



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Estabilidad orbital de solitones en ecuaciones con estructura hamiltoniana

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias
Matemáticas

Juan Pablo Borgna

Directores de tesis: Dr. Diego F. Rial
Dra. María C. Mariani

Lugar de trabajo: Departamento de Matemática, FCEyN, UBA.

Buenos Aires, junio de 2006

Estabilidad orbital de solitones en ecuaciones con estructura hamiltoniana

Resumen

Esta tesis está dedicada al estudio de la estabilidad orbital de un par de ecuaciones diferenciales que tienen en común el hecho de poseer una estructura hamiltoniana, ellas son la ecuación de Schrödinger y la de Klein-Gordon, ambas con término no lineal del tipo potencial y dato de borde periódico.

En primer lugar probamos que para este tipo de problema existe solución fundamental, con su correspondiente perfil solitón. Luego centramos el estudio de la estabilidad del flujo de la ecuación entorno de esta solución fundamental, para lo que construimos una conveniente función de Lyapunov usando las cantidades conservadas por el flujo de las ecuación.

Para el caso de la ecuación de Schrödinger probamos la estabilidad orbital de las soluciones, bajo algunas condiciones sobre los parámetros de la ecuación. Los resultados alcanzados son comparables con los ya conocidos para esta misma ecuación con dominio espacial no acotado. Debido al comportamiento estable de las soluciones que inician cercanas al perfil solitón, también introdujimos un método numérico para la simulación de la dinámica, para esto realizamos el estudio completo de la existencia y unicidad de los solitones discretos y del comportamiento estable de las soluciones discretas. Esto mismo nos permitió probar la convergencia del método.

Por último, los resultados previos conocidos determinaban la inestabilidad de las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon con dominio espacial no acotado, por lo tanto no era esperable obtener algo distinto en nuestro caso. La aplicación del método aquí dado, si bien no nos da la estabilidad, nos permite caracterizar la dirección responsable de la inestabilidad, en el caso que la haya.

Palabras claves: *Sistemas hamiltonianos, Schrödinger periódico no lineal potencial; Klein-Gordon periódico no lineal potencial; estados fundamentales; solitón; cantidades conservadas; estabilidad orbital; diferencias finitas, convergencia del método.*

Orbital stability of solitons in hamiltonian equations

Abstract

This thesis is devoted to the study of the orbital stability in a pair of hamiltonian type differential equations: Schrödinger and Klein-Gordon equation, both with potential nonlinear term and periodic boundary data.

At first we proved for this kind of problems there exists ground state, with its corresponding profile soliton. Then we centered our attention in to study the stability of the equation flux when the initial data is closed to soliton, for this we built a suitable Lyapunov function using conservation laws.

For the Schrödinger equation we proved orbital stability of the solutions, under some conditions over parameters of the equation. We obtained comparable results with the well-known ones for spatial non bound domain. Due to stable behavior of solutions with initial data closed to soliton profile, we introduced a numeric method for the dynamic simulation, for this we studied existence and unicity of the discrete solitons and stable behavior of discrete solutions. With this result we proved convergence of the method.

At last, for Klein-Gordon equation with spatial non bound domain instability previous results were given, then we could not expect a different result for our case. The application of the method developed here, although it does not give us the stability, it allows us to characterize the instability direction, in the case that is it.

Keywords: *Hamiltonian systems; Periodic Potential Nonlinear Schrödinger; Periodic Potential Nonlinear Klein-Gordon; ground states; solitons; conservation laws; orbital stability; finite differences; convergence of the method .*

Quiero agradecer profundamente a todas las personas que me apoyaron durante todos estos años. En primer lugar a Tico, un amigo al que además le toco la no tan fácil tarea de dirigirme en la realización de este trabajo. Pero por sobre todo le agradezco a Silvia y a mis hijos porque ellos me dan el cariño necesario para continuar, por ellos adquiere sentido todo esfuerzo y todo pequeño logro que uno llega a alcanzar.

Índice general

1. Introducción	1
2. Conceptos preliminares	5
2.1. Teoría de Semigrupo.	5
2.1.1. Semigrupo de operadores lineales. Generador infinitesimal.	5
2.1.2. Aplicación a la existencia de soluciones de sistemas no lineales.	8
2.2. Solitones	9
3. Sistemas Hamiltonianos	13
3.1. Definición y ejemplos de sistemas Hamiltonianos	13
3.1.1. Ecuación de Newton. Momentos Lineales.	13
3.1.2. Ecuación KdV	15
3.1.3. Ecuación lineal de Schrödinger	15
3.1.4. Ecuación de Schrödinger no lineal	16
3.1.5. Ecuación de Klein-Gordon	16
3.2. Cantidades conservadas	17
3.2.1. Ecuación KdV	18
3.2.2. Ecuación de Schrödinger no lineal	19
3.2.3. Ecuación de Klein-Gordon	20
3.3. Ondas viajeras y solitones	20
3.3.1. Solitón en la KdV	20
3.3.2. Solitones de la Sine-Gordon	21
3.3.3. Solitones en Schrödinger no lineal	22
4. Ecuación de Schrödinger no lineal	25
4.1. En todo \mathbb{R}^n	25
4.1.1. Existencia y Unicidad de Soluciones.	26

4.1.2.	Existencia de solitones	26
4.1.3.	Estabilidad	27
4.2.	La ecuación periódica	30
4.2.1.	Existencia y unicidad de soluciones	31
4.2.2.	Solitones del periódico continuo	32
4.2.3.	Estabilidad orbital de los solitones	33
4.3.	Discretización de la ecuación periódica	38
4.3.1.	Ecuación Semidiscreta	38
4.3.2.	Definiciones básicas	39
4.3.3.	Solitones del problema semidiscreto	41
4.3.4.	Funcional de Lyapunov y estabilidad	42
4.3.5.	Lemas Técnicos	44
4.3.6.	Acotación inferior de L_-^h	47
4.3.7.	Acotación inferior de L_+^h	52
4.3.8.	Resultados Centrales	53
5.	Ecuación de Klein-Gordon	55
5.1.	Existencia de soluciones de la ecuación K-G	56
5.2.	Ecuación con no linealidad potencial	58
5.2.1.	Existencia de solitones	58
5.2.2.	Órbita, distancia y función de Lyapunov	58
5.2.3.	Geometría de las superficies de isocarga	60
5.2.4.	Operador lineal U	64
5.2.5.	Conclusión: dirección de inestabilidad	66
A.	Hamiltonianos y Cantidades Conservadas	67
A.1.	La ecuación KdV	67
A.2.	La ecuación de Schrödinger	67
A.2.1.	Estructura Hamiltoniana	68
A.2.2.	Cantidades conservadas	68
A.3.	La ecuación de Klein Gordon	69
A.3.1.	Estructura Hamiltoniana	69
A.3.2.	Cantidades conservadas	71

B. Demostraciones y Propiedades de la PNLS	73
B.1. Demostración de la proposición (4.2.1)	73
B.1.1. Existencia	73
B.1.2. Norma L^p de V_σ	76
B.2. Condiciones de ortogonalidad	78
B.3. Expansión de Taylor de $\Delta\mathcal{E}$	79
B.4. Acotación de las formas cuadráticas $\langle L_+^\sigma u, u \rangle$	80
B.4.1. Estudio de la paridad de las autofunciones de L_+^σ	80
B.4.2. Desarrollo de la condición (4.30)	81
B.4.3. Simplicidad de $\lambda = 0$ como autovalor de L_+^σ	82
B.4.4. Convergencia del primer autovalor de L_+^σ	82
C. Demostraciones y propiedades en el caso discreto	91
C.1. Demostración lema de existencia de solitones	91
C.1.1. Existencia	91
C.1.2. Unicidad	93
C.2. Condición de ortogonalidad	94
C.3. Cota de la norma de las poligonales	95
C.4. Resultados de convergencia	96
C.4.1. Demostración del lema (4.3.3)	96
C.4.2. Demostración de la proposición (4.3.1)	97
C.4.3. Demostración de la proposición (4.3.2)	100
C.5. Cota inferior de L_-^h	106
D. Demostraciones y propiedades en KG	111
D.1. Existencia de soluciones y convergencia	111
D.1.1. Demostración del teorema (5.1.1)	111
D.1.2. Demostración del teorema (5.1.2)	112
D.2. Klein-Gordon con no linealidad potencial	113
D.2.1. Condiciones de ortogonalidad	113
D.2.2. Cálculo de la primera y de la segunda variación de \mathcal{E}	114

Capítulo 1

Introducción

Este trabajo está dedicado al estudio del comportamiento de las soluciones de un par de ecuaciones diferenciales no lineales que tienen en común una estructura hamiltoniana, ellas son la ecuación de Schrödinger no lineal y la ecuación de Klein-Gordon. El término no lineal en cada ecuación produce un delicado balance entre el efecto disipativo o dispersivo de la parte lineal y el efecto de empujamiento de la parte no lineal lo que da lugar a la aparición de soluciones especiales llamadas “ground states” o “soluciones fundamentales”, las que poseen un perfil definido inalterable en el tiempo, al que llamamos “solitón”, y que son soluciones del problema estacionario asociado. En la primera parte de esta tesis presentamos un pequeño resumen histórico de como se descubrió este tipo de fenómeno.

La ecuación de Schrödinger lineal fue presentada en la década de 1920 por el físico austríaco Erwin Schrödinger como la ecuación básica de la mecánica cuántica, la solución de la misma describe la probabilidad de que un electrón se encuentre en determinados niveles de energía, a partir de entonces los modelos físico que contemplan el efecto cuántico incluyen alguna variante de esta ecuación. A mediados del siglo XX se modeló la transmisión de pulsos láseres en fibras ópticas mediante la ecuación lineal de Schrödinger más un término no lineal de tipo potencial, a la que se llamó “Schrödinger cúbica”, aunque en general nosotros plantearemos la ecuación con una potencia σ positiva.

La existencia de soluciones y el comportamiento de las mismas para el caso de la ecuación de Schrödinger con dominio en todo \mathbb{R}^n fueron desarrollados por varios matemáticos, siendo uno de los primeros y principales T. Kato a partir la década de los '50. Disponemos de resultados de existencia local y global y también de unicidad para casos muy generales de no linealidades, pero aún más hay resultados de blow-up para la solución bajo ciertas condiciones de los parámetros. Para un compendio de todos estos resultados recomendamos el libro de T. Cazenave [7]. Respecto a los resultados de estabilidad de las soluciones, algunos trabajos de W. Strauss y de M. Weinstein de mediados de los '80 introducen la idea de caracterizar a las soluciones solitones como mínimos de un funcional no lineal, el funcional de

Galliaro-Nirenberg, usan esto para controlar la variación de la función de Lyapunov que se construye con la energía y otra cantidad conservada por el flujo, obteniendo un resultado de estabilidad orbital, esto es, si el dato inicial de la ecuación está cerca de la solución solitón entonces la solución de la ecuación se mantiene cerca de la órbita del solitón (no necesariamente de él mismo). Para ellos el concepto de órbita de una función involucra todos los cambios de fases y traslaciones de las misma, lo que tiene sentido cuando el dominio espacial es todo \mathbb{R}^n .

Respecto a la ecuación de Schrödinger con dominio espacial acotado y con datos de borde periódicos, debido a los trabajos de J. Bourgain y de O. Kavian de finales de los '80, tenemos resultados de existencia, unicidad y blow-up semejantes a los ya comentados, aunque las técnicas usadas por ellos son esencialmente diferentes. Respecto a la estabilidad de las soluciones en el caso periódico no se conocían resultados análogos a los obtenidos para todo \mathbb{R}^n porque las técnicas usadas por W. Strauss y de M. Weinstein no son extensibles a este caso. La caracterización de las soluciones solitones como mínimo de la funcional de G-N, a pesar que es posible hacerlo, no resulta útil para el estudio de la estabilidad orbital por no disponer de las traslaciones. Aplicaremos técnicas de la teoría de perturbaciones para obtener en el caso periódico las estimaciones adecuadas para adaptar la demostración de la estabilidad orbital de las soluciones cercanas al solitón, donde el concepto de órbita ahora sólo contemplará los cambios de fase. Con este resultado en la mano nos planteamos si la ecuación discretizada mediante la técnica usual de diferencias finitas, tiene propiedades similares de estabilidad. Logramos probar que el flujo discreto también es orbitalmente estable respecto al solitón discreto y que esto garantiza la convergencia del método numérico a la solución continua.

En una segunda parte abordamos la ecuación de Klein-Gordon que tiene especial importancia en la teoría de la relatividad. Mediante una técnica estándar se puede reescribir esta ecuación de segundo orden en el tiempo como un sistema sólo de primer orden temporal que además presenta estructura hamiltoniana. Usaremos esto para probar existencia de soluciones del sistema mediante una adaptación de la bien conocida técnica de Duhamel. Si nos reducimos al caso en que la no linealidad es también del tipo potencial, podremos probar la existencia de soluciones solitones, pero la estabilidad tendrá un destino diferente. De un trabajo de J. Shatah y W. Strauss de 1985, se sabe que para ciertos valores de los parámetros, las soluciones solitones de la ecuación de Klein-Gordon en todo \mathbb{R}^n , con $n = 2$ o 3 , son orbitalmente inestables, es decir que cualquier solución del problema con dato inicial cercano al solitón se aleja de su órbita con el paso del tiempo. No es posible adaptar la técnica desarrollada por estos autores para tener un resultado análogo en nuestro caso, lo que nos quedará como un problema abierto, pero si aplicamos a nuestro caso la técnica desarrollada para el estudio de la estabilidad de la ecuación de Schrödinger, obtenemos al menos para los casos en que sí hay inestabilidad, una "dirección de inestabilidad", es decir que podemos describir cuál es la componente del flujo que determina la inestabilidad.

En el capítulo 2 hacemos una somera presentación de la teoría de semigrupo y del concepto de solitón con una introducción histórica. En el capítulo 3 presentamos la noción de sistemas hamiltonianos con un listado de ejemplos que, esperamos, clarifiquen el concepto, además en cada uno de ellos mostramos algunas cantidades conservadas que determinan la dinámica y la presencia de ondas viajeras. El capítulo 4 está dedicado a la ecuación de Schrödinger no lineal, en primer lugar hacemos una revisión de los resultados existentes en dominios no acotados, sobre todo respecto a la estabilidad orbital, luego desarrollamos los resultados para la ecuación periódica y por último los resultados numéricos. Se puede decir que este es el capítulo central de la tesis. Por último en el capítulo 5 abordamos la ecuación de Klein-Gordon desarrollando en primer lugar la existencia de solución del sistema, y luego desarrollamos la caracterización de la inestabilidad.

Con el objetivo de no distraer la atención de los desarrollos conceptuales, desviamos el desarrollo de los cálculos técnicos a los apéndices, los que están debidamente señalados.

Capítulo 2

Conceptos preliminares

En este capítulo realizaremos una revisión de varios conceptos, definiciones y resultados básicos conocidos sobre los que construiremos los resultados propios de esta tesis. En cada uno de ellos detallaremos las referencias que el lector puede consultar.

2.1. Teoría de Semigrupo.

El concepto de semigrupo es fundamental para el tratamiento de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden en contextos muy amplios. La idea básica reside en extender el método usado en ecuaciones lineales de primer orden en \mathbb{R}

$$\begin{cases} \dot{x} &= \lambda x \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

que tiene por solución general a

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t}$$

Si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ entonces el sistema lineal de primer orden,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

tiene por solución general a

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0$$

donde e^{At} representa una matriz que genera el flujo de la ecuación (ver [12]).

2.1.1. Semigrupo de operadores lineales. Generador infinitesimal.

Los conceptos anteriores los podemos extender al caso en que A es un operador en un espacio de Banach X , donde tiene sentido la derivada Frechet. Esta teoría se debe a T. Kato, siendo [14] la referencia

obligada, de todos modos recientemente muchos autores la han desarrollado con mucho detalle. En lo que sigue haremos una breve reseña siguiendo esencialmente a T. Cazenave en [7] y [8].

Definición 2.1.1 Dado un espacio de Hilbert X , decimos que una familia paramétrica, en el parámetro t , de operadores continuos $T(t) \subset \mathcal{L}(X)$ es un semigrupo de operadores si cumple las siguientes condiciones

1. $T(t_1 + t_2) = T(t_1) \circ T(t_2) \quad \forall t_1 \geq 0, \forall t_2 \geq 0.$
2. $T(0) = I$
3. $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \geq 0}} \|T(t)u_0 - u_0\| = 0 \quad \forall u_0 \in X$ (es decir que para todo $u_0 \in X$ la aplicación $t \rightarrow T(t)u_0$ es $C([0, +\infty), X)$)

Además, decimos que el semigrupo es de contracción si cumple la condición

4. $\forall t \geq 0 \quad \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$

Definición 2.1.2 El generador infinitesimal del semigrupo es un operador A definido por

$$\left\{ \begin{array}{l} D(A) = \left\{ u \in X / \text{existe } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)u - u}{t} \text{ en } X \right\} \\ Au = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)u - u}{t} \quad \forall u \in D(A) \end{array} \right.$$

Definición 2.1.3 Si $A \in \mathcal{L}(X)$ definimos

$$e^A = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} A^n$$

siendo esta serie convergente en norma pues se verifica que $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$.

El resultado central de esta etapa es el siguiente

Teorema 2.1.1 Si A es un operador m -disipativo en un espacio de Banach X , con dominio $D(A)$ denso en X , y definimos $T(t) = e^{At}$ para todo $t \geq 0$, entonces $(T(t))_{t \geq 0}$ es un semigrupo de contracción de operadores continuos.

Dado el problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t(t) = Au(t) & \forall t \geq 0 \\ u(0) = u_0 & \text{con } u_0 \in D(A) \end{array} \right.$$

entonces

$$u(t) = T(t)u_0 = e^{At}u_0$$

es la única solución del problema en $C([0, +\infty), D(A)) \cap C^1([0, +\infty), X)$. Además para toda $x \in D(A)$ y toda $t \geq 0$ se cumple que

$$T(t)Ax = AT(t)x$$

En el teorema anterior pedimos que A sea un operador m -disipativo, esta es una condición necesaria para aplicar el teorema de Hille-Yosida, de todos modos esto no representa una restricción en lo que a nosotros nos interesa pues en nuestros ejemplos X siempre será un espacio de Hilbert y A o bien un operador autoadjunto definido no negativo (es decir que $\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$ y $\langle Au, u \rangle \geq 0$ para todo u y $v \in X$) ó A será un operador antisimétrico (es decir que $\langle Au, v \rangle = -\langle u, Av \rangle$). En estos dos casos se prueba fácilmente que A es m -disipativo, de modo que podemos aplicar este teorema con tranquilidad.

Operadores en espacios de Hilbert complejos. Extensión a un Hilbert real.

Si (X, b) es un espacio de Hilbert complejo con la forma sesquilineal lineal $b : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$, podemos definir naturalmente una forma bilineal real $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\langle u, v \rangle = \operatorname{Re}(b(u, v))$.

Si A es un \mathbb{R} -operador lineal sobre X , y si además A es \mathbb{C} -lineal entonces iA también resulta ser un \mathbb{R} -operador lineal sobre X . Si $D(A)$ es denso en X , vale que $(iA)^* = -iA^*$, y si además A es autoadjunto entonces iA es antisimétrico y $(iA)^* = -iA$.

Extensión a un grupo. Reversibilidad.

Si A es antisimétrico, el semigrupo $T(t) = e^{At}$ resulta ser un grupo por lo que, para todo tiempo $t \geq 0$, $T(t)$ es una isometría y por lo tanto adquiere reversibilidad en el tiempo.

Teorema 2.1.2 Sea A es un operador antisimétrico, entonces podemos extender $(T(t))_{t \geq 0}$ a un grupo uniparamétrico $T(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(X)$ tal que

1. $T(t_1 + t_2) = T(t_1) \circ T(t_2) \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.
2. $T(0) = I$
3. $T(t)x \in C(\mathbb{R}, X), \quad \forall x \in X$.
4. $\forall t \in \mathbb{R} \text{ y } \forall x \in X, \|T(t)x\| = \|x\|, \text{ por lo tanto } \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = 1$.

Además para todo $x \in D(A)$, $u(t) = T(t)x$ cumple $u \in C(\mathbb{R}, D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}, X)$ y es solución de la ecuación

$$u'(t) = Au(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Corolario 2.1.1 Con la notación del Teorema 2.1.2 tenemos que para todo tiempo $t \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$T^*(t) = T(-t)$$

Notemos que con la notación exponencial, el resultado del Corolario 2.1.1 toma la forma

$$e^{A^*t} = e^{-At}$$

2.1.2. Aplicación a la existencia de soluciones de sistemas no lineales.

Lo hasta aquí descrito sirve para la existencia de soluciones de sistemas de ecuaciones lineales homogéneas. En primer lugar extenderemos estos conceptos al caso de sistemas lineales no homogéneos y en segundo término a la existencia de soluciones de sistemas de ecuaciones no lineales para el caso de los llamados problemas semilineales. Para un desarrollo de estos temas ver el capítulo 4 de [8].

Sistemas No Homogéneos

Notamos con $(\mathcal{T}(t))_{t \geq 0}$ al semigrupo de contracción generado por un operador A m -disipativo en un espacio de Hilbert X . Si para un $T > 0$ dado se tiene que $f : [0, T] \rightarrow X$ es continua y $x \in D(A)$, nos planteamos la existencia de solución del sistema

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t) & \forall t \in [0, T] \\ u(0) = x \end{cases} \quad (2.1)$$

donde naturalmente se requiere que $u \in C([0, T], D(A)) \cap C^1([0, T], X)$. En la teoría de ecuaciones ordinarias este problema se resuelve usando variación de los parámetros o la también llamada “fórmula de Duhamel”, la que enunciaremos en el contexto general expuesto.

Lema 2.1.1 Sea $x \in D(A)$ y sea $f \in C([0, T], X)$. Una solución $u \in C([0, T], D(A)) \cap C^1([0, T], X)$ del problema (2.1) necesariamente cumple

$$u(t) = \mathcal{T}(t)x + \int_0^t \mathcal{T}(t-s)f(s) ds \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.2)$$

Observación 2.1.1 El lema anterior sólo da una condición necesaria para que $u(t)$ sea una solución del problema (2.1). En el contexto tan general enunciado por el lema (con el dato inicial sólo en el denso $D(A)$) para garantizar que $u(t)$ dado por (2.2) sea una solución del problema hay que pedirle un poco más de regularidad a $f(t)$. De todos modos en la cita ya mencionada se prueba que lo pedido en el lema es suficiente para que la $u(t)$ dada en (2.2) sea solución, para esto debe extenderse el espacio X a otro \bar{X} (provisto de una norma que considere al flujo del operador) y el operador A , sólo dénsamente definido en X , a otro \bar{A} totalmente definido en \bar{X} .

Problemas Semilineales

Ahora consideraremos el caso más general en que el sistema tiene un segundo miembro que depende de la misma solución (a esto se le llama un problema semilineal). Estos resultados son particularmente importantes para nosotros porque todos los problemas que abordaremos son de este tipo. Una condición muy frecuente que se le pide a este segundo miembro es ser Lipschitz continua sobre conjuntos acotados.

Definición 2.1.4 Una función $F : X \rightarrow X$ es Lipschitz continua en subconjuntos acotados de X si para toda $M > 0$, existe una constante $L(M)$ tal que, para toda $x, y \in B_M$ (bola de centro 0 y radio M) se cumple

$$\|F(y) - F(x)\| \leq L(M) \|y - x\|$$

Queremos analizar la existencia de soluciones de un problema semilineal. La idea es recurrir nuevamente a la fórmula de Duhamel para obtener al menos un candidato a solución. Si pensamos que la $f(t)$ del problema (2.1) se transforma en una $F(u)$, entonces el problema semilineal toma la forma

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + F(u(t)) & \forall t \in [0, T] \\ u(0) = x \end{cases} \quad (2.3)$$

y buscamos $u \in C([0, T], D(A)) \cap C^1([0, T], X)$. Por Duhamel

$$u(t) = \mathcal{T}(t)x + \int_0^t \mathcal{T}(t-s)F(u(s)) ds \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.4)$$

Si pedimos que F sea Lipschitz continua en subconjuntos acotados hay resultados de existencia y unicidad local (ver [7]).

En el caso que X sea de Hilbert y A sea antisimétrica, es decir que $\mathcal{T}(t)$ es una isometría para todo tiempo t , también tenemos existencia en $[-T, T]$ (reversibilidad).

2.2. Solitones

El concepto de “solitón” es fundamental para el desarrollo de los resultados centrales de esta tesis. Hay varias maneras de dar este concepto. Siguiendo a [23] diremos que un solitón es una onda no lineal que posee las siguientes propiedades:

1. Un perfil de onda localizado que se propaga sin cambios en algunas de sus propiedades (forma, velocidad, masa, momento, etc.).
2. Las ondas localizadas son estables contra colisiones mutuas y retienen su identidad.

A la primera la conocemos como la condición de onda solitaria y a la segunda como la condición de comportamiento corpuscular de la onda. A continuación veremos una reseña histórica del descubrimiento y tipificación de ambas propiedades.

El primero en prestar atención al fenómeno de las ondas solitarias fue John Scott-Russell quien en 1834, en un canal estrecho de Escocia, observó que al detenerse súbitamente una barcaza se generaba un pico de agua que seguía viajando sin deformarse y sin perder velocidad por bastante tiempo y distancia. En 1844 presentó su informe “Report on Waves” en la British Association, refiriéndose a este tipo de ondas con el término “solitary waves” (ondas solitarias) mostrando experimentalmente que la relación entre la velocidad c de la onda, la altura h promedio del agua y la altura a del pico de la onda está dado por $c^2 = g(h + a)$ (donde g es la constante de la gravedad, ver [10]). Este tipo de fenómeno siguió siendo estudiado por científicos destacados como Stokes, Boussinesq y Rayleigh en las décadas de 1870 y 1880, hasta que en 1895 los físicos alemanes Korteweg y de Vries presentaron la ecuación que modeliza este fenómeno, la que actualmente se la nombra como la ecuación KdV. A la misma nos referiremos más adelante.

En el mismo informe de Russel antes citado, está implícito que si el perfil original de la onda es arbitrario (es decir que no necesariamente es una onda solitaria) y que por ejemplo tiene un par de elevaciones, entonces las distintas velocidades de cada elevación hacen que éstas se vayan separando y evolucionen cada una hacia una onda solitaria. Pero además aparece otro fenómeno que sólo sería de esperar en ondas lineales donde vale el principio de superposición. Si tenemos un perfil inicial de onda con dos elevaciones de distintas alturas moviéndose ambas en la misma dirección de modo que la de mayor altura está retrasada respecto a la menor, entonces la primera alcanza y sobrepasa a la segunda interactuando ambas por un lapso de tiempo. Después de separarse las dos permanecen con la misma forma y velocidad, aunque se observa un retraso de fase por lo que queda claro que no es un fenómeno lineal.

En 1955, Fermi, Pasta y Ulam en el laboratorio de Los Alamos, trabajando numéricamente en redes anarmónicas con un modelo de fonones (cuya expresión discretizada es semejante a la de la KdV) hallaron que la energía no se distribuye uniformemente en los modos, como debería suceder si el sistema fuera ergódico, y que además el sistema regresaba al estado inicial después de un período (fenómeno de recurrencia). Diez años después Zabusky y Kruskal [28], resolviendo numéricamente la KdV con modelos de redes no lineales, también observaron el mismo fenómeno de recurrencia y que además los pulsos-ondas que tenían la propiedad antes descrita de mantenerse idénticas después de colisiones entre ellas, eran cada una del tipo secante hiperbólica al cuadrado (es decir que el perfil del solitón tiene la forma general $u = \text{sech}^2(x)$) que eran las soluciones particulares ya halladas por Korteweg y de Vries. Por lo tanto quedaba demostrado que este tipo de ondas solitarias tenían un comportamiento estable se-

mejante a las partículas. Como en la física moderna el sufijo “ón” se usa para indicar comportamiento de partícula (de aquí, por ejemplo, las palabras “fotón”, “fonón” y “gravitón”) se usa la palabra “solitón” para nombrar una onda solitaria con propiedades de partícula.

Capítulo 3

Sistemas Hamiltonianos

Una de las ideas centrales en el desarrollo de esta tesis es el uso de la estructura hamiltoniana que poseen las ecuaciones centrales que abordaremos. A continuación daremos una breve noción, acompañada de varios ejemplos, de lo que se entiende por estructura hamiltoniana de un sistema de ecuaciones diferenciales. Este concepto admite un marco más amplio dentro de la geometría diferencial (ver [2]), pero no es el objetivo de este trabajo abordar el problema con esa perspectiva. En cada sección indicamos las referencias específicas, pero como complemento sugerimos ver [3], [16] y [17].

3.1. Definición y ejemplos de sistemas Hamiltonianos

El sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden en un espacio de Hilbert \mathbb{X} , determinado por la aplicación $F : I \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$

$$\dot{z} = F(t, z)$$

tiene una estructura hamiltoniana si existe un funcional $\mathcal{H} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{C}$ y un operador antisimétrico \mathcal{J} en \mathbb{X} tal que el sistema se escribe

$$\dot{z} = \mathcal{J}\mathcal{H}'(z) \tag{3.1}$$

siendo \mathcal{H}' la derivada variacional del funcional \mathcal{H} .

A continuación damos ejemplos.

3.1.1. Ecuación de Newton. Momentos Lineales.

Si tenemos un sistema de referencia espacio-temporal e indicamos la posición de una masa m en cada instante t con el vector $\mathbf{x}(t)$, entonces su velocidad y aceleración serán respectivamente $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$ y $\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{x}}(t)$. Según la segunda ley de Newton, si a m se le aplica una fuerza $F(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ la ecuación del

movimiento es

$$m\ddot{\mathbf{x}}(t) = F(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$$

En una amplia gama de casos se tiene que la fuerza F depende únicamente de manera explícita de la posición \mathbf{x} y que además es un campo potencial, es decir que existe una función $U(\mathbf{x})$ diferenciable, tal que $F(\mathbf{x}) = -\nabla U(\mathbf{x})$. Así, en estos casos, la ecuación de Newton queda reducida a

$$m\ddot{\mathbf{x}}(t) = -\nabla U(\mathbf{x}) \quad (3.2)$$

Si multiplicamos ambos miembros por $\dot{\mathbf{x}}$ e integramos, tenemos que

$$\frac{m}{2} \|\dot{\mathbf{x}}\|^2 = -U(\mathbf{x}) + C$$

Definimos $T(\dot{\mathbf{x}}) = \frac{m}{2} \|\dot{\mathbf{x}}\|^2$ como la energía cinética de la masa m (debida al hecho que la masa está en movimiento) y $U(\mathbf{x})$ la energía potencial de la masa m (debida a la fuerza que actúa en la posición \mathbf{x} que ocupa la masa). La última igualdad dice que la suma $T + U$ (energía total del sistema) se mantiene constante sobre las trayectorias solución de la ecuación (3.2), es decir que es un invariante del flujo. Definimos el hamiltoniano de la ecuación como la energía total:

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = T + U = \frac{m}{2} \|\dot{\mathbf{x}}\|^2 + U(\mathbf{x})$$

que acabamos de ver que se mantiene constante sobre soluciones de la ecuación.

Llamemos \mathbf{q} a la “posición generalizada” (en este ejemplo $\mathbf{q} = \mathbf{x}$), y $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{v}}(t)$ al “momento lineal”. Usando esto podemos reescribir la \mathcal{H} de la siguiente manera

$$\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2m} \|\mathbf{p}\|^2 + U(\mathbf{q})$$

Con esta expresión de \mathcal{H} , a la ecuación del movimiento (3.2), que naturalmente es de segundo orden, la podemos reducir a un sistema de primer orden

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} \end{cases}$$

Para verlo con más claridad podemos pensar que \mathbf{q} y \mathbf{p} tienen una sola variable, de modo que $\mathcal{H}(p, q) = \frac{1}{2m}p^2 + U(q)$ y así el sistema de dos por dos

$$\begin{cases} \dot{q} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} &= \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} &= -U'(q) \end{cases} \quad (3.3)$$

Notemos que la primer ecuación es la expresión del momento lineal y la segunda resulta ser efectivamente la ecuación del movimiento de Newton.

Si observamos que $\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz antisimétrica, entonces (3.3) respeta la forma general enunciada en (3.1), pues

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \end{pmatrix}$$

3.1.2. Ecuación KdV

Para modelizar el fenómeno de propagación de ondas solitarias en aguas playas descritas y estudiadas por J. Scott-Russell en las décadas de 1830 y 1840, los físicos alemanes Kortegew y de Vries presentaron, en 1895, una ecuación esencialmente no lineal, a la que se llamó desde entonces “ecuación KdV”. Si $u(x, t)$ da la altura de la onda respecto a la media de la superficie se tiene que el fenómeno de propagación de una onda en aguas playas está dado por

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0 \quad (3.4)$$

Esta ecuación tiene una estructura hamiltoniana, para esto definimos

$$\mathcal{J} = \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{y} \quad \mathcal{H}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}u_x^2 - \frac{1}{6}u^3 \right) dx$$

donde \mathcal{J} es el operador antisimétrico y \mathcal{H} es el hamiltoniano. Es fácil verificar que (ver apéndice(A.1))

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = -u_{xx} - \frac{1}{2}u^2$$

así a la ecuación (3.4) la podemos reescribir

$$u_t = \mathcal{J} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}$$

de modo que cumple tener una estructura hamiltoniana.

3.1.3. Ecuación lineal de Schrödinger

En el marco de la mecánica cuántica Erwin Schrödinger presentó en la década de 1920 la ecuación básica que cumple la función de onda de un electrón, la que esencialmente da la probabilidad de que un electrón se encuentre en un determinado nivel de energía. Esta ecuación, en una forma simplificada y en una variable espacial, toma la forma $iu_t = -u_{xx}$, la que se puede reescribir como

$$u_t = iu_{xx}$$

Si definimos

$$\mathcal{J} = -i \quad \text{y} \quad \mathcal{H}(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx$$

claramente tiene una estructura hamiltoniana

$$u_t = \mathcal{J} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = -i(-u_{xx}) = iu_{xx}$$

3.1.4. Ecuación de Schrödinger no lineal

La ecuación no lineal de Schrödinger aparece en la descripción matemática de diversos fenómenos físicos, por ejemplo en la propagación de un pulso electromagnético emitido a través de un medio con índice de refracción dependiente de la intensidad del campo aplicado, también en la propagación de ondas electromagnéticas en un plasma o en el movimiento de ciertos vórtices en la mecánica de fluidos (para referencias ver [26])

En particular, en el estudio de la propagación de una onda electromagnética a través de una fibra óptica, se halló que este fenómeno se puede modelar con la ecuación de Schrödinger no lineal del tipo potencial, es decir con un término adicional de la forma $|u|^{2\sigma} u$. En la aplicación es importante el caso $\sigma = 1$, al que se llama “Schrödinger cúbico”. La ecuación queda

$$u_t = iu_{xx} + i|u|^{2\sigma} u$$

En este caso el operador antisimétrico \mathcal{J} vuelve a ser multiplicar por $-i$, y el hamiltoniano es

$$\mathcal{H}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} u_x^2 - \frac{1}{2\sigma+2} |u|^{2\sigma+2} \right) dx$$

Se puede generalizar el problema colocando como término no lineal un potencial $V'(|u|)$. Así, el caso general es

$$u_t = iu_{xx} + iV'(|u|) u \quad (3.5)$$

El operador antisimétrico \mathcal{J} sigue siendo multiplicar por $-i$ y el hamiltoniano es

$$\mathcal{H}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} u_x^2 - V(|u|) \right) dx$$

Ver el desarrollo de algunos de estos cálculos en el apéndice (A.2).

3.1.5. Ecuación de Klein-Gordon

Esta ecuación es no lineal porque es la ecuación de onda más un término dado por un potencial evaluado en la solución. Aparece en relatividad.

$$u_{tt} - u_{xx} + V'(u) = 0 \quad (3.6)$$

Para exhibir su estructura hamiltoniana debemos pasarla a un sistema de primer orden. Si llamamos $\varphi = u$ y $\psi = u_t$ entonces tenemos que la ecuación de Klein-Gordon es equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \psi \\ \dot{\psi} = \varphi_{xx} - V'(\varphi) \end{cases} \quad (3.7)$$

Si definimos

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathcal{H}(\varphi, \psi) = \int \left[\frac{1}{2} |\varphi_x|^2 + \frac{1}{2} |\psi|^2 + V(\varphi) \right] dx$$

serán respectivamente el operador antisimétrico y el hamiltoniano del sistema, de modo que se verifica que

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi} \\ \dot{\psi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} \end{cases}$$

En el caso que $V'(u) = \sin(u)$ la ecuación toma el nombre de ecuación de Sine-Gordon, la cual ha sido muy estudiada. También tenemos el caso en que $V'(u) = u - |u|^{2\sigma} u$, sobre él centraremos nuestra atención.

El desarrollo de los cálculos se encuentra en el apéndice (A.3)

3.2. Cantidades conservadas

Para poder describir cualquier sistema mecánico es importante hallar la mayor cantidad posible de simetrías o, lo que es lo mismo, cantidades conservadas por el sistema. Esto está formalizado en el teorema de Noether (ver [2]) en el marco de la mecánica. Por lo tanto hallar cantidades conservadas por el flujo del sistema diferencial pasa a ser una cuestión esencial para el estudio del mismo.

Cuando un sistema admite una formulación hamiltoniana tenemos inmediatamente que, si el funcional \mathcal{H} no depende explícitamente del tiempo t (como en todos los ejemplos que presentamos), entonces el hamiltoniano se conserva sobre el flujo del sistema. Para verificar lo último calculemos la derivada temporal total de la $\mathcal{H}(u)$. Recordemos que el operador \mathcal{J} es antisimétrico, que el producto \langle, \rangle es simétrico y que el hamiltoniano no depende explícitamente de t , por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{H}(u) &= \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}, u_t \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}, \mathcal{J} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \right\rangle = - \left\langle \mathcal{J} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \right\rangle = \\ &= - \left\langle u_t, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}, u_t \right\rangle = - \frac{d}{dt} \mathcal{H}(u) \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}(u) = 0 \quad (3.8)$$

Pero por lo general necesitaremos más cantidades conservadas para determinar la dinámica del flujo de la ecuación. En general la existencia de ellas depende mucho de la ecuación que estemos tratando, aunque hay un resultado general que podemos aprovechar en muchos casos. En [10] se prueba lo siguiente: si se tiene una ecuación de la forma

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial x} = 0 \quad (3.9)$$

donde tanto T (la densidad) como X (el flujo) no involucran derivadas con respecto a t y $X \rightarrow cte$ cuando $|x| \rightarrow +\infty$, entonces la ecuación anterior se puede integrar explícitamente dando

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} T dx \right) = 0 \quad \text{o} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} T dx = cte$$

así la cantidad $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} T dx \right) (t)$ es una constante del movimiento.

A continuación exhibiremos cantidades conservadas en varios de los ejemplos ya vistos, usando estos resultados generales o alguno específico para cada ecuación.

3.2.1. Ecuación KdV

Esta ecuación es rica en leyes de conservación, comencemos con las más inmediatas.

Sabemos por (3.8) que el hamiltoniano es una constante del movimiento (conservación de la energía), es decir que si $u(t, x)$ es solución de 3.4 entonces

$$\mathcal{H}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} u_x^2 - \frac{1}{6} u^3 \right) dx = cte \quad (3.10)$$

se conserva sobre el flujo de la ecuación.

Por otro lado para usar (3.9) podemos reescribir la ecuación KdV en esa forma definiendo $T = u$ y $X = u_{xx} + \frac{1}{2} u^2$

$$0 = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \left(u_{xx} + \frac{1}{2} u^2 \right)}{\partial x} = u_t + u_{xxx} + uu_x$$

por lo tanto, como ya vimos $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} T(u) dx \right) (t)$ es una constante del movimiento, así si $u(t, x)$ es solución de (3.4)

$$C(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) dx = cte$$

es decir que hay conservación de la masa.

Ahora, si multiplicamos la (3.4) por u y a todo le sumamos y restamos el término $u_x u_{xx}$ podemos reescribir la (3.4) de la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(uu_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 + \frac{1}{3} u^3 \right) = 0$$

por lo tanto, usando otra vez (3.9) con $T = \frac{1}{2}u^2$ y $X = uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2 - \frac{1}{3}u^3$ tenemos que

$$I(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t, x) dx = cte$$

es decir que el flujo de la (3.4) conserva la norma $L^2(\mathbb{R})$. Físicamente se dice que hay conservación del momento.

Físicamente era de esperar que estas cantidades se conservaran, pero ¿son las únicas o hay más?. Lax en [16] probó que hay infinitas cantidades conservadas por el flujo de la ecuación y probó que éstas cumplen una recurrencia funcional: la recursión de Lenard, que enunciaremos a continuación. Sean $H_1(u) = I(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t, x) dx$ y $H_2(u) = \mathcal{H}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}u_x^2 - \frac{1}{6}u^3 \right) dx$, y además definimos los operadores

$$\mathcal{J} = \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{y} \quad \mathcal{K} = -\frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{1}{3}u \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} u$$

Construimos el funcional H_{n+1} a partir del H_n de modo que se cumpla la relación

$$\mathcal{J} \frac{\partial H_{n+1}}{\partial u} = \mathcal{K} \frac{\partial H_n}{\partial u} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

En particular $H_1(u)$ y $H_2(u)$ lo cumplen. Los H_n así definidos se conservan sobre las trayectorias de la ecuación. Una ecuación que presenta infinitas cantidades conservadas se dice que es completamente integrable.

3.2.2. Ecuación de Schrödinger no lineal

La ecuación (3.5) tiene muchas cantidades conservadas, sólo veremos las que más nos interesa.

Ya sabemos por (3.8) que el hamiltoniano

$$\mathcal{H}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}u_x^2 - V(|u|) \right) dx \quad (3.11)$$

se preserva por el flujo de la ecuación. Otra importante cantidad conservada es la norma L^2 de la solución

$$\mathcal{N}(u) = \|u\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx \quad (3.12)$$

que representa la probabilidad que un electrón se encuentre en un determinado nivel de energía.

En el caso especial que $V'(u) = |u|^{2\sigma} u$ hallamos una tercera cantidad conservada. Definimos $Au = iu_x$, entonces también se conserva el funcional

$$\langle Au, u \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} iu_x \bar{u} dx \quad (3.13)$$

La verificación de esto se lo puede ver en el apéndice (3.8).

Dependiendo de la no linealidad $V(u)$ se presentan distintas cantidades conservadas, de todos modos a lo largo de este trabajo sólo usaremos las dos primeras que presentamos.

3.2.3. Ecuación de Klein-Gordon

Debido a la estructura hamiltoniana del sistema (3.7) sabemos, por (3.8), que el funcional hamiltoniano

$$\mathcal{H}(\varphi, \psi) = \int \left[\frac{1}{2} |\varphi_x|^2 + \frac{1}{2} |\psi|^2 + V(\varphi) \right] dx \quad (3.14)$$

se conserva sobre soluciones $\varphi(t, x)$ de la ecuación de Klein-Gordon (3.6).

El funcional

$$Q(\varphi, \psi) = \text{Im} \left(\int \varphi \bar{\psi} dx \right) \quad (3.15)$$

llamado el funcional de “carga”, no es invariante por el flujo del sistema si el potencial $V(x)$ es arbitrario, en este caso sólo se preserva Gauge, es decir que se preserva por cambios de fase de la solución. Para que $Q(\varphi, \psi)$ sea preservado por el flujo del sistema además debe cumplirse que $V'(\varphi) \bar{\varphi} \in \mathbb{R}$ (esto en general no se cumple, aunque sí lo hacen algunos términos no lineales como por ejemplo $V'(\varphi) = \varphi - |\varphi|^{2\sigma} \varphi$).

El desarrollo de los cálculos de esta parte se encuentran en el apéndice (A.3).

3.3. Ondas viajeras y solitones

Ya dimos en la sección 2.2 la noción de solitón. Vimos que la existencia de solitones está muy ligada a la existencia de cantidades conservadas por el flujo de la ecuación, pero la sola presencia de estas cantidades no garantiza la existencia de ellos. Un solitón es un fenómeno esencialmente no lineal porque justamente la acción de una no linealidad compensa, con mucha exactitud, el efecto dispersivo o el disipativo esperado. La estructura hamiltoniana nos garantiza una cantidad conservada pero no la existencia de solitones, así por ejemplo está el caso de la ecuación potencial de Newton o el caso de la Schrödinger lineal, que son ecuaciones hamiltonianas que no presentan solitones.

A continuación estudiaremos, para algunos ejemplos, la existencia de ondas viajeras en el sentido clásico, es decir soluciones $u(t, x)$ que consisten en un perfil $f(\xi)$ que se desplaza, en el sentido que si $\xi = x - ct$ (c es una constante), entonces $u(t, x) = f(x - ct)$ es solución de la ecuación. Si la ecuación además conserva alguna otra cantidad aparte del hamiltoniano decimos que esta solución onda viajera es además un solitón.

3.3.1. Solitón en la KdV

En la sección 2.2 nos referimos al hecho histórico del descubrimiento, por parte de John Scott-Russell, de los solitones a partir de la observación de la formación de ondas solitarias en canales de agua. Con la presentación de la ecuación KdV a fines del siglo XIX, se pudo calcular explícitamente una solución “solitary wave” (onda solitaria) de esta ecuación a partir de su expresión como potencial. Esto

es, si consideramos $u(t, x) = f(\xi)$ con $\xi = x - ct$ (c es una constante) tenemos que la ecuación 3.4 se transforma en

$$-cf' - ff' + f''' = 0$$

que se la puede integrar y obtenemos

$$-cf - \frac{1}{2}f^2 + f'' = A$$

donde A es una constante de integración. Si multiplicamos por f' e integramos, tenemos:

$$\frac{1}{2}(f')^2 = \frac{1}{6}f^3 + \frac{1}{2}cf^2 + Af + B$$

De una onda solitaria podemos esperar que su perfil se aplane cuando la variable tiende a $\pm\infty$, es decir que podemos imponer las condiciones de borde f, f' y $f'' \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$, con lo que $A = B = 0$, por lo tanto nos queda la ecuación

$$(f')^2 = f^2 \left(\frac{1}{3}f + c \right)$$

de donde

$$\int \frac{df}{f \left(\frac{1}{3}f + c \right)^{1/2}} = \pm \int d\xi$$

siendo la primer integral explícitamente calculable mediante el cambio de variable $f = -3c \operatorname{sech}^2 \theta$, de donde obtenemos, si $c \geq 0$, que

$$f(x - ct) = -3c \operatorname{sech}^2 \left(3c^{1/2} (x - ct - x_0) \right)$$

que posee las características del perfil de una onda viajera.

El hecho de hallar explícitamente la solución no es lo habitual en este tipo de cálculo, de hecho por lo general se llega a integrales elípticas que no son resolubles en términos de funciones elementales (ver [10] cap. 2).

3.3.2. Solitones de la Sine-Gordon

La ecuación de Sine-Gordon es el caso particular de la Klein-Gordon (3.6) con el término no lineal $V'(u) = \operatorname{sen}(u)$.

$$u_{tt} - u_{xx} + \operatorname{sen} u = 0$$

También buscamos soluciones ondas viajeras de la forma $u(t, x) = f(x - ct)$. Derivando y reemplazando en la ecuación vemos que un tal perfil $f(\xi)$ debe satisfacer la ecuación

$$(1 - c^2)f'' = \operatorname{sen} f$$

si multiplicamos ambos miembros por f' e integramos tomando como constante de integración a 1, obtenemos

$$\frac{1-c^2}{2} (f')^2 = 1 - \cos f$$

de donde se deduce la ecuación

$$\frac{f'}{\sqrt{1-\cos f}} = \pm \sqrt{\frac{2}{1-c^2}} \quad (3.16)$$

o su expresión integral equivalente

$$\int \frac{df}{\sqrt{1-\cos f}} = \pm \sqrt{\frac{2}{1-c^2}} \int d\xi$$

La ecuación (3.16) la podemos resolver explícitamente. Para eso, notemos que $1 - \cos f = 2 \sin^2\left(\frac{f}{2}\right)$, por lo tanto tenemos

$$\frac{f'}{2 \sin\left(\frac{f}{2}\right)} = \pm \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}$$

Si tomamos

$$f(\xi) = 4 \arctan\left(ke^{\xi/\sqrt{1-c^2}}\right)$$

para un $k > 0$ cualquiera, y derivamos vemos que satisface exactamente esta última ecuación. Por lo tanto podemos afirmar que una solución en forma de onda viajera de la Sine-Gordon es

$$u(t, x) = 4 \arctan\left(ke^{(x-ct)/\sqrt{1-c^2}}\right)$$

En esta expresión están comprendidas dos tipos de solución solitón de la S-G, el tipo *kink* y *antikink*, dependiendo del signo que se usó al determinarla.

3.3.3. Solitones en Schrödinger no lineal

En el caso de la ecuación de Schrödinger si buscamos soluciones tipo “onda viajera” de acuerdo al concepto clásico anterior, no obtenemos un buen resultado. Pero, dado que la ecuación de Schrödinger es esencialmente de variable compleja nos conviene cambiar el concepto de onda viajera pensando que la traslación se produce en la fase, es decir que debemos buscar soluciones de la forma $u(t, x) = R(x)e^{iEt}$, siendo $R(x)$ un perfil fijo. Al poner esta expresión en la ecuación con no linealidad potencial obtenemos

$$R'' - ER + R^{2\sigma+1} = 0 \quad (3.17)$$

Si multiplicamos esta ecuación por R' e integramos, obtenemos

$$\frac{1}{2} (R')^2 - \frac{E}{2} R^2 + \frac{1}{2\sigma+2} R^{2\sigma+2} = \frac{C}{2} \quad (3.18)$$

Esta expresión tiene una clara interpretación en términos de energía. Pensando en la forma de energía de la ecuación del movimiento de Newton decimos que el término $T(R') = \frac{1}{2} (R')^2$ es la energía cinética (aunque lo es sólo formalmente porque la derivada no es respecto al tiempo sino respecto a la variable espacial) y $U(R) = -\frac{E}{2}R^2 + \frac{1}{2\sigma+2}R^{2\sigma+2}$ es la energía potencial. Siguiendo esta línea afirmamos que $\frac{C}{2}$ es la energía total del sistema.

Si por un momento nos restringimos al caso $\sigma = 1$ (Schrödinger cúbico) tenemos que $U(R) = R^2\left(\frac{1}{4}R^2 - \frac{E}{2}\right)$ es una función par con $R = 0$ raíz doble y otras dos raíces simples. Además la ecuación

$$\frac{1}{2} (R')^2 = \frac{C}{2} - U(R) = 0$$

para $C > 0$ tiene exactamente dos soluciones simples $-R_0$ y R_0 , lo que es evidente desde el perfil del potencial dado en la figura (3.1)

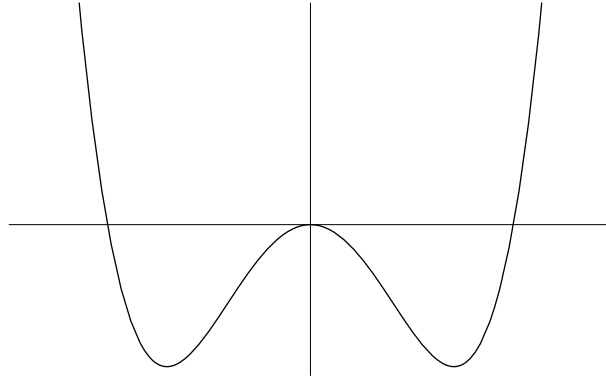


Figura 3.1

Pasemos la ecuación (3.18) a su forma integral

$$\int_{-R_0}^{R_0} \frac{dR}{\sqrt{C + ER^2 - \frac{1}{2}R^4}} = \pm \int_{-R_0}^{R_0} dx$$

la que ya no podemos calcular explícitamente. Desde esta expresión podemos interpretar a la constante C como la energía total del sistema y podemos hallar el período y la frecuencia de la solución (que obviamente dependen del valor de C).

Capítulo 4

Ecuación de Schrödinger no lineal

4.1. En todo \mathbb{R}^n

En este capítulo desarrollamos una revisión de las ideas y resultados previamente conocidos sobre la ecuación no lineal de Schrödinger (NLS). Muchos autores han trabajado en este problema, nosotros seguiremos esencialmente a T. Cazenave, A. Strauss y M. Weinstein (ver [7], [22], [24], [25], [26] y [27]).

La ecuación de Schrödinger no lineal para $x \in \mathbb{R}^n$ es

$$\phi_t = i\Delta\phi + iV'(|\phi|^2)\phi \quad (4.1)$$

con $V(\phi)$, el potencial del operador que aporta la parte no lineal, en una clase muy general de funciones. En particular nos interesa el caso en que la no linealidad es del tipo potencial $V'(x) = x^\sigma$.

A continuación revisaremos los resultados existentes sobre el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \phi_t = i\Delta\phi + iV'(|\phi|^2)\phi & \text{en } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ \phi(x, 0) = \phi_0(x) & \text{con } \phi_0 \in H^1(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

Ya hemos hablado de la estructura hamiltoniana que presenta este operador. Ahora, haremos mención de los resultados de existencia y unicidad de solución, existencia de solitones y de la estabilidad relacionados con ellos.

Recordemos como queda el problema de Cauchy de la NLS en el caso del término no lineal potencial $V'(x) = x^\sigma$

$$\begin{cases} \phi_t = i\Delta\phi + i|\phi|^{2\sigma}\phi & \text{en } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ \phi(x, 0) = \phi_0(x) & \text{con } \phi_0 \in H^1(\mathbb{R}^n) \end{cases} \quad (4.2)$$

4.1.1. Existencia y Unicidad de Soluciones.

Existen varios textos que analizan la existencia, unicidad y comportamiento de blow-up de las soluciones para el caso en que el dominio es todo \mathbb{R}^n . Nosotros damos como referencia principal a [7], donde el autor hace un recopilación detallada de los resultados conocidos para la ecuación de Schrödinger en un contexto muy general y ejemplificando con no linealidades específicas, pero siempre con el dominio espacial \mathbb{R}^n . En lo que a nosotros respecta, tomamos los siguientes resultados: en el caso de la ecuación (4.2) localmente existe solución para todo valor del parámetro $\sigma > 0$, pero hay solución global sólo para $\sigma < 2/n$ pues está probada la existencia de blow-up para el caso crítico y supercrítico.

4.1.2. Existencia de solitones

Como ya lo vimos en (3.3.3) sabemos que existen soluciones solitones de la ecuación de Schrödinger no lineal (4.2). Vimos, aunque en la sección (3.3.3) sólo lo hicimos en dimensión $n = 1$, que estas soluciones tenían la forma $\phi(x, t) = R(x)e^{iEt}$ (con $E > 0$) y que el perfil del solitón $R(x)$ debe ser solución de la ecuación

$$\Delta R - ER + V'(|R|^2)R = 0 \quad (4.3)$$

W. Strauss en [22] probó que la ecuación (4.3) tiene una solución radial, positiva, suave y con decaimiento exponencial en ∞ , a la que llamamos el estado fundamental o perfil del solitón.

Cuando la ecuación (4.3) tiene la no linealidad potencial, tenemos una nueva caracterización de la solución particular hallada por Strauss. Esta caracterización fue introducida por M. Weinstein en [26] y [27] donde determina que este perfil solitón es el mínimo de un funcional no lineal, al que nosotros llamamos el funcional J de Gagliardo-Nirenberg.

Supongamos que R es una solución de la ecuación

$$\Delta R - ER + R^{2\sigma+1} = 0 \quad (4.4)$$

por lo tanto $R \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{2\sigma+2}(\mathbb{R}^n)$. Esto nos sugiere usar la desigualdad de interpolación de Gagliardo-Nirenberg, la que asegura que si $0 < \sigma < \frac{2}{n-2}$, entonces existe una constante optima $C > 0$ tal que, para todo $u \in H_0^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{2\sigma+2}(\mathbb{R}^n)$, tenemos que

$$\|u\|_{2\sigma+2}^{2\sigma+2} \leq C \|\nabla u\|_2^{\sigma n} \|u\|_2^{2+\sigma(2-n)} \quad (4.5)$$

Si definimos el funcional

$$J(u) = \frac{\|\nabla u\|_2^{\sigma n} \|u\|_2^{2+\sigma(2-n)}}{\|u\|_{2\sigma+2}^{2\sigma+2}} \quad (4.6)$$

la desigualdad (4.5) nos dice que está inferiormente acotado. M. Weinstein, en [26], prueba que J alcanza el ínfimo en H^1 en una función $R(x)$ que cumple las siguientes propiedades:

- R es positiva y simétrica respecto a algún origen de coordenadas
- $R \in H^1 \cap C^\infty$
- R es una solución de la ecuación estacionaria (4.4).

Hacemos notar que la prueba que $R(x)$ es simétrica respecto a algún origen de coordenadas usa las simetrizaciones de Schëgo. Lo que ellas hacen es reordenar una función que es el mínimo de un funcional y dar otra función, ahora sí simétrica, que sigue siendo un mínimo del mismo funcional, pero la única condición que se requiere para aplicarlas es que el dominio sea todo \mathbb{R}^n (debido a como se construyen estas simetrizaciones). Esto último impide que podamos extender automáticamente este resultado al caso en que se trabaja en un intervalo.

En los trabajos ya citados esta nueva caracterización del solitón se usa para abordar el problema de la estabilidad orbital de los mismos.

4.1.3. Estabilidad

En [24] M. Weinstein prueba la estabilidad orbital de las soluciones solitones, esto es que, bajo ciertas restricciones, si el dato inicial ϕ_0 del problema (4.2) está cerca del solitón R (en un sentido a precisar) entonces la solución correspondiente se mantiene cerca para todo tiempo. Esto dice que la presencia de un solitón determina la dinámica del sistema.

Para hacer un resumen de estos resultados y de las técnicas usadas, en primer lugar debemos definir los siguientes conceptos

Definición 4.1.1 Dada una función $\psi(x, t)$ definimos su órbita como el conjunto

$$\mathcal{G}_\psi = \left\{ \psi(\cdot + x_0, t) e^{i\gamma} \mid (x_0, \gamma) \in \mathbb{R}^n \times [0, 2\pi) \right\} \quad (4.7)$$

Observación 4.1.1 La ecuación NLS tiene fase y traslaciones simétricas, esto quiere decir que si $\phi(x, t)$ es solución de la NLS entonces $\phi(x + x_0, t) e^{i\gamma}$ también lo es, siendo $\gamma \in [0, 2\pi)$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. De aquí queda claro por qué se define de este modo a la órbita de una solución

Definición 4.1.2 Definimos la distancia de una función $\phi(x, t)$ a la órbita de $\psi(x, t)$ como la cantidad que depende del parámetro E :

$$\rho_E^2(\phi(t), \mathcal{G}_\psi) = \inf_{x_0, \gamma} \left\{ \|\nabla \phi(\cdot + x_0, t) e^{i\gamma} - \nabla \psi\|_{L^2}^2 + E \|\phi(\cdot + x_0, t) e^{i\gamma} - \psi\|_{L^2}^2 \right\} \quad (4.8)$$

Notemos que el $x_0 = x_0(t)$ y también $\gamma = \gamma(t)$, es decir que son funciones del tiempo t .

Observación 4.1.2 *Es razonable dar este concepto de distancia porque se está minimizando la parte cuadrática de las cantidades conservadas.*

Definición 4.1.3 *Dado que tanto el hamiltoniano \mathcal{H} como la norma \mathcal{N} (dados en (3.11) y (3.12) respectivamente) son cantidades conservadas por el flujo de la ecuación, definimos como función de Lyapunov de la dinámica del problema a*

$$\mathcal{E}(\phi) = \mathcal{H}(\phi) + E\mathcal{N}(\phi)$$

que en el caso particular de la ecuación con no linealidad potencial es

$$\mathcal{E}(\phi)(t) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\phi|^2 - \frac{1}{\sigma+1} |\phi|^{2\sigma+2} + E|\phi|^2 dx \quad (4.9)$$

La idea central del trabajo mencionado es usar la función de Lyapunov $\mathcal{E}(\phi)$ aplicada a una solución $\phi(x, t)$ y al solitón $R(x)$, esto permite medir la desviación de la solución respecto al solitón. A continuación desarrollaremos esto porque es una de las ideas centrales que usaremos en lo que sigue.

Si $\phi(x, t)$ es una solución de la ecuación (4.2) podemos pensar que en cada tiempo t su representante óptimo en (x_0, γ) es una perturbación del solitón $R(x)$, es decir que

$$\phi(x + x_0, t)e^{i\gamma} \equiv R(x) + u(x, t) + iv(x, t) \quad (4.10)$$

donde (x_0, γ) dependen de t y son los que minimizan (4.8) para el caso en que $\psi = R$.

Podemos hallar la diferencia $\Delta\mathcal{E}$ entre el valor del funcional \mathcal{E} en el dato inicial ϕ_0 y el valor del mismo en el solitón R , esta cantidad da una idea de la diferencia de energía total que hay inicialmente entre el dato inicial del problema y el del estado fundamental. Luego, usaremos la invariancia del funcional \mathcal{E} sobre trayectorias del flujo de la ecuación y así podremos reescribir $\Delta\mathcal{E}$ en términos de la perturbación $w = u + iv$

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E} &\equiv \mathcal{E}[\phi_0(\cdot)] - \mathcal{E}[R(\cdot)] \\ &= \mathcal{E}[\phi(\cdot, t)] - \mathcal{E}[R(\cdot)] \\ &= \mathcal{E}[\phi(\cdot + x_0, t)e^{i\gamma}] - \mathcal{E}[R] \\ &= \mathcal{E}[R + w] - \mathcal{E}[R] \end{aligned} \quad (4.11)$$

La última expresión nos sugiere aplicar una expansión de Taylor. Al calcular la primer derivada variacional de \mathcal{E} en R vemos que se anula, y la segunda variación de \mathcal{E} en R se la acota inferiormente, sobre subespacios adecuados, por la suma de las formas cuadráticas $\langle L_+^\sigma u, u \rangle$ y $\langle L_-^\sigma v, v \rangle$, más algunos términos de mayor orden. Al fin, la acotación que obtenemos es

$$\Delta\mathcal{E} \geq \langle L_+^\sigma u, u \rangle + \langle L_-^\sigma v, v \rangle - C_1 \|w\|_{H^1}^{2+\theta} - C_2 \|w\|_{H^1}^6 \quad \text{con } \theta > 0$$

siendo L_+^σ y $L_-^\sigma : H_0^1 \rightarrow L^2$ los operadores lineales dados por

$$L_-^\sigma \phi = -\phi'' + E\phi - R^{2\sigma} \phi \quad (4.12)$$

$$L_+^\sigma \phi = -\phi'' + E\phi - (2\sigma + 1)R^{2\sigma} \phi \quad (4.13)$$

El trabajo central desarrollado en [24] es la obtención de cotas inferiores de las formas cuadráticas $\langle L_+^\sigma u, u \rangle$ y $\langle L_-^\sigma v, v \rangle$ en términos de $\|w\|_{H^1}^2$, hasta obtener el control inferior de $\Delta\mathcal{E}$ dado por

$$\Delta\mathcal{E} \geq C_1 \|w\|_{H^1}^2 - C_2 \|w\|_{H^1}^{2+\theta} - C_3 \|w\|_{H^1}^6 \quad \text{con } \theta, C_1, C_2 \text{ y } C_3 > 0 \quad (4.14)$$

es decir que el valor de $\Delta\mathcal{E}$ no puede estar por debajo del valor que toma en $\|w\|_{H^1}$ la función

$$g(x) = Cx^2(1 - ax^\theta - bx^4) \quad (4.15)$$

la que tiene aproximadamente el perfil dibujado en la figura (4.1).

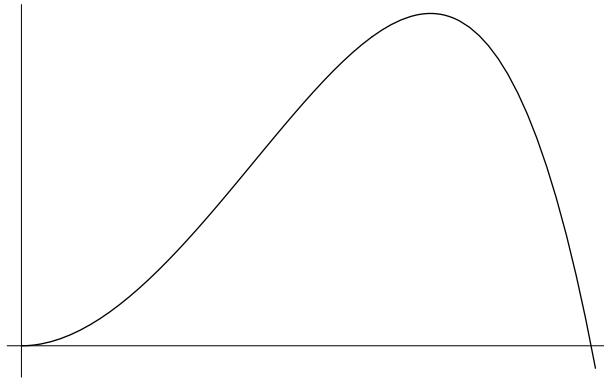


Figura 4.1

¿Para qué nos sirve esta acotación de la diferencia $\Delta\mathcal{E}$? El principal teorema de estabilidad de [24] usa este control inferior de la desviación de la función de Lyapunov de una manera muy interesante, lo enunciamos a continuación y damos un esbozo de su demostración

Teorema 4.1.1 *Sea $\sigma < 2/n$ con $n = 1$ o $n = 3$. Sea $\phi(x, t)$ la única solución de la ecuación no lineal de Schrödinger con dato inicial $\phi_0 \in H^1$. Entonces el solitón R es orbitalmente estable, i.e. para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon) > 0$, tal que si $\rho_E(\phi_0, \mathcal{G}_R) < \delta(\varepsilon)$ entonces*

$$\rho_E(\phi(t), \mathcal{G}_R) < \varepsilon \quad \text{para todo } t > 0$$

Demostración: Supongamos que el mínimo de (4.8) se realiza en (x_0, γ) . Por (4.14), tenemos que

$$\Delta\mathcal{E} \geq C \|w\|_{H^1}^2 (1 - a \|w\|_{H^1}^\theta - b \|w\|_{H^1}^4)$$

Luego

$$\Delta\mathcal{E} \geq g(\rho_E(\phi(t), \mathcal{G}_R)) \quad (4.16)$$

donde $g(x)$ es el que definimos en (4.15), notar que $g(0) = 0$ y $g(t) > 0$ para $0 < t \ll 1$. Podemos obtener la estabilidad desde (4.16): sea $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, entonces la continuidad de \mathcal{E} en H^1 implica que existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\Delta\mathcal{E} < g(\varepsilon)$ para $\rho_E(\phi_0, \mathcal{G}_R) < \delta(\varepsilon)$. Ya que $\Delta\mathcal{E}$ no depende de t , desde (4.16) concluimos que $g(\rho_E(\phi(t), \mathcal{G}_R)) < g(\varepsilon)$, para $t > 0$.

Así, ya que $\rho_E(\phi(t), \mathcal{G}_R)$ es una función continua de t ,

$$\rho_E(\phi(t), \mathcal{G}_R) < \varepsilon \quad \text{para } t > 0 \quad (4.17)$$

por lo tanto el solitón $R(x)$ es orbitalmente estable. ■

En la sección siguiente adaptaremos al caso continuo periódico lo hecho en [24] para obtener cotas de las formas cuadráticas $\langle L_+^\sigma u, u \rangle$ y $\langle L_-^\sigma v, v \rangle$.

4.2. La ecuación periódica

En esta sección abordaremos uno de los temas centrales de esta tesis. Nos planteamos el problema de la ecuación de Schrödinger con no linealidad potencial y condiciones periódicas de borde en el intervalo $[0, 1]$. La denominaremos ecuación periódica no lineal de Schrödinger (PNLS). Por otro lado, en los problemas de confinamiento de electrones en un intervalo espacial la función de onda debe anularse en los bordes, por lo que agregamos esta condición aunque no sea necesaria para la periodicidad.

$$\begin{cases} \partial_t \phi = i\partial_x^2 \phi + i|\phi|^{2\sigma} \phi & (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_{>0} \\ \phi(0, t) = \phi(1, t) = 0 & t > 0 \\ \phi'(0, t) = \phi'(1, t) & t > 0 \\ \phi(x, 0) = \phi_0(x) & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (4.18)$$

¿Por qué plantearnos el problema periódico?. Las técnicas mencionadas en la sección anterior, donde el dominio espacial era todo \mathbb{R} o \mathbb{R}^n , no pueden ser extendidas de manera automática a un intervalo porque para aplicarlas era fundamental contar con la invariancia de las soluciones por cambios de fase y traslaciones rígidas y también poder hacer uso de los cambios de escala. En el caso periódico con valores de borde fijos, la invariancia por cambio de fase no ofrece diferencia pero las traslaciones y los cambios de escala ya no tienen sentido, por lo que, a la hora de ajustar distancias, perdemos un grado de libertad.

En una primera etapa analizaremos la existencia de solitones y la estabilidad orbital de ellos en el caso periódico con datos de borde nulos. La idea es aplicar el teorema de estabilidad (4.1.1) para lo que necesitamos obtener cotas inferiores convenientes para las formas cuadráticas dadas por L_-^σ y L_+^σ , aunque el método va a diferir totalmente del empleado por M. Weinstein en [24] porque él usaba

el hecho que el solitón R_σ es un mínimo del funcional de G-N. Nosotros podríamos haber usado una técnica semejante aquí, para lo que hubiéramos necesitado redefinir este funcional, pero de todos modos no logramos obtener por este camino las cotas deseadas que permiten aplicar el teorema de estabilidad ya mencionado. Optamos por aplicar técnicas de la teoría de perturbaciones para lograr este objetivo. En una segunda etapa analizaremos el problema discretizado, la estabilidad orbital de los solitones discretos y la convergencia de las soluciones discretas hacia la solución del continuo. En el caso discreto el método utilizado, aunque sigue los lineamientos generales similares al del continuo, requiere la definición de nuevos espacios y de algunas técnicas específicas.

Las cantidades conservadas por la ecuación (4.18) son exactamente las mismas que las conservadas por la ecuación en todo \mathbb{R} , lo que es esperable porque la conservación de estas cantidades está relacionada con la estructura del operador y no con los datos de borde o condiciones iniciales. De todos modos, de todas las posibles cantidades conservadas nosotros sólo usaremos la probabilidad \mathcal{N} y la energía \mathcal{H}

$$\mathcal{N}(\phi) = \|\phi\|_2^2 \quad (4.19)$$

$$\mathcal{H}(\phi) = \|\partial_x \phi\|_2^2 - \frac{1}{\sigma + 1} \|\phi\|_{\sigma+2}^{\sigma+2} \quad (4.20)$$

Además, en el estudio de la estabilidad orbital de los solitones del problema periódico no podemos aplicar las traslaciones que se usaban en [24], por lo que en este caso la definición de órbita de un elemento y de la distancia de un elemento dado a la órbita de otro sólo dependerán de los cambios de fase.

4.2.1. Existencia y unicidad de soluciones

En el caso de la ecuación periódica con no linealidad del tipo potencial, Bourgain y Kavian demostraron ([4] y [15]) que el problema a valores iniciales asociado a (4.18) está bien planteado en un espacio de Sobolev. Podemos resumir los resultados en los siguientes dos teoremas. El primero de ellos da la existencia local de una solución, y el segundo, usando leyes de conservación, prueba la existencia global de la misma para los valores subcríticos del exponente.

Teorema 4.2.1 *Si $\phi_0 \in H^s$ con $s \geq 0$, entonces existen $T = T(\phi_0) > 0$ y una única $\phi \in C(0, T, H^s)$ solución fuerte de (4.18), y la aplicación $\phi_0 \mapsto \phi$ es continua.*

Teorema 4.2.2 *Sea $\sigma < 2$, si $\phi_0 \in H^k$ con $k \in \mathbb{N}_0$, entonces existe una única $\phi \in C(\mathbb{R}, H^k)$ solución fuerte de (4.18).*

También, para $\sigma \geq 2$, O. Kavian ([15]) probó que existen soluciones que explotan.

4.2.2. Solitones del periódico continuo

Como nosotros nos reducimos a trabajar con $x \in \mathbb{R}$ podemos usar el método de la energía para analizar la existencia y las propiedades de los solitones R_σ como soluciones de la ecuación estacionaria con condiciones de borde periódicas

$$\begin{cases} R'' - ER + R^{2\sigma+1} = 0 & \text{para } x \in (0, 1) \\ R(0) = R(1) = 0 \\ R'(0) = R'(1) \end{cases} \quad (4.21)$$

Proposición 4.2.1

Para todo $E > 0$ y $\sigma > 0$ existe al menos una solución $R_\sigma(x)$ de la ecuación (4.21) que satisface las siguientes propiedades

1. R_σ es periódica con período uno, vale que $R_\sigma(0) = R_\sigma(1/2) = R_\sigma(1) = 0$.
2. R_σ es impar en $[0, 1]$ con respecto a $x = 1/2$, es positiva en $(0, 1/2)$, es monótona creciente en $[0, 1/4]$ y simétrica en $[0, 1/2]$ con respecto al punto medio (por lo tanto tiene un máximo en ese punto).
3. $R_\sigma \in C^\infty \cap H_0^1[0, 1/2]$.

Además se verifica que para $1 \leq p < +\infty$

$$\|V_\sigma\|_p = \|E + 4\pi^2 - R_\sigma^{2\sigma}(x)\|_p \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} 0$$

Demostración: Ver apéndice (B.1).

Observación 4.2.1 Como vemos en la proposición es natural buscar soluciones en el espacio de funciones definidas en $[0, 1]$ que sean impares respecto a $x = 1/2$. Esto tiene sentido porque además este conjunto es invariante por el flujo de la ecuación. Esto se prueba de la siguiente manera. Supongamos que $\phi(x, t)$ es una solución de la ecuación (4.18) con dato inicial $\phi_0(x)$ impar respecto al punto medio $x = 1/2$ (es decir que $\phi_0(x) = -\phi_0(1-x)$ para todo $0 \leq x \leq 1$). Nombramos con $\psi(x, t)$ a la solución del problema (4.18) con dato inicial $\psi_0(x) = -\phi_0(1-x)$

$$\begin{cases} \partial_t \psi = i \partial_x^2 \psi + i |\psi|^{2\sigma} \psi & (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_{>0} \\ \psi(0, t) = \psi(1, t) = 0 & t > 0 \\ \psi'(0, t) = \psi'(1, t) & t > 0 \\ \psi(x, 0) = \psi_0(x) = -\phi_0(1-x) & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

sabemos que la solución existe y es única, y por como planteamos el problema ella debe ser

$$\psi(x, t) = -\phi(1 - x, t)$$

para todo tiempo $t > 0$. Pero además como $\phi_0(x) = -\phi_0(1 - x)$ para todo $0 \leq x \leq 1$ entonces sucede que $\psi(x, t)$ es también solución del problema original del que $\phi(x, t)$ ya era solución, por lo tanto $\psi(x, t) = \phi(x, t)$, entonces

$$\phi(x, t) = -\phi(1 - x, t) \quad \text{para } (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_{>0}$$

4.2.3. Estabilidad orbital de los solitones

Órbita y distancia

Para la estabilidad orbital del solitón necesitamos definir la órbita de una función dada y la distancia de una función a la órbita de otra. Estos dos conceptos están definidos en (4.7) y en (4.8), pero en este caso sólo podemos usar los cambios de fase y no las traslaciones. Por lo tanto, volvemos a definir este concepto en el contexto de la ecuación periódica del siguiente modo

$$\mathcal{G}_\psi = \{\psi(\cdot, t) e^{i\gamma} / \gamma \in [0, 2\pi)\} \quad (4.22)$$

$$\rho_E^2(\phi(t), \mathcal{G}_\psi) = \inf_{\gamma \in [0, 2\pi)} \left\{ \|\nabla \phi(\cdot, t) e^{i\gamma} - \nabla \psi\|_{L^2}^2 + E \|\phi(\cdot, t) e^{i\gamma} - \psi\|_{L^2}^2 \right\} \quad (4.23)$$

Como el operador que define la ecuación es el mismo que el de la ecuación en toda la recta (sólo estamos cambiando las condiciones de borde) entonces tiene las mismas cantidades conservadas y por lo tanto la misma funcional de Lyapunov (4.9). Si $\phi(x, t)$ es una solución de la ecuación (4.18) podemos pensar nuevamente que en cada tiempo t su representante óptimo en γ es una perturbación del solitón $R(x)$, esto es

$$\phi(x, t) e^{i\gamma} = R(x) + u(x, t) + iv(x, t) \quad (4.24)$$

con las restricciones

$$\begin{aligned} u(0, t) = u(1, t) = v(0, t) = v(1, t) = 0 & \quad \text{para todo } t > 0 \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) \quad \text{y} \quad v_x(0, t) = v_x(1, t) & \quad \text{para todo } t > 0 \end{aligned}$$

Esta caracterización de los elementos de la órbita de una solución como un perturbado del perfil solitón, nos permite hallar condiciones sobre las componentes de la perturbación, con el fin de caracterizar los representantes de la órbita de la solución que realizan la distancia al solitón en cada tiempo t (en el sentido dado en (4.23)). En resumen, tenemos la condición de ortogonalidad $v \in (R^{2\sigma+1})^\perp$ en $L^2[0, 1]$

que debe satisfacer $v(x, t)$ en todo tiempo t para realizar el mínimo de la distancia (ver apéndice (B.2)). De manera extendida esta condición es

$$\int_0^1 R^{2\sigma+1}(x)v(x, t)dx = 0 \quad (4.25)$$

Como consecuencia inmediata tenemos que $v \neq R$.

En el caso de todo \mathbb{R} teníamos también la condición de ortogonalidad $u \in (R^{2\sigma}R')^\perp$ que se debía a la minimización de la distancia en las traslaciones. Sin embargo sólo se usaba esta condición para asegurar que la parte real de la perturbación $u \in (R')^\perp$ en L^2 para todo tiempo t . En nuestro caso aseguraremos esto, bajo ciertas condiciones, sin necesidad de considerar las traslaciones.

Función de Lyapunov y variaciones entorno de R

Como las cantidades conservadas (4.19) y (4.20) son las mismas que en el caso de la ecuación en todo \mathbb{R}^n , es razonable definir la misma función de Lyapunov \mathcal{E} dada en (4.9) y también analizar su diferencia $\Delta\mathcal{E}$, entre el valor de \mathcal{E} en el dato inicial ϕ_0 y el valor del mismo en el solitón R , como medida de desviación. Al igual que en (4.11) podemos expresar esta diferencia como $\Delta\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}[R + w] - \mathcal{E}[R]$ y realizar una expansión de Taylor. Al fin obtenemos una expresión de la forma

$$\Delta\mathcal{E} \geq \langle L_+^\sigma u, u \rangle + \langle L_-^\sigma v, v \rangle - C_1 \|w\|_{H^1}^3 - C_2 \|w\|_{H^1}^6$$

siendo L_-^σ y L_+^σ los ya definidos en (4.12) y (4.13) (ver el apéndice (B.3) para el cálculo de esta desigualdad).

Nuestro principal objetivo es ahora obtener cotas inferiores de las formas cuadráticas $\langle L_+^\sigma u, u \rangle$ y $\langle L_-^\sigma v, v \rangle$ en términos de $\|w\|_{H^1}^2$ para así tener una cota inferior de $\Delta\mathcal{E}$ dado por

$$\Delta\mathcal{E} \geq C_1 \|w\|_{H^1}^2 - C_2 \|w\|_{H^1}^3 - C_3 \|w\|_{H^1}^6 \quad \text{con } C_1, C_2 \text{ y } C_3 > 0 \quad (4.26)$$

Seguiremos sólo en parte las técnicas usadas en [24] para obtener este control inferior de $\Delta\mathcal{E}$.

Cota inferior de $\langle L_-^\sigma v, v \rangle$

Proposición 4.2.2 *El operador L_-^σ es autoadjunto y no negativo en $L^2[0, 1/2]$ con núcleo generado por R . Es decir que podemos afirmar que*

$$\langle L_-^\sigma v, v \rangle \geq 0 \quad \text{para } v \in L^2[0, 1/2]$$

Demostración: Que L_-^σ es un operador autoadjunto es inmediato, como así también que $L_-^\sigma(R) = 0$.

Como $R > 0$ (en el sentido que lo es en $(0, 1/2)$, y en $(1/2, 1)$ es el reflejo impar) entonces podemos afirmar que $\lambda = 0$ es el primer autovalor de L_-^σ con autofunción R . Por lo tanto L_-^σ es un operador no negativo.

Veamos ahora que $\lambda = 0$ es un autovalor simple con $\text{Nu}(L_-^\sigma) = \text{gen}\{R\}$. Si planteamos el problema ordinario, lineal de segundo orden con valor inicial

$$\begin{cases} L_-^\sigma v = 0 \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

sabemos que tiene un subespacio solución de dimensión uno (parametrizado por el valor $v'(0)$), por lo tanto la única solución que además satisface $v(1/2) = 0$, sin ser la solución nula, será $R(x)$ o un múltiplo de él. Se suele decir que en este sentido, R es no degenerado. ■

Corolario 4.2.1 Existe $C > 0$ tal que para $v \in (R^{2\sigma+1})^\perp$, con $v \neq 0$ se cumple

$$\langle L_-^\sigma v, v \rangle \geq C \langle v, v \rangle > 0 \quad (4.27)$$

Demostración: Si $\inf_{v \in L^2} \frac{\langle L_-^\sigma v, v \rangle}{\langle v, v \rangle} = 0$, por la proposición este ínfimo se lo alcanza en R y vale 0, por lo tanto si pedimos que $v \in (R^{2\sigma+1})^\perp$ entonces el ínfimo no puede ser 0 porque sino se contradice la condición (4.25), pues $R \notin (R^{2\sigma+1})^\perp$. Por lo tanto, existe $C > 0$ tal que para todo $v \in (R^{2\sigma+1})^\perp$

$$\frac{\langle L_-^\sigma v, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \geq C$$

de donde se tiene la desigualdad buscada. ■

De todos modos la desigualdad (4.27) no nos alcanza para el control inferior de $\Delta \mathcal{E}$ que buscamos. Necesitamos que la norma de v que aparece sea la H_0^1 . En la siguiente proposición usamos la desigualdad (4.27) para obtener otra adecuada.

Proposición 4.2.3 Existe $C > 0$ tal que para $v \in (R^{2\sigma+1})^\perp$ vale que

$$\langle L_-^\sigma v, v \rangle \geq C \|v\|_{H_0^1}^2 \quad (4.28)$$

Demostración: La idea es usar la desigualdad (4.27) para obtener otra por debajo que contenga a la norma $\|v\|_{H_0^1}$. Usaremos que existe una constante $C_1 > 0$ tal que $\langle E v - R^{2\sigma} v, v \rangle \geq -C_1 \langle v, v \rangle$, lo que es inmediato por la continuidad. Combinando esta desigualdad con la (4.27) tenemos que

$$\langle L_-^\sigma v, v \rangle \geq \langle -v_{xx}, v \rangle - C_1 \langle v, v \rangle \geq \langle -v_{xx}, v \rangle - \frac{C_1}{C} \langle L_-^\sigma v, v \rangle$$

de donde

$$\left(1 + \frac{C}{C_1}\right) \langle L_-^\sigma v, v \rangle \geq \langle -v_{xx}, v \rangle$$

Si a esta última expresión le sumamos (4.27) obtenemos

$$\left(\frac{1}{C} + 1 + \frac{C}{C_1}\right) \langle L_-^\sigma v, v \rangle \geq \langle -v_{xx}, v \rangle + \langle v, v \rangle = \|v\|_{H_0^1}^2$$

si llamamos $C = \frac{CC_1}{C_1 + CC_1 + C^2}$ entonces tenemos que

$$\langle L_-^\sigma v, v \rangle \geq C \|v\|_{H_0^1}^2 \quad \forall v \in (R^{2\sigma+1})^\perp$$

■

Cota inferior de $\langle L_+^\sigma u, u \rangle$

Es inmediato verificar que $\langle L_+^\sigma R, R \rangle < 0$ y que $L_+^\sigma(R') = 0$. Cabe aclarar que R' no es una función en el espacio en que nosotros planteamos el problema porque no es impar en $[0, 1]$ respecto a $x = 1/2$, sin embargo igualmente podemos realizar el análisis de los autovalores de L_+^σ porque podemos pensar por un momento que trabajamos en una clase más general de funciones que contiene a la que nosotros elegimos, por ejemplo $L^2[0, 1]$, entonces los autovalores no cambian, a lo sumo se agregarán algunos que es lo que sucede en nuestro caso. En $L^2[0, 1]$ el operador L_+^σ tiene el primero y el segundo autovalor negativos, el tercero es $\lambda = 0$ con autofunción asociada $R'(x)$ y los siguientes son positivos. Esto se debe a la teoría de oscilaciones y a que $R'(x)$ tiene exactamente tres raíces en $[0, 1]$. Además todas las autofunciones de este operador son pares o impares, comenzando con par y luego impar y así de manera alternada (ver el apéndice (B.4.1)). Nosotros nos reducimos a buscar soluciones en el espacio de funciones impares, por lo tanto es claro que el primer autovalor aquí será negativo y tendrá autofunción impar (corresponde al segundo autovalor en todo $L^2[0, 1]$) y el segundo autovalor en el espacio de las impares es positivo (corresponde al cuarto autovalor en todo $L^2[0, 1]$).

Queremos controlar en R^\perp el valor de la forma cuadrática $\langle L_+^\sigma u, u \rangle$, de modo que el valor de esta forma en la proyección de u sobre R^\perp (ver (4.24)) esté acotado inferiormente por el cuadrado de su norma. Debemos hacer una suposición, relativamente natural. La idea es la siguiente: si suponemos que el dato inicial ϕ_0 y R tienen la misma norma L^2 , como el flujo de la ecuación conserva esta norma, entonces en todo tiempo t la solución $\phi(x, t)$ y el solitón R también tendrán la misma norma L^2

$$\int_0^1 |\phi(x, t)|^2 dx = \int_0^1 R^2(x) dx \quad (4.29)$$

es decir que podemos imaginar que tanto R como todo el flujo de la ecuación comparten la misma cáscara de esfera en $L^2[0, 1]$. Si análogamente a (4.10) pensamos que la solución $\phi(x, t)$ es una perturbación de

R , entonces (4.29) se transforma (ver apéndice (B.4)) en la condición

$$\langle R, u \rangle = -\frac{1}{2} [\langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle] \quad (4.30)$$

que tiene un signo negativo muy esperado, porque $\langle R, u \rangle$ da la intensidad y el sentido de la proyección de u en la dirección de R , y como valen (4.10) y (4.29) podemos pensar que $u + iv$ es una “pequeña” perturbación de R en la cáscara de una bola, por lo tanto debe ser casi ortogonal a R y “apuntar hacia abajo” respecto a R , por esto el producto interno es negativo.

A continuación probamos el resultado que nos permite asegurar que L_+^σ es un operador no negativo sobre R^\perp , siendo este el primer paso para obtener la cota que buscamos.

Proposición 4.2.4 *El operador L_+^σ es autoadjunto en $L^2 \cap H_0^1[0, 1]$, y si σ es suficientemente pequeño entonces la forma cuadrática definida por L_+^σ es positiva en R_σ^\perp*

$$\langle L_+^\sigma u, u \rangle > 0 \quad \text{para } u \in R_\sigma^\perp \quad (4.31)$$

Demostración:. El operador L_+^σ posee un sólo autovalor negativo porque por un lado $\langle L_+^\sigma R_\sigma, R_\sigma \rangle < 0$ y por otro $L_+^\sigma R'_\sigma = 0$, siendo que R'_σ tiene exactamente una única raíz en el intervalo $[0, 1/2]$, es decir que R'_σ es autofunción del segundo autovalor $\lambda_2^\sigma = 0$ en $L^2[0, 1/2]$. Por lo observado al inicio de esta sección podemos asegurar que en nuestro caso el segundo autovalor será estrictamente positivo. Entonces, por la teoría de oscilaciones, tenemos garantizado que el primer autovalor $\lambda_1^\sigma < 0$ es simple, con autofunción normalizada v_σ , esto es que $\|v_\sigma\|_2 = 1$ y $L_+^\sigma v_\sigma = \lambda_1^\sigma v_\sigma$.

Usando la igualdad (4.30) podemos obtener una cota de la forma cuadrática $\langle L_+^\sigma u, u \rangle$ del tipo que buscábamos. El desarrollo de esto es uno de los núcleos principales de este trabajo y se encuentra en el apéndice (B.4). ■

Proposición 4.2.5 *Si $0 < \sigma \ll 1$ y $u \in H_0^1[0, 1]$ satisfice (4.30) entonces existen constantes D, D_1 and $D_2 > 0$, tales que verifican*

$$\langle L_+^\sigma u, u \rangle \geq D \|u\|_{H_0^1}^2 - D_1 \|w_x\|_2 \|w\|_2^2 - D_2 \|w\|_2^4 \quad (4.32)$$

Demostración:. Descomponemos u en sus componentes paralelas y perpendiculares respecto a R :

$$u = u_{\parallel} + u_{\perp}$$

con

$$\begin{aligned} u_{\parallel} &= \langle u, R \rangle R \\ &= -\frac{1}{2} [\langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle] R \end{aligned} \quad (4.33)$$

y

$$\begin{aligned} u_{\perp} &= u - u_{\parallel} \\ &= u - \frac{1}{2} [\langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle] R \end{aligned} \quad (4.34)$$

Introduciendo esta descomposición de u dentro de la forma cuadrática tenemos que

$$\langle L_+^{\sigma} u, u \rangle = \langle L_+^{\sigma} u_{\parallel}, u_{\parallel} \rangle + 2 \langle L_+^{\sigma} u_{\parallel}, u_{\perp} \rangle + \langle L_+^{\sigma} u_{\perp}, u_{\perp} \rangle$$

por lo tanto debemos acotar cada uno de estos tres términos.

Por (4.30), (4.31) y (4.34) sabemos que existe $d > 0$ para el que se verifica

$$\begin{aligned} \langle L_+^{\sigma} u_{\perp}, u_{\perp} \rangle &\geq d \langle u_{\perp}, u_{\perp} \rangle \\ &= d \left[\langle u, u \rangle + \frac{1}{4} [\langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle]^2 \right] \end{aligned} \quad (4.35)$$

Usando (4.30) y (4.33) tenemos que

$$\langle L_+^{\sigma} u_{\parallel}, u_{\parallel} \rangle = \frac{1}{4} \langle L_+^{\sigma} R, R \rangle [\langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle]^2 \quad (4.36)$$

Finalmente desde (4.34) concluimos que existen constantes d' y $d'' > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \langle L_+^{\sigma} u_{\perp}, u_{\parallel} \rangle &= \langle u, R \rangle \langle L_+^{\sigma} u_{\perp}, R \rangle \\ &= -\frac{1}{2} [\langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle] \langle L_+^{\sigma} u_{\perp}, R \rangle \\ &\geq -d' \|w\|^2 \|w_x\|_2 - d'' \|w\|_2^4 \end{aligned} \quad (4.37)$$

Ahora, con las desigualdades (4.35),(4.36) y (4.37) obtenemos la cota inferior (4.32). ■

Para obtener un resultado general deberíamos relajar la restricción sobre la norma que impusimos en (4.30) pero lamentablemente el resultado que obtuvimos es sólo parcial, por lo que mantendremos esta condición.

4.3. Discretización de la ecuación periódica

4.3.1. Ecuación Semidiscreta

Con el fin de tener un método numérico que nos permita calcular la solución de la ecuación de Schrödinger no lineal con datos periódicos, desarrollaremos a continuación el proceso de discretización de la variable espacial a través de un método de diferencias finitas. Dado $n \in \mathbb{N}$ partimos al intervalo

$[0, 1]$ en $4n$ intervalos de longitud $h = \frac{1}{4n}$, es decir que tenemos la partición equiespaciada de $[0, 1]$ de $4n + 1$ puntos, dada por

$$x_j = jh \quad \text{con } 0 \leq j \leq 4n$$

Si llamamos $\phi_j = \phi(x_j)$ y aplicamos el método de diferencias finitas a la ecuación (4.18), en cada nodo obtenemos la ecuación diferencial no lineal

$$\phi_j' = \frac{i}{h^2} (\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}) + i |\phi_j|^{2\sigma} \phi_j \quad (4.38)$$

Notaremos con ϕ_h al vector de $4n + 1$ lugares dado por $\phi_h = (\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{4n})$. Sin embargo, como para todo tiempo t la primera y última coordenadas son iguales a cero, podemos pensar que $\phi_h = (\phi_1, \dots, \phi_{4n-1})$, pero siempre tendremos presente que están los dos extremos y valen cero. También llamaremos A_h a la matriz cuadrada dada por la discretización centrada de la segunda derivada cambiada de signo, y $D(\phi_h)$ a la matriz diagonal que describe la parte no lineal de (4.38). Notar que la condición de anularse en los bordes está incluida en la matriz A_h

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D(\phi_h) = \begin{pmatrix} |\phi_1|^{2\sigma} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |\phi_2|^{2\sigma} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |\phi_n|^{2\sigma} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos la ecuación semidiscreta (SDPNLS) asociada a (4.18) dada por el sistema de ecuaciones diferenciales complejas no lineales

$$\phi_h' = -iA_h\phi_h + iD(\phi_h)\phi_h \quad (4.39)$$

Así, para cada valor de $n \in \mathbb{N}$ tenemos el flujo del sistema (4.39) con imagen en \mathbb{C}^{4n-1} . Nuestro objetivo es ver que, si para cada $n \in \mathbb{N}$, planteamos directamente el problema discreto con dato inicial cercano al solitón discreto R_h entonces se tiene también estabilidad orbital, y esto nos dará una herramienta para probar la convergencia del método, es decir que, para todo tiempo t se tiene que $\phi_h(t) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \phi(t)$ en el sentido de la órbita.

4.3.2. Definiciones básicas

Daremos la noción de estabilidad usando nuevamente el método de Lyapunov. En la sección (4.2.3) definimos para el caso periódico los conceptos de órbita y distancia de un elemento a la órbita de otro, usando el hecho que cambios de fase preservan la solución de la ecuación PNLs. Esto se puede llevar al espacio discreto sin necesidad de pasar al conjunto de poligonales.

A continuación definimos los espacios, con sus respectivas normas, en los que trabajaremos.

Definición 4.3.1 Llamamos \mathcal{V} al subespacio de las funciones poligonales en $[0, 1]$ con condiciones de periodicidad y de nulidad en los bordes. En particular $\mathcal{V} \subset H_0^1[0, 1]$.

Observación 4.3.1 Dado un vector $\bar{u}_h \in \mathbb{C}^{4n+1}$, con $h = \frac{1}{4n}$, siempre podemos asociarle una poligonal en \mathcal{V} con nodos equiespaciados:

$$U(u_h)(x) = \begin{cases} \frac{u_1}{h}x & \text{si } 0 \leq x \leq h \\ \frac{u_2 - u_1}{h}(x - h) + u_1 & \text{si } h \leq x \leq 2h \\ \frac{u_3 - u_2}{h}(x - 2h) + u_2 & \text{si } 2h \leq x \leq 3h \\ \vdots & \vdots \\ \frac{u_{4n-1} - u_{4n-2}}{h}(x - (4n-2)h) + u_{4n-2} & \text{si } (4n-2)h \leq x \leq (4n-1)h \\ -\frac{u_{4n-1}}{h}(x - (4n-1)h) + u_{4n-1} & \text{si } (4n-1)h \leq x \leq 4nh = 1 \end{cases} \quad (4.40)$$

Definición 4.3.2 Sea $n \in \mathbb{N}$ y $h = \frac{1}{4n}$, definimos el espacio

$$\mathbb{S}_h = \left\{ u \in \mathbb{C}^{4n-1} / u_{2n} = 0 \text{ y } u_{2n+j} = -u_{2n-j} \text{ para } 0 \leq j \leq 2n-1 \right\}$$

es decir que son vectores antisimétricos respecto al punto medio.

El hecho de pedir que los vectores de \mathbb{S}_h sean antisimétricos respecto a su centro, obliga a la periodicidad. El subespacio \mathbb{S}_h es invariante por el flujo de la ecuación (4.39) por lo que nos restringiremos a buscar soluciones allí.

Por razones prácticas y debido a la simetría de los vectores de \mathbb{S}_h , en lo que sigue trabajaremos en \mathbb{C}^{2n-1} como representantes de la primera mitad de los vectores de \mathbb{S}_h . Por abuso de notación volvemos a nombrar con \mathbb{S}_h a estos vectores.

Definición 4.3.3 Llamamos $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ a las poligonales en $[0, 1]$ con $4n-1$ nodos interiores equiespaciados, con valor nulo en el nodo central y antisimétrico respecto a éste.

Es inmediato que toda poligonal en \mathcal{V}_h proviene de levantar, como en (4.40), un vector de \mathbb{S}_h .

Definición 4.3.4 Definimos el operador de evaluación $E_h : \mathcal{V}_h \rightarrow \mathbb{S}_h$ dado por

$$(E_h f)_j = f(jh) \quad 1 \leq j \leq 2n-1$$

y podemos ver al operador U_h definido en (4.40) de \mathbb{S}_h en \mathcal{V}_h que devuelve la poligonal con vértices en los puntos (jh, v_j) , $1 \leq j \leq 2n-1$, como la inversa de E_h .

Definición 4.3.5 Sea $n \in \mathbb{N}$ y $h = \frac{1}{4n}$. En \mathbb{S}_h definimos el siguiente productos y las siguientes normas: dados $u_h, v_h \in \mathbb{S}_h$

$$\begin{aligned}\langle u_h, v_h \rangle_h &= \sum_{j=1}^n h u_j \bar{v}_j \\ |u_h|_{p,h}^p &= \sum_{j=1}^n h |u_j|^p \\ \|u_h\|_{1,h}^2 &= \langle (I + A_h) u_h, u_h \rangle_h\end{aligned}$$

Observación 4.3.2 Si a cada vector de \mathbb{S}_h le asociamos una función escalonada entonces tenemos que el producto interno y las normas recién definidas corresponden al producto interno en $L^2 [0, 1]$ y a la normas en $L^2 [0, 1]$ y $H^1 [0, 1]$ de ellas. La relación entre la norma $|u_h|_{2,h}$ y la de la poligonal $\|U(u_h)\|_{L^2}$ la daremos más adelante.

Definición 4.3.6 Dado un vector $v_h \in \mathbb{S}_h$ definimos su órbita como el vector con todos los posibles cambios de fases

$$\mathcal{G}_{v_h} = \{v_h e^{i\gamma} / \gamma \in (0, 2\pi]\} \quad (4.41)$$

Definición 4.3.7 Dado w_h y $v_h \in \mathbb{S}_h$ definimos la distancia de w_h a la órbita \mathcal{G}_{v_h} de la siguiente manera

$$\rho_E^2(w_h, \mathcal{G}_{v_h}) = \inf_{\gamma \in [0, 2\pi)} \left\{ \langle A_h(v_h e^{i\gamma} - w_h), v_h e^{i\gamma} - w_h \rangle_h + E \langle v_h e^{i\gamma} - w_h, v_h e^{i\gamma} - w_h \rangle_h \right\} \quad (4.42)$$

Definición 4.3.8 Los operadores discretos asociados a L_-^σ y a L_+^σ son respectivamente L_-^h y $L_+^h : \mathbb{S}_h \rightarrow \mathbb{S}_h$, definidos por

$$\begin{aligned}L_-^h \phi_h &= A_h \phi_h + E \phi_h - D(R_h) \phi_h \\ L_+^h \phi_h &= A_h \phi_h + E \phi_h - (2\sigma + 1) D(R_h) \phi_h\end{aligned} \quad (4.43)$$

Aunque L_-^h y L_+^h dependen de σ , en lo que sigue omitimos hacer mención directa de esto para no recargar aún más la escritura.

4.3.3. Solitones del problema semidiscreto

La ecuación estacionaria asociada a (4.39) al introducir una discretización espacial con paso constante h da un sistema no lineal con término genérico dado por la ecuación de recurrencia

$$\frac{r_{j-1} - 2r_j + r_{j+1}}{h^2} - E r_j + r_j^{2\sigma+1} = 0 \quad \text{con } 1 \leq j \leq 4n - 1 \quad (4.44)$$

(pensemos que al intervalo $[0, 1]$ lo partimos en $4n + 1$ nodos, con $x_0 = 0$, $x_n = \frac{1}{4}$, $x_{2n} = \frac{1}{2}$ y $x_{4n} = 1$).

Queremos probar que existe una solución de este sistema discreto con la forma esperada: positiva en los nodos del intervalo $(0, 1/2)$ con un reflejo impar en los del intervalo $(1/2, 1)$ (y por lo tanto que se anule en $x_{2n} = \frac{1}{2}$), que sea simétrica respecto a $x_n = \frac{1}{4}$ en los nodos del intervalo $(0, 1/2)$, y que tenga un máximo en ese nodo.

Para la existencia debemos usar solamente el hecho que satisface la recurrencia (4.44). Como esta recurrencia es a dos valores para atrás podemos usar un método de shooting para intentar acertar justo en la solución que queremos. Para esto, en lo que sigue, dejaremos que la ecuación de recurrencia evolucione lo que necesite, es decir que dejaremos que la iteración se escape del intervalo $[0, 1]$ hacia la derecha (eventualmente hasta ∞).

Lema 4.3.1

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, y $h = \frac{1}{4n}$, existe R_h solución de la ecuación de recurrencia (4.44) con las propiedades de simetría requeridas:

1. R_h es positiva en los nodos correspondientes al intervalo $(0, 1/2)$, y en este mismo intervalo es simétrica respecto al punto medio $x = 1/4$, teniendo un máximo en el mismo. Es decir que

$$\begin{aligned} r_j^h &> 0 \text{ para todo } 1 \leq j \leq 2n-1 \\ r_{n-j}^h &= r_{n+j}^h \text{ para todo } 0 \leq j \leq n \end{aligned}$$

2. R_h tiene simetría impar respecto al $x = 1/2$, es decir que en el intervalo $(1/2, 1)$ será negativo, con un mínimo en el nodo correspondiente a $x = 3/4$. Es decir que

$$r_{2n+j}^h = -r_{2n-j}^h \text{ para todo } 0 \leq j \leq 2n$$

Demostración: Ver el apéndice (C.1). ■

4.3.4. Funcional de Lyapunov y estabilidad

En esta sección hacemos un vista rápida del método a seguir para obtener un resultado de estabilidad para el caso discreto, la idea es hacer un planteo y un desarrollo semejante al expuesto en la sección (4.2.3).

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $h = \frac{1}{4n}$, el sistema discreto (4.39) también presenta cantidades conservadas sobre el flujo: el hamiltoniano y la masa discreta

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_h[\phi_h] &= \left\langle \left(A_h - \frac{1}{\sigma+1} D(R_h) \right) \phi_h, \phi_h \right\rangle_h \\ \mathcal{N}_h[\phi_h] &= |\phi_h|_{2,h}^2 \end{aligned}$$

De manera análoga a lo que hicimos en el caso periódico continuo (4.2.3) construimos un funcional de Lyapunov con estas cantidades conservadas por el flujo del sistema discreto

$$\mathcal{E}_h[\phi_h] = \mathcal{H}_h[\phi_h] + EN_h[\phi_h] \quad (4.45)$$

Estimaremos \mathcal{E}_h en términos de ρ_E . Nuevamente como en (4.10) escribimos la solución como el solitón discreto más una perturbación, esto es:

$$\phi_h(t) e^{i\gamma} = R_h + w_h(t) \quad \text{con } w_h(t) = u_h(t) + iv_h(t) \quad (4.46)$$

Usando la conservación de \mathcal{E}_h , tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E}_h &= \mathcal{E}_h[\phi_0] - \mathcal{E}_h[R_h] \\ &= \mathcal{E}_h[\phi_h(t)e^{i\gamma}] - \mathcal{E}_h[R_h] \\ &= \mathcal{E}_h[R_h + w_h(t)] - \mathcal{E}_h[R_h] \end{aligned}$$

Entonces, haciendo una expansión de Taylor en R_h , obtenemos

$$\Delta\mathcal{E}_h \geq \langle L_+^h u_h, u_h \rangle + \langle L_-^h v_h, v_h \rangle - C_1 \|w_h\|_{1,h}^3 - C_2 \|w_h\|_{1,h}^6 \quad (4.47)$$

Aún más, la primera variación de \mathcal{E}_h desaparece, la segunda es una función cuadrática en u_h y v_h , y los restantes términos son $O(\|w_h\|_{1,h}^3)$ que pueden ser estimados por una interpolación de Gagliardo-Nirenberg.

Análogamente a lo que sucede en el caso continuo al plantear la solución en la forma (4.46) sabemos que existe $\gamma_h \in (0, 2\pi)$ que minimiza la distancia (4.42) para el caso R_h

$$\rho_E^2(R_h, \mathcal{G}_{v_h}) = \inf_{\gamma \in (0, 2\pi)} \left\{ \langle A_h(v_h e^{i\gamma} - R_h), v_h e^{i\gamma} - R_h \rangle_h + E \langle v_h e^{i\gamma} - R_h, v e^{i\gamma} - R_h \rangle_h \right\} \quad (4.48)$$

obteniendo la condición de ortogonalidad

$$\langle D(R_h)R_h, v_h \rangle_h = 0 \quad (4.49)$$

que debe ser cumplida por la perturbación del solitón. Ver los cálculos en el apéndice (C.2).

Con la restricción adecuada de espacios, al final obtenemos un control inferior de la parte cuadrática de la desigualdad de (4.47) dada por

$$\langle L_+^h u_h, u_h \rangle_h + \langle L_-^h v_h, v_h \rangle_h \geq C_3 \|w_h\|_{1,h}^2 - C_4 \|w_h\|_{1,h}^3 - C_4 \|w_h\|_{1,h}^4 \quad (4.50)$$

Con esto podemos aplicar la técnica introducida en [26] y ya presentada en la sección (4.1.3) que nos permite obtener el resultado de estabilidad orbital buscado.

4.3.5. Lemas Técnicos

En esta sección probaremos algunos resultados técnicos que serán usados en las demostraciones de los teoremas centrales.

Continuidad de la función U_h

Lema 4.3.2 Para todo $v_h \in \mathbb{S}_h$ se verifica la igualdad

$$\|U_h v_h\|_{H_0^1} = \|v_h\|_{1,h} - \frac{h^2}{6} \langle A_h v_h, v_h \rangle \quad (4.51)$$

Demostración: Ver el apéndice (C.3). ■

Corolario 4.3.1 $U_h : \mathbb{S}_h \rightarrow H_0^1$ es una aplicación lineal y continua, con constante de continuidad $C = 1$, independiente de h , i.e.

$$\|U_h v_h\|_{H_0^1} \leq \|v_h\|_{1,h} \quad (4.52)$$

Demostración: Es una consecuencia inmediata de la igualdad (4.51). ■

Aproximación de la pendiente inicial

En la demostración de la existencia de R_h no determinamos exactamente cuál es el valor inicial r_1^h que da R_h sino que sólo probamos (ver apéndice C.1) que existe un único valor α_h^* en el intervalo $I(h) = [\alpha_{\min}(h), \alpha_{\max}(h)]$ tal que si la recursión comienza con valor $r_1^h = h \tan(\alpha_h^*)$ entonces obtenemos R_h .

Por otro lado es fácil ver desde la misma ecuación continua (4.21) que la solución $R(x)$ satisface lo siguiente.

Lema 4.3.3 Si el máximo valor del solitón continuo es $A = R(1/4)$ y $0 < h < 1/4$, entonces

$$R(h) = hA \sqrt{\frac{A^{2\sigma}}{\sigma+1} - E} + \frac{h^3}{3!} EA \sqrt{\frac{A^{2\sigma}}{\sigma+1} - E} + O(h^4) \quad (4.53)$$

Demostración: Ver el apéndice (C.4.1). ■

A raíz de esto último sospechamos que en el proceso discreto de iteración deberemos tomar como valor de r_1^h a alguna cierta cantidad de términos de la expansión (4.53). En lo que sigue nombraremos con $\beta_0 = R'(0)$, es decir que

$$\beta_0 = A \sqrt{\frac{A^{2\sigma}}{\sigma+1} - E}$$

Convergencia de los estados estacionarios

Queremos analizar si el vector R_h hallado discretamente representa al solitón $R(x)$ del problema continuo, es decir si la poligonal que se forma con los valores del vector R_h se acerca, en algún sentido a determinar, a la curva $R(x)$. De modo equivalente, queremos ver si el vector formado por las evaluaciones de la función $R(x)$ en los nodos $x_j = jh$ están cerca, por ejemplo en norma $||\cdot||_h$, del vector R_h . Para esto necesitamos calcular el orden del error

$$|e_j^h| = |R(jh) - r_j^h|$$

Recordemos la ecuación de recurrencia para un h dado y para todo $j \geq 1$

$$u_{j+1} = -2u_j + u_{j-1} + h^2 u_j (E - u_j^{2\sigma}) \quad (4.54)$$

Si $u_1(\alpha) = h \tan(\alpha)$ entonces $u_j = u_j(\alpha)$, es decir que el valor en cada nodo depende de α .

El problema continuo con datos de borde es equivalente a plantear el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} -U'' + (E - U^{2\sigma})U = 0 \\ U(0) = 0 \\ U'(0) = \beta \end{cases} \quad (4.55)$$

en donde a las distintas asignaciones de β le corresponde una solución distinta $U_\beta(x)$. Por supuesto que cada valor de β en el problema de valores iniciales (4.55) se corresponde con un valor diferente en el borde derecho del problema de valores en el borde.

Desde la misma ecuación podemos asegurar que

$$U_\beta(h) = \beta h + \frac{1}{3!} E \beta h^3 + \dots$$

por lo tanto

$$\frac{U_\beta(h)}{h} = \beta + \frac{1}{6} E \beta h^2 + \dots$$

Definimos

$$\alpha(h, \beta) = \beta + \frac{1}{6} E \beta h^2 \quad (4.56)$$

Dado β , llamaremos $u(\alpha(h, \beta))$ a la recurrencia (4.54) que comienza con valor $u_1 = h \tan(\alpha(h, \beta))$. En la siguiente proposición probaremos que la solución continua $U_\beta(x)$ y el vector $u(\alpha(h, \beta))$ están cerca en los nodos con orden h^2 .

Proposición 4.3.1

Fijado $h = \frac{1}{4N}$ y $\beta > 0$, si $\alpha(h, \beta) = \beta + \frac{1}{6}E\beta h^2$, entonces la solución $U_\beta(x)$ de (4.55) y el vector $u(\alpha(h, \beta))$ solución de (4.54) satisfacen que

$$|e_j^\beta| = |u_j(\alpha(h, \beta)) - U_\beta(jh)| = O(h^2)$$

y en particular

$$|e_{2N}^\beta| = |u_{2N}(\alpha(h, \beta)) - U_\beta(1/2)| = O(h^2)$$

Demostración:. Ver apéndice (C.4.2). ■

Sabemos que (ver el apéndice(C.1)) para cada h , existe un único $\alpha_h^* > 0$ tal que la sucesión $u_j(\alpha_h^*)$ es el solitón discreto R_h (es decir que $u_{2N}(\alpha_h^*) = R(1/2) = 0$). Sea

$$\beta_h^* = \frac{\alpha_h^*}{1 + \frac{1}{6}Eh^2} \quad (4.57)$$

el valor de β que corresponde a este valor α_h^* . Nombramos con $U_{\beta_h^*}$ a la solución de (4.55) con dato $U'_{\beta_h^*}(0) = \beta_h^*$. En particular, por la proposición (4.3.1)

$$|U_{\beta_h^*}(1/2)| = |U_{\beta_h^*}(1/2) - u_{2N}(\alpha_h^*)| = O(h^2)$$

Por otro lado, ya nombramos con $\beta_0 = R'(0)$, entonces $U_{\beta_0}(x) = R(x)$. Para cada h tenemos asociado el valor

$$\alpha_0(h) = \alpha(h, \beta_0) = \beta_0 + \frac{1}{6}E\beta_0 h^2$$

y la recurrencia $u_j(\alpha_0(h))$. Por la proposición (4.3.1), se verifica que

$$|u_{2N}(\alpha_0(h))| = |u_{2N}(\alpha_0(h)) - R(1/2)| = O(h^2)$$

Con estos elementos podremos probar que el solitón discreto R_h y la evaluación del solitón continuo $E_h R$ están cerca, en el sentido de la norma $|\cdot|_h$.

Proposición 4.3.2 Si $N \geq 2$ y $h = \frac{1}{4N}$, entonces

$$|e_j^h| = |R(jh) - r_j^h| = O(h) \quad \text{para todo } 1 \leq j \leq n$$

de donde concluimos que

$$|E_h R - R_h|_{2,h} = O(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0 \quad (4.58)$$

Demostración:. Ver el apéndice (C.4.3). ■

4.3.6. Acotación inferior de L_-^h

Por un simple cómputo podemos verificar que \mathbb{S}_h es invariante por el operador

$$L_-^h = A_h + EI_h - D(R_h) : \mathbb{S}_h \rightarrow \mathbb{S}_h$$

Usando la forma tridiagonal de $-A_h + D(R_h)$ probaremos que los autovalores de este operador son simples.

Lema 4.3.4

Los autovalores del operador $-A_h + D(R_h)$ son simples, y los autovectores asociados a dos autovalores distintos son ortogonales.

Demostración:. *Simplicidad de los autovalores*

Supogamos que u_h y $v_h \in \mathbb{S}_h$ son autovectores no nulos, linealmente independientes, del mismo autovalor λ . Si $u_{2n-1} \neq 0$ y $v_{2n-1} \neq 0$, entonces existe $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$ que verifican que

$$\alpha u_{2n-1} + \beta v_{2n-1} = 0$$

Cualquier combinación lineal de los vectores u_h y v_h es también un autovector del mismo operador, es decir que para todo par (γ, δ) de parámetros complejos se tiene que $(-A_h + D(R_h) - \lambda I)(\gamma \vec{u} + \delta \vec{v}) = 0$ en particular tenemos lo mismo para el par de parámetros (α, β) . Por lo tanto

$$\left\{ \begin{array}{l} (-2 + r_1^{2\sigma} - \lambda)(\alpha u_1 + \beta v_1) - (\alpha u_2 + \beta v_2) = 0 \\ (\alpha u_1 + \beta v_1) + (-2 + r_2^{2\sigma} - \lambda)(\alpha u_2 + \beta v_2) + (\alpha u_3 + \beta v_3) = 0 \\ \vdots \\ (\alpha u_{i-2} + \beta v_{i-2}) + (-2 + d_{i-1}^{2\sigma} - \lambda)(\alpha u_{i-1} + \beta v_{i-1}) + (\alpha u_i + \beta v_i) = 0 \\ (\alpha u_{i-1} + \beta v_{i-1}) + (-2 + r_i^{2\sigma} - \lambda)(\alpha u_i + \beta v_i) + (\alpha u_{i+1} + \beta v_{i+1}) = 0 \\ \vdots \\ (\alpha u_{2n-2} + \beta v_{2n-2}) + (-2 + r_{2n-1}^{2\sigma} - \lambda)(\alpha u_{2n-1} + \beta v_{2n-1}) = 0 \end{array} \right.$$

Al ser $\alpha u_{2n-1} + \beta v_{2n-1} = 0$, usando la última ecuación, tenemos que $\alpha u_{2n-2} + \beta v_{2n-2} = 0$. Por la forma tridiagonal del sistema podemos obtener de manera recursiva $\alpha u_i + \beta v_i = 0, \forall i = 1, \dots, 2n - 1$. Así

$$\alpha u_h + \beta v_h = 0$$

entonces $\{u_h, v_h\}$ es linealmente dependiente, lo que contradice lo supuesto. Luego los autovalores son simples.

Queda por ver el caso en que $u_{2n-1} = 0$ o $v_{2n-1} = 0$. En realidad lo podemos descomponer en dos casos posibles:

- Si $u_{2n-2} \neq 0$ y $v_{2n-2} \neq 0$ podemos seguir como antes. Si $u_{2n-2} = 0$ y $v_{2n-2} = 0$ seguimos buscando para atrás hasta llegar a algún valor no nulo.
- Si $u_{2n-1} \neq 0$ y $v_{2n-1} = 0$ (o viceversa) se nos presenta algo esencialmente distinto. Como habíamos supuesto que u_h y v_h eran linealmente independientes, entonces $\tilde{v}_h = u_h + v_h$ seguirá siendo un autovector del mismo autovalor λ , y $\tilde{v}_{2n-1} \neq 0$, y ahora se sigue igual que antes pero con los vectores u_h y \tilde{v}_h .

Ortogonalidad de autovectores de distintos autovalores

Si λ_1 y λ_2 son dos autovalores distintos del operador $A_h - D(R_h)$ con autovectores u_h y v_h respectivamente, entonces $u_h \perp v_h$ en \mathbb{S}_h . La técnica para probar esto es la usual:

$$\begin{cases} -A_h u_h + D(R_h) u_h - \lambda_1 u_h = 0 \\ -A_h v_h + D(R_h) v_h - \lambda_2 v_h = 0 \end{cases}$$

Dado que A_h y $D(R_h)$ son simétricos podemos transponer la primer ecuación y postmultiplicarla por v_h , y además premultiplicar la segunda ecuación por u_h . Restando esta dos expresiones obtenemos:

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \langle u_h, v_h \rangle_h = 0$$

y como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ concluimos que $\langle u_h, v_h \rangle_h = 0$.

Como $(-A_h + D(R_h) - EI_h) R_h = 0$ tenemos que R_h es un autovector de $-A_h + D(R_h)$ con autovalor E . Aún más, probaremos que el primer autovalor es E . ■

Lema 4.3.5

El primer autovalor λ_1^h del operador $A_h - D(R_h)$ en \mathbb{S}_h es $-E$, con autovector R_h . Luego $\lambda = 0$ es el primer autovalor de $L_-^h = A_h - D(R_h) + EI_h$ en \mathbb{S}_h , con autovector R_h . Además, autovectores del primer autovalor λ_1^h no se anulan en los nodos interiores y conservan el signo.

Demostración: Llamamos

$$Ra(v_h, h) = \frac{\langle A_h v_h, v_h \rangle_h - \langle D(R_h) v_h, v_h \rangle_h}{|v_h|_{2,h}^2} \quad (4.59)$$

al cociente de Rayleigh del operador $A_h - D(R_h)$, sabemos que su primer autovalor es

$$\lambda_1^h = \min_{v_h \in \mathbb{S}_h} Ra(v_h, h) \quad (4.60)$$

con autovector v_h , para cada h .

Autovectores del primer autovalor λ_1^h conservan el signo

El vector $|v_h| = (|v_h|)_i = |v_i| \quad 1 \leq i \leq n-1$, también realiza el mínimo (4.60), y por lo tanto $|v_h|$ también es un autovector de autovalor λ_1^h en el subespacio \mathbb{S}_h .

Para probar esto alcanza con ver que

$$\langle A_h |v_h| - D(R_h) |v_h|, |v_h| \rangle_h \leq \langle A_h v_h - D(R_h) v_h, v_h \rangle_h \quad (4.61)$$

- $\langle A_h |v_h|, |v_h| \rangle_h \leq \langle A_h v_h, v_h \rangle_h$:

Sabemos que $\langle A_h v_h, v_h \rangle_h = \frac{2}{h} \sum_{j=0}^{n-1} \left(|v_j|^2 - \operatorname{Re}(v_{j+1} \bar{v}_j) \right)$ y que $\operatorname{Re}(zw) \leq |z| |w|$, por lo tanto tenemos que

$$\langle A_h |v_h|, |v_h| \rangle_h = \frac{2}{h} \sum_{j=0}^{n-1} \left(|v_j|^2 - |v_{j+1}| |v_j| \right) \leq \frac{2}{h} \sum_{j=0}^{n-1} \left(|v_j|^2 - \operatorname{Re}(v_{j+1} \bar{v}_j) \right) = \langle A_h v_h, v_h \rangle_h$$

- $\langle -D(R_h) |v_h|, |v_h| \rangle_h = \langle -D(R_h) v_h, v_h \rangle_h$, lo que es inmediato.

De este modo se cumple la desigualdad (4.61). Por lo tanto $Ra(|v_h|, h) \leq Ra(v_h, h)$, pero como v_h realizaba el mínimo del cociente de Rayleigh, entonces $|v_h|$ también realiza el mínimo de (4.60), es decir que $|v_h|$ es un autovector del primer autovalor λ_1^h . Por la simplicidad de los autovalores (ver lema 4.3.4) tenemos que $v_h = |v_h|$ o $v_h = -|v_h|$, es decir que conserva el signo.

Autovectores del primer autovalor λ_1^h no se anulan en los nodos interiores

Si v_h es un autovector del primer autovalor λ_1^h , entonces no se anula en ningún nodo interior, es decir que $v_j \neq 0, \forall 1 \leq j \leq n-1$. Esto último se debe esencialmente a la forma tridiagonal de $A_h + D(R_h)$, y lo probamos del siguiente modo:

- Supongamos que $v_{j_0} = 0$ para algún $2 \leq j_0 \leq n-2$, entonces la j_0 -ésima ecuación del sistema es

$$-v_{j_0-1} + (2 - r_{j_0}^{2\sigma}) v_{j_0} - v_{j_0+1} = -E v_{j_0}$$

pero como $v_{j_0} = 0$, tenemos que:

$$-v_{j_0-1} - v_{j_0+1} = 0 \Rightarrow v_{j_0+1} = -v_{j_0-1} \Rightarrow v_{j_0+1} = v_{j_0-1} = 0$$

porque v_h no cambia de signo. Por recurrencia se obtiene que $v_h = 0$, lo que es absurdo.

- Si $v_1 = 0$, la primera ecuación del sistema

$$(2 - r_1^{2\sigma}) v_1 - v_2 = -E v_1$$

queda

$$v_2 = 0$$

con lo que estamos en el caso anterior.

- Si $v_{n-1} = 0$, se concluye de igual modo.

El primer autovalor es $-E$ con autovector R_h

Si suponemos que $\lambda_1^h < -E$ o $\lambda_1^h > -E$, entonces por el lema 4.3.4 sus respectivos autovectores v_h y R_h son ortogonales, pero como $R_h > 0$, en el sentido de \mathbb{S}_h , necesariamente v_h debe cambiar de signo, cosa que se probó que no pasa. Luego $\lambda_1^h = -E$ es el primer autovalor del operador $A_h - D(R_h)$, con autovector R_h . Es decir que $\lambda_1^h = 0$ es el primer autovalor del operador $L_-^h = A_h - D(R_h) + EI_h$ en \mathbb{S}_h , con autovector R_h . Luego L_-^h es un operador no negativo en \mathbb{S}_h . ■

En lo que sigue queremos trabajar en el subespacio de \mathbb{S}_h que satisfaga la condición (4.49). Sea

$$\mathcal{L}_h = \{v_h \in \mathbb{S}_h / \langle D(R_h)R_h, v_h \rangle_h = 0\} = (D(R_h)R_h)^\perp$$

El primer autovalor λ_1^h de L_-^h restringido al subespacio \mathcal{L}_h , está dado por el mínimo del cociente de Rayleigh:

$$\lambda_1^h = \inf_{v_h \in \mathcal{L}_h} \frac{\langle L_-^h v_h, v_h \rangle_h}{|v_h|_{2,h}^2}$$

Ya que $R_h \notin \mathcal{L}_h$, entonces $\lambda_1^h > 0$. Probaremos que existe una constante $C > 0$ tal que $\lambda_1^h \geq C$.

Proposición 4.3.3

Si λ_1^h es el primer autovalor de L_-^h en \mathcal{L}_h , entonces existe una constante $C > 0$ tal que $\lambda_1^h \geq C$ para $h > 0$ suficientemente pequeño.

Demostración: Consideramos las bases usuales de las funciones de elementos finitos $\{\varphi_i\}_{1 \leq i \leq n-1}$ en \mathcal{V}_h (poligonales con vértices en los nodos $\{x_i = ih\}_{1 \leq i \leq n-1}$, que en particular está en $H_0^1[0, 1/2]$). Notar que si $w \in \mathcal{V}_h$ entonces $w(x) = \sum_{i=1}^{n-1} w(x_i)\varphi_i(x)$ (ver [5]).

Por el principio de Rayleigh-Ritz (ver [19]), tenemos que el primer autovalor del operador continuo sobre el espacio \mathcal{V}_h , con la base de elementos finitos es

$$\lambda_{e1}^h = \min_{\langle w \rangle} \max_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathcal{R}(\alpha w) = \min_{\substack{w \in \mathcal{V}_h \\ \|w\|_2 = 1}} \mathcal{R}(w) \quad (4.62)$$

con $w \in \mathcal{V}_h$. Entonces, si $w = \sum q_i \varphi_i$ y \mathcal{R} es la evaluación del cociente de Rayleigh en los elementos finitos

$$\mathcal{R}(w) = \frac{\sum_i \sum_j q_i \bar{q}_j \int (\varphi_i' \varphi_j' - R^{2\sigma} \varphi_i \varphi_j) dx}{\sum_i \sum_j q_i \bar{q}_j \int \varphi_i \varphi_j dx} \quad (4.63)$$

En [19] se prueba que

$$\lambda_{e1}^h \geq \lambda_1 \quad (4.64)$$

(en realidad allí se prueba que esta desigualdad vale para todos los autovalores del operador continuo y el correspondiente autovalor del operador continuo restringido al espacio de poligonales generado por los elementos finitos).

Ahora vamos a probar que el autovalor $\lambda_{e_1}^h$ del operador continuo (restringido a \mathcal{V}_h) y el autovalor λ_1^h del operador discreto en \mathbb{S}_h , se encuentran cerca si h es suficientemente pequeño.

Sea $u_h \in \mathbb{S}_h$, entonces $U_h(u_h) \in \mathcal{V}_h$, y como $U_h(u_h)(x_i) = u_i$ tenemos que

$$U_h(u_h)(x) = \sum_{i=1}^{n-1} u_i \varphi_i(x)$$

Evaluado en $U_h(u_h)$, podemos darle a (4.63) la siguiente forma:

$$\mathcal{R}(U_h(u_h)) = \frac{\langle A_h u_h, u_h \rangle_h - \langle D(E_h R) u_h, u_h \rangle_h + O(h)}{|u_h|_h^2 - \frac{h^2}{6} |u'_h|_h^2} \quad (4.65)$$

y tenemos

$$Ra(u_h, h) - \mathcal{R}(U_h(u_h)) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0.$$

de modo que podemos concluir que $|\lambda_1^h - \lambda_1|$ es pequeño para h suficientemente pequeño, y $\lambda_1^h \geq C$.

Ver los cálculos en el apéndice (C.5). ■

Por la proposición anterior existe una constante $C^1 > 0$ tal que

$$\langle L_-^h v_h, v_h \rangle_h \geq C^1 |v_h|_{2,h}^2 \quad \forall v_h \in \mathcal{L}_h \quad (4.66)$$

de donde inmediatamente tenemos que

$$\langle v_h, v_h \rangle_h \leq \frac{1}{C^1} \langle L_-^h v_h, v_h \rangle_h$$

Nuestro interés es obtener una cota inferior de $\langle L_-^h v_h, v_h \rangle_h$ del estilo de (4.66), pero donde inferiormente se tenga la norma $\|v\|_{1,h}^2$. Para esto observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \langle L_-^h v_h, v_h \rangle_h &= \langle A_h v_h, v_h \rangle_h + \underbrace{\langle E v_h, v_h \rangle_h + \langle -D(R_h) v_h, v_h \rangle_h}_{\geq -C \langle v_h, v_h \rangle_h} \\ &\geq \langle A_h v_h, v_h \rangle_h - C \langle v_h, v_h \rangle_h \geq \langle A_h v_h, v_h \rangle_h - \frac{C}{C^1} \langle L_-^h v_h, v_h \rangle_h \end{aligned}$$

de modo que

$$\left(1 + \frac{C}{C^1}\right) \langle L_-^h v_h, v_h \rangle_h \geq \langle A_h v_h, v_h \rangle_h$$

Si a esta última expresión le sumamos (4.66) obtenemos

$$\left(\frac{1}{C^1} + 1 + \frac{C}{C^1}\right) \langle L_-^h v_h, v_h \rangle_h \geq \langle A_h v_h, v_h \rangle_h + \langle v_h, v_h \rangle_h = \|v_h\|_{1,h}^2$$

si llamamos $C^2 = \frac{C^1}{1+C^1+C}$ entonces tenemos que

$$\langle L_-^h v_h, v_h \rangle_h \geq C \|v_h\|_{1,h}^2 \quad \forall v_h \in \mathcal{L}_h \quad (4.67)$$

4.3.7. Acotación inferior de L_+^h

Es inmediato que $\langle L_+^h R_h, R_h \rangle_h < 0$, pues

$$\langle L_+^h R_h, R_h \rangle_h = \langle A_h R_h + E R_h - (2\sigma + 1) D(R_h) R_h, R_h \rangle_h = -2\sigma \langle D(R_h) \phi_h \rangle_h$$

Necesitamos probar que L_+^h define una forma cuadrática positiva en R_h^\perp . Usando la acotación (ver [19])

$$\lambda_1 \leq \lambda_{e1}^h \leq \lambda_1 + 2\delta h^2 \lambda_1^2$$

y siguiendo la idea desarrollada en la sección 4.2 y en las estimaciones de la cota de L_-^h de la sección precedente, obtenemos una cota inferior positiva para $\langle L_+^h v, v \rangle_h$ en R_h^\perp

$$\langle L_+^h v, v \rangle_h > C \quad \text{en } R_h^\perp$$

Además imponemos la condición

$$\langle \phi_h(t), \phi_h(t) \rangle_h = \langle R_h, R_h \rangle_h \quad t \in \mathbb{R} \quad (4.68)$$

De (4.46) y (4.68) tenemos que

$$\langle u_h, R_h \rangle_h = -\frac{1}{2} [\langle u_h, u_h \rangle_h + \langle v_h, v_h \rangle_h] \quad (4.69)$$

Con esto podemos obtener una estimación inferior de $\langle L_+^h u_h, u_h \rangle_h$.

Proposición 4.3.4 *Sea $\sigma < 2$. Si $u_h \in \mathbb{S}_h$ satisface (4.69) existen constantes D, D_1 and $D_2 > 0$, que verifican*

$$\langle L_+^h u_h, u_h \rangle_h \geq D \|u_h\|_{1,h}^2 - D_1 \langle A_h w_h, w_h \rangle_h |w|_{2,h}^2 - D_2 |w|_{2,h}^4 \quad (4.70)$$

Demostración: La demostración es totalmente análoga a la de la proposición (4.2.5). Tomemos $\langle R_h, R_h \rangle_h \leq M$, y escribimos

$$u_h = (u_h)_\parallel + (u_h)_\perp$$

con

$$\begin{aligned} (u_h)_\parallel &= \langle u_h, R_h \rangle_h R_h \\ &= -\frac{1}{2} [\langle u_h, u_h \rangle_h + \langle v_h, v_h \rangle_h] R_h \end{aligned} \quad (4.71)$$

y

$$\begin{aligned} (u_h)_\perp &= u_h - (u_h)_\parallel \\ &= u_h - \frac{1}{2} [\langle u_h, u_h \rangle_h + \langle v_h, v_h \rangle_h] R_h \end{aligned} \quad (4.72)$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \langle L_+^h u_h, u_h \rangle_h &= \langle L_+^h (u_h)_\parallel, (u_h)_\parallel \rangle_h \\ &\quad + 2 \langle L_+^h (u_h)_\parallel, (u_h)_\perp \rangle_h + \langle L_+^h (u_h)_\perp, (u_h)_\perp \rangle_h \end{aligned} \quad (4.73)$$

y existe $d > 0$ que verifica

$$\begin{aligned} \langle L_+^h (u_h)_\perp, (u_h)_\perp \rangle_h &\geq d \langle (u_h)_\perp, (u_h)_\perp \rangle_h \\ &= d \left[\langle u_h, u_h \rangle_h + \frac{1}{4} [\langle u_h, u_h \rangle_h + \langle v_h, v_h \rangle_h]^2 \right] \end{aligned} \quad (4.74)$$

desde (4.69), (4.71) tenemos que

$$\langle L_+^h (u_h)_\parallel, (u_h)_\parallel \rangle_h = \frac{1}{4} \langle L_+^h R_h, R_h \rangle_h [\langle u_h, u_h \rangle_h + \langle v_h, v_h \rangle_h]^2 \quad (4.75)$$

Finalmente desde (4.69) concluimos que

$$\begin{aligned} \langle L_+^h (u_h)_\perp, (u_h)_\parallel \rangle_h &= \langle u_h, R_h \rangle_h \langle L_+^h (u_h)_\perp, R_h \rangle_h \\ &\geq -d' \langle A_h w_h, w_h \rangle_h |w|_{2,h}^2 - d'' |w|_{2,h}^4 \end{aligned} \quad (4.76)$$

Ahora, desde (4.74), (4.75) y (4.76) obtenemos la cota inferior (4.70). ■

4.3.8. Resultados Centrales

Ahora sí tenemos todos los elementos para probar los dos principales resultados de esta parte. Primero enunciaremos y probaremos la estabilidad orbital de las soluciones numérica, luego usaremos este resultado para probar la convergencia de las soluciones numéricas a la continua.

Teorema 4.3.1 *Sea $\sigma < 2$ y $\phi_h(t)$ la única solución de la ecuación no lineal de Schrödinger semidiscreta con dato inicial $\phi_0 \in \mathbb{S}_h$. Entonces existe un solitón discreto R_h orbitalmente estable, i.e. para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon) > 0$, tal que si $|\phi_0|_{2,h}^2 = |R_h|_{2,h}^2$ y $\rho_E(\phi_0, \mathcal{G}_{R_h}) < \delta(\varepsilon)$ entonces*

$$\rho_E(\phi_h(t), \mathcal{G}_{R_h}) < \varepsilon \text{ para todo } t > 0$$

Diremos que las órbitas de los solitones son estables.

Demostración:. Supongamos que el mínimo de (4.23) se realiza en γ_h . Por (4.47), reemplazando (4.67) y (4.70) tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E}_h &\geq \langle L_+^h u_h, u_h \rangle + \langle L_-^h v_h, v_h \rangle - C_1 \|w_h\|_{1,h}^{2+\theta} - C_2 \|w_h\|_{1,h}^6 \\ &\geq C_3 \|w_h\|_{1,h}^2 - C_4 \|w_h\|_{1,h}^{2+\theta} - C_5 \|w_h\|_{1,h}^6 \end{aligned}$$

Luego

$$\Delta \mathcal{E}_h \geq g(\rho_e(\phi_h(t), \mathcal{G}_{R_h})) \quad (4.77)$$

con

$$g(t) = ct^2(1 - at^\theta - bt^4) \quad \text{con } a, b, c, \theta > 0$$

Notar que $g(0) = 0$ y $g(t) > 0$ para $0 < t \ll 1$.

Podemos obtener la estabilidad desde (4.77): sea $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, entonces la continuidad de \mathcal{E}_h en \mathbb{S}_h implica que existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\Delta \mathcal{E}_h < g(\varepsilon)$ para $\rho_E(\phi_0, \mathcal{G}_{R_h}) < \delta(\varepsilon)$. Ya que $\Delta \mathcal{E}_h$ no depende de t , desde (4.77) concluimos que $g(\rho_E(\phi_h(t), \mathcal{G}_{R_h})) < g(\varepsilon)$, para $t > 0$.

Así, ya que $\rho_E(\phi_h(t), \mathcal{G}_{R_h})$ es una función continua de t ,

$$\rho_E(\phi_h(t), \mathcal{G}_{R_h}) < \varepsilon \quad \text{para } t > 0 \quad (4.78)$$

y el solitón R_h es orbitalmente estable. ■

Teorema 4.3.2 Sea $E_h : H_0^1 \rightarrow \mathbb{S}_h$ el operador de evaluación en los nodos $\{x_j\}$ y $\phi(t)$ la solución de (PNLS), entonces $\forall t > 0$,

$$\left| e^{i\gamma_h} \phi_h(t) - e^{i\gamma} E_h(\phi(t)) \right|_{2,h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

con γ_h el mínimo en (4.23) como antes y γ el correspondiente mínimo en el caso continuo.

Demostración:. Consideremos γ_h y γ como en la demostración del teorema anterior. Desde (4.78), (4.58), la continuidad del operador de evaluación E_h y la estabilidad orbital en el caso continuo, obtenemos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} & \left| e^{i\gamma_h} \phi_h(t) - e^{i\gamma} E_h(\phi(t)) \right|_{2,h} \leq \\ & \leq \left| e^{i\gamma_h} \phi_h(t) - R_h \right|_{2,h} + \left| E_h(R) - R_h \right|_{2,h} + \left| E_h(R) - e^{i\gamma} E_h(\phi(t)) \right|_{2,h} \leq \\ & \leq \rho_E(\phi_h(t), \mathcal{G}_{R_h}) + \left| E_h(R) - R_h \right|_{2,h} + C \rho_E(\phi(t), \mathcal{G}_R) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Capítulo 5

Ecuación de Klein-Gordon

En este último capítulo estudiaremos la ecuación de Klein-Gordon.

En una primera etapa probaremos la existencia de soluciones para el caso con dato de borde periódico mediante el clásico método de Duhamel, para lo cual usaremos la reescritura de la ecuación como un sistema hamiltoniano vista en (3.1.5).

En una segunda etapa aplicaremos el método antes descrito para el estudio de la estabilidad de las soluciones estacionarias. Debemos tener presente los resultados ya existentes (ver [11] y [20]) para el caso de esta ecuación con dato en todo \mathbb{R}^n , con $n = 2$ o 3 . En particular en el trabajo de Shata y Strauss recién mencionado, a modo de ejemplo dan condiciones sobre los valores de σ y de la frecuencia E en el caso de la ecuación de Klein-Gordon con no linealidad $V'(u) = u - |u|^{2\sigma} u$, que discriminan los casos de inestabilidad y de posible estabilidad de la solución solitón, pero, recordemos que siempre ellos trabajan en la ecuación con dominio en todo \mathbb{R}^n , con $n = 2$ o 3 . La técnica usada por ellos no es reproducible en el caso de datos de borde periódico porque usan, de manera esencial, la proyección sobre la superficie de isocarga de la curva de los solitones para las distintas frecuencias E , lo que logran mediante el uso de reescalas. En los ensayos numéricos hechos en nuestro caso, el de la ecuación de K-G periódica unidimensional y con no linealidad potencial $V'(u) = u - |u|^{2\sigma} u$, evidenciamos que es esperable que la solución solitón sea inestable, por lo que queda planteado como problema abierto el hecho de hallar condiciones sobre los parámetros para garantizar la inestabilidad de la correspondiente solución solitón. Lo que sí desarrollaremos es que si aplicamos la técnica vista en el capítulo anterior, entonces podemos obtener una cierta caracterización de la geometría de la inestabilidad, para los casos en que ella suceda. En otras palabras, lo que sí logramos es exhibir, para los casos en que hubiera inestabilidad, la dirección responsable de la misma, es decir qué componente debe tener la perturbación del solitón para que la órbita de la solución se aleje de él.

5.1. Existencia de soluciones de la ecuación K-G

Consideremos la ecuación de Klein-Gordon (3.6) con dato de Dirichlet en el caso periódico

$$\begin{cases} \partial_t^2 \varphi - \partial_x^2 \varphi + V'(\varphi) = 0 & \text{para } x \in [0, 1] \text{ y para } t > 0 \\ \varphi(0, t) = \varphi(1, t) = 0 & \text{para todo } t > 0 \\ \varphi'(0, t) = \varphi'(1, t) & \text{para todo } t > 0 \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) & \text{para } x \in [0, 1] \\ \varphi'(x, 0) = \varphi_1(x) & \text{para } x \in [0, 1] \end{cases} \quad (5.1)$$

siendo $V \in C^1(\mathbb{R})$ en ambos casos.

Recordemos que en (3.1.5) vimos la reducción de la ecuación a la forma de un sistema hamiltoniano. Gracias a la formulación de primer orden y usando lo expuesto en la sección (2.1.2), podemos aplicar el clásico método de Duhamel,

Teorema 5.1.1 Si $(\varphi_0, \psi_0) \in H^1 \times L^2$, entonces existen $T > 0$ y una única $(\varphi, \psi) \in C(0, T, H^1 \times L^2) \cap C^1(0, T, L^2 \times H^{-1})$ solución de (5.1), siendo además la aplicación $(\varphi_0, \psi_0) \mapsto (\varphi, \psi)$ continua.

Demostración:. Consideremos el grupo unitario $S(t) = \exp(t\mathcal{J}A)$, por variación de los parámetros la solución puede escribirse como

$$(\varphi, \psi)(t) = S(t)(\varphi_0, \psi_0) + \int_0^t S(t-\tau)(0, V'(\varphi))(\tau) d\tau \quad (5.2)$$

Consideremos la aplicación $\Gamma : \mathcal{X}_{T,R} \rightarrow \mathcal{X}_{T,R}$ definida por

$$\Gamma(\varphi, \psi)(t) = S(t)(\varphi_0, \psi_0) + \int_0^t S(t-\tau)(0, V'(\varphi))(\tau) d\tau$$

con $\mathcal{X}_{T,R}$ el conjunto

$$\mathcal{X}_{T,R} = \left\{ (\varphi, \psi) \in C(0, T, H^1 \times L^2) : \max_{0 \leq t \leq T} \|(\varphi, \psi)(t) - S(t)(\varphi_0, \psi_0)\| \leq R \right\}$$

Ya que V' es una función suave, podemos decir que $\|(0, V'(\varphi))\| \leq C(\|\varphi\|_{H^1})\|\varphi\|_{H^1}$. Luego, Γ es una aplicación contractiva si T es suficientemente pequeño. Ver el desarrollo en el apéndice (D.1). ■

Teorema 5.1.2 Si V es una función inferiormente acotada, entonces la solución de (5.1) está globalmente definida.

Demostración:. Dado que $V \geq -m$ y que \mathcal{H} es constante sobre las trayectorias, entonces tenemos que

$$\int [(\varphi_x)^2 + \psi^2] dx \leq \mathcal{H}(\varphi_0, \psi_0) + m$$

Por la desigualdad de Cauchy

$$\begin{aligned}\varphi^2(x, t) &\leq 2\varphi_0^2(x) + 2\left(\int_0^t \psi(x, t) dt\right)^2 \\ &\leq 2\varphi_0^2(x) + 2t \int_0^t \psi^2(x, t) dt\end{aligned}$$

Integrando en x

$$\begin{aligned}\int \varphi^2(x, t) dx &\leq 2 \int \left(\varphi_0^2(x) + t \int_0^t \psi^2(x, t) dt \right) dx \\ &\leq 2 \left[\|\varphi_0\|^2 + t^2 (\mathcal{H}(\varphi_0, \psi_0) + m) \right]\end{aligned}$$

Luego

$$\|(\varphi, \psi)\|_{H^1 \times L^2} \leq 2 \|\varphi_0\|_{H^1} + (2t^2 + 1)(m + F(\|(\varphi_0, \psi_0)\|_{H^1 \times L^2}))$$

Donde $F(\|(\varphi, \psi)\|_{H^1 \times L^2}) = \frac{1}{2} (\|\phi_x\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2) + M(R)$, con $M(R) = \max_{0 \leq |z| \leq R} |V(z)|$.

Para el desarrollo de los cálculos ver el apéndice (D.1). ■

Teorema 5.1.3 Si $(\varphi_0, \psi_0) \in H^2 \times H^1$, entonces existe una única $(\varphi, \psi) \in C(\mathbb{R}, H^2 \times H^1) \cap C^1(\mathbb{R}, H^1 \times L^2)$ solución de (5.1).

Demostración:. Como $(\varphi_0, \psi_0) \in H^2 \times H^1 \subset H^1 \times L^2$ por la primera parte tenemos la solución $(\varphi, \psi) \in H^1 \times L^2$, queremos ver que $(\varphi, \psi) \in H^2 \times H^1$.

Como (φ, ψ) son solución del sistema

$$\partial_t(\varphi, \psi)^t = \mathcal{J}(A(\varphi, \psi)^t + (V'(\varphi), 0))$$

entonces el par (φ_x, ψ_x) satisface un sistema lineal con coeficientes continuos que dependen de (φ, ψ)

$$\partial_t(\varphi_x, \psi_x)^t = \mathcal{J}(A(\varphi_x, \psi_x)^t + (V''(\varphi)\varphi_x, 0)) \quad (5.3)$$

Es decir que φ_x satisface la ecuación

$$\partial_t^2 \varphi_x - \partial_x^2 \varphi_x + V''(\varphi)\varphi_x = 0$$

Si consideramos $V''(\varphi) = g(x, t)$ continua (pues $\varphi \in H^1$) entonces φ_x satisface una ecuación de onda con potencial

$$\partial_t^2 \phi - \partial_x^2 \phi + g(x, t)\phi = 0 \quad (5.4)$$

por lo tanto nos alcanza con probar que esta ecuación con dato inicial en H^1 tiene solución única en H^1 , de este modo $\varphi_x \in H^1$. Ver esto en [18] hecho por el método de Galerkin. ■

5.2. Ecuación con no linealidad potencial

En lo que sigue siempre consideraremos la ecuación con la no linealidad potencial $V'(u) = u - |u|^{2\sigma} u$

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \varphi - \partial_x^2 \varphi + \varphi - |\varphi|^{2\sigma} \varphi &= 0 \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) \quad \text{y} \quad \varphi'(x, 0) &= \varphi_1(x) \\ \varphi(0, t) = \varphi(1, t) = 0 \quad \text{y} \quad \varphi'(0, t) &= \varphi'(1, t) \end{aligned} \quad (5.5)$$

La versión sistema es

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \psi \\ \dot{\psi} = \varphi_{xx} - \varphi + |\varphi|^{2\sigma} \varphi \end{cases} \quad (5.6)$$

5.2.1. Existencia de solitones

Si buscamos soluciones del problema de valores iniciales que tengan la forma especial

$$\begin{cases} \varphi(x, t) = R(x)e^{iEt} \\ \psi(x, t) = iER(x)e^{iEt} \end{cases}$$

se ve que R debe ser solución de la ecuación estacionaria

$$-R'' + (1 - E^2)R - |R|^{2\sigma} R = 0 \quad (5.7)$$

con condiciones de borde periódicas. Para esta ecuación tenemos hecho, en la sección (4.2), la existencia de solución, únicamente debemos cambiar el parámetro E por $1 - E^2$.

5.2.2. Órbita, distancia y función de Lyapunov

El camino que haremos es semejante al realizado con la ecuación de Schrödinger en (4.1.3) o (4.2.3). Daremos el concepto de órbita de un elemento del espacio y de distancia de uno dado a la órbita de otro, luego usaremos las cantidades conservadas por el sistema para definir una funcional de Lyapunov, de modo que la variación de ésta evaluada en el solitón y en los elementos de la órbita, nos de una medida de la desviación del flujo respecto a la órbita del solitón.

Recordemos que las cantidades conservadas por el sistema son el halmintoniano \mathcal{H} y la carga Q

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\varphi, \psi) &= \int \left(\frac{1}{2} |\psi|^2 + \frac{1}{2} |\varphi_x|^2 + \frac{1}{2} |\varphi|^2 - \frac{|\varphi|^{2\sigma+2}}{2\sigma+2} \right) dx \\ Q(\varphi, \psi) &= \text{Im} \left(\int \varphi \bar{\psi} dx \right) \end{aligned}$$

Definimos la órbita de un elemento de $H^1 \times L^2$ como

$$\mathcal{G}_{(\varphi, \psi)} = \{(\varphi, \psi) e^{i\gamma} / \gamma \in (0, 2\pi]\}$$

La distancia de un elemento a la órbita de otro se la define pidiendo que la parte cuadrática de la función de Lyapunov sea mínima en γ . Definimos el cuadrado de la distancia como

$$\begin{aligned} \rho_E^2((f, g), \mathcal{G}_{(\varphi, \psi)}) &= \inf_{\gamma \in [0, 2\pi)} \left\{ \frac{1}{2} \left(\|\varphi e^{i\gamma} - f\|_2^2 + \|\varphi_x e^{i\gamma} - f_x\|_2^2 + \|\psi e^{i\gamma} - g\|_2^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + E \operatorname{Im} \langle \varphi e^{i\gamma} - f, \psi e^{i\gamma} - g \rangle \right\} \end{aligned} \quad (5.8)$$

o de manera extendida

$$\begin{aligned} \rho_E^2((f, g), \mathcal{G}_{(\varphi, \psi)}) &= \inf_{\gamma \in [0, 2\pi)} \left\{ \frac{1}{2} \left(\int_0^1 |\varphi e^{i\gamma} - f|^2 + |\varphi_x e^{i\gamma} - f_x|^2 + |\psi e^{i\gamma} - g|^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + E \operatorname{Im} \int_0^1 (\varphi e^{i\gamma} - f) \overline{(\psi e^{i\gamma} - g)} \right\} \end{aligned}$$

Consideramos una solución (ϕ, ψ) del problema inicial con dato (ϕ_0, ψ_0) y pensamos que es una pequeña perturbación del solitón (R, iER) . Decimos que γ es el valor del parámetro que minimiza la distancia a la órbita del solitón

$$\begin{cases} \phi(x, t) e^{i\gamma} &= R(x) + w(x, t) \\ \psi(x, t) e^{i\gamma} &= iER(x) + z(x, t) \end{cases} \quad (5.9)$$

donde $w(x, t) = u(x, t) + iv(x, t)$ es la perturbación de la posición y $z(x, t) = p(x, t) + iq(x, t)$ es la perturbación de la velocidad.

De manera análoga a lo que sucedía en la ecuación de Schrödinger (por ejemplo ver (4.2.3)) tenemos que, del hecho de expresar la solución de la forma (5.9), nos aparecen naturalmente condiciones sobre la parte real e imaginaria de la perturbación para la existencia de un $\gamma(t)$ minimizante de la distancia. La condición que obtenemos en este caso es exactamente la misma que en Schrödinger

$$\langle R^{2\sigma+1}, v \rangle = \int R^{2\sigma+1} v \, dx = 0 \quad (5.10)$$

Para el cálculo de la misma ver el apéndice (D.2.1).

Definimos como función de Lyapunov a

$$\mathcal{E}(\varphi, \psi) = \mathcal{H}(\varphi, \psi) + \mathcal{Q}(\varphi, \psi)$$

que se conserva sobre el flujo de la ecuación. Usaremos la diferencia $\Delta\mathcal{E}$ como medida de la desviación de la órbita de la solución respecto a la órbita del solitón.

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E} &= \mathcal{E}[\phi_0, \psi_0] - \mathcal{E}[R, iER] \\ &= \mathcal{E}[\phi e^{i\gamma}, \psi e^{i\gamma}] - \mathcal{E}[R, iER] \quad \text{por conservación de } \mathcal{E} \\ &= \mathcal{E}[R + w, iER + z] - \mathcal{E}[R, iER] \end{aligned} \quad (5.11)$$

Queremos dar condiciones para que este último término quede controlado inferiormente por una función de $\|w\|_{H^1}$ y $\|z\|_{L^2}$ que, para valores pequeños de la perturbación, tenga orden cuadrático y coeficiente positivo. Haciendo una expansión de Taylor de la $\mathcal{E}(\varphi, \psi)$ en (R, iER) , la primera variación se anula (ver apéndice (D.2.2))

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varphi} [R, iER] &\equiv 0 \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \psi} [R, iER] &\equiv 0\end{aligned}$$

por lo que (R, iER) es un punto crítico de \mathcal{E} .

Usando la segunda variación, calculada en el apéndice (D.2.2), podemos decir que la expansión de Taylor de segundo orden del funcional \mathcal{E} queda expresado como:

$$\begin{aligned}\Delta \mathcal{E} &= \mathcal{E}[R + w, iER + z] - \mathcal{E}[R, iER] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \varphi^2} [R, iER](w, z) + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \varphi \partial \psi} [R, iER](w, z) + \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \psi^2} [R, iER](w, z) + O(\|w\|^3, \|z\|^3) \right] \\ &= \frac{1}{2} [\langle L_+^\sigma u, u \rangle + \langle L_-^\sigma v, v \rangle + \|Eu\|_2^2 + \|Ev\|_2^2 + 2E \int (vp - uq) dx + \|p + iq\|_2^2 + \\ &\quad + O(\|w\|^3, \|z\|^3)] \\ &= \frac{1}{2} [\langle L_+^\sigma u, u \rangle + \langle L_-^\sigma v, v \rangle + \|Eu - q\|_2^2 + \|Ev + p\|_2^2 + O(\|w\|^3, \|z\|^3)]\end{aligned}\tag{5.12}$$

Notemos que la parte cuadrática de $\Delta \mathcal{E}$ difiere de la del caso Schrödinger sólo en los términos $\|Eu - q\|_2^2$ y $\|Ev + p\|_2^2$.

Con el objetivo de implementar la técnica usada para el estudio de la estabilidad de la ecuación de Schrödinger, debemos controlar inferiormente esta expresión con términos de segundo orden en $\|w\|_{H^1}$ y $\|z\|_{H^1}$ con coeficientes positivos. Para esto necesitamos definir un par de nuevos operadores lineales, U_+ y U_- , de modo que las formas cuadráticas por ellos definidos incluyan a estos nuevos términos.

5.2.3. Geometría de las superficies de isocarga

Como el operador de Schrödinger conserva la norma L^2 de la solución podemos pensar que la geometría asociada en L^2 es la usual. Ya vimos que la norma L^2 de la solución de la ecuación de Klein-Gordon no se conserva aunque sí lo hace la carga Q . Por lo tanto necesitamos hallar la geometría de $L^2 \times L^2$ asociada a esta cantidad conservada. Queremos determinar cuales son las superficies de isocarga en $L^2 \times L^2$. En realidad nos reduciremos a calcular la superficie de isocarga que corresponde al solitón (R, iER) .

$$Q(R, iER) = Q(\varphi, \psi)$$

Nuevamente pensemos que $(\varphi, \psi) = (R + u + iv, iER + p + iq)$. Si desarrollamos esta última igualdad tenemos que

$$\begin{aligned}
 -E \int R^2 dx &= Q(R, iER) = Q(\varphi, \psi) = Q(R + u + iv, iER + p + iq) = \\
 &= \text{Im} \int (R + u + iv) \overline{(iER + p + iq)} dx = \int (vp - (R + u)(ER + q)) dx = \\
 &= -E \int R^2 dx + \int (vp - uq) dx - \int R(Eu + q) dx
 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\int R(Eu + q) dx = \int (vp - uq) dx \quad (5.13)$$

Esta es la condición de isocarga respecto a la del solitón. De esto último tenemos que el subespacio tangente a la hipersuperficie de $L^2([0, 1], \mathbb{C}) \times L^2([0, 1], \mathbb{C})$ de isocarga tiene por ecuación a

$$\int R(Eu + q) dx = 0 \quad (5.14)$$

El espacio \mathbb{X} y su producto interno

Definimos los siguientes \mathbb{R} -espacios vectoriales

- $\mathbb{X} = \{(u + iv, p + iq) \in L^2([0, 1], \mathbb{C}) \times L^2([0, 1], \mathbb{C}) / \langle R^{2\sigma+1}, v \rangle = 0\}$ (esto último para que cumpla la condición (5.10)).
- $\mathbb{X}_1 = L^2([0, 1], \mathbb{R}) \times iL^2([0, 1], \mathbb{R})$ (claramente $\mathbb{X}_1 \subset \mathbb{X}$).
- $\mathbb{X}_2 = \{(iv, p) \in iL^2([0, 1], \mathbb{R}) \times L^2([0, 1], \mathbb{R}) / \langle R^{2\sigma+1}, v \rangle = 0\}$

Notemos que $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \oplus \mathbb{X}_2$ porque \mathbb{X}_1 aporta la parte real de la primera componente y la parte imaginaria de la segunda y \mathbb{X}_2 aporta la parte imaginaria de la primera componente y la parte real de la segunda.

Definimos en \mathbb{X} (como \mathbb{R} espacio vectorial) el producto interno

$$\langle\langle (\varphi_1, \psi_1), (\varphi_2, \psi_2) \rangle\rangle = \text{Re} \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle + \text{Re} \langle \psi_1, \psi_2 \rangle \quad (5.15)$$

Notemos que \mathbb{X}_1 y \mathbb{X}_2 son perpendiculares según este producto interno.

La superficie de isocarga y su espacio tangente

Definición 5.2.1 Consideremos en \mathbb{X} la hipersuperficie de isocarga que pasa por (R, iER) y llamaremos T al hiperplano tangente a esta superficie por (R, iER) . Además, por (5.14) sabemos que T viene dado por

$$T = \left\{ (\varphi, \psi) \in \mathbb{X} / \int R(Eu + q) dx = 0, \text{ con } u = \text{Re}(\varphi) \text{ y } q = \text{Im}(\psi) \right\}$$

Observación 5.2.1 El subespacio T queda caracterizado vía el producto interno (5.15) como el ortogonal a (ER, iR) en \mathbb{X}

$$T = \{(ER, iR)\}_{\mathbb{X}}^{\perp}$$

Demostración: Sea $(\varphi, \psi) \in \{(ER, iR)\}_{\mathbb{X}}^{\perp}$ entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \langle\langle (\varphi, \psi), (ER, iR) \rangle\rangle = \operatorname{Re} \langle \varphi, ER \rangle + \operatorname{Re} \langle \psi, iR \rangle = \operatorname{Re} \left(E \int R\varphi \right) + \operatorname{Re} \left(-i \int R\psi \right) = \\ &= E \int Ru + \int Rq = \int R(Eu + q) \end{aligned}$$

que es justamente la condición (5.14) de pertenencia a T . ■

Observación 5.2.2 Notar que la condición para que $(\varphi, \psi) \in T$ recaer únicamente sobre su componente en \mathbb{X}_1 , por lo tanto si definimos $T_1 \subset \mathbb{X}_1$ como $T_1 = \{(ER, iR)\}_{\mathbb{X}_1}^{\perp}$ entonces

$$T = T_1 \oplus \mathbb{X}_2$$

Demostración: Bastará verificar las dos inclusiones:

- Si $(u + iv, p + iq) \in T_1 \oplus \mathbb{X}_2 \Rightarrow \int R(Eu + q) = 0$
- Si $0 = \langle\langle (u + iv, p + iq), (ER, iR) \rangle\rangle = \operatorname{Re} \int (u + iv) ER + \operatorname{Re} \int (p + iq)(-iR) = \int ERu + qR = \int R(Eu + q)$

■

Definición 5.2.2 Si R^{\perp} es el ortogonal a R en $L^2([0, 1], \mathbb{R})$ (con el producto usual), defino los siguientes subespacios

- $S_1 = (R^{\perp} \times i\{0\}) \oplus (\{0\} \times iR^{\perp}) \subset T_1$. Notar que S_1 tiene todos los pares de T_1 con ambas componentes en R^{\perp} , o sea (u, iq) con $u, q \in R^{\perp}$.
- $S = S_1 \oplus \mathbb{X}_2 \subset T$

Observación 5.2.3 S tiene codimensión 2 en \mathbb{X} y, por lo tanto, codimensión 1 en T .

Demostración: Dado $(u + iv, p + iq) \in \mathbb{X}$ partamos u y q según R , esto es $u = u_{\parallel} + u_{\perp}$ y $q = q_{\parallel} + q_{\perp}$, de este modo

$$(u + iv, p + iq) = (u_{\parallel} + u_{\perp} + iv, p + iq_{\parallel} + iq_{\perp}) = (u_{\parallel}, iq_{\parallel}) + \underbrace{(u_{\perp} + iv, p + iq_{\perp})}_{\in S}$$

Como $(u_{\parallel}, iq_{\parallel}) = (\alpha R, i\beta R)$ (porque tanto u_{\parallel} como q_{\parallel} son múltiplos de R), por lo tanto obtenemos una descomposición de \mathbb{X} como la suma de S más un subespacio de dimensión 2. Como $S \subset T$ entonces la codimensión de S en T es 1, siendo $(R, -iER)$ la dirección en T ortogonal a S . ■

Proyección sobre S^\perp

Si consideramos el proyector de \mathbb{X} sobre S^\perp , geoméricamente el plano de proyección será el generado por $\{(ER, iR), (R, -iER)\}$, es decir que

$$(\varphi, \psi) = (\varphi, \psi)_\parallel + (\varphi, \psi)_\perp$$

donde el primer término es la componente paralela

$$(\varphi, \psi)_\parallel = \frac{\langle\langle(ER, iR), (\varphi, \psi)\rangle\rangle}{(1 + E^2) \|R\|_2^2} (ER, iR) + \frac{\langle\langle(R, -iER), (\varphi, \psi)\rangle\rangle}{(1 + E^2) \|R\|_2^2} (R, -iER) \quad (5.16)$$

y el segundo es la componente perpendicular, que está en S

$$(\varphi, \psi)_\perp = (\varphi, \psi) - (\varphi, \psi)_\parallel \quad (5.17)$$

Descomposición de la perturbación

Ahora vamos a considerar un vector de perturbación del solitón $(u + iv, p + iq) \in \mathbb{X}$, lo descomponemos en sus proyecciones (5.16) y (5.17):

$$(u + iv, p + iq) = (u + iv, p + iq)_\parallel + (u + iv, p + iq)_\perp$$

con

$$(u + iv, p + iq)_\parallel = \frac{\int R(Eu + q)}{(1 + E^2) \|R\|_2^2} (ER, iR) + \frac{\int R(u - Eq)}{(1 + E^2) \|R\|_2^2} (R, -iER)$$

y

$$(u + iv, p + iq)_\perp = (u + iv, p + iq) - (u + iv, p + iq)_\parallel \in S$$

En lo que sigue vamos a suponer que el flujo del sistema mantiene la carga del solitón. En realidad lo que sabemos es que mantiene la carga del dato inicial, por lo tanto consideraremos un dato inicial que tenga la misma carga que el solitón y que esté “cerca” de éste. Resumiendo, vamos a considerar el caso particular que el flujo permanezca dentro de la superficie de isocarga correspondiente al solitón (R, iER) , y por lo tanto el vector perturbación deberá cumplir, para todo tiempo, la condición (5.13).

Calculemos el orden de los coeficientes de la componente paralela de la perturbación:

- $\int R(Eu + q) dx = \int (vp - uq) dx$ (por (5.13)), tiene orden cuadrático.
- $\int R(u - Eq) dx$, tiene solo orden lineal. Para ver esto en primer lugar consideremos el caso en que la perturbación $(u + iv, p + iq)$, además de estar en la superficie de isocarga, está en el plano generado por $(R, -iER)$ y (ER, iR) , es decir que

$$(u + iv, p + iq) = \alpha (R, -iER) + \beta (ER, iR)$$

con la condición de isocarga

$$E\alpha^2 + (1 + E^2)\alpha\beta + (1 - E^2)\beta + E\beta^2 = 0$$

Esto da una hipérbola en el plano $\alpha\beta$. De la ecuación implícita se tiene que $\beta \approx \alpha^2$, y como por (??) sabemos que β es cuadrática respecto a la perturbación, por lo tanto α es lineal. En el caso que $(u + iv, p + iq)$ esté en la superficie de isocarga pero tenga componente no nula en S , tenemos que

$$(u + iv, p + iq) = \alpha(R, -iER) + \beta(ER, iR) + (u_0 + iv_0, p_0 + iq_0)$$

con $(u_0 + iv_0, p_0 + iq_0) \in S$ (es decir que $\langle u_0, R \rangle = 0, \langle q_0, R \rangle = 0$ y $\langle v_0, R^{2\sigma+1} \rangle = 0$), al pedir la condición de isocarga nos queda la ecuación

$$E\alpha^2 + (1 + E^2)\alpha\beta + (1 - E^2)\beta + E\beta^2 = -\frac{Q(u_0 + iv_0, p_0 + iq_0)}{\|R\|_2^2}$$

que tiene un comportamiento muy parecido al primero, es decir que el orden de β respecto α vuelve a ser 2.

5.2.4. Operador lineal U

Con el fin de poder expresar (5.12) de una manera manejable, introducimos la definición del operador U y de sus partes U_+ y U_- .

Definición 5.2.3 *Definimos los operadores*

- $U_+ : \mathbb{X}_1 \rightarrow \mathbb{X}_1$ dado por

$$\langle\langle U_+(u, iq), (a, id) \rangle\rangle = \langle L_+^\sigma u, a \rangle + \langle Eu - q, Ea - d \rangle$$

Por el teorema de representación sabemos que hay un único elemento de \mathbb{X}_1 de modo que queda bien definida la aplicación lineal por la forma bilineal, así

$$\langle\langle U_+(u, iq), (u, iq) \rangle\rangle = \langle L_+^\sigma u, u \rangle + \|Eu - q\|_2^2$$

- $U_- : \mathbb{X}_2 \rightarrow \mathbb{X}_2$ dado por

$$\langle\langle U_-(iv, p), (ib, c) \rangle\rangle = \langle L_-^\sigma v, b \rangle + \langle Ev + p, Eb + c \rangle$$

de modo que

$$\langle\langle U_-(iv, p), (iv, p) \rangle\rangle = \langle L_-^\sigma v, v \rangle + \|Ev + p\|_2^2$$

■ Definimos $U : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ dado por

$$\begin{aligned} \langle\langle U(u + iv, p + iq), (a + ib, c + id) \rangle\rangle &= \\ &= \langle L_+^\sigma u, a \rangle + \langle Eu - q, Ea - d \rangle + \langle L_-^\sigma v, b \rangle + \langle Ev + p, Eb + c \rangle \end{aligned}$$

Observación 5.2.4 La definición de U tal que $U|_{\mathbb{X}_1} = U_+$ y $U|_{\mathbb{X}_2} = U_-$, es única.

Demostración: Alcanza con mostrar que la expresión de $\langle\langle U(u + iv, p + iq), (a + ib, c + id) \rangle\rangle$ es la relación dada, sólo usando el hecho que $U|_{\mathbb{X}_1} = U_+$ y $U|_{\mathbb{X}_2} = U_-$

$$\begin{aligned} \langle\langle U(u + iv, p + iq), (a + ib, c + id) \rangle\rangle &= \langle\langle U(u, iq) + U(iv, p), (a, id) + (ib, c) \rangle\rangle = \\ &= \langle\langle U(u, iq), (a, id) \rangle\rangle + \langle\langle U(u, iq), (ib, c) \rangle\rangle + \langle\langle U(iv, p), (a, id) \rangle\rangle + \langle\langle U(iv, p), (ib, c) \rangle\rangle = \\ &= \langle\langle U_+(u, iq), (a, id) \rangle\rangle + \langle\langle U_-(iv, p), (ib, c) \rangle\rangle + \\ &+ \underbrace{\langle\langle U_+(u, iq), (ib, c) \rangle\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle\langle U_-(iv, p), (a, id) \rangle\rangle}_{=0} = \\ &= \langle\langle U_+(u, iq), (a, id) \rangle\rangle + \langle\langle U_-(iv, p), (ib, c) \rangle\rangle = \\ &= \langle L_+^\sigma u, a \rangle + \langle Eu - q, Ea - d \rangle + \langle L_-^\sigma v, b \rangle + \langle Ev + p, Eb + c \rangle \end{aligned}$$

Los dos términos centrales se anulan debido a que $U_+(u, iq) \in \mathbb{X}_1$, $U_-(iv, p) \in \mathbb{X}_2$, y a que \mathbb{X}_1 y \mathbb{X}_2 son ortogonales. ■

En definitiva, la expresión de U como forma cuadrática es

$$\langle\langle U(u + iv, p + iq), (u + iv, p + iq) \rangle\rangle = \langle L_+^\sigma u, u \rangle + \|Eu - q\|_2^2 + \langle L_-^\sigma v, v \rangle + \|Ev + p\|_2^2$$

Esta es la expresión que deberíamos controlar inferiormente para tener estabilidad.

Observación 5.2.5 U es autoadjunto

Demostración: $\langle\langle U(u + iv, p + iq), (a + ib, c + id) \rangle\rangle = \langle L_+^\sigma u, a \rangle + \langle Eu - q, Ea - d \rangle + \langle L_-^\sigma v, b \rangle + \langle Ev + p, Eb + c \rangle =$
 $= \langle L_+^\sigma a, u \rangle + \langle Ea - d, Eu - q \rangle + \langle L_-^\sigma b, v \rangle + \langle Eb + c, Ev + p \rangle =$
 $= \langle\langle U(a + ib, c + id), (u + iv, p + iq) \rangle\rangle$ ■

Positividad de U sobre el subespacio S

Sea $(u + iv, p + iq) \in S$ (es decir que u y $q \in R^\perp$ y $\langle R^{2\sigma+1}, v \rangle = 0$), queremos ver que U es positivo en S . Por lo hecho para Schrödinger sabemos que $\langle L_-^\sigma v, v \rangle \geq 0$ y si además como v cumple la condición $\langle R^{2\sigma+1}, v \rangle = 0$ teníamos que $\langle L_-^\sigma v, v \rangle > 0$, es decir que con esa condición el funcional L_-^σ es inyectivo.

También ya sabíamos que $\langle L_+^\sigma u, u \rangle \geq 0$ en R^\perp .

En consecuencia tenemos que existe $C > 0$ tal que, para todo $(u + iv, p + iq) \in S$,

$$\frac{\langle\langle U(u + iv, p + iq), (u + iv, p + iq) \rangle\rangle}{\langle\langle (u + iv, p + iq), (u + iv, p + iq) \rangle\rangle} \geq C \quad (5.18)$$

C es el primer autovalor del funcional U sobre el subespacio S .

5.2.5. Conclusión: dirección de inestabilidad

Para usar la técnica vista en el caso de la ecuación de Schrödinger hasta aquí sólo obtuvimos el control necesario sobre la forma cuadrática en un subespacio de codimensión uno en el espacio tangente a la isocarga en el solitón. Si tuvieramos un resultado de inestabilidad del solitón (como ejemplo el dado en ([20]) pero con las diferencias ya mencionadas en la introducción de este capítulo) entonces la dirección de inestabilidad sería la del componente $(R, -iER)$, porque en el resto de S y en la dirección de (ER, iR) tenemos un control inferior cuadrático del funcional U y por lo tanto del crecimiento de la variación de la función de Lyapunov \mathcal{E} , de modo que si el flujo se mantuviera dentro de este subespacio entonces podríamos hacer un razonamiento análogo al hecho en el capítulo anterior y así obtendríamos un resultado de estabilidad. Pero el complemento ortogonal de $(R, -iER)$ no es invariante por el flujo de la ecuación, o al menos no hay nada que indique que esto suceda, entonces después de evolucionar la solución tendrá componente no nula en esa dirección, alejándose de la órbita del solitón. Estas son las conclusiones que se desprenden del hecho de haber aplicado a la ecuación de Klein-Gordon las técnicas desarrolladas para la ecuación de Schrödinger y habiendo supuesto que el solitón en este caso es inestable.

Apéndice A

Hamiltonianos y Cantidades Conservadas

Aquí realizamos los cálculos para verificar la estructura hamiltoniana y la conservación de algunos funcionales sobre el flujo de la correspondiente ecuación. En cada caso se indica a qué sección de los capítulos precedentes corresponde cada uno de ellos.

A.1. La ecuación KdV

Definíamos

$$\mathcal{J} = \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{y} \quad \mathcal{H}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}u_x^2 - \frac{1}{6}u^3 \right) dx$$

Es inmediato que \mathcal{J} es un operador antisimétrico

$$\langle \mathcal{J}u, v \rangle = \int \mathcal{J}u \bar{v} dx = \int u_x \bar{v} dx = - \int u \bar{v}_x dx = - \langle u, \mathcal{J}v \rangle$$

Calculamos la derivada variacional de la \mathcal{H}

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(\varphi) = \frac{d}{d\epsilon} \mathcal{H}(u + \epsilon\varphi)|_{\epsilon=0} = \int (u_x \varphi_x - \frac{1}{2}u^2 \varphi) dx = \int (-u_{xx} - \frac{1}{2}u^2) \varphi dx$$

por lo tanto

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = -u_{xx} - \frac{1}{2}u^2$$

Así a la ecuación (3.4) la podemos reescribir

$$u_t = \mathcal{J} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-u_{xx} - \frac{1}{2}u^2 \right) = -u_{xxx} - uu_x$$

con lo que queda probado que la KdV tiene una estructura hamiltoniana.

A.2. La ecuación de Schrödinger

Nos reduciremos a analizar el caso en que la no linealidad es del tipo potencial

$$u_t = iu_{xx} + i|u|^{2\sigma} u$$

A.2.1. Estructura Hamiltoniana

Queremos ver que

$$\mathcal{J} = -i \quad \text{y} \quad \mathcal{H}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} u_x^2 - \frac{1}{2\sigma+2} |u|^{2\sigma+2} \right) dx$$

son los operadores antisimétrico y hamiltoniano respectivamente, de modo que la ecuación toma la forma

$$u_t = \mathcal{J} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \right) \quad (\text{A.1})$$

A continuación, desarrollaremos los cálculos que nos permiten afirmar esto.

1. \mathcal{J} es un operador antisimétrico.

$$\langle \mathcal{J}u, v \rangle = -iu\bar{v} = u\bar{iv} = -u\overline{-iv} = -\langle u, \mathcal{J}v \rangle$$

2. Para que tenga estructura hamiltoniana debemos verificar la igualdad (A.1). Para esto calculemos la derivadas variacional de \mathcal{H}

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial \epsilon} \mathcal{H}(u + \epsilon \omega) \Big|_{\epsilon=0} = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \frac{1}{2} \int \left[(u_x + \epsilon \omega_x)^2 - \frac{1}{\sigma+1} |u + \epsilon \omega|^{2\sigma+2} \right] dx \Big|_{\epsilon=0} = \\ &= \int \left[\text{Re}(u_x \bar{\omega}_x) - |u|^{2\sigma} \text{Re}(u \bar{\omega}) \right] dx = \text{Re} \int \left[-u_{xx} - |u|^{2\sigma} u \right] \bar{\omega} dx \end{aligned}$$

Por lo tanto variacionalmente tenemos que

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = -u_{xx} - |u|^{2\sigma} u$$

A.2.2. Cantidades conservadas

Aquí probaremos que los funcionales descriptos en (3.2.2) efectivamente se conservan sobre el flujo de la ecuación NLS.

Conservación de la probabilidad

La norma L^2 de la solución se conserva:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int |u|^2 dx \right) &= \frac{d}{dt} \left(\int u \bar{u} dx \right) = \int (u_t \bar{u} + u \bar{u}_t) dx = \int 2 \text{Re}(u_t \bar{u}) dx = \\ &= 2 \text{Re} \int (iu_{xx} + iV'(|u|)u) \bar{u} dx = 2 \text{Re} \left(i \int u_{xx} \bar{u} dx + i \int V'(|u|)u \bar{u} dx \right) = \\ &= 2 \text{Re} \left(i \int -|u_x|^2 dx + i \int V'(|u|) |u|^2 dx \right) = 0 \end{aligned}$$

Conservación del Hamiltoniano

Por (3.2) sabemos que el hamiltoniano se conserva.

Conservación del momento

En el caso especial que $V(u) = \frac{1}{2\sigma+1} |u|^{2\sigma+1}$ hallamos una tercera cantidad conservada, un momento del flujo. Definimos $Au = iu_x$, entonces el funcional (3.13)

$$\langle Au, u \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} iu_x \bar{u} dx$$

se conserva:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int iu_x \bar{u} dx \right) &= i \left(\int u_{xt} \bar{u} dx + \int u_x \bar{u}_t dx \right) = -i \int u_t \bar{u}_x dx + i \int u_x \bar{u}_t dx = 2 \operatorname{Im} \int u_t \bar{u}_x dx = \\ &= 2 \operatorname{Im} \int \left(iu_{xx} + i|u|^{2\sigma} u \right) \bar{u}_x dx = 2 \operatorname{Im} \left(i \int \left(u_{xx} \bar{u}_x + |u|^{2\sigma} u \bar{u}_x \right) dx \right) = \\ &= 2 \operatorname{Re} \left(\int \left(u_{xx} \bar{u}_x + |u|^{2\sigma} u \bar{u}_x \right) dx \right) = 2 \operatorname{Re} \int u_{xx} \bar{u}_x dx + 2 \operatorname{Re} \int |u|^{2\sigma} u \bar{u}_x dx = 0 \end{aligned}$$

En la última igualdad el primer término es igual a cero porque si llamamos $z = \int u_{xx} \bar{u}_x dx$, entonces $z = \int u_{xx} \bar{u}_x dx = - \int u_x \bar{u}_{xx} dx = -\bar{z}$, por lo tanto $2 \operatorname{Re} z = z + \bar{z} = 0$. Para verificar que el segundo término también es igual cero hacemos lo siguiente:

$$\operatorname{Re} \int |u|^{2\sigma} u \bar{u}_x dx = \operatorname{Re} \overline{\int |u|^{2\sigma} u \bar{u}_x dx} = \operatorname{Re} \int |u|^{2\sigma} \bar{u} u_x dx$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int |u|^{2\sigma} u \bar{u}_x dx &= - \operatorname{Re} \int \left[|u|^{2\sigma} u \right]_x \bar{u} dx = - \operatorname{Re} \int \left[\left(|u|^{2\sigma} \right)_x |u|^2 + |u|^{2\sigma} u_x \bar{u} \right] dx = \\ &= - \operatorname{Re} \int \left[2\sigma |u|^{2\sigma} \operatorname{Re}(u_x \bar{u}) + |u|^{2\sigma} u_x \bar{u} \right] dx = -(2\sigma + 1) \operatorname{Re} \int |u|^{2\sigma} u_x \bar{u} dx \end{aligned}$$

Por lo tanto, uniendo las dos expresiones tenemos que

$$\operatorname{Re} \int |u|^{2\sigma} \bar{u} u_x dx = -(2\sigma + 1) \operatorname{Re} \int |u|^{2\sigma} u_x \bar{u} dx$$

de este modo:

$$\operatorname{Re} \int |u|^{2\sigma} u \bar{u}_x dx = \operatorname{Re} \int |u|^{2\sigma} \bar{u} u_x dx = 0$$

A.3. La ecuación de Klein Gordon

A.3.1. Estructura Hamiltoniana

Si llamamos $\varphi(x, t)$ a la solución de la ecuación de Klein-Gordon y $\psi = \varphi_x$, en (3.1.5) vimos la expresión en forma de sistema (3.7)

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \psi \\ \dot{\psi} = \varphi_{xx} - V'(\varphi) \end{cases}$$

Definíamos los operadores

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathcal{H}(\varphi, \psi) = \int \left[\frac{1}{2} |\varphi_x|^2 + \frac{1}{2} |\psi|^2 + V(\varphi) \right] dx$$

como el operador antisimétrico y el hamiltoniano, de modo que el sistema se transforma en

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi} \\ \dot{\psi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

A continuación, desarrollaremos los cálculos que nos permiten afirmar esto.

Expresión en forma de sistema de la ecuación de KG

Verifiquemos que la ecuación (3.6) y el sistema (3.7) son dos expresiones de lo mismo:

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi \\ \partial_x^2 \varphi - V'(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\partial_x^2 \varphi \\ \psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V'(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Los datos iniciales del problema se transforman en $\varphi_0(x)$ y $\psi_0(x) = \varphi_1(x)$.

Sistema Hamiltoniano

El sistema (3.7) es hamiltoniano:

1. \mathcal{J} es un operador antisimétrico.

$$\left\langle \mathcal{J} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \psi \\ -\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle = \int u\psi - \int v\varphi$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}, -\mathcal{J} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \right\rangle = -\int v\varphi + \int u\psi$$

2. La propiedad central que debe verificar el sistema es que se pueda escribir como

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \mathcal{J} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\varphi, \psi)} \right)$$

para esto calculemos la derivadas variacional de \mathcal{H} y finalmente verifiquemos la igualdad

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi} \\ \dot{\psi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} \end{cases}$$

Para la derivada variacional separamos el cálculo de los dos términos

$$\begin{aligned} a) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi} &= \frac{\partial}{\partial \epsilon} \mathcal{H}(\varphi, \psi + \epsilon\omega) \Big|_{\epsilon=0} = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \frac{1}{2} \int [(\partial_x \varphi)^2 + (\psi + \epsilon\omega)^2 + 2V(\varphi)] dx \Big|_{\epsilon=0} = \\ &= \int \psi \omega dx \end{aligned}$$

Entonces, variacionalmente tenemos que $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi} = \psi = \dot{\varphi}$

$$\begin{aligned}
 b) \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} &= \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \mathcal{H}(\varphi + \epsilon \omega, \psi) \right|_{\epsilon=0} = \\
 &= \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \frac{1}{2} \int [(\partial_x \varphi + \epsilon \omega_x)^2 + \psi^2 + 2V(\varphi + \epsilon \omega)] dx \right|_{\epsilon=0} = \int [\varphi_x \omega_x + V'(\varphi) \omega] dx = \\
 &= \int [-\varphi_{xx} + V'(\varphi)] \omega dx = \int [-\varphi_{tt}] \omega dx \\
 \text{Entonces, variacionalmente tenemos que } &\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi} = -\varphi_{tt} = -\dot{\psi}
 \end{aligned}$$

A.3.2. Cantidades conservadas

El sistema (3.7) tiene leyes de conservación o cantidades conservadas que ya fueron nombradas en (3.2.3). Aquí desarrollaremos los cálculos para la verificación de esto.

Conservación del Hamiltoniano

Como lo vimos en (3.2) siempre el hamiltoniano se preserva sobre el flujo del sistema. Igualmente verificamos aquí los cálculos

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \mathcal{H}(\varphi, \psi) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int [(\partial_x \varphi)^2 + \psi^2 + 2V(\varphi)] dx = \int [\varphi_x \dot{\varphi}_x + \psi \dot{\psi} + V'(\varphi) \dot{\varphi}] dx = \\
 &= \int [-\varphi_{xx} \dot{\varphi} + \psi \dot{\varphi} + V'(\varphi) \dot{\varphi}] dx = \int [-\varphi_{xx} + \dot{\varphi} + V'(\varphi)] \psi dx = 0
 \end{aligned}$$

Conservación de la Carga

Si la no linealidad es $V'(\varphi) = \varphi - |\varphi|^{2\sigma} \varphi$, entonces el funcional (3.15) se preserva por el flujo. Esto es consecuencia de un hecho más general que describimos a continuación.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} Q(\varphi, \psi) &= \frac{d}{dt} \text{Im} \int \bar{\varphi} \psi dx = \text{Im} \int [\bar{\varphi}_t \psi + \bar{\varphi} \psi_t] dx = \text{Im} \int [\bar{\varphi}_t \psi + \bar{\varphi} \psi_t] dx = \\
 &= \text{Im} \int [\bar{\psi} \psi + \bar{\varphi} (\varphi_{xx} - V'(\varphi))] dx = \text{Im} \int (|\psi|^2 - |\varphi_x|^2 - V'(\varphi) \bar{\varphi}) dx
 \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{d}{dt} Q(\varphi, \psi) = 0 \Leftrightarrow V'(\varphi) \bar{\varphi} \in \mathbb{R}$$

Apéndice B

Demostraciones y Propiedades de la PNLs

B.1. Demostración de la proposición (4.2.1)

Para probar la existencia de soluciones de la ecuación no lineal estacionaria usamos teoría del potencial. Pero además obtenemos una caracterización de las soluciones respecto a sus simetrías y a su comportamiento para valores de σ tendiendo a cero.

B.1.1. Existencia

Fijados $E \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$, la ecuación del solitón es

$$-R'' + ER - R^{2\sigma+1} = 0$$

multiplicándola por R' e integrando tenemos que

$$(R')^2 - ER^2 + \frac{1}{\sigma+1}R^{2\sigma+2} = C$$

evaluando en $x = 0$, como $R(0) = 0$, tenemos que $C = (R'(0))^2$. Además desde el análisis del potencial sabemos que el solitón R es antisimétrico respecto a $x = \frac{1}{2}$, positivo en el intervalo $(0, \frac{1}{2})$ y simétrico en el mismo respecto a $x = \frac{1}{4}$ de modo que alcanza el valor máximo $A = R(\frac{1}{4})$ en ese punto, por lo tanto $R'(\frac{1}{4}) = 0$. Desde esto último, si evaluamos la ecuación en $x = \frac{1}{4}$, tenemos que

$$C = -EA^2 + \frac{1}{\sigma+1}A^{2\sigma+2}$$

Por otro lado

$$R'(x) = \pm \sqrt{C + ER^2(x) - \frac{1}{\sigma+1}R^{2\sigma+2}(x)}$$

podemos tomar el signo + porque consideramos que $R'(0) > 0$. Entonces

$$x = \int_0^x \frac{R'(\xi)}{\sqrt{C + ER^2(\xi) - \frac{1}{\sigma+1}R^{2\sigma+2}(\xi)}} d\xi$$

evaluando en $x = \frac{1}{4}$ y haciendo el cambio de variables $R = R(\xi)$ y recordando que $R\left(\frac{1}{4}\right) = A$ tenemos que

$$\frac{1}{4} = \int_0^A \frac{dR}{\sqrt{C+ER^2-\frac{1}{\sigma+1}R^{2\sigma+2}}}$$

que al introducir la expresión de C nos queda

$$\frac{1}{4} = \int_0^A \frac{dR}{\sqrt{-E(A^2-R^2)+\frac{1}{\sigma+1}(A^{2\sigma+2}-R^{2\sigma+2})}}$$

Con el cambio de variable $R = At$ esta última igualdad se transforma en

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= \int_0^1 \frac{Adt}{\sqrt{-EA^2(1-t^2)+\frac{1}{\sigma+1}A^{2\sigma+2}(1-t^{2\sigma+2})}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{|E|}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{(\sigma+1)|E|}A^{2\sigma}(1-t^{2\sigma+2})-\text{sg}(E)(1-t^2)}} \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{\sqrt{|E|}}{4} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\frac{A^{2\sigma}}{(\sigma+1)|E|}(1-t^{2\sigma+2})-\text{sg}(E)(1-t^2)}} \quad (\text{B.1})$$

A partir de este momento nombraremos A_σ al valor máximo del solitón R_σ , para indicar su dependencia de σ . Usando la expresión (B.1) podemos calcular el límite de $A_\sigma^{2\sigma}$ cuando $\sigma \rightarrow 0$.

Lema B.1.1

Fijado $E \in \mathbb{R}$, si $A_\sigma = \max_{x \in [0, 1/2]} R_\sigma(x) = R_\sigma(1/4)$, entonces

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} A_\sigma^{2\sigma} = E + 4\pi^2 \quad (\text{B.2})$$

Demostración: Si $E \neq 0$, llamamos $L(\sigma) = \frac{A_\sigma^{2\sigma}}{(\sigma+1)|E|}$, entonces la ecuación (B.1) toma la forma

$$F(L, \sigma) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{L(\sigma)(1-t^{2\sigma+2})-\text{sg}(E)(1-t^2)}} = \frac{\sqrt{|E|}}{4}$$

Por el teorema de la función implícita, existe un entorno del punto $(\text{sg}(E) + \frac{4\pi^2}{|E|}, 0)$ donde existe una función continua $L(\sigma)$ tal que $L(0) = \text{sg}(E) + \frac{4\pi^2}{|E|}$. Esto es inmediato dado que

$$\frac{\partial F}{\partial L} = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1-t^{2\sigma+2})dt}{\left(\sqrt{L(1-t^{2\sigma+2})-\text{sg}(E)(1-t^2)}\right)^3}$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial L} \left(\text{sg}(E) + \frac{4\pi^2}{|E|}, 0 \right) &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1-t^2)dt}{\left(\sqrt{\left(\text{sg}(E) + \frac{4\pi^2}{|E|}\right)(1-t^2)-\text{sg}(E)(1-t^2)}\right)^3} \\ &= -\frac{|E|^{3/2}}{16\pi^3} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)}} \\ &= -\frac{|E|^{3/2}}{32\pi^2} \neq 0 \end{aligned}$$

entonces

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} A_\sigma^{2\sigma} = E + 4\pi^2$$

Si $E = 0$, no podemos usar (B.1), por lo tanto debemos analizarlo tomando una de las expresiones integrales anteriores, donde tiene sentido evaluar en $E = 0$, así por ejemplo

$$\frac{1}{4} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{\sigma+1} A_\sigma^{2\sigma} (1-t^{2\sigma+2})}}$$

entonces, si $\frac{A_\sigma^{2\sigma}}{\sigma+1} \rightarrow L \geq 0$ cuando $\sigma \rightarrow 0$, es decir que

$$\frac{\sqrt{L}}{4} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2}$$

luego

$$L = 4\pi^2$$

de donde

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} A_\sigma^{2\sigma} = 4\pi^2$$

■

La ecuación del solitón para $E \leq 0$ no presenta interés (el potencial tiene forma de parábola e incluye el caso crítico $\sigma = 0$ en el que el único E admisible es $E = 1 - 4\pi^2$, que tiene la forma exacta de parábola), por lo que nos restringimos a analizar el caso en que $E > 0$. La idea es que al ser $E > 0$ el potencial tiene la forma de W (como se ve en la figura (B.1)),

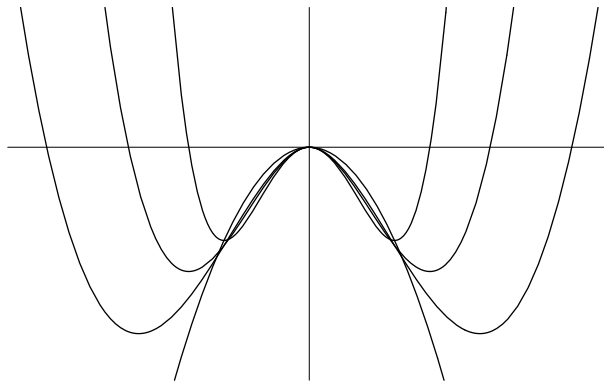


Figura B.1

por lo tanto al mover el nivel de la constante C tenemos soluciones que van desde período infinito (valores de C muy cercanos a 0) y que tienden decrecientemente a cero cuando C tiende a $+\infty$. Notemos que en la familia de curvas con forma de W (correspondientes a valores de $E > 0$), se tiene que a medida que $\sigma \rightarrow 0$, las curvas del potencial son cada vez más amplias y el corte de cada una de ellas con la recta

de altura C se produce en $A_\sigma \rightarrow +\infty$ cuando $\sigma \rightarrow 0$ (es decir que la amplitud del solitón es cada vez más grande a medida que $\sigma \rightarrow 0$).

Definición: A la diferencia entre el valor de $R_\sigma^{2\sigma}(x)$ y el valor límite $E + 4\pi^2$ de su máximo la llamaremos V_σ

$$V_\sigma = E + 4\pi^2 - R_\sigma^{2\sigma} \quad (\text{B.3})$$

B.1.2. Norma L^p de V_σ

Por (B.2) sabemos que el valor máximo de $R_\sigma^{2\sigma}$ tiende a $E + 4\pi^2$, pero ahora queremos ver que en realidad toda la curva $R_\sigma^{2\sigma}(x)$ tiende puntualmente a la recta horizontal de altura $E + 4\pi^2$, salvo en las puntas del intervalo donde siempre valen 0. Geométricamente las curvas $R_\sigma^{2\sigma}(x)$ se “planchan” a esa altura en el interior del intervalo cuando $\sigma \rightarrow 0$. Notemos que esto no significa que $\|V_\sigma\|_\infty \rightarrow 0$ pues para todo $\sigma > 0$ hay un conjunto de medida no nula en que el valor de V_σ es cercano a $E + 4\pi^2$. Luego probaremos que esta convergencia no es solo puntual sino que también la tenemos para cualquier $1 \leq p < +\infty$, es decir que

$$\|V_\sigma\|_p \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} 0 \quad \text{para } 1 \leq p < +\infty$$

Para ver esto antes probamos el siguiente resultado:

Lema B.1.2

Si $0 \leq x_0 \leq 1/4$ entonces

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \left(\frac{R_\sigma(x_0)}{A_\sigma} \right) = \text{sen}(2\pi x_0) \quad (\text{B.4})$$

Demostración:. Consideremos $0 \leq x_0 \leq 1/4$ fijo, por lo tanto

$$\begin{aligned} x_0 &= \int_0^{R_\sigma(x_0)} \frac{dR}{\sqrt{-E(A_\sigma^2 - R^2) + \frac{1}{\sigma+1}(A_\sigma^{2\sigma+2} - R^{2\sigma+2})}} \stackrel{R=A_\sigma t}{=} \\ &= \frac{1}{\sqrt{E}} \int_0^{\frac{R_\sigma(x_0)}{A_\sigma}} \frac{dt}{\sqrt{\frac{A_\sigma^{2\sigma}}{(\sigma+1)E} (1 - t^{2\sigma+2}) - (1 - t^2)}} \end{aligned}$$

Como $R_\sigma(x_0) \leq A_\sigma \Rightarrow 0 \leq \frac{R_\sigma(x_0)}{A_\sigma} \leq 1$. Sea $\alpha = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left(\frac{R_\sigma(x_0)}{A_\sigma} \right)$ que existe, aunque sea en el sentido de una subsucesión, por ser una función acotada.

Como $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \left(\frac{A_\sigma^{2\sigma}}{(\sigma+1)E} \right) = \frac{E+4\pi^2}{E} = 1 + \frac{4\pi^2}{E}$, podemos decir que

$$\sqrt{E}x_0 = \int_0^\alpha \frac{dt}{\sqrt{\frac{4\pi^2}{E} (1 - t^2)}} = \frac{\sqrt{E}}{2\pi} \int_0^\alpha \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{\sqrt{E}}{2\pi} \arcsen(\alpha)$$

de donde

$$\alpha = \text{sen}(2\pi x_0)$$

Por lo tanto

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \left(\frac{R_\sigma(x_0)}{A_\sigma} \right) = \text{sen}(2\pi x_0) \quad \text{para todo } 0 \leq x_0 \leq 1/4$$

■

Es decir que a pesar que A_σ (el valor máximo) tiende a $+\infty$, en realidad $R_\sigma(x)$ también tiende a $+\infty$ en todo punto del intervalo $(0, \frac{1}{4})$, pero de modo que en cada punto guardan esa proporción.

Proposición B.1.1

Para todo $1 \leq p < +\infty$, tenemos que

$$\|V_\sigma\|_p \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} 0$$

Demostración: Primero veamos la convergencia puntual. Por (B.2) sabemos que $A_\sigma^{2\sigma} \rightarrow E + 4\pi^2$ cuando $\sigma \rightarrow 0$, por lo tanto alcanzará con probar que

$$\frac{R_\sigma^{2\sigma}(x)}{A_\sigma^{2\sigma}} \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0^+} \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \text{ (es decir que } 0 < x \leq 1/4) \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Para probar esto distinguimos dos casos:

- Si $x \neq 0$, usamos (B.4) para obtener

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \left(\frac{R_\sigma(x)}{A_\sigma} \right)^{2\sigma} = \exp \left[2 \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \left(\sigma \ln \left(\frac{R_\sigma(x)}{A_\sigma} \right) \right) \right] = e^0 = 1$$

- Si $x = 0$, tenemos directamente que

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \left(\frac{R_\sigma(0)}{A_\sigma} \right)^{2\sigma} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} 0 = 0$$

Consideramos ahora $1 \leq p < +\infty$. Para probar que $\|V_\sigma\|_p \rightarrow 0$, por la simetría de R_σ alcanzará con probar que

$$\frac{1}{4} \|V_\sigma\|_p^p = \int_0^{1/4} |E + 4\pi^2 - R_\sigma^{2\sigma}(x)|^p dx \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0^+} 0$$

lo que obtenemos del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \int_0^{1/4} |V_\sigma|^p dx &= \int_0^{1/4} |E + 4\pi^2 - R_\sigma^{2\sigma}(x)|^p dx = \\ &= \int_0^{1/4} \underbrace{\left| \frac{E + 4\pi^2}{A_\sigma^{2\sigma}} - \frac{R_\sigma^{2\sigma}(x)}{A_\sigma^{2\sigma}} \right|^p}_{\rightarrow 0 \text{ si } x \neq 0} \underbrace{|A_\sigma^{2\sigma}|^p}_{\leq M} dx \rightarrow 0 \end{aligned}$$

donde usamos (B.2) y (B.5). ■

B.2. Condiciones de ortogonalidad

Al considerar que la órbita de la solución de la ecuación es un perturbado del solitón en el sentido de la expresión (4.10), podemos dar una condición necesaria sobre la parte imaginaria $v(x, t)$ de la perturbación para que represente, para cada tiempo t , al elemento de la órbita de la solución que realiza la distancia al solitón $R(x)$. Para esto haremos la minimización de la distancia (B.6) respecto a γ .

$$\rho_E^2(\phi(t), \mathcal{G}_R) = \inf_{x_0, y, \gamma} \left\{ \|\phi_x(\cdot, t) e^{i\gamma} - R'\|_{L^2}^2 + E \|\phi(\cdot, t) e^{i\gamma} - R\|_{L^2}^2 \right\} \quad (\text{B.6})$$

Para esto haremos el cálculo de cada término por separado

$$\begin{aligned} 1. \quad & \left. \frac{d}{d\varepsilon} \|\phi_x(x, t) e^{i(\gamma+\varepsilon)} - R'(x)\|_{L^2}^2 \right|_{\varepsilon=0} = \\ & = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_0^1 (\phi_x(x, t) e^{i(\gamma+\varepsilon)} - R'(x)) (\overline{\phi_x(x, t) e^{i(\gamma+\varepsilon)}} - \overline{R'(x)}) dx \right|_{\varepsilon=0} = \\ & = \int_0^1 -R'(x) (i\phi_x(x, t) e^{i\gamma} - i\overline{\phi_x(x, t)} e^{-i\gamma}) dx = \\ & = \int_0^1 -R'(x) i (2i \text{Im}(\phi_x(x, t) e^{i\gamma})) dx = \int_0^1 2R'(x) \text{Im}(\phi_x(x, t) e^{i\gamma}) dx = \\ & = 2 \int_0^1 R'(x) v_x(x, t) dx = -2 \int_0^1 R''(x) v(x, t) dx = \\ & = 2 \int_0^1 R^{2\sigma+1}(x) v(x, t) dx - 2E \int_0^1 R(x) v(x, t) dx \end{aligned}$$

de este modo tenemos

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \|\phi_x(x, t) e^{i(\gamma+\varepsilon)} - R'(x)\|_{L^2}^2 \right|_{\varepsilon=0} = 2 \int_0^1 R^{2\sigma+1}(x) v(x, t) dx - 2E \int_0^1 R(x) v(x, t) dx$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & \left. \frac{d}{d\varepsilon} \|\phi(x, t) e^{i(\gamma+\varepsilon)} - R(x)\|_{L^2}^2 \right|_{\varepsilon=0} = \\ & = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_0^1 (\phi(x, t) e^{i(\gamma+\varepsilon)} - R(x)) (\overline{\phi(x, t) e^{i(\gamma+\varepsilon)}} - \overline{R(x)}) dx \right|_{\varepsilon=0} = \\ & = \int_0^1 -R(x) (i\phi(x, t) e^{i\gamma} - i\overline{\phi(x, t)} e^{-i\gamma}) dx = \\ & = \int_0^1 -R(x) i (2i \text{Im}(\phi(x, t) e^{i\gamma})) dx = \int_0^1 2R(x) \text{Im}(\phi(x, t) e^{i\gamma}) dx = \\ & = 2 \int_0^1 R(x) v(x, t) dx \end{aligned}$$

así tenemos que

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \|\phi(x, t) e^{i(\gamma+\varepsilon)} - R(x)\|_{L^2}^2 \right|_{\varepsilon=0} = 2 \int_0^1 R(x) v(x, t) dx$$

Al juntar las dos expresiones e igualándolas a cero (porque queremos que sea un mínimo), tenemos que

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{d\varepsilon} \left(\|\phi_x(x, t)e^{i\gamma} - R'(x)\|_{L^2}^2 + E \|\phi(x, t)e^{i\gamma} - R(x)\|_{L^2}^2 \right) \Big|_{\varepsilon=0} = \\
 &= 2 \int_0^1 R^{2\sigma+1}(x)v(x, t)dx - 2E \int_0^1 R(x)v(x, t)dx + 2E \int_0^1 R(x)v(x, t)dx = \\
 &= 2 \int_0^1 R^{2\sigma+1}(x)v(x, t)dx
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, como condición para que haya un $\gamma \in \mathbb{R}$ que minimice (B.6) la parte imaginaria $v(x, t)$ deberá cumplir, para todo tiempo t , la condición de ortogonalidad (4.25)

$$\int_0^1 R^{2\sigma+1}(x)v(x, t)dx = 0$$

B.3. Expansión de Taylor de $\Delta\mathcal{E}$

Aquí hallaremos la desigualdad

$$\Delta\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}[R + w] - \mathcal{E}[R] \geq \langle L_+^\sigma u, u \rangle + \langle L_-^\sigma v, v \rangle - C_1 \|w\|_{H^1}^3 - C_2 \|w\|_{H^1}^6$$

Recordemos que $R(x)$ es una función real y $w(x, t) = u(x, t) + iv(x, t)$.

Para hallar la expansión de Taylor de esta diferencia, calcularemos la primera y la segunda variación del funcional \mathcal{E} en R , la primera variación se anula mientras que la segunda nos devuelve la forma cuadrática buscada

$$\begin{aligned}
 1. \quad \mathcal{E}'[R](w) &= \frac{\partial}{\partial\varepsilon} \mathcal{E}[R + \varepsilon w] \Big|_{\varepsilon=0} = \\
 &= \frac{\partial}{\partial\varepsilon} \int_0^1 \left(|(R + \varepsilon w)'|^2 - \frac{1}{\sigma+1} |R + \varepsilon w|^{2\sigma+2} + E |R + \varepsilon w|^2 \right) dx \Big|_{\varepsilon=0} = \\
 &= \int_0^1 \left(2\operatorname{Re}(R' \overline{w_x}) - 2R^{2\sigma} \operatorname{Re}(R \overline{w}) + 2E \operatorname{Re}(R \overline{w}) \right) dx = \\
 &= 2\operatorname{Re} \int_0^1 \left(R' \overline{w_x} - R^{2\sigma+1} \overline{w} + ER \overline{w} \right) dx = \\
 &= 2\operatorname{Re} \int_0^1 \left(-R'' - R^{2\sigma+1} + ER \right) \overline{w} dx = 0
 \end{aligned}$$

por ser R un solitón.

$$\begin{aligned}
 2. \quad \mathcal{E}''[R](w, w) &= \frac{\partial}{\partial\varepsilon} \mathcal{E}'[R + \varepsilon w](w) \Big|_{\varepsilon=0} = \\
 &= 2\operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial\varepsilon} \int_0^1 \left((R' + \varepsilon w_x) \overline{w_x} - (R + \varepsilon w)^{2\sigma+1} \overline{w} + E(R + \varepsilon w) \overline{w} \right) dx \Big|_{\varepsilon=0} = \\
 &= 2\operatorname{Re} \int_0^1 \left(|w_x|^2 - 2\sigma R^{2\sigma} \operatorname{Re}(\overline{w} w) - R^{2\sigma} |w|^2 + E |w|^2 \right) dx = \\
 &= 2\operatorname{Re} \int_0^1 \left(|u_x|^2 + |v_x|^2 - 2\sigma R^{2\sigma} u(u - iv) - R^{2\sigma} (u^2 + v^2) + E(u^2 + v^2) \right) dx = \\
 &= 2 \int_0^1 \left(|u_x|^2 - (2\sigma + 1) R^{2\sigma} u^2 + E u^2 \right) + \left(|v_x|^2 - R^{2\sigma} v^2 + E v^2 \right) dx = \\
 &= 2 \int_0^1 \left(|u_x|^2 - (2\sigma + 1) R^{2\sigma} u^2 + E u^2 \right) + 2 \int_0^{1/2} \left(|v_x|^2 - R^{2\sigma} v^2 + E v^2 \right) dx = \\
 &= 2 \left(\langle L_+^\sigma u, u \rangle + \langle L_+^\sigma v, v \rangle \right)
 \end{aligned}$$

El 2 se va porque es el término cuadrático de Taylor.

3. Los demás términos son el negativo de los términos de mayor orden que aparecen en la expansión de Taylor.

B.4. Acotación de las formas cuadráticas $\langle L_+^\sigma u, u \rangle$

B.4.1. Estudio de la paridad de las autofunciones de L_+^σ

Sabemos que $R(x)$ es impar respecto a $x = \frac{1}{2}$ y que en $(0, \frac{1}{2})$ es positivo (por lo tanto en la otra mitad del intervalo es negativo). Por lo tanto es inmediato que $R^{2\sigma}$ es una función par y positiva respecto a $x = \frac{1}{2}$.

Nos interesa ver que L_+^σ restringido al espacio de las funciones de $L^2[0, 1]$ impares respecto a $x = \frac{1}{2}$ tiene un único autovalor negativo y el segundo ya es positivo.

Por el momento miremos al operador en $L^2[0, 1]$, sabemos que tiene al menos un autovalor negativo porque $\langle L_+^\sigma R, R \rangle < 0$ aunque R no es una autofunción asociada a ese autovalor. Sea λ_1 el primer autovalor (obviamente es negativo) con autofunción $\varphi_1(x)$ asociada. Ésta debe conservar el signo en todo $(0, 1)$, entonces supongamos que es siempre positivo, por lo tanto no puede estar en el conjunto de las funciones impares.

Consideremos ahora el segundo autovalor λ_2 con autofunción $\varphi_2(x)$. Esta autofunción debe tener un cero en $(0, 1)$, pero de primera no tiene por qué ser impar. El tercer autovalor es $\lambda_3 = 0$ con autofunción $\varphi_3(x) = R'(x)$ que es una función par (respecto a $x = \frac{1}{2}$) con dos raíces en el $(0, 1)$. Por lo tanto $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 = \lambda_3$. Si logramos ver que $\varphi_2(x)$ es impar podemos asegurar que λ_2 es el primer autovalor del operador en $L^2[0, 1]$ impares respecto a $x = \frac{1}{2}$.

Para ver que $\varphi_2(x)$ es una función impar haremos primero un análisis general de las autofunciones. Si $\phi(x)$ es autofunción del autovalor λ entonces $\phi(x)$ es solución del problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} -\phi''(x) + E\phi(x) - R^{2\sigma}(x)\phi(x) = \lambda\phi(x) \\ \phi'(0) = \phi'(1) \end{cases}$$

Pero $\phi(1-x)$ también es solución del mismo problema, debido a que $R^{2\sigma}(1-x) = R^{2\sigma}(x)$. Por la simplicidad de los autovalores tenemos que existe C constante tal que

$$\phi(1-x) = C\phi(x) \tag{B.7}$$

Por lo tanto, si evaluamos esta expresión en $x = \frac{1}{2}$ tenemos que

$$\phi\left(\frac{1}{2}\right) = C\phi\left(\frac{1}{2}\right)$$

de donde

$$\phi\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ ó } C = 1 \tag{B.8}$$

Por otro lado derivando la igualdad (B.7) tenemos

$$-\phi'(1-x) = C\phi'(x) \quad (\text{B.9})$$

y si nuevamente evaluamos en $x = \frac{1}{2}$ se tiene que

$$-\phi'\left(\frac{1}{2}\right) = C\phi'\left(\frac{1}{2}\right)$$

de donde

$$\phi'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ ó } C = -1 \quad (\text{B.10})$$

Analizando los casos que se presentan teniendo en cuenta (B.8) y (B.10) tenemos lo siguiente:

1. Si en (B.8) se cumple que $C = 1$, entonces en (B.10) se debe satisfacer que $\phi'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Pero el hecho de ser $C = 1$ nos dice que $\phi(x)$ es una función par respecto a $x = \frac{1}{2}$ (debido a (B.7)).
2. Si en (B.8) se cumple que $\phi\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, entonces en (B.10) se debe satisfacer que $C = -1$. Por lo tanto $\phi(x)$ es una función impar respecto a $x = \frac{1}{2}$ (debido a (B.7)).

Este análisis nos dice que todas las autofunciones de L_+^σ son funciones pares o impares. Por lo dicho antes sucede que φ_1 es par, φ_2 es impar, φ_3 es par y así sucesivamente. Al restringirnos a las funciones impares (respecto a $x = \frac{1}{2}$) tenemos que el primer autovalor es $\lambda_2 < 0$ (con autofunción $\varphi_2(x)$ impar) y el segundo autovalor será $\lambda_4 > 0$ (con autovalor φ_4 impar).

B.4.2. Desarrollo de la condición (4.30)

Aquí mostraremos que si suponemos que la solución y el solitón permanecen en la cáscara de una misma bola en L^2

$$\int_0^1 |\phi(x, t)|^2 dx = \int_0^1 R^2(x) dx$$

entonces tenemos la condición

$$\langle R, u \rangle = -\frac{1}{2} [\langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle]$$

Veamos esto:

$$\begin{aligned} \int_0^1 R^2(x) dx &= \int_0^1 |\phi(x, t)|^2 dx = \int_0^1 |R(x) + u(x, t) + iv(x, t)|^2 dx = \\ &= \int_0^1 (|R + u|^2 + |v|^2) dx = \int_0^1 (R^2 + u^2 + 2Ru + v^2) dx \end{aligned}$$

entonces

$$\int_0^1 (u^2 + 2Ru + v^2) dx = 0$$

de donde obtenemos la expresión que buscábamos.

B.4.3. Simplicidad de $\lambda = 0$ como autovalor de L_+^σ

Este resultado para la ecuación con dominio acotado es más sencillo que cuando el dominio es todo \mathbb{R} .

Es inmediato que $L_+^\sigma(R') = 0$ (evaluado en R' y reescribiendo la expresión como una derivada). Queremos ver que R' es la única autofunción de autovalor $\lambda = 0$ de L_+^σ .

El conjunto solución del problema dado por la ecuación diferencial ordinaria lineal y de segundo orden con dato de borde

$$\begin{cases} L_+^\sigma(f)(x) = 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ f(0) = R'(0) \end{cases}$$

tiene dimensión uno. Como R' ya es una solución no trivial entonces R' es base del conjunto solución, por lo tanto toda otra solución necesariamente es un múltiplo de R' . De aquí tenemos que $\lambda = 0$ es un autovalor simple de L_+^σ .

B.4.4. Convergencia del primer autovalor de L_+^σ

Si definimos el operador $L_0u = -u'' - 4\pi^2u$ es fácil ver que el problema con datos de contorno periódico tiene primer autovalor $\lambda_1^0 = 0$ con autofunción asociada normalizada $R_0(x) = \sqrt{2}\text{sen}(2\pi x)$.

La expresión de los operadores L_-^σ y L_+^σ como perturbaciones de L_0 , usando la expresión V_σ dada en (B.3), es

$$L_-^\sigma u = (-u'' - 4\pi^2u) + V_\sigma u \quad (\text{B.11})$$

$$L_+^\sigma u = (-u'' - 4\pi^2u) - 2\sigma(E + 4\pi^2)u + (2\sigma + 1)V_\sigma u \quad (\text{B.12})$$

El problema asociado al operador L_-^σ con dato de contorno periódico tiene primer autovalor $\lambda_1^\sigma = 0$ con autofunción asociada R_σ . Por lo tanto, trivialmente, $\lambda_1^\sigma = \lambda_1^0 = 0$.

El problema asociado al operador L_+^σ también con datos de contorno periódicos, tendrá primer autovalor λ_1^σ , y nuestro objetivo es probar que $\lambda_1^\sigma \rightarrow \lambda_1^0 = 0$. Una vez que tenemos esto hecho, debemos verificar, usando resultados de la teoría de perturbaciones, que las correspondientes autofunciones normalizadas, tanto para L_-^σ como para L_+^σ , también convergen a $R_0(x) = \sqrt{2}\text{sen}(2\pi x)$.

Sabemos que el primer autovalor de L_+^σ es $\lambda_1^\sigma < 0$, porque $\langle L_+^\sigma R_\sigma, R_\sigma \rangle < 0$, aunque R_σ no es la autofunción asociada a este primer autovalor. Nuestro objetivo es ver que $\lambda_1^\sigma \rightarrow 0$ cuando $\sigma \rightarrow 0$, y para esto buscamos una cota inferior de λ_1^σ que lo haga, la que obtenemos controlando inferiormente el cociente de Rayleigh del operador L_+^σ escrito en su forma perturbada:

$$\mathcal{R}[u] = \frac{\int |u'|^2 dx - (4\pi^2 + 2\sigma(E + 4\pi^2)) \int u^2 dx + (2\sigma + 1) \int V_\sigma u^2 dx}{\int u^2 dx} \quad (\text{B.13})$$

Bastará probar que para todo $\eta > 0$ existe $\sigma_0(\eta) > 0$ tal que si $0 < \sigma < \sigma_0$ entonces

$$\mathcal{R}[u] \geq -\eta$$

por lo tanto, si $0 < \sigma < \sigma_0(\eta)$ tenemos que

$$-\eta \leq \lambda_1^\sigma < 0$$

Para obtener este resultado necesitamos algunos resultados previos, los que daremos en las siguientes observaciones y lemas.

Observación B.4.1 Recordemos la desigualdad de Gagliardo Nierenberg en una variable ([6] pag 147). Si I es un intervalo acotado, $1 \leq r \leq +\infty$, $1 \leq q \leq p \leq +\infty$, entonces $\exists C > 0$ tal que

$$\|u\|_p \leq C \|u'\|_r^a \|u\|_q^{1-a}$$

con $0 \leq a \leq 1$ dado por $a\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r} + 1\right) = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. Notar que se podemos reemplazar $\|u'\|_r$ por $\|u\|_{W^{1,r}}$.

Observación B.4.2 Si $p > 1$ y p' es su conjugado, entonces para todo $u \in H^1$ se cumple que

$$\left| \int V_\sigma u^2 dx \right| \leq \|V_\sigma\|_p \|u\|_{2p'}^2$$

Demostración: Por la desigualdad de Hölder para p y p' conjugados tenemos que

$$\left| \int V_\sigma u^2 dx \right| \leq \|V_\sigma\|_p \|u^2\|_{p'}$$

además $\|u^2\|_{p'}^{p'} = \int (u^2)^{p'} = \int u^{2p'} = \|u\|_{2p'}^{2p'}$, entonces $\|u^2\|_{p'} = \|u\|_{2p'}^2$ ■

Lema B.4.1 Para todo $u \in H^1$ y $p' > 1$ se cumple que

$$\|u\|_{2p'}^2 \leq C \|u'\|_2^{1-\frac{1}{p'}} \|u\|_2^{1+\frac{1}{p'}} \quad (\text{B.14})$$

Demostración: Si aplicamos la desigualdad de G-N (primera observación) con los valores de los parámetros: $p = 2p'$, $q = 2$ y $r = 2$, de donde $a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2p'} = \frac{1}{2p}$ (notar que p se usó primero en el sentido en que aparece en la desigualdad de G-N, y en la última expresión de a el p que aparece es el conjugado de p').

Entonces tenemos que

$$\|u\|_{2p'} \leq C \|u'\|_2^{\frac{1}{2p}} \|u\|_2^{1-\frac{1}{2p}}$$

entonces

$$\|u\|_{2p'}^2 \leq C \|u'\|_2^{\frac{1}{p}} \|u\|_2^{2-\frac{1}{p}} = C \|u'\|_2^{1-\frac{1}{p'}} \|u\|_2^{1+\frac{1}{p'}}$$

■

Lema B.4.2 Para todo $u \in H_0^1[0, 1]$ se verifica la desigualdad

$$\frac{\|u'\|_2^2}{\|u\|_2^2} \geq 4\pi^2$$

Demostración: El cociente $\frac{\|u'\|_2^2}{\|u\|_2^2}$ es el cociente de Rayleigh del problema

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u \\ u(0) = u(1) \end{cases}$$

que tiene por primer autovalor a $\lambda_1 = 4\pi^2$, entonces:

$$4\pi^2 = \lambda_1 = \min \frac{\int (u')^2 dx}{\int u^2 dx} \leq \frac{\|u'\|_2^2}{\|u\|_2^2}$$

■

Lema B.4.3 Si p y $p' > 1$ son conjugados, $\varepsilon > 0$ y $u \in H^1$, entonces

$$\left| \int V_\sigma u^2 dx \right| \leq \frac{\varepsilon^{2p}}{2p} \|u'\|_2^2 + \frac{p'+1}{2p'} \left(\frac{C}{\varepsilon}\right)^{\frac{2p'}{p'+1}} \|V_\sigma\|_p^{\frac{2p'}{p'+1}} \|u\|_2^2$$

Para el caso $p = p' = 2$ tenemos que

$$\left| \int V_\sigma u^2 dx \right| \leq \frac{\varepsilon^4}{4} \|u'\|_2^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{C}{\varepsilon}\right)^{\frac{4}{3}} \|V_\sigma\|_2^{\frac{4}{3}} \|u\|_2^2 \quad (\text{B.15})$$

Demostración: En primer lugar recordemos que la desigualdad numérica de Hölder afirma que si a y b son números positivos y q y $q' > 1$ son conjugados, entonces

$$ab \leq \frac{a^q}{q} + \frac{b^{q'}}{q'}$$

Ahora si p y $p' > 1$ son conjugados, usando la desigualdad (B.14) tenemos que

$$\|V_\sigma\|_p \|u\|_{2p'}^2 \leq C \|u'\|_2^{1-\frac{1}{p'}} \|u\|_2^{1+\frac{1}{p'}} \|V_\sigma\|_p$$

Al último miembro de esta desigualdad le podemos aplicar la desigualdad numérica de Hölder tomando para un $\varepsilon > 0$

$$\begin{cases} a = \varepsilon \|u'\|_2^{1-\frac{1}{p'}} \\ b = \frac{C}{\varepsilon} \|u\|_2^{1+\frac{1}{p'}} \|V_\sigma\|_p \\ q = 2p \\ q' = \frac{2p'}{p'+1} \end{cases}$$

De este modo obtenemos

$$\begin{aligned} \|V_\sigma\|_p \|u\|_{2p'}^2 &\leq \frac{\left(\varepsilon \|u'\|_2^{1-\frac{1}{p'}}\right)^{2p}}{2p} + \frac{\left(\frac{C}{\varepsilon} \|u\|_2^{1+\frac{1}{p'}} \|V_\sigma\|_p\right)^{\frac{2p'}{p'+1}}}{\frac{2p'}{p'+1}} = \\ &= \frac{\varepsilon^{2p}}{2p} \|u'\|_2^2 + \frac{p'+1}{2p'} \left(\frac{C}{\varepsilon}\right)^{\frac{2p'}{p'+1}} \|V_\sigma\|_p^{\frac{2p'}{p'+1}} \|u\|_2^2 \end{aligned}$$

De donde tenemos que para todo $p > 1$ y $\varepsilon > 0$

$$\left| \int V_\sigma u^2 dx \right| \leq \frac{\varepsilon^{2p}}{2p} \|u'\|_2^2 + \frac{p'+1}{2p'} \left(\frac{C}{\varepsilon}\right)^{\frac{2p'}{p'+1}} \|V_\sigma\|_p^{\frac{2p'}{p'+1}} \|u\|_2^2$$

En el caso particular que $p = p' = 2$ nos queda

$$\left| \int V_\sigma u^2 dx \right| \leq \frac{\varepsilon^4}{4} \|u'\|_2^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{C}{\varepsilon}\right)^{\frac{4}{3}} \|V_\sigma\|_2^{\frac{4}{3}} \|u\|_2^2$$

■

Ahora sí tenemos los resultados necesarios para obtener una estimación por debajo del primer autovalor de L_1^σ vía una acotación inferior del cociente (B.13).

Proposición B.4.1 *Para todo $\eta > 0$ existe $\sigma_0(\eta) > 0$ tal que si $0 < \sigma < \sigma_0$ entonces*

$$\mathcal{R}[u] \geq -\eta$$

Por lo tanto, al ser $\lambda_1^\sigma < 0$ tenemos que

$$\lambda_1^\sigma \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0^+} 0$$

Demostración: Con los resultados anteriores podemos estimar por debajo a $\mathcal{R}[u]$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[u] &= \frac{\int |u'|^2 dx - (4\pi^2 + 2\sigma(E + 4\pi^2)) \int u^2 dx + (2\sigma + 1) \int V_\sigma u^2 dx}{\int u^2 dx} \geq \\ &\geq \frac{\|u'\|_2^2 - (4\pi^2 + 2\sigma(E + 4\pi^2)) \|u\|_2^2 - (2\sigma + 1) \left| \int V_\sigma u^2 dx \right|}{\|u\|_2^2} \geq \\ &\geq \frac{\|u'\|_2^2 - (4\pi^2 + 2\sigma(E + 4\pi^2)) \|u\|_2^2 - (2\sigma + 1) \left[\frac{\varepsilon^4}{4} \|u'\|_2^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{C}{\varepsilon}\right)^{\frac{4}{3}} \|V_\sigma\|_2^{\frac{4}{3}} \|u\|_2^2 \right]}{\|u\|_2^2} = \\ &= \left[1 - (2\sigma + 1) \frac{\varepsilon^4}{4} \right] \frac{\|u'\|_2^2}{\|u\|_2^2} - \left[4\pi^2 + 2\sigma(E + 4\pi^2) \right] - \frac{3}{4} (2\sigma + 1) \left(\frac{C}{\varepsilon}\right)^{\frac{4}{3}} \|V_\sigma\|_2^{\frac{4}{3}} \geq \\ &\geq \left[1 - (2\sigma + 1) \frac{\varepsilon^4}{4} \right] 4\pi^2 - \left[4\pi^2 + 2\sigma(E + 4\pi^2) \right] - \frac{3}{4} (2\sigma + 1) \left(\frac{C}{\varepsilon}\right)^{\frac{4}{3}} \|V_\sigma\|_2^{\frac{4}{3}} = \\ &= -(2\sigma + 1) \varepsilon^4 \pi^2 - 2\sigma(E + 4\pi^2) - \frac{3}{4} (2\sigma + 1) \left(\frac{C}{\varepsilon}\right)^{\frac{4}{3}} \|V_\sigma\|_2^{\frac{4}{3}} = \\ &= -\left[\varepsilon^4 \pi^2 \right] - \left[2\sigma(\varepsilon^4 \pi^2 + E + 4\pi^2) \right] - \left[\frac{3}{4} (2\sigma + 1) \left(\frac{C}{\varepsilon}\right)^{\frac{4}{3}} \|V_\sigma\|_2^{\frac{4}{3}} \right] \end{aligned}$$

Queremos acotar cada término por separado

- $\varepsilon^4 \pi^2 \leq \eta \Leftrightarrow 0 < \varepsilon \leq \frac{\eta^{1/4}}{\sqrt{\pi}}$ por lo tanto si tomamos $\varepsilon = \frac{\eta^{1/4}}{\sqrt{\pi}}$ tenemos que el primer término $\varepsilon^4 \pi^2$ es exactamente igual a η .
- Para la cota del segundo término usamos que ya elegimos $\eta = \varepsilon^4 \pi^2$.

$$2\sigma(\varepsilon^4 \pi^2 + E + 4\pi^2) = 2\sigma(\eta + E + 4\pi^2)$$

Pedimos que la última expresión sea menor que η y así tenemos que

$$2\sigma(\eta + E + 4\pi^2) \leq \eta \Leftrightarrow \sigma \leq \frac{\eta}{2(\eta + E + 4\pi^2)}$$

Definimos

$$\sigma_1(\eta) = \frac{\eta}{2(\eta + E + 4\pi^2)}$$

Por lo tanto, si $\sigma \leq \sigma_1(\eta)$ y $\varepsilon = \frac{\eta^{1/4}}{\sqrt{\pi}}$ entonces el segundo término está acotado por η .

- Para el tercer término volvemos a usar la elección $\eta = \varepsilon^4 \pi^2$ y además la cota del segundo término $\sigma \leq \sigma_1(\eta)$

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}(2\sigma + 1) \left(\frac{C}{\varepsilon}\right)^{\frac{4}{3}} \|V_\sigma\|_2^{\frac{4}{3}} &\leq \frac{3}{4} \left(\frac{\eta}{\eta + E + 4\pi^2} + 1\right) \left(C \frac{\sqrt{\pi}}{\eta^{1/4}}\right)^{\frac{4}{3}} \|V_\sigma\|_2^{\frac{4}{3}} = \\ &= \frac{3}{4} C^{\frac{4}{3}} \pi^{\frac{2}{3}} \frac{2\eta + E + 4\pi^2}{\eta^{1/3}(\eta + E + 4\pi^2)} \|V_\sigma\|_2^{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

Ahora sí podemos pedir que esta expresión sea menor o igual que η , de modo que

$$\frac{3}{4} C^{\frac{4}{3}} \pi^{\frac{2}{3}} \frac{2\eta + E + 4\pi^2}{\eta^{1/3}(\eta + E + 4\pi^2)} \|V_\sigma\|_2^{\frac{4}{3}} \leq \eta$$

entonces

$$\|V_\sigma\|_2 \leq \left(\frac{4}{3} \frac{\eta^{4/3}(\eta + E + 4\pi^2)}{2\eta + E + 4\pi^2} \frac{1}{C^{\frac{4}{3}} \pi^{\frac{2}{3}}} \right)^{\frac{3}{4}} = \frac{\eta}{C \sqrt{\pi}} \left(\frac{4}{3} \frac{\eta + E + 4\pi^2}{2\eta + E + 4\pi^2} \right)^{\frac{3}{4}}$$

Ahora, debido a la proposición (B.1.1) ($\|V_\sigma\|_2 \rightarrow 0$ cuando $\sigma \rightarrow 0$), sabemos que dado $\eta > 0$ existe $\sigma_2(\eta) > 0$ tal que para todo $0 < \sigma \leq \sigma_2(\eta)$ vale la desigualdad anterior.

En resumen, si $0 < \sigma \leq \sigma_0(\eta) = \min\{\sigma_1(\eta), \sigma_2(\eta)\}$ tenemos que

$$\mathcal{R}[u] \geq -3\eta$$

y de aquí podemos afirmar que

$$-3\eta \leq \lambda_1^\sigma < 0$$

■

Proposición B.4.2 Si v_σ es un autofunción normalizada del primer autovalor $\lambda_1^\sigma < 0$ del operador L_+^σ , es decir que $\|v_\sigma\|_2 = 1$ y $L_+^\sigma v_\sigma = \lambda_1^\sigma v_\sigma$, entonces se verifican las siguientes convergencias en L^2

$$\begin{aligned} v_\sigma &\rightarrow \sqrt{2}\text{sen}(2\pi x) \\ \frac{R_\sigma}{\|R_\sigma\|} &\rightarrow \sqrt{2}\text{sen}(2\pi x) \end{aligned}$$

cuando $\sigma \rightarrow 0$. Por lo tanto

$$\left\| \frac{R_\sigma}{\|R_\sigma\|} - v_\sigma \right\|_2 \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} 0$$

Demostración: Volvamos a ver a los operadores L_-^σ y L_+^σ como perturbaciones del operador L_0 (ver B.11 y B.12) y además recordemos que por la proposición (B.1.1) sabemos que la perturbación $V_\sigma \rightarrow 0$. Como además el primer autovalor tanto de L_0 como de L_-^σ y L_+^σ es simple, entonces podemos aplicar lo desarrollado en ([14]). La idea es que al ser simple el primer autovalor, tanto del operador L_0 sin perturbar como de los operadores perturbados L_-^σ y L_+^σ , entonces el autoespacio asociado a cada uno de ellos es unidimensional, pero aún más hay convergencia de los autoespacios correspondientes al primer autovalor, tanto de L_-^σ como de L_+^σ , hacia el autoespacio del primer autovalor $\lambda_0 = 0$ de L_0 . Por lo tanto hay convergencia de las autofunciones normalizadas de L_-^σ y L_+^σ hacia $R_0 = \sqrt{2}\text{sen}(2\pi x)$.

Para fundamentar esto último usamos la notación empleada en ([14]) y abordamos sólo el caso L_-^σ porque L_+^σ es similar. Llamamos

$$R(\zeta) = (L_0 - \zeta)^{-1}$$

al operador resolvente de L_0 en $\zeta \in \mathbb{C}$ (los autovalores de L_0 son singularidades de R) y

$$R(\zeta, \sigma) = (L_-^\sigma - \zeta)^{-1}$$

al operador resolvente de L_-^σ en ζ . El operador de proyección al autoespacio asociado al primer autovalor de L_0 es

$$P = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(\zeta) d\zeta$$

donde Γ es una curva simple y cerrada en \mathbb{C} que encierra y aísla a una singularidad de R , por ejemplo $\lambda_0 = 0$. De modo absolutamente análogo definimos el operador de proyección al autoespacio asociado al primer autovalor de L_-^σ como

$$P_\sigma = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(\zeta, \sigma) d\zeta$$

Queremos probar que

$$\|P_\sigma - P\|_{B(L^2)} \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} 0$$

para lo que alcanzará con probar que

$$\|R(\zeta, \sigma) - R(\zeta)\|_{B(L^2)} \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} 0 \quad (\text{B.16})$$

Para probar esto consideremos

$$V_\sigma = L_-^\sigma - L_0$$

entonces para todo $\zeta \in \Gamma$

$$L_-^\sigma - \zeta = [1 + V_\sigma](L_0 - \zeta)$$

invirtiendo el operador, tenemos

$$R(\zeta, \sigma) = R(\zeta) [1 + V_\sigma]^{-1} \quad (\text{B.17})$$

Por la proposición (B.1.1) sabemos que $\|V_\sigma\|_2 \rightarrow 0$, por lo tanto para σ suficientemente chico tenemos que

$$\|V_\sigma\|_2 < 1$$

por lo tanto podemos expandir el segundo miembro de (B.17) en serie de Neumann

$$R(\zeta, \sigma) = R(\zeta) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n V_\sigma^n$$

luego

$$R(\zeta, \sigma) - R(\zeta) = -R(\zeta) V_\sigma \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n V_\sigma^n \quad (\text{B.18})$$

Como el operador resolvente está definido de la siguiente manera

$$R(\zeta) : L^2[0, 1] \rightarrow H^1[0, 1] \hookrightarrow L^\infty[0, 1]$$

podemos acotar la norma del primer factor en (B.18) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \|V_\sigma R(\zeta)\|_{B(L^2)}^2 &= \sup_{\|u\|_2=1} \int_0^1 V_\sigma^2 (R(\zeta)u)^2 dx \\ &\leq \|V_\sigma\|_2^2 \sup_{\|u\|_2=1} \|R(\zeta)u\|_\infty^2 \\ &\leq \|V_\sigma\|_2^2 \|R(\zeta)\|_{B(L^2, H^1)}^2 \end{aligned}$$

por lo tanto (B.18) en norma es

$$\|R(\zeta, \sigma) - R(\zeta)\|_{B(L^2)} \leq C \|V_\sigma\|_2 \|R(\zeta)\|_{B(L^2, H^1)} \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} 0$$

de donde probamos (B.16)

Integrando $\|R(\zeta, \sigma) - R(\zeta)\|$ sobre una curva simple cerrada $\Gamma \subset \mathbb{C}$ que rodee a $\lambda_0 = 0$ y a ningún otro autovalor de L_0 , y que además también haga lo mismo para el primer autovalor de L_-^σ (cosa que podemos asegurar porque $\lambda_1^\sigma \rightarrow \lambda_0$) y debido a que $R(\zeta)$ y $R(\zeta, \sigma)$ son uniformemente acotados en Γ , entonces tenemos la convergencia que queríamos

$$\|P_\sigma - P\|_{B(L^2)} \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} 0$$

Desde aquí podemos asegurar la convergencia de las autofunciones normalizadas por que el rango de cada uno de los proyectores $P_{\lambda_1}(\sigma)$ y P_{λ_1} es el autoespacio asociado al primer autovalor de L_0 y de L_-^σ , respectivamente.

Para el caso del operador L_+^σ los cálculos son similares, debemos usar (B.12) donde ahora la expresión de la perturbación tiene dos términos: uno es exactamente V_σ y el otro es una $O(\sigma)$, de modo que estamos en una situación análoga a la anterior. ■

Lo anterior dice que a medida que σ se achica la normalización del solitón se acerca a la correspondiente autofunción negativa, es decir que el R_σ cada vez está más cerca del eje del cono de negatividad. Esto sólo no alcanza para probar lo que nosotros queríamos: para σ suficientemente pequeño se tiene que $\langle L_+^\sigma u, u \rangle > 0$ para $u \in R_\sigma^\perp$, $u \neq 0$. Para esto necesitamos probar que la “apertura” del cono de negatividad se mantiene estrictamente menor que 90° a medida que $\sigma \rightarrow 0$, porque de este modo, dado que R_σ se acerca al eje del cono, el hiperplano R_σ^\perp estará totalmente fuera de él, salvo el origen, para σ suficientemente pequeño.

Proposición B.4.3 *Sea v_σ como antes y sea u_σ una función normalizada cualquiera en la cáscara del cono de negatividad de L_+^σ , es decir que $\|u_\sigma\|_2 = 1$ y $\langle L_+^\sigma u_\sigma, u_\sigma \rangle = 0$ (notar que no decimos que u_σ está en el núcleo de L_+^σ), entonces*

$$\langle u_\sigma, v_\sigma \rangle \rightarrow 0 \quad \text{ó} \quad \langle u_\sigma, v_\sigma \rangle \rightarrow \frac{1}{2}$$

Dicho de otro modo, el “ángulo” que forman u_σ y v_σ se acerca a 0° o a 60° a medida que $\sigma \rightarrow 0$.

Demostración: Para esto calculamos lo siguiente, usando propiedades anteriores y el hecho que L_+^σ es autoadjunto.

$$\begin{aligned} \lambda_1^\sigma \langle v_\sigma, u_\sigma \rangle &= \langle L_+^\sigma v_\sigma, u_\sigma \rangle = \langle L_+^\sigma (v_\sigma - u_\sigma) + L_+^\sigma u_\sigma, (u_\sigma - v_\sigma) + v_\sigma \rangle = \\ &= \langle L_+^\sigma (v_\sigma - u_\sigma), u_\sigma - v_\sigma \rangle + \langle L_+^\sigma (v_\sigma - u_\sigma), v_\sigma \rangle + \underbrace{\langle L_+^\sigma u_\sigma, u_\sigma \rangle}_{=0} = \\ &= -\langle L_+^\sigma (v_\sigma - u_\sigma), v_\sigma - u_\sigma \rangle + \langle L_+^\sigma v_\sigma, (v_\sigma - u_\sigma) \rangle = \\ &= -\langle L_+^\sigma (v_\sigma - u_\sigma), v_\sigma - u_\sigma \rangle + \lambda_1^\sigma - \langle L_+^\sigma v_\sigma, u_\sigma \rangle = \\ &= -\langle L_+^\sigma (v_\sigma - u_\sigma), v_\sigma - u_\sigma \rangle + \lambda_1^\sigma - \lambda_1^\sigma \langle v_\sigma, u_\sigma \rangle \end{aligned}$$

Comparando el primer y el último miembro tenemos que

$$2\lambda_1^\sigma \langle v_\sigma, u_\sigma \rangle = -\langle L_+^\sigma (v_\sigma - u_\sigma), v_\sigma - u_\sigma \rangle + \lambda_1^\sigma$$

de donde

$$\langle v_\sigma, u_\sigma \rangle = \frac{\langle L_+^\sigma (v_\sigma - u_\sigma), v_\sigma - u_\sigma \rangle}{-2\lambda_1^\sigma} + \frac{1}{2}$$

Como sabemos que $\lambda_1^\sigma \rightarrow 0$ cuando $\sigma \rightarrow 0$, entonces

$$\langle L_+^\sigma (v_\sigma - u_\sigma), v_\sigma - u_\sigma \rangle \rightarrow 0$$

por ser $\langle v_\sigma, u_\sigma \rangle$ el coseno del ángulo formado por v_σ y por u_σ , es una cantidad acotada. Si $\langle L_+^\sigma(v_\sigma - u_\sigma), v_\sigma - u_\sigma \rangle \rightarrow 0$ se pueden dar dos posibles situaciones: o bien $v_\sigma - u_\sigma \rightarrow 0$ (es decir que el cono se va cerrando) o bien $v_\sigma - u_\sigma$ tienden a un elemento del mismo cono, lo que obliga que el ángulo formado por ellos dos sea de 60° (de esta manera u_σ , v_σ y $v_\sigma - u_\sigma$ son los tres lados de un triángulo equilátero). ■

Apéndice C

Demostraciones y propiedades en el caso discreto

C.1. Demostración lema de existencia de solitones

Aquí desarrollamos algunos de los cálculos del lema (4.3.1). En la demostración de la existencia aparecen las propiedades esperadas enunciadas en el lema.

C.1.1. Existencia

Para la existencia debemos usar solamente el hecho que satisface la recurrencia (4.44). Como esta recurrencia es a dos valores para atrás podemos usar un método de shooting para intentar acertar justo en la solución que queremos. Para esto en lo que sigue dejaremos que la ecuación de recurrencia evolucione lo que necesita, es decir que dejaremos que la iteración se escape del intervalo $[0, 1]$ hacia la derecha (eventualmente hasta ∞).

Desde la expresión en recurrencia (4.44) podemos escribir la pendiente de la solución en el intervalo $[x_j, x_{j+1}]$ de la forma

$$\frac{r_{j+1} - r_j}{h} = hr_j(E - r_j^{2\sigma}) + \frac{r_j - r_{j-1}}{h}$$

desde donde es evidente que la pendiente de la solución discreta en el intervalo $[x_j, x_{j+1}]$ aumenta respecto a la del intervalo $[x_{j-1}, x_j]$ en una cantidad $hr_j(E - r_j^{2\sigma})$, es decir que si $r_j^{2\sigma} < E$ la pendiente en el intervalo $[x_j, x_{j+1}]$ será mayor a la que tenía en el $[x_{j-1}, x_j]$, y si $r_j^{2\sigma} > E$ entonces la pendiente en el intervalo $[x_j, x_{j+1}]$ puede seguir siendo positiva pero seguro que será menor que la que tenía en el $[x_{j-1}, x_j]$. Si los r_j siempre crecieran con una tasa mayor o igual que la del paso anterior, necesariamente tenderían a ∞ , esto significa que para algún j necesariamente se verifica que $E - r_j^{2\sigma} < 0$ porque la altura E está fija. Por lo tanto desde el nodo x_j la tasa de crecimiento de las pendientes comenzará a

disminuir, produciéndose en la poligonal que representa a la solución discreta un cambio de concavidad (la variación de la tasa de crecimiento pasa de ser positiva a negativa).

Ahora fijemos h y demos un valor $r_1 > 0$ para el nodo $x_1 = h$. En lo que sigue N es el primer valor del subíndice para el que $r_{N+1} \leq r_N$ (es decir que es el primer intervalo $[x_j, x_{j+1}]$ en el que la poligonal tiene pendiente negativa o cero). Cuanto más pequeño es el valor de r_1 el primer valor N será cada vez más grande, porque para que la pendiente cambie de signo o se anule necesitamos que $r_N^{2\sigma} \geq E$. Análogamente, si $r_1 > E^{1/2\sigma}$ entonces $N = 1$ (en un paso la pendiente se hace negativa). Tenemos una representación de esto en la figura (C.1).

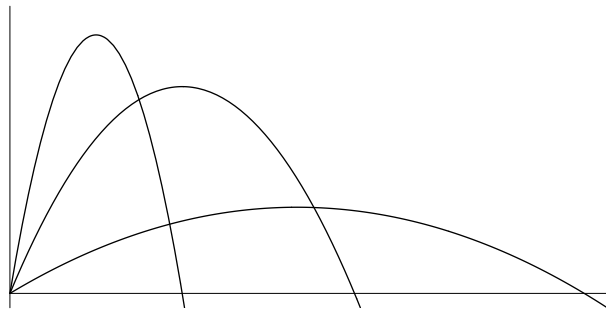


Figura C.1

En resumen, si fijamos $n \geq 2$ y $h = \frac{1}{4n}$, entonces

$$\begin{aligned} \text{si } r_1 \rightarrow 0 &\Rightarrow N \rightarrow +\infty \quad (\text{es decir que } x_N = Nh > \frac{1}{4}) \\ \text{si } r_1 > \left(E + \frac{1}{h^2}\right)^{1/2\sigma} &\Rightarrow N = 1 \quad (\text{es decir que } x_N = x_1 = h < \frac{1}{4}) \end{aligned}$$

por lo tanto, para cada $n \geq 2$ y $h = \frac{1}{4n}$ existe un intervalo de las pendientes admisibles

$$I(h) = [\alpha_{\text{mín}}(h), \alpha_{\text{máx}}(h)] \subset \left(0, \arctan\left(\frac{1}{h}\left(E + \frac{1}{h^2}\right)^{1/2\sigma}\right)\right] \quad (\text{C.1})$$

de modo que si $\frac{r_1}{h} \in I(h)$ entonces $x_N = \frac{1}{4}$. El valor $\alpha_{\text{mín}}(h)$ lo determinamos como el primer valor positivo para el que, si comenzamos la recurrencia con el valor $r_1 = h\alpha_{\text{mín}}$, entonces los valores de los r_j irán creciendo hasta el nodo $x_N = \frac{1}{4}$, y $r_{N+1} = r_N$ (para cualquier otro valor $\alpha < \alpha_{\text{mín}}$ sucederá que $r_{N+1} > r_N$). Análogamente determinamos el valor $\alpha_{\text{máx}}(h)$ como el primer valor para el que, si comenzamos con $r_1 = h\alpha_{\text{máx}}$, entonces los r_j crecerán hasta el nodo x_{N-1} y $r_{N-1} = r_N$ (para cualquier otro valor $\alpha > \alpha_{\text{máx}}$ sucederá que $r_{N-1} > r_N$). Dicho en otras palabras, el intervalo $I(h)$ nos da el rango de valores de las pendientes iniciales que nos garantiza que la iteración que comience con un valor de pendiente en ese rango alcanzará su máximo en el nodo $x_N = \frac{1}{4}$, y que vale menor o igual en los nodos x_{N-1} y x_{N+1} .

Queremos probar que además existe en $I(h)$ un valor $\frac{r^h}{h}$, para el que la correspondiente poligonal tiene las simetrías deseadas, es decir que no sólo alcance su máximo en $x_N = \frac{1}{4}$, sino que además $r_{N-1}^h = r_{N+1}^h$ (y en consecuencia $r_{2N} = 0$ y también tendrá la propiedad de reflejo impar en los nodos x_{2N+1}, \dots, x_{4N}). A esta n-upla la llamaremos el solitón R_h .

Fijamos h y sólo por lo que sigue nombraremos con r^{\min} y r^{\max} a los vectores que se obtienen con los valores en el primer nodo $r_1^{\min} = h \tan(\alpha_{\min})$ y $r_1^{\max} = h \tan(\alpha_{\max})$ respectivamente. Por la definición sabemos que $r_{N-1}^{\min} < r_N^{\min} = r_{N+1}^{\min}$ y que $r_{N-1}^{\max} = r_N^{\max} > r_{N+1}^{\max}$. Pero además podemos asegurar que

$$r_{N-1}^{\min} < r_N^{\min} < r_{N-1}^{\max} \quad (\text{C.2})$$

donde la última desigualdad se debe a que el valor máximo de la sucesión crece a medida que crece la pendiente inicial. Ahora, no sabemos si el valor r_{N+1}^{\max} está por arriba, por abajo o coincide con el valor r_{N+1}^{\min} .

Definimos las funciones

$$R_{N-1}(\alpha) = r_{N-1}$$

$$R_{N+1}(\alpha) = r_{N+1}$$

están bien definidas y son continuas en el intervalo $I(h)$. Además es fácil ver que $R_{N-1}(\alpha)$ es una función monótona creciente en $I(h)$. A primera vista no podemos garantizar la monotonía de $R_{N+1}(\alpha)$, pero sí vale que

$$r_{N-1}^{\min} < R_{N+1}(\alpha_{\min}) = r_{N+1}^{\min} = r_N^{\min} < r_{N-1}^{\max}$$

debido a (C.2). Además por la misma definición de α_{\max} , tenemos que

$$R_{N+1}(\alpha_{\max}) = r_{N+1}^{\max} < r_N^{\max} = r_{N-1}^{\max} = R_{N-1}(\alpha_{\max})$$

es decir que las curvas continuas $R_{N+1}(\alpha)$ y $R_{N-1}(\alpha)$ necesariamente se cruzan al menos una vez en el intervalo $I(h) = [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$. Representamos esquemáticamente esto en la figura (C.2).

El valor α^* correspondiente al punto de corte hace que si la recursión toma el valor $r_1 = h \tan(\alpha^*)$ en el nodo x_1 entonces $r_{N-1} = r_{N+1}$, que es lo que buscábamos. Al vector solución de la recurrencia que tenga el valor $r_1 = h \tan(\alpha^*)$ en el primer nodo lo llamaremos R_h o solitón discreto con paso h , que obviamente satisface la simetría entre los nodos x_{N-1} y x_{N+1} también tendrá todas las simetrías que le pedíamos (por ejemplo $r_{2N}^h = 0$ y los $r_j^h \leq 0$ para $2N + 1 \leq j \leq 4N$).

C.1.2. Unicidad

El argumento de la prueba de existencia no garantiza la unicidad, porque en el gráfico anterior podría haber varios puntos de corte. Una manera de probar la unicidad es por la simetría que debe tener el vector

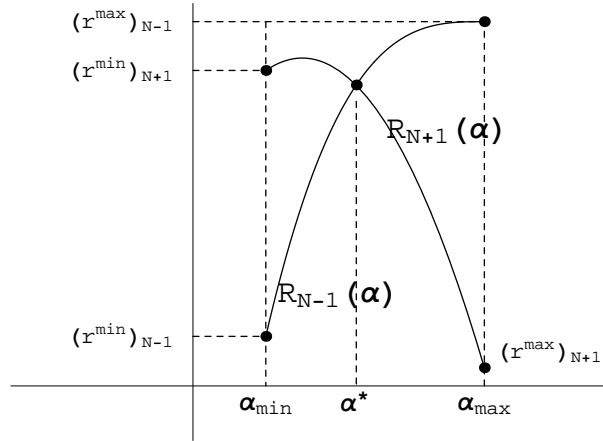


Figura C.2

R_h , pues al ser $x_0 = 0$, $x_{N-1} = x_{N+1}$ esto obliga a que $x_{2N} = 0$. Notemos que el valor de x_{2N} es monótono decreciente respecto al valor de la pendiente α , por lo tanto si hubiera dos valores de α que hacen que $x_{N-1} = x_{N+1}$ necesariamente para esos dos valores de α sucede que $x_{2N} = 0$, luego $x_{2N}(\alpha)$ no sería monótona.

C.2. Condición de ortogonalidad

La condición de ortogonalidad (4.49) obtenida a partir de la minimización respecto a los cambios de fases la probamos haciendo la derivada variacional de cada término.

Al derivar el primer término tenemos:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{d\varepsilon} \left\langle A_h (\phi_h(t) e^{i(\gamma+\varepsilon)} - R_h), \phi_h(t) e^{i(\gamma+\varepsilon)} - R_h \right\rangle_h \Big|_{\varepsilon=0} \\
 &= - \frac{d}{d\varepsilon} \left[e^{i(\gamma+\varepsilon)} \langle A_h \phi_h(t), R_h \rangle_h + e^{-i(\gamma+\varepsilon)} \langle A_h R_h, \phi_h(t) \rangle_h \right] \Big|_{\varepsilon=0} = \\
 &= -ie^{i\gamma} \langle A_h \phi_h(t), R_h \rangle_h + ie^{-i\gamma} \langle A_h R_h, \phi_h(t) \rangle_h = \\
 &= -ie^{i\gamma} \langle A_h \phi_h(t), R_h \rangle_h + ie^{-i\gamma} \overline{\langle A_h \phi_h(t), R_h \rangle_h} = \\
 &= -i \left(2i \operatorname{Im} \langle A_h (e^{i\gamma} \phi_h(t)), R_h \rangle_h \right) = \\
 &= 2 \operatorname{Im} \langle A_h (R_h + u(x, t) + iv(x, t)), R_h \rangle_h = \\
 &= 2 \langle A_h v(x, t), R_h \rangle_h = 2 \langle A_h R_h, v(x, t) \rangle_h = 2 \langle -ER_h + D(R_h)R_h, v \rangle_h
 \end{aligned}$$

así obtuvimos

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left\langle A_h (\phi_h(t) e^{i(\gamma+\varepsilon)} - R_h), \phi_h(t) e^{i(\gamma+\varepsilon)} \right\rangle_h \Big|_{\varepsilon=0} = -2E \langle R_h, v \rangle_h + 2 \langle D(R_h)R_h, v \rangle_h$$

La derivada del segundo término es:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{d\varepsilon} \left\langle \phi_h(t) e^{i(\gamma+\varepsilon)} - R_h, \phi_h(t) e^{i(\gamma+\varepsilon)} - R_h \right\rangle_h \Big|_{\varepsilon=0} = \\
 &= \frac{d}{d\varepsilon} \left[\langle \phi_h(t) e^{i(\gamma+\varepsilon)}, \phi_h(t) e^{i(\gamma+\varepsilon)} \rangle_h + \langle R_h, R_h \rangle_h - \left(\langle \phi_h(t) e^{i(\gamma+\varepsilon)}, R_h \rangle_h + \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left. \langle R_h, \phi_h(t) e^{i(\gamma+\epsilon)} \rangle_h \right|_{\epsilon=0} = \\
 & = - \left(i e^{i\gamma} \langle \phi_h(t), R_h \rangle_h - i e^{-i\gamma} \langle R_h, \phi_h(t) \rangle_h \right) = \\
 & = -i \left(e^{i\gamma} \langle \phi_h(t), R_h \rangle_h - e^{-i\gamma} \overline{\langle \phi_h(t), R_h \rangle_h} \right) = \\
 & = -i \left(2i \operatorname{Im} \langle e^{i\gamma} \phi_h(t), R_h \rangle_h \right) = 2 \operatorname{Im} \langle R_h + u(x, t) + iv(x, t), R_h \rangle_h = \\
 & = 2 \langle v, R_h \rangle_h
 \end{aligned}$$

de este modo tenemos

$$\frac{d}{d\epsilon} \left. \langle \phi_h(t) e^{i(\gamma+\epsilon)} - R_h, \phi_h(t) e^{i(\gamma+\epsilon)} - R_h \rangle_h \right|_{\epsilon=0} = 2 \langle R_h, v \rangle_h$$

Para tener la derivada variacional de (4.48) sumamos las dos fórmulas anteriores, multiplicando por E a la segunda igualdad, y lo igualamos a cero:

$$0 = -2E \langle R_h, v \rangle_h + 2 \langle D(R_h)R_h, v \rangle_h + 2E \langle R_h, v \rangle_h = 2 \langle D(R_h)R_h, v \rangle_h$$

Así, la condición para que haya un $\gamma \in (0, 2\pi]$ que minimice a (4.48) es:

$$\langle D(R_h)R_h, v_h \rangle_h = 0$$

C.3. Cota de la norma de las poligonales

Aquí demostraremos el lema (4.3.2). Para estimar (4.52), primero probaremos las siguientes tres identidades

- Como

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{n-1} |v_{i+1} - v_i|^2 & = \sum_{i=0}^{n-1} (v_{i+1} - v_i) \overline{(v_{i+1} - v_i)} = \\
 & = \sum_{i=0}^{n-1} \left(|v_i|^2 - 2\operatorname{Re}(v_i \overline{v_{i+1}}) + |v_{i+1}|^2 \right) = \\
 & = |v_1|^2 + |v_1|^2 - 2\operatorname{Re}(v_1 \overline{v_2}) + |v_2|^2 + |v_2|^2 - 2\operatorname{Re}(v_2 \overline{v_3}) + |v_3|^2 + \dots + |v_{n-1}|^2 = \\
 & = 2 \sum_{i=0}^{n-1} \left(|v_i|^2 - \operatorname{Re}(v_i \overline{v_{i+1}}) \right) = 2 \sum_{i=0}^{n-1} \left(|v_i|^2 - \operatorname{Re}(v_i \overline{v_{i+1}}) \right)
 \end{aligned}$$

Así probamos la identidad

$$\sum_{i=0}^{n-1} h \left(|v_i|^2 - \operatorname{Re}(v_i \overline{v_{i+1}}) \right) = \frac{h^2}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|v_{i+1} - v_i|^2}{h} \tag{C.3}$$

- Usando la igualdad (C.3) podemos dar una expresión para

$$\begin{aligned}
 \langle A_h v_h, v_h \rangle_h & = \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{n-1} (-v_{i-1} + 2v_i - v_{i+1}) \overline{v_i} h = \\
 & = \frac{2}{h} \left(\sum_{i=1}^{n-1} |v_i|^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{Re}(v_i \overline{v_{i+1}}) \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|v_{i+1} - v_i|^2}{h}
 \end{aligned}$$

de este modo tenemos

$$\langle A_h v_h, v_h \rangle_h = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|v_{i+1} - v_i|^2}{h} \quad (\text{C.4})$$

- Podemos relacionar la norma L^2 del derivado de la poligonal $U_h v_h$ con la norma discreta

$$\begin{aligned} \|(U_h v_h)'\|_{L^2}^2 &= \int_0^{1/2} |(U_h v_h)'|^2 dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{ih}^{(i+1)h} \left| \frac{v_{i+1} - v_i}{h} \right|^2 dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{h} |v_{i+1} - v_i|^2 \\ \|(U_h v_h)'\|_{L^2}^2 &= \langle A_h v_h, v_h \rangle_h = |v_h'|_h^2 \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

donde usamos (C.4).

Ahora probamos (4.52):

$$\begin{aligned} \|U_h v_h\|_{H_0^1}^2 &= \|U_h v_h\|_{L^2}^2 + \|(U_h v_h)'\|_{L^2}^2 \stackrel{\text{por (C.5)}}{=} \int_0^{1/2} |U_h v_h|^2 dx + \langle A_h v_h, v_h \rangle_h = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{ih}^{(i+1)h} \left| \frac{v_{i+1} - v_i}{h} (x - ih) + v_i \right|^2 dx + \langle A_h v_h, v_h \rangle_h = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left[h \frac{|v_{i+1} - v_i|^2}{3} + h |v_i|^2 + 2h \operatorname{Re} \left(\frac{(v_{i+1} - v_i) \bar{v}_i}{2} \right) \right] + \langle A_h v_h, v_h \rangle_h = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} h |v_i|^2 + \sum_{i=0}^{n-1} h \left[\frac{|v_{i+1} - v_i|^2}{3} + \operatorname{Re} (v_{i+1} \bar{v}_i) - |v_i|^2 \right] + \langle A_h v_h, v_h \rangle_h = \\ &= \|v_h\|_{1,h}^2 + \sum_{i=0}^{n-1} h \left[\frac{|v_{i+1} - v_i|^2}{3} - (|v_i|^2 - \operatorname{Re} (v_{i+1} \bar{v}_i)) \right] = \\ &\stackrel{\text{por (C.3)}}{=} \|v_h\|_{1,h}^2 + \sum_{i=0}^{n-1} h \left[\frac{|v_{i+1} - v_i|^2}{3} - \frac{h^2}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|v_{i+1} - v_i|^2}{h} \right] = \\ &= \|v_h\|_{1,h}^2 - \frac{h^2}{6} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{h} |v_{i+1} - v_i|^2 \leq \|v_h\|_{1,h}^2 \end{aligned}$$

De este modo tenemos que

$$\|U_h v_h\|_{H_0^1}^2 \leq \|v_h\|_{1,h}^2$$

C.4. Resultados de convergencia

C.4.1. Demostración del lema (4.3.3)

De la ecuación del solitón

$$R'' = ER - R^{2\sigma+1}$$

multiplicando ambos miembros por R' e integrando, tenemos que

$$R'^2 = C + ER^2 - \frac{1}{\sigma+1} R^{2\sigma+2}$$

Como queremos que $R'(1/4) = 0$, si llamamos $A = R(1/4)$ y usando que $R(0) = 0$, entonces

$$R'(0) = \sqrt{C} = A \sqrt{\frac{A^{2\sigma}}{\sigma+1} - E}$$

donde tomamos la rama positiva de la raíz porque queremos que $R(x)$ crezca en el intervalo $(0, 1/4)$. Además desde la ecuación es inmediato que $R''(0) = 0$ y que $R'''(0) = ER'(0) = EA \sqrt{\frac{A^{2\sigma}}{\sigma+1} - E}$.

Así, si evaluamos la expansión de Taylor en $x = h$, tenemos que

$$R(h) = hA \sqrt{\frac{A^{2\sigma}}{\sigma+1} - E} + \frac{h^3}{3!} EA \sqrt{\frac{A^{2\sigma}}{\sigma+1} - E} + O(h^4)$$

C.4.2. Demostración de la proposición (4.3.1)

Queremos probar que la función $U_\beta(x)$ solución del problema (4.55) y el vector $u(\alpha(h, \beta))$ solución de (4.54) difieren en los nodos en un orden h^2 , es decir

$$|u_j(\alpha(h, \beta)) - U_\beta(jh)| = O(h^2)$$

Recordemos que $U_\beta(x)$ es solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} U_\beta'' - EU_\beta + U_\beta^{2\sigma+1} = 0 \\ U_\beta(0) = 0 \\ U_\beta'(0) = \beta \end{cases}$$

Calculamos la consistencia del método evaluando el esquema numérico en los valores de la solución exacta $U_\beta(x)$ en cada uno de los nodos. Como

$$\begin{aligned} U_\beta(x_{j+1}) &= U_\beta(x_j) + hU_\beta'(x_j) + \frac{h^2}{2}U_\beta''(x_j) + \frac{h^3}{3!}U_\beta'''(x_j) + \frac{h^4}{4!}U_\beta^{(iv)}(x_j + \xi_1 h) \\ U_\beta(x_{j-1}) &= U_\beta(x_j) - hU_\beta'(x_j) + \frac{h^2}{2}U_\beta''(x_j) - \frac{h^3}{3!}U_\beta'''(x_j) + \frac{h^4}{4!}U_\beta^{(iv)}(x_j - \xi_2 h) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la evaluación del esquema en $U_\beta(x)$ alrededor del nodo x_j será

$$\begin{aligned} T_j &= \frac{1}{h^2} [U_\beta(x_{j+1}) - 2U_\beta(x_j) + U_\beta(x_{j-1})] - EU_\beta(x_j) + U_\beta^{2\sigma+1}(x_j) \\ &= U_\beta''(x_j) + \frac{2h^2}{4!}U_\beta^{(iv)}(x_j + \xi h) - EU_\beta(x_j) + U_\beta^{2\sigma+1}(x_j) \\ &= \frac{h^2}{12}U_\beta^{(iv)}(x_j + \xi h) = O(h^2) \end{aligned}$$

Para el cálculo del error hacemos la diferencia entre el esquema en la solución exacta $U_\beta(x)$ y en el resultado de la iteración $u(\alpha(h, \beta))$ (la que toma valor inicial $u_1 = h \tan(\alpha(h, \beta))$). Por simplicidad

escribiremos $u_j^{\alpha(h,\beta)}$ en vez de $u_j(\alpha(h,\beta))$. Además notaremos con $e_j^\beta = U_\beta(x_j) - u_j^{\alpha(h,\beta)}$, que a su vez por simplicidad dentro de los cálculos sólo nombraremos con e_j .

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\frac{1}{h^2} [U_\beta(x_{j+1}) - 2U_\beta(x_j) + U_\beta(x_{j-1}))] - EU_\beta(x_j) + U_\beta^{2\sigma+1}(x_j) - T_j \right] - \\ &\quad - \left[\frac{1}{h^2} [u_{j+1}^{\alpha(h,\beta)} - 2u_j^{\alpha(h,\beta)} + u_{j-1}^{\alpha(h,\beta)}] - Eu_j^{\alpha(h,\beta)} + (u_j^{\alpha(h,\beta)})^{2\sigma+1} \right] \\ &= \frac{1}{h^2} (e_{j+1} - 2e_j + e_{j-1}) - Ee_j + \left(U_\beta^{2\sigma+1}(x_j) - (u_j^{\alpha(h,\beta)})^{2\sigma+1} \right) - T_j \\ &= \frac{1}{h^2} (e_{j+1} - 2e_j + e_{j-1}) - Ee_j + (2\sigma + 1) \tilde{S}_j e_j - T_j \end{aligned}$$

donde $\tilde{S}_j = \xi^{2\sigma} \simeq C$, con $\xi \in (U_\beta, u_j)$. Desde esta expresión obtenemos la ecuación en recurrencia que deben satisfacer los errores.

$$e_{j+1} = -e_{j-1} + 2e_j + h^2 [E - (2\sigma + 1)C] e_j + h^2 T_j \quad (\text{C.6})$$

Para dar una estimación del orden del error e_j en cada uno de los nodos debemos estudiar la acumulación de errores que introduce esta recursión, es decir que debemos hacer la estimación de estabilidad del esquema.

Las raíces del polinomio indicial de la parte lineal de la recursión es $\lambda = 1$ como raíz doble, entonces la estabilidad no está garantizada. Una base de soluciones de la recursión

$$e_{j+1} = -e_{j-1} + 2e_j \quad (\text{C.7})$$

viene dada por las sucesiones $(1, 1, 1, \dots)$ y $(1, 2, 3, \dots)$, entonces las magnitudes e_j irán creciendo linealmente con j . Que este crecimiento sea lineal y no exponencial alcanzará para obtener, en nuestro caso, un resultado adecuado. Para desarrollar esto llamaremos

$$q_j = h^2 [E - (2\sigma + 1)C] e_j + h^2 T_j$$

y desde el hecho que $T_j = O(h^2)$, tenemos que

$$|q_j| = O(h^4) + O(h^2)|e_j| \quad (\text{C.8})$$

Si definimos $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $E_j = \begin{pmatrix} e_j \\ e_{j+1} \end{pmatrix}$ y $Q_j = \begin{pmatrix} 0 \\ q_j \end{pmatrix}$ entonces la recursión (C.6) toma la forma

$$E_j = BE_{j-1} + Q_j$$

Si aplicamos iteradamente esta igualdad obtenemos

$$E_j = B^j E_0 + \sum_{k=0}^{j-1} B^k Q_{j-k} \quad (\text{C.9})$$

Lo que observamos acerca del crecimiento lineal de las magnitudes de las soluciones de la recursión (C.7) es equivalente a decir que

$$\|B^k\| \leq Ck \quad (\text{C.10})$$

Para estimar $\|E_j\|$ usamos un argumento inductivo. En primer lugar, usando (4.56) tenemos que el error e_1 es

$$|e_1| = \left| U_\beta(h) - u_1^{\alpha(h,\beta)} \right| = \left| U_\beta(h) - \left(h\beta + \frac{h^3}{3!}\beta \right) \right| = O(h^4)$$

y dado que $e_0 = 0$, entonces

$$\|E_0\| = O(h^4)$$

Estimar $\|E_1\|$ es, en realidad, estimar $|e_2|$. Usando (C.10) y (C.8) para el caso $j = 1$ tenemos que

$$|e_2| \leq \|E_1\| = \|BE_0 + Q_1\| \leq \|BE_0\| + |q_1| = O(h^4) + O(h^2)|e_1| = O(h^4)$$

donde nuevamente usamos que $|e_1| = O(h^4)$.

Por hipótesis inductiva suponemos que para todo $0 \leq k \leq j$ tenemos que $|e_k| = O(h^2)$ (notemos que para e_1 y e_2 teníamos orden cuarto, pero en general sólo podemos esperar uno cuadrático) entonces por (C.9) tenemos

$$|e_{j+1}| \leq \|E_j\| \leq \|B^j E_0\| + \sum_{k=0}^{j-1} \|B^k\| \|Q_{j-k}\|$$

Analicemos por separado cada uno de los términos que aparecen en la cota anterior. Para el primero

$$\|B^j E_0\| \leq \|B^j\| \|E_0\| \leq Cj \|E_0\|$$

Por lo tanto

$$\|B^j E_0\| \leq Cj O(h^4) = O(h^3)$$

Para el segundo, por (C.10) y (C.8) obtenemos

$$\sum_{k=0}^{j-1} \|B^k\| \|Q_{j-k}\| \leq \sum_{k=0}^{j-1} Ck (O(h^4) + O(h^2)|e_{j-k}|)$$

Ahora usamos la hipótesis inductiva, $|e_k| = O(h^2)$ para todo $0 \leq k \leq j$, por lo tanto

$$\sum_{k=0}^{j-1} \|B^k\| \|Q_{j-k}\| \leq \sum_{k=0}^{j-1} Ck (O(h^4) + O(h^6)) = O(h^4) \sum_{k=0}^{j-1} k = O(h^2)$$

De lo anterior se desprende que, para todo j , la estimación del orden del error $|e_j^\beta|$ es

$$|e_j^\beta| = \left| U_\beta(jh) - u_j^{\alpha(h,\beta)} \right| = O(h^2) \quad (\text{C.11})$$

Corolario C.4.1 Si β_h^* es la pendiente correspondiente a α_h^* dada en (4.57) y β_0 es la pendiente correspondiente al solitón continuo $U_{\beta_0}(x) = R(x)$, entonces

$$\beta_h^* \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} \beta_0 \quad (\text{C.12})$$

Demostración: Por la proposición tenemos que la solución $U_{\beta_h^*}(x)$ difiere de la solución discreta $u_j(\alpha_h^*)$ un orden h^2 en los nodos. En particular, como $u_{2N}(\alpha_h^*) = 0$,

$$|U_{\beta_h^*}(1/2)| = O(h^2)$$

por lo tanto $U_{\beta_h^*}(1/2) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

Si $\beta_h^* \not\rightarrow \beta_0$, entonces tendríamos dos soluciones positivas distintas del problema con dato de contorno nulo en $x = 0$ y $x = \frac{1}{2}$, lo que no puede pasar. Luego las pendientes β_h^* se acercan a la pendiente β_0 del solitón continuo. ■

C.4.3. Demostración de la proposición (4.3.2)

Nuestro objetivo es ver que

$$|R_h - E_h R|_h = \sum_{j=1}^{2N-1} h |u_j(\alpha_h^*) - R(jh)| = O(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0$$

Alcanzará con probar que

$$|e_1^h| = |u_1(\alpha_h^*) - R(h)| = O(h^2)$$

porque de esto se deduce, de igual forma que en (C.4.2), que para todo j vale

$$|e_j^h| = |u_j(\alpha_h^*) - R(jh)| = O(h)$$

Veamos esto:

$$\begin{aligned} |u_1(\alpha_h^*) - R(h)| &= |u_1(\alpha_h^*) - U_{\beta_h^*}(h) + U_{\beta_h^*}(h) - R(h)| \\ &\leq |u_1(\alpha_h^*) - U_{\beta_h^*}(h)| + |U_{\beta_h^*}(h) - R(h)| \end{aligned}$$

El término $|u_1(\alpha_h^*) - U_{\beta_h^*}(h)| = O(h^2)$ por lo probado en (C.11).

Para ver que el segundo término $|U_{\beta_h^*}(h) - R(h)| = O(h^2)$ necesitaremos algunos resultados previos. En primer lugar notemos que

$$\begin{aligned} |U_{\beta_h^*}(h) - R(h)| &= \left| \beta_h^* h + \frac{1}{6} E \beta_h^* h^3 + \dots - \beta_0 h - \frac{1}{6} E \beta_0 h^3 - \dots \right| \\ &= h |\beta_h^* - \beta_0| + O(h^3) \end{aligned}$$

por lo tanto alcanza con probar que

$$|\beta_h^* - \beta_0| = O(h^\gamma) \quad \text{para algún } \gamma \geq 1$$

En primer lugar recordemos que la ecuación (4.55) se la puede reescribir como un sistema no lineal de primer orden con el cambio de variable $V = U'$

$$\begin{cases} U' = V \\ V' = (E - U^{2\sigma})U \end{cases} \quad \text{con dato inicial } (U(0), V(0)) = (0, \beta) \quad (\text{C.13a})$$

del que tenemos resultados de continuidad y de diferenciabilidad respecto a los parámetros iniciales (ver [21] o [9]), en particular respecto a β .

Al segundo miembro de (C.13a) lo nombraremos con

$$F(x, y) = (y, x(E - x^{2\sigma}))$$

y por lo tanto su matriz jacobiana es

$$D(F)(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ E - (1 + 2\sigma)x^{2\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.14})$$

Lema C.4.1

(Continuidad respecto a β)

Si $\phi(x, \beta)$ es la solución del sistema (C.13a) con pendiente inicial β , y K es la constante Lipschitz del segundo miembro entonces para todo $x \in [0, 1]$ y para dos valores cualesquiera de β tenemos que

$$|\phi(x, \beta_1) - \phi(x, \beta_2)| \leq e^{Kx} |\beta_1 - \beta_2|$$

En particular si $x = \frac{1}{2}$ tenemos que

$$\left| \phi\left(\frac{1}{2}, \beta_1\right) - \phi\left(\frac{1}{2}, \beta_2\right) \right| \leq e^{\frac{K}{2}} |\beta_1 - \beta_2|$$

Demostración:. Ver [21] o [9]. ■

Este resultado es insuficiente para lo que nosotros queremos porque sólo nos da un control inferior de la diferencia $|\beta_h^* - \beta_0|$. Como

$$O(h^2) = \left| \phi\left(\frac{1}{2}, \beta_h^*\right) - \phi\left(\frac{1}{2}, \beta_0\right) \right| \leq e^{\frac{K}{2}} |\beta_h^* - \beta_0|$$

sólo podemos asegurar que no pueden acercarse más rápido que con orden cuadrático, pero aún no sabemos siquiera si se acercan.

Lema C.4.2

(Diferenciabilidad respecto a β)

La solución $\phi(x, \beta)$ del sistema (5.6) con pendiente inicial β , es derivable respecto a β y $\frac{\partial \phi}{\partial \beta}(x)$ es la solución del sistema

$$\begin{cases} X' = D(F) X \\ X(0) = (0, 1) \end{cases}$$

donde $D(F)$ es la dada en (C.14).

Demostración: Ver [21] o [9]. ■

Observación C.4.1 En nuestro caso $\frac{\partial V}{\partial \beta}(1/2) = -1$ (la variación de la pendiente de la solución en $x = \frac{1}{2}$ es -1)

Demostración: Como en nuestro caso

$$D(F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ E - (2\sigma + 1)U^{2\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

entonces $\text{tr}(DF) = 0$, y como el Wronskiano $W(x)$ satisface la ecuación

$$W'(x) = \text{tr}(DF) W(x)$$

entonces tenemos que $W(x) = cte$. Pero además

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \beta$$

$$W(1/2) = \det \begin{pmatrix} -\beta & \partial U(1/2) \\ 0 & \partial V(1/2) \end{pmatrix} = -\beta \cdot \partial V(1/2)$$

como W es constante tenemos que $\beta = -\beta \cdot \partial V(1/2)$ y por lo tanto

$$\partial V(1/2) = -1$$

■

Consideremos la recta tangente a la curva $U_{\beta_h^*}(x)$ en el punto $(\frac{1}{2}, U_{\beta_h^*}(1/2))$, la que corta al eje de las x en x_1^h . También notaremos con x_0^h a la primera raíz positiva de $U_{\beta_h^*}(x)$. Notemos que en general $x_0^h \neq x_1^h$ y lo único que podemos asegurar es que ambos están del mismo lado respecto a $x = \frac{1}{2}$, pero no sabemos cuál de los dos es mayor que el otro.

Vamos a ver que en cualquier caso x_0^h y $x_1^h \rightarrow \frac{1}{2}$ y ambos con orden h^2 .

Lema C.4.3

Vale que

$$x_0^h - \frac{1}{2} = O(h^2) \quad \text{y} \quad x_1^h - \frac{1}{2} = O(h^2)$$

Demostración: Veamos primero los casos en que x_0^h y x_1^h son mayores que $\frac{1}{2}$.

Sabemos que $U_{\beta_h^*}(x)$ es una función con un único punto de inflexión en su parte creciente (entre 0 y su eje de simetría) y por lo tanto también tendrá un único punto de inflexión en su parte decreciente (entre su eje de simetría y x_0^h), pero siempre es convexo en x_0^h (el punto de inflexión puede estar cerca de él dependiendo de σ y de E). Veamos los distintos casos que se presentan.

1. Si $U_{\beta_h^*}(x)$ es convexo en $x = \frac{1}{2}$ entonces lo será en el intervalo $(\frac{1}{2}, x_0^h)$ porque el punto de inflexión está a la izquierda de $\frac{1}{2}$, entonces $\frac{1}{2} < x_1^h < x_0^h$. Observemos que

$$U'_{\beta_h^*}(1/2) < U'_{\beta_h^*}(x_0^h) = -\beta_h^* < 0$$

situación representada en la figura (C.3).

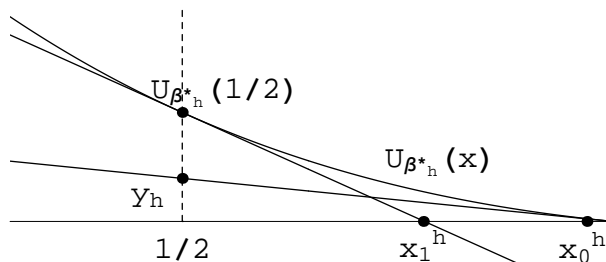


Figura C.3

Por lo tanto la recta tangente a $U_{\beta_h^*}(x)$ en x_0^h , toma en $x = \frac{1}{2}$ el valor $y_h < U_{\beta_h^*}(1/2)$, es decir que $y_h = O(h^2)$, por lo tanto $U'_{\beta_h^*}(x_0^h) = \frac{y_h}{x_0^h - \frac{1}{2}}$. Pero como también $U'_{\beta_h^*}(x_0^h) = -\beta_h^*$, entonces

$$\frac{y_h}{x_0^h - \frac{1}{2}} = -\beta_h^*$$

luego, como $\beta_h^* \rightarrow \beta_0 \neq 0$ tenemos que $x_0^h - \frac{1}{2} = O(h^2)$, y en consecuencia $x_1^h - \frac{1}{2} = O(h^2)$.

2. Si $U_{\beta_h^*}(x)$ es cóncavo en $x = \frac{1}{2}$ se nos presentan dos posibilidades.
 - Si $\frac{1}{2} < x_1^h < x_0^h$, esto obliga a que $U_{\beta_h^*}(x)$ corte la recta tangente a ella misma en $x = \frac{1}{2}$, por lo tanto tiene el punto de inflexión entre $\frac{1}{2}$ y x_1^h , y

$$U'_{\beta_h^*}(1/2) < U'_{\beta_h^*}(x_0^h) < 0$$

por lo que podemos repetir lo hecho para el caso convexo. El esquema gráfico es el de la figura (C.4).

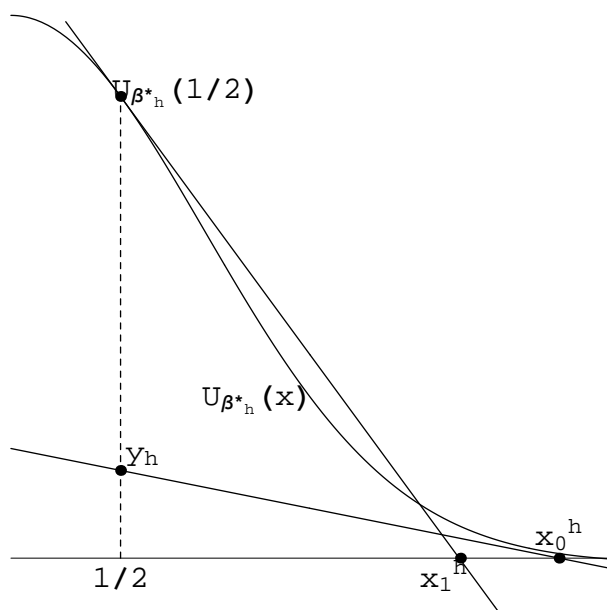


Figura C.4

- Si $\frac{1}{2} < x_0^h < x_1^h$ tenemos que el punto de inflexión de $U_{\beta^*_h}(x)$ está entre $\frac{1}{2}$ y x_0^h , pero en este punto lo que importa es la relación entre $U'_{\beta^*_h}(1/2)$ y $U'_{\beta^*_h}(x_0^h)$. La primera posibilidad es que

$$U'_{\beta^*_h}(1/2) \leq U'_{\beta^*_h}(x_0^h) < 0$$

lo que está representado en la figura (C.5).

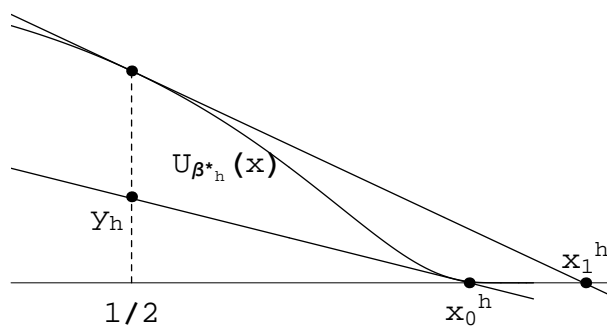


Figura C.5

En este caso podemos repetir exactamente el razonamiento anterior.

La otra posibilidad es que

$$U'_{\beta^*_h}(x_0^h) < U'_{\beta^*_h}(1/2) < 0$$

que está representada en la figura (C.6).

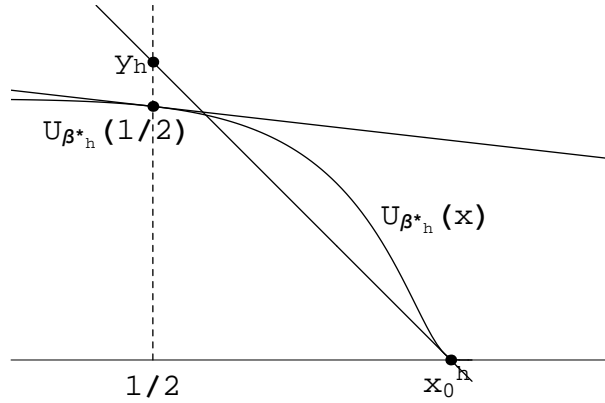


Figura C.6

En este caso debemos hacer algo distinto. Por la definición tenemos que

$$U'_{\beta_h^*}(1/2) = \frac{U_{\beta_h^*}(1/2)}{\frac{1}{2} - x_1^h} < 0$$

Por otro lado sabemos que $U_{\beta_0}(1/2) = 0$ y que $U'_{\beta_0}(1/2) = -\beta_0$, y como la variación de las pendientes en $x = \frac{1}{2}$ entorno de β_0 es igual a -1 (ver observación C.4.1) entonces

$$-1 + O(\beta_h^* - \beta_0) = \frac{U'_{\beta_h^*}(1/2) - U'_{\beta_0}(1/2)}{\beta_h^* - \beta_0} = \frac{\frac{U_{\beta_h^*}(1/2)}{\frac{1}{2} - x_1^h} + \beta_0}{\beta_h^* - \beta_0} \quad (\text{C.15})$$

por lo tanto

$$\frac{U_{\beta_h^*}(1/2)}{\frac{1}{2} - x_1^h} = -\beta_h^* + O(\beta_h^* - \beta_0)^2$$

desde aquí es inmediato que $x_1^h - \frac{1}{2} = O(h^2)$ (porque $\beta_h^* \rightarrow \beta_0$).

Los casos en que x_0^h y x_1^h son menores que $\frac{1}{2}$ salen de forma análoga. ■

Proposición C.4.1

Existe $1 \leq \gamma \leq 2$ tal que

$$|\beta_h^* - \beta_0| = O(h^\gamma)$$

Demostración: Es inmediato que $U'_{\beta_h^*}(1/2) \rightarrow -\beta_0$. Si llamamos $g(h)$ a

$$g(h) = U'_{\beta_h^*}(x_0^h) - U'_{\beta_h^*}(1/2) = -\beta_h^* - U'_{\beta_h^*}(1/2)$$

podemos estimar el orden de $g(h)$ de la siguiente manera. Como $U''_{\beta_h^*}(0) = 0$ y $x_0^h - \frac{1}{2} \rightarrow 0$ con orden h^2 , entonces

$$0 = U''_{\beta_h^*}(x_0^h) \simeq \frac{U'_{\beta_h^*}(1/2) - U'_{\beta_h^*}(x_0^h)}{h^2} = \frac{-g(h)}{h^2}$$

por lo tanto, g tiene por lo menos orden cuadrático.

Para calcular el orden de $\beta_h^* - \beta_0$ usamos la aproximación dada en (C.15) junto a la expresión de $g(h)$

$$\begin{aligned}\beta_0 - \beta_h^* &= \beta_0 + U'_{\beta_h^*}(1/2) + g(h) \\ &= \left(U'_{\beta_h^*}(1/2) - U'_{\beta_0}(1/2) \right) + g(h) \\ &= -(\beta_h^* - \beta_0) + O(\beta_h^* - \beta_0)^2 + g(h)\end{aligned}$$

de donde

$$g(h) = O(\beta_h^* - \beta_0)^2$$

entonces al menos

$$\beta_h^* - \beta_0 = O(h)$$

Notar que el orden podría ser un poco mejor, pero por lo visto con la continuidad respecto a β , nunca superará el orden 2. ■

Estamos entonces en condiciones de asegurar que

$$|E_h R - R_h|_{2,h} = O(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

C.5. Cota inferior de L_-^h

Aquí realizamos los cálculos de la proposición (4.3.3). En primer lugar desarrollamos la expresión (4.65). Calculamos cada término y factor por separado.

$$1. \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} u_i \bar{u}_j \int_0^{1/2} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = |u_h|_h^2 - \frac{h^2}{6} \langle A_h u_h, u_h \rangle$$

Para calcular esto tenemos que distinguir los siguientes casos:

- Si $i = j$: $\int_0^{1/2} (\varphi_i(x))^2 dx = \int_{(i-1)h}^{(i+1)h} (\varphi_i(x))^2 dx = \int_{(i-1)h}^{ih} \left(\frac{1}{h}(x - ih) + 1 \right)^2 dx + \int_{ih}^{(i+1)h} \left(-\frac{1}{h}(x - ih) + 1 \right)^2 dx = \frac{2}{3}h$
- Si $j = i - 1$: $\int_0^{1/2} \varphi_i(x) \varphi_{i-1}(x) dx = \int_{(i-1)h}^{ih} \left(-\frac{1}{h}(x - ih) \right) \left(\frac{1}{h}(x - ih) + 1 \right) dx = \frac{1}{6}h$
- Si $j = i + 1$: $\int_0^{1/2} \varphi_i(x) \varphi_{i+1}(x) dx = \int_{ih}^{(i+1)h} \left(-\frac{1}{h}(x - ih) + 1 \right) \left(\frac{1}{h}(x - ih) \right) dx = \frac{1}{6}h$
- Si $i \neq j$, $j \neq i - 1$ y $j \neq i + 1$ tenemos que $\int_0^{1/2} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = 0$ porque φ_i y φ_j tienen soporte disjunto.

Ahora sí podemos ver la igualdad:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} u_i \bar{u}_j \int_0^{1/2} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx &= \frac{2}{3} h |u_1|^2 + \frac{h}{6} u_1 \bar{u}_2 + \frac{h}{6} u_2 \bar{u}_1 + \frac{2}{3} h |u_2|^2 + \\
 &\quad + \frac{h}{6} u_2 \bar{u}_3 + \frac{h}{6} u_3 \bar{u}_2 + \dots + \frac{h}{6} u_{n-1} \bar{u}_{n-2} + \frac{2}{3} h |u_{n-1}|^2 = \\
 &= \frac{2}{3} h \sum_{i=1}^{n-1} |u_i|^2 + \frac{1}{6} h \sum_{i=1}^{n-1} 2 \operatorname{Re}(u_i \bar{u}_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n-1} h |u_i|^2 - \frac{h}{3} \sum_{i=1}^{n-1} |u_i|^2 + \frac{h}{3} \sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{Re}(u_i \bar{u}_{i+1}) = \\
 &= |u_h|_h^2 - \frac{1}{3} \left[\sum_{i=0}^{n-1} h (|u_i|^2 - \operatorname{Re}(u_i \bar{u}_{i+1})) \right] \stackrel{\text{por (C.3)}}{=} \\
 &= |u_h|_h^2 - \frac{h^2}{6} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|u_{i+1} - u_i|^2}{h} \stackrel{\text{por (C.4)}}{=} |u_h|_h^2 - \frac{h^2}{6} \langle A_h u_h, u_h \rangle
 \end{aligned}$$

$$2. \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} u_i \bar{u}_j \int_0^{1/2} \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx = \langle A_h u_h, u_h \rangle_h$$

Para calcular esto tenemos que distinguir los siguientes casos:

- Si $i = j$: $\int_0^{1/2} (\varphi'_i(x))^2 dx = \int_{(i-1)h}^{(i+1)h} (\varphi'_i(x))^2 dx =$
 $= \int_{(i-1)h}^{ih} \left(\frac{1}{h}\right)^2 dx + \int_{ih}^{(i+1)h} \left(-\frac{1}{h}\right)^2 dx = \frac{2}{h}$
- Si $j = i - 1$:
 $\int_0^{1/2} \varphi'_i(x) \varphi'_{i-1}(x) dx = \int_{(i-1)h}^{ih} \left(-\frac{1}{h}\right) \left(\frac{1}{h}\right) dx = -\frac{1}{h}$
- Si $j = i + 1$:
 $\int_0^{1/2} \varphi'_i(x) \varphi'_{i+1}(x) dx = \int_{ih}^{(i+1)h} \left(-\frac{1}{h}\right) \left(\frac{1}{h}\right) dx = -\frac{1}{h}$
- Si $i \neq j$, $j \neq i - 1$ y $j \neq i + 1$ tenemos que $\int_0^{1/2} \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx = 0$ porque φ'_i y φ'_j tienen soporte disjunto.

Ahora sí podemos ver la igualdad:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} u_i \bar{u}_j \int_0^{1/2} \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx &= \frac{2}{h} |u_1|^2 - \frac{1}{h} u_1 \bar{u}_2 - \frac{1}{h} u_2 \bar{u}_1 + \frac{2}{h} |u_2|^2 - \\
 &\quad - \frac{1}{h} u_2 \bar{u}_3 - \frac{1}{h} u_3 \bar{u}_2 + \dots - \frac{1}{h} u_{n-1} \bar{u}_{n-2} + \frac{2}{h} |u_{n-1}|^2 = \\
 &= \frac{2}{h} \sum_{i=1}^{n-1} |u_i|^2 - \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{n-1} 2 \operatorname{Re}(u_i \bar{u}_{i+1}) \stackrel{\text{por (C.3)}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|v_{i+1} - v_i|^2}{h} = \langle A_h u_h, u_h \rangle_h
 \end{aligned}$$

$$3. \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} u_i \bar{u}_j \int_0^{1/2} R^{2\sigma}(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \langle D(E_h R) u_h, u_h \rangle_h + O(h)$$

Distinguiamos los siguientes casos:

- Si $i = j$: como $\varphi_i^2(x) > 0$ en $((i-1)h, (i+1)h)$ sabemos que existe $\xi_i \in ((i-1)h, (i+1)h)$ tal que $\int_{(i-1)h}^{(i+1)h} R^{2\sigma}(x)\varphi_i^2(x)dx = R^{2\sigma}(\xi_i) \int_{(i-1)h}^{(i+1)h} \varphi_i^2(x)dx =$
 $= \frac{2}{3}hR^{2\sigma}(\xi_i) = \frac{2}{3}h \left[R^{2\sigma}(ih) + (R^{2\sigma})'(\xi_i)(\xi_i - ih) \right]$
 Hicimos Taylor en ih , así $\tilde{\xi}_i \in (\xi_i, ih)$ ó $\tilde{\xi}_i \in (ih, \xi_i)$. Notar que $|\xi_i - ih| < h$.
- Si $j = i - 1$: Como $\varphi_i(x)\varphi_{i-1}(x) > 0$ en $((i-1)h, ih)$ sabemos que existe $\vartheta_i \in ((i-1)h, ih)$ tal que
 $\int_{(i-1)h}^{ih} R^{2\sigma}(x)\varphi_i(x)\varphi_{i-1}(x)dx = R^{2\sigma}(\vartheta_i) \int_{(i-1)h}^{ih} \varphi_i(x)\varphi_{i-1}(x)dx =$
 $= \frac{h}{6}R^{2\sigma}(\vartheta_i) = \frac{h}{6} \left[R^{2\sigma}(ih) + (R^{2\sigma})'(\vartheta_i)(\vartheta_i - ih) \right]$
 Hicimos Taylor en $(i-1)h$, así $\tilde{\vartheta}_i \in (\vartheta_i, ih)$. Notar que $|\vartheta_i - (i-1)h| < h$.
- Si $j = i + 1$: Como $\varphi_i(x)\varphi_{i+1}(x) > 0$ en $(ih, (i+1)h)$ sabemos que existe $\zeta_i \in (ih, (i+1)h)$ tal que
 $\int_{ih}^{(i+1)h} R^{2\sigma}(x)\varphi_i(x)\varphi_{i+1}(x)dx = R^{2\sigma}(\zeta_i) \int_{ih}^{(i+1)h} \varphi_i(x)\varphi_{i+1}(x)dx = \frac{h}{6}R^{2\sigma}(\zeta_i) =$
 $= \frac{h}{6} \left[R^{2\sigma}(ih) + (R^{2\sigma})'(\zeta_i)(\zeta_i - ih) \right]$
 Hicimos Taylor en ih , así $\tilde{\zeta}_i \in (ih, \zeta_i)$. Notar que $|\zeta_i - ih| < h$.
- Si $i \neq j$, $j \neq i - 1$ y $j \neq i + 1$ tenemos que $\int_0^{1/2} R^{2\sigma}(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0$ porque φ_i y φ_j tienen soporte disjunto.

Ahora sí veamos la igualdad:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} u_i \bar{u}_j \int_0^{1/2} R^{2\sigma}(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \\
 & = \frac{2}{3}hR^{2\sigma}(h)|u_1|^2 + \frac{h}{6}R^{2\sigma}(h)u_1\bar{u}_2 + \frac{h}{6}R^{2\sigma}(h)u_2\bar{u}_1 + \frac{2}{3}hR^{2\sigma}(2h)|u_2|^2 + \\
 & + \frac{h}{6}R^{2\sigma}(2h)u_2\bar{u}_3 + \frac{h}{6}R^{2\sigma}(2h)u_3\bar{u}_2 + \frac{2}{3}hR^{2\sigma}(3h)|u_3|^2 + \frac{h}{6}R^{2\sigma}(3h)u_3\bar{u}_4 + \\
 & + \dots + \frac{h}{6}R^{2\sigma}((n-3)h)u_{n-2}\bar{u}_{n-3} + \frac{2}{3}hR^{2\sigma}((n-2)h)|u_{n-2}|^2 + \\
 & + \frac{h}{6}R^{2\sigma}((n-2)h)u_{n-2}\bar{u}_{n-1} + \frac{h}{6}R^{2\sigma}((n-2)h)u_{n-1}\bar{u}_{n-2} + \\
 & + \frac{2}{3}hR^{2\sigma}((n-1)h)|u_{n-1}|^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2}{3}h \left((R^{2\sigma})'(\xi_i)(\xi_i - ih) \right) |u_i|^2 + \\
 & + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h}{6} \left((R^{2\sigma})'(\tilde{\vartheta}_i)(\vartheta_i - (i-1)h) \right) u_i \bar{u}_{i-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h}{6} \left((R^{2\sigma})'(\tilde{\zeta}_i)(\zeta_i - ih) \right) u_i \bar{u}_{i+1} = \\
 & = \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} hR^{2\sigma}(ih)|u_i|^2}_{=(D(E_h R)u_h, u_h)_h} + \frac{h}{3} \sum_{i=1}^{n-1} R^{2\sigma}(ih) \left(\operatorname{Re}(u_i \bar{u}_{i+1}) - |u_i|^2 \right) + \\
 & + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2}{3}h \left((R^{2\sigma})'(\xi_i)(\xi_i - ih) \right) |u_i|^2 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h}{6} \left((R^{2\sigma})' (\tilde{\vartheta}_i)(\vartheta_i - (i-1)h) \right) u_i \overline{u_{i-1}} + \\
 & + \sum_{i=1}^{n-1} h \frac{1}{6} (R^{2\sigma})' (\tilde{\zeta}_i)(\zeta_i - ih) u_i \overline{u_{i+1}} = \langle D(E_h R) u_h, u_h \rangle_h + O(h)
 \end{aligned}$$

En la última expresión estamos afirmando que los últimos términos son una $O(h)$. Verifiquemos esto.

$$\begin{aligned}
 & \blacksquare \frac{h}{3} \left| \sum_{i=1}^{n-1} R^{2\sigma}(ih) \left(\operatorname{Re}(u_i \overline{u_{i+1}}) - |u_i|^2 \right) \right|_{0 \leq R(x) \leq C} \leq \\
 & \leq \frac{h}{3} \sum_{i=1}^{n-1} \left| \left(\operatorname{Re}(u_i \overline{u_{i+1}}) - |u_i|^2 \right) \right| = \frac{h}{3} \sum_{i=1}^{n-1} \left| \operatorname{Re}(u_i \overline{u_{i+1}}) - \operatorname{Re}(u_i \overline{u_i}) \right| = \\
 & = \frac{h}{3} \sum_{i=1}^{n-1} \left| \operatorname{Re}(u_i (\overline{u_{i+1}} - \overline{u_i})) \right| \leq \frac{h}{3} \sum_{i=1}^{n-1} |u_i| |\overline{u_{i+1}} - \overline{u_i}| = \\
 & = \frac{h}{3} \sum_{i=1}^{n-1} |u_i| |u_{i+1} - u_i| \leq \frac{h}{6} \left(\sum_{i=1}^{n-1} |u_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} |u_{i+1} - u_i|^2 \right)^{1/2} = \\
 & = \frac{h}{6} \left(\sum_{i=1}^{n-1} h |u_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{|u_{i+1} - u_i|^2}{h} \right)^{1/2} = \frac{h}{6} |u_h|_h |u'_h|_h \leq O(h) \\
 & \blacksquare \left| \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2}{3} h \left((R^{2\sigma})' (\tilde{\xi}_i)(\xi_i - ih) \right) |u_i|^2 \right| \leq \\
 & \leq \frac{2}{3} h \sum_{i=1}^{n-1} \left| (R^{2\sigma})' (\tilde{\xi}_i) \right| |\xi_i - ih| |u_i|^2 \leq \frac{2}{3} h M \sum_{i=1}^{n-1} h |u_i|^2 = \frac{2}{3} h M |u_h|_h^2 \leq O(h) \\
 & \blacksquare \left| \frac{h}{6} \sum_{i=1}^{n-1} \left((R^{2\sigma})' (\tilde{\vartheta}_i)(\vartheta_i - (i-1)h) \right) u_i \overline{u_{i-1}} + \left((R^{2\sigma})' (\tilde{\zeta}_i)(\zeta_i - ih) \right) u_i \overline{u_{i+1}} \right| \leq \\
 & \leq \frac{h^2}{6} M \sum_{i=1}^{n-1} (|u_i| |u_{i-1}| + |u_i| |u_{i+1}|) \leq \frac{h^2}{6} M \left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} |u_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} |u_{i-1}|^2 \right)^{1/2} + \right. \\
 & \left. + \left(\sum_{i=1}^{n-1} |u_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} |u_{i+1}|^2 \right)^{1/2} \right] \leq \frac{h}{3} M |u_h|_h^2 \leq O(h)
 \end{aligned}$$

Ahora podemos comprobar que $Ra(u_h, h) - \mathcal{R}(U_h(u_h)) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0$

$$\begin{aligned}
 & Ra(u_h, h) - \mathcal{R}(U_h(u_h)) = \\
 & = \frac{\langle A_h u_h, u_h \rangle_h - \langle D(E_h R) u_h, u_h \rangle_h + O(h)}{|u_h|_h^2 - \frac{h^2}{6} |u'_h|_h^2} - \frac{\langle A_h u_h, u_h \rangle_h - \langle D(R_h) u_h, u_h \rangle_h}{|u_h|_{2,h}^2} = \\
 & = \frac{-\langle D(E_h R) u_h, u_h \rangle_h |u_h|_{2,h}^2 + |u_h|_{2,h}^2 O(h) + \langle A_h u_h, u_h \rangle_h \frac{h^2}{6} |u'_h|_h^2 +}{\left(|u_h|_h^2 - \frac{h^2}{6} |u'_h|_h^2 \right) |u_h|_{2,h}^2} \\
 & + \frac{|u_h|_h^2 \langle D(R_h) u_h, u_h \rangle_h - \frac{h^2}{6} |u'_h|_h^2 \langle D(R_h) u_h, u_h \rangle_h}{|u_h|_{2,h}^2} = \\
 & = \frac{\langle (D(R_h) - D(E_h R)) u_h, u_h \rangle_h |u_h|_{2,h}^2 + O(h) + O(h^2)}{\left(|u_h|_h^2 - \frac{h^2}{6} |u'_h|_h^2 \right) |u_h|_{2,h}^2} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0
 \end{aligned}$$

esto se debe a que $D(R_h) - D(E_h R) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0$ por la proposición (4.3.2), así

$$\mathcal{R}a(u_h, h) - \mathcal{R}(U_h(u_h)) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0.$$

Apéndice D

Demostraciones y propiedades en KG

D.1. Existencia de soluciones y convergencia

D.1.1. Demostración del teorema (5.1.1)

Justifiquemos las afirmaciones de la demostración, (ver análogo en [13] pag 6-10).

1. $\Gamma : X_{T,R} \rightarrow X_{T,R}$. Para esto debemos probar que si $(\varphi, \psi) \in X_{T,R}$ entonces $\Gamma(\varphi, \psi)(t) \in X_{T,R}$:

a) $JA : H^1 \times L^2 \rightarrow L^2 \times H^{-1}$

b) $\|\mathcal{JA}\| \leq 1$ porque

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{JA} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|_{L^2 \times H^{-1}} &= \left\| \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\partial_x^2 \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|_{L^2 \times H^{-1}} = \\ &= \left\| \begin{pmatrix} \psi \\ \partial_x^2 \varphi \end{pmatrix} \right\|_{L^2 \times H^{-1}} = \|\psi\|_{L^2} + \|\partial_x^2 \varphi\|_{H^{-1}} \leq \|\psi\|_{L^2} + \|\varphi\|_{H^1} \end{aligned}$$

Para esto último recordemos que $\|\partial_x^2 \varphi\|_{H^{-1}} = \sup_{\|w\|_{H^1}} \langle \partial_x^2 \varphi, w \rangle_{L^2}$

que se obtenía de la siguiente manera

$$\left| \langle \partial_x^2 \varphi, w \rangle_{L^2} \right| = \left| \int \varphi_{xx} w \, dx \right| = \left| - \int \varphi_x w_x \, dx \right| = \left| \langle \varphi_x, w_x \rangle_{L^2} \right| \leq \|\varphi_x\|_{L^2} \|w_x\|_{L^2}$$

entonces $\|\partial_x^2 \varphi\|_{H^{-1}} \leq \|\varphi_x\|_{L^2} \leq \|\varphi\|_{H^1}$

c) $\left\| S(t) \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|_{H^1 \times L^2} = \|(\varphi, \psi)\|_{H^1 \times L^2}$

porque $S(t)$ es un operador unitario.

$$\begin{aligned} d) \|V'(\varphi)(\tau)\|_{L^2}^2 &= \int_a^b (V'(\varphi))^2(\tau) \, d\tau \stackrel{V'(0)=0}{=} \int_a^b (V'(\varphi) - V'(0))^2(\tau) \, d\tau = \\ &= \int_a^b (V''(\xi)\varphi)^2(\tau) \, d\tau \leq K^2 \|\varphi\|_2^2 \end{aligned}$$

Veamos los detalles. Usamos que φ y $V'' \in C[a, b]$, así $\exists m(t) = \min_{a \leq x \leq b} (\varphi(t, x)) \leq \varphi(t, x) \leq \max_{a \leq x \leq b} (\varphi(t, x)) = M(t)$, por lo tanto existe $K(t) = \max_{m(t) \leq z \leq M(t)} |V''(z)|$, y como $m(t) \leq \xi(t) \leq M(t)$ entonces $|V''(\xi)| \leq K(t)$.

$$\begin{aligned} e) \quad & \|\Gamma(\varphi, \psi)(t) - S(t)(\varphi_0, \psi_0)\| = \left\| \int_0^t S(t-\tau)(0, V'(\varphi))(\tau) d\tau \right\|_{H^1 \times L^2} \leq \\ & \leq \int_0^t \|S(t-\tau)\|_{H^1 \times L^2} \|V'(\varphi)(\tau)\|_{L^2} d\tau \leq \int_0^t \|V'(\varphi)(\tau)\|_{L^2} d\tau \leq \\ & \leq \int_0^t (K \|\varphi\|_{L^2})(\tau) d\tau \leq \int_0^t K(\tau) (R + \|S(\tau)(\varphi_0, \psi_0)\|_{H^1 \times L^2}) d\tau \leq \\ & \leq \int_0^t K(\tau) (R + \|S(\tau)\|_{H^1 \times L^2} \|(\varphi_0, \psi_0)\|_{H^1 \times L^2}) d\tau \leq \\ & \leq \int_0^t K(\tau) (R + \|(\varphi_0, \psi_0)\|_{H^1 \times L^2}) d\tau \leq R \int_0^t K(\tau) d\tau + \|(\varphi_0, \psi_0)\|_{H^1 \times L^2} \end{aligned}$$

Al pedir que este último miembro sea menor que R se obtiene un valor de T .

2. Podemos elegir \tilde{T} para el que Γ sea una contracción en $X_{\tilde{T}, R}$

$$\begin{aligned} & \|\Gamma(\varphi_1, \psi_1)(t) - \Gamma(\varphi_2, \psi_2)(t)\| = \\ & = \left\| \int_0^t S(t-\tau)(0, V'(\varphi_1) - V'(\varphi_2))(\tau) d\tau \right\|_{H^1 \times L^2} \leq \\ & \leq \int_0^t \|V'(\varphi_1) - V'(\varphi_2)\|_{L^2} d\tau \leq \int_0^t K(\tau) \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^2}(\tau) d\tau \leq \\ & \leq \int_0^t K(\tau) (2R + 2\|S(\tau)(\varphi_0, \psi_0)\|_{H^1 \times L^2}) d\tau \leq \\ & \leq 2 \left(R \int_0^t K(\tau) d\tau + \|(\varphi_0, \psi_0)\|_{H^1 \times L^2} \right) \end{aligned}$$

D.1.2. Demostración del teorema (5.1.2)

Teníamos que

$$\int \varphi^2(x, t) dx \leq 2 \left[\|\varphi_0\|^2 + t^2 (\mathcal{H}(\varphi_0, \psi_0) + m) \right]$$

y queremos tener una estimación de la forma

$$\|(\varphi, \psi)\|_{H^1 \times L^2} \leq 2 \|\varphi_0\|_{H^1} + (2t^2 + 1) (m + F(\|(\varphi_0, \psi_0)\|_{H^1 \times L^2}))$$

Veamos esto:

$$\begin{aligned} \|(\varphi, \psi)\|_{H^1 \times L^2} &= \|\varphi\|_{L^2}^2 + \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \|\psi\|_{L^2}^2 \leq \|\varphi\|_{L^2}^2 + (\mathcal{H}(\varphi_0, \psi_0) + m) \leq \\ &\leq (\mathcal{H}(\varphi_0, \psi_0) + m) + 2\|\varphi_0\|^2 + 2t^2 (\mathcal{H}(\varphi_0, \psi_0) + m) = \\ &= 2\|\varphi_0\|^2 + (2t^2 + 1) (\mathcal{H}(\varphi_0, \psi_0) + m) \end{aligned}$$

Pero necesitamos que esta última cota dependa de $\|(\varphi_0, \psi_0)\|_{H^1 \times L^2}$ y no del $\mathcal{H}(\varphi_0, \psi_0)$ (porque no sabemos exactamente como es esta cantidad). Para poder obtener una cota que solo dependa de $\|(\varphi_0, \psi_0)\|$ vamos a usar un argumento que sólo sirve en el caso periódico y es el siguiente

Sabemos que

$$\mathcal{H}(\varphi, \psi) = \frac{1}{2} \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\psi\|_{L^2}^2 + \int_0^1 V(\varphi) dx$$

y si $\varphi \in H^1$ fijo, entonces

$$\|\varphi\|_\infty \leq C \|\varphi\|_{L^2}^{1/2} \|\varphi_x\|_{L^2}^{1/2} = R$$

entonces si llamamos $M(R) = \max_{0 \leq |z| \leq R} |V(z)|$ tenemos

$$\left| \int_0^1 V(\varphi) dx \right| \leq \int_0^1 M(R) dx = M(R)$$

donde R depende de $\|\varphi\|_{H^1}$, y por lo tanto si $(\varphi, \psi) \in H^1 \times L^2$ entonces

$$\mathcal{H}(\varphi, \psi) \leq \frac{1}{2} \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\psi\|_{L^2}^2 + M(R) =: F(\|(\varphi, \psi)\|_{H^1 \times L^2})$$

D.2. Klein-Gordon con no linealidad potencial

D.2.1. Condiciones de ortogonalidad

Buscamos condiciones sobre las partes reales e imaginarias de las perturbación $w(x, t)$ y $z(x, t)$ de (5.9) para que exista un valor $\gamma \in [0, 2\pi)$ que realice la distancia en (5.8) de una solución (φ, ψ) a la órbita de $\mathcal{G}_{(R, iER)}$, es decir

$$\begin{aligned} \rho_E^2((\varphi, \psi), \mathcal{G}_{(R, iER)}) &= \inf_{\gamma \in [0, 2\pi)} \left\{ \frac{1}{2} \left(\int_0^1 |\varphi e^{i\gamma} - R|^2 + |\varphi_x e^{i\gamma} - R'|^2 + |\psi e^{i\gamma} - iER|^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + E \operatorname{Im} \int_0^1 (\varphi e^{i\gamma} - R) \overline{(\psi e^{i\gamma} - iER)} \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

Para esto calculamos la derivada variacional, perturbando γ , y lo igualamos a 0 (condición de mínimo). La condición resultante es la misma que en la ecuación de Schrödinger

$$\langle R^{2\sigma+1}, v \rangle = 0$$

Para verificar esto en primer lugar hagamos el cálculo de minimización en cada término de (D.1) donde usamos las igualdades

$$\varphi(t)e^{i\gamma} = R(x) + u(x, t) + iv(x, t)$$

$$\psi(t)e^{i\gamma} = iER(x) + p(x, t) + iq(x, t)$$

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{d}{d\varepsilon} \left[\int_0^1 |\varphi e^{i(\gamma+\varepsilon)} - R|^2 dx \right] \Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{d}{d\varepsilon} \left[\langle \varphi e^{i(\gamma+\varepsilon)} - R, \varphi e^{i(\gamma+\varepsilon)} - R \rangle \right] \Big|_{\varepsilon=0} = \\ &= -i \left[\langle \varphi e^{i\gamma}, R \rangle - \langle R, \varphi e^{i\gamma} \rangle \right] = -2i \operatorname{Im} \langle \varphi e^{i\gamma}, R \rangle = \\ &= 2 \operatorname{Im} \langle R + u + iv, R \rangle = 2 \langle R, v \rangle. \end{aligned}$$

Así tenemos

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left[\int_0^1 |\varphi e^{i(\gamma+\varepsilon)} - R|^2 dx \right] \Big|_{\varepsilon=0} = 2 \langle R, v \rangle$$

$$\begin{aligned} 2. \frac{d}{d\varepsilon} \left[\int_0^1 |\varphi_x e^{i(\gamma+\varepsilon)} - R'|^2 dx \right] \Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{d}{d\varepsilon} \left[\langle \varphi_x e^{i(\gamma+\varepsilon)} - R', \varphi_x e^{i(\gamma+\varepsilon)} - R' \rangle \right] \Big|_{\varepsilon=0} = \\ &= -i \left[\langle \varphi_x e^{i\gamma}, R' \rangle - \langle R', \varphi_x e^{i\gamma} \rangle \right] = i \left[-2i \operatorname{Im} \langle R', \varphi_x e^{i\gamma} \rangle \right] = \\ &= 2 \operatorname{Im} \langle R', R' + u_x + iv_x \rangle = 2 \langle R', v_x \rangle = -2 \langle R'', v \rangle \end{aligned}$$

Así tenemos

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left[\int_0^1 |\varphi_x e^{i(\gamma+\varepsilon)} - R'|^2 dx \right] \Big|_{\varepsilon=0} = -2 \langle R'', v \rangle$$

$$\begin{aligned} 3. \frac{d}{d\varepsilon} \left[\int_0^1 |\psi e^{i(\gamma+\varepsilon)} - iER|^2 dx \right] \Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{d}{d\varepsilon} \left[\langle \psi e^{i(\gamma+\varepsilon)} - iER, \psi e^{i(\gamma+\varepsilon)} - iER \rangle \right] \Big|_{\varepsilon=0} = \\ &= -i \left[\langle \psi e^{i\gamma}, iER \rangle - \langle iER, \psi e^{i\gamma} \rangle \right] = -2 \operatorname{Im} \langle iER, \psi e^{i\gamma} \rangle = -2E \operatorname{Im} i \langle R, p + iq \rangle = -2E \langle R, p \rangle \end{aligned}$$

Así tenemos

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left[\int_0^1 |\psi e^{i(\gamma+\varepsilon)} - iER|^2 dx \right] \Big|_{\varepsilon=0} = -2E \langle R, p \rangle$$

$$\begin{aligned} 4. \frac{d}{d\varepsilon} \left[\operatorname{Im} \int_0^1 (\varphi e^{i(\gamma+\varepsilon)} - R) \overline{(\psi e^{i(\gamma+\varepsilon)} - iER)} dx \right] \Big|_{\varepsilon=0} &= \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \operatorname{Im} \left[\langle \varphi e^{i(\gamma+\varepsilon)} - R, \psi e^{i(\gamma+\varepsilon)} - iER \rangle \right] \Big|_{\varepsilon=0} = \\ &= \operatorname{Im} \left(-\langle i\varphi e^{i\gamma}, iER \rangle - \langle R, i\psi e^{i\gamma} \rangle \right) = \operatorname{Im} \left(-E \langle \varphi e^{i\gamma}, R \rangle + i \langle \psi e^{i\gamma}, R \rangle \right) = \\ &= \operatorname{Im} \left(-E \langle R + u + iv, R \rangle + i \langle p + iq, R \rangle \right) = -E \langle v, R \rangle + \langle p, R \rangle \end{aligned}$$

Así tenemos

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left[\operatorname{Im} \int_0^1 (\varphi e^{i(\gamma+\varepsilon)} - R) \overline{(\psi e^{i(\gamma+\varepsilon)} - iER)} dx \right] \Big|_{\varepsilon=0} = \langle R, p \rangle - E \langle R, v \rangle$$

Ahora sí podemos hallar la condición de ortogonalidad

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 \left[|\varphi e^{i(\gamma+\varepsilon)} - R|^2 + |\varphi_x e^{i(\gamma+\varepsilon)} - R'|^2 + |\psi e^{i(\gamma+\varepsilon)} - iER|^2 \right] dx + \right. \\ \left. + E \operatorname{Im} \int_0^1 \left[(\varphi e^{i(\gamma+\varepsilon)} - R) \overline{(\psi e^{i(\gamma+\varepsilon)} - iER)} \right] \right\} \Big|_{\varepsilon=0} = \\ = \langle R, v \rangle - E \langle R, p \rangle - \langle R'', v \rangle - E^2 \langle R, v \rangle + E \langle R, p \rangle = \langle -R'' + (1 - E^2)R, v \rangle = \\ = \langle R^{2\sigma+1}, v \rangle \end{aligned}$$

esto último se verifica por ser R solitón.

D.2.2. Cálculo de la primera y de la segunda variación de \mathcal{E}

Aquí desarrollamos el cálculo de la primera y de la segunda variación del funcional de Lyapunov \mathcal{E} en el solitón del sistema (R, iER) .

Primera variación

La $\mathcal{E}(\varphi, \psi)$ es una función de dos variables, por lo que debemos calcular las distintas derivada direccionales parciales.

$$\begin{aligned} 1. \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varphi} [\varphi, \psi] (w, z) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \mathcal{E} [\varphi + \varepsilon w, \psi] \Big|_{\varepsilon=0} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\int \left(\frac{1}{2} |\psi|^2 + \frac{1}{2} |\varphi_x + \varepsilon w_x|^2 + \frac{1}{2} |\varphi + \varepsilon w|^2 - \frac{1}{2(\sigma+1)} |\varphi + \varepsilon w|^{2\sigma+2} \right) dx + \right. \\ &\quad \left. + E \operatorname{Im} \int (\varphi + \varepsilon w) \bar{\psi} dx \right] \Big|_{\varepsilon=0} \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varphi} [\varphi, \psi] (w, z) = \operatorname{Re} \int (\varphi_x \bar{w}_x + \varphi \bar{w} + |\varphi|^{2\sigma} \operatorname{Re}(\varphi \bar{w})) dx + E \operatorname{Im} \int w \bar{\psi} dx \quad (\text{D.2})$$

Ahora recordemos que $R(x)$ es una función que devuelve valores reales y veamos el caso particular en que $(\varphi, \psi) = (R, iER)$, $w = u + iv$ y $z = p + iq$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varphi} [R, iER] (u + iv, p + iq) &= \\ &= \operatorname{Re} \int (R' (u_x - iv_x) + R(u - iv) + R^{2\sigma+1} u) dx + E \operatorname{Im} \int (u + iv) (-iER) dx = \\ &= \int (R' u_x + Ru + R^{2\sigma+1} u) dx - E^2 \int R u dx = \\ &= \int (-R'' + (1 - E^2) R + R^{2\sigma+1}) u dx = 0, \text{ por lo tanto} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varphi} [R, iER] \equiv 0$$

$$\begin{aligned} 2. \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \psi} [\varphi, \psi] (w, z) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \mathcal{E} [\varphi, \psi + \varepsilon z] \Big|_{\varepsilon=0} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\int \left(\frac{1}{2} |\psi + \varepsilon z|^2 + \frac{1}{2} |\varphi_x|^2 + \frac{1}{2} |\varphi|^2 - \frac{1}{2(\sigma+1)} |\varphi|^{2\sigma+2} \right) dx + E \operatorname{Im} \int \varphi (\bar{\psi} + \varepsilon \bar{z}) dx \right] \Big|_{\varepsilon=0} \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \psi} [\varphi, \psi] (w, z) = \operatorname{Re} \int \psi \bar{z} dx + E \operatorname{Im} \int \varphi \bar{z} dx \quad (\text{D.3})$$

De nuevo veamos el caso particular en que $[\varphi, \psi] = (R, iER)$, y las perturbaciones son $w = u + iv$ y $z = p + iq$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \psi} [R, iER] (u + iv, p + iq) &= \operatorname{Re} \int (iER (p - iq)) dx + E \operatorname{Im} \int R (p - iq) dx = \\ &= \int ERq dx - E \int Rq dx = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \psi} [R, iER] \equiv 0$$

Por lo tanto tenemos que (R, iER) es un punto crítico del funcional \mathcal{E} .

Segunda variación

Calculamos las derivadas parciales de segundo orden en el solitón (R, iER)

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \varphi^2} [R, iER](w, z), \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \psi \partial \varphi} [R, iER](w, z), \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \psi^2} [R, iER](w, z) \text{ y } \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \varphi \partial \psi} [R, iER](w, z)$$

$$\begin{aligned} 1. \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \varphi^2} [R, iER](w, w) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varphi} (R + \varepsilon w, iER)(w) \right] \Bigg|_{\varepsilon=0} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\operatorname{Re} \int \left((R' + \varepsilon w') \bar{w}' + (R + \varepsilon w) \bar{w} + |R + \varepsilon w|^{2\sigma} \operatorname{Re}((R + \varepsilon w) \bar{w}) \right) dx + \right. \\ &= \left. + E \operatorname{Im} \int w (-iER) dx \right] \Bigg|_{\varepsilon=0} = \\ &= \operatorname{Re} \int \left(|w'|^2 + |w|^2 + 2\sigma R^{2\sigma} \operatorname{Re}(w) \bar{w} + R^{2\sigma} |w|^2 \right) dx \end{aligned}$$

Si lo evaluamos en $w = u + iv$ y $z = p + iq$, nos queda

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \varphi^2} [R, iER](u + iv, u + iv) &= \\ &= \operatorname{Re} \int \left(u_x^2 + v_x^2 + u^2 + v^2 + 2\sigma R^{2\sigma} (u^2 - iuv) + R^{2\sigma} (u^2 + v^2) \right) dx = \\ &= \int u_x^2 + v_x^2 + u^2 + v^2 + 2\sigma R^{2\sigma} u^2 + R^{2\sigma} (u^2 + v^2) dx = \\ &= \int u_x^2 + u^2 + (2\sigma + 1) R^{2\sigma} u^2 dx + \int v_x^2 + v^2 + R^{2\sigma} v^2 dx = \\ &= \int u_x^2 + (1 - E^2) u^2 + (2\sigma + 1) R^{2\sigma} u^2 dx + \int v_x^2 + (1 - E^2) v^2 + R^{2\sigma} v^2 dx + E^2 \int (u^2 + v^2) dx = \\ &= \langle L_+^\sigma u, u \rangle + \langle L_-^\sigma v, v \rangle + \|Eu\|_2^2 + \|Ev\|_2^2 \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} \langle L_+^\sigma u, u \rangle &= \left\langle -u_{xx} + (1 - E^2)u - (2\sigma + 1) R^{2\sigma} u, u \right\rangle \\ \langle L_-^\sigma v, v \rangle &= \left\langle -v_{xx} + (1 - E^2)v - R^{2\sigma} v, v \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \psi \partial \varphi} [R, iER](w, z) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \psi} (R, iER + \varepsilon z)(w) \right] \Bigg|_{\varepsilon=0} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\operatorname{Re} \int \left(R' \bar{w}' + R \bar{w} + R^{2\sigma} \operatorname{Re}(R \bar{w}) \right) dx + E \operatorname{Im} \int w (-iER + \varepsilon \bar{z}) dx \right] \Bigg|_{\varepsilon=0} = \\ &= E \operatorname{Im} \int w \bar{z} dx \end{aligned}$$

Si lo evaluamos en $w = u + iv$ y $z = p + iq$, nos queda

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \psi \partial \varphi} [R, iER](u + iv, p + iq) = E \operatorname{Im} \int (u + iv)(p - iq) dx = E \int (vp - uq) dx$$

$$\begin{aligned} 3. \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \varphi \partial \psi} [R, iER](z, w) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varphi} (R + \varepsilon w, iER)(z) \right] \Bigg|_{\varepsilon=0} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\operatorname{Re} \int (iER \bar{z}) dx + E \operatorname{Im} \int (R + \varepsilon w) \bar{z} dx \right] \Bigg|_{\varepsilon=0} = E \operatorname{Im} \int w \bar{z} dx \end{aligned}$$

Queda igual que en el caso anterior. Si lo evaluamos en $w = u + iv$ y $z = p + iq$, nos queda

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \varphi \partial \psi} [R, iER](u + iv, p + iq) = E \int (vp - uq) dx$$

$$4. \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial^2 \psi} [R, iER] (z, z) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \psi} (R, iER + \varepsilon z) (z) \right] \Big|_{\varepsilon=0} = \operatorname{Re} \int \psi \bar{z} dx + E \operatorname{Im} \int \varphi \bar{z} dx$$

$$= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\operatorname{Re} \int (iER + \varepsilon z) \bar{z} dx + E \operatorname{Im} \int R \bar{z} dx \right] \Big|_{\varepsilon=0} = \operatorname{Re} \int |z|^2 dx = \int |z|^2 dx$$

Si lo evaluamos en $w = u + iv$ y $z = p + iq$, nos queda

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial^2 \psi} [R, iER] (p + iq, p + iq) = \int (p^2 + q^2) dx = \|p + iq\|_2^2$$

Bibliografía

- [1] R. Adams, *Sobolev Spaces*. Academic Press, 1975.
- [2] V. I. Arnold, *Mecánica Clásica*, Ed. Paraninfo, Madrid (1983).
- [3] H. Berestycki and P. Lions, *Nonlinear scalar field equations I - Existence of a ground states*. Arch. Rat Mech Analysis. **82**, 1983, pp. 313-345.
- [4] J. Bourgain, *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subset and applications to non-linear evolution equations*, Institute des Hautes Etudes Scientifiques, (1992).
- [5] S. Brenner and L.R. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer-Verlang, N.Y. (1994).
- [6] H. Brézis, *Análisis Funcional*, Alianza Editorial, Madrid (1984).
- [7] T. Cazenave, *An Introduction to Nonlinear Schrödinger Equation*, Textos de Métodos Matemáticos **26**, Universidad de Rio de Janeiro, 1990.
- [8] T. Cazenave and A. Haraux, *An Introduction to Semilinear Evolutions Equations*, Oxford University Press, New York, 1998.
- [9] E. A. Coddington and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, Mc. Graw-Hill, New York, 1955.
- [10] P.G. Drazin & R.S. Johnson, *Solitons: an introduction*. Cambridge University Press, 1996.
- [11] D.B. Henry, J.F. Perez and W.F. Wreszinski, *Stability Theory for Solitary-Wave Solutions of Scalar Fiel Equation*. Commun. Math. Phys. **85**, 351-361 (1982).
- [12] M. Hirsch, S. Smale, *Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal*. Alianza Editorial, Madrid 1983.

- [13] R. J. Iorio e W. Vieira L. Nunes, *Introdução às Equações de Evolução não Lineares*, IMPA, Rio de Janeiro.
- [14] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operator*. Springer Verlag (1976)
- [15] O. Kavian, *A remark on the blowing-up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations*, Trans. AMS **299** 1 (1987), 193-203.
- [16] P.D. Lax, *Periodic solutions of the KdV equation*, Comm. Pure Appl. Math. 28, 1975, pp. 141-188
- [17] J. L. Lebowitz, H. A. Rose and E. R. Speer, *Statistical mechanics of the linear Schrödinger equation*, Journal Statistical Physics **50** 3-4 (1988), 657-687.
- [18] V. P. Mijailov, *Ecuaciones Diferenciales en derivadas parciales*, Editorial Mir, segunda edición 1982.
- [19] G. Strang and Fix, *An Analysis of the Finite Element Method*. Prentice Hall, N.Y (1973).
- [20] J. Shatah and W. Strauss. *Instability of Nonlinear Bound States*, Commun. Math. Phys., **100** 173-190 (1985)
- [21] J. Sotomayor. *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Publicaciones del IMPA, Rio de Janeiro, 1979.
- [22] W. A. Strauss *Existence of solitary waves in higher dimensions*. Commun. in Math. Phys., **55**, 1977, pp.149-162.
- [23] M. Wadati, *Pramana journal of Physics*, Indian Academy of Sciences, Vol, 57, Nos. 5 & 6, Nov. & Dec. 2001, pp. 841-847
- [24] M. Weinstein, *Lyapunov Stability of Ground States of Nonlinear Dispersive Evolutions Equations*, Commun. on Pure and Applied Math., **39**, (1986), 51-68.
- [25] M. Weinstein, *On the structure and formation of singularities in solutions to nonlinear dispersive evolution equations*, Commun. in PDE, **11**(5), (1986), 545-565.
- [26] M. Weinstein, *Modulational Stability of Ground States of Nonlinear Schrödinger Equations*, Siam J. Math, **16**, (1985), pp 472-491.
- [27] M. Weinstein, *Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates*, Commun. in Math. Phys., **87**, (1983), pp 567-576.
- [28] N.J. Zabusky and M.D. Kruskal, *Phys. Rev. Lett.* **15**, 240 (1965)