UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

RANGO ASOCIADO A UNA CURVA PROYECTIVA

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

Gonzalo Comas

Director de tesis: Fernando Cukierman

Buenos Aires, 2007

Rango asociado a una curva proyectiva

En este trabajo se estudia la noción de rango asociado a una curva $C \subset \mathbb{P}^n$ no degenerada y no singular.

En el caso en que $C \subset \mathbb{P}^d$ es la curva de Veronese de grado d, la definición de rango se relaciona con el rango de formas binarias. Se caracterizan todos los conjuntos de puntos formas de rango constante y se da un algoritmo para calcular el rango de una forma.

Para C una curva de género $g \geq 1$, inmersa en $\mathbb{P}^n$ por el sistema lineal completo asociado a un fibrado lineal no especial, se caracterizan algunos de los conjuntos de puntos de rango constante y se dan cotas óptimas para el rango (que dependen del grado del fibrado lineal).

En el caso en que C es una curva elíptica (esto es $g = 1$) se relacionan los resultados obtenidos con la "Plane Secant Formula" y una variante de esta, que son fórmulas enumerativas de planos multisecantes y multitangentes de curvas.

Palabras claves. problema de Waring, rango de formas, variedades secantes, curvas elípticas, plane secant formula.

Rank associated to a projective curve

In this work we study the notion of rank associated to a nonsingular and nondegenerated curve $C \subset \mathbb{P}^n$.

In the case where $C \subset \mathbb{P}^d$ is the Veronese curve of degree d, the definition of rank is related with the rank of binary forms. We characterize the sets of forms having constant rank and we give an algorithm to determine the rank of a form.

For C a curve of genus $g \geq 1$ inmersed in $\mathbb{P}^n$ by the complete linear system associated to a nonspecial line bundle, we describe some of the sets of points having constant rank and we give optimal bounds for the rank (which depend on the degree of the line bundle).

In the case where C is an elliptic curve (ie. $g = 1$), we relate the results to the "Plane Secant Formula" and a variant of it, which are enumerative formulas for multisecant and multitangent planes of curves.

Key words. Waring's problem, rank of forms, secant varieties, elliptic curves, plane secant formula.

A Malena
A Lucía y Sara

Quiero agradecer a la gente que hizo posible este trabajo.

A Fernando Cukierman por haberme mostrado que la geometría es linda y por haberme dirigido. Esto último no solo incluye la dirección matemática sino también el constante aliento para que este trabajo se realice.

A los jurados, que leyeron cuidadosamente el trabajo e hicieron sugerencias interesantes.

A los profesores que tuve tanto en la licenciatura como en el doctorado.

A mis compañeros de clases y seminarios.

A los docentes con los que compartí el dictado de clase durante estos años.

A mis amigos no matemáticos.

A mis (por ahora) cuatro sobrinos.

A mis suegros.

A mis cuñados y cuñadas.

A mis hermanos y hermanas.

A papá y mamá porque gracias a ellos estoy acá y por la familia que me dieron.

Finalmente agradezco a mi familia: Malena, Lucía y Sara.

Índice general

Introducción

El objetivo de este trabajo es definir, dada una curva proyectiva $C \subset \mathbb{P}^n$, una función rango $\mathrm{rg}_C : \mathbb{P}^n \to \mathbb{N}$, estudiar sus propiedades y relacionarlas con la geometría de la inmersión.

La noción de rango que definimos se inspira en el rango de matrices. Dada una matriz $A \in K^{m \times n}$ podemos definir su rango de varias maneras (y todas equivalentes entre sí):

1. Cantidad de filas de A linealmente independientes
2. Cantidad de columnas de A linealmente independientes
3. El mayor r tal que existe una submatriz de A de tamaño $r \times r$ inversible

Además, conociendo las matrices de rango uno, podemos agregar la siguiente caracterización

4. El menor r tal que A es suma de r matrices de rango 1.

Como el rango de una matriz no cambia si la multiplicamos por un escalar no nulo, consideraremos el espacio proyectivo $\mathbb{P}(K^{m \times n})$. Dentro de este espacio, las matrices de rango uno describen una variedad algebraica llamada la variedad de Segre. Podemos entonces definir el rango de una matriz A como

5. El menor r tal que A pertenece a una variedad lineal generada por r puntos de la variedad de Segre.

Consideremos ahora una variedad $X \subset \mathbb{P}^n$. Definimos una función

$$\mathrm{rg}_X : \mathbb{P}^n \to \mathbb{N}$$

de la siguiente manera:

- Si $x \in X$, definimos $\mathrm{rg}_X(x) = 1$.
- Si $y \in \mathbb{P}^n$ arbitrario, $\mathrm{rg}_X(y)$ es el menor entero r tal que y pertenece a una variedad lineal generada por r puntos de X.

Nosotros trabajaremos con el caso $X = C \subset \mathbb{P}^n$ una curva proyectiva no singular y no degenerada. En ese caso tenemos

Definición. *Sea $C \subset \mathbb{P}^n$ una curva proyectiva no singular y no degenerada. Sea $x \in \mathbb{P}^n$. Definimos el rango asociado a C de x como el menor entero r tal que x pertenece a una variedad lineal generada por r elementos de C.*

Los ejemplos más conocidos de la noción de rango asociado a una variedad proyectiva son:

Ejemplo (Rango de tensores). Sean $V_1, \dots, V_r$ espacios vectoriales y sea $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_r)$. Consideremos $X \subset \mathbb{P}^n$ la variedad de tensores elementales, esto es, tensores de la forma $v_1 \otimes \cdots \otimes v_r$ (variedad de Segre). Se define el rango de un tensor t como el menor entero r tal que t se escribe como suma de r tensores elementales.

Ejemplo (Rango de formas). Si d, n son enteros y $S_{d,n}$ es el espacio de polinomios homogéneos de grado d en n variables (formas de grado d en n variables), consideramos $X \subset \mathbb{P}(S_{d,n})$ la variedad de formas que son una potencia d-ésima de una forma lineal (variedad de Veronese). Se define el rango de una forma P como el menor entero r tal que P se escribe como suma de r potencias d-ésimas de formas lineales.

En ambos casos surgen naturalmente las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es el menor entero N tal que toda forma (respectivamente tensor) tiene rango menor o igual que N?

2. ¿Cuál es el menor entero E tal que una forma genérica (respectivamente tensor genérico) tiene rango menor o igual que E?

3. ¿Dado un entero r tal que $0 < r < E$, cuál es la dimensión de la clausura del conjunto de formas (respectivamente tensores) de rango menor o igual que r.

4. Dada una forma arbitraria (respectivamente un tensor arbitrario) ¿cuál es su rango y cómo calcularlo?

En el caso de formas, estas preguntas resumen el llamado Problema de Waring para formas. En el trabajo de Alexander-Hirschowitz *Polynomial interpolation in several variables* ([1]) se responden a las preguntas 2 y 3.

Remitimos al artículo *Ranks of tensors, secant varieties of segre varieties and fat points* de Catalisano-Geramita-Gimigliano ([4]), para una exposición del rango de tensores donde se discuten las preguntas y se citan más referencias y relaciones con otras áreas.

Volviendo al caso de nuestro interés, que es el de la función rango definida por una curva proyectiva $C \subset \mathbb{P}^n$, las respuestas a las preguntas 2 y 3 son conocidas, ya que equivalen a calcular la dimensión de todas las variedades secantes de C. Bajo ciertas condiciones de la inmersión podremos además responder a la primera pregunta. En el caso de formas binarias, que corresponde al caso en que C es la curva de Veronese, responderemos también la cuarta pregunta.

Es de destacar también que la función rango asociada a C no se comporta exactamente igual que el rango de matrices. Por ejemplo, si una matriz es límite de matrices de rango r, entonces sabemos que su rango es menor o igual que r. Sin embargo, si $C \subset \mathbb{P}^3$ es la curva "twisted cubic" (que corresponde a las formas binarias de grado tres que son el cubo de una forma lineal), entonces considerando en una recta tangente a C un punto distinto del punto de tangencia, éste tiene rango tres y no dos como se esperaría por ser límites de puntos en rectas secantes a C (que tienen rango dos).

A continuación describimos brevemente cada capítulo de este trabajo:

En el **primer capítulo** se estudia el rango de formas binarias y se responden todas las preguntas correspondientes al problema de Waring. Trabajamos con el espacio de forma binarias de grado d, $\mathbb{P}(S_d)$. En el espacio $\mathbb{P}(S_d)$ consideramos la curva de Veronese $v_d(\mathbb{P}(S_1))$, imagen de $\mathbb{P}(S_1)$ por la inmersión de Veronese que aplica a cada forma lineal en su potencia d-ésima. Para cada $r \leq d$ consideramos

$$S_d^r = \{P \in \mathbb{P}(S_d) : \operatorname{rg} P = r\},$$

el conjunto de formas binarias de rango r. Claramente el conjunto S_d^1 es la curva de Veronese. Además veremos que es el único de estos conjuntos que es cerrado con la topología Zariski ya que en general los conjuntos S_d^r van a ser abiertos en un cerrado. Concretamente, para $r \geq 2$ tal que $2r-1 \leq d$ vamos a probar que

$$\overline{S_d^r} = \left(\bigcup_{k \leq r} S_d^k\right) \cup \left(\bigcup_{k \geq d-r+2} S_d^k\right). \tag{1}$$

Notar que en particular al clausurar las formas de rango r obtenemos todas las de rango menor.

Por otro lado si $r \geq 2$ es tal que $2r-1 > d$, la clausura de S_d^r es distinta. En este caso tenemos

$$\overline{S_d^r} = \left(\bigcup_{k \leq d-r+1} S_d^k\right) \cup \left(\bigcup_{k \geq r} S_d^k\right). \tag{2}$$

Por ejemplo, la clausura de S_d^d es el conjunto de formas de rango d unión la curva $v_d(\mathbb{P}(S_1))$. Esto quiere decir que el límite de formas de rango d puede ser o bien una forma de rango d o bien una forma de rango uno.

Por ejemplo, si $d = 3$, tenemos que

$$\overline{S_3^1} = S_3^1, \quad \overline{S_3^3} = S_3^1 \cup S_3^3, \quad \overline{S_3^2} = \mathbb{P}(S_3).$$

Este es el ejemplo de la curva "twisted cubic" que mencionamos anteriormente. Los polinomios de rango tres son aquellos que tienen una raíz doble y otra simple. Clausurando se obtienen también las que tienen una única raíz. En consecuencia, no es posible escribir un polinomio con tres raíces distintas como límite de polinomios con raíces dobles (cosa que no es sorprendente). Notar además que el hecho que la clausura de las formas de rango dos sea todo el espacio de formas dice que una forma genérica tiene rango dos. Probaremos además que la forma de escribir una forma genérica de grado tres como suma de dos cubos de formas lineales es única (salvo múltiplos por escalares no nulos).

Antes de enunciar el resultado general hagamos un caso más. Si $d = 4$,

$$\overline{S_4^1} = S_4^1, \quad \overline{S_4^4} = S_4^1 \cup S_4^3, \quad \overline{S_4^2} = S_4^1 \cup S_4^2 \cup S_4^4, \quad \overline{S_4^3} = \mathbb{P}(S_4).$$

En este caso una forma genérica tiene rango tres, pero la forma de escribir a una forma genérica de grado cuatro como suma de tres potencias cuartas de formas lineales no es única.

Un análisis en detalle de las fórmulas (1) y (2) permite deducir el siguiente resultado (cf. Teorema 1.19).

Teorema. *Sean $\mathbb{P}(S_d)$ el espacio de formas binarias de grado d, $v_d(\mathbb{P}(S_1)) \subset \mathbb{P}(S_d)$ la curva de Veronese de potencias d-ésimas de formas lineales y para cada $1 \leq r \leq d$, sea $S_d^r \subset \mathbb{P}(S_d)$ el espacio de formas binarias de grado d y rango r.*

1. *Para cada $r \geq 2$ tal que $d \geq 2r - 1$ tenemos*

$$\begin{array}{rcl} S_d^r & = & \overline{S_d^r} \setminus \overline{S_d^{d-r+2}} \\ S_d^{d-r+2} & = & \overline{S_d^{d-r+2}} \setminus \overline{S_d^{r-1}} \end{array}$$

2. *Si $d = 2r - 2$ se tiene además*

$$S_d^r = \overline{S_d^{d-r+2}} \setminus \overline{S_d^{r-1}}.$$

Mostramos además un algoritmo para determinar el rango de una forma y determinamos para cada forma P de rango r de cuántas maneras distintas puede escribirse como suma de r-potencias d-ésimas de formas lineales.

En el **segundo capítulo** introducimos la notación que usaremos en el resto del trabajo y resumimos los resultados que usaremos. En este sentido recordamos resultados sobre inmersiones de curvas en espacios proyectivos por medio de sistemas lineales asociados a fibrados lineales. También estudiamos las matrices de multiplicación inducidas por una descomposición de un fibrado lineal L como producto $L = L_1 \otimes L_2$. Definimos una generalización de las variedades secantes de una curva que se usará en la descripción de los conjuntos de puntos de rango constante.

En el **tercer capítulo** estudiamos la función rango de una curva proyectiva de género $g \geq 1$. Probamos la siguiente proposición, que responde la primera de las preguntas hechas sobre el rango de tensores o formas al caso del rango asociado a una curva (cf. Proposición 3.17).

Proposición. *Sea $C \subset \mathbb{P}^n$ es una curva proyectiva inmersa por el sistema lineal completo asociado a un divisor L de grado mayor o igual que $10g - 1$, entonces el menor entero r tal que todo punto en $\mathbb{P}^n$ tiene rango menor o igual que r es $n - g$.*

También generalizamos parcialmente los resultados que obtuvimos en el primer capítulo. Concretamente, si C_r denota el conjunto de puntos de $\mathbb{P}^n$ con rango r, probamos el siguiente teorema (cf. Teoremas 3.4 y 3.4').

Teorema. *Sea $C \subset \mathbb{P}^n$ es una curva proyectiva inmersa por el sistema lineal completo asociado a un divisor L. Sea $r \geq 2$ tal que $\deg L \geq 10g + 2r - 3$. Entonces se tiene*

1. $\overline{C}_r \setminus \overline{C}_{r-1} = C_r \cup C_{n-g-r+2}$.
2. $C_r = \overline{C}_r \setminus \overline{C}_{n-g-r+2}$.
3. $C_{n-g-r+2} = \overline{C}_{n-g-r+2} \setminus \overline{C}_{r-1}$.

Pidiendo menos condiciones sobre el grado de L podemos probar el siguiente resultado (cf. Teoremas 3.5 y 3.5').

Teorema. *Sea $C \subset \mathbb{P}^n$ es una curva proyectiva inmersa por el sistema lineal completo asociado a un divisor L. Sea $r \geq 2$ tal que $\deg L \geq 4g + 2r - 3$. Entonces se tiene*

1. $\overline{C}_r \setminus \overline{C}_{r-1} \subset C_r \cup C_{n-g-r+2}$.

2. $C_r = \overline{C}_r \setminus \overline{(\overline{C}_r \cap C_{n-g-r+2})}$.

3. $\overline{(\overline{C}_r \cap C_{n-g-r+2})} \setminus \overline{C}_{r-1} \subset C_{n-g-r+2}$.

En el **cuarto capítulo** se aplican estos resultados a curvas elípticas y a su vez se extienden. Concretamente se prueban los siguientes resultados (cf. Proposición 4.19 y Teoremas 4.10 y 4.21).

Proposición. *Sea $C \subset \mathbb{P}^n$ es una curva elíptica inmersa por el sistema lineal completo asociado a un divisor L de grado mayor o igual que* 5 *(esto es, $n \geq 4$) entonces $n-1$ es el menor entero tal que todo punto en $\mathbb{P}^n$ tiene rango menor o igual que $n-1$*

Teorema. *Sea $C \subset \mathbb{P}^n$ es una curva elíptica inmersa por el sistema lineal completo asociado a un divisor L. Sea $r \geq 2$ tal que $\deg L \geq 2r+3$, esto es, tal que $n \geq 2r+2$. Entonces se tiene*

1. $\overline{C}_r \setminus \overline{C}_{r-1} = C_r \cup C_{n-r+1}$.

2. $C_r = \overline{C}_r \setminus \overline{C}_{n-r+1}$.

3. $C_{n-r+1} = \overline{C}_{n-r+1} \setminus \overline{C}_{r-1}$.

Este teorema deja sin caracterizar los puntos de rango l y $l+1$ si $n = 2l$ y los puntos de rango l, $l+1$ y $l+2$ si $n = 2l+1$.

En secciones aparte estudiamos estos casos. Este análisis se relaciona con la “Plane Secant Formula” y una variante de esta. Estas son fórmulas enumerativas de variedades lineales secantes a una curva. Explicamos las fórmula y presentamos familias de curvas para las cuales estas fórmulas son válidas y otras para las que no.

Capítulo 1

Rango de una forma binaria

1.1. Introducción

El Problema de Waring es un problema de la teoría de números que puede resumirse de la siguiente manera:

Problema de Waring: Dados dos enteros positivos d y h, ¿es posible escribir a todo número entero y positivo como suma de h potencias d-ésimas no negativas?

Este problema tiene la siguiente generalización al caso de polinomios

Problema de Waring de formas: Dados d, n, h enteros positivos, ¿es posible escribir a todo polinomio homogéneo $P(x_1, \ldots, x_n)$ de grado d (forma de grado d) como suma de h potencias d-ésimas de formas lineales $L_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, h$?

Si hacemos la siguiente definición

Definición. *Sea $P(x_1, \ldots, x_n)$ una forma de grado d en n variables. Definimos el rango de P como el menor entero r tal que P se escribe como suma de r-potencias d-ésimas de formas lineales, esto es,*

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{r} L_i(x_1, \ldots, x_n)^d,$$

la pregunta del problema de Waring equivale a encontrar una cota para el rango de todas las formas de grado d en n variables.

Naturalmente surgen más preguntas:

1. ¿Cuál es el menor entero $N(d, n)$ tal que toda forma P de grado d en n variables tiene rango menor o igual que $N(d, n)$?

2. ¿Cuál es el menor entero $E(d, n)$ tal que una forma genérica P de grado d en n variables tiene rango menor o igual que $E(d, n)$?

3. Dado un entero $0 < r < E(d,n)$, ¿cuál es la dimensión de la clausura del conjunto de formas de rango r?

4. Dada una forma P de grado d en n variables, ¿cuál es el rango de P y cómo calcularlo?

La segunda pregunta equivale a encontrar el menor entero $r = E(d,n)$ tal que la variedad secante r-ésima de la variedad de Veronese de potencias d-ésimas de formas lineales cubre todo el espacio de formas de grado d y la tercera equivale a calcular la dimensión de todas las variedades secantes de esta variedad. Estas dos preguntas fueron respondidas en el artículo *Polynomial interpolation in several variables* de Alexander-Hirschowitz ([1]) donde se muestra que la dimensión de las variedades secantes son las esperadas salvo en finitos casos. Para más información sobre el Problema de Waring, sus variantes y su relación con otras áreas remitimos al artículo *Geometric aspects of polynomial interpolation in more variables and of Waring's problem* de C. Ciliberto ([5]).

En este capítulo responderemos las cuatro preguntas en el caso de formas binarias. Los resultados obtenidos fueron adelantados en el artículo “On the rank of a binary form” ([6]) escrito junto a Malena Seiguer. Los resultados previos necesarios se encuentran en cualquier introducción básica a la geometría algebraica. En nuestro caso elegimos el libro “Algebraic Geometry. A first course” de J. Harris ([13]).

1.2. Rango de una forma binaria

Trabajaremos sobre el cuerpo de números complejos. Notaremos con S_d al espacio vectorial de polinomios homogéneos de grado d en las variables x, y con coeficientes en $\mathbb{C}$, esto es, el espacio de formas binarias de grado d.

Definición 1.1. *Sea $P \in S_d$. Definimos el rango de P como el menor entero r tal que*

$$P = L_1^d + \cdots + L_r^d,$$

donde $L_1, \ldots, L_r$ son formas lineales.

Observar que la definición es equivalente a pedir que P se escriba como

$$P = \lambda_1 L_1^d + \cdots + \lambda_r L_r^d,$$

con $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}^*$, ya que podemos incorporar los escalares a las formas lineales usando una raíz d-ésima de λ_i. Decimos entonces que el rango de

P es el menor entero r tal que p se escribe como combinación lineal de r potencias d-ésimas de formas lineales.

Esta definición de rango se comporta distinto que el rango de matrices. El límite de matrices de rango r es una matriz de rango menor o igual que r, sin embargo el límite de formas de rango r no necesariamente es una forma de rango menor o igual que r. Por ejemplo probaremos que el límite de formas de rango dos puede dar una forma de rango d, que es el máximo valor que toma el rango (cf. ejemplo 1.23 más adelante).

Como el rango de una forma binaria no cambia si se multiplica a la misma por un escalar no nulo trabajaremos en el espacio proyectivo $\mathbb{P}(S_d)$. Es claro por la definición que las únicas formas con rango 1 son las potencias d-ésimas de formas lineales. Este conjunto es una curva llamada la curva de Veronese, que está definida por la inmersión $v_d : \mathbb{P}(S_1) \to \mathbb{P}(S_d)$ dada por

$$[L] \mapsto [L^d].$$

Si consideramos la base $\{x, y\}$ para S_1 y la base $\{x^d, x^{d-1}y, \ldots, xy^{d-1}, y^d\}$ para S_d, entonces la aplicación recién definida adquiere la siguiente forma en coordenadas homogéneas

$$(a : b) \mapsto \left(a^d : \binom{d}{1} a^{d-1}b : \binom{d}{2} a^{d-2}b^2 : \cdots : \binom{d}{d-1} ab^{d-1} : b^d\right)$$

De esta manera calcular el rango de una forma

$$P = Z_0x^d + Z_1x^{d-1}y + \cdots + Z_{d-1}xy^{d-1} + Z_dy^d$$

equivale a encontrar el menor entero r tal que el vector $(Z_0, \ldots, Z_d) \in \mathbb{C}^{d+1}$, se escribe como combinación lineal de r vectores de la forma

$$\left(a^d, \binom{d}{1} a^{d-1}b, \binom{d}{2} a^{d-2}b^2, \ldots, \binom{d}{d-1} ab^{d-1}, b^d\right).$$

Es claro que el rango de una forma permanece invariante si realizamos en en $\mathbb{P}^d$ un cambio lineal de coordenadas. Por lo tanto podemos deshacernos de los números combinatorios y para calcular el rango de una forma P con coordenadas homogéneas $(Z_0 : \cdots : Z_d)$ alcanza con encontrar el menor entero r tal que $(Z_0, \ldots, Z_d)$ se escribe como combinación lineal de vectores de la forma

$$(a^d, a^{d-1}b, \ldots, b^d).$$

Concretamente, si queremos calcular el rango de una forma P, escribimos

$$P = Z_0x^d + Z_1\binom{d}{1}x^{n-1}y + Z_2\binom{d}{2}x^{d-2}2 + \cdots + Z_{d-1}\binom{d}{d-1}xy^{d-1} + Z_dy^d$$

y trabajamos con el vector $(Z_0, \ldots, Z_d)$.

Lo que acabamos de hacer es describir otra forma de dar la inmersión de Veronese. Esta vez vemos la inmersión de la recta proyectiva $\mathbb{P}^1$ en el espacio $\mathbb{P}^d$ por la aplicación de Veronese

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \to & \mathbb{P}^d \\ (a:b) & \mapsto & (a^d : a^{d-1}b : \cdots : ab^{d-1} : b^d) \end{array}$$

Esta descripción tiene también una forma sin coordenadas que es la que vamos a usar por el resto del capítulo. Consideramos al espacio $\mathbb{P}^d$ como el espacio proyectivo asociado al espacio dual de S_d, esto es $\mathbb{P}(S_d^*)$. Cada elemento $\alpha \in \mathbb{P}^1$ induce una funcional lineal en S_d, la evaluación en α, que está bien definida salvo múltiplo por un escalar no nulo. Tenemos entonces definida una inmersión

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \to & \mathbb{P}(S_d^*) \\ \alpha & \mapsto & ev_\alpha \end{array}$$

Esta inmersión es la considerada más arriba, ya que si tomamos en S_d^* la base dual a $\{x^d, x^{d-1}y, \ldots, y^d\}$, y $(a : b) \in \mathbb{P}^1$, entonces en coordenadas homogéneas tenemos

$$(a:b) \mapsto (a^d : a^{d-1}b : \cdots : b^d).$$

Notaremos con C la imagen de $\mathbb{P}^1$ en $\mathbb{P}(S_d^*)$ por la inmersión recién definida.

En definitiva transformamos el problema original en este otro:

Dada $\varphi \in S_d^*$, calcular el menor entero k tal que φ se escribe como

$$\varphi = ev_{\alpha_1} + \cdots + ev_{\alpha_k},$$

con $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{P}^1$, o, equivalentemente, como combinación lineal

$$\varphi = \lambda_1 ev_{\alpha_1} + \cdots + \lambda_k ev_{\alpha_k},$$

esto es, tal que φ es combinación lineal de r elementos de C.

Por el resto del capítulo abusaremos de la notación y no distinguiremos entre un elemento $\varphi \in S_d^*$ y su clase $[\varphi] \in \mathbb{P}(S_d^*)$.

1.3. Variedades de planos secantes.

En esta sección definiremos las variedades secantes de la curva de Veronese $C \subset \mathbb{P}(S_d^*)$.

Si $\varphi \in \mathbb{P}(S_d^*)$, consideraremos sus coordenadas homogéneas $(Z_0 : \cdots : Z_d)$, donde $Z_i = \varphi(x^{d-i}y^i)$.

Fijemos un entero l, $1 \leq l \leq d$. Entonces podemos considerar el morfismo de multiplicación
$$\mu : S_l \times S_{d-l} \to S_d$$
definido por $\mu(P,Q) = PQ$.

Si $\varphi \in S_d^*$, entonces tenemos una forma bilineal
$$\mu_\varphi : S_l \times S_{d-l} \to \mathbb{C}$$
definida por $\mu_\varphi(P,Q) = \varphi(PQ)$.

Si en S_l y S_{d-l} tomamos las bases indicadas más arriba, entonces la matriz de la forma μ_φ es
$$M_\varphi = \begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & \dots & Z_{d-l} \\ Z_1 & Z_2 & \dots & Z_{d-l+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_l & Z_{l+1} & \dots & Z_d \end{pmatrix}.$$
Las entradas de la matriz M_φ son las coordenadas homogéneas de φ ordenadas de una forma particular. Una matriz con sus coordenadas ordenadas como M_φ se llama matriz cataléctica.

Proposición 1.2. *Sea l un entero tal que $1 \leq l \leq d$. La curva de Veronese es la variedad*
$$\{\varphi \in \mathbb{P}(S_d^*) : \ \mathrm{rg}(M_\varphi) = 1\}$$

Demostración. Tenemos que ver que la variedad definida por las ecuaciones
$$Z_iZ_j - Z_kZ_l, \ \text{donde } 0 \leq i,j,k,l \leq d, \ \text{y } k+l = i+j$$
es la curva de Veronese.

Los puntos en la curva de Veronese tienen coordenadas homogéneas
$$(t^n : t^{n-1}u : \dots : tu^{n-1} : u^n),$$
donde $(t : u) \in \mathbb{P}^1$. Se ve claramente que estos puntos verifican las ecuaciones.

Por otro lado si $(Z_0 : \dots : Z_d)$ verifica las ecuaciones tenemos lo siguiente.

- Si $Z_0 = 0$ de las ecuaciones $Z_i^2 = Z_{i+1}Z_{i-1}$ se deduce recursivamente que $Z_1 = Z_2 = \dots = Z_{d-1} = 0$, con lo que obtenemos el punto de coordenadas homogéneas $(0 : 0 : \dots : 0 : 1)$, imagen por la aplicación de Veronese del punto de coordenadas homogéneas $(0 : 1) \in \mathbb{P}^1$.

- Si $Z_0 = 1$, entonces de las ecuaciones $Z_0 Z_{i+1} = Z_1 Z_i$ se obtiene $Z_2 = Z_1^2, Z_3 = Z_1^3, \dots, Z_d = Z_1^d$, esto es el punto de ecuaciones homogéneas $(1 : Z_1 : Z_1^2 : \dots : Z_1^d)$, imagen por la aplicación de Veronese del punto de coordenadas homogéneas $(1 : Z_1) \in \mathbb{P}^1$.

$\square$

De hecho se tiene que el ideal de la curva de Veronese está generado por las ecuaciones recién descriptas (cf. [7], o proposición 2.24 más adelante).

Notemos que un punto en la curva de Veronese puede caracterizarse por la siguiente condición:

$$\varphi \in C \iff \ker \varphi = P \cdot S_{d-1} \iff \varphi(P \cdot S_{d-1}) = 0$$

donde P es un polinomio de grado 1. Si α es la raíz de P, entonces $\varphi = ev_\alpha$.

Podemos hacer la siguiente generalización

Lema 1.3. *Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{P}^1$ distintos y sea $P \in S_k$ el polinomio que tiene a $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ como raíces. Sea $\Lambda_P \subset \mathbb{P}(S_d^*)$ la variedad lineal generada por $ev_{\alpha_1}, \dots, ev_{\alpha_k}$. Entonces*

$$\varphi \in \Lambda_P \iff \varphi(P \cdot S_{d-k}) = 0.$$

Además, $\dim \Lambda_P = k - 1$.

Demostración. Veamos primero que la dimensión de Λ_P es $k-1$. Para eso veamos que si elegimos $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{d+1}$ de forma que todos sean distintos, entonces $ev_{\alpha_1}, \dots, ev_{\alpha_{d+1}}$ generan todo $\mathbb{P}(S_d^*)$. Si cada α_i tiene coordenadas homogéneas $(t_i : u_i)$, consideremos la siguiente matriz cuyas filas son las coordenadas homogéneas de $ev_{\alpha_1}, \dots, ev_{\alpha_{d+1}}$

$$\begin{pmatrix} t_1^d & t_1^{d-1}u_1 & \dots & u_1^d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{d+1}^d & t_{d+1}^{d-1}u_{d+1} & \dots & u_{d+1}^d \end{pmatrix}.$$

El determinante de esta matriz es el determinante de Vandermonde cuya fórmula es $\prod_{i<j}(u_i t_j - u_j t_i)$. Como los α_i son distintos entre si tiene que ser no nulo y por lo tanto el conjunto $\{ev_{\alpha_1}, \dots, ev_{\alpha_{d+1}}\}$ genera $\mathbb{P}(S_d^*)$.

Sea ahora $\varphi \in \Lambda_P$. Claramente se anula en cualquier polinomio que tenga a $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ como raíces y un tal polinomio es necesariamente un múltiplo de P.

Veamos ahora la recíproca. Para eso alcanza con ver que que φ es combinación de las funcionales $ev_{\alpha_1}, \dots, ev_{\alpha_k}$ y para esto probaremos que el conjunto $\{\varphi, ev_{\alpha_1}, \dots, ev_{\alpha_k}\}$ es linealmente dependiente.

Consideremos la matriz cuyas filas son las coordenadas homogéneas de las funcionales $\varphi, ev_{\alpha_1}, \ldots, ev_{\alpha_k}$

$$\begin{pmatrix} \varphi(x^d) & \varphi(x^{d-1}y) & \ldots & \varphi(y^d) \\ t_1^d & t_1^{d-1}u_1 & \ldots & u_1^d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_k^d & t_k^{d-1}u_r & \ldots & u_k^d \end{pmatrix}.$$

Queremos ver que esta matriz no tiene rango máximo. Consideramos un menor de tamaño máximo obtenido al elegir $k+1$ columnas de la matriz. Usando la linealidad de φ este menor se escribe como $\varphi(Q)$, donde $Q \in S_d$ es un polinomio que se anula en $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, esto es, $Q = PQ'$ donde $Q' \in S_{d-k}$. Pero entonces $\varphi(Q) = 0$ como queríamos. $\square$

La demostración del lema anterior nos permite deducir lo siguiente

Corolario 1.4. *Sea* $\varphi \in \mathbb{P}(S_d^*)$, *entonces* $\operatorname{rg} \varphi \leq d+1$.

Demostración. Vimos que si $\alpha_1, \ldots, \alpha_{d+1} \in \mathbb{P}^1$ son distintos, entonces $\mathbb{P}(S_d^*)$ está generado por el conjunto $\{ev_{\alpha_1}, \ldots, ev_{\alpha_{d+1}}\}$. Por lo tanto toda $\varphi \in \mathbb{P}(S_d^*)$ es combinación de $d+1$ elementos de la curva de Veronese. $\square$

En la proposición 1.3 definimos para un polinomio P de grado k con raíces simples el plano Λ_P, que es el plano generado por $ev_{\alpha_1}, \ldots, ev_{\alpha_k}$ donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ son las raíces de P. A un plano como este lo llamaremos un $(k-1)$-plano k-secante a C estricto (u honesto). Si permitimos que P tenga raíces múltiples, entonces el conjunto

$$\Lambda_P = \{\varphi \in \mathbb{P}(S_d^*) : \ \varphi(P \cdot S_{d-k}) = 0\}$$

define también un $(k-1)$-plano (este es un lindo ejercicio de álgebra lineal) y este plano es límite de planos secante estrictos. Para esto alcanza con elegir k puntos distintos en C que se aproximen a las raíces de P. En este caso decimos que Λ_P es un $(k-1)$-plano k-secante a C no estricto. Notar que para una curva C arbitraria podría ocurrir que el límite de planos trisecantes de como resultado una recta trisecante.

Definición 1.5. *Sea* $P \in S_k$ *un polinomio de grado* $k \leq d$. *A la variedad lineal* $\Lambda_P \subset \mathbb{P}(S_d^*)$ *definida por*

$$\Lambda_P = \{\varphi \in \mathbb{P}(S_d^*) : \ \varphi(P \cdot S_{d-k}) = 0\}$$

la llamamos $(k-1)$*-plano* k*-secante a* C *definido por las raíces de* P.

También definimos

$$\Lambda_P^\circ = \bigcup_{Q/P} \Lambda_Q,$$

esto es, la unión de los planos secantes de dimensión menor que $k-1$ contenidos en Λ_P.

Ejemplo 1.6. Si φ tiene rango r entonces por definición pertenece a un $(r-1)$-plano r-secante a C estricto.

Por otro lado si φ pertenece a un $(r-1)$-plano r-secante no estricto no tiene necesariamente rango menor o igual que r (cf. proposición 1.22).

Vamos a ver que si $2r-2 \leq d$ y Λ_P es estricto, entonces Λ_P° es el conjunto de puntos de rango r en Λ_P.

Definimos ahora la k-ésima variedad secante de C:

Definición 1.7. *Sea $C \subset \mathbb{P}(S_d^*)$ la curva de Veronese de grado d. Sea $k \geq 1$. Definimos la k-ésima variedad secante de C como*

$$\operatorname{Sec}^k(C) = \bigcup_{P \in \mathbb{P}(S_k)} \Lambda_P,$$

esto es, la unión de todos los $(k-1)$-planos k-secantes a C.

Ejemplo 1.8. Para $k=1$ tenemos $\operatorname{Sec}^1(C) = C$. Para $k=2$ tenemos que $\operatorname{Sec}^2(C)$ es la unión de todas las rectas secantes y tangentes de C.

Un sencillo cálculo de parámetro muestra que la dimensión de $\operatorname{Sec}^k(C)$ no puede ser mayor que $2k-1$. Más adelante mostraremos que tenemos la igualdad. Necesitamos saber cómo se comportan los planos secantes a C respecto a sumas e intersecciones.

Lema 1.9. *Sean $P \in S_k$ y $Q \in S_l$. Sean R el mínimo común múltiplo de P y Q y S su máximo común divisor y supongamos que sus grados son r y s respectivamente. Entonces*

1. *Si $r \leq d$, entonces $\langle \Lambda_P, \Lambda_Q \rangle = \langle \Lambda_R \rangle$.*
2. *Si $r \geq d+1$, entonces $\langle \Lambda_P, \Lambda_Q \rangle = \mathbb{P}(S_d^*)$.*
3. *Si $r \leq d+1$, entonces $\Lambda_P \cap \Lambda_Q = \Lambda_S$.*

Demostración. La primera afirmación es evidente.

Para la segunda alcanza con analizar el caso $r = d+1$. También alcanza con suponer que P y Q tienen raíces simples. Por lo tanto $\langle \Lambda_P, \Lambda_Q \rangle$ es la variedad lineal generada por $ev_{\alpha_1}, \ldots, ev_{\alpha_{d+1}}$. De la demostración del lema

1.3 se desprende que $d+1$ puntos en C están en posición general. Por lo tanto estos $d+1$ puntos tienen que generar $\mathbb{P}(S_d^*)$ como queríamos.

Para la tercera afirmación usamos las dos anteriores y por lo tanto se tiene $\dim \langle \Lambda_P, \Lambda_Q \rangle = r-1$.

También se sabe que

$$\dim \langle \Lambda_P, \Lambda_Q \rangle = \dim \langle \Lambda_P \rangle + \dim \langle \Lambda_Q \rangle - \dim(\Lambda_P \cap \Lambda_Q).$$

Por lo tanto tiene que ser $\dim(\Lambda_P \cap \Lambda_Q) = k + l - r - 1 = s - 1$.

Por otro lado claramente $\Lambda_S \subset \Lambda_P \cap \Lambda_Q$ y como $\dim \Lambda_S = s-1$ tiene que ser $\Lambda_S = \Lambda_P \cap \Lambda_Q$. □

Ahora probamos

Proposición 1.10. *Sea $C \subset \mathbb{P}(S_d^*)$ la curva de Veronese de grado d. Entonces* $\mathrm{Sec}^k(C)$ *es una variedad de dimensión* $\text{mín}\{2k-1, d\}$.

Demostración. Lo hacemos por inducción en k, para $2k-1 \leq d$. El caso $k=1$ es trivial.

Sea entonces $k \geq 2$. Consideremos la correspondencia

$$\Gamma = \{(\varphi, P) \in \mathbb{P}(S_d^*) \times \mathbb{P}(S_k) : \varphi \in \Lambda_P\}$$

La imagen de la primera proyección es $\mathrm{Sec}^k(C)$. Las fibras de la segunda proyección son espacios lineales de dimensión $k-1$, por lo cual Γ es irreducible de dimensión $2k-1$. Por el lema 1.9, si φ pertenece a dos $(k-1)$-planos k-secantes distintos, entonces pertenece a la intersección de ellos que es un plano secante de dimensión menor, esto es $\varphi \in \mathrm{Sec}^{k-1}(C)$. Entonces fuera de $\mathrm{Sec}^{k-1}(C)$ (que es un cerrado por hipótesis inductiva) la primera proyección es uno a uno y por lo tanto $\mathrm{Sec}^k(C)$ es irreducible de dimensión $2k-1$.

Si $2k-1 > d$, alcanza con probar el caso $d = 2k-2$. En ese caso $\mathrm{Sec}^{k-1}(C)$ es una hipersuperficie. Pero $\mathrm{Sec}^k(C)$ contiene estrictamente a $\mathrm{Sec}^{k-1}(C)$. Para esto consideremos Λ_P para P de grado k. Sea $\varphi \in \Lambda_P$ tal que no pertenece a ningún $(k-2)$-planos de la forma Λ_Q para Q de grado $k-1$ que divide a P. Entonces $\varphi \notin \mathrm{Sec}^{k-1}(C)$. Ya que si así fuera, existiría Q de grado k tal que $\varphi \in \Lambda_Q$. Pero por el lema 1.9, tiene que ser $\varphi \in \Lambda_S$ para S el máximo común divisor entre P y Q. Por la elección de φ esto no puede ser posible.

Por lo tanto $\mathrm{Sec}^{k-1}(C)$ está contenida estrictamente en $\mathrm{Sec}^k(C)$ y como esta última es irreducible, tiene que ser $\mathrm{Sec}^k(C) = \mathbb{P}(S_d^*)$. □

Ahora veremos que la clausura de los puntos de rango r es la variedad secante r-ésima. Para eso definimos

$$C_r = \{\varphi \in \mathbb{P}(S_d^*) : \ \mathrm{rg}\, \varphi = r\}.$$

Proposición 1.11. *Sea $r \geq 1$ tal que $2r - 2 \leq d$. Entonces*

$$\overline{C}_r = \operatorname{Sec}^r(C)$$

Demostración. Sea $\varphi \in C_r$. Entonces φ pertenece a un $(r-1)$-plano r-secante a C (estricto) y por lo tanto pertenece a $\operatorname{Sec}^r(C)$. Esto prueba que $\overline{C}_r \subset \operatorname{Sec}^r(C)$.

Para probar la otra inclusión probaremos el siguiente resultado por inducción. Si $\varphi \in \Lambda_P^\circ$, para $P \in S_r$ con raíces simples, entonces $\operatorname{rg}\varphi = r$.

Para $r = 1$ no hay nada que probar ya que $\Lambda_P^\circ = \Lambda_P$.

Sea entonces $r \geq 2$ tal que $2r-2 \leq d$ y sea $\varphi \in \Lambda_P^\circ$. Es claro que $\operatorname{rg}\varphi \leq r$. Si $\operatorname{rg}\varphi < r$, entonces existe un polinomio $Q \in S_{r-1}$ con raíces simples tal que $\varphi \in \Lambda_Q$. Pero entonces por el lema 1.9, $\varphi \in \Lambda_S$ para S/P que contradice la hipótesis. □

Esta proposición responde a las preguntas 2 y 3 formuladas en la introducción del capítulo.

Proposición 1.12. *El menor entero E tal que una forma binaria genérica de grado d tiene rango menor o igual que E es $\left[\frac{d}{2}\right] + 1$.*

Si $r < E$, la dimensión de la clausura del conjunto de formas de rango r es $2r - 1$.

Demostración. Efectivamente, si $E = \left[\frac{d}{2}\right] + 1$, entonces el rango de una forma genérica es E ya que $\overline{C}_E = \operatorname{Sec}^E(C) = \mathbb{P}(S_d^*)$.

Además si $r < E$, tenemos que $\overline{C}_r = \operatorname{Sec}^r(C)$ y por lo tanto la dimensión de $\overline{C}_r$ es $2r - 1$. □

Ahora definimos la variedad de planos secantes no estrictos.

Definición 1.13. *Sea $C \subset \mathbb{P}(S_d^*)$ la curva de Veronese de grado d. Sea $k \geq 2$. Definimos la variedad de $(k-1)$-planos k-secantes no estrictos como*

$$\operatorname{Sec}^{k,2}(C) = \bigcup_{P \in \Delta_{S_k}} \Lambda_P$$

donde $\Delta_{S_k} \subset S_k$ denota la hipersuperficie discriminante de polinomios con raíces múltiples.

Los parámetros $k, 2$ quieren decir que los planos intersecan a C en k puntos (contados con multiplicidad) y que uno de ellos es como mínimo doble.

Observación. Para cada $k \geq 2$ tal que $2k-3 < d$ se tiene

$$\mathrm{Sec}^{k-1}(C) \subsetneq \mathrm{Sec}^{k,2}(C)$$

pues si P es un polinomio de grado k con una raíz múltiple cualquier $\varphi \in \Lambda_P^\circ$ no pertenece a $\mathrm{Sec}^{k-1}(C)$.

Con una demostración análoga a la hecha para para $\mathrm{Sec}^k(C)$, se prueba

Proposición 1.14. *Sea $C \subset \mathbb{P}(S_d^*)$ la curva de Veronese de grado d. Entonces $\mathrm{Sec}^{k,2}(C)$ es una variedad de dimensión $\min\{2k-2, d\}$.*

Resumimos la discusión sobre la definición de planos secantes con el siguiente corolario.

Corolario 1.15.

1. *Sea $\varphi \in \mathbb{P}(S_d^*)$ y sea $k \geq 1$ tal que $d > 2k-1$. Entonces*

$$\varphi \in \mathrm{Sec}^k(C) \iff \varphi(P \cdot S_{d-k}) = 0$$

para $P \in S_k$.

2. *Sea $\varphi \in \mathbb{P}(S_d^*)$ y sea $k \geq 2$ tal que $d < 2k-2$. Entonces*

$$\varphi \in \mathrm{Sec}^{k,2}(C) \iff \varphi(P \cdot S_{d-k}) = 0$$

para $P \in S_k$ con raíces múltiples.

En la proposición 1.2 probamos que un punto φ en la curva de Veronese es una matriz de la forma

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & \dots & Z_{d-l} \\ Z_1 & Z_2 & \dots & Z_{d-l+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_l & Z_{l+1} & \dots & Z_d \end{pmatrix}$$

que tiene rango uno. Fijado l, $1 \leq l \leq d-1$ y $l \leq d-l$ y fijado un entero $k < l$, es claro que si $\varphi \in \mathrm{Sec}^k(C)$, φ es suma de k matrices de rango uno (o un límite de una suma), y por lo tanto el rango de la matriz M_φ es menor o igual que k. Vamos a mostrar ahora que vale la recíproca.

Proposición 1.16. *Sea $k \leq l, d-l$, sea $\varphi \in \mathbb{P}(S_d^*)$ y sea M_φ la matriz de la forma bilineal μ_φ, esto es,*

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & \dots & Z_{d-l} \\ Z_1 & Z_2 & \dots & Z_{d-l+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_l & Z_{l+1} & \dots & Z_d \end{pmatrix}$$

La variedad de puntos $\varphi \in \mathbb{P}(S_d^*)$ para los cuales la matriz M_φ tiene rango menor o igual que k es la variedad secante $\mathrm{Sec}^k(C)$ de la curva $C \subset \mathbb{P}(S_d^*)$.

La clave es el siguiente lema ([13], página 103).

Lema 1.17. *Sea S_d el espacio vectorial de polinomios de grado d en $\mathbb{P}^1$ y sea $W \subsetneq S_d$ un subespacio sin ceros comunes. Sea $V = S_1 \cdot W$ el espacio de polinomios de grado $d+1$ generado por todos los productos de $P \in V$ con formas lineales.*

Entonces

$$\dim(V) \geq \dim(W) + 2$$

Del lema deducimos este otro lema que es el que usaremos:

Lema 1.18. *Sea $W \subsetneq S_r$ un subespacio sin ceros comunes de codimensión l. Entonces si $q \geq l$, $S_q \cdot W = S_{r+q}$*

Demostración. Si así no fuera, entonces $V = S_q \cdot W$ sería un espacio vectorial propio de S_{r+q} sin puntos base y de dimensión mayor o igual a $\dim(W) + 2q$ (por aplicación q veces del lema anterior). En particular tiene que ser $\dim(W) + 2q \leq r + q$, esto es, $\dim(W) \leq r - q$. Pero la dimensión de W es $r + 1 - l$, y por lo tanto queda $q \leq l - 1$, que contradice la hipótesis. □

Ahora sí, demostramos la proposición.

Demostración de la proposición 1.16. Supongamos entonces que $\varphi \in \mathbb{P}(S_d^*)$ es una forma lineal con coordenadas homogéneas $(Z_0 : \cdots : Z_d)$ tal que la matriz M_φ tiene rango $r \leq k$, con $k \leq l, d-l$. Consideremos la forma bilineal

$$S_l \times S_{d-l} \xrightarrow{\mu_\varphi} \mathbb{C}$$

Como el rango de M_φ es r, el subespacio $W_1 = W_1(\varphi) \subset S_l$ definido por

$$Q \in W_1(\varphi) \iff \mu_\varphi(P, S_{d-l}) = 0$$

tiene codimensión r. Observar que entonces $W_1 \cdot S_{d-l} \subset \ker \varphi$.

Veamos que el espacio W_1 tiene que tener ceros comunes. Esto es consecuencia del lema 1.18 ya que la codimensión de W_1 es $r \leq d - l$ y $W_1 \cdot S_{d-l}$ es un subespacio propio de S_d.

Sea P el polinomio de grado n que tiene como ceros los ceros comunes de W_1 (contados con multiplicidad). Entonces $W_1 = P \cdot W_1'$, con $W_1' \subset S_{l-n}$ sin ceros comunes y $\dim W_1 = \dim W_1'$. Como $\dim W_1' \leq l - n + 1$ se tiene que $n \leq r$.

La dimensión de W_1' es igual a la de W_1, por lo tanto su codimensión es $l - n + 1 - (l + 1 - r) = r - n$. Si $r = n$, entonces $W_1' = S_{d-n}$ y por lo tanto $W_1' \cdot S_{d-l} = S_{d-n}$. Si no W_1' es un subespacio propio, y como $d - l \geq r \geq r - n$, el lema 1.18 nos permite deducir que $W_1' \cdot S_{d-l} = S_{d-n}$.

Pero entonces tenemos $S_{d-l} \cdot W_1 = P \cdot S_{d-l} \cdot W_1' = P \cdot S_{d-n}$. Esto muestra que $\varphi(P \cdot S_{d-n}) = 0$ y por el corolario 1.15 resulta

$$\varphi \in \mathrm{Sec}^n(C) \subset \mathrm{Sec}^r(C) \subset \mathrm{Sec}^k(C).$$

$\square$

En la demostración introdujimos para $\varphi \in \mathbb{P}(S_d^*)$, y para la forma bilineal

$$S_l \times S_{d-l} \xrightarrow{\mu_\varphi} \mathbb{C}$$

el espacio $W_1(\varphi) \subset S_l$, que es el núcleo a izquierda de μ_φ. De manera similar definimos el espacio $W_2(\varphi) \subset S_{d-l}$ como el núcleo a derecha de μ_φ.

Antes de terminar la sección enunciamos el Teorema de Bertini que necesitaremos más adelante ([13], página 216).

Teorema de Bertini. *Sea $W \subset S_k$ un subespacio de polinomios de grado k. Supongamos que todos los miembros de W tienen raíces múltiples. Entonces existe $\alpha \in \mathbb{P}^1$ que es raíz de todos los miembros de W. Es más, una de estas raíces es raíz doble de todos los miembros de W.*

Observación. En la definición de la variedad de planos secantes no estrictos introdujimos la subvariedad $\Delta_{S_r} \subset S_r$ definida por

$$\Delta_{S_r} = \{P \in S_r : \ P \text{ tiene raíces múltiples}\}.$$

Esta subvariedad es una hipersuperficie y no contiene hiperplanos ya que un tal hiperplano H tendría ceros comunes y alguno de ellos dobles (por el teorema de Bertini). Pero los polinomios que tienen un cero dado con multiplicidad mayor o igual que dos forman una subvariedad de codimensión dos en S_r, por lo tanto no puede ser que todos los polinomios en W tengan este cero.

1.4. Clasificación por rango

En esta sección probaremos el siguiente teorema

Teorema 1.19 (Clasificación por rango de formas binarias)**.** *Sean $\mathbb{P}(S_d)$ el espacio de formas binarias de grado d, $v_d(\mathbb{P}(S_1)) \subset \mathbb{P}(S_d)$ la curva de potencias d-ésimas de formas lineales y para cada $1 \leq r \leq d$, sea $S_d^r \subset \mathbb{P}(S_d)$ el espacio de formas binarias de grado d y rango r.*

1. *Para cada $r \geq 2$ tal que $d \geq 2r-1$ tenemos*

$$\begin{array}{rcl} S_d^r & = & \overline{S_d^r} \setminus \overline{S_d^{d-r+2}} \\ S_d^{d-r+2} & = & \overline{S_d^{d-r+2}} \setminus \overline{S_d^{r-1}} \end{array}$$

2. *Si $d = 2r-2$ se tiene además*

$$S_d^r = \overline{S_d^{d-r+2}} \setminus \overline{S_d^{r-1}}.$$

Lo que haremos es probar el mismo teorema, pero enunciado para la inmersión de $\mathbb{P}^1$ en $\mathbb{P}(S_d^*)$.

Teorema 1.20. *Sea $C = v_d(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}(S_d^*)$ la curva de Veronese de grado d.*

1. *Para cada $r \geq 2$ tal que $d \geq 2r-1$ tenemos*

$$\begin{array}{rcl} C_r & = & \overline{C}_r \setminus \overline{C}_{d-r+2} \\ C_{d-r+2} & = & \overline{C}_{d-r+2} \setminus \overline{C}_{r-1} \end{array}$$

2. *Si $d = 2r-2$ se tiene además*

$$C_r = \overline{C}_{d-r+2} \setminus \overline{C}_{r-1}.$$

Comenzamos probando una condición necesaria y suficiente para que el rango de φ sea menor o igual que r.

Proposición 1.21. *Sea $\varphi \in \mathbb{P}(S_d^*)$. Entonces el rango de φ es menor o igual que r si y solo si*

$$W_1(\varphi) = \{P \in S_r : \varphi(P \cdot S_{d-r}) = 0\} \subset S_r$$

verifica $W_1(\varphi) \not\subset \Delta_{S_r}$.

En particular todo $\varphi \in \mathbb{P}(S_d^*)$ tiene rango menor o igual que d.

Demostración. Observar que el rango de φ es menor o igual que r si y solo si existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{P}^1$ distintos tales que

$$\varphi = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i ev(\alpha_i).$$

Entonces la proposición es una reescritura del lema 1.3, ya que por el lema si $\varphi = \sum_{i=1}^r \lambda_i ev(\alpha_i)$ entonces $\varphi(P \cdot S_{d-r}) = 0$, donde P es el polinomio cuyas raíces son $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$. Pero entonces $P \in W_1 = W_1(\varphi)$, y como no tiene raíces múltiples, $P \notin \Delta_{S_r}$. Los pasos se puede revertir y si $P \in W_1 \setminus \Delta_{S_r}$, entonces

$\varphi \in \Lambda_P$. Como P no tiene raíces múltiples, Λ_P es el plano generado por $ev_{\alpha_1}, \dots, ev_{\alpha_r}$ (donde los α_i son las raíces de P) y por lo tanto $\operatorname{rg}\varphi \leq r$.

En el caso en que $r = d$, W_1 es el núcleo de φ, y como Δ_{S_d} no contiene hiperplanos se tiene $W_1 \not\subset \Delta_{S_d}$. Por lo tanto φ es combinación de d elementos de C y su rango es por lo tanto menor o igual que d. □

Observación. La última afirmación de la proposición dice que d es una cota para el rango de formas binarias. Hasta ahora sabíamos que el rango estaba acotado por $d+1$ (cf. corolario 1.4). De hecho esta cota no se puede mejorar ya que los puntos que pertenecen a una recta tangente a C (salvo el punto de tangencia) tienen rango d. Esto es consecuencia de la siguiente proposición donde estimamos el rango de un punto que es límite de puntos de rango r pero tal que su rango es mayor que r.

Proposición 1.22. *Sea $r \geq 2$ tal que $d \geq 2r-1$. Si $\varphi \in \operatorname{Sec}^r(C)$ y su rango es mayor que r, entonces* $\operatorname{rg}\varphi \geq d-r+2$.

Demostración. Como $\varphi \in \operatorname{Sec}^r(C)$, entonces existe un polinomio $P \in S_r$ tal que $\varphi(P \cdot S_{d-r}) = 0$, esto es $\varphi \in \Lambda_P$. El polinomio P tiene que tener raíces múltiples ya que si no el rango de φ sería menor o igual que r. Supongamos entonces que $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ son las raíces de P. Como P tiene raíces múltiples tiene que ser $k < r$.

Supongamos que el rango de φ es menor que $d-r+2$. Entonces existen $\beta_1, \dots, \beta_{d-r+1}$ tales que

$$\varphi = \sum_{j=1}^{d-r+1} \lambda_j ev(\beta_j).$$

Si Q es el polinomio con raíces $\beta_1, \dots, \beta_{d-r+1}$, entonces $\varphi \in \Lambda_Q$. Como $r+d-r+1 = d+1$, podemos usar el corolario 1.9 para deducir que $\Lambda_P \cap \Lambda_Q = \Lambda_S$ donde S es el polinomio que tiene como raíces a las raíces comunes de P y Q. Como P tiene $k < r$ raíces y las raíces de Q son simples, entonces S tiene a lo sumo k raíces y todas simples. Pero entonces como $\varphi \in \Lambda_S$ su rango tiene que ser menor o igual que k. Esto es una contradicción. □

Ejemplo 1.23. Un punto φ en una recta tangente a C distinto del punto de tangencia tiene rango d. Efectivamente, por el lema 1.9, φ no puede pertenecer también a una recta secante. Luego su rango no puede ser ni uno ni dos. Entonces por la proposición anterior su rango debe ser mayor o igual que d. Pero la proposición 1.21 dice que el rango es menor o igual que d. Por lo tanto es exactamente d.

Podemos entonces responder a la primera pregunta hecha en la introducción.

Proposición 1.24. *El menor entero r tal que toda forma binaria tiene rango menor o igual que r es d.*

La siguiente proposición nos permite deducir que los puntos en rectas tangentes (que no son los puntos de tangencia) son exactamente los que tienen rango d.

Proposición 1.25. *Sea $r \geq 2$ tal que $d \geq 2r - 1$ y sea φ tal que $\operatorname{rg} \varphi \geq d - r + 2$. Entonces $\varphi \in \operatorname{Sec}^r(C)$.*

Demostración. Consideremos el morfismo de multiplicación

$$\mu : S_{r-1} \times S_{d-r+1} \to S_d.$$

Si el rango de μ_φ es menor o igual que $r - 1$, entonces $\varphi \in \operatorname{Sec}^{r-1}(C)$ por la proposición 1.16. Podemos suponer entonces que el rango de μ_φ es r.

Entonces $W_2 = W_2(\varphi)$ es un subespacio de dimensión $d - r + 2 - r = d - 2r + 2$. Como el rango de φ es mayor o igual a $d - r + 2$, tiene que ser $W_2 \subset \Delta_{S_{d-r+1}}$. Por lo tanto por el Teorema de Bertini W_2 tiene ceros comunes y uno de ellos es múltiple para todos lo polinomios de W_2.

Sea entonces P el polinomio que tiene como raíces los ceros comunes de W_2 contados con multiplicidad. Sea n el grado de P y sea $W_2' \subset S_{d-r+1-n}$ el subespacio sin ceros comunes que verifica $W_2 = W_2' \cdot P$. Es claro que la dimensión de W_2 y la de W_2' es la misma. Por lo tanto tiene que ser

$$d - 2r + 2 = \dim W_2' \leq \dim S_{d-r+1-n} = d - r - n + 2.$$

Por lo tanto tenemos $n \leq r$.

La codimensión de W_2' en $S_{d-r+1-n}$ es $d - r - n + 2 - d + 2r - 2 = r - n$. Como $n \geq 2$, se tiene que $r - 1 \geq \operatorname{codim} W_2'$, y por lo tanto usando el lema 1.18 vemos que $S_{r-1} \cdot W_2' = S_{d-n}$.

Entonces tenemos

$$0 = \varphi(S_{r-1} \cdot W_2) = \varphi(S_{r-1} \cdot W_2' \cdot P) = \varphi(S_{d-n} \cdot P).$$

Por lo tanto $\varphi \in \operatorname{Sec}^n(C)$ y como $n \leq r$, $\operatorname{Sec}^n(C) \subset \operatorname{Sec}^r(C)$. Entonces $\varphi \in \operatorname{Sec}^r(C)$ como queríamos. □

Ejemplo 1.23 (continuación). Si aplicamos la proposición al caso $r = 2$ tenemos que si $\operatorname{rg} \varphi = d$ entonces $\varphi \in \operatorname{Sec}^2(C)$. Entonces φ pertenece a una recta secante o a una recta tangente. Pero no puede pertenecer a una recta secante ya que entonces su rango sería 2, luego pertenece a una recta tangente.

Introduzcamos la siguiente notación

- $C_{\leq r} = \{\varphi \in \mathbb{P}(S_d^*) : \operatorname{rg}\varphi \leq r\}$
- $C_{\geq r} = \{\varphi \in \mathbb{P}(S_d^*) : \operatorname{rg}\varphi \geq r\}$

Recordar que para $r \geq 1$ tal que $2r - 2 \leq d$ se tiene $\overline{C}_r = \operatorname{Sec}^r(C)$.

Probaremos ahora una proposición de la que deduciremos el teorema de clasificación por rango.

Proposición 1.26. *Sea $r \geq 2$ tal que $d \geq 2r - 2$. Entonces se tiene*

$$\overline{C}_r = C_{\leq r} \cup C_{\geq d-r+2}$$

Demostración. Primero supongamos que $d \geq 2r - 1$ para poder usar las proposiciones 1.22 y 1.25

Sea $\varphi \in \overline{C}_r$. Si $\operatorname{rg}\varphi > r$, por la proposición 1.22 tiene que ser $\operatorname{rg}\varphi \geq d - r + 2$. Esto prueba una inclusión.

Veamos ahora la otra inclusión. Si $\operatorname{rg}\varphi \leq r$ entonces $\varphi \in \overline{C}_r$ por definición.

Si $\operatorname{rg}\varphi \geq d - r + 2$, entonces $\varphi \in \operatorname{Sec}^r(C) = \overline{C}_r$ por la proposición 1.25.

Supongamos ahora que $d = 2r - 2$. Sabemos que en este caso

$$\overline{C}_r = \operatorname{Sec}^r(C) = \mathbb{P}(S_d^*).$$

Pero entonces queremos probar

$$\mathbb{P}(S_d^*) = C_{\leq r} \cup C_{\geq r}$$

lo cual es evidente. □

El teorema 1.20 es consecuencia del siguiente teorema

Teorema 1.27. *Sea $C = \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}(S_d^*)$ la curva de Veronese.*

1. *Para cada $r \geq 2$ tal que $d \geq 2r - 1$ tenemos*

$$\begin{aligned} C_r &= \operatorname{Sec}^r(C) \setminus \operatorname{Sec}^{r,2}(C) \\ C_{d-r+2} &= \operatorname{Sec}^{r,2}(C) \setminus \operatorname{Sec}^{r-1}(C). \end{aligned}$$

2. *Si $d = 2r - 2$ se tiene además*

$$C_r = \operatorname{Sec}^{r,2}(C) \setminus \operatorname{Sec}^{r-1}(C).$$

Veamos primero que el teorema 1.27 implica el teorema 1.20

Demostración del Teorema 1.20. Lo único que hace falta probar es que $\overline{C}_r = \mathrm{Sec}^r(C)$ para r tal que $d \geq 2r-1$ y que $\overline{C}_{d-r+2} = \mathrm{Sec}^{r,2}(C)$ para r tal que $d \geq 2r-1$.

La primera afirmación ya la sabíamos. Para la segunda observamos que por el teorema 1.27, C_{d-r+2} es un abierto en $\mathrm{Sec}^{r,2}(C)$ y por lo tanto sus clausura es $\mathrm{Sec}^{r,2}(C)$ como queríamos. $\square$

Ahora probamos el teorema 1.27

Demostración del teorema 1.27. Consideremos primero $r \geq 2$ tal que $d \geq 2r-1$.

- Veamos que
$$C_r = \mathrm{Sec}^r(C) \setminus \mathrm{Sec}^{r,2}(C).$$
Sea $\varphi \in C_r$. Entonces φ pertenece a un $(r-1)$-plano r-secante estricto y por lo tanto $\varphi \in \mathrm{Sec}^r(C)$. Es más sabemos que existe un polinomio P de grado r con raíces simples tal que $\varphi \in \Lambda_P$. Si $\varphi \in \mathrm{Sec}^{r,2}(C)$, entonces existe un polinomio Q de grado r con raíces múltiples tal que $\varphi \in \Lambda_Q$. Por el lema 1.9, $\varphi \in \Lambda_S$ donde S es el polinomio cuyas raíces son las raíces comunes entre P y Q. Como las raíces de P son simples, las de S también, y como Q tiene a lo sumo $r-1$ raíces distintas, las raíces de S son a lo sumo $r-1$. Pero entonces $\mathrm{rg}\,\varphi \leq r-1$ que contradice la hipótesis.

  Por otro lado si $\varphi \in \mathrm{Sec}^r(C) \setminus \mathrm{Sec}^{r,2}(C)$, existe un polinomio P de grado r tal que $\varphi \in \Lambda_P$. Si P tuviera raíces múltiples, entonces φ pertenecería a $\mathrm{Sec}^{r,2}(C)$. Con esto $\mathrm{rg}\,\varphi \leq r$. Pero si su rango fuera menor que r entonces por la proposición 1.26 tendríamos que $\varphi \in \mathrm{Sec}^{r-1}(C) \subset \mathrm{Sec}^{r,2}(C)$.

- Veamos ahora que
$$C_{d-r+2} = \mathrm{Sec}^{r,2}(C) \setminus \mathrm{Sec}^{r-1}(C).$$
Sea $\varphi \in C_{d-r+2}$. Por la proposición 1.26 tiene que ser $\varphi \in \mathrm{Sec}^r(C) \setminus \mathrm{Sec}^{r-1}(C)$. Esto quiere decir que existe un polinomio P de grado r tal que $\varphi \in \Lambda_P$. Si P tuviera raíces simples el rango de φ sería menor o igual que r. Por lo tanto P tiene raíces múltiples y por lo tanto $\varphi \in \mathrm{Sec}^{r,2}(C)$.

  Por otro lado si $\varphi \in \mathrm{Sec}^{r,2}(C) \setminus \mathrm{Sec}^{r-1}(C)$, existe un polinomio P de grado $r+1$ con raíces múltiples tal que $\varphi \in \Lambda_P$. Además como $\mathrm{Sec}^{r,2}(C) \subset \mathrm{Sec}^r(C)$, por la proposición 1.26 deber ser $\mathrm{rg}\,\varphi = r$ o rg $\varphi = d - r + 2$. Si el rango es r entonces $\varphi \in \Lambda_Q$ para Q de grado r con raíces son simples y por lo tanto distinto de P. Haciendo el mismo razonamiento que más arriba debe ser $\varphi \in \operatorname{Sec}^{r-1}(C)$ lo que es una contradicción. Por lo tanto rg $\varphi = d - r + 2$.

Ahora suponemos que $d = 2r-2$. En este caso $\operatorname{Sec}^{r,2}(C) = \mathbb{P}(S_d^*)$. Veamos que

$$C_r = \operatorname{Sec}^{r,2}(C) \setminus \operatorname{Sec}^{r-1}(C) = \mathbb{P}(S_d^*) \setminus \operatorname{Sec}^{r-1}(C).$$

Sea $\varphi \in C_r$, queremos ver entonces que $\varphi \notin \operatorname{Sec}^{r-1}(C)$. Pero si así fuera, por la proposición 1.26 tenemos que rg $\varphi \leq r - 1$ o rg $\varphi \geq r + 1$.

Por otro lado si $\varphi \in \mathbb{P}(S_d^*) \setminus \operatorname{Sec}^{r-1}(C)$, usando la misma proposición tiene que ser necesariamente rg $\varphi = r$. □

1.5. Cómo calcular el rango

En esta sección mostraremos un procedimiento sencillo para calcular el rango de una forma binaria P de grado d. Esto responde la cuarta pregunta hecha en la introducción del capítulo.

También mostraremos para cada valor r de cuántas maneras puede escribirse una forma de rango r como suma de r potencias d-ésimas de formas lineales.

Comenzamos escribiendo

$$P = Z_0 x^d + Z_1 \binom{d}{1} x^{d-1} y + Z_2 \binom{d}{2} x^{d-2} 2 + \cdots + Z_{d-1} \binom{d}{d-1} x y^{d-1} + Z_d y^d.$$

Pasamos entonces a considerar $\varphi \in \mathbb{P}(S_d^*)$ cuyas coordenadas homogéneas son $(Z_0 : \cdots : Z_d)$.

Consideramos las siguientes matrices (dependiendo de si $d = 2l$ o $d = 2l + 1$):

$$\begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & \dots & Z_l \\ Z_1 & Z_2 & \dots & Z_{l+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_l & Z_{l+1} & \dots & Z_d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & \dots & Z_l \\ Z_1 & Z_2 & \dots & Z_{l+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{l+1} & Z_{l+2} & \dots & Z_d \end{pmatrix}.$$

Calculamos el rango de la matriz que corresponda. Si este rango es r entonces $P \in \operatorname{Sec}^r(\mathbb{P}(S_1)) \setminus \operatorname{Sec}^{r-1}(\mathbb{P}(S_1))$.

Supongamos primero que que $2r-2 \neq d$. Este caso lo analizaremos aparte. Entonces se verifica $r < d - r + 2$. Nos falta determinar si el rango de P es r o $d - r + 2$.

Consideramos la matriz

$$M = \begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & \dots & Z_r \\ Z_1 & Z_2 & \dots & Z_{r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{d-r} & Z_{d-r+1} & \dots & Z_d \end{pmatrix},$$

que es la matriz de la forma bilineal $\mu_\varphi : S_{d-r} \times S_r \to \mathbb{C}$. Esta matriz tiene rango exactamente r ya que $P \notin \mathrm{Sec}^{r-1}(\mathbb{P}(S_1))$. Por lo tanto existe un único polinomio no nulo $Q \in S_r$ (salvo múltiplos) tal que $\mu_P(S_{d-r} \cdot Q) = 0$. Es más, si $Q = a_0x^r + a_1x^{r-1}y + \cdots + a_ry^r$, entonces el vector $(a_0, \dots, a_r)$ verifica

$$M \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{r-1} \\ a_r \end{pmatrix} = 0$$

Lo único que queda por determinar es si Q tiene raíces múltiples o no. Si no tiene raíces múltiples, entonces P tiene rango r. Para ver esto tenemos que traducir al lenguaje de formas lo hecho en $\mathbb{P}(S_d^*)$. Concretamente, si $(t_1 : u_1), \dots, (t_r : u_r) \in \mathbb{P}^1$ son las raíces de Q, entonces P es combinación lineal de las potencias d-ésimas de las formas lineales $L_i = t_ix + u_iy$.

Si por el contrario Q tiene raíces múltiples, P tiene rango $d - r + 2$.

Observar que si Q no tiene raíces múltiples, la manera de escribir a P como suma de r potencias d-ésimas de formas lineales es única salvo múltiplos de las formas lineales.

Por otro lado si Q no tiene raíces múltiples, entonces por la demostración de la proposición 1.21, P puede escribirse de ∞^{d-2r+3} formas. Para ver esto notar que lo que buscamos es un vector $(b_0, \dots, b_{d-r-2})$ tal que

$$N \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{r-1} \\ b_{d-r+2} \end{pmatrix} = 0$$

y tal que el polinomio $Q = b_0x^{d-r+2} + b_1x^{d-r+1}y + \cdots + b_{d-r+2}y^{d-r+2}$ no tenga raíces múltiples, donde N es la matriz

$$N = \begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & \dots & Z_{d-r+2} \\ Z_1 & Z_2 & \dots & Z_{d-r+3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{r-2} & Z_{r-1} & \dots & Z_d \end{pmatrix}.$$

El rango de esta matriz es $r-1$, luego el espacio S solución del sistema asociado a N tiene dimensión $d-2r+4$. Por lo tanto el conjunto de los Q con raíces múltiples que verifican $N \cdot b = 0$ son la intersección de $\mathbb{P}(S)$ y la hipersuperficie discriminante en $\mathbb{P}(S_{d-r+2})$. Por lo tanto hay un abierto en $\mathbb{P}(S)$ de polinomios Q que permiten escribir a P como suma de $d-r+2$ potencias d-ésimas de formas lineales (que tiene dimensión $d-2r+3$).

Falta analizar el caso en que $d = 2r-2 = 2l$ y el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & \dots & Z_l \\ Z_1 & Z_2 & \dots & Z_{l+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_l & Z_{l+1} & \dots & Z_d \end{pmatrix}$$

es $l+1 = r$. En ese caso sabemos que $\varphi \notin \mathrm{Sec}^l(\mathbb{P}(S_1))$ y por lo tanto $\mathrm{rg}\,\varphi = l+1$. Consideramos entonces la matriz

$$\begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & \dots & Z_{l+1} \\ Z_1 & Z_2 & \dots & Z_{l+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{l-1} & Z_l & \dots & Z_d \end{pmatrix}$$

que tiene rango l. Por lo tanto el espacio de los polinomios $Q = a_0x^{l+1} + a_1x^ly + \cdots + a_{l+1}y^{l+1}$ tales que

$$M \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_l \\ a_{l+1} \end{pmatrix} = 0.$$

es una recta en $\mathbb{P}(S_{l+1})$. Como sabemos que el rango de φ es $l+1$, esta recta no está contenida en la hipersuperficie discriminante, por lo que φ se escribe de ∞^1 formas como suma de $l+1$ potencias d-ésimas de formas lineales.

Observación. Con el análisis recién hecho volvemos a responder la segunda pregunta formulada al comienzo del capítulo.

- Si $d = 2r-2$ una forma en el abierto $\mathbb{P}(S_d) \setminus \mathrm{Sec}^{r-1}(\mathbb{P}(S_1))$ tiene rango r. Por lo tanto la forma genérica tiene rango r y hay ∞^1 maneras de escribirla como suma de r potencias de formas lineales.

- Si $d = 2r - 1$, una forma en el abierto $\mathbb{P}(S_d) \setminus \mathrm{Sec}^{r,2}(\mathbb{P}(S^1))$ tiene rango r y una tal forma se escribe de manera única como suma de r potencias d-ésimas de formas lineales. Por lo tanto la forma genérica se escribe de manera única de esta forma.

Estos dos resultados eran conocidos por Sylvester ([27] y [26]).

1.6. Variedades de planos secante no estrictos

En esta sección usaremos los resultados de la sección anterior para describir ecuaciones que definen las variedades de planos secantes no estrictos, $\mathrm{Sec}^{k,2}(C)$, para $C \subset \mathbb{P}(S_d^*) = \mathbb{P}^d$ la curva de Veronese.

Comenzaremos con el caso en que $\mathrm{Sec}^{l,2}(C)$ es una hipersuperficie, esto es, $d = 2l - 1$. Para $r \geq 2$ notaremos con $\Delta_r(a_0, \ldots, a_r)$ el polinomio que genera el ideal de la hipersuperficie discriminante $\Delta_{S_r} \subset \mathbb{P}(S_r)$. Es un polinomio homogéneo de grado $2(r-1)$ (si P es un polinomio en x, y de grado r, su discriminante es la resultante de los polinomios $\frac{\partial P}{\partial x}$ y $\frac{\partial P}{\partial y}$ que es un polinomio de grado $2(r-1)$ en las coordenadas de P).

Proposición 1.28. *Sea $d = 2l - 1$ y sea $C \subset \mathbb{P}^d$ la curva de Veronese. Sea M la matriz*

$$M = \begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & \ldots & Z_l \\ Z_1 & Z_2 & \ldots & Z_{l+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{l-1} & Z_l & \ldots & Z_d \end{pmatrix}$$

y sea P el polinomio $P(Z) = c_0 x^l + c_1 x^{l-1} y + \cdots + c_l y^l$ donde $c(Z)$ es el producto vectorial de las filas de M.

Entonces la ecuación $\Delta_l(c(Z)) = 0$ define la hipersuperficie $\mathrm{Sec}^{l,2}(C)$.

Demostración. Supongamos que $\varphi \in \mathrm{Sec}^{l,2}(C)$. Si la matriz M tiene rango menor que l, entonces el vector $c(Z)$ es nulo. Por lo tanto supondremos que la matriz tiene rango l. En ese caso el polinomio $P(Z)$ es tal que $\varphi \in \Lambda_P$. Como el rango de M es l, el $(l-1)$-plano Λ_P es el único $(l-1)$-plano l-secante a C que contiene a φ. Como $\varphi \in \mathrm{Sec}^{l,2}(C)$, entonces $P(Z)$ tiene que tener puntos múltiples, esto es, $P(Z) \in \Delta_{S_l}$. Por lo tanto $\Delta_l(c(Z)) = 0$.

El proceso es reversible. Supongamos que $\Delta_l(c(Z)) = 0$. Si $c(Z) = 0$, el rango de M es menor que l. Por lo tanto $\varphi \in \mathrm{Sec}^{l-1}(C) \subset \mathrm{Sec}^{l,2}(C)$. Si $c(Z) \neq 0$, entonces como $\Delta_l(c(Z)) = 0$, el polinomio $P(Z)$ tiene raíces múltiples. Como $M \cdot c(Z) = 0$, entonces $\varphi \in \Lambda_P$. Por lo tanto $\varphi \in \mathrm{Sec}^{l,2}(C)$ como queríamos. $\square$

Notar que como el grado de Δ_l es $2(l-1)$ y el grado en Z de cada coordenada de $c(Z)$ es l, tenemos que el grado de la ecuación que define $\mathrm{Sec}^{l,2}(C)$ en $\mathbb{P}^{2l-1}$ es $2l(l-1)$. Más adelante mostraremos que el grado de $\mathrm{Sec}^{l,2}(C)$ en $\mathbb{P}^{2l-1}$ es también $2(l-1)$ con lo que la ecuación que acabamos de calcular genera el ideal de $\mathrm{Sec}^{l,2}(C)$.

Ahora mostramos un conjunto de ecuaciones que definen $\mathrm{Sec}^{k,2}(C)$ en general.

Proposición 1.29. *Sea $C \subset \mathbb{P}^d$ la curva de Veronese y sea k tal que $\dim \mathrm{Sec}^{k,2}(C) = 2k-2 \leq d-2$. Sea M la matriz*

$$M = \begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & \dots & Z_k \\ Z_1 & Z_2 & \dots & Z_{k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{d-k} & Z_{d-k+1} & \dots & Z_d \end{pmatrix}.$$

Para cada conjunto de índices $\lambda = \{\lambda_0, \dots, \lambda_k\}$ tales que $1 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k$ sea $c_\lambda(Z)$ el producto vectorial de las filas $\lambda_0, \dots, \lambda_k$ de M y sea $P_\lambda(Z)$ el polinomio de grado k con coeficientes $c_\lambda(Z)$. El conjunto de ecuaciones

$$\Delta_k(c_\lambda(Z))$$

define la variedad $\mathrm{Sec}^{k,2}(C)$.

Demostración. Sea $\varphi \in \mathrm{Sec}^{k,2}(C)$ y sea M la matriz

$$M = \begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & \dots & Z_k \\ Z_1 & Z_2 & \dots & Z_{k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{d-k} & Z_{d-k+1} & \dots & Z_d \end{pmatrix}.$$

Tal como en el caso anterior, si la matriz tiene rango menor que k entonces para cada λ el vector c_λ es nulo. Por lo tanto el polinomio $P_\lambda(Z)$ también. Supongamos entonces que la matriz M tiene rango k. Sea λ tal que el vector $c_\lambda \neq 0$ (tiene que existir alguno pues el rango de M es k). Entonces el polinomio $P_\lambda(Z)$ es tal que $\varphi \in \Lambda_{P_\lambda}$. Razonando como en la proposición anterior tiene que ser P_λ un polinomio con raíces múltiples y por lo tanto $P_\lambda \in \Delta_{S_k}$, esto es, $\Delta_k(c(Z)) = 0$.

Nuevamente los pasos son reversibles. Si $\Delta_k(c_\lambda(Z)) = 0$ para todo λ, entonces la matriz M tiene rango menor o igual que $k-1$ y entonces $\varphi \in \mathrm{Sec}^{k-1}(C) \subset \mathrm{Sec}^{k,2}(C)$. Si para algún λ se tiene $c_\lambda(Z) \neq 0$, entonces el polinomio $P_\lambda(Z)$ tiene raíces múltiples y como $M \cdot c_\lambda = 0$ tiene que ser $\varphi \in \Lambda_{P_\lambda}$. Luego $\varphi \in \mathrm{Sec}^{k,2}(C)$. $\square$

Calculemos ahora el grado de $\mathrm{Sec}^{k,2}(C)$.

Proposición 1.30. *Sea $k \geq 2$ tal que $2k-2 < d$. Entonces el grado de $\mathrm{Sec}^{k,2}(C)$ es $2k(k-1)$.*

Demostración. Como $\mathrm{Sec}^{k,2}(C)$ es una variedad de dimensión $2k-2$ el grado es el cardinal de la intersección de $\mathrm{Sec}^{k,2}(C)$ con una variedad lineal genérica de dimensión $d-2k+2$. Llamemos Λ a esta variedad lineal. Como $\mathrm{Sec}^{k,2}(C)$ está definida como la unión de variedades lineales, alcanza con calcular a cuántos $(k-1)$-planos k-secantes no estrictos corta Λ, este es el número que calcularemos. Proyectamos desde Λ a $\mathbb{P}^{d-(d-2k+2)-1} = \mathbb{P}^{2k-3}$. La curva C se transforma en una curva C' del mismo grado y género. Notar que un $(k-1)$-plano k-secante no estricto a C que corta a Λ se transforma en un $(k-2)$-plano k-secante a la C' que tiene puntos múltiples (y viceversa). Usamos ahora la fórmula 4.26 del capítulo 4 que calcula este número. La fórmula es

$$\sum_{\alpha=0}^{k-1}(-1)^{\alpha}\binom{2k-3+g-d}{\alpha}\binom{g}{k-1-\alpha}(4k-4-2\alpha).$$

En nuestro caso $g=0$ y $d=d$. Entonces solo hay que considerar el sumando que corresponde a $\alpha = k-1$ y tenemos

$$(-1)^{k-1}\binom{-2}{k-1}(4k-4-2(k-1)) = 2k(k-1)$$

como queríamos. $\square$

Si $d = 2l-1$, entonces el grado de $\mathrm{Sec}^{l-1}(C)$ coincide con el de la ecuación que la define. Luego tenemos

Corolario 1.31. *Con las notaciones anteriores tenemos que el ideal de $\mathrm{Sec}^{l,2}(C) \subset \mathbb{P}^{2l-1}$ está generado por $\Delta_l(c(Z))$.*

Capítulo 2

Resultados previos

2.1. Divisores en curvas

A partir de este momento adoptaremos la notación de los libros *Geometry of Algebraic Curves* de E. Arbarello et al ([2]) y *Algebraic Geometry* de R. Hartshorne ([14]). Una *curva* C será entonces una curva algebraica no singular completa y reducida sobre $\mathbb{C}$.

En una curva tenemos una equivalencia entre divisores módulo equivalencia lineal y fibrados lineales módulo isomorfismo. Dado un divisor D notaremos con L_D el fibrado lineal correspondiente. A veces usaremos la notación que viene del lenguaje de haces inversibles y notaremos $\mathcal{O}_C(D)$ al fibrado lineal asociado a D.

Si $L = L_D$ para un divisor D, una sección $s \in H^0(C, L_D)$ se identifica con una función racional tal que su divisor de ceros y polos (s) verifica $(s) \geq -D$.

En general para cada sección $s \in H^0(C, L)$, podemos considerar un divisor efectivo que notaremos $(s)_0$ y que llamaremos el divisor de ceros de s. Si $L = L_D$ para D un divisor, entonces $(s)_0 = (s) + D$. Observar que entonces el divisor de ceros de s es linealmente equivalente a D.

Notaremos con $|D|$ al conjunto de divisores efectivos linealmente equivalentes con D. El conjunto $|D|$ se llama sistema lineal completo asociado al divisor D. Se tiene una biyección entre $|D|$ y el espacio de secciones de L_D módulo multiplicación por elementos de $\mathbb{C}^*$, esto es, el espacio proyectivo $\mathbb{P}(H^0(C, L_D))$. Si L es un fibrado lineal y $s \in H^0(C, L)$ es una sección, notaremos con $|L|$ al sistema lineal completo asociado al divisor $(s)_0$.

En general si $V \subset H^0(C, L)$ es un subespacio lineal, llamaremos a $\mathcal{D} = \mathbb{P}(V)$ un sistema lineal.

La herramienta para calcular la dimensión de un sistema lineal completo, esto es, la dimensión de $\mathbb{P}(H^0(C, L))$, es el teorema de Riemann-Roch.

Teorema de Riemann-Roch. *Para todo fibrado lineal L en una curva no singular C de género g se tiene*

$$h^0(C, L) - h^0(C, K \otimes L^{-1}) = \deg(L) - g + 1$$

donde K es el divisor canónico de C y $h^0(C, L) = \dim H^0(C, L)$.

Si $\mathcal{D} = \mathbb{P}(V)$, para V un subespacio de $H^0(C, L)$ diremos que $p \in C$ es un punto base de $\mathcal{D}$ si es un punto común de todos sus divisores. El base locus de $\mathcal{D}$ se define como el divisor

$$B = \sum_{p \in C} n_p \cdot p$$

donde $n_p = \text{mín}\{\text{mult}_p(D) : D \in \mathcal{D}\}$.

Dado un fibrado lineal L y un divisor efectivo D definimos el fibrado $L(-D) = L \otimes L_{-D}$. Notar que $L \simeq L(-D) \otimes L_D$. De esta manera si $s \in H^0(C, L(-D))$, $(s)_0$ es su divisor de ceros, y $t \in H^0(C, L_D)$ es la sección tal que $(t)_0 = D$, tenemos que la sección $st \in H^0(C, L)$. Esto permite pensar a $H^0(C, L(-D))$ como un subespacio de $H^0(C, L)$.

En términos de sistemas lineales, el sistema lineal $|L(-D)|$ es un subespacio del sistema lineal $|L|$. Sus elementos son los divisores $E \in |L|$ tales que $E \geq D$.

Si $\mathcal{D} = \mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(H^0(C, L))$ es un sistema lineal sin puntos base, para cada $p \in C$ el conjunto $\{s \in V : p \leq (s)_0\}$ es un hiperplano en $\mathbb{P}(V)$. Por lo tanto tenemos definido un morfismo

$$\phi_{\mathcal{D}} : C \to \mathbb{P}(V^*)$$

En el caso en que $\mathcal{D} = |D| = \mathbb{P}(H^0(C, L_D))$ es un sistema lineal completo, tenemos que si el grado de D es mayor o igual que $2g$, $|D|$ no tiene puntos base. Si además pedimos que el grado de D sea mayor o igual que $2g + 1$, entonces el morfismo $\phi_{|D|}$ es una inmersión cerrada. El grado de $\phi_{|D|}(C)$ es el grado de D. Entonces, como un hiperplano en $\mathbb{P}(H^0(C, L_D)^*)$ corresponde a una sección $s \in H^0(C, L_D)$, el divisor $(s)_0$ es la intersección de $\phi_{\mathcal{D}}(C)$ con el hiperplano.

Un punto $x \in \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(H^0(C, L_D)^*)$ es una funcional lineal en el espacio vectorial $V = H^0(C, L_D)$, que llamaremos ev_x. Notaremos V_x al núcleo de esta funcional. Si $s \in V$ y $x \in V^*$ denotaremos $s_x = ev_x(s)$. De esta forma si $s \in V_x$ decimos que s se anula en x y que V_x es el espacio de secciones que se anulan en x. Notar que V_x está en biyección con el conjunto de hiperplanos que contienen a x.

Ejemplo 2.1. Supongamos que $C = \mathbb{P}^1$ y que $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$. En ese caso $H^0(C, L) = S_d$ el espacio de formas binarias de grado d. La inmersión de $\mathbb{P}^1$ en $\mathbb{P}(H^0(C, L)^*)$ que define el sistema lineal completo es la inmersión de Veronese definida en el capítulo 1.

2.2. Planos secantes de curvas

En lo que sigue C es una curva de género g, L es un fibrado lineal en C de grado $d \geq 2g + 1$ y consideramos a C inmersa en $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V^*)$ donde $V = H^0(C, L)$ y $n = d - g$. Como C va estar fija, notaremos a $H^0(C, L)$ con $H^0(L)$. Abusaremos de la notación y llamaremos C también a la imagen de la inmersión cerrada dada por L.

Queremos analizar los espacios lineales en $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(H^0(L)^*)$ que están generados por su intersección con C. Entre otras cosas queremos poder calcular la dimensión de la variedad lineal generada por r puntos distintos de C, o una variedad límite de estas.

Para eso supongamos que $p_1, \ldots, p_r \in C$ son r puntos distintos. Asociado a este conjunto de puntos tenemos el divisor efectivo $D = p_1 + \cdots + p_r$. Definimos entonces la variedad lineal generada por D en $\mathbb{P}^n$, y la notamos $\langle D \rangle$, como la variedad lineal que generan $p_1, \ldots, p_r$.

Querríamos extender la definición a divisores efectivos D con puntos múltiples. Para hacer esto alcanza con recordar que un espacio lineal es la intersección de todos los hiperplanos que lo contienen. Cada hiperplano $H \subset \mathbb{P}(H^0(L))^*)$ da lugar a un divisor efectivo de grado d, la sección hiperplana definida por H, que llamaremos también H.

Definición 2.2. *Sea $C \subset \mathbb{P}^n$ un curva inmersa por el sistema lineal completo asociado a un fibrado lineal L. Sea D un divisor en C. Definimos $\langle D \rangle$ como la intersección de los hiperplanos H tales que su sección hiperplana contiene al divisor D, esto es, tales que $D \leq H$.*

Observación. En el caso en que $D = p_1 + \cdots + p_r$ con los p_i distintos, esta definición coincide con la anterior ya que estamos intersecando los hiperplanos que contienen a estos r puntos y por lo tanto obtenemos la variedad lineal generada por ellos.

Ejemplo 2.3. Si $C = \mathbb{P}^1$ y $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$, $D = m_1\alpha_1 + \cdots + m_k\alpha_k$, y $P \in S_r$ es el polinomio de grado k que tiene como raíces a $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ con multiplicidades $m_1, \ldots, m_k$ respectivamente, entonces $\langle D \rangle$ es Λ_P como se definió en el capítulo 1.

Uno espera que si D tiene grado r, entonces $\langle D\rangle$ tiene dimensión $r-1$, pero esto no siempre es así. El ejemplo más sencillo es considerar $D=H$ una sección hiperplana. En este caso el grado de H es d y si $d>n$ se tiene $\dim\langle H\rangle = n-1 < d-1$.

Ahora mostramos cómo calcular la dimensión de $\langle D\rangle$ y damos una condición suficiente para que ésta sea la esperada.

Proposición 2.4. *Sea D un divisor efectivo en C de grado r. Entonces*

$$\dim\langle D\rangle = n - h^0(L(-D)).$$

En particular, si $r\leq \deg L + 1 - 2g$, se tiene $\dim\langle D\rangle = r-1$, *esto es $\langle D\rangle$ tiene la dimensión esperada.*

Demostración. Por la observación hecha anteriormente tenemos que $\langle D\rangle$ es la intersección de todos los hiperplanos cuyas secciones hiperplanas contienen a D. Pero este conjunto de hiperplanos está en biyección con el espacio $\mathbb{P}(H^0(L(-D)))$ (ver sección anterior). Por lo tanto la dimensión de $\langle D\rangle$ es igual a

$$h^0(L) - h^0(L(-D)) - 1 = n - h^0(L(-D)).$$

Ahora, si $r\leq \deg L+1-2g$, entonces $\deg L(-D)\geq 2g-1$, por lo que $L(-D)$ es un fibrado no especial y por lo tanto por Riemann-Roch se tiene

$$h^0(L(-D)) = 1-g+\deg L(-D) = 1-g+\deg L - r.$$

Con esto

$$\dim\langle D\rangle = 1-g+\deg L - (1-g+\deg L - r) - 1 = r-1$$

como queríamos. □

Observación. El hecho que D tenga la dimensión esperada no implica que la intersección de D con la curva sea exactamente D. La intersección podría contener puntos extra. En ese caso si E es el divisor asociado a la intersección, entonces la dimensión de $\langle E\rangle$ no es la esperada.

Por ejemplo un hiperplano genérico H corta a C en d puntos distintos. Podemos elegir n de ellos que generen H. El espacio lineal generado por estos n puntos corta a la curva en otros $d-n$ puntos (si $d>n$).

En caso que $\deg D = r$ y $\dim\langle D\rangle = r-1$, decimos que $\langle D\rangle$ es un $(r-1)$-plano r-secante.

Ahora veremos cómo se comporta la suma de espacios $\langle D\rangle + \langle E\rangle$ con D, E divisores efectivos (cf. lema 1.9).

Proposición 2.5. *Sean D, E divisores efectivos de grados r, s respectivamente. Entonces*

1. $\langle D\rangle + \langle E\rangle = \langle D + E - D \cap E\rangle$.

2. *Si* $\deg(D + E - D \cap E) \leq \deg L + 1 - 2g$, *entonces*

$$\langle D\rangle \cap \langle E\rangle = \langle D \cap E\rangle\,.$$

Demostración. La primera afirmación es trivial.

Probemos entonces la segunda afirmación.

Sea $k = \deg(D \cap E)$. Usando la primera afirmación junto con la proposición 2.4, se tiene

$$\dim(\langle D\rangle + \langle E\rangle) = r + s - k - 1.$$

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}\dim(\langle D\rangle + \langle E\rangle) &= \dim\langle D\rangle + \dim\langle E\rangle - \dim(\langle D\rangle \cap \langle E\rangle)\\ &= r + s - 2 - \dim(\langle D\rangle \cap \langle E\rangle).\end{aligned}$$

Juntando las dos ecuaciones tenemos

$$\dim(\langle D\rangle \cap \langle E\rangle) = k - 1.$$

Como $\langle D \cap E\rangle \subset \langle D\rangle \cap \langle E\rangle$ y $\dim\langle D \cap E\rangle = k - 1$, se tiene que tener $\langle D\rangle \cap \langle E\rangle = \langle D \cap E\rangle$. □

Como corolario tenemos

Corolario 2.6. *Sea $C \subset \mathbb{P}(H^0(L)^*)$. Sea r tal que $2r \leq \deg L + 1 - 2g$. Sea $x \in \mathbb{P}(H^0(L)^*)$. Si existen dos $(r-1)$-planos r-secantes que contienen a x, entonces x pertenece a un $(r-2)$-plano $(r-1)$-secante.*

Demostración. Sean D, E divisores de grado r tales que $x \in \langle D\rangle \cap \langle E\rangle$. Como $\deg(D + E - D \cap E) \leq \deg D + \deg E = 2r \leq \deg L + 1 - 2g$, debe ser $\langle D\rangle \cap \langle E\rangle = \langle D \cap E\rangle$. Observar que como $x \in \langle D\rangle \cap \langle E\rangle$, tiene que ser $D \cap E \neq 0$ y además $x \in \langle D \cap E\rangle$. Como D y E son distintos, debe ser $\deg(D \cap E) < r$. El plano $\langle D \cap E\rangle$ es el buscado. □

Observación. La cota es óptima, ya que si $g = 1$, $\deg L = 2l$ y $r = l$, hay puntos que pertenecen a una familia unidimensional de $(r-1)$-planos r-secantes que sin embargo no pertenecen a un plano secante de dimensión menor (cf. sección 4.9).

Vamos a mostrar dos maneras más de escribir la definición de $\langle D\rangle$. La primera es
$$x \in \langle D\rangle \iff D \leq (s)_0 \;\forall s \in V_x.$$
Para la segunda recordamos que existe una inclusión natural del espacio $H^0(L(-D))$ en $H^0(L)$
$$i : H^0(L(-D)) \to H^0(L).$$
Tiene sentido entonces definir la restricción del morfismo de evaluación en x a $H^0(L(-D))$. De esta manera reescribimos la definición de $\langle D\rangle$ como
$$x \in \langle D\rangle \iff ev_x|_{H^0(L(-D))} \equiv 0,$$
donde $ev_x : H^0(L) \to \mathbb{C}$ denota la funcional asociada a x.

2.3. Variedades secantes de curvas

En esta sección analizamos las variedades secantes a una curva. Comenzamos dando la definición para variedades en general.

Definición 2.7. *Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva. Definimos la variedad secante de X,* $\mathrm{Sec}(X)$ *como la clausura de la unión de las rectas generadas por dos puntos de X. Esto es,*
$$\mathrm{Sec}(X) = \overline{\bigcup_{x\neq y} \langle x, y\rangle}.$$

Un cálculo elemental de dimensiones muestra que que la dimensión de $\mathrm{Sec}(X)$ es menor o igual que $2\dim(X) + 1$.

Proposición 2.8. *Si $X \subset \mathbb{P}^n$ es una variedad irreducible de dimensión r, entones* $\mathrm{Sec}(X)$ *es una variedad irreducible de dimensión menor o igual que $2r + 1$.*

Demostración. Consideremos el conjunto
$$\Sigma = \overline{\{(x, y, p) \in X \times X \times \mathbb{P}^n : \; x \neq y, \; p \in \langle x, y\rangle\}} \subset X \times X \times \mathbb{P}^n,$$
y sean $\pi_1 : \Sigma \to X \times X$ y $\pi_2 : \Sigma \to \mathbb{P}^n$ las proyecciones. La imagen de π_2 es $\mathrm{Sec}(X)$. Por otro lado π_1 es una aplicación dominante y la fibra de π_1 sobre un punto (x, y), $x \neq y$ es $\langle x, y\rangle = \mathbb{P}^1$. Entonces la dimensión de Σ es $2r+1$ y por lo tanto $\mathrm{Sec}(X)$ es una variedad de dimensión menor o igual que $2r + 1$. $\square$

Observación. Si un punto genérico de $\mathrm{Sec}(X)$ pertenece a un número finito de rectas secantes, entonces tenemos que $\dim \mathrm{Sec}(X) = 2r + 1$. Este es el caso si $X = \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^d$ es la curva de Veronese de grado d.

Antes de seguir con las definiciones presentemos un par de ejemplos de variedades secantes donde no se da la igualdad de las dimensiones.

Ejemplo 2.9. Sea $X \subset \mathbb{P}^8$ la imagen de la aplicación de Segre $\sigma : \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^8$ definida por

$$\sigma((x_0 : x_1 : x_2), (y_0 : y_1 : y_2))) = \begin{pmatrix} x_0y_0 & x_0y_1 & x_0y_2 \\ x_1y_0 & x_1y_1 & x_1y_2 \\ x_2y_0 & x_2y_1 & x_2y_2 \end{pmatrix}$$

Claramente la imagen de σ es la variedad de matrices de rango 1 y es fácil ver que toda matriz de rango 1 es imagen de un único par $(x, y) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$, por lo que X es una variedad de dimensión 4.

Analicemos entonces la variedad secante de X. Consideremos dos matrices de rango 1, A, B. La recta que generan va a estar formada por matrices de la forma $\lambda A + \mu B$, que tienen rango menor o igual que 2. Por otro lado sabemos que toda matriz de rango menor o igual que 2 se escribe como suma de matrices de rango 1. Así deducimos que la variedad secante de X es la variedad de matrices de rango menor o igual que 2. Pero esta variedad está definida por la condición $\det(A) = 0$, esto es, $\mathrm{Sec}(X)$ es una hipersuperficie. Por lo tanto $\dim \mathrm{Sec}(X) = 7 \neq 2 \cdot 4 + 1$.

Ejemplo 2.10. Sea $X \subset \mathbb{P}^5$ la imagen de la aplicación de Veronese $v_2 : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$ definida por

$$v_2(x_0, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0x_1 & x_0x_2 \\ x_1x_0 & x_1^2 & x_1x_2 \\ x_2x_0 & x_2x_1 & x_2^2 \end{pmatrix}$$

Es fácil ver que la imagen de v_2 es la variedad de matrices simétricas de rango 1 y que toda matriz simétrica de rango 1 es imagen por v_2 de un único $x \in \mathbb{P}^2$. Por lo tanto $\dim X = 2$.

Usando el mismo argumento que en caso anterior vemos que toda matriz en la variedad secante de X tiene rango menor o igual que 2. Por otro lado gracias a la Ley de inercia de Sylvester podemos afirmar que toda matriz simétrica de rango 2 es suma de dos matrices simétricas de rango uno, y por lo tanto deducimos que $\mathrm{Sec}(X)$ es la variedad de matrices simétricas de rango menor o igual que 2. Nuevamente $\mathrm{Sec}(X)$ es una hipersuperficie definida por la condición $\det A = 0$, y por lo tanto $\dim \mathrm{Sec}(X) = 4 \neq 2 \cdot 2 + 1$.

Ahora vamos a definir las variedades secantes superiores:

Definición 2.11. *Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ un variedad proyectiva y sea $k \geq 2$. Definimos la variedad k-secante de X, $\mathrm{Sec}^k(X)$, como la clausura de la unión de los $(k-1)$-planos generados por k puntos en X, esto es,*

$$\mathrm{Sec}^k(X) = \overline{\bigcup \langle x_1, \ldots, x_k \rangle},$$

donde $\{x_1, \ldots, x_k\}$ recorre los conjuntos de k puntos de X que generan un $(k-1)$-plano.

Proposición 2.12. *Si $X \subset \mathbb{P}^n$ es una variedad irreducible de dimensión r, entonces $\mathrm{Sec}^k X$ es una variedad irreducible de dimensión menor o igual que $rk + k - 1$.*

Demostración. Similar al caso $k = 2$. □

Observación. Si $X = C$ es una curva inmersa en $\mathbb{P}^n$ por el sistema lineal completo asociado a un fibrado lineal de grado mayor o igual que $k + 2g - 1$, entonces la variedad $\mathrm{Sec}^k(C)$ puede ser definida como

$$\mathrm{Sec}^k(C) = \bigcup \langle D \rangle \tag{2.1}$$

donde D recorre el conjunto de divisores de grado k. En este caso no hace falta clausurar ya que todo límite de $(k-1)$-planos k-secantes es también un $(k-1)$-plano k-secante (pues cada divisor de grado k define un $(k-1)$-plano k-secante a C, cf. proposición 2.4). Entonces $x \in \mathrm{Sec}^k(C)$ si y solo si existe un divisor D de grado k tal que $x \in \langle D \rangle$. Recordar que si $C = \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^d$ es la curva de Veronese de grado d, entonces todas las variedades secantes están definidas como en la ecuación 2.1.

Recordemos que una variedad $X \subset \mathbb{P}^n$ se dice no degenerada si no está contenida en un hiperplano. Queremos mostrar que en el caso en que $X = C \subset \mathbb{P}^n$ es una curva no degenerada, la dimensión de $\mathrm{Sec}^k(C)$ es la esperada. Para eso vamos a usar el lema de Terracini ([28])

Teorema 2.13 (Lema de Terracini)**.** *Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una variedad irreducible. Entonces*

1. *Para cada $x_1, \ldots, x_k \in X$ y para cada $z \in \langle x_1, \ldots, x_k \rangle$,*

$$\langle T_{x_1}X, \ldots, T_{x_k}X \rangle \subseteq T_z(\mathrm{Sec}^k(X));$$

2. *Si la característica del cuerpo es cero, existe un abierto* U *de* $\mathrm{Sec}^k(X)$ *tal que*
$$\langle T_{x_1}X, \dots, T_{x_k}X \rangle = T_z(\mathrm{Sec}^k(X))$$
para cada $z \in U$*,* $x_i \in X$*,* $i = 1, \dots, k$*,* $z \in \langle x_1, \dots, x_k \rangle$*.*

Como consecuencia tenemos

Proposición 2.14. *Sea* $C \subset \mathbb{P}^n$ *una curva irreducible y no degenerada, y sea* $k \geq 2$*. Entonces* $\mathrm{Sec}^k(C)$ *es una variedad irreducible de dimensión* $\min\{2k-1, n\}$*.*

Demostración. Sólo hay que ver que la dimensión es la afirmada. Para eso usamos el Lema de Terracini.

Tenemos que ver que para $p_1, \dots, p_k$ genéricos $\dim \langle T_{p_1}C, \dots, T_{p_k}C \rangle = \min\{2k-1, n\}$.

Primero lo vemos para los valores de k tales que $2k - 1 \leq n$.

Lo hacemos por inducción en $k \geq 2$, y suponemos $n \geq 3$. Para $n = 2$ el resultado es evidente.

Supongamos que $k = 2$. Tenemos que ver que para $p_1, p_2 \in C$ genéricos, $\dim \langle T_{p_1}C, T_{p_2}C \rangle = 3$. Supongamos que esto no es cierto y consideremos el conjunto cerrado

$$\Sigma = \{(p_1, p_2) \in C \times C : \ T_{p_1}C \cap T_{p_2}C \neq \emptyset\} \subset C \times C.$$

Entonces Σ tiene que ser todo $C \times C$, o lo que es lo mismo, dos rectas tangentes cualesquiera se cortan.

Consideremos L una recta tangente fija y consideremos la proyección $\pi_L : \mathbb{P}^n \setminus L \to \mathbb{P}^{n-2}$, donde $\mathbb{P}^{n-2} \subset \mathbb{P}^n$ es disjunto con L. La aplicación π_L restringida a $C \setminus L$ se extiende a una aplicación π definida en todo C. Como cada recta tangente a C corta a L tenemos que el diferencial de π es nulo. Por lo tanto π es constante. Esto quiere decir que C es una curva plana, contenida en el plano generado por L y la imagen de la proyección. Esto es una contradicción ya que la curva era no degenerada.

Supongamos ahora que $k \geq 3$.

Por hipótesis inductiva se pueden elegir $k - 1$ puntos $p_1, \dots, p_{k-1}$ tales que
$$\dim \left\langle T_{p_1}C, \dots, T_{p_{k-1}}C \right\rangle = 2k - 3.$$

Llamemos Λ al $(2k-3)$-plano $\left\langle T_{p_1}C, \dots, T_{p_{k-1}}C \right\rangle$. Razonando como en el caso $k = 1$ si el resultado no es cierto tenemos que para cada $p \in C \setminus \{p_1, \dots, p_{k-1}\}$,

$$\dim \langle T_{p_1}C, \dots, T_{p_{k-1}}C, T_pC \rangle < 2k - 1.$$

Por lo tanto tenemos que para cada $p \neq p_i$ $1 \leq i \leq k-1$, la recta tangente T_pC corta a Λ.

Como en el caso $k = 2$ podemos proyectar desde Λ para obtener un morfismo $\pi : C \to \mathbb{P}n - 2k + 2$ con diferencial nulo. Por lo tanto C está contenida en la variedad lineal generada por Λ y la imagen de la proyección. Esta variedad tiene dimensión $2k-2$ y como $2k-2 < n$, resulta que C está contenida en un hiperplano, lo que contradice el hecho que C es no degenerada.

Si $2k-1 > n$ sólo hay que analizar el caso $n = 2k-2$ y probar que $\mathrm{Sec}^k(C) = \mathbb{P}^n$. Por el caso probado antes se tiene que la variedad secante $\mathrm{Sec}^{k-1}(C)$ es una hipersuperficie. Por lo tanto existen $p_1, \ldots, p_{k-1}$ tales que la variedad lineal generada por $T_{p_1}C, \ldots, T_{p_{k-1}}C$ es un hiperplano. Si no se verifica lo pedido entonces todo punto en C pertenece a este hiperplano. Por lo tanto la variedad $\mathrm{Sec}^k(C)$ es todo el espacio $\mathbb{P}^n$. □

Observación. Si C está inmersa por el sistema lineal completo asociado a un fibrado lineal de grado d, y $d \geq 3g$, entonces todas las variedades secantes de C están definidas como en la ecuación 2.1.

Ahora vamos a definir la variedad de planos secantes no estrictos. Nos inspiraremos en la definición que hicimos para la curva de Veronese. Queremos considerar la clausura de la unión de $(k-1)$-planos k-secantes no estrictos. Pero un tal plano tiene que ser de la forma $\langle D \rangle$ para D un divisor con puntos múltiples. Un tal divisor se escribe como $D = 2p + D'$ donde $\deg D' = \deg D - 2$. Como estamos considerando a C inmersa en $\mathbb{P}^n$ como una curva no singular, entonces la recta $\langle 2p \rangle \subset \mathbb{P}^n$ es la recta tangente a C en p. Definimos entonces

Definición 2.15. *Sea $C \subset \mathbb{P}^n$ una curva no singular. Para $k \geq 2$ definimos la variedad de $(k-1)$-planos k-secantes a C, $\mathrm{Sec}^{k,2}(C)$ como*

$$\mathrm{Sec}^{k,2}(C) = \overline{\bigcup \langle T_p(C), p_1, \ldots, p_{k-2} \rangle},$$

donde $p, p_1, \ldots, p_{k-2}$ recorre todos los conjuntos de $k-1$ puntos de C tales que

$$\dim \langle T_p(C), p_1, \ldots, p_{k-2} \rangle = k - 1.$$

Observación. Si $k = 2$ lo que estamos considerando es la unión de todas las rectas tangentes a C, esto es, la superficie desarrollable tangencial de C, $TC \subset \mathbb{P}^n$.

Observación. Si C está inmersa en $\mathbb{P}^n$ por el sistema lineal completo asociado a un fibrado lineal de grado mayor o igual que $k + 2g - 1$, la variedad

$\mathrm{Sec}^{k,2}(C)$ puede ser dada por la ecuación

$$\mathrm{Sec}^{k,2}(C) = \bigcup \langle D \rangle \tag{2.2}$$

donde D recorre todos los divisores de grado k que tiene puntos múltiples.

Queremos calcular la dimensión de $\mathrm{Sec}^{k,2}(C)$. Para eso necesitaremos describirla de una manera distinta. Recordamos la definición del join de dos variedades $X, Y \subset \mathbb{P}^n$.

Definición 2.16. *Sean $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ dos variedades. Definimos el join de X e Y como*

$$J(X,Y) = \overline{\bigcup_{x,y} \langle x, y \rangle}$$

donde la unión se hace sobre todos los pares $(x,y) \in X \times Y$ tales que $x \neq y$.

Ejemplo 2.17. Con esta definición si $X = Y$ el join de X e Y es la variedad secante de X.

Es fácil ver que $\mathrm{Sec}^{k,2}(C) = J(TX, \mathrm{Sec}^{k-2}(C))$ (donde $\mathrm{Sec}^0(C) = \emptyset$).

Para poder calcular la dimensión de $\mathrm{Sec}^{k,2}(C)$ necesitaremos la siguiente generalización del Lema de Terracini ([29], página 40).

Lema 2.18. *Sean $Y \subset X \subset \mathbb{P}^n$ dos variedades.*

1. *Sean $y \in Y$, $x \in X$, $x \neq y$, $z \in \langle x, y \rangle$. Entonces*

$$\langle T_y Y, T_x X \rangle \subset T_z J(Y, X).$$

2. *Si la característica del cuerpo es cero, entonces para $x \in X$, $y \in Y$, $z \in \langle x, y \rangle$ genéricos tenemos*

$$\langle T_y Y, T_x X \rangle = T_z J(Y, X).$$

Proposición 2.19. *Sea $C \subset \mathbb{P}^n$ una curva irreducible y no degenerada, y sea $k \geq 2$. Entonces $\mathrm{Sec}^{k,2}(C)$ es una variedad irreducible de dimensión $\min\{2k-2, n\}$.*

Demostración. De manera similar a lo hecho para las variedades secantes se ve que $\mathrm{Sec}^{k,2}(C)$ es una variedad de dimensión menor o igual que $2k-2$.

Para ver la igualdad hacemos inducción en $k \geq 2$, el lema 2.18 y lo que sabemos para variedades secantes de curvas. Suponemos primero que $2k - 2 \leq n$.

Para $k = 2$ tenemos que ver que $\dim TC = 2$ pero esto es claro por lo afirmado al definir esta variedad.

Para $k > 2$ tenemos que ver que

$$\dim \left\langle T_z(TC), T_w(\mathrm{Sec}^{k-2}(C)) \right\rangle = 2k - 2.$$

para $z \in TC$ y $w \in \mathrm{Sec}^{k-2}(C)$ genéricos. Pero por el Lema de Terracini esto es lo mismo que probar que para $p_1, \ldots, p_{k-2} \in C$ y $z \in TC$ genéricos tenemos

$$\dim \left\langle T_z(TC), T_{p_1}C, \ldots, T_{p_{k-2}}C \right\rangle = 2k - 2.$$

Por la hipótesis inductiva podemos elegir $z, p_1, \ldots, p_{k-3}$ tales que

$$\dim \left\langle T_z(TC), T_{p_1}C, \ldots, T_{p_{k-3}}C \right\rangle = 2k - 4.$$

Por lo tanto si el resultado no es cierto, entonces para cada $p \in C$ se tiene que la recta tangente T_pC corta a

$$\Lambda = \left\langle T_z(TC), T_{p_1}C, \ldots, T_{p_{k-3}}C \right\rangle.$$

Tal como hicimos en la demostración de la proposición 2.14 podemos considerar la proyección desde Λ, que es un morfismo desde C con diferencial nulo. Por lo tanto C está incluida en la variedad lineal que generan Λ y el punto imagen, que contradice el hecho que C es no degenerada.

Si $2k-2 > n$ alcanza con ver el caso $n = 2k-3$. En ese caso $\mathrm{Sec}^{k-1,2}(C)$ es una hipersuperficie. Por lo tanto para un elemento $z \in \mathrm{Sec}^{k-1,2}(C)$ genérico, $T_z(\mathrm{Sec}^{k-1,2}(C)) = H$ un hiperplano. Entonces tiene que ser para $p \in C$ genérico que $\langle H, p \rangle = \mathbb{P}^n$, pues afirmar lo contrario es decir que $C \subset H$. $\square$

Observación. Si C está inmersa por el sistema lineal completo asociado a un fibrado lineal de grado d, y $d \geq 3g$, entonces todas las variedades $\mathrm{Sec}^{k,2}(C)$ están definidas como en la ecuación 2.2.

Observación. Esta nueva familia de variedades nos permite definir una filtración de $\mathbb{P}^n$ donde cada variedad es una hipersuperficie en la siguiente

$$C \subset \mathrm{Sec}^{2,2}(C) \subset \mathrm{Sec}^2(C) \subset \mathrm{Sec}^{3,2}(C) \subset \mathrm{Sec}^3(C) \subset \cdots \subset \mathbb{P}^n.$$

Lo que vamos a ver es que en algunos casos, los puntos de uno de los estratos que no están en el anterior tienen todos el mismo rango.

2.4. Matrices de multiplicación

Ahora vamos a estudiar las matrices de multiplicación que se obtienen al descomponer a un fibrado L como producto de dos fibrados lineales. Sean entonces L_1 y L_2 fibrados lineales en C tales que $L = L_1 \otimes L_2$. Consideremos el morfismo de multiplicación

$$\mu : H^0(L_1) \otimes H^0(L_2) \to H^0(L).$$

Si $\{e_1, \ldots, e_r\}$ y $\{f_1, \ldots, f_s\}$ son bases de $H^0(L_1)$ y $H^0(L_2)$ respectivamente, consideramos la matriz A definida por $a_{ij} = \mu(e_i \otimes f_j)$. Observemos que los elementos de A son elementos de $H^0(L)$, esto es formas lineales en $\mathbb{P}^n$.

Dado $x \in \mathbb{P}^n$, denotaremos μ_x a la forma bilineal

$$\mu_x : H^0(L_1) \times H^0(L_2) \to \mathbb{C}$$

definida, modulo multiplicación por $\lambda \in \mathbb{C}^*$, como

$$\mu_x(s,t) = \mu(s \otimes t)_x = ev_x(\mu(s \otimes t)).$$

De ahora en más supondremos que $C \subset \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(H^0(L)^*)$, esto es, consideramos a C inmersa en $\mathbb{P}^n$ por el sistema lineal completo asociado a L.

Observación. Si $p \in C$, μ_p es una matriz de rango 1, ya que en un abierto afín U alrededor de p los elementos e_i, f_j y $\mu(e_i \otimes f_j)$ pueden ser identificados con elementos de $\mathcal{O}_C(U)$ y vale que $\mu((e_i) \otimes (f_j))(p) = e_i(p)f_j(p)$. Por lo tanto el menor

$$\begin{pmatrix} \mu(e_i \otimes f_k) & \mu(e_i \otimes f_l) \\ \mu(e_j \otimes f_k) & \mu(e_j \otimes f_l) \end{pmatrix}$$

se anula ya que $\mathcal{O}_C(U)$ es un anillo conmutativo.

La recíproca está dada por el siguiente teorema, que es el resultado principal de [7].

Teorema 2.20 (Einsenbud-Koh-Stillman). *Sea $C \subset \mathbb{P}^n$ una curva inmersa por el sistema lineal completo asociado a un fibrado lineal L y sean L_1, L_2 fibrados lineales tales que $L = L_1 \otimes L_2$. Si* $\deg L_1, \deg L_2 \geq 2g+1$ *y* $\deg L \geq 4g+3$ *entonces*

$$C = \{x \in \mathbb{P}(H^0(L)^*) : \operatorname{rg} \mu_x = 1\}.$$

Es más, se tiene que el ideal de la curva C es el ideal generado por los menores de tamaño dos por dos de la matriz A.

Observación. Una suma de r matrices de rango uno es una matriz de rango menor o igual que r, por lo que si $x \in \mathbb{P}^n$ pertenece a un $(r-1)$-plano r-secante a C, entonces μ_x es una matriz de rango menor o igual que r. Por lo tanto se tiene

$$\operatorname{Sec}^r(C) \subset \{x \in \mathbb{P}^n : \operatorname{rg}(\mu_x) \leq r\}$$

En este caso también tenemos una recíproca dada por el siguiente teorema que es el resultado principal de [23].

Teorema 2.21 (Ravi). *Sea $C \subset \mathbb{P}^n$ una curva inmersa por el sistema lineal completo asociado a un fibrado lineal L y sean L_1, L_2 fibrados lineales tales que $L = L_1 \otimes L_2$. Si $\deg L_1, \deg L_2 \geq 2g + r$, y $\deg L \geq 4g + 2r + 1$. Entonces tenemos*

$$\operatorname{Sec}^r(C) = \{x \in \mathbb{P}^n : \operatorname{rg}(\mu_x) \leq r\}$$

como conjuntos.

Para los valores de r fuera del rango no es fácil caracterizar los conjuntos

$$\{x \in \mathbb{P}^n : \operatorname{rg}(\mu_x) \leq r\}.$$

Pero existe un caso en el que se puede hacer y es al considerar los conjuntos

$$\{x \in \mathbb{P}^n : \operatorname{rg}(\mu_x) \text{ no es máximo.}\}$$

Fijado un $x \in \mathbb{P}^n$ vamos a notar con $W_1(x)$ y $W_2(x)$ a los núcleos de la forma bilineal μ_x, esto es,

$$\begin{aligned} W_1(x) &= \{s \in H^0(L_1) : \mu_x(s,t) = 0 \ \forall\, t \in H^0(L_2)\} \\ W_2(x) &= \{t \in H^0(L_2) : \mu_x(s,t) = 0 \ \forall\, s \in H^0(L_1)\}. \end{aligned}$$

Proposición 2.22. *Sean L, L_1 y L_2 fibrados lineales sobre C tales que $L = L_1 \otimes L_2$.*

1. *Sea $x \in \mathbb{P}(H^0(L)^*)$ tal que $W_1(x) \neq 0$. Entonces existe $s \in W_1(x)$ tal que $x \in \langle (s)_0 \rangle$.*

2. *Supongamos que $h^0(L_1) \leq h^0(L_2)$. Entonces*

$$\left\{x \in \mathbb{P}(H^0(L)^*) : \operatorname{rg} \mu_x < h^0(L_1)\right\} = \bigcup_{s \in H^0(L_1)} \langle (s)_0 \rangle$$

En los dos items si $s \in H^0(L_1)$, $\langle (s)_0 \rangle$ es el subespacio lineal generado por el divisor de ceros de s en $\mathbb{P}(H^0(L)^*)$ (cf. sección 2.2).

Demostración. Probemos la primera afirmación. Sea $s \in W_1(x)$, $s \neq 0$. Entonces $\mu_x(s \otimes H^0(L_2)) = 0$. Sea $(s)_0$ el divisor de ceros de s.

Sea $H \subset \mathbb{P}(H^0(L)^*)$ un hiperplano que contiene a $(s)_0$. Esto es, H es un divisor efectivo en el sistema lineal asociado a L, tal que $H \geq (s)_0$. Por lo tanto $H - (s)_0$ es un divisor efectivo que necesariamente está en el sistema lineal asociado a L_2. Por lo tanto $H - (s)_0$ corresponde a una sección $t \in H^0(L_2)$. Pero como $\mu_x(s \otimes t) = 0$, eso quiere decir que la sección $\mu(s \otimes t)$ se anula en x, o lo que es lo mismo, que x pertenece al hiperplano dado por el divisor de ceros de esta sección. Pero el divisor de ceros de $\mu(s \otimes t)$ es $(s)_0 + (t)_0 = (s)_0 + H - (s)_0 = H$. Por lo tanto $x \in H$.

Lo recién probado prueba también la primera inclusión de la segunda afirmación. Para probar la segunda sea $s \in H^0(L_1)$ y sea $x \in \langle (s)_0 \rangle$. Sea $t \in H^0(L_2)$. El divisor de ceros de $\mu(s \otimes t)$ es $(s)_0 + (t)_0$. Como $x \in \langle (s)_0 + (t)_0 \rangle$, entonces $\mu_x(s \otimes t) = 0$. Por lo tanto $s \in W_1(x)$ y entonces $\operatorname{rg} \mu_x < h^0(L_1)$. □

Observación. En general si $2g + 1 \leq \deg L_1 \leq \deg L_2$, la variedad recién definida tiene codimensión menor o igual que $h^0(L_2) - h^0(L_1) + 1 = \deg L_2 - \deg L_1 + 1$. Por otro lado, como estamos considerando matrices de rango menor o igual que $h^0(L_1) - 1$, los puntos están en la variedad $\operatorname{Sec}^{h^0(L_1)-1}(C)$, que tiene dimensión igual a $2h^0(L_1) - 3 = 2\deg L_1 - 1 - 2g$. Por lo tanto para que $\operatorname{Sec}^{h^0(L_1)-1}(C)$ esté definida por la anulación de los menores maximales tiene que ser

$$\deg L_2 - \deg L_1 + g + 1 \leq \deg L_2 - \deg L_1 + 1,$$

esto es, $g \leq 0$. Por lo tanto los menores maximales definen la variedad secante correspondiente solamente si C es una curva racional.

2.5. Lemas H^0

Vamos a enunciar una serie de lemas que garantizan que los morfismos de multiplicación sean sobreyectivos. Todos estos lemas generalizan el lema 1.17.

En todos estos lemas L, L_1, L_2 son fibrados lineales en C tales que $L = L_1 \otimes L_2$.

Lema 2.23 (Ravi)**.** *Sea $W \subset H^0(L_1)$ un subespacio sin puntos base de codimensión l y supongamos que $\deg A \geq 2g + 1$. Entonces el morfismo de multiplicación*

$$\mu : H^0(L_1) \otimes H^0(L_2) \to H^0(L)$$

restringido a $W \otimes H^0(L_2)$ es sobreyectivo si $\deg L_2 \geq 2g + l + 1$.

Demostración. Ver [23]. $\square$

Lema 2.24 (Eisenbud-Koh-Stillman). *Supongamos que L_1 no tiene puntos base, que $\deg L_2 \geq 2g$ y que $\deg L_1 + \deg L_2 \geq 4g+1$. Entonces el morfismo de multiplicación*

$$\mu : H^0(L_1) \otimes H^0(L_2) \to H^0(L)$$

es sobreyectivo.

Demostración. Ver [7] $\square$

Lema 2.25 (Green). *Sea $W \subset H^0(L_2)$ un sistema lineal sin puntos base. Entonces el morfismo de multiplicación*

$$H^0(L_1) \otimes W \to H^0(L)$$

es sobreyectivo si

$$h^1(L_1 \otimes L_2^{-1}) \leq \dim W - 2.$$

Demostración. Ver [11]. $\square$

Esto lemas los usaremos junto con el siguiente lema

Lema 2.26. *Sean L_1 y L_2 tales que $L_1 \otimes L_2 = L$. Sean $x \in \mathbb{P}(H^0(L)^*)$ y $U \subset W_1(x)$ un subespacio lineal. Supongamos que U tiene puntos base y sea E el base locus de U. Podemos considerar a U como subespacio (ahora sin puntos base) de $H^0(L_1(-E))$ y el morfismo de multiplicación*

$$\mu : H^0(L_1(-E)) \otimes H^0(L_2) \to H^0(L(-E)).$$

Si la restricción de μ a $U \otimes H^0(L_2)$ es sobreyectiva, entonces $x \in \langle E \rangle$.

Demostración. Como $U \subset W_1(x)$, la imagen por μ de $U \otimes H^0(L_2)$ está contenida en el conjunto $H^0(L)_x$ de secciones que se anulan en x. El hecho que μ restringida a $U \otimes H^0(L_2(-E))$ sea sobreyectiva quiere decir que todo hiperplano en $\mathbb{P}^n$ que contiene a $\langle E \rangle$ está en $H^0(L)_x$, esto es contiene a x. Por lo tanto $x \in \langle E \rangle$. $\square$

2.6. Discriminante de un fibrado lineal

Ahora definiremos la hipersuperficie discriminante asociada a un fibrado lineal L en C.

Definición 2.27. *Sea L un fibrado lineal en C. Definimos la variedad discriminate de L, $\Delta_L \subset \mathbb{P}(H^0(L))$ como la variedad de secciones que tienen ceros múltiples, esto es, las secciones $s \in \mathbb{P}(H^0(L))$ tales que si su divisor de ceros es $(s)_0 = \sum_{i=1}^r m_i p_i$, entonces $m_i \geq 2$ para algún i.*

A veces abusaremos de la notación y llamaremos Δ_L al cono afín en $H^0(L)$.

Para esta variedad tenemos la siguiente propiedad

Proposición 2.28. *Si $\deg L \geq 2g+1$ entonces $\Delta_L \subset \mathbb{P}(H^0(L))$ es una hipersuperficie irreducible.*

Demostración. Consideremos la correspondencia

$$\Lambda = \{(s,p) : 2p \leq (s)_0\} \subset \mathbb{P}(H^0(L)) \times C$$

La fibra de la segunda proyección sobre $p \in C$ es el espacio $\mathbb{P}(H^0(L(-2p)))$. Como $\deg L \geq 2g+1$, tenemos que $L(-2p)$ es no especial, por lo que las fibras son todas irreducibles de dimensión $\deg L - 2 - g = h^0(L) - 3$. Por lo tanto Λ es irreducible de dimensión $h^0(L) - 3 + 1$. Como la primera proyección es genéricamente uno a uno (lo es fuera del cerrado F, unión del cerrado de secciones s que verifican $3p \leq (s)_0$ para algún $p \in C$, y del cerrado de secciones s que verifican $2p+2q \leq (s)_0$ para $p, q \in C$), se tiene que Δ_L es una variedad irreducible de dimensión $h^0(L) - 2$, esto es, es una hipersuperficie irreducible en $\mathbb{P}(H^0(L))$. □

Si pensamos en la inmersión que induce L de C en $\mathbb{P}(H^0(L)^*) = \mathbb{P}^n$, entonces podemos pensar a Δ_L como una hipersuperficie del espacio proyectivo dual $(\mathbb{P}^n)^*$. Concretamente Δ_L es el conjunto de hiperplanos que cortan a la curva con multiplicidad mayor que uno en algún punto.

Por último

Proposición 2.29. *Con las mismas hipótesis que en la proposición anterior, se tiene que Δ_L no es un hiperplano.*

Demostración. Si así fuera tendríamos por el Teorema de Bertini ([14], página 179 o [13], página 216) que existe un $p \in C$ que verifica $2p \leq (s)_0$ para toda $s \in \mathbb{P}(H^0(L))$. Pero entonces $\Delta_L \subset \{s \in \mathbb{P}(H^0(L)) : \ 2p \leq (s)_0\}$ que es una variedad lineal de codimensión 2. Esta es la contradicción buscada. □

2.7. Planos osculadores de curvas

En esta sección definimos los planos osculadores de una curva. Esta sección la usaremos solamente en la sección 4.8.

Seguiremos las construcciones y notación del artículo de *Numerical Characters of a Curve in Projective n-Space* de R. Piene ([22])

Definición 2.30. *Sean $C \subset \mathbb{P}^n$ una curva y $p \in C$ un punto. El espacio osculador k-ésimo (o k-ésimo plano osculador) de C en p es el espacio lineal de dimensión k que tiene mayor contacto con C en p. Lo notaremos $Osc_p(C)$.*

Si $t \in \mathcal{O}_{C,p}$ es un parámetro de uniformización, existe una parametrización de C alrededor de p de la forma

$$x_i = t^{l_i+i} + \text{ términos de mayor grado en } t$$

para $i = 0, \ldots, n$ con $0 = l_0 \leq l_1 \leq \cdots \leq l_n$. De esa manera el k-ésimo plano osculador de C en p es el plano de ecuaciones

$$X_{k+1} = \cdots = X_n = 0.$$

El orden de contacto es $l_{k+1} + k + 1$. Para $k = 1$ recuperamos la definición de recta tangente.

Ejemplo 2.31 Curva de Veronese. Si $C = \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^d$ por la aplicación de Veronese de grado d, entonces localmente la inmersión viene dada por $x_i = t^i$. Por lo tanto $0 = l_0 = \cdots = l_d$, y entonces el k-ésimo plano osculador tiene orden de contacto $k+1$ con C en p. Como el k-plano $\langle (k+1)p \rangle$ tiene orden de contacto $k+1$ con C en p, tiene que ser $Osc_p^k(C) = \langle (k+1)p \rangle$.

Observar que entonces si $D = \sum_{i=1}^r m_i p_i$,

$$\langle D \rangle = \langle Osc_p^{m_1-1}(C), \ldots, Osc_p^{m_r-1}(C) \rangle.$$

Ejemplo 2.32 Curva elíptica. Si $C \subset \mathbb{P}^n$ es una curva elíptica inmersa por el sistema lineal completo asociado a un divisor L de grado $n+1$, entonces se tiene que $l_0 = l_1 = \cdots = l_{n-1} = 0$ y $l_n = 0$ o 1. De todos modos para cada $p \in C$ y cada $1 \leq k \leq n-1$, el k-ésimo plano osculador a C en p es $\langle (k+1)p \rangle$.

Si $\phi : C \to \mathbb{P}^n$ es una inmersión cerrada, y $L = \phi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$, los k-planos osculadores de C son las fibras de un fibrado proyectivo que llamaremos fibrado osculador de orden k y notaremos $Osc^k C$.

Primero consideramos el fibrado de partes principales (o jets) de orden k de L, $\mathcal{P}^k(L)$. El fibrado $Osc^k C$ es el fibrado proyectivo asociado a $\mathcal{P}^k(L)$. Llamaremos $p^k : Osc^k C \to C$ a la proyección.

Para cada $k \geq 1$ se tiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \to Sym^k \omega_C^1 \otimes L \to \mathcal{P}^k(L) \to \mathcal{P}^{k-1}(L) \to 0$$

donde $\mathcal{P}^0(L) = L$ y ω_C^1 es el fibrado canónico de C.

Cada suryección $\mathcal{P}^k(L) \to L$ da lugar a una sección del fibrado $Osc^k C$ que corresponde a considerar en $Osc_p^k(C)$ el punto de osculación. Por otro lado la suryección $\mathcal{P}^k(L) \to \mathcal{P}^{k-1}(L)$ da lugar a la inclusión natural de $Osc^{k-1}C$ en $Osc^k C$ (que corresponde al hecho que cada $(k-1)$-plano osculador es un subespacio del k-plano osculador).

El fibrado proyectivo $Osc^k C$ admite una inmersión cerrada en $C \times \mathbb{P}^n$. La imagen de la composición de esta inmersión con la segunda proyección es la k-ésima desarrollable osculatriz, esto es, la unión en $\mathbb{P}^n$ de todos los k-planos osculadores a C.

Necesitaremos un resultado que relaciona las clases de Chern del fibrado L con el hecho que la sucesión exacta que define el fibrado de partes principales se parte (cf. [15])

Teorema 2.33. *Si E es un fibrado indescomponible de rango r en una curva no singular C de género g, entonces la sucesión que define el fibrado de k-partes principales de L se parte si y solo si*

$$2 \cdot c_1(E) = r(k-1) \cdot c_1(T_C).$$

Notar que entonces si $E = L_D$ es el fibrado lineal asociado a un divisor de grado $d > 0$, la ecuación queda

$$2d = (k-1)2(1-g),$$

ya que T_C es el fibrado lineal asociado al divisor $-K$. Tenemos entonces el siguiente corolario

Corolario 2.34. *Sea C un curva de género $g \geq 1$ y sea $L = L_D$ el fibrado lineal asociado a un divisor D de grado positivo. Entonces ninguna de las sucesiones que definen $\mathcal{P}^k(L)$ se parte.*

Capítulo 3

Rango asociado a una curva

3.1. Introducción

En este capítulo establecemos los resultados principales que verifica la función rango asociada a una curva $C \subset \mathbb{P}^n$ de género g y grado d.

Definición 3.1. *Sea $C \subset \mathbb{P}^n$ una curva no singular y no degenerada. Sea $x \in \mathbb{P}^n$. Definimos el rango de x asociado a C, y lo notamos $\operatorname{rg}_C x$ (o simplemente $\operatorname{rg} x$), como el menor entero r tal que x pertenece a un $(r-1)$-plano generado por r elementos distintos de C, esto es, un $(r-1)$-plano r-secante estricto.*

Ejemplo 3.2. Si $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^d$ el espacio proyectivo de formas binarias de grado d y C es la curva de Veronese de formas que son la potencia d-ésima de una forma lineal, recuperamos el rango de formas binarias definido en el primer capítulo.

Observación. Tal como ocurría con la curva de Veronese, si un punto x tiene rango r entonces x pertenece a la variedad $\operatorname{Sec}^r(C)$ y por lo tanto todos los puntos de rango menor o igual que r están contenidos en $\operatorname{Sec}^r(C)$. Del mismo modo no es cierto que si un punto x pertenece a la variedad secante $\operatorname{Sec}^r(C)$ su rango es entonces r, ni siquiera podemos afirmar que su rango es menor o igual a r. Por ejemplo vamos a probar que si n es suficientemente grande, entonces un punto en una recta tangente a C (que no está en la curva) tiene rango $n-g$ y no dos como se hubiera esperado por estar en la variedad $\operatorname{Sec}^2(C)$. Notar que esto generaliza lo hecho en el capítulo 1 ya que en ese caso el género de la curva era cero, y los puntos en una recta tangente a la curva de Veronese de grado n tenían rango n.

Nos gustaría responder las mismas preguntas que planteamos en la introducción de este trabajo.

1. ¿Cuál es el menor entero N tal que todo $x \in \mathbb{P}^n$ tiene rango menor o igual que N?

2. ¿Cuál es el menor entero E tal que un punto genérico $x \in \mathbb{P}^n$ tiene rango menor o igual que E?

3. ¿Dado un entero r tal que $0 < r < E$, cuál es la dimensión de la clausura del conjunto de los puntos de rango menor o igual que r.

4. Dada un punto $x \in \mathbb{P}^n$ arbitrario ¿cuál es su rango y cómo calcularlo?

La primera pregunta la podremos responder para la función rango inducida por una curva C inmersa por un sistema lineal completo de grado $d >> g$. La segunda y tercera pregunta son fáciles de responder, ya que equivalen a calcular la dimensión de las variedades secantes a una curva. La cuarta pregunta la responderemos parcialmente.

Introducimos la siguiente notación

Definición 3.3. *Sea $C \subset \mathbb{P}^n$ y sea $r \in \mathbb{N}$. Definimos*

- $C_r = \{x \in \mathbb{P}^n : \operatorname{rg}(x) = r\}$,
- $C_{\leq r} = \{x \in \mathbb{P}^n : \operatorname{rg}(x) \leq r\}$,
- $C_{\geq r} = \{x \in \mathbb{P}^n : \operatorname{rg}(x) \geq r\}$,
- $(\operatorname{Sec}^r)^\circ(C) = \operatorname{Sec}^r(C) \setminus \operatorname{Sec}^{r-1}(C)$.

Los resultados que vamos a probar los haremos para la inmersión de C en $\mathbb{P}^n$ por el sistema lineal completo asociado a un fibrado lineal L de grado d, de modo que $n = d - g$. Al contrario de lo que ocurría en el caso de la curva de Veronese, no podremos determinar el rango de todos los puntos en $\mathbb{P}^n$, y solamente podremos caracterizar algunos de los conjuntos de puntos de rango constante.

Probaremos los siguientes teoremas:

Teorema 3.4. *Sea $C \subset \mathbb{P}^n$ una curva inmersa por el sistema lineal completo asociado a un fibrado lineal L. Sea $r \geq 2$ tal que $\deg L \geq 10g + 2r - 3$, esto es, tal que $n \geq 9g + 2r - 3$. Entonces se tiene*

1. $(\operatorname{Sec}^r)^\circ(C) = C_r \cup C_{n-g-r+2}$.

2. $C_r = \operatorname{Sec}^r(C) \setminus \operatorname{Sec}^{r,2}(C)$.

3. $C_{n-g-r+2} = \operatorname{Sec}^{r,2}(C) \setminus \operatorname{Sec}^{r-1}(C)$.

Teorema 3.5. *Sea $C \subset \mathbb{P}^n$ una curva inmersa por el sistema lineal completo asociado a un fibrado lineal L. Sea $r \geq 2$ tal que* $\deg L \geq 2r + 4g - 3$*, esto es, tal que $n \geq 2r + 3g - 3$. Entonces se tiene*

1. $(\mathrm{Sec}^r)^\circ(C) \subset C_r \cup C_{n-g-r+2}$.
2. $C_r = \mathrm{Sec}^r(C) \setminus \mathrm{Sec}^{r,2}(C)$.
3. $\mathrm{Sec}^{r,2}(C) \setminus \mathrm{Sec}^{r-1}(C) \subset C_{n-g-r+2}$.

Notar que si estos teoremas son válidos, entonces pueden reescribirse como

Teorema 3.4'. *Sea $C \subset \mathbb{P}^n$ una curva inmersa por el sistema lineal completo asociado a un fibrado lineal L. Sea $r \geq 2$ tal que* $\deg L \geq 10g + 2r - 3$*, esto es, tal que $n \geq 9g + 2r - 3$. Entonces se tiene*

1. $\overline{C}_r \setminus \overline{C}_{r-1} = C_r \cup C_{n-g-r+2}$.
2. $C_r = \overline{C}_r \setminus \overline{C}_{n-g-r+2}$.
3. $C_{n-g-r+2} = \overline{C}_{n-g-r+2} \setminus \overline{C}_{r-1}$.

Teorema 3.5'. *Sea $C \subset \mathbb{P}^n$ una curva inmersa por el sistema lineal completo asociado a un fibrado lineal L. Sea $r \geq 2$ tal que* $\deg L \geq 2r + 4g - 3$*, esto es, tal que $n \geq 2r + 3g - 3$. Entonces se tiene*

1. $\overline{C}_r \setminus \overline{C}_{r-1} \subset C_r \cup C_{n-g-r+2}$.
2. $C_r = \overline{C}_r \setminus \overline{(C_{n-g-r+2} \cap \overline{C}_r)}$.
3. $\overline{C}_{n-g-r+2} \setminus \overline{C}_{r-1} \subset C_{n-g-r+2}$.

Para ver esto observar que el teorema 3.4 afirma que para cada r dentro del rango se tiene que C_r es un abierto en $\mathrm{Sec}^r(C)$ y que $C_{n-g-r+2}$ es un abierto en $\mathrm{Sec}^{r,2}(C)$. Luego sus clausuras son $\mathrm{Sec}^r(C)$ y $\mathrm{Sec}^{r,2}(C)$ respectivamente.

Por el mismo razonamiento, el teorema 3.5 permite deducir los items 1 y 3. Pero como puede haber puntos de rango $n-g-r+2$ fuera de $\mathrm{Sec}^r(C)$, para obtener $\mathrm{Sec}^{r,2}(C)$ hay que clausurar $C_{n-g-r+2} \cap \mathrm{Sec}^r(C)$, esto es, $C_{n-g-r+2} \cap \overline{C}_r$.

Observación. El teorema 3.4 describe los estratos de rango constante para los valores r, tales que

$$2 \leq r \leq \left[\frac{n+1-9g}{4}\right] + 1$$

o

$$n - g - \left[\frac{n+1-9g}{4}\right] + 1 \leq r \leq n - g$$

Por otro lado el teorema 3.5 determina los valores que puede obtener el rango en $(\mathrm{Sec}^r)^\circ(C)$ para $1 \leq r \leq \left[\frac{n+1-3g}{2}\right]$ y determina de manera precisa los estratos de rango constante para los valores r tales que

$$2 \leq r \leq \left[\frac{n+1-3g}{2}\right].$$

En el capítulo 4, donde analizamos la función rango que induce una curva elíptica $C \subset \mathbb{P}^n$, nos será más útil el segundo teorema. La razón es que, fijado L, las restricciones sobre r son menores y por lo tanto los puntos para los cuales el teorema no da información son más que si usáramos el primer teorema.

3.2. Cotas para la función rango

En esta sección daremos una cota para la función rango. Esto lo haremos para cualquier curva inmersa en $\mathbb{P}^n$ (no necesariamente por un sistema lineal completo).

Lema 3.6. *Sean $C \subset \mathbb{P}^n$ una curva no degenerada y $x \in \mathbb{P}^n$. Entonces* $\operatorname{rg} x \leq n+1$

Demostración. Como la curva C es no degenerada entonces se pueden elegir $n+1$ puntos $p_1, \ldots, p_{n+1} \in C$ (distintos dos a dos) tales que el espacio lineal que generan es todo $\mathbb{P}^n$. Todo punto en $\mathbb{P}^n$ es entonces una combinación lineal de estos $n+1$ puntos y por lo tanto tiene rango menor o igual a $n+1$. $\square$

Esta cota se puede mejorar.

Proposición 3.7. *Sea $n \geq 2$ y sean $C \subset \mathbb{P}^n$ una curva no degenerada y $x \in \mathbb{P}^n$. Entonces* $\operatorname{rg} x \leq n$.

Demostración. Vamos a usar el Teorema de Posición General ([2], página 109)

Teorema de Posición General. *Sea $r \geq 2$ y sea $C \subset \mathbb{P}^r$ una curva de grado d, no degenerada, no necesariamente no singular. Entonces la sección hiperplana general de C consiste de d puntos distintos tales que r cualesquiera de ellos están en posición general.*

Consideremos primero el caso $n \geq 3$ y sea $x \in \mathbb{P}^n$, $x \notin C$. Sea $\pi_x : \mathbb{P}^n \setminus \{x\} \to \mathbb{P}^{n-1}$ la proyección desde x. Sea $C' \subset \mathbb{P}^{n-1}$ la imagen de C por la proyección. Entonces C' es una curva no degenerada (ya que C lo es) del mismo grado que C. Aplicamos el lema de posición general a C'. Sean $p'_1, \ldots, p'_d \in C'$ con la propiedad del lema. Podemos suponer que los puntos $p'_1, \ldots, p'_d \in C'$ son puntos no singulares de C' por lo que $\pi_p^{-1}(\{p'_1, \ldots, p'_d\}) \cap C = \{p_1, \ldots, p_d\}$ con $p_1, \ldots, p_d \in C$ distintos entre si. En particular la preimagen del hiperplano generado por $p'_1, \ldots, p'_d$ es un hiperplano que pasa por x y que está generado por $p_1, \ldots, p_d$. Si elegimos $p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}$ que generan el hiperplano, concluimos que x tiene rango menor o igual que n.

Si $n = 2$, toda recta por x corta a la curva C en d puntos contados con multiplicidad. Alguna de estas rectas corta a C en dos puntos distintos. De no ser así todas las rectas que pasan por x y C cortarían a C en un único punto con multiplicidad d. Pero entonces tendríamos que todas las rectas tangentes a C pasan por x. Una curva que verifica esto se llama extraña. En [14], página 312 se muestra que si la característica del cuerpo es cero, entonces la única curva extraña es la recta. Podemos ver esto también si proyectamos desde x a una recta disjunta con x y C. Tenemos entonces un morfismo con diferencial nulo y por lo tanto constante. Esto quiere decir que C es la recta que une x con el punto imagen. Como C es no degenerada no puede ser una recta. Luego alguna recta secante a C pasa por x. $\square$

El último párrafo de la demostración anterior prueba que para una curva $C \subset \mathbb{P}^2$ tenemos lo siguiente:

Proposición 3.8. *Sea $C \subset \mathbb{P}^2$ una curva no degenerada. Entonces la función rango está dada por*

$$r(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in C \\ 2 & si\ x \notin C. \end{cases}$$

Finalmente respondemos las preguntas 2 y 3 hechas al principio del capítulo.

Proposición 3.9. *Sea $C \subset \mathbb{P}^n$ una curva no degenerada. Entonces*

- *El menor entero E tal que un punto genérico $x \in \mathbb{P}^n$ tiene rango E es $E = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$.*
- *Para cada $0 < r < E$, la dimensión de la clausura de del conjunto de puntos de rango menor o igual que r es $2r - 1$.*

Demostración. Alcanza con observar que $\mathrm{Sec}^E(C) = \mathbb{P}^n$ para $E = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ y que para cada $1 \leq r \leq E$ la clausura de los puntos de rango menor o igual que r es $\mathrm{Sec}^r(C)$ (por la definición de $\mathrm{Sec}^r(C)$). Por lo tanto el rango de un punto genérico es menor o igual que E y para cada $0 < r < E$ la dimensión de la clausura de los puntos de rango menor o igual que r es $2r-1$. $\square$

3.3. Caracterización de la curva de Veronese

En esta sección caracterizaremos a la curva de Veronese $v_n(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^n$ en función del rango, para $n \geq 3$. En el primer capítulo vimos que en cada recta tangente a la curva $v_n(\mathbb{P}^1)$ todos los puntos, salvo el de tangencia, tienen rango n. La siguiente proposición prueba que esta propiedad caracteriza a la curva.

Proposición 3.10. *Sea $n \geq 3$. La curva de Veronese $v_n(\mathbb{P}^1)$ es, salvo isomorfismos, la única curva no degenereda y no singular en $\mathbb{P}^n$ tal que todos los puntos en sus rectas tangentes tienen rango n, excepto por el punto de tangencia, que tiene rango 1.*

Necesitaremos el siguiente lema que es consecuencia del Teorema de Posición General.

Lema 3.11. *Sea $C \subset \mathbb{P}^n$ una curva no degenerada (no necesariamente no singular). Entonces para cada $r < n$, la curva C tiene a lo sumo ∞^{r-1} $(r-1)$-planos $(r+1)$-secantes.*

Demostración. Sea M la familia de $(r-1)$-planos $(r+1)$-secantes a C a la que supondremos irreducible (si no consideramos una componente irreducible de dimensión máxima). Haremos inducción descendente.

Supongamos que $r = n-1$ y que la dimensión de M es mayor o igual que $r = n-1$. Consideremos la correspondencia

$$\Gamma = \overline{\{(\Lambda, H) \in M \times (\mathbb{P}^n)^* : \ \Lambda \subset H\}} \subset M \times (\mathbb{P}^n)^*.$$

Las fibras de la primera proyección son todas isomorfas a $\mathbb{P}^1$ y por lo tanto Γ es irreducible de dimensión mayor o igual que n. Pero entonces la imagen de la segunda proyección es todo el espacio $(\mathbb{P}^n)^*$. En consecuencia, ningún hiperplano verifica el Teorema de Posición General, ya que todos contienen un conjunto de n puntos que generan un elemento de M, y por lo tanto no están en posición general.

La recursión es exactamente igual. $\square$

Ahora demostramos la proposición 3.3.

Demostración de la proposición 3.3. Ya fue probado que para la curva racional normal los puntos en rectas tangentes que no son el de tangencia tienen rango n. Tenemos que ver que es la única. Para esto usaremos el hecho conocido que $v_n(\mathbb{P}^1)$ está caracterizada por ser la única curva de grado n en $\mathbb{P}^n$ salvo isomorfismo.

Supongamos entonces que $C \subset \mathbb{P}^n$ es una curva no singular y no degenerada de grado d que no es isomorfa a $v_d(\mathbb{P}^1)$. Esto implica que $d > n$. Vamos a ver que en la recta tangente a C genérica hay un punto distinto del punto de tangencia, que tiene rango menor que n.

Sea entonces $p \in C$ y sea L la recta tangente a C en p. Si L vuelva a cortar a C en un punto q, entonces en L hay un punto de rango $1 < n$ que no es el punto de tangencia como queríamos. Además como L está generada por p y q, cualquier otro punto en L tendrá rango menor o igual que dos. Luego podemos suponer que p es tal que su recta tangente no vuelve a cortar a C. En esta consideración también descartaremos el caso en que la recta L corta a C con multiplicidad mayor que dos ya que hay finitas de estas rectas tangentes.

Primero supondremos que $n \geq 4$. Sea $\pi : \mathbb{P}^n \setminus L \to \mathbb{P}^{n-2}$ la proyección desde L. La aplicación π_L se extiende a una función desde todo C. Llamemos C' a la imagen de C por π_L. La curva C' tiene grado $d - 2 \geq 3$. Por el teorema de posición general, la sección hiperplana genérica H' de C' consiste en $d-2$ puntos distintos $p'_1, \ldots, p'_{d-2}$, tales que $n-2$ cualesquiera de ellos la generan. Es más, podemos suponer que existen $p_1, \ldots, p_{d-2} \in C$ (distintos dos a dos) tales que $\pi_L(p_i) = p'_i$ para $i = 1, \ldots, d-2$, ya que podemos elegir la sección hiperplana genérica de forma que no contenga puntos singulares de C'. También podemos suponer que ninguno de los p_i es p (aquí es donde usamos que L corta a C con multiplicidad exactamente dos en p). Consideremos el hiperplano $H = \pi_L^{-1}(H')$. Notar que $H = \langle 2p + p_1 + \cdots + p_{d-2} \rangle$ y por lo tanto H contiene a L. Sea $\Lambda = \langle p_1, \ldots, p_{d-2} \rangle$. La dimensión de Λ puede ser $n-3$, $n-2$ o $n-1$ ya que su imagen por π_L es una variedad lineal de dimensión $n-3$. Si la dimensión de Λ es $n-2$, la recta L corta a Λ en un punto $x \notin C$. Podemos elegir $n-1$ de los puntos p_i que generen a Λ, con lo cual x tiene rango menor o igual que $n-1$. Si la dimensión de Λ es $n-1$, entonces L está contenida en Λ. Por otro lado Λ está generado por n de los puntos p_i. Luego la variedad generada por $n-1$ cualesquiera de estos n puntos tiene dimensión $n-2$ y tiene que cortar a L en un punto x que tendrá rango menor o igual que $n-1$.

Por lo tanto tenemos que ver que no puede ser que la dimensión de Λ es $n-3$. Como $d > n$, tenemos que $d-2 > n-2$ y entonces Λ es un $(n-3)$-plano secante a C que corta a C en más de $n-2$ puntos. Tenemos entonces que para cada sección hiperplana genérica de C' que verifica todas las condiciones pedidas, se obtiene un $(n-3)$-plano secante a C que corta a C en más de $n-2$ puntos. Pero se tienen a lo sumo ∞^{n-3} de estos planos en una curva no degenerada y hay ∞^{n-2} secciones genéricas de C'. Luego para alguna de las secciones genéricas de C' obtenemos un Λ de dimensión $n-2$ o $n-1$ como queríamos.

Si $n-2=1$, entonces tenemos que estudiar la proyección $\pi_L : \mathbb{P}^3 \setminus \to \mathbb{P}^1$. La imagen de C por π_L tiene que ser todo $\mathbb{P}^1$, ya que de lo contrario sería un punto y por lo tanto C estaría contenida en el plano generado por L y este punto. Como C tiene grado d, entonces la fibra de un punto genérico $q' \in \mathbb{P}^1$ es un hiperplano H en $\mathbb{P}^3$ generado por L y por $d-2$ puntos distintos en C. Si llamamos Λ a la variedad generada por estos $d-2$ puntos podemos aplicar el mismo razonamiento que más arriba. $\square$

3.4. Clasificación por rango

De ahora en más suponemos dado un fibrado lineal L de grado $d \geq 2g+1$, y que C está inmersa en $\mathbb{P}^n$ mediante la aplicación que induce el sistema lineal completo asociado a L. Por lo tanto $n = d-g$ y $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(H^0(L)^*)$.

Trataremos de generalizar las proposiciones que usamos para calcular el rango de formas binarias en el capítulo 1. Lo que haremos es calcular para ciertos valores de r los posibles rangos que puede tener un punto $x \in (\mathrm{Sec}^r)^\circ(C)$, esto es, un punto que pertenece a un $(r-1)$-plano r-secante, pero que no pertenece a un $(r-2)$-plano $(r-1)$-secante.

Recordamos que dada una descomposición del fibrado L como producto $L_1 \otimes L_2$ de dos fibrados lineales teníamos definido un morfismo de multiplicación

$$H^0(L_1) \otimes H^0(L_2) \xrightarrow{\mu} H^0(L),$$

que inducía, para cada $x \in \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(H^0(L)^*)$ una forma bilineal

$$H^0(L_1) \times H^0(L_2) \xrightarrow{\mu_x} \mathbb{C}.$$

Asociada a μ_x tenemos los espacios $W_1(x)$ y $W_2(x)$ que son los núcleos de μ_x a izquierda y derecha respectivamente.

Comenzamos dando una condición necesaria y suficiente para que un punto x tenga rango menor o igual que r, que generaliza la proposición 1.3.

Proposición 3.12. *Sea $x \in \mathbb{P}(H^0(L)^*)$. Entonces $\operatorname{rg} x \leq r$ si y sólo si existen fibrados lineales L_1, L_2 con $\deg L_1 = r$, $\deg L_2 = \deg L - r$ y $L = L_1 \otimes L_2$ tales que $W_1(x) \not\subset \Delta_{L_1}$.*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{P}(H^0(L)^*)$ tal que $\operatorname{rg} x \leq r$. Existen $p_1, \ldots, p_r \in C$ tales que $x \in \langle p_1, \ldots p_r \rangle$. Sean D el divisor $D = \sum_{i=1}^r p_i$, L_1 el fibrado lineal asociado a D, y $L_2 = L_1^{-1} \otimes L$. Sea $s \in H^0(L_1)$ la sección tal que $(s)_0 = D$. Claramente $\mu_x(s \times H^0(L_2)) = 0$, y por lo tanto $s \in W_1(x)$. Como D no tiene puntos múltiples tiene que ser $s \notin \Delta_{L_1}$.

Recíprocamente, sea $s \in W_1(x)$, $s \notin \Delta_{L_1}$. Entonces $(s)_0 = \sum_{i=1}^r p_i$, con los p_i distintos y $r = \deg L_1$. Por lo tanto, por la proposición 2.22, $x \in \langle (s)_0 \rangle = \langle p_1, \ldots, p_r \rangle$, esto es, $\operatorname{rg} x \leq r$. $\square$

Observación. En el último párrafo de la demostración no es necesario que $p_1, \ldots, p_r$ definan un $(r-1)$-plano. Si así no fuera igualmente el rango de x sería menor o igual que r (de hecho es menor).

En las siguientes dos proposiciones tratamos de calcular el rango de los puntos en $(\operatorname{Sec}^r)^\circ(C)$. Como consecuencia demostraremos el Teorema Principal 2.

La primera de las proposiciones es una generalización de la proposición 1.22 del capítulo 1.

Proposición 3.13. *Sea $r \geq 2$ tal que $\deg L \geq 2g + r$ y tal que $2r \leq n = \deg L - g$. Sea $x \in \mathbb{P}(H^0(L)^*)$ un punto tal $x \in (\operatorname{Sec}^r)^\circ(C)$. Entonces $\operatorname{rg}(x) = r$ o $\operatorname{rg} x \geq n - g - r + 2$.*

Demostración. La condición $2r \leq n$ se pide para que $(\operatorname{Sec}^r)^\circ(C)$ no sea vacía. Recordar además que dado que $\deg L \geq r + 2g > r + 2g - 1$, entonces si $x \in \operatorname{Sec}^r(C)$ existe un divisor D de grado r tal que $x \in \langle D \rangle$. Supongamos que el rango de x no es r. Entonces $\operatorname{rg} x > r$ ya que si fuera menor pertenecería la variedad $\operatorname{Sec}^{r-1}(C)$. Esto quiere decir que en el soporte de D hay puntos múltiples y por lo tanto a lo sumo $r-1$ puntos distintos.

Supongamos que $\operatorname{rg} x = k$. Entonces existen $q_1, \ldots q_k \in C$ tales que $x \in \langle q_1, \ldots, q_k \rangle$ y la dimensión de esta variedad lineal es $k-1$. Sea $E = q_1 + \cdots + q_k$. Tiene que ser $\deg(D \cap E) \leq r - 1$, ya que como habíamos dicho antes D tiene a lo sumo $r-1$ puntos distintos en su soporte y E no tiene puntos múltiples.

No puede ser $x \in \langle D \cap E \rangle$ pues entonces x tendría rango menor o igual que $r-1$. Como además $x \in \langle D \rangle \cap \langle E \rangle$, la intersección de $\langle D \rangle$ y $\langle E \rangle$ no está generada por la intersección de sus soportes. Por lo tanto usando la proposición 2.5 tiene que ser

$$\deg D + \deg E - \deg(D \cap E) \geq \deg L + 2 - 2g = n + 2 - g$$

esto es,

$$r + k - \deg(D \cap E) \geq n + 2 - g.$$

Entonces tenemos que

$$\operatorname{rg}(x) = k \geq n + 2 - g - r + \deg(D \cap E) \geq n - g - r + 2,$$

como queríamos. $\square$

Observación. En la conclusión de la proposición no se puede lograr un igual en $\operatorname{rg} x \geq n - g - r + 2$. Por ejemplo supongamos que $g = 1$, $r = 2$ y $\deg L = 2g + r = 4$, esto es, C es una curva elíptica inmersa en $\mathbb{P}^3$ por el sistema lineal completo asociado al fibrado $\mathcal{O}_C(4p_0)$. Entonces un punto x que pertenece a dos rectas tangentes a C tiene rango 3, que es mayor que 2 (cf. sección 4.4). De hecho esta dificultad aparece cada vez que C es una curva elíptica inmersa en $\mathbb{P}^{2l+1}$ por el sistema lineal completo asociado a $L = \mathcal{O}_C((2l + 2)p_0)$. Si $r = l + 1$, entonces existen puntos en $(\operatorname{Sec}^r)^\circ(C)$ que tienen rango $l + 2 > n - g - r + 2 = 2l + 1 - 1 - (l + 1) + 2 = l + 1$ (cf. sección 4.6).

Poniendo mayores restricciones sobre el grado de L obtenemos:

Proposición 3.14. *Sea $r \geq 2$ tal que $\deg L \geq 2r + 4g - 3$ (esto es, tal que $n \geq 2r + 3g - 3$) y sea $x \in \mathbb{P}(H^0(L)^*)$ tal que $x \in (\operatorname{Sec}^r)^\circ(C)$. Entonces $\operatorname{rg} x \leq n - g - r + 2$.*

Demostración. Observar que la condición sobre n garantiza que $n \geq 2r$, de manera que $(\operatorname{Sec}^r)^\circ(C)$ no es vacía (aquí usamos que $g \geq 1$). Como $x \in \operatorname{Sec}^r(C)$ existe un divisor D de grado r tal que $p \in \langle D \rangle$. Sean $L_1 = L_F$ el fibrado lineal asociado al divisor $F = D + K$, donde K denota el divisor canónico de C y L_2 el fibrado lineal $L_2 = L \otimes L_1^{-1}$. El fibrado L_1 es el producto de los fibrados L_D y L_K.

Sea $s \in H^0(L_D)$ la sección tal que $(s)_0 = D$. Sea $\{t_1, \ldots, t_g\} \subset H^0(L_K)$ una base de $H^0(L_K)$. Entonces el conjunto $\{\mu(s \otimes t_1), \ldots, \mu(s \otimes t_g)\} \subset H^0(L_1)$ es linealmente independiente y está incluido en $W_1(x)$. Como la dimensión de $H^0(L_1)$ es $g + r + 1$, se tiene que la codimensión de $W_1(x)$ (y por lo tanto también la de $W_2(x)$) es menor o igual que $r - 1$. En particular el rango de la forma bilineal μ_x es también menor o igual que $r - 1$.

Ahora hacemos una distinción entre los casos $r = 2$ y $r \geq 3$.

Analicemos primero el caso $r = 2$.

El rango de μ_x es entonces 1, y por lo tanto se tiene que $W_2 = W_2(x)$ es un hiperplano en $H^0(L_2)$. Como Δ_{L_2} no contiene hiperplanos tiene que ser $W_2 \not\subset \Delta_{L_2}$. Sea entonces $t \in W_2$ una sección en $H^0(L_2)$ que no pertenece a Δ_{L_2}. La proposición 2.22 afirma que $x \in \langle (t)_0 \rangle$ y como el grado de L_2 es $n - g$, x pertenece a una variedad lineal generada por $n - g$ puntos distintos de C, esto es, $\operatorname{rg} x \leq n - g$.

Consideremos ahora $r \geq 3$. Si $\operatorname{rg} \mu_x < r-1$ y dado que $\deg L_1 = 2g-2+r$ y $\deg L_2 = \deg L - 2g - r + 2 \geq 2g + r - 1$, por el teorema 2.21 (cf. teorema principal en [23]), se tiene que $x \in \operatorname{Sec}^{r-2}(C)$ que contradice la hipótesis.

Por lo tanto tiene que ser $\operatorname{rg} \mu_x = r - 1$.

Supongamos ahora que no se verifica que $\operatorname{rg} x \leq n - g - r + 2$. Como el grado de L_2 es $\deg L - 2g - r + 2 = n - g - r + 2$, por el corolario 3.12 tenemos que $W_2 \subset \Delta_{L_2}$. Por lo tanto, por el lema de Bertini, el subespacio W_2 va a tener puntos base. Más aún, uno de los puntos base es un cero múltiple de todas las secciones en W_2. Por lo tanto si E el base locus de W_2 se tiene $2 \leq \deg E$. Por otro lado podemos considerar a W_2 como un subespacio sin puntos base de $H^0(L_2(-E))$. Esto implica que

$$\dim W_2 \leq h^0(L_2(-E)) \leq \deg(L_2) - \deg(E) + 1 - g.$$

Por lo tanto se tiene

$$\deg(E) \leq \deg(L_2) + 1 - g - \dim W_2 = r - 1.$$

Queremos ver que que la restricción del morfismo de multiplicación

$$H^0(L_1) \otimes H^0(L_2(-E)) \to H^0(L(-E))$$

a $H^0(L_1) \otimes W_2$ es sobreyectiva. Efectivamente en ese caso tendríamos que $H^0(L(-E)) \subset H^0(L)_x$ y por lo tanto $x \in \langle E \rangle$ (cf. lema 2.26). Como $\deg E \leq r-1$ tenemos que $x \in \operatorname{Sec}^{r-1}(C)$, esto contradice la hipótesis $x \notin \operatorname{Sec}^{r-1}(C)$. Por lo tanto se debe tener $\operatorname{rg} x \leq n - g - r + 2$ como queríamos.

Primero consideramos el caso $\deg E < r - 1$. Sea l la codimensión de W_2 en $H^0(L_2(-E))$. Tenemos que $1 \leq l \leq r-1-\deg E$. Vamos a usar el lema de 2.23 (cf. lema en [23]). Para eso tenemos que verificar que $\deg L_1 \geq 2g+l+1$ y que $\deg L_2(-E) \geq 2g + 1$. Como $\deg L_2 \geq 2g + r - 1$ y $\deg E \leq r - 2$, entonces $\deg L_2(-E) \geq 2g+1$. Por otro lado $\deg L_1 = 2g+r-2 \geq 2g+l+1$ (pues $l \leq r - 1 - \deg E \leq r - 3$).

Supongamos ahora que $\deg E = r - 1$. En este caso tenemos $W_2 = H^0(L_2(-E))$. Por lo tanto podemos usar el lema 2.24 (cf. teorema 2 en [7]) ya que $L_1 \geq 2g$ y

$$\deg L_1 + \deg L_2(-E) = \deg L - r + 1 \geq 4g + r - 2 \geq 4g + 1$$

pues estamos suponiendo que $r \geq 3$. □

Observación. En la demostración se muestra que para la elección de L_1 y L_2 el rango de μ_x es $r - 1$. Esto quiere decir que la dimensión de $W_2(x)$ es $n - 2g - 2r + 4$. Si a $\mathbb{P}(W_2(x))$ le quitamos Δ_{L_2}, tenemos entonces un abierto de dimensión $n-2g-2r+3$. Por lo tanto un punto $x \in (\mathrm{Sec}^r)^\circ(C)$ se escribe como suma de $n-g-r+2$ puntos distintos en C de por lo menos $\infty^{n-2g-2r+3}$ formas. Notar que si $g=0$ recuperamos el resultado que habíamos obtenido para la curva de Veronese. En general no sabremos si estas son todas, ya que hay ∞^g maneras de descomponer a L como producto de L_1 y L_2 de grados $2g-2+r$ y $n-g-r+2$ y para alguna de estas formas podría ocurrir que $W_2(x) \not\subset \Delta_{L_2}$.

Observación. La cota sobre el grado de L es necesaria. Por ejemplo, si $g=1$, y $\deg L = 2r < 2r+4g-3 = 2r+1$, entonces existen puntos $x \in (\mathrm{Sec}^r)^\circ(C)$ tales que $\mathrm{rg}\, x = r+1 > n-g-r+2 = 2r-1-1-r+2 = r$. (cf. sección 4.6).

Ahora demostraremos el Teorema 3.5.

Demostración del Teorema 3.5. Sea $x \in C_r$, esto es $\mathrm{rg}\, x = r$. Entonces existe un divisor D de grado r, sin puntos múltiples, tal que $x \in \langle D \rangle$. Esto prueba que $x \in \mathrm{Sec}^r(C)$. Queremos ver que $x \notin \mathrm{Sec}^{r,2}(C)$. Si así fuera entonces existiría un divisor E de grado r con puntos múltiples tal que $x \in \langle E \rangle$. Como $\deg D + \deg E \leq \deg L + 1 - 2g$, por el corolario 2.6 tiene que ser $x \in \langle D \cap E \rangle$. Como $D \neq E$, tiene que ser $\deg D \cap E < \deg D$. Pero entonces x pertenece a un plano generado por a lo sumo $r-1$ puntos distintos, esto es, $\mathrm{rg}\, x < r$, que contradice la hipótesis. Por lo tanto $x \in \mathrm{Sec}^r(C) \setminus \mathrm{Sec}^{r,2}(C)$.

Supongamos ahora que $x \in \mathrm{Sec}^r(C) \setminus \mathrm{Sec}^{r,2}(C)$. Entonces existe un divisor D de grado r sin puntos múltiples tal que $x \in \langle D \rangle$. Por lo tanto el rango de x es menor o igual que r. Si tuviera rango menor que r entonces $x \in \mathrm{Sec}^{r-1}(C)$. Pero como $\mathrm{Sec}^{r-1}(C) \subset \mathrm{Sec}^{r,2}(C)$, esto no puede ser. Por lo tanto $\mathrm{rg}\, x = r$.

Veamos ahora la segunda parte del teorema. Sea entonces $x \in \mathrm{Sec}^{r,2}(C) \setminus \mathrm{Sec}^{r-1}(C)$. Esto quiere decir que existe un divisor D de grado r tal que $x \in \langle D \rangle$, y D tiene puntos múltiples. La proposición 3.13 dice que el rango de x es r o mayor o igual que $n-g-r+2$. Si el rango de x es r, entonces existe un divisor E de grado r sin puntos múltiples tal que $x \in \langle E \rangle$. Razonando como más arriba tenemos que $x \in \mathrm{Sec}^{r-1}(C)$ que contradice la hipótesis. Entonces $\mathrm{rg}\, x \geq n-g-r+2$. Usando la proposición 3.14 tenemos la otra desigualdad. □

El Teorema que acabamos de probar puede reescribirse de la siguiente manera.

Corolario 3.15. *Sea $r \geq 2$ tal que $\deg L \geq 2r+4g-3$, esto es, tal que $n \geq 2r+3g-3$, entonces se tiene*

$$\mathrm{Sec}^r(C) \subset C_{\leq r} \cup (C_{\geq n-g-r+2} \cap C_{\leq n-g})$$

Demostración. Hacemos inducción en r. Para $r = 2$ hay que ver que

$$\mathrm{Sec}^2(C) \subset C_2 \cup (C_{\geq n-g} \cap C_{\leq n-g}).$$

Escribiendo

$$\mathrm{Sec}^2(C) = C \cup (\mathrm{Sec}^2)^\circ(C)$$

y usando el teorema 3.5, los puntos en $\mathrm{Sec}^2(C)$ tienen rango 1, 2 o $n - g$.

Si $r > 2$ escribimos

$$\mathrm{Sec}^r(C) = \mathrm{Sec}^{r-1}(C) \cup (\mathrm{Sec}^r)^\circ(C).$$

Usando el teorema 3.5 y la hipótesis inductiva obtenemos lo que queremos. □

Para demostrar el Teorema 3.4 necesitamos demostrar la siguiente propiedad que es análoga a la proposición 1.25 del capítulo 1.

Proposición 3.16. *Sea* $r \geq 1$ *tal que* $\deg L \geq 2r + 10g - 3$*, esto es, tal que* $n \geq 2r + 9g - 3$*. Sea* $x \in \mathbb{P}(H^0(L)^*)$ *tal que* $\mathrm{rg}\, x \geq n - g - r + 2$*. Entonces*

1. *Si* $r = 1$*, tenemos una contradicción. Esto es, no hay puntos* x *tales que* $\mathrm{rg}\, x \geq n - g + 1$*.*
2. *Si* $r \geq 2$*,* $x \in \mathrm{Sec}^r(C)$*.*

Demostración. Lo que vamos a hacer es mostrar por casos que si $\mathrm{rg}\, x \geq n - g - r + 2$, entonces x pertenece a ciertas variedades $\mathrm{Sec}^l(C)$, con l en un conjunto finito de índices. Luego mostraremos que esto implica lo que queremos.

Elijamos L_1, L_2 fibrados lineales de grados $2g+r-1$ y $\deg L - 2g - r + 1 = n - g - r + 1$ respectivamente tales que $L = L_1 \otimes L_2$. Consideremos la forma bilineal μ_x. Tenemos que $1 \leq \mathrm{rg}\, \mu_x \leq g + r = h^0(L_1)$. Haremos un análisis según el rango de μ_x.

1. Si el rango de μ_x es menor que $g+r$, entonces existe $s \in H^0(L_1)$ tal que $s \in W_1(x)$. Por la proposición 2.22 tenemos que $p \in \langle D \rangle$, donde $D = (s)_0$ es el divisor de ceros de s. Esto quiere decir que $x \in \mathrm{Sec}^{2g+r-1}(C)$. Entonces el primer valor l encontrado es $2g + r - 1$.

2. Supongamos ahora que $\mathrm{rg}\, \mu_x = g + r$. Como el rango de x es mayor que $n - g - r + 1 = \deg L_2$ se verifica $W_2 = W_2(x) \subset \Delta_{L_2}$. Por lo tanto W_2 tiene puntos base. Sea E el base locus. Haciendo el mismo análisis que en la demostración de la proposición 3.14 tenemos que $2 \leq \deg E \leq g + r$ y podemos considerar a W_2 como un subespacio, sin puntos base, de $H^0(L_2(-E))$. Recordar que entonces la codimensión de W_2 en $H^0(L_2(-E))$ es $g + r - \deg(E)$.

a) Si $\deg E = g+r$, tenemos que $W_2 = H^0(L_2(-E))$. Como $\deg L_1 \geq 2g$ y $\deg L_1 + \deg L_2(-E) = \deg L - g - r \geq 9g + r - 3 \geq 4g + 3$ podemos usar el lema 2.24 (cf. teorema 2 en [7]) y deducir que

$$H^0(L_1) \otimes W_2 \to H^0(L(-E))$$

es suryectiva. Por lo tanto $x \in \langle E \rangle$. Pero entonces $x \in \mathrm{Sec}^{g+r}(C)$ y $g + r$ es el segundo valor de l encontrado.

b) Si $k = \deg E < g+r$, consideramos la restricción de μ a $H^0(L_1) \otimes W_2$

$$H^0(L_1) \otimes W_2 \to H^0(L(-E)).$$

1) Si $k \geq g + 2$, la codimensión de W_2 en $H^0(L(-E))$ es menor o igual que $r - 2$ (notar que no puede ser ni $r = 1$ ni $r = 2$). Por lo tanto estamos en las hipótesis del lema 2.23 (cf. lema en [23]) con lo que la restricción de μ_x es sobreyectiva. Entonces $x \in \langle E \rangle$, y como $\deg E \leq g + r - 1$ tiene que ser $x \in \mathrm{Sec}^{g+r-1}(C)$. Así $g + r - 1$ es el tercer valor de l encontrado.

2) Nos queda entonces por analizar el caso $2 \leq k \leq g + 1$. Como la codimensión de W_2 en $H^0(L_2(-E))$ es $g + r - k < g + r$, el rango de

$$\mu_x : H^0(L_1) \otimes H^0(L_2(-E)) \to \mathbb{C}$$

no es máximo.
Si consideramos el morfismo de proyección

$$\pi_E : \mathbb{P}(H^0(L)^*) \setminus \langle E \rangle \to \mathbb{P}(H^0(L(-E))^*)$$

el hecho que μ_x no tenga rango máximo implica que existe $s \in W_1(x)$ tal que $\pi_E(x) \in \langle (s)_0 \rangle \subset \mathbb{P}(H^0(L(-E))^*)$ (proposición 3.12). Por lo tanto

$$x \in \langle E \rangle + \langle (s)_0 \rangle \subset \langle E + (s)_0 \rangle \subset \mathbb{P}(H^0(L)^*).$$

Como el grado de E es a lo sumo $g + 1$ y el grado de $(s)_0$ es $2g + r - 1$, el grado de $E + (s)_0$ es a lo sumo $3g + r$ y por lo tanto $x \in \mathrm{Sec}^{3g+r}(C)$. Entonces $3g + r$ es el cuarto valor de l encontrado.

Si $r = 1$, entonces no se da la posibilidad 2.b)1), con lo cual tenemos tres valores de l: $2g - 1$ y g y $3g$. Como el mayor de los valores es $3g$ concluimos que $x \in \mathrm{Sec}^{3g}(C)$. Pero entonces usando el corolario 3.15, debe ser $1 \leq \mathrm{rg}\, x \leq$

$3g+1$ o $n-g-3g+2 \leq \operatorname{rg} x \leq n-g$, que contradice la hipótesis. Luego no hay puntos con rango mayor que $n-g$.

Si $r \geq 3$ el menor valor de l encontrado es $g+r-1$. Si se da ese caso y $g=1$ entonces $x \in \operatorname{Sec}^r(C)$ como queremos.

En cualquier otro caso se tiene $r < l$. Supongamos que $x \notin \operatorname{Sec}^r(C)$ y sea k el menor entero tal que $x \in \operatorname{Sec}^k(C)$. Se tiene $r < k \leq l \leq 3g+r$. Como $x \in (\operatorname{Sec}^k)^\circ(C)$ por el Teorema 3.5 tiene que ser $\operatorname{rg} x = k$ o $\operatorname{rg} x = n-g-k+2$.

Si fuese $\operatorname{rg} x = k$, como $\deg L > 2r-2+5g$ se tiene

$$\operatorname{rg} x = k \leq 3g+r < n-g-r+2.$$

Por otro lado si fuese $\operatorname{rg} x = n-g-k+2$, como $r < k$ se tiene

$$\operatorname{rg} x = n-g-k+2 < n-g-r+2.$$

En cualquiera de los dos casos se contradice la hipótesis sobre $\operatorname{rg} x$. Esto proviene de suponer que $x \notin \operatorname{Sec}^r(C)$. $\square$

El caso $r=1$ de la proposición anterior puede reescribirse como el siguiente corolario que mejora la cota para la función rango de manera óptima.

Proposición 3.17. *Sea $C \subset \mathbb{P}^n$ una curva inmersa por el sistema lineal completo asociado a un fibrado lineal L. Si $\deg L \geq 10g-1$, esto es, $n \geq 9g-1$, entonces el menor r tal que todo punto en $\mathbb{P}(H^0(L)^*)$ tiene rango menor o igual que r es $n-g$.*

Demostración. La cota es el caso $r=1$ de la proposición 3.16. Para probar que $n-g$ es el mínimo alcanza con mostrar que hay puntos que tienen rango $n-g$. Pero el Teorema 3.5 afirma que un punto en una recta tangente que no es el punto de tangencia tiene rango $n-g$. $\square$

Observación. Fijemos n. Si $C \subset \mathbb{P}^n$ está inmersa por el sistema lineal completo asociado a un fibrado lineal de grado $d = n+g$, entonces la curva C tiene grado d. Luego el corolario dice que si el grado de C aumenta, entonces baja la cantidad de puntos en C que necesito para escribir a todo punto como suma de puntos de C. Coloquialmente podemos decir que las curvas están más enrolladas o que dan más vueltas a medida que aumentan su grado.

Ahora demostramos el Teorema 3.4.

Demostración del Teorema 3.4. Lo único que hay que probar es que si $\operatorname{rg} x = n-g-r+2$, entonces $x \in \operatorname{Sec}^{r,2}(C) \setminus \operatorname{Sec}^{r-1}(C)$. El corolario 3.15 prueba que $x \notin \operatorname{Sec}^{r-1}(C)$. La proposición 3.16 prueba que $x \in \operatorname{Sec}^r(C)$. Como $\operatorname{rg} x \neq r$, tiene que ser entonces $x \in \operatorname{Sec}^{r,2}(C)$. $\square$

Analicemos ahora para cada valor r de rango que tenemos caracterizado, de cuántas maneras distintas puede un elemento x de rango r ser escrito como suma de r elementos de C.

Comencemos con r tal que

$$2 \leq r \leq \left[\frac{n+1-9g}{4}\right] + 1.$$

Sabemos que si $\operatorname{rg} x = r$, entonces existe un divisor D de grado r sin puntos múltiples tal que $x \in \langle D \rangle$. También vimos que si x pertenece a otro $(r-1)$-plano r-secante, entonces pertenece a un plano secante de dimensión menor. Luego x se escribe de manera única (salvo múltiplos) como suma de r elementos de C.

Si por otro lado

$$n - g - \left[\frac{n+1-9g}{4}\right] + 1 \leq r \leq n - g$$

sabemos que existe un divisor D de grado $n-g-r+2$ tal que $x \in \langle D \rangle$ y D tiene puntos múltiples. Para este caso también vimos que D es único. En la observación posterior a la proposición 3.14 vimos que para D con puntos múltiples, x se escribe como suma de r puntos de C de por lo menos ∞^{2r-n-g} maneras. En el capítulo 4 veremos que si $g = 1$, hay exactamene ∞^{2r-n-1} formas.

Capítulo 4

Curvas elípticas

4.1. Introducción

En este capítulo vamos a aplicar los resultados obtenidos para curvas generales al caso de curvas elípticas, esto es de curvas de género 1. En este caso todo fibrado lineal L de grado $d \geq 3$ induce una inmersión

$$C \to \mathbb{P}(H^0(L)^*).$$

El Teorema 3.5 se traduce en este caso como

Teorema 3.5($g = 1$). *Sea $C \subset \mathbb{P}^n$ una curva elíptica inmersa por un fibrado L de grado $d = n + 1$. Sea $r \geq 2$ tal que $n + 1 \geq 2r + 1$, esto es $n \geq 2r$. Entonces*

1. $(\mathrm{Sec}^r)^\circ(C) \subset C_r \cup C_{n-r+1}$.
2. $C_r = \mathrm{Sec}^r(C) \setminus \mathrm{Sec}^{r,2}(C)$.
3. $\mathrm{Sec}^{r,2}(C) \setminus \mathrm{Sec}^{r-1}(C) \subset C_{n-r+1}$.

Este teorema nos permite calcular el rango de casi todos los puntos de $\mathbb{P}^n$. Concretamente:

- Si $n = 2l$, entonces el teorema clasifica los puntos en $\mathrm{Sec}^l(C)$, y deja sin clasificar los puntos en $\mathbb{P}^n \setminus \mathrm{Sec}^l(C)$.
- Si $n = 2l + 1$, entonces el teorema clasifica los puntos en $\mathrm{Sec}^l(C)$, y deja sin clasificar los puntos en $\mathbb{P}^n \setminus \mathrm{Sec}^l(C)$.

Nuestro objetivo es ver qué podemos afirmar de los puntos sin clasificar. Observar que no enunciamos el Teorema 3.4 aplicado al caso de curvas elípticas. La razón es que el resultado que probaremos va a ser mejor. En este sentido como las cotas sobre r son menos restrictivas en el Teorema 3.5, es más útil.

Como primera medida, como en ambos casos se tiene que $\mathbb{P}^n = \mathrm{Sec}^{l+1}(C)$, los puntos genéricos en los conjuntos $\mathbb{P}^n \setminus \mathrm{Sec}^l(C)$ tienen rango $l+1$. Lo que falta determinar es el rango de los puntos en $\mathbb{P}^n \setminus \mathrm{Sec}^l(C)$ que no tienen rango $l+1$ (si es que hay).

En este sentido probaremos lo siguiente

1. Si $n = 2l$, todo punto $x \in \mathbb{P}^n \setminus \mathrm{Sec}^l(C)$ tiene rango $l+1$.

2. Si $d = 2l+1$, los puntos en $\mathbb{P}^n \setminus \mathrm{Sec}^l(C)$ tienen rango $l+1$ o $l+2$.

La primera afirmación se prueba en el Teorema 4.20. La segunda afirmación se prueba en el Teorema 4.9, donde además se caracterizan los puntos en $\mathbb{P}^n \setminus \mathrm{Sec}^l(C)$ que tienen rango $l+2$.

Antes de comenzar mostraremos que en el caso de curvas elípticas podemos caracterizar de cuántas maneras es posible escribir a un punto de rango r como suma de r puntos en la curva.

Proposición 4.1. *Sea $C \subset \mathbb{P}^n$ una curva elíptica inmersa por el sistema lineal completo asociado a un fibrado lineal de grado $d = n+1$. Sea $r \geq 2$ tal que $2r \leq n$ y sea $x \in (\mathrm{Sec}^r)^\circ(C)$.*

1. *Si $\mathrm{rg}\, x = r$, entonces x se escribe de manera única como suma de r puntos de C.*

2. *Si $\mathrm{rg}\, x = n-r+1$, entonces x se escribe como suma de $n-r+1$ puntos de C de ∞^{n+1-2r} formas distintas.*

Demostración. Sea $r \geq 2$ tal que $2r \leq n$ y sea $x \in (\mathrm{Sec}^r)^\circ(C)$. Si x tiene rango r, existe un único $(r-1)$-plano r-secante estricto que lo contiene. Luego en este caso la expresión es única. Para $x \in (\mathrm{Sec}^r)^\circ C$ que no tiene rango r, esto es, que tiene rango $n-r+1$, la situación es la siguiente. Sabemos que existe un único divisor D de grado r tal que $x \in \langle D \rangle$ y este tiene puntos múltiples. Consideramos L_1 el fibrado asociado a D y $L_2 = L \otimes L_1^{-1}$. Como $K = 0$ en una curva elíptica, esta elección de L_1 y L_2 es la que se hace en la demostración de la proposición 3.14 y para esta elección $W_2(x) \subset H^0(L_2)$ no está contenido en Δ_{L_2}. En la observación que se hace luego de esta proposición se usa este hecho para mostrar que hay por lo menos ∞^{n+1-2r} formas de escribir a x como suma de $n-r+1$ puntos de C. Veamos ahora que el hecho que C es una curva elíptica permite mostrar que estas son todas. Para cualquier otra elección de L_1 y L_2 no puede ser $\operatorname{rg}\mu_x \leq r-1$ pues entonces $x \in \langle (s)_0 \rangle$ para $s \in W_1(x)$. Si $E = (s)_0$, entonces x pertenece a dos $(r-1)$-planos r-secantes a C que es una contradicción. Luego $\operatorname{rg}\mu_x = r$ y por lo tanto $W_2(x)$ tiene codimensión r. Pero $W_2(x)$ contiene al subespacio $U = H^0(L_2(-D))$ que también tiene codimensión r, y por lo tanto $W_2(x) = H^0(L_2(-D))$. Esto quiere decir que todos los $(n-r)$-planos $(n-r+1)$-secantes que contienen a x y que pertenecen al sistema lineal $H^0(L_2)$ tienen puntos múltiples, ya que todos contienen a $\langle D \rangle$. Luego la única elección de L_1 y L_2 que nos da una forma de escribir a x como suma de $n-r+1$ puntos distintos de C es $L_1 = L_D$ y $L_2 = L \otimes L_1^{-1}$. □

4.2. Preliminares

De ahora en más C denotará a una curva elíptica. Vamos a fijar un punto $p_0 \in C$ y vamos a suponer que el fibrado L es el fibrado asociado al divisor $(n+1)p_0$. A L también lo notaremos $\mathcal{O}_C((n+1)p_0)$.

En este caso podemos dar bases de los espacios $H^0(\mathcal{O}_C(rp_0))$ para cada $r \geq 0$. Más precisamente, podemos elegir t, x, y tales que

$$\bigoplus_{r\geq 0} H^0(\mathcal{O}_C(rp_0)) \simeq \mathbb{C}[t,x,y]/(y^2 - x(x-t^2)(x-\lambda t))$$

donde $\deg t = 1$, $\deg x = 2$, $\deg y = 3$ y $\lambda \neq 0, 1$ (cf. [14], página 336 y [7]).

Para cada $r \geq 0$ elegimos como base para $H^0(\mathcal{O}_C(rp_0))$ a

$$\left\{ x_i = x^i t^{n-2i} / 0 \leq i \leq \frac{r}{2} \right\} \cup \left\{ y_i = yx^j t^{n-3-2j} / 0 \leq j \leq \frac{n-3}{2} \right\}$$

Si escribimos $x(x-t^2)(x-\lambda t)$ como

$$x^3 + c_2 x^2 t^2 + c_1 x t^4$$

tenemos que

$$\left(yx^j t^{a-3-2j}\right)\left(yx^{j'} t^{b-3-2j'}\right) = x^{j+j'} t^{a+b-2(3+j+j')} \left(x^3 + c_2 x^2 t^2 + c_1 x t^4\right).$$

Por lo tanto respecto a estas bases tenemos que la matriz del morfismo de multiplicación

$$H^0(\mathcal{O}_C(ap_0) \otimes H^0(\mathcal{O}_C(bp_0)) \to H^0(\mathcal{O}_C((a+b)p_0))$$

es

$$A(\mathcal{O}_C(ap_0), \mathcal{O}_C(bp_0)) = \begin{pmatrix} (x_{i+i'}) & (y_{i+j'}) \\ (y_{j+i'}) & (x_{j+j'+3} + c_2 x_{j+j'+2} + c_1 x_{j+j'+1}) \end{pmatrix}$$

donde $0 \leq i \leq [a/2]$, $0 \leq j \leq [(a-3)/2]$, $0 \leq i' \leq [b/2]$ y $0 \leq j' \leq [(b-3)/2]$.

Observación. Para esta elección en particular de fibrados tendremos que el ideal de la curva está generado por los menores de tamaño 2×2 de la matriz A si $a, b \geq 3$ y $a + b \geq 7$ (Teorema principal en [7], cf. teorema 2.20).

Por otro lado si $r \geq 2$, los menores de tamaño $(r+1) \times (r+1)$ determinaran a la variedad $\mathrm{Sec}^r(C)$ si $a, b \geq r + 2$, y $a + b \geq 5 + 2r$ (Teorema en [23], cf. teorema 2.21).

Ahora enunciaremos dos resultados de T. Fisher([8]) que generalizan este último resultado.

El primer Teorema da condiciones para que el ideal de una variedad secante esté generado por los menores del tamaño correcto de una matriz de formas lineales.

Teorema 4.2 (Fisher)**.** *Sea $C \subset \mathbb{P}(H^0(L)^*)$ una curva elíptica inmersa por el sistema lineal completo asociado a L. Sea $r \geq 1$ tal que $n \geq 2r$ y sean L_1 y L_2 tales que $L = L_1 \otimes L_2$. Sea A la matriz de multiplicación asociada al morfismo*

$$\mu : H^0(L_1) \otimes H^0(L_2) \to H^0(L).$$

Entonces el ideal de la variedad $\mathrm{Sec}^r(C)$ es el ideal generado por los menores de tamaño $(r + 1) \times (r + 1)$ de la matriz A si y solo si

1. $\deg L_1, \deg L_2 \geq r + 2$ *y*

2. si $\deg L_1 = \deg L_2 = r + 2$*, entonces* $L_1 \not\simeq L_2$*.*

Notar que este Teorema representa una mejora respecto del resultado principal de [23] (cf. teorema 2.21) en dos aspectos. El primero es que se muestra que el ideal de las variedades secantes está generado por los menores. El segundo es que se mejoran las cotas de r. Se permite que $\deg L = 2r + 4$, con la salvedad que L_1 y L_2 no sean isomorfos (cf. sección 4.9 más adelante).

Damos otro resultado que necesitaremos. En este caso imponiendo menos condiciones tenemos que algunas variedades secantes están definidas por la anulación de los menores de dos matrices de formas lineales.

Lema 4.3 (Fisher)**.** *Sea $C \subset \mathbb{P}(H^0(L)^*)$ una curva elíptica inmersa por el sistema lineal completo asociado a L. Sea $r \geq 1$ tal que $n \geq 2r+1$. Entonces el ideal de $\mathrm{Sec}^r(C)$ está generado por los menores de tamaño $(r+1) \times (r+1)$ de las matrices A y B, asociadas a la multiplicación definida por los pares L_1, L_2 y L_1', L_2' donde $L_1 \not\simeq L_1'$, $L_1 \not\simeq L_2'$, y $\deg L_i, \deg L_i' \geq r + 2$.*

Ejemplo 4.4. Si $n = 2r+1$, entonces se puede aplicar el lema a $\mathrm{Sec}^r(C)$. Sin embargo no podíamos aplicar el Teorema 4.2. En este caso concreto $\mathrm{Sec}^r(C)$ es la intersección completa de dos hipersuperficies determinantales. Si $r = 1$

y $n = 3$, obtenemos el hecho conocido que un curva elíptica $C \subset \mathbb{P}^3$ de grado 4 es la intersección completa de dos cuádricas.

También nos será útil el hecho que para una curva elíptica es posible parametrizar el espacio de divisores de grado d módulo la relación de equivalencia de divisores por la misma curva C.

La aplicación se define fijando un punto base p_0. A cada $p \in C$ le asignamos la clase del divisor $(d-1)p_0+p$. Es claro que si $(d-1)p_0+p \sim (d-1)p_0+p'$, entonces $p \sim p'$. Pero esto ocurre solo en la curva racional. Entonces la aplicación es inyectiva.

Para ver que es sobreyectiva alcanza con hacer el caso $d = 0$. Hay que ver que cada divisor D de grado 0 es linealmente equivalente a $p - p_0$ para $p \in C$. Pero por Riemann-Roch todo divisor de grado ≥ 1 es equivalente a uno efectivo. Por lo tanto $D + p_0 \sim p$ para algún p. Si ahora $d \geq 1$, lo que hacemos es considerar el divisor de grado cero $D - dp_0$. Sabemos por el caso $d = 0$ que $D - dp_0 \sim p - p_0$, pero entonces $D \sim p + (d-1)p_0$ como queríamos.

4.3. Caso $n = 2$

Este caso ya fue analizado en la proposición 3.8. Lo recordamos

- Los puntos en C tienen rango 1.
- Los puntos que no están en C tienen rango 2.

4.4. Caso $n = 3$

En este caso obtenemos lo siguiente:

- Los puntos en C tienen rango 1.
- Los puntos que están en dos rectas tangentes a C tienen rango 3.
- Los demás puntos tienen rango 2.

Como $\mathbb{P}^3 = \mathrm{Sec}^2(C)$, entonces todo punto $x \in \mathbb{P}^3$ pertenece a una recta secante o tangente a C. Consideremos la proyección desde x, $\pi_x : \mathbb{P}^3 \setminus \{x\} \to \mathbb{P}^2$ y notemos C' a la curva $\pi_x(C)$. Cada recta secante y cada recta tangente a C que pasa por x se transforma en un punto singular de C'. Como C' tiene finitos puntos singulares, más precisamente tiene 2 contados con multiplicidad, podemos afirmar que por x pasan a lo sumo dos rectas tangentes o secantes a C. Si por x pasan dos rectas tangentes entonces no pueden pasar rectas secantes, por lo que el rango de x no es 2 y por lo tanto es 3. En cualquier otro caso hay una recta secante que pasa por x y entonces el rango de x es 2.

Caracterizaremos ahora los puntos que tienen rango 3, esto es, los puntos por los que pasan dos rectas tangentes.

Un punto x por el que pasan dos rectas tangentes tiene que ser la intersección de de estas dos rectas. Ahora las rectas $T_p(C)$ y $T_q(C)$ se cortan si y solo si la variedad lineal que generan es un hiperplano, esto es si el divisor $2p+2q$ pertenece al sistema lineal del divisor $4p_0$ que determina la inmersión. En términos de la estructura de grupo de una curva elíptica, tenemos que esto ocurre si y solo si $2p + 2q = 0$ si y solo si $2(p + q) = 0$ si y solo si $p + q$ es un elemento de orden 1 o 2.

Podemos entonces para cada $p \in C$ tratar de determinar el conjunto

$$\{q \in C : T_p(C) \cap T_q(C) \neq \emptyset\}.$$

Esto es sencillo, queremos encontrar q tal que $p + q$ es un elemento de orden 2. Como hay cuatro elementos de orden 1 o 2: p_0, p_1, p_2, p_3, obtenemos cuatro valores para q: $p_i - p$, $i = 0, 1, 2, 3$. Esto es siempre que p no sea el mismo uno de los p_i, pues en ese caso uno de los valores para q puede ser el mismo p. Esto quiere decir que para cada p que no tiene orden 2 ni 1 tenemos en la recta tangente $T_p(C)$ cuatro puntos con rango 3. Para los puntos de orden 1 o 2 (que son 4) tenemos en la recta tangente 3 puntos de rango 3.

En consecuencia tenemos que el conjunto de puntos donde se cortan dos rectas tangentes es una curva en $\mathbb{P}^3$. Fuera de la unión de esa curva con la curva C todos los puntos tienen rango 2.

4.5. Caso $n = 4$

En este caso obtenemos lo siguiente:

- Los puntos en C tienen rango 1.
- Los puntos que están en una recta secante (y no están en C) tienen rango 2
- Los demás puntos tienen rango 3.

Este caso es importante pues a partir de $n = 4$ tenemos que la cota hallada para el rango de todos los puntos se mejora.

De hecho demostraremos que si $C \subset \mathbb{P}^n$, y $n \geq 4$, entonces $\operatorname{rg} x \leq n - 1$ para todo $x \in \mathbb{P}^n$ (cf. corolario 4.19).

Ya sabemos, por el Teorema 3.5, que si $x \in \mathrm{Sec}^2(C) \setminus C$, entonces $\mathrm{rg}\, x = 2$ o $\mathrm{rg}\, x = 3$. Falta ver que si $x \in \mathbb{P}^4 \setminus \mathrm{Sec}^2(C)$, entonces $\mathrm{rg}\, x = 3$.

Como $\mathbb{P}^4 = \mathrm{Sec}^2(C)$, sabemos que todo punto $x \in \mathbb{P}^4$ está en algún plano 3-secante generado por un divisor de C de grado 3. Queremos ver que alguno de estos planos es de la forma $D = p_1 + p_2 + p_3$ con los tres puntos distintos.

Proposición 4.5. *Sea $C \subset \mathbb{P}^4$ una curva no singular y no degenerada arbitraria. Sea $x \in \mathbb{P}^4 \setminus \mathrm{Sec}^2(C)$. Entonces x pertenece a una curva de planos trisecantes.*

Demostración. Primero notemos que todo punto $x \in \mathbb{P}^4$ pertenece a por lo menos una curva de planos trisecantes. Para eso consideramos la correspondencia

$$\Gamma = \{(x, D) : x \in \langle D \rangle\} \subset \mathbb{P}^4 \times C_3$$

donde C_3 es la potencia simétrica de grado 3 de C, que claramente parametriza al conjunto de divisores efectivos de grado 3. Cada fibra de la segunda proyección es un espacio lineal de dimensión 2. Por lo tanto Γ es irreducible y su dimensión es 5. Como la proyección π_1 es dominante (ya que cada $x \in \mathbb{P}^4$ pertenece al algún plano trisecante), cada fibra tiene dimensión mayor o igual que 1, como queríamos.

Veamos que si $x \in \mathbb{P}^4 \setminus \mathrm{Sec}^2(C)$, entonces por x pasa exactamente una curva de planos trisecantes a C.

Para eso sea $x \in \mathbb{P}^4 \setminus \mathrm{Sec}^2(C)$. Consideremos la proyección desde x

$$\pi_x : \mathbb{P}^4 \setminus \{x\} \to \mathbb{P}^3.$$

Si notamos $C' = \pi_x(C)$, tenemos que C' es una curva no singular y no degenerada (no singular pues $x \notin \mathrm{Sec}^2(C)$, no degenerada pues C también es no degenerada).

La proyección π_x establece una biyección entre los conjuntos

$$\{\text{planos trisecantes a } C \text{ que contienen a } x\}$$

y

$$\{\text{rectas trisecantes a } C'\}.$$

Pero una curva no degenerada en $\mathbb{P}^3$ no puede tener más que una curva de rectas trisecantes, ya que de lo contrario tendríamos que todas las rectas secantes son trisecantes. Esto contradice el lema de Posición General (cf. lema 3.2). $\square$

Con esto tenemos que por $x \in \mathbb{P}^4 \setminus \mathrm{Sec}^2(C)$ pasa exactamente una curva de planos trisecantes. Lo que queremos ver es

Proposición 4.6. *Sea $C \subset \mathbb{P}^4$ una curva no singular y no degenerada arbitraria. Sea $x \in \mathbb{P}^4 \setminus \operatorname{Sec}^2(C)$ y sea M la familia de planos trisecantes que contienen a x. Entonces algún miembro de M es un plano trisecante estricto, esto es, generado por tres puntos distintos de C.*

Demostración. Supongamos que todos los planos trisecantes que pasan por x estén generados por divisores de de la forma $D = 2p + q$. Un plano de este tipo se transforma por la proyección π_x en una recta tangente trisecante a C', esto es, una recta tangente a C' que vuelve a cortar a C' (el plano $\langle 2p + q\rangle$ se transforma en la recta tangente a C' en $\pi_x(p)$ que corta a C' también en $\pi_x(q)$). Consideremos la correspondencia

$$\Lambda = \{(p, q) \in C \times C : \ x \in \langle D\rangle \ \text{ y } p + q \leq D\}$$

El hecho que x pertenece a una curva de planos trisecantes implica que Λ es un divisor en $C \times C$. Lo que queremos probar es que la diagonal no está contenida en Λ, esto es, que solo finitos $p \in C$ verifican $2p \leq D$, para D tal que $x \in \langle D\rangle$.

Si suponemos que la diagonal es una componente de Λ tenemos que para todo $p \in C$ existe D de grado tres tal que $x \in \langle D\rangle$ y $2p \leq D$. Esto se traduce a que para todo $p' \in C'$, la recta tangente a C' en p' vuelve a cortar a C'.

Entonces toda recta tangente a C' es trisecante. El siguiente resultado que se encuentra en [16] prueba que esto no es posible

Teorema 4.7 (Kaji)**.** *Sea $C \subset \mathbb{P}^3$ una curva no degenerada, no singular. Entonces no toda recta tangente es trisecante.*

Por lo tanto dado $x \in \mathbb{P}^4 \notin \operatorname{Sec}^2(C)$ hay solamente un número finito de planos trisecantes no estrictos que lo contienen. □

Observación. En la proposición mostramos que una curva no singular en $\mathbb{P}^3$ posee un número finito de rectas tangentes trisecantes. Si d es el grado de la curva y g es su género, el número es

$$2((d-2)(d-3) + g(d-6))$$

y fue calculado por Salmon (1868).

Para una curva elíptica tenemos

Proposición 4.8. *Sea $C \subset \mathbb{P}^4$ una curva elíptica inmersa por un fibrado lineal L de grado 5. Entonces todo punto en $\mathbb{P}^4$ tiene rango menor o igual que 3.*

Observación. No podemos enunciar un resultado similar para una curva arbitraria $C \subset \mathbb{P}^4$ ya que no podemos calcular el rango para un punto en una recta tangente (podría ser 2, 3 o 4).

4.6. Caso $n = 2l + 1$

Sea $n = 2l + 1$ con $l \geq 2$. El objetivo es calcular el rango de los puntos que están en el complemento de $\mathrm{Sec}^l(C)$. Probaremos el siguiente resultado:

Teorema 4.9. *Si $n = 2l+1 \geq 5$, y $x \in \mathbb{P}^n \setminus \mathrm{Sec}^l(C)$, entonces $\mathrm{rg}\, x = l+1$ o $\mathrm{rg}\, x = l+2$. Los puntos en $\mathbb{P}^n \setminus \mathrm{Sec}^l(C)$ que tiene rango $l+2$ son aquellos que o bien pertenecen a exactamente dos l-planos $(l+1)$-secantes, y ninguno de estos es estricto, o bien pertenecen a exactamente un l-plano $(l+1)$-secante y este no es estricto.*

Notar que este resultado junto con el teorema 3.5 aplicado a una curva elíptica permiten deducir

Teorema 4.10. *Sea $C \subset \mathbb{P}^n$ una curva elíptica inmersa por el sistema lineal completo asociado a un divisor L de grado $d = n+1$, donde $n = 2l+1$. Para cada $r \geq 2$ tal que $d \geq 2r+3$ se tiene*

1. $(\mathrm{Sec}^r)^\circ(C) = C_r \cup C_{n-r+1}$.
2. $C_r = \mathrm{Sec}^r(C) \setminus \mathrm{Sec}^{r,2}(C)$.
3. $C_{n-r+1} = \mathrm{Sec}^{r,2}(C) \setminus \mathrm{Sec}^{r-1}(C)$.

Demostración. Ya habíamos observado que el teorema 3.5 aplicado a una curva elíptica permite deducir que para $r \geq 2$ tal que $2r \leq n$ se tiene

$$(\mathrm{Sec}^r)^\circ(C) \subset C_r \cup C_{n-r+1}.$$

Veamos la igualdad. El máximo r tal que $d \geq 2r+3$ es $r = l-1$, luego para $x \in \mathrm{Sec}^{l-1}(C)$ tenemos que $\mathrm{rg}\, x \leq l-1$ o $\mathrm{rg}\, x \geq n-l+2 = l+3$. Luego para probar este nuevo resultado alcanza con ver que los puntos $x \in \mathbb{P}^n \setminus \mathrm{Sec}^{l-1}(C)$ verifican $l \leq \mathrm{rg}\, x \leq= l+2$. Pero ya sabíamos que si $x \in (\mathrm{Sec}^l)^\circ(C)$ entonces $\mathrm{rg}\, x = l$ o $\mathrm{rg}\, x = n-l+1 = l+2$. El teorema 4.9 dice que los puntos en $\mathbb{P}^n \setminus \mathrm{Sec}^l(C)$ tienen rango $l+1$ o $l+2$.

Los items 2 y 3 se obtienen recursivamente para $r \geq 2$ tal que $d \geq 2r+3$. □

Antes de comenzar la demostración del teorema 4.9 haremos una caracterización de los puntos en $\mathbb{P}^n \setminus \mathrm{Sec}^l(C)$ que pertenecen a infinitos $(l+1)$-planos l-secantes.

Primero mostraremos un lema que analiza qué ocurre si x pertenece a dos l-planos $(l+1)$-secantes distintos.

Lema 4.11. *Sea* $x \notin \mathrm{Sec}^l(C)$ *y sean* D *y* E *dos divisores distintos de grado* $l+1$ *tales que* $x \in \langle D \rangle$ *y* $x \in \langle E \rangle$*. Entonces* $x = \langle D \rangle \cap \langle E \rangle$*, y por lo tanto* $\dim(\langle D \rangle + \langle E \rangle) = 2l$*. Además se verifica* $\langle D + E \rangle = \langle D \rangle + \langle E \rangle$*.*

Demostración. Alcanza con probar que la dimensión de $\langle D \rangle + \langle E \rangle$ es $2l$, pues en ese caso la dimensión de $\langle D \rangle \cap \langle E \rangle$ es cero y por lo tanto $\langle D \rangle \cap \langle E \rangle = x$.

Supongamos que la dimensión de $\langle D \rangle + \langle E \rangle$ es menor que $2l$. Como $\langle D \rangle + \langle E \rangle = \langle D + E - D \cap E \rangle$, el divisor $D + E - D \cap E$ tiene que tener grado menor o igual que $2l+1$. Por lo tanto usando la proposición 2.5 tiene que ser $\langle D \rangle \cap \langle E \rangle = \langle D \cap E \rangle$.

Pero como $x \in \langle D \rangle \cap \langle E \rangle$, se tiene $x \in \langle D \cap E \rangle$. Como D y E son distintos, tiene que ser $\deg(D \cap E) < l + 1$. Pero entonces $x \in \mathrm{Sec}^l(C)$ que contradice la hipótesis.

Por lo tanto $\dim(\langle D \rangle + \langle E \rangle) = 2l$ y $x = \langle D \rangle \cap \langle E \rangle$. Como además se probó que los soportes de D y E no se cortan, deber ser $\langle D \rangle + \langle E \rangle = \langle E + D \rangle$. □

Notar que la última afirmación del lema dice que si $x \in \langle D \rangle$ con $\deg D = l+1$ y $x \notin \mathrm{Sec}^l(C)$, todo otro l-plano $(l+1)$-secante de la forma $\langle E \rangle$ que contenga a x debe verificar $D+E \sim (n+1)p_0$, pues $\langle D+E \rangle$ es un hiperplano. Los divisores E que verifican esto son los que pertenecen al sistema lineal asociado al fibrado lineal $L(-D)$, por lo tanto son todos equivalentes entre sí.

Damos ahora una caracterización de los $x \in \mathbb{P}^n \backslash \mathrm{Sec}^{l-1}(C)$ que pertenecen a exactamente dos l-planos $(l+1)$-secantes.

Lema 4.12. *Sea* $x \notin \mathrm{Sec}^l(C)$ *y sea* D *un divisor de grado* $l+1$ *tal que* $x \in \langle D \rangle$*. Si* $2D \not\sim L$*, entonces existen exactamente dos* l*-planos* $(l+1)$*-secantes que contienen a* x*.*

Demostración. Como todo otro l-plano $(l+1)$-secante $\langle E \rangle$ que contiene a x tiene que verificar $D+E \sim L$, estos planos hay que buscarlos en las secciones del fibrado $L(-D)$.

Sean $L_1 = L_D$ el fibrado lineal asociado a D, $L_2 = L \otimes L_1^{-1}$ y μ el morfismo de multiplicación

$$H^0(L_1) \otimes H^0(L_2) \xrightarrow{\mu} H^0(L)$$

Sea s_D la sección $s_D \in H^0(L_1)$ asociada a D. Se verifica $s_D \in W_1(x)$, por lo que $\mathrm{rg}\,\mu_x \leq l$. Si $\mathrm{rg}\,\mu_x < l$ como $L_1 \not\sim L_2$, podemos usar el teorema 4.2 y deducir que $x \in \mathrm{Sec}^{l-1}(C)$, lo que contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto $\mathrm{rg}\,\mu_x = l$ y entonces $W_2(x)$ está generado por una única sección $t \in H^0(L_2)$ (salvo múltiplos). Por la proposición 2.22 debe ser $x \in \langle (t)_0 \rangle$. Como $D + D \not\sim (n+1)p_0$, no puede ser $\langle (s)_0 \rangle = \langle (t)_0 \rangle$, y por lo tanto se verifica el resultado. □

Podemos entonces caracterizar los puntos $x \in \mathbb{P}^n \backslash \mathrm{Sec}^{l-1}(C)$ que pertenece a infinitos l-planos $(l+1)$-secantes.

Lema 4.13. *Sea $x \in \mathbb{P}^n \setminus \mathrm{Sec}^l(C)$. Entonces x pertenece a infinitos l-planos $(l+1)$-secantes si y solo si existe D tal que $2D \sim (n+1)p_0$ y el rango de la matriz de multiplicación*

$$H^0(L_1) \otimes H^0(L_1) \to H^0(L)$$

es $l-1$.

Demostración. Sea $M = M_x$ la familia de l-planos $(l+1)$-secantes que contienen a x (parametrizada por los divisores de grado $l+1$ que los generan).

Supongamos que M es un conjunto infinito y sea $D \in M$. Por el lema anterior si $2D \not\sim (n+1)p_0$, entonces M tiene dos elementos. Entonces tiene que ser $2D \sim (n+1)p_0$. Por el lema 4.11 si $E \in M$, entonces $\langle E + D\rangle$ es un hiperplano y por lo tanto $D \sim E$. Con lo cual M es un sistema lineal contenido en $\mathbb{P}(H^0(L_1))$. De hecho $M = \mathbb{P}(W_1(x))$. Con lo cual si M es infinito, el rango de μ_x es menor o igual que $l-1$. Pero no puede se menor estricto que $l-1$ ya que entonces por el Teorema 4.2 tiene que ser $x \in \mathrm{Sec}^{l-2}(C)$.

Por otro lado sea D tal que $2D \sim (n+1)p_0$ y tal que el rango de μ_x es $l-1$. Entonces el cardinal de $\mathbb{P}(W_1(x)) = M$ es infinito como queríamos. $\square$

En el lema se muestra que si $x \in \mathbb{P}^n \backslash \mathrm{Sec}^l(C)$ pertenece a infinitos l-planos $(l+1)$-secantes, entonces cada uno de estos es de la forma $\langle D\rangle$ para D de grado $l+1$ tal que $2D \sim (n+1)p_0$. Calculemos cuántas clases de equivalencia lineal de divisores de grado $l+1$ verifican $D + D \sim (2l+2)p_0$, para D en la clase. Como cada divisor de grado $l+1$ es equivalente a $p + lp_0$ para $p \in C$, buscamos $p \in C$ tal que $2p + 2lp_0 \sim (2l+2)p_0$, esto es, $2p \sim 2p_0$.

Pero entonces $p - p_0$ tiene que verificar $2(p - p_0) \sim 0$. Si consideramos en C la ley de grupo con origen p_0, esto se traduce a que el elemento p verifica $2p = 0$. Hay cuatro tales p (y p_0 es uno de ellos). Si p_0, p_1, p_2, p_3 son estos elementos, entonces los D buscados son $D_i = p_i + lp_0$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Para cada uno de esos cuatro divisores D_i consideremos el morfismo de multiplicación

$$H^0(L_{D_i}) \otimes H^0(L_{D_i}) \xrightarrow{\mu^i} H^0(L).$$

Para cada i consideremos los conjuntos

$$U_i = \{x \in \mathbb{P}^n : \operatorname{rg} \mu^i_x = l-1\}$$

Para cada U_i consideremos $V_i = U_i \backslash \mathrm{Sec}^l(C)$. La unión de los V_i es el conjunto de puntos en $\mathbb{P}^n \setminus \mathrm{Sec}^l(C)$ que pertenecen a infinitos l-planos $(l+1)$-secantes.

Por otro lado si $x \in V_i \cap V_j$ tiene que ser $x \in \operatorname{Sec}^{l-1}(C)$ por el lema 4.3. Esto quiere decir que los V_i son disjuntos.

Ejemplo 4.14. Veamos cuál es la situación si $l = 2$ y $D = D_0 = 3p_0$. Consideremos la matriz $A(\mathcal{O}_C(3p_0), \mathcal{O}_C(3p_0))$. En las bases explicadas anteriormente esta matriz es

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & y_0 \\ x_1 & x_2 & y_1 \\ y_0 & y_1 & x_3 + c_2x_2 + c_1x_1 \end{pmatrix}$$

Si cambiamos la variable $x_3 + c_2x_2 + c_1x_1$ por x_3', tenemos que el conjunto de los $x \in \mathbb{P}^5$ tales que la matriz A tiene rango 1 es la superficie de Veronese. Esto muestra que es necesario en el teorema 2.20 y en el teorema 4.2 pedir que si $\deg L_1 = \deg L_2$, entonces $L_1 \not\sim L_2$. Observemos además que entonces la superficie de Veronese contiene una curva elíptica. De hecho si consideramos los conjuntos U_i como antes, cada uno de estos es una superficie de Veronese y la intersección de dos cualesquiera de estas es la curva C (por el lema 4.3). En este caso los conjuntos V_i son los puntos en estas superficies de Veronese que no pertenecen a una recta secante o tangente a C.

Finalmente caracterizamos los puntos $x \in \mathbb{P}^n \setminus \operatorname{Sec}^{l-1}(C)$ que pertenecen a exactamente un l-plano $(l+1)$-secante.

Lema 4.15. *Sea $x \in \mathbb{P}^n \setminus \operatorname{Sec}^{l-1}(C)$. Entonces x pertenece a exactamente un l-plano $(l+1)$-secantes si y solo si existe D tal que $2D \sim (n+1)p_0$ y el rango de la matriz de multiplicación*

$$H^0(L_1) \otimes H^0(L_1) \to H^0(L)$$

es l.

Demostración. Sea D un divisor de grado $l+1$ tal que $x \in \langle D \rangle$. Entonces tiene que ser $2D \sim (n+1)p_0$, pues de lo contrario vimos que existe otro divisor E de grado $l+1$ tal que $x \in \langle E \rangle$.

El rango de μ_x tiene que ser menor o igual que l. No puede ser menor o igual que $l-2$ pues entonces $x \in \operatorname{Sec}^{l-3}(C)$ y no puede ser $l-1$ pues entonces x pertenecería a infinitos l-planos $(l+1)$-secantes. Luego tiene que ser necesariamente $\operatorname{rg} \mu_x = l$. $\square$

Ahora demostramos la proposición 4.9

Demostración de la Proposición 4.9. Haremos un análisis según x pertenezca a infinitos o finitos l-planos $(l+1)$-secantes.

1. Supongamos que x pertenece a infinitos l-planos $(l + 1)$-secantes.

   Por el lema 4.13 existe un divisor D de grado $l+1$ que verifica $D+D \sim (n + 1)p_0$, y tal que $x \in \langle D\rangle$.

   Consideramos $L_1 = L_2 = L_D$ y el morfismo de multiplicación.

   $$H^0(L_1) \otimes H^0(L_1) \xrightarrow{\mu} H^0(L).$$

   El mismo lema dice que el rango de μ_x es $l - 1$. Si $l = 2$, entonces $W_2(x)$ es un hiperplano, por lo tanto $W_2(x)$ no está contenido en Δ_{L_2}. Entonces por la proposición 3.12 tiene que ser $\operatorname{rg} x \leq 3 = l + 1$. Pero no puede ser menor pues entonces $x \in \operatorname{Sec}^2(C) = \operatorname{Sec}^l(C)$.

   Supongamos ahora que $l \geq 3$. Queremos ver que el rango de x es $l+1$. Si así no fuera tendríamos que $W_2 = W_2(x) \subset \Delta_{L_2}$ y por lo tanto tendría puntos base. Sea E el base locus. Tiene que ser $2 \leq \deg E \leq l - 1$.

   Consideramos a W_2 como subespacio de $H^0(L_2(-E))$ y la matriz de multiplicación
   $$H^0(L_1) \otimes W_2 \xrightarrow{\mu} H_0(L(-E)).$$

   Queremos ver que es sobreyectiva.

   Si $\deg E = l - 1$, entonces $H^0(L_2(-E)) = W_2$ y tenemos que $\deg L_1 + \deg L_2(-E) = l + 1 + l + 1 - l + 1 = l + 3 \geq 5$ y por el lema 2.24 μ es sobreyectiva.

   Si $\deg E < l - 1$, entonces la codimensión de W_2 en $H^0(L_2(-E))$ es $l - 1 - \deg E$. En este caso podemos usar el lema 2.23 para probar que la aplicación es sobreyectiva.

   En cualquier caso $x \in \langle E\rangle$ y por lo tanto $x \in \operatorname{Sec}^{l-2}(C)$ contradiciendo las hipótesis.

   Por lo tanto el rango de x es $l + 1$.

2. Supongamos ahora que x pertenece a finitos l-planos $(l + 1)$-secantes. Si son dos, existen divisores D y E de grado $l + 1$ tales que $x \in \langle D\rangle$, $x \in \langle E\rangle$ y $D + E \sim (n + 1)p_0$. Si es uno solo, entonces existe un divisor D de grado $l + 1$ tal que $2D \sim (n + 1)p_0$.

   En cualquiera de los casos si uno de los dos planos (o el único) es un plano estricto, el rango de x es $l + 1$.

   Por lo tanto hay que probar que si x pertenece a dos planos y los dos son no estrictos o si pertenece a un único plano y este no es estricto entonces su rango es $l + 2$. Como ya sabemos que su rango es mayor o igual que $l + 2$ lo que probaremos es que es menor o igual que $l + 2$.

Sean L_1 y L_2 los fibrados asociados a los divisores lp_0 y $(l+2)p_0$ respectivamente y consideremos la matriz de multiplicación

$$H^0(L_1) \otimes H^0(L_2) \xrightarrow{\mu} H^0(L)$$

Esta matriz tiene rango l en x, ya que si no $x \in \langle D \rangle$, donde D en el sistema lineal asociado a L_1, y por lo tanto $x \in \operatorname{Sec}^l(C)$.

Supongamos que $\operatorname{rg} x > l+2$. Entonces se debe tener $W_2 = W_2(x) \subset \Delta_{L_2}$. Por lo tanto W_2 tiene puntos base y como $\operatorname{codim}(W_2) = l$ el base locus de W_2 es un divisor E tal que $2 \leq \deg E \leq l$. Consideramos a W_2 como un subespacio sin puntos base de $H^0(L_2(-E))$. Como en los resultados anteriores alcanza con ver que la aplicación de multiplicación

$$H^0(L_1) \otimes W_2 \xrightarrow{\mu} H^0(L(-E))$$

es sobreyectiva, ya que en ese caso $x \in \langle E \rangle$, esto es $x \in \operatorname{Sec}^l(C)$ que es una contradicción.

Veamos entonces que

$$H^0(L_1) \otimes W_2 \xrightarrow{\mu} H^0(L(-E))$$

es sobreyectiva.

Veamos primero que si $\deg E = 2$ se pueden elegir L_1 y L_2 de manera que $L_1 \not\sim L_2(-E)$.

Sean D, D' los divisores de grado $l+1$ que contienen a x (si D es uno solo ponemos $D' = D$). Sea Φ la familia de divisores de grado $l-1$

$$\Phi = \{F : \deg F = l-1 \text{ y } D = 2p + F \text{ para } p \in C\}.$$

Esto tiene sentido ya que tanto D como D' se suponen con puntos múltiples.

Considero ahora la familia $D' - F$ con $F \in \Phi$ (o la familia $D - F$ con $F \in \Phi$ si no hay D'). Sea Ψ la familia de puntos $q \in C$

$$\Psi = \{q \in C : 2q \sim D' - F \text{ para } F \in \Phi\}$$

Es una familia finita de puntos.

Sea ahora $r \in C$ tal que $r \notin \Phi$ y tal que r no pertenece al soporte de D.

Sea L_2 el fibrado asociado a $D + r$ y sea L_1 el asociado a $D' - r$. Claramente $L_1 \otimes L_2 = L$.

Como $x \in \langle D + r\rangle$, tiene que ser $D + r \in W_2$. Supongamos entonces que E tiene rango dos. Como E es de la forma $2p$ para $p \in C$, tiene que ser p uno de los puntos dobles de D. Supongamos además que $L_1 \sim L_2(-2p)$. Tenemos que $D' - r \sim D + r - 2p = r + F$ para $F \in \Phi$. Pero entonces $D' - F \sim 2r$ y esto no puede ser por elección de r.

Ahora sí vemos que μ es siempre suryectiva. Supongamos primero que $\deg E = l$ de manera que $W_2 = H^0(L_2(-E))$. Entonces el resultado es cierto por el lema 2.24 (cf. teorema 2 de [7]) pues $\deg L_1 + \deg L_2(-E) = l + l + 2 - l = l + 2 \geq 5$. Esto no incluye el caso $l = 2$. En ese caso $\deg E = 2$ y por el análisis recién hecho podemos suponer que $L_1 \not\sim L_2(-E)$. Entonces podemos usar el segundo caso del lema 2.24 ya que $\deg L_1 + \deg L_2(-E) = 4$ y $L_1 \not\sim L_2(-E)$.

Si $\deg E = r < l$, entonces la codimensión de W_2 en $H^0(L_2(-E))$ es $l - r$. Si $\deg E \geq 3$ el lema 2.23 (cf. lema de [23]) asegura la sobreyectividad.

Si $\deg E = 2$ suponemos que $L_1 \not\sim L_2(-E)$. Consideremos la proyección $\pi_E : \mathbb{P}^n \setminus \langle E\rangle \to \mathbb{P}(H^0(L(-E))^*)$. No puede ser $x \in \langle E\rangle$ ya que entonces $x \in \mathrm{Sec}^2(C)$. Podemos entonces aplicar π_E a x, llamemos $x' = \pi_E(x)$. La imagen de C por π_E es una curva elíptica de grado $n - 1$ en $\mathbb{P}^{n-2}$ inmersa por el sistema lineal completo asociado al divisor $(n+1)p_0 - E$. La matriz de multiplicación asociada al par de divisores L_1, $L_2(-E)$ tiene entonces rango $l-2$ en x' ya que W_2 tiene codimensión $l - \deg E = l - 2$. Por lo tanto por el Teorema 4.2 tiene que ser $x' \in \mathrm{Sec}^{l-2}(C')$. Si F es un divisor de grado $l - 2$ tal que $x' \in \langle F\rangle \subset \mathbb{P}(H^0(L_2(-E))^*)$, entonces $x \in \langle E + F\rangle \subset \mathrm{Sec}^l(C)$ que es una contradicción.

□

Podemos ahora terminar de caracterizar de cuántas formas se escribe un punto de rango r como suma de r puntos de C para el caso de una curva elíptica $C \subset \mathbb{P}^{2l+1}$ de grado $2l + 2$. Nos faltaba calcularlo para los puntos en $\mathbb{P}^{2l+1} \setminus \mathrm{Sec}^l C$.

Si x pertenece a infinitos l-planos $(l + 1)$-secantes vimos que todos estos son miembros de un mismo sistema lineal de dimensión uno, y que solamente finitos de estos no son estrictos. Luego en este caso x se escribe como suma de $l + 1$ puntos de C de ∞^1 maneras distintas.

Si x pertenece a finitos l-planos $(l+1)$-secantes y tiene rango $l+1$, entonces x se escribirá de una o dos maneras.

Si x pertenece a finitos l-planos $(l + 1)$-secantes y tiene rango $l + 2$, entonces para cada elección buena de L_1 y L_2 podemos escribir a x como suma de $l + 2$ puntos de C de ∞^1 maneras distintas (pues en cada elección

$\mathbb{P}(W_2(x)) \subset \mathbb{P}(H^0(L_2))$ tiene dimensión 1). Como hay ∞^1 elecciones buenas de L_1 y L_2, tenemos que x se escribe como suma de $l+2$ puntos distintos de C de ∞^2 formas distintas. Notar que hay otros puntos que tienen rango $l+2$, aquellos que pertenecen a $\mathrm{Sec}^{l,2} C \setminus \mathrm{Sec}^{l-1}(C)$. Para estos también el número de formas de escribirlos como suma de $l+2$ puntos de C es ∞^2. La diferencia entre los dos casos es que en este último todas los planos son miembros de un mismo sistema lineal, mientras que en el primero no.

4.7. La Secant Plane Formula

En esta sección mostraremos una aplicación de los resultados obtenidos en la sección anterior a casos particulares de la Secant Plane Formula.

Esta fórmula cuenta el número esperado de divisores que satisfacen ciertas condiciones. La fórmula que vamos a analizar es la siguiente:

Secant Plane Formula. *Sea C una curva de género g. El número virtual de divisores de grado $l+1$ que imponen solo l condiciones en una serie lineal de grado d y dimensión $2l$ es*

$$\nu_l = \sum_{\alpha=0}^{l+1} (-1)^{\alpha} \binom{g+2l-d}{\alpha} \binom{g}{l+1-\alpha}$$

Una demostración de la fórmula puede encontrarse en [2], página 350. El número ν_l puede interpretarse como el número de $(l-1)$-planos $(l+1)$-secantes a una curva $C \subset \mathbb{P}^{2l}$ de género g y grado d, considerando el sistema lineal que induce la inmersión de C en $\mathbb{P}^{2l}$ (que tiene grado d y dimensión $2l$).

En la fórmula la palabra virtual quiere decir "si es que son finitos". Puede darse el caso en que la cantidad de planos que satisfacen la condición son infinitos. Lo que vamos a mostrar es una familia de ejemplos donde la cantidad es finita y otra donde la cantidad es infinita.

Nosotros aplicaremos la fórmula a curvas $C \subset \mathbb{P}^{2l}$ de género 1 y grado $2l+2$. Para obtener una tal curva consideraremos una curva elíptica $C' \subset \mathbb{P}^{2l+1}$ inmersa por el sistema lineal completo asociado al divisor $(2l+2)p_0$, y consideraremos un punto $x \in \mathbb{P}^{2l+1} \setminus \mathrm{Sec}^2(C')$. Al proyectar desde x obtenemos una curva $C_x \subset \mathbb{P}^{2l}$ no singular. Lo que haremos es calcular para cada x el número de $(l-1)$-planos $(l+1)$-secantes a C_x. Este número equivale a calcular el número de l-planos $(l+1)$-secantes a C' que pasan por x. Sabemos que si x es genérico este número es dos. La plane secant formula aplicada a una curva $C \subset \mathbb{P}^{2l}$ de género uno y grado $2l+2$ es

$$\nu_l = \sum_{\alpha=0}^{l+1}(-1)^\alpha \binom{-1}{\alpha}\binom{1}{l+1-\alpha} = 1+1=2,$$

que coincide con el número que esperábamos.

Probaremos el siguiente resultado

Proposición 4.16. *Sea $C' \subset \mathbb{P}^{2l+1}$ una curva elíptica inmersa por el sistema lineal completo asociado al divisor $(2l+2)p_0$. Sea $x \notin \operatorname{Sec}^2 C'$ y consideremos $C_x \subset \mathbb{P}^{2l}$ la imagen de la proyección desde x. La curva C_x es no singular y de grado $2l+2$. Sea n_x el número de $(l-1)$-planos $(l+1)$ secantes de C_x*

1. *Si $x \in \operatorname{Sec}^l(C')$, entonces $n_x = \infty$.*
2. *Si $x \notin \operatorname{Sec}^l(C')$ y $x \in \langle D\rangle$ con $\deg D = l+1$ y $2D \not\sim (2l+2)p_0$, entonces $n_x = 2$.*
3. *Si $x \notin \operatorname{Sec}^l(C')$ y $x \in \langle D\rangle$ con $\deg D = l+1$ y $2D \sim (2l+2)p_0$ entonces*
   a) *Si $\operatorname{rg}\mu_x = l-1$, entonces $n_x = \infty$.*
   b) *Si $\operatorname{rg}\mu_x = l$, entonces $n_x = 1$.*

Demostración. Sea $C' \subset \mathbb{P}^{2l+1}$ una curva elíptica inmersa por el sistema lineal completo asociado a $(2l+2)p_0$ y $x \in \mathbb{P}^{2l+1} \setminus \operatorname{Sec}^2(C')$. Sabemos que C' no puede tener $(l-1)$-planos $(l+1)$-secantes, pero dado que $\operatorname{Sec}^{l+1}(C') = \mathbb{P}^{2l+1}$, el punto x tiene que pertenecer a un l-plano $(l+1)$-secante a C'. Por lo tanto C_x va a tener necesariamente $(l-1)$-planos $(l+1)$-secantes. De hecho los $(l-1)$-planos $(l+1)$-secantes de C_x están en biyección con los l-planos $(l+1)$-secantes de C' que contienen a x.

Si $x \in \operatorname{Sec}^l(C')$, entonces x pertenece a infinitos l-planos $(l+1)$-secantes a C'. Por lo tanto C_x tiene infinitos $(l-1)$-planos $(l+1)$-secantes.

Entonces para que C_x tenga finitos $(l-1)$-planos $(l+1)$-secantes el punto de proyección no tiene que pertenecer a $\operatorname{Sec}^l(C')$ y además tiene que pertenecer a finitos l-planos secantes a C'.

Pero en la sección anterior vimos que para lograr esto alcanza con elegir D tal que $2D \not\sim (n+1)p_0$ y $x \in \langle D\rangle$ (y además que $x \notin \operatorname{Sec}^l(C')$). En ese caso la curva C_x tiene exactamente 2 $(l-1)$-planos $(l+1)$-secantes.

También podemos lograr que haya uno solo. Basta con elegir D tal que $2D \sim (n+1)p_0$ y $x \notin \operatorname{Sec}^l(C')$ tal que μ_x tenga rango l. En ese caso el plano $\langle D\rangle$ cuenta dos veces en la fórmula.

Finalmente si elegimos D tal que $2D \sim (n+1)p_0$ y $x \notin \operatorname{Sec}^l(C)$ tal que el rango de la matriz μ_x es $l-1$ tenemos que $n_x = \infty$. $\square$

Ejemplo 4.17. Si $2l = 4$ la proposición muestra que es posible encontrar una curva no singular en $\mathbb{P}^4$ con infinitas rectas trisecantes. Para cualquier curva $C \subset \mathbb{P}^4$ no singular de género g y grado d la siguiente fórmula de Berzolari (1895) da el número esperado de rectas trisecantes a C

$$\binom{d-2}{3} - g(d-4).$$

En nuestro caso, $d = 6$ y $g = 1$, el resultado es dos (como era de esperar).

4.8. Caso $n = 2l$

En este caso vamos a probar que si $x \in \mathbb{P}^n \setminus \mathrm{Sec}^l(C)$, entonces $\mathrm{rg}\, x = l+1$. También probaremos que hay ∞^1 formas distintas de escribir un tal x como suma de $l+1$ puntos distintos de C y que los l-planos correspondientes no son miembros de un mismo sistema lineal.

Primero probaremos la siguiente proposición.

Proposición 4.18. *Sea $n = 2l \geq 6$ y sea $x \in \mathbb{P}^n \setminus \mathrm{Sec}^l(C)$. Entonces el rango de x es $l+1$ o $l+2$.*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{P}^n \setminus \mathrm{Sec}^l(C)$ tal que su rango no es $l+1$ ni $l+2$. Necesariamente su rango tiene que ser mayor que $l+2$. Consideremos entonces los divisores $(l-1)p_0$ y $(l+2)p_0$ y la matriz de multiplicación

$$H^0(L_1) \otimes H^0(L_2) \xrightarrow{\mu} H^0(L)$$

El rango de μ_x es $l-1$, ya que si no por la proposición 2.22 del capítulo 2 $x \in \langle D \rangle$ donde $D \sim (l-1)p_0$, y por lo tanto $x \in \mathrm{Sec}^{l-2}(C)$.

Como suponemos que $\mathrm{rg}\, x > l+2$, entonces se debe tener $W_2 = W_2(x) \subsetneq \Delta_{L_2}$. Entonces W_2 tiene puntos base y como $\mathrm{codim}(W_2) = l-1$ se tiene que el base locus de W_2 es un divisor E, tal que $2 \leq \deg E \leq l-1$.

Consideramos a W_2 como un subespacio sin puntos base de $H^0(L_2(-E))$. Si el grado de E es $l-1$, entonces se debe tener $W_2 = H^0(L_2(-E))$. Entonces la aplicación de multiplicación

$$H^0(L_1) \otimes H^0(L_2(-E)) \xrightarrow{\mu} H^0(L(-E))$$

es sobreyectiva pues $\deg L_1 + \deg L_2(-E) = l-1+l+2-l+1 = l+2 \geq 5$. Esto implica que $x \in \langle E \rangle$, esto es $x \in \mathrm{Sec}^{l-1}(C)$, lo que es una contradicción.

Por otro lado si tenemos que $\deg E < l-1$, queremos ver que la aplicación de multiplicación

$$H^0(L_1) \otimes H^0(L_2(-E)) \xrightarrow{\mu} H^0(L(-E))$$

es sobreyectiva restringida a $H^0(L_1) \otimes W_2$.

Como C es una curva elíptica el divisor canónico es $K = 0$, y por lo tanto $h^1(L_1 \otimes L_2(-E)^{-1}) = h^0(L_2(-E) \otimes L_1)$.

Como $\deg L_2(-E) \otimes L_1^{-1} = l + 2 - \deg E - l + 1 = 3 - \deg E$, tenemos que $h^1(L_1 \otimes L_2(-E)^{-1}) = 0$ o 1. Además la dimensión de $W_2 = 3$, entonces por el lema 2.25 el morfismo de multiplicación es sobreyectivo. □

Esta proposición junto con la proposición 4.9 de la sección anterior termina de mostrar que en el caso de curvas elípticas se tiene:

Proposición 4.19. *Sea $C \subset \mathbb{P}^n$ una curva elíptica inmersa por el divisor $\mathcal{O}_C((n+1)p_0)$. Si $n \geq 4$, entonces todo $x \in \mathbb{P}^n$ tiene rango menor o igual que $n - 1$.*

Demostración. El caso $n = 4$ fue analizado a parte. Para los otros escribamos $n = 2l + 1$ con $l \geq 2$ o $n = 2l$ con $l \geq 3$. Para $x \in \mathrm{Sec}^l(C)$ sabemos que $1 \leq \mathrm{rg}\, x \leq l$ o $n - l + 1 \leq \mathrm{rg}\, x \leq n - 1$ por el corolario 3.15. Pero las proposiciones 4.9 y 4.18 dicen que si $x \in \mathbb{P}^n \setminus \mathrm{Sec}^l(C)$, entonces $\mathrm{rg}\, x = l + 1$ o $\mathrm{rg}\, x = l + 2$. Cualquiera de estos valores es menor o igual que $n - 1$. □

Ahora queremos probar lo siguiente

Teorema 4.20. *Si $n = 2l \geq 4$, y $x \in \mathbb{P}^n \setminus \mathrm{Sec}^l(C)$, entonces $\mathrm{rg}\, x = l + 1$.*

Este teorema junto con el teorema 3.5 nos permite deducir

Teorema 4.21. *Sea $C \subset \mathbb{P}^n$ una curva elíptica inmersa por el sistema lineal completo asociado a un divisor L de grado $d = n + 1$, donde $n = 2l$. Para cada $r \geq 2$ tal que $d \geq 2r + 3$ se tiene*

1. $(\mathrm{Sec}^r)^\circ(C) = C_r \cup C_{n-r+1}$.
2. $C_r = \mathrm{Sec}^r(C) \setminus \mathrm{Sec}^{r,2}(C)$.
3. $C_{n-r+1} = \mathrm{Sec}^{r,2}(C) \setminus \mathrm{Sec}^{r-1}(C)$.

Demostración. Ya habíamos observado que el teorema 3.5 aplicado a una curva elíptica permite deducir que para $r \geq 2$ tal que $2r \leq n$ se tiene

$$(\mathrm{Sec}^r)^\circ(C) \subset C_r \cup C_{n-r+1}.$$

Queremos ver que vale la igualdad. El máximo r tal que $d \geq 2r + 3$ es $r = l - 1$, luego para $x \in \mathrm{Sec}^{l-1}(C)$ tenemos que $\mathrm{rg}\, x \leq l - 1$ o $\mathrm{rg}\, x \geq n - l + 2 = l + 2$. Luego para probar la igualdad alcanza con ver que los puntos $x \in \mathbb{P}^n \setminus \mathrm{Sec}^{l-1}(C)$ verifican $l \leq \mathrm{rg}\, x \leq= l + 1$. Pero ya sabíamos que si $x \in (\mathrm{Sec}^l)^\circ(C)$ entonces $\mathrm{rg}\, x = l$ o $\mathrm{rg}\, x = n - l + 1 = l + 1$. El teorema 4.20 dice que los puntos en $\mathbb{P}^n \setminus \mathrm{Sec}^l(C)$ tienen rango $l + 1$.

Los items 2 y 3 se obtienen recursivamente para $r \geq 2$ tal que $d \geq 2r + 3$. $\square$

El resto de la sección estará destinado a demostrar el teorema 4.20, esto es, a probar que todo punto en $\mathbb{P}^{2l} \setminus \mathrm{Sec}^l C$ tiene rango $l + 1$. Comencemos caracterizando la familia de l-planos $(l + 1)$-secantes que contienen a $x \in \mathbb{P}^n \setminus \mathrm{Sec}^l(C)$.

Proposición 4.22. *Sea $x \in \mathbb{P}^n \setminus \mathrm{Sec}^l(C)$. Entonces la familia de l-planos $(l + 1)$-secantes que contienen a x está parametrizada por la curva C.*

Demostración. Para cada $p \in C$ consideremos el divisor $lp_0 + p$. Vimos que de esta manera recorremos todas las clases de equivalencia de divisores de grado $l + 1$. Sean $L_2 = \mathcal{O}_C(lp_0 + p)$ y $L_1 = \mathcal{O}_C((l + 1)p_0 - p)$. Consideremos la matriz de la forma bilineal $\mu_x : H^0(L_1) \otimes H^0(L_2) \to \mathbb{C}$. Si el rango de μ_x es menor que $l = \deg L_1$, entonces $x \in \mathrm{Sec}^l(C)$. Por lo tanto tiene que ser $\mathrm{rg}\, \mu_x = l$ y $\dim W_2(x) = 1$. Sea entonces $s \in H^0(L_2)$ una sección que genera $W_2(x)$. Por la propiedad 2.22 se verifica que $x \in \langle (s)_0 \rangle$. Por lo tanto para cada $p \in C$ encontramos un único divisor D_p de grado $l+1$ linealmente equivalente a $lp_0 + p$ tal que $x \in \langle D_p \rangle$.

Recíprocamente, si D es un divisor de grado $l + 1$ tal que $x \in \langle D \rangle$, existe un único p tal que $D \sim lp_0 + p$. Por lo tanto D tiene que ser D_p.

Por lo tanto mostramos que C está en biyección con los l-planos $(l + 1)$-secantes que contienen a x. $\square$

Observación. También podemos mostrar el resultado anterior mostrando que para cada $p \in C$ pasan a lo sumo dos l-planos $(l + 1)$-secantes por x y p. Para esto consideremos la proyección π_p desde p y sea $C' \subset \mathbb{P}^{2l-1}$ la curva elíptica imagen de C. El punto $x' = \pi_p(x)$ no puede pertenecer a $\mathrm{Sec}^{l-1}(C')$ (pues si no $x \in \mathrm{Sec}^l(C)$. Entonces sabemos que x' pertenece a uno, dos o infinitos $(l - 1)$-planos l-secantes a C'. Pero si fueran infinitos, entonces todos serían de la forma $\langle D \rangle$, para D dentro de un sistema lineal de divisores. Pero entonces x pertenecería a los planos $\langle D + p \rangle$ donde $D + p$ también pertenecen a un sistema lineal de divisores. Pero sabemos que los l-planos $(l + 1)$-secantes a C que pasan por x son de la forma $\langle E \rangle$, para un E en cada clase de equivalencia lineal de divisores de grado $l + 1$.

Fijemos por el resto de la sección un $x \notin \mathrm{Sec}^l(C)$. Notaremos con M a la familia de l-planos $(l+1)$-secantes que contienen a x. A la familia M la vamos pensar tanto como una subvariedad de $Grass(l, \mathbb{P}^n)$, como una subvariedad de C_{l+1}, la potencia simétrica $(l + 1)$-ésima de C.

Como queremos probar que el rango de $x \in \mathbb{P}^n \setminus \mathrm{Sec}^l(C)$ es $l+1$, necesitamos probar que algún miembro de M es estricto.

Proposición 4.23. *Sea $x \in \mathbb{P}^n \setminus \mathrm{Sec}^l(C)$ y sea M la familia de l-planos $(l+1)$-secantes que contienen a x. Entonces algún miembro de M es estricto.*

Demostración. Consideremos la correspondencia

$$\Gamma = \overline{\{(p,q) : p \neq q, \text{ y } p,q \in \Lambda, \text{ con } \Lambda \in M\}} \subset C \times C.$$

La observación anterior muestra que la correspondencia es una curva, pues cada fibra de π_1 (y de π_2) es finita. Lo que nos gustaría probar es que esta correspondencia no tiene a la diagonal como una de sus componentes. En ese caso la correspondencia tendría finitos puntos en la diagonal, y por lo tanto habría finitos $p \in C$ tales que la recta tangente a C en p está contenida en algún miembro de M. Esto prueba que el miembro genérico de M es estricto. Por lo tanto si probamos que la diagonal no es una componente de Γ, entonces la demostración está terminada.

De ahora en más trataremos de probar que la diagonal no es una componente de Γ.

Supongamos que la diagonal es una componente de la correspondencia. En ese caso consideramos esta nueva correspondencia

$$\Sigma = \{(p,\Lambda) \in C \times M : \langle 2p \rangle \subset \Lambda\}$$

Como la diagonal es una componente de Γ, la primera proyección es sobreyectiva, esto es, para cada $p \in C$, existe $\Lambda_p \in M$ tal que $\langle 2p \rangle \subset \Lambda_p$. De hecho Λ_p es único, ya que si $\langle 2p \rangle \subset \Lambda_p \cap \Lambda'_p$, entonces $x \in \langle 2p \rangle$ por el lema 2.5. Esto es una contradicción. Por lo tanto la primera proyección es un isomorfismo. Componiendo la inversa de π_1 con π_2 tenemos una aplicación

$$C \to M$$

que a cada p lo aplica en Λ_p. Observar que esta aplicación no es necesariamente inyectiva. Si por ejemplo para $\Lambda \in M$ se tiene $\langle 2p + 2q \rangle \subset \Lambda$, entonces $\Lambda = \Lambda_p = \Lambda_q$.

Consideremos k el menor entero tal que $\langle kp \rangle \subset \Lambda_p$ para todo $p \in C$. Entonces para cada p tenemos que $\Lambda_p = \langle kp + D_p \rangle$ y para algún p D_p no contiene a p (de hecho para todos los p salvo para finitos).

Lema 4.24. *Sea $\Lambda_p = \langle kp + D_p \rangle$ la familia de l-planos $(l+1)$-secantes que contienen a x parametrizados por la curva C. Entonces existen $q \in C$ y $r > k$ tales que $\langle rq \rangle \subset \Lambda_q$, esto es, tales que $(r-k)q \leq D_q$.*

Demostración. Supongamos que no existen p y r, entonces para todo $p \in C$ tenemos que p no pertenece al soporte de D_p.

Sea U_p la variedad lineal generada por x y $\langle D_p \rangle$. Esta es una variedad de dimensión $l+1-k$, ya que $x \notin \langle D_p \rangle$. Como $\langle kp \rangle$ tiene dimensión $k-1$ y Λ_p tiene dimensión l entonces $U_p \cap \langle kp \rangle \neq \emptyset$, de hecho la suposición de que $p \notin \langle D_p \rangle$ implica que es un punto. Sea $y_p = U_p \cap \langle kp \rangle$. Afirmamos que $y_p \notin \langle (k-1)p \rangle$. Si así fuera Γ_p y $\langle (k-1)p \rangle$ se cortarían y por lo tanto tendríamos que Γ_p y $\langle (k-1)p \rangle$ generan una variedad lineal de dimensión $l-1$. Pero como la variedad lineal $\langle (k-1)p + D_p \rangle$ también tiene dimensión $l-1$, entonces $x \in \langle (k-1)p + D_p \rangle$ que es una contradicción.

Por lo tanto probamos que para cada $p \in C$ la intersección $U_p \cap \langle kp \rangle$ es un punto $y_p \in \langle kp \rangle \setminus \langle (k-1)p \rangle$.

En el ejemplo 2.32 vimos que el espacio $\langle kp \rangle$ es el $(k-1)$-plano osculador de la curva en p, $Osc_p^{k-1}(C)$. Por lo tanto acabamos de definir una función que a cada $p \in C$ lo aplica en su $(k-1)$-plano osculador en p. En la sección 2.7 vimos que los planos osculadores de C son las fibras del fibrado proyectivo $Osc^{k-1}(C)$, que es el fibrado proyectivo asociado al fibrado $\mathcal{P}^{k-1} = \mathcal{P}^{k-1}(L)$ de jets de orden $k-1$ del fibrado L. Entonces lo que definimos es una sección del fibrado $Osc^{k-1}C$. Esta sección corresponde a una suryección de $\mathcal{P}^{k-1} \to \mathcal{E}$ donde $\mathcal{E}$ es un fibrado lineal.

Recordar que tenemos la sucesión exacta de fibrados

$$0 \to Sym^{k-1}\omega_C^1(1) \otimes L \to \mathcal{P}^{k-1} \to \mathcal{P}^{k-2} \to 0.$$

El último morfismo define entonces una inmersión de $Osc^{k-2}C \hookrightarrow Osc^{k-1}C$.

El hecho que para cada p el punto $y_p \notin Osc_p^{k-2}(C)$ quiere decir que la imagen de la sección no corta a $Osc^{k-2}C$ en $Osc^{k-1}C$.

Tenemos entonces en C la siguiente aplicación de fibrados lineales

$$\mathcal{P}^{k-1} \to \mathcal{P}^{k-2} \oplus \mathcal{E}.$$

Como las imágenes de los correspondientes morfismos no se cortan, tenemos que esta aplicación es sobreyectiva.

Como los dos fibrados tienen el mismo rango, la aplicación es un isomorfismo. Esto implica que el morfismo

$$\mathcal{P}^{k-1} \to \mathcal{P}^{k-2} \to 0$$

se parte. Pero en una curva elíptica esta aplicación no se parte para ningún k (cf. corolario 2.34). Esto es una contradicción.

Por lo tanto existe q tal que $\langle rq \rangle \subset \Lambda_q$ con $r > k$. □

Ahora mostraremos que esto no puede ocurrir. La contradicción proviene de asumir que la diagonal es una componente de la correspondencia Γ. Por lo tanto algún miembro de M es estricto y el rango de x es $l+1$.

Sea entonces $q \in C$ tal que $\langle rq \rangle \subset \Lambda_p$ con $r > k$. Supongamos que $\Lambda_q = \langle rq + E \rangle$, con $\deg E = s = l + 1 - r$.

Ahora queremos analizar la familia Λ_p en un entorno de q. Consideremos entonces en $\mathcal{O}_{C,q}$ un parámetro de uniformización t. Haciendo un cambio de variable podemos suponer que alrededor de q la curva C está dada por una función a valores en $\mathbb{C}^{2l+1}$ de la forma

$$x = (x_0(t), \ldots, x_{2l}(t))$$

donde para $0 \leq i \leq 2l - 1$ tenemos

$$x_i(t) = t^i + \text{ términos de mayor grado en } t$$

y para $i = 2l$

$$x_{2l}(t) = \text{ términos de grado mayor o igual que } 2l.$$

Lo que hicimos es poner a la curva en su forma normal. Al hacer esto tenemos que el i-ésimo plano osculador a C en q está generado por los vectores $e_0, \ldots, e_i$ para cada $1 \leq i \leq 2l$.

Consideremos el $(2l - s - 1)$-plano osculador a C en q y el plano $\langle E \rangle$. Estos dos planos no se cortan ya que juntos generan un hiperplano. Sea $\{v^1, \ldots, v^s\} \subset \mathbb{C}^{2l+1}$ tal que sus clases generan $\langle E \rangle$ en $\mathbb{P}^{2l}$. Si A es la matriz cuyas filas son $v_1, \ldots, v_s$, y D es la submatriz de A formada al elegir las últimas $s+1$ columnas de A, entonces el rango de D es $s+1$ (si no algún vector en $\langle E \rangle$ tiene todas sus últimas $s-1$ coordenadas nulas y por lo tanto pertenece a $Osc_q^{2l-s-1}(C)$). Podemos entonces hacer un cambio de coordenadas para que $v_1, \ldots, v_s$ sean los últimos vectores de la base canónica. La matriz de este cambio de base es de la forma

$$\begin{pmatrix} I & U \\ 0 & V \end{pmatrix}$$

donde I es la identidad de tamaño $(2l - s) \times (2l - s)$ y V es inversible de tamaño $(s+1) \times (s+1)$. Por lo tanto las nuevas $x_0, \ldots, x_{2l}$ verifican

$$x_i(t) = t^i + \text{ términos de mayor grado en } t$$

para $0 \leq i \leq 2l - s - 1$ y

$$x_i(t) = \text{ términos de grado mayor o igual que } 2l - s$$

para $2l - s \leq i \leq 2l$.

Ahora damos entonces la parametrización de Λ_p en un entorno de q. Descompongamos a Λ_q como suma de tres variedades lineales. Por un lado $\langle kq \rangle$ por otro $\langle mq \rangle$ donde $m = r - k$ y finalmente $\langle E \rangle$. Para parametrizar Λ_p en un entorno de q parametrizaremos cada uno de estas tres variedades lineales.

Como cada Λ_p contiene al $(k-1)$-plano osculador a C en p, el plano

$$\langle x(t), x'(t), \ldots, x^{k-1}(t) \rangle$$

forma parte de $\Lambda_{x(t)}$. Con esto damos una parametrización de la primera de las variedades lineales.

El plano $\langle mq \rangle$ tiene varias formas de variar, por ejemplo podría variar en m puntos distintos, o podría variar siempre dando un plano osculador a C o cualquier otra combinación. Para considerar todos los casos podemos suponer que en un entorno de q el plano viene dado por

$$\langle n_1 y_1(t) + \cdots + n_h y_h(t) \rangle$$

donde $n_1 + \cdots + n_h = m$ y cada $y_j(t) \in C$. Como los y_j se acercan a q si t se acerca a cero, entonces podemos parametrizar estos planos con

$$\langle x(\alpha_1(t)), x'(\alpha_1(t)), \ldots, x^{(n_1-1)}(\alpha_1(t)), \ldots, x(\alpha_h(t)), \ldots, x^{n_h-1}(\alpha_h(t)) \rangle$$

donde cada $\alpha_j(t)$ es una serie sin término constante, esto es

$$\alpha_j(t) = a_j t + \text{ términos de mayor grado en } t.$$

Nos falta ver como parametrizar $\langle E \rangle$. Sabemos que este plano está generado por los últimos vectores de la base canónica. Por lo tanto podemos elegir $\psi_1, \ldots, \psi_s$, donde cada ψ_j toma valores en $\mathbb{C}^{2l+1}$, tales que si E es la matriz que las tiene como filas, entonces el menor maximal de E formado por las últimas s columnas de E es una serie inversible, esto es, es una serie de la forma

$$1 + \text{ términos de mayor grado en } t.$$

Notar que en este caso $\psi_1, \ldots, \psi_s$ no necesariamente toman valores en la curva.

Sean $z = (z_0, \ldots, z_r)$ las coordenadas homogéneas del punto $x \in \mathbb{P}^{2l} \setminus$

$\mathrm{Sec}^l(C)$ que fijamos. Entonces lo que estamos suponiendo es que la matriz

$$
\begin{pmatrix}
z \\
x(t) \\
x'(t) \\
\vdots \\
x^{k-1}(t) \\
x(\alpha_1(t)) \\
\vdots \\
x^{(n_1-1)}(\alpha_1(t)) \\
\vdots \\
x(\alpha_h(t)) \\
\vdots \\
x^{(n_h-1)}(\alpha_h(t)) \\
\psi_1(t) \\
\vdots \\
\psi_s(t)
\end{pmatrix}
\tag{4.1}
$$

no tiene rango máximo, esto es, que todos los menores maximales se anulan. Mostraremos que esto no es posible. De hecho no usaremos todos los menores. Para cada $1 \leq i \leq m+1$ elegimos el siguiente menor. Tomamos las primeras r columnas de la matriz, la columna $r - 1 + i$ y las últimas s.

Escribimos esta matriz por bloques

$$
\begin{pmatrix}
A & B \\
C & D
\end{pmatrix}
$$

donde A y D son cuadradas y D tiene tamaño $s \times s$. Por el cambio de variables hecho, el determinante de D es una serie que comienza en uno y cualquier otro menor de $s \times s$ de la matriz $(C|D)$ comienza con una potencia de t positiva. Por lo tanto la menor potencia de t que se obtiene será la menor potencia de t en el determinante de A. Cualquier otra término en el determinante comenzará con una potencia mayor de t. Por lo tanto vamos a analizar solamente el determinante de A y mostrar que no es posible elegir $\alpha_1, \ldots, \alpha_h$ que verifiquen lo pedido.

Notar que por el cambio de variable que hicimos, la variedad lineal $\langle rq \rangle$ está generada por los vectores $e_0, \ldots, e_{r-1}, e_{2l-s+1}, \ldots, e_{2l}$. Luego, como $z \in \langle rq + E \rangle$, tiene que ser $z_r = z_{r+1} = \cdots = z_{2l-s} = 0$. Además como $z \notin \langle (r-1)q + E \rangle$, tiene que ser $z_{r-1} \neq 0$. Escribamos entonces la matriz que tiene como coeficientes el primer término de cada coeficiente de A y calculemos la menor potencia de t que aparece en su determinante.

$$\begin{pmatrix}
z_0 & z_1 & z_2 & \dots & z_{r-1} & 0 \\
1 & t & t^2 & \dots & t^{r-1} & t^{r-1+i} \\
0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1}t & \dots & \binom{r-1}{1}t^{r-2} & \binom{r-1+i}{1}t^{r-2+i} \\
0 & 0 & \binom{2}{2} & \dots & \binom{r-1}{2}t^{r-3} & \binom{r-1+i}{2}t^{r-3+i} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \binom{r-1}{k-1}t^{r-k} & \binom{r-1+i}{k-1}t^{r-k+i} \\
1 & a_1t & a_1^2t^2 & \dots & a_1^{r-1}t^{r-1} & a_1^{r-1+i}t^{r-1+i} \\
0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1}ta_1 & \dots & \binom{r-1}{1}t^{r-2}a_1^{r-2} & \binom{r-1+i}{1}t^{r-2+i}a_1^{r-2+i} \\
\vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \binom{r-1}{n_1-1}t^{r-n_1}a_1^{r-n_1} & \binom{r-1+i}{n_1-1}t^{r-n_1-1+i}a_1^{r-n_1-1+i} \\
\vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\
1 & a_ht & a_h^2t^2 & \dots & a_h^{r-1}t^{r-1} & a_h^{r-1+i}t^{r-1+i} \\
0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1}ta_h & \dots & \binom{r-1}{1}t^{r-2}a_h^{r-2} & \binom{r-1+i}{1}t^{r-2+i}a_h^{r-2+i} \\
\vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \binom{r-1}{n_h-1}t^{r-n_h}a_h^{r-n_h} & \binom{r-1+i}{n_h-1}t^{r-n_h-1+i}a_h^{r-n_h-1+i}
\end{pmatrix}$$

Es fácil ver que el coeficiente que acompaña a la menor potencia de t en el determinante de esta matriz es $\pm z_{r-1}$ por el determinante de la siguiente submatriz

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\
0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \dots & \binom{r-2}{1} & \binom{r-1+i}{1} \\
0 & 0 & \binom{2}{2} & \dots & \binom{r-2}{2} & \binom{r-1+i}{2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \binom{r-2}{k-1} & \binom{r-1+i}{k-1} \\
1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{r-2} & a_1^{r-1+i} \\
0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1}a_1 & \dots & \binom{r-2}{1}a_1^{r-2} & \binom{r-1+i}{1}a_1^{r-2+i} \\
\vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \binom{r-2}{n_1-1}a_1^{r-n_1} & \binom{r-1+i}{n_1-1}a_1^{r-n_1-1+i} \\
\vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\
1 & a_h & a_h^2 & \dots & a_h^{r-2} & a_h^{r-1+i} \\
0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1}a_h & \dots & \binom{r-2}{1}a_h^{r-2} & \binom{r-1+i}{1}a_h^{r-2+i} \\
\vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \binom{r-2}{n_h-1}a_h^{r-n_h} & \binom{r-1+i}{n_h-1}a_h^{r-n_h-1+i}
\end{pmatrix}$$

Llamemos F_i al determinante de esa matriz y considerémoslo como un polinomio en $a_1, \dots, a_h$. Veamos ahora que cada polinomio F_i es divisible por el determinante de la matriz

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \dots & \binom{r-2}{1} & \binom{r-1}{1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} & \dots & \binom{r-2}{2} & \binom{r-1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{r-2}{k-1} & \binom{r-1}{k-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{r-2} & a_1^{r-1} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1}a_1 & \dots & \binom{r-2}{1}a_1^{r-2} & \binom{r-1}{1}a_1^{r-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{r-2}{n_1-1}a_1^{r-n_1} & \binom{r-1}{n_1-1}a_1^{r-n_1-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_h & a_h^2 & \dots & a_h^{r-2} & a_h^{r-1} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1}a_h & \dots & \binom{r-2}{1}a_h^{r-2} & \binom{r-1}{1}a_h^{r-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{r-2}{n_h-1}a_h^{r-n_h} & \binom{r-1}{n_h-1}a_h^{r-n_h-1} \end{pmatrix}$$

El determinante de V está dado por

$$\prod_{i<j}(a_j - a_i)^{n_i n_j} \cdot \prod_i (a_i - 1)^{k n_i}$$

La cuenta es similar al cálculo del determinante de Vandermonde. Se puede suponer que a_h es una variable X y por lo tanto tenemos que como polinomio en X el determinante tiene grado $n_h(r - n_h)$ (el monomio de mayor grado en X se obtiene con el menor formado por las últimas n_h filas y columnas). Pero claramente tiene a 1 como raíz de multiplicidad k y a cada a_j como raíz de multiplicidad $n_h n_j$, para $1 \leq j \leq h - 1$. El polinomio es entonces

$$c \cdot \prod_{i<h}(X - a_i)^{n_h n_i} \cdot (X - 1)^{k n_h}.$$

Por hipótesis inductiva el coeficiente principal c es

$$\prod_{1 \leq i<j<h}(a_j - a_i)^{n_i n_j} \cdot \prod_{i<h}(a_i - 1)^{k n_i}$$

evaluando en $X = a_h$ se tiene el resultado buscado.

Para probar que F_i es múltiplo del anterior se procede de la misma manera y sea ve que entre las raíces de $F_i(X)$ están 1 con multiplicidad al menos kn_h y a_j, con multiplicidad al menos n_jn_h, para $1 \leq j \leq h-1$, y que el coeficiente principal es el mismo. Por lo tanto como polinomios son múltiplos y evaluados en a_h se tiene la igualdad buscada.

Ahora el determinante de la matriz 4.1 lo podemos ver como una ecuación en $\alpha_1(t), \dots, \alpha_h(t)$. Es claro que tomar $\alpha_j(t) = 1$ anula al determinante con multiplicidad n_jk, y que si uno toma $\alpha_j(t) = \alpha_k(t)$ también anula el determinante con multiplicidad n_in_j. Pero estas soluciones no nos sirven por lo que se pueden descartar. Al descartarlas, también estamos descartando las soluciones $a_j = a_k$ (n_jn_k veces) y $a_j = 1$ (n_jk veces) de cada F_i.

Esto quiere decir que si la matriz 4.1 no tiene rango máximo, tenemos que los polinomios

$$G_i(a_1, \dots, a_h) = \frac{F_i(a_1, \dots, a_h)}{\det V}$$

tienen ceros comunes. Probaremos que esto no puede ser, con lo que terminamos de probar la proposición 4.23.

Proposición 4.25. *Sean $n_0, n_1, \dots, n_h \in \mathbb{N}$ y sea $r = n_0 + \cdots + n_h$. Para cada $i \geq r$ sea $F_i(a_1, \dots, a_h)$ el polinomio definido como el determinante de la matriz y sea $G_i(a_1, \dots, a_h) = F_i(a_1, \dots, a_h)/\det(V)$. Entonces para cada $d \geq r$, $G_d, G_{d+1}, \dots, G_{d+r-n_0}$ no tienen ceros comunes*

Demostración. Haremos inducción en h.

Consideremos entonces el caso en que tenemos solamente $a_1 = a$ y $n_1 = n$. En este caso los polinomios $F_{d+i}(a)$ $(i = 0, \dots, n)$ son

$$F_{d+i}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \dots & \binom{r-2}{1} & \binom{d+i}{1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} & \dots & \binom{r-2}{2} & \binom{d+i}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{r-2}{k-1} & \binom{d+i}{k-1} \\ 1 & a & a^2 & \dots & a^{r-2} & a^{d+i} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1}a & \dots & \binom{r-2}{1}a^{r-3} & \binom{d+i}{1}a^{d+i-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{r-2}{n-1}a^{r-n-1} & \binom{d+i}{n-1}a^{d+i-n+1} \end{pmatrix}$$

Consideremos el polinomio

$$P_n(a) = \binom{n}{0}a^nF_d(a) - \binom{n}{1}a^{n-1}F_{d+1}(a) + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}F_{d+n}(a)$$

El polinomio $P_n(a)$ es el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 + H_0(a) \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \dots & \binom{r-2}{1} & \binom{d+i}{1} + H_1(a) \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} & \dots & \binom{r-2}{2} & \binom{d+i}{2} + H_2(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{r-2}{k-1} & \binom{d+i}{k-1} + H_{k-1}(a) \\ 1 & a & a^2 & \dots & a^{r-2} & 0 \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1}a & \dots & \binom{r-2}{1}a^{r-3} & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{r-2}{n-1}a^{r-n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

donde

$$H_i(a) = a^n \binom{d}{i} + \text{ términos de menor grado en } a$$

para cada $0 \leq i \leq n$. Sabemos que $a = 1$ es raíz de F_i de multiplicidad kn para cada i. Por lo tanto también es raíz de P_n con por lo menos la misma multiplicidad. Pero P_n tiene grado $n + (r - n - 1)n = n(r - n) = nk$, pues su coeficiente principal es el determinante de la matriz

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \dots & \binom{r-n-2}{1} & \binom{d}{1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} & \dots & \binom{r-n-2}{2} & \binom{d}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \binom{d}{r-2} \end{pmatrix} = \binom{d}{r-2} \neq 0$$

Por lo tanto

$$P_n(a) = c \cdot (a - 1)^{nk}.$$

Dividiendo por $\det(V) = (a - 1)^{nk}$ tenemos que c es combinación de los polinomios $G_d(a), \dots, G_{n+d}(a)$ y por lo tanto estos polinomios no tienen un cero común.

Supongamos ahora que tenemos $n_0, n_1, \dots, n_h$, $r = k + n_1 + \dots + n_h$, $n = n_1 + \dots + n_h$. Dado $d \geq r$, queremos ver que $G_d, \dots, G_{d+n}$ no tienen ceros comunes. Para esto consideremos para cada $0 \leq i \leq n - n_h$ el polinomio

$$P_i = \binom{n_h}{0} a_h^{n_h} F_{d+i} - \binom{n_h}{1} a_h^{n_h - 1} F_{d+i+1} + \dots + (-1)^{n_h} \binom{n_h}{n_h} F_{d+i+n_h}$$

Consideremos a P_i como un polinomio en a_h. Tiene a 1 como raíz de multiplicidad al menos n_0 y a cada a_i $(1 \le i \le h-1)$ como raíz de multiplicidad al menos $n_h n_j$. Veremos que su grado es exactamente $n_h(k + n_1 + \cdots + n_{h-1})$.

El polinomio P_i es el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & \dots & 1 & H_0^0(a_1,\dots,a_h) \\
0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \dots & \binom{r-2}{1} & H_1^0(a_1,\dots,a_h) \\
0 & 0 & \binom{2}{2} & \dots & \binom{r-2}{2} & H_2^0(a_1,\dots,a_h) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \binom{r-2}{k-1} & H_{k-1}^0(a_1,\dots,a_h) \\
1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{r-2} & H_0^1(a_1,\dots,a_h) \\
0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1}a_1 & \dots & \binom{r-2}{1}a_1^{r-3} & H_1^1(a_1,\dots,a_h) \\
\vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \binom{r-2}{n_{h-1}-1}a_{h-1}^{r-n_{h-1}-1} & H_{n_{h-1}-1}^{h-1}(a_1,\dots,a_h) \\
1 & a_h & a_h^2 & \dots & a_h^{r-2} & 0 \\
0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1}a_h & \dots & \binom{r-2}{1}a_h^{r-2} & 0 \\
\vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \binom{r-2}{n_h-1}a_h^{r-n_h} & 0
\end{pmatrix}$$

donde el polinomio H_i^j es

$$H_l^j(a_1,\dots,a_h) = a_h^{n_h}\binom{d+i}{l}a_j^{d+i-l} + \text{términos con menor potencia de } a_h$$

El coeficiente principal de P_i como polinomio en a_h es entonces

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\
0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \dots & \binom{r-2-n_h}{1} & \binom{d+i}{1} \\
0 & 0 & \binom{2}{2} & \dots & \binom{r-2-n_h}{2} & \binom{d+i}{2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \binom{r-2-n_h}{k-1} & \binom{d+i}{k-1} \\
1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{r-2-n_h} & a_1^{d+i} \\
0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1}a_1 & \dots & \binom{r-2-n_h}{1}a_1^{r-3-n_h} & \binom{d+i}{1}a_1^{d+i-1} \\
\vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \binom{r-2-n_h}{n_{h-1}-1}a_{h-1}^{r-n_{h-1}-1-n_h} & \binom{d+i}{n_{h-1}-1}a_{h-1}^{d+i-n_{h-1}+1}
\end{pmatrix}$$

Estos determinantes como polinomios en $a_1,\dots,a_{h-1}$ son $F_i'(a_1,\dots,a_{h-1})$ para $r' = r - n_h$.

Con lo cual tenemos

$$P_i(a_1,\dots,a_h)=F'_{d+i}(a_1,\dots,a_{h-1})\cdot(a_h-1)^k\cdot\prod_{j=1}^{h-1}(a_h-a_j)^{n_j}$$

Por lo tanto tenemos que

$$\frac{P_i}{\det(V)}=G'_{d+i}(a_1,\dots,a_{h-1}).$$

Esto quiere decir que si $(a_1,\dots,a_h)$ es un cero común de $G_d,\dots,G_{d+n}$, entonces $(a_1,\dots,a_{h-1})$ es un cero común de $\tilde{G}_{d+i}(a_1,\dots,a_{h-1})$. Pero sabemos por hipótesis inductiva que estos polinomios no tienen ceros comunes. Luego los G_{d+i} tampoco. $\square$

Usando la proposición para $n_0=k$ y $d=r$ tenemos que no pueden existir $\alpha_1,\dots,\alpha_h$ que verifican lo pedido y por lo tanto terminamos de probar la proposición 4.23. $\square$

Con esto probamos que los puntos en $\mathbb{P}^{2l}\setminus\mathrm{Sec}^l(C)$ tienen todos rango $l+1$. Es más, probamos que solamente finitos de los l-planos $(l+1)$-secantes a C que contienen a x son no estrictos. Luego cada $x\in\mathbb{P}^{2l}\setminus\mathrm{Sec}^l(C)$ se escribe como suma de $l+1$ puntos de C de ∞^1 maneras distintas, y dos cualesquiera de ellas no pertenecen a un mismo sistema lineal de divisores.

4.9. Secant Plane Formula con multiplicidad

En esta sección aplicaremos lo obtenido para curvas elípticas inmersas en $\mathbb{P}^{2l}$ al cálculo de la Secant Plane Formula con multiplicidad. Lo que queremos es calcular para cada $x\in\mathbb{P}^{2l}\setminus\mathrm{Sec}^l C$ la cantidad de l-planos $(l+1)$-secantes no estrictos que lo contienen. Este problema es equivalente al siguiente

Proposición 4.26. *Sea C una curva de género g. Entonces el número virtual de divisores de grado $l+1$ que contienen algún punto múltiple y que imponen solo l condiciones en una serie lineal de grado d y dimensión $2l-1$ es*

$$\sum_{\alpha=0}^{l}(-1)^\alpha\binom{2l-1+g-d}{\alpha}\binom{g}{l-\alpha}(4l-2\alpha) \tag{4.2}$$

La serie lineal que consideramos es $U\subset H^0(L)$ el subespacio de hiperplanos que contienen a x. Entonces $d=2l+1$. Si un divisor D de grado $l+1$ impone solo l condiciones en un hiperplano que contiene a x, entonces tiene que ser $x \in \langle D \rangle$. Luego la fórmula 4.2 en el caso $d = 2l + 1$ y $g = 1$ cuenta lo que queremos.

En general esta fórmula puede ser interpretada como el número de $(l-1)$-planos $(l + 1)$-secantes no estrictos a una curva $C \subset \mathbb{P}^{2l-1}$ de género g.

Daremos ahora una idea de cómo se obtiene la fórmula 4.2 en general. Luego mostraremos otra forma para obtener la fórmula para el caso $d = 2l+1$ y $g = 1$.

En su mayor generalidad la plane secant formula afirma que si $C \subset \mathbb{P}^{2l-1}$ es una curva, entonces los $(l - 1)$-planos $(l + 1)$-secantes a C describen una curva. Esto quiere decir que en la variedad de divisores efectivos de grado $l + 1$, aquellos que solo imponen l condiciones en un sistema lineal de grado d y dimensión $2l - 1$ describen una curva. Si llamamos v^1_{l+1} a la clase de esta curva en el anillo de cohomología de C_{l+1} la variedad de los divisores efectivos de grado $l + 1$ (que es la potencia simétrica $(l + 1)$-ésima de C), entonces se tiene

$$\sum_{\alpha=0}^{l}(-1)\alpha\binom{2l-1+g-d}{\alpha}\frac{1}{(l-\alpha)!}x^{\alpha}\theta^{l-\alpha}$$

donde x y θ generan la clase de cualquier ciclo algebraico en C_{l+1}.

Por otro lado podemos considerar dentro de C_{l+1} aquellos que tienen puntos dobles. Estos son la imagen de la aplicación

$$\phi : C \times C_{l-1} \to C_{l+1}$$

definida por $\phi(p, D) = 2p + D$. En este caso la clase de $\phi_*([C \times C_{l-1}])$ en el anillo de cohomología de C_d es

$$2(l + g)x - 2\theta$$

Como este ciclo tiene codimensión uno se espera que entonces el producto de los dos ciclos de un número.

Usando que

$$x^{l+1-\alpha}\theta^{\alpha} = \begin{cases} \binom{g}{\alpha}\alpha!\xi & \text{si } \alpha \leq l-1 \\ 0 & \text{si } \alpha > l-1, \end{cases}$$

donde ξ genera $H^{2l-2}(C_{l-1}, \mathbb{Z})$, se obtiene

$$\sum_{\alpha=0}^{l}(-1)^{\alpha}\binom{2l-1+g-d}{\alpha}\binom{g}{l-\alpha}(4l-2\alpha).$$

Para más información remitimos a [2], capítulo VIII.

Ejemplo 4.27. Si $l = 2$ entonces estamos buscando cuántas rectas tangentes trisecantes tiene una curva $C \subset \mathbb{P}^3$ no singular. En este caso la fórmula es

$$2((d-2)(d-3)+g(d-6))$$

la fórmula de Salmon (1868) que ya habíamos exhibido en la sección 4.5

A nosotros nos interesa el caso $g = 1$ y $d = 2l + 1$. La fórmula en este caso se simplifica bastante ya que solamente hay que considerar $\alpha = l - 1, l$. El resultado es

$$\sum_{\alpha=0}^{l}(-1)^\alpha\binom{-1}{\alpha}\binom{1}{l-\alpha}(4l-2\alpha) = (4l-2(l-1))+(4l-2l) = 4l+2.$$

Veamos ahora la otra forma de calcular el número recién obtenido para C de género uno y para $d = 2l + 1$ (que es el caso que nos interesa). En vez de calcular $(l-1)$-planos $(l+1)$-secantes a una curva $C \subset \mathbb{P}^{2l-1}$ consideraremos el problema original, esto es, consideramos $C \subset \mathbb{P}^{2l}$ una curva elíptica de grado $2l + 1$ y un punto $x \in \mathbb{P}^{2l} \setminus \mathrm{Sec}^l(C)$ y tratamos de calcular la cantidad de l-planos $(l + 1)$-secantes a C que contienen a x.

Recordamos que M es la familia de l-planos $(l+1)$-secantes que contienen a x y Γ es la correspondencia

$$\Gamma = \{(p,q) \in C \times C : \langle p+q\rangle \subset \Lambda \text{ para } \Lambda \in M\}$$

Para calcular la cantidad de l-planos $(l + 1)$-secantes no estrictos que contienen a x tenemos que calcular la cantidad de puntos p tales que $(p, p) \in \Lambda$. Este número se llama el número de puntos unidos de la correspondencia y se puede calcular si conocemos el grado y la valencia de Γ.

El grado de una correspondencia es el cardinal de la fibra de la primera proyección. La valencia es un entero k tal que el divisor $\pi_1^{-1}(p) + kp$ sea un divisor cuya clase de equivalencia lineal es la misma para cada p.

En nuestro caso el grado es $2l$. Para ver esto suponemos que tanto x como p son genéricos. Si proyectamos desde p obtenemos una curva elíptica $C' \subset \mathbb{P}^{2l-1}$ de grado $2l$ y un punto $x' \notin \mathrm{Sec}^{l-1} C$. Luego, por la genericidad de x', existen exactamente dos $(l-1)$-planos l-secantes a C' que contienen a x', y ambos son no estrictos. Habíamos visto en la sección 4.6 que los soportes de estos divisores no se cortan. Luego cada uno de los puntos q en estos soportes verifica $\langle p+q\rangle$ está contenido en un l-plano $(l + 1)$-secante a C que contiene a x. Como hay $2l$ posibles puntos q, el grado de Γ es $2l$.

Para calcular la valencia de Γ observamos lo siguiente. Si

$$\Lambda_1 = \langle p, q_1, \ldots, q_l\rangle \text{ y } \Lambda_2 = \langle p, q_{l+1}, \ldots, q_{2l}\rangle$$

son los dos l-planos que contienen a x y a p, entonces la variedad lineal $\langle p, q_1, \ldots, q_{2l}\rangle$ tiene que ser un hiperplano. Como $\pi_1^{-1}(p) = q_1 + \cdots + q_{2l}$, vemos que $p + \pi_1^{-1}$ pertenece para p genérico a la misma clase de equivalencia lineal. Esto muestra que la valencia de Γ es uno.

Luego si d es el grado de Γ y k es su valencia, y dado que Γ es simétrica, la cantidad de puntos unidos de Γ

$$2d + 2kg = 2(2l+1)$$

que coincide con la fórmula 4.2.

Tenemos entonces

Proposición 4.28. *Sea $C' \subset \mathbb{P}^{2l}$ una curva elíptica inmersa por el sistema lineal completo asociado al divisor $(2l+1)p_0$. Sea $x \notin \operatorname{Sec}^2 C'$ y consideremos $C_x \subset \mathbb{P}^{2l-1}$ la imagen de la proyección desde x. La curva C_x es no singular y de grado $2l+1$. Sea n_x el número de $(l-1)$-planos $(l+1)$ secantes de C_x*

1. *Si $x \in \operatorname{Sec}^{l,2}(C')$, entonces $n_x = \infty$.*

2. *Si $x \notin \operatorname{Sec}^l(C')$, entonces $n_x = 4l+2$ (contados apropiadamente).*

3. *Si $x \in \operatorname{Sec}^l C' \setminus \operatorname{Sec}^{l,2} C'$, entonces $n_x = 4l+2$ (contados apropiadamente).*

Demostración. Por la discusión anterior alcanza con calcular la cantidad de l-planos $(l+1)$-secantes a C' no estrictos que contienen a x.

Si $x \in \operatorname{Sec}^{l,2}(C')$, entonces existe un divisor D de grado l tal que $x \in \langle D\rangle$ y tal que D tiene puntos múltiples. Pero entonces para cada $p \in C$ el plano $\langle D + p\rangle$ es un l-planos $(l+1)$-secante no estricto que contiene a x.

Si $x \notin \operatorname{Sec}^l C'$ podemos usar los resultados de la sección anterior para afirmar que n_x no es infinito. La fórmula 4.26 dice que contados apropiadamente son $4l+2$.

Falta analizar el caso $x \in \operatorname{Sec}^l C' \setminus \operatorname{Sec}^{l,2} C'$. En este caso existe un divisor D de grado l sin puntos múltiples tal que $x \in \langle D\rangle$. Para cada $p \in C'$ consideramos los divisores $(2l+1)p_0 - D - p$ y $D + p$ (de grados l y $l+1$ respectivamente). Como $D + p$ recorre todas las clases de equivalencia de divisores de grado $l+1$, para analizar todos los l-planos $(l+1)$-secantes a C' que contienen a x hay que analizar los conjuntos $W_2(x)$.

La matriz μ_x tiene rango l salvo en el caso en que $(2l+1)p_0 - D - p \sim D$ en el que tiene rango $l-1$.

Si se da el primer caso, tenemos que $\dim W_2(x) = 1$. Esto quiere decir que hay un único divisor E equivalente a $D + p$ tal que $x \in \langle E\rangle$. Pero $D + p$ es un tal divisor. Este divisor tendrá puntos múltiples solo para los p que están en el soporte de D.

Si se da el segundo caso, entonces $\dim W_2(x) = 2$. Esto quiere decir que hay un $\mathbb{P}^1$ de l-planos $(l+1)$-secantes a C' que contienen a x. Queremos ver que $W_2(x) \not\subset \Delta_{\mathcal{O}_C(D+p)}$, esto es que alguno es estricto. Si así no fuera, entonces $W_2(x)$ tendría puntos base y uno de ellos sería punto doble de todos los elementos de $W_2(x)$. Sea $E = 2q$ el base locus. Resulta entonces que hay por lo menos dos l-planos $(l+1)$-secantes que contienen a x y que cada uno de estos es de la forma $\langle 2q + F_i \rangle$. Pero entonces podemos usar el lema 2.5 y deducir que

$$\langle 2q + F_1 \rangle \cap \langle 2q + F_2 \rangle = \langle (2q + F_1) \cap (2q + F_2) \rangle.$$

Sea $F = (2q + F_1) \cap (2q + F_2)$. Como $x \in \langle 2q + F_1 \rangle \cap \langle 2q + F_2 \rangle$, entonces $x \in \langle F \rangle$. Ahora F es un divisor de grado a lo sumo l que tiene un punto doble. Esto quiere decir que $x \in \operatorname{Sec}^{l,2} C'$ que contradice la hipótesis. Luego en $W_2(x)$ hay finitas secciones con puntos múltiples.

En este caso la fórmula 4.26 dice que son $4l+2$ contados apropiadamente.

$\square$

Bibliografía

[1] J. Alexander and A. Hirschowitz. Polynomial interpolation in several variables. *Journal of Algebraic Geometry*, 4:201–222, 1995.

[2] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths, and J. Harris. *Geometry of Algebraic Curves*, volume 1. Springer Verlag, 1985.

[3] M. F. Atiyah. Complex analytic connections in fibre bundles. *Transactions of the American Mathematical Society*, 85(1):181–207, 1957.

[4] M. V. Catalisano, A. V. Geramita, and A. Gimigliano. Ranks of tensors, secant varieties of segre varieties and fat points. *Linear algebra and its applications*, 355:263–285, 2002.

[5] C. Ciliberto. Geometric aspects of polynomial interpolation in more variables and of waring's problem. In *Proceedings of the ECM, Barcelona*, 2000.

[6] G. Comas and M. Seiguer. On the rank of a binary form. Preprint, 2002.

[7] D. Eisenbud, J. Koh, and M. Stillman. Determinantal equations for curves of high degree. *American Journal of Mathematics*, 110(3):513–539, June 1988.

[8] T. Fisher. The higher secant varieties of an elliptic normal curve. Preprint, 2002.

[9] W. Fulton and J. Harris. *Representation Theory. A First Course*. Graduate Texts in Mathematics. Readings in Mathematics 129. Springer Verlag, 1991.

[10] S. González and R. Mallavibarrena. Osculating degeneration of curves. *Communications in Algebra*, 31(8):3829–3845, 2003.

[11] M. L. Green. Koszul cohomology and the geometry of projective varieties. *Journal of Differential Geometry*, (19):125–171, 1984.

[12] P. Griffiths and J. Harris. Residues and zero-cycles on algebraic varieties. *Annals of Mathematics*, (108):461–505, 1978.

[13] J. Harris. *Algebraic Geometry, A First Course*. Graduate Texts in Mathematics. Springer Verlag, 1992.

[14] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics 152. Springer Verlag, 1977.

[15] P. Jahnke and I. Radloff. Splitting jet sequences. *Mathematical Research Letters*, (11):345–354, 2004.

[16] H. Kaji. On the tangentially degenerate curves. *Journal of the London Mathematical Society*, 2(33):430–440, 1986.

[17] S. L. Kleiman. The enumerative theory of singularities. In *Real and complex singularities, Oslo l976 (ed. P. Holm)*, pages 475–495. Sijthoff & Noordhoff, 1978.

[18] J. P. S. Kung and G.-C. Rota. The invariant theory of binary forms. *Bulletin (New Series) of the American Math Society*, 19(1):27–85, 1984 1984.

[19] R. Lazarsfeld. A sampling of vector bundle techniques in the study of linear series. In *Lectures on Riemann surfaces*, pages 500–559. World Scientific, 1989.

[20] P. le Barz. Gómetrie énumérative pour les multi-sécants. In *Lecture Notes in Mathematics 683*, pages 116–167. Springer Verlag, 1977.

[21] P. le Barz. Formules multisecants pour les courbes gauches quelconques. In *Enumerative Geometry and Classical Algebraic Geometry*, Prog. In Mathematics 24, pages 165–197. Birkhauser, 1982.

[22] R. Piene. Numerical characters of a curve in projective space. In *Real and complex singularities, Oslo l976 (ed. P. Holm)*, pages 475–495. Sijthoff & Noordhoff, 1978.

[23] M. S. Ravi. Determinantal equations for secant varieties of curves. *Communications in Algebra*, 22(8):3103–3106, 1994.

[24] I. R. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry 1. Varieties in Projectve Space.* Springer Verlag, 2nd edition, 1994.

[25] I. R. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry 2. Schemes and Complex Manifolds.* Springer Verlag, 2nd edition, 1994.

[26] J. J. Sylvester. An essay on canonical forms, supplemented by a sketch of a memoir on elimination, transformation and canonical forms. In *Collected Works, Vol. I*, pages 203–216. Cambridge University Press, 1904.

[27] J. J. Sylvester. Sketch of a memoir on elimination, transformation and canonical forms. In *Collected Works, Vol. I*, pages 184–197. Cambridge University Press, 1904.

[28] A. Terracini. Sulle V_k per cui la varieta' degli S_h $(h+1)$-secanti ha dimensione minore dell' ordinario. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, (31):392–396, 1911.

[29] F. L. Zak. *Tangent and Secants of Algebraic Varieties*, volume 127 of *Translations of Mathematical Monographs.* AMS, 1993.