todas* las posibilidades. No existimos en la mayoría de esos tiempos; en algunos existe usted y no yo; en otros yo, no usted; en otros, los dos. En éste, que un favorable azar me depara, usted ha llegado a mi casa; en otro, usted, al atravesar mi jardín, me ha encontrado muerto; en otro, yo digo estas mismas palabras, pero soy un error, un fantasma.

Jorge L. Borges. El Jardín de los senderos que se bifurcan (1941)

Índice general

| | |
|--|-----------|
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Nociones sobre computación cuántica | 4 |
| 1.1.1. Estados computacionales. El espacio de los qbits | 6 |
| 1.1.2. Estados de múltiples qbits | 7 |
| 1.1.3. Operadores unitarios sobre el espacio de un qbit | 8 |
| 1.1.4. Operaciones sobre múltiples qbits. Operaciones controladas | 11 |
| 1.1.5. Mediciones en el espacio de un qbit | 13 |
| 1.1.6. Mediciones en el espacio de múltiples qbit. Estados puros y mixtos. Entrelazamiento | 15 |
| 1.2. Procesamiento de imágenes con iluminación coherente | 19 |
| 1.2.1. Sistemas lineales espacialmente invariantes | 21 |
| 1.2.2. De la teoría escalar de la difracción a los sistemas formadores de imágenes | 24 |
| 1.2.3. Un sistema óptico lineal y espacialmente invariante: El procesador óptico coherente | 29 |
| 2. Estrategias de simulación óptica de algoritmos | 33 |
| 2.1. Estados cuánticos de N qbits como imágenes | 34 |
| 2.1.1. La función de onda en el espacio de posiciones de una partícula en el plano | 34 |
| 2.1.2. Imágenes con iluminación coherente: Modulación espacial de un frente de onda plano | 35 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 2.1.3. | Imágenes espacialmente organizadas como estados cuánticos | 37 |
| 2.2. | Procesadores coherentes como operadores de evolución | 41 |
| 2.2.1. | Propiedades de la transformada inversa de Fourier de una red de transmisión de fase | 44 |
| 2.2.2. | Simulación óptica de los operadores del grupo $SO(2)$ | 47 |
| 2.2.3. | Simulación de la compuerta CNOT | 52 |
| 2.2.4. | Análisis del concepto de universalidad de la representación óptica de las operaciones | 55 |
| 3. | El operador de Hadamard y el algoritmo de Deutsch | 61 |
| 3.1. | El operador de Hadamard sobre un qbit | 63 |
| 3.2. | Resultados experimentales para el operador de Hadamard | 66 |
| 3.3. | El problema de Deutsch | 67 |
| 3.4. | Simulación óptica del algoritmo de Deutsch | 69 |
| 3.5. | Resultados experimentales para el problema de Deutsch | 71 |
| 4. | Simulación óptica de la caminata al azar cuántica | 73 |
| 4.1. | La Caminata al azar cuántica | 75 |
| 4.2. | Simulación óptica de la caminata al azar cuántica | 77 |
| 4.3. | Simulación del desplazamiento controlado | 80 |
| 4.4. | Resultados experimentales de la caminata al azar cuántica | 87 |
| 5. | Simulación óptica del proceso de teleportación | 93 |
| 5.1. | Breve descripción del proceso de teleportación | 95 |
| 5.2. | Dispositivo óptico para la simulación de la Teleportación | 100 |
| 5.3. | Resultados experimentales de la teleportación | 105 |
| 6. | Conclusiones y Perspectivas | 109 |

Capítulo 1

Introducción

La computación cuántica y la teoría cuántica de la información son campos de fundamental interés ya que se supone que es posible implementar físicamente una máquina que realice el procesamiento cuántico de la información en la naturaleza. No obstante, es un hecho que la realización experimental de circuitos cuánticos, algoritmos y sistemas cuánticos de comunicación es extremadamente difícil. El problema fundamental que se enfrenta es el de dar con un sistema físico que, siendo capaz de representar en forma robusta la información cuántica, sea además lo suficientemente accesible como para poder controlar su evolución temporal en la forma en que uno desee. Pero estos requerimientos suelen ser excluyentes y por lo tanto estar en competencia. Por un lado, una computadora cuántica debe estar lo suficientemente aislada del mundo exterior como para poder preservar sus propiedades cuánticas, pero al mismo tiempo debe ser lo suficientemente accesible como para ser manipulada durante el proceso de cómputo. Una implementación realista debe reflejar entonces una solución de compromiso y constituir un delicado balance entre estos dos requisitos aparentemente antagónicos. Al día de hoy existen algunas certezas acerca de los sistemas físicos que podrían ser utilizados para el procesamiento de la información cuántica. Se han realizado experimentos con fotones [1, 2], cavidades resonantes [3, 4], iones atrapados [5] e incluso resonancia magnética nuclear [6] que han mostrado diferentes aspectos de las potenciales representaciones físicas del *hardware* cuántico [7].

Independientemente, y dado el interés actual en áreas como la información y la computación cuántica, el desarrollo de métodos de procesamiento óptico de la información cuántica ha recibido una atención creciente. El fundamento físico que sustenta este tipo de simulaciones es que tanto el campo electromagnético de la óptica clásica como los estados cuánticos de un sistema físico evolucionan siguiendo una ecuación de ondas y además satisfacen el principio de superposición [7]. Es de esperar entonces que ciertos experimentos de óptica clásica puedan ser útiles a la hora de simular el comportamiento de ordenadores cuánticos [8–13]. Más allá de su innegable interés académico, tales simulaciones pueden ayudarnos a entender algunas de las propiedades básicas de estos algoritmos. En este sentido, es importante el desarrollo de nuevas arquitecturas que puedan ser llevadas a cabo en el laboratorio y que permitan obtener resultados precisos con relativamente poca dificultad y a bajo costo. Varios trabajos han sido realizados en esta línea. En un trabajo pionero, Cerf et al. propusieron configuraciones ópticas para simular circuitos cuánticos [1] y presentaron una simulación completamente óptica del algoritmo de búsqueda de Grover [2, 14]. En estos trabajos, los estados cuánticos fueron codificados en estados de polarización de fotones únicos y la implementación de las compuertas cuánticas universales fué realizada mediante componentes ópticos convencionales como divisores de haz y placas de fase en el contexto de experimentos de óptica cuántica. Hacia la misma época, Spreeuw [8] sugirió por primera vez la analogía entre estados entrelazados de un sistema compuesto por mas de un qbit y ciertas configuraciones de las ondas electromagnéticas clásicas. La información era codificada en los estados de polarización de haces clásicos de luz (*polarization classical bits*) o en las amplitudes complejas de 2^N haces paralelos separados espacialmente (*position classical bits*). La representación clásica de los estados entrelazados surgía entonces al combinar estos dos tipos de representaciones. Usando bits clásicos (o *cbits*) espacialmente distribuídos, Bhattacharya et al. [10] simularon multiples iteraciones del algoritmo de búsqueda de Grover. Finalmente, Puentes et al. [13] implementaron una simulación del algoritmo de Deutsch-Jozsa y un paso del algoritmo de búsqueda de Grover codificando los estados

cuánticos en pantallas de cristal líquido programables.

Siguiendo esta misma línea, el objetivo del presente trabajo es el de desarrollar técnicas de simulación analógicas de algoritmos de computación cuántica y de procesos de información cuántica en general a partir de herramientas y métodos de procesamiento de imágenes. Uno de los objetivos es el de establecer una analogía formal entre el modelo circuital de computación cuántica y el procesamiento de imágenes. La idea se basa precisamente en la representación de los estados de N qbits como imágenes. El procesamiento óptico de una cierta imagen de entrada, proporciona una imagen de salida en analogía al ya citado modelo circuital de computación cuántica, en donde los estados de N qbits son modificados por una secuencia de operadores unitarios. Los estados cuánticos son codificados como imágenes espacialmente organizadas, de modo que a cada estado de la base de un espacio de Hilbert 2^N -dimensional (N qbits) le corresponde una cierta región del plano de la imagen de entrada. Los operadores unitarios sobre el espacio de N qbits pueden reducirse a una secuencia de operadores unitarios elementales llamados compuertas cuánticas universales. Puede probarse que el conjunto de las compuertas cuánticas universales está constituido por los operadores unitarios sobre un qbit con el agregado de ciertas operaciones unitarias especiales denominadas operaciones controladas, que suponen la interacción entre dos qbits. El operador *CNOT* es un ejemplo de estas operaciones controladas. Los operadores unitarios sobre el espacio de un qbit son representados mediante procesadores ópticos coherentes, con una red de fase en el plano de Fourier de la imagen de entrada precedida y seguida de dos placas de fase. El operador CNOT es simulado por un prisma cúbico que es capaz de permutar las posiciones de dos haces de luz adyacentes. Las imágenes de salida son recogidas por una cámara CCD (*coupled charged device*) y las distribuciones de intensidad luminosa resultante son interpretadas como las amplitudes de probabilidad que determinan los resultados de las mediciones.

La organización de esta tesis es la siguiente: El primer capítulo es una introducción que incluye las teorías involucradas en la comprensión de todos los

temas que siguen. En un primer apartado, discutimos las nociones fundamentales de computación cuántica haciendo hincapié en el modelo circuital. Destinamos otro apartado a la discusión de las herramientas de procesamiento de imágenes con iluminación coherente, profundizando en las arquitecturas que serán utilizadas para las simulaciones ópticas de los procesos. Seguidamente discutimos los elementos esenciales de las simulaciones ópticas de algoritmos que incluyen las estrategias de codificación de estados cuánticos como imágenes espacialmente organizadas y las estrategias de representación de las compuertas cuánticas universales como procesadores ópticos. Finalmente relacionamos las distribuciones de intensidad luminosa resultantes de las simulaciones ópticas con las amplitudes de probabilidad involucradas en los procesos de medición en mecánica cuántica. Los capítulos siguientes desarrollan ejemplos de aplicación de los conceptos vertidos en el capítulo anterior. Se han diseñado una serie dispositivos ópticos capaces de simular clásicamente ciertos procesos de información cuántica. El primer ejemplo, se refiere a un caso particular de operación unitaria sobre un qbit, que es el operador de Hadamard. En particular estudiamos como la simulación óptica de esta importante operación permite a su vez la representación de otros procesos como el algoritmo de Deustch o, mediando ciertas modificaciones, la Caminata al Azar Cuántica (QRW del inglés *quantum random walk*). Finalmente, hemos desarrollado una simulación del proceso de teleportación cuántica, que incluye el uso del operador CNOT para crear o remover entrelazamiento en estados de dos qbits. Discutimos el diseño y la operación de cada dispositivo, mostrando resultados experimentales en donde las operaciones de cada algoritmo son efectivamente simuladas. Finalmente discutimos las limitaciones de la analogía y las interpretaciones clásicas de los procesos. El último capítulo es una síntesis del trabajo realizado que incluye conclusiones y perspectivas.

1.1. Nociones sobre computación cuántica

Que es una computadora cuántica?. Que distingue a una computadora cuántica de una computadora clásica?. Para responder a estas preguntas

digamos en principio que es posible enunciar cierta clase de problemas interesantes que son imposibles de resolver en una computadora clásica, no porque ellos sean en principio insolubles, sino porque la gran cantidad de recursos requeridos para tratar algún caso realista del problema en cuestión, hace que su resolución sea impracticable. La nueva y promisoría perspectiva abierta por la computación cuántica consiste en la posibilidad de desarrollar algoritmos que hacen viable la resolución de dichos problemas. Los casos más conocidos y que más perspectivas han abierto por sus potenciales aplicaciones son el algoritmo de factorización de Shor [15] y el algoritmo de búsqueda de Grover [14]. En el marco de la computación teórica, existe una rama de la matemática aplicada dedicada al estudio de la cantidad de recursos necesarios para resolver problemas computacionales. Dicha disciplina se conoce actualmente como teoría de la complejidad y aunque la exposición de su contenido excede los objetivos del presente trabajo nos referiremos constantemente a objetos como número de recursos o cantidad de compuertas básicas necesarias para llevar a cabo un proceso, todos términos que pertenecen naturalmente a la jerga propia de la teoría de la complejidad [7, 16]. Por ahora, digamos solamente que el número de recursos necesarios requeridos por un algoritmo para resolver un cierto problema es una medida de la rapidez con que dicho problema puede resolverse a partir del algoritmo, dando entonces una idea cuantitativa precisa acerca de su eficiencia. Un algoritmo será más eficiente que otro en tanto y en cuanto requiera de menor cantidad de recursos para resolver el mismo problema. Por ejemplo, el algoritmo de factorización de Shor está basado en la transformada de Fourier cuántica [7] e incluye la posibilidad de resolver el problema de la factorización de un número entero con una cantidad de recursos exponencialmente menor que con el mejor algoritmo clásico conocido. El algoritmo de Grover resuelve el problema de la búsqueda de un ítem marcado en una base de datos desordenada con una cantidad de recursos aproximadamente igual a la raíz cuadrada de la cantidad de recursos requerida por el mejor algoritmo clásico conocido lo cual constituye ciertamente una menos sorprendente pero aún notable mejora [7].

En las secciones siguientes, pasaremos a introducir un lenguaje eficiente y

poderoso para la descripción de algoritmos cuánticos que es el de los circuitos cuánticos. Los circuitos cuánticos, no son más que arreglos de un conjunto discreto de componentes que describen procesos computacionales. Este tipo de construcciones, nos permitirá cuantificar el costo de un algoritmo en términos de nociones tales como el número total de compuertas requeridas o la longitud del circuito. El lenguaje circuital funciona también como una caja de herramientas y trucos que simplifica el diseño de los algoritmos y facilita la comprensión de los mismos desde el punto de vista conceptual.

1.1.1. Estados computacionales. El espacio de los qbits

El bit es el concepto fundamental de la computación e información clásica. La analogía cuántica es el bit cuántico (o qbit por simplicidad). La diferencia entre el bit clásico y el qbit es que, mientras el bit clásico puede estar en dos estados lógicos -0 o 1- el bit cuántico puede estar en otros estados distintos de $|0\rangle$ o $|1\rangle$ pues es también posible formar combinaciones lineales complejas de estos estados lógicos llamadas usualmente *superposiciones*. Dichas superposiciones son de la forma $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, donde α y β son constantes complejas que satisfacen la condición de normalización $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ (para los estados de los bits cuánticos usaremos deliberadamente la notación usual de los *brackets*). Mientras que siempre podemos examinar el estado de un bit clásico para determinar si este está en el estado 0 o 1, es necesario destacar que las leyes de la mecánica cuántica impiden examinar un qbit para determinar su estado, es decir, los valores de las constantes complejas α y β . En efecto, todo lo que podemos hacer es medir el estado del qbit para obtener $|0\rangle$ con probabilidad $|\alpha|^2$, o $|1\rangle$ con probabilidad $|\beta|^2$. De esta interpretación probabilística de las amplitudes complejas surge naturalmente la condición de normalización. Luego, en general, un qbit es un vector unitario en un espacio de Hilbert bidimensional. La base ortonormal $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ de este espacio es la llamada *base computacional*.

Siendo $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, podemos reescribir la definición formal de qbit de modo que su estado dependa solamente de dos parámetros reales:

$$|\Psi\rangle = e^{i\gamma} \left(\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right) \quad (1.1)$$

En efecto, dado que el factor de fase global $e^{i\gamma}$ carece de consecuencias observables, el estado completo del qbit depende solamente de dos parámetros reales $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq \phi < 2\pi$ con lo cual, dicho conjunto es uno a uno con cada punto de la esfera unitaria. Esta esfera es usualmente llamada *esfera de Bloch* y provee una manera muy útil de pensar y visualizar el estado de un qbit tal como puede observarse en la figura 1.1. Muchas de las operaciones unitarias sobre el espacio de un qbit pueden ser descritas de manera pintoresca usando la esfera de Bloch. Lamentablemente, esta guía a la intuición es limitada pues no existe ninguna generalización simple conocida de este concepto aplicada a espacios de Hilbert de múltiples qbits.

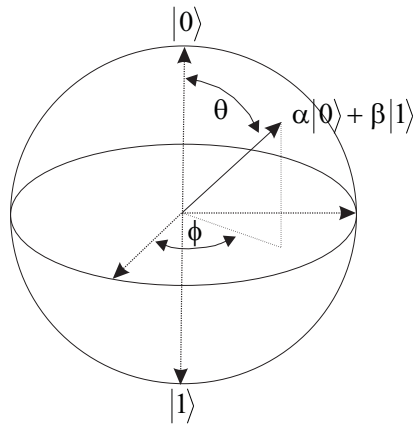


Figura 1.1: Representación esquemática de la esfera de Bloch. Los polos norte y sur corresponden a los estados de la base computacional

1.1.2. Estados de múltiples qbits

Supongamos ahora que tenemos dos qbits. Si estos qbits fueran en realidad bits clásicos, habría solo cuatro estados posibles: 00, 01, 10 y 11. En el caso cuántico, aparecen nuevamente un continuo de estados de la forma:

$$|\Psi\rangle = \alpha_{00} |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 + \alpha_{01} |0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 + \alpha_{10} |1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 + \alpha_{11} |1\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 \quad (1.2)$$

y similarmente al caso de un qbit, el resultado de la medición de este estado será el estado de dos bits clásicos $|i\rangle_1 \otimes |j\rangle_2$ con probabilidad $|\alpha_{ij}|^2$. En este punto, es conveniente establecer algunas convenciones de notación. En ocasiones (y cuando esto no genere confusión) omitiremos el símbolo de producto tensorial " \otimes " presente en cada término de la ecuación (1.2). Más aún, también puede resultar conveniente denotar al estado computacional de N qbits como una cadena binaria de longitud N ordenada encerrada en el símbolo de braket omitiendo los subíndices y asociando el número de qbit con la posición en la cadena: $|i\rangle_1 \otimes |j\rangle_2 \otimes \cdots \otimes |k\rangle_N \equiv |ij\cdots k\rangle$. Otra convención que surge de manera natural es la de asociar a cada cadena binaria de N elementos el número entero $0 \leq x \leq 2^N - 1$ que corresponda a dicha representación binaria. Por ejemplo, en el espacio de dos qbits asignaremos $|00\rangle = |x = 0\rangle$, $|01\rangle = |x = 1\rangle$, $|10\rangle = |x = 2\rangle$, $|11\rangle = |x = 3\rangle$. Luego, en general el estado de N qbits puede denotarse sintéticamente como $\sum_{x \in \{0,1\}^N} \alpha_x |x\rangle$ donde la notación $x \in \{0,1\}^N$ significa que x está en el conjunto de cadenas binarias de longitud N . La condición de normalización sobre las amplitudes complejas es entonces: $\sum_{x \in \{0,1\}^N} |\alpha_x|^2 = 1$.

1.1.3. Operadores unitarios sobre el espacio de un qbit

Los circuitos clásicos consisten en cables y compuertas lógicas. Los cables son usados para transmitir información mientras que las compuertas lógicas realizan las manipulaciones de información necesarias para llevar a cabo un cierto proceso. En computación cuántica usaremos una terminología similar que conducirá a la idea de circuitos cuánticos. Para todo lo que sigue, asumiremos que tanto los estados cuánticos de un qbit como los operadores definidos sobre este espacio, están representados en coordenadas en la base computacional. Es decir, usaremos la representación:

$$\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

De acuerdo a los postulados de la mecánica cuántica, la evolución de un sistema cuántico cerrado (es decir, que no interactúa con otro sistema) se describe mediante un operador *unitario* definido sobre el espacio de Hilbert del sistema. Las compuertas más elementales que manipularán la información en estos circuitos cuánticos serán entonces los operadores unitarios sobre un qbit (u operadores del grupo $U(2)$). Dichos operadores son los isomorfismos definidos sobre el espacio de Hilbert de un qbit. Dado que conservan la norma estarán representados por las matrices complejas de 2×2 que satisfacen $U^\dagger U = I$ donde I es la identidad de 2×2 y pueden interpretarse como las transformaciones lineales biyectivas de la esfera de Bloch en sí misma. Como comentario adicional diremos que los operadores del grupo $U(2)$ tienen autovalores de modulo unidad y por lo tanto su determinante es ± 1 . Dentro de la estructura del grupo $U(2)$ existe un subgrupo llamado $SU(2)$ que son los operadores unitarios sobre un qbit de determinante $+1$. Una manera útil de describir los operadores del grupo $SU(2)$ es en términos de las rotaciones en un ángulo θ alrededor de la dirección del vector unitario \hat{n} en la esfera de Bloch, esto es:

$$R_{\hat{n}}(\theta) \equiv e^{-i\frac{\theta\hat{n}\cdot\vec{\sigma}}{2}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)I - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{n}\cdot\vec{\sigma} \quad (1.4)$$

donde I es la identidad de 2×2 y $\vec{\sigma} = (X, Y, Z)$ es un vector simbólico cuyas componentes son las matrices de Pauli [17]:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Notar que la matriz X de Pauli, coincide con la representación matricial de la compuerta clásica *NOT*. Observemos también, que los estados computacionales pueden definirse como los autoestados del operador Z de Pauli siendo éste, el único de los tres generadores de $SU(2)$ definidos en las ecuaciones (1.5) cuya representación es diagonal en la base computacional. En particular

las rotaciones alrededor de los ejes \hat{x} , \hat{y} y \hat{z} en la esfera de Bloch (es decir, las rotaciones generadas por las matrices de Pauli) son:

$$R_{\hat{x}}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -i \sin \frac{\theta}{2} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}; \quad (1.6)$$

$$R_{\hat{y}}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}; \quad (1.7)$$

$$R_{\hat{z}}(\theta) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Notar que las rotaciones generadas por Y son las transformaciones del grupo $SO(2)$, es decir las rotaciones en el espacio ordinario. Un operador unitario arbitrario sobre el espacio de un qbit puede escribirse entonces $U = e^{i\alpha} R_{\hat{n}}(\theta)$. El factor de fase global $e^{i\alpha}$ da el signo correcto del determinante tomando $\alpha = \pi/2$ en el caso en que U no sea una rotación en la esfera de Bloch. Otro resultado importante y que será muy útil a la hora de procurar estrategias de simulación óptica de los operadores $U(2)$ es que existen muchas maneras de representar a un operador unitario arbitrario sobre el espacio de los qbits como combinación de rotaciones y (eventualmente) factores globales de fase. Nosotros usaremos la llamada descomposición $Z - Y$ que es de la forma:

$$U = e^{i\alpha} R_{\hat{z}}(\beta) R_{\hat{y}}(\gamma) R_{\hat{z}}(\delta) \quad (1.9)$$

donde los parámetros α , β , γ y δ son números reales.

La notación circuital básica para referirnos a operadores unitarios sobre el espacio de un qbit será la siguiente:



Figura 1.2: Notación circuital para el operador unitario sobre un qbit

La línea recta representa un cable que es capaz de acarrear la información

contenida en el estado de un qbit. El símbolo de compuerta es un cuadrado que identifica al operador unitario en cuestión y que interrumpe el libre flujo de la información a través de la línea. El estado del qbit del lado izquierdo de la compuerta es modificado por la acción del operador para dar el estado del qbit a la derecha de la compuerta.

1.1.4. Operaciones sobre múltiples qbits. Operaciones controladas

En computación existen algunas compuertas clásicas de uso corriente que son aplicaciones definidas sobre múltiples bits. Las más notables son las compuertas *AND*, *OR*, *XOR* (también llamada *OR* exclusivo), *NAND* y *NOR* cuyas tablas de verdad son ampliamente conocidas. Por ejemplo, un importante resultado teórico es que cualquier función definida sobre un conjunto de bits clásicos puede computarse componiendo compuertas del tipo *NAND* solamente, la cual es considerada entonces como una compuerta *universal*. El arquetipo de compuerta cuántica sobre múltiples qbits es el operador *NOT*-controlado, o simplemente *CNOT*. Esta compuerta es una aplicación sobre estados de dos qbits que llamaremos bit de control y bit blanco (o *target* en la jerga) y consiste en negar el estado del bit target cada vez que el estado del bit de control sea $|1\rangle$ y no modificar al target cuando el bit de control sea $|0\rangle$. Actuando sobre cada elemento de la base computacional el operador *CNOT* da explícitamente:

$$|00\rangle \rightarrow |00\rangle; |01\rangle \rightarrow |01\rangle; |10\rangle \rightarrow |11\rangle; |11\rangle \rightarrow |10\rangle. \quad (1.10)$$

Su representación matricial en la base computacional del espacio de dos qbits es:

$$\mathbf{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Otra manera de describir al operador $CNOT$ es pensarlo como a una generalización (reversible) de la compuerta clásica XOR que no es otra cosa que la suma módulo 2 definida en $\{0, 1\}^2$. La acción de este operador puede resumirse como $|x, y\rangle \rightarrow |x, y \oplus x\rangle$ donde el símbolo \oplus representa la suma módulo dos, y que es exactamente lo que hace la compuerta clásica XOR . Esto es, el bit de control y el bit target se suman módulo dos y el resultado se almacena en el bit target. De la representación matricial definida en la ecuación (1.11) que consiste en dos bloques unitarios en cada elemento de la diagonal de 2×2 se deduce que $CNOT$ es a su vez unitario.

Existen muchas operaciones sobre múltiples qbits y operaciones controladas que son muy útiles, pero la importancia de $CNOT$ radica en el hecho de que junto con las operaciones unitarias sobre un qbit forman el conjunto de compuertas cuánticas llamadas *universales*. El concepto de universalidad está asociado a la posibilidad de reducir la aplicación de un operador unitario sobre N qbits arbitrario a la aplicación iterada de un conjunto de compuertas que pueden considerarse *elementales* en algún sentido. Puede demostrarse [7] el siguiente resultado de universalidad: "Cualquier compuerta lógica sobre el espacio arbitrario de múltiples qbits puede implementarse usando solamente compuertas $CNOT$ y operadores unitarios de un qbit". Este último resultado, puede considerarse como la analogía cuántica de la universalidad de la compuerta $NAND$ clásica.

La notación circuital para referirnos a la compuerta $CNOT$ será la siguiente:

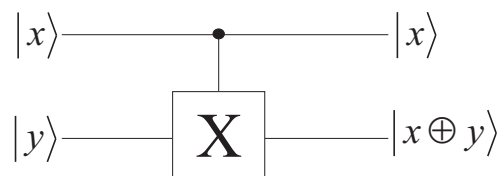


Figura 1.3: Notación circuital para el operador $CNOT$ y descripción esquemática de su acción

1.1.5. Mediciones en el espacio de un qbit

Ya hemos descripto brevemente el mecanismo de medición de un qbit en el estado $\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$. Los postulados de la mecánica cuántica, establecen que dicha medición será un proceso probabilístico que da como resultados posibles 0 o 1 y que deja al qbit en uno de los dos estados correspondientes $|0\rangle$ o $|1\rangle$ con probabilidades $|\alpha|^2$ y $|\beta|^2$ respectivamente. Situemos este proceso dentro del formalismo más general que procede de los postulados de la mecánica cuántica. Las mediciones cuánticas están descriptas por una colección $\{M_m\}$ de operadores de medida definidos en el espacio de estados del sistema que pretende medirse. El índice m se refiere a los resultados posibles de la medición. Si el estado del sistema antes de realizar la medición del observable es $|\Psi\rangle$, los postulados de la mecánica cuántica afirman que, al realizar una medición del observable M la probabilidad de obtener el resultado m es $p(m) = \langle \Psi | M_m^\dagger M_m | \Psi \rangle$. Además, si el resultado de la medición es m , el estado del sistema inmediatamente posterior a la medición es:

$$|\Psi^m\rangle = \frac{M_m |\Psi\rangle}{\sqrt{\langle \Psi | M_m^\dagger M_m | \Psi \rangle}} \quad (1.12)$$

La ecuación (1.12) define el estado post-medición del sistema y es la descripción matemática precisa del postulado referido al colapso de la función de onda luego de la medición. Finalmente, como la suma de las probabilidades debe ser uno (para cualquier estado $|\Psi\rangle$), concluimos que la colección de operadores de medida $\{M_m\}$ deberá satisfacer la relación de *completitud*:

$$1 = \sum_m p(m) = \sum_m \langle \Psi | M_m^\dagger M_m | \Psi \rangle \Rightarrow \sum_m M_m^\dagger M_m = I \quad (1.13)$$

Un importante caso particular es el formalismo de von Neumann para las mediciones proyectivas. En general una medición proyectiva está descripta por un *observable* M que es un operador autoadjunto definido en el espacio de estados. El operador M tiene entonces la descomposición espectral:

$$M = \sum_m m P_m \quad (1.14)$$

donde P_m es el proyector sobre el autoespacio de M de autovalor m y $\sum_m P_m^\dagger P_m = \sum_m P_m^2 = \sum_m P_m = I$. Los posibles resultados de las mediciones corresponden a dichos autovalores m del observable M . En este caso, es obvio que la colección de operadores de medida está formada por los proyectores $\{P_m\}$. En el marco del formalismo de von Neumann para las mediciones proyectivas medir el estado del qbit $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ es equivalente a considerar como operadores de medida a los proyectores $\{|0\rangle\langle 0|, |1\rangle\langle 1|\}$ sobre los autoestados del observable representado por el operador Z de Pauli asignando el estado $|0\rangle$ al autovalor $+1$ y el estado $|1\rangle$ al autovalor -1 . Las probabilidades de medir 0 o 1 son respectivamente:

$$|\alpha|^2 = |\langle \Psi | 0 \rangle|^2, \quad |\beta|^2 = |\langle \Psi | 1 \rangle|^2 \quad (1.15)$$

Para representar esta clase de mediciones en notación circuital usaremos el siguiente símbolo:

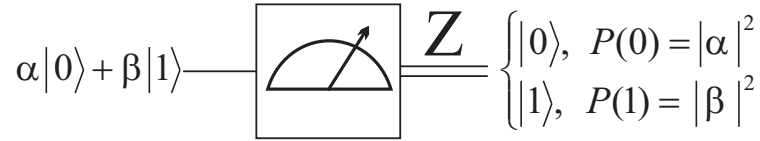


Figura 1.4: Notación circuital para la medición en la base computacional

En este caso, el proceso de medición transforma al estado del qbit $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ en un bit clásico probabilístico que es 0 con probabilidad $|\alpha|^2$ o 1 con probabilidad $|\beta|^2$. La distinción entre el qbit y el bit clásico es que este último es acarreado por cables representados con dos líneas en vez de una.

Cabe mencionar, que la mecánica cuántica permite además otro tipo de mediciones proyectivas pues podemos considerar otras bases distintas de la base computacional. En efecto, consideremos la base ortonormal del espacio de un qbit $\{|a\rangle, |b\rangle\}$ y sea U el operador (unitario) de cambio de base que conecta dicha base con la base computacional, es decir $U|a\rangle = |0\rangle$ y $U|b\rangle = |1\rangle$. Conforme a los postulados de la mecánica cuántica si efectuamos una medición proyectiva del estado $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ en la base $\{|a\rangle, |b\rangle\}$, entonces

las probabilidades de obtener como resultado a o b son $P(a) = |\langle \Psi | a \rangle|^2$ y $P(b) = |\langle \Psi | b \rangle|^2$ respectivamente. Dichas expresiones pueden reescribirse:

$$P(a) = |\langle \Psi | a \rangle|^2 = |(\langle \Psi | U^\dagger) |0\rangle|^2 \quad (1.16)$$

$$P(b) = |\langle \Psi | b \rangle|^2 = |(\langle \Psi | U^\dagger) |1\rangle|^2 \quad (1.17)$$

De donde se deduce por analogía con las ecuaciones 1.16 que el proceso equivalente a medir al estado $|\Psi\rangle$ en la base $\{|a\rangle, |b\rangle\}$ es medir al estado $U|\Psi\rangle$ en la base computacional. En ambos casos, conforme a la ecuación (1.12) el estado del sistema luego de la medición es:

$$\frac{\langle \Psi | i \rangle}{\sqrt{|\langle \Psi | i \rangle|^2}} |i\rangle; \quad i = a, b \quad (1.18)$$

1.1.6. Mediciones en el espacio de múltiples qbit. Estados puros y mixtos. Entrelazamiento

En la sección 1.2.2 nos hemos referido a estados de múltiples qbits como una generalización natural de la noción de estado de un qbit. La descripción del proceso de medición en el espacio de estados de múltiples qbits es idéntico al descrito en la sección anterior para el caso de un qbit siempre y cuando apliquemos el formalismo para el espacio de Hilbert completo. La diferencia aparece cuando pretendemos medir solamente un cierto subconjunto de los qbits del espacio de Hilbert completo. Para tratar este caso es realmente muy conveniente introducir, al menos brevemente, el formalismo del operador densidad que introduce un lenguaje muy útil a la hora de describir sistemas cuánticos cuyos estados no se conocen completamente. Llamaremos a estos, *estados mixtos* en contraposición a los *estados puros*, que son aquellos que se conocen completamente. Para ser más precisos, supongamos que un sistema cuántico en un estado mixto está en alguno de los estados $|\Psi_i\rangle$ con probabilidades respectivas p_i . Diremos entonces que el estado del sistema está descrito por el *ensemble de estados puros* $\{p_i, |\Psi_i\rangle\}$. La representación algebraica adecuada para describir al estado del sistema es el operador den-

sidad, definido por la ecuación:

$$\rho \equiv \sum_i p_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i| \quad (1.19)$$

Es decir, el operador densidad asociado al ensemble de estados puros $\{p_i, |\Psi_i\rangle\}$ se expresa como la suma de los proyectores sobre cada elemento del ensemble, pesado por su respectiva probabilidad. Es inmediato verificar que ρ es positivo y de traza unitaria. En efecto:

$$\text{tr}(\rho) = \sum_i p_i \text{tr}(|\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|) = \sum_i p_i = 1. \quad (1.20)$$

Además para todo vector $|\varphi\rangle$ del espacio de estados es:

$$\langle \varphi | \rho | \varphi \rangle = \sum_i p_i \langle \varphi | \Psi_i \rangle \langle \Psi_i | \varphi \rangle = \sum_i p_i |\langle \varphi | \Psi_i \rangle|^2 \geq 0 \quad (1.21)$$

El operador densidad asociado a un estado puro $|\Psi\rangle$ es simplemente la proyección ortogonal sobre dicho estado $P_{|\Psi\rangle} = |\Psi\rangle \langle \Psi|$. Aunque no profundizaremos demasiado en esta cuestión, es importante mencionar, que un operador densidad dado puede estar asociado a infinitos ensembles de estados puros distintos. Esta propiedad se conoce como *libertad unitaria en el ensemble para el operador densidad* [7, 18]. Otra importante propiedad de los operadores de densidad afirma que $\text{tr}(\rho^2) \leq 1$ y que la igualdad vale, si y solo si, ρ es un estado puro [7, 18].

Las mediciones también pueden describirse fácilmente en términos del operador densidad. En efecto, supongamos que realizamos una medición descrita por los operadores de medida M_m . Si el estado inicial es $|\Psi_i\rangle$ entonces la probabilidad de obtener el resultado m es:

$$p(m|i) = \langle \Psi_i | M_m^\dagger M_m | \Psi_i \rangle = \text{tr}(M_m^\dagger M_m |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|) \quad (1.22)$$

La última igualdad se deduce del hecho de que podemos calcular la traza usando una base del espacio de Hilbert que contenga al estado $|\Psi_i\rangle$. Luego, si

el sistema está en el ensemble de estados puros definido por la ecuación (1.19), la ley de probabilidades totales garantiza que la probabilidad de obtener el resultado m es:

$$\begin{aligned}
 p(m) &= \sum_i p(m|i)p_i \\
 &= \sum_i \text{tr} (M_m^\dagger M_m |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|) p_i \\
 &= \text{tr} (M_m^\dagger M_m \rho)
 \end{aligned} \tag{1.23}$$

Cuál es el operador densidad del sistema concluída la medición y habiendo obtenido el resultado m ?. Esto puede inferirse fácilmente a partir de la ecuaciones (1.12) y (1.19). Una vez obtenido el resultado m , es natural pensar que tendremos entonces un ensemble de estados puros $\{p(i|m), |\Psi_i^m\rangle\}$ donde $|\Psi_i^m\rangle$ es el estado del sistema luego de la medición si el estado inicial era $|\Psi_i\rangle$ y las probabilidades (condicionales) respectivas $p(i|m)$ son las probabilidades de estar en el estado $|\Psi_i^m\rangle$ sabiendo que el resultado de nuestra medición fue m . Usando esto último y el hecho de que $p(i|m) = p(m,i)/p(m) = p(m|i)p_i/p(m)$ se obtiene que el operador densidad resultante luego de haber obtenido el resultado m es:

$$\rho_m = \frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{tr} (M_m M_m^\dagger \rho)} \tag{1.24}$$

Quizás la aplicación más profunda del operador densidad sea la descripción del estado de un cierto subsistema que forma parte de un sistema compuesto. Supongamos que un sistema físico consta de dos subsistemas A y B . Si H_A y H_B son los espacios de Hilbert de cada uno de estos subsistemas, entonces el estado del sistema compuesto será un operador densidad ρ^{AB} sobre el espacio de Hilbert compuesto $H^{AB} = H_A \otimes H_B$. Definimos el operador densidad reducida para el subsistema A según:

$$\rho^A = \text{tr}_B(\rho^{AB}) \tag{1.25}$$

donde tr_B es una aplicación (lineal) definida sobre los operadores del espacio de Hilbert del sistema compuesto conocida como *traza parcial* sobre el subsistema B . La traza parcial se define como:

$$tr_B (|a_1\rangle \langle a_2| \otimes |b_1\rangle \langle b_2|) \equiv |a_1\rangle \langle a_2| tr (|b_1\rangle \langle b_2|) \quad (1.26)$$

donde la operación de traza que aparece en el miembro derecho de la última ecuación es la operación de traza usual: $tr (|b_1\rangle \langle b_2|) = \sum_k \langle b_k | b_1\rangle \langle b_2 | b_k\rangle = \sum_k \langle b_2 | b_k\rangle \langle b_k | b_1\rangle = \langle b_1 | b_2\rangle$. No es en absoluto obvio que la matriz densidad reducida para el subsistema A es, en algún sentido, la descripción adecuada del estado de dicho subsistema. Aunque no entraremos en detalles, mencionaremos solamente que la justificación física que permite aceptar esta identificación es que el operador de densidad reducida provee la estadística correcta para mediciones efectuadas sobre el subsistema A . Ahora bien: si aceptamos este hecho como cierto, el problema de la medición cuántica sobre un subconjunto de qbits de un espacio de Hilbert de múltiples qbits está completamente resuelto. Todo lo que tenemos que hacer es tomar la matriz densidad del sistema completo, calcular la traza parcial sobre el complemento del subsistema que pretende medirse y luego aplicar los postulados de la mecánica cuántica siendo que estos proveen toda la información acerca de las probabilidades sobre los resultados posibles de la medición y el estado del sistema inmediatamente posterior. Consideremos como ejemplo no trivial para la aplicación de estas nociones al *estado de Bell* $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$. Su operador densidad en el espacio de Hilbert de dos qbits es:

$$\begin{aligned} \rho &= \left(\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\langle 00| + \langle 11|}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{|00\rangle \langle 00| + |00\rangle \langle 11| + |11\rangle \langle 00| + |11\rangle \langle 11|}{2} \end{aligned} \quad (1.27)$$

Tomando la traza parcial sobre el segundo qbit, obtenemos el operador densidad reducida correspondiente al estado del primer qbit:

$$\begin{aligned}
 \rho^1 &= \text{tr}_2(\rho) \\
 &= \frac{|0\rangle\langle 0| \langle 0| 0\rangle + |0\rangle\langle 1| \langle 0| 1\rangle + |1\rangle\langle 0| \langle 1| 0\rangle + |1\rangle\langle 1| \langle 1| 1\rangle}{2} \\
 &= \frac{|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|}{2} \\
 &= \frac{I}{2}
 \end{aligned} \tag{1.28}$$

Notemos que este estado *es un estado mixto* ya que $\text{tr}((I/2)^2) = 1/2 < 1$. Esto significa que, aunque el estado del sistema completo de dos qbits es un estado puro, el primer qbit está en un estado mixto. En este caso el estado del primer qbit es *máximamente mixto* (o de máxima ignorancia) ya que $I/2$ es (entre otras) la representación del ensemble de estados computacionales con idéntica probabilidad. Aunque tengamos conocimiento completo del estado del sistema como un todo, carecemos del conocimiento completo del estado de un subsistema. Los estados de sistemas compuestos que presentan esta curiosa propiedad se llaman estados *entrelazados* y cumplen un rol fundamental en computación e información cuántica.

Consideramos que la reseña anterior proporciona información suficiente, al menos para nuestros propósitos. Habiendo concluido la revisión de los conceptos fundamentales de información cuántica, continuaremos describiendo los elementos de óptica necesarios para implementar las simulaciones propuestas. Las secciones siguientes desarrollarán en forma sintética las nociones de procesamiento de imágenes con iluminación coherente que serán el sustento de la analogía propuesta.

1.2. Procesamiento de imágenes con iluminación coherente

Para mostrar la capacidad de algunos sistemas ópticos para procesar información (y en particular para representar clásicamente ciertos aspectos

de los procesos de información cuántica), debemos situarnos en el contexto del uso que se ha dado a la óptica para el procesamiento de señales bidimensionales representadas en imágenes [19–23]. Para ello, es fundamental la comprensión de las propiedades matemáticas de los *sistemas lineales* bidimensionales [24, 25]. Por otra parte, el conocimiento completo acerca de como los sistemas formadores de imágenes se comportan como sistemas lineales requiere a su vez el manejo de herramientas que proceden de la teoría electromagnética, en particular de la *teoría escalar de la difracción* [24, 26–28]. En esta sección mencionaré en forma sucinta los elementos que considere necesarios para poder desarrollar una analogía completa entre el procesamiento de imágenes (o procesamiento de señales bidimensionales usando técnicas ópticas) y los procesos de información cuántica representables clásicamente.

Inspeccionando la evolución de la óptica con alguna perspectiva histórica, vemos que desde finales de la década del 30 de la pasada centuria aproximadamente, su desarrollo ha mostrado ciertos aspectos comunes con disciplinas aparentemente poco afines a ella como la ciencia de las comunicaciones y de la transmisión de información, que suelen ser objeto de estudio de la ingeniería eléctrica. Los puntos en común no son pocos, pues tanto los sistemas de comunicación como los sistemas formadores de imágenes están diseñados para coleccionar o transformar información. En el caso de los sistemas de comunicaciones, la información es generalmente de naturaleza temporal (la modulación de un voltaje o una corriente en forma de onda); mientras que en el caso de la óptica, la información es codificada espacialmente (distribuciones espaciales de amplitud, fase o intensidad). Es evidente que, desde el punto de vista abstracto, esta diferencia carece de importancia y que formalmente, ambos sistemas pueden tratarse con los mismos instrumentos matemáticos. Por ejemplo, muchas redes electrónicas y dispositivos formadores de imágenes comparten ciertas propiedades conocidas como *linealidad e invarianza* y que describiremos brevemente más adelante. Cualquier red o dispositivo (electrónico, óptico o de cualquier naturaleza) que posea estas dos propiedades puede ser descrito matemáticamente con relativa facilidad usando técnicas del *análisis de Fourier*. Luego, así como es conveniente describir a un

amplificador de audio en términos de su respuesta en frecuencia (temporal), también suele ser conveniente describir un sistema formador de imágenes en términos de su respuesta en frecuencia (espacial). Antes de revisar los conceptos de óptica, veamos brevemente cuales son las propiedades fundamentales y los elementos para la descripción de los sistemas lineales invariantes.

1.2.1. Sistemas lineales espacialmente invariantes

Ya he mencionado que las propiedades de linealidad e invarianza de los sistemas formadores de imágenes se fundamentan en la teoría escalar de la difracción. Revisemos brevemente la conexión entre estos dos conceptos fundamentales. Comencemos definiendo que entendemos por *sistema* desde el punto de vista abstracto. Un sistema es una *aplicación* definida sobre un conjunto de *funciones de entrada* en un conjunto de *funciones de salida*. En el caso de redes electrónicas, las entradas y salidas serán funciones reales (corrientes o voltajes) dependientes de una única variable real (el tiempo); en el caso de sistemas formadores de imágenes, las entradas y salidas serán funciones reales (intensidad) o complejas (amplitud del campo) dependientes de dos variables reales independientes (localización espacial en algún plano). En lo que sigue, enfocaré la discusión al caso de interés para procesamiento de imágenes con iluminación coherente, en donde las funciones de entrada y salida son funciones complejas de dos variables reales espaciales: $f : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{C}$ y de soporte compacto. Más adelante, cuando discutamos los elementos de óptica, veremos que la noción de imagen procede de la modulación espacial en amplitud y fase de un frente de onda plano, y que esto puede describirse precisamente como una función compleja de dos variables reales. Una representación conveniente para un sistema es la de un operador característico $\mathbf{S}\{\}$ que mapea a cada función de entrada en una función de salida: $g_2(x_2, y_2) = \mathbf{S}\{g_1(x_1, y_1)\}$, donde las funciones $g_1(x_1, y_1)$ y $g_2(x_2, y_2)$ son las funciones de entrada y salida respectivamente. Un sistema se dice *lineal*, si el operador $\mathbf{S}\{\}$ que define al mismo preserva las combinaciones lineales; es decir, si para todo par de funciones p y q y para cualquier par de constantes

complejas a y b se cumple:

$$\mathbf{S} \{ap(x_1, y_1) + bq(x_1, y_1)\} = a\mathbf{S} \{p(x_1, y_1)\} + b\mathbf{S} \{q(x_1, y_1)\} \quad (1.29)$$

Dicha propiedad de linealidad, permite representar la respuesta del sistema a una función de entrada arbitraria en términos de las respuestas a ciertas funciones (o distribuciones) elementales. Por ejemplo, si pensamos a la función de entrada $g_1(x_1, y_1)$ como una combinación lineal de distribuciones δ de *Dirac* pesadas y desplazadas, tendremos la representación:

$$g_1(x_1, x_2) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\xi, \eta) \delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta) d\xi d\eta \quad (1.30)$$

La propiedad de linealidad definida en la ecuación (1.29) implica entonces que:

$$\begin{aligned} g_2(x_2, y_2) &= \mathbf{S} \left\{ \int \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\xi, \eta) \delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta) d\xi d\eta \right\} \\ &= \int \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\xi, \eta) \mathbf{S} \{ \delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta) \} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (1.31)$$

Finalmente, si denotamos con el símbolo $h(x_2, y_2; \xi, \eta) = \mathbf{S} \{ \delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta) \}$ a la respuesta del sistema en el punto (x_2, y_2) del plano de salida a una distribución δ de *Dirac* centrada en las coordenadas (ξ, η) del plano de entrada, tenemos entonces a las funciones de entrada y salida relacionadas a través la transformada integral siguiente:

$$g_2(x_2, y_2) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\xi, \eta) h(x_2, y_2; \xi, \eta) d\xi d\eta \quad (1.32)$$

Esta última expresión muestra que un sistema lineal está caracterizado completamente si se conoce la función $h(x_2, y_2; \xi, \eta)$ que se conoce como *respuesta al impulso* del sistema.

Por otra parte, diremos que el sistema lineal es *espacialmente invariante* si la respuesta al impulso $h(x_2, y_2; \xi, \eta)$ depende solo de las diferencias

$(x_2 - \xi)$ y $(y_2 - \eta)$. Esto significa que en un sistema espacialmente invariante la respuesta del sistema a un estímulo unitario (puntual) cambia solamente de localización (y no de forma funcional) cuando la fuente puntual que constituye el estímulo varía su localización en el plano de entrada. Para un sistema lineal y espacialmente invariante, la ecuación (1.32) toma la forma familiar de una *convolución* de la función objeto con la respuesta al impulso del sistema:

$$\begin{aligned} g_2(x_2, y_2) &= \int \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\xi, \eta) h(x_2 - \xi, y_2 - \eta) d\xi d\eta \\ &\equiv g_1 \otimes h \end{aligned} \quad (1.33)$$

La relación de convolución definida en la ecuación anterior, toma una forma particularmente simple luego de aplicar la *transformada de Fourier* a ambos miembros de dicha ecuación. En efecto, el teorema de convolución garantiza que los espectros de frecuencias espaciales de las funciones de entrada y salida que denotaremos $G_1(f_x, f_y)$ y $G_2(f_x, f_y)$ respectivamente, están relacionados según la ecuación:

$$G_2(f_x, f_y) = H(f_x, f_y) G_1(f_x, f_y) \quad (1.34)$$

donde la función $H(f_x, f_y)$ es la transformada de Fourier de la respuesta al impulso y que se denomina *función de transferencia*:

$$\begin{aligned} H(f_x, f_y) &= \int \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi, \eta) \exp[-2\pi i (f_x \xi + f_y \eta)] d\xi d\eta \\ &= \mathcal{F} \{h(\xi, \eta)\}_{(f_x, f_y)} \end{aligned} \quad (1.35)$$

Notar que la operación de convolución definida en la ecuación (1.33) necesaria para hallar la respuesta del sistema (lineal y espacialmente invariante) a una función arbitraria de entrada, es reemplazada en la ecuación (1.34) por la secuencia de operaciones generalmente más simples de transformación de Fourier, multiplicación y transformación inversa de Fourier. Desde otro pun-

to de vista, las relaciones (1.33) y (1.34) indican que para un sistema lineal espacialmente invariante, la función de entrada puede ser descompuesta en funciones elementales más convenientes que las distribuciones δ . Estas funciones elementales alternativas, son las funciones exponenciales complejas de la representación integral de Fourier. Escribiendo a la función de entrada g_1 en su representación integral de Fourier estamos simplemente descomponiendo a dicha función en términos de sus contribuciones armónicas puras de frecuencias espaciales (f_x, f_y) . La multiplicación del espectro de frecuencias de la función de entrada G_1 por la función de transferencia H describe la modificación efectuada por el sistema sobre cada contribución armónica elemental. Notemos que en el espacio de frecuencias, dicho efecto es simplemente un cambio en la amplitud y un corrimiento de fase que proviene de multiplicar por el número complejo $H(f_x, f_y)$ en cada punto (f_x, f_y) . La transformación inversa del espectro de salida $G_2 = G_1 H$ sintetiza la función de salida g_2 por superposición aditiva de las funciones elementales modificadas por la función de transferencia. Se dice entonces que las funciones exponenciales complejas son las *autofunciones de los sistemas lineales invariantes* y que la función de transferencia $H(f_x, f_y)$ describe al continuo de autovalores correspondientes. Obviando los detalles más sutiles de la afirmación puede pensarse que, en algún sentido, el análisis de Fourier opera como una descomposición del espacio de funciones en la base que diagonaliza al operador característico \mathbf{S} de todo sistema lineal invariante. La conexión matemática entre este formalismo y ciertos aspectos familiares de la mecánica cuántica son tan evidentes que ya nos permiten intuir los fundamentos de la analogía que pretendemos trazar. El paso siguiente es precisar la conexión entre la óptica y las ideas que hemos comentado aquí. Precisamente de ello nos ocuparemos en la sección que sigue.

1.2.2. De la teoría escalar de la difracción a los sistemas formadores de imágenes

La formulación moderna y definitiva de la teoría escalar de la difracción se basa en la teoría electromagnética y se debe principalmente a los trabajos de

Kirchhoff [29] y posteriormente a los de Rayleigh [30] y Sommerfeld [27, 28] que aclararon algunas dificultades matemáticas presentes en la formulación inicial de Kirchhoff. Por simplicidad citaremos uno de los resultados derivados de la teoría de Rayleigh y Sommerfeld. Partiendo de las ecuaciones de Maxwell, ellos demostraron que la amplitud compleja del campo eléctrico en un punto del espacio P_0 debido a la radiación proveniente de una abertura difractora plana Σ delimitada por una región opaca es:

$$E(P_0) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} E(P_1) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \cos \theta dS \quad (1.36)$$

Donde $E(P_1)$ es la amplitud compleja el campo en cada punto P_1 de la abertura difractora Σ , r_{01} es la distancia entre P_0 y P_1 y θ es el ángulo subtendido entre el vector $\vec{P_1P_0}$ y el vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ normal al plano de la abertura difractora, orientado de modo que la proyección de $\vec{P_1P_0}$ en la dirección normal tenga el mismo sentido que el vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ ($\cos \theta > 0$). La ecuación (1.36) suele llamarse fórmula de difracción de Rayleigh-Sommerfeld.

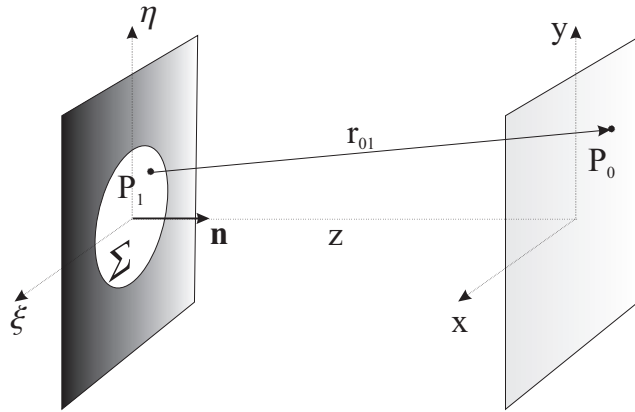


Figura 1.5: Geometría para la integral de difracción de Rayleigh-Sommerfeld

Utilizando el sistema de coordenadas sugerido en la figura 1.5, la ecuación (1.36) puede escribirse:

$$E(x, y) = \frac{z}{i\lambda} \iint_{\Sigma} E(\xi, \eta) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}^2} d\xi d\eta \quad (1.37)$$

con $r_{01} = [z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{1/2}$. Observar entonces que las superficies de fase constante en la exponencial compleja que aparece en el integrando de la fórmula (1.37) son precisamente las esferas que satisfacen la ecuación $r_{01}^2 = z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$ y que la amplitud del campo decae con el cuadrado de la distancia. El campo en el punto (x, y) es entonces proporcional a la superposición de todas las contribuciones esféricas infinitesimales de amplitud $(E(\xi, \eta)/r_{01}^2)d\xi d\eta$ tal como se enuncia en el llamado *principio de Huygens-Fresnel*.

A partir de la fórmula (1.37) se deducen las llamadas aproximaciones de Fresnel y Fraunhofer [24]. Dichas estimaciones, se obtienen aproximando a primer orden en cada punto del plano de observación las superficies esféricas de fase constante mencionadas: en efecto, aplicando la expansión binomial $\sqrt{1 + \epsilon} = 1 + 1/2\epsilon + O(\epsilon^2)$ a la expresión dada para r_{01} resulta:

$$r_{01} = z\sqrt{1 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \approx z \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x - \xi}{z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y - \eta}{z} \right)^2 \right] \quad (1.38)$$

Asumimos que el factor r_{01} del denominador de (1.37) puede aproximarse satisfactoriamente por la distancia entre el plano de observación y la pantalla difractora z de modo que $r_{01}^{-2} \approx z^{-2}$. Conservando la aproximación (1.38) en el factor de fase (que varía muy rápidamente ya que $k = 2\pi/\lambda$ es del orden de 10^7mts^{-1} para la zona visible del espectro) la integral (1.37) adquiere una nueva forma llamada integral de *difracción de Fresnel*:

$$\begin{aligned} E(x, y) &= \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \exp \left[i \frac{k}{2z} (x^2 + y^2) \right] \times \\ &= \int \int_{-\infty}^{+\infty} E(\xi, \eta) \exp \left[i \frac{k}{2z} (\xi^2 + \eta^2) \right] \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda z} (x\xi + y\eta) \right] d\xi d\eta \end{aligned} \quad (1.39)$$

Existe otra aproximación llamada usualmente de *Fraunhofer* que supone la hipótesis adicional $z \gg \pi/\lambda (\xi^2 + \eta^2)$. Observar que esta condición también

se escribe como $z/\lambda \gg \pi [(\xi/\lambda)^2 + (\eta/\lambda)^2]$ y en esta forma su significado físico no es difícil de comprender: en efecto, si consideramos las distancias adimensionales medidas en unidades de la longitud de onda, la última condición expresa que la distancia (adimensional) entre la pantalla difractora y el plano de observación debe ser mucho mayor que el área (adimensional) característica de la abertura difractora. Esto se da naturalmente cuando el plano de observación es muy distante y por tal razón, la difracción de Fraunhofer se denomina difracción de *campo lejano*. Una discusión más precisa acerca de los rangos de validez de las aproximaciones de Fresnel y Fraunhofer requiere estimaciones asintóticas de la integral de difracción de Rayleigh-Sommerfeld (1.36) basadas en la aproximación de fase estacionaria [26]. Con esta hipótesis adicional la integral de difracción de Fresnel toma una forma aún más simple llamada integral de *difracción de Fraunhofer* :

$$E(x, y) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \exp \left[i \frac{k}{2z} (x^2 + y^2) \right] \times \int \int_{-\infty}^{+\infty} E(\xi, \eta) \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda z} (x\xi + y\eta) \right] d\xi d\eta \quad (1.40)$$

Observar que salvo el factor de fase cuadrático que precede a esta última integral, esta expresión es simplemente la transformada de Fourier de la distribución de campo en la apertura evaluada en las frecuencias espaciales:

$$\begin{aligned} f_x &= x/\lambda z \\ f_y &= y/\lambda z \end{aligned} \quad (1.41)$$

Por otra parte, la eliminación del factor de fase cuadrático en (1.40) puede hacerse ópticamente con relativa facilidad mediante el uso de una lente esférica convergente. De hecho una de las propiedades más remarcables de las lentes convergentes es su capacidad para realizar la transformada de Fourier bidimensional (operación analógica extremadamente complicada) usando solamente las leyes básicas de la propagación y difracción de la luz. De he-

cho, puede demostrarse mediante argumentos geométricos sencillos que, en la *aproximación paraxial*, una lente esférica convergente de distancia focal f puede representarse mediante una función de transmitancia de la forma:

$$T_L(x, y) = \exp \left[-i \frac{k}{2f} (x^2 + y^2) \right] \quad (1.42)$$

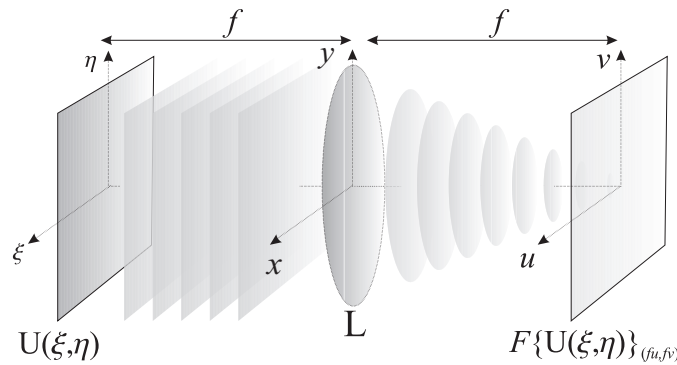


Figura 1.6: La lente esférica convergente como medio para obtener ópticamente la transformada de Fourier. Si una cierta transmitancia se dispone en el plano focal anterior de una lente esférica L, la distribución de la amplitud compleja del campo en el plano focal posterior es su transformada de Fourier.

Consideremos un sistema formado por un objeto descrito por una transmitancia compleja $U(\xi, \eta)$ iluminado uniformemente con un haz plano de incidencia normal y monocromático de amplitud unitaria. A distancia d se coloca una lente esférica convergente de distancia focal f cuya transmitancia está definida entonces por la fórmula (1.42). Supondremos además que el tamaño de la transparencia de entrada es lo suficientemente pequeño como para despreciar los efectos del tamaño finito de la lente (si no es este el caso, debe agregarse a la transmitancia (1.42) de la lente una función de pupila $P(x, y)$ que da cuenta de su extensión finita y que vale 1 dentro de la apertura de la lente y 0 afuera). Para hallar la distribución del campo $U_f(u, v)$ en el plano focal posterior de la lente, utilizamos la integral de difracción de Fresnel (1.39) para describir las propagaciones libres del haz luminoso en la aproximación paraxial; primero desde el plano objeto hasta el plano de la lente, y luego desde el plano de la lente hasta su plano focal posterior comose

muestra en la figura 1.6. Luego de algunos cálculos, se puede demostrar que la distribución de campo en el plano focal posterior de la lente resulta:

$$\begin{aligned}
 U_f(u, v) &= \frac{\exp \left[i \frac{k}{2f} \left(1 - \frac{d}{f} \right) (u^2 + v^2) \right]}{i\lambda f} \times \\
 &\quad \int \int_{-\infty}^{+\infty} U(\xi, \eta) \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda f} (u\xi + v\eta) \right] d\xi d\eta \\
 &= \frac{\exp \left[i \frac{k}{2f} \left(1 - \frac{d}{f} \right) (u^2 + v^2) \right]}{i\lambda f} \mathcal{F} \{U(\xi, \eta)\}_{(f_u, f_v)} \quad (1.43)
 \end{aligned}$$

Notemos que el factor cuadrático de fase que precede a la integral se anula idénticamente en el caso especial en que $d = f$. *Concluimos entonces que, cuando el plano de la transparencia de entrada coincide con el plano focal anterior de la lente, la distribución del campo en el plano focal posterior es exactamente la transformada de Fourier de la distribución de campo en el plano objeto.* Las variables (u, v) que dan cuenta de la posición en el plano focal posterior corresponden entonces a las frecuencias espaciales $(f_u = u/\lambda f, f_v = v/\lambda f)$. La ecuación (1.43) garantiza que si la función objeto es ubicada en un plano distinto del plano focal anterior de la lente, el campo resultante en su plano focal posterior es proporcional a la transformada de Fourier de la función objeto a menos de un factor de fase cuadrático. Una generalización de este resultado de gran utilidad experimental surge al disponer el objeto entre la lente y su plano focal posterior. En ese caso, el tamaño de la transformada de Fourier puede controlarse modificando la posición axial del plano objeto [24, 25]. Este es sin duda un resultado muy usado en el procesamiento óptico de la información. El dispositivo experimental para la transformada de Fourier óptica se esquematiza en la figura 1.6

1.2.3. Un sistema óptico lineal y espacialmente invariante: El procesador óptico coherente

Uno de los sistemas más utilizados para el procesamiento óptico de la información con iluminación coherente es el dispositivo que describiremos a

continuación y que es usualmente llamado *procesador coherente tipo 4f*. El nombre puede atribuirse al hecho de que la longitud total del dispositivo desde el plano objeto hasta el plano imagen final es cuatro veces la distancia focal de las lentes convergentes utilizadas para llevar a cabo el proceso. En todo lo que sigue y por simplicidad, despreciaremos los efectos difractivos debidos a la extensión finita de las lentes. El dispositivo se esquematiza en la figura 1.7.

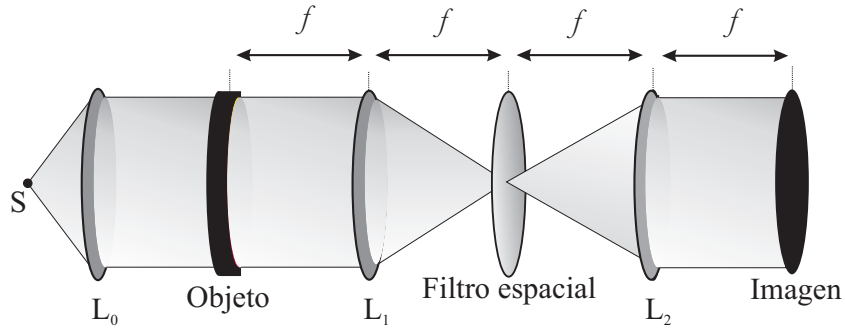


Figura 1.7: Esquema del dispositivo experimental para el procesador óptico coherente $4f$

La luz proveniente de una fuente puntual S es colimada por la lente L_0 . La transparencia de entrada cuya transmitancia tiene amplitud $g(x_o, y_o)$ es colocada inmediatamente después de la lente colimadora. Una segunda lente esférica convergente L_1 de distancia focal f es colocada a continuación, de modo que el plano de la transparencia de entrada coincida con su plano focal anterior. Sabemos por lo discutido en la sección anterior que la distribución del campo en el plano focal posterior (*o plano de Fourier*) de la lente L_1 es la transformada de Fourier de la distribución de campo a la entrada $G(x_F, y_F) = \mathcal{F}\{g(x_o, y_o)\}_{(f_x, f_y)}$. Nuevamente, las variables de frecuencia espacial y las coordenadas de la posición en el plano focal posterior de la lente L_1 están relacionadas según: $f_x = x_F/\lambda f$ y $f_y = y_F/\lambda f$. Si ahora consideramos al plano (x_F, y_F) como plano focal anterior de una tercera lente L_2 , entonces la distribución de campo en su plano focal posterior (x_i, y_i) corresponderá a una segunda transformada de Fourier $\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{g(x_o, y_o)\}\}_{(x_i, y_i)} = g(-x_i, -y_i)$. Aquí se observa que la propiedad de inversión del cuadrado de la transformada de Fourier es esencialmente la

predicción dada por la óptica geométrica para esta configuración, donde se obtiene una imagen final igual e invertida respecto de la imagen de entrada. Una interpretación alternativa y sumamente útil a nuestros propósitos es la que proviene de invertir el sistema de coordenadas del plano imagen final y suponer que la segunda lente realiza una transformada de Fourier inversa. Es claro que esto es solo un ardid matemático. La lente convergente realiza ópticamente la transformada de Fourier y no la transformada de Fourier inversa. No obstante la inversión del sistema de coordenadas provee una interpretación ciertamente atractiva y elegante del proceso completo. Según esta interpretación, el dispositivo completo es un sistema (lineal y espacialmente invariante) cuyo operador característico \mathbf{S} es la identidad. En efecto, la secuencia de transformaciones de este sistema óptico es la que sigue:

$$g(x_o, y_o) \xrightarrow{FT} G\left(\frac{x_F}{\lambda f}, \frac{y_F}{\lambda f}\right) \xrightarrow{FT^{-1}} g(x_i, y_i) \quad (1.44)$$

dejando entonces a la función de entrada invariante. Siendo la identidad el operador característico de nuestro sistema, entonces su respuesta al impulso debe ser una δ de Dirac:

$$\mathbf{S}\{\delta(x_o - \xi, y_o - \eta)\} = \delta(x_i - \xi, y_i - \eta) \quad (1.45)$$

Siendo que hemos despreciado los efectos difractivos debidos a los tamaños finitos de las lentes, la discusión anterior aparece como un formalismo que expresa de manera poco ortodoxa un resultado ya conocido y explicado desde la visión mucho más simple de la óptica geométrica. Consideremos ahora el mismo dispositivo pero modifiquemos ligeramente la secuencia de operaciones (1.44) colocando una nueva transparencia en el plano de Fourier de la lente L_2 . Dicha transparencia operará como un filtro espacial que modificará en alguna forma el espectro de frecuencias de la imagen de entrada. Si dicha transparencia tiene una transmitancia dada por la función $H(x_F/\lambda f, y_F/\lambda f)$ entonces la nueva secuencia de transformaciones es:

$$g(x_o, y_o) \xrightarrow{FT} G\left(\frac{x_F}{\lambda f}, \frac{y_F}{\lambda f}\right) H\left(\frac{x_F}{\lambda f}, \frac{y_F}{\lambda f}\right) \xrightarrow{FT^{-1}} (g \otimes h)(x_i, y_i) \quad (1.46)$$

donde tal como refiere la ecuación (1.35) la transmitancia del filtro definida por la función $H(x_F/\lambda f, y_F/\lambda f)$ será la transformada de Fourier de la función h que por su parte, se interpretará como la respuesta al impulso del sistema óptico.

En síntesis, el procesador óptico coherente, opera como un sistema lineal invariante sobre las funciones complejas de dos variables reales (de soporte compacto). La función de transmitancia en el plano de entrada del sistema, modula la amplitud y fase de un frente de onda plano que incide normalmente al plano de la transparencia y dicha modulación constituye la señal de entrada de nuestro sistema. Una lente esférica convergente realiza la transformada de Fourier bidimensional ópticamente (es decir, a partir de las leyes de la naturaleza y sin gastar ningún recurso para efectuar cálculos analógicos o digitales). Una segunda transparencia, actúa como función de transferencia, es decir manipula el espectro de frecuencias espaciales de la señal de entrada en alguna forma. Una segunda lente, realiza ópticamente la transformada inversa de Fourier (mediando una inversión del sistema de coordenadas en el plano imagen final) para obtener a la salida del dispositivo una señal modificada según la acción de la función de transferencia sobre el espectro de frecuencias espaciales de la señal de entrada. Matemáticamente, la salida será la convolución entre la señal de entrada y la respuesta al impulso del sistema (la transformada inversa de Fourier de la transmitancia del filtro) tal como se describe en las ecuaciones (1.33) y (1.46).

Hasta aquí hemos hecho una breve reseña de los elementos esenciales necesarios para comprender el resto del trabajo. Los capítulos restantes desarrollarán en detalle el contenido de nuestros aportes originales. Particularmente, el próximo capítulo contiene la descripción teórica de las estrategias de simulación óptica de algoritmos. Se discuten la representación de estados cuánticos como imágenes espacialmente organizadas así como las representaciones clásicas de los operadores unitarios de evolución como procesadores ópticos coherentes, con sus potenciales aplicaciones al procesamiento óptico de información cuántica, sus posibles ventajas y también sus limitaciones.

Capítulo 2

Estrategias de simulación óptica de algoritmos

La posibilidad de simular procesos de información cuántica usando procedimientos y técnicas de la óptica clásica ha sido analizada por varios autores [8–13]. La idea clave es utilizar la naturaleza ondulatoria del campo electromagnético para representar un estado cuántico. Luego, si dividimos el frente de onda plano proveniente de un haz de láser en 2^N regiones, la amplitud compleja del campo electromagnético en cada región puede ser asociada con la amplitud de probabilidad de un cierto estado de una base del espacio de Hilbert de un sistema cuántico 2^N -dimensional. La distribución espacial de intensidad del haz, es asociada en este esquema con la probabilidad de detectar cada uno de los estados de esta base (que convencionalmente pueden considerarse como estados computacionales). Adicionalmente, las evoluciones temporales de los estados representados también pueden ser simuladas. De hecho, tales evoluciones corresponden a la modificación de la amplitud compleja del campo electromagnético cuando el frente de onda se propaga a través de un cierto sistema óptico. En las secciones siguientes daremos una descripción detallada de los procedimientos que permiten representar clásicamente estos procesos mediante sistemas formadores de imágenes.

2.1. Estados cuánticos de N qbits como imágenes

Ya estamos en condiciones de describir las estrategias de simulación óptica de procesos de información cuántica. En las secciones anteriores nos referimos a un sistema formador de imágenes como a un sistema lineal e invariante definido sobre el espacio de funciones complejas de dos variables reales. Estudiamos además el esquema básico de funcionamiento del procesador óptico coherente tipo $4f$, que es uno de los dispositivos que pueden utilizarse para el procesamiento óptico de la información. La presente sección versará sobre la construcción de la analogía entre la noción de *imagen* tal como es utilizada en el procesamiento óptico coherente; esto es, la modulación de un frente de onda plano de incidencia normal en amplitud y fase mediante una transmitancia compleja y la noción de estado cuántico de un sistema cuyo espacio de Hilbert es de dimensión finita.

2.1.1. La función de onda en el espacio de posiciones de una partícula en el plano

Pensemos en principio en un sistema cuántico constituido por una partícula puntual (es decir sin estructura ni niveles energéticos de excitación internos), que puede moverse en un plano. El estado de dicha partícula estará especificado por un vector en el espacio de Hilbert de dimensión infinita que representa el continuo de posiciones posibles de dicha partícula en el plano. Una base natural del espacio de Hilbert para esta partícula es la base de autoestados del operador de posición $\{|x, y\rangle\}$ que satisface las relaciones de ortonormalidad y completitud:

$$\langle x, y | x', y' \rangle = \delta(x - x')\delta(y - y') \quad (2.1)$$

$$\int \int_{-\infty}^{+\infty} |x, y\rangle \langle x, y| dx dy = I \quad (2.2)$$

La primera de las relaciones anteriores constituye simplemente la descripción de la *función de onda* de una partícula perfectamente localizada en la posición $x = x'$, $y = y'$. La segunda relación permite representar al estado cuántico arbitrario $|\Psi\rangle$ del espacio de Hilbert como una expansión en la base de autoestados del operador de posición:

$$|\Psi\rangle = \int \int_{-\infty}^{+\infty} |x, y\rangle \langle x, y | \Psi \rangle dx dy \quad (2.3)$$

La *función de onda* $\Psi(x, y) = \langle x, y | \Psi \rangle$ es un número complejo para cada (x, y) y define el continuo de los coeficientes de la expansión. La condición de normalización sobre el estado arbitrario $|\Psi\rangle$ se escribe:

$$\int \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, y)|^2 dx dy = 1 \quad (2.4)$$

Esto conduce naturalmente a la interpretación ortodoxa de la mecánica cuántica que asigna a la función de onda el papel de una *densidad de probabilidad*. Esto es, si efectuamos la medición de la posición de nuestra partícula cuando ella está en el estado $|\Psi\rangle$, entonces la probabilidad de hallarla en el rectángulo infinitesimal $[x, x + dx] \times [y, y + dy]$ es $dP(x, y) = |\Psi(x, y)|^2 dx dy$.

2.1.2. Imágenes con iluminación coherente: Modulación espacial de un frente de onda plano

Para el procesamiento de imágenes con iluminación coherente, el objeto a analizar se describe mediante una transparencia que modula la amplitud compleja del campo electromagnético proveniente de un frente de onda plano de incidencia normal. Es decir, si consideramos un frente de onda plano, monocromático y de amplitud unitaria, proveniente de un haz de láser expandido, filtrado y colimado; que incide normalmente sobre el plano de una transparencia de transmitancia $T(x, y) = \rho(x, y) \exp[i\theta(x, y)]$ como indica la figura 2.1; las amplitudes complejas del campo eléctrico a izquierda y a derecha de la transparencia serán respectivamente: $E^-(x, y) = 1$ y $E^+(x, y) = T(x, y)$. Al proyectar la luz que emerge de la transparencia sobre una pantalla, o bien

efectuando un registro de la intensidad luminosa incidente sobre la misma mediante una cámara CCD, la distribución espacial de intensidad registrada será $|T(x, y)|^2 = \rho(x, y)^2$. Téngase en cuenta que aunque nuestra retina o una cámara CCD sean incapaces de efectuar un registro de la distribución espacial de fase $\theta(x, y)$ de la transmitancia, dichos factores de fase son los responsables de los fenómenos de interferencia que dan cuenta de las propiedades ondulatorias del campo electromagnético y que en última instancia, son los artífices de esta capacidad que muestran ciertos sistemas ópticos de simular clásicamente procesos de naturaleza cuántica. Pensando finalmente a la intensidad luminosa como a una densidad de energía, la energía total del campo sobre un elemento de área infinitesimal $dA = dx dy$ localizado en el entorno de un punto (x, y) del plano de la pantalla (o sobre el arreglo de fotodiodos de la cámara CCD) será entonces $dE(x, y) = |T(x, y)|^2 dx dy = \rho(x, y)^2 dx dy$.

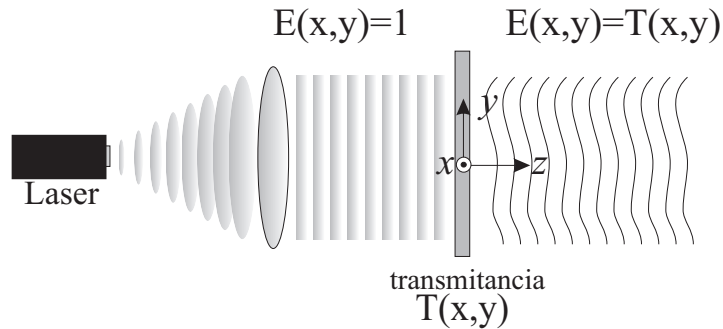


Figura 2.1: Modulación de un frente de onda plano por una transparencia. El frente de onda proviene de un haz de láser expandido filtrado y colimado. La transparencia modula la amplitud compleja del campo de modo que un campo de amplitud unitaria emerge de la transparencia con amplitud $E(x, y) = T(x, y)$

Es natural entonces establecer la analogía entre la función de onda de una partícula que se mueve en el plano, en la representación en el espacio de posiciones y la amplitud compleja del campo electromagnético correspondiente a un frente de onda plano modulado en amplitud y fase:

$$\Psi(x, y) \leftrightarrow \rho(x, y) \exp i\theta(x, y) \quad (2.5)$$

En esta representación, la distribución de intensidad luminosa $\rho(x, y)^2$ corresponderá a la densidad de probabilidad $|\Psi(x, y)|^2$ definida por el cuadrado del módulo de la función de onda en la representación en el espacio de posiciones. Consecuentemente, la energía total del campo $dE(x, y) = \rho(x, y)^2 dx dy$ en el elemento de área infinitesimal $dA = dx dy$ localizado en el punto (x, y) del plano, corresponderá a la probabilidad del hallar a la partícula en el rectángulo $[x, x + dx] \times [y, y + dy]$.

2.1.3. Imágenes espacialmente organizadas como estados cuánticos

Para representar estados computacionales (que corresponden a espacios de Hilbert de dimensión finita 2^N para el estado de N qbits) es necesario discretizar el espacio de Hilbert continuo anteriormente descrito. Esto puede hacerse naturalmente de muchas formas. Nosotros elegiremos una manera de codificar estados en distribuciones espaciales de campo electromagnético que ha sido llamada codificación en *cbits de posición* (*classical position cbits* en la jerga) [8, 9, 11, 12] y que consiste en dividir al dominio de la señal en dos mitades idénticas. Podrán identificarse a estas mitades según los nombres "arriba-abajo", "derecha-izquierda" o mediante cualquier convención dialéctica que se prefiera. Nosotros usaremos en general esta última. Asignaremos entonces a la mitad izquierda del dominio de la señal el estado computacional $|0\rangle$ y a la mitad derecha el estado computacional $|1\rangle$. El estado cuántico de un qbit aparece entonces codificado en las dos mitades del plano de definición de la señal. Así, el estado cuántico del espacio de Hilbert de un qbit H_2 donde uno de los estados de la base computacional está bien definido, corresponderá a una imagen donde la amplitud del campo electromagnético será no nula (aunque constante y uniforme) en una porción rectangular localizada en alguna de las dos mitades, siendo idénticamente nulo en el resto del plano tal como se ilustra en la figura 2.2. En general, la representación del estado cuántico arbitrario de un qbit $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ requiere del uso de un medio capaz de modular espacialmente el campo electromagnético en amplitud y fase.



Figura 2.2: Codificación espacial del estado de un qbit. (a) De los estados computacionales. (b) Del estado de un qbit general

Para representar los estados computacionales del espacio de Hilbert de dos qbits $H_2^{\otimes 2}$ consideramos el esquema de codificación para el estado del primer qbit que ya hemos descrito y que consiste en la división del plano de la señal en dos mitades idénticas. Seguidamente, cada una de estas dos mitades es a su vez dividida en otras dos. La mitad izquierda estará siempre asociada al estado computacional $|0\rangle$ y la mitad derecha al estado computacional $|1\rangle$. Ahora el plano completo estará dividido en cuatro porciones iguales identificadas mediante una cadena binaria de longitud 2 o bien mediante el número entero correspondiente a dicha representación binaria. De izquierda a derecha, tendremos entonces las regiones: $|x = 0\rangle = |00\rangle$, $|x = 1\rangle = |01\rangle$, $|x = 2\rangle = |10\rangle$ y $|x = 3\rangle = |11\rangle$. En la figura 2.3 podemos ver un esquema que representa esta organización del plano de la señal. Llamaremos *bit de posición* al primer bit, ya que este define la división del plano completo en las dos mitades derecha e izquierda. El segundo bit por su parte, será llamado *bit de paridad*, ya que los estados 0 o 1 del segundo bit definen posiciones en el plano pares o impares respectivamente conforme a la identificación de cada cadena binaria con un número entero.

La generalización de este proceso es inmediata: para representar los estados computacionales del espacio de Hilbert de N qbits $H_2^{\otimes N}$ efectuamos esta subdivisión del dominio de la señal N veces. Terminado este proceso, tendremos una correspondencia biunívoca entre cada región del dominio de

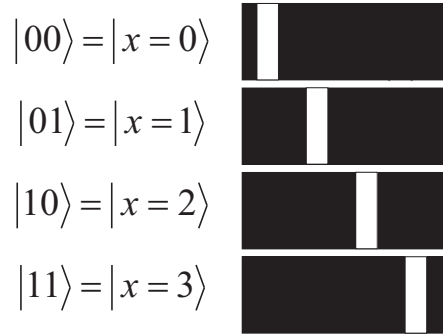


Figura 2.3: Codificación espacial del estado de dos qbits

la señal y las cadenas binarias de longitud N . La figura 2.4 representa esquemáticamente este procedimiento.

Un comentario adicional que vale la pena hacer, se refiere al proceso descrito en el párrafo anterior, que es esencialmente una discretización y un truncamiento posible del espacio de Hilbert del continuo bidimensional $\{|x, y\rangle ; (x, y) \in \mathbf{R}^2\}$ para la representación del espacio de Hilbert de N qbits. Insistimos en el hecho de que este último, es isomorfo a la cadena finita: $\{|k\rangle ; k = 0, 1, 2, \dots, 2^N - 1\}$ y por lo tanto es esencialmente una red unidimensional discreta. La naturaleza unidimensional de la representación óptica se pone en evidencia, identificando a cada estado de la base con una porción rectangular del dominio de la señal cuya dimensión característica es relevante en una única coordenada. Supondremos entonces simetría de traslación a lo largo de la coordenada no representativa e ignoraremos todos los efectos difractivos introducidos por el tamaño efectivamente limitado del sistema a lo largo de dicha coordenada.

Esta analogía ha demostrado ser muy útil a la hora de representar clásicamente procesos de computación cuántica e información cuántica en general, aunque también es cierto que posee muchas limitaciones. Posiblemente, la principal deficiencia de este esquema de codificación sea que es *exponencialmente ineficiente*, en el sentido de que el número de recursos necesarios para representar un sistema de tamaño N es 2^N . Físicamente, esto significa

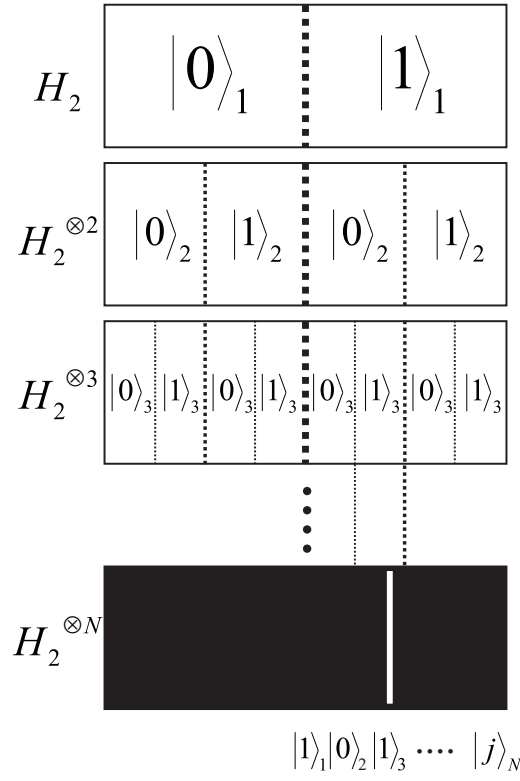


Figura 2.4: Organización de la escena de entrada para la representación de los estados computacionales de N qubits

que o bien el *tamaño* del sistema o bien su *resolución* deben *crecer exponencialmente con el número de bits*. Esto da por tierra con la esperanza de pensar a simulaciones de estas características como posibles implementaciones físicas del *hardware* cuántico porque evidentemente, no conforman las hipótesis elementales de escalabilidad en el número de recursos [7, 31]. No debemos olvidar además que estamos implementando representaciones clásicas de procesos cuánticos y que los sistemas cuánticos tienen propiedades poco intuitivas que no pueden representarse clásicamente. Una de estas propiedades es la posibilidad de establecer *correlaciones cuánticas a distancia* a través de la generación de *entrelazamiento no local*; esto es, estados entrelazados de dos (o más) partículas que pueden mantener estas correlaciones aún cuando son separadas espacialmente. Ningún sistema clásico muestra una propiedad semejante. Cada vez que el entrelazamiento no local juegue un rol importante

en la ejecución de un cierto algoritmo o proceso, la posibilidad de hallar un análogo clásico del mismo se desvanece. No obstante, la representación clásica del entrelazamiento en el esquema de codificación de los cbits de posición no deja de ser un ejercicio interesante y lleva a simulaciones de procesos esencialmente no locales (como la teleportación) cuya interpretación clásica es tan elegante como ilustrativa y muestra la estructura matemática del problema desde una perspectiva completamente nueva. Este problema será objeto de discusión en el capítulo 5.

2.2. Procesadores coherentes como operadores de evolución

En esta sección abordaremos el problema de simular ópticamente la evolución temporal de los estados cuánticos que ya hemos representado como imágenes espacialmente organizadas. Es natural pensar que la modificación de la distribución espacial de la modulación en amplitud y fase del frente de onda plano, a medida que este se propague a través de un cierto sistema óptico servirá perfectamente a nuestros propósitos. Pensaremos entonces a las evoluciones temporales de los estados, como modificaciones de las imágenes a lo largo de un dispositivo óptico paraxial.

Para comenzar a dar precisiones sobre como opera esta analogía en el caso cuántico, veamos en principio como caracterizar la evolución temporal de un estado cuántico cuyo operador unitario de evolución es diagonal en el espacio de impulsos. Consideremos las representaciones de las funciones de onda en los espacios de posición e impulso $\langle x, y | \Psi \rangle$ y $\langle p_x, p_y | \Psi \rangle$ respectivamente:

$$\begin{aligned}\langle p_x, p_y | \Psi \rangle &= \int \int_{-\infty}^{+\infty} \langle p_x, p_y | x, y \rangle \langle x, y | \Psi \rangle dx dy \\ \langle x, y | \Psi \rangle &= \int \int_{-\infty}^{+\infty} \langle x, y | p_x, p_y \rangle \langle p_x, p_y | \Psi \rangle dp_x dp_y\end{aligned}\quad (2.6)$$

La expresión $\Phi(x, y; p_x, p_y) = \langle x, y | p_x, p_y \rangle$ es la función de onda en el espacio de posiciones correspondiente a la partícula libre de impulso bien definido $|p_x, p_y\rangle$. Es decir, es una solución a la ecuación de Schrodinger independiente del tiempo: $\nabla^2\Phi = -(2mE/\hbar^2)\Phi$. Sabemos que la solución es la onda plana: $\Phi(x, y; p_x, p_y) = \exp[(i/\hbar)\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}]$. Por lo tanto, las ecuaciones (2.6) nos dicen simplemente que las representaciones de la función de onda en los espacios de posición e impulso, están relacionadas a través de la transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} \langle p_x, p_y | \Psi \rangle &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \langle x, y | \Psi \rangle \exp \left[-\frac{i}{\hbar}(p_x x + p_y y) \right] dx dy \\ \langle x, y | \Psi \rangle &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \langle p_x, p_y | \Psi \rangle \exp \left[\frac{i}{\hbar}(p_x x + p_y y) \right] dp_x dp_y \end{aligned} \quad (2.7)$$

Si el operador unitario de evolución es diagonal en el espacio de impulsos, entonces es de la forma: $U(\mathbf{p}) = \exp [i\theta(\mathbf{p})]$. El cálculo de la evolución temporal de la función de onda en el espacio de posiciones requiere en principio efectuar el cambio de base $\{|\mathbf{x}\rangle\} \mapsto \{|\mathbf{p}\rangle\}$. Una vez representado el estado cuántico en términos de su expansión en autoestados de impulso, sabemos que la acción del operador de evolución $U(\mathbf{p})$ sobre cada contribución de impulso bien definido es simplemente multiplicar por la fase $\exp [i\theta(\mathbf{p})]$. La transformada inversa de Fourier de el producto permite recuperar la función de onda evolucionada en el tiempo, nuevamente en el espacio de posiciones. La secuencia de operaciones es entonces como sigue:

$$\langle \mathbf{x} | \Psi \rangle \xrightarrow{FT} \langle \mathbf{p} | \Psi \rangle \exp [i\theta(\mathbf{p})] \xrightarrow{FT^{-1}} \langle \mathbf{x} | U | \Psi \rangle = (\Psi \otimes u)(\mathbf{x}) \quad (2.8)$$

donde $u(\mathbf{x})$ es la transformada inversa de Fourier del espectro del operador de evolución $U(\mathbf{p}) = \exp [i\theta(\mathbf{p})]$. La analogía formal entre las secuencias de operaciones expresadas en (1.46) y (2.8) es evidente. *Esto muestra que el procesador óptico coherente con filtrado solo de fase en el plano de Fourier, es simplemente una simulación clásica de la evolución temporal de un estado cuyo operador unitario de evolución es diagonal en el espacio de impulsos.*

Por otro lado una modulación solo de fase en el plano de la transparencia

de entrada sería el análogo clásico de una evolución unitaria en el espacio de posiciones: $U(\mathbf{x}) = \exp [i\phi(\mathbf{x})]$. En general, una evolución unitaria diagonal en el espacio de posiciones, seguida de otra evolución unitaria diagonal en el espacio de impulsos es de la forma $U = \mathcal{F}^{-1} \exp [i\theta(\mathbf{p})] \mathcal{F} \exp [i\phi(\mathbf{x})]$. Además está decir que \mathcal{F} denota la transformada de Fourier (que por su parte, también es un operador unitario). Se ha demostrado que una sucesión adecuada de transformaciones de esta clase aproxima con exactitud arbitraria cualquier operador unitario [7].

Aplicaremos estas nociones generales al caso particular de de los operadores unitarios sobre el espacio de un qbit. Para ello usaremos la llamada descomposición $Z - Y$ expresada en la ecuación (1.9). Explícitamente, dicha ecuación es:

$$U(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = e^{i\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} & -\operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} \\ \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} & \cos \frac{\gamma}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

donde los parámetros α, β, γ y δ son números reales. La ecuación 2.9 nos dice entonces que cualquier operación unitaria sobre un sistema de dos niveles puede realizarse a partir un corrimiento de fase, seguido de una rotación en el espacio ordinario, seguida de otro corrimiento de fase. Veremos que la realización óptica de esta secuencia de operaciones es justamente del tipo mencionado antes: $U = \exp [i\varphi(\mathbf{x})] \mathcal{F}^{-1} \exp [i\theta(\mathbf{p})] \mathcal{F} \exp [i\phi(\mathbf{x})]$; es decir, una evolución unitaria diagonal en el espacio de posiciones, seguida de otra evolución unitaria diagonal en el espacio de impulsos, seguida finalmente por otra secuencia idéntica a la anterior pero que solo requiere la operación diagonal en el espacio de posiciones. Pensando en el procesador óptico coherente como un vehículo natural para la realización óptica de esta secuencia de operaciones, es inmediato intuir que los corrimientos de fase pueden lograrse mediante transparencias cuyas transmitancias consistan en retrasos de fase selectivos en cantidades β y δ de las mitades del plano de la señal correspondientes al estado $|1\rangle$ conforme a la codificación utilizada para la representación óptica de los qbits. Como cabría esperar entonces, los operadores diagonales en el es-

pacio de posiciones son simplemente corrimientos de fase sobre las señales de entrada y salida del procesador. La rotación en el espacio ordinario será por su parte representada a partir de una cierta operación diagonal en el espacio de impulsos; es decir, modulando en fase el espectro de frecuencias de la señal de entrada mediante un filtro (solo de fase) en el plano de Fourier del procesador. Como adelanto, y para motivar la sección que sigue, digamos solamente que el filtrado en el plano de Fourier que utilizaremos será el de una red de transmisión de fase. Nos ocuparemos entonces de hallar la respuesta al impulso de un procesador óptico coherente cuya función de transferencia es la red de transmisión de fase y veremos como utilizar las propiedades de este sistema para simular ópticamente las rotaciones en el espacio ordinario.

2.2.1. Propiedades de la transformada inversa de Fourier de una red de transmisión de fase

Estudiemos el problema de hallar la transformada inversa de Fourier de una red de transmisión de fase. Será suficiente considerar el problema de una red unidimensional (es decir, que modula la fase en una única dirección) ya que la representación de los qbits como distribuciones de amplitud compleja del campo EM en el dominio de la señal es esencialmente unidimensional. Consideremos el dispositivo de esta clase más sencillo para su tratamiento matemático y que consiste en una modulación en la fase de un frente de onda plano que varía armónicamente según la ley: $\phi(f_x) = \Delta + m \cos[(2\pi/f_0)f_x + \phi_0]$. Recordemos que la relación entre la variable de frecuencia espacial f_x y la posición de un punto en el plano de Fourier x_F es $f_x = x_F/\lambda f$ donde f es la distancia focal de la lente que realiza la transformada de Fourier óptica y λ la longitud de onda del haz incidente. Una representación física adecuada para este dispositivo es una placa de un material cualquiera de índice de refracción conocido cuyo espesor varía armónicamente con los parámetros de modulación caracterizados en la figura 2.5. También podría pensarse en una placa de espesor constante cuyo índice de refracción varíe armónicamente. De hecho esta segunda alternativa es más cercana a lo que hemos implementado experimentalmente.

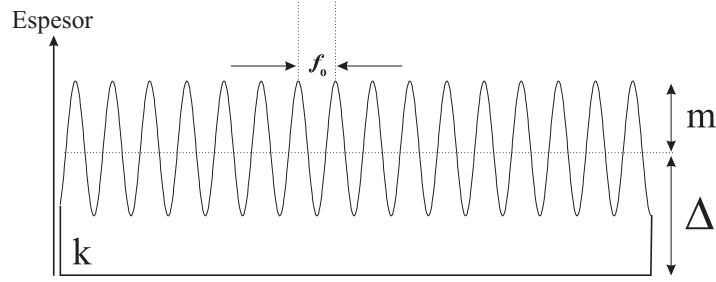


Figura 2.5: Representación de la red de transmisión de fase sinusoidal y sus parámetros característicos

La constante de fase ϕ_0 representa un grado de libertad adicional para desplazar la red de fase en la dirección de la coordenada de modulación. Si un frente de onda plano uniforme de amplitud unitaria incide normalmente sobre la placa de la figura 2.5, a la salida de la misma, la amplitud compleja del campo será de la forma:

$$\begin{aligned}
 T(f_x) &= \exp ik \left[\Delta + m \cos \left(\frac{2\pi}{f_0} f_x + \phi_0 \right) \right] \\
 &= \exp (ik\Delta) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(km) \exp \left(i \frac{n\pi}{2} \right) \exp (in\phi_0) \exp \left(i \frac{2n\pi}{f_0} f_x \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

En la ecuación (2.10), hemos utilizado la conocida expansión: $\exp (ia \cos \alpha) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(a) \exp (in\pi/2) \exp (in\alpha)$, que expresa a la modulación de fase armónica pura como una serie infinita de funciones de Bessel de primera especie. Por razones que expondremos a la brevedad, nos quedaremos solamente con los tres órdenes centrales de esta expansión, es decir, $n = 0$ y $n = \pm 1$. La ecuación anterior se escribe entonces:

$$\begin{aligned}
 T(f_x) = & J_0(km) + J_1(km) \exp \left[i \left(\frac{\pi}{2} + \phi_0 \right) \right] \exp \left(i \frac{2\pi}{f_0} f_x \right) \\
 & + J_1(km) \exp(i\pi) \exp \left[-i \left(\frac{\pi}{2} + \phi_0 \right) \right] \exp \left(-i \frac{2\pi}{f_0} f_x \right) + O(|n| \geq 2)
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

donde hemos usado la conocida propiedad que caracteriza la paridad de las funciones de Bessel de primera especie $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$. Si ahora calculamos la transformada inversa de Fourier del filtro $T(f_x)$ considerando solo estos tres órdenes centrales resulta:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}^{-1}\{T(f_x)\}_{(x)} = & \int_{-\infty}^{+\infty} T(f_x) \exp(i2\pi f_x x) df_x \\
 = & J_0(km) \delta(x) + J_1(km) \exp \left[i \left(\frac{\pi}{2} + \phi_0 \right) \right] \delta \left(x + \frac{1}{f_0} \right) \\
 & + J_1(km) \exp(i\pi) \exp \left[-i \left(\frac{\pi}{2} + \phi_0 \right) \right] \delta \left(x - \frac{1}{f_0} \right)
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

La expresión (2.12) define la respuesta al impulso del procesador óptico coherente cuya función de transferencia es la red sinusoidal de fase. La respuesta al impulso (truncada) da tres órdenes centrales difractados (0 y ± 1) puntuales, separados por una distancia $1/f_0$ y cuyas amplitudes y fases relativas dependen esencialmente de los parámetros de modulación de la red. Es muy importante tener en mente cuáles son los parámetros de la red que podemos controlar experimentalmente y de que manera podemos hacerlo. Está claro que la separación de los órdenes depende exclusivamente de la frecuencia espacial de la red f_0 (es decir, de la cantidad de líneas -o surcos- por unidad de longitud). La luminosidad relativa de los órdenes está gobernada por las funciones de Bessel de primera especie de orden cero (para el orden difractado

0) y de orden uno (para los órdenes difractados ± 1) evaluadas en el parámetro km . Luego, la eficiencia de la red (relación entre las amplitudes relativas de los órdenes difractados), depende esencialmente de la amplitud de la modulación. Dicha amplitud estará controlada tanto por la profundidad de los surcos m como por el número de propagación $k = 2n\pi/\lambda$, donde n es el índice de refracción de la placa y λ es la longitud de onda del haz incidente. Finalmente, el grado de libertad de traslación en la dirección de la modulación ϕ_0 agrega un corrimiento de fase relativo adicional a los órdenes ± 1 . Pensando en una placa de vidrio cuyo espesor varía armónicamente es evidente que lo único que puede controlarse con relativa facilidad es el grado de libertad de traslación. De hecho es bastante difícil construir redes de transmisión de fase con propiedades difractivas tan específicas como las que se requieren en este contexto. Afortunadamente, existe actualmente la tecnología para construir medios activos de modulación de la amplitud compleja del campo EM que nos permiten controlar todos estos parámetros fácilmente y a tiempo real. Las pantallas de cristal líquido programables (LCD) son un ejemplo de ello y hablaremos más de su utilización en el capítulo siguiente [32–34]. Debemos insistir en que los cálculos desarrollados en esta sección, se basan en el modelo de red de transmisión de fase consistente en una placa de vidrio de espesor variable armónicamente, cuyo índice de refracción es uniforme. La otra alternativa (que es la que se ha implementado experimentalmente) es considerar el espesor de la placa constante pero variando armónicamente el índice de refracción. De todos modos, aunque que dispositivos no sean los mismos y los parámetros que caracterizan a uno u otro sean distintos, en ambos casos se obtienen resultados analíticos equivalentes.

2.2.2. Simulación óptica de los operadores del grupo $SO(2)$

Conforme a lo discutido, la identificación entre el estado de un qbit $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ y la escena de entrada de nuestro procesador óptico coherente se completa si a cada estado de la base computacional le asignamos la distribución de campo binarizada que utilizamos para la codificación de los

cbits de posición. Teniendo en cuenta que nuestra representación es esencialmente unidimensional podemos escribir:

$$\begin{aligned} |0\rangle &\mapsto \text{Rect}\left(\frac{x+a}{b}\right) \\ |1\rangle &\mapsto \text{Rect}\left(\frac{x-a}{b}\right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde $\text{Rect}(x)$ es la función rectángulo unitario que vale uno si $|x| \leq 1/2$ y cero en otro caso. Las ecuaciones (2.13) describen amplitudes de campo unitarias en rectángulos de ancho b y centrados en $x = \pm a$ ($b \ll a$) identificando al estado $|0\rangle$ con el rectángulo izquierdo centrado en $x = +a$ y al estado $|1\rangle$ con el rectángulo derecho centrado en $x = -a$.

Supongamos que la escena de entrada correspondiente al estado del qbit $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ es introducida en un procesador óptico coherente cuya respuesta al impulso está definida por la ecuación (2.12). La función de entrada del procesador (que pensaremos como a un sistema lineal e invariante) será entonces de la forma:

$$g_1(x_o) = \alpha \text{Rect}\left(\frac{x_o+a}{b}\right) + \beta \text{Rect}\left(\frac{x_o-a}{b}\right) \quad (2.14)$$

A la salida tendremos entonces la convolución entre la escena de entrada anterior y la respuesta al impulso definida en la ecuación (2.12), es decir:

$$\begin{aligned}
g_2(x_i) &= (g_1 \otimes \mathcal{F}^{-1}\{T\})(x_i) \\
&= J_0(km) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi) \left[\alpha \text{Rect} \left(\frac{x_i - \xi + a}{b} \right) + \beta \text{Rect} \left(\frac{x_i - \xi - a}{b} \right) \right] d\xi + \\
&\dots + J_1(km) \exp \left[i \left(\frac{\pi}{2} + \phi_0 \right) \right] \times \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} \delta \left(\xi + \frac{1}{f_0} \right) \left[\alpha \text{Rect} \left(\frac{x_i - \xi + a}{b} \right) + \beta \text{Rect} \left(\frac{x_i - \xi - a}{b} \right) \right] d\xi + \\
&\dots + J_1(km) \exp(i\pi) \exp \left[-i \left(\frac{\pi}{2} + \phi_0 \right) \right] \times \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} \delta \left(\xi - \frac{1}{f_0} \right) \left[\alpha \text{Rect} \left(\frac{x_i - \xi + a}{b} \right) + \beta \text{Rect} \left(\frac{x_i - \xi - a}{b} \right) \right] d\xi
\end{aligned} \tag{2.15}$$

La expresión anterior se evalúa trivialmente. El resultado da seis términos que no son otra cosa que los tres órdenes difractados producidos por cada rectángulo de la escena de entrada:

$$\begin{aligned}
g_2(x_i) &= J_0(km) \left[\alpha \text{Rect} \left(\frac{x_i + a}{b} \right) + \beta \text{Rect} \left(\frac{x_i - a}{b} \right) \right] + \\
&\quad J_1(km) e^{i(\frac{\pi}{2} + \phi_0)} \left[\alpha \text{Rect} \left(\frac{x_i + \frac{1}{f_0} + a}{b} \right) + \beta \text{Rect} \left(\frac{x_i + \frac{1}{f_0} - a}{b} \right) \right] + \\
&\quad J_1(km) e^{i\pi} e^{-i(\frac{\pi}{2} + \phi_0)} \left[\alpha \text{Rect} \left(\frac{x_i - \frac{1}{f_0} + a}{b} \right) + \beta \text{Rect} \left(\frac{x_i - \frac{1}{f_0} - a}{b} \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Bajo ciertas condiciones (que ciertamente podemos controlar experimentalmente) la expresión anterior puede simplificarse: en efecto si elegimos una red cuya frecuencia espacial satisfaga la relación $f_0 = 1/2a$ y trasladamos la red en la dirección de modulación de modo que la constante adicional de fase sea $\phi_0 = \pi/2$, la ecuación anterior se reduce a:

$$\begin{aligned}
 g_2(x_i) = & [J_0(km)\alpha - J_1(km)\beta] \text{Rect} \left(\frac{x_i + a}{b} \right) + \\
 & [J_1(km)\alpha + J_0(km)\beta] \text{Rect} \left(\frac{x_i - a}{b} \right) + \\
 & \alpha J_1(km) \text{Rect} \left(\frac{x_i + 3a}{b} \right) - \beta J_1(km) \text{Rect} \left(\frac{x_i - 3a}{b} \right)
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

El próximo paso es ignorar los órdenes extremos centrados en $x = \pm 3a$ (simplemente no los incluimos en nuestro registro de la imagen final) y utilizar nuevamente las identificaciones entre estados computacionales y distribuciones de campo EM definidas en (2.13). La relación de entrada-salida de nuestro procesador es entonces:

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \longrightarrow [J_0(km)\alpha - J_1(km)\beta] |0\rangle + [J_1(km)\alpha + J_0(km)\beta] |1\rangle \tag{2.18}$$

O bien, expresada matricialmente en su representación en la base computacional:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} J_0(km) & -J_1(km) \\ J_1(km) & J_0(km) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

Que es proporcional a una rotación ordinaria en el plano ya que las funciones de Bessel $J_0(z)$ y $J_1(z)$ no se anulan simultáneamente.

Una representación esquemática del procedimiento que hemos seguido para simular los operadores del grupo $SO(2)$ se muestra en la figura 2.6. Se considera que cada estado computacional representado en la escena de entrada da tres órdenes difractados. La amplitud relativa entre el orden central y sus dos órdenes adyacentes puede sintonizarse modificando la amplitud de modulación de fase de la red. La separación de los órdenes difractados en la imagen final se acomoda de modo que se produzcan las interferencias deseadas entre

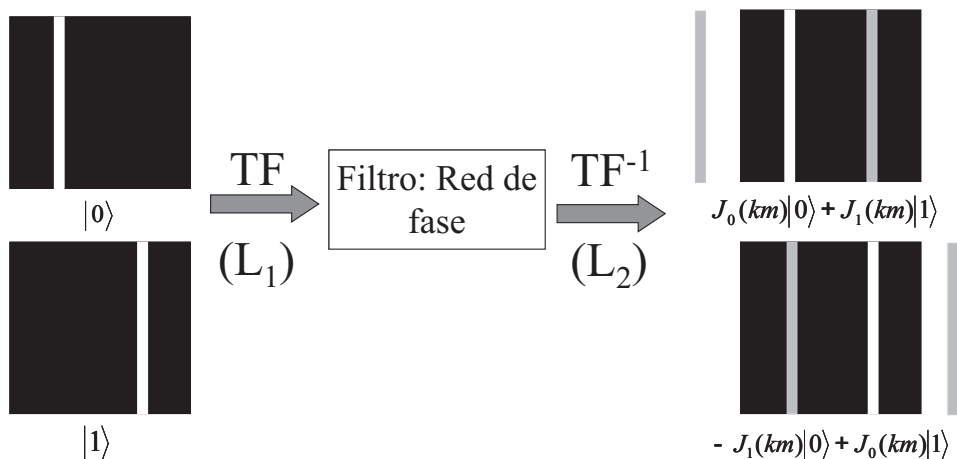


Figura 2.6: Representación esquemática de la simulación del operador del grupo $SU(2)$ por medio del procesador óptico coherente con una red de transmisión de fase sinusoidal como función de transferencia.

los cuatro órdenes centrales modificando la frecuencia espacial de modulación de la red. Los dos órdenes extremos no son registrados en la imagen final. Por ejemplo, usando lentes cuya distancia focal es $f = 45cm$ y para longitudes de onda del orden de $\lambda = 633nm$ que es la emitida por un laser de Helio Neón y una red de $f_0 = 500$ líneas por centímetro, la separación entre los estados computacionales en la escena de entrada será del orden de $1,4cm$ aproximadamente.

Para finalizar la sección revisemos brevemente todo lo dicho respecto a como simular los operadores $U(2)$ por medio del procesador óptico coherente. El dispositivo experimental es el que se muestra en la figura figura 2.7. Un haz de laser es expandido, filtrado y colimado por la lente L_0 . El haz colimado incide sobre el plano P_1 donde se representa el estado cuántico como escena de entrada. La placa de fase $PP(\delta)$ introduce un retraso de la fase en δ en la porción del campo que emerge desde la mitad derecha. La lente L_1 permite obtener la transformada de Fourier de la amplitud compleja del campo en plano de entrada. La distribución de campo transformado se hace coincidir con la red de fase $G(\gamma)$ que es usada para realizar la transformación $SO(2)$ óptica. Una tercera lente L_2 realiza la transformada inversa de Fourier. Fi-

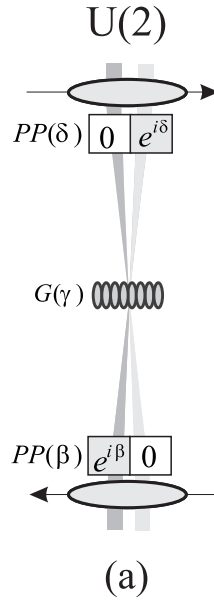


Figura 2.7: Dispositivo experimental para la representación óptica del operador unitario sobre un qbit

nalmente, una segunda placa de fase $PP(\beta)$ introduce el retraso de la fase al final del proceso requerido por la descomposición Z-Y del operador unitario que desee representarse conforme a la ecuación (2.9). La imagen resultante, que es un registro de intensidad de la distribución de campo correspondiente al estado cuántico a la salida del proceso, es proyectada en una pantalla P_2 y recogida por una cámara digital (CCD). En la interpretación de la imagen final, habrá de tenerse en cuenta la inversión del sistema de coordenadas provocada por el dispositivo al efectuarse dos transformadas de Fourier ópticas iterativamente.

2.2.3. Simulación de la compuerta CNOT

Dada la naturaleza de la representación del espacio de Hilbert dos qbits $H_2^{\otimes 2}$ como cbits de posición, la simulación de la compuerta CNOT requiere la permutación de los dos haces que emergen del lado derecho del dominio de la señal ya que formalmente, la acción de CNOT puede pensarse como la suma directa de dos operadores: la identidad restringida al subespacio

$\{|\Psi\rangle \in H_2^{\otimes 2} / |\Psi\rangle = |0\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2, |\psi\rangle \in H_2\}$ y el operador X de Pauli restringido a su complemento: $\{|\Psi\rangle \in H_2^{\otimes 2} / |\Psi\rangle = |1\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2, |\psi\rangle \in H_2\}$. Coloquialmente, esto significa hacer un *bit flip* en el estado del segundo qbit cada vez que el estado del primer qbit sea uno y no hacer nada en otro caso. Esto puede hacerse simplemente mediante un prisma cúbico (o en general romboidal) como se indica en la figura siguiente:

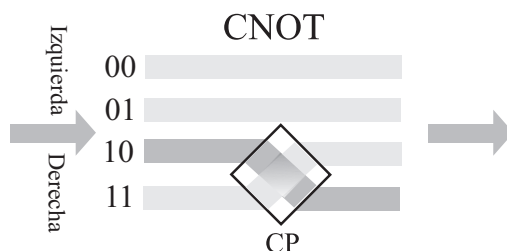


Figura 2.8: Implementación óptica de la compuerta $CNOT$ mediante un prisma cúbico (CP) que permuta el par de rayos adyacentes correspondientes al valor lógico $|1\rangle$ del bit de control.

En general, las condiciones físicas bajo las cuales podemos llevar a cabo esta permutación de la posición espacial de los dos haces dependen exclusivamente de la separación espacial entre los mismos, del ángulo, del índice de refracción y de las dimensiones del prisma según la relación sencilla siguiente, que obviamente puede ser inferida a partir de las leyes de la refracción de la luz; es decir, con argumentos que proceden de la óptica geométrica:

$$h = H \frac{\tan \theta \tan (\theta + \beta)}{\tan \theta \tan (\theta + \beta) + 1} \quad (2.20)$$

donde la relación entre los ángulos θ y β de la figura 2.9 está obviamente dada por la ley de Snell: $\sin \theta = n \sin \beta$. Debemos tener en cuenta que las amplitudes complejas asociadas a cada haz permutado deben preservarse exactamente para que la operación tenga alguna utilidad en procesamiento óptico de la información. Para ello es necesario posicionar el prisma interferométricamente y elegir un prisma de calidad óptica para evitar introducir corrimientos de fase no deseados, además de corregir las aberraciones que introduzcan los restantes dispositivos del proceso.

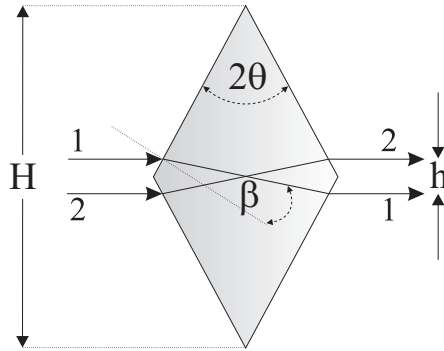


Figura 2.9: Esquema de la permutación de dos rayos adyacentes mediante un prisma. Los parámetros a tener en cuenta son el ángulo del prisma θ , su longitud H y su índice de refracción n

Todo lo anterior es estrictamente válido si, como convencionalmente ocurre, el primer qbit actúa como bit de control y el segundo qbit actúa como bit blanco. Pero en procesamiento cuántico de la información, la universalidad de las operaciones supone poder hacer interactuar, mediante operaciones controladas como la compuerta CNOT a un par de qbits cualesquiera de un sistema compuesto de N qbits. Otro tanto puede decirse respecto de la implementación óptica del operador general del grupo $U(2)$ que hemos descrito en la sección anterior. De hecho, para un sistema compuesto, dicha implementación se limita exclusivamente a generar interferencia entre las amplitudes del campo que codifican la información almacenada en el primer qbit. Esto significa que solo podemos manipular la información dicotómica codificada según la posición *derecha-izquierda* del dominio de la señal completo pero no sabemos como hacer interferir las amplitudes que codifiquen información dicotómica en alguna otra forma distinta. De hecho, aún no hemos discutido, por ejemplo, como implementar una operación unitaria sobre el espacio de Hilbert de un qbit pero no aplicada al primero, sino al segundo qbit de un espacio de Hilbert compuesto por dos sistemas de dos niveles. Recordemos que para el estado del segundo qbit en este caso, la información dicotómica no se codifica según la posición ($|0\rangle = izquierda$, $|1\rangle = derecha$), sino según la paridad ($|0\rangle = par$, $|1\rangle = impar$). Estas reflexiones, hacen ineludible el

ensayo de alguna crítica al concepto de universalidad de la representación óptica de las operaciones que hemos desarrollado y estudiado en las secciones precedentes. Dicha discusión es abordada, al menos parcialmente, en la sección siguiente.

2.2.4. Análisis del concepto de universalidad de la representación óptica de las operaciones

Como hemos anticipado, para poder considerar *universales* a las representaciones ópticas de las evoluciones unitarias que hemos diseñado debemos garantizar que se cumplan las siguientes condiciones:

1. Los operadores del grupo $U(2)$ representados como procesadores ópticos coherentes deben poder ser aplicados a cualquier qbit del espacio de Hilbert compuesto de N qbits.
2. Las operaciones controladas (en particular la compuerta CNOT) debe poder ser aplicada para generar interacciones entre dos qbits cualesquiera del espacio de Hilbert compuesto de N qbits.

Las dificultades que se presentan podrán comprenderse mejor mediante algunos ejemplos sencillos. Para responder a la primera cuestión, pensemos por ejemplo en el problema de generar la transformación de Hadamard generalizada sobre el estado de N qbits. Como veremos en los capítulos que siguen dicha transformación es la operación unitaria sobre un qbit cuya representación en la base computacional es:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

La acción esquemática del operador de Hadamard sobre las amplitudes complejas asociadas a los estados computacionales puede describirse como una generación de interferencias constructivas y destructivas de dichas amplitudes reasignando a los estados computacionales las amplitudes resultantes de dichas interferencias. Esto puede entenderse inspeccionando la figura siguiente:

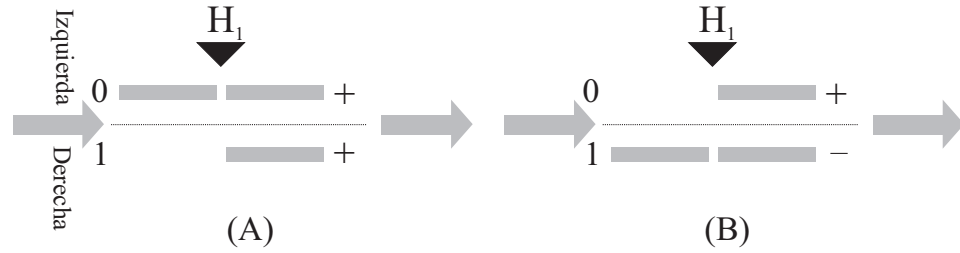


Figura 2.10: Acción esquemática del operador de Hadamard sobre las amplitudes complejas de los dos estados computacionales de un qbit. (A) Acción sobre el estado $|0\rangle$. (B) Acción sobre el estado $|1\rangle$. Los signos en las amplitudes complejas de salida se refieren a las fases relativas introducidas en la operación.

La importancia de esta operación radica en la multiplicidad de circuitos correspondientes a subrutinas cuánticas en la que dicha operación interviene. El operador de Hadamard generalizado sobre N qbits es el producto: $H^{\otimes N} = H_1 \otimes H_2 \otimes \dots \otimes H_N$ donde los subíndices indican el número de qbit del estado del sistema compuesto de N qbits sobre el cual actúa cada operador. La acción de este operador sobre el estado $|x = 0\rangle$ del espacio de Hilbert de N qbits generado por $\{|x\rangle; x = 0, 1, 2, \dots, 2^N - 1\}$ es mapear a dicho estado en la superposición igualmente pesada de todos los estados de la base computacional: $H^{\otimes N}|x = 0\rangle = (1/\sqrt{2^N}) \sum_{x=0}^{2^N-1} |x\rangle$. Es evidente que aplicar el operador de Hadamard al primer qbit H_1 no genera ningún inconveniente, al menos conceptualmente. Simplemente, debemos ajustar los parámetros de nuestro procesador óptico coherente, de modo que las placas de fase en las escenas de entrada y salida y la red de fase en el plano de Fourier, reproduzcan la acción del operador (2.21). Es sencillo ver que el conjunto de parámetros adecuado es: $\delta = \pi$, $\gamma = \pi/2$ y $\alpha = \beta = 0$. Pero para completar la operación $H^{\otimes 2}$ debe hacerse la operación de Hadamard sobre el segundo qbit H_2 . Dicha operación genera la misma superposición que H_1 pero no sobre la información dicotómica codificada según la posición (derecha-izquierda) del dominio de la señal, sino sobre la información dicotómica codificada según la paridad. Téngase en cuenta que los estados computacionales pares $|x = 0\rangle$ y $|x = 2\rangle$ corresponden a estados del segundo qbit de valor lógico $|0\rangle$ mientras que los estados computacionales impares $|x = 1\rangle$ y $|x = 3\rangle$ corresponden a

estados del segundo qbit de valor lógico $|1\rangle$. La pregunta que cabe hacer es la siguiente: Puede el procesador óptico coherente presentado en las secciones anteriores producir interferencia sobre las amplitudes complejas que codifican información dicotómica según la paridad?. La respuesta es claramente negativa. Dicha operación es imposible de llevarse a cabo, al menos disponiendo solamente del procesador óptico coherente tal como se ha presentado. La conclusión es que el procesador óptico coherente por si mismo, no es una representación del operador $U(2)$ universal, sino que es simplemente una representación del operador $U(2)$ sobre el primer qbit de un sistema compuesto. En este punto, se pone de manifiesto la necesidad de analizar el concepto de universalidad en el marco de nuestras simulaciones.

Una solución posible para este problema es obviamente extender el conjunto de compuertas *elementales* para adaptar el concepto de universalidad al contexto de nuestra representación óptica de los procesos. La solución es muy simple (al menos conceptualmente) aunque puede suscitar enormes dificultades experimentales a la hora de su implementación. La respuesta es incluir en el conjunto de compuertas cuánticas universales a las permutaciones entre qbits (que, como se sabe, están generados por operadores de intercambio). Así, por ejemplo en el espacio compuesto más sencillo que es el de dos qbits, el conjunto de las permutaciones es $\{I, P_{12}\}$, donde I es la identidad y P_{12} es el operador de intercambio cuya acción sobre cada elemento de la base computacional de dos qbits es: $P_{12}|ij\rangle = |ji\rangle$; $i, j = 0, 1$. La aplicación del operador de Hadamard generalizado sobre el estado del sistema compuesto de dos qbits es sencilla si contamos con la representación del grupo $U(2)$ sobre el primer qbit y los operadores de intercambio. En efecto, el Hadamard sobre el segundo qbit (es decir, la superposición sobre los estados lógicos de paridad) puede hacerse mediando la secuencia de operaciones: $H_2 = P_{12}H_1P_{12}$.

Aún queda pendiente especificar como puede implementarse ópticamente el operador de intercambio. Afortunadamente, también en este caso la respuesta es sencilla: *El mismo prisma cúbico que implementa CNOT puede ser usado para implementar también P_{12}* . De hecho, la interpretación operacio-

nal de la permutación de dos rayos adyacentes *depende de cuales sean esos rayos*; es decir, será distinta si modificamos la posición de nuestro prisma cúbico para afectar distintas regiones del dominio de la señal. Es evidente que la permutación de las informaciones dicotómicas de posición y paridad (es decir, el intercambio P_{12}) se reduce a intercambiar las dos amplitudes complejas centrales de la representación óptica del estado de dos qbits (rayos asociados a los elementos de la base: $|x = 1\rangle = |01\rangle$ y $|x = 2\rangle = |10\rangle$) ya que el intercambio no tiene ningún efecto sobre los estados $|x = 0\rangle = |00\rangle$ y $|x = 3\rangle = |11\rangle$.

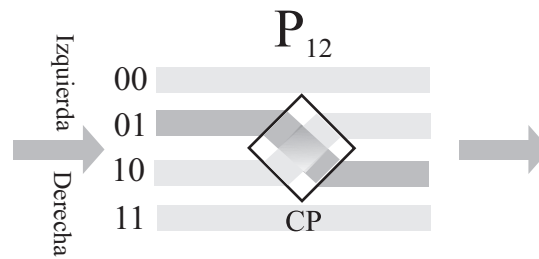


Figura 2.11: Implementación óptica del operador de intercambio P_{12} mediante un prisma cúbico (CP) que permuta el par de rayos adyacentes correspondientes a los estados lógicos que no son invariantes ante el intercambio de los qbits 1 y 2

Comprobemos entonces que la secuencia: $P_{12}H_1P_{12}H_1$ aplicada al estado $|x = 0\rangle = |00\rangle$ genera efectivamente la superposición igualmente pesada: $(1/4)(|x = 0\rangle + |x = 1\rangle + |x = 2\rangle + |x = 3\rangle)$. En nuestro lenguaje de procesamiento de imágenes dicha secuencia de operaciones asume la representación:

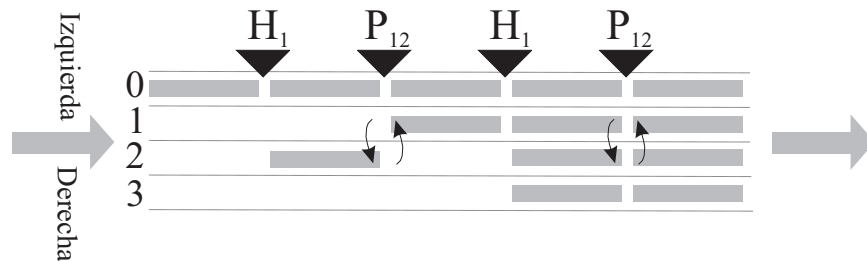


Figura 2.12: Secuencia de operaciones que realizan el operador de Hadamard generalizado sobre dos qbits

2.2 Procesadores coherentes como operadores de evolución

La otra cuestión tiene que ver con la posibilidad de implementar $CNOT$ sobre cualquier par de qbits de un sistema compuesto de N qbits. Insistimos en el hecho de que a menos que se especifique otra cosa, $CNOT$ asume que el bit de control es el primer qbit y que el bit blanco es el segundo qbit. En general, así como $CNOT$ (o convencionalmente C_1NOT_2) puede implementarse mediante un único prisma cúbico; en general, C_iNOT_j ; $i, j = 1, 2, \dots, N$; no puede implementarse mediante un único prisma cúbico que intercambie la posición de un par de rayos adyacentes. Los ejemplos sencillos mostrados en la figura 2.13 dan cuenta de este hecho.

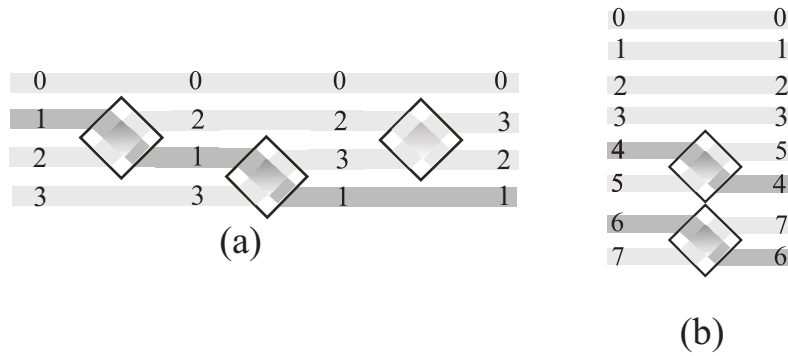


Figura 2.13: Ejemplos de implementación óptica de operadores $CNOT$ no realizables mediante un único prisma cúbico. (a) C_2NOT_1 en el espacio de dos qbits. (b) C_1NOT_3 en el espacio de tres qbits

Para finalizar, mencionemos que la inclusión de las permutaciones generadas por intercambio en el conjunto de compuertas cuánticas universales abre un nuevo contexto, ya que puede modificar drásticamente la estimación del número de recursos necesarios para efectuar un cierto algoritmo o proceso. En principio ignoramos si este incremento en el número de recursos por la incorporación de los operadores de intercambio es o no decisivo pero seguramente habrá de tenerse en cuenta. Siguiendo con el ejemplo del operador de Hadamard generalizado sobre N qbits, estimemos el número de compuertas elementales que debemos aplicar para generarlo en cada caso. En un sistema cuántico real (escaleable), dicho número es igual al número de qbits N (un operador de Hadamard sobre un qbit por cada qbit de nuestro espacio compuesto). En el caso de nuestra simulación óptica la estimación no es tan

sencilla, pues para aplicar el operador de Hadamard sobre el j -ésimo qbit, deben usarse los operadores de intercambio para llevar la información almacenada en dicho qbit al primer qbit. Luego debe aplicarse el Hadamard al primer qbit para finalmente, volver a usar los operadores de intercambio para restablecer el orden original. Esto implica aplicar la secuencia de operadores $P_{j-1,j} \cdots P_{23} P_{12} H_1 P_{12} P_{23} \cdots P_{j-1,j}$ para cada qbit $j = 1, 2 \cdots N$, lo que da un total de $\sum_{j=0}^{N-1} (2j + 1) = N^2 - 1$ operaciones. Observar que el resultado es muy alentador ya que nos dice que el número de recursos necesarios para llevar a cabo el proceso es polinomial (y no exponencial) en el número de qbits. Es importante enfatizar entonces, que nuestra representación óptica de algoritmos cuánticos no satisface las hipótesis de universalidad de los operadores $U(2)$ y $CNOT$ sobre las que se fundamenta la teoría cuántica de la complejidad. Esto implica naturalmente que para la implementación óptica de un cierto algoritmo, la cantidad de recursos necesarios para llevar a cabo la tarea debe volver a estimarse teniendo en cuenta la inclusión de estos operadores de intercambio. Aunque esto siempre puede hacerse, el desarrollo de herramientas generales para la estimación del número de recursos bajo estas nuevas reglas de juego, no está entre los objetivos del presente trabajo.

Capítulo 3

El operador de Hadamard y el algoritmo de Deutsch

En el presente capítulo y en los que siguen comenzaremos a dar detalles precisos sobre simulaciones ópticas de algoritmos donde hacemos uso intensivo de los resultados obtenidos en el capítulo precedente. Allí demostramos que el procesador óptico coherente es una representación óptica del operador general del grupo $U(2)$ actuando sobre el primer qbit de un sistema compuesto de N qbits representados según la codificación de los cbits de posición. También mostramos que las permutaciones de pares (o de pares de grupos) de rayos adyacentes, permiten representar tanto las operaciones controladas tipo *CNOT* como las permutaciones generadas por aplicación iterada de operadores de intercambio, que completan el conjunto de compuertas cuánticas universales para nuestro esquema de representación óptica. El resto de la tesis pondrá énfasis en la descripción de ejemplos concretos de realización óptica de algoritmos. En particular, hemos puesto en práctica las estrategias de simulación ya presentadas en la construcción de dispositivos de simulación óptica y en la consecuente obtención de resultados experimentales para algunos procesos de interés en información cuántica.

En principio, construimos explícitamente la representación óptica del operador de Hadamard sobre el estado de un qbit (o equivalentemente, sobre el

estado del primer qbit de un sistema compuesto de N qbits). Como ya hemos enfatizado, esta es una operación extremadamente importante por muchas razones. Digamos solamente que forma parte del conjunto finito de compuertas cuánticas universales [7] y que suele ser una herramienta básica para la construcción de circuitos asociados a ciertas subrutinas cuánticas que permiten implementar algoritmos de importancia decisiva. Algunos de ellos son la transformada de Fourier cuántica que deriva en el algoritmo de factorización de Shor o la Caminata al azar cuántica que interviene en los algoritmos de búsqueda y en otras rutinas asociadas a procesos de computación no determinista. Una aplicación inmediata que hace uso del operador de Hadamard sobre un qbit es la resolución del ya clásico problema de Deutsch. Se trata esencialmente de un problema de decisión cuya relevancia es básicamente histórica y académica, aunque no está desprovista de interés ya que ilustra de manera elemental y asequible un concepto crucial en información cuántica que es el de *paralelismo cuántico*. Además brinda el ejemplo más sencillo de computación cuántica capaz de resolver un cierto problema más rápidamente que cualquier algoritmo clásico conocido.

En este capítulo describiremos la arquitectura propuesta para la simulación óptica de la transformada de Hadamard sobre un qubit y posteriormente veremos como utilizarla en la práctica para resolver ópticamente el problema de Deutsch. Dicho problema consiste en decidir si una función cuyo dominio e imagen es el conjunto $\{0, 1\}$ es constante o balanceada. La solución clásica de este problema requiere evaluar la función dos veces mientras que cuánticamente, solo se requiere evaluarla una vez. Como hemos dicho, este algoritmo constituye el ejemplo más elemental de *paralelismo cuántico*. Dicho concepto consiste a grandes rasgos en pensar a una computadora cuántica como a una máquina capaz de evaluar a una cierta función $f(x)$ en muchos valores de su argumento x simultáneamente. El operador unitario que evalúa la función es simulado mediante la aplicación de fases selectivas a los estados de entrada usando una pantalla de cristal líquido que funciona como modulador espacial del frente de onda luminoso. La transformación de Hadamard consiste esencialmente en generar la superposición de los estados genera-

do interferencias constructivas y destructivas entre sus amplitudes complejas por medio de una red de fase en el plano de Fourier. Se muestran resultados de las imágenes obtenidas para todas las configuraciones posibles para verificar que nuestro sistema es capaz de resolver el problema en todos los casos.

3.1. El operador de Hadamard sobre un qbit

Como ya hemos mencionado en el capítulo anterior, la acción del operador de Hadamard sobre los estados de la base computacional del espacio de un qbit es:

$$\begin{aligned} H|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \\ H|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Considerando que ya hemos discutido los ingredientes básicos para realizar las simulaciones ópticas de los operadores unitarios sobre un qbit, pasaremos a describir los detalles del desarrollo experimental de la implementación del operador de Hadamard. Como ya hemos comentado, la descomposición $Y - Z$ del operador general del grupo $U(2)$ garantiza que existen rotaciones generadas por el operador de pauli Z y un operador del grupo $SO(2)$ (rotaciones generadas por el operador de Pauli Y) de modo que todo operador unitario sobre un qbit se escribe (salvo un factor de fase global) como una descomposición en términos de productos de aquellos dos tipos de operaciones: $U = e^{i\alpha} R_z(\beta) R_y(\gamma) R_z(\delta)$. También discutimos como los operadores que intervienen en esta descomposición pueden implementarse ópticamente en un procesador óptico coherente. En el caso particular del operador de Hadamard, dicha descomposición puede escribirse explícitamente como:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Conforme a la descripción de las simulaciones de las operaciones unitarias sobre un qbit a partir del procesador óptico coherente, esto es simplemente un corrimiento en la fase π en la mitad derecha de la escena de entrada seguida de una rotación en $\pi/4$ en el espacio ordinario. El dispositivo experimental para simular ópticamente el operador de Hadamard se muestra en la figura 3.1

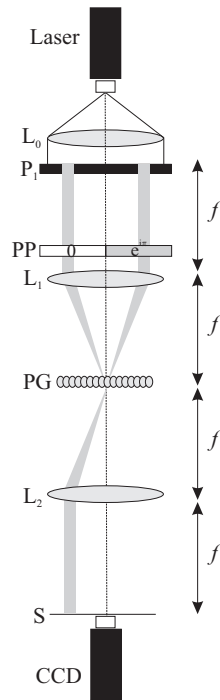


Figura 3.1: Dispositivo experimental para la simulación del operador de Hadamard.

Un láser de He-Ne es expandido, filtrado y colimado por la lente L_0 . Una vez que el estado de un qbit es espacialmente distribuido en la escena de entrada, una placa de fase introduce un retardo en la fase π sobre la mitad derecha. Luego una lente convergente L_1 es usada para obtener la transformada de Fourier de la transmitancia de entrada en el plano focal posterior de la lente L_1 . En el plano de Fourier, se coloca una red de transmisión de fase (PG) cuyos tres órdenes difractados principales (órdenes 0 y ± 1) tienen la misma intensidad relativa. Conforme a lo discutido en el capítulo anterior la red de eficiencia unitaria en el plano de Fourier constituye la implementación óptica

3.1 El operador de Hadamard sobre un qbit

de la rotación ordinaria en $\pi/4$. Como siempre, la frecuencia espacial de la red es elegida de modo que produzca órdenes difractados cuya separación en el plano final es igual a la distancia entre las dos imágenes que codifican los estados computacionales. Una tercera lente L_2 produce la transformada inversa de Fourier y el estado del qbit transformado es recogido a la salida del procesador como una imagen que puede registrarse en una cámara CCD (modelo SONY CCD-IRIS SSC-M350 de resolución VGA). La cámara es conectada a un ordenador que cuenta con un programa de adquisición que permite obtener imágenes digitalizadas. En la figura siguiente se observa esquemáticamente las relaciones de entrada/salida del procesador coherente para cada imagen que codifica los estados computacionales:

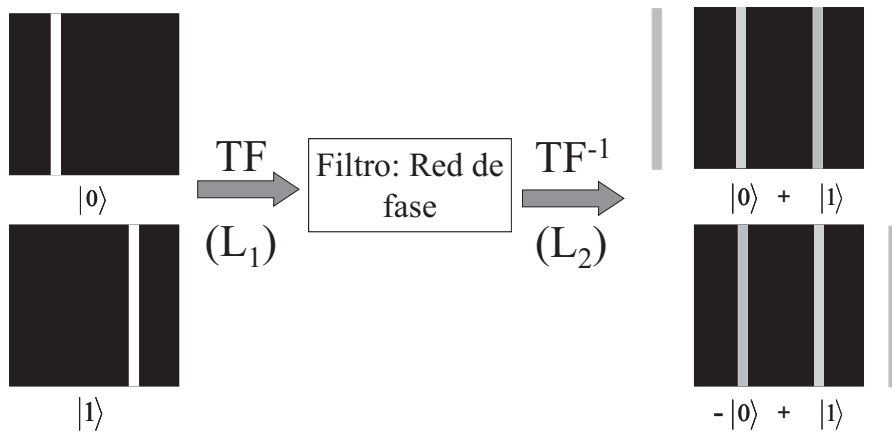


Figura 3.2: Esquema de las relaciones de entrada/salida para la simulación óptica del operador de Hadamard.

En la práctica, las dimensiones usadas para las zonas de transmitancia unitaria en la escena de entrada fueron de $0,18\text{cm} \times 2\text{cm}$ separadas por $0,95\text{cm}$. El siguiente elemento a considerar es la placa de fase que introdujo el desfase requerido en π (con un error de aproximadamente el 1/%) de la porción del frente de onda emergente de la mitad derecha. La placa de fase fué construída por deposición de un film transparente sobre una placa de vidrio plana de calidad óptica. La lente L_1 tenía 30cm de distancia focal. La red de fase utilizada fué blanqueada holográficamente con un frecuencia espacial de 75l/mm .

3.2. Resultados experimentales para el operador de Hadamard

Los resultados experimentales obtenidos se muestran en la figura 3.3. La primera columna representa los estados cuánticos a ser transformados mientras que la segunda columna muestra las imágenes capturadas por la CCD. Finalmente, en la tercera columna pueden observarse los perfiles de intensidad obtenidos a partir de estas imágenes, en unidades arbitrarias. Las líneas punteadas en las imágenes de la segunda columna indican las secciones de dichas imágenes consideradas para trazar los perfiles de intensidad. La figura 3.3(a) corresponde a la representación del estado $|0\rangle$ como imagen de entrada y la figura 3.3(b) corresponde a la imagen del estado $|1\rangle$. Finalmente la figura 3.3(c) muestra la imagen representativa de la combinación lineal igualmente pesada de los dos estados computacionales: $(|0\rangle + |1\rangle) / \sqrt{2}$. Como puede observarse, se obtiene una excelente reproducción de los resultados esperados para cada imagen de entrada. En efecto, las figuras (a) y (b) muestran imágenes finales compuestas por combinaciones lineales de los dos estados computacionales con amplitudes complejas de aproximadamente igual intensidad, como predicen las ecuaciones (3.1). Aunque estos resultados son esperables, no es posible obtener a partir de ellos una evidencia de la diferencia en el signo entre las dos combinaciones lineales expresadas en las ecuaciones (3.1). Esta diferencia, no obstante, puede ser revelada mostrando como transforma la combinación lineal representada en la figura 3.3(c), $H(|0\rangle + |1\rangle) / \sqrt{2} = |0\rangle$. El resultado es precisamente una imagen donde solo la región correspondiente al estado $|0\rangle$ ostenta una intensidad no despreciable. Más aún, los perfiles de intensidad presentados, revelan que la intensidad de tal estado es aproximadamente dos veces más grandes que la de cada registro computacional en los dos casos precedentes lo que refuerza el carácter de unitariedad de la simulación. Concluimos que el refuerzo de la intensidad asignada al estado $|0\rangle$ y la anulación de la intensidad asignada al estado $|1\rangle$ proviene de los efectos de interferencia con las amplitudes y fases apropiadas para simular correctamente la acción del operador.

Se ha mostrado un caso concreto de implementación de las estrategias de

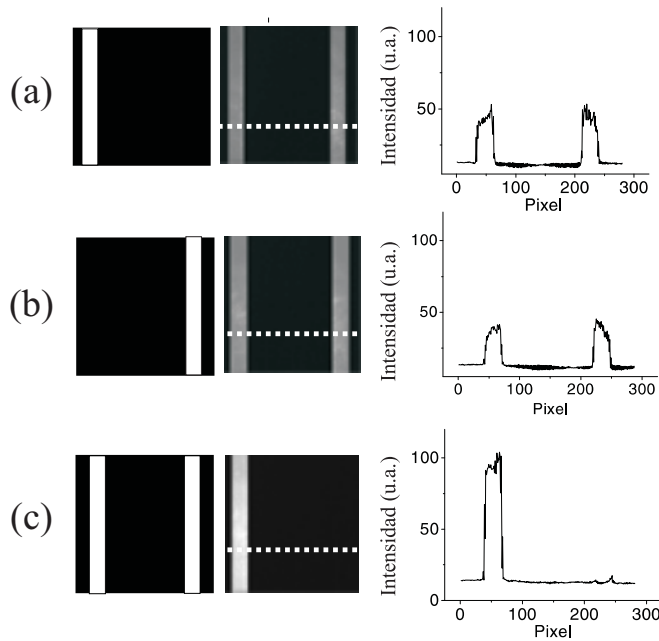


Figura 3.3: Resultados experimentales para la simulación del operador de Hadamard.

simulación óptica referidas en el capítulo precedente. Los resultados experimentales son promisorios. El próximo paso es mostrar como puede utilizarse el dispositivo como parte de algún proceso más general de interés en información cuántica. Veremos entonces como utilizar la simulación del operador de Hadamard para resolver ópticamente el problema de Deutsch. El contenido y la interpretación de la resolución de este problema se describen en la sección siguiente.

3.3. El problema de Deutsch

Consideremos una función $f:\{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$. Existen cuatro de tales funciones de las cuales dos son constantes ($f(0) = f(1)$) y otras dos balanceadas ($f(0) \neq f(1)$). El objetivo del problema es el de determinar a cual de las dos clases pertenece una función dada. Clásicamente, es evidente que para resolver el problema debemos evaluar a esta función dos veces. Veremos que un ordenador cuántico, al menos en teoría, es capaz de resolver el problema

evaluando la función una sola vez. El circuito que evalúa la función, suele llamarse *oráculo* [7] y representa al operador unitario sobre el espacio de Hilbert de dos qbits definido de la manera siguiente: $U_f |x\rangle \otimes |y\rangle = |x\rangle \otimes |y \oplus f(x)\rangle$ con $x, y \in \{0, 1\}$ y donde el símbolo \oplus denota la suma binaria. El algoritmo (que ha sido dividido en dos modulos por simplicidad) funciona como sigue: comenzamos preparando como estado inicial la combinación siguiente $(|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle - |1\rangle)$ (donde se han omitido por simplicidad las constantes de normalización). Aplicando U_f a este estado inicial, resulta:

$$U_f \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) = \frac{(-1)^{f(0)} |0\rangle + (-1)^{f(1)} |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (3.3)$$

El operador U_f puede interpretarse entonces como la aplicación de una fase selectiva a cada término en la expansión del estado del primer qbit. Dicho corrimiento en la fase dependerá del valor de la función f en el valor lógico correspondiente al término afectado. El segundo módulo es la aplicación del operador de Hadamard sobre el estado del primer qbit. Si aplicamos la transformación de Hadamard definida por las ecuaciones 3.1 al estado del primer qbit y seguidamente medimos el estado resultante, puede probarse que la probabilidad de detectar el estado $|x = 0\rangle$ es:

$$P(|x = 0\rangle) = \left(\frac{(-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)}}{2} \right)^2 \quad (3.4)$$

Esta probabilidad es entonces igual a cero si la función es balanceada o bien igual a uno si la función es constante. Luego, simplemente detectando el estado final del proceso, podemos determinar con certeza a cual de las dos clases pertenece la función codificada en el oráculo. La resolución del problema se resume en el circuito de la figura 3.4. El resultado expresado en la ecuación (3.4) es un ejemplo de esta propiedad llamada paralelismo cuántico que ya hemos referido. Notar que la distribución de probabilidad de detección de los estados computacionales del primer qbit, contiene información del

3.4 Simulación óptica del algoritmo de Deutsch

valor de la función f en todos sus argumentos simulatáneamente, ya que los valores de $f(0)$ y $f(1)$ aparecen como exponentes en la expresión calculada para $P(|x = 0\rangle)$

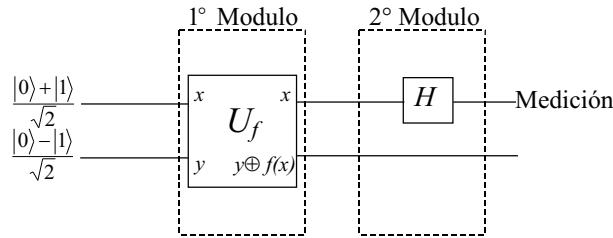


Figura 3.4: Circuito cuántico que resuelve el problema de Deutsch

Recordemos que en el esquema anterior la línea horizontal superior representa el estado del primer qbit mientras que la línea inferior representa el estado del segundo. El estado inicial aparece a la izquierda. Operadores sobre el espacio de dos qbits (como U_f) se representan como rectángulos que incluyen a las dos líneas mientras que los operadores que actúan sobre un qbit (como el de Hadamard) afectan solamente a una línea. La evolución temporal de los estados se interpreta leyendo el circuito de derecha a izquierda.

3.4. Simulación óptica del algoritmo de Deutsch

Ya hemos mencionado que dividimos el proceso completo en dos módulos para su representación óptica. El primer módulo consiste en la simulación óptica del operador U_f . Para representar ópticamente la aplicación del oráculo, usamos un modulador espacial de luz programable (SLM) trabajando en modo de fase. Aplicar el oráculo es simplemente introducir un corrimiento de fase π al estado $|x\rangle$ del primer qbit cada vez que $f(x)=1$ conforme a la ecuación. Como ya hemos descripto, el operador de Hadamard es simulado mediante una placa de fase (PP) y una red de fase (PG) en el plano de Fourier de la escena de entrada. El dispositivo experimental completo se muestra en la figura 3.5. Un laser es expandido, filtrado y colimado por la lente L_0 . El haz colimado incide sobre la escena de entrada que es representada junto

con el operador U_f en una única pantalla de cristal líquido programable (SLM) trabajando en modo de fase. Se ha demostrado que cualquier función compleja puede representarse en un medio de este tipo [34].

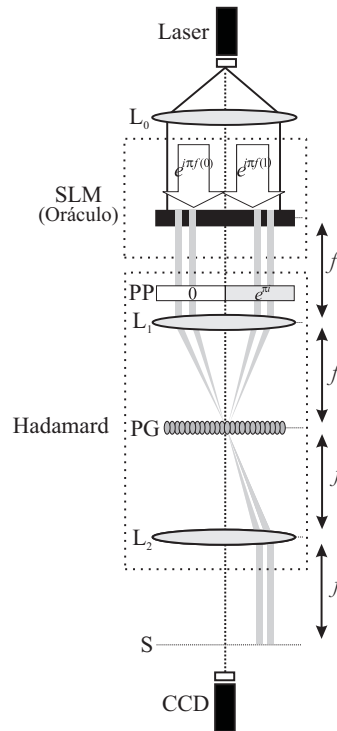


Figura 3.5: Dispositivo experimental que simula ópticamente el algoritmo de Deutsch.

El modulador espacial de luz consiste en una pantalla de cristal líquido Sony TV (LCTV) que combinada con dos polarizadores y dos láminas retardadoras, actúan como un modulador espacial en modo de fase. La LCTV (modelo LCX0112BL) fue extraída de un videoprojector comercial y es un panel VGA cuya resolución es de 640x480 pixels. Los pixeles son cuadrados de $34\mu\text{m}$ de lado y están separados por una distancia de $41,3\mu\text{m}$. La lente L_1 (distancia focal 45cm) permite obtener la transformada de Fourier de la escena de entrada. En el plano de Fourier se coloca la red de transmisión de fase. Una tercera lente L_2 (distancia focal 45cm) es usada para obtener la transformada inversa de Fourier que es proyectada en la pantalla S y regis-

trada mediante una cámara (CCD). Las especificaciones de los sistemas de detección y adquisición de datos coinciden con los utilizados en el caso de la simulación de la compuerta de Hadamard.

3.5. Resultados experimentales para el problema de Deutsch

Los resultados experimentales son las imágenes obtenidas a la salida de nuestro dispositivo y se resumen en la figura 3.6. En la parte superior se muestra la representación óptica del estado cuántico de entrada definido en la ecuación (3.3). Los signos debajo de esta figura representan las fases relativas asignadas a cada estado computacional. Abajo, en la primera columna, describimos la función codificada en el oráculo. En la segunda columna, se muestra la representación óptica de la aplicación del oráculo que, como ya se ha discutido, consiste en la aplicación de corrimientos de fase realizados en forma selectiva. La tercera columna, presenta las imágenes capturadas por la CCD del estado a la salida del dispositivo luego de la aplicación del oráculo seguida de la transformación de Hadamard sobre el primer qbit. En la cuarta columna pueden verse los perfiles de intensidad extraídos de las imágenes a lo largo de la línea blanca punteada. Notar que en el caso de funciones constantes se obtiene una imagen donde solo está iluminada la región asociada al estado $|0\rangle$ del primer qbit (arriba en la imagen, a la izquierda en el perfil) conforme al resultado dado por la ecuación (3.4). Las funciones balanceadas dan contrariamente intensidad no nula asociada a la mitad inferior (derecha). Estos resultados están en muy buen acuerdo con la distribución de probabilidad predicha en la ecuación (3.4) y permiten concluir que el campo electromagnético de la óptica clásica es capaz de reflejar los aspectos más sobresalientes del paralelismo cuántico. En efecto, mediante el uso de la codificación espacial de los cbits de posición junto con la representación óptica de los operadores unitarios sobre un qbit hemos conseguido resolver el problema de Deutsch evaluando a la función $f(x)$ solamente una vez, tal como podría hacerse en un ordenador cuántico.

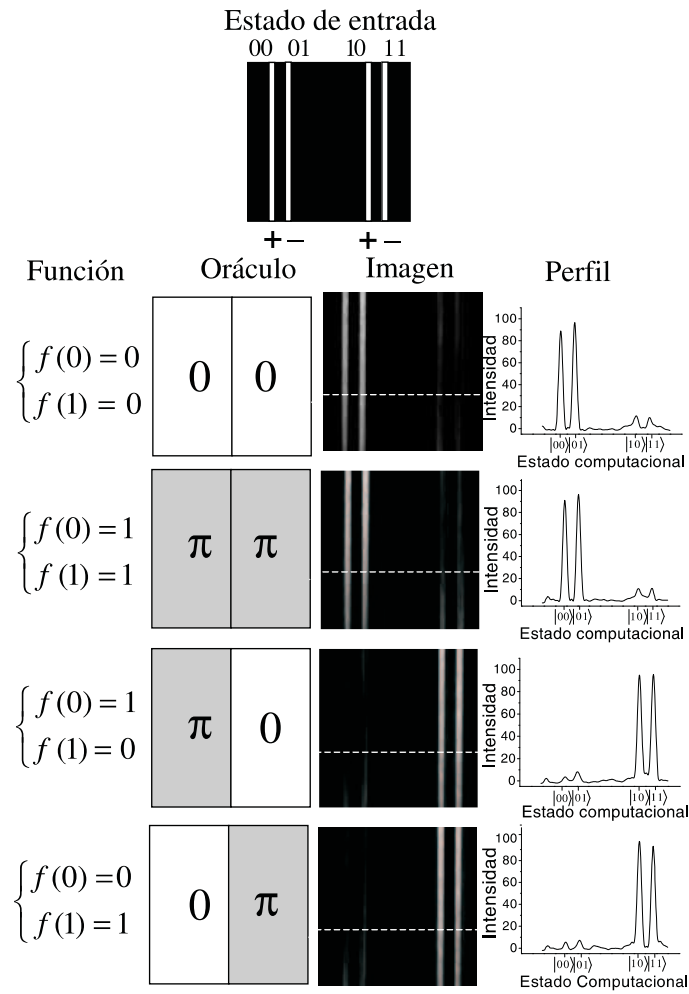


Figura 3.6: Resultados experimentales de la simulación del algoritmo de Deutsch.

Capítulo 4

Simulación óptica de la caminata al azar cuántica

En este capítulo abordaremos el problema de la simulación óptica de la caminata al azar cuántica (*Quantum Random Walk* o *QRW* en la jerga). Este proceso es la generalización cuántica de la caminata al azar clásica sobre grafos que es gobernada por procesos estocásticos de tipo Markoviano. Dicha noción clásica es, como se sabe, un herramienta fundamental en los campos de la matemática aplicada (dinámica de poblaciones) y la computación teórica (generación de algoritmos no deterministas) así como en la modelización de una gran variedad de sistemas complejos de la física clásica (procesos de transporte, difusión y deriva, etc.). La simulación óptica de este proceso es interesante por si misma porque demuestra que la codificación de los cbits de posición es útil para representar procesos en espacios de Hilbert de estructura distinta que la típica asociada a la representación del sistema compuesto de N qbits. Dicha simulación configura además un ejemplo sumamente atractivo, ya que muestra explícitamente la evolución del estado de un sistema cuántico como proceso esencialmente ondulatorio, además de proporcionar una visión ontológica del *entrelazamiento en acción*, es decir, de como la generación de entrelazamiento entre los subsistemas de un sistema compuesto afecta la evolución de un subsistema a través de la evolución del estado cuántico global.

La caminata al azar clásica, consiste a grandes rasgos en una partícula que está obligada a moverse sobre una línea. Se supone además que la partícula puede desplazarse hacia a la derecha o hacia la izquierda en pasos discretos con igual probabilidad. Una imagen clásica ilustrativa del proceso es la de un caminante que se desplaza hacia un lado u otro dependiendo del resultado de lanzar una moneda al aire. Al cabo de N iteraciones, la distribución de probabilidad sobre las posibles posiciones de la partícula sigue una función Gaussiana centrada en el origen y cuya dispersión es proporcional \sqrt{N} . Su contrapartida cuántica consiste en una partícula cuyo estado es un vector del espacio de Hilbert compuesto por el producto entre un grafo unidimensional y un sistema de dos niveles. La posición de la partícula está distribuída sobre los nodos del grafo y el sistema de dos niveles acoplado a la posición de la partícula configura una moneda cuántica. Una vez establecido el estado de partida se aplica el operador de Hadamard, (contrapartida cuántica del proceso clásico de lanzar una moneda al aire) seguido de un operador de traslación condicional. Al cabo de varias iteraciones del proceso, se obtienen distribuciones que difieren radicalmente de las Gaussianas que aparecen en el caso clásico y que pueden ser incluso no simétricas para algunas condiciones iniciales. Se han estudiado sistemas en espacios de Hilbert discretos y continuos tanto unidimensionales como multidimensionales y con conexiones globales distintas para modificar la topología del espacio de Hilbert [35–37]. La característica sobresaliente de la evolución temporal del estado global de este sistema es que la dispersión de la distribución de probabilidad es proporcional al número de iteraciones del proceso N . Esta propiedad podría ser muy útil en un algoritmo de búsqueda ya que el caminante cuántico explora el espacio de estados mucho más eficientemente que el caminante clásico. La posibilidad de simular clásicamente la caminata al azar clásica usando técnicas ópticas, ya ha sido establecida previamente pero por medios distintos de los sistemas formadores de imágenes aquí utilizados [38, 39] En este capítulo se muestra una aproximación elegante y novedosa de como puede ser simulada ópticamente una caminata al azar cuántica utilizando elementos ópticos convencionales en una arquitectura de procesamiento de imágenes. Se presentan resultados experimentales en los que se muestra la viabilidad del

proceso.

4.1. La Caminata al azar cuántica

Como se ha mencionado, la caminata al azar clásica unidimensional, consiste en un caminante que puede moverse sobre sitios dispuestos en un arreglo lineal. Supongamos que cada sitio tiene asignado un número entero $n \in \mathbb{Z}$. A cada paso, el caminante arroja una moneda al aire y dependiendo del resultado de dicha operación se desplaza hacia alguno de sus dos sitios vecinos. Es fácil mostrar que luego de t iteraciones de este proceso la distribución de probabilidad de ocupación de sitios es binomial (básicamente Gaussiana para t grande) y centrada en la posición inicial. La caminata cuántica (QRW) puede pensarse como una generalización directa de la versión clásica. La moneda clásica es reemplazada por una moneda cuántica que no es otra cosa que un sistema de dos niveles H_2 . El estado del caminante estará asociado a un espacio de Hilbert N -dimensional. La evolución del sistema, consiste en la aplicación iterada de los dos operadores siguientes: Primero, se aplica el operador de Hadamard al estado del qbit. Esto es el equivalente cuántico del proceso de lanzar una moneda al aire. Luego el caminante se mueve a la derecha o a la izquierda dependiendo de cual sea el estado de la moneda cuántica que tiene asociado (luego de este último paso la moneda y el caminante estarán entrelazados). Llamaremos traslación condicional a esta última operación. Denotando a los dos estados ortonormales que forman la base del espacio de los qbits $|0\rangle$ y $|1\rangle$ y $|n_0\rangle$ al estado inicial de la posición del caminante, el operador de Hadamard definido según $H|j\rangle = 1/\sqrt{2} \sum_{k=0,1} (-1)^k |k\rangle$, ($j = 0, 1$); transforma el estado inicial producto $|\Psi_0\rangle = |n_0\rangle \otimes (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$ en:

$$H|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |n_0\rangle \otimes [(\alpha + \beta)|0\rangle + (\alpha - \beta)|1\rangle] \quad (4.1)$$

El segundo paso del algoritmo es aplicar el operador de traslación condicional D . La acción de este operador es trasladar al caminante un paso hacia la izquierda cuando su posición esté acoplada al estado $|0\rangle$ de la moneda

cuántica y trasladar al caminante un paso hacia la derecha si su posición está acoplada al estado $|1\rangle$ de la moneda. Observar que que la traslación condicional, genera entrelazamiento entre el estado de la moneda y el estado del caminante. Luego de esta operación el estado cuántico global es:

$$|\Psi_1\rangle = DH |\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\alpha + \beta) |n_0 - 1\rangle \otimes |0\rangle + (\alpha - \beta) |n_0 + 1\rangle \otimes |1\rangle] \quad (4.2)$$

Luego de t iteraciones el estado es $|\Psi_t\rangle = (DH)^t |\Psi_0\rangle$. La probabilidad de detectar al caminante en la posición n luego de t iteraciones, está asociada ya no al estado global, sino al estado del subsistema constituido por el caminante. Dicha probabilidad puede calcularse entonces utilizando el formalismo del operador densidad mencionado en el primer capítulo:

$$\begin{aligned} P_t(n) &= \text{tr}(|n\rangle\langle n| \text{tr}_{H_2}(|\Psi_t\rangle\langle\Psi_t|)) \\ &= |(\langle 0| \otimes \langle n|) |\Psi_t\rangle|^2 + |(\langle 1| \otimes \langle n|) |\Psi_t\rangle|^2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

En la ecuación anterior la notación tr_{H_2} sugiere la operación de traza parcial sobre el estado del qbit. En la figura 4.1 puede verse la evolución comparada de las probabilidades de ocupación de sitios para los caminantes clásico y cuántico (este último con la condición inicial $\alpha = -i\beta = 1/\sqrt{2}$) cuando la posición inicial de ambos es $|n_0\rangle = 0$. Notar que las discrepancias entre los casos clásico y cuántico, aparecen recién en la cuarta iteración.

La ventaja del caminante cuántico frente al clásico es evidente cuando se estudia el crecimiento de la dispersión en las distribuciones de probabilidad para ambos modelos. Mientras el caminante clásico sigue un proceso de tipo difusivo (dispersión creciente linealmente en el tiempo), el caminante cuántico sigue un proceso de tipo balístico (dispersión creciente cuadráticamente en el tiempo). Por lo tanto, el caminante cuántico explora todas las configuraciones posibles del espacio de estados más eficientemente que el clásico. En la figura 4.2 se muestran las distribuciones en el paso $t=100$ a partir de

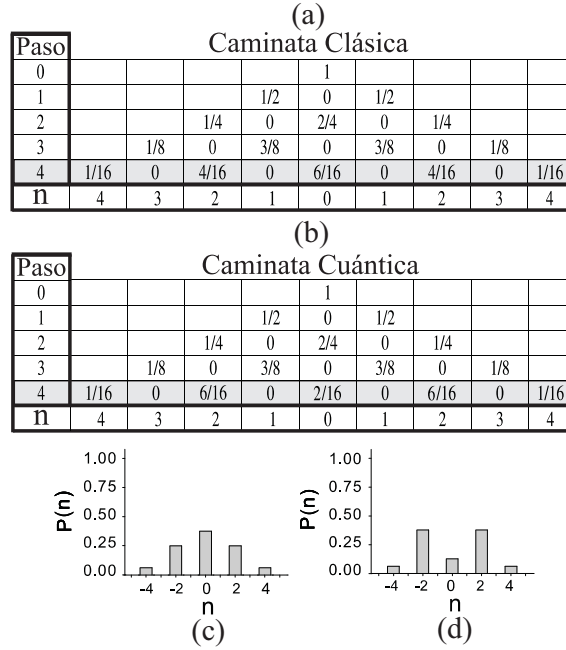


Figura 4.1: Evolución temporal comparada de las distribuciones de probabilidad de ocupación de sitios para los caminantes clásico (a) y cuántico (b) en las primeras cuatro iteraciones de cada proceso. En (c) y (d) se muestran las distribuciones clásica y cuántica respectivamente a la salida del cuarto paso.

las simulaciones numéricas de ambos procesos.

4.2. Simulación óptica de la caminata al azar cuántica

Si bien la representación óptica del espacio de Hilbert para este problema es similar a la usada en la codificación espacial de los cbits de posición, habrá de tenerse en cuenta que la estructura del espacio de estados en este caso difiere de la N qbits y por lo tanto, la codificación de los estados computacionales es aquí ligeramente distinta. Asimismo, la simulación óptica de las evoluciones unitarias introducen un elemento novedoso que es la aplicación de la traslación controlada. Como hemos visto, la traslación controlada in-

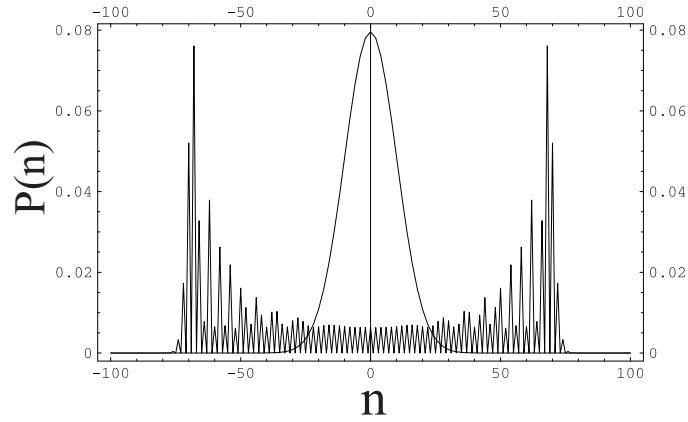


Figura 4.2: Distribuciones comparadas para la iteración $t=100$. La distribución fuertemente oscilante corresponde al caminante cuántico que muestra mayor probabilidad de estar lejos del origen que el caminante clásico.

volucra interacciones entre los estados acoplados de los dos subsistemas (la posición y el sistema de dos niveles) y por lo tanto es la responsable del entrelazamiento. En lo que sigue, veremos como representar el estado general de este espacio de Hilbert compuesto y describiremos la simulación de la traslación controlada realizando una ligera modificación en el dispositivo usado para simular los operadores unitarios de un qbit.

Para representar los estados computacionales en el espacio de Hilbert compuesto procederemos, como es habitual, dividiendo el plano de entrada de nuestro sistema óptico en dos mitades idénticas para representar el sistema de dos niveles. Nuevamente, las mitades derecha e izquierda corresponderán a los dos estados computacionales del qbit: Convencionalmente, diremos que el estado $|0\rangle$ corresponderá al lado izquierdo y el estado $|1\rangle$ al lado derecho. Para representar la posición del caminante, cada una de estas regiones será subdividida en regiones rectangulares más pequeñas, que identificaremos con un número entero k . De este modo tendremos al plano de entrada organizado espacialmente de modo que cada estado del conjunto $\{|0\rangle, |1\rangle\} \times \{|k\rangle, k \in Z\}$ esté representado por una escena donde la amplitud del campo electromagnético sea nula en todo el plano salvo en un único

4.2 Simulación óptica de la caminata al azar cuántica

rectángulo. En la figura 4.3 se muestran algunas de estas representaciones para los estados computacionales. Estados más generales (es decir, combinaciones lineales complejas de los anteriores) requerirán para su representación del uso de dispositivos capaces de controlar tanto la amplitud como la fase del campo electromagnético. Ya hemos comentado que las pantallas de cristal líquido programables son muy útiles para este propósito y volveremos a utilizarlas en esta oportunidad para demostrar experimentalmente que nuestra simulación conserva los ingredientes que posibilitan la aparición de los efectos cuánticos que gobiernan la evolución temporal.

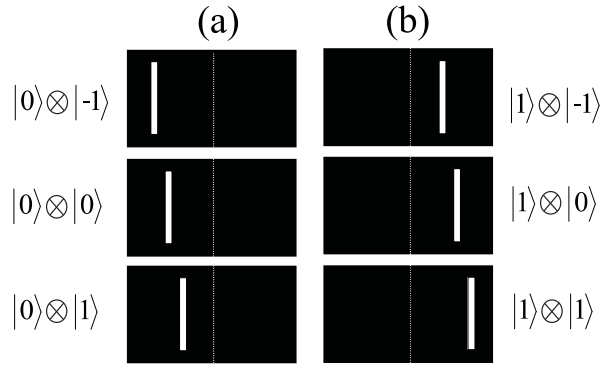


Figura 4.3: Representación de los estados de la base computacional como escenas de entrada de un sistema óptico.

Como hemos visto, la evolución temporal de las probabilidades de ocupación de sitios está definida por la aplicación iterada de dos operaciones unitarias: El operador de Hadamard (contrapartida cuántica del proceso de lanzar una moneda al aire) seguido de un operador de traslación condicional. Como siempre, cada una de estas operaciones se interpreta en este esquema de simulación como la modificación de la distribución de amplitud y fase del campo electromagnético a la salida de cierto dispositivo óptico. El operador de Hadamard, cuya implementación ha sido descrita en el capítulo anterior, es simulado mediante una placa de fase y una red de fase en el plano de Fourier de la escena de entrada. Para realizar una iteración completa del

proceso, es necesario contar con la representación óptica de la traslación condicional. Para realizar esta operación proponemos el uso de un procesador óptico coherente modificado. La modificación consiste en reemplazar a la lente que realiza la segunda transformada de Fourier por dos mitades separadas de una lente esférica convergente seccionada según su diámetro. La mitad izquierda de la lente es desplazada a la izquierda mientras que la mitad derecha es desplazada a la derecha. Controlando la separación entre las dos mitades de esta lente cortada es posible obtener en el plano final un desplazamiento igual al requerido por el algoritmo (es decir, desde un rectángulo dado hacia uno de sus dos rectángulos contiguos, dependiendo de la mitad considerada). Como veremos a continuación, el dispositivo origina fases lineales adicionales por los desplazamientos de los centros de cada mitad de la lente. Dichas fases lineales deberán ser corregidas para preservar las fases requeridas por el algoritmo. Para ello usaremos un biprisma de Fresnel. En lo que sigue, ensayaremos una breve descripción matemática del funcionamiento de la modificación del procesador óptico coherente que se usará para simular el desplazamiento controlado.

4.3. Simulación del desplazamiento controlado

Consideremos la acción del operador de desplazamiento controlado sobre cada elemento de la base del espacio de Hilbert:

$$\begin{aligned} D|n\rangle \otimes |0\rangle &= |n-1\rangle \otimes |0\rangle \\ D|n\rangle \otimes |1\rangle &= |n+1\rangle \otimes |0\rangle \end{aligned} \tag{4.4}$$

La codificación sugerida en la figura 4.3 es, en términos de las amplitudes complejas del campo electromagnético binarizadas para los estados computacionales:

$$\begin{aligned}
 |\pm n\rangle \otimes |0\rangle &\mapsto \text{rect}\left(\frac{x + a \mp nd}{b}\right) \\
 |\pm n\rangle \otimes |1\rangle &\mapsto \text{rect}\left(\frac{x - a \mp nd}{b}\right)
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

donde b es el ancho de cada rectángulo computacional y $x = a$ y $x = -a$ denotan las posiciones del plano de entrada asociadas a los estados computacionales $|n = 0\rangle \otimes |1\rangle$ y $|n = 0\rangle \otimes |0\rangle$ respectivamente. Por su parte, el parámetro d da cuenta de la longitud de cada paso discreto que da el caminante. Para que las amplitudes asociadas a los estados computacionales estén bien resueltas debe cumplirse $d > b$. En la figura 4.4 especificamos claramente el significado de cada uno de estos parámetros:

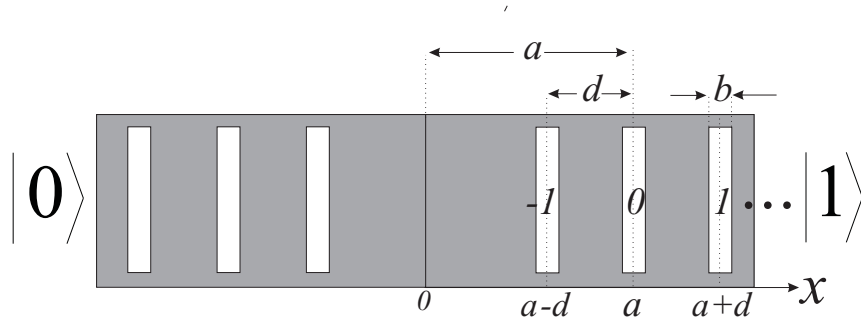


Figura 4.4: Parámetros de la codificación espacial de los estados cuánticos para la caminata al azar cuántica: las posiciones $x = \pm a$ denotan al origen de coordenadas de la posición del caminante acoplado a cada estado del sistema de dos niveles de la moneda, b es el ancho de cada rectángulo y d es la longitud del paso discreto que da el caminante en cada desplazamiento.

Un esquema del dispositivo experimental que utilizaremos se muestra en la figura 4.5 que representa esencialmente a un procesador coherente donde la lente que realiza la segunda transformada está cortada y sus dos mitades están desplazadas de modo que sus centros se separan del eje óptico.

Para entender como opera la simulación de la traslación condicional debemos escribir toda la secuencia de transformaciones de las amplitudes com-

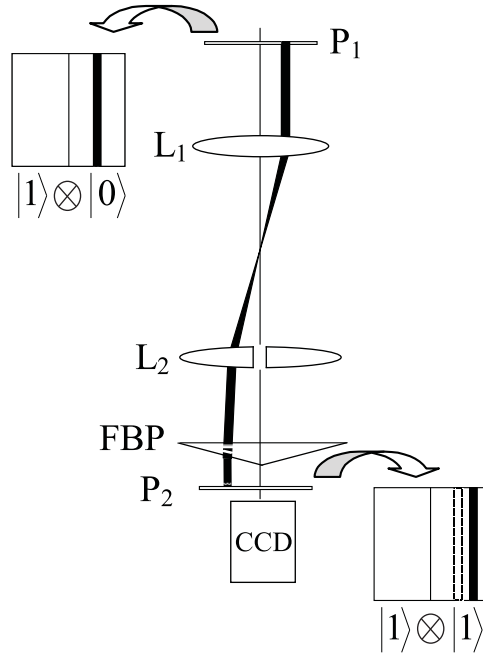


Figura 4.5: Dispositivo experimental que simula ópticamente el desplazamiento controlado. Como ejemplo mostramos el resultado de procesar la imagen correspondiente al estado $|n = 0\rangle \otimes |1\rangle$ que es $|n = 1\rangle \otimes |1\rangle$. Notar que el procesador coherente invierte la orientación de la imagen, cosa que se compensa invirtiendo el sistema de coordenadas. El esquema de la imagen de salida corresponde a las coordenadas ya invertidas.

plejas de los campos, desde el plano de entrada hasta el plano de salida del procesador coherente modificado. Como dichos cálculos son muy tediosos y no aportan nada conceptualmente no los reproduciremos literalmente. Como solo pretendemos describir la traslación condicional, no usaremos ningún filtro en el plano de Fourier. Denotaremos como x_o , x_F y x_i a las coordenada relevantes asociadas al plano objeto, al plano de Fourier y al plano imagen respectivamente. Insistimos en el hecho de que nuestra representación es esencialmente unidimensional. Naturalmente, esto simplifica mucho los cálculos. Para fijar ideas, supongamos que alimentamos a nuestro procesador con la escena de entrada que representa el estado más general del sistema global con el caminante en el origen de coordenadas, es decir $|n = 0\rangle \otimes (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$. Conforme a la codificación definida en la ecuación (4.5), la escena de entrada

correspondiente será entonces:

$$\begin{aligned}
 E(x_o) &= \alpha \text{Rect} \left(\frac{x_o + a}{b} \right) + \beta \text{Rect} \left(\frac{x_o - a}{b} \right) \\
 &\equiv E_L(x_o) + E_R(x_o)
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Si disponemos la escena de entrada en el plano focal anterior de la primera lente del procesador, sabemos que la amplitud compleja del campo en el plano de Fourier es (salvo constantes multiplicativas) la transformada de Fourier de la escena de entrada. La transformada de Fourier de los dos rectángulos desplazados del origen de la ecuación (4.6) da dos términos que pueden escribirse como:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{E(x_o)\}_{(f_x)} &= \text{Sinc}(\pi b f_x) [\alpha \exp(i2\pi a f_x) + \beta \exp(-i2\pi a f_x)] \\
 &= E_L(f_x) + E_R(f_x)
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

donde hemos definido como $E_L(f_x)$ y $E_R(f_x)$ a los campos provenientes de las mitades izquierda y derecha de la escena de entrada respectivamente.

$$\begin{aligned}
 E_L(f_x) &\equiv \alpha \text{Sinc}(\pi b f_x) \exp(i2\pi a f_x) \\
 E_R(f_x) &\equiv \beta \text{Sinc}(\pi b f_x) \exp(-i2\pi a f_x)
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

La función $\text{Sinc}(x)$ es la conocida expresión genérica para la transformada de Fourier de un pulso rectangular y vale $\text{sen}x/x$ si $x \neq 0$ y 1 si $x = 0$. Los dos términos de fase dentro del corchete corresponden a las contribuciones de los desplazamientos de cada rectángulo respecto del origen. Como siempre, la relación entre la variable de frecuencia espacial y la coordenada del plano de Fourier es $f_x = F / \lambda f$ donde f es la distancia focal de la lente y λ es la longitud de onda.

La transformación siguiente, es el resultado de efectuar una propagación

libre de los campos desde el plano de Fourier hasta el plano de las dos medias lentes desplazadas; luego multiplicar a los campos por los factores de transmitancia correspondientes y finalmente efectuar una nueva propagación libre desde el plano de las dos medias lentes desplazadas hasta el plano imagen final. Las propagaciones libres están definidas por la integral de difracción de Fresnel de la ecuación (1.39). Las transmitancias de las dos lentes desplazadas son, conforme a la ecuación (1.42):

$$\begin{aligned} T_L &= \exp \left[-i \frac{k}{2f} (x_L + d)^2 \right] \\ T_R &= \exp \left[-i \frac{k}{2f} (x_L - d)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde los subíndices L y R indican el sentido del desplazamiento de los centros, d es la magnitud de dicho desplazamiento y x_L es la coordenada del plano de las dos medias lentes cortadas. Debemos tener en cuenta que luego de las propagaciones libres de los campos provenientes del plano de Fourier del procesador, el campo proveniente de la mitad derecha de la escena de entrada será procesado por la lente de la mitad izquierda y viceversa. Este hecho está bien representado en las figuras 4.5 y 4.6 y se origina en la inversión natural de las imágenes que produce el dispositivo. El resultado final del cálculo es muy similar al obtenido en el caso de una lente centrada expresado en la ecuación (1.43). En este caso obtendremos para cada contribución:

$$\begin{aligned} E_L(x_i) &= \exp \left(i \frac{2\pi}{\lambda f} x_i d \right) \int_{-\infty}^{-\infty} E_L(x_F) \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda f} (x_i + d) x_F \right] dx_f \\ E_R(x_i) &= \exp \left(-i \frac{2\pi}{\lambda f} x_i d \right) \int_{-\infty}^{-\infty} E_R(x_F) \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda f} (x_i - d) x_F \right] dx_f \end{aligned} \quad (4.10)$$

La interpretación de las expresiones (4.10) es inmediata: salvo los factores de fase lineales que multiplican a las integrales, se tienen las transformadas de

4.3 Simulación del desplazamiento controlado

Fourier (con un corrimiento en la dirección x de magnitud d a la derecha o a la izquierda según el caso) de los campos a la salida del plano de Fourier, campos definidos oportunamente en las ecuaciones (4.8). Esto último puede interpretarse también como la transformada inversa de Fourier de los mismos campos evaluada en los argumentos opuestos. Finalmente, como el sistema de coordenadas del plano imagen final tiene orientación opuesta respecto de los sistemas en todos los planos anteriores, resulta para el campo a la salida del procesador:

$$\begin{aligned}
 E_L(x_i) + E_R(x_i) &= \alpha \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda f}x_i d\right) \text{Rect}\left(\frac{x_o + a + d}{b}\right) + \\
 &= \beta \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda f}x_i d\right) \text{Rect}\left(\frac{x_o - a - d}{b}\right) \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

Finalmente, supongamos que hallamos un medio para compensar las fases lineales que afectan a cada término en la imagen de salida. Entonces las relaciones de entrada/salida de nuestro procesador coherente modificado serán, para cada término:

$$\begin{aligned}
 \text{Rect}\left(\frac{x_o + a}{b}\right) &\mapsto \text{Rect}\left(\frac{x_o + a + d}{b}\right) \\
 \text{Rect}\left(\frac{x_o - a}{b}\right) &\mapsto \text{Rect}\left(\frac{x_o - a - d}{b}\right) \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

Es evidente que la traducción de las expresiones (4.12) al lenguaje de los estados cuánticos es, teniendo en cuenta la codificación definida en la ecuación (4.5):

$$\begin{aligned}
 D|n = 0\rangle \otimes |0\rangle &= |n = -1\rangle \otimes |0\rangle \\
 D|n = 0\rangle \otimes |1\rangle &= |n = +1\rangle \otimes |0\rangle \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

Que es precisamente lo que requiere el desplazamiento controlado. Existe no obstante un elemento indeseable que no traerá problemas mientras la

intención sea simular un paso de la iteración pero que decididamente entorpecerá nuestro objetivo en caso de que se pretenda efectuar la simulación de muchos de tales pasos. Se trata evidentemente de la presencia de los factores de fase lineales en la ecuación (4.11). Si efectuamos la medición luego del primer paso de iteración, debemos considerar el módulo al cuadrado del campo descrito en ecuación (4.11) y por lo tanto dichos factores de fase se cancelan (esto es meramente equivalente a observar la señal de salida proyectada en una pantalla ya que nuestro ojo promedia temporalmente la energía y entonces no detecta factores de fase). Si en cambio pretendemos que esta señal de salida del primer aparato, sea la señal de entrada de un segundo aparato idéntico al primero, nos veremos obligados a eliminar dichos factores que no tienen analogía alguna en el algoritmo cuántico que se pretende simular. Una solución posible al dilema es, como hemos adelantado disponer a la salida del procesador un biprisma de Fresnel se indica en la parte inferior de la figura 4.5. La relación válida para cancelar los factores de fase indeseables es, en términos de los parámetros del prisma $d/f = (n - 1)tg(\alpha)$ donde α es el ángulo, n el índice de refracción del prisma y d la magnitud del desplazamiento de los centros de las medias lentes de distancia focal f .

El dispositivo óptico completo se muestra en la figura 4.6. Un laser de He-Ne ($\lambda=633$ nm) es expandido, filtrado y colimado por la lente L_0 . El haz colimado incide sobre el plano P_1 donde se representa el estado cuántico como escena de entrada. La placa de fase (PP) introduce un retraso de la fase en π en la porción del campo que emerge desde la mitad derecha. La lente L_1 (de 30 cm de distancia focal) permite obtener la transformada de Fourier del plano de entrada. La distribución de campo transformado se hace coincidir con la red de fase (G) que es usada para realizar la transformación de Hadamard óptica. En nuestro caso, se utilizó una red de transmisión sintetizada holográficamente de frecuencia espacial $75mm^{-1}$. Una tercera lente L_2 dividida en dos mitades realiza tanto la transformada inversa de Fourier como la operación de traslación condicional. El biprisma de Fresnel (FBP) corrige las fases lineales adicionales producidas por la lente dividida. La imagen resultante, que es un registro de intensidad de la distribución de campo

4.4 Resultados experimentales de la caminata al azar cuántica

correspondiente al estado cuántico a la salida del proceso, es proyectada en una pantalla P_2 y recogida por una cámara digital (CCD). Como ejemplo del funcionamiento del dispositivo, se muestra la marcha de rayos para la información proveniente del estado $1/\sqrt{2} (|0\rangle \otimes |n\rangle + |1\rangle \otimes |n\rangle)$. En la interpretación de la imagen final, habrá de tenerse en cuenta la inversión del sistema de coordenadas provocada por el dispositivo en cada iteración.

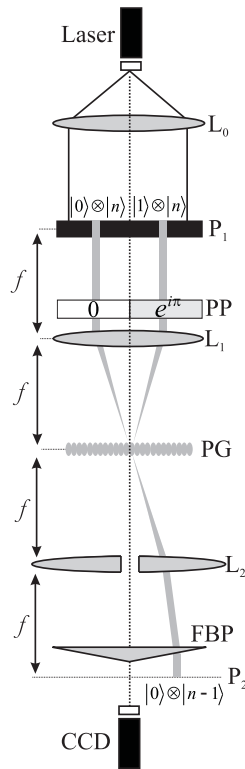


Figura 4.6: Dispositivo experimental que simula ópticamente el algoritmo QRW.

4.4. Resultados experimentales de la caminata al azar cuántica

En principio, cualquiera sea la condición inicial, podemos realizar t iteraciones del proceso QRW por medio de t dispositivos idénticos al descrito

en la sección anterior. Sin embargo, aún podemos obtener resultados experimentales que muestren la naturaleza cuántica de la simulación utilizando solamente uno. En efecto, supongamos que alimentamos a nuestro dispositivo con la escena de entrada correspondiente a la distribución de campo electromagnético a la salida del tercer paso (si pretendemos usar solamente un módulo, esto deberá hacerse artificialmente). Luego obtendremos como imagen final la salida del cuarto paso que es justamente la que muestra discrepancias entre los casos clásico y cuántico. Es decir, considerando la condición inicial $|\Psi_0\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle + i|1\rangle)$ luego de tres iteraciones el estado es:

$$(DH)^3 |\Psi_0\rangle = |0\rangle \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(7\pi/4)} |-1\rangle + e^{i(\pi/2)} |1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(\pi/4)} |3\rangle \right) + |1\rangle \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(3\pi/4)} |-3\rangle + e^{i\pi} |-1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(\pi/4)} |1\rangle \right) \quad (4.14)$$

Para configurar este estado, donde es necesaria la representación de amplitudes complejas, usamos un modulador espacial de luz (SLM). Dicho dispositivo consiste en una pantalla de cristal líquido Sony TV (LCTV) que combinada con dos polarizadores y dos láminas retardadoras, actúan como un modulador espacial en modo de fase. La LCTV (modelo LCX0112BL) fue extraída de un videoprojector comercial y es un panel VGA cuya resolución es de 640x480 pixels. Los pixeles son cuadrados de $34\mu\text{m}$ de lado y están separados por una distancia de $41,3\mu\text{m}$. Las fases relativas asociadas a cada estado de la base son directamente representadas. Las amplitudes relativas son codificadas en fase para posibilitar su representación.

En la figura 4.7(a) se muestra la imagen de salida producida por el dispositivo cuando la escena de entrada corresponde a la representación óptica del estado de la ecuación (4.14). Más abajo en la figura 4.7(b) se muestran el perfil (horizontal) de intensidades medias y finalmente en la figura 4.7(c) el perfil teórico esperado. Puede notarse que la imagen está parcialmente contaminada por ruido de speckle debido a la alta coherencia de la fuente. Más aún, las aberraciones de los elementos ópticos también contribuyen a la corrupción de la imagen final. No obstante, como veremos, el sistema es

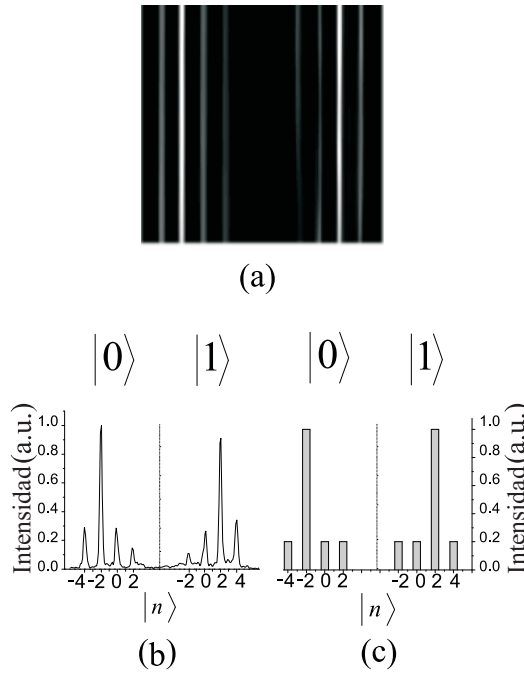


Figura 4.7: Resultados experimentales correspondientes a la simulación óptica de una iteración del algoritmo QRW desde el tercero hasta el cuarto paso

capaz de reproducir, al menos cualitativamente los resultados que se esperan.

Por último, se suman los perfiles de intensidad correspondientes a los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ de la Fig.4(b). Conforme a la ecuación (4.3) dicha adición normalizada deberá ser la distribución de probabilidad de ocupación de sitios al cuarto paso del algoritmo QRW. El resultado se expone en la figura 4.8, donde se ha efectuado la adición de los perfiles de intensidad correspondientes a los estados asociados a la base computacional del sistema de dos niveles y se compara el resultado con la distribución de probabilidad que predice la teoría. Como puede observarse, aunque las probabilidades de ocupación de sitios difieren significativamente de las predichas teóricamente, se obtiene un buen acuerdo, al menos cualitativamente. Se ha mencionado que para simular la evolución de cualquier condición inicial aplicando t iteraciones del proceso, es necesario disponer de t dispositivos ópticos idénticos al estudiado.

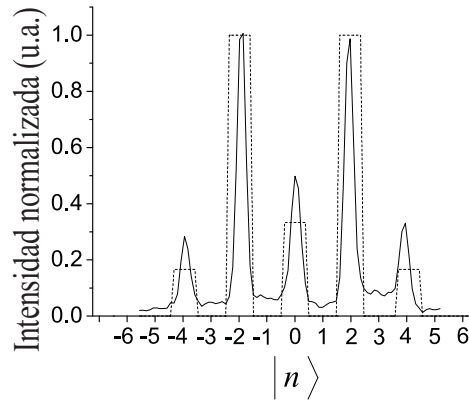


Figura 4.8: Distribución de probabilidad de ocupación de sitios en el cuarto paso de QRW obtenida ópticamente (línea llena) y distribución teórica esperada (línea punteada)

No obstante hay algunas limitaciones fundamentales en este sentido. De hecho, el número de recursos necesarios para implementar un cierto número de iteraciones crece linealmente con ese número de modo que cada iteración duplica la dimensión del espacio de Hilbert. En nuestro caso esta limitación está principalmente asociada al número de estados que puedan ser representados como escena de entrada. Esto depende tanto de las dimensiones del sistema óptico utilizado (diámetro de las lentes) como de la resolución del medio donde dichos estados son representados. Una limitación adicional que de todos modos estará presente en cualquier simulación de estas características se refiere a las aberraciones de los elementos ópticos utilizados, que introducen fases no deseadas a medida que el frente de onda se propaga a través del dispositivo óptico. No obstante, estas aberraciones pueden ser corregidas de modo que la simulación de la evolución temporal del estado global pueda realizarse en forma coherente, es decir, sin perder información de las correlaciones cuánticas originadas en el entrelazamiento.

Los resultados experimentales referidos en la figura 4.8 muestran que la distribución de probabilidad obtenida es cualitativamente similar a la que se esperaría en el caso cuántico. Este hecho, revela que el campo electromagnético de la óptica clásica, por su naturaleza ondulatoria, es capaz de simular la

4.4 Resultados experimentales de la caminata al azar cuántica

evolución temporal global de un sistema cuántico entrelazado de modo que la evolución de un cierto subsistema (en este caso la posición del caminante), refleje y preserve las características cuánticas que lo distinguen.

Capítulo 5

Simulación óptica del proceso de teleportación

Demás está decir que el proceso de teleportación cuántica ha sido, desde su descubrimiento a inicios de la década del noventa del siglo pasado, uno de los tópicos que con más fuerza ha dirigido la atención entusiasta de muchos investigadores hacia el campo de la teoría cuántica del procesamiento de la información. El procesamiento cuántico de la información ha recibido especial atención, no solo por los problemas de interés práctico que suscita (computación cuántica, distribución cuántica de claves criptográficas, etc) sino también por muchos otros problemas que muestran los aspectos menos intuitivos de la mecánica cuántica. El problema de la teleportación es, sin duda una de estas cuestiones poco intuitivas. La posibilidad de explotar las correlaciones cuánticas existentes entre dos partículas en un par entrelazado EPR [40] para reconstruir un estado cuántico que está inicialmente en un cierto lugar en otro lugar arbitrariamente alejado en ausencia de un canal cuántico de comunicación atenta contra toda intuición basada en la física clásica. Tal posibilidad fué sugerida inicialmente por Bennet et al. [41], y luego experimentalmente confirmada por varios autores en diferentes formas. Por ejemplo, los métodos de implementación más conocidos fueron presentados por Zeillinger y su grupo usando estados de polarización de fotones individuales [42], por Popescu et al. usando técnicas ópticas [43], por Furu-

sawa et al. por medios de estados *squeezed* de la luz [44] y por Laflamme et al. usando técnicas de resonancia magnética nuclear [45].

Por otro lado la analogía entre la mecánica cuántica y la óptica clásica ha sido explorada recientemente [8–13] siendo el objeto de esta tesis el desarrollo de uno de los aspectos posibles de esta analogía. Ya hemos enfatizado el hecho de que la posibilidad de realizar simulaciones clásicas de fenómenos cuánticos explotando estas analogías es interesante desde muchos puntos de vista. Los algoritmos cuánticos pueden ser comprendidos entonces como una consecuencia de la naturaleza ondulatoria de la evolución de los estados cuánticos. En este sentido, el carácter ondulatorio del campo electromagnético nos permite simular de modo elegante como funcionan los algoritmos. En el caso particular de la teleportación, la posibilidad de realizar una simulación clásica fué inicialmente sugerida por Spreeuw [9]. En sus trabajos la información era codificada en estados de polarización de un haz luz clásica proveniente de un láser (cbit de polarización) o en la amplitud compleja de haces espacialmente separados (cbit de posición). Los estados entrelazados eran simulados combinando estos dos tipos de representación. Con estas herramientas, Spreeuw mostró como puede realizarse un experimento donde un bit de posición puede ser teleportado (naturalmente en un sentido clásico) en un bit de polarización. En este trabajo, presentamos un nuevo esquema de simulación óptica del algoritmo de teleportación basado en una arquitectura de procesamiento de imágenes mostrando además resultados experimentales [11]. También discutimos la interpretación ilustrativa del proceso que es consecuencia de la limitación clásica inherente a la imposibilidad de representación de entrelazamiento no local usando sistemas clásicos [8,9].

En este capítulo desarrollamos los elementos básicos para la simulación óptica de este proceso tan importante. Las novedades introducidas en este trabajo son, desde el punto de vista experimental, la implementación de ambos tipos de compuertas cuánticas universales ($U(2)$ y $CNOT$) que son necesarias para generar y remover entrelazamiento. Desde el punto de vista fundamental y conceptual, debemos enfatizar la interpretación clásica del

proceso, que no deja de ser elegante y atractiva a pesar de surgir como una consecuencia de la tan comentada limitación intrínseca de los sistemas clásicos para representar entrelazamiento no local. Presentaremos una arquitectura óptica que constituye por sí misma una simulación clásica del proceso de teleportación cuántica. El esquema está basado en la analogía formal entre la evolución del estado global de un sistema cuántico compuesto por tres sistemas de dos niveles durante el protocolo de teleportación y la evolución de la amplitud compleja del campo electromagnético a través de un sistema óptico paraxial como los que hemos usado a lo largo del presente trabajo. El estado inicial de uno de estos sistemas de dos niveles es transferido al estado final de otro de estos sistemas sin ningún conocimiento previo del mismo. En este sentido, el protocolo de teleportación de un qbit, puede ser simulado mediante la propagación de un frente de onda plano controlado ópticamente, aprovechando el carácter ondulatorio de este sistema clásico. La diferencia entre el protocolo de teleportación cuántico y el clásico, es que mientras el primero funciona para cada fotón individualmente, el proceso aquí descrito solamente funciona para los campos clásicos macroscópicos. Se discute el diseño y la operación del dispositivo que simula el proceso completo de teleportación del estado de un qbit y se muestran resultados experimentales. Finalmente, se discute la interpretación clásica del proceso que aunque aparece como consecuencia de la imposibilidad de representar clásicamente estados entrelazados no locales no deja de ser interesante ya que muestra la estructura matemática del problema desde un punto de vista tan elegante como original.

5.1. Breve descripción del proceso de teleportación

El proceso de teleportación puede ser explicado como sigue: Alice y Bob estuvieron juntos por algún tiempo pero ahora viven separados. Mientras permanecieron juntos generaron un par entrelazado de dos qbits, quedándose cada uno de ellos con una de las partículas de este par entrelazado para

finalmente separarse. Se ha demostrado que en estas condiciones Alice puede enviar a Bob un cierto qbit desconocido $|\Psi\rangle$, transfiriendo solamente dos bits de información clásica [41]. El circuito cuántico mostrado en la figura 1 describe sintéticamente el proceso de teleportación. En lo que sigue utilizaremos la notación siguiente: un estado de un sistema de dos niveles (qbits) se denotará, como siempre, como una combinación lineal compleja normalizada de los estados de la base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Un estado del espacio de Hilbert 2^N -dimensional compuesto por N qbits $H_2^{\otimes N}$ se denotará como el producto: $|\Psi(1)\rangle_1 |\Psi(2)\rangle_2 \dots |\Psi(3)\rangle_N$, donde $|\Psi(j)\rangle = \alpha_j |0\rangle_j + \beta_j |1\rangle_j$ es el estado del j -ésimo qbit (hemos omitido el símbolo de producto tensorial \otimes entre cada factor por simplicidad). Supongamos que el estado a teleportar es $|\Psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$ donde α y β son amplitudes complejas desconocidas. El proceso comienza entonces, con el estado de tres qbits $|\Psi\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_3$. Para mayor claridad en la exposición, hemos dividido el proceso completo en cuatro estaciones o módulos. Alice y Bob (que todavía están juntos en esta instancia del proceso) comienzan el protocolo haciendo interactuar los qbits 2 y 3 para crear el par entrelazado. Para hacer esto, son necesarias dos operaciones: La compuerta de Hadamard (una operación unitaria sobre el espacio de un qbit, como ya hemos visto) cuya representación en la base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ del espacio de Hilbert de un qbit es:

$$\mathbf{H} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

Y la compuerta CNOT que es un operador unitario de dos qbits. Como ya hemos visto, la representación matricial del operador CNOT en la base del espacio de dos qbits $H_2^{\otimes 2}$, $\{|0\rangle_1 |0\rangle_2; |0\rangle_1 |1\rangle_2; |1\rangle_1 |0\rangle_2; |1\rangle_1 |1\rangle_2\}$ es:

$$\mathbf{CNOT} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Recordemos además que conforme a lo descrito en el primer capítulo, la acción de esta compuerta puede describirse como sigue: Si el primer qbit (o

5.1 Breve descripción del proceso de teleportación

qbit de control) está en el estado 0, entonces el segundo qbit (o qbit blanco) no se modifica. Si contrariamente, el estado del primer qbit es 1, entonces se niega el estado del segundo qbit. Comenzando el proceso con el estado cuántico de tres qbits $|\Psi\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_3$, luego de la operación de Hadamard sobre el qbit 2 y la operación CNOT sobre los qbits 2 y 3 (con el qbit 2 como bit de control), se prepara el estado a tiempo $t = 0$ definido por:

$$|\Phi(t=0)\rangle = |\Psi\rangle_1 \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_2 |0\rangle_3 + |1\rangle_2 |1\rangle_3). \quad (5.3)$$

Aquí finaliza la primera parte del proceso. En este momento, Bob se aleja de Alice. Los primeros dos qbits (1 y 2) permanecen en poder de Alice mientras que Bob, por su parte, se aleja con el tercer qbit. Como hemos explicado previamente, Alice y Bob comparten un par entrelazado porque el segundo qbit de Alice y el tercer qbit (de Bob) comenzaron precisamente en un par entrelazado. La ecuación (5.3) puede describirse:

$$\begin{aligned} |\Phi(t=0)\rangle = & \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha |0\rangle_1 |0\rangle_2 + \beta |1\rangle_1 |0\rangle_2) |0\rangle_3 + \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha |0\rangle_1 |1\rangle_2 + \beta |1\rangle_1 |1\rangle_2) |1\rangle_3 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Una vez que Alice tiene al qbit desconocido junto con su parte del par entrelazado (Bob se fué a algún sitio distante con la otra parte), ella comienza la segunda parte del proceso y que consiste en efectuar una *medida de Bell* sobre los qbits 1 y 2 [40, 46, 47]. Llamamos medida de Bell a la operación de remover el entrelazamiento para luego efectuar una medición en la base computacional. Más precisamente, para comenzar envía sus dos qbits (1 y 2) a través de una compuerta CNOT usando el qbit desconocido como control y su parte del par entrelazado como blanco. De acuerdo a la definición de la compuerta CNOT esta operación produce el estado:

$$\begin{aligned} \mathbf{CNOT}_{12} |\Phi(t=0)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha |0\rangle_1 |0\rangle_2 + \beta |1\rangle_1 |1\rangle_2) |0\rangle_3 + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha |0\rangle_1 |1\rangle_2 + \beta |1\rangle_1 |0\rangle_2) |1\rangle_3 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Luego, aplica el operador de Hadamard a su primer qbit, que mapea los estados de la base computacional $|0\rangle$ and $|1\rangle$ en las superposiciones $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ y $(|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$ respectivamente, de acuerdo a la ecuación (4.1). Dando como resultado el estado $|\Phi(t=1)\rangle = \mathbf{H}_1 \mathbf{CNOT}_{12} |\Phi(t=0)\rangle$ cuya expresión puede descomponerse naturalmente en los cuatro términos siguientes:

$$\begin{aligned} |\Phi(t=1)\rangle &= \frac{1}{2} |0\rangle_1 |0\rangle_2 (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle)_3 + \frac{1}{2} |0\rangle_1 |1\rangle_2 (\alpha |1\rangle + \beta |0\rangle)_3 + \\ &+ \frac{1}{2} |1\rangle_1 |0\rangle_2 (\alpha |0\rangle - \beta |1\rangle)_3 + \frac{1}{2} |1\rangle_1 |1\rangle_2 (\alpha |1\rangle - \beta |0\rangle)_3 \end{aligned} \quad (5.6)$$

El tercer proceso comienza con la medición de los qbits 1 y 2 en la base computacional, cosa que se lleva a cabo en el laboratorio de Alice. En el primer término de la ecuación ecuación (5.6) el estado de los qbits 1 y 2 (en poder de Alice) es $|0\rangle_1 |0\rangle_2$, mientras que el qbit de Bob está en el estado $(\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle)_3$ que es precisamente el estado del qbit desconocido que se pretende teleportar. Luego, si Alice realiza una medición de sus dos qbis en la base computacional y obtiene el resultado 00, entonces, el estado del qbit de Bob luego de la medición será precisamente $|\Psi\rangle$. Similarmente, de la ecuación (5.6), podemos leer el estado post-medición del qbit de Bob , dado el resultado de la medición llevada a cabo por Alice:

5.1 Breve descripción del proceso de teleportación

$$\begin{aligned}
 00 &\rightarrow |\Psi(00)\rangle_3 \equiv (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle)_3 \\
 01 &\rightarrow |\Psi(01)\rangle_3 \equiv (\alpha |1\rangle + \beta |0\rangle)_3 \\
 10 &\rightarrow |\Psi(10)\rangle_3 \equiv (\alpha |0\rangle - \beta |1\rangle)_3 \\
 11 &\rightarrow |\Psi(11)\rangle_3 \equiv (\alpha |1\rangle - \beta |0\rangle)_3
 \end{aligned}$$

Dependiendo del resultado de la medición de Alice, el qbit de Bob podrá finalizar en uno de los cuatro estados posibles descritos en las ecuaciones (5.7) (es decir, el estado completo de la ecuación (5.6) colapsará en uno de los cuatro estados $(|\Phi(t=2)\rangle = |i\rangle_1 |j\rangle_2 |\Psi(ij)\rangle_3)$). Luego de realizada la medición, Alice deberá comunicar el resultado de la misma a Bob enviando dos bits de información a través de algún canal de comunicación clásico. Este es el final del tercer paso del proceso.

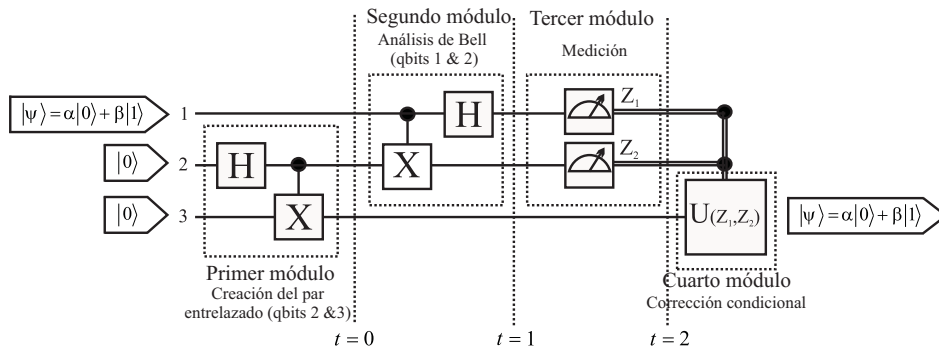


Figura 5.1: Esquema del circuito cuántico que realiza el proceso de teleportación del estado de un qbit.

El cuarto paso del proceso es una operación unitaria correctiva sobre el estado del tercer qbit (que debe realizar Bob) y que es controlada por el resultado de la medición efectuada por Alice. Una vez que Bob se entera del resultado de la medición de Alice, el debe aplicar una cierta operación correctiva para restablecer el estado cuántico desconocido $|\Psi\rangle$. Por ejemplo, en el caso en que el resultado obtenido por Alice es 00, Bob no tiene que hacer absolutamente nada. Pero si Alice obtiene los resultados 01, 10 o 11; entonces los estados del qbit de Bob serán respectivamente: $(\alpha |1\rangle + \beta |0\rangle)_3$, $(\alpha |0\rangle - \beta |1\rangle)_3$ o $(\alpha |1\rangle - \beta |0\rangle)_3$. Notar que para cada uno de estos casos, hay una operación

unitaria que restaura el estado post-medición de Bob en el estado original desconocido. En el primer caso, Bob deberá aplicar el operador de Pauli \mathbf{Z} (que deja a $|0\rangle$ invariante pero cambia el signo de $|1\rangle$); en el segundo caso, Bob puede aplicar el operador de Pauli \mathbf{X} (que intercambia los estados computacionales $|0\rangle$ y $|1\rangle$). Finalmente, en el tercer caso puede corregir el estado final aplicando del operador \mathbf{ZX} .

5.2. Dispositivo óptico para la simulación de la Teleportación

Como hemos mencionado, por simplicidad, dividimos el proceso de teleportación en cuatro pasos. Si queremos transferir la información contenida en el estado del primer qbit (en el laboratorio de Alice) al estado del tercer qbit (en el laboratorio de Bob) de acuerdo al protocolo básico de teleportación, estos cuatro pasos son:

1. Creación del par entrelazado EPR en los qbits 2 y 3.
2. Análisis de Bell (aplicación iterada de las compuertas CNOT y Hadamard) los qbits 1 y 2.
3. Medición en la base computacional del estado de los qbits 1 y 2.
4. Aplicación de la operación unitaria correctiva sobre el qbit 3

Dichos pasos o procesos subyacentes están debidamente representados en el circuito de la figura 5.1. En el dispositivo experimental de la figura 5.2, podemos ver la representación óptica de cada uno de estos procesos. Un láser es expandido, filtrado y colimado con la lente L_0 . El haz colimado incide sobre la máscara P_0 que modula la amplitud compleja del campo EM para codificar la información contenida en el primer qbit. A continuación, se coloca una máscara binaria P_1 cuyo función es reorganizar la información dicotómica codificada en las zonas izquierda-derecha del plano completo, de modo de obtener la información completa del estado de tres qbits $|\Psi\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_3$ que

debe ingresar al circuito para iniciar el proceso a tiempo $t = 0$. En el caso en que se quiera transferir información de estados cuánticos donde α y β son reales, podemos controlar el valor de dichas constantes colocando un filtro neutro entre la lente L_0 y la máscara binaria. Por el contrario, si queremos representar amplitudes complejas y las constantes α y β contienen información de fase relativa, se necesita utilizar un medio capaz de modular tanto la amplitud como la fase del campo electromagnético. El segundo proceso consiste en efectuar un análisis de Bell sobre los qbits 1 y 2. La compuerta *CNOT* sobre los qbits 1 y 2 es simulada por el prisma cúbico (CP) que intercambia los rayos provenientes de la mitad derecha del plano de entrada completo. El operador de Hadamard sobre el primer qbit, es simulado conforme a lo expuesto en el capítulo anterior mediante el uso de la placa de fase $PP(\delta = \pi)$ y la red de fase $G(\gamma = \pi/2)$ entre el par de lentes esféricas (L_1 and L_2) [11] que realizan el procesamiento óptico coherente. Como ya hemos discutido antes, todos los operadores del grupo $U(2)$ tienen una representación óptica similar en nuestro esquema de simulación. En este caso, la placa de fase fué construída mediante la deposición de una capa delgada de film transparente sobre una placa de vidrio plana. El plano de entrada del procesador yace sobre el mismo plano que la máscara binaria P_1 . La lente L_1 (de 70 cm de distancia focal) nos permite obtener la transformada de Fourier óptica de la transmitancia de entrada cuya distribución de amplitud se localiza en el plano focal posterior de la lente L_1 , donde disponemos la red de fase que usamos para realizar el operador de Hadamard. La red es construída de tal forma que los tres órdenes difractados principales (-1, 0 y 1) tengan la misma intensidad. Además, como ya se ha discutido, la frecuencia espacial de la red debe ser tal que produzca órdenes difractados cuya separación en el plano imagen final sea igual a la distancia entre las imágenes asociadas a los estados computacionales: $|0\rangle_1 |i\rangle_2 |j\rangle_3$ and $|1\rangle_1 |i\rangle_2 |j\rangle_3$. En nuestro caso, sintetizamos una red holográfica de frecuencia espacial 50 1/mm. Una tercera lente L_2 (de 70 cm de distancia focal) es colocada con el fin de simular la transformada de Fourier inversa.

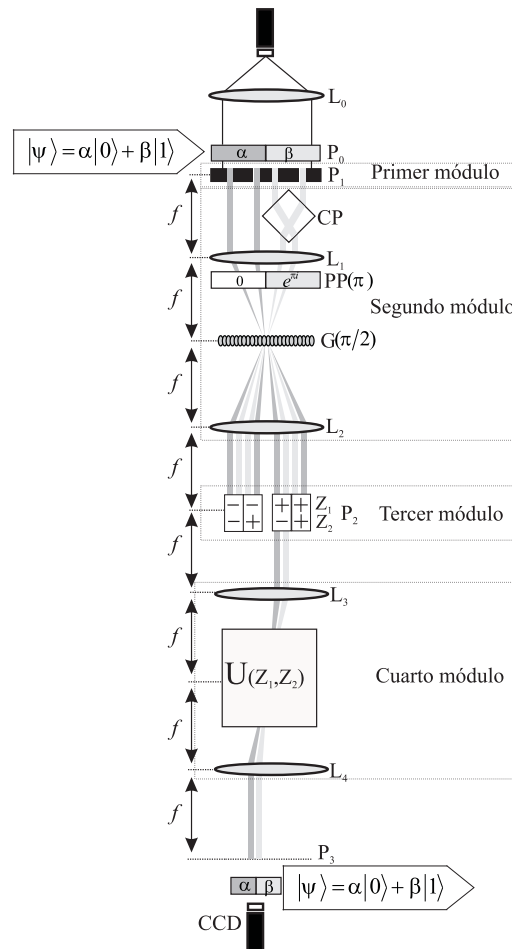


Figura 5.2: Esquema del dispositivo experimental para la simulación del proceso de teleportación

El paso próximo consiste en la medición de los qbits 1 y 2 en la base computacional. Como resultado de esta medición obtenemos el colapso del estado cuántico en una de las cuatro posibilidades identificadas por la pareja de autovalores de los operadores de medida Z_1 and Z_2 . La analogía clásica de este proceso está bien descrita por los experimentos pensados detallados en el capítulo anterior y como mostramos en la parte inferior de la figura 5.2, se reduce a seleccionar al azar uno de los cuatro estados de los qbits 1 y 2 con la misma probabilidad. Teniendo en cuenta la inversión del sistema de coordenadas introducido en el proceso anterior, cada uno de los cuatro estados de la base computacional del espacio de los qbits 1 y 2 está repre-

5.2 Dispositivo óptico para la simulación de la Teleportación

sentado por cada par de rayos adyacentes (leyendo de derecha a izquierda en el mismo orden y con la misma convención que en la notación elegida para la base) como se muestra en la figura 5.2. Por ejemplo, si el resultado de la medición es $\mathbf{Z}_1 = +1$ and $\mathbf{Z}_2 = -1$, el estado computacional correspondiente $|0\rangle_1 |1\rangle_2$ está representado por los dos rayos no obstruídos que se muestran en la parte inferior de la figura 5.2. Cada uno de estos dos rayos representan a su vez a las amplitudes asociadas a los dos estados lógicos del tercer qbit.

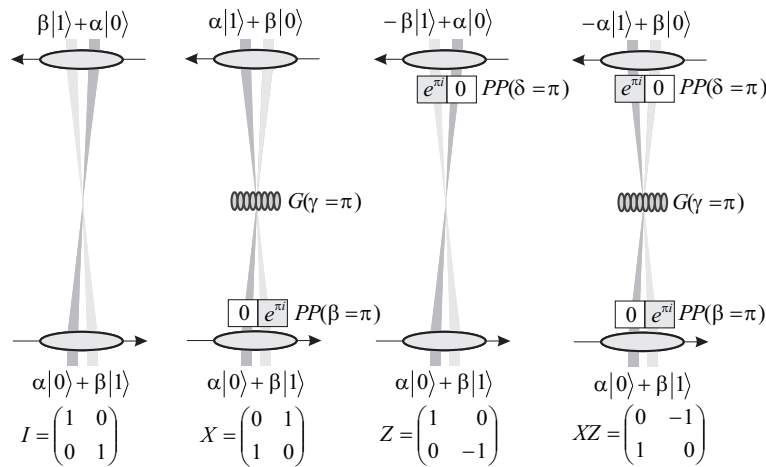


Figura 5.3: Conjunto de operaciones unitarias correctivas $U(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)$ y sus representaciones ópticas en términos de procesadores coherentes

El cuarto y último proceso, consiste en aplicar una operación unitaria condicional $\mathbf{U}(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)$ sobre el tercer qbit (operación que se realiza en el laboratorio de Bob) para recuperar la información original (desconocida) almacenada en el primer qbit. Esta última operación es controlada por el resultado de la medición realizada previamente por Alice en su laboratorio. Luego, en el caso realista (no local) de la teleportación del estado cuántico de un qbit, Alice debe enviar a Bob los dos bits de información clásica (uno de los cuatro pares posibles de autovalores de los operadores \mathbf{Z}_1 and \mathbf{Z}_2 a través de un canal clásico de comunicación). Dependiendo del resultado de esta medición (el par de rayos seleccionados en el proceso anterior) debemos entonces realizar una cierta operación unitaria sobre el tercer qbit. Como ya hemos comentados en la sección anterior estas cuatro operaciones son (leyendo de derecha

a izquierda en la figura 5.2): la identidad si el resultado de la medición es $|0\rangle_1|0\rangle_2$; el operador de Pauli \mathbf{X} (un bit flip) si el resultado es $|0\rangle_1|1\rangle_2$; el operador de Pauli \mathbf{Z} (un corrimiento de fase π de la amplitud compleja asociada al valor lógico $|1\rangle$) si el resultado es $|1\rangle_1|0\rangle_2$ y finalmente el operador \mathbf{XZ} (un corrimiento de fase seguido de un bit flip) si el resultado es $|1\rangle_1|1\rangle_2$. De estas cuatro posibles situaciones, la segunda de ellas es ilustrada en la figura 5.2 a modo de ejemplo. Como ya hemos discutido largamente, el dispositivo experimental usado para la simulación del operador de Hadamard, puede también usarse (con alguna modificación) para realizar ópticamente cualquier operación del grupo $\mathbf{U}(2)$. De hecho, esto puede hacerse usando una red de fase en el plano de Fourier con diferente relación de amplitudes entre los tres órdenes principales difractados y eventualmente dos placas de fase arbitrarias, una en el plano de entrada y otra en el plano de salida del procesador óptico coherente. Luego, todas las operaciones correctivas pueden ser simuladas utilizando el mismo esquema descrito antes. De hecho, el operador de Pauli \mathbf{Z} es simplemente un corrimiento de fase π del estado lógico $|1\rangle$ (es decir, una placa de fase similar a la utilizada en el plano de entrada en el caso de la simulación de la compuerta de Hadamard). Por su parte, el operador de Pauli \mathbf{X} puede obtenerse de la misma manera que el operador de Hadamard pero en este caso una placa de fase debe ser colocada a la salida del plano de Fourier y la red de fase debe ser diseñada de modo que la amplitud del campo difractado asociada al orden cero (el orden central) se anule idénticamente. Esto último se logra sintonizando la amplitud de modulación de fase de la red de modo que el parámetro característico de la misma sea $\gamma = \pi$. En la figura 5.3 mostramos como cada operación correctiva $\mathbf{U}(M_1, M_2)$ está asociada con un cierto dispositivo óptico reducido en forma de procesador óptico coherente de tipo $4f$. Para llevar a cabo el experimento, hemos usado un par de lentes esféricas de 50 cm de distancia focal. La red de fase $G(\gamma = \pi)$ fué programada en un modulador espacial de luz (SLM) trabajando en modo de fase. Este dispositivo consiste en una pantalla de cristal líquido programable Sony (LCTV) que en combinación con dos polarizadores y dos láminas retardadoras actúan como un modulador solo de fase [34]. La pantalla de cristal líquido (model LCX012BL) fué extraída

de un videoprojector comercial y es un panel de tipo VGA cuya resolución es de 640 x 480 pixels (donde cada pixel es un pequeño cuadrado de $34 \mu m$ de lado separados uno de otro por una distancia $41.3 \mu m$). En este modo, la modulación de fase de la red es directamente representada sobre la pantalla de cristal líquido. La imagen final es capturada por una videocámara (CCD). Los sistemas de registro y detección utilizados en este experimento fueron los mismos que los descritos en los capítulos anteriores. En la imagen final, luego de la aplicación de cada operación correctiva $\mathbf{U}(Z_1, Z_2)$, debemos tener en cuenta la inversión local del sistema de coordenadas cuyos sentidos están indicados con flechas sobre las lentes L_3 y L_4 en la figura 5.3. Esto es muy importante porque este sentido es definido convencionalmente de modo que la flecha apunte hacia la posición espacial ocupada por el estado lógico $|1\rangle$ según nuestra codificación de los cbits de posición. Como estamos aplicando en forma iterada dos operaciones del grupo $\mathbf{U}(2)$ en el proceso completo (la compuerta de Hadamard sobre el primer qbit y la operación correctiva sobre el tercer qbit), hay dos inversiones del sistema de coordenadas que se compensan mutuamente. Luego el sentido convencional que asocia a la mitad derecha del plano de representación de los estados con el valor lógico $|1\rangle$ se preserva naturalmente en la simulación óptica del proceso completo.

5.3. Resultados experimentales de la teleportación

En la figura 5.4, mostramos los resultados experimentales obtenidos a partir del uso del dispositivo descrito en la sección anterior. En la primera columna mostramos las imágenes obtenidas en cada estadio relevante del proceso y en la segunda columna, mostramos los correspondientes perfiles de intensidad en unidades arbitrarias, realizados a partir del promedio sobre los registros de cada fila de la imagen digitalizada. En la figura 5.4(a) esquematizamos la distribución inicial de la amplitud compleja del campo y el perfil de intensidades correspondiente. Esta representa el estado cuántico del qbit inicial cuyas amplitudes (desconocidas) queremos transferir al estado del

tercer qbit luego del proceso de teleportación. La imagen de la figura 5.4(b) representa el estado a la salida del primer proceso y muestra la reorganización del plano de entrada realizado por la máscara binaria P_1 para representar el estado de tres qbits que ingresa al circuito del protocolo en el instante inicial $t = 0$. En las Figuras 5.4(c) y 5.4(d) están las imágenes de salida luego de las operaciones que constituyen el segundo proceso del protocolo de teleportación. La figura 5.4(c) es la imagen de salida luego de la aplicación de la compuerta $CNOT$ actuando sobre los qbits 1 y 2 y la figura 5.4(d) muestra la superposición realizada por el operador de Hadamard simulado ópticamente actuando sobre el primer qbit. El paso siguiente es la medición de los qbits 1 y 2 en la base computacional. Como ya hemos enfatizado, en nuestra representación clásica esto es completamente equivalente a seleccionar al azar uno de los cuatro pares de rayos adyacentes que emergen luego de la aplicación de la compuerta de Hadamard. Finalmente, en las figuras 5.4(e1) a (e4) mostramos las imágenes luego de la aplicación de las operaciones correctivas $U(Z_1, Z_2)$. Cada una de estas operaciones fueron simuladas separadamente y las imágenes capturadas junto con los perfiles correspondientes se muestran en las figuras 5.4(e1) a (e4). El proceso de medición llevado a cabo en el laboratorio de Alice en el tercer modulo del proceso completo, implica que todos los pares de rayos adyacentes que emergen al finalizar el segundo proceso, son obstruídos exceptuando uno de estos cuatro pares, que es precisamente el que resulta del proceso de medición. Dicha selección aleatoria de uno de los pares de rayos se sugiere mediante el rectángulo punteado que involucra a las imágenes 5.4(d) y (e2) y que corresponde al par de rayos no obstruídos representados en la parte inferior de la figura 5.2 donde esquematizamos el dispositivo experimental utilizado.

En nuestro experimento particular hemos seleccionado las amplitudes (reales) α y β de modo que $|\beta|^2 / |\alpha|^2 \approx 1/4$. Como puede observarse en las figuras 5.4(b) a (e4) esta relación se preserva a la salida de cada proceso involucrado en el protocolo dentro del error experimental. No obstante, debe considerarse que la alta coherencia de la fuente luminosa utilizada introduce ruido de speckle y las aberraciones de los elementos ópticos pueden introducir fases no deseadas. Estos efectos pueden observarse, por ejemplo en las figuras

5.3 Resultados experimentales de la teleportación

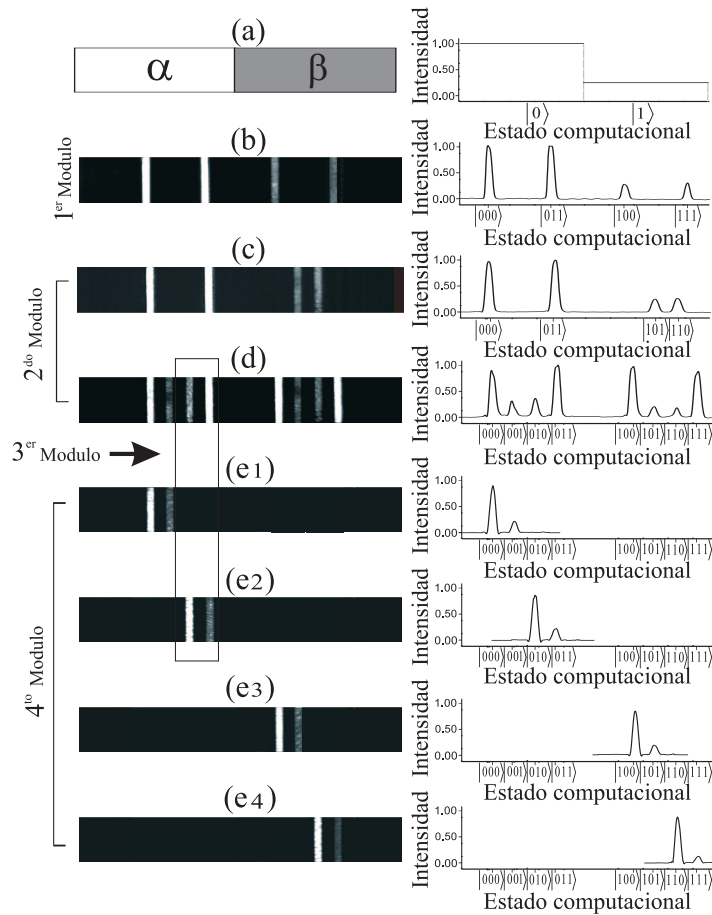


Figura 5.4: Resultados experimentales para la simulación del proceso de teleportación de un qbit

5.4 (b) a (e4) donde los perfiles de intensidad están parcialmente corrompidos por ruido e irregularidades. No obstante, el dispositivo propuesto puede transferir la información codificada en el estado de entrada al estado de salida, con buena fidelidad y sin ningún cuidado especial en caso que se trate de información solo de amplitud. Con algún cuidado adicional en el posicionamiento interferométrico del prisma cúbico y posiblemente corrigiendo las aberraciones en la imagen final, también es ciertamente posible transferir información tanto de amplitud como de fase.

En resumen, hemos simulado ópticamente todos los pasos a seguir duran-

te el protocolo elemental de teleportación del estado de un qbit. Al finalizar el proceso, recuperamos en el tercer qbit el estado del qbit desconocido que inicialmente estaba almacenado en el primer qbit de nuestro sistema compuesto. En términos de nuestra representación en cbits de posición, esto significa simplemente transferir la información dicotómica almacenada a nivel izquierda/derecha del plano completo de entrada, a nivel izquierda/derecha pero de una pequeña porción del plano de salida. La acción del protocolo de teleportación sobre la modulación espacial del frente de onda donde se codifican los cbits de posición es entonces una transferencia de información local que opera como un simple cambio de escala. Esta misma transferencia de información que opera localmente en el caso de nuestra simulación, se transfigura en el verdadero proceso de teleportación cuando evadimos las limitaciones clásicas y somos capaces de separar espacialmente los estados entrelazados manteniendo intactas sus correlaciones.

Capítulo 6

Conclusiones y Perspectivas

Para concluir, daremos una breve reseña sobre los contenidos más importantes, el significado y los alcances de este trabajo. Se han discutido diversas estrategias de simulación óptica de algoritmos de computación e información cuántica. Tales simulaciones, involucran necesariamente tanto a la representación de estados cuánticos como imágenes espacialmente organizadas, como a la simulación de las evoluciones unitarias como propagación de un frente de onda a través de dispositivos ópticos paraxiales. Utilizando la analogía entre la función de onda de un sistema cuántico bidimensional y la amplitud compleja del campo electromagnético asociada a la modulación espacial de un frente de onda plano, exploramos la posibilidad de representar estados cuánticos de sistemas de interés en procesamiento de la información (esencialmente en espacios de Hilbert de dimensión finita), mediante la codificación espacial de los estados a través de la modulación de dicho frente de onda. A partir de los resultados de universalidad de las operaciones $U(2)$ y CNOT demostramos que nuestra aproximación a la simulación clásica del procesamiento cuántico de la información es completa y que puede obtenerse el análogo clásico de cualquier proceso utilizando solamente lentes, prismas, placas de fase y redes de transmisión de fase en arquitecturas que son, a lo sumo, ligeras modificaciones del procesador óptico coherente tipo $4f$.

Mediante el uso de las herramientas desarrolladas, llevamos a cabo la

implementación óptica de algoritmos que ilustran, en diferentes aspectos y formas, las diferencias existentes entre el procesamiento de la información usando métodos clásicos y cuánticos. Existen ciertas características que distinguen a los sistemas cuánticos de los clásicos. De todas ellas, las más relevantes para el desarrollo de esta tesis son: la existencia de *paralelismo cuántico*, que consiste en la posibilidad de evaluar una función definida sobre un conjunto de bits simultáneamente en muchos valores de su argumento; el efecto del *entrelazamiento* en la evolución de un estado cuántico global y como éste afecta a la evolución de un cierto subsistema y la persistencia de correlaciones entre sistemas cuánticos separados espacialmente a través del *entrelazamiento no local*. Estos tres atributos exclusivos de los sistemas cuánticos han sido explorados y discutidos en los ejemplos que hemos implementado experimentalmente y en todos los casos hemos construido analogías clásicas realmente genuinas, que constituyen por sí mismas representaciones ontológicas de procesos cuya realidad nos está parcialmente vedada por la naturaleza probabilística de la evolución.

Las tres aplicaciones que se desarrollaron son novedosas y constituyen los aportes innovadores de esta tesis. Cada una de ellas ilustra, en algún sentido, la importancia de los tres atributos mencionados en el párrafo anterior y como dichos atributos se interpretan conceptualmente en el contexto de una simulación clásica. Comenzamos con la construcción y la puesta a punto del dispositivo experimental básico del trabajo que es el procesador óptico coherente con una red de transmisión de fase como función de transferencia. En principio, atacamos el problema de implementar ópticamente el operador de Hadamard [11]. La elección no es arbitraria ni mucho menos ya que el operador de Hadamard suele ser parte de los circuitos asociados a las rutinas y algoritmos más relevantes. A continuación, se ha presentado un dispositivo óptico de implementación relativamente sencilla capaz de simular la solución al problema de Deutsch desde la perspectiva de la óptica clásica [11]. Este algoritmo constituye un ejemplo simple pero no trivial de paralelismo cuántico, e ilustra las ventajas potenciales de los ordenadores cuánticos frente a los análogos clásicos. El dispositivo está basado en una arquitectura que permite

simular ópticamente la transformación de Hadamard sobre un qbit a partir de técnicas de procesamiento de imágenes. Los resultados experimentales han sido satisfactorios y permiten inferir la factibilidad de dichas técnicas para la construcción de analogías clásicas de algoritmos de computación e información cuántica. En general hay una serie de limitaciones que conciernen a la cantidad de información que puede ser procesada por este tipo de sistemas. Esta limitación está fundamentalmente asociada al número de estados que puedan acomodarse en la escena de entrada. Por un lado, dicho número depende de las dimensiones del sistema óptico y por otro lado de la resolución del medio donde los estados sean representados. Otra cuestión a considerar es que la alta coherencia de la fuente luminosa genera ruido de speckle y las aberraciones de los elementos ópticos utilizados para simular los operadores pueden introducir fases no deseadas. No obstante, el sistema es capaz de reproducir satisfactoriamente los resultados predichos. Desde el punto de vista conceptual, este trabajo sugiere que el paralelismo cuántico es, no tanto una propiedad exclusiva de los sistemas cuánticos sino más bien una propiedad de cualquier sistema cuya evolución sea de naturaleza ondulatoria. El hecho de haber resuelto *clásicamente* el problema de Deutsch utilizando los mismos recursos que emplearía un hipotético ordenador cuántico, refuerza claramente esta hipótesis.

Por otro lado, se ha estudiado un dispositivo óptico capaz de simular una iteración del algoritmo QRW [12]. Se ha mostrado como realizar esta simulación con herramientas de la óptica clásica usando un par de lentes esféricas (una de ellas seccionada según su diámetro), una placa de fase, una red de fase y un biprisma de Fresnel en una configuración típica de procesamiento de imágenes. La implementación consiste en representar los estados cuánticos como imágenes espacialmente organizadas a la entrada de un sistema óptico. Por su parte dicho sistema representa las operaciones unitarias que realizan una iteración del proceso. Una vez construido, el dispositivo fué puesto a prueba con la finalidad de comprobar su capacidad para reproducir los resultados esperados para el caso de la caminata cuántica. Para ello, se representó en una pantalla de cristal líquido la distribución de cam-

po electromagnético a la salida del tercer paso del algoritmo QRW. Como hemos enfatizado, las distribuciones esperadas para los caminantes clásico y cuántico difieren recién a la salida del cuarto paso. Luego del procesamiento a través del dispositivo se obtuvo una distribución de probabilidad de ocupación de sitios muy similar a la esperable en el caso cuántico. Dicho resultado, ilustra claramente como la naturaleza ondulatoria de la evolución puede ser representada clásicamente de manera pintoresca en el contexto de la óptica clásica para obtener resultados relativamente precisos y con bajo costo de equipamiento. Conceptualmente, los resultados experimentales obtenidos permiten concluir que el campo electromagnético de la óptica clásica es capaz de reproducir el efecto del entrelazamiento en un estado global, sobre la evolución temporal de un cierto subsistema. Debemos enfatizar que en este caso, no hay ninguna hipótesis adicional sobre la localización del estado de la moneda respecto del caminante por lo cual deducimos que en este caso, los efectos del entrelazamiento operan localmente. Este trabajo demuestra que dichos efectos pueden observarse en un sistema ondulatorio clásico.

Finalmente, hemos implementado un dispositivo óptico para la simulación óptica del proceso de teleportación [48]. Habiendo demostrado que dispositivos ópticos convencionales como lentes esféricas, placas de fase, redes de transmisión de fase y prismas cúbicos, pueden ser utilizados para simular ópticamente cualquier operador unitario sobre un qbit y la compuerta *CNOT* en una arquitectura típica de procesamiento de imágenes, se ha simulado el proceso de teleportación que requiere de la aplicación de ambos tipos de compuertas universales. Los procesos subyacentes en el protocolo de teleportación cuántica son: *creación del par entrelazado EPR*, *análisis de Bell*, *medición computacional* y *corrección condicional* en ese orden. Cada uno de ellos tiene su propia contrapartida clásica en la simulación óptica realizada. Se han obtenido resultados experimentales mediante el uso del dispositivo propuesto. El proceso comienza con la representación del estado desconocido a teleportar como una imagen organizada en dos mitades acorde a lo ya discutido respecto de la codificación de los cbits de posición. Luego, procesamos la imagen de entrada mediando un dispositivo óptico que consta de varios

módulos. Cada uno de estos módulos simula uno de los procesos subyacentes en el el proceso cuántico real. Luego de la reorganización de la escena de entrada para representar el estado cuántico a $t = 0$, un prisma cúbico realiza la aplicación de la compuerta *CNOT* y luego una placa de fase y una red de fase en el plano de Fourier son usadas para simular el operador de Hadamard. Seguidamente, se efectúa una selección al azar de una porción de la imagen resultante y dependiendo de dicha selección, se corrige el estado escogido con un operador unitario correctivo para reconstruir el estado del qbit desconocido en esa porción seleccionada del plano. Finalmente, la imagen resultante es capturada por una cámara CCD. Las imágenes obtenidas, mostradas en la figura 5.4 muestran la capacidad del sistema para *teleportar* la información desde el plano completo de entrada hasta una porción del plano de salida. En nuestro caso, en el cual solo codificamos información de amplitud, la relación entre las intensidades relativas de los coeficientes es bien preservada con lo cual podemos afirmar que la información fué transmitida con alta fidelidad. Recordamos que, en el caso de codificar en amplitud y fase, habrán de tomarse algunos cuidados respecto del posicionamiento del prisma cúbico que debe disponerse con precisión interferométrica a fin de evitar introducir fases no deseadas durante el proceso. Debemos enfatizar que la interpretación clásica del proceso es extremadamente simple cosa que realza la elegancia y el valor estético de esta simulación. En principio la imagen completa es dividida en dos mitades como se muestra en la parte superior de la figura 5.4. Luego de una secuencia de operaciones ópticas, la información de amplitud (y eventualmente fase) codificada en estas dos mitades, es transferida a una porción más pequeña de la imagen final. En nuestro caso, esto se muestra en la región recuadrada con el rectángulo punteado en la parte inferior de las imágenes y los perfiles de la Figura 5.4. Desde el punto de vista conceptual podemos decir que, mientras el proceso de teleportación cuántica realista (es decir, no local) tiene como consecuencia sorprendente la posibilidad de transferir un qbit de información cuántica a un lugar arbitrariamente distante solo mediante el envío de dos bits de información clásica; esta (o cualquier otra) simulación clásica tendrá necesariamente una interpretación más inocente por el simple hecho de la imposibilidad de la representación clásica de entrelaza-

miento no local. Para esta simulación particular, la contrapartida clásica del proceso de teleportación es una consecuencia de la representación espacial de los estados cuánticos, (es decir de la codificación de los cbits de posición) y puede pensarse como un simple cambio de escala. El hecho de que la información codificada en el primer qbit es localmente transferida al tercer qbit, significa que las amplitudes complejas del campo electromagnético codificadas según la organización jerárquica derecha-izquierda del plano de entrada completo, aparece ahora codificada según un orden jerárquico inferior derecha-izquierda de una porción más pequeña del plano de salida al final del proceso. No obstante, a pesar de esta limitación (que dicho sea de paso, es común a todos los sistemas clásicos), hemos obtenido resultados experimentales que simulan el proceso de teleportación como un procesado de imágenes mediante un dispositivo óptico relativamente sencillo y con bajo costo de equipamiento. De hecho, nuestro sistema óptico reproduce con buen acuerdo las amplitudes de probabilidad esperadas a la salida de cada proceso subyacente del protocolo completo.

Para finalizar, mencionemos aunque sea superficialmente algunos de los problemas que no fueron abordados y que podrían sugerir posibles investigaciones futuras en esta misma línea. En principio la analogía desarrollada opera en forma cerrada y consistente mientras tratemos la evolución de sistemas cuánticos cerrados, es decir, mientras abordemos la representación de evoluciones unitarias. Las representaciones ópticas (clásicas) de las entidades que gobiernan las evoluciones de sistemas cuánticos abiertos aún no han sido establecidas. Otro problema que no se ha estudiado, al menos no en toda su generalidad, se refiere a la representación clásica del proceso de medición. La dinámica de los sistemas cuánticos cerrados tiene una componente determinista que es la evolución unitaria de los estados cuánticos (o de los observables en la representación de Heisenberg) y una componente estocástica que tiene que ver con el proceso de medición. En el capítulo de teleportación, se describe superficialmente una analogía clásica del proceso de medición pero su importancia en el contexto de el trabajo es prácticamente anecdótica. Teniendo en cuenta que los experimentos tipo EPR usados para el test de no

localidad en sistemas entrelazados utilizan de forma intensiva las propiedades estadísticas de un conjunto de mediciones repetidas, la simulación óptica de este tipo de experimentos requeriría eventualmente del desarrollo de una generalización de la representación clásica del proceso de medición.

Bibliografía

- [1] N. J. Cerf, C. Adami, P. G. Kwiat, Optical simulation of quantum logic, *Phys. Rev. A.* 57 (1998) R1477 – R1480.
- [2] P. Kwiat, J. Mitchell, P. Schwindt, A. White, Grover’s search algorithm: An optical approach, *J. Mod. Opt.* 47 (2000) 257.
- [3] L. Davidovich, J. M. Raimond, M. Brune, S. Haroche, Realization of a two-photon maser oscillator, *Phys. Rev. Lett.* 59 (1987) 1899.
- [4] L. Davidovich, A. Maali, M. Brune, J. M. Raimond, S. Haroche, Quantum switches and nonlocal microwave fields, *Phys. Rev. Lett.* 71 (1993) 2360.
- [5] I. Cirac, P. Zoller, Quantum computations with cold trapped ions, *Phys. Rev. Lett.* 74 (1995) 4091.
- [6] D. P. DiVincenzo, Quantum computation, *Science* 270 (1995) 255.
- [7] M. Nielsen, I. Chuang, *Quantum Information and Computation*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [8] R. J. C. Spreeuw, Classical analogy of entanglement, *Found. Phys.* 28 (1998) 361–374.
- [9] R. J. C. Spreeuw, Classical wave-optics analogy of quantum-information processing, *Phys. Rev. A* 63 (062302) (2001) 062302.
- [10] N. Bhattacharya, H. B. vanLindenvandenHeuvell, R. J. C. Spreeuw, Implementation of Quantum Search Algorithm using Classical Fourier Optics, *Phys. Rev. Lett.* 88 (137901) (2002) 137901.

- [11] D. Francisco, C. Iemmi, J. P. Paz, S. Ledesma, Optical Simulation of the quantum Hadamard operator, *Opt. Commun.* 268 (2006) 340–345.
- [12] D. Francisco, C. Iemmi, J. P. Paz, S. Ledesma, Simulating a quantum walk with classical optics, *Phys. Rev. A* 74 (052327) (2006) 052327.
- [13] G. Puentes, C. L. Mela, S. Ledesma, C. Iemmi, J. P. Paz, M. Saraceno, Optical Simulation of quantum algorithms using programmable liquid crystal displays, *Phys. Rev. A* 69 (042319) (2004) 042319.
- [14] L. K. Grover, Quantum mechanics help in searching for a needle in a haystack, *Phys. Rev. Lett.* 79 (1997) 325.
- [15] P. W. Shor, Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer, *SIAM J. Comp.* 26 (1997) 1484–1509.
- [16] C. M. Papadimitriou, *Computational Complexity*, Addison-Wesley, Massachusetts, 1994.
- [17] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laoe, *Quantum Mechanics. Vol. I and II*, John Wiley and Sons, New York, 1977.
- [18] A. Peres, *Quantum Theory: Concepts and Methods*, Kluwer Academic, Dordrecht, 1993.
- [19] A. B. V. Lugt, Signal detection by complex spatial filtering, *IEEE Transactions on Information Theory IT-10* (1964) 139.
- [20] C. S. Weaver, J. W. Goodman, A technique for optically convolving two functions, *Applied Optics* 5 (1966) 1248.
- [21] J. L. Horner, P. D. Gianino, Phase-only matched filtering, *Applied Optics* 23 (1984) 812.
- [22] J. Campos, F. Turon, L. Yaroslavsky, M. J. Yzuel, Some filters for reliable recognition and localization of objects by optical correlators: a comparison, *International Journal of Optical Computing* 2 (1991) 341.

- [23] C. Iemmi, S. Ledesma, J. Campos, M. Villarreal, Gray-level computer-generated hologram filters for multiple-object correlation, *Applied Optics* 39 (2000) 1233–1240.
- [24] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, The McGraw-Hill Companies, INC, New York, 1996.
- [25] B. G. Boone, *Signal Processing Using Optics*, Oxford University Press, Oxford, 1998.
- [26] M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics* (sixth corrected edition), Cambridge University Press, Cambridge, 1980.
- [27] A. Sommerfeld, *Optics*, volume IV of *Lectures on Theoretical Physics*, Academic Press, New York, New York, 1954.
- [28] A. Sommerfeld, *Mathematische Theorie der Diffraction*, *Math. Ann.* 47 (1896) 317.
- [29] G. Kirchhoff, *Zur Theorie der Lichtstrahlen*, *Weidemann. Ann.* 18 (1883) 663.
- [30] L. Rayleigh, *On the Theory of optical images, with special references to the microscope*, *Phil. Mag.* 42 (1896) 167.
- [31] R. Blume-Kohout, C. M. Caves, I. H. Deutsch, *Physical-Resource Requirements and the Power of Quantum Computation*, *Found. Phys.* 32 (052327) (2002) 1641–1670.
- [32] C. La Mela, *Reconocimiento y encriptación óptica de imágenes empleando información sólo de fase*, Ph.D. thesis, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires (2006).
- [33] M. F. Villarreal, *Síntesis de filtros compuestos para el reconocimiento de múltiples formas en simultáneo*, Ph.D. thesis, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires (2003).

- [34] A. Marquez, C. Iemmi, I. Moreno, J. A. Davis, J. Campos, M. J. Yzuel, Quantitative prediction of the modulation behavior of twisted nematic liquid crystal displays based on a simple physical model, *Opt. Eng.* 40 (2001) 2558–2564.
- [35] Y. Aharonov, L. Davidovich, N. Zagury, Quantum random walks, *Phys. Rev. A.* 48 (1993) 1687–1690.
- [36] D. Aharonov, A. Ambainis, J. Kempe, U. Vazirani, Quantum walks on graphs, *Proceedings of the Thirty-third ACM Symposium on Theory of Computing* (2001) 50–59.
- [37] J. Kempe, Quantum random walks - an introductory overview, *Contemporary Physics* 44 (2003) 307–327.
- [38] H. Jeong, M. Paternostro, M.S.Kim, Simulation of quantum random walks using the interference of a classical field, *Phys. Rev. A.* 69 (2004) 012310.
- [39] B. Do, M. Stohler, S. Balasubramanian, D. Elliott, C. Eash, E. Fischbach, M. Fischbach, A. Mills, B. Zwicki, Experimental realization of a quantum quincunx by use of linear optical elements, *J. Opt. Soc. Am. B* 22 (2004) 499.
- [40] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?, *Phys. Rev.* 47 (1935) 777–780.
- [41] C. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, W. Wootters, Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels, *Phys. Rev. Lett.* 70 (1993) 1895–1899.
- [42] D. Bouwmeester, J. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, A. Zeilinger, Experimental quantum teleportation., *Nature* 390 (1997) 575–579.

- [43] D. Boschi, S. Branca, F. D. Martini, L. Hardy, S. Popescu, Experimental realization of teleporting an unknown pure quantum state via dual classical and Einstein Podolsky Rosen Channels., *Phys. Rev. Lett.* 80 (1998) 1121–1125.
- [44] A. Furusawa, J. L. Sorensen, S. L. Braunstein, C. A. Fuchs, H. J. Kimble, E. S. Polzik, Unconditional quantum teleportation, *Science* 282 (1998) 706–709.
- [45] M. A. Nielsen, E. Knill, R. Laflamme, Complete quantum teleportation using nuclear magnetic resonance, *Nature* 396 (1998) 52–55.
- [46] J. S. Bell, *Speakable and Unispeakable in Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [47] D. Bohm, *Quantum Theory*, Prentice-Hall. Englewood Cliffs, New Jersey, 1951.
- [48] D. Francisco, S. Ledesma, *Clasical optics Analogy of quantum teleportation*, Versión revisada enviada el 10/2007 a *J. Opt. Soc. Am. B*.

Agradecimientos

Es natural que las buenas personas se sientan un poco avergonzadas y no puedan dejar de experimentar algún pudor cuando alguien se complace en hablar bien de ellas. Temo que este sea uno de estos casos. He transitado este camino rodeado de gente maravillosa y les pido disculpas si estas confianzas los hacen sonrojar un poco. Seguramente sabrán perdonarme.

Silvia Ledesma ha puesto todo su talento, su experiencia y seguramente muchísimo esfuerzo, para contribuir fructífera y positivamente a mi formación. Si yo no soy el mismo que cuando entré; si soy mejor físico, mejor compañero y, lo que es más importante mejor persona; se lo debo en gran parte a ella. Solo quiero que sepa que haber tenido la oportunidad trabajar a su lado ha sido para mí no solo un honor, sino un verdadero placer ya que sus cualidades científicas y humanas están agradablemente matizadas con una buena dosis de buen gusto y encanto personal.

Javier Mazzaferri es un tipo talentoso, sensible, con un corazón y una generosidad enormes. Ciertamente es el amigo que todos desearían tener. El es de aquellas personas que siempre contribuyen positivamente a cualquier empresa, que siempre prodigan buen humor y energía positiva. Es además muy espiritual y profundamente humano. La verdad es que la pasamos muy bien trabajando juntos todos estos años. Demás está decir que todo aquel que lo conozca, no querrá dejar partir a una persona tan valiosa como él.

No quiero dejar de mencionar también a Claudio Iemmi que, aunque indirectamente, me acompañó también durante gran parte del trabajo. También fué un placer trabajar con él por su gran estatura profesional, por lo que sabe y también por su sorprendente y agudo sentido del humor que siempre nos divirtió mucho a todos.

No me quiero olvidar de Cecilia La Mela, que ahora está en Canadá. Una persona maravillosa Ceci, siempre tan activa, tan inquieta. Cuando pienso

en ella, me la imagino viajando por el mundo. Algo así como una aventurera de la física.

También agradezco mucho a los chicos, Matías y Guadalupe por haber compartido conmigo tan lindos momentos y por haberme brindado su confianza y su amistad. Seguramente seguiremos viéndonos ya que vamos a trabajar juntos un tiempo más.

Finalmente, no quiero dejar de mencionar a mis afectos de siempre: A mi vieja y mi hermana que me acompañaron durante toda mi vida y que tienen mucho que ver con lo mejor que hay en en mí. A mi viejo, que fué la persona más influyente en mi vida y que seguramente debe sonreír orgulloso. Además están mis dos amores: Natalia, mi esposa y Vladimir, mi hijo a quienes dedico esta tesis y mi vida. Nati fué, es y será el sostén de mi inspiración y mi esfuerzo. Sin ella a mi lado yo probablemente no hubiese hecho nada. Y Vladimir es...Vladimir es todo!. Realmente no tengo palabras para expresar la emoción que siento todos los días cuando me encuentro en casa con mi hijo. Cada vez que lo veo tengo la convicción de que Vladimir es (con ayuda de Nati) lo mejor que hice en mi vida...

Diego Hernán Francisco
Buenos Aires, 15 de Noviembre de 2007

