



**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**  
**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**  
**Departamento de Física**

**Difusión y Disipación en Mapas y Algoritmos  
Cuánticos: Correspondencia Cuántico-Clásica  
Espectral y Modelos de Ruido.**

por Lic. Ignacio García-Mata

Director de Tesis: Dr. Marcos Saraceno

Director Asistente: Dr. Juan Pablo Paz

Lugar de Trabajo: Unidad de Actividad Física, Laboratorio TANDAR

Trabajo de Tesis para optar por el título de  
Doctor de la Universidad de Buenos Aires  
en el área Física

Marzo de 2006



## Resumen

El problema de la correspondencia cuántico-clásica es fundamental para entender la emergencia del mundo clásico a partir de sistemas regidos por la mecánica cuántica. La pérdida de correspondencia para tiempos cortos en sistemas clásicamente caóticos se ve reestablecida en presencia de un entorno que introduzca decoherencia. Al enfoque usual del estudio de la correspondencia, mediante la evolución temporal de valores medios de observables, útil generalmente en escalas de tiempos pequeños, oponemos un enfoque a tiempos grandes. Estudiamos el espectro del propagador de matrices densidad en presencia de ruido, en los límites de  $\hbar \rightarrow 0$  la fuerza de ruido despreciable.

Los sistemas de interés son los mapas cuánticos sobre el toro ya que son los sistemas más simples en los cuales aparecen todas las características fundamentales de los sistemas caóticos. Para modelar los sistemas abiertos utilizamos el formalismo de superoperadores y la representaciones de los mismos en suma de operadores o forma de Kraus. Estos superoperadores introducen decoherencia (y pueden producir efectos disipativos también). Mostramos que el espectro del propagador que resulta de componer un mapa unitario con un ruido de tipo difusivo está íntimamente relacionado con las cantidades clásicas que determinan los decaimientos de las funciones de correlación: las Resonancias de Ruelle Pollicott. Para esto introducimos dos métodos que nos permiten calcular una parte relevante del espectro del propagador. Además mostramos como cantidades como la entropía lineal y el eco de Loschmidt, de reciente interés en el estudio de temas fundamentales, tienen un comportamiento a tiempos largos que tiene un régimen universal determinado por la resonancia clásica de módulo mayor.

Finalmente estudiamos distintos modelos de ruido de relevancia en computación cuántica relacionando algoritmos con mapas y utilizando todas las herramientas de representaciones en el espacio de fases. Encontramos diferencias fundamentales entre superoperadores que preservan el operador identidad respecto de aquellos que no lo preservan. Estos últimos son característicos de procesos disipativos, los primeros solamente introducen decoherencia y difusión.

*Palabras clave:* correspondencia cuántico-clásica, sistemas cuánticos abiertos, decaimiento asintótico, semigrupos dinámicos cuánticos.

# Diffusion and Dissipation in Quantum Maps and Algorithms: Spectral Quantum-Classical Correspondence and Noise Models

## Abstract

The issue of quantum-classical correspondence is key to understanding the emergence of the classical world from systems governed by quantum laws. The fast loss of correspondence in classically chaotic quantum systems is reestablished in the presence of decoherence caused by an environment. To the usual approach to the study of correspondence in short time scales through the time evolution of mean values of observables we oppose a long time approach. We study the spectrum of the propagator of density matrices in the presence of noise, in the  $\hbar \rightarrow 0$  and negligible noise strength limits.

The systems studied are quantum maps on the torus because they provide simple examples where all the main features of chaotic systems appear. To model open systems we use the superoperator formalism and their operator sum or Kraus representations. These superoperators introduce decoherence (and also dissipation). We show that the spectrum of the propagator resulting of the composition of a unitary map and a diffusive noise channel is closely related to the classical quantities that determine the correlation function decay: the Ruelle-Pollicott resonances. To do so we introduce two ways of efficiently computing the relevant part of the spectrum. Moreover we show how time dependent quantities like the linear entropy and the Loschmidt echo, of interest in issues related to foundations of physics, exhibit a long time behavior with a universal regime determined by the largest classical resonance.

Finally, we study different models of noise which are relevant in quantum computation and quantum information. We relate quantum algorithms with quantum maps and use phase space techniques. We also find fundamental differences between identity preserving channels with respect to identity non-preserving ones. The latter correspond to dissipative processes while the former correspond to diffusion and decoherence.

*Keywords:* Quantum-classical correspondence, open quantum systems, asymptotic decay, quantum dynamical semigroups.

*Para Rafael "Fel" García-Mata*

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>8</b>
1.1. Planteo del problema . . . . .	8
1.2. Estructura de la tesis . . . . .	12
<b>2. Mecánica cuántica en el espacio de fases</b>	<b>15</b>
2.1. Espacio de de Hilbert . . . . .	15
2.2. Matriz Densidad . . . . .	16
2.3. Traslaciones sobre el toro . . . . .	17
2.4. Mapas cuánticos . . . . .	19
2.5. Representaciones en el espacio de fases . . . . .	20
2.5.1. La función de Wigner . . . . .	20
2.5.2. Representaciones en un espacio de fases compacto . . . . .	23
2.5.3. Husimi . . . . .	26
<b>3. Sistemas Abiertos</b>	<b>29</b>
3.1. Superoperadores . . . . .	32
3.2. Representación de Kraus . . . . .	33
<b>4. Difusión por ruido Gaussiano</b>	<b>36</b>
4.1. Mapas cuánticos abiertos . . . . .	36
4.2. Procesos unitarios aleatorios . . . . .	37
4.3. Canal Gaussiano. . . . .	39
4.3.1. Definición . . . . .	39
4.3.2. Difusión y Decoherencia . . . . .	41

4.3.3.	Propagador unitario suavizado . . . . .	43
4.3.4.	Espectro del propagador suavizado . . . . .	44
<b>5.</b>	<b>Caos y correspondencia</b>	<b>46</b>
5.1.	Caos . . . . .	46
5.2.	Correspondencia dinámica . . . . .	48
5.3.	Correspondencia espectral . . . . .	51
5.3.1.	Evolución clásica de densidades . . . . .	52
5.3.2.	Aproximación del espectro del Perron-Frobenius . . . . .	56
5.3.3.	Correspondencia a través del espectro del propagador cuántico suavizado	58
<b>6.</b>	<b>Resultados numéricos</b>	<b>60</b>
6.1.	Espectro del superoperador suavizado . . . . .	60
6.1.1.	Mapas pateados . . . . .	61
6.1.2.	Método iterativo . . . . .	63
6.1.3.	Truncación en la representación de cuerdas . . . . .	71
6.2.	Decaimiento de la función de autocorrelación . . . . .	75
6.3.	Comportamiento asintótico . . . . .	76
<b>7.</b>	<b>Modelos de ruido</b>	<b>84</b>
7.1.	Canales cuánticos de muchos <i>qubits</i> . . . . .	85
7.1.1.	Canal despolarizante . . . . .	86
7.1.2.	Amortiguamiento de Fase . . . . .	88
7.2.	Canales Disipativos . . . . .	91
7.2.1.	De Kraus a Lindblad y vuelta a Kraus . . . . .	92
7.2.2.	Contracción del espacio de fases . . . . .	95
7.2.3.	Ejemplo simple de canal disipativo . . . . .	97
<b>8.</b>	<b>Resumen y Perspectivas</b>	<b>106</b>
<b>A.</b>	<b>Vectores, operadores y superoperadores</b>	<b>110</b>
<b>B.</b>	<b>Cálculo del espectro más significativo de una matriz biestocástica</b>	<b>113</b>

<b>C. Publicaciones Generadas</b>	<b>117</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>124</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>125</b>

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Planteo del problema

Uno de los problemas de la mecánica cuántica es lograr entender cómo surge a partir de ella la mecánica clásica. La interpretación “ortodoxa” de Bohr suponía que había una separación entre los mundos cuánticos y clásicos, y cada uno seguía sus propias leyes. La información que uno podría obtener del sistema cuántico surgiría de la interacción con un aparato de medición clásico y el consiguiente *colapso de la función de onda*. Sin embargo esta visión no es absolutamente necesaria. En parte gracias a Bohr. El **principio de correspondencia** indica que los resultados de la mecánica cuántica deben converger a los de la mecánica clásica en el límite de números cuánticos grandes o, en otras palabras cuando  $\hbar$ , comparado con cualquier acción característica del sistema, es despreciable. El teorema de Ehrenfest demuestra la validez del principio de correspondencia (hasta tiempos suficientemente largos) para sistemas clásicamente integrables. Sin embargo para sistemas cuyo equivalente clásico no es integrable, que presentan una estructura del espacio de fases con puntos fijos hiperbólicos y la dinámica es caótica, el teorema de Ehrenfest pierde validez mucho más rápidamente. Así se puede pensar en ejemplos de sistemas macroscópicos que deberían exhibir efectos cuánticos en tiempos relativamente pequeños [1, 2]. Además el teorema de Ehrenfest tampoco permite explicar la naturaleza intrínsecamente probabilística de la mecánica cuántica. Solamente da una correspondencia para la evolución de los valores medios de ciertos observables.

La manera de sortear estos obstáculos es suponiendo (con razón) que el sistema cuántico bajo estudio no es un sistema aislado. Es decir, suponemos que el sistema que queremos estudiar es solamente un subsistema de uno mayor que como un todo evoluciona unitariamente. Ahora, la evolución unitaria causará que después de un determinado tiempo, el sistema tenga correlaciones cuánticas fundamentales con el resto del total al que llamamos *entorno* (o también ambiente). Se dice entonces que sistema y entorno están *entrelazados*. En general, la información sobre el entorno no es accesible, por lo que uno solamente puede seguir la evolución del sistema en cuestión. Como consecuencia, la evolución del sistema es no-unitaria y uno de los efectos que aparecen debido a la no-unitariedad es la **decoherencia**<sup>1</sup>. Como su nombre sugiere, la decoherencia es la pérdida de coherencia de fase del sistema debido a interacción con el ambiente. Así, un estado puro se transforma en una mezcla estadística. El tipo de ambiente determina en qué base la matriz densidad resultante es diagonal. Se produce una superselección inducida por el entorno. De este modo, se puede explicar por qué hay estados preferidos, llamados *punteros* que permanecen intactos mientras que las superposiciones de estos pierden coherencia de fase. El nombre de punteros se debe a que en el proceso de medición, estos estados son los que se correlacionan (entrelazan) con los estados que uno “ve” en el aparato. El hecho de estar entrelazados permite identificar el estado del aparato con el estado del sistema. La decoherencia actúa como una medición o monitoreo continuo del sistema.

La descripción detallada de la dinámica inducida por la interacción con un entorno es por lo general difícil de tratar. Para describir la dinámica de sistemas abiertos es usual suponer que el entorno es “grande” y el acoplamiento con el sistema pequeño. Resulta pues razonable suponer que se cumple la aproximación de Born-Markov según la cual se dice que el entorno “no tiene memoria”, es decir que las correlaciones del ambiente decaen mucho más rápido que cualquier tiempo característico del sistema. Bajo esta aproximación la evolución del sistema puede ser descrita por una ecuación diferencial de primer orden llamada *ecuación maestra* o ecuación de Lindblad [3]. Esta ecuación genera un mapeo de matrices densidad en matrices densidad con el tiempo como parámetro. La condición de Born-Markov requiere que la dependencia con el parámetro tiempo cumpla con la estructura de semigrupo [3, 4]. Estos semigrupos se llaman operaciones cuánti-

---

<sup>1</sup>También puede haber disipación. Como veremos, decoherencia no implica disipación pero disipación sí implica decoherencia.

cas, superoperadores, o simplemente canales, equivalentemente dependiendo del contexto. Durante este trabajo no nos interesará el mecanismo por el cual la decoherencia (y la disipación) ocurre, sino más bien estudiar cuál es el efecto de determinado entorno actuando luego de un determinado intervalo de tiempo fijo. El superoperador generado por la ecuación maestra ya no depende del tiempo y puede pensarse como un mapa.

Este formalismo resulta útil para el estudio de mapas cuánticos caóticos en presencia de ruido: los llamamos **mapas cuánticos abiertos**. Tanto los mapas clásicos como los cuánticos proporcionan modelos sencillos que presentan las principales características generales de sistemas tanto integrables como no integrables. Un ejemplo específico son los que surgen de discretizar la dinámica mediante secciones de Poincaré y las secciones estroboscópicas. El atractivo de estos mapas recae en que son sistemas de pocos grados de libertad que pueden exhibir las características principales de sistemas caóticos. Su implementación numérica es en general simple y en muchos casos (como en los mapas pateados) puede implementarse de forma computacionalmente eficiente utilizando rutinas de transformada de Fourier rápida. Además algunos mapas pueden ser descritos en términos de dinámica simbólica.

Mediante la introducción de decoherencia hay propiedades clásicas que emergen naturalmente. El estudio de la evolución temporal a **tiempos cortos** de cantidades como la entropía lineal [1, 5, 6] y el eco de Loschmidt [7, 8, 9, 10] para sistemas caóticos cuánticos en presencia de decoherencia, permite observar un régimen de decaimiento exponencial (independiente de los parámetros) regido por una cantidad esencialmente clásica: el exponente de Lyapunov más grande. Este comportamiento universal proporciona también una forma de identificar sistemas cuánticos caóticos por lo que se conoce como *sensibilidad exponencial a pequeñas variaciones en la dinámica* [11].

En esta tesis nos concentramos en un análisis (complementario) del espectro del superoperador para entender el comportamiento a tiempos largos. En un trabajo reciente, Nonnemacher [12] demostró un teorema que dice que el espectro del propagador cuántico de matrices densidad, suavizado mediante un ruido difusivo debe converger al espectro del propagador clásico, llamado operador de Perron-Frobenius, de densidades en el espacio de fases, suavizado según un ruido equivalente, en el límite de  $\hbar \rightarrow 0$ .

A lo largo de esta tesis, el espacio de fases que consideramos es el toro bidimensional cuantizado. Los estados son vectores en un espacio de Hilbert de dimensión  $N$ , donde

$N$  define la constante de Planck efectiva como  $N = 1/(2\pi\hbar)$ . Para sistemas caóticos, el espectro puntual del propagador suavizado está compuesto por las denominadas resonancias de Ruelle-Pollicott que determinan los decaimientos de las funciones de correlación. El cálculo de las resonancias clásicas es en general complicado. Los esquemas utilizados recientemente consisten en discretizar y truncar en el espacio de Fourier un operador que en principio tiene dimensión infinita. El cálculo cuántico directo también presenta problemas cuando  $N \rightarrow \infty$ , ya que es necesario diagonalizar una matriz de  $N^2 \times N^2$ . Es por esto que presentamos algunos esquemas de aproximación numérica del espectro principal, es decir los autovalores de mayor módulo, que determina el comportamiento asintótico tanto de las funciones de correlación como también el eco de Loschmidt y la entropía lineal.

De forma análoga a [1, 5] el hecho de que estos autovalores sean esencialmente los mismos para un amplio rango de parámetros (tanto  $N$  como la intensidad del ruido) implica que se corresponden con las resonancias de Ruelle-Pollicott clásicas. Así se demostraría otro tipo de correspondencia que llamaremos **correspondencia espectral**, relacionada con comportamientos a tiempos largos, que es complementaria a la usualmente estudiada, relacionada con tiempos cortos y que llamamos **correspondencia dinámica**.

El estudio de mapas abiertos ha cobrado un renovado interés con el auge de la información cuántica [13, 14, 15, 16, 17]. Un algoritmo cuántico es un mapa unitario. La implementación de un algoritmo involucra necesariamente ruido e interacciones con el ambiente que pueden ser modeladas con el formalismo de superoperadores. Por lo tanto podemos en muchos casos utilizar herramientas y conocimientos sobre mapas en espacios de fase compactos para entender algunas propiedades de los algoritmos de computación cuántica. Los algoritmos cuánticos consisten en un conjunto de operaciones que se realizan sobre una o varias unidades lógicas cuánticas o *qubits*. Físicamente un *qubit* es un sistema cuántico con dos niveles bien definidos. Hasta el momento, los esquemas de computadoras cuánticas existentes (trampas de iones, cavidades ópticas, resonancia magnética, etc) pueden manejar sin pérdida significativa de coherencia solamente unos pocos *qubits*. La razón es que a medida que aumenta el número de *qubits* mantener el sistema aislado se hace cada vez más difícil. Es por eso que resulta de interés entender mecanismos de ruido que pueden afectar estos sistemas, Nos servimos de métodos de espacio de fases y mapas cuánticos para tratar generalizaciones a muchos *qubits* de ruidos conocidos y además estudiamos diferencias fundamentales entre canales que preservan la identidad (unitales) y

los que no la preservan (no-unitales).

## 1.2. Estructura de la tesis

Organizamos esta tesis de la siguiente manera. Los Caps. 2 y 3 contienen los **elementos teóricos básicos** que utilizamos durante el trabajo. Así en el Cap. 2 introducimos la cinemática y dinámica en el espacio de fases elegido: el 2-toro. Además damos una breve introducción a representaciones en el espacio de fases, dando importancia a la función de Wigner por su utilidad como densidad de (cuasi-)probabilidad así como por sus propiedades para visualizar estados de forma gráfica. Introducimos también la función de cuerdas, que guarda estrecha relación con la función de Wigner y la utilizamos para estudiar algunos ruidos. Además damos la definición estándar de mapa cuántico.

En el Cap. 3 damos un muy breve repaso por el formalismo de superoperadores para describir la evolución de sistemas abiertos que cumplen la hipótesis Markoviana. También se describe la llamada forma de Kraus o representación en suma de operadores, que utilizamos para modelar los diferentes canales de ruido.

En el Cap. 4 describimos en detalle lo que llamamos **mapa cuántico abierto** como un esquema de dos etapas: primero un mapa unitario seguido del ruido. En este capítulo también introducimos el canal de ruido Gaussiano cuya forma de Kraus permite una interpretación simple en el espacio de fases. El efecto de este ruido es de difusión y puede pensarse como *coarse-graining* del propagador unitario. La definición del superoperador que implementa el ruido Gaussiano y la descripción de sus propiedades se encuentra en

- Ignacio García-Mata y Marcos Saraceno, *Spectral Properties and Classical Decays in Quantum Open Systems*, Phys. Rev. E. **69**, 056211 (2004).

Definimos en detalle lo que entendemos por correspondencia dinámica y espectral en el Cap. 5, donde además damos detalles del espectro clásico y cuántico y enunciamos en forma simplificada el Teorema de Nonnemacher [12].

En el Cap. 6 mostramos los resultados obtenidos. Este capítulo puede dividirse en dos partes. Por un lado, para sortear el problema de calcular el espectro para  $N \rightarrow \infty$  proponemos dos métodos diferentes que permiten obtener la parte más significativa del espectro. Por el otro realizamos un estudio de los decaimientos asintóticos de la entropía

lineal y del eco de Locshmidt. Los resultados del análisis espectral del superoperador suavizado, relacionando los autovalores con las resonancias de Ruelle Pollicott y con los decaimientos asintóticos fueron publicados en

- Ignacio García-Mata, Marcos Saraceno y María Elena Spina, *Classical decays in decoherent quantum maps*, Phys. Rev. Lett. **91**, 064101 (2003).
- Ignacio García-Mata y Marcos Saraceno, *Spectral Properties and Classical Decays in Quantum Open Systems*, Phys. Rev. E. **69**, 056211 (2004).

Además escribimos un breve *review* sobre estos temas que aparece en

- Ignacio García-Mata y Marcos Saraceno, *Spectral Approach to Chaos and Quantum-Classical Correspondence in Quantum Maps*, Mod. Phys. Lett. **B 19**, 341 (2005, World Scientific).

En el Cap. 7 realizamos un estudio sistemático de modelos de ruidos relevantes tanto en la teoría de información cuántica como en la de mapas cuánticos abiertos. Establecemos también diferencias entre ruidos unitales y no unitales. Los trabajos generados relacionados con estos temas son:

- (a) M. Leandro Aolita, Ignacio García-Mata y Marcos Saraceno, *Noise Models for Superoperators in the Chord Representation*, Phys. Rev. A **70**, 062301 (2004),

donde se tratan las generalizaciones de canales de ruido unitales que además son procesos unitarios aleatorios y los operadores de Kraus son proporcionales a las traslaciones en el espacio de fases, y

- (b) Ignacio Garcia-Mata, Marcos Saraceno, Maria Elena Spina y Gabriel Carlo, *Phase-space contraction and quantum operations*, Phys. Rev. A **72**, 069512 (2005).

donde interpretamos los canales de ruido no-unitales como procesos relacionados con contracción del espacio de fases. De esta manera asociamos dichos canales con procesos *disipativos*.

Finalizamos el trabajo con un resumen y algunas perspectivas en el Cap. 8. Como complemento agregamos dos apéndices. En el Ap. A damos algunas definiciones y notaciones de álgebra de operadores y superoperadores utilizados a lo largo de la tesis.

Dedicamos el Ap. **B** para demostrar detalladamente por qué el método iterativo utilizado en la Sec. **6.1.2** proporciona con buena aproximación los primeros autovalores del propagador suavizado.

# Capítulo 2

## Mecánica cuántica en el espacio de fases

### 2.1. Espacio de Hilbert

Durante este trabajo usaremos espacios de Hilbert que cuantizan un espacio de fases con condiciones de borde bien definidas, es decir espacio de fases *compacto*. El espacio de fases compacto más simple es el el 2-Toro  $\mathbb{T}^2$ . Podemos pensar a  $\mathbb{T}^2$  en el plano como un cuadrado de lado unidad repetido periódicamente. Dada una función de onda  $|\psi\rangle$  sobre el toro al cuantizar se imponen las siguientes condiciones de quasi-periodicidad

$$\langle q+1|\psi\rangle = e^{i2\pi\chi_p}\langle q|\psi\rangle \quad \langle p+1|\psi\rangle = e^{i2\pi\chi_q}\langle p|\psi\rangle \quad (2.1)$$

donde  $|q\rangle, |p\rangle$  son estados de posición y momento relacionados por

$$\langle p|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{-iqp/\hbar} \langle q|\psi\rangle dq \quad (2.2)$$

y  $\chi_q, \chi_p$  son los llamados ángulos de Floquet. La Ec. (2.1) determina una constante de Planck efectiva

$$\hbar = \frac{1}{2\pi N} \quad (2.3)$$

con  $N$  entero y los estados de posición y momento admitidos son

$$|q_n\rangle, |p_k\rangle \quad \text{donde} \quad \begin{cases} q_n = (n + \chi_q)/N \\ p_k = (k + \chi_p)/N \end{cases}, \quad (2.4)$$

con  $k, n$  enteros.

Queda entonces definida una transformada discreta

$$\langle p_k | q_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-(2\pi i/N)(k+\chi_p)(n+\chi_q)} \quad (2.5)$$

que en el caso  $\chi_q = \chi_p = 0$ , es la transformada de Fourier discreta (TFD) de dimensión  $N$ . El límite clásico corresponde a tomar  $N \rightarrow \infty$ .

De esta manera el espacio de fases es compacto y si un estado ocupa un área igual a  $2\pi\hbar$  entonces caben exactamente  $N$  estados. Así el estado  $|\psi\rangle$  es un vector en un espacio de Hilbert de dimension  $N$  que llamaremos  $\mathcal{H}_N$ . Los estados de posición y momento son franjas verticales y horizontales de ancho  $1/N$  respectivamente. Los puntos  $(q_n, p_k)$  definen una grilla  $G_N$  de  $N \times N$  puntos (Fig. 2.1).

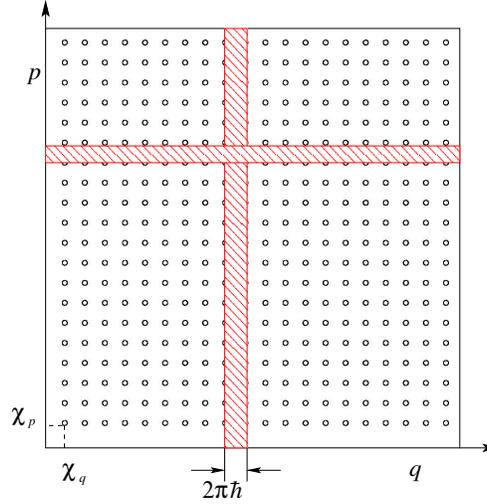


Figura 2.1: Representación esquemática de los estados cuánticos sobre  $\mathbb{T}^2$ . También está representada la grilla  $G_N$  y los ángulos de Floquet.

## 2.2. Matriz Densidad

Un vector  $|\phi\rangle$  en  $\mathcal{H}_N$  representa un estado puro. Cuando la evolución del sistema no es unitaria, los estados dejan de ser “rayos” en un el espacio  $\mathcal{H}_N$ . Es apropiado usar el operador (o matriz) densidad. Introducido por von Neumann para describir propiedades estadísticas en mecánica cuántica, como su nombre lo indica, el operador densidad es un operador lineal actuando sobre  $\mathcal{H}_N$ . Nos centraremos en espacio de dimension finita, por lo que podemos asociar al operador densidad una matriz de  $N \times N$  y llamaremos  $\mathcal{H}_{N^2}$  al espacio de operadores sobre  $\mathcal{H}_N$ .

Repasamos algunas de las propiedades y notaciones de la matriz densidad.

- la matriz densidad de un estado puro  $|\phi\rangle$  se define como

$$\rho \stackrel{\text{def}}{=} |\phi\rangle\langle\phi| \quad (2.6)$$

- $\rho$  es Hermítica y semidefinida positiva.
- La matriz densidad de un estado general se puede escribir como

$$\rho = \sum_i p_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| \quad (2.7)$$

donde  $p_i \geq 0$  y  $\sum_i p_i = 1$ . Esta ecuación nos da la idea de un *ensemble* estadístico de estados  $|\phi_i\rangle$  con distribución dada por  $p_i$ .

- Por definición, tenemos

$$\text{Tr}[\rho] = 1. \quad (2.8)$$

- También es fácil ver que

$$\text{Tr}[\rho^2] \leq 1. \quad (2.9)$$

La igualdad vale si y solo si  $\rho$  representa un estado puro, es decir si existe algún cambio de base tal que la matriz densidad pueda escribirse como la Ec. (2.6). La cantidad  $\text{Tr}[\rho^2]$  da una medida de **pureza**.

## 2.3. Traslaciones sobre el toro

En el plano real  $\mathbb{R}^2$  el grupo de Weyl asocia a cada vector  $\mathbf{v} = (q_1, p_1)$  un operador de traslación

$$\hat{T}_{\mathbf{v}} = e^{-(i/\hbar)(q_1\hat{P} - p_1\hat{Q})}. \quad (2.10)$$

unitario en  $L^2(\mathbb{R}^2)$ <sup>1</sup> y que cumple con la propiedad de grupo

$$\hat{T}_{\mathbf{v}}\hat{T}_{\mathbf{v}'} = e^{-(i/2\hbar)\mathbf{v}\wedge\mathbf{v}'}\hat{T}_{\mathbf{v}+\mathbf{v}'}. \quad (2.11)$$

---

<sup>1</sup>El espacio de funciones de cuadrado integrable.

En óptica cuántica son también conocidos como operadores de desplazamiento y se definen en función de operadores de creación y destrucción.

La definición de operadores de traslación sobre el toro presenta algunas dificultades. La principal es que los operadores  $\hat{Q}$  y  $\hat{P}$  con las reglas canónicas de conmutación no están bien definidos en este espacio de Hilbert discreto. Sin embargo el procedimiento usual es, siguiendo el trabajo de Schwinger [18], usar operadores de ‘corrimiento’<sup>2</sup> cíclicos  $U$  y  $V$  tales que si  $|q\rangle$  y  $|p\rangle$  son estados de posición y momento entonces

$$\begin{aligned} U^{q_1}|q\rangle &= |q+q_1\rangle; & U^{q_1}|p\rangle &= e^{-(2\pi i/N)q_1 p}|p\rangle \\ V^{p_1}|p\rangle &= |p+p_1\rangle; & V^{p_1}|q\rangle &= e^{(2\pi i/N)p_1 q}|q\rangle \end{aligned} \quad (2.12)$$

De la última ecuación se deduce que estos operadores satisfacen la siguiente propiedad de conmutación

$$V^p U^q = U^q V^p e^{(2\pi i/N)qp}. \quad (2.13)$$

Imponiendo simetría en (2.13) se obtienen los operadores de traslación cuánticos sobre el toro

$$\begin{aligned} \hat{T}_{(q,p)} &= U^q V^p e^{(i\pi/N)qp} \\ &= V^p U^q e^{-(i\pi/N)qp} \end{aligned} \quad (2.14)$$

como una composición de corrimientos en posición y momento (donde  $q, p = 0, \dots, N-1$ ). Aclaramos que no distinguiremos la notación para traslaciones sobre  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{T}^2$  porque utilizaremos solamente las últimas. Existen  $N^2$  de estos operadores  $\hat{T}_{(q,p)}$  y cumplen la siguiente propiedad

$$\text{Tr}(\hat{T}_\alpha^\dagger \hat{T}_\beta) = N\delta_{\alpha\beta}, \quad (2.15)$$

para todo  $\alpha, \beta$ . En este punto hemos introducido letras griegas para representar puntos en el espacio de fases, notación que usaremos cuando sea conveniente y quedará clara por contexto. Además, de la definición se puede ver que cumplen la siguiente propiedad de

---

<sup>2</sup>La palabra en inglés es *shift*.

grupo,

$$\hat{T}_\alpha \hat{T}_\beta = e^{(i\pi/N)\alpha \wedge \beta} \hat{T}_{\alpha+\beta} \quad (2.16)$$

donde  $\alpha \wedge \beta$  es el producto simpléctico

$$\alpha \wedge \beta = q_1 p_2 - p_1 q_2, \quad (2.17)$$

donde  $\alpha = (q_1, p_1)$  y  $\beta = (q_2, p_2)$ .

Así definidos, los operadores de traslación constituyen un conjunto ortogonal completo en  $\mathcal{H}_{N^2}$ , por lo que cualquier operador puede representarse en la base de las traslaciones.

## 2.4. Mapas cuánticos

Clásicamente un sistema dinámico está definido por un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t), \quad (2.18)$$

con  $\mathbf{x}$  un punto en el espacio de fases. El procedimiento estándar es reducir la dimensión de la solución usando un mapa discreto que se obtiene por ejemplo observando el flujo a intervalos de tiempos fijos (mapa estroboscópico) o de la intersección transversal del flujo con una hipersuperficie  $\mathcal{P}$  de dimensión  $r - 1$ , con  $r$  la dimensión del espacio de fases (sección de Poincaré). Lo que resulta es una recurrencia

$$\mathbf{y}_{n+1} = M(\mathbf{y}_n), \quad \mathbf{y} \in \mathcal{P} \quad (2.19)$$

donde el tiempo es un índice discreto que llamamos  $n$ .

Los mapas que preservan áreas tienen asociados una transformación canónica finita. La representación unitaria [19] de esta transformación canónica es lo que se llama la versión cuántica de un mapa clásico, o simplemente *mapa cuántico*. En el límite semiclásico  $\hbar \rightarrow 0$  (o  $N \rightarrow \infty$ , en el caso discreto) debe reproducir la dinámica clásica. En  $\mathbb{R}^2$  el procedimiento es estándar.<sup>3</sup> Una aproximación del propagador unitario, en la representación de posición, está dada por la fórmula de Van Vleck (adaptada al toro), en la representación

---

<sup>3</sup>Ver por ejemplo [20].

mixta

$$\langle p_m | U | q_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum \left| \frac{\partial^2 F_2}{\partial p' \partial q} \right|^{1/2} e^{-\frac{2\pi i}{N} F_2(p', q) + i\mu} \Bigg|_{\substack{p'=(m+\chi_p)/N \\ q=(n+\chi_q)/N}}, \quad (2.20)$$

donde  $-F_2(p', q) = S(p', q)$  es la acción a lo largo del camino clásico que conecta  $q_1$  con  $q_2$ . Las fases extra  $\mu$  son los llamados índices de Maslov y dan cuenta de fases adicionales debido a las *cáusticas*.

Esta aproximación es exacta solamente en el caso de mapas simplécticos lineales en  $\mathbb{R}^2$  en cuyo caso  $F_2$  es la función generatriz cuadrática de la transformación lineal. De todas formas, siguiendo diferentes procedimientos (*ad hoc*), algunos de los mapas más representativos han sido cuantizados: mapas integrables como traslaciones [18] y cizalladuras, pero también caóticos y mixtos como mapas del gato [21, 22], del panadero [23, 24] y el mapa estándar [25]. Además se pueden cuantizar cizalladuras no-lineales no-conmutativas, o “mapas pateados” así como Hamiltonianos periódicos [26].

## 2.5. Representaciones en el espacio de fases

### 2.5.1. La función de Wigner

La mecánica clásica “ocurre” en el espacio de fases. Las leyes de movimiento de la mecánica Hamiltoniana están determinadas por transformaciones canónicas del espacio de fases [27]. El estado del sistema en un instante dado queda completamente determinado por un punto o por una distribución en el espacio de fases. En mecánica cuántica el principio de indeterminación hace imposible definir pares de puntos (**coordenada, momento**) y definir un espacio de fases cuántico puede ser problemático. Sin embargo la función de Weyl-Wigner cumple con este objetivo (casi) a la perfección. Si las coordenadas y momentos son variables continuas, dada una matriz densidad  $\rho$ , se define la función de Wigner como [28]

$$\mathcal{W}(q, p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi\hbar} e^{ixp/\hbar} \langle q - x/2 | \rho | q + x/2 \rangle. \quad (2.21)$$

Esta función permite mapear el estado del sistema sobre el espacio de fases. Sin embargo no es una función definida positiva, por lo que no puede ser interpretada como una

densidad de probabilidades. No obstante, tiene las siguientes propiedades que la definen

- (i)  $\mathcal{W}(q, p)$  es una función real.
- (ii) El producto interno de Hibert-Schmidt entre dos matrices densidad es

$$\text{Tr}(\rho_1 \rho_2) = 2\pi\hbar \int \mathcal{W}_1(\alpha) \mathcal{W}_2(\alpha) d\alpha, \quad (2.22)$$

donde, como antes,  $\alpha \equiv (q, p)$ .

- (iii) La integral a lo largo de cualquier línea es positiva y da las probabilidades marginales correctas.

Como muestran Bertrand y Bertrand [29] estas propiedades determinan unívocamente la función de Wigner. En otras palabras, la función de Wigner tiene toda la información disponible sobre un estado cuántico.

La función de Wigner es especialmente útil para mostrar las características cuánticas de un sistema en el espacio de fases. El ejemplo “canónico” es el de un estado superposición de dos estados de mínima incertidumbre (estados coherentes del oscilador armónico unidimensional, por ejemplo), en el que cada uno por separado tiene una función de Wigner del tipo

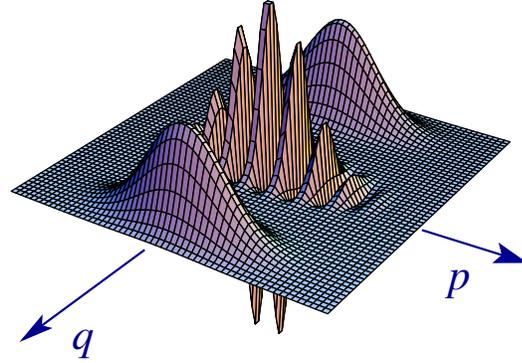


Figura 2.2: **Función de Wigner para un estado superposición de dos paquetes Gausianos.**

$$\mathcal{W}_1(q, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \exp \left[ -\frac{(x-x_0)^2}{\sigma^2} - \frac{(p-p_0)^2 \sigma^2}{\hbar^2} \right]. \quad (2.23)$$

Si suponemos que están sobre el eje  $p = 0$  y separados una distancia  $\Delta q$ , la función de Wigner de la superposición tiene la forma

$$\mathcal{W}_{12}(q, p) \sim \frac{1}{2}(\mathcal{W}_1(q, p) + \mathcal{W}_2(q, p)) + \frac{1}{\pi\hbar} \exp \left[ -\frac{q^2}{\sigma^2} - \frac{p^2 \sigma^2}{\hbar^2} \right] \cos(\Delta q p / \hbar). \quad (2.24)$$

Las funciones  $\mathcal{W}_1(q, p)$  y  $\mathcal{W}_2(q, p)$  son simplemente las funciones de Wigner de cada uno de los paquetes Gaussianos por separado. El término oscilatorio (cuya frecuencia depende de la distancia entre los dos paquetes) da cuenta de que el estado es una superposición cuántica (ver Fig. 2.2). Los efectos del ambiente en un sistema cuántico, que transforman un estado puro en un estado mezcla, se observan en la función de Wigner porque, como veremos, hacen desaparecer los términos oscilatorios y la función queda positiva.

**Importante:** Los operadores unitarios correspondientes a transformaciones canónicas lineales transforman el símbolo de Weyl de cualquier operador como una variable clásica [30]. Esto quiere decir que para cualquier mapa lineal tipo gato de Arnold, el propagador de la función de Wigner es idéntico al de las densidades clásicas. Esta es una de las razones por las que el uso de la llamada función de Wigner se ha generalizado a lo largo del tiempo.

En términos apropiados, la función de Wigner es el *símbolo de Weyl* del operador densidad.<sup>4</sup> El símbolo de Weyl de un operador  $A$  cualquiera se define como

$$A = \frac{1}{2\pi\hbar} \int d\alpha \mathcal{W}_A(\alpha) R_\alpha. \quad (2.25)$$

donde  $R_\alpha$  son los *operadores de reflexión* respecto del punto  $\alpha$  del espacio de fases. Son también llamados *operadores de punto o de centro* ya que se identifican con un punto respecto del cual se hace la reflexión. Los operadores de reflexión  $R_\alpha$  están relacionados con las traslaciones (o desplazamientos)  $T_\beta$  (sobre el plano) mediante la transformada de Fourier

$$R(\alpha) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int d\beta T_\beta \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \beta \wedge \alpha \right]. \quad (2.26)$$

El hecho que la función de Wigner sea real es consecuencia de que los operadores de punto  $R(\alpha)$  son Hermíticos.

El símbolo de un operador en la base de las traslaciones se llama *función de cuerdas* [30], también conocida (especialmente en óptica cuántica) como función característica. En la Fig. 2.3 mostramos la relación entre cuerdas y centros. Representamos un autoestado del Hamiltoniano de Harper. La trayectoria clásica (indicada en la figura) está sobre el borde y describe una orbita cerrada. La función de Wigner está sobre la trayectoria clásica y dentro aparecen los términos oscilatorios cuánticos. El nombre de “cuerdas”

<sup>4</sup>No es la intención de este trabajo profundizar sobre la función de Weyl-Wigner y sus sutilezas. Para un análisis muy completo de la representación de Weyl sobre el toro ver [30, 31].

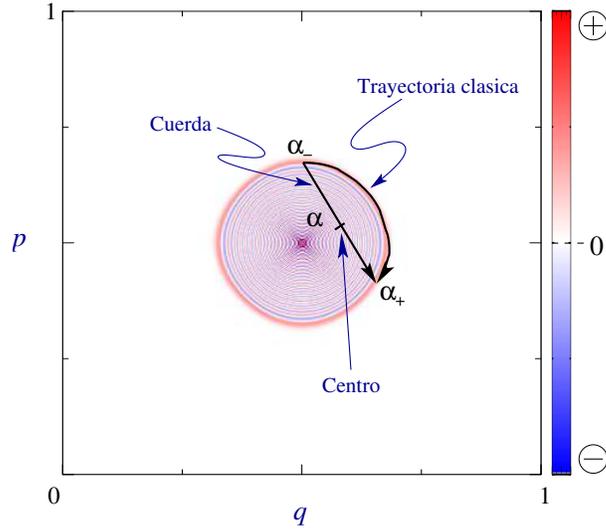


Figura 2.3: **Función de Wigner para un autoestado del Mapa de Harper. Esquemáticamente se indica una parte de la trayectoria clásica desde un punto  $\alpha_-$  hasta  $\alpha_+$  y la respectiva cuerda con su centro  $\alpha$ .**

está relacionado con la forma de encontrar las fases oscilatorias de la función de Wigner en un punto  $\alpha$  en términos de el área simpléctica encerrada por la trayectoria clásica y la cuerda centrada en el punto  $\alpha$  (ver [30] y referencias). Las cuerdas más largas estarán relacionadas con las oscilaciones más rápidas (en la figura más cercanas al centro). En secciones posteriores utilizaremos esta noción para entender la decoherencia inducida por superoperadores que tienen una expresión simple en la representación de cuerdas.

### 2.5.2. Representaciones en un espacio de fases compacto

Repasamos brevemente nociones sobre representaciones en espacios discretos. El espacio de operadores  $\mathcal{H}_{N^2}$  es también un espacio de Hilbert, con el producto de Hilbert-Schmidt definiendo la norma. Sea una base ortonormal de operadores  $O_\alpha \in \mathcal{H}_{N^2}$ , con  $\alpha = 0, 1, \dots, N^2 - 1$  que eventualmente pueden ser mapeados en los  $N^2$  puntos  $(q, p)$  de la grilla  $G_N$  definida en la Sec. 2.1. Entonces un operador arbitrario  $A \in \mathcal{H}_{N^2}$  puede expandirse en esta base como

$$A = \sum_{\alpha} \mathcal{O}_A(\alpha) O_\alpha \quad (2.27)$$

donde la función de “componentes” de  $A$  en la base de los  $O_\alpha$

$$\mathcal{O}_A(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Tr}[O^\dagger(\alpha)A] \quad (2.28)$$

es el *símbolo* de  $A$  en esta representación. En la Sec. 2.3 vimos que, si bien no es trivial, se pueden definir los operadores de traslación sobre el toro como desplazamientos cíclicos. Así definidos los  $T_\alpha$  forman un conjunto ortogonal completo. Por lo tanto, cualquier operador  $A \in \mathcal{H}_{N^2}$  tiene una representación como combinación lineal de traslaciones (normalizadas)

$$A = \frac{1}{N} \sum_{\alpha \in G_N} \mathcal{C}_A(\alpha) T_\alpha \quad (2.29)$$

donde  $G_N$  es la grilla de  $N \times N$  puntos  $\alpha \equiv (q, p)$  y el símbolo

$$\mathcal{C}_A(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{N}} \text{Tr}[T_\alpha^\dagger A] \quad (2.30)$$

es la función de cuerdas de  $A$  (la normalización esta dada por la constante  $1/\sqrt{N}$ ).

La generalización de la función de Wigner para el toro no es tan directa como la de cuerdas. Está demostrado que un intento ingenuo falla. Supongamos que usamos la forma discreta de la Ec. (2.26) para definir los operadores de punto sobre el toro simplemente como la TFD de las traslaciones. El problema es que los operadores  $R$  así obtenidos no son Hermíticos, por lo que no se puede asegurar que la Wigner resultante sea real [13]. El problema se soluciona al considerar que, por cuestiones de simetría, la construcción de los operadores de punto sobre el toro requieren sumar sobre períodos que son el doble de lo esperado [31]. Esto es equivalente a considerar un espacio de fases con una grilla  $G_{2N}$  de  $2N \times 2N$  y definir ahora sí los operadores de punto como

$$R(q, p) = \frac{1}{(2N)^2} \sum_{m,k=0}^{2N-1} T_{mk} \exp \left[ -i \frac{\pi}{N} (kq - mp) \right]. \quad (2.31)$$

Así, tenemos un total de  $4N^2$  operadores de los cuales solamente  $N^2$  son independientes. Se puede demostrar la relación

$$R(q + \sigma_q N, p + \sigma_p N) = R(q, p) (-1)^{\sigma_q q + \sigma_p p + \sigma_q \sigma_p N} \quad (2.32)$$

de donde se puede deducir que basta con determinar los operadores de punto en una subgrilla de  $N \times N$  y los demás quedan determinados. Miquel *et al.* [13] muestran que la **función de Wigner discreta** definida como

$$\mathcal{W}_\rho(\alpha) = \text{Tr}[R(\alpha)\rho] \quad (2.33)$$

cumple con las propiedades (i), (ii) y (ii) (en la pág. 21) necesarias para una “buena” función de Wigner. La Ec. (2.33) puede interpretarse como el valor de expectación de un operador Hermítico (que depende paramétricamente de un punto  $\alpha$  en el espacio de fases). Por lo tanto, queda claro que  $\mathcal{W}$  así definida es real. En la Fig. 2.4 representamos

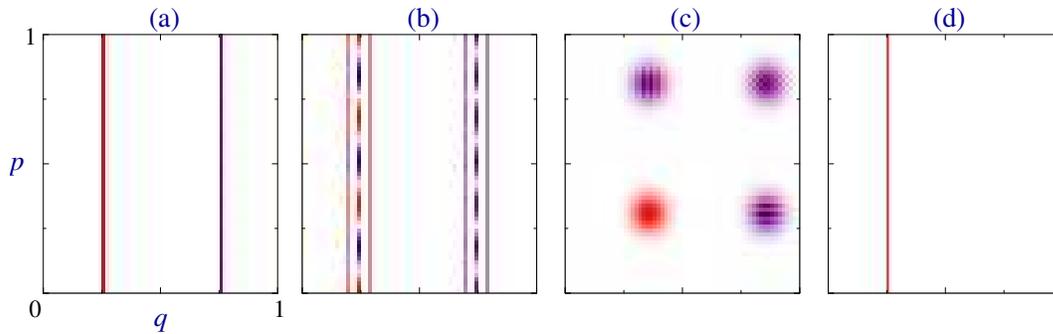


Figura 2.4: **Función de Wigner para distintos estados. (a) Estado de posición; (b) superposición coherente de dos estados de posición; (c) estado coherente. En estos tres se observan las oscilaciones debidas a la interferencia con las imágenes. El panel (d) corresponde a la función de Wigner de un estado de posición modificada (ver pág. 26) para que no aparezcan las oscilaciones ‘espúreas’.**

tres estados sobre el toro: (a) estado de posición; (b) superposición coherente de dos estados de posición; (c) estado coherente. Como se puede ver, en todos aparecen además de la distribución esperada, términos de interferencia (con longitudes de onda cortas). Estos términos pueden entenderse como interferencias del estado con sus imágenes (a veces llamadas “fantasmas”) debidas a la periodicidad del toro. Además, la función de Wigner para una matriz densidad de  $N \times N$  es un arreglo de datos de  $2N \times 2N$ , pero toda la información del estado está contenida en un arreglo de  $N \times N$ . Lo demás es información redundante. De aquí en más, **solo a los fines de la representación gráfica**, utilizaremos una modificación de la definición dada en (2.33) [32]. Simplemente notamos que los términos oscilatorios correspondientes a las imágenes “fantasmas” son los de menor longitud de onda (recordar que la frecuencia de oscilación está relacionada con la distancia). Ahora, la función de cuerdas en el 2-toro está relacionada con la de Wigner por una transformada de Fourier discreta (en 2-D). Por lo tanto, las oscilaciones debidas a las imágenes estarán relacionadas con las cuerdas más largas. Siguiendo este razonamiento,

construimos la nueva función de Wigner de la siguiente manera:

1. Partimos de  $\mathcal{W}(q, p)$  definida en (2.33).
2. Obtenemos la función de cuerdas  $\mathcal{C}(n, m)$  mediante transformada de Fourier (que también será de  $2N \times 2N$ ).
3. Seleccionamos el arreglo de  $N \times N$  compuesto por las “cuerdas cortas”, es decir, los índices  $m, n \in [0, N/2 - 1] \cup [2N - N/2 - 1, 2N - 1]$ .
4. Antitransformamos, pero ahora solamente este arreglo de  $N \times N$ . Obtenemos una nueva función de Wigner (ahora de  $N \times N$ ) que también tiene toda la información disponible [32].<sup>5</sup>

En la Fig. 2.4 (d) se ve como ejemplo la función de Wigner de un estado de posición (equivalente al que aparece en (a)) sin su correspondiente imagen fantasma. Existen otros métodos para eliminar las imágenes que también se basan en la redundancia que existe en la Wigner de  $2N \times 2N$  (ver por ejemplo [33]).

### 2.5.3. Husimi

La función de Husimi es un suavizado Gaussiano de la función de Wigner en un área de tamaño  $\hbar$ . Contiene toda la información accesible de un estado cuántico y, por ser un suavizado, no muestra las oscilaciones (con valores negativos) de la función de Wigner. Por lo tanto es un buen candidato a distribución de probabilidades. Sin embargo este mismo suavizado hace que estructuras semiclásicas importantes se pierdan.

Dado un estado  $\rho$ , la función de Husimi puede definirse como el símbolo *normalizado* en la base de estados coherentes  $|z\rangle$ . Sobre el toro los estados coherentes pueden definirse mediante Gaussianas periódicas y forman una base sobrecompleta y no ortogonal ya que

$$\langle z_1 | z_2 \rangle = e^{\frac{z_1 z_2^*}{\hbar}}. \quad (2.34)$$

El conjunto de estados coherentes sirve para representar cualquier estado mediante la

---

<sup>5</sup>Sin embargo esta nueva Wigner no propaga clásicamente las transformaciones simplécticas.

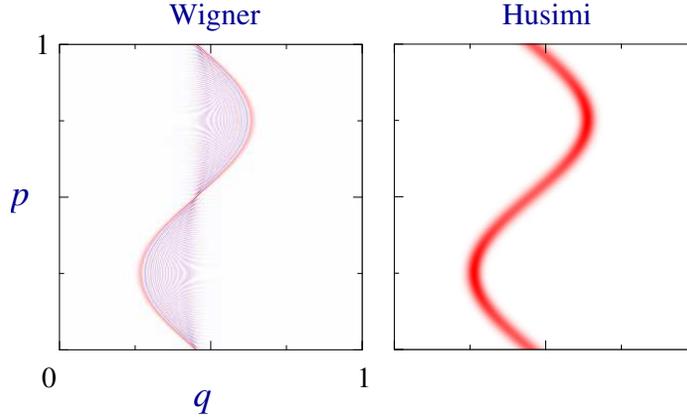


Figura 2.5: Comparación entre la función de Wigner (izquierda) y la de Husimi (derecha). Se puede ver que la función de Wigner muestra las oscilaciones correspondientes a interferencias cuánticas. La Función de Husimi, en cambio, es positiva en todo el toro. (El código de colores es equivalente al utilizado en la Fig. 2.3 de la pág. 23).

función de Bargmann en el toro<sup>6</sup>

$$\langle z|q_j\rangle = \frac{1}{\pi\hbar}^{1/4} e^{2\pi N(-\frac{1}{2}(z^2+q_j^2)+\sqrt{2}zq_j)} \theta_3\left(i\pi N\left(q_j - i\frac{\chi q}{N} - \sqrt{2}z\right) \middle| iN\right) \quad (2.35)$$

donde  $\theta_3$  es la función theta de Jacobi [36].

Luego dado un estado  $\rho$  la función de Husimi es

$$\mathcal{H}(z) = \frac{1}{\langle z|z\rangle} \text{Tr}[|z\rangle\langle z|\rho]. \quad (2.36)$$

Algunas propiedades (que no demostramos<sup>7</sup>) son:

- Al igual que la función de Wigner,  $\mathcal{H}$  es el valor de expectación de un operador Hermítico, por lo que también es real.
- Es positiva en todo el espacio de fases.
- si el estado representado es un estado puro y el espacio de Hilbert tiene dimensión  $N$ , la función de husimi tiene  $N$  ceros.

<sup>6</sup>Ver [34, 35] para representaciones de Bargmann en el Toro

<sup>7</sup>Ver por ejemplo [35, 37].

En la Fig. 2.5 a modo ilustrativo mostramos la función de Wigner (derecha) y Husimi (izquierda) de un estado sobre el toro. Se pueden ver claramente las diferencias. La función de Wigner exhibe las oscilaciones producto de la interferencia entre distintos puntos de la parte “clásica”. La de Husimi por su parte, al ser un suavizado Gaussiano, muestra la parte clásica ensanchada respecto de la de Wigner y las oscilaciones han sido borradas.

Existen representaciones intermedias dependientes de un parámetro[38] que, siendo también buenas representaciones de la mecánica cuántica, permiten en algunos ver las estructuras hiperbólicas de autoestados caóticos[39]

### **Nota.**

En este trabajo solamente la utilizaremos ocasionalmente como alternativa de representación gráfica a la función de Husimi y no haremos ningún tipo de análisis de la función en sí (ceros, etc)

# Capítulo 3

## Sistemas Abiertos

La mecánica cuántica que se enseña en los cursos de grado es unitaria. Es decir, dado un Hamiltoniano, se resuelve la ecuación de Schrödinger y se obtiene, para un estado inicial determinado, el estado final a tiempo  $t$  mediante la evolución por un propagador unitario. Todo esto es completamente correcto si el sistema en cuestión es perfectamente aislado (cosa que se asume al suponer que un Hamiltoniano describe la evolución del sistema). Lamentablemente, un sistema completamente aislado está lejos de ser el caso general, de hecho es un caso extremadamente raro. La gran dificultad para realizar con éxito experimentos con trampas de iones o de electrodinámica cuántica en cavidades, en los que el control de la interacción con sistemas externos es muy buena, no hace más que confirmar este hecho.

Por eso es necesario considerar el caso general en el que el sistema a estudiar está en contacto o interactúa (si tenemos suerte, interactúa “débilmente”) con otro sistema (que llamamos *entorno*) cuyo estado es en principio inaccesible o muy difícil de conocer. La evolución del sistema completo (sistema + entorno) sigue siendo unitaria (de nuevo, considerando que el sistema “completo” esté razonablemente aislado). Esta evolución provoca que un estado que inicialmente no tiene correlaciones entre sistema y entorno, instantes después esté correlacionado de manera fundamental (y cuántica). Se dice que luego de la interacción el sistema y el entorno están en un estado *entrelazado*<sup>1</sup>. En las palabras del mismo Schrödinger <sup>2</sup>

---

<sup>1</sup>En inglés *entangled*.

<sup>2</sup>Traducción libre de la traducción al inglés del artículo [40] que aparece en [41].

“Cuando dos sistemas interactúan, sus funciones-psi, como hemos visto, no entran en interacción sino que inmediatamente dejan de existir y toma su lugar una única para el sistema combinado.”

Como ejemplo consideremos un estado inicial del sistema completo

$$|\psi_0\rangle = \sum_n \alpha_n |s_n(0)\rangle \otimes |\psi_e(0)\rangle \quad (3.1)$$

que es un producto de los estados de los dos sistemas (donde por conveniencia escribimos el estado del sistema de interés como superposición coherente de una base ortonormal  $|s_n\rangle$ ). Luego de un tiempo  $t$  el sistema completo evoluciona y su estado tiene la forma

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n \alpha_n |s_n(t)\rangle |e_n(t)\rangle \quad (3.2)$$

donde ahora  $|e_n(t)\rangle$  son los estados a los que evoluciona el entorno *dado que* el sistema evolucione al estado  $|s_n(t)\rangle$ . A esto se refiere Schrödinger al decir que no tiene ya sentido referirse a la “función-psi” de cada parte. Como el estado del entorno es inaccesible, debemos “olvidarnos” de él. Esto se hace mediante la traza parcial. A partir del estado puro (3.2) obtenemos la matriz densidad del sistema

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| = \sum_{nm} \alpha_n^* \alpha_m |s_n(t)\rangle |e_n(t)\rangle \langle e_m(t)| \langle s_m(t)| \quad (3.3)$$

y tomamos la traza sobre los estados del entorno. Así obtenemos

$$\rho_s(t) = \text{Tr}_e[\rho(t)] = \sum_{nm} \alpha_n^* \alpha_m |s_n(t)\rangle \langle s_m(t)| \langle e_m(t)| e_n(t)\rangle. \quad (3.4)$$

Si el módulo  $|\langle e_m(t)| e_n(t)\rangle| \sim 1$  significa que sistema y entorno están “poco” entrelazados y la evolución es unitaria. El estado resultante sigue siendo un estado puro. Si, por el contrario  $|\langle e_m(t)| e_n(t)\rangle| \sim 0$ , entonces sólo sobreviven los términos de la diagonal (en la base dada) de  $\rho_s$  y el estado final es completamente mezclado. La pureza  $\text{Tr}[\rho_s^2]$  de la matriz densidad resultante sirve para medir dos cosas (estrechamente relacionadas por supuesto): por un lado, la cantidad de entrelazamiento entre dos sistemas que como un todo evolucionan unitariamente<sup>3</sup>, es decir si los dos subsistemas están entrelazados al trazar se obtiene

<sup>3</sup>La importancia del entrelazamiento en el ámbito de la información cuántica y computación cuántica han realzado el interés en el estudio de medidas de entrelazamiento (ver [42]).

---

un estado mezcla; por otro lado sirve como medida de la *pérdida de información cuántica* de un sistema en interacción con un entorno. Esta última interpretación es la que usamos durante la tesis.

La reducción de los términos no diagonales se llama *decoherencia*. El concepto de decoherencia fue desarrollado en los años 70 y principios de los 80 principalmente en los trabajos de Zeh y Zurek y sirvió para romper con la interpretación ortodoxa que indicaba que hay una clara división entre lo macroscópico y clásico de lo microscópico y cuántico. Ayudó a entender por qué si bien en principio *todo* es cuántico, hay cosas que se manifiestan de forma *aparentemente* clásica. La decoherencia introduce reglas de superselección que indican que hay estados preferidos o *estados puntero* que son robustos, mientras que cualquier superposición de estos en presencia de un entorno pierde coherencia (*i.e.* los términos de interferencia “no-clásicos” se borran). La decoherencia y la superselección de estados punteros pueden ser pensados como el efecto resultante de un ambiente que está monitoreando el sistema continuamente[2].

Aparte de por cuestiones de interpretación y fundamentos de la mecánica cuántica, la decoherencia cobró importancia recientemente por varias razones. Una es el auge de la teoría de información y computación cuántica donde es muy importante mantener la coherencia de un sistema de (preferentemente) muchos subsistemas cuánticos. Pero también un gran número de nuevos experimentos han surgido (como, por ejemplo, experimentos de difracción de “macro”-moléculas en Viena o los de cavidades de microondas en Paris) en los que se puede observar la decoherencia en acción y también controlarla. El tratamiento usual consiste en suponer que el entorno es Markoviano, esto es que los tiempos característicos de los decaimientos en las correlaciones del entorno deben ser mucho menores que cualquier tiempo característico del sistema. Dicho de otra manera, se pide que el entorno “no tenga memoria”. Además, usualmente se asume acoplamiento débil, en cuyo caso se cumple la aproximación de Born-Markov. Así se obtiene la evolución de la matriz densidad a partir de una ecuación diferencial de primer orden, o *ecuación maestra*

Como ocurre en mecánica clásica a veces es útil reducir la ecuación diferencial que define un sistema dinámico a un mapa discreto (en general usando una sección de Poincaré). Se puede así, usando un modelo simplificado estudiar las características principales de la dinámica. En lo que sigue usamos un enfoque análogo. No modelamos la interacción con

el entorno sino el efecto que el entorno produce sobre el sistema. Este enfoque es en general usado en el ámbito de mapas cuánticos así como también en el tratamiento de algoritmos [43] o problemas de *scattering*[44].

### 3.1. Superoperadores

Podemos pensar la evolución de un sistema abierto como la evolución de una parte de un sistema más grande que evoluciona unitariamente. Suponemos que el espacio de Hilbert total puede separarse en dos subsistemas

$$\mathcal{H}_{\text{tot}} = \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b \quad (3.5)$$

donde  $a$  es el sistema de interés y  $b$  es el que actúa como “ambiente”. Si la matriz del sistema total es  $\rho_{\text{tot}}$  entonces la evolución está dada por la ecuación de Liouville-von Neumann

$$\frac{\partial \rho_{\text{tot}}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [H, \rho]. \quad (3.6)$$

La solución de esta ecuación para todo tiempo puede ser escrita por medio del propagador unitario  $U_{\text{tot}}(t) = e^{-iHt/\hbar}$  como

$$\rho(t) = U_{\text{tot}}(t)\rho_{\text{tot}}(0)U_{\text{tot}}^\dagger(t). \quad (3.7)$$

En general la evolución unitaria (3.7) produce *entrelazamiento* entre los subsistemas, es decir deja de ser un estado producto (salvo casos triviales de estado inicial). La forma de obtener la evolución del subsistema  $a$  es mediante la traza parcial de los grados de libertad del sistema  $b$

$$\rho_a(t) = \text{Tr}_b[U_{\text{tot}}(t)\rho(0)U_{\text{tot}}^\dagger(t)] = \mathbf{S}_t(\rho_a). \quad (3.8)$$

El operador  $\mathbf{S}_t$  representa una forma general de transformación válida de una matriz densidad. A este tipo de mapas los llamaremos **superoperador**, **operación cuántica**, **canal cuántico** o simplemente **ruido** indistintamente y dependiendo del contexto en que aparezca. Si asumimos que la evolución dada por  $\mathbf{S}_t$  es Markoviana entonces  $\mathbf{S}_t$  forma un *semi-*

grupo dinámico cuántico (con un parámetro  $t$ ). En este caso debe cumplirse

$$\mathbf{S}_{t_1}(\mathbf{S}_{t_2}(\rho_a)) = \mathbf{S}_{t_1+t_2}(\rho_a) \quad (3.9)$$

Los semigrupos dinámicos cuánticos son generados por una ecuación diferencial lineal a primer orden o *ecuación maestra* (ver Sec. 7.2.1, pág. 92 y ss.). Como nuestro interés principal son los mapas, reemplazamos los subíndices  $t$  por un índice entero  $n$  así

$$\rho_{n+1} = \mathbf{S}(\rho_n) = \mathbf{S}(\mathbf{S}_n(\rho_0)) \quad (3.10)$$

donde queda explícito el carácter Markoviano de los mapas.

## 3.2. Representación de Kraus

Sea  $|\alpha\rangle$  una base ortonormal de  $b$ , entonces tenemos

$$\rho'_a = \mathbf{S}(\rho_a) = \text{Tr}_b[U(\rho_a \otimes |0\rangle\langle 0|)U^\dagger] = \sum_{\alpha} \langle \alpha|U|0\rangle \rho_a \langle 0|U^\dagger|\alpha\rangle \quad (3.11)$$

donde ahora

$$K_{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \alpha|U|0\rangle \quad (3.12)$$

son operadores que actúan sobre el sistema  $a$  solamente. Así queda definida la *representación en suma de operadores*

$$\mathbf{S}\rho_a = \sum_{\alpha} K_{\alpha} \rho_a K_{\alpha}^{\dagger} \quad (3.13)$$

o representación de Kraus [45] y  $K_{\alpha}$  son los operadores de Kraus. El superoperador  $\mathbf{S}$  es un operador actuando en el espacio de Liouville  $L(\mathcal{H}_N)$  de matrices densidad (complejas, Hermíticas semidefinidas positivas) con las siguientes propiedades:

- Es *lineal*, es decir si  $\rho_1, \rho_2 \in L(\mathcal{H}_N)$  y  $p \in \mathbb{C}$  entonces

$$\mathbf{S}(\rho_1 + p\rho_2) = \mathbf{S}(\rho_1) + p\mathbf{S}(\rho_2). \quad (3.14)$$

Notar además que el espacio de superoperadores es convexo. Es decir sean  $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2 \in L(L(\mathcal{H}))$ ,  $p \in \mathbb{R}, 0 \leq p \leq 1$ , entonces

$$p\mathbf{S}_1 + (1-p)\mathbf{S}_2 = \mathbf{S}_3 \in L(L(\mathcal{H})) \quad (3.15)$$

además en general  $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 \notin L(L(\mathcal{H}))$ .

- Es *Hermitiano*<sup>4</sup> esto es

$$\rho_a'^{\dagger} = \sum_{\alpha} K_{\alpha} \rho_a^{\dagger} K_{\alpha}^{\dagger} = \rho_a' \quad (3.16)$$

- Preserva la traza (PT). Esta propiedad es esencial para que el mapa sea de matrices densidad en matrices densidad. Esta condición se cumple si

$$\text{Tr}[\rho_a'] = \text{Tr}[\mathbf{S}\rho_a] = \text{Tr}[\rho_a \sum_{\alpha} K_{\alpha}^{\dagger} K_{\alpha}] = \text{Tr}[\rho_a] = 1. \quad (3.17)$$

En la ecuación anterior usamos la propiedad cíclica de la traza  $\text{Tr}[AB] = \text{Tr}[BA]$  y además la definición de los  $K_{\alpha}$  (Ec. (3.12)) de donde de la unitariedad de  $U$  se sigue que

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} K_{\alpha}^{\dagger} K_{\alpha} &= \sum_{\alpha} \langle 0_b | U^{\dagger} | \alpha_b \rangle \langle \alpha_b | U | 0_b \rangle \\ &= \langle 0_b | U^{\dagger} U | 0_b \rangle = I_a \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde  $I_a$  es la identidad en el subespacio  $a$ . Además, se puede ver [47] que dada una representación de Kraus siempre existe una extensión del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_E$  y un operador actuando sobre  $\mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_E$  tal que vale la Ec. (3.11). Por lo que la condición de preservación de la traza en función de los operadores de Kraus

$$\sum_{\alpha} K_{\alpha}^{\dagger} K_{\alpha} = I_a \quad (3.19)$$

es necesaria y suficiente.

- Es *completamente positivo* (CP). Un mapa de operadores es positivo si lleva oper-

---

<sup>4</sup>Diferenciamos “Hermitiano” i.e. que preserva la hermiticidad, de “Hermítico” o autoadjunto en el sentido usual de operadores lineales (ver por ejemplo [46]).

adores positivos a operadores positivos. Ahora, un mapa  $\mathbf{S}$  que actúa sobre  $L(\mathcal{H}_a)$  es CP si una extensión trivial  $\mathbf{S} \otimes I_b : L(\mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b) \rightarrow (\mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b)$  es también un mapa positivo.

Se puede demostrar[47] que un mapa que cumpla las anteriores propiedades tiene una representación en suma de operadores. Las propiedades descritas se cumplen tanto para mapas como para la evolución a tiempo continuo. La diferencia es que en el último caso la suma de operadores los operadores de Kraus pueden depender del tiempo.

Cabe aclarar que la representación de Kraus no es única ya que se puede ver que dado un operador unitario  $\mathcal{U}$  entonces

$$\mathbf{S} = \sum_{\alpha} K_{\alpha} \rho_{\alpha} K_{\alpha}^{\dagger} = \sum_{\beta} G_{\beta} \rho G_{\beta}^{\dagger} \quad (3.20)$$

con  $G_{\beta} = \mathcal{U}_{\beta\alpha} K_{\alpha}$ . Además si  $N$  es la dimensión de  $\mathcal{H}_a$ , entonces el número de operadores de Kraus no excede  $N^2$ . Los mapas cu'anticos descritos en la Sec. 2.4 tienen una forma de Kraus trivial dada por

$$\rho' = \mathbf{U}(\rho) \stackrel{\text{def}}{=} U \rho U^{\dagger}. \quad (3.21)$$

La evolución de una matriz densidad en términos de un superoperador representado en forma de Kraus nos provee de un formalismo general para tratar algunas características de la evolución de sistemas abiertos. Por ejemplo, generalmente un sistema preparado inicialmente en un estado puro evolucionará hasta un estado mezclado. Este efecto se conoce como *decoherencia*. La decoherencia cumple un papel esencial para entender (entre otras cosas) por qué se puede separar entre el mundo clásico y el cuántico. Es decir, por qué no observamos efectos cuánticos en sistemas macroscópicos por ejemplo. La decoherencia, que puede interpretarse como el efecto de la interacción entre un sistema y su ambiente, actúa seleccionando una base privilegiada de estados (punteros) sobre la cual no existen superposiciones.

# Capítulo 4

## Difusión por ruido Gaussiano

### 4.1. Mapas cuánticos abiertos

Cuando hacemos experimentos numéricos en mecánica clásica la irreversibilidad puede aparecer tanto por interacciones con sistemas externos no contempladas así como por posibles errores de truncación debido a la precisión de la máquina, que es finita. Este tipo de efectos se puede modelar mediante algún término estocástico tipo Langevin en las ecuaciones.

En mecánica cuántica la interacción con un ambiente introduce decoherencia. Proponemos modelar las fluctuaciones inducidas por el entorno mediante procesos aleatorios que suavicen la evolución unitaria. Como simplificación suponemos que el propagador completo  $\mathbf{S}$  está compuesto por *dos pasos*. Una parte unitaria  $\mathbf{U}$ , correspondiente al mapa cuántico en sí, compuesta con el ruido  $\mathbf{D}_\varepsilon$  que es dado explícitamente en forma de Kraus, donde  $\varepsilon$  es uno o más parámetros que determinan el tipo y la fuerza de la interacción. La evolución de la matriz densidad está dada por la iteración de este propagador en la forma

$$\rho_{n+1} = \mathbf{S}_\varepsilon(\rho_n) = \mathbf{D}_\varepsilon \circ \mathbf{U}(\rho_n). \quad (4.1)$$

donde  $\varepsilon$  representa la fuerza del ruido y puede ser relacionado con la constante de acoplamiento entre sistema y entorno. Este tipo de esquemas de dos etapas ha sido objeto de estudio en trabajos recientes [6, 48, 49, 50, 51, 12]. Aparecen naturalmente en los casos en los que el ruido es despreciable durante la evolución unitaria. Suponiendo que la evolución

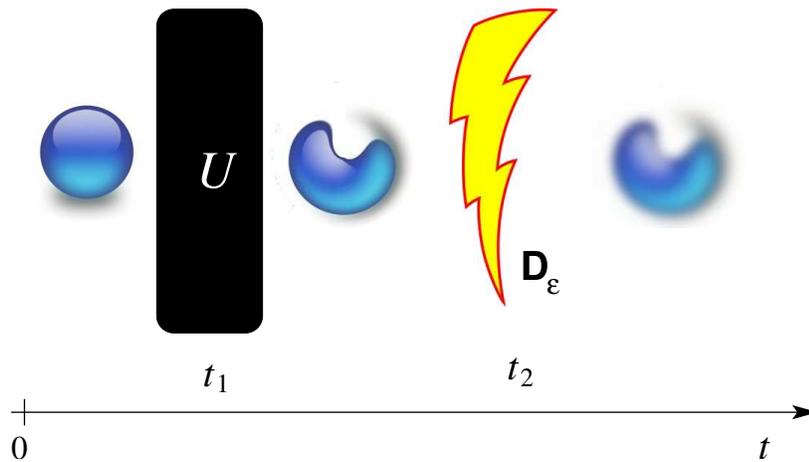


Figura 4.1: **Representación esquemática del modelo de evolución ruidosa en dos etapas: primero la evolución unitaria que imaginamos tiene un tiempo característico  $t_1$  y después el ruido con un tiempo  $t_2 \gg t_1$ .**

de (4.1) proviene de la exponenciación directa de la ecuación de Lindblad. Entonces si a primer orden la parte unitaria y la interacción conmutan, las dos partes pueden separarse en un producto de propagadores. Un ejemplo físico es el micromaser <sup>1</sup>. Hay algunos casos como los mapas pateados en los que la interacción puede tener lugar entre cada patada (ver el esquema de la Fig. 4.1). El caso del billar dentro de un baño térmico, considerando que la interacción con las paredes es esencialmente unitaria mientras que la evolución libre es ruidosa, es otro buen ejemplo. Cabe mencionar también, para el caso de circuitos cuánticos, la situación en que se pueden despreciar los errores por imperfección en las compuertas pero no los ruidos del canal en general.

## 4.2. Procesos unitarios aleatorios

La forma de simular un proceso aleatorio es mediante una suma incoherente de posibles transformaciones unitarias sobre la matriz densidad. Así, sea  $\{U_0, U_1, \dots, U_d\}$  un conjunto de operadores unitarios en  $\mathcal{H}_{N^2}$ , un proceso unitario aleatorio (PUA) puede ser

<sup>1</sup>Ver por ejemplo [52]

escrito en suma de operadores como

$$\mathbf{D}^{\text{PUA}}(\rho) = \sum_{i=1}^d c_i U_i \rho U_i^\dagger. \quad (4.2)$$

con  $c_i$  reales y positivos. Como vimos en Sec. 3.1 para que una suma de superoperadores sea un superoperador, debe ser una suma convexa, es decir,  $c_i \geq 0$  y

$$\sum_i c_i = 1 \quad (4.3)$$

que es también la condición para que preserve la traza (PT). Además la condición PT, junto con la unitariedad ( $U_i U_i^\dagger = I$ ) implican que el mapa es *unital* (preserva la identidad)

$$\mathbf{D}^{\text{PUA}}(I) = I \quad (4.4)$$

Un mapa unital y que preserve la traza se llama *doblemente estocástico*. Una matriz de elementos  $m_{ij}$  es estocástica si

$$\sum_i m_{ij} = 1 \quad \forall j \quad (4.5)$$

por lo que es biestocástica si su adjunta es estocástica (i.e.  $\sum_i m_{ji}^* = 1$ ).

Un mapa biestocástico tiene al uno como único autovalor sobre el círculo unidad y los demás autovalores en el plano complejo dentro de un círculo de radio  $g$  donde se cumple que  $g < 1$ , es decir que es *contractivo*. Bajo ciertas propiedades (ergodicidad) que debe cumplir el canal, se puede ver [53] que además la entropía de Von Neuman  $S(\rho) = -\text{Tr}[\rho \log \rho]$  nunca decrece<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Algunas propiedades más de canales biestocásticos pueden encontrarse por ejemplo en [54, 55, 56]

## 4.3. Canal Gaussiano.

### 4.3.1. Definición

Consideraremos procesos biestocásticos con una forma de Kraus generalizada

$$\mathbf{D}_\varepsilon(\rho) = \frac{1}{N} \sum_{\alpha} C_\varepsilon(\alpha) T_\alpha \rho T_\alpha^\dagger. \quad (4.6)$$

con  $\sum_{\alpha} C_\varepsilon(\alpha) = 1$ , y  $0 \leq \varepsilon \leq 1$  un parámetro que controla la fuerza del ruido. Los  $T_\alpha$  son los operadores de traslación sobre el toro definidos en la Sec. 2.1 (pág. 18). Este canal toma el estado inicial  $\rho$  y lo transforma en una suma incoherente de traslaciones  $T_\alpha \rho T_\alpha^\dagger$  cada una con probabilidad  $C_\varepsilon(\alpha)$ .

Veamos algunas propiedades de  $\mathbf{D}_\varepsilon$ . Los operadores de traslación forman un conjunto ortogonal completo en el espacio de operadores. Según la Ec. (2.15) es preciso normalizar según

$$T_\alpha \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{N}} T_\alpha \quad (4.7)$$

para que la base de operadores sea ortonormal. Como se vio en la Sec. 2.5.2, el símbolo de un operador  $A \in L(\mathcal{H})$  en esta base

$$A(\xi) = \frac{1}{\sqrt{N}} \text{Tr}[T_\xi^\dagger A]. \quad (4.8)$$

es la función de cuerdas. Análogamente usando las propiedades de  $T_\alpha$  se puede definir el símbolo del superoperador  $\mathbf{D}_\varepsilon$  en una base normalizada de superoperadores como

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\beta\gamma} &= \frac{1}{N} \text{Tr}\left[\frac{T_\beta^\dagger}{\sqrt{N}} \mathbf{D}_\varepsilon\left(\frac{T_\gamma}{\sqrt{N}}\right)\right] = \frac{1}{N^2} \sum_{\alpha} C_\varepsilon(\alpha) \text{Tr}[T_\beta^\dagger T_\alpha T_\gamma T_\alpha^\dagger] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\alpha} C_\varepsilon(\alpha) e^{-(i2\pi/N)\beta \wedge \alpha} \delta_{\beta\gamma} = \tilde{C}(\beta) \delta_{\beta\gamma} \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde  $\tilde{C}(\beta)$  está relacionada con  $C_\varepsilon(\alpha)$  mediante la transformada de Fourier discreta (2-D)

$$\tilde{C}(\beta) = \frac{1}{N} \sum_{\alpha} C_\varepsilon(\alpha) e^{-\frac{2\pi i}{N} \beta \wedge \alpha}. \quad (4.10)$$

Por lo tanto el ruido es **diagonal** en la representación de cuerdas. De lo anterior es claro que las autofunciones de  $\mathbf{D}_\varepsilon$  son  $T_\beta$  con autovalor  $\tilde{C}(\beta)$ . Introducimos aquí una representación alternativa del superoperador: su **descomposición espectral**. Para eso es útil usar otra notación. El espacio de operadores  $L(\mathcal{H}_N)$  con el producto de Hilbert-Schmidt entre operadores es un espacio de Hilbert. Por lo que los operadores son vectores en un espacio de Hilbert. Usando una notación tipo Dirac (ver Ap. A)

$$|A\rangle \in L(\mathcal{H}_N), \quad (B \in L(\mathcal{H}_N)^* \text{ y } (B|A) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Tr}[B^\dagger A]) \quad (4.11)$$

(donde el asterisco en  $L(\mathcal{H}_N)^*$  denota espacio *dual* [46]) podemos escribir la descomposición espectral de  $\mathbf{D}_\varepsilon$  como

$$\mathbf{D}_\varepsilon|\rho\rangle = \sum_{\beta} |T_\beta\rangle \tilde{C}(\beta) (T_\beta|\rho\rangle = \sum_{\beta} \tilde{C}(\beta) \rho_\beta |T_\beta\rangle \quad (4.12)$$

donde  $\rho_\beta = (T_\beta|\rho\rangle$  es la función de cuerdas de  $\rho$ . Entonces en la representación de cuerdas la acción de un ruido de la forma (4.6) es *modular* la función de cuerdas con el coeficiente  $\tilde{C}(\beta)$ .

Para simular un entorno difusivo del estilo que clásicamente supondría una evolución según una ecuación estocástica tipo Langevin, proponemos (una pequeña modificación de) el llamado canal Gaussiano. El canal Gaussiano implementa en cada paso una suma aleatoria (incoherente) con distribución Gaussiana de todas las posibles traslaciones en el espacio de fases. Es decir en la Ec. (4.6) el coeficiente  $C_\varepsilon(\alpha)$  es una función Gaussiana de  $\alpha$  (centrada en  $\alpha = 0$ ). Esto implica que con alta probabilidad el ruido no hace nada (es decir, aplica  $T_{(0,0)}\rho T_{(0,0)}^\dagger = \rho$ ) y aplica una suma incoherente de traslaciones con probabilidad decreciente según el tamaño del desplazamiento. Debido a la peridicidad del toro la función  $C_\varepsilon(\alpha) \equiv C_\varepsilon(q, p)$  debe cumplir

$$C_\varepsilon(q+n, p+m) = C_\varepsilon(q, p) \quad (4.13)$$

con  $n, m$  enteros. Por lo tanto para implementar el canal Gaussiano esta función debería ser una suma periódica de Gaussianas (función  $\Theta$  de Jacobi). Por simplicidad optamos por una alternativa. Dado que el ruido es diagonal en la representación de cuerdas, por

lo tanto queda determinado por sus autovalores  $\tilde{C}(\beta) \equiv \tilde{C}_\varepsilon(\mu, \nu)$  (usamos dos índices explícitamente en este caso). Luego proponemos como autovalores la función

$$\tilde{C}_\varepsilon(\mu, \nu) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon N}{\pi} \right)^2 (\sin^2[\pi\mu/N] + \sin^2[\pi\nu/N]) \right]. \quad (4.14)$$

Esta es una función suave, casi-Gaussiana y **periódica** de las variables enteras  $\mu, \nu$ .

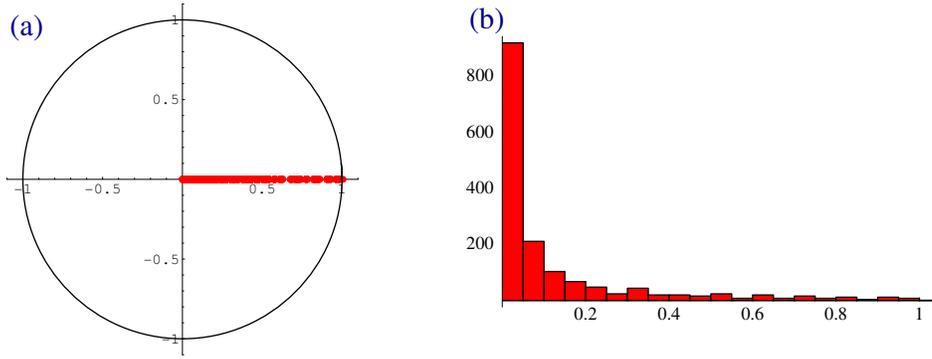


Figura 4.2: **(a)** Representación en el plano complejo del espectro  $\tilde{C}_\varepsilon(\mu, \nu)$  para el canal Gaussiano  $\mathbf{D}_\varepsilon$  ( $N = 100$ ,  $\varepsilon = 0,2$ ). Todos los autovalores son reales y positivos; **(b)** Distribución de los módulos de los autovalores representados en **(a)**. Se observa una fuerte acumulación de autovalores cerca del origen.

Además, su transformada de Fourier es positiva, por lo que queda asegurada la positividad de  $\mathbf{D}_\varepsilon$ . Es fácil ver

$$\tilde{C}_\varepsilon(\mu, \nu) \xrightarrow{\mu, \nu \ll N} e^{-\varepsilon^2(\mu^2 + \nu^2)/2} \quad (4.15)$$

que es una función Gaussiana (no normalizada) de ancho  $\sigma = 1/(\varepsilon N)$ . De acuerdo a la Ec. (4.9),  $\tilde{C}_\varepsilon(\mu, \nu)$  es el espectro de  $\mathbf{D}_\varepsilon$ . En la Fig. 4.2 (a) están representados en el plano complejo todos los autovalores, para  $\varepsilon = 0,2$ . El espectro es real y positivo y como se ve en la Fig. 4.2 (b) tienen una fuerte acumulación cerca del origen.

### 4.3.2. Difusión y Decoherencia

El ruido definido en (4.6) con los coeficientes  $C_\varepsilon(\alpha)$  dados por la transformada de Fourier de (4.14) se puede interpretar como una difusión Gaussiana. La forma de  $C_\varepsilon(\alpha)$  determina la probabilidad con que se aplican los operadores de traslación sobre la matriz

densidad. Con alta probabilidad el ruido no hace nada y la forma de  $C_\varepsilon(\alpha)$  determina el peso de las demás traslaciones  $T_\alpha$ . Tendrán efecto significativo aquellas tales que  $\alpha \lesssim \varepsilon/(2\pi)$  (que es el ancho de  $C_\varepsilon(\alpha)$ ). La difusión se observa en las representaciones del espacio de fases como un ensanchamiento del paquete. Además la suma incoherente de traslaciones produce decoherencia porque las oscilaciones desplazadas sumadas de forma aleatoria se anulan (total o parcialmente).

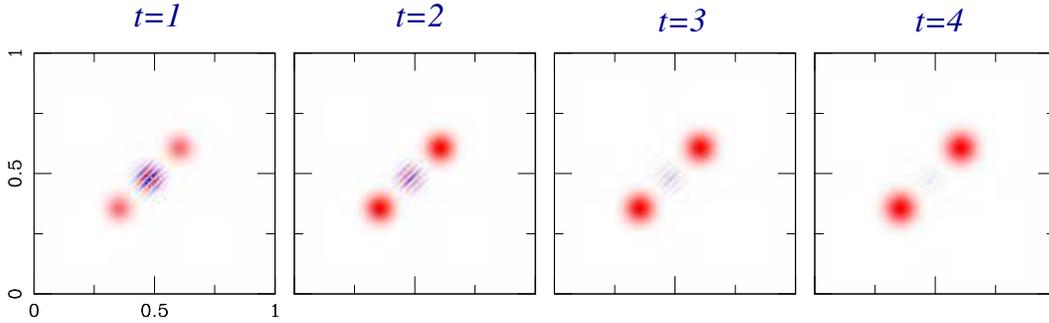


Figura 4.3: **Evolución utilizando el canal Gaussiano  $D_\varepsilon$  ( $\varepsilon = 0,08$ ) de un estado inicial superposición de dos estados coherentes sobre el toro ( $N = 64$ ). Se puede ver como la intrdeferencia se borra gradualmente y los paquetes Gaussiano originales se ensanchan.**

Este efecto se explica mediante la función de cuerdas y su relación con la función de Wigner. La función de cuerdas y la función de Wigner están relacionadas por la transformada de Fourier. Como  $D_\varepsilon$  es diagonal en la representación de cuerdas su efecto sobre la función de cuerdas de una matriz densidad es simplemente modular la función de cuerdas con el kernel  $\tilde{C}_\varepsilon(\mu, \nu)$  de la Ec. (4.14). Este kernel borra efectivamente las cuerdas largas (mayores que  $1/(\varepsilon N)$ ). Al calcular la función de Wigner, mediante la transformada de Fourier discreta (teniendo en cuenta que se debe tomar la dimension  $2N$ ) se obtiene

$$D_\varepsilon(\mathscr{W}_\beta) = \sum_{\alpha=0}^{2N-1} C_\varepsilon(\alpha) \mathscr{W}(\beta - \alpha), \quad (4.16)$$

donde  $\mathscr{W}(-\alpha) \equiv \mathscr{W}(2N - \alpha)$  y  $D_\varepsilon$  es el superoperador  $D_\varepsilon$  actuando sobre la función de Wigner. Luego, por definición las cuerdas largas están relacionadas con las oscilaciones rápidas de la función de Wigner. Por lo tanto el superoperador  $D_\varepsilon$  además de ir ensanchando la parte “clásica” de la función de Wigner, irá borrando paulatinamente los términos

de interferencia. En la Fig. 4.3 mostramos la acción de  $\mathbf{D}_\varepsilon$  sobre un estado que está formado por la superposición de dos estados coherentes (similar al de la Fig. 2.2 pero sobre el toro<sup>3</sup>). Se puede ver como en cada paso se va borrando la parte oscilatoria intermedia correspondiente a las interferencias cuánticas y los paquetes originales (en rojo) se ensanchan debido a la difusión.

### 4.3.3. Propagador unitario suavizado

En lugar de pensar que el ruido modula con la forma de  $\tilde{C}_\varepsilon(\mu, \nu)$  los elementos de la matriz densidad (en la representación de cuerdas), podemos interpretarlo de forma alternativa como una especie de suavizado<sup>4</sup> del propagador unitario. Según el esquema de dos etapas propuesto en la Sec. 4.1 para el caso del ruido difusivo  $\mathbf{D}_\varepsilon$ , si  $U$  es un mapa unitario cualquiera la evolución está dada por

$$\rho' = \mathbf{S}_\varepsilon(\rho) = \frac{1}{N} \sum_{\alpha} C_\varepsilon(\alpha) T_\alpha U \rho U^\dagger T_\alpha^\dagger. \quad (4.17)$$

En la representación de cuerdas es

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{N} \text{Tr} \left[ \frac{T_\alpha^\dagger}{\sqrt{N}} \mathbf{S}_\varepsilon \left( \frac{T_\beta}{\sqrt{N}} \right) \right] = \frac{1}{N^2} \sum_{\gamma} C_\varepsilon(\gamma) \text{Tr} [T_\alpha^\dagger T_\gamma U T_\beta U^\dagger T_\gamma^\dagger] \\ &= \text{Tr} \left[ \frac{T_\alpha^\dagger}{\sqrt{N}} U \frac{T_\beta}{\sqrt{N}} U^\dagger \right] \frac{1}{N} \sum_{\gamma} C_\varepsilon(\gamma) \exp \left[ \frac{2\pi i}{N} \alpha \wedge \gamma \right] \\ &= \tilde{C}_\varepsilon(\alpha) \mathcal{U}_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde  $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = \text{Tr} [T_\alpha^\dagger U T_\beta U^\dagger] / N$  es el elemento de matriz del propagador unitario en la representación de cuerdas. Al igual que en la función de cuerdas de un estado, el ruido actúa sobre el superoperador unitario suprimiendo las cuerdas largas que corresponden a las oscilaciones rápidas.

<sup>3</sup>Se utilizo la variación de la función de Wigner que no tiene imágenes.

<sup>4</sup>*Coarse graining.*

#### 4.3.4. Espectro del propagador suavizado

De ahora en más nos referiremos a  $\mathbf{S}_\varepsilon$  como el propagador suavizado. Como vimos en la Sec. 4.2 una suma convexa de operadores unitarios es un PUA o, en otras palabras es un mapa biestocástico. Es fácil ver que  $\mathbf{S}_\varepsilon$  también es un PUA ya que  $T_\alpha U$  es un operador unitario. Por lo tanto este mapa es una contracción. Enumeramos algunas propiedades del espectro:

1.  $\mathbf{S}_\varepsilon$  es *unital* por lo que  $\lambda_0 = 1$  es autovalor y su autofunción es  $\rho_I = I/N$ .
2. la parte restante del espectro se encuentra dentro del círculo unidad y es simétrica con respecto al eje real. los pares de autovalores complejos conjugados entre sí correponden a autofunciones que son Hermíticas conjugadas entre sí.
3. Como se cumple

$$\mathbf{S}_\varepsilon \circ \mathbf{S}_\varepsilon^\dagger = \mathbf{D}_\varepsilon^2 \quad (4.19)$$

los autovalores de  $\mathbf{D}_\varepsilon$  son lo valores singulares de  $\mathbf{S}_\varepsilon$ . Por lo tanto el espectro de  $\mathbf{S}_\varepsilon$  está contenido en el anillo

$$e^{-\left(\frac{\varepsilon N}{\pi}\right)^2} \leq |\lambda_i| \leq e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon N}{\pi}\right)^2 (\sin^2[\pi/N])} \quad (4.20)$$

En el límite de  $N$  grande podemos entonces escribir

$$-\left(\frac{N\varepsilon}{\pi}\right)^2 \leq \ln |\lambda_i| \leq -\frac{\varepsilon^2}{2}. \quad (4.21)$$

4. El superoperador suavizado no es *normal*, esto es  $\mathbf{S}_\varepsilon \mathbf{S}_\varepsilon^\dagger \neq \mathbf{S}_\varepsilon^\dagger \mathbf{S}_\varepsilon$ , y por lo tanto tiene diferentes autofunciones a derecha e izquierda para cada autovalor. El problema de autovalores a derecha e izquierda para cada autovalor  $\lambda$ ,  $\lambda^*$  puede escribirse como

$$\mathbf{S}_\varepsilon \hat{R}_i = \lambda_i \hat{R}_i \quad \mathbf{S}_\varepsilon \hat{R}_i^\dagger = \lambda_i^* \hat{R}_i^\dagger \quad (4.22)$$

$$\mathbf{S}_\varepsilon^\dagger \hat{L}_i = \lambda_i^* \hat{L}_i \quad \mathbf{S}_\varepsilon^\dagger \hat{L}_i^\dagger = \lambda_i \hat{L}_i^\dagger \quad (4.23)$$

donde  $\hat{L}_i, \hat{R}_i$  componen un conjunto biortogonal

$$\text{Tr}\left(L_i^\dagger R_j\right) = \text{Tr}\left(L_i R_j\right) = \text{Tr}\left(L_i^\dagger R_j^\dagger\right) = \delta_{i,j}. \quad (4.24)$$

y asumimos la normalización  $\text{Tr}\left(L_i^\dagger L_i\right) = \text{Tr}\left(R_i^\dagger R_i\right) = 1$ . Elegimos en particular  $\hat{L}_0 = \hat{R}_0 = I/N$  para  $\lambda_0 = 1$  y por lo tanto todos las demás autofunciones tiene traza nula. Siempre que nos refiramos a los autovalores  $\lambda_i, i = 0, \dots, N^2 - 1$  supondremos la siguiente ordenación

$$1 = \lambda_0 \geq |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_{N^2-1}| \quad (4.25)$$

5. Usando la notación de la Sec. 4.3.1 (pág. 40), la descomposición espectral de  $\mathbf{S}_\varepsilon$  queda

$$\mathbf{S}_\varepsilon = \sum_i |R_i\rangle \lambda_i \langle L_i|. \quad (4.26)$$

La obtención directa del espectro de  $\mathbf{S}_\varepsilon$  se ve obstaculizada porque involucra la diagonalización de una matriz no Hermítica de  $N^2 \times N^2$ . Esto puede resultar un problema si se quieren deducir propiedades clásicas a partir del espectro porque para eso se deben tomar límites de  $N$  grande (idealmente infinito).

# Capítulo 5

## Caos y correspondencia

### 5.1. Caos

La definición estándar de caos clásico involucra el concepto de sensibilidad a pequeñas perturbaciones en las condiciones iniciales. Es decir, dos puntos cuya posición inicial en el espacio de fases es tan cercana como uno quiera, se separan a un ritmo exponencial. Es decir, sean dos puntos  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$  en el espacio de fases, la distancia  $\delta_t(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  en función del tiempo (para tiempos “grandes”) está dada por

$$|\delta_t(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)| = |\delta_0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)| e^{\lambda t} \quad (5.1)$$

donde  $\delta_0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  es la distancia inicial. La tasa de separación  $\lambda$  (que en general varía punto a punto) es el exponente de Lyapunov máximo. El exponente de Lyapunov positivo tiene asociada una dirección a lo largo de la cuál el estiramiento es máximo (variedad inestable). Si el sistema es conservativo, la existencia de un exponente de Lyapunov positivo implica que existe también uno negativo y por lo tanto también implica que hay una dirección a lo largo de la cuál las distancias disminuyen (variedad estable). Para que haya caos no es suficiente la existencia de exponentes de Lyapunov positivos sino que haya cruzamientos entre variedades estables e inestables. En otras palabras, es necesario que el sistema sea localmente inestable (Lyapunov positivos) y globalmente *mezcla*<sup>1</sup> [57]. En un sistema mezcla, dada una bola arbitraria de condiciones iniciales, sin importar cuán

---

<sup>1</sup>La palabra correspondiente en inglés es *mixing* .

pequeña, existe un tiempo finito tal que la intersección con cualquier otra bola finita es no nula. Para esto es necesario que las ecuaciones de movimiento, ya sea que provengan de un Hamiltoniano o no, sean no lineales. Si el flujo en el espacio de fases surge de un Hamiltoniano, entonces  $H$  debe ser una función cuya expansión en términos de posición y momento tiene términos de orden por lo menos cúbico.

La ecuación de Schrödinger, que rige la evolución de estados en mecánica cuántica, es una ecuación lineal y completamente determinista. La evolución unitaria que resulta de la ecuación de Schrödinger implica que dados dos estados iniciales  $|\phi(0)\rangle$  y  $|\psi(0)\rangle$  que evolucionan con el mismo Hamiltoniano, se cumple  $|\langle\psi(t)|\phi(t)\rangle|^2 = |\langle\psi(0)|\phi(0)\rangle|^2$  por lo que no podemos separar comportamientos regulares y caóticos en mecánica cuántica mediante la separación exponencial de trayectorias. Por lo tanto, la definición canónica de sistema cuántico caótico es la de aquellos cuya contraparte clásica lo es (Lypunov positivo, mixing, etc.).

Es deseable, por otro lado, alguna definición o caracterización de “caos cuántico” sin necesidad de recurrir, en principio, a el límite clásico.<sup>2</sup> Esto se puede hacer mediante el estudio de estadística de niveles (o cuasi-niveles) de energía. Los sistemas de dos o mas grados de libertad que son clásicamente integrables presentan una distribución de niveles que tienden a agruparse y que exhiben cruces cuando se varía algún parámetro en el Hamiltoniano. La distribución de separaciones de niveles vecinos es Poissoniana, esto es como si los niveles surgieran de algún proceso aleatorio sin correlaciones. Si el sistema es clásicamente caótico los niveles están correlacionados de tal manera que los cruces son repelidos fuertemente. Existen tres grados universales de repulsión que dependen del tipo de simetrías. La importancia de estas simetrías se vio reforzada a partir de la conjetura de Bohigas *et al.* [59] sobre las características universales de las fluctuaciones espectrales para sistemas clásicamente caóticos usando las teorías de matrices aleatorias.

En lugar de la separación exponencial de trayectorias (que como vimos no es válida en mecánica cuántica), Peres [11] propuso una forma alternativa de caracterizar sistemas caóticos: extrema sensibilidad a pequeños cambios en la dinámica. Este concepto sí puede ser utilizado en mecánica cuántica, por ejemplo comparando la dinámica de un Hamiltoniano con otro que presente alguna “pequeña” perturbación. Esta sensibilidad, que desde

---

<sup>2</sup>La literatura existente es vasta. Solamente remitimos, por ejemplo a [58] donde también se puede encontrar una gran cantidad de referencias.

luego existe en los sistemas clásicamente caóticos [60], fue observada en experimentos de eco de spin donde se observa un un régimen universal para el decaimiento del eco de Loschmidt determinado por el máximo exponente de Lyapunov del sistema.

## 5.2. Correspondencia dinámica

El principio de correspondencia de Bohr sostiene que en algún límite clásico (números cuánticos “grandes” o cuando  $\hbar$  es despreciable frente a cualquier valor característico de la acción) la teoría cuántica debe reproducir las predicciones de la mecánica clásica con errores despreciables. El principio de correspondencia de Bohr está sustentado por el teorema de Ehrenfest que muestra que la evolución de los valores medios de la posición y el momento, para una función de onda lo suficientemente localizada está dada por las ecuaciones de Newton. El teorema de Ehrenfest es válido siempre que valga la aproximación

$$\langle \nabla V(\hat{r}) \rangle \approx \nabla V(r)|_{r=\langle \hat{r} \rangle} \quad (5.2)$$

esto es, mientras que el valor medio de la fuerza sea aproximadamente igual a la fuerza evaluada en el valor medio de la posición. El tiempo durante el que se mantiene la correspondencia para sistemas integrables puede llegar a ser relativamente grande.

En sistemas clásicamente caóticos la situación es diferente. La pérdida de la correspondencia se da en escalas de tiempos pequeños debido a la existencia de variedades estables e inestables. Para ilustrar esta afirmación consideramos el siguiente ejemplo [2] Supongamos que la variedad inestable del sistema clásico está sobre el eje de posición  $x$ , y que el paquete tiene inicialmente un ancho en momento  $\Delta p_0$ . Como consecuencia, un tiempo  $t$  después la indeterminación en momento habrá disminuído según,

$$\Delta p \approx \Delta p_0 \exp(-\lambda t), \quad (5.3)$$

donde  $\lambda$  es el coeficiente de expansión (contracción) determinado por el los exponentes de Lyapunov. Así mismo (apelando de forma un tanto descuidada al principio de indeter-

minación de Heisenberg) el paquete se estirará en la dirección  $x$  según

$$\Delta x \approx \frac{\hbar}{\Delta p_0} \exp(\lambda t). \quad (5.4)$$

El problema radica en que un crecimiento exponencial de  $\Delta x$  entra en conflicto con la idea de una un gradiente de potencial actuando sobre un punto en el espacio de fases. Una función de ondas puede tener coherencia en regiones de tamaño mayor que la escala en la que las no linealidades del potencial implican cambios significativos en el gradiente. Si suponemos que esta escala es del orden de  $L$ , el tamaño del sistema en cuestión, entonces el paquete inicial se expandirá hasta esa escala en un tiempo del orden de

$$t_E \approx \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\Delta p_0 L}{\hbar}. \quad (5.5)$$

No es posible determinar el valor de la fuerza en ningún lugar específico. Este es el denominado tiempo de Ehrenfest y una expresión general es [61]

$$t_E \approx \frac{1}{\lambda} \ln \frac{S}{\hbar}, \quad (5.6)$$

donde  $S$  es algún valor característico de la acción del sistema. Para sistemas regulares ( $\lambda = 0$ ) la dependencia con  $\hbar$  del tiempo de Ehrenfest es una ley de potencias, mientras que para sistemas clásicamente caóticos  $t_E \rightarrow \infty$  con  $\hbar \rightarrow 0$  pero siguiendo una ley logarítmica, es decir de forma mucho más lenta. El ejemplo usualmente citado para ilustrar ordenes de magnitud en la perdida decorrespondencia es el caso de Hyperion, una de las lunas de Saturno, que presenta una dinámica caótica. El tiempo claculado para la pérdida de correspondencia en este sistema es del orden de diez años, después de lo cual deberían observarse discrepancias con las predicciones clásicas.

En el espacio de fases la rotura de la correspondencia se explica mediante la evolución de la función de Wigner. Aplicando la transformada de Weyl a la ecuación de Liouville-von Neumann se obtiene la ecuación de movimiento para la función de Wigner en función del corchete de Moyal

$$\dot{\mathcal{W}} = [H, \mathcal{W}]_{\text{Moyal}} = \{H, \mathcal{W}\}_{\text{Poisson}} + \sum_n \frac{\hbar^{2n} (-1)^n}{(2n+1)! 2^{2n}} \partial_n^{(2n+1)} \mathcal{W}. \quad (5.7)$$

El corchete de Moyal es entonces el corchete de Poisson que da la evolución clásica más correcciones cuánticas. Como las correcciones son del orden de  $\hbar$  o mayores, en el límite de  $\hbar$  muy pequeño el sistema debería evolucionar de acuerdo al corchete de Poisson y los efectos cuánticos no se deberían observar. Pero como sabemos, para sistemas caóticos el estado se “estira” exponencialmente rápido a lo largo de la variedad inestable y desarrolla estructuras coherentes en distancias grandes y a la vez también produce compresión exponencialmente rápida por la variedad estable. Esto causa que las correcciones al corchete de Poisson crezcan y se hagan no despreciables (como antes en un tiempo del orden del tiempo de Ehrenfest  $t_E$  que como vimos puede ser corto incluso en sistemas macroscópicos).

La solución surge si introducimos un pequeño acomplamiento con un entorno. En el límite de altas temperaturas de un entorno Ohmico se obtiene una ecuación equivalente a (5.7) pero con dos términos más, uno de fricción mas uno de difusión (en el límite de altas temperaturas el de fricción se puede despreciar). El término de difusión introduce decoherencia y además no permite compresión a escalas más pequeñas que  $\hbar$ . Además Zurek y Paz [1] conjeturaron que para un amplio rango del parámetro de difusión la pérdida de coherencia, medida a través de la entropía debía ser solamente dependiente del exponente de Lyapunov *clásico*.

A modo de descripción, en la Fig. 5.1 vemos un ejemplo (aunque en este caso para un mapa sobre el toro) de como la decoherencia reestablece la correspondencia. En la fila de gráficos superior se ve la evolución por un mapa clásico caótico (con difusión) de una distribución clásica simulando un autoestado de posición. En la fila intermedia se ve la evolución de la función de Wigner por el correspondiente mapa cuántico sin ruido. Se puede apreciar que rápidamente aparecen interferencias y se pierde la imagen clásica. Finalmente en la fila inferior vemos la evolución con el ruido difusivo Gaussiano descrito en el Cap. 4. Se puede ver en los primeros pasos aparecen interferencias debidas a las no linealidades, pero rápidamente son suprimidas y se nota como la función de Wigner sigue la dinámica clásica del panel superior.

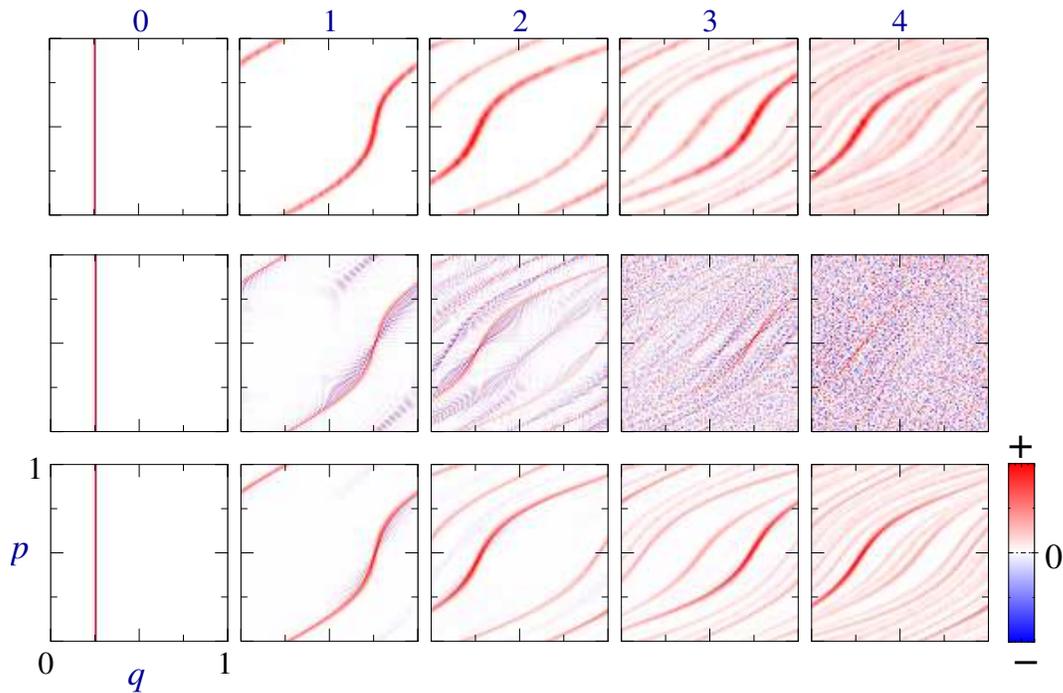


Figura 5.1: Comparación entre la evolución clásica con difusión (arriba), la evolución cuántica unitaria (en el medio) y la evolución cuántica difusiva (abajo) de la función de Wigner de un estado de posición por un mapa caótico.

### 5.3. Correspondencia espectral

Como tema central de esta tesis, damos un enfoque perfectamente complementario a la correspondencia que llamamos dinámica. Si en la sección anterior el problema era el comportamiento de sistemas caóticos y la correspondencia a tiempos pequeños, en esta sección nos ocupamos del comportamiento asintótico o a **tiempos grandes**. Es natural oponer a la correspondencia “en tiempo” una correspondencia “en espectro” [62, 12, 63, 64]. Trabajos recientes [64, 63, 65] se han ocupado de mostrar numéricamente las relaciones entre espectro clásico y cuántico mediante el truncado de los modos de Fourier del propagador cuántico.

Sin pretender la rigurosidad matemática de otros trabajos [62, 12], exponemos las características principales del espectro del propagador clásico de densidades y su relación con las tasas de decaimiento exponencial de las funciones de correlación. Finalmente enunciamos, de forma simplificada, un teorema que relaciona los espectro clásico y cuántico.

co para los propagadores suavizados con ruido Gaussiano, lo que nos permite establecer la correspondencia a través del espectro.

### 5.3.1. Evolución clásica de densidades

La interacción con el medio ambiente transforma estados puros en estados mezcla, por eso es esencial encarar el problema de la correspondencia (o la pérdida de la misma) mediante la dinámica de matrices densidad y de su representación en el espacio de fases.

Como la separación exponencial más el *mixing* hacen que sea prácticamente imposible la predicción de trayectorias individuales, el tratamiento establecido es mediante la descripción de la geometría del espacio de soluciones posibles y la evaluación de promedios sobre este espacio.

La evolución clásica de una distribución  $\rho(\mathbf{x})$  está dada por la ecuación de Liouville

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \mathcal{L}(\rho) \quad (5.8)$$

para sistemas Hamiltonianos, es

$$\mathcal{L}(\rho) = \{H, \rho\} \quad (5.9)$$

donde  $\{ , \}$  denota el corchete de Poisson. El operador de Liouville  $\mathcal{L}$  es el generador infinitesimal del grupo de traslaciones temporales en el espacio de densidades. El operador de Perron-Frobenius (PF)  $\mathcal{P}$  rige la evolución temporal de una densidad de probabilidades

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \mathcal{P}_t \rho(\mathbf{x}, 0) = \int \delta(\mathbf{x} - \Phi^t \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}, 0) d\mathbf{y} \quad (5.10)$$

Por otro lado la evolución de observables está determinada por el adjunto del PF, el operador de Koopman. Sea una cantidad observable  $A$ , su valor a tiempo  $t$  está dado por

$$A(\mathbf{y}, t) = \int \delta(\mathbf{x} - \Phi^t \mathbf{y}) A(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (5.11)$$

Para un mapa  $\Phi$  invertible y que preserva volúmenes en el espacio de fases, se puede ver

que la ecuación Ec. (5.10) se reduce a

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \mathcal{P}_t \rho(\mathbf{x}, 0) = \rho(\Phi^{-t} \mathbf{x}, 0) \quad (5.12)$$

Supongamos que la dinámica puede reducirse a un mapa estroboscópico mediante una sección de Poincaré  $M$  que preserva áreas. En ese caso la solución está dada por una recurrencia cuya ecuación en función del PF y del mapa  $M$  tiene la forma [57]

$$\rho_{n+1} = \mathcal{P} \rho_n = \int d\mathbf{x}' \delta(\mathbf{x} - M(\mathbf{x}')) \rho_n(\mathbf{x}'). \quad (5.13)$$

El propagador así definido es unitario en el espacio de funciones de cuadrado integrable  $\mathbb{L}^2$ . Es decir la dinámica es lineal y determinista.

La irreversibilidad puede aparecer por varios factores. En simulaciones numéricas de sistemas inestables (o cuya dinámica presenta estiramiento exponencial) se requiere una precisión inalcanzable si se quieren observar comportamientos a tiempos largos. El error de redondeo introduce un factor aleatorio. Además los sistemas cerrados son solamente una aproximación. Para simular sistemas realistas debe considerarse posibles interacciones con otro sistema o con un baño térmico. Una forma de incluir esta aleatoriedad es a través de términos tipo Langevin que implican difusión. La difusión provoca una retricción del espacio de funciones de densidad posible a espacios diferentes de  $\mathbb{L}^2$  y el propagador deja de ser una distribución tipo delta de Dirac para ser una función más suave (*coarse graining*).

Un primer paso a la hora de determinar y caracterizar propiedades estadísticas es estimar el comportamiento temporal de la función de correlación. Para dos funciones arbitrarias definimos la función de correlación como

$$C_t(f, g) = \int f(\mathbf{x}) \mathcal{P}^t g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \int g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (5.14)$$

Los sistemas que tienen la propiedad de *mixing*, en particular los sistemas caóticos, cumplen

$$C_t(f, g) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad (5.15)$$

El decaimiento es exponencial y la tasa de decaimiento asintótico de las funciones de

correlación está dada por las llamadas resonancias de Ruelle-Pollicott (RP). Para sistemas Anosov-A estas son los polos del resolvente

$$\mathcal{R}(z) = \frac{1}{z - \mathcal{P}} \quad (5.16)$$

del PF en una hoja de Riemann superior [66, 67].

Recientemente, particularmente en el ámbito de la teoría de información cuántica, también cobró interés el estudio del comportamiento de la cantidad conocida como fidelidad. En pocas palabras puede definirse la fidelidad a tiempo  $t$  como el overlap entre una función de ondas inicial evolucionada usando un determinado Hamiltoniano  $H$  con la misma función de ondas evolucionada con un Hamiltoniano  $H_\varepsilon$  que difiere del primero en una pequeña perturbación caracterizada por el parámetro  $\varepsilon$ . En experimentos de eco de spin también es conocida como eco de Loschmidt [7]. La fidelidad fue propuesta originalmente [11] como una medida de estabilidad de la dinámica cuántica ya que la dinámica unitaria no permitía caracterizar caos cuántico mediante el concepto de separación exponencial de condiciones iniciales. La idea es caracterizar como caótico un sistema que es sensible ante perturbaciones en la dinámica. Así se encontró que los sistemas clásicamente caóticos muestra comportamiento universal, para un determinado rango del parámetro  $\varepsilon$ . Para tiempos pequeños el decaimiento de la fidelidad está determinado por el exponente de Lyapunov mayor mientras que para tiempos grandes la aproximación al valor de saturación esta dado por las resonancias de Ruelle-Pollicott clásicas.<sup>3</sup>

Las mismas consideraciones son válidas en mecánica clásica [60]. La ecuación de Liouville clásica es unitaria y reversible como la ecuación de Schrödinger pero se puede probar que la fidelidad clásica (como se define en [60]) que describe la estabilidad estructural ante perturbaciones muestra un comportamiento asintótico análogo al de las funciones de correlación. En particular para sistemas caóticos está determinado por las resonancias de Ruelle-Pollicott del operador de PF.

Como el PF es un operador en un espacio de dimension infinita, el cálculo de los polos de la Ec. (5.16) no es trivial. Existen, sin embargo varios métodos de aproximación de las resonancias de RP. Uno de los métodos consiste en estudiar directamente evoluciones temporales de cantidades e interpolar los decaimientos exponenciales [68]. Méto-

---

<sup>3</sup>Para mas detalles ver Cap. 6 (pág. 79).

dos más avanzados incluyen el uso de técnicas de determinante de Fredholm, funciones zeta dinámicas y expansiones en ciclos<sup>4</sup> [69, 70] además de el uso de la fórmula de trazas [51]. Las técnicas de dinámica simbólica y particiones de Markov en el estudio del decaimiento de correlaciones es introducida por Brini *et al.* en [71].

Las resonancias de RP también pueden relacionarse con el espectro del propagador PF  $\mathcal{P}$  adaptado a un espacio diferente de  $\mathbb{L}^2$ . Recientemente en un trabajo muy detallado y completo, además de preciso, Blank *et al.* [62] proporcionaron una descripción del espectro del propagador de PF para sistemas Anosov-A. La idea central es que, para mapas que preservan áreas, si restringimos  $\mathcal{P}$  a espacios como  $\mathbb{L}^p$  donde la norma esencialmente da una idea de medida el espectro no da información útil

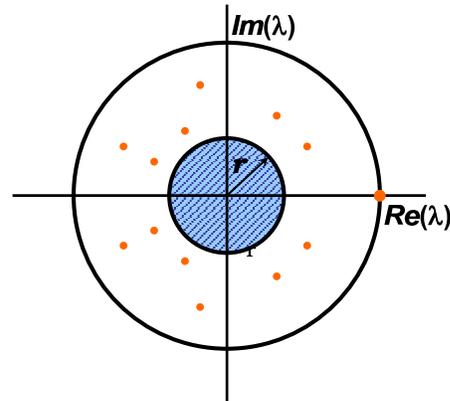


Figura 5.2: Representación esquemática del espectro de  $\mathcal{P}$ . Los puntos representan el espectro puntual ( $\sigma_{ps}$ ) y el círculo rayado de radio  $r$  representa el espectro esencial.

de la dinámica. Por esta razón los autores construyen espacios de Banach fuertemente anisotrópicos de funciones adaptadas a la dinámica del sistema en cuestión<sup>5</sup>. Estos espacios de Banach especialmente contruidos están compuestos por conjuntos asimétricos de funciones que son cada vez más suaves a lo largo de la variedad inestable y más singulares (“dual de suave”) a lo largo de la variedad estable. El resultado principal es que en estas bases el propagador es *cuasi*-compacto. Además demostraron que el espectro es estable ante perturbaciones aleatorias y propusieron un método esquemático para obtener una aproximación del espectro mediante matrices finitas, previa discretización.

La estructura del espectro puede ser descripta de la siguiente manera:

- **Espectro puntual**, de multiplicidad finita

$$\sigma_{ps} = \{\lambda_i, r < \lambda_i < \lambda_0 = 1\} \quad (5.17)$$

<sup>4</sup>Cycle expansion, ver [57].

<sup>5</sup>Espacios similares son utilizados en [72].

para un radio  $r < 0$ , y

- **Espectro esencial**, dentro del círculo de radio  $r$

En la Fig. 5.2 se ve una representación esquemática en el plano complejo del espectro del operador cuasi-compacto.

Cabe resaltar que una característica fundamental de los sistemas hiperbólicos es que la distancia entre  $\lambda_0 = 1$  y  $\lambda_1$  es estrictamente distinta de cero. Esto es fundamental para que haya decaimiento exponencial. Para demostrar esto usamos un razonamiento simplificado. Asumiendo que el espectro puntual  $\sigma_{ps}$  es no degenerado y además usando la hipótesis (válida en todos los casos estudiados) de que  $r \ll 1$ , entonces se puede hacer una aproximación del PF mediante los primeros términos de la descomposición espectral

$$\mathcal{P} \approx \sum_i \lambda_i \mathcal{R}_i(\mathcal{L}_i, \cdot) \quad (5.18)$$

donde  $\mathcal{R}_i$  y  $\mathcal{L}_i$  son las autofunciones a derecha e izquierda respectivamente. Usando esta expansión podemos reescribir la expresión (5.14) de la función de correlación  $C_{fg}$  como

$$C_{fg}(t) = \sum_i \lambda_i^t(f, \mathcal{R}_i)(\mathcal{L}_i, g) \quad (5.19)$$

donde se observa claramente el papel dominante del espectro  $\sigma_{ps}$  en el comportamiento temporal de  $C_{fg}$ . Así mismo, teniendo en cuenta que definimos  $\sigma_{ps}$  ordenado por módulo decreciente, es claro que el comportamiento asintótico está dado por

$$C_{fg}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \lambda_1^t(f, \mathcal{R}_1)(\mathcal{L}_1, g). \quad (5.20)$$

Esta ecuación indica la importancia de  $\lambda_1$  (y su distancia al círculo unidad) en el comportamiento a tiempos grandes.

### 5.3.2. Aproximación del espectro del Perron-Frobenius

El análisis de la sección anterior permitió identificar directamente el espectro del PF, adaptado a espacios de funciones especialmente diseñados, con las resonancias de RP. Cualquier método de cálculo numérico del espectro debe implicar aproximaciones o trun-

caciones ya que el operador actúa en espacios de funciones de dimensión infinita. Existen varias maneras de hacerlo pero aquí describiremos brevemente dos de los métodos más utilizados para calcular aproximaciones de este espectro.

### Truncación en bases ordenadas

El método de truncación de una base ordenada para calcular el espectro de  $\mathcal{P}$  es usado por ejemplo por Manderfeld *et al.* [64], Khodas *et al.* [65] y Hasegawa y Saphir [73], entre otros y es revisado y explicado por Fishman en [74]. Aquí resumimos los pasos a seguir de la siguiente manera

1. Elegir una base, adecuada según la topología del espacio de fases, que esté naturalmente ordenada por resolución. Típicamente modos de Fourier, polinomios de Legendre [73] o armónicos esféricos [64].
2. Truncar hasta una dimensión deseada  $N$  dejando las componentes de oscilaciones rápidas afuera. Esto actúa como coarse graining.
3. Calcular los autovalores del operador truncado. Se observa que a medida que se aumenta  $N$  en lugar de recuperar el espectro unitario, hay autovalores que permanecen *congelados* dentro del círculo unidad, independientemente de  $N$ .
4. se comparan estos autovalores truncados con los obtenidos directamente por continuación analítica del resolvente (5.16).

Debemos resaltar que este método ha sido implementado con cierto éxito [75] aún en el caso de sistemas con comportamiento mixto, es decir, con zonas de estabilidad inmersas en un mar caótico.

### Convolución con kernel Gaussiano

Como el anterior, este método consiste en un coarse-graining pero mediante la convolución con un kernel Gaussiano  $\mathcal{D}_\sigma$  de ancho característico  $\sigma$ . El resultado es que la delta de Dirac de la Ec. (5.13) es reemplazada por una Gaussiana<sup>6</sup> [12, 63]

$$\rho_{n+1} = \mathcal{P} \circ \mathcal{D}_\sigma \rho_n = \int d\mathbf{x}' e^{-\frac{(\mathbf{x}-M(\mathbf{x}'))^2}{2\sigma^2}} \rho_n(\mathbf{x}'). \quad (5.21)$$

<sup>6</sup>Que en el caso de estar sobre el toro debe ser debidamente periodizada.

Esto actúa efectivamente como si se agregara un ruido difusivo en las ecuaciones de movimiento [76, 63]. Debemos aclarar que, como para hacer los cálculos numéricos debe hacerse una discretización (de tamaño, digamos  $N$ ). Los autovalores del propagador discretizado y suavizado se aproximan a las resonancias en el límite  $N \rightarrow \infty$  y  $\sigma \rightarrow 0$ . Estos límites no conmutan, es decir si  $\sigma \rightarrow 0$  más rápido que  $N \rightarrow \infty$  entonces la matriz resultante es unitaria (es una matriz de permutación) y las resonancias no aparecen porque el espectro está sobre el círculo unidad.

### 5.3.3. Correspondencia a través del espectro del propagador cuántico suavizado

En el Cap. 4 describimos el efecto del ruido Gaussiano tanto sobre la matriz densidad como sobre superoperador que propaga la matriz densidad. El ruido Gaussiano produce decoherencia y difusión. El efecto de difusión es equivalente al producido por el kernel Gaussiano de la Ec. (5.21). En los dos casos el kernel Gaussiano sirve para modelar efectos incontrolables que introducen irreversibilidades, resultando en una evolución no unitaria. El teorema de Nonnemacher [12] que vale en general (no solamente para sistemas caóticos) permite relacionar los espectros de ambos propagadores (cuántico y clásico) suavizados. En forma simplificada podemos enunciarlo de la siguiente manera:

**Teorema.** *Sea un mapa suave sobre el toro y un parámetro de suavizado  $\varepsilon \approx 0$  arbitrario, entonces el espectro del propagador cuántico  $\mathbf{S}_\varepsilon = \mathbf{D}_\varepsilon \circ \mathbf{U}$  converge en el límite clásico  $N \rightarrow \infty$  al espectro puntual del propagador clásico  $\mathcal{P} \circ \mathcal{D}_\sigma \rho_n$  de la Ec. (5.21).*

Es decir, en el límite de  $N \rightarrow \infty$  y el ruido tendiendo a cero, los espectros cuántico y clásico son iguales. Es importante tener en cuenta que el orden en el cual se toman los límites no es intercambiable: si el ruido tiende a cero más rápido que  $N \rightarrow \infty$  se recupera la dinámica unitaria. El teorema puede ser extendido de forma inmediata a mapas sobre cualquier otro espacio de fases compacto, como el caso de la esfera usado en [64, 75, 65, 77].

En el caso de que  $U$  sea la versión cuántica de un mapa caótico, entonces si se toma adecuadamente el límite  $\varepsilon \rightarrow 0$  se ve que a partir del propagador cuántico suavizado se encuentran las resonancias de RP que son las cantidades clásicas y que determinan los decaimientos exponenciales de cantidades como la correlación.

Como vimos la forma intuitiva de mostrar la correspondencia (y la eventual ruptura de la misma) entre sistemas cuánticos y clásicos es mediante el estudio de la evolución temporal de algún observable. Nuestro enfoque que propone como complemento hacer un análisis espectral del sistema y ver bajo qué condiciones se puede dar una correspondencia. Se puede pensar como análogo de otros sistemas físicos en los que muchas veces es conveniente (o brinda otro tipo de información) un análisis en frecuencias que en tiempos.

# Capítulo 6

## Resultados numéricos

### 6.1. Espectro del superoperador suavizado

Como se vio en el capítulo anterior el espectro del propagador cuántico suavizado puede ser relacionado directamente con el espectro del propagador clásico cuando es suavizado de forma equivalente. Es decir si se usa un kernel de difusión Gaussiano, el ancho de esta función debe ser equivalente en ambos casos. Además, para mapas hiperbólicos, en el límite del parámetro de suavizado  $\varepsilon$  tendiendo a cero, el espectro está enteramente contenido dentro del círculo unidad, a excepción del autovalor 1. Así, calculando el espectro del superoperador cuántico es posible obtener las resonancias RP que determinan las tasas de decaimiento de cantidades clásicas dependientes del tiempo como la autocorrelación así como cantidades cuánticas como el eco de Loschmidt y la entropía lineal (decaimiento de la pureza).

Con la aparición de las resonancias de RP se establece una forma de correspondencia complementaria al teorema de Ehrenfest para la evolución de los valores medios de observables. Sin embargo, el cálculo puede presentar problemas. Como se indicó en el Cap. 5 el propagador clásico tiene dimensión infinita y el cálculo de las resonancias requiere ciertas aproximaciones o truncaciones. La ventaja del propagador cuántico (en el toro) es que es una matriz finita, por lo que el paso de discretización no es necesario. Sin embargo el superoperador es una matriz de  $N^2 \times N^2$  y en el límite semiclásico  $N \rightarrow \infty$  este cálculo resulta intratable. Un análisis simple nos indica que los autovalores relevantes

son los que tienen mayor módulo, ya que son éstos los que determinan los decaimientos a tiempos grandes, mientras que para tiempos pequeños como veremos, los decaimientos están dominados por el exponente de Lyapunov más grande. Teniendo en cuenta esto, usamos métodos de aproximación que permiten obtener la parte relevante del espectro, sin necesidad de resolver por completo el problema de autovalores. A su vez, mostramos que no es necesario alcanzar el límite  $N \rightarrow \infty$  ya que el espectro se estabiliza en los valores clásicos para un amplio rango de valores de  $N$  y del parámetro  $\varepsilon$ .

### 6.1.1. Mapas pateados

Por motivos de eficiencia utilizaremos para los cálculos numéricos mapas que pueden escribirse como sucesiones de cizallamientos, o “patadas” (*kicks*), primero una de potencial (*kick* en momentos), seguida de una de cinética (*kick* en posición):

#### Patada de potencial

$$\begin{pmatrix} p' \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -V'(q) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} p - V'(q) \\ q \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

seguida de una

#### Patada cinética

$$\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ -T' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p' \\ q \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} p' \\ q - T'(p') \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

que escrito en la forma usual de mapas es

$$\begin{aligned} p' &= p - \frac{dV}{dq}(q) \\ q' &= q - \frac{dT}{dp'}(p') \end{aligned} \pmod{1}, \quad (6.3)$$

donde el símbolo ‘prima’ indica la correspondiente coordenada transformada. La Ec. (6.3) está asociada a una transformación canónica tipo  $F_2$  [27, 78]

$$F_2(q, p') = V(q) + p'q - T(p') \quad (6.4)$$

a través de las ecuaciones de la transformación canónica

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} \quad (6.5)$$

$$q' = \frac{\partial F_2}{\partial p'}. \quad (6.6)$$

El mapa cuántico asociado a esta transformación tiene la forma simple

$$U = e^{2\pi i N T(\hat{p})} e^{-2\pi i N V(\hat{q})} \quad (6.7)$$

que puede implementarse de forma eficiente usando transformadas de Fourier rápidas.

Para los cálculos numéricos utilizamos dos mapas:

1. La versión cuántica [22] del mapa

$$\begin{aligned} p' &= p + q - 2\pi k \sin[2\pi q] \\ q' &= q + p' + 2\pi k \sin[2\pi p'] \end{aligned} \pmod{1} \quad (6.8)$$

que es un gato de Arnol'd perturbado. Este mapa tiene un exponente de Lyapunov uniforme (prácticamente) independiente de  $k$  mientras que las resonancias de Ruelle-Pollicot dependen fuertemente de la perturbación. Para el caso del gato sin perturbar,  $k = 0$ , los decaimientos son superexponenciales, esto es, todas las resonancias están en el origen [12].

2. El mapa de Harper

$$\begin{aligned} p' &= p - 2\pi k_1 \sin(2\pi q) \\ q' &= q + 2\pi k_2 \sin(2\pi p') \end{aligned} \pmod{1} \quad (6.9)$$

que deriva de un Hamiltoniano que describe una partícula sujeta impulsos periódicos, cuya amplitud depende de la posición de la partícula [79]. Variando los parámetros  $k_1$  y  $k_2$  se puede ir desde una dinámica completamente regular ( $k_1, k_2 \lesssim 0.0175$ ) a completamente caótico ( $k_1, k_2 \gtrsim 0.1$ ). En todos los cálculos tomamos  $k_1 = k_2 = k$ .

## 6.1.2. Método iterativo

### 6.1.2.1. Descripción

La idea es reducir el problema de autovalores de  $N^2 \times N^2$  correspondiente al cálculo del espectro del superoperador suavizado a un problema de dimensión, esperablemente, mucho menor y que la información que se obtenga de ahí sea útil. En otras palabras, intentamos obtener los principales autovalores, es decir los de mayor módulo, diagonalizando una matriz “pequeña”. Si bien el término “pequeña” no es del todo preciso, diremos que nos conformamos que la dimensión sea *del orden* de  $10 \times 10$  (valores típicos para  $N$  en los cálculos realizados van desde 50 hasta 450, por lo que diagonalizar  $N^2 \times N^2$  puede resultar por lo menos penoso).

Para encarar el problema usamos los conocimientos cualitativos que tenemos del espectro de mapas como  $\mathbf{S}_\varepsilon$  (Ec. (4.17) en la pág. 43). Esta es una matriz que es una suma convexa de matrices unitarias y por lo tanto es biestocástica. Esto implica, entre otras cosas, que su espectro es complejo y está contenido completamente dentro del círculo unidad, excepto el autovalor 1. Por ser  $\mathbf{S}_\varepsilon$  unital sabemos que el estado uniforme  $\rho_I = I/N$  corresponde al autovalor unidad. Además como el mapa  $U$  corresponde, en los casos considerados a un mapa (que clásicamente es) ergódico y *mixing* deducimos que  $\rho_I$  es el único estado de autovalor unidad.

Antes que nada reduciremos la dimensión a  $(N^2 - 1) \times (N^2 - 1)$  simplemente proyectando el espacio de estados sobre el espacio ortogonal a  $\rho_I$ . Esto se puede hacer de la siguiente manera. Sea un estado  $\rho$  llamaremos  $\rho^*$  a las matrices ortogonales (en el sentido de Hilbert-Schmidt) a  $\rho_I$  que definimos como

$$\rho^* \stackrel{\text{def}}{=} (\rho - \rho_I). \quad (6.10)$$

La ortogonalidad se demuestra de manera simple, utilizando el producto escalar de Hilbert-Schmidt para matrices (usamos la notación “tipo” Dirac definida en la Sec. 4.3.1 en la pág. 40<sup>1</sup>)

$$(\rho^* | \rho) = \text{Tr}[\rho^* \rho_I] = \text{Tr}[(\rho - I/N)I/N] = \frac{1}{N^2} \text{Tr}[N\rho - I] = 0 \quad (6.11)$$

---

<sup>1</sup>También en el Ap. A.

donde usamos (por definición)  $\text{Tr}[\rho] = 1$  y  $\text{Tr}[I] = N$ . Por lo que el espacio ortogonal de  $\rho_I$  es el espacio de las matrices sin traza, ya que

$$\text{Tr}[\rho^*] = \text{Tr}[\rho - I/N] = \frac{1}{N}\text{Tr}[N\rho - I] = 0. \quad (6.12)$$

Luego, proyectando sobre el subespacio de matrices de traza nula (ya no se pueden llamar “estados”) nos liberamos de calcular el autovalor unidad que de antemano sabemos que es parte del espectro y conocemos su autofunción. Esto puede parecer poco pero a la hora de hacer experimentos numéricos reduce algunos tipos de redundancias que pueden resultar en errores [80].

Para el segundo paso nos basamos en el método de Lanczos [80]. Además nos inspiramos en trabajos recientes [63, 81, 72, 62]. El método, que llamamos iterativo, se basa en construir bases (de dimensión reducida) adaptadas a la dinámica sobre la cual proyectaremos el superoperador de manera que el problemas de autovalores generalizado que obtenemos sea sensiblemente menor en dimensiones.

El método iterativo consta de varios pasos que pasamos a destallar. Partiendo de un estado cualquiera  $\rho$ , como se indicó el primer paso es proyectar dicho estado sobre el subespacio ortogonal a  $\rho_I$  y llamamos a esta nueva matriz (de traza nula)  $\rho_0$ . Luego mediante sucesivas iteraciones del mapa construimos los dos conjuntos  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{B}$

$$\mathcal{F} = \{\rho_0, \rho_1^u, \dots, \rho_n^u, \dots\}, \quad (6.13)$$

$$\mathcal{B} = \{\rho_0, \rho_1^s, \dots, \rho_n^s, \dots\} \quad (6.14)$$

donde

$$\rho_n^u = \mathbf{S}_\varepsilon(\rho_{n-1}^u) = \mathbf{S}_\varepsilon^n(\rho_0) \quad (6.15)$$

$$\rho_n^s = \mathbf{S}_\varepsilon^\dagger(\rho_{n-1}^s) = \mathbf{S}_\varepsilon^{\dagger n}(\rho_0). \quad (6.16)$$

y en principio podríamos ir hasta  $N^2$  elementos para cada conjunto. Tal como definimos estos conjuntos podemos ver que los elementos de  $\mathcal{F}$  poseen información de la evolución “hacia adelante” mientras que los elementos de  $\mathcal{B}$  poseen información de la evolución “hacia atrás”. Destacamos que la dinámica es irreversible por lo que interpretamos estas

comillas como evolución ruidosa y lo que determina el sentido de la evolución es la parte unitaria de  $\mathbf{S}_\varepsilon$ . En este sentido decimos que estos conjuntos están *adaptados a la dinámica* del sistema. En la Fig. 5.1 (en la pág. 51) se puede ver (fila inferior) cómo evoluciona un estado inicial según un mapa unitario compuesto con ruido difusivo Gaussiano. Las sucesivas iteraciones pueden identificarse con los elementos  $\rho_n^u$  ( $n = 0, \dots, 6$ ) del conjunto  $\mathcal{F}$ . Comparando con la fila superior de la misma figura que corresponde a la dinámica del mapa clásico, con un ruido difusivo equivalente, vemos que los elementos de  $\mathcal{F}$  se alínean según las variedades inestables del mapa clásico.

Representado en la notación de vectores, queda claro que el conjunto  $\mathcal{B}$  es el conjunto dual de  $\mathcal{F}$ , ya que

$$(\rho_0^s | \rho_n^s) = (\rho_0^s | \mathbf{S}_\varepsilon^n | \rho_0^u) = (\mathbf{S}_\varepsilon^{n\dagger} | \rho_0^u) = (\rho_n^s | \rho_0) \quad (6.17)$$

donde  $\rho_0 \equiv \rho_0^s$ . Luego proyectando  $\mathbf{S}_\varepsilon$  sobre el conjunto (no-ortogonal)  $\mathcal{B}$  tenemos los siguientes elementos de matriz

$$[\mathbf{S}_\varepsilon]_{ij} = (\rho_i^s | \mathbf{S}_\varepsilon | \rho_j^u) = (\rho_i^s | \mathbf{S}_\varepsilon(\rho_j^u)) = (\rho_i^s | \rho_{j+1}^u). \quad (6.18)$$

Como dijimos el conjunto  $\mathcal{B}$  (y el  $\mathcal{F}$ ) no es ortogonal. Por lo tanto para diagonalizar la matriz obtenida es necesario resolver un problema de autovalores generalizado

$$\det \left[ [\mathbf{S}_\varepsilon]_{ij} - \lambda [\mathbf{O}]_{ij} \right] = 0 \quad (6.19)$$

donde

$$[\mathbf{O}]_{ij} = (\rho_i^s | \rho_j^u) \quad (6.20)$$

es la matriz de *overlaps* entre elementos de  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{B}$ . Cabe destacar que la estructura de ambas matrices es muy simple. Es fácil ver, a partir de la Ec. (6.17), que

$$(\rho_i^s | \rho_j^u) = (\rho_0^s | \rho_{i+j}^u) = (\rho_{i+j}^s | \rho_0^u) \quad (6.21)$$

por lo que la estructura de las matrices armadas es muy simple ya que sus elementos sobre las diagonales perpendiculares a la diagonal principal son iguales. Hasta aquí no se

introdujo ninguna ventaja puesto que en principio el tamaño de los conjuntos adaptados podría ser  $N^2$  y el problema de autovalores sería esencialmente el mismo.

Este punto se resuelve teniendo en cuenta que por la estructura del espectro descrita en la Sec. 4.3.4 los elementos de matriz decrecen esencialmente como  $|\lambda_1|^{i+j}$ . Como consecuencia, las matrices  $[\mathbf{S}_\varepsilon]$  y  $[\mathbf{O}]$  tienen valores significativos solamente para valores pequeños de  $(i+j)$ . Así se introduce un corte natural en la dimensión de estas matrices o, si se quiere, de la cantidad de elementos en los conjuntos  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{B}$  que llamaremos  $n_{\max}$ . Si tomamos  $n_{\max}$  demasiado grande, las matrices construidas son singulares puesto que tienen cada vez más filas y columnas con entradas (esencialmente) nulas.

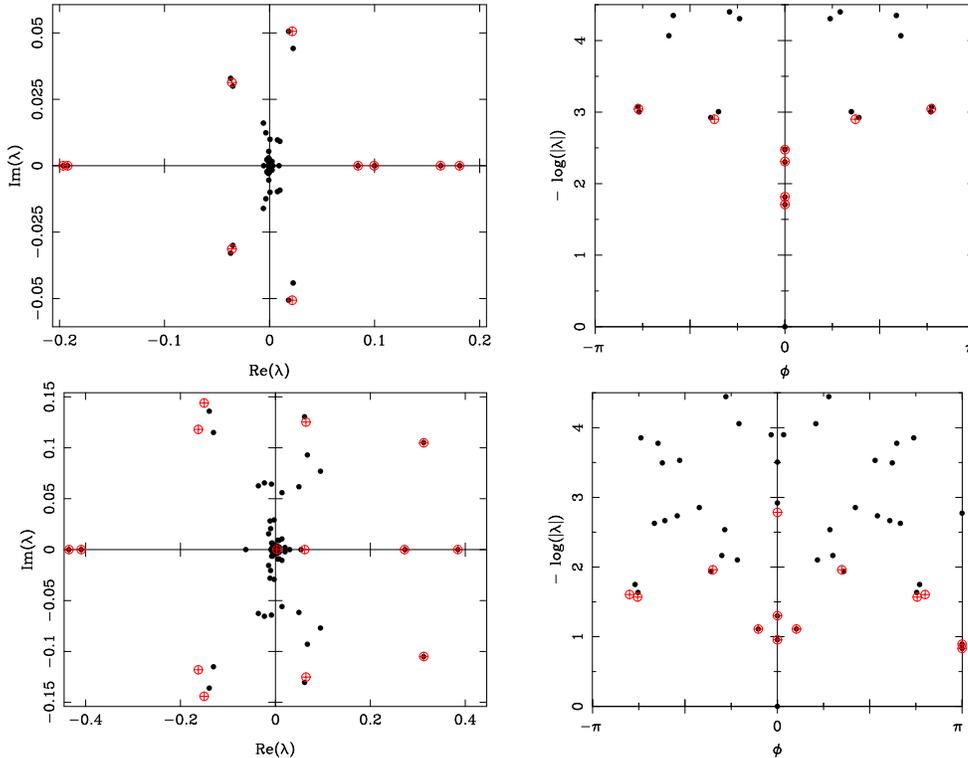


Figura 6.1: Comparación entre los autovalores obtenidos usando el método iterativo ( $\oplus$ ) y los obtenidos a partir del propagador clásico suavizado ( $\bullet$ ), para el gato de Arnold perturbado. A la izquierda mostramos los autovalores en el plano complejo y a la derecha su logaritmo. Datos:  $N = 100$ ,  $\varepsilon = 0.4$ ,  $k = 0.01$  (arriba),  $K = 0.02$  (abajo)

El problema de autovalores queda entonces reducido a  $n_{\max} \times n_{\max}$ . En el Ap. B demostramos que resolviendo este problema de autovalores reducido se obtienen (en buena aproximación) los primeros  $n_{\max}$  autovalores de  $\mathbf{S}_\varepsilon$ .

### 6.1.2.2. Resultados

Calculamos el espectro del propagador clásico correspondiente al mapa de la Ec. (6.8) usando un suavizado Gaussiano del propagador de Perron-Frobenius y lo comparamos con el espectro aproximado obtenido usando el método iterativo. En la Fig. 6.1 vemos la comparación para dos valores de la perturbación (a)  $k = 0.1$  y (b)  $k = 0.02$ . La dimensión es  $N = 100$  y el valor de corte tomado en ambos casos es  $n_{\max} = 10$ . Como se esperaba por el teorema de Nonnenmacher, se puede ver claramente una buena coincidencia para los autovalores de mayor módulo. Las discrepancias aparecen a medida que disminuye el módulo de  $|\lambda_i|$ . Esta es una de las limitaciones del método: sólo se pueden calcular un número pequeño de autovalores porque la precisión se pierde a medida que incrementamos  $n_{\max}$ .

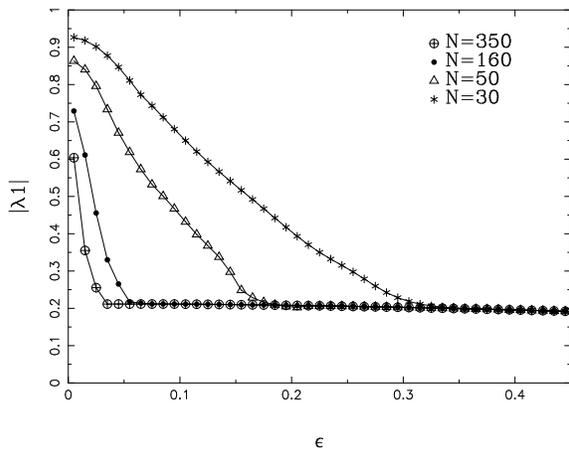


Figura 6.2: **Módulo del autovalor principal  $|\lambda_1|$  como función de  $\varepsilon$  para diferentes valores de  $N$ . A medida que  $N$  crece (y  $\varepsilon$  decrece) el valor se hace constante, permitiendo extrapolar para obtener el valor clásico. El mapa es el gato perturbado (6.8) con  $k = 0.01$ .**

En la Fig. 6.3 se puede ver que hay una amplia región en el espacio de los parámetros (sombreada de color amarillo) en la que el espectro principal permanece esencialmente invariante ante cambios de  $\varepsilon$  o  $N$ . Estos son los valores **clásicos** correspondientes a las resonancias de Ruelle-Pollicot. También se puede ver en el gráfico que los límites  $\varepsilon \rightarrow 0$  y  $N \rightarrow \infty$ , necesarios en principio para obtener las resonancias de RP no son

Para mostrar que estas cantidades son realmente clásicas realizamos otro cálculo. Primero calculamos solamente  $|\lambda_1|$  variando  $N$  y  $\varepsilon$  y observamos que a medida que  $N$  crece y  $\varepsilon$  disminuye, el valor se hace aproximadamente constante (Fig. 6.2). Esta afirmación debe valer (según el teorema de Nonnemacher) para todos los autovalores. Nos conformamos con mostrarlo para los de mayor módulo que son los que determinan los decaimientos.

Variando los parámetros  $N$  y  $\varepsilon$  obtuvimos los primeros 10 autovalores de  $\mathbf{S}_\varepsilon$  para el caso del gato perturbado con

conmutativos. Si fijamos  $N$  y tomamos valores de  $\varepsilon \rightarrow 0$  se puede ver que recuperamos el espectro del mapa unitario y los autovalores sobre el círculo unidad (que en el caso de la figura corresponde a  $\ln(r) = 0$ ). Por lo tanto al tomar los límites debemos hacer  $N \rightarrow \infty$  más rápido que  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

La línea cortada (dibujada a “mano alzada”) sobre el gráfico (Fig. 6.3) sugiere una relación funcional óptima entre  $\varepsilon$  y  $N$  que divide la región clásica de la cuántica (sugerida en esquemáticamente en la Fig. 6.4). En [12], Nonnenmacher supone una relación  $\varepsilon(N)$  y deduce que como condición necesaria debe cumplirse que

$$N\varepsilon(N) \gg 1. \quad (6.22)$$

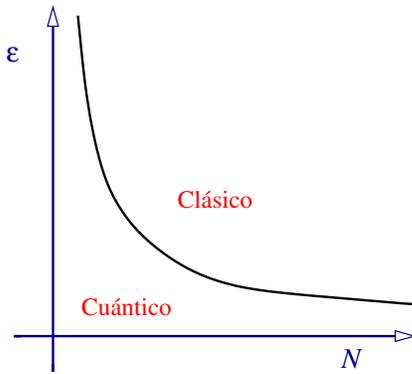


Figura 6.4: **Esquema de la dependencia funcional entre  $\varepsilon$  y  $N$  que separa el comportamiento clásico del cuántico.**

Esta relación es obvia si se piensa que  $1/N = 2\pi\hbar$  por lo que la Ec. (6.22) implica que, para que el ruido sea significativo, el tamaño  $\varepsilon$  del suavizado (grano grueso) debe ser mayor que la mínima escala cuántica  $1/N$  (que es, por ejemplo, la distancia entre dos posiciones contiguas sobre el toro). En la Fig. 6.4 mostramos esquemáticamente la relación entre  $\varepsilon$  y  $N$  que separa el comportamiento clásico y cuántico. Al momento de terminar la tesis, la relación óptima  $\varepsilon(N)$  no fue encontrada ni analítica ni numéricamente.

En un trabajo reciente Toscano et al. [82] investigan los tiempos de ruptura de la correspondencia entre la mecánica clásica y la cuántica de un sistema caótico. Encuentran un ley de escaleo universal que tiende a cero a medida que crece el parámetro de difusión (y obviamente también cuando  $\hbar \rightarrow 0$ ). Conjeturamos que esta relación puede estar relacionada con la función  $\varepsilon(N)$  que buscamos pero hasta el momento no lo hemos probado.

Además de clacular el espectro principal, el método iterativo nos permite obtener en buena aproximación las autofunciones. En la Fig. 6.5 mostramos la función de Husimi de las cuatro primeras (sin contar  $\rho_I$  que es trivial). Se puede ver, como esperábamos que las  $R_i$  se alinean de acuerdo a las variedades inestables (arriba) mientras que las  $L_i$  se alinean

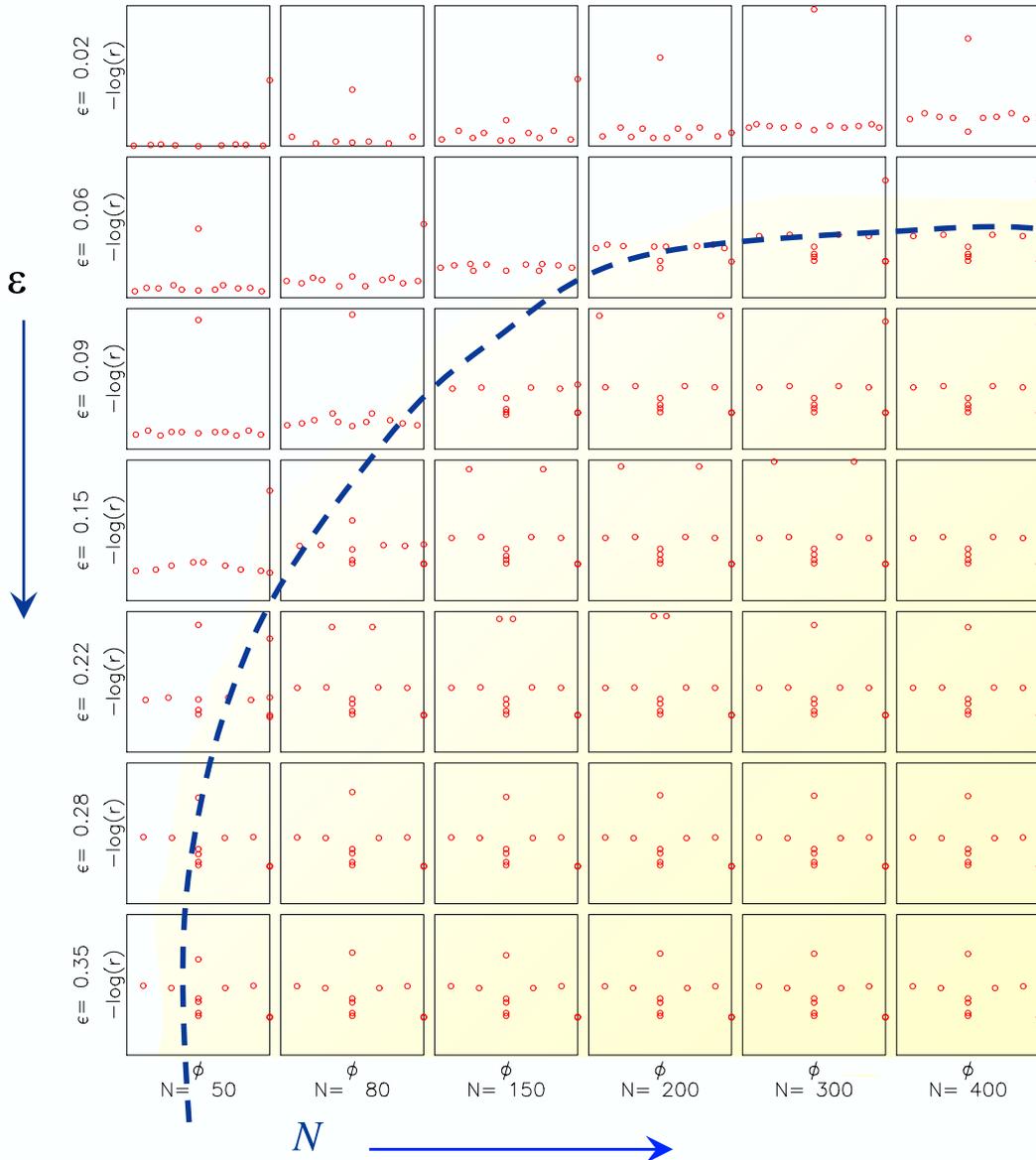


Figura 6.3: Espectro principal de  $\mathbf{S}_\varepsilon$  para diferentes valores de  $\varepsilon$  y  $N$ . Si  $\lambda_i$  es el  $i$ -ésimo autovalor, entonces  $\ln(\lambda_i) = \ln(r_i) + i\phi_i$  (con  $r_i = |\lambda_i|$ ) y las coordenadas en el gráfico son  $(\phi, -\ln(r))$ . Los rangos de los ejes son  $\phi \in [-\pi, \pi]$  y  $-\ln(r) \in [0, 6]$ . El mapa es el gato perturbado de la Ec. (6.8) con  $k = 0.02$  y el valor de truncado es  $n_{\max} = 12$ .

de acuerdo a las variedades estables. Dentro de la precisión de la máquina, los productos

$$(L_i | \mathbf{S}_\varepsilon | R_j) = \lambda_j \delta_{ij} \quad (6.23)$$

$$(R_i | \mathbf{S}_\varepsilon | L_j) = \lambda_j^* \delta_{ij} \quad (6.24)$$

se cumplen, lo cual significa que además de ser autofunciones correctas se satisface la condición de biortogonalidad (4.24), por lo que deducimos que son las autofunciones buscadas. El hecho de que la representación de Husimi de  $R_i$  y  $L_i$  tome valores positivos

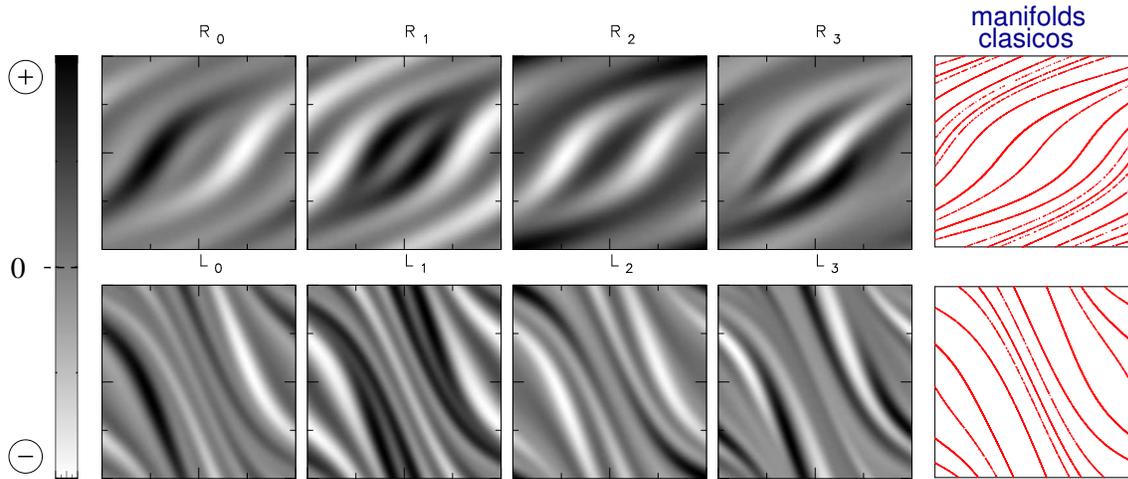


Figura 6.5: **Función de Husimi para las primeras cuatro autofunciones derechas ( $R_i$ ) e izquierdas ( $L_i$ ) de  $S_\varepsilon$  para el gato perturbado con ruido difusivo. Datos:  $N = 100$ ,  $k = 0.02$ ,  $\varepsilon = 0.3$ , y el valor de truncado  $n_{\max} = 12$ . En el extremo derecho se muestran los manifolds clásicos inestable (arriba) y estable (abajo).**

se debe a que son operadores no Hermíticos y de traza nula.

### 6.1.2.3. Ventajas y limitaciones del método

El método descrito en las secciones anteriores permite, con buena aproximación, calcular los principales autovalores de una matriz doblemente estocástica. La ventaja de este método está en que permite reducir considerablemente el problema de autovalores (siempre y cuando estén dadas las condiciones enumeradas en el Ap. **B**). Así si las dimensiones típicas de los espacios de Hilbert utilizados eran del orden de 450 con este método se pudieron obtener, por lo menos para los casos tratados, entre los 10 y 15 primeros autovalores. Esto es reducimos el problema de diagonalizar una matriz de  $\sim 202500 \times 202500$  a  $\sim 15 \times 15$ . Esto es favorable siempre y cuando sólo se necesiten los autovalores **de mayor módulo**. Tal es el caso de la determinación de las tasas de decaimientos a tiempos grandes de algunas cantidades como la entropía lineal o el eco de Loschmidt (Sec. **6.3**). Sin embargo, como se ve en la Fig. **6.1**, a medida que disminuye el módulo de  $\lambda_i$  la precisión

del método disminuye. Además la cantidad de autovalores que se pueden calcular con precisión depende de  $(1 - |\lambda_1|)$  ya que es esencialmente ésta cantidad la que determina el módulo de los elementos de matriz de la Ec. (6.21).

Por lo tanto antes de utilizar este método se debe determinar primero el número de autovalores relevantes a calcular. Luego es conveniente tener una idea del orden de magnitud de la cantidad  $(1 - |\lambda_1|)$  y determinar el tamaño  $n_{\max}$  de la matriz a diagonalizar. Este proceso es quizás lo más engorroso, ya que a priori no se conocen los órdenes de magnitud y, por lo menos en los casos presentados aquí, fue determinado al tanteo.

### 6.1.3. Truncación en la representación de cuerdas

#### 6.1.3.1. Definición y resultados

Si necesitamos realizar un estudio algo más completo del espectro quizás sea conveniente diagonalizar el superoperador completo, que como vimos puede resultar (virtualmente) imposible, o truncar la matriz de una manera inteligente que nos de una cantidad considerablemente mayor, por lo menos que la que nos da el método iterativo. Para esto nos valemos de las propiedades espectrales del ruido  $\mathbf{D}_\varepsilon$ .

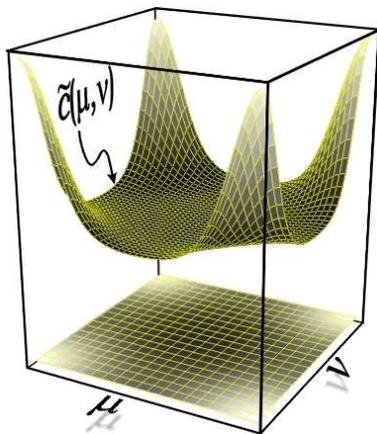


Figura 6.6: Representación de  $\tilde{C}_\varepsilon(\mu, \nu)$ .

Como vimos en la Sec. 4.3.1 y Sec. 4.3.3 el efecto del ruido Gaussiano sobre el propagador unitario es suavizarlo. Como se ve en la Ec. (4.18), en la representación de cuerdas el efecto de  $\mathbf{D}_\varepsilon$  es simplemente modular los elementos del propagador unitario  $\mathbf{U}$  con el kernel  $\tilde{C}_\varepsilon(\mu, \nu)$  (Ec. (4.14)). Esto se esquematiza en la Fig. 6.6. Solo sobreviven los elementos que corresponden a las cuerdas “cortas” que en la figuras corresponden a los cuatro picos de  $\tilde{C}_\varepsilon(\mu, \nu)$  (o las cuatro zonas claras en la región proyectada por debajo). EL efecto sobre un estado se observa en la función de Wigner. Las oscilaciones

rápidas de la función de Wigner, asociadas a las interferencias cuánticas, se corresponden con las cuerdas largas. El progresivo suavizado de las oscilaciones introduce decoherencia

(como se ve en la Fig. 4.3 de la pág. 42)

La idea entonces es construir el superoperador en la representación de cuerdas  $\mathcal{S}_{\alpha\beta}$ , según la Ec. (4.18) y truncar para valores de  $\alpha$  mayores que algún valor a determinar, dependiendo de la cantidad de autovalores que se quieran calcular, del ancho de  $\tilde{C}_\varepsilon(\mu, \nu)$ , es decir igualar a cero los elementos tales que  $\alpha > a/(\varepsilon N)$  (donde  $a > 1$ ). En otras palabras, el método consiste en anular los modos de Fourier grandes (que en Wigner se traduce en oscilaciones de longitud de onda pequeña). Este método es análogo al utilizado en [64, 75] para el caso de mapas sobre la esfera, donde se truncan los índices altos en la base de armónicos esféricos. Cabe aclarar que, si bien esta forma de calcular el espectro es válida, como se demuestra en [77], el superoperador truncado resultante no es completamente positivo, un requisito (que algunos reclaman como) necesario para que corresponda a un proceso físico posible.

La dimensión de la matriz que resulta luego de truncar es del orden de  $4(a/(\varepsilon))^2$  ya que debemos considerar cuatro veces el área de una de las regiones claras en la parte inferior de la figura Fig. 6.6 que es del orden de cuadrado del semi-ancho de  $\tilde{C}_\varepsilon(\mu, \nu)$ .

A diferencia del método iterativo, esta forma de calcular el espectro aproximado permite hacerlo tanto para mapas cuyo análogo clásico es regular, mixto o completamente caótico. Esto no era posible en el método iterativo dado que depende crucialmente de la presencia de un *gap* entre  $\lambda_0 = 1$  y  $|\lambda_1|$ . En la Fig. 6.7 mostramos las diferencias entre espectros del mapa de Harper variando el parámetro  $k$  desde regular (a), mixto (b) y (c), hasta completamente caótico (d). En el caso regular, tomamos  $k = 0.008$  y se puede ver que el espectro es en realidad cercano al del ruido  $\mathbf{D}_\varepsilon$  (Fig. 4.2 (a), pág 41) o sea que en este caso es el mapa unitario el que actúa como perturbación del ruido (y no al revés). A medida que aumentamos  $k$  vemos que el espectro se va distribuyendo dentro del círculo unidad pero el *gap*  $1 - |\lambda_1|$  se mantiene aproximadamente nulo. Solamente en el caso caótico todos los autovalores están claramente dentro del círculo unidad.

En la figura Fig. 6.8 se ve el resultado del cálculo del espectro  $\mathbf{S}_\varepsilon$  para tres valores diferentes de  $a$  usando el mismo mapa de la Ec. (6.8) que es completamente caótico y por ende tiene un *gap* finito. Para  $a = 1$  el corte es todavía insuficiente y el cálculo no da el resultado esperado. Sin embargo, para la parte principal del espectro y hasta valores (de  $|\lambda|$ ) del orden de  $10^{-4}$  el espectro se estabiliza a partir de  $a = 2$ . A medida que aumentamos  $a$  aparecen más autovalores, cada vez más cercanos al origen. Como

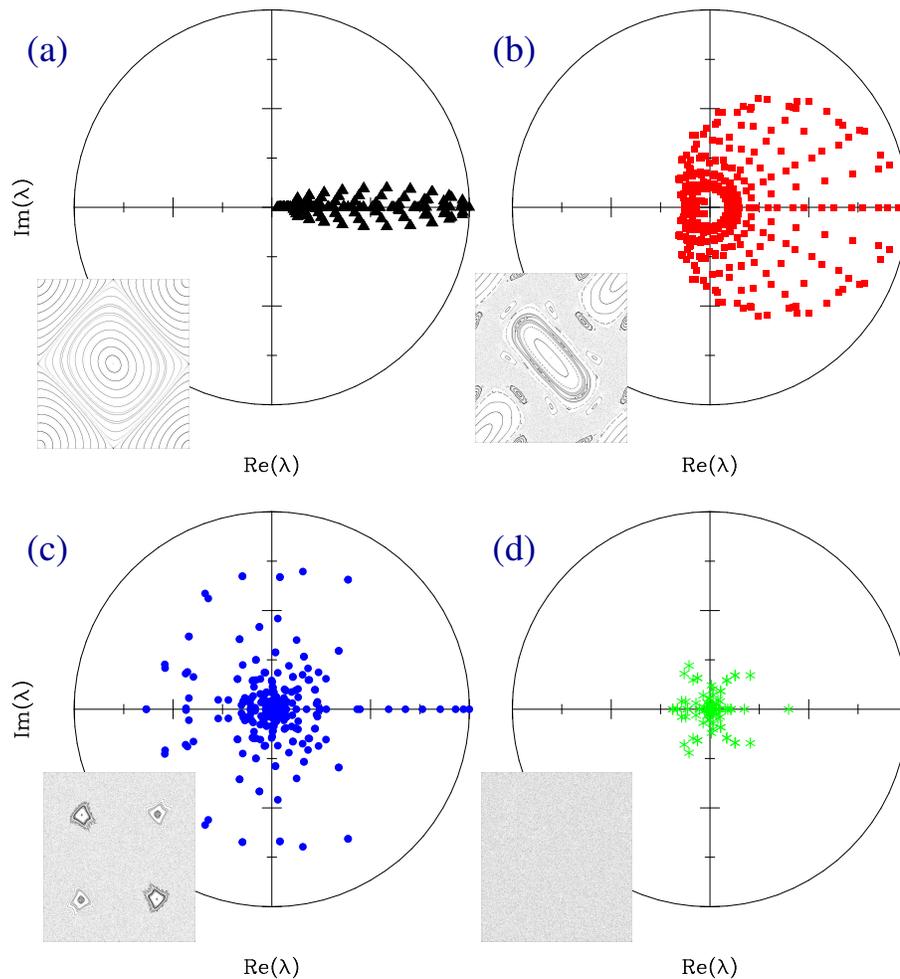


Figura 6.7: Comparación de los espectros de  $S_\epsilon$  ( $N = 100$ ,  $\epsilon = 0.2$  para el Harper de a Ec. (6.9) con distintos valores de  $k$ . (a)  $k = 0.008$ , regular; (b)  $k = 0.047$  mixto; (c)  $k = 0.079$ , mixto; (d)  $k = 0.2$ , caótico. Los cuadrados pequeños son los correspondientes diagramas de fases. Los círculos tienen radio unidad.

complemento, en la Fig. 6.9 graficamos el espectro obtenido para diferentes valores de  $N$  en el caso del mapa de Harper (Ec. (6.9)) completamente caótico ( $k = 0,2$ ), tomando un valor de truncado fijo ( $a = 2$ ). Se ve que para  $N = 50$  el espectro está completamente dentro del círculo unidad con un gap significativo y para  $N = 100$  y  $200$  el espectro se estabiliza en los valores que asociamos con las resonancias RP.

Con este método se puede reducir entonces efectivamente el problema de diagonalizar matrices  $N^2 \times N^2$  a matrices del orden de  $N \times N$  y conseguir así los  $N$  autovalores de

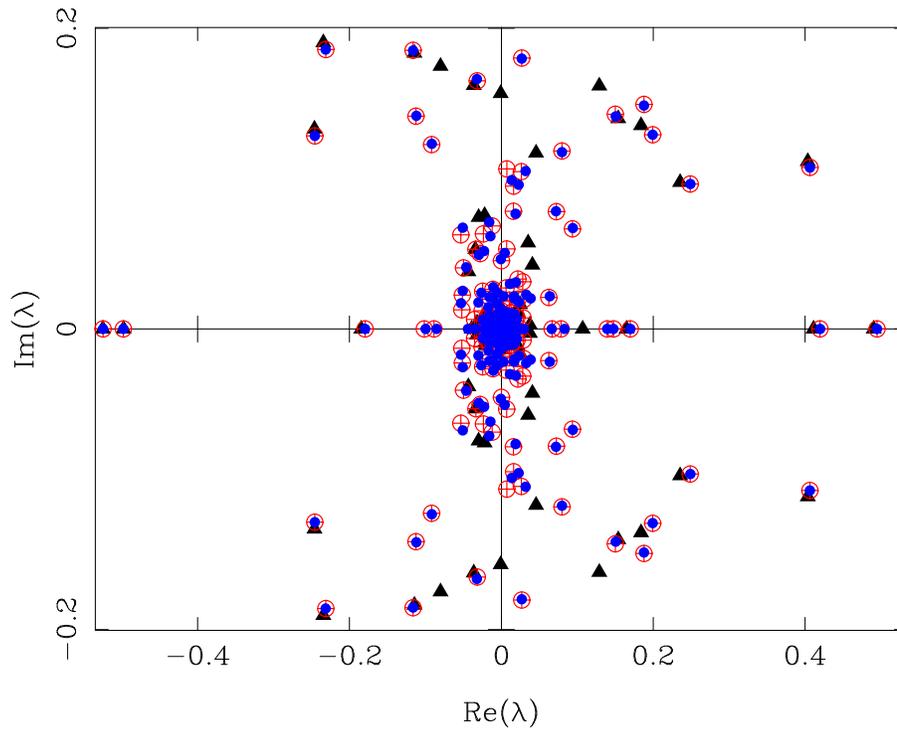


Figura 6.8: Comparación del espectro calculado mediante la truncación del superoperador en la representación de cuerdas a una  $\dim = 4(a/\varepsilon)^2$ , tomando tres valores de  $a$  diferentes: (▲)  $a = 1$ , y  $\dim = 16$ ; (⊕)  $a = 2.0$  y  $\dim = 100$ ; (●)  $a = 3.0$  y  $\dim = 196$ . El mapa es el gato perturbado con  $k = 0.02$  y  $N = 100$ .

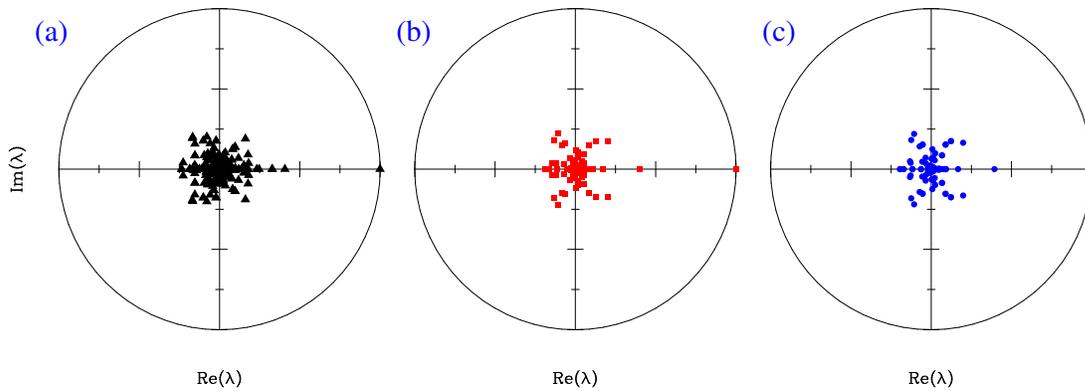


Figura 6.9: Comparación del espectro calculado mediante la truncación del superoperador en la representación de cuerdas a una  $\dim = 4(a/\varepsilon)^2$  (con  $a = 2.$ , tomando tres valores de  $N$  diferentes: (▲)  $N = 50$ ; (■)  $N = 100$ ; (●)  $N = 200$ ). El mapa es el Harper  $k = 0.2$ .

mayor módulo. Comparando con el método iterativo podemos remarcar que los métodos se complementan, ya que el primero permite obtener de forma muy rápida y eficiente los primeros 10 (aprox.) autovalores, mientras que si se necesita un análisis espectral más completo, el segundo método permite obtener del orden de  $N$  primeros autovalores, que en el caso de tratarse de un sistema caótico es a todos los fines prácticos suficiente ya que la mayor parte se acumula en el origen [62].

## 6.2. Decaimiento de la función de autocorrelación

Supongamos que la evolución está dada por un mapa  $\mathbf{S}_\varepsilon$  compuesto por una parte unitaria y un ruido gaussiano caracterizado por el parámetro  $\varepsilon$  como en la Ec. (4.17). Este superoperador no es normal, es decir

$$\mathbf{S}_\varepsilon \mathbf{S}_\varepsilon^\dagger \neq \mathbf{S}_\varepsilon^\dagger \mathbf{S}_\varepsilon$$

y, como consecuencia, sus autofunciones a derecha e izquierda son diferentes. Sean  $|R_i\rangle$  y  $\langle L_i|$  las autofunciones a derecha e izquierda respectivamente, tales que la descomposición espectral de  $\mathbf{S}_\varepsilon$  es

$$\mathbf{S}_\varepsilon = \sum_i |R_i\rangle \lambda_i \langle L_i|, \quad (6.25)$$

donde  $\lambda_i$  es el correspondiente autovalor que suponemos, por simplicidad, no degenerado y ordenado según  $\lambda_0 = 1 > |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_{N-1}|$ . Si tomamos un estado cualquiera  $\rho$  y lo proyectamos sobre el subespacio de traza nula, es decir, si definimos

$$\rho_0 = \rho - \rho_I \quad (6.26)$$

(donde como antes  $\rho_I = I/N$ ) entonces podemos expandir  $\rho_0$  según

$$|\rho_0\rangle = \sum_{i=1}^{N^2-1} r_i |R_i\rangle \quad (6.27)$$

donde  $r_i = (L_i|\rho_0) = \text{Tr}[L_i^\dagger \rho_0]$ . Equivalentemente podemos escribir

$$(\rho_0| = \sum_j l_j^* (L_j|. \quad (6.28)$$

donde  $l_j = (R_j|\rho_0) = \text{Tr}[R_j^\dagger \rho_0]$ . En forma análoga a la función de correlación clásica de la Ec. (5.20) definimos la autocorrelación cuántica<sup>2</sup> como

$$C_\rho(n) = (\rho_0|\rho_n) = \sum_i l_i^* r_i \lambda_i^n. \quad (6.29)$$

Como los autovalores están ordenados por módulo decreciente, el decaimiento del módulo de la autocorrelación se comporta en función de  $n$  (para  $n$  grande) como

$$|C_\rho(n)| \propto e^{-\gamma n}$$

y la tasa de decaimiento es

$$\gamma = -\log|\lambda_1|.$$

Como se vio en la Sec. 6.1 el espectro del propagador de un sistema clásicamente caótico suavizado con ruido Gaussiano es clásico para un amplio rango en el espacio de los parámetros  $N$  y  $\varepsilon$ . Podemos decir que en esta región las correlaciones cuánticas decaen con las mismas tasas de decaimiento que la clásicas, *i.e.* las resonancias RP.

### 6.3. Comportamiento asintótico

En esta sección estudiamos la evolución temporal de dos cantidades que han ganado relevancia ultimamente tanto para entender temas fundamentales de mecánica cuántica y caos cuántico como en el ámbito de la información cuántica.

Por un lado la entropía lineal

$$S_n \stackrel{\text{def}}{=} -\log(\text{Tr}[\rho_n^2]) \quad (6.30)$$

donde  $\rho_n$  es la  $n$ -ésima iteración de algún estado inicial  $\rho$  por un mapa cuántico. La en-

<sup>2</sup>No usamos diferentes tipo de letra para la correlación clásica y cuántica. Queda claro por contexto.

La entropía lineal es el logaritmo de la pureza ( $\text{Tr}[\rho^2]$ ) en función del tiempo. La evolución de un estado puro en un sistema abierto está caracterizada en general<sup>3</sup> por una pérdida de pureza. Esto puede entenderse como flujo de información hacia el ambiente que deja de ser accesible. Una interpretación equivalente es la de medida de entrelazamiento entre dos sistemas que, visto como un todo, evolucionan unitariamente. Si inicialmente el estado del sistema total es producto y cada subsistema se encuentra en estado puro, la evolución unitaria típicamente produce correlaciones cuánticas fundamentales, o entrelazamiento entre estos estados. Deja de tener sentido el estado cuántico de cada subsistema por separado. Cuanto mayor es el entrelazamiento entre ellos, menor es la pureza del estado de cada subsistema y mayor es la entropía lineal de cada uno individualmente.<sup>4</sup>

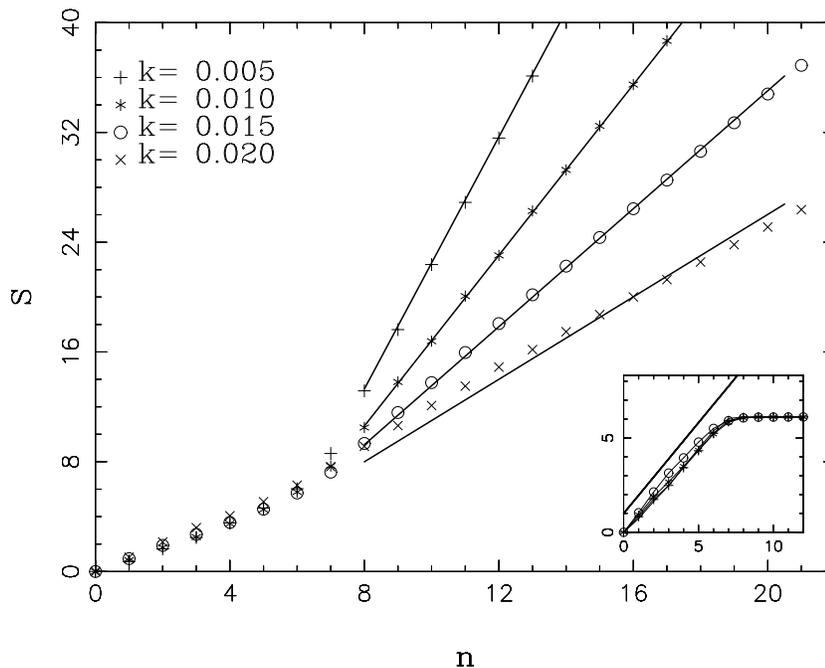


Figura 6.10: Entropía lineal  $S_n$  para el gato de Arnold perturbado (6.8) para varios valores de  $k$  y  $N = 450$ ,  $\varepsilon = 0.05$ . El estado inicial es un estado coherente (puro) del que se sustrajo  $\rho_I$ . Se observan los dos regímenes lineales diferentes. La pendiente de las líneas sólidas se calculó con el método iterativo. El cuadro pequeño muestra la evolución de  $S_n$  para un estado inicial sin proyectar que satura en  $S_n = \log(N) \simeq 6.11$ . La pendiente inicial está dada por el Lyapunov del mapa clásico.

<sup>3</sup>Como veremos (Sec. 7.2), puede haber casos en que la pureza aumenta, sin embargo, en general, la pureza de un estado puro en los primeros pasos disminuye.

<sup>4</sup>Para un review sobre medidas de entrelazamiento ver [42].

Mediante el estudio de un modelo simple de dinámica hiperbólica (un oscilador armónico invertido), en presencia de un medio ambiente, Zurek y Paz [1] dedujeron que, para un amplio rango de valores de la fuerza de acoplamiento entre el sistema y el ambiente, la entropía lineal debe crecer linealmente (o la pureza decaer exponencialmente) con una pendiente determinada por el máximo exponente de Lyapunov positivo. Eventualmente, esta sería una de las formas propuestas para caracterizar un sistema cuántico como caos cuántico. Para sistemas finitos este comportamiento está limitado por la dimensión del sistema. Para tiempos del orden del tiempo de Ehrenfest, el crecimiento de la entropía lineal satura en un valor dado por  $\log N$  (en computación cuántica, para sistemas de  $k$  qubits donde  $N = 2^k$  usualmente se define  $S_n$  con  $\log_2$ , así el valor de saturación es simplemente  $k$ ).

Se puede ver que la aproximación al valor de saturación también se da en forma exponencial. Después del tiempo de Ehrenfest el estado del sistema es aproximadamente  $\rho_I$ . Siguiendo el razonamiento utilizado para extraer el autovalor unidad del espectro, proyectamos el estado inicial  $\rho$  a evolucionar sobre el subespacio ortogonal a  $\rho_I$ . Esto se logra simplemente restando  $\rho_I$  a  $\rho$  (Ecs. (6.10) y (6.12)). De la sección anterior podemos deducir que la pendiente para el decaimiento a tiempos grandes estará determinada por la resonancia de Ruelle-Pollicott de mayor módulo  $\lambda_1$ . Las expansiones (6.27) y (6.28) nos permiten calcular

$$S_n = -\log(\text{Tr}[\rho_n^2]) \equiv -\log((\rho_n|\rho_n)) = -\log\left(\sum_i l_i^* r_i |\lambda_i|^{2n}\right) \quad (6.31)$$

que en el límite  $n \rightarrow \infty$  es

$$S_n = -2n \log(|\lambda_1|) + \text{cte.} \quad (6.32)$$

Es decir, el crecimiento es lineal y la pendiente es  $2 \ln(|\lambda_1|)$  o la pureza se acerca exponencialmente a  $1/N$  como  $\sim |\lambda_1|^{-2n}$  (el 2 de diferencia con el exponente en la autocorrelación sale del cuadrado en la definición de la pureza).

En la Fig. 6.10 se muestran resultados obtenidos para el gato perturbado (6.8). Este mapa es especialmente útil en este caso ya que el exponente de Lyapunov es  $\lambda = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$  aproximadamente en un amplio rango de  $k$  (claramente, siempre y cuando  $k$  siga siendo una “perturbación”), mientras que las resonancias de Ruelle-Pollicott y en especial  $\lambda_1$  de-

penden fuertemente de  $k$ . Se observa inicialmente el crecimiento lineal Lyapunov (puede verse mejor en la figura pequeña insertada, donde también se ve la saturación) que es igual para todos los valores de  $k$  tomados. Luego de un tiempo, las pendientes cambian de acuerdo a la Ec. (6.32). Las pendientes de las rectas sólidas dibujadas fueron obtenidas usando el método iterativo descrito en la Sec. 6.1.2. Se puede ver que los resultados se ajustan bien a la predicción.

La otra cantidad que consideraremos es el *eco de Loschmidt*. La definición usual<sup>5</sup>, dado un sistema caracterizado por un Hamiltoniano  $H_0$ , y un estado inicial  $|\psi\rangle$ , es

$$M(t) = |\langle \psi | e^{i(H_0+\Sigma)t/\hbar} e^{-iH_0t/\hbar} | \psi \rangle|^2, \quad (6.33)$$

donde  $\Sigma$  es una perturbación constante. Puede ser interpretada de dos maneras equivalentes:

- (a) Se evoluciona un estado inicial  $|\psi\rangle$  *hacia adelante* en el tiempo con el Hamiltoniano  $H_0$  y se invierte la dinámica, pero suponemos que esta inversión es imperfecta y calculamos la probabilidad de volver al estado inicial en función del tiempo. La imperfección está representada por la perturbación  $\Sigma$ .
- (b) Se evolucionan dos sistemas preparados en el mismo estado inicial  $|\psi\rangle$ . Se los propaga *hacia adelante* en el tiempo con el mismo Hamiltoniano  $H_0$ , pero uno de ellos con una perturbación  $\Sigma$ . El eco  $M(t)$  es simplemente el *overlap* (o la proyección) entre esos dos estados en función del tiempo.

El eco de Loschmidt fue propuesto por Peres [11] para explicar la irreversibilidad en mecánica cuántica. La inestabilidad de los sistemas caóticos ante perturbaciones en la dinámica permite explicar las diferencias en el comportamiento del eco de sistemas caóticos con respecto a sistemas integrables. Aparte de la perturbación es preciso hacer un *promediado* sobre los posibles valores de la perturbación. Esto actúa como *coarse-graining* [11] equivalente a una evolución no unitaria.

Un avance se produjo mediante experimentos de eco de spin en RMN [84, 85], que permiten revertir la dinámica, donde la perturbación son las imperfecciones en los pulsos.

---

<sup>5</sup>Ver [7, 10, 9, 83] entre muchos.

Trabajos teóricos posteriores ([7, 8, 9, 10], entre muchos) demuestran que, en determinadas condiciones el decaimiento de  $M(t)$  es independiente del acoplamiento al ambiente (o de la decoherencia) y depende esencialmente de la dinámica. Específicamente del mayor exponente de Lyapunov clásico. Esto está de acuerdo con las predicciones hechas para la entropía lineal [1]. Además sucesivos trabajos posteriores [83] encuentran otros regímenes “universales” (que aquí no trataremos), como la regla de oro de Fermi (ROF). Dependiendo del valor de la perturbación y del tiempo el sistema se comporta de acuerdo a al régimen Lyapunov o al de ROF. En nuestros cálculos el comportamiento a tiempos pequeños corresponde siempre al régimen Lyapunov.

Además de comprobar el comportamiento independiente de la decoherencia para  $M(t)$  nosotros mostramos que, luego de saturar naturalmente por la dimensión finita del espacio de Hilbert, al igual que lo demostrado para la entropía lineal, el eco  $M(t)$  se acerca exponencialmente a su valor de saturación con una tasa dada por la resonancia de Ruelle-Pollicott clásica de mayor módulo. Para ello, utilizamos una definición del eco diferente, pero equivalente a la usada en la literatura (y prácticamente idéntica a la usada para calcular la fidelidad en el caso clásico [60]). En lugar de evolucionar estados puros y luego promediar sobre realizaciones, nosotros evolucionamos matrices densidad, inicialmente puras, pero en presencia del ruido difusivo Gaussiano descrito en la Sec. 4.3. Además, como en el caso de la entropía, al tratarse de mapas, el tiempo es discreto y lo llamamos  $n$ . Por lo tanto, la definición que usamos para el eco de Loschmidt es

$$M_n = \text{Tr}[\rho'_n \rho_n] \quad (6.34)$$

donde  $\rho'$  significa que la evolución tiene una pequeña perturbación respecto de la evolución sin primar. Es decir lo definimos como el overlap entre dos estados evolucionados con mapas iguales a menos de una perturbación. En el caso del gato preturbado, evolucionamos con  $k$  y  $k + \delta k$ . Así, podemos reescribir (6.34) como

$$M_n = \text{Tr}[(\mathbf{S}'_\varepsilon)^\dagger)^n(\rho_0)(\mathbf{S}_\varepsilon)^n(\rho_0)] \quad (6.35)$$

donde, como antes, si  $\rho$  es un estado inicial arbitrario, tomamos como estado a evolucionar uno perpendicular a  $\rho_I$  definido como  $\rho_0 = \rho - \rho_I$ .

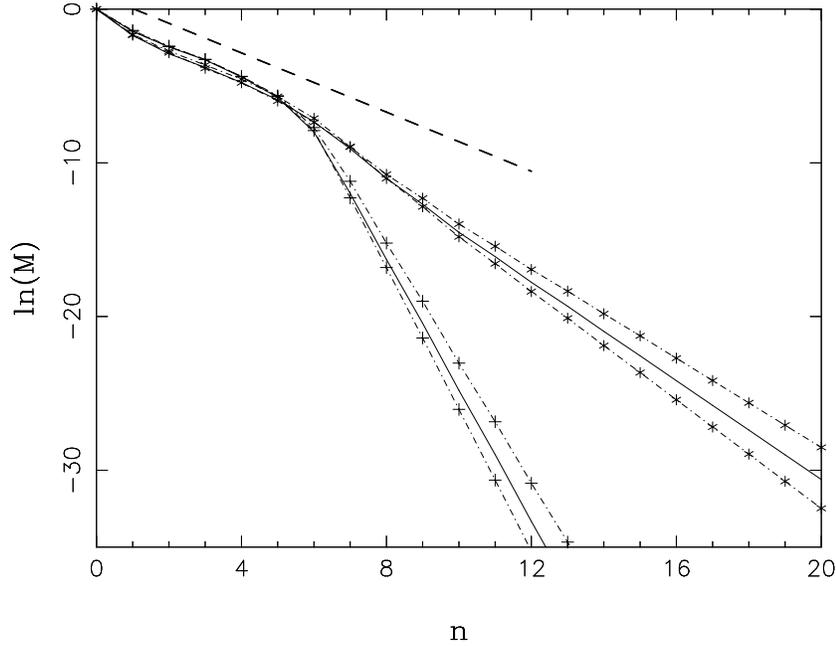


Figura 6.11: Decaimiento del eco de Loschmidt mas allá del tiempo de Ehrenfest. El mapa es el gato de Arnold perturbado (6.8) con  $N = 450$ ,  $\varepsilon = 0.1$ . La línea sólida da los ecos mientras que las líneas punteadas dan las entropías perturbada y no perturbada ( $-S'_n$  y  $-S_n$ ). El mapa es el gato perturbado y se tomaron dos valores de  $k$  ( $+ \equiv k = 0.005$ ,  $* \equiv k = 0.017$ ) y una perturbación  $\delta k = 0.002$ . La línea cortada para tiempos cortos marca el régimen Lyapunov.

Consideremos la desigualdad de Schwartz para el producto interno entre dos elementos de un espacio de Hilbert (en nuestro caso, los operadores lineales con el producto de Hilbert-Schmidt)

$$\text{Tr}[\rho'_n \rho_n] \leq \sqrt{\text{Tr}[(\rho'_n)^2] \text{Tr}[(\rho_n)^2]}. \quad (6.36)$$

El logaritmo natural de esta desigualdad nos da

$$\log[M_n] \leq \frac{1}{2} [\log(\text{Tr}[(\rho_n)^2]) + \log(\text{Tr}[(\rho'_n)^2])] = -\frac{1}{2}(S_n + S'_n). \quad (6.37)$$

Esta ecuación es válida para cualquier valor de la perturbación, que puede ser todo lo pequeña que uno quiera. Por lo tanto deducimos que debe valer la igualdad. Así, en el límite de tiempos grandes tenemos

$$\log(M_n) \approx n (\log(|\lambda_1|) + \log(|\lambda'_1|)). \quad (6.38)$$

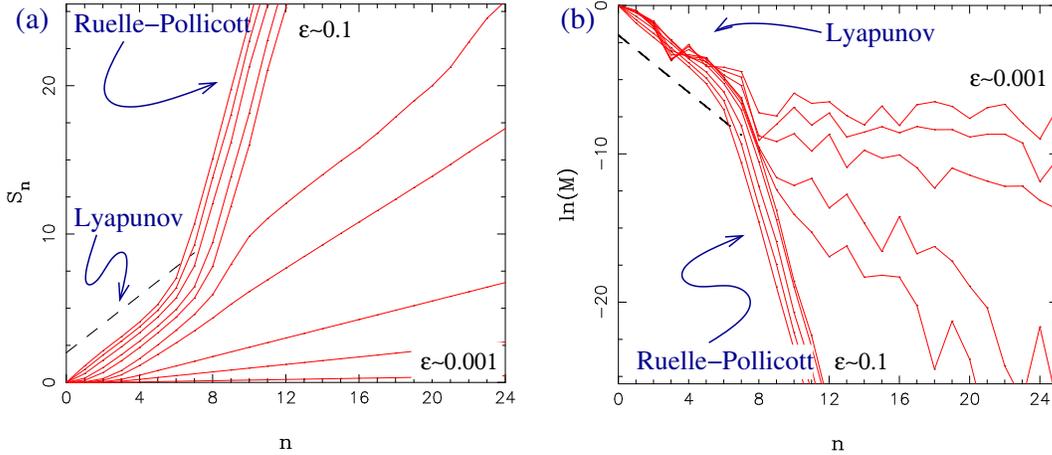


Figura 6.12: Cálculo de la entropía lineal  $S_n$  (izquierda) y del (log del) eco  $M_n$  (derecha) para varios valores del parámetro de difusión  $\epsilon \in [0.001, 0.1]$ . En los dos casos se observa el régimen Lyapunov inicial y luego el régimen Ruelle-Pollicot. El mapa es el gato perturbado con  $N = 450$  y  $k = 0.005$ . La línea cortada tiene pendiente  $(\pm)|\log(\lambda_{\text{Lyap}})| \approx (\pm)0.9624$ .

En el Cuadro 6.1 hacemos un resumen del comportamiento asintótico de las cantidades mencionadas. Como aclaramos antes, el 2 en la entropía lineal se debe a la potencia 2 en la definición, que baja con el logaritmo.

Cuadro 6.1: Comportamiento asintótico de la función de autocorrelación  $C_n$ , la entropía lineal  $S_n$  y el eco de Loschmidt.

Cantidad	Definición	Comp. asintótico	Log
Autocorrelación	$\text{Tr}[\rho_0 \rho_n] - 1/N$	$\sim \lambda_1^n$	$\sim n \ln[\lambda_1]$
Entropía Lineal	$-\ln[\text{Tr}[\rho_n^2] - 1/N]$	$\sim -2n \ln[\lambda_1]$	$\sim -2n \ln[\lambda_1]$
Eco de Loschmidt	$\text{Tr}[\rho_n \rho_n'] - 1/N$	$\sim \lambda_1^n \lambda_1'^n$	$\sim n(\ln[\lambda_1] + \ln[\lambda_1'])$

En la Fig. 6.11 mostramos la evolución de  $\log(M_n)$  para el gato perturbado (6.8) tomando dos  $k$  diferentes y una perturbación pequeña  $\delta k$ . No solamente se pueden distinguir claramente los dos regímenes lineales si no que además se comprueba la Ec. (6.37) ya que se ve exactamente a  $\log(M_n)$  (para  $n$  grande) como el promedio de las dos entropías.

Finalmente en la Fig. 6.12 mostramos la evolución tanto de la entropía lineal (izquierda) como del (log del) eco de Loschmidt (derecha) para el gato perturbado con ruido difusivo para varios valores de  $\varepsilon$ . Vemos que para valores de  $\varepsilon$  pequeños la evolución es solamente una perturbación de la unitaria y el decaimiento de la pureza no es exponencial. A medida que aumentamos el parámetro de decoherencia llegamos a un punto en que satura y el comportamiento es independiente, tanto para el régimen Lyapunov inicial, como para el régimen Ruelle posterior. El gráfico del eco es prácticamente equivalente. La línea cortada muestra el régimen Lyapunov inicial.

En resumen hemos visto como introduciendo ruido difusivo se pueden obtener cantidades clásicas a partir de un sistema cuántico, que además pueden ayudar a distinguir sistemas caóticos cuánticos. En otras palabras, una forma de correspondencia, alternativa y a la vez complementaria a la del simple análisis de la evolución temporal fue establecida mediante el espectro del propagador, en presencia de un ambiente modelado con un kernel Gaussiano.

# Capítulo 7

## Modelos de ruido

La necesidad de controlar precisamente la dinámica de un sistema cuántico es fundamental en una variedad de temas de la física actual, en especial en temas relacionados con los fundamentos de la mecánica cuántica, así como también en ingeniería o ciencias de la información. En particular, en información cuántica recientes avances en técnicas de nanotecnología hacen vital el desarrollo de estrategias de control de sistemas cuánticos abiertos cuya dinámica es irreversible. Es necesario por tanto, y antes que nada, entender los posibles mecanismos que introducen irreversibilidades o ruidos en un sistema físico.

Un algoritmo cuántico es básicamente un mapa unitario actuando sobre un espacio de Hilbert de dimensión  $N = 2^k$ , donde  $k$  es el número de *qubits* o bits cuánticos. Un *qubit* es esencialmente cualquier sistema físico que tenga dos niveles cuánticos bien identificables. Podemos asociar con el espacio de Hilbert de los  $k$  qubits un espacio de fases y utilizar las herramientas conocidas (como la función de Wigner) para tratar de entender los posibles efectos de los errores que pueden ocurrir al implementar un algoritmo de computación cuántica.

En este capítulo por lo tanto damos generalizaciones para muchos *qubits* de ruidos de un *qubit* conocidos [43, 86], utilizando el enfoque de mapas cuánticos en el toro. También utilizando el concepto de espacio de fases determinamos las diferencias fundamentales entre mapas que preservan el operador identidad de aquellos que no lo preservan.

## 7.1. Canales cuánticos de muchos *qubits*

En computación cuántica se llaman canal cuántico a la transformación que sufre un estado al atravesar un circuito o un conjunto de compuertas cuánticas en las que hay algún tipo de pérdida de información [86]. El tratamiento usual en la literatura es estudiar canales de un solo *qubit* ( $N = 2$ ), que se pueden reducir a estudiar mapeos del vector de Bloch.

Aquí, siguiendo [49, 17], damos la generalización en forma de suma de Kraus para muchos *qubits* de dos ruidos conocidos y lo hacemos utilizando las técnicas y conocimientos de superoperadores en espacios de fases compactos como el 2-toro. Para describir el estado de un sistema de  $k$  *qubits* utilizamos vectores en un espacio de Hilbert de dimensión  $N = 2^k$ . Por ejemplo, el estado de un sistema de  $k$  *qubits* puede ser denotado equivalentemente como

$$|\psi\rangle = |010\dots001\rangle \equiv |m\rangle$$

donde  $m$  es el número entero cuya expansión binaria es la lista de ceros y unos correspondiente al estado individual de cada *qubit*.<sup>1</sup> Tenemos así definida una base ortonormal  $|m\rangle$  con  $m = 0, \dots, N - 1$ . Se puede entonces directamente asociar esta base con una base de posición, tal que  $|m\rangle$  corresponde a la posición  $q_m = m/N$ , en un espacio de fases cuántico correspondiente al 2-toro (como en el Cap. 2). La base de momentos se define mediante la transformada de Fourier discreta.

En el caso de que los canales preserven la identidad (*i.e.* son *unitales*), daremos su versión como PUA, donde usamos como operadores unitarios las traslaciones sobre el toro (con la normalización adecuada). Como se muestra en la Sec. 4.3.1 un superoperador cuya forma de Kraus es una suma convexa de traslaciones es diagonal en la representación de cuerdas y su espectro es muy fácil de obtener. Es directamente la transformada de Fourier de los coeficientes que conforma la suma convexa. Este es el caso del canal despolarizante y del atenuador de fase,<sup>2</sup> el superoperador puede escribirse en la forma

$$\mathbf{D}_\varepsilon \rho = (1 - \varepsilon)\rho + \varepsilon \sum_{\alpha} C_\varepsilon(\alpha) T_\alpha \rho T_\alpha^\dagger \quad (7.1)$$

<sup>1</sup>El orden de los *qubits* que definen el número entero  $m$  es arbitrario.

<sup>2</sup>*Depolarizing channel* y *phase damping channel* respectivamente

donde  $\varepsilon$  es la fuerza del ruido.

### 7.1.1. Canal despolarizante

El canal despolarizante actuando sobre un solo *qubit* (CD1Q) lo deja intacto con probabilidad  $(1 - \varepsilon)$  mientras que con probabilidad  $\varepsilon$  lo *despolariza*, es decir lo deja en un estado mezcla. En general la forma de Kraus para canales de un *qubit* es dados en términos de los operadores de Pauli. Así para el CD1Q los operadores de Kraus son [86, 43]

$$\begin{aligned} M_0 &= \sqrt{(1 - \varepsilon)}I, \\ M_1 &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}\sigma_1 = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{2(2^2-1)}}\sigma_1, \\ M_2 &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}\sigma_2 = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{2(2^2-1)}}\sigma_2, \\ M_3 &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}\sigma_3 = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{2(2^2-1)}}\sigma_3. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Cada uno es una constante multiplicada por una de las matrices de Pauli  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ , que

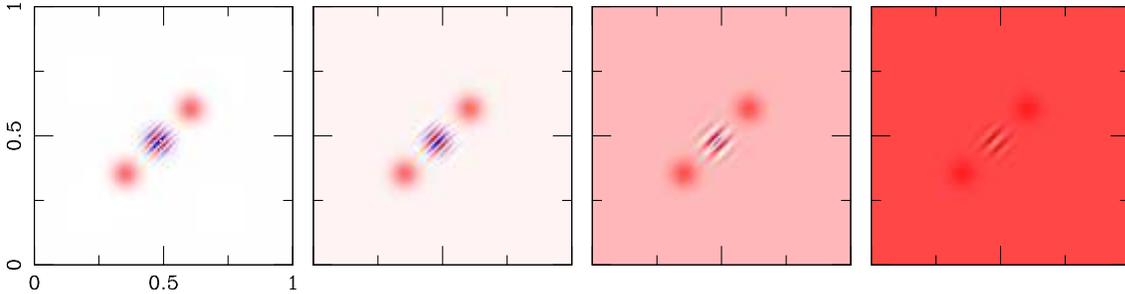


Figura 7.1: **Función de Wigner del estado resultante luego de aplicar el canal despolarizante  $S^{\text{CD}}$  tres veces para  $N = 64$  y  $\varepsilon = 0,85$ . El estado inicial es del tipo gato de Schrödinger compuesto por la superposición de dos estados coherentes centrados en  $(q, p) = (0,35, 0,35)$  y  $(0,6, 0,6)$ . (El código de colores es equivalente al de la Fig. 2.3, pág 23).**

son los generadores del grupo  $SU(2)$  y además son una base ortonormal de  $\mathcal{H}_2$ . Esta estructura de los Kraus es sugerente. Para un número  $k$  de *qubits* la generalización directa de (7.2) se puede construir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} M_0 &= \sqrt{(1 - \varepsilon)}I, \\ M_\mu &= \sqrt{\frac{N\varepsilon}{2(N^2-1)}}\gamma_\mu, \end{aligned} \quad (7.3)$$

donde  $\gamma_\mu$  es el elemento  $\mu$ -ésimo del conjunto de  $N^2 - 1$  generadores del grupo  $SU(N)$  (con  $N = 2^k$ ). Estos son Hermíticos y ortogonales (en el producto de Hilbert-Schmidt). Además en función de los operadores  $\hat{P}_{ij}$  de transición en la base computacional dados por

$$\hat{P}_{ij} = |i\rangle\langle j| \quad (7.4)$$

toman la forma

$$\begin{cases} \hat{U}_{jk} = P_{jk} + P_{kj}, \\ \hat{V}_{jk} = i(P_{jk} - P_{kj}), \\ \hat{W}_l = -\sqrt{\frac{2}{l(l+1)}}(P_{11} + P_{22} + \dots + P_{ll} - lP_{l+1,l+1}) \end{cases}, \quad (7.5)$$

donde  $1 \leq j < k \leq N$ ,  $1 \leq l \leq N - 1$  y

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \rightarrow \{ & \hat{U}_{12}, \hat{U}_{13}, \hat{U}_{23}, \dots, \hat{V}_{12}, \hat{V}_{13}, \hat{V}_{23}, \\ & \dots, \hat{W}_1, \hat{W}_2, \dots, \hat{W}_{N-1} \}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Usando la Ec. (7.5) y el hecho de que, si identificamos la base computacional con la base de posición, los  $P_{ij}$  se expanden en función de las traslaciones como

$$P_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{q,p=0}^{N-1} \text{Tr} \left[ T_{(q,p)}^\dagger P_{ij} \right] T_{(q,p)} = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} e^{-i\frac{\pi}{N}p(i+j)} T_{(i-j,p)}, \quad (7.7)$$

se puede escribir el canal despolarizante para muchos *qubits*, o simplemente CD, en función de los  $T_\alpha$  de la siguiente manera

$$\mathbf{S}_\varepsilon^{\text{CD}} \rho = (1 - \varepsilon) T_0 \rho T_0^\dagger + \frac{\varepsilon}{N^2} \sum_{\alpha=0}^{N^2-1} T_\alpha \rho T_\alpha^\dagger. \quad (7.8)$$

Escrito de esta manera tiene una interpretación simple en el espacio de fases, si identificamos la base computacional con un estado de posición (por ejemplo). Con probabilidad  $(1 - \varepsilon)$  deja el estado  $\rho$  intacto mientras que aplica todas las traslaciones posibles con idéntica probabilidad  $\varepsilon/N^2$ . En la Fig. 7.1 se puede ver el efecto producido por  $\mathbf{S}_\varepsilon^{\text{CD}}$  sobre una superposición de dos estados coherentes (representados mediante la función de Wigner), con  $\varepsilon = 0,9$ . El valor de  $\varepsilon$  fue tomado excesivamente grande para resaltar el

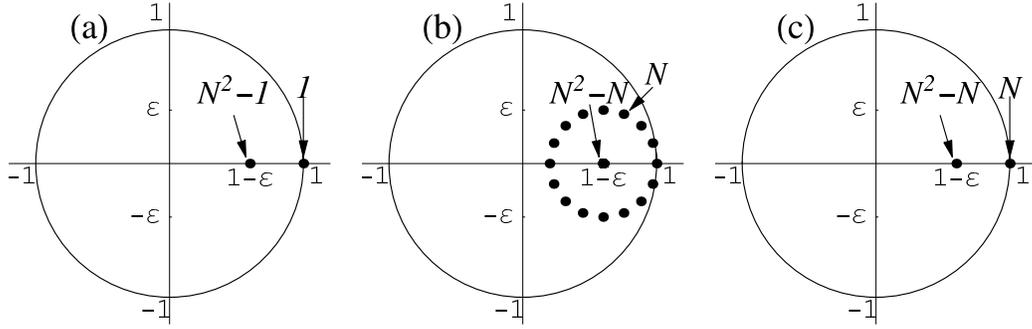


Figura 7.2: Gráfico, en el plano complejo, de (a) el espectro del canal despolarizante generalizado. Notar la degeneración  $N^2 - 1$  en  $(1 - \varepsilon, 0)$ ; (b) El espectro del canal de amortiguamiento de fases sobre una línea  $n_1 p = n_2 q + n_3$  donde  $N = 32$ ,  $n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 2$ . Hay  $N^2 - N$  autovalores en  $(1 - \varepsilon, 0)$  y  $N$  (degeneración 2) autovalores en el círculo de radio  $\varepsilon$  centrado en  $(1 - \varepsilon, 0)$ ; y (c) El espectro del canal de amortiguamiento de fases sobre la línea con  $N = 32$ ,  $n_1 = 1, n_2 = 0, n_3 = 2$ . Hay  $N^2 - N$  autovalores en  $(1 - \varepsilon, 0)$  y  $N$  autovalores iguales a 1.

efecto. Además se ve la aproximación al estado invariante del ruido que es la distribución uniforme. El espectro de  $\mathbf{S}_\varepsilon^{\text{CD}}$  está dado, de acuerdo a las Ecs. (4.9) y (4.10), por la transformada de Fourier de los coeficientes que aparecen en la representación de Kraus generalizada, es decir

$$\begin{aligned} \Sigma^{\text{CD}}(\beta) &= (1 - \varepsilon) + \varepsilon \sum_{\alpha} \frac{1}{N^2} e^{i(2\pi/N)\beta \wedge \alpha} \\ &= (1 - \varepsilon) + \varepsilon \delta_{\beta, 0}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Vemos que el autovalor  $(1 - \varepsilon)$  corresponde a todos los  $T_\alpha$  (con  $\alpha \neq 0$ ) por lo que la degeneración es  $N^2 - 1$  (Fig. 7.2 (a)). El autovalor 1, por ser unital, corresponde a  $T_0 = I$ .

### 7.1.2. Amortiguamiento de Fase

El canal de amortiguamiento de fase (AF) es ampliamente usado en información y computación cuántica, así como en el estudio de temas fundamentales de mecánica cuántica (problema de la medición, interpretaciones, etc.), porque brinda un ejemplo simple y efectivo de cómo actúa la decoherencia seleccionando una base preferida de estados puntero.

Para un solo *qubit* ( $N = 2$ ) los operadores de Kraus, en la base computacional, son

$$\begin{aligned} M_0 &= \sqrt{(1-\varepsilon)}I, \\ M_1 &= \sqrt{\varepsilon}|0\rangle\langle 0|, \\ M_2 &= \sqrt{\varepsilon}|1\rangle\langle 1|. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Resulta ilustrativo observar el efecto del canal AF de un *qubit* sobre una matriz densidad arbitraria  $\rho_0$ , luego de actuar  $n$  veces. Por la definición de los Kraus en la Ec. (7.10) se puede verificar que luego de  $n$  iteraciones se tiene

$$(\mathbf{S}_\varepsilon^{\text{CAF}})^n(\rho_0) = \begin{pmatrix} \rho_{00} & (1-\varepsilon)^n \rho_{01} \\ (1-\varepsilon)^n \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix}. \quad (7.11)$$

La acción de la decoherencia se aprecia claramente. Los términos no diagonales (coherencias) decaen exponencialmente con  $(1-\varepsilon)$  y las poblaciones permanecen intactas **en la base computacional**. La base computacional es entonces la base preferida de estados robustos ante el ruido.

Para el caso de  $k = \log_2 N$  *qubits* proponemos una pequeña variación. Expresamos la forma general sin determinar *a priori* la base preferida (de estados punteros) como

$$\mathbf{S}_\varepsilon^{\text{CAF}} \rho = (1-\varepsilon)\rho + \varepsilon \sum_{i,j=0}^{N-1} C_{ij} P_{ij} \rho P_{ij}^\dagger. \quad (7.12)$$

Si identificamos  $\sqrt{\varepsilon} C_{ij} P_{ij}$  con los operadores de Kraus entonces  $C_{ij}$  debe ser real y positivo. Además, la preservación de la traza impone que la condición

$$\sum_{ij} C_{ij} = 1 \quad (7.13)$$

deba satisfacerse. La generalización del canal dado por los Kraus de la Ec. (7.10) para muchos *qubits* tiene una forma simple en el espacio de fases si usamos la convención habitual de identificar la base computacional con los autoestados de posición y si además tomamos  $C_{ij} = \delta_{ij}$ . La base preferida, y que permanece inalterada ante el ruido, es la de posición.

Utilizando nuevamente la relación (7.7) se obtiene la expresión en función de oper-

adores de traslación,

$$\mathbf{S}_\varepsilon^{\text{CAF}} = (1 - \varepsilon)I \odot I + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{p=0}^{N-1} T_{(0,p)} \odot T_{(0,p)}^\dagger. \quad (7.14)$$

En el toro, los operadores  $T_{(0,p)}^\dagger$  son traslaciones *en momento*, es decir, a lo largo de líneas verticales. Esta expresión en términos de operadores unitarios permite una interpretación directa en el espacio de fases. Como antes, con probabilidad  $(1 - \varepsilon)$  el estado no cambia pero ahora, con probabilidad  $\varepsilon$  se implementan traslaciones en momento.

En realidad, la elección de que la base computacional sea la base de posición es arbitraria. Los operadores  $P_{ij}$  podrían ser los proyectores (para  $i = j$ ) y transiciones (para  $i \neq j$ ) en cualquier base del espacio de fases. En particular podemos tomar como base líneas paralelas sobre el toro. Definimos una línea sobre la grilla de  $N \times N$  como

$$L_{n_1 n_2 n_3} = \{(q, p) \in G_N; n_1 p = n_2 q + n_3, n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}\} \quad (7.15)$$

El CAF escrito en función de traslaciones sobre líneas arbitrarias sobre el toro del tipo (7.15) toma la forma (ver [49])

$$\mathbf{S}_{n_1 n_2 n_3}^{\text{CAF}} = (1 - \varepsilon)T_{(0,0)} \odot T_{(0,0)}^\dagger + \frac{\varepsilon}{R} \sum_{(q,p) \in L_{n_1 n_2 n_3}} T_{(q,p)} \odot T_{(q,p)}^\dagger \quad (7.16)$$

donde  $R$  es un número entero que indica el número total de puntos de la grilla que están contenidos en la línea. Si  $n_1$  o  $n_2$  es impar entonces  $R = N$ . Si por el contrario los dos son pares entonces es  $R = 2N$  (ver [13]).

Nuevamente, escrito así el canal es diagonal en la representación de cuerdas. El autovalor correspondiente a la traslación  $\hat{T}_{(q,p)}$  está dado por

$$\Sigma^{\text{CAF}}(q, p) = 1 - \varepsilon(1 - e^{-i(2\pi/N)qn_3/n_1} \delta_{n_2 q, n_1 p}) \quad (7.17)$$

para  $n_1 \neq 0$ , mientras que si  $n_1 = 0$  y  $n_2 \neq 0$  el autovalor correspondiente es

$$\Sigma^{\text{CAF}}(q, p) = 1 - \varepsilon(1 - e^{i(2\pi/N)pn_3/n_2} \delta_{q,0}). \quad (7.18)$$

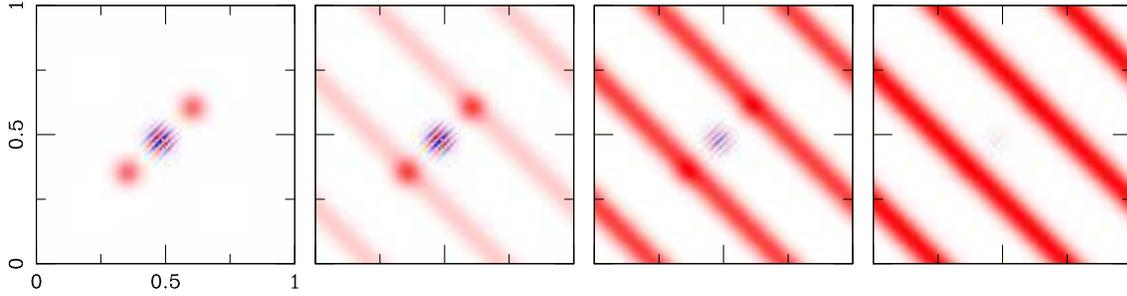


Figura 7.3: **Función de Wigner de un estado tipo gato de Shrödinger, compuesto por la superposición de dos estados coherentes sobre el toro, antes y despues de aplicar el CAF  $S_{1,-1,1}^{\text{CAF}}$ , con  $N = 64$  y  $\varepsilon = 0,85$ . A la derecha se puede ver claramente la proyección sobre las líneas paralelas a  $p = -q \pmod{64}$ . (El código de colores es equivalente al de la Fig. 2.3, pág 23).**

La estructura en el plano complejo del espectro dado por (7.17) y (7.18) se ve en la figura Fig. 7.2 (b) y (c).

Para ilustrar el ejemplo de CAF en una línea arbitraria, en la Fig. 7.3 se muestra el efecto de  $S_{n_1 n_2 n_3}^{\text{CAF}}$ , una vez más a partir de una superposición de dos estados coherentes sobre el toro, con  $n_1 = 1, n_2 = -1$  y  $n_3 = 0$ . Se puede ver que el canal selecciona y proyecta sobre las componentes paralelas a la línea  $p = -q$ . La única diferencia que habría con el caso  $n_3 \neq 0$  sería que las líneas oscuras aparecerían despalzadas verticalmente. También se manifiesta la decoherencia en la atenuación en el patrón oscilatorio correspondiente a la interferencia entre los dos paquetes iniciales.

## 7.2. Canales Disipativos

En general tanto en mecánica clásica como cuántica, el término disipación se relaciona con la pérdida de energía del sistema (hacia el entorno). En sistemas dinámicos, en particular en mapas, no siempre está claro el concepto de energía. Sin embargo, dado un campo de velocidades en el espacio de fases, un sistema dinámico es disipativo si la divergencia de dicho campo es no nula. Dicho de otra manera, hay disipación si el flujo no preserva volúmenes en el espacio de fases. Para mapas y superoperadores cuánticos es también en general difícil definir, no solo el concepto de energía, sino también el concepto de volumen del espacio de fases. Mostramos en esta sección, que aquellos superoperadores que

no preservan la identidad (es decir, que son no unitales) pueden identificarse con procesos disipativos (o que no preservan volúmenes). Los atractores, que tienen una estructura fractal característica de sistemas clásicamente caóticos con disipación, pueden ser recuperados a partir de su equivalente cuántico en presencia de un canal de ruido no unital que simule un efecto de fricción (Sec. 7.2.3).

### 7.2.1. De Kraus a Lindblad y vuelta a Kraus

Supongamos que tenemos la evolución de un sistema en contacto con un ambiente que cumple la aproximación de Born-Markov. Como vimos la matriz densidad en este caso evoluciona mediante un superoperador completamente positivo que puede ser escrito en forma de Kraus como

$$\rho_t = \mathbf{S}_t(\rho) = \sum_a K_a \rho K_a^\dagger. \quad (7.19)$$

Para un tiempo infinitesimal  $dt$  tenemos que

$$\rho_{dt} = \rho_0 + \mathcal{O}(dt) \quad (7.20)$$

por lo que podemos elegir los Kraus de la siguiente manera

$$K_a = \begin{cases} I + dt A, & a = 0 \\ \sqrt{dt} L_a, & a > 0 \end{cases}, \quad (7.21)$$

donde  $A$  es un operador a determinar. Para ello, teniendo en cuenta esta definición, escribimos

$$\dot{\rho} \approx \frac{\mathbf{S}(\rho) - \rho}{dt} = (A\rho + \rho A^\dagger) + \sum_{a>0} L_a \rho L_a^\dagger, \quad (7.22)$$

donde nos quedamos hasta el primer orden en  $dt$ . Hasta ahora  $A$  es arbitrario por lo que lo podemos escribir (sugestivamente) como

$$A = \Theta - iH \quad (7.23)$$

con  $\Theta$  y  $H$  operadores Hermíticos y orden cero en  $dt$ . Reemplazando en la Ec. (7.22) tenemos

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho] + (\Theta\rho + \rho\Theta) + \sum_a L_a \rho L_a^\dagger. \quad (7.24)$$

Finalmente obtenemos  $\Theta$  de la condición de preservación de la traza  $\sum_a K_a^\dagger K_a = I$ , pues a primer orden en  $dt$  tenemos

$$\begin{aligned} I &= \sum_a K_a^\dagger K_a = I + dt(A^\dagger + A) + dt \sum_{a>0} L_a^\dagger L_a \\ 0 &= 2\Theta + \sum_{a>0} L_a^\dagger L_a \\ \Rightarrow \Theta &= -\frac{1}{2} \sum_{a>0} L_a^\dagger L_a. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Claramente  $H$ , que funciona como Hamiltoniano efectivo, se obtiene usando (7.21),(7.23) y (7.25). Así, rescribiendo (7.24) obtenemos la **ecuación maestra** de Lindblad o simplemente ecuación de Lindblad [3]

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \mathcal{L}(\rho) = -i[H, \rho] + \sum_{a>0} \left( L_a \rho L_a^\dagger - \frac{1}{2} L_a^\dagger L_a \rho - \frac{1}{2} \rho L_a^\dagger L_a \right) \\ &= -i[H, \rho] + \frac{1}{2} \sum_{a>0} \left( [L_a \rho, L_a^\dagger] + [L_a, \rho L_a^\dagger] \right). \end{aligned} \quad (7.26)$$

Casi simultáneamente, Lindblad [3] y Gorini, Kossakowski y Sudarshan [4] (para espacios de dimensión finita) demostraron que un semigrupo dinámico es completamente positivo si y solo si es generado por una ecuación de la forma (7.26). Claramente, en el primer término del segundo miembro el Hamiltoniano efectivo  $H$  genera la evolución unitaria. Los otros términos dan cuenta de las posibles transiciones a las que está expuesto el sistema como resultado de la interacción con el ambiente, generando la parte no unitaria de la evolución. Los operadores  $L_a$  son los llamados *operadores de Lindblad*, también conocidos como *operadores de saltos cuánticos*.

El hecho de poder escribir la evolución en forma de ecuación de primer orden implica que el entorno es Markoviano o que “no tiene memoria”. Esto es, las correlaciones en el ambiente decaen en tiempos característicos mucho más pequeños que los tiempos característicos del sistema. A esta condición para derivar una ecuación del tipo (7.26)

usualmente se agrega la de acoplamiento débil (aproximación de Born-Markov).

Para entender los efectos de esta ecuación es útil ver el comportamiento en el espacio de fases en el límite clásico (ver por ejemplo [87, 88]). Usando la transformación de Weyl que lleva la matriz densidad a la función de Wigner se obtiene (a orden cero en  $\hbar$ ) una ecuación diferencial tipo Fokker-Planck. La ecuación de Fokker-Planck describe la evolución de una densidad de probabilidad en el espacio de fases en presencia de **difusión** (que puede provenir de un término aleatorio en una ecuación de Langevin) y de **disipación**. La difusión está dada por los términos de derivada segunda en las coordenadas generalizadas mientras que la disipación está dada por la divergencia del vector de *drift* que denotamos como  $\mathbf{A}$  pero que no definiremos. En [87] (ver también [88]) se muestra que la disipación en la ecuación resultante para la función de Wigner está dada por

$$-i \sum_a \{L_a(q, p), L_a(q, p)^*\} \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \text{div} \mathbf{A}. \quad (7.27)$$

donde  $L_a(q, p)$  es el símbolo de Weyl del operador de Lindblad correspondiente y  $*$  denota complejo conjugado. El  $\{ , \}$  es el corchete de Poisson clásico. Una divergencia no nula en la Ec. (7.27) implica que los volúmenes en el espacio de fases *no se preservan* ya que la divergencia del vector de drift está relacionada con la divergencia del campo de velocidades.

De lo anterior se deduce que hay disipación si  $L_a L_a^\dagger \neq L_a^\dagger L_a$ . En particular si los Lindblad son Hermíticos no hay disipación.<sup>3</sup> Esto tiene una implicancia fundamental en la ecuación maestra, y por ende también en la forma de los Kraus: *La disipación implica que los Lindblad no conmutan con su adjunto, lo que a su vez implica que los Kraus no conmutan con su adjunto*. Esto significa que

$$\mathcal{L}(I) \neq 0 \equiv \mathbf{S}(I) \neq I \quad (7.28)$$

es decir, que la dinámica es no-unital.<sup>4</sup> En otras palabras podemos decir que **disipación implica no-unitalidad** (y vice versa). Si el mapa  $\mathbf{S}$  es unital puede haber sólo difusión o decoherencia, pero no relajamiento. Sin embargo, en el caso de ser no unital tendremos

<sup>3</sup>Esto es cierto siempre y cuando, siendo  $L_a$  Hermítico, la dependencia en  $q$  y  $p$  de  $L_a(q, p)$  sea tipo  $L_a(q, p) = L_a(q)$ ,  $L_a(q, p) = L_a(p)$  o bien  $L_a(q, p) = \mathcal{O}(qp)$ .

<sup>4</sup>Recordar que unital significa que preserve la identidad, o  $\mathbf{S}(I) = I$  (Sec. 4.2, pág 38).

por lo general las dos cosas.

El ejemplo mas conocido de mapa no unital es el canal de amortiguamiento de amplitud (AA) que en el caso de un único *qubit* simula el decaimiento desde el estado excitado emitiendo un fotón al ambiente. Los operadores de Kraus para este ruido son [43, 86]

$$K_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.29)$$

que es evidentemente no unital ya que

$$\mathbf{S}^{\text{AA}}(I) = \sum_a K_a K_a^\dagger = \begin{pmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix} \neq I \quad (7.30)$$

(en el caso trivial  $p = 0$  es  $\mathbf{S} = I$ ). La evolución de una matriz densidad general  $\rho$  en la base computacional (de autoestados de  $\sigma_z$ ) es

$$\mathbf{S}^{\text{AA}}(\rho) = \begin{pmatrix} \rho_{00} + p\rho_{11} & \sqrt{1-p}\rho_{01} \\ \sqrt{1-p}\rho_{10} & (1-p)\rho_{11} \end{pmatrix} \quad (7.31)$$

donde se ven claramente los dos efectos. La decoherencia actúa reduciendo los términos no diagonales en un factor  $\sqrt{1-p}$  y la disipación actúa reduciendo las poblaciones en  $\rho_{11}$  e incrementándolas en  $\rho_{00}$  en un término igual a  $p$ . Este es un caso de un ruido por el cual partiendo de un estado mezcla se puede llegar a un estado puro (*i.e.*  $|0\rangle\langle 0|$ ).

### 7.2.2. Contracción del espacio de fases

Intentaremos explicar qué entendemos por ruido disipativo apelando al concepto clásico de contracción de volúmenes en el espacio de fases. En las secciones anteriores definimos como disipativos los canales que son no unitales. Por ello, dado un canal  $\mathbf{S}$ , proponemos cuantificar la disipación mediante una parámetro que mida la no-unitalidad. Definimos así

$$\eta = \frac{\text{Tr}[(\mathbf{S}(\rho_I) - \rho_I)^2]}{\text{Tr}[\rho_I^2]} = \frac{1}{N} \text{Tr}[\Gamma^2] \quad (7.32)$$

donde nuevamente  $\rho_I = I/N$  es la densidad uniforme y

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{S}(\rho_I) - \rho_I = \frac{1}{N} \sum_a (K_a K_a^\dagger - K_a^\dagger K_a) = \frac{1}{N} \sum_a [K_a, K_a^\dagger] \quad (7.33)$$

donde usamos la condición de preservación de la traza. El parámetro  $\eta$  tiene las siguientes propiedades:

- $\eta = 0$  si y solo si  $\mathbf{S}(I) = I$ .
- es la distancia de Hilbert-Schmidt entre  $\mathbf{S}(\rho_I)$  y  $\rho_I$ . Ahora  $\rho_I$  representa la densidad uniforme (clásicamente, el ensemble microcanónico) por lo que una distancia finita significa que la probabilidad se concentra en algunos lugares mientras que en otros disminuye. Es por este motivo que relacionamos este parámetro con la **contracción** de volúmenes disponibles en el espacio de fases. Es decir, si bien no hay pérdida de probabilidad, hay regiones del espacio de fases que disminuyen fuertemente la probabilidad de ser ocupadas.
- Una relación quizás más precisa con la contracción se obtiene mediante la variación de la pureza

$$p_n(\rho) = \text{Tr}[\rho_n^2] = \text{Tr}[(\mathbf{S}^n(\rho))^2], \quad (7.34)$$

a “tiempo”  $n$ . Expandiendo el cuadrado en (7.32) obtenemos

$$\eta = \frac{\text{Tr}[\mathbf{S}(\rho_I)^2 - (\rho_I)^2]}{\text{Tr}[(\rho_I)^2]} = \frac{p_1(\rho_I) - p_0(\rho_I)}{p_0(\rho_I)}. \quad (7.35)$$

Esta cantidad la podemos relacionar con los operadores de Lindblad ya que si tomamos una *coarse-graining* del tiempo  $\Delta t$  suficientemente pequeño y expandimos la pureza a segundo orden

$$p_t(\rho_I) = p_0(\rho_I) + \dot{p}_0(\rho_I)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{p}_0(\rho_I)\Delta t^2 + \dots \quad (7.36)$$

Teniendo en cuenta que

$$p = \text{Tr}[\rho^2] \Rightarrow \dot{p} = 2\text{Tr}[\rho\dot{\rho}] \quad (7.37)$$

y que de la Ec. (7.26)

$$\dot{\rho}_I = \mathcal{L}(\rho_I) = \frac{1}{N} \sum_a [L_a, L_a^\dagger] \quad (7.38)$$

se deduce que  $\dot{p}_0(\rho_I) = 0$ . Esto era de esperar ya que el  $\rho_I$  es el estado máximamente mezclado y la pureza toma su mínimo valor posible  $1/N$ . Entonces podemos escribir (para  $\Delta t = 1$ )

$$\frac{p_1(\rho_I) - p_0(\rho_I)}{p_0(\rho_I)} = \frac{1}{\hbar^2} \sum_{ab} \text{Tr} \left( [L_a, L_a^\dagger] [L_b, L_b^\dagger] \right). \quad (7.39)$$

En el límite clásico, teniendo en cuenta las Ecs. (7.27) y (7.35) obtenemos

$$\eta \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \infty \int dq dp (\text{div} \mathbf{A})^2. \quad (7.40)$$

Como consecuencia,  $\eta$  puede entenderse como un parámetro de contracción **global** de los volúmenes en el espacio de fases ya que como se destacó la divergencia del vector de drift se relaciona con la disipación.

Por su parte el operador  $\Gamma$  tiene las siguientes propiedades:

- Es Hermítico y de traza nula (en dimensión finita).
- Tiene representación real en el espacio de fases (Wigner, Husimi) y da una idea **local** de dónde ocurre la disipación. (Esto se verá gráficamente en la sección siguiente mediante un ejemplo.)

### 7.2.3. Ejemplo simple de canal disipativo

#### 7.2.3.1. Definición del modelo

Un poco inspirándonos en el canal de amortiguamiento de amplitud, generalizado para una dimensión arbitraria, pero también siguiendo el tipo de modelos de ruido difusivo compuesto por suma convexa de dos superoperadores de la Sec. 7.1, proponemos estudiar la familia de superoperadores definida por

$$\mathbf{D}_\varepsilon(\rho) = (1 - \varepsilon)\rho + \varepsilon \sum_{ij} p_{ij} P_{ij} \rho P_{ij}^\dagger, \quad (7.41)$$

donde los  $P_{ij}$  son operadores de transición como en la Sec. 7.1 y  $p_{ij}$  es una matriz real y positiva. La preservación de la traza se cumple si

$$\sum_{ij} p_{ij}^T P_{ij}^\dagger P_{ij} = \sum_i P_{ii} \sum_j p_{ij}^T = I \quad (7.42)$$

donde  $T$  significa ‘transpuesta’. Por lo tanto como se debe cumplir

$$\sum_i p_{ij} = 1$$

la matriz de coeficientes  $p_{ij}$  debe ser estocástica. Como buscamos familias no-unitales basta que  $p_{ij} \neq p_{ji}$  para  $i \neq j$ .

La forma simple de  $\mathbf{D}_\varepsilon$  permite un primer análisis aún sin dar una forma explícita de  $p_{ij}$ . Si expandimos la matriz densidad en la base de los  $P_{ij}$  como

$$\rho = \sum_{ij} \rho_{ij} P_{ij}, \quad \text{con } \rho_{ij} = \text{Tr}[P_{ji}\rho] = \langle i|\rho|i\rangle \quad (7.43)$$

el efecto de  $\mathbf{D}_\varepsilon$  es

$$\mathbf{D}_\varepsilon(\rho) = (1 - \varepsilon)\rho + \varepsilon \sum_i P_{ii} \sum_j p_{ij} \rho_{jj} \quad (7.44)$$

donde inmediatamente se observa que los términos no diagonales decaen por un factor  $(1 - \varepsilon)$  mientras que el cambio en los elementos de la diagonal está determinado por la forma de  $p_{ij}$ . En el caso de que  $p_{ij} = \delta_{ij}$  como indicamos antes, el ruido es unital pero además corresponde al amortiguamiento de fase descrito en la Sec. 7.1 o, en otras palabras, decoherencia donde la base preferida es exactamente  $|i\rangle$  en la que están definidos los  $P_{ij}$ ; no sirve como canal disipativo.

Buscamos un ruido que simule disipación, específicamente que reproduzca los efectos de una ‘fricción’ clásica.. Suponemos entonces que los  $P_{ij}$  son transiciones en momento y buscamos la forma de la matriz  $p_{ij}$  tal que los elementos de la diagonal decaigan hacia el estado fundamental (es decir momento nulo). En el toro el estado fundamental en la base de momentos es  $P_{00} = |0\rangle\langle 0| = |N\rangle\langle N| = P_{NN}$ . Al construir el ruido que produce decaimientos de los elementos de la diagonal debemos tener en cuenta esta simetría.

Proponemos entonces la forma

$$\mathbf{D}_{\varepsilon\alpha}(\rho) = (1 - \varepsilon)\rho + \varepsilon \sum_{i,j=-N/2}^{N/2} P_{[\alpha i]i} \rho P_{[\alpha i]i}^\dagger, \quad (7.45)$$

con  $\alpha \in (0, 1)$  y el índice  $[\alpha i]$  es la parte entera de  $(\alpha i)$  (además los índices negativos son tomados mod( $N$ )). La Ec. (7.45) es equivalente a la Ec. (7.41) donde la matriz  $p_{ij}$  tiene la estructura

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{para } i = [\alpha j] \text{ y } j \in [0, N/2 - 1] \\ 1, & \text{para } i = [\alpha j] + (1 - \alpha)(N - 1) \text{ y } j \in [N/2, N - 1] \\ 0, & \text{todos los demás casos} \end{cases} \quad (7.46)$$

En la Fig. 7.4 mostramos esquemáticamente la estructura de la matriz  $p_{ij}$  donde un cuadrado negro toma el valor “1” y uno blanco el valor “0”. La matriz así construida es trivialmente estocástica y solamente es biestocástica cuando es diagonal (*i.e.* simétrica). En el caso especial  $\alpha < 1/N$  tomamos  $p_{0j} = 1$  y  $p_{ij} = 0$  para todo  $i \neq 0$ .

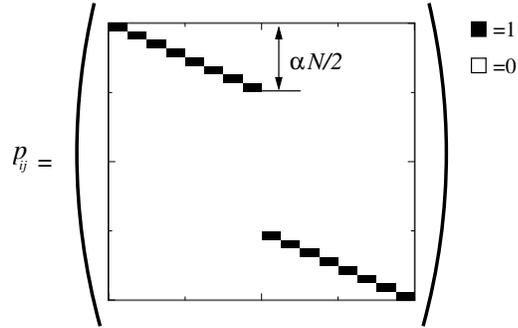


Figura 7.4: Esquema de la matriz  $p_{ij}$  correspondiente a la Ec. (7.41) para el modelo (7.45).

Como se indicó antes, el término  $(1 - \varepsilon)\rho$  da cuenta de la decoherencia (en este caso la base preferida es la de momentos). El término restante modifica los elementos de la diagonal de la siguiente manera: lleva las componentes de  $\rho$  en  $P_{ii} = |i\rangle\langle i|$  a  $P_{[\alpha i][\alpha i]} = |[\alpha i]\rangle\langle [\alpha i]|$  con un factor  $\varepsilon$  multiplicando. Tener en cuenta además la forma simétrica de hacerlo. Es decir, las componentes con  $i < N/2$  decaen hacia el  $P_{00}$  mientras que las componentes con  $i \geq N/2$  lo hacen hacia el  $P_{N-1,N-1}$ .

### 7.2.3.2. El caso $N = 2$

Antes de continuar con el análisis podemos considerar el caso de un sistema de *qubits* y que  $P_{ij}$  sean proyectores en la base computacional. Específicamente, nos detenemos en

el caso de un único *qubit* ( $N = 2$ ) y comparamos con el canal AA descrito en la Sec. 7.2.1 (en la pág. 95). Es fácil obtener, a partir de la Ec. (7.45) los operadores de Kraus (que en este caso son tres en lugar de dos)

$$K_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\varepsilon} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\varepsilon} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.47)$$

El único valor no trivial de  $\alpha$  es  $\alpha = 1/2$  que al tomar parte entera es igual a tomar  $\alpha = 0$ . La evolución de la matriz densidad presenta una pequeña diferencia con el caso del AA. Mediante un cálculo simple obtenemos

$$\mathbf{D}_{\varepsilon,\alpha}(\rho) = \begin{pmatrix} \rho_{00} + \varepsilon\rho_{11} & (1-\varepsilon)\rho_{01} \\ (1-\varepsilon)\rho_{10} & (1-\varepsilon)\rho_{11} \end{pmatrix}. \quad (7.48)$$

La decoherencia afecta los términos no diagonales con un término  $(1-\varepsilon)$ , en lugar de  $\sqrt{(1-\varepsilon)}$ , que es exactamente la forma en que decaen las coherencias en el amortiguamiento de fase (para un *qubit*) descrito en la Sec. 7.1.2 (pág. 89). Sin embargo las poblaciones decaen de la misma manera que el AA y el estado  $\rho_I$  evoluciona según

$$\mathbf{S}_{\varepsilon,\alpha}(I) = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon & 0 \\ 0 & (1-\varepsilon) \end{pmatrix}, \quad (7.49)$$

de manera que el efecto total es como una mezcla entre los dos ruidos.

### 7.2.3.3. El caso general

Volvemos al caso de un  $N$  arbitrario y consideramos los  $P_{ij}$  como proyecciones en momento. El parámetro de contracción  $\eta$  se puede calcular explícitamente como

$$\begin{aligned} \eta &= N \text{Tr} [(\mathbf{D}_{\varepsilon\alpha}(I/N) - I/N)^2] \\ &= \frac{\varepsilon^2}{N} \text{Tr} \left[ I - 2 \sum_i P_{[\alpha i],[\alpha i]} + \sum_{ij} P_{[\alpha i],[\alpha i]} P_{[\alpha j],[\alpha j]} \right] \\ &= \frac{\varepsilon^2}{N} \text{Tr} \left[ \sum_{ij} |\langle \alpha j | \alpha i \rangle|^2 - N \right] \end{aligned} \quad (7.50)$$

donde  $\text{Tr}[\sum_i P_{[\alpha i], [\alpha i]}] = N$ . Ahora,  $\langle \alpha j | \alpha i \rangle = 0, 1$  por lo que el cuadrado es irrelevante y lo sacamos para hacer más fácil el cálculo. Si consideramos  $N$  grande (y hacemos abuso de la notación) podemos pasar a variables continuas para hacer la suma

$$\begin{aligned} \sum_{ij} \langle \alpha j | \alpha i \rangle &\sim \iint \delta(\alpha(x_i - x_j)) \simeq \frac{1}{\alpha} \iint \delta(x_i - x_j) \\ &\sim \frac{1}{\alpha} \sum_{ij} \delta_{ij} = \frac{N}{\alpha}. \end{aligned} \quad (7.51)$$

Finalmente obtenemos

$$\eta = \varepsilon^2 \left( \frac{1 - \alpha}{\alpha} \right). \quad (7.52)$$

En la figura Fig. 7.5 mostramos  $\eta(\alpha)$  para dos valores fijos de  $\varepsilon$ . Se ve que los puntos obtenidos numéricamente encajan perfectamente con la expresión obtenida con la aproximación continua. Además se observa un valor de saturación en

$$\eta(\alpha = 1/N, \varepsilon) = \varepsilon^2(N - 1). \quad (7.53)$$

que se puede entender de la siguiente manera: como la dimensión del espacio de Hilbert es  $N$ , la parte entera  $[\alpha i]$  ( $i = 0, \dots, N - 1$ ) para cualquier de  $\alpha < 1/N$  ( $\equiv 2\pi\hbar$ ) es cero. Para llegar al valor de saturación el cálculo de (7.52) ya no vale, porque  $\eta(0)$  diverge.

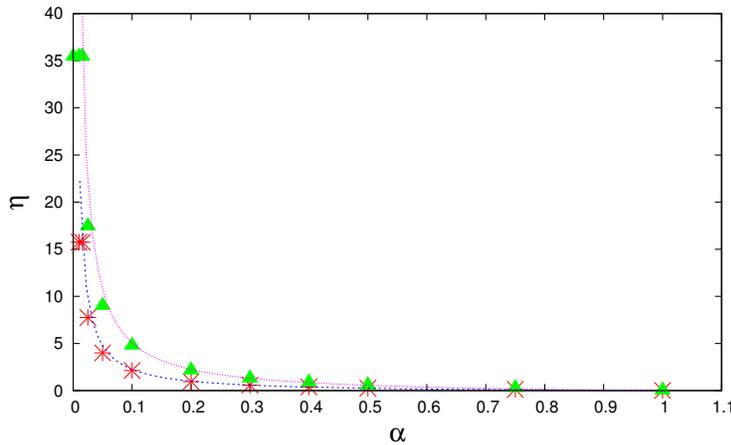


Figura 7.5: **Parámetro de contracción  $\eta$  en función de  $\alpha$  para el modelo de la Ec. (7.45) para dos valores de  $\varepsilon$ : (\*)  $\varepsilon = 0,5$ , (▲)  $\varepsilon = 0,75$ .**

Debemos tomar directamente todos los  $P_{[\alpha i]i} = P_{0i}$  y así se llega a

$$\eta(\alpha < 1/N, \varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{N} \text{Tr}[N^2 P_{00} - I] = \varepsilon^2(N - 1). \quad (7.54)$$

En particular, el caso  $\alpha \leq 1/N$  es interesante ya que la ecuación para el valor medio en momento es

$$\langle \hat{p}' \rangle = (1 - \varepsilon) \langle \hat{p} \rangle \quad (7.55)$$

donde usamos explícitamente el símbolo  $\hat{\phantom{p}}$  para denotar operador para que no se confunda con la matriz  $p_{ij}$ . Esta ecuación tiene exactamente la forma de una fricción proporcional a la velocidad ya que (suponiendo que el mapa resulta de pasos de tiempo infinitesimales)

$$\dot{q} \approx \frac{1}{m} (\langle \hat{p}' \rangle - \langle \hat{p} \rangle) = -\varepsilon \frac{\langle \hat{p} \rangle}{m} \approx -\varepsilon \dot{q}. \quad (7.56)$$

Sea  $F$  un campo de velocidades en el espacio de fases clásico tal que

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}, t). \quad (7.57)$$

Entonces si  $\text{div}(F) \neq 0$  los volúmenes en el espacio de fases no se conservan y hay disipación y en particular si  $\text{div}(F) < 0$  los volúmenes se contraen. Al ser una función de puntos en el espacio de fases la divergencia nos da una imagen local de la disipación. En el caso de la Ec. (7.55) (y también de la Ec. (7.56)) la divergencia es constante en todo el toro e igual a  $-\varepsilon$ .

Ahora veamos cómo la representación en el espacio de fases del operador  $\Gamma$ , definido en (7.33), nos da información **local** de la disipación. Es útil recordar (ver Cap. 2) que la representación de Husimi de un proyector  $P_{ii}$  en la base de momentos es una franja horizontal de ancho  $\hbar$  centrada en el momento  $p = i/N$ . Para este modelo simple teniendo en cuenta (7.33) y (7.45) obtenemos

$$\Gamma = \frac{\varepsilon}{N} \sum_{i=-N/2}^{N/2} (P_{[\alpha i][\alpha i]} - P_{ii}) = \frac{\varepsilon}{N} \left( \sum_{i=-N/2}^{N/2} P_{[\alpha i][\alpha i]} - I \right). \quad (7.58)$$

Este resultado tiene una interpretación intuitiva puesto que el primer término es una suma (incoherente) de autoestado de momento. Hay  $N$  de ellos en la suma pero solamente  $\alpha N$

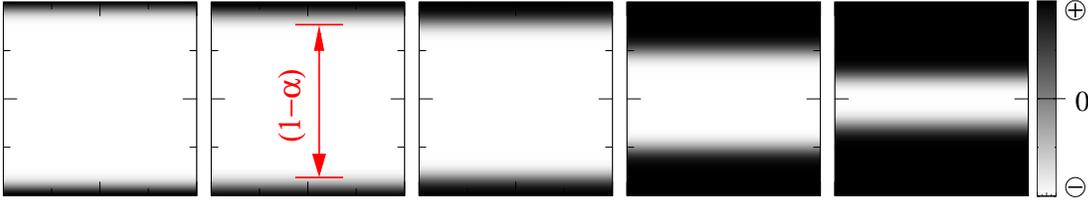


Figura 7.6: Representación de la función de Husimi de  $\Gamma$  para el modelo  $D_{\varepsilon\alpha}$ , para varios valores de  $\alpha$ . Las regiones claras son negativas (disipación) y las oscuras son positivas (decoherencia).

son diferentes. Es por esto que al restar la identidad habrá zonas negativas, donde faltan proyectores y zonas positivas, porque algunos se suman más de una vez. Una representación de  $\Gamma$  para distintos valores de  $\alpha$  puede verse en la Fig. 7.6, donde se utilizó la función de Husimi. Como el operador es Hermítico, la representación es real, pero por ser de traza nula toma tanto valores positivos como negativos. Los lugares donde  $\Gamma(q, p)$  es negativa son donde la compresión tiene lugar. En las regiones positivas (oscuras en la figura) el efecto del ruido es como el de un amortiguamiento de fase. Es decir, pura decoherencia con la base de momentos (en este caso) como base preferida (estados puntero).

Volviendo al caso  $\alpha \leq 1/N$  se ve que  $\Gamma(q, p)$  es uniformemente negativa en todo el espacio de fases, excepto en el  $P_{00}$ . En el límite clásico esta región es de área nula.

#### 7.2.3.4. Composición con un mapa unitario

Finalmente, queremos comprobar que el modelo propuesto tiene algunas de las características deseadas. Lo hacemos comparando con un mapa clásico disipativo conocido.

Siguiendo el el esquema de dos etapas para mapas cuánticos abiertos, planteado en la Sec. 4.1, calculamos numéricamente el estado invariante del superoperador

$$\mathbf{S}(\rho) = \mathbf{D}_{\varepsilon\alpha}(\mathbf{U}(\rho)) \quad (7.59)$$

donde  $U$  es la versión cuántica del mapa *standard* sobre el toro

$$q' = q + p' \quad (7.60)$$

$$p' = \delta p - 2\pi k \sin(2\pi q) \quad (7.61)$$

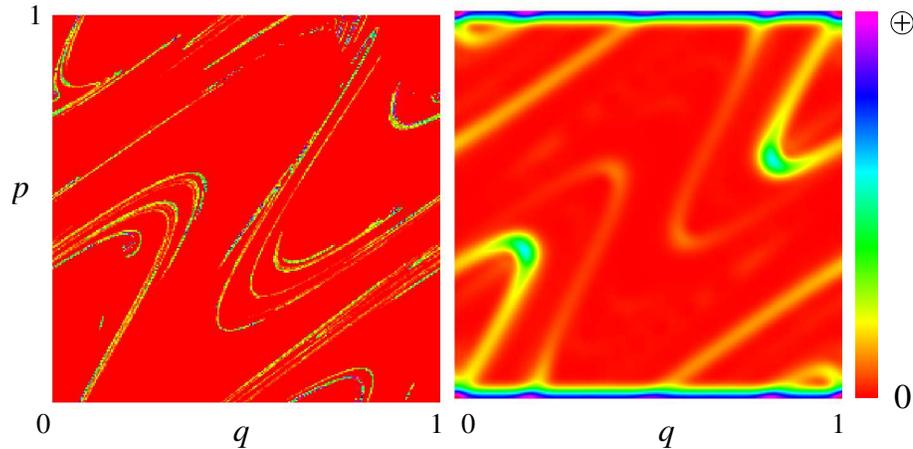


Figura 7.7: **Estados invariantes clásico (izquierda) cuántico (derecha) para el mapa *standard* con disipación.** En el caso cuántico se utilizó el modelo propuesto en la Ec. (7.45) con  $\alpha \sim 0$ .

(donde se sobreentiende que  $q$  y  $p$  son tomadas mod(1) y consideramos un valor de  $k$  para el que el mapa es completamente caótico) y tomamos  $\alpha \sim 0$ . El mapa clásico con disipación tiene un atractor extraño con estructura fractal (Fig. 7.7 izquierda). El panel derecho de la Fig. 7.7 muestra la función de Husimi del correspondiente estado invariante cuántico. La estructura es esencialmente la misma que para el caso clásico pero la resolución está limitada por el tamaño de  $\hbar$ .

En la Fig. 7.8 mostramos el estado invariante del mapa *standard* cuántico compuesto con el ruido disipativo  $\mathbf{D}_{\varepsilon\alpha}$  para varios valores de  $\varepsilon$  y  $\alpha$ . Esta figura es útil para ilustrar “por separado” los efectos de la disipación y la decoherencia. Como el parámetro  $\varepsilon$  controla la fuerza del ruido, en la hilera superior correspondiente a  $\varepsilon \sim 0$  se ve que el estado invariante no tiene una estructura semejante a la clásica que aparece en la Fig. 7.7. En este caso la evolución por el mapa es una perturbación de la evolución unitaria. A medida que  $\varepsilon$  aumenta se comienza a apreciar el efecto de los diferentes valores de  $\alpha$ . El caso  $\alpha \sim 0$  (columna izquierda) es equivalente al de la Fig. 7.7. En contraposición el estado invariante correspondiente a  $\alpha \sim 1$  es la densidad uniforme, como se esperaba dado que el ruido es unital. La “sombra” que se observa se puede explicar a partir de la definición del operador  $\Gamma$  y la Fig. 7.6. A medida que  $\alpha$  aumenta la región de disipación (en color claro en la Fig. 7.6) se hace cada vez más pequeña así como el parámetro de

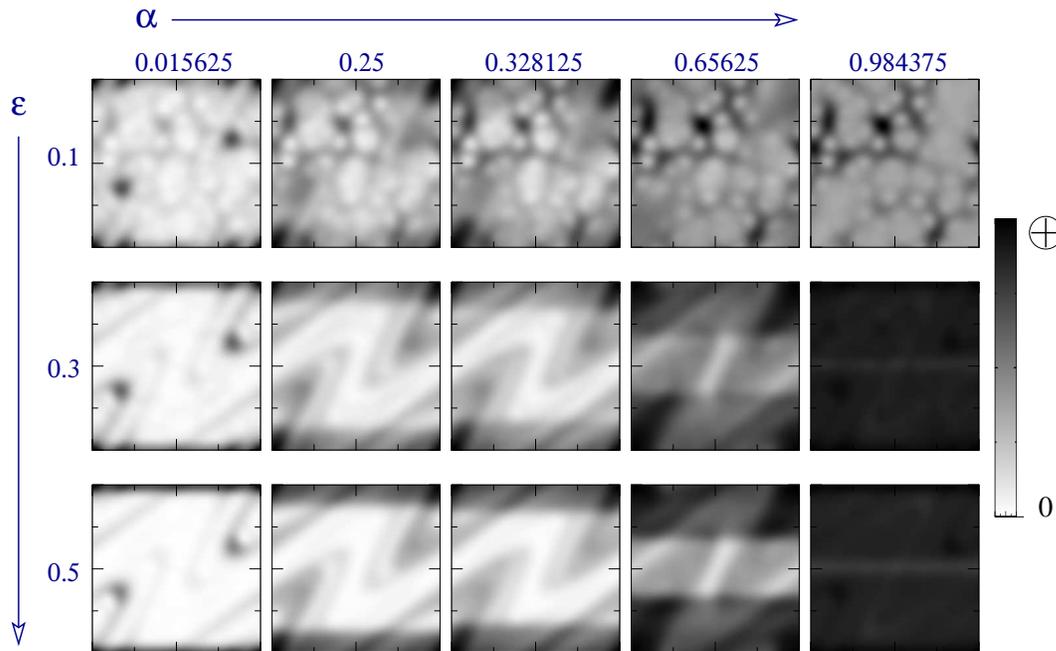


Figura 7.8: **Función de Husimi para el estado invariante del mapa estándar cuántico con disipación dada por  $D_{\varepsilon\alpha}$  tomando diferentes valores de  $\alpha$  y  $\varepsilon$  y fijando  $N = 64$ . Se puede observar la diferencia entre  $\alpha \approx 0$  (disipación) y  $\alpha \approx 1$  (difusión) así como los casos intermedios. El parámetro  $\varepsilon$  controla la fuerza del ruido, siendo  $\varepsilon \sim 0$  aproximadamente unitario.**

compresión global  $\eta$ . El ruido se hace cada vez más similar a un superoperador unital, al menos en las regiones superior e inferior, de ancho  $\alpha/2$ , del toro. Por lo tanto dentro de las regiones sombreadas de la Fig. 7.8 el ruido actúa como un amortiguador de fase con una base de estados preferidos dado por los proyectores en momento  $P_{ii}$ , con  $i = \{0, \dots, [\alpha N/2]\} \cup \{[(1 - \alpha/2)N] - 1, \dots, N - 1\}$ , mientras que en las regiones claras tiene lugar una disipación *tipo* fricción correspondiente a la ecuación (clásica) (7.56) y solamente en esa región se vislumbra la estructura del atractor clásico. Dicho de otra manera, El ruido se corresponde con una fricción clásica uniforme que tiene lugar en una región central del toro de ancho  $(1 - \alpha)$ .

Esta posibilidad de “jugar” entre pura decoherencia y distintos tipos de disipación es uno de los principales atractivos de este modelo. El otro es su **extrema simplicidad**.

# Capítulo 8

## Resumen y Perspectivas

Hemos estudiado el problema de la emergencia del mundo clásico a partir del cuántico particularmente para el caso de sistemas cuánticos cuyo análogo clásico es caótico. El principio de correspondencia de Bohr y el teorema de Ehrenfest fallan para tiempos muy cortos en estos sistemas. Hay sistemas macroscópicos en los que a tiempos razonablemente cortos deberían observarse efectos cuánticos como estados tipo gato de Schrödinger. Sin embargo en ningún caso se observan estos efectos. El motivo es que **todos** los sistemas físicos están de una forma u otra en contacto con otro que funciona como ambiente efectivo u observador. Ningún sistema puede considerarse completamente aislado y por lo tanto la decoherencia juega un papel fundamental en el restablecimiento de las propiedades clásicas.

Los trabajos de Peres [11] y la conjetura de Zurek y Paz [1] fueron fundamentales para predecir como la decoherencia permitiría observar propiedades clásicas en un sistema cuántico caótico. La evolución temporal de algunas cantidades está regida por el exponente de Lyapunov del sistema clásico equivalente, independientemente de la fuerza del ruido (o del valor de la constante de acoplamiento con el entorno). Esto que hemos llamado **correspondencia dinámica** ha sido verificado numéricamente en forma extensa tanto para la entropía lineal [5, 6, 48] como para el eco de Loschmidt [7, 8, 9, 10].

Siguiendo algunos trabajos recientes [64, 75, 65, 63, 12] hemos encarado el problema de la correspondencia desde otro punto de vista. Lo hemos llamado **correspondencia espectral**. Este enfoque es complementario al de la evolución temporal ya explica el comportamiento de cantidades como la entropía lineal pero para tiempos grandes.

Las cantidades clásicas que dominan el comportamiento a tiempos grandes son las llamadas resonancias de Ruelle-Pollicot y se definen como los polos del resolvente del propagador de Perron Frobenius (PF) [66, 67] clásico. También pueden relacionarse con el espectro puntual del PF suavizado. El coarse graining se implementa limitando la suavidad del espacio de funciones sobre el que el PF actúa. Para sistemas uniformemente hiperbólicos, Blank *et al.* [62] describieron sus características y además mostraron que es robusto ante perturbaciones. Por otro lado, Nonnemacher [12] mostró que el espectro del propagador cuántico en presencia de ruido Gaussiano converge uniformemente al del clásico (suavizado de forma equivalente). Dado este marco teórico, realizamos comprobaciones numéricas. Los sistemas elegidos son los mapas cuánticos sobre el toro ya que son los sistemas más simples que poseen todas las propiedades deseadas de un sistema caótico. Introducimos la decoherencia mediante un superoperador que implementa una difusión Gaussiana (Cap. 4), con una interpretación simple en el espacio de fases. Este ruido implementa un coarse graining del propagador suavizado. Utilizando la representación de cuerdas se puede explicar el efecto del ruido como una truncación efectiva de los modos rápidos del propagador unitario.

Para establecer la correspondencia espectral se debe llegar al límite clásico  $N \rightarrow \infty$  ( $\hbar \rightarrow 0$ ). En el contexto de superoperadores esto es difícil computacionalmente porque implica resolver un problema de autovalores de  $N^2 \times N^2$ . El método iterativo (Sec. 6.1.2) nos permitió obtener los autovalores más grandes con buena precisión y como comprobamos rigen el decaimiento (hacia el valor de saturación) de la entropía lineal y del eco de Loschmidt. Estas cantidades son de importancia actual en el contexto de la teoría de información cuántica. Para reforzar estos resultados, mostramos que en un amplio rango de valores de  $N$  y del parámetro de difusión  $\varepsilon$  el espectro se estabiliza en concordancia con lo indicado por el teorema de Nonemacher. En el límite  $N \rightarrow \infty$  son las resonancias de Ruelle-Pollicot clásicas.

El método iterativo consiste en diagonalizar una matriz (del orden) de  $10 \times 10$  por lo que es muy eficiente para obtener los decaimientos asintóticos, ya que solamente son necesarios los autovalores de mayor módulo. Para obtener un mayor número de autovalores, de manera de establecer más precisamente la correspondencia espectral, utilizamos la función de cuerdas. El ruido Gaussiano implementa una truncación efectiva del superoperador en la representación de cuerdas reduciendo el tamaño de la matriz a diagonalizar.

Pudimos establecer variando el tamaño de la matriz resultante luego de truncar, que el espectro se estabiliza para matrices de dimensiones del orden de  $N \times N$ . Para sistemas fuertemente caóticos, esto es más que suficiente, ya que la mayor parte del espectro del propagador suavizado se acumula en el origen [62]. Este método es similar al utilizado (para mapas en la esfera) en [64, 75, 65].

Como perspectiva de trabajo queda determinar la relación óptima entre  $N$  y  $\varepsilon$ , que establecería la separación en el espacio de los parámetros entre *clásico* y *cuántico*. Algunos adelantos en esta dirección, aunque con un enfoque diferente, fueron hechos por Toscano, *et al.* en [82] donde encuentran una relación universal para el tiempo de ruptura de la correspondencia midiendo la distancia entre distribuciones clásicas y cuasi-distribuciones (Wigner) cuánticas. Hay un trabajo reciente de Horvat *et al.* [89] en esta línea, pero usando la norma  $L^2$  como definición de distancia.

También relacionamos mapas cuánticos sobre el toro con algoritmos de computación cuántica. Un algoritmo cuántico es en sí un mapa unitario. En los casos en los que un conjunto de compuertas debe ser aplicado en forma repetida, el algoritmo puede ser pensado como un mapa iterativo y se puede suponer que vale el modelo de “dos etapas” (Sec. 4.1) que implementamos para mapas cuánticos abiertos, si suponemos que la implementación del algoritmo completo es perfecta y los ruidos solo afectan el sistema entre operación y operación. Las técnicas de superoperadores utilizadas en el estudio de mapas cuánticos son entonces aplicables en el contexto de la teoría de información cuántica. Mantener la coherencia en un circuito cuántico es uno de los problemas fundamentales de la computación cuántica. La dificultad de dicho problema se ve incrementada exponencialmente a medida que aumenta el número de *qubits*. Por lo tanto, resolver el problema de *escalabilidad* en computación cuántica implica entender y controlar los diferentes mecanismos de ruido que pueden introducir errores en el sistema. Con este objetivo en el Cap. 7 describimos generalizaciones para sistemas de muchos *qubits* de dos ruidos conocidos, el ruido despolarizante y el amortiguamiento de amplitud, como procesos unitarios aleatorios escritos en forma de Kraus generalizada como suma convexa de traslaciones sobre el toro. Como estos ruidos son diagonales en la representación de cuerdas, vimos que su espectro está determinado como la transformada de Fourier del arreglo de coeficientes de dicha suma convexa.

Finalmente en la Sec. 7.2 diferenciamos entre ruidos puramente difusivos o deco-

herentes de los demás que son disipativos (además de tener decoherencia). Entendemos disipación haciendo una analogía con un concepto clásico. Esto es, llamamos disipativo cualquier proceso que no preserve volúmenes en el espacio de fases. Utilizando algunos resultados conocidos [87] en el formalismo de ecuaciones maestras y relacionamos la no preservación de volúmenes en el espacio de fases con la no-unitalidad del superoperador que implementa el ruido. Luego definimos un parámetro que mide no-unitalidad y da una idea cuantitativa de disipación (global). A su vez mostramos gráficamente que el operador definido como la suma de los conmutadores de los operadores de Kraus que definen el ruido da información (local) sobre la disipación. Usamos un modelo simple de ruido no unital, que implementa una disipación en momento que produce un efecto equivalente a la fricción. Mostramos que cuando se compone con un mapa unitario, el estado invariante muestra características similares a las del atractor extraño clásico.

En el marco de la información cuántica corregir ruidos no unitales es una tarea difícil. En general en los esquemas de corrección se supone que son despreciables y solo se corrigen los ruidos unitales como el amortiguamiento de fases. Queda como posible trabajo futuro idear esquemas de control y corrección de ruidos no unitales.

# Apéndice A

## Vectores, operadores y superoperadores

El espacio  $\mathcal{H}_{N^2}$  de operadores lineales que actúan sobre  $\mathcal{H}_N$  es en sí un espacio vectorial que por ser un espacio de Hilbert debe ser compacto y tener un producto interno y una norma que induce una métrica. El producto interno “natural” en el espacio de matrices complejas de  $N \times N$  es el producto de Hilbert-Schmidt<sup>1</sup>

$$(\hat{A}, \hat{B}) = \text{Tr}[\hat{A}^\dagger \hat{B}], \quad (\text{A.1})$$

con  $\hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{H}_{N^2}$ . Alternativamente y cuando sea conveniente por claridad usaremos para el producto interno entre operadores la notación tipo Dirac

$$(A|B) \equiv (\hat{A}, \hat{B}) = \text{Tr}[\hat{A}^\dagger \hat{B}] \quad (\text{A.2})$$

donde se sobrentiende la correspondencia uno a uno entre la representación  $|B\rangle$  y el elemento  $\hat{B} \in \mathcal{H}_{N^2}$ . La misma correspondencia se asume para los elementos en el espacio dual de  $\mathcal{H}_{N^2}$  que en este caso son representados por  $\langle A|$ .

La norma inducida por este producto interno es

$$\|\hat{A}\| = \sqrt{(A|A)} = \sqrt{\text{Tr}[\hat{A}^\dagger \hat{A}]} \quad (\text{A.3})$$

---

<sup>1</sup>Ver por ejemplo el libro de Análisis Funcional de Reed y Simon[46]

y a partir de esta norma se puede definir una distancia entre operadores como

$$\mathcal{D}(\hat{A}, \hat{B}) = \sqrt{(|A| - |B|)(|A| + |B|)} = \sqrt{\text{Tr}[(\hat{A} - \hat{B})^\dagger (\hat{A} - \hat{B})]}. \quad (\text{A.4})$$

Las operaciones cuánticas son operadores lineales sobre este espacio de Hilbert. Dada una base ortonormal  $\{\hat{\Lambda}_i\}_{i=0}^{N-1}$  de operadores en  $\mathcal{H}_{N^2}$ , una operación cuántica puede escribirse como

$$\mathbf{S} = \sum s_{ij} \hat{\Lambda}_i^\dagger \odot \hat{\Lambda}_j, \quad (\text{A.5})$$

donde el símbolo  $\odot$  representa la acción *adjunta* o *izquierda-derecha*,  $\hat{\Lambda}^\dagger \odot \hat{\Lambda}(\hat{\rho}) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\Lambda}^\dagger \hat{\rho} \hat{\Lambda}$ . Cabe aquí hacer una diferenciación para esta representación. Llamamos *autoadjunto* a un superoperador  $\mathbf{S}$  tal que  $\mathbf{S}^\dagger = \mathbf{S}$ , donde  $\mathbf{S}^\dagger$  es el adjunto usual

$$(\hat{A}, \mathbf{S}(\hat{B})) = \text{Tr}[\hat{A}^\dagger \mathbf{S}(\hat{B})] = \text{Tr}[(\mathbf{S}^\dagger(\hat{A}))^\dagger \hat{B}] = (\mathbf{S}^\dagger(\hat{A}), \hat{B}). \quad (\text{A.6})$$

Por otro lado, llamamos *Hermitiano* o que *preserva la Hermiticidad* a un mapa que lleva operadores autoadjuntos (Hermíticos) a operadores autoadjuntos. Es decir si  $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ , entonces

$$\begin{aligned} [\mathbf{S}(\hat{A})]^\dagger &= \sum_{ij} s_{ij}^* \hat{\Lambda}_j A^\dagger \hat{\Lambda}_i^\dagger \\ &= \sum_{ij} s_{ji}^* \hat{\Lambda}_i A \hat{\Lambda}_j^\dagger = \mathbf{S}(\hat{A}). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

La última igualdad se cumple si y solo si  $s_{ij} = s_{ji}^*$ . En otras palabras, si el arreglo de coeficientes  $s_{ij}$ , que llamaremos  $\mathbf{s}$ , corresponde a una matriz autoadjunta. De lo anterior deducimos que dada la expansión (A.5) de un superoperador Hermitiano en la base de operadores  $\hat{\Lambda}_i$  se puede encontrar la forma *diagonal* (llamada expansión en suma de operadores o simplemente forma de Kraus) del mismo simplemente diagonalizando  $\mathbf{s}$  que podrá escribirse como

$$s_{ij} = \hat{U}_{ik} \lambda_k \hat{U}_{kj} \quad (\text{A.8})$$

donde  $\lambda_k$  son los autovalores (reales) y  $\hat{U}$  es la transformación unitaria que diagonaliza  $\mathbf{s}$ .

Así, definiendo

$$\hat{\mathbf{E}}_\mu = \sum_i \hat{\Lambda}_i \hat{U}_{i\mu}, \quad (\text{A.9})$$

la expansión en suma de operadores de  $\mathbf{S}$  generalizada es

$$\mathbf{S} = \sum_\mu \lambda_\mu \hat{\mathbf{E}} \odot \hat{\mathbf{E}}^\dagger. \quad (\text{A.10})$$

Notar que si  $\mathbf{S}$  es CP entonces  $\lambda_\mu \geq 0$ , por lo que la Ec. (3.13) puede llevarse a la forma de Ec. (3.13) simplemente haciendo  $K_\mu \equiv \sqrt{\lambda_\mu} \hat{\mathbf{E}}_\mu$ .

Queda por definir la otra forma de expresar un superoperador que usaremos: la *descomposición espectral*. Para esto suponemos (usando la notación pseudo-Dirac) que existen conjuntos completos de auto-operadores  $\{|R_i\rangle\}_{i=0}^{N^2-1}$ ,  $\{|L_i\rangle\}_{j=0}^{N^2-1}$ , a derecha e izquierda respectivamente, tales que

$$\mathbf{S}|R_i\rangle = \lambda_i |R_i\rangle \quad (\text{A.11})$$

$$\mathbf{S}^\dagger |L_j\rangle = \lambda_j^* |L_j\rangle, \quad (\text{A.12})$$

y que cumplen con

$$(L_i | R_j) = \delta_{ij}. \quad (\text{A.13})$$

Luego  $\mathbf{S}$  puede reescribirse como

$$\mathbf{S} = \sum \lambda_i |R_i\rangle \langle L_i|. \quad (\text{A.14})$$

Destacamos que en esta expresión utilizamos otra forma de actuar del superoperador llamada (a veces) *directa*<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Ver las notas de C. M. Caves en <http://info.phys.unm.edu/~caves>

# Apéndice B

## Cálculo del espectro más significativo de una matriz biestocástica

En este apéndice mediante una proposición que demostramos, explicamos por qué el método iterativo de la Sec. 6.1.2 da correctamente los primeros  $n_{\max}$  autovalores de una matriz biestocástica. El método está basado en el método de Lanczos [80], pero también tiene una raíz en el método variacional utilizado por Florido *et al.* [81] y Blum y Agam [63]. No hacemos aquí consideraciones cuantitativas en cuanto a la precisión del método.

**Proposición.** *Sea  $A$  una matriz en  $\mathbb{C}^{n \times n}$ , con  $n$  grande. Sean los autovalores de  $A$  ordenados tales que  $1 \geq |\lambda_0| \geq |\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_n - 1|$  (donde asumimos simple multiplicidad). Supongamos que  $\{l_i\}_{i=0}^{n-1}$  y  $\{r_i\}_{i=0}^{n-1}$  son las correspondientes bases de autovectores a izquierda y derecha, tales que*

$$Ar_i = \lambda_i r_i \quad (\text{B.1})$$

$$A^\dagger l_j = \lambda_j^* l_j, \quad (\text{B.2})$$

y sea  $u_0 \in \mathbb{C}^n$  un vector tal que

$$|(l_i, u_0)| > 0 \text{ y } |(r_i, u_0)| > 0 \quad \forall i < k \quad (\text{B.3})$$

para algún  $k \leq n$ , donde  $(\cdot, \cdot)$  denota producto escalar. Entonces los primeros  $k$  autovalores pueden ser estimados a partir del problema de autovalores de dimensión  $k \times k$  dado

por

$$\text{Det} \left[ \mathcal{K}^T(A^\dagger, u_0, k) A \mathcal{K}(A, u_0, k) - z \mathcal{K}^T(A^\dagger, u_0, k) \mathcal{K}(A, u_0, k) \right] = 0 \quad (\text{B.4})$$

donde la  $T$  significa transposicion y  $\mathcal{K}(A, u_0, k)$  es la matriz de Krylov [80] cuyas columnas son

$$\mathcal{K}(A, u_0, k) = \left[ u_0, Au_0, A^2 u_0, \dots, A^{k-1} u_0 \right]. \quad (\text{B.5})$$

**Demostración.** La demostración que haremos es bastante simple aunque no del todo rigurosa. Los conjuntos  $\{l_i\}_{i=0}^{n-1}$  y  $\{r_i\}_{i=0}^{n-1}$  de autovectores de  $A$  a izquierda y derecha son completos, y pueden ser normalizados según

$$(l_i, r_j) = \delta_{ij}. \quad (\text{B.6})$$

Por lo tanto existen las siguientes expansiones de  $u_0$

$$u_0 = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i r_i \quad (\text{B.7})$$

$$u_0 = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i l_i. \quad (\text{B.8})$$

Podemos usar estas expansiones para escribir

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}^T(A^\dagger, u_0, k) \mathcal{K}(A, u_0, k) \\ &= \begin{bmatrix} \sum_i \beta_i l_i \\ \sum_i \beta_i \lambda_i^* l_i \\ \vdots \\ \sum_i \beta_i \lambda_i^{*k-1} l_i \end{bmatrix} \left[ \sum_j \alpha_j r_j, \sum_j \alpha_j \lambda_j r_j, \dots, \sum_j \alpha_j \lambda_j^{k-1} r_j \right] \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

que escrito componente a componente da

$$\begin{aligned} \left[ \mathcal{K}^T(A^\dagger, u_0, k) \mathcal{K}(A, u_0, k) \right]_{\mu\nu} &= \sum_{i,j} \alpha_j \beta_i \lambda_j^\nu \lambda_i^{*\mu} (l_i, r_j) \\ &= \sum_i \alpha_i \beta_i \lambda_i^\nu \lambda_i^{*\mu}, \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

y de la misma manera podemos escribir

$$\begin{aligned} \left[ \mathcal{K}^T(A^\dagger, u_0, k) A \mathcal{K}(A, u_0, k) \right]_{\mu\nu} &= \sum_{i,j} \beta_i \alpha_j \lambda_j^{\nu+1} \lambda_i^{*\mu} (l_i, r_j) \\ &= \sum_i \beta_i \alpha_i \lambda_i^{\nu+1} \lambda_i^{*\mu}. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Asi la Ec. (B.4) puede ser reescrita como

$$\text{Det} \left[ \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \beta_i \lambda_i^\nu \lambda_i^{*\mu} (\lambda_i - z) \right] = 0. \quad (\text{B.12})$$

Si se cumplen todos los requisitos del enunciado esta ecuación no es más que el mismo problema de autovalores pero reescrito. Ahora, como  $\lambda_i$  están ordenados por módulo decreciente y asumiendo que los más pequeños se acumulan cerca del origen, dejando unos pocos (digamos  $k$ ) con módulo apreciable podemos despreciar la contribución de los últimos  $n - k$  terminos de la suma. De esta forma la Ec. (B.12) es el determinante de un producto de tres matrices cuadradas de  $k \times k$

$$\text{Det}[\Lambda^\dagger \Xi \Lambda] = \text{Det}[\Lambda^\dagger] \text{Det}[\Xi] \text{Det}[\Lambda] = 0 \quad (\text{B.13})$$

donde

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_0 & \lambda_0^2 & \cdots & \lambda_0^{k-1} \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_{k-1} & \lambda_{k-1}^2 & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-1} \end{pmatrix}; \quad (\text{B.14})$$

$$\Xi = \begin{pmatrix} \alpha_0 \beta_0 (\lambda_0 - z) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_1 \beta_1 (\lambda_1 - z) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{k-1} \beta_{k-1} (\lambda_{k-1} - z) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.15})$$

La matriz  $\Lambda$  es una matriz de Vandermonde. El determinante de una matriz de Vander-

monde  $\Lambda_k(\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1})$  está dado por

$$\text{Det}[\Lambda_k(\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1})] = \prod_{0 \leq i < j \leq k-1} (\lambda_j - \lambda_i). \quad (\text{B.16})$$

De la Ec. (B.16) se puede ver que si el espectro de  $A$  es no degenerado, entonces  $\Lambda$  es invertible. Además por la estructura de  $\Lambda$  se puede determinar el valor de truncado  $k$  dado que tomando  $k$  demasiado grande  $\Lambda$  se hace singular (por lo menos en lo que respecta a una precisión razonable). Entonces, de las propiedades de los determinantes la Ec. (B.13) se reduce a

$$\text{Det}[\Xi] = \prod_{\mu} \alpha_{\mu} \beta_{\mu} (\lambda_{\mu} - z) = 0. \quad (\text{B.17})$$

Como por hipótesis  $\alpha_{\mu} \beta_{\mu} \neq 0$  entonces la Ec. (B.17) brinda la solución deseada, *i.e.* los primeros  $k$  autovalores de  $A$ .  $\square$

En la práctica, la utilidad de este método depende fuertemente del valor  $(1 - |\lambda_1|)$  que determina la convergencia y la rapidez con que decaen los términos de la suma en la Ec. (B.13).

# Apéndice C

## Publicaciones Generadas

1. Ignacio García-Mata, Marcos Saraceno, Maria Elena Spina y Gabriel Carlo, “Phase space contraction and quantum operations”, *Phys. Rev. A* **72**, 069512 (2005).
2. Ignacio García-Mata y Marcos Saraceno, “Spectral Approach to Chaos and Quantum-Classical Correspondence in Quantum Maps”, *Mod. Phys. Lett. B* **19**, 341 (2005).
3. M. Leandro Aolita, Ignacio García-Mata y Marcos Saraceno, “Noise Models for Superoperators in the Chord Representation”, *Phys. Rev. A* **70**, 062301 (2004).<sup>1</sup>
4. Ignacio García-Mata y Marcos Saraceno. “Spectral Properties and Classical Decays in Quantum Open Systems”, *Phys. Rev. E.* **69**, 056211 (2004).
5. Ignacio García-Mata, Marcos Saraceno y María Elena Spina, “Classical decays in decoherent quantum maps”. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 064101 (2003).<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup>Seleccionado para el *Virtual Journal of Quantum Information* [www.vjquantuminfo.org](http://www.vjquantuminfo.org) (Dic. 2004).

<sup>2</sup>Seleccionado para el *Virtual Journal of Quantum Information* [www.vjquantuminfo.org](http://www.vjquantuminfo.org) (Aug. 2003).

# Bibliografía

- [1] Zurek, W. H. & Paz, J. P. Decoherence, chaos, and the second law. *Phys. Rev. Lett* **72**, 2508 (1994).
- [2] Zurek, W. H. Decoherence, einselection and the quantum origins of the classical. *Rev. Mod. Phys.* **75**, 715 (2003).
- [3] Lindblad, G. On the generators of quantum dynamical semigroups. *Comm. Math. Phys.* **48**, 119 (1976).
- [4] Gorini, V., Kossakowski, A. & Sudarshan, E. C. G. Completely positive dynamical semigroups of n-level systems. *J. Math. Phys.* **17**, 821–825 (1976).
- [5] Bianucci, P., Paz, J. P. & Saraceno, M. *Phys. Rev. E* **65**, 046226 (2002).
- [6] García-Mata, I., Saraceno, M. & Spina, M. E. Classical decays in decoherent quantum maps. *Phys. Rev. Lett* **91**, 064101 (2003).
- [7] Jalabert, R. A. & Pastawski, H. M. Environment-independent decoherence rate in classically chaotic systems. *Phys. Rev. Lett* **86**, 2490 (2001).
- [8] Wisniacki, D. A. & Cohen, D. Quantum irreversibility, perturbation independent decay, and the parametric theory of the local density of states. *Phys. Rev. E* **66**, 046209 (2002).
- [9] Wisniacki, D. A., Vergini, E. G., Pastawski, H. M. & Cucchietti, F. M. Sensitivity to perturbations in a quantum chaotic billiard. *Phys. Rev. E* **65**, 055206 (2002).
- [10] Cucchietti, F. M., Pastawski, H. M. & Wisniacki, D. A. Decoherence as decay of the Loschmidt echo in a Lorentz gas. *Phys. Rev. E* **65**, 045206 (2002).
- [11] Peres, A. Stability of quantum motion in chaotic and regular systems. *Phys. Rev. A* **30**, 1610 (1984).
- [12] Nonnenmacher, S. Spectral properties of noisy classical and quantum propagators. *Nonlinearity* **16**, 1685 (2003).

- 
- [13] Miquel, C., Paz, J. P. & Saraceno, M. Quantum computers in phase space. *Phys. Rev. A* **65**, 062309 (2002).
- [14] Scott, A. J. & Caves, C. M. Entangling power of the quantum baker's map. *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**, 9553 (2003).
- [15] Benenti, G., Casati, G., Montangero, S. & Shepelyansky, D. L. Efficient quantum computing of complex dynamics. *Phys. Rev. Lett* **87**, 227901 (2001).
- [16] Lakshminarayan, A. Entangling power of quantized chaotic systems. *Phys. Rev. E* **64**, 063207 (2001).
- [17] Aolita, M. L. & Saraceno, M. Decoherence models and their effects on quantum maps and algorithms. *quant-ph/0504211* (2005).
- [18] Schwinger, J. Unitary operator bases. *Proc. Natl. Acad. Sci.* **46**, 570 (1960).
- [19] Moshinsky, M. & Quesne, C. Linear canonical transformations and their unitary representations. *J. Math. Phys* **12**, 1772 (1971).
- [20] Ozorio de Almeida, A. M. *Hamiltonian systems: chaos and quantization* (Cambridge University Press, Cambridge, 1988).
- [21] Hannay, J. H. & Berry, M. V. Quantization of linear maps on a torus-Fresnel diffraction by a periodic grating. *Physica* **1D**, 267 (1980).
- [22] Basilio de Matos, M. & Ozorio de Almeida, A. M. Quantization of Anosov maps. *Ann. Phys.(NY)* **237**, 46 (1995).
- [23] Balazs, N. L. & Voros, A. The quantized baker's map. *Ann. Phys. (NY)* **190**, 1 (1989).
- [24] Saraceno, M. Classical structures in the quantized baker transformation. *Ann. Phys. (NY)* **199**, 37 (1990).
- [25] Izrailev, F. M. Limiting quasienergy statistics for simple quantum systems. *Phys. Rev. Lett* **56**, 541 (1986).
- [26] Berry, M. V., Balazs, N. L., Tabor, M. & Voros, A. Quantum maps. *Ann. Phys. (NY)* **122**, 26 (1979).
- [27] Goldstein, H. *Mecánica Clásica* (Reverté, Barcelona, 1992).
- [28] Wigner, E. P. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. *Phys. Rev.* **40**, 749 (1932).

- [29] Bertrand, J. & Bertrand, P. A tomographic approach to Wigner's function. *Found. Phys.* **17**, 397 (1987).
- [30] Ozorio de Almeida, A. M. The Weyl representation in classical and quantum mechanics. *Phys. Rep.* **295**, 265 (1998).
- [31] Rivas, A. M. F. & Ozorio de Almeida, A. M. The Weyl representation on the torus. *Ann. Phys. (NY)* **276**, 223 (1999).
- [32] Argüelles, A. *Construcción de la función de Wigner para espacios de fases discretos* (Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2004).
- [33] Kolovsky, A. R. Quantum coherence, evolution of the wigner function, and transition from quantum to classical dynamics for a chaotic system. *CHAOS* **6**, 534 (1996).
- [34] Nonnemacher, S. Crystal properties of eigenstates for quantum cat maps. *Nonlinearity* **10**, 1569 (1997).
- [35] Nonnemacher, S. *États propres de systèmes classiquement chaotiques dans l'espace des phases*. Ph.D. thesis, Université Paris-Sud (1998).
- [36] Whittaker, E. T. & Watson, G. t. *A Course of Modern Analysis* (Cambridge University Press, Cambridge, 1990).
- [37] Monastra, A. *Cálculo exacto y semiclásico de autoestados de sistemas caóticos* (Tesis de Licenciatura, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, 1997).
- [38] Cahill, K. E. & Glauber, R. J. Density operators and quasiprobability distributions. *Phys. Rev.* **177**, 1882 (1969).
- [39] Rivas, A. M., Vergini, E. G. & Wisniacki, D. A. Smoothed wigner functions: a tool to resolve semiclassical structures. *Eur. Phys. J. D* **32**, 355 (2005).
- [40] Schrödinger, E. Die gegenwaertige situation in der quantenmechanik. *Die Naturwissenschaften* **23**, 807 (1935).
- [41] Wheeler, J. & (eds), W. Z. *Quantum Theory and Measurement* (Princeton University Press, New Jersey, 1983).
- [42] Mintert, F., Carvalho, A. R. R., Kuś, M. & Buchleitner, A. Measures and dynamics of entangled states. *Phys. Rep.* **415**, 207 (2005).
- [43] Chuang, I. & Nielsen, M. *Quantum Information and Computation* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2001).

- [44] Hornberger, K. *Introduction to the theory of decoherence* (Lecture notes, “International summer school on quantum information”, <http://www.mpipks-dresden.mpg.de/issqui05/>, 2005).
- [45] Kraus, K. *States, Effects and Operations* (Springer-Verlag, Berlin, 1983).
- [46] Reed, M. & Simon, B. *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis* (Academic Press, New York-London, 1973).
- [47] Schumacher, B. Sending entanglement through noisy quantum channels. *Phys. Rev. A* **54**, 2614 (1996).
- [48] García-Mata, I. & Saraceno, M. Spectral properties and classical decays in quantum open systems. *Phys. Rev. E* **69**, 056211 (2004).
- [49] Aolita, M. L., García-Mata, I. & Saraceno, M. Noise models for superoperators in the chord representation. *Phys. Rev. A* **70**, 062301 (2004).
- [50] Palla, G., Vattay, G. & Voros, A. Trace formula for noise corrections to trace formulas. *Phys. Rev. E* **64**, 012104 (2001).
- [51] Braun, D. Spectral properties of dissipative chaotic quantum maps. *CHAOS* **9**, 730 (1999).
- [52] Wellens, T. & Buchleitner, A. Quantum state control in cavity QED. In Garbaczewski, P. & Olkiewicz, R. (eds.) *Lecture Notes in Physics: Dynamics of Dissipation* (Springer-Verlag, Berlin, 2001).
- [53] Streater, R. F. Convergence of the quantum Boltzmann map. *Commun. Math. Phys.* **98**, 177 (1985).
- [54] Terhal, B. & Vincenzo, D. D. Problem of equilibration and the computation of correlation functions on a quantum computer. *Phys. Rev. A* **61**, 022301 (2000).
- [55] Ruskai, M. B. Beyond strong subadditivity? improved bounds on the contraction of generalized relative entropy. *Rev. Math. Phys.* **6**, 1147 (1994).
- [56] Ragsinsky, M. Entropy production rates of bistochastic strictly contractive quantum channels on a matrix algebra. *J. Phys. A: Math. Gen.* **35**, L585 (2002).
- [57] Cvitanović, P., Artuso, R., Mainieri, R., Tanner, G. & Vattay, G. *Chaos: Classical and Quantum* (Niels Bohr Institute, Copenhagen, 2005). ChaosBook.org.
- [58] Haake, F. *Quantum Signatures of Chaos* (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1992).

- [59] Bohigas, O., Giannoni, M. J. & Schmit, C. Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws. *Phys. Rev. Lett* **52**, 1 (1984).
- [60] Benenti, G., Casati, G. & Veble, G. Stability of classical chaotic motion under a system's perturbations. *Phys. Rev. E* **67**, 055202 (2003).
- [61] Berman, G. P. & Zaslavski, G. M. Condition of stochasticity in quantum nonlinear systems. *Physica A* **91**, 450 (1978).
- [62] Blank, M., Keller, G. & Liverani, C. Ruelle-Perron-Frobenius spectrum for Anosov maps. *Nonlinearity* **15**, 1905 (2002).
- [63] Blum, G. & Agam, O. Leading Ruelle resonances of chaotic maps. *Phys. Rev. E* **62**, 1977 (2000).
- [64] Manderfeld, C., Weber, J. & Haake, F. Classical versus quantum time evolution of (quasi-) probability densities at limited phase-space resolution. *J. Phys. A: Math. Gen.* **34**, 9893 (2001).
- [65] Khodas, M., Fishman, S. & Agam, O. Relaxation to the invariant density for the kicked rotor. *Phys. Rev. E* **62**, 4769 (2000).
- [66] Ruelle, D. Resonances of chaotic dynamical systems. *Phys. Rev. Lett* **56**, 405 (1986).
- [67] Ruelle, D. Locating resonances for Axiom A dynamical systems. *J. Stat. Phys.* **44**, 281 (1986).
- [68] Baladi, V., Eckmann, J. P. & Ruelle, D. Resonances for intermittent systems. *Nonlinearity* **2**, 119 (1989).
- [69] Christiansen, F., Paladin, G. & Rugh, H. H. Determination of correlation spectra in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett* **65**, 2087 (1990).
- [70] Gaspard, P. & Ramirez, D. A. Ruelle classical resonances and dynamical chaos: The three- and four-disk scatterers. *Phys. Rev. A* **45**, 8383 (1992).
- [71] Brini, F., Siboni, S., Turchetti, G. & Vaienti, S. Decay of correlations for the automorphisms of the torus  $\mathbb{T}^2$ . *Nonlinearity* **10**, 1257 (1997).
- [72] Rugh, H. H. The correlation spectrum for hyperbolic analytic maps. *Nonlinearity* **5**, 1237 (1992).
- [73] Hasegawa, H. H. & Saphir, W. C. Unitarity and irreversibility in chaotic systems. *Phys. Rev. A* **46**, 7401 (1992).

- [74] Fishman, S. & Rahav, S. Relaxation and noise in chaotic systems. In *Lecture Notes in Physics: Dynamics of Dissipation* (Springer-Verlag, Berlin, 2001).
- [75] Weber, J., Haake, F., Braun, P., Manderfeld, C. & Šeba, P. Resonances of the Frobenius-Perron operator for a Hamiltonian map with a mixed phase space. *J. Phys. A: Math. Gen.* **34**, 7195 (2001).
- [76] Gaspard, P., Nicolis, G. & Provata, A. Spectral signature of the pitchfork bifurcation: Liouville equation approach. *Phys. Rev. E* **51**, 74 (1995).
- [77] Spina, M. E. & Saraceno, M. Models of diffusive noise on the sphere. *J. Phys. A: Math. Gen.* **37**, L415 (2004).
- [78] Lichtenberg, A. J. & Leiberman, M. A. *Regular and Stochastic Motion* (Springer-Verlag, New York, 1983).
- [79] Leboeuf, P., Kurchan, J., Feingold, M. & Arovas, D. P. Topological aspects of quantum chaos. *CHAOS* **2**, 125 (1992).
- [80] Golub, G. H. & Loan, C. F. V. *Matrix Computations* (The Johns Hopkins University Press, Baltimore, Baltimore, 1996).
- [81] Florido, R., Martín-González, J. M. & Llorente, J. M. G. Locating Pollicott-Ruelle resonances in chaotic dynamical systems: A class of numerical schemes. *Phys. Rev. E* **66**, 046208 (2002).
- [82] Toscano, F., de Matos Filho, R. L. & Davidovich, L. Decoherence and the quantum-classical limit in the presence of chaos. *Phys. Rev. E* **71**, 010101 (2005).
- [83] Jacquod, P., Silvestrov, P. & Beenakker, C. Golden rule decay versus Lyapunov decay of the quantum Loschmidt echo. *Phys. Rev. E* **64**, 055203 (2001).
- [84] Levstein, P. R., Usaj, G. & Pastawski, H. M. Attenuation of polarization echoes in nuclear magnetic resonance: A study of the emergence of dynamical irreversibility in many-body quantum systems. *J. Chem. Phys.* **108**, 2718 (1998).
- [85] Usaj, G. Gaussian to exponential crossover in the attenuation of polarization echoes in NMR. *Mol. Phys.* **95**, 1229 (1998).
- [86] Preskill, J. *Physics 229: Advanced Mathematical Methods of Physics: Quantum Information and Computation* (California Institute of Technology, <http://www.theory.caltech.edu/people/preskill>, 1998).
- [87] Strunz, W. T. & Percival, I. C. Classical mechanics from quantum state diffusion—a phase-space approach. *J. Phys. A: Math. Gen.* **31**, 1801 (1998).

- 
- [88] Percival, I. *Quantum State Diffusion* (Cambridge University Press, Cambridge, 1998).
- [89] Horvat, M., Prosen, T. & Esposito, M. D. Quantum-classical correspondence on compact phase space. *quant-ph/0601139* (2006).

## Agradecimientos

A Marcos Saraceno, por su paciencia, su sabiduría, su intuición y sus pilas. Una inspiración.

A “El Gurú”, Diego Wisniacki, Alejandro Rivas y Gabriel Carlo constantes fuentes de consulta, pero sobre todo de buena onda.

A María Elena Spina con quien colaboramos y (el último año) compartí la oficina.

A Juan Pablo Paz por su buena onda, pero sobre todo, por contactarme con Marcos.

A mis padres Laura y Carlos. Siempre me bancaron. En todo.

A mis hermanos: Coté, Nani, Rafa, Charlie, Rochi y Gloria.

Los muchachos del almuerzo: Roberto de Luca, “Cacho” Somacal, “El Gurú”, “Rodi” Perez, Alejandro Rivas, Diego Wisniacki.

A Roberto de Luca por su ayuda computacional.

A Angeles

A Juan

A Carla Bonifazi y María Cambón.

Los chicos del ITBA: Alber, Ceci (sobre todo Ceci), Meli, Max, Gastón, Corcho, Pato, Mariana.

A Carlos Pineda

A Graciana Puentes, Leandro Aolita, Leo Ermann, Ceci Lamela, Gaby Capeluto y Solange Di Napoli.

Los chicos de Auger: Carla, Tini, Dani, Diego y Alejandro.

La gente de Dresden: André R.R. Carvalho (y Marcele y Clarinha), Carlos Viviescas (y su mujer Olga), Javier Madroño (y Diana), Eduardo Goldoni Altman, Diego Pazó, Alexei Ponomarev, Giampaolo Cristadoro.

Pero sobre todo, en Dresden, quiero agradecerle a Andreas Buchleitner. Una persona increíblemente generosa. Un profesional de primera y uno de los mejores directores de estudiantes que conocí.

Por último, pero lo más importante, a mi mujer Cecilia.