# EXISTENCIA DE SOLUCIONES

# PARA UN PROBLEMA DE SCHRÖDINGER–POISSON

**Resumen:** En este trabajo tomaremos en cuenta el problema de Cauchy para la ecuación de Schrödinger–Poisson $i\,\partial_t u = -\partial_x^2 u + V(u)\,u - f(|u|^2)\,u$, donde $f$ representa una interacción local no lineal (tomaremos en cuenta tanto el caso repulsivo $f > 0$ como el caso atractivo $f < 0$), $V$ es la solución particular de la ecuación de Poisson dada por: $V = 1/2\,|x| * (C - |u|^2)$ y $C \in C_c^\infty$ es el perfil de dopaje, o *las impurezas*. Demostraremos que el problema está localmente bien planteado en los espacios de Sobolev $\mathcal{H} := \{\varphi \in H^s(\mathbb{R}) : \int (1+x^2)^{1/2}\,|\varphi|^2 < \infty\}$, cualquiera sea $s \geq 1$; ello significa: existencia local, unicidad y continuidad de la solución con respecto al dato inicial. A continuación, introducimos un funcional de energía y exhibimos algunas leyes de conservación que nos permitirán obtener estimaciones *a priori*. En el caso atractivo, tales estimaciones son válidas para $f \in C^\infty$; no obstante, en el caso repulsivo $f > 0$ asumiremos que el exponente de $f$ es *subcrítico*. De estas hipótesis sobre $f$, tales estimaciones permiten demostrar la existencia de soluciones globales. Pasamos, luego, a un problema variacional y mostramos que la restricción de la energía a una esfera de $L^2$ tiene un mínimo en $\mathcal{H}$ siempre que el radio no supere un valor **crítico**; más aún, demostramos que para radios mayores que el valor *crítico* la energía no está acotada inferiormente. Luego mostramos que tanto en el caso *crítico* como en el *subcrítico* el mínimo resulta ser un estado fundamental para el problema de Cauchy (dado que los estados fundamentales permiten construir soluciones globales tendremos que hacer las mismas consideraciones sobre el exponente de $f$). Además demostramos que el valor *crítico* está dado por la carga total de las impurezas e incluimos una breve discusión acerca de la relevancia física que tiene este fenómeno. Finalmente, retomamos el problema de evolución y mostramos que para $s \geq 1$ la solución presenta un efecto regularizante que es local en el espacio y en el tiempo; más precisamente, en este problema la solución gana, localmente en el espacio y en el tiempo, media derivada.

**Palabras claves**: *Schrödinger–Poisson; estados fundamentales; hipótesis de neutralidad; buen planteo; leyes de conservación; efecto regularizante.*

# EXISTENCE OF SOLUTIONS

# FOR A SCHRÖDINGER–POISSON PROBLEM

**Abstract:** In this work we take under consideration the Cauchy problem for the Schrödinger–Poisson type equation $i\,\partial_t u = -\partial_x^2 u + V(u)\,u - f(|u|^2)\,u$, where $f$ represents a local nonlinear interaction (we take into account both attractive and repulsive models), $V$ is taken as a suitable solution of the Poisson equation : $V = 1/2\,|x| * \left(C - |u|^2\right)$, $C \in C_c^\infty$ is the doping profile, or *impurities*. We show that this problem is locally well posed in the weighted Sobolev spaces $\mathcal{H} := H^s(\mathbb{R}) \cap L^2_\mu(\mathbb{R})$ for all $s \geq 1$, where $L^2_\mu(\mathbb{R}) := \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}) : \int \mu(x)\,|\varphi|^2 < \infty\}$ and $\mu(x) := (1 + x^2)^{1/2}$, which means : local existence, uniqueness and continuity of the solution with respect to the initial data. We then introduce a well defined energy functional and show some conservation laws which leads to *a priori* estimates that are valid for $f \in C^\infty$ in the attractive case ; however, if $f > 0$ such estimates are valid by assuming the exponent of $f$ is *subcritical*. So, under suitable assumptions on $f$, we use this estimates to show the existence of global solutions. We turn to a variational problem and show that the restriction of $E$ to a sphere in $L^2$ has attainable minimum which belong to $H^1 \cap L^2_\mu$ provided the radius not exceed some **critical** value; moreover, it is shown that for values of the radius greater than this *critical* value, energy is not bounded from below. We then show that both in the *critical* and *subcritical* instances the minimum is a ground state of the Cauchy problem (since, ground states yield global solutions same assumptions on $f$ shall be made). In addition, we show that this *critical* value is the total charge given by the impurities, and we briefly discuss the physical relevance of this phenomenon. Finally, and resuming the evolution problem, we establish that for $s \geq 1$ local in time and space smoothing effects are present in the solution ; more precisely, in this problem there is locally a gain of half a derivative.

**Keywords**: *Schrödinger–Poisson; ground states; neutrality assumption; well–posedness; conservation laws; smoothing effect.*

# Índice general

# 1 Introducción

## 1.1. Preliminares

En este trabajo tomaremos en cuenta el problema de Cauchy para la ecuación de Schrödinger

$$i\,\partial_t u = -\partial_x^2 u + V(u)\,u - f(|u|^2)\,u \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = \phi(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,, \tag{1.2}$$

acoplada con la ecuación de Poisson

$$\partial_x^2\, V = C - |u|^2\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,. \tag{1.3}$$

Aquí $f$ representa un modelo no lineal para la interacción entre las cargas. Típicamemnte, para interacciones repulsivas, la elección es $f(r) = r^\sigma$ no obstante los resultados son presentados en un contexto más general. El perfil de dopaje, también llamado *las impurezas* está representado por $C$; asumiremos, como es habitual, que es una función regular con soporte compacto. Debido a que las soluciones fundamentales de la ecuación de Poisson en toda la recta no están acotadas, el decaimiento, la regularidad y la acotación del término no local $V(u)\,u$ dependen de una buena elección de $V$, más precisamente, del potencial Newtoniano. Dado que la energía juega un papel relevante en este problema, tanto desde el punto de vista matemático como físico, y dado que ciertas propiedades de la energía requieren un potencial Newtoniano simétrico; citemos, por caso, la conservación de la energía (ver Lema 3.3.1) y la posibilidad de construir estados fundamentales a partir de los mínimos de la energía (ver Lema 4.2.1) tomaremos en cuenta la siguiente solución del problema de Poisson

$$V = \frac{|x|}{2} * \left(C - |u|^2\right)\,, \tag{1.4}$$

que es la que se obtiene al considerar la siguiente condición de contorno: $\partial_x V(-\infty) \le 0 \le \partial_x V(+\infty)$.

Estudiaremos el buen planteo del problema (1.1)–(1.3) en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}) \cap L^2_\mu(\mathbb{R})$, donde $L^2_\mu(\mathbb{R}) := \{\varphi \in L^2 : \int \mu\,|\phi|^2 < \infty\}$, $\mu(x) = (1 + x^2)^{1/2}$ y $s \ge 1$. Esto significa: existencia local, unicidad y continuidad de la solución con respecto al dato inicial.

En los últimos veinte años las ecuaciones de Schrödinger no lineales han recibido un gran impulso debido fundamentalmente a sus aplicaciones en óptica no lineal, ver [19, 24], y en el campo de la mecánica cuántica, ver [15, 20].

Desde el punto de vista matemático la ecuación de Schrödinger aparece como un problema delicado puesto que posee una mezcla de las propiedades que tienen tanto las ecuaciones parabólicas como las hiperbólicas. En efecto, se trata de una ecuación *casi* reversible, tiene leyes de conservación e incluso algunas propiedades dispersivas como la ecuación de Klein–Gordon –no obstante, en la ecuación de Schrödinger, la velocidad de propagación es infinita–. Por otro lado, comparte con las ecuaciones parabólicas una especie de efecto regularizante; sin embargo, la reversibilidad temporal evita que el semigrupo generado sea analítico.

El problema de evolución para la ecuación de Schrödinger con una interacción local no lineal fue estudiado por J. Ginibre y G. Velo, ver [12], quienes plantean el problema en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^N)$ y muestran que, bajo adecuadas hipótesis sobre la interacción $f$, existen soluciones globales cuando $s > N/2$ y $N \leq 7$. La teoría en $H^1$ está profundamente desarrollada en Cazenave, [6]. En ese trabajo y por medio de metódos estándar de punto fijo –expresión integral de Duhammel, inmersiones de Sobolev, interpolación, etc.– se prueba el buen planteo local en $H^1$ de la ecuación de Schrödinger con interacciones locales bastante generales y con interacciones no locales del tipo Hartree, es decir, donde el potencial está dado por $V(u) = W * |u|^2$, para un núcleo $W$ que satisface $W \in L^p + L^\infty$; asimismo, empleando leyes de conservación y estimaciones *a priori* se obtienen resultados de existencia global. Cabe destacar que en nuestro caso el acople con la ecuación de Poisson produce un potencial $V$ para el cual las condiciones anteriores no son válidas (el correspondiente núcleo $W$ no está acotado).

Entre las interacciones locales resulta de especial interés el caso $f(u)\,u = |u|^{2\sigma}\,u$. Para este tipo de interacción, Glassey demostró, ver [11], que para $\sigma \geq 2/N$ existen soluciones que explotan en tiempo finito. En el caso crítico $\sigma = 2/N$ Weinstein, ver [28], establece una condición suficiente para que existan soluciones globales, tal condición está expresada en términos del estado fundamental que se obtiene al resolver un problema variacional.

Ahora bien, en circuitos integrados microscópicos la respuesta del dispositivo depende fuertemente de los efectos cuánticos; la dinámica del sistema está gobernada por el Hamiltoniano cuántico en vez del clásico. Para un estado puro, la correspondiente función de onda $\psi$ satisface la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar\,\partial_t\,\psi = -\frac{\hbar^2}{2\,m}\,\partial_x^2\,\psi + V\,\psi \qquad x \in \mathbb{R}^N\,, \tag{1.5}$$

donde $V$ es el potencial electrostático. Puede ocurrir que la función de onda se presente como una superposición de estados puros $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, donde cada uno de los estados satisface la ecuación de Schrödinger (1.5). Las magnitudes físicas relevantes del problema, *los observables*, tales como densidad de carga, densidad de corriente y densidad de energía cinética se expresan, respectivamante, mediante las expresiones:

$$n(x) = \sum \lambda_j\,|\psi_j(x)|^2\,, \qquad J(x) = \hbar \sum \lambda_j\,Im(\psi_j^*\,\nabla\psi_j)\,, \qquad K(x) = \hbar^2 \sum \lambda_j\,|\nabla\psi_j|^2\,,$$

donde $\lambda_j \geq 0$ es la probabilidad de encontrar la carga en el estado $\psi_j$. En tal caso la ecuación de Poisson se escribe

$$\Delta V = -n(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}^N\,.$$

F. Castella, [7], estudia el sistema de ecuaciones que se obtiene al considerar al estado de la carga como una superposición de todos los infinitos estados posibles, donde la no linealidad está dada por el acople con la ecuación de Poisson. Mediante el empleo de apropiadas desigualdades de Strichartz demuestra que el problema está bien planteado en $L^2$, asimismo, exhibe un tipo de propiedad regularizante que es diferente de la que tomaremos en cuenta en este trabajo.

Como hemos expresado oportunamente, el hecho de que la ecuación de Schrödinger presente efectos regularizantes parece contradecir la reversibilidad temporal, no obstante ambos fenómenos son compatibles. De hecho, en el caso libre: $i\partial_t u = -\partial_x^2 u$, se sabe que si el dato inicial $\phi \in L^2$ entonces $u(t)$ permanece en $L^p$ para casi todo $t$, para cualquier $p \in [2, +\infty)$, aunque tal resultado no puede ser cierto para **todo** tiempo $t$. Este es un tipo de efecto regularizante, en tanto las funciones de $L^p$ son más regulares que las de $L^2$. Si bien la literatura considera el efecto anterior como *ganar regularidad* resulta más expresivo enunciarlo como *perder singularidad*, nos referiremos a este tipo de efecto regularizante como *à la Strichatz*. El resultado de Castella es, pues, *à la Strichatz*.

Por otro lado, T. Kato demostró, ver [14], que las soluciones de la ecuación de Korteweg–de Vries (KdV)

$$\partial_t w + \partial_x^3 w + w\,\partial_x w = 0 \qquad\qquad x, t \in \mathbb{R} \tag{1.6}$$

satisfacen la desigualdad

$$\int_{-T}^{T} \int_{-R}^{R} |\partial_x w(x,t)|^2 \, dxdt \leq C(T, R, \|w(x,0)\|_{L^2})\,, \tag{1.7}$$

es decir, en la ecuación (KdV) la solución gana, localmente en el espacio y en el tiempo, una derivada.

Resultado similar para el grupo de Schrödinger $\{e^{it\partial_x^2}\}_{t\in\mathbb{R}}$ fue establecido simultáneamente por P. Constantin y J.-C. Saut, ver [9], P. Sjölin, ver [25] y L. Vega, ver [27]. En tales trabajos se demuestra que, para un dato inicial $\phi \in L^2$, se verifica

$$\int_{-T}^{T} \int_{-R}^{R} |(1-\partial_x^2)^{1/4}\, e^{it\partial_x^2}\,\phi|^2 \, dxdt \leq C(T, R, \|\phi_0\|_{L^2})\,, \tag{1.8}$$

en este caso la ganancia local es de media derivada.

Más aún, Ber–Artzi, Klainerman, ver [4], establecieron la validez global, en el espacio y el tiempo, del resultado anterior. Asimismo, G. Ponce, ver [21], y D. Rial, ver [22], establecieron resultados similares para la ecuación de Benjamin–Ono y para la ecuación de Schrödinger con derivada donde la ganacia es de media y de un cuarto de derivada, respectivamente. De todas maneras, queremos resaltar que en la ecuación (lineal) de Schrödinger la solución gana media derivada. Es este el tipo de propiedad regularizante la que desarrollaremos en este trabajo, para distinguirla de la anterior diremos *à la Kato*.

## 1.2. Resultados

El primer resultado que desarrollamos es el buen planteo local del problema (1.1)–(1.3) en el espacio $\mathcal{H}$.

**Teorema 3.2.1** *Supongamos que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ y tomemos $s \geq 1$. Para cada $\phi \in \mathcal{H}$ tal que $\|\phi\|_{L^2}^2 \leq \|C\|_{L^1}$ existen $T = T(\phi) > 0$ y una única solución maximal $u \in C((-T(\phi), T(\phi)), \mathcal{H}) \cap C^1((-T(\phi), T(\phi)), H^{s-2})$ para el problema (1.1)–(1.3). $u$ es maximal en tanto verifica que si $T(\phi) < +\infty$ entonces $\|u(t)\|_{\mathcal{H}} \to +\infty$ cuando $t \to T(\phi)$.*

A continuación mostramos que si la interacción local tiene exponente *subcrítico* entonces la solución maximal está definida globalmente.

**Teorema 3.4.1** *Supongamos que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ es tal que $|f(r)| \leq r^\sigma$ con $0 \leq \sigma < 2$ y tomemos $s \geq 1$. Si $\phi \in \mathcal{H}$ es tal que $\|\phi\|_{L^2}^2 \leq \|C\|_{L^1}$ entonces $T(\phi) = +\infty$.*

Aprovechamos las estimaciones obtenidas a través de la energía para estudiar la existencia de estados fundamentales. Resultado que se ofrece en los siguientes teoremas, que se refieren respectivamente a los casos $\|\phi\|_{L^2}^2 < \|C\|_{L^1}$ y $\|\phi\|_{L^2}^2 = \|C\|_{L^1}$.

**Teoremas 4.3.2 y 4.3.4** *Supongamos que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ es tal que $|f(r)| \leq r^\sigma$ con $0 \leq \sigma < 2$ y tomemos $s = 1$. Sea $S_A := \{\phi \in \mathcal{H}^{(1)} : \|\phi\|_{L^2}^2 = \|C\|_{L^1} - A\}$ donde $0 < A \leq \|C\|_{L^1}$. Entonces existe $\phi_A \in \mathcal{H}^{(1)}$ tal que $E(\phi_A) \leq E(\phi)$ para todo $\phi \in S_A$.*

**Observación 1** *Del teorema anterior se desprende que la función $u_A(x,t) = e^{-\lambda i t}\phi_A(x)$ es un estado fundamental del problema (1.1)–(1.3), donde $\lambda$ es el correspondiente multiplicador de Lagrange.*

**Observación 2** *Si bien el teorema anterior está enunciado para $s = 1$ los mínimos obtenidos y los correspondientes estados fundamentales son funciones $C^\infty$. Ver Observaciones 4.3.5 y 4.3.15.*

**Observación 3** *Asimismo demostramos que si $\|\phi\|_{L^2}^2 > \|C\|_{L^1}$ la energía no está acotada inferiormente.*

Finalmente, retomamos el problema de evolución y mostramos que también el caso no lineal existe un efecto regularizante *à la Kato*. Más precisamente.

**Teorema 5.3.1** *Sea $u(t)$ la única solución maximal del problema (1.1)–(1.3) dada por el Teorema 3.2.1 entonces*

$$u \in L^2_{loc}\left((-T,T), H^{s+1/2}_{loc}\right).$$

**Observación 4** *Este resultado representa una extensión de los anteriores al caso no lineal.*

**Observación 5** *Asimismo, para $s \in [3/2, 2)$ resulta que $u'(t) \in L^2_{loc}((-T,T)\times\mathbb{R})$. Esto representa una significativa mejora del resultado del Teorema 3.2.1 puesto que allí sólo se afirma que $u'(t) \in C((-T,T), H^{s-2})$.*

# 2 Resultados Previos

Dedicaremos este capítulo a la descripción de los resultados tanto como a la notación que utilizaremos en el resto del trabajo.

## 2.1. Notación

### 2.1.1. Operadores

- $\partial_t u = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{dt}$.
- $\partial_x u = \frac{\partial u}{\partial x}$. Cuando no haya riesgo de confusión, es decir, cuando representemos la derivada de una función, notaremos $u'$.
- La transformada de Fourier: $\mathcal{F}$.

$$\widehat{u}(k) := \mathcal{F}(u)(k) := \int u(x)\, e^{-i\, 2\pi\, x\, k}\, dx. \tag{2.1}$$

- Con esta definición, la antitransformada se escribe de la siguiente manera.

  $\mathcal{F}^{-1}(v)(x) := \int v(k)\, e^{i\, 2\pi\, x\, k}\, dk$.
- El potencial de Bessel de orden $s$: $J^s$.

  $\mathcal{F}\, J^s(u)(k) := (1 + k^2)^{s/2}\, \widehat{u}(k)$.
- El conmutador entre dos operadores $A$ y $B$ :

  $[A : B] = AB - BA$

### 2.1.2. Espacios

- $C_c^k(\mathbb{R})$ será el espacio de funciones, k-veces diferenciables, con soporte compacto en $\mathbb{R}$.
- $C_0 := C_0(\mathbb{R})$ será el espacio de funciones continuas que tienden a cero en infinito.
- $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R})$ el espacio de Schwartz de las funciones de rápido decaimiento en infinito.
- $L^p := L^p(\mathbb{R})$. Los espacios $L^p$ de la recta con $1 \leq p \leq \infty$. El exponente conjugado de $p$ será denotado $p' := \frac{p}{p-1}$.

- Cuando consideremos funciones del tiempo con valores en un espacio de Banach, digamos $X$, el correspondiente espacio de funciones integrables será notado $L^p(I, X)$ donde $I$ es el intervalo.
- $L^2_\mu := \{\varphi \in L^2 : \int \varphi^2 \mu < \infty\}$, donde $\mu(x) := (1 + x^2)^{1/2}$. Eventualmente consideraremos el espacio $L^1_\mu := \{\varphi \in L^1 : \int \varphi \mu < \infty\}$.
- $\mathcal{B}(E, F)$ denotará el espacio de funciones lineales continuas entre dos espacios de Banach $E$ y $F$. Cuando $E = F$ escribiremos $\mathcal{B}(E)$.
- Los espacios de Sobolev fraccionarios. $H^s := \{\varphi \in L^2 : J^s(\varphi) \in L^2\}$.
- $\mathcal{H} := H^s \cap L^2_\mu$. Dado que en muchas situaciones el espacio corresponiente al caso $s = 1$ resulta *natural* para el problema, lo distinguiremos mediante la notación $\mathcal{H}^{(1)}$.
- El producto escalar de $L^2$ como espacio vectorial **complejo** será notado $\langle \cdot\, ; \cdot \rangle$.
- El correspondiente producto escalar **real** será $\{\cdot\, ; \cdot\} := \operatorname{Re} \langle \cdot\, ; \cdot \rangle$.
- $\|\cdot\|_s$ la norma en $H^s$. En particular se tiene que $\|\cdot\|_{L^2} = \|\cdot\|_0$, ambas notaciones serán utilizadas indistintamente.
- $\|\cdot\|_X$ la norma en $X$, un espacio de Banach diferente de $H^s$.
- $\|\cdot\|^2_{\mathcal{H}} := \|\cdot\|^2_s + \|\cdot\|^2_{L^2_\mu}$ la norma en $\mathcal{H}$.

## 2.2. Interpolación

Recopilamos en esta sección algunos resultados relacionados con interpolación.

**Lema 2.2.1** *Desigualdad de Gagliardo–Nirenberg. Ver Cazenave, [6] Th. 2.3.7.*

*Sean* $1 \le p, q, r \le \infty$ *y* $j, m \in \mathbb{N}$ *tales que* $0 \le j < m$. *Si* $\theta \in [j/m, 1]$ *es tal que*

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{N} + \theta\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{N}\right) + \frac{(1-\theta)}{q},$$

*entonces existe* $C = C(\theta, p, q, r, j, m, N)$ *tal que para cada* $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ *se verifica*

$$\sum_{|k|=j} \|\partial_x^k \varphi\|_{L^p} \le C \Big( \sum_{|k|=m} \|\partial_x^k \varphi\|_{L^r} \Big)^\theta \|\varphi\|^{1-\theta}_{L^q}.$$

**Observación 2.2.1** *Tomando* $p = 2(\sigma + 1),\ j = 0,\ m = N = 1$ *y* $q = r = 2$ *obtenemos*

$$\|u\|^{2\sigma+2}_{L^{2\sigma+2}} \le C\, \|\partial_x u\|^\sigma_{L^2}\, \|u\|^{\sigma+2}_{L^2}. \tag{2.2}$$

El producto anterior puede ser transformado en una suma como lo indica el siguiente lema.

**Lema 2.2.2** *Sean* $a, b, \varepsilon \in [0, +\infty)$ *números cualesquiera. Sea* $1 \leq p \leq \infty$ *y sea* $p'$ *el exponente conjugado de* $p$*. Entonces existe* $C(\varepsilon) > 0$ *tal que*

$$a\, b \leq \varepsilon\, a^{\,p} + C(\varepsilon)\, b^{\,p'} \,.$$

**Observación 2.2.2** *Aplicando el lema anterior a la desigualdad (2.2) obtenemos, para cada* $\varepsilon > 0$*, la estimación*

$$\|u\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} \leq \varepsilon \|u\|_1^2 + C(\varepsilon, \sigma) \|u\|_0^{\frac{2\sigma+4}{2-\sigma}} \,. \tag{2.3}$$

**Teorema 2.2.1** *Interpolación real. (Riesz–Thorin) Ver Reed–Simon [23] Th. IX.17.*

*Sean* $\langle M\,;\, \nu_1\rangle$ *y* $\langle N\,;\, \nu_2\rangle$ *dos espacios de medida con medidas* $\sigma$*-finita. Sean, además,* $1 \leq p_0\,, p_1\,, q_0\,, q_1 \leq \infty$*. Supongamos que* $T$ *es una transformación lineal que satisface*

*(i)* $T : L^{p_0}(M, \nu_1) \to L^{q_0}(N, \nu_2)$ *con norma* $\|T\|_{\mathcal{B}(L^{p_0}, L^{q_0})} \leq M_0\,.$

*(ii)* $T : L^{p_1}(M, \nu_1) \to L^{q_1}(N, \nu_2)$ *con norma* $\|T\|_{\mathcal{B}(L^{p_1}, L^{q_1})} \leq M_1\,.$

*(iii)* $T : L^{p_0}(M, \nu_1) \cap L^{p_1}(M, \nu_1) \to L^{q_0}(N, \nu_2) \cap L^{q_1}(N, \nu_2)\,.$

*Entonces, para cada* $\varphi \in L^{p_0} \cap L^{p_1}$ *y para cada* $t \in (0, 1)$ *se verifica que* $T(\varphi) \in L^{q_t}$ *y además*

$$\|T(\varphi)\|_{L^{q_t}} \leq M_0^{1-t}\, M_1^t\, \|\varphi\|_{L^{p_t}}\,,$$

*donde* $p_t^{-1} = t\, p_1^{-1} + (1-t)\, p_0^{-1}$ *y* $q_t^{-1} = t\, q_1^{-1} + (1-t)\, q_0^{-1}\,.$

A continuación destacamos dos corolarios importantes.

**Propiedad 2.2.1** *Desigualdad de Young.*

*Sean* $1 \leq p\,, q\,, r \leq \infty$ *tales que* $1 + r^{-1} = p^{-1} + q^{-1}$ *entonces*

$$\|\varphi * \psi\|_{L^r} \leq \|\varphi\|_{L^p}\, \|\psi\|_{L^q}\,.$$

**Propiedad 2.2.2** *Desigualdad de Hausdorff–Young.*

*Supongamos que* $1 \leq p \leq 2$ *y sea* $\mathcal{F}$ *la transformada de Fourier –definida por (2.1)–. Entonces*

$$\mathcal{F} : L^p(\mathbb{R}^N) \to L^{p'}(\mathbb{R}^N)$$

*es acotada. Más aún, se verifica*

$$\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{B}(L^p, L^{p'})} \leq 1\,.$$

**Teorema 2.2.2** *Interpolación compleja. (Stein.) Ver Reed–Simon [23] Th IX.21.*

*Sean* $\langle M\,;\,\nu_1\rangle$ *y* $\langle N\,;\,\nu_2\rangle$ *dos espacios de medida con medidas* $\sigma$*-finita. Sean, además,* $1 \le p_0\,, p_1\,, q_0\,, q_1 \le \infty$*. Supongamos que* $T : S \to \mathcal{B}(L^{p_0} + L^{p_1}, L^{q_0} + L^{q_1})$ *es continua, uniformemente acotada y analítica en el interior de la banda* $S := \{z \in \mathbb{C} : 0 \le Re(z) \le 1\}$*. Supongamos, además, que* $T$ *satisface*

*(i)* $\forall y \in \mathbb{R} \quad T(iy) \in \mathcal{B}(L^{p_0}(M,\nu_1), L^{q_0}(N,\nu_2)). \quad M_0 := \sup_{y\in\mathbb{R}} \|T(iy)\|_{\mathcal{B}(L^{p_0},L^{q_0})} < \infty\,.$

*(ii)* $\forall y \in \mathbb{R} \quad T(1+iy) \in \mathcal{B}(L^{p_1}(M,\nu_1), L^{q_1}(N,\nu_2)). \quad M_1 := \sup_{y\in\mathbb{R}} \|T(1+iy)\|_{\mathcal{B}(L^{p_1},L^{q_1})} < \infty\,.$

*(iii)* $T(z) : L^{p_0}(M,\nu_1) \cap L^{p_1}(M,\nu_1) \to L^{q_0}(N,\nu_2) \cap L^{q_1}(N,\nu_2)\,,$ *para cada* $z \in S$ .

*Entonces, para cada* $t \in (0,1)$ *se verifica que*

$$T(t) : L^{p_t}(M,\nu_1) \to L^{q_t}(N,\nu_2)$$

*y además*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{B}(L^{p_t},L^{q_t})} \le M_0^{1-t}\; M_1^t\,,$$

*donde* $p_t^{-1} = t\,p_1^{-1} + (1-t)\,p_0^{-1}$ *y* $q_t^{-1} = t\,q_1^{-1} + (1-t)\,q_0^{-1}$ .

Una aplicación importante de este teorema es la siguiente caracterización de los espacios intermedios para los espacios de Sobolev fraccionarios. Sean $B_0$ y $B_1$ dos espacios de Banach y sea $0 \le \sigma \le 1$. El correspondiente espacio de interpolación entre $B_0$ y $B_1$ será notado $[B_0, B_1]_\sigma$. (Estamos siguiendo la notación de Adams, [1], 7.11 y ss.)

**Propiedad 2.2.3** *Sea* $0 \le \sigma \le 1$ *y sean* $r, s$ *dos números reales cualesquiera. Entonces* $[H^r, H^s]_\sigma = H^{(1-\sigma)r+\sigma s}$.

## 2.3. Análisis Armónico

Describimos aquí algunas de las propiedades de los espacios $H^s$ que utilizaremos con frecuencia.

**Lema 2.3.1** *Para* $s > 1/2$ *el espacio* $H^s$ *tiene estructura de álgebra. Es decir, existe una constante* $C(s) > 0$ *tal que para cualquier par de funciones* $\phi, \varphi \in H^s$ *se verifica*

$$\|\phi\,\varphi\|_s \le C(s)\,\|\phi\|_s\,\|\varphi\|_s\,.$$

**Lema 2.3.2** *Para* $s > 1/2$ *se verifica la inclusión* $H^s \hookrightarrow C_0$*. Más precisamente, existe* $C(s) > 0$ *tal que para toda* $\varphi \in H^s$ *se verifica*

$$\|\varphi\|_{L^\infty} \le C(s)\,\|\varphi\|_s\,. \tag{2.4}$$

**Lema 2.3.3** *Primer Teorema del Conmutador de Calderón. Ver Ponce, [21] Th. 2.6.*

*Sea $\mathcal{A} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función $C^\infty$ y sea $H$ la transformada de Hilbert*

$$(H\varphi)(x) := \text{V.P.}\,\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(y)}{x-y}\,dy.$$

*Entonces el operador $[H\,;\mathcal{A}]\,\partial_x : L^2 \to L^2$ está bien definido y verifica*

$$\|[H\,;\mathcal{A}]\,\partial_x\,\varphi\|_0 \le C\,\|\partial_x\,\mathcal{A}\|_{L^\infty}\;\|\varphi\|_0$$

**Lema 2.3.4** *Ver Coiffman-Meyer, [8], Th. III.*

*Sea $\mathcal{A} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función $C^\infty$. Sea $b$ una función tal que $|b^{(j)}(k)| \le C_j\,|k|^{-j}$ para $j = 0, 1, 2, \ldots$ y sea $B$ el correspondiente operador pseudo–diferencial.*
*Entonces el operador $[B\,;\mathcal{A}]\,\partial_x : L^2 \to L^2$ está bien definido y verifica*

$$\|[B\,;\mathcal{A}]\;\partial_x\,\varphi\|_0 \le C\,\|\partial_x\mathcal{A}\|_{L^\infty}\;\|\varphi\|_0.$$

**Lema 2.3.5** *Ver Folland, [10], Lema 6.16.*
*Sea $\omega \in \mathcal{S}$. Entonces existe una constante $C = C(\omega)$ tal que para toda $\varphi \in L^2$ se verifica*

$$\|[J^{1/2}\,;\omega]\;J^{1/2}\,\varphi\|_0 \le C\,\|\varphi\|_0.$$

**Lema 2.3.6** *Supongamos que $s \ge 1$. Existe, entonces, un operador acotado $B \in \mathcal{B}(L^2)$ tal que verifica la siguiente igualdad*

$$J^s - 1 = \partial_x \circ J^{s-1}\,B.$$

Demostración.– Dado que la transformada de Fourier $\mathcal{F}$ es unitaria será suficiente mostrar que el operador $b := \mathcal{F}\left((\partial_x\,J^{s-1})^{-1}(J^s-1)\right)$ es acotado. Por otro lado, $b$ es el operador de multiplicación dado por

$$b(k) = -i\,\frac{(1+k^2)^{s/2}-1}{k\,(1+k^2)^{(s-1)/2}}\,.$$

Ahora bien, como $b \in L^\infty(\mathbb{R})$ resulta que $b \in \mathcal{B}(L^2)$. Por lo tanto, tomando $B = \mathcal{F}^{-1}\,b$ concluimos la demostración. ∎

El siguiente resultado juega un papel importante en este trabajo puesto que nos permite levantar resultados válidos para $s = 1$ al caso general $s > 1$.

**Lema 2.3.7** *Supongamos que* $0 \leq r \leq 1$ *y que* $k \in \mathbb{N}$. *Recordemos que* $\mu := (1 + x^2)^{1/2}$. *Entonces existe una constante* $C(\mu)$ *tal que para cada* $\varphi \in H^k$ *se verifica*

$$\|[J^{k+r}\,;\,\mu]\,\varphi\|_0 \leq C(\mu)\,\|\varphi\|_k\,.$$

Demostración.– Sea $L$ el operador lineal dado por $L := [J\,;\mu]$. A partir del Lema 2.3.6 y del Lema 2.3.4 podemos deducir que $L : H^0 \to H^0$ y que $L : H^1 \to H^1$ son acotados. Dado que, para cada $0 \leq \sigma \leq 1$, se verifica $[H^0; H^1]_\sigma = H^\sigma$, (ver Proposición 2.2.3) aplicando el Teorema 2.2.2 obtenemos que $L : H^\sigma \to H^\sigma$ es un operador acotado. Obtenemos, entonces, la estimación

$$\|J^\sigma\,[J\,;\mu]\varphi\|_0 \leq C(\mu)\,\|\varphi\|_\sigma\,.$$

Por otro lado, dado que se verifica la siguiente igualdad

$$[J^r\,;\mu] = J^{r-1}\,[J\,;\mu] + [J^{r-1}\,;\mu]\,J$$

será suficiente con estimar $[J^r\,;\mu]$ para pequeños valores de $r$, digamos $0 \leq r \leq 1$.

Tomemos, pues, $0 \leq r \leq 1$ y sea

$$b(k) = \frac{(1 + k^2)^{r/2} - 1}{k}\,.$$

Dado que $b \in L^\infty$ y satisface las hipótesis del Lema 2.3.4 resulta que $J^r = 1 + \partial_x B$ y que $[J^r\,;\mu] \in \mathcal{B}(L^2)$, donde $B$ es el correspondiente operador pseudo–diferencial.

Eso concluye la demostración.

∎

**Lema 2.3.8** *Ver Ponce, [21], Lemma 2.7.*

*Sea* $J^s$ *el potencial de Bessel de orden* $s$. *Si* $s \geq 1$ *y* $N = 1$ *entonces*

$$\|[J^s\,;\varphi]\,\psi\|_0 \leq C\,\|\partial_x\,\varphi\|_s\,\|\psi\|_{s-1}.$$

**Observación 2.3.1** *Como* $H^s \subseteq H^{s-1}$ *el lema anterior sigue siendo válido si reemplazamos* $\|\cdot\|_{s-1}$ *por* $\|\cdot\|_s$.

**Lema 2.3.9** *Ver Kato, [14], Lemma A.3.*

*Sea* $\mathcal{A} \in C^\infty(\mathbb{C};\mathbb{C})$ *en el sentido real, con* $\mathcal{A}(0) = 0$. *Entonces*

$$\|\mathcal{A}(\varphi)\|_s \leq \widetilde{\mathcal{A}}(\,\|\varphi\|_s)\,, \qquad s > n/2,$$

*donde* $\widetilde{\mathcal{A}}$ *es una función monótona que sólo depende de* $\mathcal{A}$.

**Observación 2.3.2** *Si* $a \in C^\infty(\mathbb{R})$ *y* $\varphi \in H^s$ *entonces la función* $\mathcal{A}_\varphi(\psi) = a(\varphi)\,\psi$ *satisface:*

$$\|\mathcal{A}_\varphi(\psi)\|_s \leq \widetilde{\mathcal{A}}(\|\varphi\|_s)\,\|\psi\|_s\,,$$

*donde* $\widetilde{\mathcal{A}}$ *es una función monótona que sólo depende de* $a$.

## 2.4. Lemas *ad-hoc*

Utilizando algunos de los resultados de la sección anterior sobre Análisis Armónico demostraremos las siguientes propiedades relevantes para el grupo $\{e^{i\,t(\partial_x^2 - A\mu)}\}_{t\in\mathbb{R}}$.

**Lema 2.4.1** *Para cada $A > 0$ fijo, el grupo de Schrödinger $\{e^{i\,t(\partial_x^2 - A\mu)}\}_{t\in\mathbb{R}}$ está bien definido en $\mathcal{H}$ y satisface lo siguiente:*

- $||e^{i\,t(\partial_x^2 - A\mu)}\,\phi||_0 = ||\phi||_0$.
- $||e^{i\,t(\partial_x^2 - A\mu)}\,\phi||_{\mathcal{H}} \leq (1 + C(A,\mu)\,t^{[s]-1})\,||\phi||_{\mathcal{H}}$.

Demostración.– Llamemos $T_A := -\partial_x^2 + A\,\mu$ al generador infinitesimal y denotemos mediante $U_A(t) := e^{-i\,t\,T_A}$ al correspondiente semigrupo. Dado que $T_A$ es un operador real obtenemos la conservación de la carga. (Asimismo, deducimos que $U_A(t)$ es en realidad un grupo.)

Consideremos el operador de energía asociado al operador $T_A$,

$$H_A(\varphi) := \frac{1}{2}||\partial_x\,\varphi||_{L^2}^2 + \frac{A}{2}||\varphi||_{L^2_\mu}^2\,. \tag{2.5}$$

Es inmediato verificar que $H_A$ es una cantidad conservada:

$$H_A(U_A(t)\varphi) = H_A(\varphi)\,.$$

Por otro lado, de la definición se deduce que $H_A$ induce una norma equivalente a $||\cdot||_{\mathcal{H}^{(1)}}$ :

$$H_A(\phi) \leq C_1(A)||\phi||_{\mathcal{H}^{(1)}}^2 \leq C_2(A)\,H_A(\phi) \tag{2.6}$$

$$\tag{2.7}$$

Deducimos, pues, que

$$||U_A(t)\,\phi||_{\mathcal{H}^{(1)}}^2 \leq C(A)||\phi||_{\mathcal{H}^{(1)}}^2\,, \tag{2.8}$$

y el resultado es cierto para $s = 1$.

Como quedó dicho utilizaremos el Lema 2.3.7 para levantar el resultado anterior al caso general $s > 1$.

Llamando $\varphi := U_A(t)\phi$, tendremos que

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\partial_t\{J^s\,\varphi; J^s\,\varphi\} &= \{\partial_t\,\varphi; J^s\,J^s\,\varphi\}\\ &= \{i\,\partial_x^2\,\varphi; J^s\,J^s\,\varphi\} - \{i\,A\,\mu\,\varphi; J^s\,J^s\,\varphi\}\\ &= -\{i\,A\,[J^s;\,\mu]\,\varphi; J^s\,\varphi\}\,.\end{aligned}$$

Aplicando el Lema 2.3.7 obtenemos la estimación,

$$\|[J^s\,;\mu]\,\varphi\|_0 \leq C(\mu)\,\|\varphi\|_{s-1}\,,$$

a partir de la cual obtenemos $\partial_t\|\varphi\|_s^2 \leq C(A,\mu)\,\|\varphi\|_s\,\|\varphi\|_{s-1}$. Simplificando obtenemos la estimación

$$\partial_t\|\varphi\|_s \leq C(A,\mu)\,\|\varphi\|_{s-1}\,.$$

Un argumento inductivo estándar nos permite obtener el resultado. ∎

Consideremos ahora el caso $A = 0$. El correspondiente grupo será, pues, $U_0 := e^{i\,t\,\partial_x^2}$.

**Observación 2.4.1** *En este caso el control sobre la norma $L^2_\mu$ dado por*

$$\|U_A(t)\phi\|^2_{L^2_\mu} \leq \frac{1}{A}\,\|\phi\|^2_{H^1} + \|\phi\|^2_{L^2_\mu}\,.$$

*deja de ser válido.*

**Lema 2.4.2** *El grupo $U_0(t)$ está bien definido en $\mathcal{H}$ y verifica:*

- $\|U_0(t)\phi\|_s = \|\phi\|_s$. *Válido para* ***cualquier*** $s \in \mathbb{R}$ .
- $\|U_0(t)\phi\|_{L^2_\mu} \leq C(t,\mu)\|\phi\|_{\mathcal{H}^{(1)}}$

Demostración.– La primer afirmación es consecuencia de la igualdad $[J^s\,;\partial_x^2] = 0$.

Para obtener la segunda introducimos la notación $\varphi := U_0(t)\phi$, y consideramos la estimación

$$\begin{aligned}
\|\varphi(t)\|^2_{L^2_\mu} &\leq \|\phi\|^2_{L^2_\mu} + 2\int_0^t \left|\{i\,\varphi;\partial_x\,(\mu)\,\partial_x\,\varphi\}\right|dt' \\
&\leq \|\phi\|^2_{L^2_\mu} + 2\,\|\partial_x\,\mu\|_\infty \int_0^t \|\varphi(t')\|_0\,\|\partial_x\,\varphi(t')\|_0\,dt' \\
&\leq \|\phi\|^2_{L^2_\mu} + C\,t\,\|\partial_x\,\mu\|_\infty\,\|\phi\|_1^2\,.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

∎

La dependencia continua en el dato inicial requiere algún tipo de continuidad de la familia $U_A$ con respecto al parámetro $A$. Tal control está garantizado por el siguiente lema.

**Lema 2.4.3** *Sean* $A\,, B \geq 0$ *entonces se verifica*

$$\|U_A(t)(\phi) - U_B(t)(\phi)\|_{\mathcal{H}} \leq C(t, A, B)\,|A - B|\,\|\phi\|_{\mathcal{H}}\,.$$

DEMOSTRACIÓN.– Nuevamente, comenzaremos demostrando el caso $s = 1$. A partir de la identidad $H_A(\phi) = H_B(\phi) + \dfrac{A-B}{2}\,\|\phi\|^2_{L^2_\mu}$, y de la conservación de $H_A$ deducimos que

$$H_A(\phi) - H_A(U_B(t)\phi) = \frac{A-B}{2}\left(\|\phi\|^2_{L^2_\mu} - \|U_B(t)\phi\|^2_{L^2_\mu}\right).$$

Estos resultados junto con las estimaciones (2.6) –caso $A$ y $B$ distintos de 0– y (2.9) –caso $A = 0$ o $B = 0$– ofrecen la desigualdad requerida, ya que:

$$\begin{aligned}
\|U_A(t)\,\phi - U_B(t)\,\phi\|_{\mathcal{H}^{(1)}} &\leq C(A)\,H_A\Big(\phi - U_A(-t)\,U_B(t)\,\phi\Big)\\
&\leq C(A)\,\Big|H_A(\phi) - H_A(U_B(t)\,\phi)\Big|\\
&\leq C(t, A, B)\,|A - B|\,\|\phi\|_{\mathcal{H}^{(1)}}\,.
\end{aligned}$$

Aplicando un argumento inductivo como en el Lema 2.4.1 obtenemos la validez del resultado en el caso general $s > 1$. ■

Finalizamos este capítulo con un resultado útil sobre el decaimiento de la solución de un tipo especial de ecuación ordinaria, resultado que será utilizado para demostrar que el mínimo en el caso crítico tiene el decaimiento suficiente como para pertenecer a $L^2_\mu$, ver Teorema 4.3.4. Para tal fin, consideramos los siguientes lemas previos.

**Lema 2.4.4** *Sea* $\psi \in C^2(I)$ *una función real que satisface* $\psi(x_0) > 0$, $\psi\,'(x_0) \geq 0$ *y* $\psi'' \geq \lambda^2\psi$, *entonces para cada* $x \geq x_0$ *se verifica que* $\psi(x) > 0$.

DEMOSTRACIÓN.– Supongamos que exista $x' > x_0$ tal que $\psi(x) < 0$. En tal caso, podremos tomar $x_1 = \text{ínf}\{x > x_0 : \psi(x) < 0\}$. Dado que $x_0 < x_1$, que $\psi(x) > 0$ para $x \in (x_0, x_1)$ y que $\psi'(x_0) > 0$ resulta que el máximo de $\psi$ en $[x_0, x_1]$ es interior. Lo cual contradice la hipótesis $\psi''(x) \geq \lambda^2\psi(x) > 0$. ■

**Corolario 2.4.1** *Bajo las hipótesis del Lema 2.4.4,* $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = +\infty$.

DEMOSTRACIÓN.– Es consecuencia directa de la expresión

$$\psi(x) = \psi(x_0) + \psi'(x_0)(x - x_0) + \psi''(c)\frac{(x - x_0)^2}{2} > \psi(x_0) + \psi'(x_0)(x - x_0)\,.$$

■

**Lema 2.4.5** *Consideremos el intervalo* $I = [a, +\infty)$*. Sea* $q \in C(I)$ *tal que* $q \geq \lambda^2 > 0$ *y sea* $u \in L^2(I)$ *tal que*

$$-u'' + qu = 0\,. \tag{2.10}$$

*Entonces ocurre sólo una de las siguientes alternativas*

*(i)* $u \equiv 0$.

*(ii)* $u\,u' < 0$ *en* $I$.

DEMOSTRACIÓN.– Supongamos que $x_0 \in I$ verifica $u(x_0)u'(x_0) \geq 0$, multiplicando la ecuación (2.10) por $u$ e integrando en $[x_0, x]$ obtenemos

$$\begin{aligned} u(x)u'(x) &= u(x_0)u'(x_0) + \int_{x_0}^{x} (u'^2(\xi) + q(\xi)u^2(\xi))d\xi \\ &\geq \lambda^2 \int_{x_0}^{x} u^2(\xi)d\xi. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Consideremos la función $\psi$ dada por

$$\psi(x) = \int_{x_0}^{x} u^2(\xi)d\xi.$$

De la definición de $\psi$ deducimos que, para $x \in [x_0, +\infty)$, se verifica $\psi, \psi' \geq 0$. Usando la estimación (2.11) tendremos que $\psi'' \geq \lambda^2\psi$. Por otro lado, como $u \in L^2(I)$, $\psi$ resulta acotada. El Lema 2.4.1 nos permite deducir que $\psi \equiv 0$. Obtenemos, entonces, que $u \equiv 0$. ■

**Observación 2.4.2** *Si* $u \in L^2(I)$, $u \not\equiv 0$ *es una solución real de la ecuación (2.10), a partir del Lema 2.4.5 deducimos que* $u$ *y* $u'$ *tienen signo constante. Podemos, entonces, suponer que* $u > 0 > u'$.

**Lema 2.4.6** *Sea* $u$ *como en el Lema 2.4.5 con* $u > 0$*. Entonces* $u' \leq -\lambda u$ *en* $I$.

DEMOSTRACIÓN.– Consideremos $\phi = -u'/u$. De acuerdo con el Lema 2.4.5 tendremos que $\phi > 0$ en $I$. Usando la ecuación (2.10) deducimos que $\phi' = \phi^2 - q$. Supongamos, entonces, que exista $c \in I$ tal que $\phi(c) < \lambda$. Reemplazando en la igualdad anterior obtenemos $\phi^{'}(c) < 0$ y, por lo tanto, $\phi(x) < \lambda$ para todo $x > c$ (donde hemos utilizado un argumento inductivo). De esta manera, para $x > c$, se verifica $\phi'(x) < \phi(c)^2 - \lambda$ de donde deducimos que $\phi(x) \to -\infty$, contradiciendo la positividad de $\phi$. ■

Hemos demostrado el siguiente teorema.

**Teorema 2.4.2** *Consideremos el intervalo* $I = [a, +\infty)$*. Sea* $q \in C(I)$ *tal que* $q \geq \lambda^2 > 0$ *y sea* $u \in L^2(I)$ *tal que*

$$-u'' + qu = 0\,.$$

*Entonces* $u(x) = O(e^{-\lambda x})$ *para* $x \to +\infty$.

# 3 *Buen Planteo* del Problema

## 3.1. Introducción

Dedicaremos este capítulo al estudio del buen planteo local en los espacios de Sobolev $\mathcal{H} = H^s \cap L^2_\mu$ con $s \geq 1$ del problema de Cauchy

$$i\,\partial_t u = -\partial_x^2 u + V(u)\,u - f(|u|^2)\,u \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = \phi(x)\,, \tag{3.2}$$

donde la interacción local satisface $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, el perfil de dopaje $C \in C_c^\infty$ y el potencial $V$ está dado por

$$V(u) := \frac{|x|}{2} * (C - |u|^2). \tag{3.3}$$

**Observación 3.1.1** *Como estamos trabajando en* ***toda*** *la recta, el potencial V no está* a priori *acotado.*

Para ser más precisos, introducimos las siguientes funciones

$$V_\infty(u) := \int \frac{|x-y| - \mu(x)}{2} \left(C(y) - |u(y)|^2\right) dy\,, \tag{3.4}$$

$$A(u) := \|C\|_{L^1} - \|u\|_0^2\,. \tag{3.5}$$

El potencial puede escribirse, entonces, de la siguiente manera:

$$V(u) = \frac{1}{2}\mu(x)\,A(u) + V_\infty(u). \tag{3.6}$$

A continuación establecemos algunas consideraciones relevantes.

**Observación 3.1.2** *La inclusión $\mathcal{H} \hookrightarrow L^2_\mu$ garantiza que $V(u)$ está bien definida.*

**Observación 3.1.3** *A partir de la conservación de la carga (ver Lema 3.2.2 más abajo) resulta que $A(u) = A(\phi)$.*

**Observación 3.1.4** *Dado que* $V_\infty(u) \in L^\infty$ *(ver Lema 3.2.1) si el dato inicial* $\phi$ *es tal que* $A(\phi) \neq 0$ *entonces* $V(u) = O(|x|)$ *para* $|x| \to +\infty$.

**Observación 3.1.5** *De las observaciones anteriores deducimos que el potencial resulta acotado inferiormente si y sólo si* $A(\phi) \geq 0$.

**Observación 3.1.6** *La condición* $A(\phi) \geq 0$ *significa* $||\phi||_0^2 \leq ||C||_{L^1}$, *es decir, es una condición sobre el tamaño del dato inicial.*

El resultado de buen planteo local será obtenido para datos iniciales $\phi$ que satisfagan $A(\phi) \geq 0$. Cabe destacar que si el dato inicial $\phi$ es tal que $A(\phi) = 0$ entonces $V(u) = V_\infty(u)$ de modo que el potencial es acotado. Tenemos entonces dos casos diferentes, dependiendo del tamaño del dato inicial: $A(\phi) > 0$ y $A(\phi) = 0$. Motivados por los resultados del Capítulo 4 los denominaremos *caso subcrítico* y *caso crítico* respectivamente.

## 3.2. Existencia local. Casos crítico y subcrítico

Dado que demostraremos la existencia de soluciones para el problema de Cauchy (3.1)–(3.3) utilizando el método de punto fijo comenzaremos por establecer el siguiente resultado.

**Lema 3.2.1** *Sea* $\varphi \in \mathcal{H}$. *y consideremos la función* $V_\infty$ *dada por (3.4). Las siguientes afirmaciones son válidas.*

- $||V_\infty(\varphi)||_{L^\infty} \leq ||C - |\varphi|^2||_{L^1_\mu}$ .
- $||V_\infty(\varphi_1) - V_\infty(\varphi_2)||_{L^\infty} \leq |||\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2||_{L^1_\mu} \leq (||\varphi_1||_{L^2_\mu} + ||\varphi_2||_{L^2_\mu})\, ||\varphi_1 - \varphi_2||_{L^2_\mu}$.
- $||\partial_x V_\infty(\varphi)||_{\mathcal{H}} \leq C(||C||_{L^1_\mu}, ||\varphi||_{\mathcal{H}})\, ||C - |\varphi|^2||_{\mathcal{H}}$.
- $||\partial_x V_\infty(\varphi_1) - \partial_x V_\infty(\varphi_2)||_{\mathcal{H}} \leq C(||\varphi_1||_{\mathcal{H}}, ||\varphi_2||_{\mathcal{H}})\, ||\varphi_1 - \varphi_2||_{\mathcal{H}}$.

Demostración.– Las dos primeras afirmaciones son consecuencia directa de la desigualdad $\Big||x-y| - \mu(x)\Big| \leq \mu(y)$ y de la igualdad $|u|^2 - |v|^2 = \overline{u}(u - v) + v(\overline{u} - \overline{v})$.

**Observación 3.2.1** *Tomando* $j \in H^s \cap L^1_\mu$ *y llamando* $V_\infty(j) := \int \frac{|x-y|-\mu(x)}{2}\, j(y)\, dy$, *resulta que la elección* $j = |\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2$ *conduce a la identidad* $V_\infty(\varphi_1) - V_\infty(\varphi_2) = V_\infty(j)$.

Consideremos ahora $h_{-}(x) := \int_{-\infty}^{x} j(y)\,dy$, derivando (3.4) con respecto a la variable $x$ obtenemos

$$\partial_x V_\infty(j) = h - h(+\infty)\,\frac{1+\mu'}{2}. \tag{3.7}$$

Veamos ahora cómo aprovechar la identidad anterior para demostrar que $\partial_x V_\infty(j)$ está en $L^2_\mu$. Para eso, consideremos $x \to -\infty$; en tal caso resulta que $1 + \mu'(x) \leq \frac{1}{2x^2}$, que es una función de $L^2_\mu$. Por otro lado

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \mu(x)|h(x)|^2\,dx &\leq \int_{-\infty}^{0} \Big( \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{x} \mu(x)|j(y)|\,|j(z)|\,dy\,dz \Big)\,dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{0} \int_{z}^{0} \int_{-\infty}^{0} \mu(y)|j(y)|\,|j(z)|\,dy\,dx\,dz \\
&\leq \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} \mu(z)\mu(y)|j(y)|\,|j(z)|\,dy\,dz \\
&\leq \|j\|^2_{L^1_\mu((-\infty;0])}\,.
\end{aligned}$$

Por otro lado, si $x \to +\infty$ la estimación anterior puede adaptarse al intervalo $[0,+\infty)$ considerando la función $h_{+}(x) := \int_{x}^{+\infty} j(y)\,dy$. Reemplazando alternativamente $j = C - |\varphi|^2$ y $j = |\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2$ obtenemos

$$\|\partial_x V_\infty(\varphi)\|_{L^2_\mu} \leq C\,\|C - |\varphi|^2\|_{L^1_\mu}$$

$$\|\partial_x V_\infty(\varphi_1) - \partial_x V_\infty(\varphi_2)\|_{L^2_\mu} \leq C\,\||\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2\|_{L^1_\mu}\,.$$

Veamos ahora cómo mostrar la propiedad Lipschitz. Consideremos $s \geq 1$, a partir del Lema 2.3.6 sabemos que el potencial de Bessel puede escribirse $J^s = 1 + B\,\partial_x J^{s-1}$; igualdad que nos permite deducir

$$J^s(\partial_x V_\infty(j)) = \partial_x V_\infty(j) + B\,J^{s-1}\,(h' - h(+\infty)\,\mu''),$$

y por lo tanto

$$\|\partial V_\infty(j)\|_{H^s} \leq \|\partial V_\infty(j)\|_{L^2} + \|B\|_{\mathcal{B}(L^2)} \Big( \|j\|_{H^{s-1}} + C(\mu)\,\|j\|_{L^1_\mu} \Big).$$

De esta manera, haciendo el reemplazo $j = C - |\phi|^2$ y $j = |\phi_1|^2 - |\phi_2|^2$ , obtenemos la tercer y cuarta afirmaciones. ∎

La siguiente ley de conservación nos será útil en lo sucesivo.

**Lema 3.2.2** *Conservación de la carga.*

*Sean $L$ una función* ***real****, $(a,b)$ un intervalo alrededor del origen y $u \in C\Big((a,b), H^s\Big) \cap C^1\Big((a,b), H^{s-2}\Big)$ una solución de la ecuación $i\,\partial_t\, u = -\partial_x^2\, u + L(u)\, u$. Entonces para cada $t \in (a,b)$ se verifica*

$$||u(\cdot,t)||_{L^2} = ||u(\cdot,0)||_{L^2}\,.$$

Demostración.– Derivando con respecto al tiempo obtenemos

$$\begin{aligned} \partial_t\, ||u(t)||^2 &= \{\partial_t\, u;\ u\} \\ &= \{i\,\partial_x^2\, u;\ u\} + \{i\, L(u)\, u;\ u\} \\ &= -\{i\,\partial_x\, u; \partial_x\, u\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dado que $L$ es una función real tenemos que $\mathrm{Re}\,(i\, L(u)) = 0$. Por otro lado, el Lema 2.3.2 indica que el término de contorno en la integración por partes es nulo. Eso concluye la demostración. ■

Consideramos a continuación el siguiente problema auxiliar para $A$ **fijo**:

$$i\,\partial_t u = -\partial_x^2 u + A\,\mu\, u + V_\infty(u)\, u - f(|u|^2)\, u \tag{3.8}$$

$$u(x,0) = \phi(x)\,. \tag{3.9}$$

**Propiedad 3.2.1** *Supongamos que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ y que $s \geq 1$. Para cada $\phi \in \mathcal{H}$ existen $T = T(\phi) > 0$ y una única solución maximal $u \in C([0,T(\phi)),\mathcal{H}) \cap C^1([0,T(\phi)), H^{s-2})$ del problema (3.8)–(3.9). $u$ es maximal en el sentido siguiente: si $T(\phi) < +\infty$ entonces $||u(t)||_{\mathcal{H}} \to +\infty$ cuando $t \to T(\phi)$.*

Demostración.– Consideremos el grupo unitario $U_A(t)$ generado por $-i\, T_A$. Sea $F$ el operador dado por la fórmula de Duhamel

$$F_A(u) = U_A(t)\,\phi - i \int_0^t U_A(t-s)\Big(V_\infty(u)\, u - f(|u|^2)\, u\Big)\, ds\,, \tag{3.10}$$

en tal caso tendremos planteado el problema de punto fijo $F_A(u) = u$. Veamos ahora que $F_A$ está bien definido en $\mathcal{H}$, para facilitar la escritura omitiremos el subíndice $A$.

A partir del Lema 2.4.1 deducimos la siguiente estimación

$$||F(u)||_{\mathcal{H}} \leq C(t)\Bigg(||\phi_0||_{\mathcal{H}} + ||V_\infty(u)\, u - f(|u|^2)\, u||_{\mathcal{H}}\Bigg)$$

que nos permite trasladar las estimaciones –tanto para la buena definición de $F$ como para la contractividad (es decir, la propiedad Lipschitz)– a las no linealidaddes $f$ y $V_\infty$. Veamos en primer lugar cómo acotar cada una de ellas.

Aplicando el Lema 2.3.9 a la interacción no lineal obtenemos

$$\| f(|u|^2)\, u\|_s \leq \widetilde{f}(\|u\|_s)\, \|u\|_s \,,$$

mientras que la inclusión $H^s \hookrightarrow L^\infty$ (Lema 2.3.2) nos permite obtener

$$\| f(|u|^2)\, u\|_{L^2_\mu} \leq \| f(|u|^2)\|_{L^\infty}\, \|u\|_{L^2_\mu} \,.$$

Tenemos, pues, la estimación requerida en $\mathcal{H}$,

$$\| f(|u|^2)\, u\|_{\mathcal{H}} \leq C(f, \|u\|_s)\, \|u\|_{\mathcal{H}} \,. \tag{3.11}$$

Dado que

$$J^s\, V_\infty(u)\, u = [J^s\, ; V_\infty(u)]\, u + V_\infty(u)\, J^s\, u \,,$$

aplicando el Lema 2.3.8 y utilizando la acotación de $V_\infty$ (Lema 3.2.1) obtenemos la estimación en $H^s$

$$\|V_\infty(u)\, u\|_s \leq C\, \|\partial_x\, V_\infty(u)\|_s\, \|u\|_s + \|V_\infty(u)\|_{L^\infty}\, \|u\|_s \,.$$

Asimismo, la acotación de $V_\infty$ permite obtener la siguiente estimación para la norma en $L^2_\mu$

$$\|V_\infty(u)\, u\|_{L^2_\mu} \leq \|V_\infty(u)\|_{L^\infty}\, \|u\|_{L^2_\mu} \,.$$

De esta manera obtenemos la estimación en $\mathcal{H}$

$$\|V_\infty(u)\, u\|_{\mathcal{H}} \leq C(\|u\|_{\mathcal{H}})\, \|u\|_{\mathcal{H}} \,. \tag{3.12}$$

La buena definición de $F$ es consecuencia, entonces, de las estimaciones (3.11) y (3.12).

Veamos ahora que $F$ es contractiva. Para tal fin, llamamos $w(u) := V_\infty(u)\, u - f(|u|^2)\, u$ , al término no lineal; en tal caso tendremos,

$$F(u) - F(v) = -i \int_0^t U_A(t-s)\Big(w(u) - w(v)\Big)\, ds \,.$$

Tomando $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ y aplicando el Lema 2.4.1 obtenemos la estimación

$$\|F(u) - F(v)\|_{\mathcal{H}} \leq C(A, t)\, \|w(u) - w(v)\|_{\mathcal{H}} \,,$$

de donde concluimos que basta con acotar el término no lineal.

Sean, pues, $u, v \in \mathcal{H}$ tales que $\|u\|_{\mathcal{H}}\ , \|v\|_{\mathcal{H}} \leq R$. Como

$$\begin{aligned} f(|u|^2)\,u - f(|v|^2)\,v &= \int_0^1 \frac{d}{ds}\big(f(|z(s)|^2)\,z(s)\big)\,ds \\ &= \int_0^1 f(|z(s)|^2)\,(u-v)\,ds \\ &\quad + \int_0^1 2\,f'(|z(s)|^2)\,z(s)\ \mathrm{Re}\ \big(z(s)\,(u-v)\big)\ ds\,, \end{aligned}$$

donde $z(s) = s\,u + (1-s)\,v$, argumentos similares a los utilizados en la Observación (2.3.2) ofrecen la siguiente estimación en $H^s$

$$\|f(|u|^2)\,u - f(|v|^2)\,v\|_s \leq C(f,R)\,\|u-v\|_s\,.$$

Para la acotación de la norma $L^2_\mu$ reagrupamos los términos y obtenemos

$$\begin{aligned} &\|f(|u|^2)\,u - f(|v|^2)\,v\|_{L^2_\mu} \leq \\ &\qquad \leq \|f(|u|^2)\ (u-v)\,\|_{L^2_\mu} + \|\Big(f(|u|^2) - f(|v|^2)\Big)\ v\|_{L^2_\mu} \\ &\qquad \leq \|f(|u|^2)\|_{L^\infty}\ \|u-v\|_{L^2_\mu} + \|v\|_{L^\infty}\ \|f(|u|^2) - f(|v|^2)\|_{L^2_\mu}\,. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Por otro lado, dado que $f(\cdot) \in C^\infty$ resulta que

$$\|f(|u|^2) - f(|v|^2)\|_{L^2_\mu} \leq C(f,R)\,\|u-v\|_{L^2_\mu}.$$

Tenemos, pues, la siguiente estimación

$$\|f(|u|^2)\,u - f(|v|^2)\,v\|_{\mathcal{H}} \leq C(f,R)\,\|u-v\|_{\mathcal{H}}. \tag{3.14}$$

Consideremos, ahora, la identidad

$$\begin{aligned} J^s(V_\infty(u)\,u - V_\infty(v)\,v) \quad &= [J^s\,; V_\infty(u) - V_\infty(v)]\,u + (V_\infty(u) - V_\infty(v))\ J^s\,u \\ &\quad + [J^s\,; V_\infty(v)]\,(u-v) + V_\infty(v)\,J^s\,(u-v)\,. \end{aligned}$$

Utilizando las acotaciones del Lemma 3.2.1 obtenemos las siguientes estimaciones:

$$\begin{aligned} \|[J^s\,;(V_\infty(u)-V_\infty(v))]\,u\|_0 &\leq C\,\|\partial_x V_\infty(u)-\partial_x V_\infty(v)\|_s\,\|u\|_0 \\ &\leq C(R)\,\|u-v\|_s. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(V_\infty(u)-V_\infty(v))\,J^s\,u\|_0 &\leq C\,\|V_\infty(u)-V_\infty(v)\|_{L^\infty}\,\|u\|_s \\ &\leq C(R)\,\|u-v\|_s\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|[J^s\,;V_\infty(v)]\,(u-v)\|_0 &\leq \|\partial_x V_\infty(u)\|_s\,\|u-v\|_s \\ &\leq C(R)\,\|u-v\|_s\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|V_\infty(v)\,J^s\,(u-v)\|_0 &\leq \|V_\infty(v)\|_{L^\infty}\,\|u-v\|_s \\ &\leq C(R)\,\|u-v\|_s\,. \end{aligned}$$

La estimación para la norma $L^2_\mu$ sale aplicando el mismo argumento utilizado para el término (3.13) de la interacción local, y considerando además la propiedad Lipschitz que ofrece el Lema 3.2.1:

$$\|V_\infty(u)\,u-V_\infty(v)\,v\|_{L^2_\mu}\leq C(R)\,\|u-v\|_{L^2_\mu}\,.$$

Obtenemos, pues, la siguiente estimación:

$$\|V_\infty(u)\,u-V_\infty(v)\,v\|_{\mathcal{H}}\leq C(\mu,R)\,\|u-v\|_{\mathcal{H}}. \tag{3.15}$$

Finalmente, las estimaciones (3.14) y (3.15) permiten demostrar que el término no lineal es localmente Lipschitz y, por lo tanto, que el operador $F$ es contractivo. ■

Dado que el problema auxiliar que venimos de introducir depende del parámetro $A$ –que, a la postre, representará el tamaño del dato inicial– y que las esferas no resultan invariantes por el flujo respectivo, para obtener la dependencia continua en el dato inicial tendremos que analizar la evolución de dos soluciones que comiencen en esferas cercanas. De eso trata el lema siguiente.

**Lema 3.2.3** *Sean $A, B \geq 0$, $F_A$ y $F_B$ los operadores dados por la fórmula (3.10) y $\phi_A$, $\phi_B \in \mathcal{H}$ los respectivos datos iniciales, entonces se tiene la estimación*

$$\|F_A(u)-F_B(v)\|_{\mathcal{H}}\leq C(t,A,B)\Big(|A-B|+\|\phi_A-\phi_B\|_{\mathcal{H}}+\|u-v\|_{\mathcal{H}}\Big).$$

Demostración.– La demostración es consecuencia inmediata del Lema 2.4.3 y de las estimaciones (3.11), (3.12), (3.14) y (3.15). ■

Los resultados anteriores permiten obtener el buen planteo del problema (3.1)–(3.2) cuando el dato inicial satisface $A(\phi)\geq 0$. Como lo expresa el siguiente teorema.

**Teorema 3.2.1** *Supongamos que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ y consideremos $s \geq 1$. Para cada $\phi \in \mathcal{H}$, tal que $\|\phi\|_0 \leq \|C\|_{L^1}$ existen $T = T(\phi) > 0$ y una única solución maximal $u \in C([0,T(\phi)),\mathcal{H}) \cap C^1([0,T(\phi)),H^{s-2})$ del problema (3.1)–(3.2). u es maximal en el sentido siguiente: si $T(\phi) < +\infty$ entonces $\|u(t)\|_{\mathcal{H}} \to +\infty$ cuando $t \to T(\phi)$.*

Demostración.– Tomemos $A = A(\phi)$. La Proposición 3.2.1 indica que existe $u \in C([0,T(\phi)),\mathcal{H}) \cap C^1([0,T(\phi)),H^{s-2})$ solución del problema (3.8)–(3.9). Por otro lado, la conservación de la carga (Lema 3.2.2) indica que $A(\phi) = A(u)$; finalmente, la definición de $A(u)$ y de $V_\infty(u)$ –ver (3.5) y (3.4)– indican que $V(u) = A\mu + V_\infty(u)$ de donde concluimos que $u$ es solución del problema (3.1)–(3.2). ∎

**Observación 3.2.2** *Dado que la función $v(x,t) := \overline{u}(x,-t)$ resuelve el problema en $(-T(\phi),0]$ el resultado es válido en $(-T(\phi),T(\phi))$.*

**Observación 3.2.3** *En lo sucesivo escribiremos $T$ en lugar de $T(\phi)$.*

**Observación 3.2.4** *Dado que el tipo de no linealidad que presenta el problema (3.1)–(3.2) es real puede aplicarse la ley de conservación de la carga dada por el Lema 3.2.2. A partir de la cual la unicidad se deduce inmediatamente.*

**Observación 3.2.5** *La dependencia continua de u con respecto al dato inicial $\phi$ es consecuencia directa del Lema 3.2.3.*

## 3.3. Leyes de conservación

Este problema, es decir, cuando $V$ está dado por la expresión (3.3) presenta una importante característica que está dada por el siguiente lema.

**Lema 3.3.1** *Conservación de la energía.*

*Supongamos que $A \geq 0$ y que $s \geq 1$. Supongamos además que $f \in C^\infty$. Sean $V$ el potencial dado por la expresión (3.3), $\varphi \in \mathcal{H}$ y $E$ el siguiente funcional de* energía.

$$E(\varphi) = \frac{1}{2}\|\partial_x\varphi\|^2 + \frac{1}{2}\{V(\varphi)\varphi;\varphi\} + \frac{1}{4}\{\left(\frac{|x|}{2} * |\varphi|^2\right)\varphi;\varphi\} - \frac{1}{2}\int\int_0^{|\varphi|^2} f(r)dr\,dx. \tag{3.16}$$

*Si $u \in C((-T,T),\mathcal{H}) \cap C^1((-T,T),H^{s-2})$ es la única solución del problema (3.1)–(3.2) entonces para todo $t \in (-T,T)$ se verifica que $E(u(t)) = E(u(0))$.*

Demostración.– Veamos primero la buena definición. Tomemos $\varphi \in H^s$. Dado que $s \geq 1$, es inmediato verificar que $\partial_x \phi \in L^2$. De la estimación $\|\varphi\|_{L^\infty} \leq C \, \|\varphi\|_{H^1}$, (ver Lema 2.3.2) deducimos la siguiente cota para el término integral

$$\Big| \int \int_0^{|\varphi|^2} f(r) dr \, dx \Big| \leq \|f\|_{L^\infty[0;\|\varphi\|_1]} \, \|\varphi\|_0 \, .$$

A partir de la igualdad $V(\varphi) = \frac{A}{2} \, \mu(x) + V_\infty(\varphi)$ (ver Observación 3.6) obtenemos

$$\Big| \{V(\varphi) \, \varphi; \varphi\} \Big| \leq \frac{A}{2} \, \|\varphi\|^2_{L^2_\mu} + \|V_\infty(\varphi)\|_{L^\infty} \, \|\varphi\|^2_0 \, .$$

**Observación 3.3.1** *El argumento anterior puede adaptarse para obtener la siguiente estimación*

$$\Big| \{ \frac{|x|}{2} * |\varphi|^2 \, \varphi; \varphi\} \Big| \leq \|\varphi\|^2_{L^2_\mu} \, \|\varphi\|^2_0 \, .$$

Esto muestra que $E$ está bien definido en $\mathcal{H}$.

Veamos ahora que $E$ se conserva. Para tal fin tomamos en consideración la identidad (3.3) y definimos la siguiente función $\mathcal{U}(x) := \frac{|x|}{2} * C$. De esta manera podremos escribir la energía como sigue

$$E(\varphi) = \frac{1}{2} \|\partial_x \varphi\|^2 + \frac{1}{2} \, \{\mathcal{U} \, \phi; \, \varphi\} - \frac{1}{4} \, \{ \left( \frac{|x|}{2} * |\varphi|^2 \right) \varphi; \varphi\} - \frac{1}{2} \int \int_0^{|\varphi|^2} f(r) \, dr \, dx. \tag{3.17}$$

El cálculo de la derivada temporal conduce a la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \partial_t \, E \quad &= \{-\partial_x^2 \, u; \partial_t \, u\} + \{\mathcal{U}(u) \, u; \partial_t \, u\} - \tfrac{1}{2} \{ \left( \tfrac{|x|}{2} * |u|^2 \right) \, u; \partial_t \, u\} \\ &\quad - \tfrac{1}{4} \, \{\partial_t \, \left( \tfrac{|x|}{2} * |u|^2 \right) \, u; \, u\} - \int_{\mathbb{R}} f(|u|^2) \, \mathrm{Re} \, (u \, \partial_t \, \overline{u}) \, dx. \end{aligned}$$

Ahora bien, dado que $\int f(|u|^2) \, \mathrm{Re} \, (u \, \partial_t \, \overline{u}) \, dx = \{ f(|u|^2) \, u; \partial_t \, u\}$ podemos escribir:

$$\partial_t \, E = \{\partial_x^2 \, u + L \, (u); \partial_t \, u\} - \frac{1}{4} \, \{\partial_t \, \left( \frac{|x|}{2} * |u|^2 \right) \, u; \, u\} + \frac{1}{2} \{ \left( \frac{|x|}{2} * |u|^2 \right) \, u; \partial_t \, u\}.$$

El primer término de la igualdad anterior desaparece pues $u$ es solución de la ecuación, mientras que los restantes términos son iguales debido a la paridad de $|x|$. Esto muestra que $E$ es constante a lo largo de la trayectoria $u(t)$. ■

## 3.4. Existencia global en $\mathcal{H}$

En esta sección nos ocuparemos de establecer resultados globales para el problema (3.1)–(3.2). Dado que la existencia de soluciones globales está fuertemente relacionada con el exponente crítico de la interacción local (ver Weinstein, [28]) algún control debe ser hecho. Esto sugiere las siguientes dos hipótesis alternativas:

(H1) $\quad f > 0: \quad f(r) \leq r^{\sigma} \quad$ con $\quad 0 \leq \sigma < 2.$

(H2) $\quad f < 0: \quad f \in C(\mathbb{R}).$

**Observación 3.4.1** *Como $f < 0$ significa que la interacción es atractiva ninguna hipótesis adicional es necesaria. Por otro lado, dado que la interacción local está dada por $f(|u|^2)\, u$, el caso $\sigma = 2$ corresponde al exponente crítico (ver [11] y [28]). De esta manera, en el caso $f > 0$ asumiremos que el exponente de $f$ es subcrítico.*

**Teorema 3.4.1** *Supongamos que $A \geq 0$. Supongamos además que (H1) o (H2) se cumplen. Sea $\phi \in \mathcal{H}$ y sea $u \in C((-T,T), \mathcal{H}) \cap C^1((-T,T), H^{s-2})$ la única solución (local) del problema (3.1)–(3.2). Entonces $T(\phi) = +\infty$ (es decir, $u$ está globalmente definida en $\mathcal{H}$.)*

Demostración.– Comenzamos por observar que una manera estándar de obtener existencia global en problemas de evolución es mostrar que la solución permanece en una región acotada del espacio: método que se conoce como «estimaciones *a priori*». De esta manera podremos limitarnos a mostrar cómo estimar $||u||_s$ y $||u||_{L^2_\mu}$. Más aún, utilizando las ideas del Lema 2.4.1 bastará con tomar el caso $s = 1$.

Tomemos entonces $s = 1$ y sea $u \in C((-T,T), H^1 \cap L^2_\mu) \cap C^1((-T,T), H^{-1})$ la única solución del problema (3.1)–(3.2). Usando que los términos $\{\left(\frac{|x|}{2} * |u|^2\right) u;\, u\}$ y $A\{\mu\, u; u\}$ son no negativos obtenemos la siguiente expresión

$$E(\phi) = E(u) \geq \frac{1}{2}||\partial_x u||_0^2 + \frac{1}{2}\{V_\infty(u)\, u;\, u\} - \frac{1}{2}\int \int_0^{|u|^2} f(r)\, dr\, dx.$$

Así si se cumple (H1) tendremos que

$$\left|\frac{1}{2}\int \int_0^{|u|^2} f(r)\, dr\, dx\right| \leq \frac{1}{\sigma+1}\, ||u||_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2}, \tag{3.18}$$

Aplicando, entonces, la estimación (2.3) –ver la desigualdad de Gagliardo–Nirenberg (Lema 2.2.1) y las observaciones allí enunciadas– obtenemos

$$||u||_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} \leq \varepsilon ||u||_1^2 + C(\varepsilon,\sigma)||u||_0^{\frac{2\sigma+4}{2-\sigma}}\ , \tag{3.19}$$

a partir de la cual, y considerando la desigualdad $\|V_\infty(u)\|_{L^\infty} \leq \|\mu C\|_{L^1} + \|u\|^2_{L^2_\mu}$ (ver Lema 3.2.1), obtenemos

$$\frac{1}{2}\,\|\partial_x u\|_0^2 \leq E(\phi_0) + \|\mu C\|_{L^1}\;\|u\|_0^2 + \|u\|^2_{L^2_\mu}\,\|u\|_0^2 + \varepsilon\,\|u\|_1^2 + C(\varepsilon,\sigma)\,\|u\|_0^{\frac{2\sigma+4}{2-\sigma}}\;.$$

Tomando entonces $\varepsilon < 1/2$ y usando la conservación de la carga (Lema 3.2.2) obtenemos la siguiente estimación

$$\|u\|_1 \leq C(\phi)\,(1 + \|u\|_{L^2_\mu})\,. \tag{3.20}$$

Por otro lado, si se verifica (H2), el término $\displaystyle\frac{1}{2}\int\int_0^{|u|^2} f(r)\,dr\,dx$ será no negativo. Eso nos conduce a la estimación,

$$\frac{1}{2}\|\partial_x u\|_0^2 \leq E(\phi) + \|V_\infty\|_{L^\infty}\;\|\phi\|_0^2\,,$$

de donde podemos recuperar la estimación (3.20).

Veamos ahora cómo estimar el término $\|u(t)\|^2_{L^2_\mu}$; para lo cual consideremos la siguiente identidad, válida para $t \in [0,T)$,

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2_\mu} = \|\phi\|^2_{L^2_\mu} + \int_0^t \frac{d}{dt'}\left(\|u(t')\|^2_{L^2_\mu}\right)\,dt'\;.$$

Usando que $\partial_t\, u = i\,\partial_x^2\, u - i\,(V(u) - f(|u|^2))\,u$ y que los términos correspondientes a $V(u)$ y $f(|u|^2)$ son nulos (pues ambas son funciones reales) obtenemos la siguiente expresión

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2_\mu} = \|\phi\|^2_{L^2_\mu} + 2\int_0^t \{i\,\partial_x^2\,u;\mu u\}dt'\;.$$

Tomando módulo en la igualdad anterior obtenemos

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|^2_{L^2_\mu} &\leq \|\phi\|^2_{L^2_\mu} + 2\int_0^t |\{i\,u;\partial_x\,\mu\;\partial_x\,u\}|\,dt' \\
&\leq \|\phi\|^2_{L^2_\mu} + 2\,\|\partial_x\,\mu\|_\infty \int_0^t \|u(t')\|_0\,\|\partial_x\,u(t')\|_0\,dt' \\
&\leq \|\phi\|^2_{L^2_\mu} + 2\,\|\partial_x\,\mu\|_\infty\,\|\phi\|_0 \int_0^t \|\partial_x\,u(t')\|_0\,dt'\;.
\end{aligned}$$

Ahora bien, aplicando la estimación (3.20) obtenemos

$$\|u(t)\|_{L^2_\mu} \leq C(\phi)(1 + t + \int_0^t \|u(t')\|_{L^2_\mu}\, dt')\,. \tag{3.21}$$

Consideremos ahora $I(t) := 2(1 + t + \int_0^t \|u(t')\|_{L^2_\mu}\, dt')^{1/2} - C(\phi)^{1/2}t - t$. A partir de la identidad (3.21) tenemos que $I'(t) \leq 0$ y, por lo tanto, $I(t) \leq I(0)$. Finalmente, un despeje adecuado produce las estimaciones, válidas en $\mathcal{H}^{(1)}$.

$$\|u(t)\|_{L^2_\mu} \leq C_1(\phi)\,(1 + t^2)\,, \tag{3.22}$$

$$\|u(t)\|_1 \leq C_2(\phi)\,(1 + t^2)\,. \tag{3.23}$$

Adaptando el argumento inductivo del Lema 2.4.1 y usando las estimaciones (3.11) y (3.12) obtenemos la validez del resultado para el caso general. ■

# 4 Existencia de Estados Fundamentales

## 4.1. Comportamiento del Potencial

En esta sección nos ocuparemos de entender el tipo de condición de contorno que debemos tomar en cuenta para que las soluciones de la ecuación de Poisson

$$\partial_x^2 V = C - |\phi|^2 , \tag{4.1}$$

donde $C \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ (el perfil de dopaje) es dato, puedan interpretarse como potenciales **atractivos**. Asimismo, estamos interesados en obtener información sobre el potencial que obtenemos en función de la función $\phi$ que ponemos. Básicamente, queremos describir la relación que existe entre la acotación del potencial, la propiedad $\phi \in L^2_\mu$ y lo que definiremos como *Hipótesis de Neutralidad*. Resultados que se expresan en el Teorema 4.1.1.

**Observación 4.1.1** *Dado que estamos modelando una interacción atractiva esperamos que el potencial $V$ sea decreciente cerca de $-\infty$ y creciente cerca de $+\infty$; por lo tanto, si $V$ resulta continuo, será acotado inferiormente.*

Dado que trabajaremos en $H^1$ sera útil tener a mano que tipo de propiedades satisface una solución de (4.1) cuando $\phi \in H^1$.

**Lema 4.1.1** *Sea $\phi \in H^1$ y sea $V$ una solución de (4.1) entonces las siguientes afirmaciones son válidas:*

*(a)* $V \in C^2$.

*(b) Existen y son finitos los límites* $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \partial_x V = \partial_x V^\pm$.

Demostración.– La primer afirmación es consecuencia de la inclusión $H^1 \hookrightarrow C$, ver Lema 2.3.2.

Para la segunda afirmación consideramos $R > 0$ tal que $\mathrm{Sop}(C) \subseteq [-R, R]$, en cuyo caso se tendrá $\partial_x^2 V = -|\phi|^2 \in L^1_{|x|>R}$. Recordando la definición del número $A$, ver (3.5),

$$A(\phi) := \|C\|_{L^1} - \|\phi\|^2_{L^2} , \tag{4.2}$$

resulta que $\partial_x V^+ - \partial_x V^- = A(\phi)$. Más aún, dado que $\partial_x^2 V \in L^1_{|x|>R}$, ambos números $\partial_x V^\pm$ son finitos. ∎

**Observación 4.1.2** *Del lema anterior se deduce que* $\partial_x V \in L^\infty$.

Motivados por los resultados que desarrollaremos en las secciones siguientes introducimos la siguiente definición.

**Definición 4.1.1** *Si* $\phi \in L^2$ *es tal que*

$$||C||_{L^1} - ||\phi||_{L^2}^2 = 0 \tag{4.3}$$

*diremos que* $\phi$ *satisface la* ***Hipótesis de Neutralidad****.*

**Observación 4.1.3** *Utilizaremos* $A = 0$ *e* ***Hipótesis de Neutralidad*** *indistintamente.*

Más adelante veremos que el caso $A = 0$ resulta crítico para el problema de minimizar la energía (ver Observación 4.3.10 más abajo) de modo que también utilizaremos la expresión *caso crítico*.

Antes de continuar con las propiedades de las soluciones de la ecuación (4.1) y motivados por la observación anterior introducimos la siguiente nomenclatura para cada uno de los posibles valores que puede tomar $A$.

- $A > 0$, es decir, $\partial_x V^- < \partial_x V^+$. Lo llamaremos *caso subcrítico*.

- $A < 0$, es decir, $\partial_x V^- > \partial_x V^+$. Lo llamaremos *caso supercrítico.*

De este modo, una solución cualquiera $V$ satisface una y sólo una de las tres clasificaciones dadas previamente. Por otro lado, para conocer cual es el signo de $\partial_x V^\pm$ necesitamos primero situar el origen de coordenadas, dado que estamos integrando la ecuación (4.1) está claro que $\partial_x V^\pm$ estará definido salvo constantes. Pues bien, la elección de la constante –es decir, la elección del origen de coordenadas– conduce a la clasificación del problema en los términos de la Observación 4.1.1. Así la interacción será atractiva[1] si y sólo si vale lo siguiente

$$\partial_x V^- \leq 0 \leq \partial_x V^+. \tag{4.4}$$

En otras palabras, para obtener un campo atractivo tenemos que situar el origen de coordenadas entre las asíntotas de $\partial_x V$. Esto motiva la siguiente definición.

**Definición 4.1.2** *Sea* $\phi \in H^1$*. Una condición de contorno para la ecuación (4.1) se dirá* **admisible** *si satisface la condición (4.4).*

El tipo de potenciales que tomaremos en consideración serán, pues, aquellos que se obtienen al resolver el problema

$$\begin{cases} \partial_x^2 V & = C - |\phi|^2 \\ \\ \partial_x V^\pm & \text{admisible} \end{cases}. \tag{4.5}$$

[1]Más precisamente, analizando caso por caso se observa que la única elección que conduce a un campo que sea atractivo en el infinito es la dada por (4.4).

**Observación 4.1.4** *En el caso crítico la **única** condición de contorno **admisible** es la condición de Neumann. En tal caso se recupera la noción de unicidad como lo expresa el siguiente lema.*

**Lema 4.1.2** *Sea $\phi \in H^1$ tal que satisface la Hipótesis de Neutralidad (4.3), entonces el problema (4.5) satisface* unicidad. *Dado que son potenciales,* unicidad *significa que dos soluciones cualesquiera difieren en una constante.*

**Observación 4.1.5** *La propiedad anterior no es válida en el caso subcrítico puesto que la elección de condiciones de contorno **admisibles** es múltiple.*

**Observación 4.1.6** *En el caso $A \geq 0$, y para una función $\phi \in L^2_\mu$, el potencial $V$ dado por (3.3) está bien definida, verifica $\partial_x V^- = 0$ y, por lo tanto, es admisible.*

En otras palabras, para una $\phi \in L^2_\mu$ la elección $V = \frac{|x|}{2} * (C - |\phi|^2)$ conduce a un potencial admisible. (En el caso $A \geq 0$, se entiende.)

**Observación 4.1.7** *En el caso supercrítico las condiciones de contorno **nunca** son admisibles.*

El siguiente lema será de utilidad en lo sucesivo.

**Lema 4.1.3** *Sea $\phi \in H^1$ y sea $V$ una solución de (4.1). Entonces son equivalentes:*

*(a)* $V \in L^\infty$.

*(b)* $\partial_x V \in L^1$.

Demostración.– $(b) \Rightarrow (a)$ es inmediato. Veamos la otra.

Como $\partial_x V \in C$ resulta que $\partial_x V \in L^1_{loc}$. Como quedó dicho en el Lemma 4.1.1, $\partial_x V$ es decreciente en $[R, +\infty)$ de manera que valen las desigualdades siguientes

$$\partial_x V(R) > \partial_x V(x) > \partial_x V(+\infty) = \partial_x V^+ \in \mathbb{R},$$

de donde deducimos que $\partial_x V(x)$ tiene signo para $|x| \to \infty$. Tenemos entonces que, para $|x| > M$, vale

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} |\partial_x V(z)| dz &= \pm \int_x^{+\infty} \partial_x V(z) dz \\ &= \pm(V(+\infty) - V(x)) \\ &\leq 2\, \|V\|_{L^\infty}\,. \end{aligned}$$

Con esto demostramos que $\partial_x V(x) \in L^1_{[M,+\infty)}$. De manera completamente similar podemos obtener que $\partial_x V(x) \in L^1_{(-\infty,-M])}$. Eso finaliza la demostración.

∎

Con esta información estamos en condiciones de relacionar el crecimiento de $V$ con el decaimiento de $\phi$.

### 4.1.1. Caso subcrítico

**Lema 4.1.4** *Supongamos que $\phi$ es tal que $A(\phi) > 0$ y sea $V$ una solución cualquiera del problema (4.5). Si $\phi \in H^1$ entonces $V \notin L^\infty$.*

**Observación 4.1.8** *Dado que ser admisible implica que el correspondiente potencial V es acotado inferiormente, $V \notin L^\infty$ pero tiene mínimo.*

**Observación 4.1.9** *Para $\phi \in \mathcal{H}$ el potencial $\frac{|x|}{2} * (C - |\phi|^2)$ está bien definido pero no resulta acotado.*

Demostración.– A partir del Lemma 4.1.1 sabemos que $V$ es continua de modo que hay que mostrar que $V$ tiende a infinito en los bordes. Como estamos en el caso subcrítico alguna de las dos derivadas tiene signo. Supongamos que $\partial_x V^+ > 0$, en tal caso existe $M > R$ tal que $\partial_x V(x) \geq \eta > 0$. Se tendrá, pues, la siguiente estimación para $V$, válida en $[M, +\infty)$: $V(x) > V(M) + \eta(x - M)$.

Concluimos que $V \xrightarrow{x \to +\infty} +\infty$. ■

**Observación 4.1.10** *En el caso en que $\partial_x V^\pm = 0$ aplicando L'H$\widehat{\text{o}}$pital se obtiene*

$$\frac{V(x)}{x} \to 0. \tag{4.6}$$

*Es decir, V es sublineal en la región donde $\partial_x V^\pm = 0$*

### 4.1.2. Caso crítico

La Observación 4.1.10 no genera ningún problema en el caso crítico –donde ambos límites son nulos– puesto que tenemos la siguiente caracterización.

**Teorema 4.1.1** *Sean $\phi \in H^1$ y $C \in C_c^\infty$ y consideremos el problema (4.5). Entonces dos cualesquiera de las siguientes afirmaciones implican la tercera.*

- *$\phi$ satisface la Hipótesis de Neutralidad.*
- $\phi \in L^2_\mu$
- $V \in L^\infty$

**Observación 4.1.11** *Este teorema demuestra que, bajo la Hipótesis de Neutralidad, la condición necesaria y suficiente para que el potencial resulte acotado es pedir $\phi \in L^2_\mu$.*

Demostración.– El Lema 3.2.1 junto con la identidad (3.6) del Capítulo anterior muestran que la Hipótesis de Neutralidad junto con la propiedad $\phi \in L^2_\mu$ producen un potencial acotado. Por otro lado, el Lema 4.1.4 muestra que un potencial acotado –en el caso admisible– implica la Hipótesis de Neutralidad. Lo que realmente importa es que la Hipótesis de Neutralidad junto con $V \in L^\infty$ implican $\phi \in L^2_\mu$.

La Propiedad 4.1.2 –valida bajo la Hipótesis de Neutralidad– permite elegir $V(-\infty) = 0$. Además, que se cumpla la Hipótesis de Neutralidad en un problema admisible implica $\partial_x V^+ = \partial_x V^- = 0$ de manera que podemos escribir

$$V(x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{z} \partial_x^2 V(r)\, dr\, dz\,,$$

expresión que, después de un manejo algebraico, se transforma en

$$V(x) = x\,\partial_x V(x) - \int_{-\infty}^{x} r\partial_x^2 V(r)\, dr\,.$$

Supongamos, pues, que $x < -R$. Los signos permiten escribir,

$$\int_{-\infty}^{x} |r|\, |\phi(r)|^2\, dr = V(x) - x\,\partial_x V(x)\,.$$

Como $V$ es acotada, $\phi \in L^2_\mu((-\infty, -R]) \iff x\,\partial_x V(x) \in L^\infty((-\infty, -R])$. Eligiendo $V(+\infty) = 0$ y usando que $\partial_x V^+ = 0$ podemos adaptar las cuentas anteriores al intervalo $[R, +\infty)$.

Veamos ahora que $x\,\partial_x V(x) \in L^\infty([R, +\infty))$. El Lema 4.1.3 y la hipótesis $V \in L^\infty$ implican que $\partial_x V \in L^1$. Fijemos $\varepsilon > 0$ y tomemos $M > 0$ tal que

$$\int_{M}^{x} \partial_x V(z) dz < \varepsilon.$$

Usando que $\partial_x V$ es decreciente y que $\partial_x V^+ = 0$ obtenemos que $\partial_x V(z) > 0$ y que vale la siguiente estimación:

$$(x - M)\,\partial_x V(x) < \int_{M}^{x} \partial_x V(z)\, dz < \varepsilon\,,$$

haciendo un despeje adecuado se obtiene

$$\left| x\,\partial_x V(x) \right| < \varepsilon + M\, \|\partial_x V\|_{L^\infty}\,.$$

Eso conlcuye la demostración. ∎

## 4.2. El método de la energía.

En lo sucesivo nos ocuparemos del problema de encontrar estados fundamentales para el siguiente problema de Schrödinger–Poisson

$$i\,\partial_t u = -\partial_x^2 u + V(u)\,u - f(|u|^2)\,u\,, \tag{4.7}$$
$$u(0,\cdot) = \phi \tag{4.8}$$
$$\partial_x^2 V = C - |u|^2\,, \tag{4.9}$$
$$\partial_x V \quad \text{admisible.} \tag{4.10}$$

En principio nos limitaremos a trabajar en el espacio $\mathcal{H}^{(1)} := H^1 \cap L^2_\mu$. No obstante, a partir de la ecuación diferencial que satisface el mínimo podemos deducir que éste y, por lo tanto, el correspondiente estado fundamental son funciones $C^\infty$. Ver Observaciones 4.3.5 y 4.3.15.

**Observación 4.2.1** *Llamando $\nu(x) := |x|$ resulta que los espacios $L^2_\mu$ y $L^2 \cap L^2_\nu$ tienen los mismos elementos y las normas $\|\cdot\|_{L^2_\nu}$ y $\|\cdot\|_{L^2_\mu}$ son equivalentes, de hecho se tiene la siguiente estimación:*

$$\|\phi\|^2_{L^2_\nu} \le \|\phi\|^2_{L^2_\mu} \le \|\phi\|^2_{L^2} + \|\phi\|^2_{L^2_\nu}. \tag{4.11}$$

Introduciendo la función

$$\psi(x) := \int \frac{|x-y| - |x|}{2}\, C(y)\, dy\,, \tag{4.12}$$

tendremos que

$$\frac{|x|}{2} * C = \|C\|_{L^1} \frac{|x|}{2} + \psi(x)\,. \tag{4.13}$$

**Observación 4.2.2** *Eligiendo como centro de coordenadas el centro de masa de $C$ resulta que $\psi$ tiene soporte compacto contenido en el soporte de $C$. Más aún, en tal caso tendremos la identidad*

$$\psi(x) := \int_{|x|}^{R} (y - |x|)\, C(\ sg\ (x)\, y)\, dy > 0\,.$$

Por otro lado, llamando

$$\varrho(x,y) := \frac{|x| + |y| - |x-y|}{2}\,, \tag{4.14}$$

obtenemos

$$\left\{\frac{|x|}{2} * |\phi|^2\, \phi; \phi\right\} = \|\phi\|^2_{L^2}\, \|\phi\|^2_{L^2_\nu} - \iint \varrho(x,y) |\phi(x)|^2\, |\phi(y)|^2\, dx\, dy\,. \tag{4.15}$$

**Observación 4.2.3** *La función $\varrho$ tiene las siguientes características.*

- $\mathrm{Sop}(\varrho) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x\,y \ge 0\}$.

- *Para* $xy \geq 0$ *se tiene* $\varrho(x,y) = \text{mín}\{|x|,|y|\}$.

Reemplazando las identidades (4.13) y (4.15) en la expresión (3.17) podemos escribir la energía como sigue

$$E(\phi) = \frac{1}{2}\|\partial_x\phi\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\|C\|_{L^1}\{\psi\,\phi;\phi\} + \frac{1}{4}\|\phi\|_{L^2_\nu}^2 \left(\|C\|_{L^1} - \|\phi\|_{L^2}^2\right)$$

$$+ \frac{1}{4}\iint \varrho(x,y)|\phi(x)|^2\,|\phi(y)|^2\,dx\,dy - \frac{1}{2}\int\int_0^{|\phi|^2} f(r)\,dr\,dx\,. \tag{4.16}$$

El término $\|\phi\|_{L^2_\nu}^2 \left(\|C\|_{L^1} - \|\phi\|_{L^2}^2\right)$ sugiere la siguiente clasificación del problema, comparar con la Observación 4.1.3:

- Caso subcrítico: $A := \|C\|_{L^1} - \|\phi\|_{L^2}^2 > 0$ (ver la definición de $A$ en el Lema 4.1.1).

- Caso crítico: $A = 0$. Segun la Observación 4.1.3 es la *Hipótesis de Neutralidad*.

- Caso supercrítico: $A < 0$.

Finalizaremos esta sección con el siguiente lema donde mostramos que los mínimos de la energía proveen estados fundamentales. De esta modo, convertimos el problema de hallar estados fundamentales en un problema de optimización. De ese problema nos ocupamos en la sección que sigue.

**Lema 4.2.1** *Sea* $L$ *el operador diferencial definido por el lado derecho de (4.7), es decir* $L(\phi) = -\partial_x^2\phi + V(\phi)\,\phi - f(|\phi|^2)\,\phi$ *donde* $\phi \in \mathcal{H}$ *y sea* $E$ *la energía definida en* $\mathcal{H}$ *por (3.17). Entonces* $\nabla E = L$.

Demostración.– Tenemos que demostrar que $\forall\phi \in \mathcal{H}$ y $\forall\varphi \in L^2$ vale $\partial\, E_{(\phi)}(\varphi) = \{L(\phi),\varphi\}$, donde

$$\partial\, E_{(\phi)}(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}(E(\phi+\varepsilon\,\varphi) - E(\phi)).$$

Por densidad bastará con hacerlo para $\varphi \in \mathcal{H}$.

El término de la energía cinética satisface

$$\frac{1}{2}\|\partial(\phi+\varepsilon\varphi)\|^2 = \frac{1}{2}\|\partial\phi\|^2 + \varepsilon\,\{\partial\,\phi;\partial\,\varphi\} + \frac{\varepsilon^2}{2}\|\partial\varphi\|^2$$

$$= \frac{1}{2}\|\partial\phi\|^2 + \varepsilon\,\{-\partial^2\,\phi;\;\varphi\} + \frac{\varepsilon^2}{2}\|\partial\varphi\|^2\,. \tag{4.17}$$

Para la interacción local definimos $c(\varepsilon) := |\phi|^2 + 2\,\varepsilon\,\mathrm{Re}\,(\phi\,\overline{\varphi})$ y $d(\varepsilon) := |\phi + \varepsilon\varphi|^2$, a partir de los cuales podemos escribir:

$$\frac{1}{2}\int\int_0^{d(\varepsilon)} f = \frac{1}{2}\int\int_0^{|\phi|^2} f + \frac{1}{2}\int\int_{|\phi|^2}^{c(\varepsilon)} f + \frac{1}{2}\int\int_{c(\varepsilon)}^{d(\varepsilon)} f$$

$$= \frac{1}{2}\int\int_0^{|\phi|^2} f + \varepsilon\,\mathrm{Re}\int f(|\phi|^2 + \eta(\varepsilon))\,\phi\,\overline{\varphi} + \frac{\varepsilon^2}{2}\int f(\gamma(\varepsilon))\,|\varphi|^2\,. \tag{4.18}$$

El término de la energía potencial lo desdoblamos en sus partes homogéneas. Por un lado tenemos,

$$\frac{1}{2}\Big\{\frac{|x|}{2} * C\,(\phi+\varepsilon\varphi); (\phi+\varepsilon\varphi)\Big\} = \frac{1}{2}\Big\{\frac{|x|}{2} * C\,\phi; \phi\Big\} + \varepsilon\,\Big\{\frac{|x|}{2} * C\,\phi; \varphi\Big\} + \frac{\varepsilon^2}{2}\Big\{\frac{|x|}{2} * C\,\varphi; \varphi\Big\}\,. \tag{4.19}$$

Y por otro,

$$\frac{1}{4}\Big\{\frac{|x|}{2} * |\phi+\varepsilon\varphi|^2\,(\phi+\varepsilon\,\varphi); (\phi+\varepsilon\,\varphi)\Big\} = \frac{1}{4}\Big\{\frac{|x|}{2} * |\phi|^2\,\phi; \phi\Big\} + \frac{2\varepsilon}{4}\,\Big\{\frac{|x|}{2} * |\phi|^2\,\phi; \varphi\Big\}$$

$$+ \frac{2\varepsilon}{4}\Big\{\frac{|x|}{2} * \ \mathrm{Re}\,(\phi\,\overline{\varphi})\,\phi; \phi\Big\} + O(\varepsilon^2)\,,$$

la simetría de $|x|$ conduce a la igualdad

$$\Big\{\frac{|x|}{2} * \ \mathrm{Re}\,(\phi\,\overline{\varphi})\,\phi; \phi\Big\} = \Big\{\frac{|x|}{2} * |\phi|^2\,\phi; \varphi\Big\}\,,$$

de donde deducimos

$$\frac{1}{4}\Big\{\frac{|x|}{2} * |\phi+\varepsilon\varphi|^2\,(\phi+\varepsilon\,\varphi); (\phi+\varepsilon\,\varphi)\Big\} =$$

$$\frac{1}{4}\Big\{\frac{|x|}{2} * |\phi|^2\,\phi; \phi\Big\} \quad + \varepsilon\,\Big\{\frac{|x|}{2} * |\phi|^2\,\phi; \phi\Big\} + O(\varepsilon^2)\,. \tag{4.20}$$

Juntando las igualdades (4.17)–(4.20) se tiene

$$E(\phi+\varepsilon\,\varphi) = E(\phi) + \varepsilon\{L(\phi); \varphi\} + O(\varepsilon^2)$$

de donde concluimos que $\nabla E = L$.

■

## 4.3. La existencia de mínimos

### 4.3.1. Caso subcrítico

**Observación 4.3.1** *Dado que los estados fundamentales están globalmente definidos haremos las mismas consideraciones que las hechas para la existencia global. Es decir, asumiremos que la interacción local $f$ satisface (H1) o (H2).*

**Lema 4.3.1** *Supongamos que la interacción $f$ cumple (H1) o (H2). Sea $S_A$ la esfera en $L^2$ dada por $S_A := \{\phi \in L^2 : \|\phi\|_{L^2}^2 = \|C\|_{L^1} - A\}$ donde $\|C\|_{L^1} \geq A > 0$. Entonces $E$ es coerciva en $S_A \cap \mathcal{H}^{(1)}$.*

Demostración.– Si se cumple (A2), la coercividad de $E$ en $S_A \cap \mathcal{H}^{(1)}$ se deduce inmediatamente de la desigualdad

$$E(\phi) > 1/2\,\|\partial_x \phi\|_{L^2}^2 - \|\psi\|_{L^\infty}\,\|\phi\|_{L^2}^2 + 1/4\|\phi\|_{L^2_\nu}^2\left(\|C\|_{L^1} - \|\phi\|_{L^2}^2\right) \tag{4.21}$$

Cuando $f$ es repulsiva, la estimación $f(r) \leq r^\sigma$ con $\sigma < 2$, permite controlar el término de la interacción local con la norma en $H^1$. Más precisamente, para $0 < \varepsilon < 1/2$ las estimaciones (3.18) y (3.19) nos permiten deducir la desigualdad

$$E(\phi) > (\frac{1}{2} - \varepsilon)\,\|\partial_x \phi\|_{L^2}^2 - C(\varepsilon)\,\|\phi\|_{L^2}^{\frac{2\sigma+4}{2-\sigma}} + \frac{1}{4}\|\phi\|_{L^2_\nu}^2\left(\|C\|_{L^1} - \|\phi\|_{L^2}^2\right).$$

El lema está, pues, demostrado. ∎

**Observación 4.3.2** *La coercividad de $E$ en $S_A \cap \mathcal{H}^{(1)}$ permite definir, para cada $0 < A < \|C\|_{L^1}$ la cantidad:*

$$\lambda_A := inf\{E(\phi) : \phi \in S_A\},$$

*y ademaś garantiza la existencia de una sucesión minimizante, es decir, existe $\phi_n \in S_A$ tal que $E(\phi_n) \to \lambda_A$.*

El siguiente lema fija condiciones apropiadas de compacidad y resultará de utilidad para demostrar la existencia de mínimos.

**Lema 4.3.2** *Sea $1 \leq p < \infty$. Sea $\{\varphi_j\}_{j\in J}$ una familia acotada en $L^p(\mathbb{R})$ y supongamos que satisface las siguientes hipotesis*

- $\forall \varepsilon > 0$ *existe* $R > 0$ *tal que* $\forall j \in J \int_{|x|>R} |\varphi_j|^p < \varepsilon^p$. *Es decir, la masa está uniformemente localizada.*
- $\forall \varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $\forall |h| < \delta$ *vale* $\int |\varphi_j(x+h) - \varphi_j(x)|^p\,dx < \varepsilon^p$. *Es decir, la masa no se concentra.*

*Entonces existen $\varphi \in L^p$ y una sucesión $\varphi_n$ tal que $\varphi_n \xrightarrow{L^p} \varphi$.*

Demostración.– Ver Teorema 2.21 en Adams, [1]. ■

**Corolario 4.3.1** *La inclusión $\mathcal{H}^{(1)} \hookrightarrow L^2$ es compacta.*

Demostración.– Consiste en adaptar las hipótesis del Lema (4.3.2). Sea, entonces, $\varphi_n$ una sucesión acotada en $\mathcal{H}$, y sea $M > 0$ tal que $||\varphi_n||_{\mathcal{H}} \leq M$ entonces valen las siguientes estimaciones:

$$\int_{|x|>R} |\varphi_n|^2 \leq R^{-1} \int_{|x|>R} |x||\varphi_n|^2 \leq \frac{1}{R}||\varphi_n||_\mu \leq \frac{1}{R}||\varphi_n||_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{R}M\,,$$

$$\int_I |\varphi_n(x+h) - \varphi_n(x)|^2 \leq C\,h^2||\varphi_n||_{H^1} \leq C\,h^2\,M\,,$$

de donde se deduce la validez de la afirmación. ■

**Teorema 4.3.2** *Supongamos que la interacción local $f$ satisface (H1) o (H2) y supongamos que $A > 0$. Entonces existe $\phi_A \in \mathcal{H}^{(1)}$ tal que $E(\phi_A) = \text{mín}\{E(\phi) : \phi \in S_A\}$.*

Demostración.– La existencia de $\lambda_A = \inf\{E(\phi) : \phi \in S_A\}$ es consecuencia de la coercividad de $E$ en $S_A \cap \mathcal{H}^{(1)}$. Sea, pues, $\{\phi_n\}_n \in S_A \cap \mathcal{H}^{(1)}$ una sucesión minimizante. Como $E(\phi_n)$ es acotada, la coercividad implica que $\phi_n$ es acotada en $\mathcal{H}^{(1)}$. Sea, entonces, $M > 0$ tal que $||\partial_x\,\phi_n||_{H^1} < M$ y $||\phi_n||_{L^2_\nu} < M$. Dado que la bola en $\mathcal{H}^{(1)}$ es débilmente compacta (es el Teorema de Alaoglu en un espacio de Hilbert) existen $\phi \in \mathcal{H}^{(1)}$ y una subsucesión, que también llamaremos $\phi_n$, que verifican $\phi_n \xrightharpoonup{H^1} \phi$ y $\phi_n \xrightharpoonup{L^2_\nu} \phi$. Aplicando el Corolario 4.3.1 a la sucesión $\phi_n$ obtenemos $\phi_n \xrightarrow{L^2} \phi$, de donde deducimos que $\phi \in S_A \cap \mathcal{H}^{(1)}$.

Esto ofrece la desigualdad $\lambda_A \leq E(\phi)$. Veamos ahora que $E(\phi) \leq \lambda_A$.

Como $\psi \in L^\infty$ se sigue que

$$\frac{1}{2}\{\psi\,\phi_n;\phi_n\} \to \frac{1}{2}\{\psi\,\phi;\phi\}\,.$$

Para el término con $f$ utilizamos la siguiente estimación.

$$\left| \int \int_0^{|\phi_n|^2} f(r) - \int \int_0^{|\phi|^2} f(r) \right| \leq ||f||_{L^\infty_{[0,||\phi_n||^2_{L^\infty}+||\phi||^2_{L^\infty}]}} \,|||\phi_n|^2 - |\phi|^2||_{L^1}$$

$$\leq ||f||_{L^\infty_{[0,2\,M]}} \,|||\phi_n|^2 - |\phi|^2||_{L^1}\,.$$

El término correspondiente a la energía cinética verifica $\partial_x\,\phi_n \xrightharpoonup{L^2} \partial_x\,\phi$ de donde deducimos que $||\partial_x\,\phi||_{L^2} \leq \text{lím}\,||\partial_x\,\phi_n||_{L^2}$.

**Observación 4.3.3** *Los resultados anteriores no utilizan la hipótesis $\phi \in L^2_\mu$.*

Para el término integral introducimos el operador $T_\varrho : L^1_\nu \to L^\infty$ definido por

$$T_\varrho(g)(x) := \int \varrho(x,y)\, g(y)\, dy\,, \tag{4.22}$$

donde $\varrho$ está definida por (4.14). La buena definición de este operador es consecuencia de la desigualdad

$$\|T_\varrho(g)\|_{L^\infty} \le \|g\|_{L^1_\nu}\,.$$

Tendremos entonces

$$\{T_\varrho(|\phi_n|^2); |\phi_n|^2\} - \{T_\varrho(|\phi|^2); |\phi|^2\} = \{T_\varrho(|\phi_n|^2 - |\phi|^2); |\phi|^2\} + \{T_\varrho(|\phi_n|^2); |\phi_n|^2 - |\phi|^2\}$$

$$= \{|\phi_n|^2 - |\phi|^2; T_\varrho(|\phi|^2)\} \; + \{T_\varrho(|\phi_n|^2); |\phi_n|^2 - |\phi|^2\}\,,$$

de donde deducimos que

$$|\{T_\varrho(|\phi_n|^2); |\phi_n|^2\} - \{T_\varrho(|\phi|^2); |\phi|^2\}| \le \||\phi_n|^2 - |\phi|^2\|_{L^1} \left(\|\phi_n\|_{L^2\nu} + \|\phi\|_{L^2\nu}\right).$$

Dado que, $\phi_n \xrightarrow{L^2} \phi$, y que $\|\phi\|_{L^2\nu} \le M$ y $\|\phi_n\|_{L^2\nu} \le M$, concluimos la convergencia de los términos integrales:

$$\frac{1}{4}\iint \varrho(x,y)|\phi_n(x)|^2\, |\phi_n(y)|^2\, dx\, dy \to \frac{1}{4}\iint \varrho(x,y)|\phi(x)|^2\, |\phi(y)|^2\, dx\, dy\,.$$

Análogamente a lo hecho para el término con la energía cinetica, de la convergencia débil $\phi_n \xrightarrow{L^2_\nu} \phi$ deducimos que $\|\phi\|_{L^2_\nu} \le \lim \|\phi_n\|_{L^2_\nu}$.

Tenemos entonces que

$$E(\phi) \le \lim E(\phi_n) = \lambda_A. \tag{4.23}$$

Como ya hemos probado que vale la desigualdad contraria, resulta que $E(\phi) = \lambda_A$. Eso concluye la demostración.

■

**Observación 4.3.4** *De la igualdad (4.23) se deduce que $\phi_n \xrightarrow{\mathcal{H}^{(1)}} \phi$, es decir, la sucesión minimizante converge fuertemente en $\mathcal{H}^{(1)}$.*

**Observación 4.3.5** *Como $\phi_A$ es continua (Lema 2.3.2) de la ecuación diferencial $\lambda\,\phi_A = L(\phi_A)$, donde $\lambda$ es el correspondiente multiplicador de Lagrange, podemos deducir que $\phi_A \in C^\infty(\mathbb{R})$.*

**Corolario 4.3.3** *Sea $A > 0$, sea $\phi_A \in \mathcal{H}^{(1)}$ tal que $E(\phi_A) = \min\{E(\phi) : \phi \in S_A\}$ y sea $\lambda$ el correspondiente multiplicador de Lagrange. La función $u_A(x,t) = e^{i\lambda t}\,\phi_A$ es una solución (global) fuerte de la ecuación (4.7).*

### 4.3.2. Caso supercrítico

Como en este caso el término con la norma $L^2_\nu$ está restando tenemos que saber si el término positivo $\frac{1}{4}\{T_\varrho(|\phi|^2); |\phi|^2\}$ alcanza para mantener la carga localizada. El siguiente ejemplo muestra que esto no ocurre.

**Ejemplo 4.3.1** *Consideremos para cada $R > 0$ la siguiente función*

$$\phi_R(x) := \begin{cases} \phi_R^{(1)}(x) := a\sqrt{\dfrac{R-1}{2R}} & |x| < 1 \\ \phi_R^{(2)}(x) := \dfrac{a}{R} & x \in [R^2, R^2 + R] \\ 0 & \textit{otro caso} \end{cases} \tag{4.24}$$

*donde $a > 0$ es una cantidad cualquiera.*

**Observación 4.3.6** *La función $\phi_R(x)$ definida por (4.24) verifica*

- $||\phi_R||^2 = a^2$. *Luego, el parámetro a es la norma en $L^2$.*
- $||\phi_R||^2_{L^2_{\nu c}} \xrightarrow{R\to+\infty} +\infty$. *Para todo $0 < c \leq 1$.*
- *El término integral satisface*

$$\frac{1}{4}\int\int \varrho(x,y)\, |\phi_R(x)|^2\, |\phi_R(y)|^2\, dx\, dy \leq M\,.$$

- *Para cualquier $2 < p$ vale $\phi_R \in L^p$ y $||\phi_R||_{L^p} \to 0$.*
- $\phi_R^{(2)} \xrightarrow{L^2} 0$.

**Observación 4.3.7** *El término de la interacción local es negligible independientemente del exponente. No obstante, sólo podría ayudar a localizar la carga en el caso atractivo.*

**Observación 4.3.8** *Ciertamente, $\phi_R \notin H^1$ pero podemos suavizarla con norma $H^1$ acotada uniformemente en R. Supondremos entonces que $\phi_R \in H^1$.*

**Lema 4.3.3** *Para cada $A < 0$ existe una sucesión $\{\phi_R\}_{R>R(A)}$ que verifica $||\phi_R||_0 = ||C||_{L^1} - A$ y además*

$$E(\phi_R) \xrightarrow{R\to+\infty} -\infty.$$

**Observación 4.3.9** *Comparar con la Observación 4.1.7.*

### 4.3.3. Caso crítico

**Observación 4.3.10** *Comparando los resultados del Teorema 4.3.2 con los del Lema 4.3.3 se comprende el motivo por el cual el caso $||C||_{L^1} = ||\phi||^2_{L^2}$ es crítico.*

De acuerdo con la identidad (4.16) la energía, en la *Hipótesis de Neutralidad*, adopta la siguiente expresión.

$$E(\phi) = \frac{1}{2}||\partial_x\phi||^2_{L^2} + \frac{1}{2}\{\psi\,\phi;\phi\} + \frac{1}{4}\,a(\phi) + \frac{1}{2}\int\int_0^{|\phi|^2} f(r)\,dr\,dx\,, \tag{4.25}$$

donde hemos introducido la función:

$$a(\phi) := \int T_\varrho(\phi)(x)\,|\phi(x)|^2\,dx\,. \tag{4.26}$$

El siguiente lema fija un tipo de convexidad que satisface el término dado por la función $a(\cdot)$. La demostración es consecuencia inmediata de la definición y será omitida.

**Lema 4.3.4** *Sea $\phi = \phi_1 + \phi_2$ donde $Sop(\phi_1) \subseteq [-R, R]$ y $Sop(\phi_2) \cap Sop(\phi_1) = \emptyset$. Entonces*

$$a(\phi) = a(\phi_1) + a(\phi_2) + 2\,||\phi_2||^2_{L^2}\,||\phi_1||^2_{L^2_\nu}\,. \tag{4.27}$$

**Observación 4.3.11** *Bajo las hipótesis del lema anterior se deduce la igualdad*

$$E(\phi) = E(\phi_1) + E(\phi_2) + \frac{1}{2}\,||\phi_2||^2_{L^2}\,||\phi_1||^2_{L^2_\nu}\,. \tag{4.28}$$

Con respecto a la coercividad, la demostración hecha en el Lema 4.3.1 permite obtener el siguiente resultado.

**Lema 4.3.5** *Supongamos que se cumple (H1) o (H2). Sea $S_0$ la esfera en $L^2$ dada por $S_0 := \{\phi \in L^2 : ||\phi||^2_{L^2} = ||C||_{L^1}\}$. Entonces $E$ es coerciva en $S_0 \cap H^1$.*

En el caso subcrítico la coercividad en $L^2_\nu$ es suficiente para demostrar la compacidad en $L^2$ de la sucesión minimizante; en este caso, sólo se tiene coercividad en $H^1$, que es insuficiente para ese propósito. No obstante, el comportamiento de una sucesión acotada de $L^2$ está caracterizado por el siguiente lema, ver Lions, [18] Lema I.1.

**Lema 4.3.6** *Sea $\phi_n \in L^2$ tal que $||\phi_n||_{L^2} = 1$. Entonces ocurre una y sólo una de las siguientes situaciones:*

*(a) (Dicotomía)*
*Existen $R_0 \in \mathbb{R}$, una sucesión $R_n \to \infty$, y dos sucesiones $\phi_n^{(k)} \in L^2, k = 1, 2$, tales que $\phi_n = \phi_n^{(1)} + \phi_n^{(2)}$, y $\phi_n^{(k)}$ verifica*

- *Sop*$(\phi_n^{(1)}) \subseteq [-R_0, R_0]$, *con* $\|\phi_n^{(1)}\|_{L^2} = 1 - \gamma$
- *Sop*$(\phi_n^{(2)}) \subseteq \mathbb{R} - [-R_n, R_n]$, *con* $\|\phi_n^{(2)}\|_{L^2} = \gamma$,

*donde* $0 < \gamma < 1$.

(b) *(Desaparición)*
*Para cada I intervalo de medida finita y para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $n_0$ *tal que para* $n > n_0$ *vale*

$$\int_I |\phi_n|^2 < \varepsilon.$$

(c) *(Compacidad)*
*Para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $R = R(\varepsilon) > 0$ *tal que*

$$\int_{[-R,R]} |\phi|^2 \geq 1 - \varepsilon.$$

Presentamos ahora el principal resultado de esta sección.

**Teorema 4.3.4** *Supongamos que la interacción local f satisface (H1) o (H2). Existe* $\phi_0 \in S_0 \cap \mathcal{H}^{(1)}$ *tal que* $E(\phi_0) = \min\{E(\phi) : \phi \in S_0\}$.

Demostración.– Sea $\phi_n \in S_0 \cap H^1$ una sucesión minimizante. La coercividad de $E$ en $H^1$ implica que existe $\phi \in H^1$ tal que $\phi_n \xrightarrow{H^1} \phi$. Para convertir la convergencia débil en convergencia fuerte, alcanzará con mostrar que una sucesión minimizante sólo puede satisfacer la situación (c) del Lema 4.3.6.

**Observación 4.3.12** *En el caso subcrítico esta condición es consecuencia inmediata de la coercividad de E en* $L^2_\gamma$, *que no está disponible en el caso crítico.*

Supongamos que ocurre (a). En tal caso, de la igualdad (4.28) deducimos que $E(\phi_n) > E(\phi_n^{(2)})$. Por otro lado la coercividad del Lema 4.3.5 implica que existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $E(\phi_n^{(2)}) > a(\phi_n^{(2)}) - M$.
A partir de la igualdad

$$a(\phi_n^{(2)}) > R_n \|\phi_n^{(2)}\|^4 = R_n \gamma^4,$$

y usando que $\gamma > 0$ obtenemos $E(\phi_n) \to \infty$, lo cual contradice la propiedad minimizante de la sucesión.

Supongamos que ocurre (b). Es el mismo argumento. Usa fuertemente el hecho de que $\gamma > 0$.

Concluimos que sólo puede ocurrir (c). Hemos demostrado, entonces, que la sucesión minimizante $\phi_n$ satisface la hipótesis de localización que requiere el Lema 4.3.2. Aplicando, pues, ese Lema tenemos que $\phi_n \xrightarrow{L^2} \phi$ de donde deducimos que $\phi \in S_0$ y, por lo tanto $\lambda_0 \leq E(\phi)$.

De la demostración del Teorema 4.3.2 deducimos lo siguiente

$$\frac{1}{2}\{\psi\,\phi_n;\phi_n\} \to \frac{1}{4}\|C\|_{L^1}\{\psi\,\phi;\phi\}\,.$$

$$\int\int_0^{|\phi_n|^2} f(s) \to \int\int_0^{|\phi|^2} f(s)\,.$$

$$\|\partial_x\,\phi\|_{L^2} \leq \text{lím}\,\|\partial_x\,\phi_n\|_{L^2}\,.$$

Finalmente, aplicando el Lema de Fatou a la sucesión $g_n(x,y) := \varrho(x,y)\,|\phi_n(x)|^2\,|\phi_n(y)|^2$ obtenemos

$$a(\phi) \leq \text{lím}\,a(\phi_n)\,. \tag{4.29}$$

Tenemos, pues, que $E(\phi) \leq \lambda_0 = \text{lím}\,E(\phi_n)$, como $\phi \in S_0$ resulta que $E(\phi) = \lambda_0$. Esto muestra que existe un mínimo en $S_0 \cap H^1$.

Veamos ahora que $\phi \in L^2_\nu$. Comenzaremos considerando la ecuación diferencial que satisface $\phi$, ecuación que se obtiene considerando el gradiente de la energía dada por (4.25).

**Observación 4.3.13** *Los cálculos hechos en Lema 4.2.1, ofrecen para $\varphi \in H^1$ arbitraria la siguiente expresión.*

$$\nabla E(\varphi) = -\partial_x^2\,\varphi + \psi\,\varphi + T_\varrho(|\varphi|^2)\,\varphi - f(|\varphi|^2)\,\varphi\,. \tag{4.30}$$

Si $\varphi \in L^2_\nu$ pueden reagruparse los términos de la ecuación anterior para obtener la que ofrece el citado lema. En este caso, la ausencia de la hipótesis $\varphi \in L^2_\nu$ no permite definir el potencial $\frac{|x|}{2} * |\varphi|^2$, de manera que hay que considerar otro potencial. De hecho, para $\phi \in L^2_\nu$ se tiene la siguiente igualdad

$$\psi(x) + T_\varrho(|\varphi|^2)(x) = \frac{|x|}{2} * (C - |\varphi|^2)(x) + \|\varphi\|^2_{L^2_\nu}\,,$$

que pone de manifiesto que dos potenciales admisibles en la *Hipótesis de Neutralidad*, difieren en una constante. Lo interesante es que la constante en este caso es $\|\varphi\|_{L^2_\nu}$. De esta manera recuperamos el resultado del Teorema 4.1.1, a saber,

$$T_\varrho(|\varphi|^2) \in L^\infty \iff \varphi \in L^2_\nu\,.$$

**Observación 4.3.14** *Dado que*

$$\partial_x T_\varrho(|\varphi|^2)(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_x^{+\infty} |\varphi(z)|^2\, dz & x > 0 \\ \displaystyle -\int_{-\infty}^{x} |\varphi(z)|^2\, dz & x < 0\,, \end{cases} \tag{4.31}$$

*resulta que $T_\varrho(|\phi_0|^2)$ es un potencial admisible en el sentido de la Definición 4.1.2.*

Sea, pues, $\phi \in H^1$ el mínimo de $E$ y consideremos la ecuación diferencial $\nabla E(\phi) = \lambda\phi$ que sale del multiplicador de Lagrange, donde $\nabla E$ está dada por (4.25),

$$-\partial_x^2\,\phi + \psi\,\phi + T_\varrho(|\phi|^2)\,\phi - f(|\phi|^2)\,\phi - \lambda\phi = 0\,.$$

**Observación 4.3.15** *Dado que $\phi \in H^1$ resulta que $\phi \in C(\mathbb{R})$ de manera que $\partial_x^2\,\phi$ es continua y por lo tanto, $\phi \in C^\infty$.*

Supongamos que $T_\varrho(|\phi|^2) \notin L^\infty$. A partir de las igualdades dadas por (4.31) deducimos que $\partial_x T_\varrho(|\phi|^2)$ tiene signo en $|x| \to \infty$, de donde concluimos que $T_\varrho(|\phi|^2) \xrightarrow{|x|\to\infty}$ sg $(x)\,\infty$.

Como $\phi \xrightarrow{|x|\to\infty} 0$ (Lema 2.3.2) resulta que, para $|x| \gg 1$, se verifica la desigualdad

$$q(x) := T_\varrho(|\phi|^2)\,\phi - f(|\phi|^2)\,\phi - \lambda\phi \sim T_\varrho(|\phi|^2)\,\phi > M^2\,\phi\,,$$

aplicando el Teorema 2.4.2 obtenemos que $\phi(x) \sim O(e^{-M\,x})$, por lo tanto $\phi \in L^2_\mu$. El Teorema 4.1.1 provee, entonces, una contradicción. De esta manera tenemos que $T_\varrho(|\phi|^2) \in L^\infty$ y, por lo tanto, $\phi \in L^2_\nu$.

Queda demostrado que existen mínimos y que están en $\mathcal{H}^{(1)}$. ■

# 5 Efecto Regularizante

## 5.1. Introducción. Estimaciones *à la Strichartz*

Las propiedades dispersivas de la ecuación de Schrödinger son el punto de partida para la obtención de diferentes resultados conocidos bajo el nombre común de “Efecto Regularizante”. Para identificar en forma precisa cuál de ellos es el que tomaremos en cuenta dedicamos esta sección introductoria a la descripción de algunos resultados básicos. Dado que nuestro trabajo está orientado al caso unidimensional, presentaremos tales resultados en $\mathbb{R}$. Una descripción exhaustiva puede verse en Cazenave [6] y en las referencias allí citadas.

La primer propiedad regularizante que presenta la ecuación de Schrödinger

$$i\,\partial_t u = -\partial_x^2 u \tag{5.1}$$

es consecuencia del siguiente lema.

**Lema 5.1.1** *Sea $U(t)$ el grupo unitario generado por $i\,\partial_x^2$ y sea $K(t,x)$ la función definida en $\mathbb{R}-\{0\}\times\mathbb{R}$ por*

$$K(t,x) := \left(\frac{1}{4\pi\, i\, t}\right)^{1/2} e^{\frac{i\,|x|^2}{4\,t}}\,.$$

*Entonces, para cada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y cada $t \neq 0$ vale*

$$U(t)\varphi = K(t,x) *_x \varphi. \tag{5.2}$$

Demostración.– Aplicando transformada de Fourier (en la variable $x$) en la ecuación (5.1) y resolviendo la ecuación ordinaria que satisface $\widehat{u(t)}$ obtenemos la siguiente expresión

$$\widehat{u(t)}(k) = e^{-i\,|k|^2\,t}\,\widehat{\varphi}(k)\,. \tag{5.3}$$

Dado que $\widehat{K(t)}(k) = e^{-4\pi^2\,i|k|^2\,t}$, tomando antitransformada obtenemos el resultado. ∎

Como quedó dicho, el lema anterior permite obtener el siguiente efecto regularizante.

**Propiedad 5.1.1** *Sea $p \in [1,2]$ y sea $p' \in [2,\infty]$ el exponente conjugado de $p$. Entonces, para cada $t \neq 0$ el operador $U(t) : L^p \to L^{p'}$ es continuo. Más aún, para $\varphi \in L^p$ se verifica la siguiente estimación*

$$\|U(t)\varphi\|_{L^{p'}} \leq (4\pi\,|t|)^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{2}}\,\|\varphi\|_{L^p}\,.$$

Demostración.– Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Aplicando la desigualdad de Young (ver Propiedad 2.2.1 en el Capí tulo 1) en la expresión (5.2) deducimos que

$$\|U(t)\varphi\|_{L^\infty} \leq (4\pi\,|t|)^{-\frac{1}{2}}\ \|\varphi\|_{L^1}\,.$$

Como $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es denso en $L^1$ obtenemos que $U(t) \in \mathcal{B}(L^1, L^\infty)$ y satisface

$$\|U(t)\|_{\mathcal{B}(L^1,L^\infty)} \leq (4\pi\,|t|)^{-\frac{1}{2}}\,.$$

Aplicando $\|\cdot\|_{L^2}$ en (5.3) obtenemos

$$\|U(t)\|_{\mathcal{B}(L^2)} \leq 1\,.$$

Obtenemos el caso general interpolando entre $p = 2$ y $p = \infty$. (Aplicar el Teorema 2.2.1 (Teorema de Riesz–Thorin).) ∎

**Observación 5.1.1** *La propiedad anterior es, básicamente, una propiedad de la transformada de Fourier (en esencia es la desigualdad de Haussdorf–Young, ver Lema 2.2.2). Más aún, a partir de la fórmula (5.2) obtenemos la expresión*

$$U(t)\varphi(x) = (4\pi\, i\, t)^{-1/2}\, e^{\frac{i|x|^2}{4t}} \int e^{-\frac{i\,x\cdot y}{2\,t}}\, e^{\frac{i\,|y|^2}{4\,t}}\ \varphi(y)\ dy\,,$$

*que podemos interpretarla diciendo que, salvo cambios de escala y multiplicación por una función de módulo 1, $U(t)$ no es más que la transformada de Fourier. De manera que esta propiedad regularizante puede verse como una consecuencia de la interferencia destructiva.*

**Observación 5.1.2** *Cabe destacar que la propiedad anterior tiene como principal desventaja el hecho de que los espacios $L^p$ no son invariantes por $U(t)$.*

No obstante la observación anterior, este primer efecto regularizante ofrece estimaciones *a priori* que resultan útiles para el problema no homogéneo. Tales estimaciones fueron obtenidas por Strichartz [26], y luego generalizadas por Ginibre y Velo [13]. Para expresar dicho resultado haremos uso de la siguiente definición.

**Definición 5.1.1** *Diremos que el par $(q, r)$ es* admisible *si se verifica lo siguiente*

*(i)* $2 \leq r \leq \infty$ ;

*(ii)* $\dfrac{2}{q} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{r}$ .

Consideremos entonces el problema no homogéneo,

$$i\,\partial_t\, u + \partial_x^2\, u = f$$

$$u(0) = \varphi\,.$$

**Teorema 5.1.1** *Valen las siguientes propiedades*

*(i)* *Para cada $\varphi \in L^2$ y para cada par admisible $(q, r)$, la función $t \to U(t)\varphi$ pertenece a $L^q(\mathbb{R}, L^r) \cap C(\mathbb{R}, L^2)$. Más aún, existe una constante $C = C(q)$ tal que, para toda $\varphi \in L^2$ vale la siguiente desigualdad*

$$\|U(\cdot)\varphi\|_{L^q(\mathbb{R},L^r)} \leq C(q)\ \|\varphi\|_{L^2}\,.$$

*(ii)* *Sean $I$ un intervalo (acotado o no), $J = \bar{I}$ y $t_0 \in J$. Sean, además, $(\gamma, \rho)$ un par admisible y $f \in L^{\gamma'}(I, L^{\rho'})$. Entonces, para cada par admisible $(q, r)$, la función definida para $t \in I$ por*

$$t \to \Phi_f(t) := \int_{t_0}^{t} U(t-s)\ f(s)\, ds\,,$$

*pertenece a $L^q(I, L^r) \cap C(J, L^2)$. Más aún, existe una constante $C = C(q, \gamma)$ tal que, para toda $f \in L^{\gamma'}(I, L^{\rho'})$ vale la siguiente desigualdad*

$$\|\Phi_f\|_{L^q(I,L^r)} \leq C(q,\gamma)\, \|f\|_{L^{\gamma'}(I,L^{\rho'})}\,.$$

Demostración.– Ver Cazenave, [6], Teorema 3.2.5. ■

Una consecuencia importante de este teorema es el decaimiento en $L^r$ de la solución en el problema homogéneo. Como lo muestra el siguiente corolario.

**Corolario 5.1.2** *Sean $\varphi \in H^1$ y $r \in (2, \infty]$.* Entonces

$$\|U(t)\varphi\|_{L^r} \xrightarrow{t\to\pm\infty} 0\,.$$

Mencionemos, finalmente, una extensión importante de las estimaciones anteriores al Sistema de Schrödinger–Poisson (ver Castella, [7]). Para tal fin consideremos una sucesión $\varphi := \{\varphi_j(x)\}_{j\in\mathbb{N}}$ de funciones de $L^2$, que será el dato inicial, una sucesión (fija) $\lambda := \{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de números reales no negativos (normalizados de tal suerte que $\sum \lambda_j = 1$), que interpertaremos como la probabilidad de que el dato inicial $\varphi$ esté en cada uno de los *estados puros* $\psi_j(t, x)$, donde los estados puros satisfacen el Sistema de ecuaciones de Schrödinger (planteado para $x \in \mathbb{R}^3$):

$$\forall\, j \in \mathbb{N} \begin{cases} i\,\partial_t\,\psi_j(t,x) & = -\Delta_x\,\psi_j(t,x) + V(t,x)\,\psi_j(t,x)\,, \\ \psi_j(0,x) & = \varphi_j(x)\,. \end{cases} \tag{5.4}$$

Dado que la ecuación de Poisson depende de la carga total $n(t, x) := \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j\, |\psi_j(t, x)|^2$, los estados puros están acoplados a través de la expresión para $V$ dada por

$$V(t,x) = (4\,\pi\,|x|)^{-1} *_x n(t,x)\,. \tag{5.5}$$

Consideremos, finalmente, el siguiente espacio:

$$L^p(\lambda) := \{\phi = (\phi_j)_{j\in\mathbb{N}} : \|\phi\|_{L^p(\lambda)} := \sum \lambda_j \|\phi_j\|^2_{L^p} < \infty\}\,.$$

**Observación 5.1.3** *El sistema (5.4) acoplado con (5.5) admite solución única. Más aún, los números $\lambda_j$ son constantes en el tiempo, ver F. Brezzi–P. Markowich [5].*

**Observación 5.1.4** *Señalemos además que si se toma en cuenta la interacción con la red cristalina, es decir, si se considera un sistema cuántico* abierto*, resulta que $\lambda_j = \lambda_j(t)$. Ver A. Arnold [3].*

El resultado es, entonces, el siguiente.

**Teorema 5.1.3** *Estimaciones tipo Strichartz para estados cuánticos mixtos.*
*Sean $T > 0$ y $(q, r, )$ un par admisible. Entonces valen las siguientes afirmaciones:*

*(i) Para cada $\phi \in L^p(\lambda)$ la función $t \to U(t)\phi$ pertenece a $L^q([-T, T], L^r(\lambda))$. Más aún, existe una constante $C = C(q)$ tal que,*

$$\|U(\cdot)\phi\|_{L^q([-T,T],L^r(\lambda))} \leq C(q)\, \|\phi\|_{L^2(\lambda)}\,.$$

*(ii) Para cada para admisible $(a, b)$ existe una constante $C = C(a, q)$ tal que para cualquier $f \in L^{q'}([-T, T], L^{r'}(\lambda))$ se verifica*

$$\Big\| \int_0^t U(t-s)\, f(s)\, ds \Big\|_{L^a([-T,T],L^b(\lambda))} \leq C(a, q)\, \|f\|_{L^{q'}([-T,T],L^{r'}(\lambda))}\,.$$

*(iii) En particular, existe una constante $C = C(q)$ tal que para cada $f \in Y_T^{q,r}$ vale*

$$\Big\| \int_0^t U(t-s)\, f(s)\, ds \Big\|_{X_T^{q,r}} \leq C(a, q)\, \|f\|_{Y_T^{q,r}}\,.$$

*Donde los espacios $X_T^{q,r}$ e $Y_T^{q,r}$ están dados por*

$$\begin{aligned} X_T^{q,r} &:= L^q([-T, T], L^r(\lambda)) \cap L^\infty([-T, T], L^2(\lambda)) \\ Y_T^{q,r} &:= L^{q'}([-T, T], L^{r'}(\lambda)) + L^1([-T, T], L^2(\lambda))\,. \end{aligned}$$

## 5.2. Efecto regularizante *à la Kato*

Comenzaremos esta sección por el siguiente efecto regularizante que presenta la ecuación de Korteweg–de Vries (KdV), resultado que fue demostrado por Kato en [14].

Consideremos entonces la ecuación KdV generalizada:

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + a(u)\, \partial_x u = 0\,, \tag{5.6}$$

donde $a \in C^\infty(\mathbb{R})$.

**Teorema 5.2.1** *Sea $s > 3/2$, sea $\phi \in H^s$ el dato inicial y sea $(-T;T)$ el intervalo maximal, donde $T = T(\phi)$. Sea $u \in C((-T,T);H^s)$ la única solución de (5.6) tal que $u(x,0) = \phi$. Entonces, para cada $0 < T_1 < T$ y $0 < R < +\infty$ se verifica*

$$u \in L^2([-T_1,T_1];H^{s+1}(-R,R)),$$

*con norma dependiendo sólo de $\|\phi\|_s$, $R$ y $T_1$.*

Resultados similares son válidos para la ecuación lineal de Schrödinger

$$i\partial_t u = (-\Delta + V)\,u \tag{5.7}$$

$$u(x,0) = \phi(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)\ n \geq 3\,. \tag{5.8}$$

donde $V$ es una función real acotada tal que, para algunas constantes $C, \delta > 0$ , satisface

$$|V(x)| \leq C\,(1 + |x|^2)^{-1-\delta}\,.$$

Dado que la restricción de $-\Delta + V$ al espacio $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ es esencialmente autoadjunta tiene una única extensión autoadjunta en $L^2(\mathbb{R}^n)$ a la que llamaremos $(-\Delta + V)\tilde{}$. Finalmente, la proyección sobre el espectro continuo será notada $P_{ac}$.

El resultado es, entonces, como sigue. Ver Ben–Artzi, Klainerman, [4].

**Teorema 5.2.2** *Supongamos que $0$ no es ni un autovalor ni un valor de resonancia de $(-\Delta + V)\tilde{}$ y sea $\phi \in P_{ac}(L^2(\mathbb{R}^n))$. Entonces existe una constante $C$ tal que, si $u(x,t)$ es la única solución de (5.7)–(5.8) entonces*

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^n}(1 + |x|^2)^{-1-\delta}\left|(I + (-\Delta + V)\tilde{}\,P_{ac})^{1/4}\,u(x,t)\right|^2 dx\,dt \leq C\,\|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,.$$

En particular para $V \equiv 0$ tenbemos el siguiente corolario.

**Corolario 5.2.3** *Sea $u(x,t)$ la única solución del problema (5.7)–(5.8) con $V \equiv 0$. Entonces existe una constante $C = C(n)$, $n \geq 3$, tal que*

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^n}(1 + |x|^2)^{-1}\left|(I - \Delta)^{1/4}\,u(x,t)\right|^2 dx\,dt \leq C\,\|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,.$$

**Observación 5.2.1** *Los resultados previos muestran que el grupo en el caso lineal mejora la regularidad local. Más precisamente, la solución gana globalmente media derivada.*

En la ecuación de Benjamin–Ono (BO)

$$\partial_t\,u + u\,\partial_x u + H\partial_x^2 u = 0 \quad x,t \in \mathbb{R} \tag{5.9}$$

$$u(x,0) = \phi\,, \tag{5.10}$$

donde $H$ es la transformada de Hilbert (ver Lema 2.3.3), Ponce mostró el siguiente resultado, ver [21].

**Teorema 5.2.4** *Para cada $\phi \in H^s(\mathbb{R})$ con $s > 3/2$ el problema (5.9)–(5.10) tiene una única solución $u(t)$ que pertenece a la clase*

$$C(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R})) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}, H^{s+1/2}_{loc}(\mathbb{R})).$$

**Observación 5.2.2** *En este caso también se obtiene una ganancia (local) de media derivada.*

Finalmente, para la ecuación no lineal de Schrödinger con derivada

$$i\partial_t u = -\partial_x^2 u + \partial_x(T_\lambda(u)\, u) \quad x \in \mathbb{R}\,, t > 0 \tag{5.11}$$

$$u(x,0) = \phi\,, \tag{5.12}$$

donde $T_\lambda(u) = |u|^2 - \lambda H(|u|^2)$, $\lambda > 0$ y $H$ es la transformada de Hilbert, Rial, ver [22], demostró el siguiente efecto regularizante.

**Teorema 5.2.5** *Sean $T > 0$ y $\omega \in H^\infty$ y supongamos que el dato inicial $\phi \in L^2$. Entonces existe una constante $C = C(T, \omega, \|\phi\|^2_L) > 0$ tal que si $u$ es la única solución del problema (5.11)–(5.12) entonces*

$$\int_{[0,T]} \|\omega\, u\|^2_{H^{1/4}} \le C\,.$$

**Observación 5.2.3** *En este caso sólo se gana un cuarto de derivada.*

## 5.3. El resultado principal

En esta sección establecemos el tipo de efecto regularizante que presentan las soluciones del problema dado por

$$i\,\partial_t u = -\partial_x^2 u + V(u)\,u - f(|u|^2)\,u\,, \tag{5.13}$$

$$u(x,0) = \phi(x)\,, \tag{5.14}$$

donde $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $C \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ y $V(u) := \frac{|x|}{2} * (C - |u|^2)\,.$

Tal efecto regularizante está descripto en el siguiente teorema.

**Teorema 5.3.1** *Supongamos que $s \ge 1$ y que $\|\phi\|_{L^2} \le \|C\|_{L^1}$. Sea $u(t)$ la única solución maximal del problema (5.13)–(5.14) dada por el Teorema 3.2.1. Entonces*

$$u \in L^2_{loc}\left((-T,T), H^{s+1/2}_{loc}\right).$$

**Observación 5.3.1** *Como consecuencia de este teorema resulta que $u(t) \in H^{s+1/2}_{loc}$ para casi todo $t \in (-T,T)$. Deducimos entonces que, para casi todo $t \in (-T,T)$ y para cada $\varepsilon > 0$, se verifica $u(t) \in C^{s-\varepsilon}_{loc}$. De esta manera, para valores pequeños de $s$, más precisamente, para $s \in [3/2, 2)$, la solución satisface $u' \in L^2_{loc}((-T,T) \times \mathbb{R})$. Lo cual representa una importante mejora con respecto al resultado $u' \in C((-T,T), H^{s-2})$ dado por el Teorema (3.2.1).*

**Observación 5.3.2** *Como quedó dicho, este resultado es una generalización (local en el espacio y el tiempo) del caso lineal dado por el Teorema 5.2.2.*

Demostración.– Haremos la demostración en varias etapas.

**Primer etapa:**

Consideremos $\omega \in C_c^\infty$ y $R \in \mathbb{R}$ tales que $\operatorname{sop}(\omega) \subseteq [-R, R]$, entonces para $T_1 < T(\phi)$ se verifica la siguiente desigualdad:

$$\int_{-T_1}^{T_1} \int |\omega J^{s+1/2} u|^2 \leq ||\omega||_{L^\infty} \int_{-T_1}^{T_1} \int_{-R}^{R} |J^{s+1/2} u|^2 .$$

Eligiendo $\omega \in C_c^\infty$ tal que $0 \leq \omega \leq 1$ y $\omega \equiv 1$ en $[-R, R]$ tendremos que

$$\int_{-T_1}^{T_1} \int_{-R}^{R} |J^{s+1/2} u|^2 \leq \int_{-T_1}^{T_1} \int \omega |J^{s+1/2} u|^2 = \int_{-T_1}^{T_1} \{\omega J^{s+1/2} u;\ J^{s+1/2} u\} ,$$

podremos, pues, restringirnos a este tipo de funciones de soporte compacto.

La siguiente identidad será de utilidad en lo sucesivo

$$\begin{aligned} \{\omega J^{s+1/2} u;\ J^{s+1/2} u\} = {} & \{\omega J^{1/2}(J^s - 1)\, u;\ J^{1/2}(J^s - 1)\, u\} \\ & + 2\{\omega(J^s - 1)\, u; Ju\} + \{(J^s - 1)\, u; [J^{1/2}; \omega] J^{1/2}\, u\} \\ & + \{\omega J^{1/2}\, u; J^{1/2}\, u\}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Veamos ahora cómo eliminar las medias derivadas de la identidad anterior. Para eso consideramos $\Omega \in C^\infty$ tal que $\omega := \partial_x \Omega$, la transformada de Hilbert $H$ (ver Lema 2.3.3) y los operadores de proyección dados por $P_\pm := 1/2(1 \pm i\, H)$ (ver Rial, [22]). Asimismo, consideramos la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\partial_t \langle \Omega J^s P_\pm\, u\, ;\ J^s P_\pm\, u \rangle = {} & \\ & \{i\, \Omega\, J^s\, \partial_x^2\, P_\pm\, u; J^s\, P_\pm\, u\} \\ & -\{i\, \Omega\, J^s\, P_\pm\, V(u)\, u; J^s\, P_\pm\, u\} + \{i\, \Omega\, J^s\, P_\pm\, f(u)\, u; J^s\, P_\pm\, u\} . \end{aligned} \tag{5.16}$$

Por otro lado, el término lineal puede escribirse de la siguiente manera, donde la simetría elimina el segundo término en la primer igualdad:

$$\begin{aligned} \{i\, \Omega J^s\, \partial_x^2\, P_\pm\, u; J^s\, P_\pm\, u\} & = \{i\, [\Omega\, ; \partial_x]\, \partial_x\, J^s\, P_\pm\, u; J^s\, P_\pm\, u\} + \{i\, \Omega\, \partial_x\, J^s\, P_\pm\, u; \partial_x\, J^s\, P_\pm\, u\} \\ & = -\{i\, \omega\, \partial_x\, J^s\, P_\pm\, u; J^s\, P_\pm\, u\} . \end{aligned} \tag{5.17}$$

Usando que la transformada de Hilbert satisface $H^2 = -1$ y $[H;\, J^s] = [H;\, \partial_x] = 0$ deducimos la siguiente expresión,

$$
\begin{aligned}
-\{i\,\omega\,\partial_x\, J^s\, P_\pm\, u;\, J^s\, P_\pm\, u\} &= \{i\,\omega\, H\, H\, \partial_x\, J^s\, P_\pm\, u;\, J^s\, P_\pm\, u\} \\
&= \{i\,[\omega\,;H]\,\partial_x\, H\, J^s\, P_\pm\, u;\, J^s\, P_\pm\, u\} \\
&\quad + \{i\, H\,\omega\, H\,\partial_x\, J^s\, P_\pm\, u;\, J^s\, P_\pm\, u\} \\
&= \{B_1\, H\, J^s\, P_\pm\, u;\, J^s\, P_\pm\, u\} \\
&\quad \pm \{\omega\, H\,\partial_x\, J^s\, P_\pm\, u;\, J^s\, P_\pm\, u\}\,,
\end{aligned} \tag{5.18}
$$

donde hemos definido $B_1 := i\,[\omega\,; H]\,\partial_x$.

**Observación 5.3.3** *Dado que $J^s - 1$ conmuta con $P_\pm$ las identidades (5.16), (5.17) y (5.18) siguen siendo válidas si el operador $J^s$ se reemplaza por $J^s - 1$.*

**Observación 5.3.4** *Aplicando el Lema 2.3.3 obtenemos que el operador $B_1$ es acotado en $L^2$. Más aún, el correspondiente término en la identidad (5.18) satisface la estimación*

$$
\left|\{B_1\, H\,(J^s - 1)\, P_\pm\, u; (J^s - 1)\, P_\pm\, u\}\right| \leq C(\omega)\ \|u\|_s^2\,. \tag{5.19}
$$

Por otro lado, dado que $H\partial_x = D$ y que $J = (1 + D^2)^{1/2}$, donde $D$ es el operador pseudo–diferencial cuyo símbolo es $|k|$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\{\omega\, H\partial_x\, v;\ v\} &= \{\omega\, D\, v;\ v\} = \{\omega\,(D - J)\, v;\ v\} + \{\omega\, J\, v;\ v\} \\
&= \{\omega\,(D - J)\, v;\ v\} + \{[\omega\,; J^{1/2}]\, J^{1/2}\, v;\ v\} + \{\omega\, J^{1/2}\, v;\, J^{1/2}\, v\} \\
&= \{B_2\, v;\ v\} + \{\omega\, J^{1/2}\, v;\, J^{1/2}\, v\}\,,
\end{aligned} \tag{5.20}
$$

donde $B_2 := \omega\,(D - J) + [\omega\,; J^{1/2}]\, J^{1/2}$.

**Observación 5.3.5** *Adaptando la demostración del Lema 2.3.6 obtenemos que el operador $D - J$ es acotado. Por otro lado el Lema 2.3.5 afirma que el operador $[\omega, J^{1/2}]\, J^{1/2}$ también lo es, de modo que $B_2$ resulta acotado. Asimismo, se cumple la siguiente estimación:*

$$
\left|\{B_2\,(J^s - 1)\, P_\pm\, u; (J^s - 1)\, P_\pm\, u\}\right| \leq C(\omega)\ \|u\|_s^2\,. \tag{5.21}
$$

Haciendo el reemplazo $v = P_{\pm}(J^s - 1)\,u$ en (5.20), reemplazando $J^s$ por $J^s - 1$ en (5.16)–(5.18) y haciendo un despeje adecuado obtenemos la siguiente expresión,

$$\begin{aligned}\{\omega\, J^{1/2}(J^s-1)P_{\pm}\,u; J^{1/2}(J^s-1)P_{\pm}\,u\} &= \pm\frac{1}{2}\partial_t\,\langle\Omega\,(J^s-1)\,P_{\pm}\,u\,;\,(J^s-1)\,P_{\pm}\,u\rangle\\ &\mp\{B_1\,H\,(J^s-1)\,P_{\pm}\,u;(J^s-1)\,P_{\pm}\,u\}\\ &-\{B_2\,(J^s-1)\,P_{\pm}\,u;(J^s-1)\,P_{\pm}\,u\}\\ &\pm \text{ términos no lineales.}\end{aligned} \tag{5.22}$$

**Segunda etapa:**

En esta etapa mostraremos que si el resultado es válido para $P_{\pm}\,u$ entonces es válido para $u$. Para tal fin, comenzamos considerando la identidad

$$\begin{aligned}\{\omega\,J^{1/2}\,v;J^{1/2}\,v\} &= \{\omega\,J^{1/2}\,P_+\,v;J^{1/2}\,P_+\,v\}+\{\omega\,J^{1/2}\,P_-\,v;J^{1/2}\,P_-\,v\}\\ &+2\,\{\omega\,J^{1/2}\,P_+\,v;J^{1/2}\,P_-\,v\}\end{aligned}$$

de la cual deducimos que será suficiente acotar el último término. Dado que,

$$\{\omega\,J^{1/2}\,P_+\,v;J^{1/2}\,P_-\,v\} = \{[J^{1/2}\,;\omega]\,J^{1/2}\,P_+\,v;P_-\,v\}+\{\omega\,J\,P_+\,v;P_-\,v\}\,,$$

aplicando el Lema 2.3.5 obtenemos $\left|\{[J^{1/2}\,;\omega]\,J^{1/2}\,P_+\,v;P_-\,v\}\right| \leq C(\omega)\ \|v\|_0^2$. Por otro lado, el Lema 2.3.6 aplicado a la igualdad, $\{\omega\,J\,P_+\,v;P_-\,v\} = \{[P_-\,;\omega]\,J\,P_+\,v;\,v\}$, produce la siguiente identidad,

$$\{\omega\,J\,P_+\,v;P_-\,v\} = \{[P_-\,;\omega]\,\partial_x\,g\,P_+\,v;\ v\}+\{[P_-\,;\omega]\,P_+\,v;\ v\},$$

a partir de la cual y haciendo el reemplazo $v = J^s\,u$ podemos obtener las estimaciones,

$$\begin{aligned}\left|\{[P_-\,;\omega]\,\partial_x\,g\,P_+\,J^s\,u;\ J^s\,u\}\right| &\leq C(\omega)\ \|u\|_s^2,\\ \left|\{[P_-\,;\omega]\,P_+\,J^s\,u;\ J^s\,u\}\right| &\leq C(\omega)\ \|u\|_s^2\,,\end{aligned}$$

de donde podemos concluir que

$$\begin{aligned}&\{\omega\,J^{1/2}\,v;J^{1/2}\,v\}\leq\\ &\qquad\{\omega\,J^{1/2}\,P_+\,v;J^{1/2}\,P_+\,v\}+\{\omega\,J^{1/2}\,P_-\,v;J^{1/2}\,P_-\,v\}+C(\omega)\ \|u\|_s^2\,,\end{aligned} \tag{5.23}$$

**Tercer etapa:**

La acotación de los términos no lineales. Comencemos considerando las igualdades

$$\{i\,\Omega\,(J^s-1)\,P_\pm\, f(|u|^2)\,u;\,J^s\,P_\pm\,u\} = \{i\,P_\pm\,\Omega\,P_\pm\,(J^s-1)\, f(|u|^2)\,u;\,(J^s-1)\,u\}$$

$$\{i\,\Omega\,(J^s-1)\,P_\pm\,V(u)\,u;\,(J^s-1)\,P_\pm\,u\} = \{i\,P_\pm\,\Omega\,P_\pm\,(J^s-1)\,V(u)\,u;\,(J^s-1)\,u\}\,.$$

Llamando $\Phi := P_\pm\,\Omega\,P_\pm$, podemos escribir

$$\begin{aligned}\{i\,\Phi\,(J^s-1)\,V(u)\,u;\,(J^s-1)\,u\} &= \{i\,\Phi\,[J^s;\ V(u)]\,u;\,(J^s-1)\,u\}\\ &\quad + \{i\,\Omega\,[P_\pm\,;\,V(u)]\,(J^s-1)\,u;\,(J^s-1)\,P_\pm\,u\}\,.\end{aligned}$$

Ahora bien, dado que el potencial puede escribirse

$$V(u) = \frac{A}{2}\,\mu + V_\infty(u)$$

tendremos la igualdad

$$\begin{aligned}\{i\,\Phi\,(J^s-1)\,V(u)\,u;\,(J^s-1)\,u\} &= \{i\,\Phi\,[(J^s-1);\ V_\infty(u)]\,u;\,(J^s-1)\,u\}\\ &\quad + \{i\,\Omega\,[P_\pm\,;\,V_\infty(u)]\,(J^s-1)\,u;\,(J^s-1)\,P_\pm\,u\}\\ &\quad + \{i\,\Phi\,[(J^s-1);\ \mu]\,u;\,(J^s-1)\,u\}\\ &\quad + \{i\,\Omega\,[P_\pm\,;\,\mu]\,(J^s-1)\,u;\,(J^s-1)\,P_\pm\,u\}\,. \qquad (5.24)\end{aligned}$$

Las propiedades de $V_\infty$ dadas por el Lema 3.2.1 junto con el Lema 2.3.7 permiten acotar los tres primeros términos en (5.24). La acotación del último término es consecuencia de los Lemas 2.3.3 y 2.3.6. Hemos obtenido, entonces, la estimación para el término con el potencial,

$$\Big|\{i\,\Phi\,(J^s-1)\,V(u)\,u;\,(J^s-1)\,u\}\Big| \le C(\omega)\,\|u\|_s^2. \qquad (5.25)$$

Finalmente, con respecto al término local, la Observación 2.3.2 permite obtener la estimación

$$\Big|\{i\,\Phi\,(J^s-1)\,f(|u|^2)\,u;\,(J^s-1)\,u\}\Big| \le C(\omega)\,\widetilde{f}\,(\|u\|_s)\ \|u\|_s^2. \qquad (5.26)$$

**Conclusión**

Aplicando la desigualdad de Cauchy–Schwarz en la expresión (5.15) obtenemos

$$\begin{aligned}\{\omega\,J^{s+1/2}\,P_\pm\,u;\,J^{s+1/2}\,P_\pm\,u\} &\le \{\omega\,J^{1/2}(J^s-1)\,u;\,J^{1/2}(J^s-1)\,u\}\\ &\quad + 2\|u\|_s\,\|u\|_1 + C(\omega)\,\|u\|_s\,\|u\|_0 + \|u\|_1\,\|u\|_0\\ &\le \{\omega\,J^{1/2}(J^s-1)\,u;\,J^{1/2}(J^s-1)\,u\}\\ &\quad + C(\omega)\,\|u\|_s\,\|u\|_1\,.\end{aligned}$$

Usando la expresión (5.22), las estimaciones (5.25), (5.26) e integrando en un intervalo compacto $I \subseteq (-T, T)$ obtenemos, respectivamante

$$\int_I \{\omega\, J^{s+1/2}\, P_\pm\, u; J^{s+1/2}\, P_\pm\, u\}\, dt \leq C(\omega)\, \max_I \{\|u(\cdot, t)\|_s\}$$

$$+ C(\omega) \int_I \|u(\cdot, t')\|_s\, dt'$$

$$+ C(\omega) \int_I \widetilde{f}\,(\|u(\cdot, t')\|_s)\, \|u(\cdot, t')\|_s\, dt'\,,$$

de donde deducimos que

$$\int_I \{\omega\, J^{s+1/2}\, P_\pm\, u; J^{s+1/2}\, P_\pm\, u\}\, dt \leq C(|I|, \omega)\, \max_I \{\|u(\cdot, t)\|_s\}\,.$$

Si agregamos las estimaciones *a priori* del Capítulo 3, para lo cual tenemos que restringirnos al caso exponente subcritico obtendremos

$$\int_I \{\omega\, J^{s+1/2}\, P_\pm\, u; J^{s+1/2}\, P_\pm\, u\}\, dt \leq C(|I|, \omega) \|\phi\|^2_{\mathcal{H}}\,.$$

Finalmente la estimación (5.23) de la segunda etapa ofrece la estimación deseada:

$$\int_I \int |\omega J^{s+1/2}\, u|^2 \leq C(|I|, \omega) \max_I \{\|u(\cdot, t)\|_s\}\,.$$

Eso concluye la demostración. ■

# 6 Bibliografía


[1] R. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, First Edition, 1978.

[2] R. Adams, J. Fournier, *Sobolev Spaces*, Academic Press, Second Edition, 2003.

[3] A. Arnold, Self-consistent relaxation time models in quantum mechanics, *Communications in Partial Differential Equations* **21/3-4** (1996) 473-506.

[4] M. Ben–Artzi, S. Klainerman, Decay and regularity for the Schrödinger equation, *Journal Anal. Math.* **58** (1992) 25-37.

[5] F. Brezzi, P. Markowich, The three dimensional Wigner–Poisson problem: Existence, uniqueness and approximation, *Mathematical Methods in Applied Sciences* **14** (1991) 35-61.

[6] T. Cazenave, *An introduction to nonlinear Schrödinger equations,* (Textos de Métodos Matemáticos **2**6 Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1996).

[7] F. Castella, $L^2$–solutions to the Schrödinger–Poisson System: Existence, Uniqueness, Time behaviour and Smoothing effects, *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.* (1997) 7:1051-1083.

[8] R. R. Coiffman, Y. Meyer, Fourier Analysis of multilinear convolutions, Calderón's theorem and analysis on Lipschitz curves, *Lecture Notes in Mathematics* #**779** Springer, (1979) 106-122.

[9] P. Constantin, J.-C. Saut, Local smoothing properties of dispersive equations, *J. Amer. math. Soc.* **1** (1989) 413-446.

[10] G. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*, (Second edition, Princeton University Press, 1995).

[11] R. Glassey, On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation, *Journal of Mathematical Physics* **18** (1977) 1794-1797.

[12] J. Ginibre, G. Velo, On the Global Cauchy Problem for some Non Linear Schrödinger Equation, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire* Vol 1 N 4 (1984), 309-323.

[13] J. Ginibre, G. Velo, The Global Cauchy Problem for the Non Linear Schrödinger Equation Revisited, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire* Vol 2 (1985), 309-327.

[14] T. Kato, On the Cauchy Problem for the (Generalized) Korteweg–de Vries Equation, *Studies in Applied Mathematics, Advances in Mathematics Supplementary Studies* Volume 8 (1983) 93-128.

[15] T. Kato, Nonlinear Schrödinger equations, in *Schrödinger operators* Lecture Notes in Physics #**345** Springer, (1989) 218-263.

[16] C. Kenig, G. Ponce, L. Vega, Small solutions of the nonlinear Schrödinger equation, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire* **10** (1993) 255-288.

[17] P.L. Kelley, Self focusing of optical beams, *Physical Review* Letter **15** (1965) 1005-1008.

[18] P.L. Lions, The concentration–compactness principle in the calculus of variations, *Ann. Inst. Poincaré, Analyse Non Linéaire* **1** (2) (1984) 109-145.

[19] J. Lam, B. Lippmann, F. Tappert, Self trapped laser beams in plasma, *Physical Fluids* **20** (1977) 1176-1179.

[20] E. Lieb, B. Simon, The Hartree–Fock theory for coulomb systems, *Communications in Mathematical Physics* **53** (1974) 185-194.

[21] G. Ponce, On the Global Well–Posedness of the Benjamin–Ono Equation, *Differential and Integral Equations* Volume 4 Number 3 (1991) 527-542.

[22] D. Rial, Weak solutions for the derivative Schrödinger equation, *Non linear Analysis* **49** (2) (2002) 149-158.

[23] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, II : Fourier Analysis, Self-Adjointness*, Academic Press, 1975.

[24] B. Suydam, Self focusing of very powerful laser beams *IEEE J.Q.E* **10** (1974) 837-843.

[25] P. Sjölin, Regularity of solutions to the Schrödinger equations, *Duke Math. J.* **55** (1987) 699-715.

[26] Strichartz, Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations, *Duke Math. J.* **44** (1977) 705-714.

[27] L. Vega, The Schrödinger equation : pointwise convergence to the initial date, *Proc. Amer. Math. Soc.* **102** (1988) 874-878.

[28] M. Weinstein, Nonlinear Schrödinger Equations and Sharp Interpolation Estimates, *Communications in Mathematical Physics* **87** (1983) 567-576.