UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

Estados KMS y teoría modular en *-álgebras topológicas

por Sergio M. Iguri.

Director de Tesis: Dr. M.A. Castagnino.

Lugar de Trabajo: Instituto de Astronomía y Física del Espacio.

Trabajo de Tesis para optar por el título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área de Física.

Marzo de 2006

Resumen

En el presente trabajo analizamos qué estructuras propias de la teoría modular de Tomita y Takesaki en álgebras de von Neumann estándar pueden extenderse al caso de *-álgebras topológicas más generales. Para ello demostramos, en primer lugar, que es posible establecer una biyección entre el espacio de formas lineales positivas continuas sobre una *-álgebra con unidad localmente convexa A y el conjunto $Cycl(A)$ de las clases de equivalencia unitaria de sus *-representaciones cerradas débilmente continuas fuertemente cíclicas, generalizando así el clásico teorema de la construcción GNS que se plantea habitualmente en el marco de las $C^\star$-álgebras con unidad. Probamos asimismo que, en el caso en que el álgebra A es tonelada y cuasicompleta, esta biyección puede extenderse, siempre a menos de equivalencia unitaria, a una biyección entre el conjunto de los subespacios hilbertianos inmersos en el espacio antidual topológico débil de A, $A^\times$, que son *-estables frente a la acción antidual regular izquierda de A sobre $A^\times$ y la colección de los respectivos núcleos reproductivos. A continuación demostramos que esta biyección múltiple puede hacerse un isomorfismo cónico trasladando adecuadamente la estructura de cono regular estrictamente convexo que presenta el conjunto de subespacios hilbertianos al que nos referimos a los demás espacios involucrados en el teorema. Por último, discutimos las implicaciones de estos resultados en el contexto de los estados KMS y de la teoría modular de Tomita-Takesaki. En particular, demostramos que si β es cualquier número real y A es una *-álgebra con unidad localmente convexa tonelada cuasicompleta nuclear sobre la que actúa un grupo continuo monoparamétrico de *-automorfismos de crecimiento a lo sumo polinomial α, toda funcional (α, β)-KMS sobre A tiene una única descomposición integral en términos de funcionales (α, β)-KMS extremales.

Palabras clave: Estados KMS, Teoría modular, Teorema GNS, *-álgebras topológicas.

KMS states and modular theory in topological *-algebras

by Sergio M. Iguri

March, 2006

Abstract

In this thesis we analyse which structures from Tomita-Takesaki modular theory on von Neumann algebras can be extended when the topology on the algebra is more general. In order to do that, we prove that there is a bijection between the space of positive linear continuous forms on a locally convex *-algebra A with unit and the set Cycl(A) of unitary equivalence classes of its closed weakly continuous strongly cyclic *-representations, a bijection that generalizes the classical GNS construction theorem usually proved for the unital $C^\star$-algebra case. After that we prove that, when the algebra A is barrelled and quasi-complete, this bijection can be extended, up to unitary equivalence, to a bijection between the set of Hilbert subspaces embedded in the topological antidual space of A, $A^\times$, that are *-invariant under the regular left antidual action of A on $A^\times$, and the collection of the corresponding positive kernels relative to $A^\times$. It is also proved that this bijection can be made a cone isomorphism by translating the strict convex regular cone structure the Hilbert subspaces set has to the other spaces involved in the theorem. We discuss the implications of these results in the context of KMS states and Tomita-Takesaki modular theory. In particular, if β is any real number, A is a locally convex quasi-complete barrelled nuclear *-algebra with unit and α is a continuous monoparametric group of *-automorphisms of at most polinomial growth acting on A, every (α, β)-KMS functional on A has a unique integral decomposition in terms of extremal (α, β)-KMS functionals.

Keywords: KMS states, Modular theory, GNS theorem, Topological *-algebras.

Agradecimientos.

En primer lugar, quiero agradecerle al Dr. Castagnino por la confianza que me demostró siempre, su paciencia y su extraordinaria generosidad.

Mi agradecimiento, también, y muy especialmente, a Carmen Núñez por su apoyo incondicional y por sus consejos, invalorables para mí en los momentos que consideré difíciles.

Muchas gracias a Beatriz Abadie por ser tan atenta con mis consultas por correo y por la invitación al coloquio en Colonia.

Quisiera agradecer a todo el personal del IAFE. En particular, a Andrea Costa y a los demás, por hacerme sentir cómodo en el instituto.

Infinitas gracias a todos los amigos físicos y matemáticos por las discusiones, las ideas y el afecto: a Rafael Porto, a Ramón Guevara Erra, a Predrag Laszic y, en especial, a Marco Farinati.

En lo personal, tengo que agradecer a todos los amigos por el apoyo constante y por compartir su tiempo conmigo: a Pablo, a Adriana, a Reny, a Gaby, a Pía, a Miguel, a Luciana.

Gracias a mi familia, por estar cerca.

Como siempre, a mi viejo.

Gracias a Cynthia, por ser mi confidente, mi compañera, mi amiga y, literalmente, mi hermana.

Aunque es imposible expresarlo lo suficiente, y menos con palabras, gracias a mi vieja, por ser una mujer de fierro y por haber estado cerca mío incondicional y madraza.

Y muchas gracias a Andrea y a Nicolás. A Nico por haber aceptado mi afecto y haberlo devuelto con creces. Y a Andrea, por compartir conmigo todas las cosas que le resultan importantes, por todo lo que me da cada día, porque sin ella las cosas no serían así de buenas.

Por último, tengo que agradecerle a los que se fueron pero están siempre: a Jorge, a César, a Irma, a Gera. Y en especial, a la "tiuschke" Juana, conmigo, todo el tiempo.

ÍNDICE GENERAL

1.. Introducción 7
1.1. Estados de equilibrio térmico. La condición KMS. 7
1.2. El teorema de Tomita y Takesaki en álgebras de von Neumann. 13
1.3. Teoría modular en álgebras topológicas. 16

2.. Subespacios hilbertianos de espacios vectoriales topológicos. 21
2.1. Antiespacios topológicos. 22
2.2. Subespacios hilbertianos de espacios vectoriales topológicos. . 25
2.3. Núcleos relativos a espacios vectoriales topológicos. 33
2.4. Núcleos reproductivos de subespacios hilbertianos. 35
2.5. La biyección entre $\mathcal{L}^+(E)$ y Hilb(E). 36
2.6. Consecuencias de la biyección entre $\mathcal{L}^+(E)$ y Hilb(E). 38
2.6.1. Estructura cónica de Hilb(E). 38
2.6.2. Sumas infinitas de subespacios hilbertianos. 42
2.6.3. Integrales de subespacios hilbertianos. 44
2.6.4. Efecto de una aplicación continua. 49
2.7. Subespacios hilbertianos normales y subnormales. 51

3.. Representaciones de *-álgebras. 59
3.1. Representaciones de *-álgebras. 59
3.2. Funcionales positivas y estados de una *-álgebra. 68
3.3. El teorema de Gel'fand-Naimark-Segal en *-álgebras topológicas. 70

4.. Representaciones cíclicas y subespacios hilbertianos. 76
4.1. Subespacios hilbertianos estables. 78
4.2. Correspondencia entre formas positivas y núcleos. 81
4.3. Estructura cónica del espacio de representaciones cíclicas. . . . 86

5.. Estados KMS sobre álgebras topológicas. 92
5.1. Elementos enteros y grupos de automorfismos. 92
5.2. Estados KMS y estados centrales. 101
5.3. Descomposición extremal de estados KMS. 113

6.. Conclusiones 117

1. INTRODUCCIÓN

El objetivo de la presente tesis es ver bajo qué condiciones es posible extender algunos conceptos y resultados de la teoría modular de M. Tomita y M. Takesaki (ver [60]), originalmente formulada en el contexto de las álgebras de von Neumann, para el caso de las *-álgebras topológicas localmente convexas en general.

El resultado central de la teoría de automorfismos modulares a la que hacemos referencia está contenido en un teorema demostrado por Tomita en dos trabajos que nunca fueron publicados y que luego fue reexaminado por Takesaki (ver [60] y referencias). Estos trabajos significaron un importante avance en la clasificación de las álgebras de von Neumann y en la construcción de técnicas de cálculo relacionadas con el tema. El interés intrínsecamente matemático de la teoría modular se sustenta, pues, en estas aplicaciones.

Sin embargo, del teorema al que hacemos referencia se deducen numerosos corolarios que tienen una significación física más que elocuente.

En esta introducción intentaremos discutir los conceptos físicos subyacentes en la teoría modular de Tomita y Takesaki, conceptos que, como es bien sabido, están íntimamente relacionados con la caracterización de los estados de equilibrio termodinámico o estads KMS, y que constituyen la motivación principal del trabajo.

1.1. Estados de equilibrio térmico. La condición KMS.

Recordemos brevemente cómo se describe a los estados de equilibrio térmico en términos estrictamente algebraicos en el marco de la formulación de la teoría de campos en C*-álgebras.

Sea A una C*-álgebra con unidad, correspondiente al álgebra de los observables del sistema físico en estudio o, alternativamente, al álgebra de los campos, y sea ω un estado admisible del sistema, entendiendo por estado admisible a toda funcional lineal positiva normal sobre A.

Asumamos además que $\alpha : \mathbb{R} \times A \to A$ es un grupo monoparamétrico continuo de *-automorfismos sobre A al que, en adelante, identificaremos con el grupo de evolución temporal.

Para todo par de elementos $a, b \in A$, definimos las siguientes funciones auxiliares:

$$F^{\omega}_{ab}(t) = \langle b\, \alpha_t a|\omega\rangle - \langle b|\omega\rangle\, \langle a|\omega\rangle \tag{1.1}$$

y

$$G^{\omega}_{ab}(t) = \langle (\alpha_t a) b|\omega\rangle - \langle a|\omega\rangle\, \langle b|\omega\rangle \tag{1.2}$$

siendo t cualquier elemento en $\mathbb{R}$.

Dado un parámetro real β no nulo, se dice que el estado ω satisface la *condición* (α, β)*-KMS*, o sencillamente, que es un *estado* (α, β)*-KMS* con parámetro β si se verifica que la función F^{ω}_{ab} puede prolongarse analíticamente al dominio complejo D_β dado por

$$D_\beta = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Im} z < \beta\} \tag{1.3}$$

cuando $\beta > 0$, o por

$$D_\beta = \{z \in \mathbb{C} : \beta < \mathrm{Im} z < 0\} \tag{1.4}$$

en el caso en que $\beta < 0$, de modo tal que F^{ω}_{ab} es acotada en este dominio, y si se satisface que G^{ω}_{ab} toma los valores de borde de F^{ω}_{ab} en D_β, o sea, si

$$G^{\omega}_{ab}(t) = F^{\omega}_{ab}(t + i\beta) \tag{1.5}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

La ecuación anterior puede escribirse, alternativamente, de la siguiente manera:

$$\langle (\alpha_t a) b|\omega\rangle = \langle b\, \alpha_{t+i\beta} a|\omega\rangle \tag{1.6}$$

en donde a y b son elementos de A y $t \in \mathbb{R}$.

En adelante, a los estados que satisfacen la condición (α, β)-KMS los subindicaremos con el parámetro β.

La identidad (1.6) fue obtenida por Kubo (ver [35]) e independientemente por Martin y Schwinger (ver [39]) en 1957 en un intento por describir a los estados térmicos en mecánica estadística cuántica, de ahí su denominación, y fue luego adaptada a un contexto puramente algebraico por Haag, Hugenholtz y Winnink (ver [24]) en 1967.

Su importancia radica en el hecho de que, junto con los requerimientos de acotación y analiticidad de las funciones F^{ω}_{ab} y G^{ω}_{ab}, es condición necesaria y suficiente para caracterizar a los estados de equilibrio termodinámico.

Una forma intuitiva de ver que, en efecto, los estados KMS son los que se corresponden con los sistemas en equilibrio resulta de considerar el caso específico en que A es una *-álgebra de operadores actuando sobre un espacio de Hilbert H_n de dimensión finita $n \in \mathbb{N}$, esto es, si A está incluida en $L(H_n)$.

Dado que $L(H_n)$ es isomorfa como *-álgebra al álgebra $M_n(\mathbb{C})$ de las matrices complejas de dimensión $n \times n$, A resulta isomorfa a una *-subálgebra de $M_n(\mathbb{C})$.

Todo grupo monoparamétrico continuo de *-automorfismos sobre A actúa, en consecuencia, a través de *-automorfismos interiores (en $M_n(\mathbb{C})$) isométricos, de manera que existe una matriz hermítica $h \in M_n(\mathbb{C})$, generadora del grupo, a la que en física se suele llamar la *matriz hamiltoniana* del sistema, tal que

$$\alpha_t a = e^{ith} a e^{-ith} \tag{1.7}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ y todo $a \in A$.

Más aún, como todo elemento en A es entero con respecto a α, la acción del grupo sobre A puede prolongarse analíticamente a todo el plano complejo, de modo tal que

$$\alpha_z a = e^{izh} a e^{-izh} \tag{1.8}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ y todo $a \in A$.

Asumamos ahora que ω_β es un estado (α, β)-KMS sobre A, de manera que

$$\left\langle e^{ith} a e^{-ith} b | \omega_\beta \right\rangle = \left\langle b e^{ith - \beta h} a e^{-ith + \beta h} | \omega_\beta \right\rangle \tag{1.9}$$

para todo $a, b \in A$ y todo $t \in \mathbb{R}$.

Observemos que, en particular, se satisface que

$$\langle ab | \omega_\beta \rangle = \left\langle b e^{-\beta h} a e^{\beta h} | \omega_\beta \right\rangle \tag{1.10}$$

para todo $a, b \in A$. Basta con poner $t = 0$ en la ecuación (1.9).

Consideremos, ahora, la funcional ω' dada por

$$\langle a | \omega' \rangle = \left\langle e^{\beta h} a | \omega_\beta \right\rangle \tag{1.11}$$

para todo $a \in A$.

Es fácil verificar que ω' es una *funcional tracial* sobre A, o sea, una funcional multiplicativa sobre A.

En efecto, para todo par de elementos $a, b \in A$ se satisface que

$$\langle ab|\omega'\rangle = \left\langle e^{\beta h}ab|\omega_\beta\right\rangle = \left\langle bae^{\beta h}|\omega_\beta\right\rangle = \left\langle e^{\beta h}ba|\omega_\beta\right\rangle = \langle ba|\omega'\rangle \tag{1.12}$$

en donde, para la segunda igualdad, hemos usado la ecuación (1.10).

Como para toda álgebra de dimensión finita las funcionales traciales coinciden, a menos de un posible factor constante, con la traza ordinaria, obtenemos que

$$\left\langle e^{\beta h}a|\omega_\beta\right\rangle \propto \mathrm{Tr}(a) \tag{1.13}$$

para todo $a \in A$, o sea, que

$$\langle a|\omega_\beta\rangle \propto \mathrm{Tr}(e^{-\beta h}a) \tag{1.14}$$

Hemos comprobado, luego, que ω_β es de la forma:

$$\langle a|\omega_\beta\rangle = \mathrm{Tr}(\rho_\beta a) \tag{1.15}$$

para todo $a \in A$, en donde ρ_β es una matriz a la que se conoce como *matriz densidad* del sistema.

Recordando que ω_β es un estado sobre A y con ello

$$\langle e|\omega_\beta\rangle = 1 \tag{1.16}$$

en donde e es la unidad en el álgebra, la matriz densidad está dada por

$$\rho_\beta = \frac{e^{-\beta h}}{Z_\beta} \tag{1.17}$$

siendo Z_β la *función de partición de Gibbs*, o sea,

$$Z_\beta = \mathrm{Tr}\left(e^{-\beta h}\right) \tag{1.18}$$

Se observa, entonces, que los estados KMS se corresponden precisamente con los estados de equilibrio térmico descriptos en el ensamble canónico.

Como es evidente, la relación entre la temperatura absoluta T del sistema y el parámetro KMS está dada por

$$\beta = 1/kT \tag{1.19}$$

en donde k es la constante de Boltzmann.

Existe una extensa bibliografía referida a los estados KMS y al análisis de sus propiedades (ver, por ejemplo, [4], [10], [11], [21]).

Nosotros estaremos específicamente interesados en aquellas características que mantienen relación con la teoría de automorfismos modulares sobre álgebras de von Neumann.

Esta vinculación entre los estados KMS y la teoría de Tomita y Takesaki queda particularmente de manifiesto cuando se estudian las representaciones GNS del álgebra de observables inducidas por los estados KMS. Vale aclarar que estas representaciones tienen, a su vez, una relevancia intrínseca en lo que a las aplicaciones en la física se refiere, ya que los estados en los folios asociados son aquellos que se desvían del equilibrio térmico sólo por excitaciones locales.

Uno de los aspectos más interesantes de las representaciones GNS inducidas por estados KMS es que siempre es posible construir canónicamente, a partir de cada una de ellas, una segunda representación *conjugada*.

Las representaciones conjugadas también aparecen en la teoría modular y en este contexto se demuestra la estrecha relación que éstas mantienen con la estructura del conmutante de las representaciones originales, de aquí la importancia de los estados KMS y de la teoría de Tomita y Takesaki en la clasificación de las álgebras de von Neumann.

A continuación describiremos explícitamente cómo se desarrolla esta construcción en el caso de las C-*álgebras y de las álgebras de von Neumann en particular (para más detalles referimos a [11] y [12]).

Sea A una C*-álgebra con unidad sobre la que actúa un grupo continuo monoparamétrico de *-automorfismos α. Sea β un parámetro real cualquiera. Por último, sean ω_β un estado (α, β)-KMS sobre A y π_β la representación GNS de A inducida por ω_β. Notaremos con H_β al espacio de representación de π_β.

Es posible, entonces, definir un operador autoadjunto h (no necesariamente acotado) y un operador antiunitario J actuando sobre H_β tales que se verifican las siguientes propiedades.

En primer lugar, se satisface que el grupo de evolución temporal actúa sobre $\pi_\beta(A)$, *-subálgebra del álgebra $L(H_\beta)$ de operadores acotados sobre H_β, a través de *-automorfismos interiores en $L(H_\beta)$, de manera tal que el generador infinitesimal del grupo es h, esto es, se tiene que

$$\pi_\beta(\alpha_t a) = e^{iht}\pi_\beta(a)e^{-iht} \tag{1.20}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ y todo $a \in A$.

Por otra parte, si con Ω_β notamos al vector cíclico de π_β en H_β, se tiene que Ω_β es anulado por h, o sea

$$h\Omega_\beta = 0 \tag{1.21}$$

y que Ω_β es estable frente a la acción de J, esto es,

$$J\Omega_\beta = \Omega_\beta \tag{1.22}$$

Además, para todo $a \in A$ se tiene que

$$\pi_\beta(a^\star)\Omega_\beta = Je^{-\beta h/2}\pi_\beta(a)\Omega_\beta \tag{1.23}$$

Por último, se demuestra que J es un operador hermítico, y con ello se satisface que

$$J = J^\star = J^{-1} \tag{1.24}$$

de donde resulta que la expresión:

$$\overline{\pi}_\beta(a) = J\pi_\beta(a)J \tag{1.25}$$

con $a \in A$, define una nueva representación $\overline{\pi}_\beta$ de A sobre H_β, a la que se suele llamar la *representación conjugada* de π_β.

Respecto de la representación conjugada, se verifica que para todo elemento a de A, las normas de $\pi_\beta(a)$ y de $\overline{\pi}_\beta(a)$ coinciden y, lo que es más importante, que la clausura débil de $\overline{\pi}_\beta(A)$ es isomorfa al conmutante de $\pi_\beta(A)$, o sea,

$$(\overline{\pi}_\beta(A))'' = (\pi_\beta(A))' \tag{1.26}$$

Por último, se tiene que Ω_β es asimismo un vector cíclico para $\overline{\pi}_\beta$ y que se satisface la siguiente identidad:

$$\langle a|\omega_\beta\rangle = (\Omega_\beta|\pi_\beta(a)\Omega_\beta) = \overline{(\Omega_\beta|\overline{\pi}_\beta(a)\Omega_\beta)} \tag{1.27}$$

para todo $a \in A$, en donde, como es habitual, el paréntesis representa al producto interno sobre H_β.

Es evidente que todas estas características pueden ser interpretadas como manifestaciones de la invariancia de los sistemas en equilibrio térmico frente a una simetría similar a la de inversión temporal.

La verdadera naturaleza de esta simetría y la magnitud de sus implicaciones en la física sólo se advierte si se contrastan estas construcciones en términos del teorema de Tomita-Takesaki, que es lo que haremos en la siguiente sección.

1.2. El teorema de Tomita y Takesaki en álgebras de von Neumann.

Repasaremos ahora los elementos básicos de la teoría de automorfismos modulares (ver [60]). Para evitar complicaciones innecesarias, sólo discutiremos el caso que originalmente trataron Tomita y Takesaki, o sea, asumiremos que el álgebra en consideración es un álgebra de von Neumann en forma estándar. Para la generalización de la teoría modular al caso de las $C^\star$-álgebras con unidad referimos a [12], [61] y [62].

Sea $L(H)$ el álgebra de operadores acotados sobre un espacio de Hilbert H, espacio al que supondremos separable.

Sea R un álgebra de von Neumann en *forma estándar* sobre H, esto es, una *-subálgebra débilmente cerrada de $L(H)$ que contiene al operador identidad y tal que existe un vector cíclico y separador Ω para R en H.

Dado que Ω es un vector cíclico, el dominio

$$D = R\Omega \tag{1.28}$$

es un subespacio denso de H.

Si con R' notamos al conmutante de R, el dominio

$$D' = R'\Omega \tag{1.29}$$

es también un subespacio denso de H. Esto resulta de haber supuesto que Ω es un vector separador de R.

Se definen, pues, los siguientes dos operadores de conjugación: el operador $S : D \to D$, dado por

$$Sa\Omega = a^\star\Omega \tag{1.30}$$

para todo $a \in R$, y el operador $F : D' \to D'$, definido por

$$Fa'\Omega = a'^\star\Omega \tag{1.31}$$

para todo $a' \in R'$.

Puede demostrarse que ambos operadores son clausurables en H. Notaremos con $\overline{S}$ y $\overline{F}$ a las respectivas clausuras.

De acuerdo con el teorema de la descomposición polar, existe una única forma de representar a todo operador cerrado en H como composición de una antiisometría lineal con un operador autoadjunto positivo.

Con esto, se tiene que existe una única descomposición de $\overline{S}$ de la forma

$$\overline{S} = J\Delta^{1/2} \tag{1.32}$$

en donde J se extiende a un operador antiunitario, ya que D es denso en H, y Δ es un operador autoadjunto positivo, en general, no acotado, en H.

A J y a Δ se los suele denominar, respectivamente, la *conjugación modular* y el *operador modular* de R.

A partir de estas definiciones es sencillo demostrar las siguientes propiedades.

En primer lugar, se tiene que

$$\overline{F}\,\overline{S} = \Delta \tag{1.33}$$

y

$$\overline{S}\,\overline{F} = \Delta^{-1} \tag{1.34}$$

Respecto de la conjugación modular en R se satisface que, además de ser un operador antiunitario, es hermítico, de manera que

$$J = J^{\star} = J^{-1} \tag{1.35}$$

Por último, se verifica que

$$J\Delta^{1/2}a\Omega = \Delta^{-1/2}Ja\Omega = a^{\star}\Omega \tag{1.36}$$

para todo $a \in R$.

Asimismo es fácil ver que Ω es estable frente a la acción tanto de J como de Δ, esto es,

$$J\Omega = \Omega \tag{1.37}$$

y

$$\Delta\Omega = \Omega \tag{1.38}$$

Por último, la siguiente expresión:

$$U(\nu) = \Delta^{i\nu} \tag{1.39}$$

con $\nu \in \mathbb{R}$, define un grupo monoparamétrico continuo de transformaciones unitarias sobre H, del que se demuestra que

$$JU(\nu)J = U(\nu) \tag{1.40}$$

para todo $\nu \in \mathbb{R}$.

Para la demostración de la identidad anterior se usa que

$$J\Delta J = \Delta^{-1} \tag{1.41}$$

Dadas todas estas definiciones, estamos en condiciones de discutir el teorema de Tomita y Takesaki.

Este teorema expresa, en esencia, que el grupo sobre H que acabamos de introducir define a su vez un grupo de *-automorfismos sobre el álgebra R.

En efecto, el teorema de Tomita y Takesaki muestra que

$$JRJ = R' \tag{1.42}$$

de donde resulta que, para todo $\nu \in \mathbb{R}$,

$$U(\nu)RU^\star(\nu) = R \tag{1.43}$$

y

$$U(\nu)R'U^\star(\nu) = R' \tag{1.44}$$

Se tiene, luego, que la colección de *-automorfismos $\{\sigma_\nu : \nu \in \mathbb{R}\}$, con

$$\sigma_\nu a = U(\nu)aU^\star(\nu) \tag{1.45}$$

en donde $\nu \in \mathbb{R}$ y $a \in R$, determina sobre R un grupo monoparamétrico continuo de *-automorfismos sobre R al que se lo suele denominar el *grupo de automorfismos modulares* o, simplemente, el *grupo modular* de R, y al que notaremos σ.

La interpretación física del teorema de Tomita-Takesaki se obtiene después de observar que todas las expresiones a las que nos referimos antes tienen analogía con las expresiones que se obtienen al estudiar las representaciones GNS asociadas a estados KMS.

En efecto, si definimos el *hamiltoniano modular* como el operador h tal que

$$\Delta = e^{-h} \tag{1.46}$$

se tiene que el grupo modular queda definido por la ecuación

$$\sigma_\nu a = e^{-i\nu h} a e^{i\nu h} \tag{1.47}$$

para todo $\nu \in \mathbb{R}$.

El operador h resulta ser un operador autoadjunto, cuyo espectro no es necesariamente acotado. Se tiene además que Ω es vector propio de h con autovalor 0.

Hecha esta observación, la analogía entre las ecuaciones (1.20)-(1.25) y las ecuaciones (1.35)-(1.45) queda de manifiesto.

En efecto, es fácil comprobar que el estado ω sobre R dado por la expresión

$$\langle a|\omega\rangle = (\Omega|a\Omega) \tag{1.48}$$

satisface la condición (α, β)-KMS si se identifica al grupo modular con el grupo de evolución temporal "térmicamente reescaleado", o sea,

$$\sigma_\nu = \alpha_{-\beta t} \tag{1.49}$$

La conclusión relevante en términos físicos es la siguiente: todo estado de equilibrio con temperatura absoluta dada por $\beta = 1/kT$ puede ser caracterizado como un estado fiel (o sea, cíclico y separador) sobre el álgebra de observables cuyo grupo modular σ es el de las traslaciones temporales. El parámetro del grupo ν está relacionado con el tiempo por

$$t = -\beta\nu \tag{1.50}$$

En el caso en que el álgebra de observables presenta, además, invariancia frente a la acción de un grupo de simetrías de gauge, a los estados de equilibrio térmico se los caracteriza de la misma manera con la salvedad de que el grupo modular debe identificarse con un subgrupo monoparamétrico del grupo de simetrías que son generadas por las traslaciones temporales y por las transformaciones de gauge.

1.3. Teoría modular en álgebras topológicas.

Como ya mencionamos, el teorema de Tomita y Takesaki tiene numerosos corolarios y, como puede intuirse ya de los comentarios finales de la sección anterior, muchos de ellos suponen consecuencias importantes desde el punto de vista de la física.

Aunque no discutiremos estos aspectos con detalle (referimos para ello, por ejemplo, a [11] y a [21]) mencionaremos que a partir del teorema de Tomita y Takesaki es posible clasificar a los estados de equilibrio según criterios de estabilidad (ver [22]), de pasividad (ver [49]) y de conmutatividad asintótico-temporal (ver, por ejemplo, [2], [23] y [58]).

Asimismo el teorema de Tomita y Takesaki permite introducir la noción de equilibrio en teorías locales, y con ello analizar y caracterizar con rigor formal a las transiciones de fase en teorías de campos cuánticos (ver [14]).

Por otra parte, la posibilidad de identificar al grupo modular con un subgrupo monoparamétrico del producto semidirecto de las traslaciones temporales y de las transformaciones de gauge ha sido origen de numerosas publicaciones en las que se ha intentado interpretar geométricamente esta identificación (ver [6] y, en particular, [7]), y los campos de aplicación de los resultados que se han obtenido van desde las teorías de campos en espacios curvos (ver [56]) hasta las teorías de campos con invariancia conforme (ver [13] y [27]).

Sin embargo, hay aspectos de la teoría modular que no resultan del todo satisfactorios.

Uno de estos aspectos, que es la motivación principal de la presente tesis, es que como ya dijimos, la teoría modular está planteada excluyentemente en el marco de las álgebras de von Neumann en forma estándar y no en el de las álgebras topológicas en general.

Si bien podría presuponerse que esta restricción es de índole puramente formal y que el planteo correcto de una teoría modular en álgebras localmente convexas en general no debiera llevar a resultados sustancialmente diferentes de los que se han obtenido en el contexto de las W*-álgebras, es de esperar que la posibilidad de considerar topologías no normables dé lugar, por ejemplo, a métodos de aproximación que en el caso de las álgebras de von Neumann resultan imposibles, incluso, de definir.

Las álgebras de von Neumann conforman una categoría de objetos altamente rígida. Una manifestación de este hecho, corolario también del teorema de Tomita y Takesaki, es que todo grupo de automorfismos sobre un álgebra de von Neumann en forma estándar siempre es un subgrupo del grupo de automorfismos interiores del álgebra.

Así, cualquier método perturbativo que intente dar cuenta de una ruptura en la invariancia modular o que intente dar cuenta de una evolución fuera del equilibrio o de un proceso irreversible, queda circunscripto al grupo de automorfismos interiores.

Ahora bien, es un hecho bien conocido que incluso para las C*-álgebras en general, y recordemos que las W*-álgebras son ejemplos de C*-álgebras, no todo grupo de automorfismos es implementable como grupo de automorfismos interiores.

Las limitaciones que imponen las hipótesis sobre las álgebras en estudio en la teoría modular son evidentes.

Por otra parte, existen varias formulaciones de la mecánica cuántica y de las teorías de campos que están planteadas en términos de *-álgebras con topologías alternativas a las topologías normables.

De hecho, en trabajos previos hemos considerado la posibilidad de reformular la teoría de campos cuántica en términos de pro-C*-álgebras nucleares toneladas (ver [28] y [29]).

Cabe mencionar que en los trabajos a los que hacemos referencia, mostramos que es posible reconstruir una teoría de representación satisfactoria y que presenta como ventaja accesoria respecto de las formulaciones tradicionales el hecho de que la acción del álgebra se puede definir sobre un triplete de Gel'fand nuclear y a través de operadores nucleares esencialmente autoadjuntos con espectros no necesariamente acotados.

Asimismo, logramos establecer una teoría de representación funcional para el caso conmutativo que define a la transformada de Gel'fand con imagen en el espacio de funciones sobre un espacio localmente compacto con la topología de la convergencia puntual sobre sus subconjuntos compactos, a diferencia del caso de las C*-álgebras, en el que el espacio de funciones es sobre un conjunto compacto y con la topología inducida por la norma del supremo.

También logramos demostrar un teorema de descomposición de estados en estados extremales, que según se verá en lo que sigue del trabajo, resulta esencial al discutir estados KMS en álgebras topológicas en general.

Para completar el esquema formal que formulaciones alternativas como ésta presentan resulta necesario definir correctamente las condiciones de equilibrio para los estados cuando la topología del álgebra que caracteriza al sistema físico no se corresponde con la topología inducida por una C*-norma. Esta descripción de los estados asociados al equilibrio térmico en un marco algebraico general fue la motivación principal del presente trabajo.

Como hemos visto, el teorema de Gel'fand, Naimark y Segal juega un papel esencial en lo que a las aplicaciones físicas de la teoría modular se refiere. Si bien en [28] hemos dado una versión del teorema GNS para álgebras no normadas, esta versión está tambien circunscripta a una topología muy particular, esto es, una topología nuclear tonelada generada por C*-seminormas.

En función de caracterizar a la construcción GNS para *-álgebras topológicas más generales, hemos visto conveniente hacer uso de la teoría de subespacios hilbertianos de espacios vectoriales localmente convexos de Schwartz (ver [53]), cuyos aspectos fundamentales presentamos en el capítulo 2.

En esa sección repasamos brevemente la definición de subespacio hilbertiano y de los núcleos reproductivos asociados y analizamos la estructura de cono regular estrictamente convexo que la colección de subespacios hilbertianos de un espacio localmente convexo cuasicompleto presenta.

Esta estructura será importante dado que será una estructura heredada por la colección de las *-representaciones cerradas cíclicas del álgebra de observables. Asimismo será una estructura heredada por los subconos convexos de funcionales KMS del cono de funcionales positivas sobre el álgebra.

Por último, discutimos algunas de las consecuencias que se pueden demostrar a partir de la biyección que existe entre el espacio de subespacios hilbertianos de un determinado espacio vectorial localmente convexo y el conjunto de los núcleos positivos relativos a su espacio antidual topológico, como por ejemplo, la posibilidad de sumar arbitrariamente e incluso de integrar subespacios hilbertianos. Repasamos brevemente el caso de los subespacios hilbertianos normales.

En el capítulo 3 repasamos los aspectos más importantes de la teoría de representación de álgebras de operadores no acotados sobre espacios hilbertianos.

Como veremos, el concepto de *-representación de Powers (ver [47] y [48]) extiende la noción habitual de representación de álgebras de operadores acotados para el caso de operadores no acotados, y es el marco natural en que deben definirse las representaciones cuando las topologías de las álgebras en cuestión no están dadas por C*-normas.

Redefinimos convenientemente el concepto de subrepresentación y presentamos algunos de los elementos básicos de la teoría de álgebras de operadores no acotados. En particular, demostramos que es posible extender satisfactoriamente el teorema de la construcción GNS para el caso de las *-álgebras localmente convexas con unidad.

En el capítulo 4 demostramos que la biyección que establece el teorema GNS entre la familia de clases de equivalencia unitaria de las *-representaciones cerradas fuertemente cíclicas débilmente continuas de las *-álgebras topológicas toneladas cuasicompletas con unidad y la familia de las funcionales positivas continuas se extiende a una biyección con la colección de subespacios hilbertianos inmersos en el espacio antidual topológico del álgebra que son estables frente a la acción antidual regular izquierda y con la familia de núcleos positivos estables relativos al este espacio antidual.

Asimismo demostramos que es posible definir en la colección de *-representaciones cíclicas del álgebra una estructura de cono regular estrictamente convexo que hace de esta biyección múltiple un isomorfismo cónico.

En el capítulo 5 presentamos algunos resultados de la teoría de estados KMS en álgebras localmente convexas. Mostramos que prácticamente todos los ingredientes de la teoría modular están presentes cuando el planteo del problema se hace en álgebras topológicas toneladas cuasicompletas.

Aprovechando la estructura de cono convexo que definimos sobre el espacio de *-representaciones cerradas cíclicas débilmente continuas del álgebra de los campos, mostramos, finalmente, que existe una única descomposición extremal para los estados KMS cuando el álgebra en consideración es nuclear.

Por último, en la sección 6 presentamos nuestras conclusiones.

2. SUBESPACIOS HILBERTIANOS DE ESPACIOS VECTORIALES TOPOLÓGICOS.

En el estudio de las representaciones de las C*-álgebras resulta imprescindible considerar la estructura de los subespacios cerrados del espacio de Hilbert en que el álgebra está representada.

De la misma manera, cuando las *-álgebras que se analizan dejan de ser álgebras con una topología definida por una norma y se pasa a considerar *-álgebras topológicas localmente convexas, es importante estudiar la estructura de los subespacios de un dado espacio vectorial topológico que, sin ser subespacios cerrados del mismo, preservan, en cambio, propiedades hilbertianas.

La definición de los *subespacios hilbertianos* de espacios vectoriales topológicos fue sugerida por primera vez por N. Aronzsajn en 1950 (ver, por ejemplo, [3]) y luego fue desarrollada con mayor generalidad por L. Schwartz en [53].

En esencia, si con E notamos a un espacio vectorial localmente convexo y H es un subespacio lineal de E, se dice que H es un subespacio hilbertiano de E si H está provisto de una estructura hilbertiana y H está inmerso continuamente en E.

Las propiedades y características fundamentales de los subespacios hilbertianos de un espacio localmente convexo fueron estudiadas exhaustivamente por Schwartz en [53]. Las aplicaciones del concepto, sin embargo, exceden los aspectos mencionados en estas referencias.

A modo de ejemplo, en [26] puede encontrarse la vinculación entre los subespacios hilbertianos de un espacio vectorial topológico y el estudio de los procesos gaussianos. En [17] se estudia la interrelación entre la estructura de subespacios hilbertianos de un espacio vectorial y la teoría de descomposición cónica. Más recientemente, en [40], puede verse la relación que mantienen los subespacios hilbertianos respecto de la definición de subdualidades y en [41] la relevancia que tienen en relación a la teoría de operadores no acotados sobre espacios hilbertianos.

En nuestro caso estaremos interesados en el papel que juegan los subespacios hilbertianos inmersos en el espacio antidual de una *-álgebra topológica respecto de las representaciones cíclicas de ésta álgebra.

En este capítulo repasaremos los aspectos más importantes de la teoría de subespacios hilbertianos de Schwartz e introduciremos algunos conceptos nuevos que serán relevantes en capítulos posteriores.

En lo que sigue del trabajo, y a menos que indiquemos explícitamente otro caso, asumiremos que el cuerpo de escalares de todos los espacios vectoriales involucrados es el de los números complejos $\mathbb{C}$.

Por regla general, omitiremos las demostraciones de los resultados que pueden consultarse en las referencias bibliográficas y sólo daremos una breve reseña de las mismas cuando los argumentos empleados resulten imprescindibles al discutir aspectos estrictamente originales del trabajo.

2.1. Antiespacios topológicos.

Una de las propiedades que caracterizan a los espacios de Hilbert es la existencia de un isomorfismo canónico, o isomorfismo de Riesz, entre éstos y sus respectivos espacios antiduales, i.e., los espacios de formas antilineales continuas sobre éstos.

Resulta natural, entonces, introducir el siguiente concepto en lo que se refiere al estudio de los subespacios hilbertianos de espacios topológicos en general.

Definición 2.1.1: Diremos que un espacio vectorial localmente convexo separable Hausdorff $\overline{E}$ es un *antiespacio* de E si existe un antiisomorfismo de E sobre $\overline{E}$. Al antiisomorfismo en cuestión lo noteremos con Θ y diremos que es una *conjugación* sobre E.

De la definición es inmediato observar que si $\overline{E}$ es antiespacio de E a través del antiisomorfismo $\Theta : E \to \overline{E}$, entonces E es antiespacio de $\overline{E}$ a través del antiisomorfismo recíproco, esto es, a través de $\Theta^{-1} : \overline{E} \to E$.

Por otra parte, y a menos de isomorfismos, debe resultar evidente que existe un único antiespacio de E. En efecto, dados dos antiespacios $\overline{E}_1$ y $\overline{E}_2$ de E, asociados a los antiisomorfismos $\Theta_1 : E \to \overline{E}_1$ y $\Theta_2 : E \to \overline{E}_2$, respectivamente, se tiene que $\Theta_2^{-1}\Theta_1$ es un isomorfismo de $\overline{E}_1$ sobre $\overline{E}_2$.

Cabe mencionar, sin embargo, que en el caso de espacios metrizables, y en particular en el caso de los espacios hilbertianos, no podremos, en general, identificar antiespacios a menos que se trate de antiisomorfismos que preserven además la respectiva estructura métrica, o sea, antiisomorfismos isométricos.

A continuación daremos tres ejemplos de antiespacios que tendrán importancia en lo que sigue.

Ejemplo 2.1.2: Si sobre un espacio vectorial topológico E se preserva la estructura aditiva pero se define una nueva ley de multiplicación por escalares dada por

$$(\lambda, \xi) \to \overline{\lambda}\xi \tag{2.1}$$

en donde $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\xi \in E$, se tiene que el espacio vectorial topológico que resulta, provisto con la topología inicial definida sobre E, es antiespacio de E. El antiisomorfismo asociado es simplemente la identidad.

Con este ejemplo queda claro que para todo espacio vectorial topológico es posible definir un antiespacio.

Ejemplo 2.1.3: Sean $\overline{E}$ un antiespacio de E y $\Theta : E \to \overline{E}$ el antiisomorfismo correspondiente. Sean E' y $\overline{E}'$ los espacios duales topológicos de E y de $\overline{E}$, respectivamente.

La aplicación traspuesta de Θ, Θ', es, evidentemente, un antihomeomorfismo de $\overline{E}'$ sobre E', de modo tal que si se equipa a $\overline{E}'$ y a E' con las topologías correspondientes, resulta en un antiisomorfismo. El antiisomorfismo recíproco nos permite considerar a $\overline{E}'$ como modelo de antiespacio de E', esto es, podemos identificar a $\overline{E}'$ con $\overline{E'}$.

Este antiespacio es el que, en última instancia, resultará relevante en lo que resta del trabajo. Se justifica, pues, la siguiente definición.

Definición 2.1.4: Sea E un espacio vectorial topológico localmente convexo Hausdorff separable y sea $\overline{E}$ su antiespacio relativo al antiisomorfismo $\Theta : E \to \overline{E}$. Diremos que el espacio dual topológico de $\overline{E}$, identificable como antiespacio de E', es el espacio *antidual* de E y lo notaremos con $E^{\times}$.

Debemos aclarar que, como ya mencionamos, se suele denominar antidual al espacio de funcionales antilineales continuas sobre E. Ciertamente este espacio constituye un modelo de antiespacio para E', aquel que resulta de considerar como antiespacio de E al que fue definido en el primer ejemplo, sin embargo, el concepto que acabamos de introducir es más general.

Asimismo resultará conveniente considerar la forma sesquilineal sobre $E^\times \times E$ dada por

$$\langle x|\,\xi\rangle = \langle \Theta' x, \xi\rangle = \overline{\langle x, \Theta\xi\rangle} \tag{2.2}$$

en donde ahora $x \in E^\times$ y $\xi \in E$.

Evidentemente esta forma expresa la antidualidad en que están los espacios $E^\times$ y E.

En el caso en que el espacio en cuestión es un espacio de Hilbert, H, en virtud del isomorfismo de Riesz, al que notaremos de ahora en más con θ, podemos considerar como modelo de antiespacio de H a su dual H', de manera que la antidualidad que acabamos de definir se reduce simplemente a la que define el producto interno en H. En efecto, tenemos que

$$\langle x|\,\xi\rangle = (\theta x|\,\xi) \tag{2.3}$$

para todo $x \in H^\times$ y todo $\xi \in H$.

En adelante, cuando el espacio en cuestión sea un espacio hilbertiano y a menos de que se presente alguna ambigüedad en la notación, intentaremos evitar hacer referencia explícita al isomorfismo de Riesz, de manera que, en lugar de la expresión (2.3), escribiremos

$$\langle x|\,\xi\rangle = (x|\,\xi) \tag{2.4}$$

Ejemplo 2.1.5: Por último, mencionaremos un ejemplo que será importante cuando consideremos el caso particular de las *-álgebras.

Si sobre E se ha definido un antiautomorfismo se tiene que E es antiespacio de sí mismo para la conjugación que esta aplicación define.

Vale aclarar que en este caso aparece una ambigëdad en lo que respecta al modelo de antiespacio de $\overline{E}$, ya que por antiespacio de $\overline{E}$ puede considerarse a E ya sea a través del antiisomorfismo recíproco, ya sea a través de la doble aplicación del antiautomorfismo.

Sin embargo, cuando el antiautomorfismo es, además, una involución, que será el caso cuando se trate de *-álgebras, esta ambigüedad desaparece.

Otro concepto que será importante en las secciones subsiguientes es el que se desprende de la siguiente definición.

Definición 2.1.6: Sean E y F dos espacios vectoriales topológicos localmente convexos Hausdorff separables y sea $u : E \to F$ una transformación lineal. Llamaremos transformación *adjunta* de u a la aplicación $u^\times : F^\times \to E^\times$ definida por

$$\left\langle u^\times y \right| \xi \rangle = \langle y | u\xi \rangle \tag{2.5}$$

para todo $y \in F^\times$ y todo $\xi \in E$.

En el caso en que u sea una transformación antilineal, la ecuación anterior debe reemplazarse por la siguiente expresión

$$\left\langle u^\times y \right| \xi \rangle = \overline{\langle y | u\xi \rangle} \tag{2.6}$$

para todo $y \in F^\times$ y todo $\xi \in E$.

La vinculación entre la transformación adjunta y la transformación traspuesta de un mismo operador u se hace evidente si uno introduce, además, el concepto de transformación *conjugada*.

Definición 2.1.7: Si u es una aplicación lineal o antilineal de E en F, en donde E y F son dos espacios localmente convexos Hausdorff separables, se define la transformación conjugada de u como la transformación $\overline{u} : \overline{E} \to \overline{F}$ dada por

$$\overline{u}\Theta_E = \Theta_F u \tag{2.7}$$

en donde Θ_E y Θ_F son los antiisomorfismos asociados a los antiespacios de E y F, respectivamente.

De la ecuación (2.7) se obtiene que $\overline{u}'$ es precisamente $u^\times$ y que se satisface que

$$\Theta'_E u^\times = u'\Theta'_F \tag{2.8}$$

Por supuesto, si los dos espacios en consideración son espacios hilbertianos, $u^\times$ resulta ser la transformación adjunta usual de u.

2.2. Subespacios hilbertianos de espacios vectoriales topológicos.

La siguiente definición se corresponde con la que fue introducida por Schwartz en [53].

Definición 2.2.1: Sean E y F dos espacios vectoriales topológicos localmente convexos Hausdorff separables. Diremos que F es un *subespacio topológico* de E, y lo notaremos

$$F \overset{j}{\hookrightarrow} E \tag{2.9}$$

si existe una transformación lineal inyectiva, j, débilmente continua, de F en E.

Si identificamos a F con su imagen a través de la transformación que lo inyecta en E, cosa que haremos de ahora en más, el concepto que acabamos de introducir coincide algebraicamente con el habitual, y es sólo desde un punto de vista topológico que ambas nociones difieren.

En efecto, la diferencia que mantiene esta definición de subespacio topológico con respecto a la definición ordinaria es que complementariamente con la topología sobre jF heredada en tanto que subespacio lineal de E, estamos admitiendo la posibilidad de que sobre jF se pueda considerar una topología más fina que la anterior: aquella topología localmente convexa que hace de j un isomorfismo de F sobre jF.

En el caso en que F sea un espacio metrizable haremos la identificación de F con jF a la que acabamos de referirnos sólo cuando esta topología haga de j un isomorfismo isométrico.

Para la situación particular en que un subespacio topológico es en sí mismo un espacio de Hilbert tenemos la siguiente definición.

Definición 2.2.2: Sea E un espacio vectorial topológico localmente convexo Hausdorff separable. Si un espacio de Hilbert H es un subespacio topológico de E diremos simplemente que es un *subespacio hilbertiano* de E.

Al producto interno definido sobre H lo notaremos como es usual, de modo que escribiremos

$$(\phi|\,\psi) \tag{2.10}$$

para todo par $\phi, \psi \in H$. Alternativamente, si existe alguna ambigüedad en la notación, incluiremos como subíndice al espacio en cuestión, de manera que escribiremos, en lugar de (2.10),

$$(\phi|\,\psi)_H \tag{2.11}$$

Como ya mencionamos, si H es un subespacio hilbertiano de E, de manera que tenemos

$$H \overset{j}{\hookrightarrow} E \tag{2.12}$$

en donde j es una transformación débilmente continua inyectiva, identificaremos a H con su imagen a través de j, de manera que H puede caracterizarse en tanto subespacio lineal algebraico de E provisto de una estructura hilbertiana tal que la inclusión de H en E es continua, o sea, tal que la topología definida por la norma en H es más fina que la topología inducida sobre H por E en tanto subespacio lineal.

Cabe volver a destacar que si sobre un mismo subespacio lineal se definen dos estructuras hilbertianas diferentes, a los subespacios hilbertianos resultantes los consideraremos distintos.

La siguiente proposición muestra que en lo que a la determinación de sus subespacios topológicos se refiere la topología inicial sobre E es hasta cierto punto irrelevante, en el sentido de que la caracterización de un espacio de Hilbert como subespacio hilbertiano de E depende de la dualidad entre E y E' o, si se prefiere, de la antidualidad entre E y $E^{\times}$.

Proposición 2.2.3: Sea H un espacio de Hilbert contenido en un espacio localmente convexo Hausdorff separable E. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. H es un subespacio hilbertiano de E.
2. La inyección canónica de H en E es débilmente continua.
3. La inyección canónica de H en E es continua cuando se considera sobre E la topología Mackey.

Demostración: La demostración puede encontrarse en [40], pág. 36. □

En adelante supondremos que E es un espacio vectorial localmente convexo Hausdorff separable *cuasicompleto*, es decir, un espacio topológico tal que todo subconjunto cerrado y acotado en E es completo.

La necesidad de imponer esta condición sobre E se desprende de la siguiente proposición.

Proposición 2.2.4: Sea H_0 un subespacio lineal de un espacio localmente convexo Hausdorff sparable cuasicompleto E, provisto de una estructura prehilbertiana tal que la inclusión de H_0 en E, que notaremos j, es continua. Sea $\hat{H}_0$ el espacio completado de H_0 y sea J la (única) aplicación continua de $\hat{H}_0$ en E que prolonga a j. Entonces existe un subespacio hilbertiano H de E que contiene densamente a H_0 si, y sólo si J es inyectiva.

En este caso se tiene, además, que H es la imagen de $\hat{H}_0$ a través de J con la estructura hilbertiana transportada de $\hat{H}_0$.

Demostración: Ver [53], pág. 125. $\square$

Destacamos que la cuasicompletitud de E es necesaria en la demostración de la proposición anterior precisamente para poder garantizar la unicidad de la prolongación continua J de j.

Uno de los conjuntos que serán importantes en lo que resta del trabajo es el que conforman los subespacios hilbertianos de un dado espacio vectorial E, al que notaremos de ahora en más con $\mathrm{Hilb}(E)$.

Como ya se destaca en [53], $\mathrm{Hilb}(E)$ posee una estructura de cono regular estrictamente convexo, estructura que tendrá consecuencias importantes cuando discutamos sus analogías con el conjunto de las representaciones irreducibles cíclicas de las *-álgebras topológicas.

Repasaremos a continuación las definiciones más importantes.

Definición 2.2.5: Sea Γ un conjunto cualquiera. Se dice que Γ es un *cono convexo* si Γ está provisto de las siguientes estructuras:

1. Una *ley de multiplicación por escalares no negativos*, aplicación de $\mathbb{R}_+ \times \Gamma$ en Γ, a la que notaremos
$$(\lambda, \xi) \to \lambda\xi \tag{2.13}$$
tal que se satisface que
$$1\xi = \xi \tag{2.14}$$
para todo $\xi \in \Gamma$, y además
$$(\lambda\mu)\xi = \lambda(\mu\xi) \tag{2.15}$$
para todo $\xi \in \Gamma$ y todo par $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$.

2. Una *ley de adición interna*, aplicación de $\Gamma \times \Gamma$ en Γ, a la que noteremos
$$(\xi, \zeta) \to \xi + \zeta \tag{2.16}$$
de la que se asume que es asociativa, conmutativa y que está provista de un elemento neutro 0.

Pediremos además que el producto sea ditributivo respecto de la adición tanto en $\mathbb{R}$ como en Γ, de manera que

$$(\lambda + \mu)\xi = \lambda\xi + \mu\xi \tag{2.17}$$

para todo par $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ y todo $\xi \in \Gamma$, y

$$\lambda(\xi + \zeta) = \lambda\xi + \lambda\zeta \tag{2.18}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}_+$ y $\xi, \zeta \in \Gamma$, y que

$$0\xi = \lambda 0 = 0 \tag{2.19}$$

para todo $\lambda\mathbb{R}_+$ y todo $\xi \in \Gamma$.

Definición 2.2.6: Sea Γ un cono convexo. Si dados $\xi, \zeta \in \Gamma$ tales que $\xi+\zeta = 0$ se tiene que $\xi = \zeta = 0$, se dirá que Γ es un cono *estrictamente convexo*.

Observamos que en el caso en que Γ es un cono contenido en un espacio vectorial real ordenado esta definición equivale a pedir que

$$\Gamma \cap \{-\Gamma\} \tag{2.20}$$

Definición 2.2.7: Sea Γ un cono convexo. Si dados ξ, ζ, η en Γ se satisface que $\xi + \zeta = \xi + \eta$ implica que $\zeta = \eta$ diremos que Γ es un cono *regular*.

El concepto de cono regular estrictamente convexo contenido en un espacio vectorial real satisface todas las propiedades que se mencionaron antes, y en esencia, éste es el único caso admisible, dado que a todo cono estrictamente convexo regular Γ se le puede asociar canónicamente, y a menos de isomorfismos, un único espacio vectorial real G tal que G está generado por el cono Γ.

En efecto, si sobre $\Gamma \times \Gamma$ se define la relación de equivalencia

$$(\xi, \xi') \sim (\zeta, \zeta') \text{ sii } \xi + \zeta' = \xi' + \zeta \tag{2.21}$$

y se define

$$G = (\Gamma \times \Gamma)/\sim \tag{2.22}$$

la identificación de la clase (ξ, ξ') con la diferencia $\xi - \xi'$ en G muestra que Γ genera a G.

Dado un cono regular estrictamente convexo Γ, puede definirse canónicamente una *relación de orden* como sigue: se tiene que $\xi \leq \zeta$ si existe $\eta \in \Gamma$ tal que $\zeta = \xi + \eta$.

Como es fácil comprobar, si existe un tal elemento, debe ser único, y si G es el espacio vectorial generado por Γ, se tiene que G es un espacio vectorial ordenado en el que Γ coincide con el cono de elementos positivos de G.

Ahora bien, en $\mathrm{Hilb}(E)$ pueden definirse una multiplicación exterior por números reales no negativos, una ley de adición interna y, consecuentemente, una relación de orden de manera tal que $\mathrm{Hilb}(E)$ adquiere una estructura de cono regular estrictamente convexo.

Una discusión detallada acerca de estas operaciones y del ordenamiento en $\mathrm{Hilb}(E)$ puede encontrarse en [53]. Aquí sólo mencionaremos los aspectos más remarcables de las respectivas construcciones.

1. **Ley de multiplicación exterior sobre Hilb(E) por números reales no negativos.**

   La acción del grupo multiplicativo $\mathbb{R}_{>0}$ sobre $\mathrm{Hilb}(E)$ se define de la siguiente manera: dados un subespacio hilbertiano H de E y un número real $\lambda > 0$, el espacio lineal subyacente de λH será, por definición, el mismo espacio H pero provisto de la norma que es $(1/\sqrt{\lambda})$ veces la norma sobre H, o sea

   $$\| \, \|_{\lambda H} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \| \, \|_H \tag{2.23}$$

   Esta acción de $\mathbb{R}_{>0}$ sobre $\mathrm{Hilb}(E)$ se extiende a $\mathbb{R}_{\geq 0}$, identificando al espacio λH con el subespacio $\{0\}$ cuando $\lambda = 0$.

   Evidentemente, el producto así definido resulta asociativo, esto es, se satisface que

   $$\lambda(\mu H) = (\lambda\mu)H \tag{2.24}$$

   para todo par $\lambda, \mu \geq 0$.

2. **Ley de adición interna en Hilb(E).**

   Sean H_1 y H_2 dos subespacios hilbertianos de E, y sean $j_1 : H_1 \hookrightarrow E$ y $j_2 : H_2 \hookrightarrow E$ las correspondientes inclusiones.

   Consideremos el espacio $H_1 \times H_2$, o sea, el producto hilbertiano de H_1 y H_2. Este espacio, evidentemente, no es subespacio de E. Sin embargo existe una aplicación natural Φ de $H_1 \times H_2$ en E que es lineal y continua dada por

$$\Phi(\phi_1, \phi_2) = j_1(\phi_1) + j_2(\phi_2) \tag{2.25}$$

en donde $\phi_1 \in H_1$ y $\phi_2 \in H_2$.

El núcleo de esta transformación es cerrado en E, de manera que el espacio cociente $(H_1 \times H_2)/\mathrm{Ker}(\Phi)$ posee un estructura canónica de espacio hilbertiano.

El espacio $H_1 + H_2$, suma de H_1 y H_2, se define como la imagen de $H_1 \times H_2$ a través de Φ, equipado con la única norma que hace de la biyección canónica entre $(H_1 \times H_2)/\mathrm{Ker}(\Phi)$ y $\Phi(H_1 \times H_2)$ un isomorfismo isométrico.

Esta norma está explícitamente dada por

$$\|\phi\|^2_{H_1+H_2} = \min\left\{\|\phi_1\|^2_{H_1} + \|\phi_2\|^2_{H_2} : \Phi(\phi_1, \phi_2) = \phi\right\} \tag{2.26}$$

La ley de adición que acabamos de definir es, salvo isomorfismos, conmutativa, asociativa y satisface que

$$\lambda\,(H_1 + H_2) = \lambda H_1 + \lambda H_2, \qquad \forall \lambda \geq 0 \tag{2.27}$$

Además, para todo subespacio hilbertiano $H \hookrightarrow E$, se verifica que

$$(\lambda + \mu)\,H = \lambda H + \mu H, \qquad \forall \lambda, \mu \geq 0 \tag{2.28}$$

3. **Orden parcial sobre Hilb(E).**

   Por último se define sobre Hilb(E) un orden parcial de la siguiente manera. Dados dos subespacios hilbertianos H_1 y H_2 de E, diremos que $H_1 \leq H_2$ si $H_1 \subseteq H_2$ y la inclusión de H_1 en H_2 es un operador continuo de norma a lo sumo 1, o sea, si

$$\|\phi\|_{H_1} \geq \|\phi\|_{H_2}, \qquad \forall \phi \in H_1 \tag{2.29}$$

   Es fácil verificar que, para $H \neq \{0\}$, se cumple que

$$\lambda H \leq H, \qquad \forall \lambda \leq 1 \tag{2.30}$$

   y que

$$H_1 + H_2 \geq H_1 \tag{2.31}$$

y

$$H_1 + H_2 \geq H_2 \tag{2.32}$$

para todo par de subespacios hilbertianos H_1 y H_2 de E.

La relación de orden que acabamos de definir coincide con la que discutimos anteriormente y tiene las siguientes propiedades.

Proposición 2.2.8: Sean H_1 y H_2 dos subespacios hilbertianos de E.

1. Para que $H_1 \subseteq H_2$ es necesario y suficiente que exista una constante $\lambda > 0$ tal que $H_1 \leq \lambda H_2$.

2. Para que $H_1 \cap H_2 = \{0\}$ es necesario y suficiente que se satisfaga que si un subespacio hilbertiano de E, H, verifica simultáneamente que $H \leq H_1$ y $H \leq H_2$, entonces $H = \{0\}$.

Demostración: Las demostraciones pueden consultarse en [53], Prop. 2, pág. 137, y en [53], Prop. 3, pág. 138. □

Comentario. Cabe mencionar que cuando $\ker(\Phi) = 0$, entonces $H_1 \cap H_2 = \{0\}$ y $H_1 + H_2$ es simplemente la suma directa hilbertiana de H_1 y H_2. En este caso y como es usual, escribiremos $H = H_1 \oplus H_2$.

La definición de suma de dos subespacios hilbertianos es concordante con una construcción más general referida a los espacios que son imágenes de aplicaciones lineales, construcción que discutiremos con detalle más adelante, y que aquí repasamos brevemente.

Sean E y F dos espacios vectoriales topológicos localmente convexos Hausdorff separables cuasicompletos y sea $u : E \to F$ una aplicación lineal continua. Sea H un subespacio hilbertiano de E y sea j la inyección canónica de H en E.

Dado que $uj : H \to F$ es también una transformación continua, su núcleo es un subespacio cerrado de H. El espacio imagen de H a través de uj, equipado con la estructura hilbertiana que hace a la restricción de uj sobre $\ker(uj)^\perp$ una isometría lineal, es un subespacio hilbertiano de F.

Como ya mencionamos, las operaciones que acabamos de definir dan a $\mathrm{Hilb}(E)$ una estructura de cono regular estrictamente convexo.

La importancia de esta estructura se visualizará en términos del que es el resultado más importante de la teoría de subespacios hilbertianos de espacios topológicos de Schwartz, resultado que muestra la existencia de una biyección entre Hilb(E) y la familia de todas las formas sesquilineales no negativas separable y débilmente continuas sobre $E^\times \times E^\times$.

Como veremos, esta biyección es un isomorfismo para la estructura de cono en Hilb(E), o sea, preserva las operaciones que acabamos de definir, así como el orden parcial.

2.3. Núcleos relativos a espacios vectoriales topológicos.

La siguiente definición fue originalmente dada por N. Aronzsajn en [3].

Definición 2.3.1: Sean E un espacio vectorial topológico localmente convexo Hausdorff separable cuasicompleto y $E^\times$ su espacio antidual. Diremos que una aplicación lineal $h : E^\times \to E$ es un *núcleo relativo a* E si h es continua cuando se provee a E y a $E^\times$ de sus topologías débiles $\sigma(E^\times, E)$ y $\sigma(E, E^\times)$, respectivamente.

La importancia de los núcleos en este contexto radica en que, bajo ciertas condiciones que discutiremos a continuación, es posible construir o reproducirün subespacio hilbertiano de E a través de un núcleo h.

Definición 2.3.2: Diremos que una aplicación $h : E^\times \to E$ es *hermítica* si, y sólo si se satisface que

$$h = h^\times \tag{2.33}$$

o sea, si se verifica que

$$\langle x|hy\rangle = \overline{\langle y|hx\rangle} \tag{2.34}$$

para todo $x, y \in E^\times$.

Es fácil demostrar que todo operador hermítico de $E^\times$ en E resulta necesariamente un núcleo relativo a E.

Definición 2.3.3: Diremos que una aplicación h de $E^\times$ en E es *positiva* cuando se satisface que

$$\langle x|hx\rangle \geq 0 \tag{2.35}$$

para todo $x \in E^\times$.

Los operadores positivos tienen múltiples propiedades. En la siguiente proposición mencionamos las más importantes.

Proposición 2.3.4: Sea E un espacio vectorial topológico localmente convexo Hausdorff separable y sea $h : E^\times \to E$ un operador positivo. Se tiene, entonces, que

1. h es hermítico.

2. h es un núcleo relativo a E.

3. Se satisface la *desigualdad de Cauchy-Schwartz*, o sea, se tiene que

$$|\langle x|\, hy\rangle|^2 \leq \langle x|\, hx\rangle \, \langle y|\, hy\rangle \tag{2.36}$$

para todo $x, y \in E^\times$.

Demostración: Ver [53], Prop. 5, pág. 140. □

Las expresiones anteriores sugieren que en lugar de considerar núcleos relativos a E pueden indistintamente considerarse formas sesquilineales sobre $E^\times \times E^\times$.

En efecto, dado un núcleo relativo a E, éste define una forma sesquilineal, que notaremos asimismo con h, separable y débilmente continua sobre $E^\times \times E^\times$ mediante la siguiente expresión

$$h(x, y) = \langle x|\, hy\rangle \tag{2.37}$$

en donde $x, y \in E^\times$.

Recíprocamente se tiene que para que una forma sesquilineal sobre $E^\times \times E^\times$ sea definida por un núcleo relativo a E de acuerdo con la ecuación anterior, es suficiente que la forma sea separable y débilmente continua.

Es fácil demostrar que la forma h es hermítica, o sea, que se satiasface que

$$h(x, y) = \overline{h(y, x)} \tag{2.38}$$

para todo $x, y \in E^\times$, si y sólo si el núcleo asociado es hermítico.

Asimismo se comprueba que la forma h es positiva, o sea, se verifica que

$$h(x, x) \geq 0 \tag{2.39}$$

para todo $x \in E^\times$, si y sólo si el núcleo asociado es también positivo.

2.4. Núcleos reproductivos de subespacios hilbertianos.

Sea H un subespacio hilbertiano de E y sea j la inclusión canónica de H en E.

Dado que j es una transformación continua, la transformación adjunta de j, $j^\times$, resulta una proyección con rango denso débilmente continua de $E^\times$ en $H^\times$.

Este último, por otra parte, es isomorfo a H a través del isomorfismo de Riesz, θ, de manera que la transformación dada por

$$h = j\theta j^\times \tag{2.40}$$

es una aplicación lineal débilmente continua de $E^\times$ en E, o sea, un núcleo relativo a E.

Definición 2.4.1: Sean E un espacio vectorial topológico localmente convexo Hausdorff separable cuasicompleto y sea H un subespacio hilbertiano de E. Al núcleo relativo a E dado por la ecuación (2.40) lo denominaremos el *núcleo reproductivo de H en E.*

Por una cuestión de claridad, en la definición de núcleo reproductivo hicimos referencia explícita al isomorfismo entre $H^\times$ y H. En lo que resta del capítulo evitaremos hacer esta referencia de modo que en lugar de la expresión (2.40) escribiremos simplemente

$$h = jj^\times \tag{2.41}$$

Mencionaremos a continuación algunas de las propiedades más relevantes que muestran los núcleos reproductivos de subespacios hilbertianos.

Proposición 2.4.2: Sea H un subespacio hilbertiano de E. Sea h el núcleo reproductivo de H en E. Se tiene, entonces, que h es la única aplicación débilmente continua de $E^\times$ en E tal que se satisface que

$$\langle x|\, hy\rangle = \left(j^\times x|j^\times y\right) \tag{2.42}$$

para todo par $x, y \in E^\times$

Demostración: Consultar [53], Prop. 6, pág. 142 para la demostración. $\square$

De esta proposición resulta como corolario que todo núcleo reproductivo es hermítico y positivo.

En efecto, si x, y son dos elementos de $E^\times$, se tiene que

$$\langle x|\, hy\rangle = \left(j^\times x|\, j^\times y\right) = \overline{(j^\times y|\, j^\times x)} = \overline{\langle y|\, hx\rangle} \tag{2.43}$$

de donde resulta que es hermítico.

Por otra parte, de la ecuación anterior se tiene que

$$\langle x|\, hx\rangle = \left(j^\times x|\, j^\times x\right) = \left\|j^\times x\right\|^2 \geq 0 \tag{2.44}$$

para todo $x \in E^\times$, y con ello se observa que h es un núcleo positivo.

Por último, tenemos la siguiente caracterización de un subespacio hilbertiano en términos de su núcleo reproductivo.

Proposición 2.4.3: Sea E un espacio localmente convexo Hausdorff separable cuasicompleto. Sean H un subespacio hilbertiano de E y h el respectivo núcleo reproductivo. Entonces H puede identificarse con la completación de la imagen de $E^\times$ a través de h respecto de la norma dada por

$$\|hx\| = \sqrt{\langle x|\, hx\rangle} \tag{2.45}$$

para todo $x \in E^\times$.

Demostración: Ver la demostración en [53], Prop. 7, pág. 143. □

2.5. La biyección entre $\mathcal{L}^+(E)$ y Hilb(E).

Sea E un espacio localmente convexo Hausdorff separable cuasicompleto y sea $E^\times$ su espacio antidual topológico.

En lo que sigue, y a menos que indiquemos lo contrario, supondremos que ambos espacios están equipados con sus respectivas topologías débiles, $\sigma(E^\times, E)$ y $\sigma(E, E^\times)$.

Notaremos con $\mathcal{L}(E)$ al conjunto de todos los operadores continuos de $E^\times$ en E y con $\mathcal{L}^+(E)$ al subconjunto de $\mathcal{L}(E)$ constituído por sus elementos positivos. Los núcleos reproductivos pertenecen por supuesto a este conjunto.

Como mencionamos antes, la correspondencia que a cada $h \in \mathcal{L}(E)$ le asigna la forma sesquilineal dada por

$$h(x, y) = \langle x|hy\rangle \tag{2.46}$$

es un isomorfismo (hasta ahora, algebraico) de $\mathcal{L}(E)$ sobre el espacio de formas sesquilineales separable y débilmente continuas sobre $E^{\times} \times E^{\times}$.

Esta isomorfismo restringido a $\mathcal{L}^{+}(E)$ resulta una biyección pero esta vez con las formas sesquilineales no negativas sobre $E^{\times} \times E^{\times}$.

El resultado principal de la teoría de subespacios hilbertianos de Schwartz, resultado que ya adelantamos secciones previas, puede ser enunciado de la siguiente manera.

Teorema 2.5.1: Consideremos un espacio vectorial localmente convex separable Hausdorff cuasicompleto E. Se tiene, entonces, que la aplicación que hace corresponder a cada subespacio hilbertiano H de E su respectivo núcleo reproductivo h es una biyección de $\mathrm{Hilb}(E)$ sobre $\mathcal{L}^{+}(E)$.

Demostración: La demostración de este teorema no es complicada pero resulta tediosa, y puede encontrarse en el trabajo original de Schwartz [53].

Aquí sólo mencionaremos los aspectos más destacados del procedimiento.

Primero mostraremos que H está efectivamente determinado por su núcleo reproductivo h.

Como ya vimos en la proposición 2.4.3, $hE^{\times}$ es un subespacio denso de H y no existe ningún elemento no nulo de H que sea ortogonal a él.

Sea B la bola unitaria en H.

Dado que B es débilmente compacta en H, la imagen de B a través de j es débilmente cerrada en E, y siendo este conjunto un convexo resulta, a fortiori, cerrado en E para la topología original.

Se tiene pues que la imagen de B en E es la clausura en E del conjunto

$$\left\{ hx : \langle x|hx\rangle^{1/2} \leq 1 \right\} \tag{2.47}$$

Con esto queda demostrado que H está determinado por su núcleo reproductivo.

Más aún, puede demostrarse que dado un elemento $\xi \in E$, éste es imagen a través de j de un elemento de H si, y sólo si

$$\sup \left\{ \frac{|\langle x|\,\xi\rangle|}{\langle x|\,hx\rangle^{1/2}} : \langle x|\,hx\rangle > 0 \right\} < +\infty \tag{2.48}$$

siendo el valor de esta expresión su norma en H.

Ahora demostraremos que dado un elemento $h \in \mathcal{L}^+(E)$, podemos definir un subespacio hilbertiano H de E de modo tal que su núcleo reproductivo coincida con h.

Sea $E^\times / \ker(h)$ el espacio cociente de $E^\times$ respecto del núcleo de h, equipado con la estructura prehilbertiana que se deriva de la forma sesquilineal que define h.

La inyección canónica $h : E^\times / \ker(h) \to E$ asociada con h tiene una extensión también inyectiva $\overline{h}$ sobre la completación de $E^\times / \ker(h)$.

El espacio imagen $H = \mathrm{Im}(\overline{h})$ con la única estructura hilbertiana que hace de $\overline{h}$ una isometría es un subespacio hilbertiano de E, cuyo núcleo reproductivo es, precisamente, h. $\square$

Comentario. Cabe destacar la similitud que tiene el procedimiento que se emplea para construir el subespacio hilbertiano H de E en la demostración de este teorema y el que se emplea para construir el espacio de representación de una C*-álgebra en la demostración del teorema de Gel'fand, Naimark y Segal.

2.6. *Consecuencias de la biyección entre $\mathcal{L}^+(E)$ y Hilb(E).*

2.6.1. *Estructura cónica de Hilb(E).*

Ya hemos visto que $\mathrm{Hilb}(E)$ admite una estructura de cono regular estrictamente convexo.

Por otra parte, el conjunto de operadores hermíticos de $E^\times$ en E, $\mathcal{L}^H(E)$, en tanto subespacio de $L(E)$, resulta un espacio vectorial real ordenado tal que la colección de sus elementos positivos es $\mathcal{L}^+(E)$, de donde se desprende que $\mathcal{L}^+(E)$ es también un cono regular estrictamente convexo.

Una de las características salientes de la biyección entre $\mathrm{Hilb}(E)$ y $\mathcal{L}^+(E)$ que presentamos en la sección anterior es que se trata de un isomorfismo cónico.

En efecto, pueden probarse las siguientes proposiciones.

Proposición 2.6.1: Sea E un espacio localmente convexo Hausdorff separable cuasicompleto. Sean H y H' dos subespacios hilbertianos de E y notemos con h y h', respectivamente, a sus núcleos reproductivos. Dado un número real no negativo λ se tiene que

$$H' = \lambda H \Longleftrightarrow h' = \lambda h \tag{2.49}$$

Demostración: Ver [53], Prop. 11, pág. 159. □

Por otra parte, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.6.2: Sea E un espacio localmente convexo Hausdorff separable cuasicompleto. Sean H,H_1 y H_2 tres subespacios hilbertianos de E y sean h,h_1 y a h_2 sus respectivos núcleos reproductivos. Entonces,

$$H = H_1 + H_2 \Longleftrightarrow h = h_1 + h_2 \tag{2.50}$$

Demostración: Ver [53], Prop. 12, pág. 160. □

Por último, puede demostrarse la siguiente proposición.

Proposición 2.6.3: Sea E un espacio localmente convexo Hausdorff separable cuasicompleto y sean H_1 y H_2 dos subespacios hilbertianos de E. Si con h_1 y h_2 notamos, respectivamente, a los núcleos reproductivos de H_1 y H_2 se satisface que

$$H_1 \leq H_2 \Longleftrightarrow h_1 \leq h_2 \tag{2.51}$$

en donde recordamos que $h_1 \leq h_2$ significa que $h_2 - h_1$ pertenece a $\mathcal{L}^+(E)$.

Demostración: La demostración puede encontrarse en [53], Prop. 13, pág. 160. □

Las consecuencias del isomorfismo entre $\mathrm{Hilb}(E)$ y $\mathcal{L}^+(E)$ son muchas y todas tendrán relevancia en lo que sigue del trabajo, de manera que las listaremos a continuación.

Proposición 2.6.4: Sean H_1 y H dos subespacios hilbertianos de E. Entonces, para que exista un subespacio hilbertiano H_2 de E tal que $H = H_1 + H_2$ es necesario y suficiente que $H \geq H_1$.

Demostración: [53], Prop. 14, pág. 161. □

En las condiciones de la proposición anterior se tiene que H_2 es único. En adelante notaremos $H_2 = H - H_1$.

Proposición 2.6.5: Sean H_1 y H_2 dos subespacios hilbertianos de E y sean h_1 y h_2 sus respectivos núcleos reproductivos. Para que $H_1 \subset H_2$ es necesario y suficiente que exista una constante positiva λ tal que $h_1 \leq \lambda h_2$.

Demostración: Ver [53], Prop. 15, pág. 161. □

Comentario. Como corolario de esta proposición se tiene que H_1 y H_2 son isomorfos como espacios vectoriales (con estructura hilbertiana eventualmente diferente) si, y sólo si existe una constante $\lambda \geq 0$ tal que $h_1 \leq \lambda h_2$ y $h_2 \leq \lambda h_1$.

Por otra parte, se deduce de las proposiciones anteriores el siguiente resultado.

Proposición 2.6.6: Sean H_1 y H_2 dos subespacios hilbertianos de E y sean h_1 y h_2 sus núcleos reproductivos. Entonces, $H_1 \cap H_2 = \{0\}$ si, y sólo h_1 y h_2 son excluyentes, esto es, si la existencia de un núcleo positivo k tal que $k \leq h_1$ y $k \leq h_2$ implica que $k = 0$.

Demostración: La demostración de esta proposición puede consultarse en [53], Prop. 16, pág. 162. □

La siguiente proposición se demuestra a partir del resultado anterior.

Proposición 2.6.7: Sean H y H_1 dos subespacios hilbertianos de E con núcleos reproductivos h y h_1, respectivamente. Para que H_1 sea subespacio de H con la estructura hilbertiana inducida por éste es necesario y suficiente que $h - h_1$ pertenezca a $\mathcal{L}^+(E)$ y que h_1 y $h - h_1$ sean mutuamente excluyentes.

Bajo estas condiciones, el único subespacio hilbertiano H_2 de E tal que $H = H_1 + H_2$ es el subespacio ortogonal de H_1 en H, también con la estructura hilbertiana heredada de H.

Demostración: Ver [53], Prop. 17, pág. 162. □

Por último, mencionamos los siguientes resultados.

Proposición 2.6.8: Sea I un conjunto ordenado y sea $\{H_i\}_{i \in I}$ un filtrado decreciente de subespacios hilbertianos de E. Sean h_i $(i \in I)$ sus respectivos núcleos reproductivos. Entonces, el espacio

$$H = \inf\{H_i : i \in I\} \tag{2.52}$$

existe, es subespacio hilbertiano de E y tiene por núcleo reproductivo a

$$h = \inf\{h_i : i \in I\} \tag{2.53}$$

operador que coincide con $\lim h_i$ en $\mathcal{L}^+(E)$ cuando se provee a éste con la topología de la convergencia simple débil.

Se verifica que H es el subespacio de $\cap_{i\in I} H_i$ constituído por aquellos $\psi \in E$ tales que

$$\sup\{\|\psi\|_{H_i} : i \in I\} < \infty \tag{2.54}$$

Además, se tiene que

$$\|\psi\|_H = \sup\{\|\psi\|_{H_i} : i \in I\} = \lim \|\psi\|_{H_i} \tag{2.55}$$

y

$$(\phi|\psi)_H = \lim\, (\phi|\psi)_{H_i} \tag{2.56}$$

Demostración: Ver [53], Prop. 18, pág. 162. □

Proposición 2.6.9: Sea I un conjunto ordenado. Sea $\{H_i\}_{i\in I}$ un filtrado creciente de subespacios hilbertianos de E y sean h_i ($i \in I$) sus respectivos núcleos reproductivos. Para que el filtrado sea mayorado en $\mathrm{Hilb}(E)$ es necesario y suficiente que

$$\sup\{\langle x|h_i x\rangle : i \in I\} < \infty \tag{2.57}$$

para todo $x \in E^\times$.

En este caso se tiene que el subespacio hilbertiano de E dado por

$$H = \sup\{H_i : i \in I\} \tag{2.58}$$

existe y su núcleo reproductivo está dado por

$$h = \sup\{h_i : i \in I\} \tag{2.59}$$

que coincide con $\lim h_i$ en $\mathcal{L}^+(E)$ provisto con la topología de la convergencia simple débil.

Se satisface que H es la completación en E del subespacio $\cup_{i\in I} H_i$ respecto de la estructura hilbertiana dada por

$$\|\psi\|_H = \inf\{\|\psi\|_{H_i} : i \in I\} = \lim \|\psi\|_{H_i} \tag{2.60}$$

y

$$(\phi|\psi)_H = \lim\, (\phi|\psi)_{H_i} \tag{2.61}$$

Demostración: Ver [53], Prop. 18, pág. 162. □

Estas dos proposiciones muestran resultados que son esenciales para poder definir correctamente las sumas infinitas de subespacios hilbertianos.

Más adelante veremos que son asimismo imprescindibles para poder definir la suma arbitraria de *-representaciones de una dada *-álgebra topológica.

Trataremos este tema en la siguiente subsección.

2.6.2. Sumas infinitas de subespacios hilbertianos.

Sea un espacio localmente convexo Hausdorff separable cuasicompleto E.

Consideremos una colección de subespacios hilbertianos de E, $\{H_i\}_{i\in I}$, en donde I es ahora un conjunto de índices no necesariamente ordenado. Sea $\{h_i\}_{i\in I}$ la respectiva colección de núcleos reproductivos.

La *suma hilbertiana* abstracta de esta colección de espacios es el espacio

$$H = \hat{\oplus}_{i\in I} H_i \tag{2.62}$$

cuyos elementos son aquellos de la forma $\phi = \{\phi_i\}_{i\in I}$ tales que

$$\sum_{i\in I} \|\phi_i\|_{H_i}^2 < \infty \tag{2.63}$$

La estructura hilbertiana de H queda definida a través de la norma dada por la siguiente expresión:

$$\|\phi\|_H^2 = \sum_{i\in I} \|\phi_i\|_{H_i}^2 \tag{2.64}$$

Como es sencillo notar, aquellos elementos de H para los cuales todos los ϕ_i son nulos salvo en un número finito conforman un espacio denso en H, al que notaremos $H_0 = \oplus_{i\in I} H_i$.

La siguiente proposición permite definir la suma infinita de subespacios hilbertianos a la vez que indica bajo qué condiciones un elemento de E puede ser considerado elemento de alguno de los subespacios hilbertianos de E.

Proposición 2.6.10: Sean $\{H_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios hilbertianos de E y $\{h_i\}_{i\in I}$ la colección de sus respectivos núcleos reproductivos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. La aplicación $\Phi_0 : H_0 \to E$ dada por

$$\Phi_0 \phi = \sum_{i \in I} \phi_i \tag{2.65}$$

   es continua.

2. Las sumas $\sum_{i \in J} H_i$, en donde J es una parte finita de I, son mayoradas en $\mathrm{Hilb}(E)$.

3. Para todo $x \in E^{\times}$, se satisface que

$$\sum_{i \in I} \langle x | h_i x \rangle < \infty \tag{2.66}$$

Demostración: La demostración de este importante resultado puede verse en [53], Prop. 19, pág. 166. □

Definición 2.6.11: Bajo las hipótesis de la proposición anterior, diremos que la colección $\{H_i\}_{i \in I}$ es una familia *sumable* de subespacios hilbertianos de E.

Sea Φ la aplicación lineal continua que prolonga a Φ_0 sobre H y sea $\mathrm{Ker}(\Phi)$ su núcleo.

Evidentemente Φ admite la siguiente factorización:

$$H \xrightarrow{\pi} H/\mathrm{Ker}(\Phi) \xrightarrow{\widetilde{\Phi}} E \tag{2.67}$$

en donde π es la proyección canónica de H sobre $H/\mathrm{Ker}(\Phi)$.

Recordemos que siendo Φ una transformación continua, $\mathrm{Ker}(\Phi)$ es un cerrado de H y con ello queda definida canónicamente sobre $H/\mathrm{Ker}(\Phi)$ una estructura hilbertiana.

Definición 2.6.12: Sea $\{H_i\}_{i \in I}$ una colección *sumable* de subespacios hilbertianos de E. Llamaremos *suma de los subespacios hilbertianos* $\{H_i\}_{i \in I}$ al espacio imagen de H a través de Φ, con la estructura hilbertiana tranportada de $H/\mathrm{Ker}(\Phi)$ por $\widetilde{\Phi}$ y lo notaremos $\sum_{i \in I} H_i$.

Como en el caso de las sumas finitas, se tiene que los elementos de $\sum_{i\in I} H_i$ son los elementos de la forma $\sum_{i\in I}\phi_i$, sumables en E, con $\phi_i \in H_i$ para todo $i \in I$, tales que $\sum_{i\in I}\|\phi_i\|_{H_i}^2 < \infty$.

Se satisface, además, que

$$\|\phi\|^2_{\sum_{i\in I} H_i} = \inf\left\{\sum_{i\in I}\|\phi_i\|^2_{H_i} : \sum_{i\in I}\phi_i = \phi\right\} \tag{2.68}$$

Por otra parte, puede demostrarse que $\sum_{i\in I} H_i$ es el supremo de la colección de sumas finitas $\sum_{i\in J} H_i$, con $J \subset I$ finito, y el respectivo núcleo reproductivo está dado por $\sum_{i\in I} h_i$, sumable en $\mathcal{L}(E)$ cuando se provee a este espacio de la topología de la convergencia simple.

Se tiene también que si un subespacio hilbertiano de E es suma directa hilbertiana de una colección $\{H_i\}_{i\in I}$ de subespacios cerrados mutuamente ortogonales, el núcleo reproductivo de este espacio es $h = \sum_{i\in I} h_i$, siendo esta serie sumable en $\mathcal{L}(E)$ para la topología de la convergencia simple.

Otra consecuencia importante que se desprende de la definición de suma infinita de subespacios hilbertianos está expresada en la siguiente proposición.

Proposición 2.6.13: Sea I un conjunto de índices. Sea E un espacio localmente convexo Hausdorff separable cuasicompleto. Consideremos un familia de elementos de E, $\{\xi_i\}_{i\in I}$. Entonces, para que exista un subespacio hilbertiano de E que admita a esta familia como base hilbertiana es necesario y suficiente que

$$\sum_{i\in I} |\langle x|\xi_i\rangle|^2 < \infty \tag{2.69}$$

para cualquier elemento $x \in E^\times$ y que $\{\xi_i\}_{i\in I}$ sea hilbertianamente libre en E.

Demostración: Ver [53], Prop. 21, pág. 169. □

2.6.3. Integrales de subespacios hilbertianos.

De forma análoga al caso de las sumas infinitas, es posible definir integrales de subespacios hilbertianos.

La discusión sobre este tema que presentamos a continuación difiere ligeramente de la que introdujera originalmente Schwartz en [53]. Para más detalles respecto de la teoría de integración en conos referimos a [63].

En toda esta sección Λ será un espacio topológico Hausdorff equipado con una medida de Radón μ, esto es, una medida interna regular localmente finita sobre los conjuntos de Borel de Λ.

Como antes, E será un espacio localmente convexo Hausdorff separable cuasicompleto.

Sea F un espacio topológico cualquiera.

Definición 2.6.14: Dada una transformación ϕ de Λ en F, diremos que ϕ es *μ-medible* si para todo subconjunto compacto K de Λ y todo $\epsilon > 0$ existe un conjunto compacto K' contenido en K tal que $\mu(K|K') \leq \epsilon$ y tal que la restricción de ϕ a K' es continua.

Con esta definición es posible introducir el siguiente concepto.

Definición 2.6.15: Sea $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de subespacios hilbertianos de E y sea $\{h_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ la colección de sus respectivos núcleos reproductivos. Diremos que $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es *continua* si la aplicación $\lambda \to H_\lambda$ es continua cuando se considera sobre $\mathcal{L}(E)$ la topología de la convergencia simple débil.

Análogamente, diremos que la colección $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es *μ-medible* si la aplicación $\lambda \to H_\lambda$ es asimismo μ-medible.

Si $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia μ-medible de subespacios hilbertianos de E, diremos que una aplicación $\lambda \to \phi(\lambda) \in E$ es un *campo medible* si para cada $\lambda \in \Lambda$ se tiene que $\phi(\lambda) \in H_\lambda$.

A partir de la definición anterior es posible demostrar el siguiente lema.

Proposición 2.6.16: Sea K un subconjunto compacto de Λ. Si $\{H_\lambda\}_{\lambda\in K}$ y $\phi|K$ son ambas continuas se tiene que la aplicación $\lambda \to \|\phi(\lambda)\|_{H_\lambda}$ es semicontinua por debajo, y por lo tanto es μ-medible.

Demostración: Ver la demostración en [26], Prop. 3.4.2, pág. 32. $\square$

A partir de la proposición anterior es posible definir el espacio de clases de equivalencia de campos de cuadrado integrable, módulo campos nulos en casi todo punto, al que notaremos $L^2(\mu, \{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ y proveerlo de una estructura hilbertiana.

En efecto, dada una familia μ-medible $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de subespacios hilbertianos de E, $L^2(\mu, \{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ se define como el espacio de clases de equivalencia de campos μ-medibles tales que

$$\int_\Lambda \|\phi(\lambda)\|^2_{H_\lambda} d\mu(\lambda) < \infty \tag{2.70}$$

con la norma dada por la raíz cuadrada de la expresión anterior.

Se puede demostrar la siguiente proposición.

Proposición 2.6.17: Sea $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una colección μ-medible de subespacios hilbertianos de E tal que

$$\int_\Lambda \langle x|h_\lambda x\rangle \, d\mu(\lambda) < \infty \tag{2.71}$$

para todo $x \in E^\times$. Entonces, existe un subespacio hilbertiano H de E cuyo núcleo reproductivo h está dado por

$$h = \int_\Lambda h_\lambda d\mu(\lambda) \tag{2.72}$$

en el sentido de que para todo par de elementos x, y en $E^\times$ se satisface que

$$\langle x|hy\rangle = \int_\Lambda \langle x|h_\lambda y\rangle \, d\mu(\lambda) \tag{2.73}$$

Si se define la aplicación $\Phi : L^2(\mu, \{H_i\}_{i\in I}) \to E$ mediante la siguiente ecuación[1]:

$$\Phi(\phi) = \int_I \phi(\lambda) d\mu(\lambda) \tag{2.74}$$

en donde ϕ es cualquier campo de cuadrado integrable, se satisface que Φ es continua, que el espacio H es la imagen de $L^2(\mu, \{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ a través de Φ y que la restricción de Φ al complemento ortogonal de su núcleo es un isomorfismo isométrico.

Demostración: Ver [26], Prop. 3.4.6, pág. 35. $\square$

Finalmente es posible introducir el concepto de integral de subespacios hilbertianos.

[1] Nótese que esta expresión está bien definida ya que todo campo de cuadrado integrable con valores en E es μ-sumable.

Definición 2.6.18: Bajo las hipótesis de la proposición anterior, diremos que la familia $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ es *μ-sumable.*

Respecto del espacio H diremos que es la *integral* de la colección $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ y lo notaremos

$$H = \int_\Lambda H_\lambda d\mu(\lambda) \tag{2.75}$$

En el caso en que el núcleo de Φ es $\{0\}$, esto es, cuando Φ es un isomorfismo isométrico de $L^2(\mu, \{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ sobre H, la integral anterior se dirá que es una *integral directa* de la familia $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$, y en consecuencia emplearemos la siguiente notación:

$$H = \int_\Lambda^\oplus H_\lambda d\mu(\lambda) \tag{2.76}$$

En este caso se tiene que todo $f \in H$ tiene una única descomposición integral en E, de manera tal que

$$\phi = \int_\Lambda \phi(\lambda) d\mu(\lambda) \tag{2.77}$$

Se satisface además que

$$\|\phi\|_H^2 = \int_\Lambda \|\phi(\lambda)\|_{H_\lambda}^2 d\mu(\lambda) \tag{2.78}$$

y que

$$(\phi, \psi)_H = \int_\Lambda (\phi(\lambda)|\psi(\lambda))_{H_\lambda} d\mu(\lambda) \tag{2.79}$$

para todo par de elementos $\phi, \psi \in H$.

Si $K \subset \Lambda$ es un subconjunto μ-medible, es posible definir en forma análoga la integral

$$H_K = \int_K H(\lambda) d\mu(\lambda) \tag{2.80}$$

como el subespacio hilbertiano de E que tiene por núcleo reproductivo a

$$h_K = \int_K h(\lambda) d\mu(\lambda) \tag{2.81}$$

Dado que $h_K \leq h$ se tiene que H_K es subespacio hilbertiano de H y la inclusión canónica de H_K en H es de norma a lo sumo unitaria.

Debe quedar claro que si la integral en cuestión es una integral directa, H_K resulta ser un subespacio cerrado de H, y que dos de tales subespacios, digamos, H_K y H'_K, son mutuamente ortogonales si, y sólo si K y K' son disjuntos.

Por último, sea $H = \int_\Lambda H_\lambda d\mu(\lambda)$ una integral de subespacios hilbertianos de E, no necesariamente directa.

Si con h'_K notamos al núcleo reproductivo de de H_K en H, se tiene que la aplicación que hace corresponder a cada subconjunto μ-medible K de Λ el núcleo h'_K, es una medida semiespectral, esto es, toma valores en el conjunto de operadores positivos en H.

Luego, esta aplicación es numerablemente aditiva respecto de la topología fuerte y se satisface que $R_\Lambda = \mathrm{Id}_H$. Si la integral es directa, la medida es estrictamente espectral.

El teorema espectral nuclear de Maurin (ver [41]) es, en este contexto, el recíproco de la afirmación que acabamos de hacer.

Explícitamente, consideremos un subespacio hilbertiano H de E y notemos con h a su operador reproductivo. Asumamos, además, que la aplicación que asocia a cada subconjunto μ-medible K de Λ el correspondiente núcleo reproductivo de H_K en H es una medida semiespectral.

Notemos, finalmente, con h_K al núcleo reproductivo de H_K, esta vez en E, o sea, se tiene que

$$h_K = j h'_K j^\times \tag{2.82}$$

en donde j es la inclusión canónica de H en E.

Dadas estas definiciones, podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 2.6.19: Bajo las condiciones que acabamos de mencionar, si además se tiene que E es un espacio conuclear, o sea, un espacio localmente convexo que es dual fuerte de un espacio nuclear tonelado, entonces:

1. Existe una medida de Radon μ tal que si $\mu(K) = 0$ se tiene que $h_K = 0$, o sea, que h es absolutamente continuo con respecto a μ.

2. Si h es absolutamente continuo con respecto a μ, existe una familia μ-sumable de núcleos reproductivos relativos a E, $\{h_\lambda\}_{\lambda \in K}$, tales que

$$h_K = \int_K h(\lambda) d\mu(\lambda) \tag{2.83}$$

para todo conjunto de Borel $K \subset \Lambda$.

3. Si, en particular, h es una medida espectral, se tiene que

$$h = \int_{\Lambda}^{\oplus} h(\lambda) d\mu(\lambda) \tag{2.84}$$

Demostración: Este teorema es una simple adaptación del teorema espectral de Maurin en términos de subespacios hilbertianos. La demostración es análoga a la que se puede encontrar en [41], Teo. 4.8, pág. 133. □

2.6.4. Efecto de una aplicación continua.

Como última consecuencia del isomorfismo entre $\mathcal{L}(E)$ y $\mathrm{Hilb}(E)$, discutiremos con más profundidad las propiedades que se preservan a través de la aplicación de una transformación lineal débilmente continua.

Sean E y F dos espacios vectoriales topológicos localmente convexos Hausdorff separables cuasicompletos, y sea u una aplicación débilmente continua de E en F.

Dado un subespacio hilbertiano H de E, notaremos con N al núcleo de la restricción de u a H, esto es, $N = H \cap u^{-1}\{0\}$.

Es evidente que la transformación u se factoriza como

$$H \xrightarrow{\pi} H/N \xrightarrow{\hat{u}} \tag{2.85}$$

en donde π es la proyección canónica de H sobre H/N y $\hat{u}$ es una transformación continua e inyectiva, de manera que establece una biyección entre H/N y la imagen de H a través de u.

En adelante notaremos con $u(H)$ al subespacio hilbertiano de F que resulta de transportar la estructura hilbertiana de H/N sobre la imagen de H a través de u. Con esto se tiene que $\hat{u}$ es un isomorfismo isométrico y $u(H)$ es el menor subespacio hilbertiano de F, respecto de la relación de orden definida en $\mathrm{Hilb}(F)$, tal que F resulta una transformación continua de norma a lo sumo 1 de H en este espacio.

La norma en $u(H)$ está dada por

$$\|\psi\|^2_{u(H)} = \inf\{\|\phi\|^2_H : \phi \in H \wedge \psi = \hat{u}\phi\} \tag{2.86}$$

El producto interno, por su parte, está dado por

$$(\psi_1|\psi_2)_{u(H)} = (\phi_1|\phi_2)_H \tag{2.87}$$

en donde $\phi_1, \phi_2 \in H/N$ con $\psi_1 = \hat{u}\phi_1$ y $\psi_2 = \hat{u}\phi_2$.

En el caso en que u es una aplicación antilineal, definiremos sobre $u(H)$ una estructura hilbertiana antitransportando la de H/N de modo tal que la ecuación anterior queda reescrita de la siguiente manera:

$$(\psi_1|\psi_2)_{u(H)} = (\phi_2|\phi_1)_H \tag{2.88}$$

en donde $\phi_1, \phi_2 \in H/N$ con $\psi_1 = \hat{u}\phi_1$ y $\psi_2 = \hat{u}\phi_2$.

La siguiente proposición caracteriza a $u(H)$ como subespacio hilbertiano de F.

Proposición 2.6.20: Sea H un subespacio hilbertiano de E tal que su núcleo reproductivo es h y sea u una transformación débilmente continua de E en F. El núcleo reproductivo de $u(H)$ en F es

$$h_u = uhu^{\times} \tag{2.89}$$

Demostración: [53], Prop. 21, pág. 176. □

Algunos de los corolarios que se desprenden de este resultado son importantes. En particular podemos mencionar el siguiente.

Sea G un subespacio denso de E provisto de una topología localmente convexa cuasicompleta, tal que la inyección de G en E es débilmente continua. Evidentemente $E^{\times}$ puede identificarse con subespacio débilmente denso de $G^{\times}$ con una inclusión también débilmente continua.

Se demuestra en [53] que para que un subespacio hilbertiano H de E sea también subespacio hilbertiano de G resulta necesario y suficiente que su núcleo h relativo a E se prolongue a una aplicación lineal positiva $\hat{h}$ débilmente continua de $G^{\times}$ en G.

Por último, cabe mencionar que la aplicación $H \to u(H)$ de $\mathrm{Hilb}(E)$ en $\mathrm{Hilb}(F)$ definida por cualquier transformación lineal o antilineal continua u de E en F es un homomorfismo para las estructuras de conos regulares estrictamente convexos que poseen $\mathrm{Hilb}(E)$ y $\mathrm{Hilb}(F)$, o sea, se satisface que para todo subespacio hilbertiano H de E y todo número real no negativo λ,

$$u(\lambda H) = \lambda u(H) \tag{2.90}$$

para todo par $H_1, H_2 \in \mathrm{Hilb}(E)$ se verifica que

$$u(H_1 + H_2) = u(H_1) + u(H_2) \tag{2.91}$$

y

$$H_1 \leq H_2 \Rightarrow u(H_1) \leq u(H_2) \tag{2.92}$$

2.7. Subespacios hilbertianos normales y subnormales.

En esta sección estudiaremos las propiedades de los subespacios hilbertianos de un espacio topológico E en el caso particular en que su espacio antidual es asimismo un subespacio topológico de E.

Antes de esto introduciremos algunas nociones relativas a aquellos espacios topológicos que incluyen continuamente a su antidual.

Definición 2.7.1: Sea E un espacio vectorial topológico localmente convexo Hausdorff separable cuasicompleto. Diremos que E es *regular* si existe una inyección débilmente contínua I de $E^\times$ en E. Si se tiene que I es una transformación hermítica diremos que E es un espacio regular *hermítico*. Si, además, se satisface que I es un operador positivo diremos que E es un espacio regular *positivo*.

La inyección I nos permitirá, en adelante, identificar a $E^\times$ como subespacio topológico de E.

Recordemos que, si E es un espacio regular hermítico, la hermiticidad de I se traduce en que, para todo para todo par de elementos $x, y \in E^\times$ se verifica que

$$\langle x|Iy\rangle = \overline{\langle y|Ix\rangle} \tag{2.93}$$

es decir, que

$$I = I^\times \tag{2.94}$$

De aquí resulta que si E es un espacio regular hermítico, I es débilmente (luego, fuertemente) continua. Por otra parte, siendo I inyectiva, $I^\times$ es de rango denso, y dado que $I = I^\times$ se tiene que $E^\times$ puede identificarse con un subespacio topológico denso de E.

Cuando además tenemos que I es un operador positivo, éste define un subespacio hilbertiano de E privilegiado: el subespacio hilbertiano que tiene por núcleo reproductivo a I. Este subespacio contiene a $E^\times$ como subespacio denso con inyección débilmente continua.

Introduciremos, pues, la siguiente definición.

Definición 2.7.2: Sea E un espacio localmente convexo Hausdorff separable cuasicompleto regular positivo y sea I la correspondiente inclusión de $E^\times$ en E. Al subespacio hilbertiano que esta aplicación define en E como núcleo reproductivo lo llamaremos el *subespacio hilbertiano canónico de E con respecto a I* o, simplemente, el *subespacio de tipo L^2 asociado a I*.

En adelante, a la colección de subespacios hilbertianos canónicos de E lo notaremos $L^2(E)$.

Es fácil visulalizar que existe una biyección entre la colección de subespacios hilbertianos densos de E y $L^2(E)$.

En efecto, si H es un subespacio hilbertiano denso de E, su núcleo reproductivo es necesariamente una inyección positiva débilmente continua de $E^\times$ en E. Con ello se tiene que E es un espacio regular positivo respecto de esta aplicación, tal que el subespacio de tipo L^2 asociado es isométricamente isomorfo a H.

Cabe aclarar que los subespacios hilbertianos canónicos de un dado espacio localmente convexo E son mutuamente isomorfos, si bien nos resultará en general imposible identificar a los subespacios de tipo L^2 asociados a dos inyecciones débilmente continuas positivas de $E^\times$ en E a menos de que estas transformaciones coincidan, dado que estos isomorfismos no son, en principio, isométricos.

Definición 2.7.3: Sean E un espacio regular e I la correspondiente inclusión de $E^\times$ en E. Sea F un subespacio topológico de E. Diremos F es un *subespacio cuasinormal* de E si $E^\times$ es un subespacio topológico de F compatible con la regularidad de E.

La compatibilidad con la regularidad de E a la que hacemos referencia en la definición anterior es en el sentido de que si notamos con j y u a las inclusiones de F en E y de $E^\times$ en F, respectivamente, o sea, si tenemos el siguiente diagrama

$$E^\times \overset{u}{\hookrightarrow} F \overset{j}{\hookrightarrow} E \tag{2.95}$$

entonces F es un subespacio cuasinormal de E si se satisface que

$$I = ju \tag{2.96}$$

Definición 2.7.4: Sea E un espacio regular hermítico y sea I la correspondiente inclusión de $E^\times$ en E. Dado un subespacio cuasinormal F de E diremos que es un subespacio *normal* de E si la inclusión de $E^\times$ en F es de rango denso.

Si asumimos que F es subespacio normal de E, adjuntando el diagrama (2.95) se tiene que $F^\times$ también puede identificarse débilmente como subespacio normal de E. En efecto, se tiene que

$$E^\times \overset{j^\times}{\to} F \overset{u^\times}{\hookrightarrow} E \tag{2.97}$$

en donde $u^\times$ es una inyeccin débilmente continua también de rango denso.

Notemos que si F es reflexivo, $F^\times$ puede no sólo identificarse débilmente como subespacio normal de E sino también cuando se consideran las respectivas topologías fuertes.

Ahora bien, la identificación de $F^\times$ como subespacio topológico de E puede, en principio, estar en contradicción con cualquier otra identificación que se haga respecto de estos espacios, y este hecho resulta particularmente importante cuando F es un espacio hilbertiano.

En efecto, asumamos que H es un subespacio hilbertiano normal de E. La identificación de $H^\times$ como subespacio hilbertiano normal de E es compatible con la identificación de $H^\times$ con H solamente cuando

$$u^\times = j\theta \tag{2.98}$$

o sea, cuando

$$I = ju = j\theta\, j^\times = h \tag{2.99}$$

De esta manera se tiene que ambas identificaciones son consistentes sólo si la inyección de $E^\times$ en E se hace a través del núcleo reproductivo de H, o lo que es lo mismo, si H es un espacio de tipo L^2 de E.

En lo que sigue no asumiremos que H es un subespacio hilbertiano canónico de E. En este sentido, resulta relevante analizar la relación existente entre los núcleos reproductivos de H y de $H^\times$.

Un resultado importante se desprende de la siguiente proposición.

Proposición 2.7.5: Sea H un subespacio hilbertiano normal de E de núcleo reproductivo h y sea $\hat{h}$ el núcleo reproductivo de $H^\times$ en tanto subespacio hilbertiano de E. Entonces, h y $\hat{h}$ son transformaciones lineales de $E^\times$ en E que se prolongan unívocamente en transformaciones lineales continuas de $H^\times$ en H y de H en $H^\times$, respectivamente. Estas prolongaciones son precisamente los isomorfismos canónicos mutuamente recíprocos entre H y $H^\times$.

Demostración: [53], Prop. 28, pág. 212. $\square$

Observamos, pues, que en cierto sentido ambas transformaciones son inversas la una de la otra.

De la misma manera en que ya presentamos el procedimiento para reconstruir a H en E a partir de su núcleo reproductivo h, cuando se tiene que

H es, además, un subespacio hilbertiano normal de E es posible reconstruir al espacio $H^\times$ en E a partir de h.

En efecto, recordemos (ver Prop. 2.4.3) que H es la completación en E de $hE^\times$, provisto de la norma dada por $\|hx\| = \langle x|hx\rangle^{1/2}$ para todo $x \in E^\times$.

Para el caso de $H^\times$ se tiene la siguiente proposición.

Proposición 2.7.6: Sea H un subespacio hilbertiano normal de E y sea h su núcleo reproductivo. Se tiene que $H^\times$ es la completación en E de $IE^\times$, provisto de la norma

$$\|Ix\| = \langle x|Ix\rangle^{1/2} \tag{2.100}$$

para $x \in E^\times$, y del producto escalar

$$(x|y) = \langle x|Iy\rangle \tag{2.101}$$

en donde $x, y \in E^\times$.

Demostración: [53], Prop. 29, pág. 212. □

Comentario. Notemos que a pesar de esta identificación, la transformación I no es el núcleo reproductivo de $H^\times$.

Como corolario de la proposición anterior se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 2.7.7: Sean H y K dos subespacios hilbertianos de E. Asumamos que H es normal. Sea u una transformación lineal continua de E en E. Se satisface, luego, que

1. La condición necesaria y suficiente para que $u(H^\times) \leq K$ es que para todo par de elementos $x, y \in E^\times$ se verifique que

   $$|\langle x|u(Iy)\rangle|^2 \leq \langle x|kx\rangle \langle y|hy\rangle \tag{2.102}$$

   en donde k es el núcleo reproductivo de K y h es el núcleo reproductivo de H.

   Esta condición se cumple si, para todo $x \in E^\times$ se tiene que

   $$|\langle x|u(Ix)\rangle| \leq \frac{1}{2} \langle x|kx\rangle^{1/2} \langle x|hx\rangle^{1/2} \tag{2.103}$$

2. La condición necesaria y suficiente para que $u(H^\times) \geq K$ es que, para todo $x \in E^\times$, se satisfaga que

$$\sup \left\{ \frac{|\langle x|u(Iy)\rangle|}{\langle y|hy\rangle^{1/2}} : y \in E^\times \right\} \geq \langle x|kx\rangle^{1/2} \tag{2.104}$$

condición que se satisface, en particular, cuando

$$|\langle x|u(Iy)\rangle|^2 \geq \langle x|kx\rangle \langle y|hy\rangle \tag{2.105}$$

Demostración: [53], Prop. 29 bis, pág. 213. □

El siguiente resultado muestra bajo qué condiciones el espació $E^\times$ puede ser interpretado como subespacio topológico de un subespacio hilbertiano H de E.

Proposición 2.7.8: Sea H un subespacio hilbertiano de E y sea h su núcleo reproductivo. Para que $E^\times$ sea subespacio topológico de H con una inyección débilmente continua es necesario y suficiente que $E^\times$ provisto de la seminorma 2.100, tenga una inyección continua en E.

Dicho de otra manera, es necesario y suficiente que la bola unitaria

$$B = \left\{ x \in E^\times : \langle x|hx\rangle \leq 1 \right\} \tag{2.106}$$

sea débilmente acotada en E.

Se tiene, además, que H es normal si, y sólo si $E^\times$ provisto con la topología que define la seminorma que acabamos de mencionar tenga una completación en E, o sea, que B sea cerrada en $E^\times$ para la topología inducida por E.

Demostración: Ver la demostración en [53], Prop. 30, pág. 214. □

Dado un subespacio hilbertiano de E, ya sea éste normal o no, la inyección $j : H \to E$ siempre tiene una adjunta $j^\times : E^\times \to H^\times$, sólo que en este caso $H^\times$ no es, en principio, identificable en tanto subespacio hilbertiano de E.

Tenemos además que $\|x\|_{H^\times} = \|j^\times x\|_{H^\times}$ para todo $x \in E^\times$. Si H no es denso en E, $j^\times$ no es inyectiva y $\|x\|_{H^\times}$ no es una norma sino que es una seminorma. Sin embargo, cabe mencionar que $\|x\|_{H^\times}$ es siempre una isometría densa de $E^\times$ en $H^\times$ y permite considerar a $H^\times$ como completación del primero.

Por último, discutiremos brevemente el caso en que el núcleo reproductivo h es prolongable. Para más detalles referimos a [53] y [54].

Diremos que un núcleo $f : E^\times \to E$ es *prolongable* cuando f es débilmente continuo de $E^\times$ en $E^\times$ y se prolonga unívocamente a una transformación lineal débilmente continua de E en E. A esta prolongación la notaremos también con f.

Si f es un núcleo prolongable y g es un núcleo cualquiera, tiene sentido componer ambos núcleos de la siguiente manera

$$fg : E^\times \xrightarrow{g} E \xrightarrow{f} E \tag{2.107}$$

y

$$gf : E^\times \xrightarrow{f} E^\times \xrightarrow{g} E \tag{2.108}$$

Si f es un núcleo prolongable, diremos que g es una *inversa a derecha* de f si

$$gf = I \tag{2.109}$$

en donde, como antes, I es la inyección de $E^\times$ en E, prolongable de E en E.

Respectivamente, diremos que g es una *inversa a izquierda* de f si

$$fg = I \tag{2.110}$$

En caso de que g sea un núcleo inverso de f tanto a derecha como a izquierda, diremos que es un *núcleo inverso bilátero* o simplemente un *núcleo inverso* de f.

Con estas definiciones es posible demostrar otro de los resultados importantes de la teoría de subespacios hilbertianos Schwartz.

Teorema 2.7.9: Sea H un subespacio hilbertiano de E, sea h su núcleo reproductivo y asumamos que h es prolongable. Entonces, para que H sea normal es necesario y suficiente que h tenga un núcleo inverso l positivo.

En general, no puede asegurarse, bajo estas condiciones, que este núcleo sea único. Sin embargo se tiene que el núcleo reproductivo $\hat{h}$ de $H^\times$ en E es el menor núcleo positivo inverso de h.

Se deduce de esto que existe un núcleo positivo n tal que

$$l = \hat{h} + n \tag{2.111}$$

en donde $\hat{h}$ y n son mutuamente excluyentes. Más aún, se satisface que

$$\hat{h}n = n\hat{h} = 0 \tag{2.112}$$

El subespacio hilbertiano L correspondiente a l, se descompone como suma directa de dos subespacios cerrados ortogonales, a saber, $N = L \cap h^{-1}\{0\}$, correspondiente al núcleo n, y $H^\times$, adherencia de $E^\times$ en L.

Por último, se verifica que $h\hat{h}$ es la identidad sobre H y que $\hat{h}h$ es el proyector ortogonal de L sobre $H^\times$.

Demostración: La demostración de este teorema puede consultarse en [53], Teo. 31, pág. 219. $\square$

Notemos que dado que h es un isomorfismo de $H^\times$ sobre H, $H^\times \cap h^{-1}\{0\}$ coincide con $\{0\}$. La proposición anterior nos da la forma general de los núcleos positivos inversos de h y de la estructura general de los subespacios hilbertianos correspondientes.

Terminaremos este capítulo dando una definición que generaliza el concepto de subespacio normal.

Definición 2.7.10: Sea E un espacio localmente convexo separable Hausdorff cuasicompleto. Sea F un subespacio topológico de E. Diremos que F es un *subespacio subnormal de* E si existe un subespacio topológico regular hermítico M de E que contiene normalmente a F. Diremos que F es *estrictamente subnormal* si la inclusión de M en E es un homomorfismo. Por último, si F es un subespacio estrictamente subnormal de E y como subespacio normal de M es de tipo L^2, diremos que es un subespacio subnormal de *tipo* L^2 de E.

Para ver que este concepto es una generalización de la definición de subespacio normal nótese que todo subespacio normal F de un espacio regular hermítico E es estrictamente subnormal. Basta considerar $M = E$ en la definición previa, considerando como inclusión a la identidad sobre E.

Más aún, si F es un subespacio estrictamente subnormal de E y notamos con j a la inclusión de F en E, M es simplemente la completación de $j(F)$ respecto de la topología que este subespacio hereda de E, esto es, $E_F = \widehat{j(F)}$.

De aquí debe resultar claro que todos los resultados que expusimos para subespacios normales siguen siendo válidos para subespacios estrictamente subnormales si las hipótesis sobre E se restringen a E_F.

Como ejemplo de subespacios subnormales mencionaremos el caso de los espacios de Hardy como subespacios topológicos del espacio antidual $\mathcal{S}(\mathbb{R})^\times$

del espacio de funciones reales infinitamente diferenciables y de decrecimiento rápido, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Como es bien sabido, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ está débilmente incluído en $\mathcal{S}(\mathbb{R})^\times$, siendo la inclusión un operador positivo. Si se identifica a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ con $\mathcal{S}(\mathbb{R})^{\times\times}$ resulta que el subespacio hilbertiano cuyo núcleo reproductivo es esta inclusión es el espacio de funciones de cuadrado integrable, $L^2(\mathbb{R})$.

Si notamos con $H^+(\mathbb{R})$ y $H^-(\mathbb{R})$ a los espacios de Hardy, o sea, a los espacios de funciones de cuadrado integrable que son prolongables analíticamente sobre los semiplanos superior e inferior del plano complejo, respectivamente, se tiene que ambos son subespacios topológicos de $\mathcal{S}(\mathbb{R})^\times$ a través de las inclusiones que son composiciones de las inclusiones de $H^+(\mathbb{R})$ y $H^-(\mathbb{R})$ en $L^2(\mathbb{R})$ y de la inclusión canónica de $L^2(\mathbb{R})$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R})^\times$.

Dado que ambos son subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{R})$ y que, como acabamos de ver, $L^2(\mathbb{R})$ es un subespacio de tipo L^2 de $\mathcal{S}(\mathbb{R})^\times$, se tiene que $H^+(\mathbb{R})$ y $H^-(\mathbb{R})$ son subespacios subnormales de $\mathcal{S}(\mathbb{R})^\times$. Más aún, son ambos subespacios subnormales de tipo L^2 de $\mathcal{S}(\mathbb{R})^\times$.

3. REPRESENTACIONES DE *-ÁLGEBRAS.

En esta sección introduciremos algunos conceptos básicos acerca de las representaciones y *-representaciones de *-álgebras siguiendo como referencia el libro de K. Schmüdgen (ver [52]).

Debemos destacar, sin embargo, que a algunos de los conceptos que se definen en [52] los hemos modificado o extendido en función de las aplicaciones de estas nociones en capítulos posteriores.

Siempre denotaremos por A a un álgebra con escalares en el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$. Por regla general, asumiremos que A es un álgebra con unidad y a la unidad de A la notaremos con e.

3.1. Representaciones de *-álgebras.

La siguiente definición fue originalmente presentada por Powers en [47] a fines de la década de los '70, publicación en la que se inicia el estudio sistemático de las representaciones de las álgebras de operadores no acotados sobre espacios hilbertianos.

Definición 3.1.1: Una *representación* π de un álgebra A en un espacio de Hilbert $H(\pi)$ es una transformación de A en un conjunto de operadores lineales, todos ellos definidos en un dominio común $D(\pi)$, denso en $H(\pi)$, tal que se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $D(\pi)$ es invariante frente a la acción de A, esto es, para todo $a \in A$ se tiene que
$$\pi(a)D(\pi) \subseteq D(\pi) \tag{3.1}$$

2. π es lineal y multiplicativa sobre A, o sea, se tiene que para todo par de elementos $a, b \in A$ y todo $\lambda \in \mathbb{C}$,
$$\pi(a+b) = \pi(a) + \pi(b) \tag{3.2}$$

$$\pi(\lambda a) = \lambda\pi(a) \tag{3.3}$$

y

$$\pi(ab) = \pi(a)\pi(b) \tag{3.4}$$

3. Asumiremos, por último, en el caso en que A sea un álgebra con unidad, que la imagen de la unidad e a través de π es $\mathrm{Id}_{D(\pi)}$, o sea, el operador identidad sobre $D(\pi)$.

Como es evidente, la noción que acabamos de introducir es una generalización inspirada en la teoría de operadores no acotados sobre espacios de Hilbert de la noción habitual de representación, en la que se asume simplemente que $D(\pi)$ coincide con $H(\pi)$ y que la acción de A se realiza a través operadores acotados.

La definición que daremos a continuación presenta ligeras diferencias respecto de la que se puede encontrar en las referencias.

Como veremos en la siguiente sección, la definición de extensión de una representación que presentamos es la apropiada en lo que a álgebras de operadores no acotados se refiere.

Definición 3.1.2: Sean π_1 y π_2 dos representaciones del álgebra A en los espacios de Hilbert $H(\pi_1)$ y $H(\pi_2)$ y sean $D(\pi_1) \subseteq H(\pi_1)$ y $D(\pi_2) \subseteq H(\pi_2)$ sus respectivos dominios. Diremos que π_1 es una *extension* de π_2, y denotaremos esto con

$$\pi_1 \geq \pi_2 \tag{3.5}$$

si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. Para todo $a \in A$ se verifica que

$$\pi_1(a) \supseteq \pi_2(a) \tag{3.6}$$

   más precisamente, que $D(\pi_1) \supseteq D(\pi_2)$ y que la restricción de $\pi_1(a)$ a $D(\pi_2)$ coincide con $\pi_2(a)$ para todo $a \in A$.

2. $H(\pi_2)$ es un subespacio hilbertiano de $H(\pi_1)$.

Alternativamente, cuando π_1 sea una extensión de π_2 diremos que π_2 es una *subrepresentación* de π_1.

Nótese que, en general, en la definición de extensión suele asumirse que para que π_2 sea una subrepresentación de π_1, $H(\pi_2)$ debe ser un subespacio cerrado de $H(\pi_1)$, de modo tal que el producto escalar sobre $H(\pi_2)$ es la restricción a $H(\pi_2)$ del producto escalar definido sobre $H(\pi_1)$.

En nuestro caso estamos asumiendo que $H(\pi_2)$ es un subespacio hilbertiano de $H(\pi_1)$ en tanto subespacio topológico, de modo que la estructura métrica de ambos espacios puede, en principio, no coincidir.

Con el objeto de definir una noción análoga a la de operador cerrado pero en este caso para una representación, es usual proveer al dominio de una dada representación π de una topología particular, inducida por la acción del álgebra.

La correspondiente definición es la siguiente.

Definición 3.1.3: Sea π una representación de A en $H(\pi)$ y sea $D(\pi) \subseteq H(\pi)$ su dominio. A la topología localmente convexa sobre $D(\pi)$ generada por la familia de seminormas

$$p_a(\phi) = \|\pi(a)\phi\| \tag{3.7}$$

para $\phi \in D(\pi)$, en donde $\|\cdot\|$ es la norma sobre $H(\pi)$ y $a \in A$, la llamaremos la *topología del gráfico* de A sobre $D(\pi)$.

La topología del gráfico puede ser caracterizada en forma alternativa de acuerdo con la siguiente proposición.

Proposición 3.1.4: Sea π una representación de A en $H(\pi)$ y sea $D(\pi) \subseteq H(\pi)$ su dominio. La topología del gráfico de A sobre $D(\pi)$ es la más débil de las topologías localmente convexas sobre $D(\pi)$ de aquellas que hacen que, para todo $a \in A$, la inyección canónica de $D(\pi)$ en su completación relativa a la topología determinada por la norma

$$\phi \to \|\phi\| + \|\,\pi(a)\phi\| \tag{3.8}$$

sea una transformación continua.

En consecuencia, la topología del gráfico puede interpretarse como una topología proyectiva en el sentido de la teoría de espacios vectoriales localmente convexos (ver, por ejemplo, [51]).

Cabe mencionar que si A es un álgebra con unidad, la topología del gráfico es siempre más fina que la topología inducida por $H(\pi)$ sobre $D(\pi)$.

Más aún, es sencillo ver que la topología del gráfico está generada por una única norma sobre $H(\pi)$ si, y sólo si, para todo $a \in A$, el operador $\pi(a)$ puede extenderse a un operador acotado (necesariamente único) sobre $H(\pi)$.

Definición 3.1.5: Sea π una representación de A en un espacio de Hilbert $H(\pi)$ con dominio $D(\pi)$. Diremos que π es una representación *clausurable* de A si la imagen de cada elemento de A a través de π es un operador clausurable, considerando a su dominio como $D(\pi)$. Si $D(\pi)$ es completo cuando se lo equipa con la topología del gráfico diremos que π es una representación *cerrrada* de A.

Sea π una representación clausurable de A y sea $\overline{\pi(a)}$ la clausura del operador $\pi(a)$, asumiendo como dominio de $\pi(a)$ al mismo que hemos definido para la representación, sea cual fuere el elemento $a \in A$ que se considere.

Notaremos con $D(\overline{\pi})$ a la completación de $D(\pi)$ en

$$\bigcap_{a\in A} D(\overline{\pi(a)}) \tag{3.9}$$

respecto de la topología del gráfico.

El espacio $D(\overline{\pi})$ resulta ser un dominio para una representación cerrada de A en $H(\pi)$ que extiende a π y que se define como sigue.

Definición 3.1.6: Sea π una representación clausurable de A en $H(\pi)$ y sea $D(\overline{\pi})$ como antes. A la representación $\overline{\pi}$ dada por

$$\overline{\pi}(a) = \overline{\pi(a)} \restriction D(\overline{\pi}) \tag{3.10}$$

para cada $a \in A$, la llamaremos la *clausura* de π.

Es fácil comprobar que $\overline{\pi}$ es una extensión cerrada de π que es minimal respecto del orden que hemos definido para las representaciones de una dada álgebra.

Por supuesto, se satisface que una representación es cerrada si, y sólo si es clausurable y coincide con su clausura.

Dado que nuestra intención es estudiar a las representaciones de las álgebras involutivas, de ahora en más asumiremos que A es una *-álgebra.

Recordemos que un álgebra se denomina una *-álgebra si sobre A se ha definido una *involución*, esto es, un antiendomorfismo

$$a \to a^\star \tag{3.11}$$

tal que

$$(ab)^\star = b^\star a^\star \tag{3.12}$$

para todo par $a, b \in A$,

$$(a^\star)^\star = a \tag{3.13}$$

para todo $a \in A$, y tal que

$$e^\star = e \tag{3.14}$$

cuando A es unital.

De la misma manera en que es posible definir un operador adjunto para el caso de un operador actuando en un espacio hilbertiano, para las representaciones de *-álgebras es posible construir una representación con propiedades análogas.

Definición 3.1.7: Sea π una representación de A en un espacio de Hilbert $H(\pi)$ y sea $D(\pi)$ su dominio. Consideremos el conjunto

$$D(\pi^\star) = \bigcap_{a\in A} D(\pi(a)^\star) \tag{3.15}$$

en donde $\pi(a)^\star$ es el operador adjunto de $\pi(a)$ para cada $a \in A$. Por último, sea $H^\star$ la clausura de $D(\pi^\star)$ en H. A la la representación $\pi^\star$ de A en $H^\star$ con dominio $D(\pi^\star)$ dada por

$$\pi^\star(a) = \pi(a^\star)^\star \restriction D(\pi^\star) \tag{3.16}$$

para todo $a \in A$, la llamaremos la *representación adjunta* de π.

La representación adjunta de una representación dada siempre es una representación cerrada y es la más grande de entre las representaciones π_1 de A en el espacio de Hilbert $H^\star$ que satisfacen la igualdad

$$(\phi \,|\, \pi(a)\, \psi) = (\pi_1(a^\star)\, \phi \,|\, \psi) \tag{3.17}$$

para todo $a \in A$, $\phi \in D(\pi)$ y todo $\psi \in D(\pi_1)$.

Siguiendo la analogía con el caso de los operadores no acotados sobre espacios de Hilbert, introduciremos los siguientes conceptos.

Definición 3.1.8: Sea π una representación de A. Diremos que π es *adjuntable* si $H = H^\star$. Diremos que es *bicerrada* si coincide con la representación *biadjunta* de π, esto es, si $\pi^{\star\star} = (\pi^\star)^\star$.

Todas las nociones que introdujimos hasta ahora motivan, por último, la siguiente definición de *representación hermítica* o **-representación* de una *-álgebra.

Definición 3.1.9: Una representación π de una *-álgebra A en un espacio de Hilbert H con dominio común $D(\pi)$ se dice una *representación hermítica* o, simplemente, una **-representación* de A, si $\pi \subseteq \pi^\star$. Dicho en otros términos, si para todo $\phi, \psi \in D(\pi)$, se satisface que

$$(\phi \mid \pi(a)\, \psi) = (\pi(a^\star)\, \phi \mid \psi) \tag{3.18}$$

para todo $a \in A$.

Como primera consecuencia que se desprende de la definición, observamos que toda *-representación de A resulta automáticamente adjuntable.

Por otra parte, si se tiene que A es una *-álgebra de Banach entonces una *-representación π de A en un espacio de Hilbert H es cerrada si, y sólo si $D(\pi)$ coincide con H.

Por último, si π es una *-representación de una *-álgebra A en un espacio hilbertiano H y $D(\pi) = H$, se tiene, a partir del teorema del gráfico cerrado, que π es una representación acotada, esto es, la imagen de A a través de π está incluída en el conjunto de operadores acotados sobre H.

Como sucede en el caso de los adjuntos de los operadores hermíticos sobre un espacio de Hilbert, la representación adjunta de una dada *-representación π puede no ser una *-representación. Sin embargo, y como ya hemos mencionado, siempre será una representación cerada que extiende a π. Más aún, cada *-representación que prolonga a π resulta necesariamente una restricción de $\pi^\star$.

Definición 3.1.10: Diremos que una *-representación π de una *-álgebra A es *maximal* si toda *-representación que extiende a π en el mismo espacio de Hilbert coincide con ella. Diremos que es *autoadjunta* si

$$\pi = \pi^\star \tag{3.19}$$

Finalmente, una *-representación π se dirá que es *esencialmente autoadjunta* si su clausura es una *-representación autoadjunta, o sea, si

$$\overline{\pi} = \pi^\star \tag{3.20}$$

Algunas de las propiedades más importantes que presentan las *-representaciones de *-álgebras están enunciadas en la siguiente proposición.

Proposición 3.1.11: Sea π una *-representación de A en un espacio de Hilbert H con dominio $D(\pi)$.

1. $\overline{\pi}$ y $\pi^{\star\star}$ son ambas *-representaciones de A, y $\pi \subseteq \overline{\pi} \subseteq \pi^{\star\star} \subseteq \pi^\star$. Más aún, $D(\overline{\pi}) = \bigcap_{a\in A} D(\overline{\pi(a)})$.

2. π es una *-representación autoadjunta si, y sólo si, $D(\pi^\star) \subseteq D(\pi)$.

3. $\pi^\star$ es una *-representación autoadjunta si, y sólo si, es una *-representación.

4. Si π es una *-representación autoadjunta entonces es una representación maximal.

Demostración: Ver [52], Prop. 8.1.12, pág. 205. $\square$

Dada una colección de representaciones de una misma álgebra A, un mecanismo para generar nuevas representaciones resulta de considerar la suma directa de las representaciones dadas.

Asumamos que $\{\pi_i : i \in I\}$ es una familia de representaciones de A, y notemos con $H(\pi_i)$ y $D(\pi_i)$, respectivamente, a los espacios hilbertianos y los dominios en que estas representaciones están definidas para cada $i \in I$. Sea $H(\pi) = \oplus_{i\in I} H(\pi_i)$ la suma directa de los elementos de la familia $\{H(\pi_i) : i \in I\}$ y notemos con $D(\pi)$ a la colección de elementos de $H(\pi)$ de la forma $\phi = (\phi_i)_{i\in I}$ en donde $\phi_i \in D(\pi_i)$ para cada $i \in I$. Por supuesto, $D(\pi)$ es un espacio denso en $H(\pi)$.

Podemos, pues, introducir la siguiente definición.

Definición 3.1.12: A la representación π en $H(\pi)$ con dominio en $D(\pi)$ que resulta de hacer

$$\pi(a)\phi = (\pi_i(a)\phi_i)_{i\in I} \tag{3.21}$$

para todo $a \in A$, la llamaremos la *suma directa* de la familia $\{\pi_i : i \in I\}$ y la notaremos con

$$\pi = \bigoplus_{i\in I} \pi_i \tag{3.22}$$

Es inmediato de la definición que $\oplus_{i\in I}\pi_i$ es clausurable si, y sólo si cada π_i lo es y además se satisface bajo estas condiciones que

$$\hat{\pi} = \bigoplus_{i\in I} \hat{\pi}_i \tag{3.23}$$

Por otra parte, si suponemos que A es una ⋆-álgebra se tiene que

$$\pi^\star = \bigoplus_{i\in I} \pi_i^\star \tag{3.24}$$

y, por supuesto, $\oplus_{i\in I}\pi_i$ resulta adjuntable, bicerrada, hermítica, esencialmente autoadjunta, o autoadjunta si, y sólo si cada π_i es, respectivamente, adjuntable, bicerrada, hermítica, esencialmente autoadjunta, o autoadjunta, para cada $i \in I$.

Definición 3.1.13: Dado un subespacio lineal S de $D(\pi)$, diremos que es *invariante* frente a la acción de π si $\pi(a)S \subseteq S$ para todo $a \in A$. Dado un subespacio cerrado K de $H(\pi)$ diremos que éste es *invariante* frente a la acción de la representación si existe un subespacio lineal de $D(\pi)$ denso en K e invariante frente a π.

Comentario. Cabe remarcar en este punto la diferencia entre ambos conceptos de invariancia.

La definición precedente queda justificada si se observa que dado un subespacio lineal S de $D(\pi)$ invariante frente a la acción de π, la restricción de π a S define una nueva representación, subrepresentación de π, en el espacio hilbertiano que resulta de completar S en $H(\pi)$.

Recíprocamente, si se tiene un subespacio cerado K de $H(\pi)$ invariante frente a π y se considera al conjunto $D_K(\pi)$ formado por todos los elementos $\phi \in D(\pi) \cap K$ tales que $\pi(a)\phi \in K$ para todo $a \in A$, se tiene que $D_K(\pi)$ es el subespacio lineal más grande en el sentido de la inclusión de $D(\pi) \cap K$ invariante por π y siendo éste denso en K, resulta ser un dominio, por restricción, de una subrepresentación de π en K.

Ahora bien, siguiendo con este último caso, aunque K sea invariante frente a la acción de π esto no es necesariamente cierto para el complemento ortogonal de K en $H(\pi)$.

Asimismo, no es cierto en general que $D(\pi) \cap K$ sea invariante frente a la acción de π, de manera que no coincide con $D_K(\pi)$.

Estas situaciones no se producen si se está bajo las hipótesis de la siguiente definición.

Definición 3.1.14: Seas S un subespacio lineal de $D(\pi)$ y K un subespacio cerrado de $H(\pi)$. Diremos que S, respectivamente K, *reducen* a la representación π si existen representaciones π_1 y π_2 de A tales que $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$ y $S = D(\pi_1)$, respectivamente $K = H(\pi_1)$.

Mencionaremos algunas consecuencias inmediatas de la definición anterior.

Sea S un subespacio lineal de $D(\pi)$. Entonces se tiene que S reduce a π si, y sólo si la completación de S es un subespacio invariante frente a π de $H(\pi)$ y su intersección con $D(\pi)$ coincide con S.

Por otra parte, si K es un subespacio cerrado de $H(\pi)$ que reduce a π entonces K es invariante por π, se satisface que el dominio de la correspondiente subrepresentación coincide con $D(\pi) \cap K$ y este último espacio reduce a π.

Más aún, es fácil verificar que un subespacio cerrado K de $H(\pi)$ reduce a π si, y sólo si $D(\pi) \cap K$ y $D(\pi) \cap K^\perp$ son invariantes frente a π y $P_K D(\pi) \subseteq D(\pi)$, en donde P_K es el proyector ortogonal sobre K.

Definición 3.1.15: Una representación π se denomina *irreducible* si los únicos subespacios lineales de $D(\pi)$ que la reducen son $\{0\}$ y $D(\pi)$.

El siguiente lema caracteriza a las representaciones irreducibles.

Lema 3.1.16: Para cualquier representación π de A los siguientes enunciados son equivalentes.

1. π es irreducible.

2. Cada descomposición $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$ de π como suma directa de π_1 y π_2 implica que $H(\pi_1) = \{0\}$ o bien $H(\pi_2) = \{0\}$.

3. Cada descomposición $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$ de π como suma directa de π_1 y π_2 implica que $H(\pi_1) = H(\pi)$ o bien $H(\pi_2) = H(\pi)$.

4. Los únicos subespacios cerrados de $H(\pi)$ que reducen a π son $\{0\}$ y $H(\pi)$.

Demostración: La demostración de este lema puede verse en [52], Lema 8.3.5, pág. 214. $\square$

Por último, y en función de lo que veremos en las secciones que siguen, introducimos el siguiente concepto.

Definición 3.1.17: Sea π una *-representación de una *-álgebra A sobre un espacio de Hilbert H y sea $D(\pi)$ su dominio. Un vector $\phi \in D(\pi)$ se dice que es *débilmente cíclico* o simplemente, un *vector cíclico* de π si el conjunto $\{\pi(a)\,\phi : a \in A\}$ es denso en H, en cuyo caso la representación se dirá que es una *representación cíclica.* Si $\{\pi(a)\,\phi : a \in A\}$ es denso en $D(\pi)$ cuando éste está equipado con la topología del gráfico, entonces diremos que ϕ es un *vector fueretemente cíclico* de π. Una *-representación π que tenga un vector fuertemente cíclico se dirá que es una *representación fuertemente cíclica.*

Asumamos que π es una *-representación de una *-álgebra A en un espacio hilbertiano H y sea ϕ un elemento cualquiera de $D(\pi)$. Sea $\hat{\pi}$ la restricción de π sobre $\{\pi(a)\,\phi : a \in A\}$. Se tiene luego que ϕ es un vector fuertemente cíclico si, y sólo si la clausura de $\hat{\pi}$ es una extensión de π.

3.2. Funcionales positivas y estados de una *-álgebra.

Dada una *-álgebra A existen múltiples posibilidades para establecer un orden parcial en A. El más habitual de estos ordenamientos es el que se define a continuación.

Definición 3.2.1: Sea A una *-álgebra sobre $\mathbb{C}$ y sea x un elemento de A. Diremos que a es *positivo*, y escribiremos $a \geq 0$, si, y sólo si existe $b \in A$ tal que $a = b^\star b$.

Al cono de elementos positivos de A lo notaremos Γ, de manera que tenemos

$$\Gamma = \{a \in A : \exists\, b \in A, a = b^\star b\} \tag{3.25}$$

y dados $a, b \in A$ diremos que a *supera* a b, esto es, $a \geq b$, cuando

$$a - b \in \Gamma \tag{3.26}$$

Comentario. Como acabamos de mencionar, esta no es la única forma de establecer un orden parcial en una *-álgebra. Otra forma es definir un *orden espectral*, esto es, definir como positivo a todo elemento cuyo espectro está contenido en el conjunto de los números reales positivos. En principio, no es cierto que ambos ordenamientos coincidan, si bien típicamente es el caso.

Ahora bien, establecido un orden en A es posible definir, en consecuencia, un orden parcial en el espacio antidual de A del siguiente modo.

Definición 3.2.2: Una funcional lineal ω sobre A se dice que es una *funcional positiva* si la imagen de Γ a través de ω está incluida en el conjunto de los reales no negativos, o sea, si para todo $a \in A$ se satisface que

$$\langle a^\star a, \omega \rangle \geq 0 \tag{3.27}$$

Un elemento de $A^\times$ se dirá *positivo* si es imagen a través del antiisomorfismo canónico entre A' y $A^\times$ de una funcional positiva.

En adelante, y en virtud de este antiisomorfismo, no haremos distinción entre los elementos del espacio dual y los elementos del espacio antidual, de manera que cada vez que hablemos de funcionales positivas deberá entenderse elementos del espacio antidual que son imagen a través de este antiisomorfismo de alguna funcional positiva.

Tendremos, pues, que $\omega \in A^\times$ es positivo si se verifica que para todo $a \in A$,

$$\langle a^\star a | \omega \rangle \geq 0 \tag{3.28}$$

Un concepto que resulta de particular interés en física está vinculado estrechamente al de funcionales positivas y es el siguiente.

Definición 3.2.3: Sea ω una funcional positiva sobre una *-álgebra A con unidad. Si ω es continua, esto es, pertenece al espacio antidual topológico de A, y la imagen de la unidad en A a través de ω es 1, se dice que ω es un *estado* sobre A.

Las funcionales positivas continuas y, en particular, los estados sobre una *-álgebra, juegan un papel central en el estudio de sus representaciones, de manera que será conveniente repasar algunas de sus propiedades fundamentales.

Proposición 3.2.4: Sea A una *-álgebra con unidad.

1. Si ω es una funcional positiva sobre A, para todo $a \in A$ se satisface que
$$\langle a^\star|\omega\rangle = \overline{\langle a|\omega\rangle} \tag{3.29}$$

2. Dada una funcional positiva ω sobre A, se satisface la desigualdad de Cauchy-Schwarz, esto es, para todo par $a, b \in A$ se tiene que
$$|\langle a^\star b|\omega\rangle|^2 \leq \langle a^\star a|\omega\rangle \langle b^\star b|\omega\rangle \tag{3.30}$$

3. Dadas dos funcionales positivas sobre A, ω_1 y ω_2, se verifica que $\omega_1 \leq \omega_2$ si, y sólo si
$$\langle a^\star a|\omega_1\rangle \leq \langle a^\star a|\omega_2\rangle \tag{3.31}$$
para todo $a \in A$.

Demostración: Ver [45], pág. 921 y [45], Lema 9.4.3, pág. 923. □

3.3. *El teorema de Gel'fand-Naimark-Segal en *-álgebras topológicas.*

Todas las definiciones que introdujimos en las subsecciones precedentes permiten finalmente enunciar y demostrar el teorema de Gel'fand, Naimark y Segal extendido al caso de las *-álgebras localmente convexas.

Antes de formular este teorema, intruduciremos un último concepto y demostraremos un lema que nos resultará útil.

Definición 3.3.1: Sea π una representación de un álgebra topológica A en un espacio de Hilbert $H(\pi)$ con dominio denso $D(\pi)$. Se dice que π es *débilmente continua* si para todo $a \in A$ se satisface que
$$a \to (\phi|\pi(a)\psi) \tag{3.32}$$
es continua en tanto funcional sobre A para cada par de elementos $\phi, \psi \in D(\pi)$.

Polarización de por medio, se tiene que una representación es débilmente continua si y sólo si se satisface que la funcional sobre A dada por

$$a \to (\phi|\pi(a)\phi) \tag{3.33}$$

para cada $\phi \in D(\pi)$ es continua.

Lema 3.3.2: Sea A una *-álgebra. Si ω es una funcional positiva sobre A, entonces el conjunto

$$N_\omega = \{a \in A : \langle a^\star a|\omega\rangle = 0\} \tag{3.34}$$

es un ideal a izquierda del álgebra A, ideal al que se conoce con el nombre de *ideal de Gel'fand*. Si A es una álgebra topológica cuasicompleta y ω es una funcional continua, N_ω es un ideal cerrado de A.

Demostración: Consideremos dos elementos cualesquiera de N_ω, a y b. Entonces, en primer lugar tenemos que

$$\langle (a+b)^\star(a+b)|\omega\rangle = \langle a^\star a + a^\star b + b^\star a + b^\star b|\omega\rangle = 2\mathrm{Re}\,\langle a^\star b|\omega\rangle \tag{3.35}$$

Pero dado que

$$\mathrm{Re}\,\langle a^\star b|\omega\rangle \le \langle a^\star a|\omega\rangle^{1/2}\,\langle b^\star b|\omega\rangle^{1/2} = 0 \tag{3.36}$$

se tiene que

$$\langle (a+b)^\star(a+b)|\omega\rangle = 0 \tag{3.37}$$

y con ello resulta que $a + b \in N_\omega$

Por otra parte, es evidente que si $\lambda \in \mathbb{C}$ y $a \in N_\omega$, entonces $\lambda a \in N_\omega$.

Por último, para todo $a \in A$, dado b en N_ω, se satisface que

$$\langle (ab)^\star(ab)|\omega\rangle = \langle b^\star\left(a^\star ab\right)|\omega\rangle \tag{3.38}$$

y dado que de la ecuación (3.30) se tiene que

$$\langle b^\star\left(a^\star ab\right)|\omega\rangle \le \langle b^\star b|\omega\rangle^{1/2}\,\langle (a^\star ab)^\star\left(a^\star ab\right)|\omega\rangle^{1/2} = 0 \tag{3.39}$$

resulta que

$$\langle (ab)^\star(ab)|\omega\rangle = 0 \tag{3.40}$$

y $ab \in N_\omega$.

Esto demuestra que N_ω es un ideal a izquierda de A.

La clausura de N_ω cuando A es cuasicompleta resulta inmediatamente de la continuidad de ω. $\square$

El siguiente teorema fue originalmente demostrado por Gel'fand y Naimark e independientemente por Segal para el caso de las C*-álgebras. Se trata de uno de los pilares de la teoría de representación de estas álgebras y puede reformularse para el caso de las *-álgebras topológicas de la siguiente manera.

Teorema 3.3.3: Para cada funcional positiva continua ω de una *-álgebra localmente convexa con unidad A existe una *-representación cerrada débilmente continua fuertemente cíclica π_ω de A sobre un espacio de Hilbert H_ω tal que, para todo $a \in A$,

$$\langle a|\omega\rangle = (\phi_\omega \mid \pi_\omega(a)\phi_\omega) \tag{3.41}$$

en donde $\phi_\omega \in D(\pi_\omega) = D_\omega$ es un vector fuertemente cíclico de π_ω.

La representación π_ω está determinada por ω a menos de equivalencia unitaria.

Más aún, se satisface que la representación π_ω es irreducible si, y sólo si ω es extremal o indescomponible.

Demostración: La demostración de este teorema para el caso de *-álgebras topológicas en general presenta similitudes con la correspondiente para el caso de las C*-álgebras, demostración que puede consultarse, por ejemplo, en [11].

Consideremos la forma sobre $A \times A$ dada por

$$(a, b) \to \langle a^\star b|\omega\rangle \tag{3.42}$$

en donde $a, b \in A$.

Esta forma es, evidentemente, una forma sesquilineal y de la positividad de ω se desprende que es, además, no negativa, de manera que define sobre A un producto interno semidefinido.

Si con $\tilde{D}_\omega$ notamos al espacio que resulta de dividir a A por N_ω, o sea

$$\tilde{D}_\omega = A/N_\omega \tag{3.43}$$

y con p a la proyección canónica de A sobre $\tilde{D}_\omega$, tenemos que la forma sobre $\tilde{D}_\omega \times \tilde{D}_\omega$ dada por

$$(pa, pb) = \langle a^\star b | \omega \rangle \tag{3.44}$$

resulta bien definida, dado que N_ω es un ideal a izquierda de A (ver Lema 3.3.2).

Se tiene, pues, que la ecuación (3.44) determina un producto interno sobre $\tilde{D}_\omega$.

Teniendo en cuenta, nuevamente, que N_ω es un ideal a izquierda de A, dados $b_1, b_2 \in A$ se tiene que $p(b_1) = p(b_2)$ implica siempre que $p(ab_1) = p(ab_2)$, para todo $a \in A$. Con ello, si a es cualquier elemento de A, la expresión

$$\tilde{\pi}_\omega(a)(pb) = p(ab) \tag{3.45}$$

con $b \in A$, define, sin ambigüedades, un operador lineal de $\tilde{D}_\omega$ en sí mismo.

Demostraremos ahora que la aplicación

$$a \to \tilde{\pi}_\omega(a) \tag{3.46}$$

es una *-representación de A con dominio $\tilde{D}_\omega = D(\tilde{\pi}_\omega)$ en el espacio de Hilbert $\tilde{H}_\omega$ que resulta de completar a $\tilde{D}_\omega$ respecto de la norma que se deriva del producto interno (3.44).

En primer lugar se tiene que, para toda terna de elementos $a, b, c \in A$, se satisface que

$$\tilde{\pi}_\omega(ab)(pc) = p(abc) = \tilde{\pi}_\omega(a)(p(bc)) = \tilde{\pi}_\omega(a)\tilde{\pi}_\omega(b)(pc) \tag{3.47}$$

de manera que la acción de $\tilde{\pi}_\omega$ sobre $\tilde{D}_\omega$ es multiplicativa.

Además, se verifica que

$$(pa, \tilde{\pi}_\omega(b)(pc)) = (pa, p(bc)) = \omega(a^\star bc) \tag{3.48}$$

para $a, b, c \in A$, pero considerando que

$$\omega(a^\star bc) = \omega((b^\star a)^\star c) = (p(b^\star a), pc) = (\tilde{\pi}_\omega(b^\star)(pa), pc) \tag{3.49}$$

se tiene que

$$(pa, \tilde{\pi}_\omega(b)(pc)) = (\tilde{\pi}_\omega(b^\star)(pa), pc) \tag{3.50}$$

Dado que la linealidad de la aplicación $\tilde{\pi}_\omega : A \to L(\tilde{D}_\omega)$ es evidente, lo mismo que el hecho de que $\tilde{\pi}_\omega(e) = 1$, resulta que $\tilde{\pi}_\omega$ es, en efecto, una *-representación de A con dominio $\tilde{D}_\omega$ en el espacio de Hilbert $\tilde{H}_\omega$.

Ahora bien, si se define $\tilde{\phi}_\omega = pe$, es claro que $\tilde{\pi}_\omega(A)\tilde{\phi}_\omega = \tilde{D}_\omega$, de manera que $\tilde{\phi}_\omega$ es un vector cíclico de $\tilde{\pi}_\omega$.

Por otra parte, se satisface que

$$\langle a|\omega\rangle = (pe|pa) = (pe|p(ae)) = \left(\tilde{\phi}_\omega|\tilde{\pi}_\omega(a)\tilde{\phi}_\omega\right) \tag{3.51}$$

para todo $a \in A$.

Resta, luego, demostrar la unicidad de la representación a menos de equivalencia unitaria.

Asumiendo que existe otra *-representación π' de A tal que, para toda $a \in A$, se satisface que $\langle a|\omega\rangle = (\phi'|\pi'(a)\phi')$, siendo ϕ' un cierto vector cíclico de π', tenemos que

$$\|\pi'(a)\phi'\|^2 = (\pi'(a)\phi'|\pi'(a)\phi') = (\phi'|\pi'(a^\star a)\phi') = \langle a^\star a|\omega\rangle \tag{3.52}$$

expresión que coincide con $\left\|\tilde{\pi}_\omega(a)\tilde{\phi}_\omega\right\|^2$, de modo que la transformación

$$U(\pi'(a)\phi') = \tilde{\pi}_\omega\tilde{\phi}_\omega \tag{3.53}$$

define una aplicación isométrica de $\pi'(A)\phi$ en $\tilde{D}_\omega$, que se extiende por continuidad a un operador unitario de $H(\pi')$, completación de $\pi(A)\phi$, sobre $\tilde{H}_\omega$, de donde resulta que π' es unitariamente equivalente a $\tilde{\pi}_\omega$.

Con ésto hemos demostrado que dada una funcional positiva ω sobre una *-álgebra A existe una *-representación cíclica $\tilde{\pi}_\omega$ de A y un vector cíclico $\tilde{\phi}_\omega$ tal que se satisface la ecuación (3.51), y que esta representación en única a menos de equivalencia unitaria.

Nótese que hasta este punto de la discusión la condición de álgebra topológica de A no entró en juego, así como tampoco ninguna propiedad de la representación que pudiera estar relacionada, como su continuidad o su clausura.

Sea π_ω la representación que es clausura de $\tilde{\pi}_\omega$.

Notemos con D_ω al dominio de π_ω.

La demostración de que π_ω es una *-representación cíclica de A en $H_\omega = \tilde{H}_\omega$, que tiene por vector cíclico a $\phi_\omega = \tilde{\phi}_\omega$, tal que se satisface la ecuación (3.41), resulta inmediatamente de lo que hemos discutido hasta ahora.

Que π_ω es una representación fuertemente cíclica resulta de notar que ϕ_ω es, efectivamente, un vector fuertemente cíclico de π_ω, ya que, por definición, $\tilde{D}_\omega = \tilde{\pi}_\omega(A)\phi_\omega = \pi_\omega(A)\phi_\omega$ es denso en D_ω.

El hecho de que π_ω es débilmente continua se deduce inmediatamente de la continuidad de la funcional

$$\langle a|\omega\rangle = \left(\tilde{\phi}_\omega|\tilde{\pi}_\omega(a)\tilde{\phi}_\omega\right) = (\phi_\omega|\pi_\omega(a)\phi_\omega) \tag{3.54}$$

Queda, pues, por demostrar la unidicidad de π_ω.

Asumamos que existe una segunda *-representación π' de A que satisface todas las hipótesis del teorema y sea ϕ' un vector fuertemente cíclico de π'.

La representación que resulta de restringir a π' sobre $\pi(A)\phi'$ es, como ya demostramos, unitariamente equivalente a $\tilde{\pi}_\omega$, de donde resulta que existe una isometría U que correlaciona a esta restricción con $\tilde{\pi}_\omega$.

De ([52], Prop. 8.2.2. (iv), pág. 137), en donde se demuestra que todo operador acotado que correlaciona a dos representaciones se extiende unívocamente a un operador que correlaciona a las respectivas clausuras, resulta, finalmente, que U se extiende a un operador unitario que correlaciona a π' con π_ω, que es lo que queríamos demostrar.

Respecto de la irreducibilidad de la representación cuando la funcional ω es extremal, la demostración no presenta diferencias respecto de la demostración para el caso de las C*-álgebras, de manera que referimos a [11]. $\square$

4. REPRESENTACIONES CíCLICAS Y SUBESPACIOS HILBERTIANOS.

La generalización del teorema de Gel'fand, Naimark y Segal para el caso de las *-álgebras localmente convexas que presentamos en el capítulo anterior, así como las versiones de este teorema que aparecen en [47] y en [52], presentan una deficiencia en lo que a la naturaleza topológica de los espacios involucrados se refiere.

En efecto, el único aspecto del resultado en que la topología del álgebra en cuestión resulta importante es en función de demostrar la continuidad débil de las *-representaciones que se obtienen.

Es interesante destacar que incluso en la formulación original del teorema GNS, el hecho de que la topología del álgebra esté determinada por una $C^\star$-norma sólo contribuye a la caracterización de las representaciones cíclicas en lo que respecta a la continuidad de tales representaciones, y ésto se desprende de que la positividad de una funcional sobre una $C^\star$-álgebra garantiza automáticamente su continuidad[1].

Esta situación para *-álgebras en general se puede analizar desde dos perspectivas diferentes.

En primer lugar, las definiciones de representación y de *-representación de *-álgebras que repasamos en el capítulo anterior están inspiradas en la teoría de operadores no acotados sobre espacios hilbertianos. Estas definiciones, si bien resultan satisfactorias a la hora de generalizar resultados importantes de la teoría de representación de álgebras de operadores acotados, presentan un inconveniente que asimismo está manifiesto en la teoría de operadores no acotados, y es la arbitrariedad del dominio que se considera para cada representación.

Salvo por la definición de la topológía del gráfico, que sólo es relevante en lo que respecta a la clausura de una representación dada, los dominios

[1] Para una discusión más detallada acerca de los teoremas de continuidad automática en álgebras topológicas en general referimos a [37] y a [65].

de definición están poco caracterizados en tanto espacios topológicos y este hecho es, en última instancia, el que deja en segundo plano a la topología del álgebra como variable del problema de la descripción de sus representaciones cíclicas.

Por otra parte, y como ya mencionamos, el teorema GNS muestra que es posible establecer una correspondencia biunívoca entre la colección de funcionales continuas positivas sobre una *-álgebra y la familia de las clases de equivalencia unitaria de sus *-representaciones cerradas débilmente continuas fuertemente cíclicas. El primero de estos espacios es topologizable naturalmente como subconjunto del espacio antidual del álgebra no así el segundo. Resulta sugestivo que en ninguna referencia importante al teorema GNS exista interés por transportar una estructura topológica al conjunto de representaciones cíclicas y hacer de la biyección GNS un isomorfismo.

En función de estas observaciones hemos encontrado que a la hora de estudiar sistemáticamente a las representaciones cíclicas de las *-álgebras topológicas resulta conveniente considerar aquellas representaciones que se obtienen de restringir representaciones separable y fuertemente continuas sobre espacios topológicos diferentes de los espacios de Hilbert que suelen tenerse exclusivamente en cuenta. Esta restricción la haremos sobre los subespacios densamente invariantes de ciertos subespacios hilbertianos contenidos continuamente en él.

Explícitamente, dada una representación separable y fuertemente continua π de una *-álgebra topológica A sobre un espacio vectorial localmente convexo E, consideraremos las *-representaciones de A sobre cada subespacio hilbertiano $\pi^\star$-estable H de E (ver Def. 4.1.1) que resultan de restringir a la representación original sobre $hE^\times$, siendo h el núcleo reproductivo de H.

Destacamos que la idea de emplear representaciones fuertemente continuas sobre espacios vectoriales topológicos en función de estudiar las propiedades que estas representaciones tienen cuando son restringidas a sus subespacios hilbertianos está inspirada en [41], referencia en la que para analizar las características de los operadores no acotados sobre un espacio de Hilbert se emplea, asimismo, un espacio topológico que lo contiene continua y densamente.

En lo que resta del capítulo, E será un espacio vectorial topológico localmente convexo Hausdorff separable y H será un subespacio hilbertiano de E. Notaremos con j a la inclusión canónica de H en E y con h al núcleo reproductivo de H.

A menos que resulte necesario, evitaremos hacer referencia al antiisomorfismo canónico, θ, entre $H^{\times}$ y H.

4.1. Subespacios hilbertianos estables.

Sea A una *-álgebra localmente convexa con unidad.

Asumamos que π es una representación de A separable y fuertemente continua sobre el espacio vectorial E dada por

$$(a, \xi) \to \pi(a)\xi \tag{4.1}$$

en donde $a \in A$ y $\xi \in E$.

La acción de A que define π sobre E permite, asimismo, definir en forma natural una acción $\pi^{\times}$ sobre el espacio antidual de E, $E^{\times}$, compatible con la involución en A, dada por

$$\pi^{\times}(a)x = \pi\left(a^{\star}\right)^{\times} x \tag{4.2}$$

para todo $a \in A$ y todo $x \in E^{\times}$.

Comentario. Nótese que es esencial involucionar al elemento del álgebra antes de adjuntar su acción en orden de obtener una acción sobre $E^{\times}$ que sea multiplicativa, o sea, que sea estrictamente una representación de A sobre $E^{\times}$.

Cuando se equipa a $E^{\times}$ con la topología débil la acción de A sobre el antidual resulta separablemente continua. En el caso en que A es tonelada, si se equipa a $E^{\times}$ con la topología fuerte, $\pi^{\times}$ también es separablemente continua.

Introducimos la siguiente definición.

Definición 4.1.1: Sea π un representación separable y fuertemente continua de A sobre E. Sea H un subespacio hilbertiano de E. Diremos que H es *estable frente a la acción de A a través de* π, o simplemente, que es π*-estable*, si se satisface que

$$\pi h \subseteq h \tag{4.3}$$

en donde con esto queremos indicar que para todo $x \in E^{\times}$ y todo $a \in A$ existe un elemento $y \in E^{\times}$ tal que

$$\pi(a)hx = hy \tag{4.4}$$

Diremos que H es *$\star$-estable frente a la acción de A a través de π* o *$\pi^\star$-estable* si se tiene que

$$\pi h = h\pi^\times \tag{4.5}$$

o sea, si para todo $x \in E^\times$ y todo $a \in A$ se satisface que

$$\pi(a)hx = h\pi^\times(a)x \tag{4.6}$$

Evidentemente, la $\star$-estabilidad de un subespacio hilbertiano implica su estabilidad.

Asimismo, si un subespacio hilbertiano H de E es π-estable, entonces es invariante frente a la acción de π.

Si tenemos que H es un subespacio hilbertiano de E π-estable podemos definir la acción de A sobre $hE^\times$ por restricción, y con ello obtenemos una representación de A en H a la que notaremos π_0. El dominio de π_0 es $j^\times E^\times$, conjunto al que en adelante notaremos D_0.

Si además H es $\pi^\star$-invariante, podemos dar explícitamente esta acción a través de la siguiente ecuación

$$\pi_0(a)j^\times x = j^\times \pi^\times(a)x \tag{4.7}$$

para todo $x \in E^\times$ y todo $a \in A$, o bien, escribiendo formalmente

$$\pi_0(a)hx = h\pi^\times(a)x \tag{4.8}$$

Es importante destacar que si bien esta última ecuación es idéntica a la ecuación (4.6), mientras que la ecuación (4.6) expresa una propiedad de una representación continua sobre $E^\times$, la ecuación (4.8), previa identificación de H con la completación de $hE^\times$ en E, define la acción de A sobre H a través de π_0.

Respecto de la representación que queda así definida, podemos demostrar la siguiente proposición.

Proposición 4.1.2: Sean E un espacio vectorial topológio localmente convexo Hausdorff separable cuasicompleto y H un subespacio hilbertiano de E. Sean A una $\star$-álgebra topológica y π una representación continua de A en E tal que H es $\star$-invariante frente a la acción de A a través de π. Entonces, la ecuación (4.7) define una $\star$-representación de A en H.

Demostración: Dado un elemento cualquiera $a \in A$, definimos los siguientes conjuntos:

$$M_a = \{\phi \in H \mid \exists \psi \in H : \pi(a) j \phi = j \psi\} \tag{4.9}$$

y el espacio dado por

$$M = \bigcap_{a \in A} M_a \tag{4.10}$$

Es evidente que M es un subespacio lineal de H que contiene a D_0.

Consideremos un elemento $x \in E^\times$ y un elemento cualquiera ϕ de $M_{a^\star}$.

Dado que j y $j^\times$ son débilmente continuas y $j^\times E^\times$ es denso en H, se satisface que, para todo $\phi \in H$ y todo $y \in E^\times$,

$$\big(j^\times y|\phi\big) = \langle y|j\phi\rangle \tag{4.11}$$

de donde resulta que

$$\big(\pi_0(a) j^\times x|\phi\big) = \big(j^\times \pi^\times(a) x|\phi\big) = \big\langle \pi^\times(a) x|j\phi\big\rangle \tag{4.12}$$

y con ello se tiene que

$$\big(\pi_0(a) j^\times x|\phi\big) = \langle x|\pi(a^\star) j\phi\rangle \tag{4.13}$$

Por otra parte,

$$\langle x|\pi(a^\star) j\phi\rangle = \langle x|j\pi_0(a^\star)\phi\rangle = \big(j^\times x|\pi_0(a^\star)\phi\big) \tag{4.14}$$

en donde hemos usado que $\phi \in M_{a^\star}$.

Tenemos, pues, que

$$\big(\pi_0(a) j^\times x|\phi\big) = \big(j^\times x|\pi_0(a^\star)\phi\big) \tag{4.15}$$

o sea, se tiene que ϕ pertenece al dominio de $\pi_0(a)^\star$ y que

$$j\pi_0(a)^\star \phi = \pi(a^\star) j\phi \tag{4.16}$$

para todo $\phi \in M_{a^\star}$.

Recíprocamente, si ϕ pertenece al dominio de $\pi_0(a)^\star$, entonces

$$\langle x|j\pi_0(a)^\star\phi\rangle = \big(j^\times x|\pi_0(a)^\star\phi\big) = \big(\pi_0(a) j^\times x|\phi\big) = \big(j^\times \pi^\times(a) x|\phi\big) \tag{4.17}$$

Pero como

$$\big(j^\times \pi^\times(a) x|\phi\big) = \big\langle \pi^\times(a) x|j\phi\big\rangle = \langle x|\pi(a^\star) j\phi\rangle \tag{4.18}$$

se tiene que

$$\langle x | j\pi_0(a)^\star \phi \rangle = \langle x | \pi(a^\star) j\phi \rangle \tag{4.19}$$

de modo que $\pi(a^\star)j\phi = j\pi_0(a)^\star\phi \in H$ y con ello $\phi \in M_{a^\star}$.

Hemos demostrado que $M_{a^\star}$ es el dominio maximal de $\pi_0(a)^\star$ y, en consecuencia, que M es el dominio de $\pi_0^\star$.

Ahora bien, como M es un subespacio de H que contiene densamente a D_0, resulta que $\pi_0^\star$ es una extensión de π_0 y de ello se deduce, finalmente, que π_0 es una *-representación de A sobre H. $\square$

En la sección que sigue usaremos este resultado para demostrar que las representaciones GNS se pueden obtener siempre como restricciones de la acción antidual regular de A sobre $A^\times$.

4.2. Correspondencia entre formas positivas y núcleos.

Nuestra intención en esta sección es demostrar que toda funcional positiva continua ω sobre una *-álgebra localmente convexa con unidad A define, canónicamente, un subespacio hilbertiano H_ω de $A^\times$ que es *-invariante frente a la acción antidual regular izquierda de A.

Si con j_ω notamos a la inclusión de H_ω en $A^\times$, veremos que la restricción de la representación de A que queda así definida en $A^\times$ sobre $j_\omega A \subseteq H_\omega$ resulta, en virtud de la proposición que acabamos de demostrar, una *-representación de A en H_ω que es débilmente continua y fuertemente cíclica, y con ello, resulta unitariamente equivalente a la representación GNS de A correspondiente a ω.

Dicho en otros términos, en lugar de hacer la construcción GNS proyectando al álgebra sobre el dominio de la representación, la haremos inyectando al espacio de representación en el antidual.

La acción regular izquiera de A, esto es, la acción de A sobre sí misma por multiplicación a izquierda, define una acción de A sobre su antidual, a la que llamaremos la *acción antidual regular izquierda de A*, de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\langle b | a\omega \rangle = \langle a^\star b | \omega \rangle \tag{4.20}$$

en donde ω es cualquier elemento en $A^\times$ y $a, b \in A$.

Dado que la acción regular es separable y fuertemente continua sobre A, la respectiva acción antidual es también una representación continua de A

sobre $A^\times$ cuando se provee a $A^\times$ de la topología débil o, alternativamente, si se provee a $A^\times$ de la topología fuerte en el caso en que A es tonelada, cosa que asumiremos de ahora en más.

De la misma manera en que se define la acción antidual regular izquierda de A es posible definir una acción antidual regular derecha mediante la siguiente expresión:

$$\langle b|\omega a\rangle = \langle ba^\star|\omega\rangle \tag{4.21}$$

para $\omega \in A^\times$ y $a, b \in A$, pero esta acción no constituye una representación de A.

Cabe aclarar que si bien la ecuación (4.21) no define estrictamente una representación de A, sí determina una representación sobre $A^\times$ de $\overline{A}$, antiespacio de A, cuando a éste se lo equipa con la estructura de *-álgebra que hace de la conjugación un *-homomorfismo, o sea, si se define una involución sobre $\overline{A}$ mediante la siguiente expresión:

$$(\Theta a)^\star = \Theta a^\star \tag{4.22}$$

en donde Θ es el antiisomorfismo canónico entre A y $\overline{A}$ y $a \in A$. En efecto, la correspondencia de $(\overline{A}, A^\times)$ en $A^\times$ dada por

$$(\Theta a, \omega) \to \omega a \tag{4.23}$$

es, estrictamente hablando, una representación.

Comentario. Esta involución no nos permitirá, en general, identificar a A con $\overline{A}$ (ver Ejemplo 2.1.5). Sin embargo, en lo que sigue evitaremos hacer mención explícita a este hecho y cuando hablemos de la representación que determina la acción antidual regular derecha de A deberá entenderse la representación de $\overline{A}$ que esta acción define sobre $A^\times$.

Sea ω una funcional continua positiva sobre A, de manera que tenemos que

$$\langle a^\star a|\omega\rangle \geq 0 \tag{4.24}$$

para todo $a \in A$.

De la continuidad de ω y de la continuidad de la acción antidual regular izquierda de A resulta que la forma sesquilineal h_ω sobre $A \times A$ definida a través de la siguiente fórmula

$$h_\omega(a, b) = \langle a^\star b|\omega\rangle \tag{4.25}$$

para $a, b \in A$, es separablemente continua. Lo mismo ocurre si consideramos el operador h_ω de A en $A^\times$ asociado a la forma (4.25) dado por

$$h_\omega a = a\omega \tag{4.26}$$

que resulta débilmente continuo.

Más aún, la positividad de ω implica la positividad (y hermiticidad) de h_ω. En efecto, dado que para toda funcional positiva ω se cumple que

$$\langle a^\star|\omega\rangle = \overline{\langle a|\omega\rangle} \tag{4.27}$$

para todo $a \in A$, tenemos que

$$\langle b|h_\omega a\rangle = \langle a^* b|\omega\rangle = \langle (b^* a)^*|\omega\rangle = \overline{\langle b^* a|\omega\rangle} = \overline{\langle a|h_\omega b\rangle} \tag{4.28}$$

para todo par de elementos $a, b \in A$, de donde resulta que h_ω es hermítico.

Por otra parte,

$$\langle a|h_\omega a\rangle = \langle a^* a|\omega\rangle \geq 0 \tag{4.29}$$

para todo $a \in A$, y con esto se comprueba que h_ω es positivo.

Entonces, si identificamos a $A^{\times\times}$ con A, la ecuación (4.26) determina un núcleo[2] positivo relativo a $A^\times$ que es reproductivo de un subespacio hilbertiano de $A^\times$, al que notaremos de ahora en adelante con H_ω, del cual es fácil demostrar que es *-estable frente a la acción antidual regular izquierda de A.

En efecto, si a es un elemento cualquiera de A, se tiene que

$$ah_\omega b = a(b\omega) = (ab)\omega = h_\omega ab \tag{4.30}$$

para todo $b \in A$, o sea,

$$ah_\omega = h_\omega a \tag{4.31}$$

para todo $a \in A$.

Consideremos finalmente la clausura de la *-representación de A sobre H_ω que resulta de restringir a la acción antidual regular izquierda de A sobre $h_\omega A = \{a\omega : a \in A\}$ como en la sección anterior. A esta representación la notaremos π_ω.

El dominio $D_\omega \subseteq H_\omega$ de π_ω es la clausura de $j_\omega^\times A$ en H_ω respecto de la topología del gráfico, en donde j_ω es la inclusión canónica de H_ω en $A^\times$.

[2] Recordemos que estamos asumiendo que A es una *-álgebra tonelada, de manera que $A^\times$ es un espacio cuasicompleto.

Como ya adelantamos, es posible demostrar que la representación que acabamos de definir es unitariamente equivalente a la representación GNS asociada a ω. Basta ver para ello que la representación es fuertemente cíclica y débilmente continua.

Ahora bien, dado que

$$h_\omega A = A h_\omega e = A\omega \tag{4.32}$$

se tiene que el vector

$$\Omega_\omega = j_\omega^\times e \tag{4.33}$$

es cíclico para π_ω.

Si asumimos, además, que A es cuasicompleta tenemos que Ω_ω es un vector fuertemente cíclico de π_ω.

Por otra parte, de la continuidad de ω se deduce la continuidad débil de π_ω ya que es evidente que se verifica la siguiente identidad:

$$\langle a|\omega\rangle = (\Omega_\omega|\pi_\omega(a)\Omega_\omega) \tag{4.34}$$

para todo $a \in A$.

Esta caracterización de las representaciones GNS para álgebras localmente convexas toneladas cuasicompletas con unidad es alternativa a la que presentamos en el capítulo anterior pero tiene la virtud de poner en evidencia no sólo la correspondencia entre representaciones cíclicas y funcionales positivas sino también una correspondencia entre éstas, los subespacios hilbertianos inmersos en el antidual del álgebra que se representa y los respectivos núcleos reproductivos.

A continuación presentamos uno de los resultados importantes del trabajo en el que se muestra que esta múltiple correspondencia es una biyección.

Teorema 4.2.1: Sea A una *-algebra topológica localmente convexa tonelada cuasicompleta con unidad. Entonces, existe una biyección entre los siguientes conjuntos:

1. La familia de clases de equivalencia unitaria, $\mathrm{Cycl}(A)$, de las *-representaciones cerradas débilmente continuas fuertemente cíclicas de A.

2. El conjunto de formas lineales positivas continuas sobre A.

3. El conjunto de subespacios hilbertianos del espacio antidual topológico de A, $A^{\times}$, que son *-estables frente a la acción antidual regular izquierda de A.

4. La colección de núcleos positivos relativos a $A^{\times}$ que son *-estables frente a la acción antidual regular izquierda de A.

Demostración: La biyección entre 1. y 2. es precisamente la que está dada por la construcción GNS, de manera que remitimos a la demostración del Teorema 3.3.3

Por otra parte, el hecho de que A sea tonelada garantiza la cuasicompletitud de $A^{\times}$, de manera que estamos bajo las hipótesis de la teoría de subespacios hilbertianos de Schwartz y la biyección entre 3. y 4. es uno de sus resultados.

Queda, entonces, por demostrar, por ejemplo, que esta correspondencia entre funcionales positivas continuas y núcleos *-estables frente a la acción antidual regular izquierda de A es una biyección.

Dado un núcleo reprocuctivo[3] $h : A \to A^{\times}$, *-estable frente a la acción de A sobre $A^{\times}$, definimos

$$\omega = he \tag{4.35}$$

en donde e es la unidad de A.

Queremos ver que el núcleo reproductivo que esta funcional define coincide con h.

Pero esto resulta de notar que, para toda $a \in A$,

$$h_{\omega}a = a\omega = ahe = h(ae) = ha \tag{4.36}$$

Inversamente, sea ω una funcional positiva continua sobre A y h_{ω} el núcleo reproductivo asociado.

Evidentemente se tiene que $h_{\omega}e$ coincide con ω, y con esto queda demostrado el teorema. $\square$

Uno de los aspectos más interesantes que se desprenden de este teorema es que sobre la familia de clases de equivalencia unitaria de las *-representaciones cerradas fuertemente cíclicas débilmente continuas de una *-álgebra tonelada cuasicompleta con unidad A, a la cual notaremos de ahora en más

[3] Volvemos a remarcar el hecho de que estamos siempre identificando a A con $A^{\times\times}$.

$\mathrm{Cycl}(A)$, es posible definir una estructura de cono regular estrictamente convexo de modo tal que la biyección múltiple a la que se hace referencia preserva la estructura de cono que hereda la colección de subespacios hilbertianos $\mathrm{Hilb}_A(A^\times)$ de $A^\times$ que son $\star$-estables frente a la acción antidual regular izquierda de A en tanto subcono de $\mathrm{Hilb}(A^\times)$. Dicho de otra forma, es posible hacer de estas múltiples biyecciones isomorfismos de conos.

Discutiremos este tema en la siguiente sección.

4.3. Estructura cónica del espacio de representaciones cíclicas.

Como acabamos de mencionar, es posible definir sobre la colección de clases de equivalencia unitaria de las $\star$-representaciones cerradas débilmente continuas fuertemente cíclicas de una $\star$-álgebra localmente convexa tonelada A, $\mathrm{Cycl}(A)$, una estructura de cono estrictamente convexo regular tal que la múltiple biyección cuya existencia hemos demostrado en el teorema 4.2.1 preserva esta estructura.

En efecto, consideremos las siguientes definiciones.

1. **Ley de multiplicación exterior sobre Cycl**(A) **por números reales no negativos.**

   Sea π una $\star$-representación cerrada débilmente continua fuertemente cíclica de una $\star$-álgebra localmente convexa tonelada cuasicompleta con unidad A sobre el espacio de Hilbert H. Sean D el dominio de π. Finalmente, sea Ω un vector cíclico de la representación.

   Identificaremos a H como subespacio hilbertiano de $A^\times$ $\star$-estable frente a la acción antidual regular izquierda de A de acuerdo con el Teorema 4.2.1, esto es, identificaremos a π con la representación GNS que pertenece a la correspondiente clase de equivalencia.

   Dado un número real positivo λ, definiremos a la representación $\lambda\pi$ como la representación sobre λH con igual dominio que π[4] tal que su acción sobre D coincide algebraicamente con la de π, o sea, tal que

   $$(\lambda\pi)(a)\phi = \pi(a)\phi \tag{4.37}$$

   para todo $\phi \in D$ y todo $a \in A$.

[4] Dado que estamos identificando a H como subespacio hilbertiano de $A^\times$, H y λH coinciden en tanto espacios lineales, de modo que D es subespacio lineal de λH.

Extenderemos la acción de $\mathbb{R}_{>0}$ sobre Cycl(A) a $\mathbb{R}_{\geq 0}$ definiendo

$$0\pi = 0 \tag{4.38}$$

Evidentemente $\lambda\pi$ es un *-representación cerrada débilmente continua para la que $\lambda\Omega$ constituye un vector fuertemente cíclico y que extiende a π para todo $\lambda > 1$.

De la asociatividad de la multiplicación por reales no negativos sobre $\mathrm{Hilb}(A^\times)$ se deduce inmediatamente la asociatividad de la multiplicación por reales no negativos sobre Cycl(A).

2. **Ley de adición interna en Cycl(A).**

   Sean π_1 y π_2 dos *-representaciones cerradas débilmente continuas fuertemente cíclicas de una *-álgebra localmente convexa tonelada cuasi-completa A. Sean H_1 y H_2 los repectivos espacios de representación, identificados, como antes, como subespacios hilbertianos de $A^\times$. Notaremos con D_1 y D_2 a los dominios de π_1 y π_2 y con Ω_1 y Ω_2 a los respectivos vectores cíclicos.

   Sean $\phi_1, \phi_1' \in D_1$ y $\phi_2, \phi_2' \in D_2$ tales que $\Phi(\phi_1, \phi_2) = \Phi(\phi_1', \phi_2')$.

   Se tiene, entonces, que $j_1\phi_1 + j_2\phi_2 = j_1\phi_1' + j_2\phi_2'$, en donde j_1 y j_2 son respectivamente las inclusiones de H_1 y H_2 en $A^\times$.

   Luego, para todo $a \in A$, se satisface que

$$\begin{aligned} j_1\pi_1(a)\phi_1 + j_2\pi_2(a)\phi_2 &= a(j_1\phi_1 + j_2\phi_2) = aj_1\phi_1 + aj_2\phi_2 \\ &= aj_1\phi_1' + aj_2\phi_2' = a(j_1\phi_1' + j_2\phi_2') \\ &= j_1\pi_1(a)\phi_1' + j_2\pi_2(a)\phi_2' \end{aligned} \tag{4.39}$$

   de manera que $\Phi(\pi_1(a)\phi_1, \pi_2(a)\phi_2) = \Phi(\pi_1(a)\phi_1', \pi_2(a)\phi_2')$.

   Con esto, para todo $a \in A$, la siguiente correspondencia:

$$\Phi(\phi_1, \phi_2) \to \Phi(\pi_1(a)\phi_1, \pi_2(a)\phi_2) \tag{4.40}$$

   en donde $\phi_1 \in D_1$, $\phi_2 \in D_2$ y Φ es la aplicación canónica de $H_1 \oplus H_2$ sobre $H_1 + H_2$ dada por la ecuación (2.25), queda bien definida para todo elemento en $\Phi(D_1 \times D_2)$.

   Más aún, es fácil comprobar que se trata de una *-representación de A sobre $H_1 + H_2$ con dominio $\Phi(D_1 \times D_2)$.

Extendiendo por continuidad la acción de esta representación sobre la completación de $\Phi(D_1 \times D_2)$ en $H_1 + H_2$ respecto de la topología del gráfico obtenemos una *-representación cerada de A sobre $H_1 + H_2$ débilmente continua tal que $\Omega = \Phi(\Omega_1 + \Omega_2)$ es un vector fuertemente cíclico.

A esta representación la llamaremos la *suma de* π_1 *y* π_2 y en consecuencia la notaremos $\pi_1 + \pi_2$.

Es fácil verificar que esta ecuación define una ley de adición que es conmutativa, asociativa y distributiva respecto del producto por números reales no negativos en $\mathrm{Cycl}(A)$.

Asimismo es inmediato observar que

$$\lambda(\pi_1 + \pi_2) = \lambda\pi_1 + \lambda\pi_2 \tag{4.41}$$

Por último, si $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{0\}$, se tiene que $\pi_1 + \pi_2$ coincide con $\pi_1 \oplus \pi_2$.

3. **Orden parcial sobre Cycl(A).**

   Por último, podemos definir un orden parcial sobre $\mathrm{Cycl}(A)$ compatible con las operaciones que acabamos de introducir.

   Dadas dos representaciones π_1 y π_2 en $\mathrm{Cycl}(A)$ diremos que $\pi_1 \leq \pi_2$ si y sólo si π_1 es una subrepresentación de π_2.

   Como para el caso de los subespacios hilbertianos, tenemos que, para $\pi \neq 0$, se satisface

$$\lambda\pi \leq \pi, \qquad \forall\lambda \leq 1 \tag{4.42}$$

   y que

$$\pi_1 + \pi_2 \geq \pi_1 \tag{4.43}$$

   y

$$\pi_1 + \pi_2 \geq \pi_2 \tag{4.44}$$

   para todo par de elementos π_1 y π_2 pertenecientes a $\mathrm{Cycl}(A)$.

Dadas estas definiciones estamos en condiciones de demostrar las siguientes proposiciones.

Proposición 4.3.1: Sea λ un número real no negativo. Sean ω y ω_1 dos funcionales continuas positivas sobre una *-álgebra localmente convexa tonelada cuasicompleta A. En virtud de los isomorfismos introducidos en el Teorema 4.2.1 las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. Si con π_ω y π_{ω_1} notamos a las representaciones asociadas a ω y ω_1, respectivamente, se satisface que
$$\pi_\omega = \lambda \pi_{\omega_1} \tag{4.45}$$
2. Se tiene que
$$\omega = \lambda \omega_1 \tag{4.46}$$
esto es,
$$\langle a|\omega\rangle = \lambda \langle a|\omega_1\rangle \tag{4.47}$$
para todo $a \in A$.
3. Los núcleos reproductivos h_ω y h_{ω_1} definidos por ω y ω_1 como en la ecuación (4.26) verifican que
$$h_\omega = \lambda h_{\omega_1} \tag{4.48}$$
4. Finalmente, si con H_ω y H_{ω_1} notamos a los subespacios hilbertianos *-estables frente a la acción antidual regular izquierda de A asociados a ω y a ω_1, respectivamente, entonces
$$H_\omega = \lambda H_{\omega_1} \tag{4.49}$$

Demostración: Asumamos que $\pi_\omega = \lambda \pi_{\omega_1}$.

Se tiene, luego, que
$$\langle a|\omega\rangle = (\Omega_\omega|\pi_\omega(a)\Omega_\omega)_{H_\omega} = ((\lambda\Omega_{\omega_1})|\,(\lambda\pi_{\omega_1})\,(a)(\lambda\Omega_{\omega_1}))_{\lambda H_{\omega_1}} \tag{4.50}$$

Por otra parte, tenemos que
$$((\lambda\Omega_{\omega_1})|\,(\lambda\pi_{\omega_1})\,(a)(\lambda\Omega_{\omega_1}))_{\lambda H_{\omega_1}} = \lambda\,(\Omega_{\omega_1}|\pi_{\omega_1}(a)\Omega_{\omega_1})_{H_{\omega_1}} = \lambda\,\langle a|\omega_1\rangle \tag{4.51}$$
con lo que hemos demostrado que la afirmación (1) implica la afirmación (2).

El hecho de que (2) implica (3) se deduce inmediatamente de la ecuación (4.26) y del hecho de que la acción antidual regular a izquierda de A es lineal.

La implicación (3) $\Rightarrow$ (4) ha sido demostrada por Schwartz en [53].

Falta pues demostrar que (4) implica (1). Pero esto resulta de la definición de la multiplicación por reales no negativos en Cycl(A) y de observar que la acción de A a través de π_ω como a través de π_{ω_1} coinciden. $\square$

Las siguientes dos proposiciones las enunciamos sin dar las demostraciones ya que éstas son análogas a la que acabamos de presentar.

Proposición 4.3.2: Como antes, supongamos que A es una *-álgebra localmente convexa tonelada cuasicompleta y sean ω, ω_1 y ω_2 tres funcionales continuas positivas sobre A. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Se tiene que
$$\pi_\omega = \pi_{\omega_1} + \pi_{\omega_2} \tag{4.52}$$
en donde π_ω, π_{ω_1} y π_{ω_2} son las representaciones asociadas a ω, ω_1 y ω_2.

2. Se satisface que
$$\omega = \omega_1 + \omega_2 \tag{4.53}$$

3. Si h_ω, h_{ω_1} y h_{ω_2} son los núcleos reproductivos asociados a ω, ω_1 y ω_2, respectivamente, a través del isomorfismo del Teorema 4.2.1, entonces
$$h_\omega = h_{\omega_1} + h_{\omega_2} \tag{4.54}$$

4. Sean H_ω, H_{ω_1} y H_{ω_2} los subespacios hilbertianos de $A^\times$ en que actúan π_ω, π_{ω_1} y π_{ω_1}, entonces
$$H_\omega = H_{\omega_1} + H_{\omega_2} \tag{4.55}$$

Por último, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.3.3: Dadas dos funcionales continuas positivas sobre una *-álgebra localmente convexa tonelada cuasicompleta A, ω y ω_1, las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. Si nuevamente notamos con π_ω y π_{ω_1} a las representaciones asociadas a estas funcionales, entonces
$$\pi_\omega \leq \pi_{\omega_1} \tag{4.56}$$

2. Se tiene que
$$\omega \leq \omega_1 \tag{4.57}$$
en donde recordemos que esto significa que
$$\langle a^\star a|\omega\rangle \leq \langle a^\star a|\omega_1\rangle \tag{4.58}$$
para todo $a \in A$.

3. Los núcleos reproductivos h_ω y h_{ω_1} determinados por ω y ω_1 satisfacen que
$$h_\omega \leq h_{\omega_1} \tag{4.59}$$
para el orden definido en $\mathcal{L}^+(A^\times)$

4. Por último, sean H_ω y H_{ω_1} los subespacios hilbertianos asociados a ω y a ω_1, respectivamente, entonces
$$H_\omega \leq H_{\omega_1} \tag{4.60}$$

Con esto hemos comprobado que la biyección definida en el Teorema 4.2.1 es un isomorfismo para la estructura de cono que puede definirse sobre los cuatro espacios involucrados.

La consecuencia principal de este hecho es que todas las propiedades que listamos respecto de la estructura cónica del espacio de los subespacios hilbertianos de un dado espacio vectorial topológico y sus consecuencias en el capítulo 2 tienen un correlato inmediato en términos de las clases de equivalencia unitaria de las representaciones continuas cíclicas de A.

Dado que las respectivas demostraciones se obtienen fácilmente empleando las tres proposiciones anteriores, no presentaremos detalles en este sentido.

5. ESTADOS KMS SOBRE ÁLGEBRAS TOPOLÓGICAS.

En este capítulo aplicaremos algunos de los resultados que obtuvimos en las secciones anteriores en la descripción de las funcionales KMS asociadas a *-álgebras topológicas.

Veremos que varios de los "ingredientes"de la teoría modular de Tomita y Takesaki aparecen naturalmente en este contexto sin necesidad de imponer fuertes restricciones a las topologías de los espacios que están involucrados.

Muchas de las definiciones y conceptos que siguen a continuación ya son conocidos en el marco de las C*-álgebras (ver, por ejemplo, [11] y [21]) o son ligeras adaptaciones de otras que pueden encontrarse en [52].

5.1. Elementos enteros y grupos de automorfismos.

Uno de los problemas que aparecen al tratar con funcionales KMS sobre álgebras topológicas en general está asociado al "buen comportamiento"que estas funcionales deben presentar frente a la acción del grupo de automorfismos que las define.

En este sentido, introducimos las siguientes definiciones.

Definición 5.1.1: Sea E un espacio vectorial topológico localmente convexo. Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. Diremos que una función continua ϕ de Ω en E es *holomorfa* en Ω si para todo disco D incluido en Ω y todo $z \in D$ se tiene que

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\phi(z')}{z' - z}\, dz' \tag{5.1}$$

en donde ∂D es la frontera del dominio D.

En particular, si ϕ es holomorfa en todo el plano complejo, diremos que es una función *entera*.

Definición 5.1.2: Sea E un espacio vectorial topológico localmente convexo y sea $\alpha : \mathbb{R} \times E \to E$ una aplicación lineal tal que se satisfacen las siguientes hipótesis:

1. Para todo $t \in \mathbb{R}$, el endomorfismo $\alpha_t : E \to E$ dado por
$$\alpha_t \xi = \alpha(t, \xi) \tag{5.2}$$
para todo $\xi \in E$, es un operator continuo.

2. Para todo par de elementos $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ se verifica que
$$\alpha_{t_1+t_2} = \alpha_{t_1}\alpha_{t_2} \tag{5.3}$$

3. Para el caso particular en que $t = 0$, se tiene que
$$\alpha_0 = \mathrm{Id}_E \tag{5.4}$$

4. α es conjuntamente continua.

Bajo estas condiciones diremos que α es un *grupo monoparamétrico continuo de automorfismos sobre E*

Nótese que las primera tres hipótesis en esta definición garantizan, precisamente, que las transformaciones α_t son automorfismos sobre E. En efecto, para todo $t \in \mathbb{R}$, se satisface que
$$\alpha_t \alpha_{-t} = \alpha_{-t}\alpha_t = \alpha_0 = \mathrm{Id}_E \tag{5.5}$$
de modo que
$$\alpha_{-t} = \alpha_t^{-1} \tag{5.6}$$
de donde resulta que todo α_t tiene un endomorfismo inverso continuo.

Por otra parte, en el caso en que E es un espacio tonelado la cuarta condición puede relajarse, dado que ésta equivale a asumir que α es separablemente continua.

Definición 5.1.3: Sea E un espacio localmente convexo y sea α un grupo monoparamétrico continuo de automorfismos continuos sobre E. Si ξ es un elemento de E tal que la función
$$t \to \alpha_t \xi \tag{5.7}$$
es restricción sobre $\mathbb{R}$ de una función con valores en E entera (necesariamente única) diremos que ξ es un *elemento entero* de E con respecto a α.

Al conjunto de los elementos enteros de E relativos a α lo notaremos E_α.

Por último, dado un elemento entero $\xi \in E_\alpha$, a la función entera que prolonga a la función dada por la ecuación (5.7) la notaremos
$$z \to \alpha_z \xi \tag{5.8}$$

Respecto de la definición anterior, si ξ_1 y ξ_2 son dos elementos enteros de E con respecto a α y λ_1 y λ_2 son dos números complejos cualesquiera, por el principio de prolongación analítica se satisface que

$$\alpha_z(\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2) = \lambda_1\alpha_z\xi_1 + \lambda_2\alpha_z\xi_2 \tag{5.9}$$

Es fácil, también, comprobar que si $\xi \in E_\alpha$ entonces $\alpha_z\xi \in E_\alpha$.

Además, si z_1 y z_2 son dos números complejos, se tiene que

$$\alpha_{z_1+z_2}\xi = \alpha_{z_1}\alpha_{z_2}\xi \tag{5.10}$$

para todo $\xi \in E_\alpha$.

Todo esto implica que E_α es un subespacio de E invariante bajo la acción de α_z, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Sea $\mathrm{Hol}_\alpha(E)$ el espacio de funciones enteras ϕ con valores en E tales que

$$\alpha_t\phi(z) = \phi(z+t) \tag{5.11}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Este espacio es un subespacio cerrado del espacio $\mathrm{Hol}(E)$ compuesto por todas las funciones enteras con valores en E provisto con la topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

Una caracterización importante del espacio de elementos enteros de E con respecto al grupo α resulta de observar que la función (5.8) verifica la identidad (5.11) y, con ello, pertenece a $\mathrm{Hol}_\alpha(E)$.

En efecto, puede demostrarse la siguiente proposición.

Proposición 5.1.4: La aplicación que a cada elemento $\xi \in E_\alpha$ le hace corresponder la función

$$z \longrightarrow \alpha_z\xi \tag{5.12}$$

es una biyección entre E_α y $\mathrm{Hol}_\alpha(E)$.

Demostración: Ver [5], Prop. 5.2.3, pág. 453. $\square$

Si E es un espacio cuasicompleto y se equipa a E_α con la topología que hace de esta biyección un homeomorfismo, más explícitamente, si se considera a E_α en tanto espacio topológico con la topología generada por las seminormas

$$p_K(\xi) = \sup\{p(\alpha_z\xi) : z \in K\} \tag{5.13}$$

en donde K es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ y p es una seminorma continua sobre E, entonces existe una inclusión continua de E_α en E, o sea, se tiene que E_α es un subespacio topológico de E.

Ahora bien, el hecho de considerar al espacio de elementos enteros respecto de un grupo de automorfismos α sobre E responde, como ya mencionamos, a la necesidad de encontrar un subespacio de E que tenga un buen comportamiento respecto de la acción de α. En efecto, la proposición anterior muestra que α actúa sobre E_α por traslaciones.

En este sentido, es conveniente considerar, además, aquellos grupos de automorfismos que permiten garantizar que E_α es un subespacio denso de E.

Definición 5.1.5: Sea E un espacio vectorial localmente convexo y sea α un grupo monoparamétrico continuo de automorfismos sobre E. Sea ϵ un número real no negativo. Diremos que α es un grupo *exponencialmente acotado con cota superior* ϵ si para toda seminorma continua p sobre E, la transformación

$$\xi \to \sup\left\{p(\alpha_t\xi)e^{-\epsilon|t|} : t \in \mathbb{R}\right\} \tag{5.14}$$

también define una seminorma continua sobre E.

En forma equivalente, puede decirse que un grupo es exponencialmente acotado con cota superior ϵ si para toda seminorma continua p sobre E existe una seminorma continua q sobre E tal que

$$p(\alpha_t\xi) \leq e^{\epsilon|t|}\, q(\xi) \tag{5.15}$$

para todo $\xi \in E$.

Es importante destacar, en primer lugar, que si E es un espacio tonelado, entonces α es exponencialmente acotado con cota superior ϵ si y sólo si para todo $\xi \in E$ y toda seminorma continua p sobre E se verifica que

$$\sup\left\{p(\alpha_t\xi)e^{-\epsilon|t|} : t \in \mathbb{R}\right\} < +\infty \tag{5.16}$$

Por otra parte, cuando E es un espacio de Banach, se satisface que todo grupo monoparamétrico continuo de automorfismos es exponencialmente acotado.

Las siguientes dos proposiciones resumen las características más importantes de los grupos exponencialmente acotados en relación con sus respectivos espacios de elementos enteros.

Proposición 5.1.6: Sea E un espacio vectorial localmente convexo cuasicompleto y sea α un grupo monoparamétrico continuo de automorfismos sobre E exponencialmente acotado con cota superior $\epsilon \geq 0$. Entonces α define por restricción un grupo exponencialmente acotado sobre E_α con la misma cota superior.

Demostración: La demostración puede consultarse en [5], Prop. 5.2.7, pág. 454. $\square$

Proposición 5.1.7: Sea E un espacio vectorial localmente convexo cuasicompleto y sea α un grupo monoparamétrico continuo de automorfismos sobre E exponencialmente acotado con cota superior $\epsilon \geq 0$. Entonces, se satisface que:

1. E_α es un subespacio denso de E.
2. E_α y $(E_\alpha)_\alpha$ son isomorfos como espacios vectoriales topológicos.
3. Si F es un subespacio de E_α invariante bajo la acción de α y denso en E, entonces F es denso en E_α.

Demostración: Para la demostración de este resultado, que puede encontrarse en [5], Prop. 5.2.8, pág. 454, resulta esencial considerar el homeomorfismo entre E_α y $\mathrm{Hol}_\alpha(E)$ que se introdujo en la proposición 5.1.4. $\square$

Un caso importante para la física de grupos monoparamétricos continuos de automorfismos exponencialmente acotados es el que definimos a continuación.

Definición 5.1.8: Sea E un espacio vectorial localmente convexo cuasicompleto y sea α un grupo monoparamétrico continuo de automorfismos sobre E. Diremos que α es *de crecimiento a lo sumo polinomial* si para toda seminorma continua p existe una seminorma continua q sobre E y un número natural n tales que

$$p(\alpha_t \xi) \leq (1 + |t|)^n \, q(\xi) \tag{5.17}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ y todo $\xi \in E$.

El siguiente lema es consecuencia inmediata de la definición que acabamos de dar. Omitimos la demostración.

Lema 5.1.9: Sea E un espacio vectorial localmente convexo cuasicompleto y sea α un grupo monoparamétrico continuo de automorfismos continuos sobre E de crecimiento a lo sumo polinomial. Entonces α es exponencialmente acotado con cota superior ϵ para todo $\epsilon > 0$.

El caso que será de interés para nosotros es específicamente aquel en que el grupo de automorfismos actúa sobre una *-álgebra topológica.

En adelante asumiremos, entonces, que A es una *-álgebra localmente convexa cuasicompleta y que α es un grupo monoparamétrico continuo de *-automorfismos continuos sobre A (en tanto *-álgebra), esto es, un grupo de automorfismos que actúan multiplicativamente sobre A y que son compatibles con la involución en A.

Tenemos, luego, que

$$\alpha_t(ab) = (\alpha_t a)\,(\alpha_t b) \tag{5.18}$$

para todo par $a, b \in A$ y todo $t \in \mathbb{R}$, y que

$$\alpha_t a^\star = (\alpha_t a)^\star \tag{5.19}$$

para todo $a \in A$ y todo $t \in \mathbb{R}$.

Si con A_α notamos al espacio de elementos enteros de A con respecto a α es sencillo demostrar las siguientes proposiciones.

Proposición 5.1.10: Sea A una *-álgebra localmente convexa cuasicompleta y sea α un grupo monoparamétrico continuo de *-automorfismos sobre A. Entonces:

1. Se satisface que
$$\alpha_z(ab) = (\alpha_z a)\,(\alpha_z b) \tag{5.20}$$
para todo par de elementos $a, b \in A_\alpha$ y todo $z \in \mathbb{C}$, y
$$\alpha_z a^\star = (\alpha_{\overline{z}} a)^\star \tag{5.21}$$
para todo $a \in A_\alpha$ y todo $z \in \mathbb{C}$.

2. A_α es una *-subálgebra de A invariante frente a la acción de α.

3. α define, por restricción, un grupo monoparamétrico continuo de *-automorfismos sobre A_α.

Demostración: Las expresiones (5.20) y (5.21) se obtienen por simple prolongamiento analítico de las ecuaciones (5.18) y (5.19), siendo la segunda parte de la proposición una consecuencia inmediata de éstas.

Por último, la demostración de la tercera afirmación es similar a la de la proposición 5.1.6, de manera que omitiremos los detalles. □

Si α es un grupo exponencialmente acotado se demuestra, además, el siguiente resultado.

Proposición 5.1.11: Sea α un grupo monoparamétrico continuo de *-automorfismos exponencialmente acotado con cota superior $\epsilon \geq 0$ sobre una *-álgebra localmente convexa cuasicompleta A.

1. El grupo que define α por restricción sobre A_α es también exponencialmente acotado, con la misma cota superior que α.

2. A_α es una *-subálgebra densa de A.

3. $(A_\alpha)_\alpha$ es isomorfa en tanto *-álgebra a A_α.

4. Si B es una *-subálgebra α-invariante de A_α densa en A entonces B es densa en A_α.

Demostración: La demostración es completamente análoga a la de las proposiciones 5.1.6 y 5.1.7. □

Antes de terminar esta sección será conveniente ilustrar los conceptos que acabamos de discutir con tres ejemplos especialmente importantes en las aplicaciones a la física.

Ejemplo 5.1.12: Sea H un espacio de Hilbert de dimensión finita y sea α un grupo monoparamétrico continuo de *-automorfismos sobre el álgebra $L(H)$ de operadores acotados sobre H.

Bajo estas condiciones α actúa necesariamente sobre $L(H)$ a través de automorfismos interiores isométricos, esto es, siempre existe un operador autoadjunto h sobre H tal que para todo $a \in L(H)$ y todo $t \in \mathbb{R}$ se satisface que

$$\alpha_t a = e^{ith} a e^{-ith} \tag{5.22}$$

De aquí resulta que todos los elementos de $L(H)$ son enteros con respecto a α, o sea,

$$L(H)_\alpha = L(H) \tag{5.23}$$

y que

$$\alpha_z a = e^{izh} a e^{-izh} \tag{5.24}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Ejemplo 5.1.13: Notemos con $S(\mathbb{R})$ al *espacio de Schwartz*, o sea, al espacio de funciones infinitamente diferenciables de decrecimiento rápido sobre la recta real.

Considerando sobre este espacio el producto puntual de funciones y la conjugación compleja ordinaria como involución, resulta que $S(\mathbb{R})$ es una *-álgebra abeliana nuclear tonelada metrizable completa.

Sea α el grupo monoparamétrico continuo de *-automorfismos sobre $S(\mathbb{R})$ definido por las traslaciones.

Se tiene, luego, que α es de crecimiento polinomial, esto es, para toda seminorma continua p sobre $S(\mathbb{R})$ existen una seminorma continua q sobre $S(\mathbb{R})$ y un número $n \in \mathbb{N}$ tales que, para todo $\phi \in S(\mathbb{R})$ y todo $t \in \mathbb{R}$,

$$p(\phi_t) \leq (1 + |t|)^n \, q(\phi) \tag{5.25}$$

en donde

$$\phi_t(x) = \phi(x + t) \tag{5.26}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

De aquí resulta que el grupo de las traslaciones sobre el espacio de Schwartz es exponencialmente acotado con cota superior ϵ para todo $\epsilon > 0$.

Ejemplo 5.1.14: Sea H un espacio de Hilbert y sea h un operador autoadjunto definido sobre un dominio D, por supuesto, denso en H. Sea $D(h)$ el espacio de vectores analíticos de h, entendiendo por esto al conjunto de elementos ϕ de H tales que ϕ pertenece al dominio de h^n para todo $n \in \mathbb{N}$ y que satisfacen la siguiente identidad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \|h^n \phi\| r^n < +\infty \tag{5.27}$$

para todo real no negativo r.

Consideremos sobre $D(h)$ la topología generada por las seminormas

$$p_r(\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \|h^n \phi\| r^n \tag{5.28}$$

con $r > 0$.

Como $D(h)$ es un núcleo para h, el operador sobre H que resulta de restringir a h sobre $D(h)$ es, también, un operdor autoadjunto.

Asumiremos, entonces, sin perder generalidad, que $D(h)$ es el dominio de definición de h.

Dado un elemento $t \in \mathbb{R}$, sea U_t el operador dado por

$$U_t = e^{ith} \tag{5.29}$$

actuando sobre $D(h)$.

Como es bien sabido, este operador puede extenderse unívocamente a un operador unitario, al que notaremos de la misma manera, y con ello se tiene que la familia $\{U_t : t \in \mathbb{R}\}$ define un grupo monoparamétrico continuo de isometrías sobre H y, en consecuencia, la colección de endomorfismos de $L(H)$ dados por

$$\alpha_t a = U_t a U_{-t} \tag{5.30}$$

para todo $a \in L(H)$ y todo $t \in \mathbb{R}$, conforma un grupo monoparamétrico continuo de *-automorfismos sobre $L(H)$.

En el caso particular en que un vector ϕ es analítico, la expresión

$$U_z \phi = e^{izh} \phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} h^n \phi \tag{5.31}$$

tiene sentido para todo $z \in \mathbb{C}$. De esta manera, la expresión

$$\alpha_z a = U_z a U_{-z} \tag{5.32}$$

en donde a es, ahora, cualquier elemento de $L\left(D(h)\right)$, define la prolongación analítica de la ecuación (5.30).

Finalmente, consideremos el conjunto A compuesto por todos los elementos de $L\left(D(h)\right)$ tales que

$$\sup\left\{\|\alpha_z a\| : z \in \mathbb{C}\right\} < \infty \tag{5.33}$$

en donde K es cualquier subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ y la norma es la norma del supremo en $L(H)$.

Si proveemos a A con la topología generada por las seminormas

$$p_K(a) = \sup\{\|\alpha_z a\| : z \in \mathbb{C}\} \tag{5.34}$$

en donde, como antes, K es cualquier subconjunto compacto de $\mathbb{C}$, puede demostrarse (ver [11]) que A es estable frente al producto y a la involución definidas en $L(H)$. Más aún, se muestra en la misma referencia que A es una *-álgebra localmente convexa para la cual ambas operaciones resultan continuas.

Asimismo se comprueba que A es una *-subálgebra de Fréchet de $L(D(h))$, o sea, una *-álgebra de Fréchet inmersa continuamente en $L(D(h))$.

Por último, todo elemento en A es entero con respecto a α, y si con A^α notamos a la *-subálgebra cerrada de $L(H)$ compuesta por todos los elementos $a \in L(H)$ tales que la aplicación

$$t \to \alpha_t a \tag{5.35}$$

es continua, A es una *-subálgebra de A^α. Más aún, se satisface que

$$A = (A^\alpha)_\alpha \tag{5.36}$$

5.2. Estados KMS y estados centrales.

Estamos en condiciones de definir, finalmente, a los estados KMS sobre *-álgebras localmente convexas.

En lo que sigue de la sección, A será una *-álgebra localmente convexa tonelada cuasicompleta con unidad y α será un grupo monoparamétrico continuo exponencialmente acotado de *-automorfismos sobre A.

Definición 5.2.1: Sea ω una funcional positiva continua sobre A y sea β un número real cualquiera. Diremos que ω satisface la condición (α, β)-KMS o, alternativamente, que ω es una *funcional* (α, β)*-KMS* sobre A, si se verifica que

$$\langle ab|\omega\rangle = \langle b\alpha_{i\beta}a|\omega\rangle \tag{5.37}$$

para todo $a \in A_\alpha$ y todo $b \in A$.

Si además se satisface que

$$\langle e|\omega\rangle = 1 \tag{5.38}$$

en donde e es la unidad de A, diremos que ω es un *estado* (α, β)*-KMS* sobre A.

En el caso particular en que $\beta = -1$ hablaremos, simplemente, de *funcionales o estados KMS* o de *funcionales o estados modulares.*

Definición 5.2.2: Sea ω una funcional positiva continua sobre A. Diremos que ω es una *funcional abeliana, tracial o central* sobre A o, simplemente, una *traza* sobre A, si

$$\langle ab|\omega\rangle = \langle ba|\omega\rangle \tag{5.39}$$

para todo par de elementos $a, b \in A$.

Como antes, si se satisface que

$$\langle e|\omega\rangle = 1 \tag{5.40}$$

diremos que ω es un *estado central* o *estado tracial* sobre A.

Cuando el grupo de automorfismos en consideración es el grupo trivial, o sea, cuando para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\alpha_t = \mathrm{Id}_A \tag{5.41}$$

todo elemento de A resulta entero con respecto a α, o sea, $A_\alpha = A$, y la condición (α, β)-KMS es equivalente, para cualquier valor de β, a la condición expresada en la ecuación (5.39).

Es evidente, entonces, que las funcionales centrales pueden tratarse simplemente como un caso particular de las funcionales (α, β)-KMS.

Más aún, si ω es una funcional (α, β)-KMS con $\beta \neq 0$, puede decirse que β çuantifica"la desviación que mantiene ω respecto de una traza sobre A, en el sentido de que, si el grupo α no es trivial, una funcional es tracial si, y sólo si satisface la condición $(\alpha, \beta = 0)$-KMS.

En efecto, si ω es una funcional $(\alpha, \beta = 0)$-KMS y consideramos un elemento fijo $b \in A$, entonces A_α está contenido en el núcleo de la transformación dada por

$$a \to \langle ab|\omega\rangle - \langle ba|\omega\rangle \tag{5.42}$$

para todo $a \in A$, y la equivalencia entre la condición $(\alpha, \beta = 0)$-KMS y la condición (5.39) resulta de observar que A_α es un subespacio denso de A.

Una de las consecuencias inmediatas que se desprende de las definiciones que dimos antes es que, cuando $\beta \neq 0$, una funcional continua ω sobre A

es una funcional (α, β)-KMS si, y sólo si ω es una funcional KMS sobre A con respecto al grupo α^β que resulta de reescalear a α con β, esto es, con respecto al grupo dado por

$$\alpha_t^\beta = \alpha_{-\beta t} \tag{5.43}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, muchas veces nos resultará suficiente considerar funcionales modulares en lugar de funcionales (α, β)-KMS en general.

La siguiente proposición muestra bajo qué condiciones las funcionales (α, β)-KMS satisfacen la más cruda de las características asociadas al equilibrio termodinámico, esto es, su invariancia con respecto a la acción de α.

Proposición 5.2.3: Sea α un grupo monoparamétrico continuo de *-automorfismos de crecimiento a lo sumo polinomial sobre una *-álgebra localmente convexa tonelada con unidad A y sea ω una funcional (α, β)-KMS sobre A con $\beta \neq 0$.

Bajo estas condiciones se tiene que ω es invariante frente a la acción de α, esto es,

$$\langle \alpha_t a | \omega \rangle = \langle a | \omega \rangle \tag{5.44}$$

para todo $a \in A$ y todo $t \in \mathbb{R}$.

Demostración: La demostración de esta proposición es similar a la que puede formularse en el contexto de las C*-álgebras (ver [11]).

Como acabamos de mencionar, podemos asumir sin perder generalidad que ω es una funcional modular, o sea, que $\beta = -1$.

Dado que A_α es un subespacio denso de A, bastará demostrar que la identidad (5.44) se satisface para todo $t \in \mathbb{R}$ y todo $a \in A_\alpha$.

Sea, entonces, a un elemento fijo de A_α y sea p una seminorma continua sobre A tal que $| \langle a | \omega \rangle | \leq p(a)$.

Dado que α es de crecimiento a lo sumo polinomial, deben existir una seminorma continua q sobre A y un número natural n tales que

$$p(\alpha_t a) \leq (1 + |t|)^n \, q(a) \tag{5.45}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ y todo $a \in A$.

Consideremos el conjunto

$$M = \sup \{ q(\alpha_{-i\delta a}) : 0 \leq \delta \leq 1 \} \tag{5.46}$$

Se tiene, luego, que

$$\begin{aligned} |\langle \alpha_{t-i\delta} a | \omega \rangle| &= |\langle \alpha_t(\alpha_{-i\delta} a) | \omega \rangle| \leq p(\alpha_t\,(\alpha_{-i\delta} a)) \\ &\leq (1+|t|)^n\, q(\alpha_{-i\delta} a) \leq M\,(1+|t|)^n \end{aligned} \tag{5.47}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ y para todo $\delta \in [0,1]$.

Ahora bien, si ω es una funcional modular tenemos que, para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$\langle \alpha_{z-i} a | \omega \rangle = \langle \alpha_{-i}(\alpha_z a) | \omega \rangle = \langle \alpha_z a | \omega \rangle \tag{5.48}$$

en donde hemos usado la expresión (5.37) con $b = e$.

Esta periodicidad de la función $z \to \langle \alpha_z a | \omega \rangle$, junto con la ecuación (5.47), implican que

$$|\langle \alpha_z a | \omega \rangle| \leq M\,(1 + |\mathrm{Re}(z)|)^n \tag{5.49}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

De aquí resulta que la función entera $z \to \langle \alpha_z a | \omega \rangle$ es una función polinómica.

Finalmente, dado que toda función entera polinómica periódica es necesariamente constante, queda demostrado que la funcional ω es invariante frente a la acción de α sobre A. $\square$

De la misma manera que en la formulación de la mecánica cuántica en espacios hilbertianos es posible definir la representación de Heisenberg a partir de la representación de Schrödinger y viceversa, en el contexto algebraico, dado un grupo monoparamétrico continuo de *-automorfismos sobre el álgebra de los campos es posible definir un grupo monoparamétrico continuo de automorfismos sobre el correspondiente espacio antidual simplemente adjuntando la acción del primero.

Más explícitamente, dado un grupo monoparamétrico continuo de *-automorfismos α sobre A, los endomorfismos sobre $A^\times$ dados por

$$\alpha_t^\times = (\alpha_{-t})^\times \tag{5.50}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, conforman un grupo monoparamétrico continuo de automorfismos sobre $A^\times$, al que llamaremos el grupo antidual de α.

Nótese el cambio de signo en el parámetro t. Este cambio responde a la conveniencia de preservar el ordenamiento en el grupo. Además, esta es la única forma de definir al grupo antidual de α de modo que su acción sea compatible con la adjunción de la representación regular de A cuando α está dada por automorfismos interiores.

Proposición 5.2.4: Sea α un grupo monoparamétrico continuo de *-automorfismos sobre una *-álgebra localmente convexa A. Sea ω una funcional continua sobre A. Entonces, para todo $a \in A$ se satisface que

$$\alpha_t^\times(a\omega) = (\alpha_t a)\,\alpha_t^\times \omega \tag{5.51}$$

y

$$\alpha_t^\times(\omega a) = \left(\alpha_t^\times \omega\right)\alpha_t a \tag{5.52}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demostración: La expresión (5.51) resulta de notar que, para todo $b \in A$,

$$\left\langle (\alpha_t a)\,\alpha_t^\times \omega | b\right\rangle = \left\langle \alpha_t^\times \omega |\, (\alpha_t a)^\star\, b\right\rangle = \left\langle \alpha_t^\times \omega |\, (\alpha_t a^\star)\, b\right\rangle \tag{5.53}$$

Por otra parte,

$$\left\langle \alpha_t^\times \omega |\, (\alpha_t a^\star)\, b\right\rangle = \langle \omega | \alpha_{-t}\left[(\alpha_t a^\star)\, b\right]\rangle = \langle \omega | a^\star \alpha_{-t} b\rangle = \langle a\omega | \alpha_{-t} b\rangle \tag{5.54}$$

Finalmente, se tiene que

$$\langle a\omega | \alpha_{-t} b\rangle = \left\langle \alpha_{-t}^\times(a\omega) | b\right\rangle \tag{5.55}$$

para todo $b \in A$, de donde resulta que

$$\alpha_t^\times(a\omega) = (\alpha_t a)\,\alpha_t^\times \omega \tag{5.56}$$

que es lo que queríamos demostrar.

La identidad (5.52) se obtiene usando argumentos idénticos, de manera que omitimos los detalles. $\square$

Si ω es una funcional invariante frente a la acción de α, en particular, si ω es una funcional KMS y α es de crecimiento a lo sumo polinomial, se tiene que para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_t^\times(\omega) = \omega \tag{5.57}$$

y en este caso las expresiones anteriores quedan escritas de la siguiente manera:

$$\alpha_t^\times(a\omega) = (\alpha_t a)\,\omega \tag{5.58}$$

y

$$\alpha_t^\times(\omega a) = \omega \alpha_t a \tag{5.59}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Sea a un elemento de A entero con respecto a α y sea ω una funcional continua sobre A.

La siguiente identidad:

$$\left\langle a|\alpha_z^{\times}\omega\right\rangle = \langle \alpha_{-\overline{z}}a|\omega\rangle \tag{5.60}$$

define la prolongación analítica de la función $t \to \alpha_t^{\times}\omega$ a todo el plano complejo, de modo tal que toda funcional continua sobre A_α resulta un elemento entero para la acción del grupo antidual de α restringido a A_α.

Proposición 5.2.5: Sea α un grupo monoparamétrico continuo de *-automorfismos sobre una *-álgebra localmente convexa A. Sea ω una funcional continua sobre A. Entonces, para todo $a \in A_\alpha$ se tiene que

$$\alpha_z^{\times}(a\omega) = (\alpha_z a)\,\alpha_z^{\times}\omega \tag{5.61}$$

y

$$\alpha_z^{\times}(\omega a) = \left(\alpha_z^{\times}\omega\right)\alpha_z a \tag{5.62}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Demostración: La demostración de esta proposición resulta simplemente de prolongar analíticamente las expresiones de la proposición 5.2.4. $\square$

Como antes, si ω es una funcional α-invariante se verifica que para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$\alpha_z^{\times}(\omega) = \omega \tag{5.63}$$

y las ecuaciones anteriores quedan de la siguiente manera:

$$\alpha_z^{\times}(a\omega) = (\alpha_z a)\,\omega \tag{5.64}$$

y

$$\alpha_z^{\times}(\omega a) = \omega\alpha_z a \tag{5.65}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Nuestra intención es caracterizar a los subespacios hilbertianos de $A^{\times}$ *-estables respecto de la acción regular izquierda de A que están asociados a las funcionales (α, β)-KMS sobre A.

Para ello, los siguientes resultados resultarán útiles.

Proposición 5.2.6: Sea α un grupo monoparamétrico continuo de *-automorfismos sobre una *-álgebra localmente convexa A y sea ω una funcional continua sobre A. Luego, las siguientes proposiciones son equivalentes.

1. ω es una funcional (α, β)-KMS.

2. Para todo $a \in A_\alpha$ se tiene que
$$\omega \alpha_{-i\beta} a = a\omega \tag{5.66}$$

3. Se satisface que
$$\left(\alpha_{i\beta/2} a\right) \omega = \omega \alpha_{-i\beta/2} a \tag{5.67}$$
para todo $a \in A_\alpha$.

Demostración: La demostración de esta proposición es análoga a la que se encuentra en el contexto de las C*-álgebras.

En nuestro caso, es una consecuencia inmediata de la proposición 5.2.5. En efecto, en primer lugar tenemos que, si $a \in A_\alpha$ y $b \in A$,
$$\langle b|\omega \alpha_{-i\beta} a\rangle = \langle b \left(\alpha_{-i\beta} a\right)^\star |\omega\rangle = \langle b \alpha_{i\beta} a^\star|\omega\rangle \tag{5.68}$$
en donde hemos usado la ecuación (5.21).

Por otra parte, ω es una funcional (α, β)-KMS si, y sólo si
$$\langle b\alpha_{i\beta} a^\star|\omega\rangle = \langle a^\star b|\omega\rangle = \langle b|a\omega\rangle \tag{5.69}$$

Se tiene, luego, que
$$\omega \alpha_{-i\beta} a = a\omega \tag{5.70}$$
que es lo que queríamos demostrar. □

De la proposición anterior se deduce que, en particular, ω es una funcional tracial sobre A si, y sólo si
$$a\omega = \omega a \tag{5.71}$$
para todo $a \in A$.

Lema 5.2.7: Sea α un grupo monoparamétrico continuo exponencialmente acotado de *-automorfismos sobre una *-álgebra localmente convexa A.

Entonces, si para toda funcional continua ω sobre A se define la funcional continua $\omega^\star$ a través de la fórmula

$$\langle a|\omega^\star\rangle = \overline{\langle a^\star|\omega\rangle} \tag{5.72}$$

para todo $a \in A$, tiene que

$$\left(\alpha_z^\times \omega\right)^\star = \alpha_{\overline{z}}^\times \omega^\star \tag{5.73}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Demostración: Sea a un elemento de A_α.

En primer lugar, de las ecuaciones (5.60) y (5.72) se obtiene que

$$\left\langle a\right| \left(\alpha_z^\times \omega\right)^\star \left.\right\rangle = \overline{\langle a^\star|\alpha_z^\times \omega\rangle} = \overline{\langle \alpha_{-\overline{z}} a^\star|\omega\rangle} \tag{5.74}$$

Pero en virtud de la ecuación (5.21),

$$\overline{\langle \alpha_{-\overline{z}} a^\star|\omega\rangle} = \overline{\langle (\alpha_{-z} a)^\star\, |\omega\rangle} = \langle \alpha_{-z} a|\omega^\star\rangle = \left\langle a|\alpha_{\overline{z}}^\times \omega^\star\right\rangle \tag{5.75}$$

en donde nuevamente hemos usado las expresiones (5.60) y (5.72).

Se tiene, pues, que

$$\left\langle a\right| \left(\alpha_z^\times \omega\right)^\star \left.\right\rangle = \left\langle a|\alpha_{\overline{z}}^\times \omega^\star\right\rangle \tag{5.76}$$

para todo $a \in A_\alpha$.

Dado que A_α es denso en A, se tiene, finalmente, que

$$\left(\alpha_z^\times \omega\right)^\star = \alpha_{\overline{z}}^\times \omega^\star \tag{5.77}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, que es lo que queríamos demostrar. $\square$

Por último, recordemos que si ω es una funcional continua sobre A entonces

$$(a\omega)^\star = \omega^\star a^\star \tag{5.78}$$

para todo $a \in A$ y que, en consecuencia, si ω es una funcional hermítica, se satisface que

$$(a\omega)^\star = \omega a^\star \tag{5.79}$$

A continuación introduciremos algunos conceptos ya en el contexto de la teoría modular de Tomita-Takesaki y veremos su relación con el Teorema 4.2.1.

Consideremos sobre A el antiautomorfismo dado por

$$\Xi(a) = \alpha_{i\beta/2} a^\star \tag{5.80}$$

para todo $a \in A$.

Nótese que Ξ no sólo es un antiautomorfismo sino que es una involución sobre A, esto es, se tiene que

$$\Xi^2 = \mathrm{Id}_A \tag{5.81}$$

De la ecuación (5.80) se obtiene que el operador adjunto de Ξ está dado por

$$\Xi^\times(\omega) = \alpha^\times_{-i\beta/2} \omega^\star \tag{5.82}$$

para todo $\omega \in A^\times$.

De esta última expresión se desprende que $\Xi^\times$ es antilineal. Más aún, se trata también de una involución, esta vez sobre $A^\times$, involución que en el caso en que ω es central coincide con la definición (5.72), o sea, se satiface que

$$\Xi^\times \omega = \omega^\star \tag{5.83}$$

Consideremos ahora la representación π_ω asociada a ω. Como antes, notemos con H_ω y h_ω al subespacio hilbertiano de $A^\times$ en el que actúa π_ω y a su núcleo reproductivo, respectivamente. Sea D_ω el dominio de π_ω.

A la restricción del operador $\Xi^\times$ sobre H_ω lo notaremos J.

Este operador es, precisamente, el análogo de la conjugación modular de la teoría de Tomita y Takesaki.

Tenemos la siguiente caracterización de ω cuando se trata de una funcional (α, β)-KMS.

Proposición 5.2.8: Sea α un grupo monoparamétrico continuo exponencialmente acotado de *-automorfismos sobre una *-álgebra localmente convexa cuasicompleta tonelada A con unidad. Sean ω una funcional positiva continua sobre A y β un número real. Entonces, ω es una funcional (α, β)-KMS si, y sólo si J es un operador antiunitario sobre H_ω.

Demostración: En primer lugar observemos que si h_ω es el núcleo reproductivo de H_ω, entonces empleando sólo las definiciones correspondientes se obtiene que

$$\Xi^\times h_\omega \Xi a = \Xi^\times h_\omega \alpha_{i\beta/2} a^\star = \Xi^\times \left(\alpha_{i\beta/2} a^\star \right) \omega = \alpha^\times_{-i\beta/2} \left[\left(\alpha_{i\beta/2} a^\star \right) \omega \right]^\star \tag{5.84}$$

para todo $a \in A$.

Por otra parte, dado que ω es una funcional positiva resulta, luego, hermítica y, en virtud de las ecuaciones (5.79) y (5.21), tenemos que

$$\alpha^{\times}_{-i\beta/2}\left[\left(\alpha_{i\beta/2}a^{\star}\right)\omega\right]^{\star} = \alpha^{\times}_{-i\beta/2}\left[\omega\left(\alpha_{i\beta/2}a^{\star}\right)^{\star}\right] = \alpha^{\times}_{-i\beta/2}\omega\alpha_{-i\beta/2}a = \omega\alpha_{-i\beta}a \tag{5.85}$$

De acuerdo con la Proposición 5.2.6, ω es una funcional (α,β)-KMS sobre A si, y sólo si $\omega\alpha_{-i\beta}a = a\omega = h_\omega a$ para todo $a \in A$.

Con esto hemos comprobado que para que ω sea una funcional (α,β)-KMS es condición necesaria y suficiente que

$$\Xi^{\times} h_\omega \Xi = h_\omega \tag{5.86}$$

Pero $\Xi^{\times} h_\omega \Xi$ es el núcleo reproductivo de JH_ω, de manera que ω es una funcional (α,β)-KMS sobre A si, y sólo si $JH_\omega = H_\omega$, o sea, si J es un operador antiunitario sobre H_ω, y con esto queda demostrada la proposición. □

Definiremos una nueva representación de A sobre H_ω con dominio en D_ω a través de la siguiente ecuación:

$$\overline{\pi}_\omega(a)\phi = \phi\alpha_{-i\beta/2}(a^{\star}) \tag{5.87}$$

para todo $\phi \in D_\omega$ y todo $a \in A$.

En el caso en que ω es una funcional central se satisface, en particular, que

$$\overline{\pi}_\omega(a)\phi = \phi a^{\star} \tag{5.88}$$

para todo $\phi \in D_\omega$ y todo $a \in A$.

La relación que mantiene esta nueva representación con π_ω recuerda a la relación existente entre una representación asociada a un estado (α,β)-KMS y su representación conjugada. En efecto, se tiene que, para todo $a \in A$,

$$\overline{\pi}_\omega(a) = J\pi_\omega(a)J \tag{5.89}$$

En el caso en que ω es una funcional cuya representación asociada es autoadjunta[1], se satisface que el conmutante de $\pi_\omega(A)$, $\pi_\omega(A)'$, así como

[1] La caracterización de los subespacios hilbertianos de $A^{\times}$ correspondientes a las representaciones en $\mathrm{Cycl}(A)$ que son autoadjuntas es complicada. En este sentido podemos decir que, si A es un subespacio positivo de $A^{\times}$ y la acción regular izquierda de A es estable con respecto a la identificación de A como subespacio topológico de $A^{\times}$, todo subespacio hilberiano de tipo L^2 de $A^{\times}$ $\star$-estable frente a esta acción está necesariamente asociado a una representación autoadjunta.

el conmutante de $\overline{\pi}_\omega(A)$, $\overline{\pi}_\omega(A)'$, que de acuerdo con la ecuación anterior está dado por

$$\overline{\pi}_\omega(A)' = J\pi_\omega(A)'J \tag{5.90}$$

son ambas álgebras de von Neumann (ver [52] para más detalles).

Consideremos el álgebra de von Neumann que se obtiene al intersectar a $\pi_\omega(A)'$ y $\overline{\pi}_\omega(A)'$:

$$M_\omega = \pi_\omega(A)' \cap \overline{\pi}_\omega(A)' \tag{5.91}$$

y notemos con M_ω^+ al cono de los elementos positivos de M_ω, de manera que

$$M_\omega^+ = \{a \in M_\omega : a \geq 0\} \tag{5.92}$$

Como para el caso de las C*-álgebras con unidad, podemos demostrar el siguiente resultado.

Teorema 5.2.9: Sean A una *-álgebra localmente convexa tonelada cuasi-completa con unidad y α un grupo monoparamétrico continuo de *-automorfismos sobre A exponencialmente acotado. Sea ω una funcional (α, β)-KMS sobre A tal que su representación asociada es autoadjunta. Sea Γ el cono regular estrictamente convexo de funcionales (α, β)-KMS sobre A. Se tiene entonces que la cara generada por ω en Γ, esto es, el conjunto

$$\Gamma(\omega) = \{\omega' \in \Gamma : \text{ existe}\, \lambda \geq 0\, \text{tal que}\, \omega' \leq \lambda\omega\} \tag{5.93}$$

es isomorfo a M_ω^+.

Para todo $a \in M_\omega^+$, se satisface que

$$a = JaJ \tag{5.94}$$

Más aún, la cara generada por ω en en el cono de todas las funcionales (α, β)-KMS sobre A conforma un reticulado.

Demostración: Sean ω' y ω dos funcionales (α, β)-KMS tales que $0 \leq \omega' \leq \omega$.

Se tiene, entonces, el siguiente diagrama:

$$H_{\omega'} \hookrightarrow H_\omega \hookrightarrow A^\times \tag{5.95}$$

Notemos con k al núcleo reproductivo de $H_{\omega'}$ como subespacio hilbertiano de H_ω.

De la *-estabilidad de $H_{\omega'}$ y H_ω frente a la acción antidual regular izquierda de A y del hecho de que la representación asociada a ω es autoadjunta, se deduce que k pertenece a $\pi_\omega(A)'$.

Ahora bien, de la proposición 5.2.8 se tiene, por otra parte, que

$$JH_\omega = H_\omega \tag{5.96}$$

y

$$JH_{\omega'} = H_{\omega'} \tag{5.97}$$

de donde resulta que

$$JkJ^\star = JkJ = k \tag{5.98}$$

y con esto, en virtud de la ecuación (5.89), queda demostrado que k es un elemento de $\overline{\pi}_\omega(A)'$.

Entonces se satisface que $k \in M$, y siendo k un operador positivo, se obtiene que $k \in M_\omega^+$.

Supongamos, ahora, que k es un operador perteneciente a M_+, de donde resulta, en particular, que k pertenece a $\pi_\omega(A)'$.

Siendo éste un operador positivo, debe existir un subespacio hilbertiano K de H_ω invariante frente a la acción de π_ω que tiene a k por núcleo reproductivo.

Sea k' el núcleo reproductivo de K como subespacio hilbertiano de $A^\times$ y consideremos el elemento ω' que es imagen de la unidad de A a través de k', o sea,

$$\omega' = k'e \tag{5.99}$$

Dado que k pertenece al conmutante de $\overline{\pi}_\omega(A)$, resulta que $H_{\omega'}$ es un subespacio hilbertiano π_ω-estable de $A^\times$.

Se tiene, entonces,

$$\overline{\pi}_\omega(a)k'b = k'\overline{\pi}_\omega(a)b \tag{5.100}$$

para todo par de elementos $a, b \in A$, en donde, según puede verse, hemos usado que $\overline{\pi}_\omega$ es autoadjunta.

La expresión anterior puede rescribirse de la siguiente manera:

$$\overline{\pi}_\omega(a)(b\omega') = (\overline{\pi}_\omega(a)b)\,\omega' \tag{5.101}$$

o bien, como sigue:

$$b\omega'\alpha_{-i\beta/2}a^\star = b\left(\alpha_{i\beta/2}a^\star\right)\omega' \tag{5.102}$$

Dado que A_α es un subespacio denso de A, se tiene, finalmente, que

$$\omega' \alpha_{-i\beta/2} a^\star = \left(\alpha_{i\beta/2} a^\star\right) \omega' \tag{5.103}$$

para todo $a \in A$, o sea, ω' es una funcional (α, β)-KMS sobre A.

Con esto hemos demostrado que M_ω^+ es isomorfo a la cara generada por ω en en el cono de todas las funcionales (α, β)-KMS sobre A.

Queremos ahora demostrar que este espacio es un reticulado.

Para esto, observemos primero que el hecho de que

$$a = JaJ \tag{5.104}$$

para todo $a \in M_\omega^+$ implica que sigue valiendo la misma identidad para todo elemento hermítico a de M_ω, basta recordar que M es un álgebra de von Neumann.

Por otra parte, de la antilinealidad de J resulta que, si

$$a = a_1 + ia_2 \tag{5.105}$$

es un elemento cualquiera de M, con a_1 y a_2 hermíticos, entonces

$$JaJ = J(a_1 + ia_2)J = a_1 - ia_2 = a^\star \tag{5.106}$$

Luego, para todo par de elementos $a, b \in M$,

$$a^\star b^\star = JaJ^2bJ = JabJ = (ab)^\star = b^\star a^\star \tag{5.107}$$

en donde hemos usado que J es una involución sobre H_ω, o sea, que $J^2 = \mathrm{Id}_{H_\omega}$.

De aquí se deduce que M es un álgebra conmutativa, lo cual implica que M es un reticulado (ver [57]). $\square$

5.3. Descomposición extremal de estados KMS.

Por último, en esta sección demostraremos que, dados un grupo monoparamétrico exponencialmente acotado de *-automorfismos actuando sobre una *-álgebra nuclear tonelada cuasicompleta A con unidad y un número real β, toda funcional (α, β)-KMS sobre A cuya representación GNS es autoadjunta admite una única descomposición extremal.

El resultado es similar al que puede encontrarse en [5] para el caso de estados KMS sobre *-álgebras autoderivadas nucleares que son límites inductivos estrictos de espacios de Fréchet y que tienen una identidad aproximada equicontinua.

Sea $A_+^\times$ el cono cerrado estrictamente convexo de funcionales positivas sobre A y consideremos una sección Souslin[2] $\mathcal{S}$ de $A_+^\times$, o sea, un subconjunto Souslin de $A_+^\times$ que intersecta a cada uno de sus rayos en exactamente un punto no trivial.

El caso más habitual que se considera en el contexto de la física es aquel en que $\mathcal{S}$ coincide con los estados sobre A, esto es,

$$\mathcal{S} = \left\{\omega \in A_+^\times : \langle e|\omega\rangle = 1\right\} \tag{5.108}$$

pero podemos considerar una sección de $A_+^\times$ arbitraria.

Sea Γ cualquier subcono convexo cerrado de $A_+^\times$.

Si ω pertenece a Γ, con $\Gamma \cap (\omega - \Gamma)$ notaremos al intervalo de funcionales entre 0 y ω respecto del orden definido por Γ, y con $\Gamma(\omega)$ a la cara generada por ω en Γ, de modo que tenemos

$$\Gamma(\omega) = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}^+} \Gamma \cap (\lambda\omega - \Gamma) \tag{5.109}$$

Por último, notaremos con $\partial\Gamma$ a la colección de elementos extremales en Γ, o sea, a la familia de aquellos elementos $\omega \in \Gamma$ tales que $\Gamma(\omega) = \mathbb{R}^+\omega$.

Demostramos la siguiente proposición.

Proposición 5.3.1: Sea A una *-álgebra nuclear tonelada cuasicompleta con unidad. Sea Γ un subcono cerrado en $A_+^\times$. Entonces, Γ está generado por sus rayos extremales, o sea, Γ es la clausura de la cápsula convexa de $\partial\Gamma$

Demostración: Dado que los intervalos $\Gamma \cap (\omega - \Gamma)$ con $\omega \in \Gamma$, son subconjuntos acotados de $A^\times$ (ver [51] para más detalles), la demostración de la proposición se obtiene a partir de los teoremas 5.5 y 5.8 de [63]. $\square$

Por otra parte, tenemos el siguiente resultado, que en [28] demostramos para el caso de una pro-*-álgebra nuclear con unidad.

[2] Un conjunto $\mathcal{S}$ se dice que es *Souslin* si existen un espacio Polish $\mathcal{P}$, o sea, un espacio metrizable completo separable, y una transformación de $\mathcal{P}$ en $\mathcal{S}$ de rango denso (ver [51] o [64]).

Proposición 5.3.2: Sea A una *-álgebra nuclear tonelada cuasicompleta con unidad. Sea Γ un subcono convexo cerrado de $A_+^\times$. Sea $\mathcal{S}$ una sección Souslin de $A_+^\times$ y consideremos el conjunto

$$\partial\mathcal{S} = \mathcal{S} \cap \partial\Gamma \tag{5.110}$$

de elementos extremales de $\mathcal{S}$.

Entonces, para cada elemento ω en Γ existe una medida de Radon μ sobre $\partial\mathcal{S}$ tal que ω se descompone en elementos de $\partial\mathcal{S}$, o sea, se satisface que

$$\omega = \int_{\partial\mathcal{S}} \omega' \, d\mu(\omega') \tag{5.111}$$

Más aún, esta medida queda unívocamente determinada por ω si, y sólo si la cara generada por ω en Γ, $\Gamma(\omega)$, es un reticulado respecto del orden inducido por Γ sobre $\Gamma(\omega)$.

Demostración: Esta proposición se prueba empleando, nuevamente, el hecho de que todos los intervalos $\Gamma \cap (\omega - \Gamma)$ con $\omega \in \Gamma$ son acotados en $A^\times$. En efecto, la demostración de la proposición es consecuencia inmediata de los teoremas 1.18 y 1.19 de [63]. □

Finalmente, y a modo de corolario, tenemos la siguiente proposición para el caso específico de las funcionales KMS.

Este resultado generaliza resultados previos obtenidos por Hegerfeldt (ver [25]).

Proposición 5.3.3: Sea A una *-álgebra nuclear tonelada cuasicompleta con unidad y sea α un grupo monoparamétrico continuo exponencialmente acotado de *-automorfismos sobre A. Dado un número real β, notaremos con Γ_β al cono de funcionales (α, β)-KMS sobre A y con $\partial\mathcal{S}_\beta$ al conjunto de funcionales extremales (α, β)-KMS sobre A normalizadas por una sección Souslin $\mathcal{S}$ de $A_+^\times$ arbitraria, esto es

$$\partial\mathcal{S}_\beta = \mathcal{S} \cap \partial\Gamma_\beta \tag{5.112}$$

Entonces, si ω_β es una funcional (α, β)-KMS sobre A tal que su correspondiente representación GNS es autoadjunta, existe una única medida de Radon sobre $\partial\mathcal{S}_\beta$ tal que

$$\omega_\beta = \int_{\partial\mathcal{S}_\beta} \omega' \, d\mu(\omega') \tag{5.113}$$

Demostración: La situación que se presenta en esta proposición es un caso particular de la proposición anterior. Basta notar que, dado que la representación asociada a ω es autoadjunta, del teorema 5.2.9 se deduce que la cara generada por ω en Γ_β es un reticulado. $\square$

6. CONCLUSIONES

Cuando en 1943, Gel'fand, Naimark e, independientemente, Segal, demostraron el ya clásico teorema de la construcción GNS para C*-álgebras con unidad, introdujeron con ello una de las herramientas que hoy día resultan esenciales para estudiar las representaciones de tales álgebras, y de las álgebras de von Neumann en particular.

La construcción GNS no sólo reduce el análisis de las representaciones cíclicas de una C*-álgebra al de las funcionales positivas definidas sobre ella sino que además permite interpretar el rol que juegan las C*-álgebras en lo que a sus aplicaciones en la física se refiere.

Uno de los mejores ejemplos de esto lo constituye el estudio de los procesos en equilibrio termodinámico y los respectivos estados KMS, estados que fueron objeto de estudio de la presente tesis.

En lo que respecta a los estados KMS, la construcción GNS no solamente permite demostrar gran parte de sus propiedades sino que es, incluso, parte misma de su definición.

Todo intento de describir procesos dinámicos en el contexto de una formulación en términos de *-álgebras topológicas no necesariamente normadas supone, entonces, la necesidad de extender la construcción GNS para tales álgebras.

El primero de los resultados relevantes del trabajo (ver el teorema 3.3.3) fue, pues, llevar adelante esta extensión del teorema GNS para *-álgebras localmente convexas con unidad.

Se demostró que, dada una álgebra A con esas características, existe una biyección entre el conjunto $\mathrm{Cycl}(A)$ de las clases de equivalencia unitaria de sus *-representaciones cerradas débilmente continuas y fuertemente cíclicas de A sobre espacios hilbertianos y la colección $A_+^\times$ de funcionales positivas continuas sobre A.

Esta biyección permite, a posteriori, topologizar convenientemente al espacio $\mathrm{Cycl}(A)$ de manera tal que esta correspondencia sea un isomorfismo de espacios topológicos.

La necesidad de recurrir a una generalización del teorema GNS para *-álgebras topológicas más generales que las C*-álgebras responde no sólo a la necesidad de describir procesos termodinámicos en un marco algebraico amplio sino también a otras razones, como ya adelantamos en la Introducción.

Desde un punto de vista estrictamente matemático, las *-álgebras localmente convexas no necesariamente normadas aparecen con regularidad y en contextos muy variados, y en este sentido el estudio de sus representaciones es intrínsecamente interesante.

Respecto de las motivaciones físicas, basta mencionar que prácticamente todas las axiomáticas de teorías de campos que se han formulado hacen uso de espacios topológicos no hilbertianos, tal el caso de la axiomática de Wightmann, y en este sentido, el necesidad de considerar *-álgebras topológicas que no sean C*-álgebras es evidente.

Otro de los resultados importantes del trabajo (ver el teorema 4.2.1) fue describir la relación entre las representaciones cíclicas de una *-álgebra topológica A y los subespacios hilbertianos *-estables frente a la acción regular izquierda del álgebra sobre su antidual.

Pudimos demostrar que la biyección que se determina a través de la construcción GNS, cuando el álgebra A es tonelada y cuasicompleta, puede extenderse a una biyección múltiple entre $\mathrm{Cycl}(A)$, la familia de funcionales positivas continuas sobre A, el conjunto $\mathrm{Hilb}_A(A^\times)$ de subespacios hilbertianos de $A^\times$ *-estables frente a la acción de A y la colección de los respectivos núcleos reproductivos.

Entre los aspectos interesantes que se obtienen a partir de esta múltiple biyección, el más relevante es el hecho de que permite transportar la estructura de cono regular estrictamente convexo que posee $\mathrm{Hilb}_A(A^\times)$ como subcono convexo cerrado de $\mathrm{Hilb}(A^\times)$ a $\mathrm{Cycl}(A)$, o sea, esta biyección no sólo es un isomorfismo topológico sino que puede hacerse un isomorfismo cónico.

La estructura de cono regular estrictamente convexo de $\mathrm{Cycl}(A)$ es novedosa en el contexto de la teoría de representación de álgebras, y permite definir la suma infinita y la integración de representaciones, siendo la suma y la integración directa de representaciones un caso particular.

Por otra parte, y tal vez sea éste uno de los aspectos más interesantes de discutir, la correspondencia entre representaciones GNS de una álgebra y la colección de subespacios hilbertianos en el antidual permite estudiar a las representaciones del álgebra en espacios con métricas indefinidas, espacios a los que Schwartz denominó hermíticos (ver [53]).

Recordemos que uno de los grandes problemas de la teoría cuántica de campos formulada en términos de C*-álgebras es que aún no ha dado cuenta de las teorías cuánticas con vínculos ni de las teorías de gauge en particular.

Las representaciones que suelen usarse en estas teorías se realizan siempre sobre espacios vectoriales en los que si bien suele estar definida una forma sesquilineal, esta no es definida positiva y, en consecuencia, poco tiene que ver esta forma con las topologías de los respectivos espacios.

En efecto, aunque esta forma sesquilineal determina la topología del espacio de estados físicos, esto es, la topología de la cohomología de cierto automorfismo nilpotente definido sobre una extensión del álgebra de los campos, en nada afecta a la topología del espacio de representación original.

El uso de C*-álgebras no pareciera ser relevante en este contexto. Por otra parte, el estudio sistemático de Schwartz respecto de los subespacios hermíticos de un espacio vectorial localmente convexo (ver [53]) podría plantear soluciones interesantes en este sentido.

En el último capítulo del trabajo empleamos los resultados de las secciones previas en la caracterización de las funcionales KMS sobre álgebras topológicas toneladas y cuasicompletas. La existencia de una suerte de conjugación modular nos permitió demostrar (ver teorema 5.2.9) que las funcionales KMS están asociadas a subespacios hilbertianos inmersos en el antidual tales que si se restringe la acción de esta conjugación sobre ellos se obtiene un operador antiunitario.

Con este resultado pudimos, finalmente, probar que para toda funcional KMS sobre una *-álgebra tonelada cuasicompleta nuclear con unidad existe una descomposición integral en términos de funcionales KMS puras con igual parámetro KMS.

BIBLIOGRAFíA

[1] Araki, H.: *Introduction to operator algebras*, en *Statistical mechanics and field theory.* Editores: Sen, R.N. y Weil. C. Halsted Press, New York, 1972.

[2] Araki, H.: *Remarks on spectra of modular operators of von Neumann algebras.* Commun. Math. Phys. **28**, 267 (1972).

[3] Aronzsajn, N.: *Theory of reproducing kernels.* Trans. Amer. Math. Soc. **68**, 337 (1950).

[4] Baumgärtel, H. y Wollenberg, M.: *Causal nets of operator algebras.* Akademie-Verlag, Berlin, 1992.

[5] Belanger, A. y Thomas, E.G.F.: *Positive forms on nuclear *-algebras and their integral representations.* Pac. Jour. Math. **42**, 410 (1990).

[6] Bisognano, J.J. y Wichmann, E.H.: *On the duality condition for a Hermitean scalar field.* J. Math. Phys. **16**, 985 (1975).

[7] Bisognano, J.J. y Wichmann, E.H.: *On the duality condition for quantum fields.* J. Math. Phys. **17**, 303 (1976).

[8] Borchers, H.J.: *Algebraic aspects of Whightman field theory*, en *Statistical mechanics and field theory.* Editores: Sen, R.N. y Weil, C. Halsted Press, New York, 1972.

[9] Borchers, H.J. e Yngvason, J.: *On the algebra of field operators. The weak commutant and integral decomposition of states.* Commun. Math. Phys. **42**, 231 (1975).

[10] Borchers, H.J.: *On revolutionizing quantum field theory with Tomita's modular theory.* Jour. Math. Phys. **41**, 231 (2000).

[11] Bratelli, O. y Robinson, D.W.: *Operator algebras and quantum statistical mechanics. Vol I: C* and W*-algebras, symmetry groups, decomposition of states.* Springer-Verlag, New York, 1979 (Texts and monographs in physics).

[12] Bratelli, O. y Robinson, D.W.: *Operator algebras and quantum statistical mechanics. Vol II: Equilibrium states. Models in quantum statistical mechanics.* Springer-Verlag, New York, 1981 (Texts and monographs in physics).

[13] Buchholz, D., D'Antoni, C. y Fredenhagen, K.: *The universal structure of local algebras.* Commun. Math. Phys. **111**, 123 (1987).

[14] Buchholz, D. y Junglas, P.: *On the existence of equilibrium states in local quantum field theory.* Commun. Math. Phys. **121**, 255 (1989).

[15] El Harti, R. y Lukács, G.: *Bounded and unitary elements in pro-C-⋆ álgebras.* arXiv:math.CT/0511068 v1 (2005).

[16] Epifanio, G. y Trapani, C.: *Some topics in pre-Hilbert space.* J. Math. Phys. **23**(1), 39 (1982).

[17] Faraut, J. y Thomas, E.G.F.: *Invariant Hilbert spaces of holomorphic functions.* Jour. of Lie Theory bf 9, 383 (1999).

[18] Fulling, S.A. y Ruijsenaars, S.N.M.: *Temperature, periodicity and horizons.* Phys. Rep. bf 152 (3), 135 (1987).

[19] Gerlach, E.: *Some embedding properties of Hilbert subspaces in topological vector spaces.* Ann. Inst. Fourier **21** (3), 1 (1971).

[20] Grothendieck, A.: *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.* Mem. Amer. Math. Soc. bf 16 (1955).

[21] Haag, R.: *Local quantum physics.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1992.

[22] Haag, R., Kastler, D. y Trych-Pohlmeyer, E.B.: *Stability and equilibrium states.* Commun. Math. Phys. **38**, 173 (1974).

[23] Haag, R. y Trych-Pohlmeyer, E.B.: *Stability properties of equilibrium states.* Commun. Math. Phys. **56**, 213 (1977).

[24] Haag, R., Hugenholtz, N.M. y Winnink, M.: *On the equilibrium states in quantum statistical mechanics.* Commun. Math. Phys. **5**, 215 (1967).

[25] Hegerfeldt, G.C.: *Extremal decomposition of Whightman functions and of states on nuclear *-algebras by Choquet theory.* Commun. Math. Phys. **45**, 133 (1975).

[26] Hein, M. y Bousquet, O.: *Kernels, associated structures and generalizations.* M. Planck Tech. Rep. **127** (2004).

[27] Hislop, P.D. y Longo, R.: *Modular structure of the local algebras associated with the free massless scalar field theory.* Commun. Math. Phys. **84**, 71 (1982).

[28] Iguri, S.M. y Castagnino, M.A.: *The formulation of quantum mechanics in terms of nuclear algebras.* Int. Jour. Theor. Phys. **38**, 143 (1999).

[29] Arbó, D.G., Castagnino, M.A., Gaioli, F.H., Iguri, S.M.: *Minimal irreversible quantum mechanics. The decay of unstable states.* Physica A **277**, 469 (2000).

[30] Castagnino, M.A., Iguri, S.M., Gunzig, E., Ordoez, A.: *The Kolmogorov-Lax-Phillips systems as branch systems of the Reichembach model*, en *Instabilities and nonequilibrium structures*, *Nonlinear phenomena and complex systems, Vol. 8.* Kluwer Academic Publishers 169 (2004).

[31] Iguri, S.M. y Castagnino, M.A.: *Representations of *-algebras and Hilbert subspaces embedded in their duals.* Trabajo presentado en el XVI Coloquio Latinoamericano de álgebra, Colonia del Sacramento, Uruguay (2005). Escrito en revisión.

[32] Ikeda, I., Inoue, A. y Takakura, M.: *Unitary equivalence of unbounded *-representations of *-algebras.* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **122**, 269 (1997).

[33] Kastler, D.: *Foundations of equilibrium statistical mechanics*, en *Algebres d'operateurs et leurs applications en physique mathematique*, *Colloque Internationaux du CNRS, Nro. 274.* Editores: Connes, A., Kastler, D. y Robinson, D.W. Paris, 1979.

[34] Kastler, D.: *Cyclic cocycles from graded KMS functionals.* K-Theory **2**, 675 (1989).

[35] Kubo, R.: *Statistical-mechanical theory of irreversible processes I.* J. Math. Soc. Japan **12**, 570 (1957).

[36] Lanford, O.E. y Ruelle, D.: *Integral representations of invariant states on $B^\star$-algebras.* J. Math. Phys. **8**, 1460 (1967).

[37] Mallios, A.: *Topological algebras. Selected topics.* Elsevier science publishers B.V., Amsterdam, 1986. (North-Holland mathematics studies; Vol. 124)

[38] Martens, F.J.L: *Spaces of analytic functions on inductive/proyective limits of Hilbert spaces.* PhD. Thesis. Eindhoven Univ. (1988).

[39] Martin, P.C. y Schwinger, J.: *Theory of many particle systems: I.* Phys. Rev. **115**, 1342 (1959).

[40] Mary, X.: *Sous-espaces hilbertiens, sous-dualités et applications.* Tesis doctoral del INSA, Rouen, 2003.

[41] Maurin, K.: *General eigenfunction expansions and unitary representations of topological groups.* Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1968.

[42] Mokni, K. y Thomas, E.G.F.: *Paires de Gel'fand généralisées associées au groupe d'Heisenberg.* Jour. of Lie Theory bf 8, 325 (1998).

[43] Naimark, N.A.: *Normed rings.* Wolters-Noordhoff, Groningen, 1970.

[44] Palmer, T.W.: *Banach algebras and the general theory of *-algebras. Vol. I: Algebras and Banach algebras.* Cambridge University Press, Cambridge, 1994 (Encyclopedia of mathematics and its applications; Vol. 49)

[45] Palmer, T.W.: *Banach algebras and the general theory of *-algebras. Vol. I: *-algebras.* Cambridge University Press, Cambridge, 2001 (Encyclopedia of mathematics and its applications; Vol. 79)

[46] Pietsch, A.: *Nuclear locally convex spaces.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1972.

[47] Powers, R.T.: *Self-adjoint algebras of unbounded operators.* Comm. Math. Phys. **21**, 85 (1971).

[48] Powers, R.T.: *Self-adjoint algebras of unbounded operators II.* Trans. Amer. Math. Soc. **187**, 261 (1974).

[49] Pusz, W. y Woronowics, S.L.: *Passive states and KMS states for general quantum systems.* Commun. Math. Phys. **58**, 273 (1978).

[50] Ruelle, D.: *Symmetry breakdown in statistical mechanics.* Cargese Lectures in Physics, Vol. 4. Editor: Kastler, D., Gordon and Breach Eds., New York, 1970.

[51] Schaefer, H.H.: *Topological vector spaces.* Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1970 (Graduate texts in mathematics; Vol. 3)

[52] Schmüdgen, K.: *Unbounded operator algebras and representation theory.* Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag, 1990 (Operator Theory: Advances and Applications; Vol. 37)

[53] Schwartz, L.: *Sous-espaces hilbertiens d'espaces vercoriels topologiques et noyaux associés.* Jour. d'Anal. Math. **13**, 115 (1964).

[54] Schwartz, L.: *Espaces de fonctions différentiables á valeurs vectorielles.* Jour. d'Anal. Math. *4*, 88 (1954).

[55] Sewell, G.L.: *KMS conditions and local thermodynamic stability of quantum lattice systems II.* Commun. Math. Phys. **55**, 53 (1977).

[56] Sewell, G.L.: *Relativity of temperature and the Hawking effect.* Phys. Rev. Lett. **79A**, 23 (1980).

[57] Shermann, S.: *Order in operator algebras.* Amer. Jour. of Math. **73**, 227 (1951).

[58] Störmer, E.: *Spectra of states and asymptotically abelian C^*-algebras.* Commun. Math. Phys. **28**, 279 (1972).

[59] Summers, S.J.: *Tomita-Takesaki modular theory.*, en *Encyclopedia of mathematical physics.* Editores: Francoise, J.P., Naber, G. y Tsun, T.S. Elsevier science publishers B.V., Amsterdam, 2005.

[60] Takesaki, M.: *Tomitas theory of modular Hilbert algebras and its application.* Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin, 1970.

[61] Takesaki, M.: *Theory of operator algebras. Vol. I.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2002.

[62] Takesaki, M.: *Theory of operator algebras. Vol. II.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2003.

[63] Thomas, E.G.F.: *Integral representations in conuclear cones.* Jour. Conv. Anal. **1**, 325 (1994).

[64] Treves, F.: *Topological vector spaces, distributions and kernels.* Academic Press, New York-Londres, 1967.

[65] Turowska, L.: *On the complexity of the description of *-algebra representations by unbounded operators.* Proc. Am. Math. Soc. **130**, 3051 (2002).