

**ESTRUCTURA GEOMÉTRICA Y CUANTIFICACIÓN  
DE TEORÍAS DE GAUGE**

GABRIEL CATREN

## CONTENTS

Resumen	3
Abstract	4
<b>Introducción</b>	5
<b>1. Teorías de Gauge</b>	10
1.1. Sistemas Hamiltonianos con vínculos	16
1.2. Método de Dirac	24
1.3. Formalismo BRST	26
<b>2. Problema del tiempo en Gravedad Cuántica Canónica</b>	40
2.1. Formalismo ADM y Cuantificación Canónica	40
2.2. Problema del tiempo en Gravedad Cuántica	46
2.3. Sistemas parametrizados cuadráticos	50
2.4. Transformaciones de inversión de movimiento y de inversión del reloj	60
2.5. Modelos cosmológicos	68
2.6. Condiciones de contorno para la ecuación de Wheeler-DeWitt	74
<b>3. Principio de Gauge Extendido en Teorías de Yang-Mills</b>	84
3.1. Conexiones en espacios fibrados	87
3.2. Principio de gauge extendido	94
3.3. Curvatura extendida y transformaciones BRST	104
3.4. Principio de gauge extendido y teorías de Yang-Mills topológicas	110
3.5. Relación entre los fantasmas y la conexión de fijado de gauge	113
3.6. Formulación hamiltoniana de las teorías de Yang-Mills	119
3.7. Fijado de gauge generalizado en integrales de camino	120
3.8. Principio de gauge extendido y método de Faddeev-Popov	126
3.9. Fijado de gauge canónico	132
<b>4. Conclusiones</b>	135
Apéndices	140
A1. Elementos matemáticos	140
A2. Teoría de cuerdas bosónicas y modelos cosmológicos	147
References	152
Agradecimientos	157

## RESUMEN

En esta tesis se estudian ciertos aspectos de la estructura geométrica y de la cuantificación de las teorías de gauge (Relatividad General y teorías de Yang-Mills).

Para el caso de la Relatividad General, se trabaja en el marco de la gravedad cuántica canónica y del formalismo de cuantificación canónica de Dirac. Dado que la principal diferencia entre la Relatividad General y otras teorías de gauge es la presencia de un vínculo hamiltoniano, se estudian modelos de minisuperespacios con un número finito de grados de libertad en los que la única invariancia de la teoría es la derivada de dicho vínculo. En particular se estudia el *problema del tiempo* en gravedad cuántica canónica, los distintos tipos de simetrías temporales propios de las teorías con un vínculo hamiltoniano y el problema de imponer condiciones de contorno sobre el espacio de soluciones de la ecuación de Wheeler-DeWitt.

Para el caso de las teorías de Yang-Mills se propone un formalismo geométrico denominado *Principio de Gauge Extendido*. Las tres entidades geométricas fundamentales de una teoría de Yang-Mills -los campos de gauge, los fantasmas generadores del complejo BRST y el fijado de gauge- son unificadas en una nueva entidad geométrica: una *conexión extendida* en un fibrado principal adecuadamente elegido. Con el objeto de poder definir esta conexión extendida es necesario generalizar el fijado de gauge utilizándose para ello una *conexión de fijado de gauge* en lugar de las secciones usuales. A partir de las ecuaciones para la curvatura de la conexión extendida se derivan las transformaciones BRST de los campos de gauge y de los fantasmas sin necesidad de imponer las condiciones de horizontalidad habituales. A continuación se estudia la implementación del principio de gauge extendido a nivel de la cuantificación de las teorías de Yang-Mills con integral de camino. Se muestra que la conexión de fijado de gauge, aún cuando no defina en general una sección en el espacio de los campos, define siempre una sección de la proyección inducida en el espacio de los caminos. Con el objeto de definir dicho fijado de gauge a nivel de la integral de camino se aplica el método de Faddeev-Popov al fijado de gauge generalizado. Una diferencia fundamental con respecto al formalismo usual es que la conexión de fijado de gauge está *globalmente* bien definida, aún cuando la topología del fibrado sea no trivial (obstrucción de Gribov). De esta manera se muestra que la formulación del principio de gauge extendido provee una posible solución al problema de cuantificar teorías de gauge en presencia de este tipo de obstrucciones.

**Palabras claves:** Teorías de Gauge, Relatividad General, Cosmología cuántica, Yang-Mills, Principio de Gauge, formalismo BRST, Gribov.

# Geometrical Structure and Quantization of Gauge Theories

## ABSTRACT

In this thesis we study certain aspects of the geometrical structure and quantization of gauge theories (General Relativity and Yang-Mills theories).

In the case of General Relativity, we work in the framework of canonical quantum gravity and Dirac's canonical quantization method. Given that the main difference between General Relativity and other gauge theories is the existence of a hamiltonian constraint, we study minisuperspace models with a finite number of degrees of freedom (in this kind of models the only relevant invariance is the invariance defined by the hamiltonian constraint). In particular we address the *problem of time* in canonical quantum gravity, the different kinds of time symmetries in a theory with a hamiltonian constraint and the problem of imposing boundary conditions on the space of solutions of the Wheeler-DeWitt equation.

In the case of Yang-Mills theories we propose a geometrical formalism called *Extended Gauge Principle*. The three fundamental geometrical entities of a Yang-Mills theory -the gauge fields, the gauge fixing and the ghost fields which generate the BRST complex- are unified in a new geometrical entity: an *extended connection* in a properly chosen principal fiber bundle. In order to define this extended connection it is necessary to generalize the gauge fixing by using a *gauge fixing connection* instead of the usual local sections. From the equations for the curvature of the extended connection we derive the BRST transformations of the gauge and ghost fields without imposing the usual horizontality conditions. We address then the implementation of the extended gauge principle for the quantization of Yang-Mills theories at the level of the path integral. We show that this gauge fixing connection, even if it does not define in general a section in the space of fields, defines always a section of the induced projection in the space of paths. In order to find its path integral formulation, we apply the Faddeev-Popov method to the generalized gauge fixing procedure. A fundamental difference with the usual formalism is that the gauge fixing connection is *globally* well defined even when the topology of the fiber bundle is not trivial (Gribov's obstruction). In this way we show that the formulation of the extended gauge principle provides a possible solution to the problem of quantifying gauge theories in the presence of such an obstruction.

**Keywords:** Gauge Theories, General Relativity, Quantum Cosmology, Yang-Mills, Gauge Principle, BRST formalism, Gribov.

## Introducción

La determinación fundamental de las *teorías de gauge* es la de ser teorías caracterizadas por la presencia de vínculos entre las variables canónicas, siendo estos vínculos una consecuencia de la existencia de *simetrías locales* en la teoría. Dada la existencia de dichos vínculos, los métodos tradicionales de cuantificación (cuantificación canónica, integral de camino, etc.) no pueden ser *directamente* aplicados. Al efecto de poder cuantificar dichas teorías existen fundamentalmente dos estrategias.

Según la primera de ellas se establece que es necesario *reducir* la teoría de gauge clásica a una teoría ordinaria -sin vínculos ni invariancia de gauge- *antes de cuantificar*. Para ello es necesario resolver los vínculos y separar de esta manera los verdaderos grados de libertad de la teoría (o equivalentemente, definir un conjunto completo de grados de libertad invariantes de gauge). Técnicamente, dicho procedimiento implica una reducción de la teoría al así denominado *espacio de fases reducido* (superficie de vínculo cocotada por la acción del grupo de simetría). Dicha teoría reducida podrá luego ser cuantificada siguiendo alguno de los métodos ordinarios para cuantificar teorías clásicas sin invariancia de gauge. El problema con dicho método es que usualmente resulta técnicamente imposible reducir la teoría al espacio de fases reducido. Por otra parte y más allá de la complicación técnica, dicha reducción implica en general la pérdida de la covariancia o la localidad explícitas de la teoría.

La segunda estrategia consiste en cuantificar la teoría manteniendo *todos* los grados de libertad, tanto los grados de libertad físicos como los de gauge. El procedimiento usual es *fixar el gauge*, es decir seleccionar un único representante para cada clase de equivalencia de objetos gauge equivalentes. El problema será entonces el de extraer de la teoría cuántica así obtenida información invariante de gauge.

El primero de dichos métodos fué propuesto por Dirac y consiste en identificar el subespacio de estados cuánticos *físicos* con el núcleo de los operadores cuánticos lineales asociados a los vínculos clásicos (ver Refs.[35, 50]).

Siguiendo la misma filosofía de no reducir el sistema, el formalismo BRST (Becchi-Rouet-Stora-Tyutin) representa una poderosa extensión del método de Dirac (ver Refs.[12, 49, 50, 85, 84]). En lugar de reducir el espacio de fases eliminando los grados de libertad no físicos, el espacio de fases es extendido aún más agregando grados de libertad fermiónicos (*fantasmas*). Puede demostrarse entonces que la teoría con el *gauge fijo*

posee una simetría rígida fermiónica en el espacio de fases extendido, a saber la *simetría BRST*. Como dicen M. Henneaux y C. Teitelboim en Ref.[50]:

It is a remarkable occurrence that the road to progress has invariably been toward enlarging the number of variables and introducing a more powerful symmetry rather than conversely aiming at reducing the number of variables and eliminating the symmetry.<sup>1</sup>

La simetría BRST está generada por un operador  $\Omega$  nilpotente de orden 2, el cual define el correspondiente complejo y su teoría de cohomología asociada, la cohomología BRST. El punto fundamental es que el operador  $\Omega$  está construido de modo tal que su cohomología en grado cero  $H^0(\Omega)$  coincide con el conjunto de observables de la teoría (funciones invariantes de gauge sobre la superficie de vínculo). Es importante destacar que mientras que el método de Dirac es una prescripción para cuantificar teorías de gauge, el formalismo BRST depende de un análisis canónico y geométrico de dichas teorías válido tanto para las versiones clásicas como cuánticas de las mismas.

Aún contándose con estos métodos, las teorías de gauge presentan diversos tipos de obstrucciones a su cuantificación. Ejemplos paradigmáticos de dichas dificultades son el *problema del tiempo* en teorías generalmente covariantes como la Relatividad General y el *problema de Gribov* en teorías de gauge en general (ver Refs.[6, 8, 52, 55, 59, 60, 61] y Refs.[45, 78] respectivamente). El problema del tiempo en gravedad cuántica es una consecuencia de la presencia de un tipo particular de

---

<sup>1</sup>Ver también las siguientes consideraciones de A. Einstein (citadas por J. Barbour en Ref.[5]):

We want to distinguish more clearly between quantities that belong to a physical system as such (are independent of the choice of the coordinate system) and quantities that depend on the coordinate system. One's initial reaction would be to require that physics should introduce in its laws only the quantities of the first kind. However, it has been found that this approach cannot be realized in practice, as the development of classical mechanics has already clearly shown. One could, for example, think -and this was actually done- of introducing in the laws of classical mechanics only the distance of material points from each other instead of coordinates; a priori one could expect that in this manner the aim of the theory of relativity should be most readily achieved. However, the scientific development has not confirmed this conjecture. It cannot dispense with coordinate systems and must therefore make use in the coordinates of quantities that cannot be regarded as the result of definable measurements.

vínculo en la estructura canónica de la teoría, a saber el *vínculo hamiltoniano*. La presencia de dicho vínculo tiene como consecuencia que no exista en la teoría una variable temporal privilegiada. Esta característica de las teorías generalmente covariantes torna problemática la interpretación *canónica* de las mismas en términos de *evoluciones temporales* de variables dinámicas. Dado que el formalismo ordinario de la mecánica cuántica depende de la existencia de una variable temporal bien definida, la cuantificación de teorías con un vínculo hamiltoniano dista de ser completamente entendida. Por otra parte, el problema de Gribov en teorías de gauge es una consecuencia de la no trivialidad topológica de los espacios fibrados asociados a los espacios de configuración correspondientes. Dicha topología no trivial impide fijar el gauge de manera *global*, es decir seleccionar por medio de una *sección global* del fibrado en cuestión un único representante para cada clase de equivalencia.

En esta tesis se estudiarán algunos aspectos de ambos problemas. En la primera parte se estudiará el problema del tiempo en cosmología cuántica canónica y en la segunda se propondrá un formalismo geométrico extendido para las teorías de Yang-Mills que permite implementar la cuantificación de dichas teorías aún en la presencia de obstrucciones de Gribov.

La primera parte de esta tesis (Sección N°2) es una continuación del trabajo [24], en el que se estudió la cuantificación canónica del modelo cosmológico de Taub por medio del método de Dirac. En Ref.[20] se propone una interpretación y una generalización de las condiciones de contorno sobre el espacio de soluciones de la ecuación de Wheeler–DeWitt propuestas en Ref.[24]. A dichos efectos se reconsideró la pertinencia del formalismo de los *sistemas parametrizados* como modelo privilegiado para comprender la estructura canónica de una teoría con un vínculo hamiltoniano. A partir de un análisis de los diferentes tipos de simetrías temporales de una teoría generalmente covariante, se propuso una modificación de dicho formalismo a los efectos de poder describir un vínculo hamiltoniano *cuadrático en todos sus momentos* como lo es el vínculo de la Relatividad General (y no lineal en uno de sus momentos como en el formalismo de los sistemas parametrizados). Para ello se mostró en Ref.[20] que la Relatividad General, además de las simetrías ante inversiones temporales propias de la mecánica clásica o cuántica, posee otra simetría asociada al pasaje de una hoja a otra del vínculo hamiltoniano. El contenido físico sobre cada una de dichas hojas es completamente equivalente, por lo que la diferencia entre ambas es *puro gauge*. Si la teoría es *reducida* por medio de la separación

de un *reloj físico*, las dos hojas corresponden a los dos posibles sentidos de avance de dicho reloj. Las condiciones de contorno propuestas en Ref.[20] pueden interpretarse entonces en términos de una fijación de gauge que rompe dicha simetría (lo cual equivale a elegir arbitrariamente un sentido de avance del reloj). En Ref.[25] se analizaron algunos modelos provenientes de la cosmología de cuerdas a bajas energías para los que los análisis realizados en Refs.[20, 24] resultan relevantes.

En la segunda parte de esta tesis (Sección N°3) se propondrá una extensión del *principio de gauge* para teorías de Yang-Mills. Esta extensión fué efectuada en los trabajos [21, 22] (en Ref.[23] podrá encontrarse una versión resumida del formalismo general). Las teorías de Yang-Mills son teorías de gauge definidas en un  $G$ -fibrado principal  $P \rightarrow M$  donde  $G$  es un grupo de Lie y  $M$  el espacio-tiempo. Según el principio de gauge, con el objeto de garantizar que la teoría sea invariante ante *transformaciones de gauge locales* generadas por el *grupo de gauge*  $\mathcal{G}$  de los automorfismos verticales de  $P$ , es necesario definir una conexión  $A$ . En una trivialización local, esta conexión puede ser identificada con los campos de gauge usuales  $A_\mu^a$ . Si se define el espacio de configuración  $\mathcal{A}$  de todas las conexiones en  $P \rightarrow M$ , la acción del grupo de gauge  $\mathcal{G}$  sobre cada conexión define el  $\mathcal{G}$ -fibrado principal  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$ , donde  $\mathcal{A}/\mathcal{G}$  es el espacio de las órbitas de las conexiones gauge equivalentes. El fijado de gauge de una teoría de Yang-Mills requiere la definición de una sección  $\sigma : \mathcal{A}/\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A}$  que seleccione un único representante  $A \in \mathcal{A}$  para cada órbita  $[A] \in \mathcal{A}/\mathcal{G}$ . Puede entonces afirmarse que en una teoría de gauge del tipo Yang-Mills existen tres entidades geométricas fundamentales : los *campos de gauge*, el *fijado de gauge* y los *fantasmas* generadores del complejo BRST (introducido este último a los efectos de recuperar la simetría de gauge en la teoría con el gauge fijo). En Ref.[21] se demostró que estos tres componentes de una teoría de Yang-Mills pueden ser considerados como diferentes aspectos de una única entidad geométrica unificada. Se demostró que la misma es una *conexión extendida*  $\mathbb{A}$  en un espacio fibrado que unifica el  $G$ -fibrado principal  $P \rightarrow M$  sobre el espacio-tiempo y el  $\mathcal{G}$ -fibrado principal  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$  en el espacio de configuración de los campos de gauge. Las principales referencias para dicha construcción geométrica son los trabajos de M.F. Atiyah y I.M. Singer [3] y L. Baulieu y I.M. Singer [10]. Con el objeto de definir la conexión extendida  $\mathbb{A}$  fué necesario generalizar el concepto de fijado de gauge: el gauge no se fija por medio de una sección  $\sigma : \mathcal{A}/\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A}$  sino por medio de una conexión  $\eta$  en el mismo fibrado principal. Una primera ventaja es



que los fantasmas del complejo BRST pueden ser naturalmente asociados a dicha conexión de fijado de gauge  $\eta$  (ya sea identificándolos con una *conexión universal* en la así denominada *álgebra de Weil* o bien asociándolos -en una trivialización local- con la *parte vertical canónica* de la conexión  $\eta$ ). Por otra parte, la noción de conexión es más general que la noción de sección ya que toda sección  $\sigma$  induce una conexión  $\eta_\sigma$ , pero no toda conexión  $\eta$  puede ser integrada a una sección (una obstrucción local es la curvatura y una global es la monodromía). En otros términos, el concepto de conexión está *globalmente* bien definido aún cuando la topología del fibrado  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$  sea no trivial. En este sentido la generalización propuesta permite cuantificar teorías de Yang-Mills aún en la presencia de una obstrucción de Gribov.

En la Sección N°1 se resumirán las principales nociones de la teorías hamiltonianas con vínculos, del método de Dirac para la cuantificación de dichas teorías y del formalismo BRST.

## 1. Teorías de Gauge

La importancia de la teoría general de la relatividad de Einstein no fué solamente la de proveer una teoría relativista de la gravitación. La Relatividad General fué también el comienzo de un programa general de *geometrización* de todas las interacciones fundamentales. Esta “generalización” de la Relatividad General al resto de las interacciones pudo ser efectuada bajo la forma de las teorías de Yang-Mills. El principio rector de dicho programa es el *principio de gauge* y las teorías formuladas a partir de dicho principio son denominadas *teorías de gauge*.

La Relatividad General y las teorías de Yang-Mills son los dos ejemplos privilegiados de teorías de gauge. La característica determinante de dichas teorías es la presencia de vínculos entre las variables canónicas. Así como la presencia de *cantidades conservadas* es una consecuencia de la existencia de *simetrías globales* de la teoría (primer teorema de Noether), la existencia de *vínculos* es una consecuencia de la existencia de *simetrías locales* de la teoría (segundo teorema de Noether). Que una cierta teoría posea una simetría local significa que la teoría es invariante ante transformaciones *dependientes de la posición en el espacio-tiempo* de los sistemas de referencia correspondientes (los cuales permiten dotar de coordenadas a los diferentes objetos geométricos de la teoría).

Describiremos ahora el escenario geométrico de las teorías de gauge. Los diferentes *campos* de la teoría estarán definidos por medio de la asignación de un cierto elemento geométrico a cada punto  $x$  del espacio-tiempo  $M$ . Por ejemplo un campo vectorial define un vector  $v$  en cada espacio tangente a cada punto  $x \in M$  (es decir  $v(x) \in T_x M$ ). Más generalmente, sobre cada  $x \in M$  puede definirse un cierto conjunto  $F_x$  de objetos geométricos que definirán al campo en cuestión (vectores, formas diferenciales, tensores, etc.). Estos espacios  $F_x$  tienen sistemas de referencia  $S$  que pueden “rotarse” por medio de la acción de algún grupo  $G$  (para el caso de los campos vectoriales tangentes a  $M$ , el grupo  $G$  es el grupo lineal  $GL(n)$ ). Se tiene entonces una *variedad de base* (el espacio-tiempo  $M$ ) en cada uno de cuyos puntos  $x$  existe un espacio de objetos geométricos  $F_x$  (denominados *fibras*) sobre cuyos sistemas de referencia  $S$  actúa un grupo de “rotaciones”  $G$  (el cual será denominado *grupo estructural*). Se dirá que dicha estructura define un *espacio fibrado asociado*<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>En el Apéndice A1 podrá encontrarse un resumen de las nociones básicas de la teoría de los espacios fibrados.

Dado un espacio fibrado de este tipo, es posible definir otra estructura geométrica en la que sobre cada punto  $x$  de la base  $M$  se tiene el espacio  $G_x$  de todos los sistemas de referencia  $S$  en el espacio de objetos geométricos  $F_x$ . Cada sistema de referencia  $S$  en  $G_x$  puede ser “rotado” por medio de un elemento  $g$  del grupo  $G$  y dados dos sistemas de referencia  $S_1$  y  $S_2$  en  $G_x$  existe una única “rotación”  $g$  del grupo estructural  $G$  tal que  $g \cdot S_1 = S_2$ . Esto tiene como consecuencia que los espacios  $G_x$  de sistemas de referencia sean todos isomorfos al grupo estructural  $G$ . Existe sin embargo una diferencia fundamental entre los espacios  $G_x$  y el grupo estructural  $G$ : este último tiene un origen privilegiado (su elemento neutro) mientras que  $G_x$  no. Técnicamente se dirá que las fibras  $G_x$  son  $G$ -torsores. Esta estructura geométrica en la que se tiene una “copia” (sin elemento neutro) del grupo estructural  $G$  sobre cada punto  $x$  del espacio-tiempo  $M$  se denomina  $G$ -fibrado principal y se denotará  $P \rightarrow M$  (donde  $P$  es el *espacio total* del fibrado).

Dado que sobre cada punto  $x$  del espacio-tiempo se tiene un espacio de objetos geométricos  $F_x$  *distinto*, no existe una forma canónica de poder comparar objetos geométricos pertenecientes a fibras  $F_x$  distintas. En otras palabras, aún si consideramos los objetos geométricos en cada fibra independientemente de toda asignación de coordenadas, los mismos no tienen una naturaleza absoluta gracias a la cual se podría decidir si dos objetos en fibras distintas son iguales o no. Esto es una consecuencia de la equivalencia fundamental entre *transformaciones pasivas* (transformación del sistema de referencia) y *transformaciones activas* (transformación del objeto geométrico).

Con el objeto de poder relacionar objetos geométricos pertenecientes a fibras distintas existen en principio dos procedimientos. En primer lugar es posible *identificar* sistemas de referencia  $S$  en fibras distintas por medio de la identificación de cada espacio  $G_x$  de sistemas de referencia con el grupo estructural  $G$ . Para ello es necesario elegir *arbitrariamente* un elemento neutro -un origen- en cada fibra  $G_x$ . Técnicamente esta elección puede efectuarse por medio de una *sección*  $\sigma : M \rightarrow P$  del  $G$ -fibrado principal correspondiente. Dicha sección permite establecer un isomorfismo entre el espacio total  $P$  del fibrado principal y un espacio producto de la forma  $M \times G$ . Este procedimiento es denominado *trivialización del fibrado*. Como ahora todas las fibras  $G_x$  fueron identificadas, tiene sentido afirmar que los sistemas de referencia  $S$  en cada una de ellas tienen que “rotar” *al unísono*. En este sentido, resulta sensato exigir que la teoría tenga una simetría *global* ante rotaciones de los sistemas de referencia definidas por un *único* elemento  $g \in G$

para todos los espacios  $G_x$ . En otros términos la teoría debería ser invariante ante rotaciones generadas por elementos de  $G$  *independientes del espacio-tiempo*. El problema con este procedimiento es que la identificación entre los espacios  $G_x$  de sistemas de referencia y el grupo  $G$  no es canónica. Cada sección  $\sigma$  define una cierta identificación posible sin que ninguna tenga un privilegio particular. Esto es una consecuencia del hecho de que se están identificando *artificialmente* objetos isomorfos pero distintos. En efecto, que todas las fibras  $G_x$  sean isomorfas al grupo  $G$  no significa que exista un isomorfismo canónico. Por otra parte, si el fibrado es topológicamente no trivial, no es posible efectuar dicha identificación *globalmente* por medio de una *única* sección  $\sigma : M \rightarrow P$ . En ese caso será necesario cubrir  $M$  con abiertos  $U_i$  y definir secciones locales  $\sigma_i : U_i \rightarrow P$  sobre cada abierto (las cuales permiten definir isomorfismos locales de la forma  $P|_{U_i} \simeq U_i \times G$ ). El hecho de que los isomorfismos locales no sean canónicos significa que estrictamente hablando un  $G$ -fibrado principal  $P \rightarrow M$  no es un espacio producto *ni siquiera localmente*. Considerarlo como un espacio producto es en efecto *trivializarlo*. Se pierde de esta manera una de las características fundamentales de un espacio fibrado, a saber que sus fibras, aún siendo isomorfas, son distintas. Por otra parte, y a partir del *principio de localidad* implementado por la relatividad especial, se sabe que toda “conexión” física (o transmisión de información) entre eventos separados en el espacio-tiempo tiene que estar mediada por alguna interacción local. Teniendo en cuenta este principio de localidad, la identificación global, rígida y *ad hoc* entre las distintas fibras  $G_x$  por medio de una sección  $\sigma$  no parece satisfacer dicha exigencia.

En segundo lugar es posible, en lugar de *identificar* a las distintas fibras  $G_x$  por medio de secciones trivializantes, introducir una estructura geométrica adicional, a saber una *conexión*  $\omega$ . Una conexión permite *conectar* a las fibras  $G_x$  definiendo *transportes paralelos* entre elementos pertenecientes a fibras distintas a lo largo de caminos  $\gamma$  en la base  $M$ . Una conexión permite también definir el transporte paralelo de los objetos geométricos pertenecientes a las fibras  $F_x$  de los fibrados asociados correspondientes. Estos transportes paralelos dependen en general del camino  $\gamma$  tomado en  $M$  por lo que las fibras así *conectadas* no quedan *identificadas*. Puede decirse entonces que una conexión, al no trivializar el fibrado, respeta la heterogeneidad introducida por el espacio-tiempo  $M$  entre los distintos *espacios internos*  $F_x$ .

Como ahora los sistemas de referencia  $S \in G_x$  en cada fibra  $F_x$  no están identificados, debería ser posible rotar cada uno de ellos por medio de una rotación  $g \in G$  *distinta para cada*  $x \in M$ . En otros

términos, la teoría debería ser invariante ante rotaciones *dependientes del espacio-tiempo* de los sistemas de referencia  $S \in G_x$ , es decir ante transformaciones definidas por mapas de la forma  $g(x) : M \rightarrow G$ . Estas transformaciones son denominadas *transformaciones de gauge locales* y pueden identificarse con los automorfismos del fibrado  $P \rightarrow M^3$ . Estas transformaciones locales actúan también sobre las conexiones  $\omega$  y puede demostrarse que ambas acciones se cancelan de modo tal que la teoría resultante es *naturalmente* invariante ante dichas transformaciones. El conjunto de todas las transformaciones de gauge locales  $g(x)$  forma un grupo, el así denominado *grupo de gauge*  $\mathcal{G}$  de la teoría.

Podría objetarse sin embargo que la introducción de una conexión  $\omega$  implica también, como sucedía con las secciones trivializantes  $\sigma$ , la definición *ad hoc* de una estructura geométrica adicional. Sin embargo, una de las ideas más importantes de la física del siglo XX es que las *conexiones geométricas* son las entidades matemáticas adecuadas para describir satisfactoriamente las *interacciones físicas* que “conectan” eventos espacio-temporales distintos. La idea intuitiva de que una *interacción física* permite *conectar* eventos separados en el espacio-tiempo adquiere de esta manera un sentido geométrico riguroso. De esta manera, las “conexiones fundamentales”, al definir grados de libertad efectivos de la teoría, no son ni una estructura geométrica fija (un *background* absoluto) ni un elemento arbitrario de la teoría (un *puro gauge*). La Relatividad General fué la primer teoría en implementar dicha identificación<sup>4</sup>. Este esquema conceptual pudo luego ser extrapolado exitosamente al resto de las interacciones fundamentales por medio de las teorías de Yang-Mills. La noción geométrica de conexión permitió de esta manera “generalizar” la Relatividad General a todas las fuerzas fundamentales de la naturaleza.

Como ya se dijo, la equivalencia entre transformaciones *activas* y *pasivas* implica que los “puntos geométricos” descritos por las coordenadas correspondientes no tienen un sentido geométrico absoluto. En primer lugar, la invariancia de la Relatividad General ante el grupo  $Diff(M)$  de los difeomorfismos del espacio-tiempo  $M$  implica que los puntos  $x \in M$  no tienen un contenido físico observable (ver Refs.[37, 67,

---

<sup>3</sup>La caracterización de las transformaciones de gauge locales como mapas  $g(x) : M \rightarrow G$  es válida únicamente cuando el fibrado  $P \rightarrow M$  es trivial. Para el caso general ver Sección N°3.2.

<sup>4</sup>Esta descripción no pretende seguir el orden histórico de la interrelación entre conceptos matemáticos y físicos: la noción de conexión sobre un espacio fibrado es cronológicamente posterior a la Relatividad General.

70])<sup>5</sup>. En segundo lugar, si los campos físicos relevantes están descritos por secciones de los fibrados asociados correspondientes  $\phi : M \rightarrow E$  (con  $\phi(x) \in F_x$ ), la invariancia de la teoría ante transformaciones de gauge locales generadas por la acción local del grupo estructural  $G$  sobre los sistemas de referencia  $S$  en cada fibra  $F_x$  implica que los objetos geométricos en  $F_x$  tampoco tienen un sentido geométrico absoluto (en el sentido de que no es posible identificar *a priori* objetos en  $F_x$  con objetos en  $F_{x'}$ ). De esta manera, una teoría con simetrías de gauge locales tiende a eliminar los distintos *backgrounds absolutos* de la teoría (tanto en lo referente a la base  $M$  como a las fibras  $F_x$ ). Ahora bien, dado que para garantizar dicha invariancia local es necesario introducir estructuras geométricas *dinámicas* adicionales (conexiones), puede afirmarse que una teoría de gauge permite substituir los *backgrounds absolutos* de la teoría por nuevos grados de libertad asociados a las interacciones físicas (por ejemplo el espacio absoluto de Newton por el campo gravitatorio de Einstein). Podríamos decir entonces que la Relatividad General inaugura un programa de “*machianización*” progresiva de la física, en el sentido de que la dinámica ya no tiene lugar en un *background* geométrico absoluto (“*movimiento absoluto*”) sino que, por el contrario, toda dinámica no es más que una correlación (“*movimiento relativo*”) entre grados de libertad materiales y grados de libertad geométricos (ver Ref.[7]). En la Figura N°1 se resumen las principales características de las teorías de gauge.

La descripción efectuada hasta aquí es *covariante*, en el sentido de que no se ha efectuado una separación explícita entre el espacio y el tiempo. Con el objeto de describir las soluciones de una teoría física en términos *canónicos*, es decir en términos de la *evolución temporal* de sus grados de libertad, es necesario separar explícitamente el espacio y el tiempo. Dicha separación puede ser efectuada por medio de un difeomorfismo  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R} \times M^{(3)}$  donde  $M^{(3)}$  es una variedad riemanniana tridimensional. Los fibrados  $P \rightarrow M$  sobre el espacio-tiempo pueden entonces ser obtenidos como el pullback de los correspondientes fibrados sobre el espacio  $M^{(3)}$ . El problema con esta separación

---

<sup>5</sup>El grupo  $Diff(M)$  induce una acción sobre el espacio  $\mathcal{F}$  de los campos en  $M$ . En consecuencia la información física estará contenida en el espacio cociente  $\frac{\mathcal{F}}{Diff(M)}$  (dos configuraciones de campo serán consideradas físicamente equivalentes si puede pasarse de una a otra por medio de un elemento de  $Diff(M)$ ). Esto significa que si por ejemplo  $\phi$  es un campo escalar, el valor de  $\phi$  en un punto  $x$  del espacio-tiempo no tiene contenido físico observable. Por el contrario la cantidad *relativa*  $\phi(*)$  donde  $*$  representa algún otro evento físico es invariante ante la acción de  $Diff(M)$ , definiendo en consecuencia un observable de la teoría.

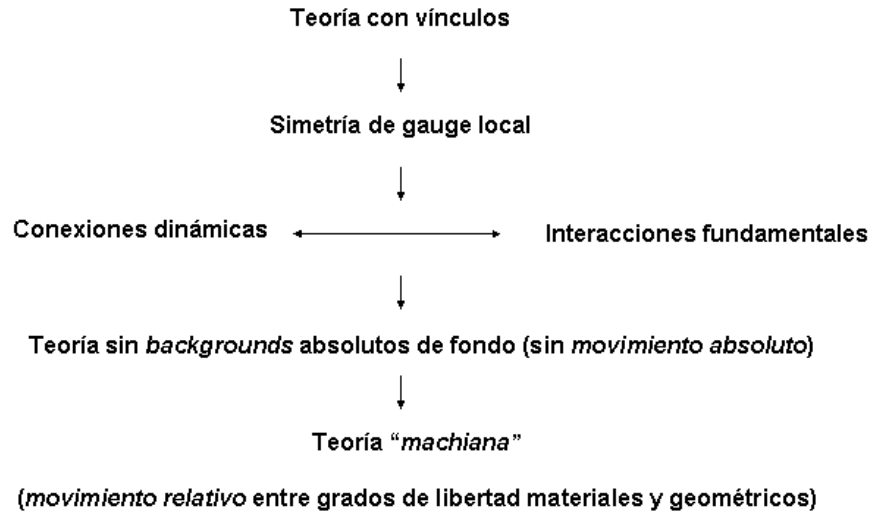


FIG. 1. Teorías de gauge.

es que rompe la covariancia explícita de la teoría. Por otra parte el espacio-tiempo  $M$  puede no ser difeomorfo a un espacio producto de la forma  $\mathbb{R} \times M^{(3)}$ . La relación entre los formalismos *covariantes* y los formalismos *canónicos*, así como la hipotética superioridad de alguno de dichos formalismos permanece todavía como un problema abierto<sup>6</sup>.

<sup>6</sup>Con respecto a la preferencia de los métodos covariantes por sobre los canónicos véase la siguiente afirmación categórica de B. DeWitt en Ref.[34]:

There exists an anomaly today in the pedagogy of physics. When expounding the fundamentals of quantum field theory physicists almost universally fail to apply the lessons that relativity theory taught them early in the twentieth century. Although they usually carry out their calculations in a covariant way, in deriving their calculations rules they seem unable to wean themselves from canonical methods and Hamiltonians, which are holdovers from the nineteenth century and are tied to the cumbersome (3+1)-dimensional baggage of conjugate momenta, bigger-than-physical Hilbert spaces, and constraints. There seems to be a feeling that only canonical methods are “safe”; only they guarantee unitary. This is a pity because such a belief is wrong, and it makes the foundations of field theory unnecessarily cluttered.

Por el contrario M. Henneaux y C. Teitelboim dicen en Ref.[50]:

The most thorough and foolproof treatment of gauge systems is that which proceeds through the Hamiltonian formulation. [...] one may rightly regard the Hamiltonian formulation as the more fundamental one [...]

En el resto de esta sección se describirá la teoría general de los sistemas hamiltonianos con vínculos, el método de Dirac para su cuantificación y el formalismo BRST.

### 1.1. Sistemas Hamiltonianos con vínculos.

El movimiento real de un sistema clásico entre dos puntos es aquel que hace que la acción

$$S[q^i(t)] = \int L(q^i, \dot{q}^i) dt$$

sea estacionaria. Dicha solución satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Estas ecuaciones pueden reescribirse como

$$\ddot{q}^k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \dot{q}^k \frac{\partial^2 L}{\partial q^k \partial \dot{q}^i}.$$

De esta ecuación pueden despejarse las aceleraciones en función de las posiciones y las velocidades a ese tiempo solo si la matriz  $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^i}$  es invertible, es decir, si el determinante

$$(1.1) \quad \det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^i} \right)$$

no se anula. Si por el contrario dicho determinante se anula, entonces las aceleraciones no estarán unívocamente determinadas por las posiciones y las velocidades. En ese caso la solución de las ecuaciones de movimiento contendrá funciones arbitrarias del tiempo.

En el marco del formalismo hamiltoniano donde  $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}$  el determinante (1.1) puede reescribirse como

$$\det \left( \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^k} \right).$$

Si dicho determinante se anula, entonces las velocidades no pueden obtenerse de forma única a partir de las coordenadas y los momentos. La anulación del determinante refleja de esta manera la existencia de vínculos entre los momentos. Existen entonces funciones  $\phi_m$  tales que

$$\phi_m(q^i, p_i) = 0, \quad m = 1, \dots, M.$$

Estas condiciones son denominadas *vínculos primarios* debido al hecho de que las ecuaciones de movimiento no fueron utilizadas para obtenerlas.



Como los momentos no son independientes, su variación debe restringirse a la superficie definida por las condiciones  $\phi_m = 0$ . La restricción a dicha superficie puede obtenerse introduciendo en la acción los correspondientes multiplicadores de Lagrange. La acción asume así la forma

$$S = \int (p_i \dot{q}^i - H(q^i, p_i) - u^m \phi_m) dt.$$

Las ecuaciones de movimiento correspondientes a esta acción son

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} - u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^i}, \\ \phi_m(q^i, p_i) &= 0. \end{aligned}$$

La ecuación para la evolución temporal de una magnitud física genérica  $F$  es

$$\dot{F} = \{F, H\} + u^m \{F, \phi_m\}.$$

Sobre la superficie de vínculo  $\phi_m = 0$  vale la igualdad

$$\begin{aligned} u^m \{F, \phi_m\} &= \{F, u^m \phi_m\} - \{F, u^m\} \phi_m, \\ &= \{F, u^m \phi_m\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos escribir la igualdad *débil*

$$\dot{F} \approx \{F, H_T\},$$

donde  $H_T$  es el Hamiltoniano total

$$(1.2) \quad H_T = H + u^m \phi_m.$$

La igualdad *débil* “ $\approx$ ” significa que dos funciones  $F$  y  $G$  serán débilmente iguales  $F \approx G$  si coinciden en la subvariedad definida por los vínculos  $\phi_m = 0$ . En otros términos  $F \approx G$  si y solo si

$$F - G = c^m(q, p) \phi_m.$$

Dado que la dinámica del sistema tiene lugar en la superficie de vínculo  $\phi_m = 0$  (que denotaremos  $\Sigma$ ), dos funciones que coinciden en  $\Sigma$  no pueden ser distinguidas, aún cuando difieran en el resto del espacio de fases  $P$ . Esto significa que el álgebra de funciones relevantes será el álgebra de funciones suaves sobre  $\Sigma$  (que denotaremos  $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ ). El espacio  $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$  puede ser algebraicamente caracterizado del modo siguiente. El conjunto de funciones que se anulan sobre la superficie de vínculo  $\Sigma$  forma un *ideal*  $\mathcal{N}$  del álgebra de funciones  $\mathcal{C}^\infty(P)$  en el

espacio de fases  $P^7$ . En efecto, si una función  $f$  se anula en  $\Sigma$ , entonces  $gf$  también se anulará en  $\Sigma$  para cualquier  $g \in \mathcal{C}^\infty(P)$ . El álgebra de funciones sobre la superficie de vínculo  $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$  puede entonces ser identificada al cociente

$$\mathcal{C}^\infty(P)/\mathcal{N}.$$

Dicho cociente es el conjunto de clases de equivalencia de funciones en  $\mathcal{C}^\infty(P)$  que difieren en funciones que se anulan sobre  $\Sigma$ , es decir en funciones pertenecientes a  $\mathcal{N}$ . En otras palabras,  $F$  y  $G$  pertenecerán a la misma clase de equivalencia si y solo si

$$F = G + k,$$

donde  $k \in \mathcal{N}$  (es decir que  $k$  es una función que se anula en  $\Sigma$ ). Aunque difieran en todo  $P$ , las funciones  $F$  y  $G$  son entonces idénticas como funciones sobre  $\Sigma$ .

1.1.1. *Vínculos secundarios.* Un requisito de consistencia necesario es que las ecuaciones dinámicas preserven los vínculos primarios en el tiempo. En otros términos es necesario que se satisfagan las ecuaciones

$$\dot{\phi}_m = 0.$$

Escribiendo explícitamente dichas ecuaciones se obtienen  $m$  condiciones de consistencia

$$(1.3) \quad [\phi_m, H] + u^{m'} [\phi_m, \phi_{m'}] = 0.$$

Estas condiciones pueden ser separadas en tres tipos:

- Pueden satisfacerse idénticamente.
- Pueden dar origen a nuevas ecuaciones independientes de los vínculos primarios de la forma

$$\phi_k(q^i, p_i) = 0.$$

Estas ecuaciones serán denominadas *vínculos secundarios*.

- Pueden imponer condiciones sobre las funciones  $u^m$ .

Los vínculos secundarios difieren de los primarios debido al hecho de que para derivarlos hace falta usar las ecuaciones de movimiento. Si existe un vínculo secundario  $\phi_k(q^i, p_i) = 0$ , es necesario iterar el proceso imponiendo la nueva condición de consistencia

$$[\phi_k, H] + u^{m'} [\phi_k, \phi_{m'}] = 0.$$

Nuevamente, esta condición puede satisfacerse idénticamente, dar lugar a nuevos vínculos secundarios o imponer condiciones sobre las

---

<sup>7</sup>Dada una cierta álgebra  $A$ , un ideal  $B$  de  $A$  es una subálgebra tal que se satisface  $AB \subset B$ , es decir que  $xy \in B$  si  $y$  (o  $x$ )  $\in B$ .

funciones  $u^m$ . Al final de dicho proceso de iteración se tendrán  $K$  vínculos secundarios

$$\phi_k(q^i, p_i) = 0, \quad k = M + 1, \dots, M + K.$$

En total se tendrán  $J = M + K$  vínculos primarios y secundarios  $\phi_j = 0, j = 1, \dots, J$ .

Una vez que se encontró un conjunto completo de  $J$  vínculos primarios y secundarios pueden analizarse las restricciones impuestas por las ecuaciones dinámicas sobre los multiplicadores de Lagrange  $u^m$ . Dichas restricciones están dadas por las ecuaciones

$$(1.4) \quad [\phi_j, H] + u^m [\phi_j, \phi_m] \approx 0,$$

donde  $m$  está sumado desde 1 hasta  $M$  y  $j$  puede tomar cualquier valor desde 1 hasta  $J$ . Este es un sistema de  $J$  ecuaciones lineales inhomogéneas en las  $M \leq J$  variables desconocidas  $u^m$ .

La solución general de (1.4) tiene la forma

$$u^m = U^m + \lambda^a V_a^m,$$

con  $a = 1, \dots, A$ . Las funciones  $U^m$  son las soluciones particulares de (1.4), mientras que el término  $\lambda^a V_a^m$  es la solución más general de las ecuaciones homogéneas

$$(1.5) \quad u^m [\phi_j, \phi_m] \approx 0,$$

expresada como combinación lineal de las soluciones linealmente independientes  $V_a^m$ . Si los coeficientes  $u^m$  no son arbitrarios (dado que deben satisfacer las condiciones de consistencia) los coeficientes  $\lambda_a$  son ahora completamente arbitrarios.

Sustituyendo estas expresiones en el Hamiltoniano total  $H_T$  (1.2) se obtiene

$$H_T = H + U^m \phi_m + \lambda^a V_a^m \phi_m.$$

Dicho Hamiltoniano total puede ser también reescrito como

$$(1.6) \quad H_T = H' + \lambda^a \phi_a,$$

donde

$$(1.7) \quad H' = H + U^m \phi_m$$

y

$$(1.8) \quad \phi_a = V_a^m \phi_m.$$

donde los  $\lambda^a$  son los únicos coeficientes arbitrarios de la teoría.

1.1.2. *Vínculos de primera clase y vínculos de segunda clase.* Además de la clasificación de los vínculos en vínculos primarios y secundarios existe otra clasificación que jugará un rol mucho más importante en la teoría de los sistemas hamiltonianos con vínculos, a saber la clasificación en *vínculos de primera clase* y *vínculos de segunda clase*.

Una función  $F(q, p)$  será de primera clase si su corchete de Poisson con todos los vínculos es débilmente nulo

$$\{F, \phi_j\} \approx 0, \quad j = 1, \dots, J.$$

Dicha propiedad puede también ser expresada como

$$\{F, \phi_j\} = r_j^{j'} \phi_{j'}.$$

Un función  $F(q, p)$  será por el contrario de segunda clase si al menos existe un vínculo tal que su corchete de Poisson con  $F(q, p)$  no es débilmente nulo.

En particular,  $H'$  y  $\phi_a$  dados por (1.7) y (1.8) son de primera clase (lo cual es una consecuencia de las ecuaciones (1.4) y (1.5)). De esta manera el Hamiltoniano total  $H_T$  (1.6) es la suma del Hamiltoniano de primera clase  $H'$  y los vínculos primarios de primera clase  $\phi_a$  multiplicados por coeficientes arbitrarios.

1.1.3. *Vínculos de primera clase y transformaciones de gauge.* La presencia de las funciones arbitrarias del tiempo  $\lambda^a$  en el Hamiltoniano total  $H_T$  es una consecuencia del hecho de que las variables canónicas  $(q, p)$  no son todas independientes. Esto tiene como consecuencia que si bien un par  $(q, p)$  define unívocamente un estado físico, dado un estado físico existen muchos pares  $(q, p)$  que lo representan. La relación entre los pares  $(q, p)$  y los estados físicos no es entonces biunívoca.

Ahora estudiaremos la evolución de una magnitud  $F$  a los efectos de analizar el papel de los vínculos primarios  $\phi_a$ . Si la magnitud  $F$  no depende explícitamente del tiempo, su evolución dinámica estará dada por la ecuación

$$\dot{F} = \{F, H'\} + \lambda^a \{F, \phi_a\}.$$

La arbitrariedad en la elección de las funciones  $\lambda^a$  hace que la evolución de la magnitud  $F$  no quede totalmente determinada: para una misma condición inicial  $F(t_o) = F_0$ , la función  $F$  puede tomar en un instante posterior  $t$  diversos valores según la elección que se haga de los coeficientes arbitrarios  $\lambda^a$ . El valor de  $F$  en  $t_o + \Delta t$  será

$$F(t_o + \Delta t) = F_0 + \dot{F} \Delta t = F_0 + \{F, H'\} \Delta t + \lambda^a \Delta t \{F, \phi_a\}.$$

Si elegimos otro conjunto de valores diferentes  $\lambda'^a$ , el valor de  $F(t_o + \Delta t)$  cambiará, siendo la diferencia

$$\delta F(t_o + \Delta t) = (\lambda^a - \lambda'^a) \Delta t \{F, \phi_a\}.$$

Podemos entonces reescribir el cambio de  $F(t_o + \Delta t)$  como

$$(1.9) \quad \delta_\epsilon F = \epsilon^a \{F, \phi_a\},$$

donde  $\epsilon^a = (\lambda^a - \lambda'^a) \Delta t$ .

El estado físico de un sistema no puede depender sin embargo de la elección arbitraria de los coeficientes  $\lambda^a$ . Ambos valores de  $F(t_o + \Delta t)$  deben corresponder entonces al mismo estado físico. Podemos concluir de esta manera que la transformación infinitesimal (1.9) generada por la función  $\epsilon^a \phi_a$  vincula descripciones equivalentes de un mismo estado físico. Los vínculos primarios de primera clase  $\phi_a$  son entonces *generadores de transformaciones de gauge*.

Puede demostrarse que los corchetes de Poisson  $[\phi_a, \phi_{a'}]$  y  $[\phi_a, H']$  también generan transformaciones de gauge (donde  $\phi_a$  y  $\phi_{a'}$  son vínculos primarios de primera clase). Si bien estos corchetes de Poisson son combinaciones lineales de vínculos de primera clase, no necesariamente se tratará de vínculos primarios. Podría postularse entonces que todos los vínculos de primera clase (tanto los primarios como los secundarios) generan transformaciones de gauge (“conjetura de Dirac”). En los sistemas físicos usuales la conjetura de Dirac se satisface (un contraejemplo puede encontrarse en Ref.[50]). La distinción verdaderamente relevante es entonces la distinción entre vínculos de primera clase y vínculos de segunda clase (ya que dicha distinción reposa sobre la estructura fundamental de la teoría hamiltoniana, a saber los corchetes de Poisson). Con el objeto de unificar todos los vínculos de primera clase puede entonces definirse el *Hamiltoniano extendido*

$$H_E = H' + \zeta^a G_a,$$

donde  $G_a$  son *todos* los vínculos de primera clase (primarios y secundarios). Los vínculos  $G_a$  satisfacen entonces

$$[G_a, G_b] = C_{ab}^c G_c \approx 0.$$

1.1.4. *Observables*. En una teoría con invariancia de gauge es necesario definir funciones que sean invariantes ante transformaciones de gauge, es decir funciones cuyos valores no dependan de la elección de los parámetros arbitrarios de la teoría. Dichas funciones  $\mathcal{O}$  serán denominadas *observables* y deben satisfacer

$$\{\mathcal{O}, G_a\} \approx 0.$$

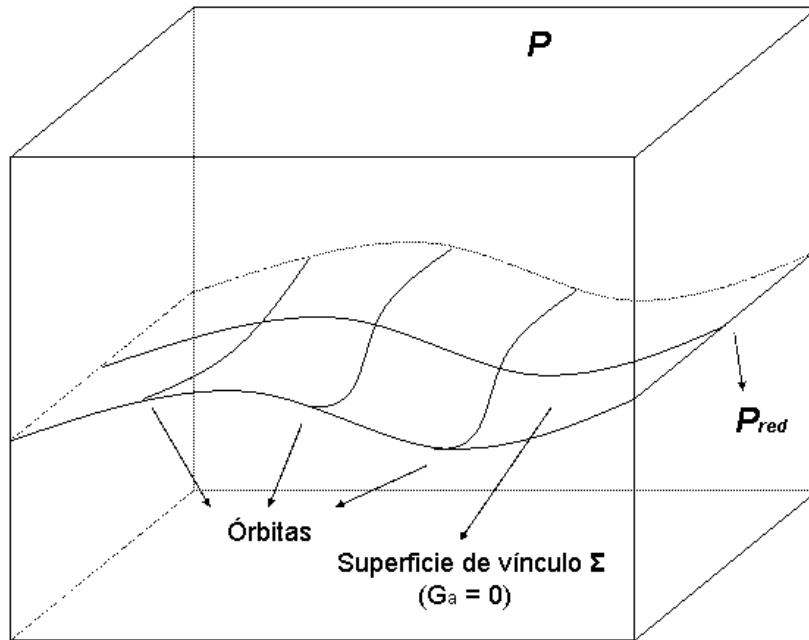


FIG. 2. Espacio de fases reducido.

Dado que según esta expresión un observable debe ser gauge invariante *débilmente* (es decir solamente sobre la superficie de vínculo  $\Sigma$ ), los observables pueden ser identificados con las funciones sobre el espacio obtenido al cocentar  $\Sigma$  por la acción del grupo de las transformaciones de gauge. El espacio así obtenido es denominado *espacio de fases reducido*

$$P_{red} = \Sigma/\mathcal{G} = \{(q, p) \in G_a = 0\} / \mathcal{G},$$

donde  $\mathcal{G}$  denota el grupo de las transformaciones de gauge (ver Figura N°2). Los observables son entonces funciones sobre el espacio de fases reducido  $P_{red} = \Sigma/\mathcal{G}$ .

Se denominará *órbita* al conjunto de pares de variables canónicas  $(q, p)$  que representan a un mismo estado físico. En otros términos, una órbita es una clase de equivalencia de estados *gauge equivalentes*. Denotaremos  $[(q, p)]$  a la clase de equivalencia correspondiente a un cierto estado físico:

$$[(q, p)] = \{(q, p) \cdot U, U \in \mathcal{G}\},$$

donde  $(q, p) \cdot U$  denota la acción de la transformación de gauge generada por  $U \in \mathcal{G}$  sobre el estado  $(q, p)$ . De esta manera, por medio de

una transformación de gauge  $U$  es posible pasar de un elemento de la órbita a otro. Por definición un observable  $\mathcal{O}$  tiene el mismo valor para todos los representantes  $(q, p)$  de una misma órbita  $[(q, p)]$ . Bajo ciertas condiciones puede demostrarse que la acción de  $\mathcal{G}$  sobre la superficie de vínculo  $\Sigma$  define un  $\mathcal{G}$ -fibrado principal

$$\Sigma \xrightarrow{\pi} \Sigma/\mathcal{G},$$

siendo las fibras  $\pi^{-1}[(q, p)]$  las órbitas de la teoría.

En principio podría intentarse reformular la teoría en el espacio de fases reducido  $P_{red}$  eliminando todos los grados de libertad de gauge y trabajando únicamente con cantidades invariantes de gauge. Sin embargo, al tomar el cociente de la superficie de vínculo  $\Sigma$  por el grupo de simetría  $\mathcal{G}$  se pierden en general ciertas características deseables de la teoría como la localidad o la covariancia explícita.

Una segunda alternativa es trabajar en todo el espacio de fases original  $P$ . En ese caso es necesario establecer un método que permita separar el contenido físico (gauge invariante) de la información dependiente del gauge. En el marco de esta estrategia el procedimiento usual es el de *fijar el gauge* por medio de la definición de una subvariedad de la superficie de vínculo  $\Sigma$  isomorfa al espacio de fases reducido  $P_{red}$ . A dichos efectos se imponen las así denominadas *condiciones de fijado de gauge*

$$(1.10) \quad \zeta_b(q, p) \approx 0.$$

Para que el fijado de gauge sea satisfactorio, las funciones de fijado de gauge  $\zeta_b$  deben satisfacer dos condiciones.

En primer lugar el gauge debe ser accesible. Dado un conjunto de variables canónicas  $(q, p) \in \Sigma$ , debe existir una transformación de gauge  $U$  tal que  $(q, p) \cdot U$  pertenezca a la subvariedad definida por (1.10).

En segundo lugar es necesario que las condiciones (1.10) fijen el gauge *completamente*. Esto significa que no debe existir una transformación de gauge además de la identidad que preserve (1.10). En otras palabras las ecuaciones

$$(1.11) \quad \delta u^a [\zeta_b, G_a] \approx 0$$

deben implicar

$$(1.12) \quad \delta u^a = 0.$$

Las condiciones de fijado de gauge deben ser tales que para cada órbita exista una y solo una configuración que satisfaga dichas condiciones. Puede demostrarse que este requisito implica que el número de condiciones de gauge debe ser igual al número de vínculos de primera

clase independientes. Los corchetes de Poisson  $[\zeta_b, G_a]$  definen entonces una matriz cuadrada. Para que (1.11) implique (1.12) esta matriz debe ser inversible, para lo cual debe satisfacerse la condición

$$(1.13) \quad \det [\zeta_b, G_a] \neq 0.$$

La condición (1.13) asegura *solo localmente* que las condiciones de fijado de gauge seleccionen un único representante en cada órbita. En otras palabras, la condición (1.13) impide que la superficie  $\zeta_b = 0$  sea tangente a las órbitas, pero no garantiza que *globalmente* dicha superficie no corte a una órbita más de una vez.

En términos geométricos, el fijado de gauge equivale a definir una sección  $\sigma$  del  $\mathcal{G}$ -fibrado principal  $\Sigma \xrightarrow{\pi} \Sigma/\mathcal{G}$ , es decir un mapa

$$\begin{array}{ccc} & \sigma & \\ \curvearrowright & & \\ \Sigma & \xrightarrow{\pi} & \Sigma/\mathcal{G}, \end{array}$$

tal que  $\pi \circ \sigma = id_{\Sigma/\mathcal{G}}$ . Por medio de la sección  $\sigma$  se selecciona un único representante  $(q, p) \in \Sigma$  para cada órbita  $[(q, p)] \in \Sigma/\mathcal{G}$ . Si el fibrado es topológicamente no trivial, entonces no es posible definir una única sección *global*  $\sigma$  (*obstrucción de Gribov*, ver Refs.[45, 78]).

## 1.2. Método de Dirac.

Como ya se dijo existen fundamentalmente dos estrategias para cuantificar una teoría de gauge. En primer lugar se puede intentar *reducir* la teoría a una teoría ordinaria sin vínculos ni invariancia de gauge. La teoría así reducida puede entonces ser cuantificada siguiendo algunos de los procedimientos usuales (cuantificación canónica, integral de camino, etc.).

En segundo lugar es posible cuantificar directamente *todos* los grados de libertad, tanto los grados de libertad físicos como los de gauge. En este caso la invariancia de gauge será impuesta recién a nivel cuántico. Fué P. M. Dirac el primero en proponer un tal método [35]. Según el método de Dirac todos los grados de libertad deben estar asociados a operadores. Con el objeto de imponer la invariancia de gauge sobre los estados cuánticos, los generadores de las transformaciones de gauge  $G_a$  deben también ser promovidos al rango de operadores  $\hat{G}_a$ . Todo estado físico  $|\psi\rangle$  deberá permanecer invariante ante una transformación de gauge, es decir satisfacer

$$e^{i\varepsilon^a \hat{G}_a} |\psi\rangle = |\psi\rangle.$$

Esta ecuación será satisfecha si  $|\psi\rangle$  satisface

$$\hat{G}_a |\psi\rangle = 0,$$



siendo esta ecuación la versión cuántica del vínculo clásico  $G_a = 0$ . Dado que esta ecuación es lineal, toda combinación lineal de estados físicos será también un estado físico.

Dados dos vínculos,  $G_a$  y  $G_b$ , las correspondientes ecuaciones de vínculo cuánticas serán

$$\begin{aligned}\hat{G}_a|\psi\rangle &= 0, \\ \hat{G}_b|\psi\rangle &= 0.\end{aligned}$$

Si multiplicamos dichas ecuaciones por  $\hat{G}_b$  y  $\hat{G}_a$  respectivamente y luego las restamos, se obtiene.

$$\left[\hat{G}_a, \hat{G}_b\right]|\psi\rangle = 0.$$

Para que esta condición también se satisfaga sería necesario que

$$(1.14) \quad \left[\hat{G}_a, \hat{G}_b\right] = \hat{f}_{ab}^c \hat{G}_c.$$

Como los vínculos son de primera clase, se satisface que el corchete de Poisson entre dos cualquiera de ellos es una combinación lineal de todos. Sin embargo a nivel cuántico no es cierto que (1.14) se satisfaga automáticamente, ya que las funciones de estructura  $f_{ab}^c$  son ahora operadores  $\hat{f}_{ab}^c$  que no necesariamente están a la izquierda de los operadores de vínculo  $\hat{G}_c$ . En ese caso los operadores  $\hat{G}_c$  dejan de ser de primera clase por lo que no pueden seguir siendo considerados como generadores de transformaciones de gauge.

Otra posible fuente de inconsistencia en la condición  $\hat{G}_a|\psi\rangle = 0$  proviene de la evolución dinámica del sistema cuántico. Para que la evolución dinámica preserve dichas condiciones se debe satisfacer

$$\left[\hat{G}_a, \hat{H}\right]|\psi\rangle = 0,$$

para lo cual debe satisfacerse

$$\left[\hat{G}_a, \hat{H}\right] = \hat{c}_a^c \hat{G}_c.$$

A nivel clásico el Hamiltoniano  $H$  tiene corchete de Poisson con los vínculos  $G_a$  débilmente nulo (es decir, fuertemente igual a una combinación lineal de los vínculos). Sin embargo a nivel cuántico no está garantizado que los operadores  $\hat{c}_a^c$  queden a la izquierda de  $\hat{G}_c$ . Si ello no sucede, entonces la ecuación de Schrödinger mapeará estados físicos en estados que no son invariantes de gauge.

De esta manera puede perderse la invariancia de gauge debido a efectos puramente cuánticos (denominados *anomalías*). Esto significa que el método de Dirac no es directamente aplicable en presencia de dichas anomalías.

### 1.3. Formalismo BRST.

But, I believe no more in that giant thing of which you speak and call space than I could be brought to believe in ghosts. I can neither see such a thing nor form any conception of it...<sup>8</sup>

La idea fundamental del formalismo BRST es la de reemplazar una teoría con una simetría de gauge local por la teoría con el gauge fijo y una simetría rígida fermiónica (simetría BRST) definida en un espacio de fases extendido. Esta simetría está definida por medio de un operador nilpotente  $\delta_{BRST}$  de orden 2 que define un complejo con su correspondiente teoría de cohomología

$$H^*(\delta_{BRST}) = \frac{Ker^*(\delta_{BRST})}{Im^{*-1}(\delta_{BRST})}.$$

Los generadores del complejo BRST son los así denominados *fantasmas*. La propiedad fundamental de dicho formalismo es que el operador BRST está construido de modo tal que su cohomología en grado cero coincide con el conjunto de observables de la teoría

$$(1.15) \quad H^0(\delta_{BRST}) = \{Observables\},$$

es decir con el conjunto de funciones invariantes de gauge sobre el espacio de fases reducido  $\Sigma/\mathcal{G}$ .

Dado que en el formalismo BRST el gauge de la teoría fué fijado, la acción correspondiente puede ser usada para definir una cuantificación con integral de camino. En efecto, la integración sobre los grados de libertad no físicos -que en la teoría sin el gauge fijo tiene como resultado la aparición de un infinito proveniente del volumen del grupo de gauge- es eliminada por medio del fijado de gauge.

Por otra parte, el formalismo BRST permite trabajar con funciones definidas sobre el espacio de fases original  $P$ , no siendo de esta manera necesario construir explícitamente el espacio de fases reducido  $P_{red} = \Sigma/\mathcal{G}$ . La información invariante de gauge es recuperada a nivel cohomológico por medio de la propiedad (1.15).

Con el objeto de construir un operador  $\delta_{BRST}$  que satisfaga la propiedad (1.15) es necesario tener en cuenta que la noción de observable implica dos restricciones aplicadas sobre el álgebra  $\mathcal{C}^\infty(P)$  de funciones en el espacio de fases:

---

<sup>8</sup>A. Einstein, *Zum Relativitätsproblem*, Scientia 15:337-348, 1914. Citado por J. Barbour en Ref.[5].

*i)* En primer lugar es necesario reemplazar el álgebra  $\mathcal{C}^\infty(P)$  por el álgebra  $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$  de funciones sobre la superficie de vínculo  $\Sigma$ .

*ii)* En segundo lugar es necesario restringirse a las funciones invariantes de gauge sobre  $\Sigma$ , es decir a las funciones en  $\mathcal{C}^\infty(\Sigma/\mathcal{G})$ .

Estos dos momentos de la definición de un observable son implementados en el formalismo BRST por medio de la definición de dos derivaciones auxiliares:

*i)* La primera derivación  $\delta$  genera una *resolución de Koszul-Tate* del álgebra  $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$  de funciones sobre la superficie de vínculo  $\Sigma$ . La propiedad fundamental de  $\delta$  es la de implementar la restricción a  $\Sigma$  a través de su homología en grado cero:

$$\begin{aligned} H_0(\delta) &= \mathcal{C}^\infty(\Sigma), \\ H_k(\delta) &= 0, \quad k \neq 0. \end{aligned}$$

*ii)* La segunda derivación es un *diferencial vertical*  $d$  que actúa sobre el álgebra de formas diferenciales verticales duales a los vectores tangentes a las órbitas. El diferencial vertical  $d$  es tal que su cohomología en grado cero calculada en  $H_0(\delta) = \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$  define el conjunto de funciones sobre  $\Sigma$  constantes a lo largo de las órbitas, es decir el conjunto de funciones sobre  $\Sigma$  invariantes de gauge.

El formalismo BRST permite luego combinar las derivaciones  $\delta$  y  $d$  en un nuevo diferencial  $\delta_{BRST}$  definido como

$$\delta_{BRST} = \delta + d + \dots,$$

donde los términos suplementarios son en general necesarios para garantizar la nilpotencia del diferencial BRST.

Resumiendo, el diferencial de Koszul-Tate  $\delta$  proyecta sobre el álgebra  $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$  de funciones sobre la superficie de vínculo  $\Sigma$ , el diferencial exterior vertical  $d$  proyecta sobre el álgebra  $\mathcal{C}^\infty(\Sigma/\mathcal{G})$  de funciones sobre el espacio de fases reducido  $P_{red} = \Sigma/\mathcal{G}$  y los términos restantes garantizan la nilpotencia del desarrollo perturbativo.

En lo que sigue se resumirán los pasos fundamentales en la construcción del diferencial  $\delta_{BRST}$  (ver Refs.[44, 50, 85, 79]).

1.3.1. *Complejo de Koszul-Tate.* El complejo de Koszul-Tate provee de una caracterización homológica del álgebra de funciones en una subvariedad  $\Sigma$  del espacio de fases  $P$  definida por los vínculos  $G_a = 0$ . En otras palabras el complejo de Koszul-Tate permite identificar a todas aquellas funciones que coincidan en la superficie de vínculo  $\Sigma$ . La idea es reemplazar el álgebra  $\mathcal{C}^\infty(P)$  de funciones en el espacio de fases  $P$  por el álgebra  $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$  de funciones sobre la superficie de vínculo  $\Sigma$ . La

definición de este complejo requiere el agregado de tantas variables adicionales como vínculos tenga la teoría. Dichas nuevas variables serán denominadas *momentos fantasma*.

El complejo de Koszul-Tate debe ser tal que se satisfaga<sup>9</sup>

$$(1.16) \quad \begin{aligned} H_0(\delta) &= \mathcal{C}^\infty(\Sigma), \\ H_k(\delta) &= 0 \quad k \neq 0. \end{aligned}$$

Ahora bien, el álgebra de funciones  $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$  puede ser identificada al álgebra  $\mathcal{C}^\infty(P)$  de funciones en el espacio de fases  $P$  cocentada por el ideal  $\mathcal{N}$  de funciones que se anulan en  $\Sigma$ . Es decir que dos funciones en  $\mathcal{C}^\infty(P)$  que difieren en una función que se anula en  $\Sigma$  serán consideradas como funciones idénticas en  $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ . Es necesario entonces que se satisfaga

$$H_0(\delta) \equiv \frac{\text{Ker}(\delta)_0}{\text{Im}(\delta)_1} = \frac{\mathcal{C}^\infty(P)}{\mathcal{N}}.$$

Tenemos entonces que definir  $\delta$  de modo tal que se verifique

$$(1.17) \quad \text{Ker}(\delta)_0 = \mathcal{C}^\infty(P)$$

y

$$(1.18) \quad \text{Im}(\delta)_1 = \mathcal{N}.$$

Para satisfacer (1.17) es suficiente con pedir

$$(1.19) \quad \delta z^A = 0,$$

con  $z^A$  una variable cualquiera del espacio de fases. Dado que  $\delta$  es una derivación, esto implica  $\delta F(z^A) = 0$  para cualquier función  $F$  en el espacio de fases. Con el objeto de que  $\mathcal{C}^\infty(P)$  sea el núcleo de  $\delta$  *en grado cero* es necesario definir la graduación  $k$  del complejo (que se denotará en lo sucesivo *antigh*) de modo tal que

$$\text{antigh } z^A = 0.$$

---

<sup>9</sup>En términos de álgebra homológica, esta representación de  $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$  se denomina *resolución homológica de un álgebra*. Una resolución homológica de un álgebra  $A$  viene dada por otra álgebra diferencial graduada  $\tilde{A}$  con diferencial  $\delta$  tal que

$$\begin{aligned} H_0(\tilde{A}, \delta) &= A, \\ H_k(\tilde{A}, \delta) &= 0 \quad k \neq 0. \end{aligned}$$

De esta manera una resolución homológica representa al álgebra  $A$  como el cociente  $H_0(\tilde{A}, \delta)$ . En otras palabras cada elemento de  $A$  es obtenido por medio de la identificación de elementos de  $\tilde{A}$ . A la inversa, al pasar de  $A$  a  $\tilde{A}$ , es decir al “resolver” el álgebra  $A$ , se deshace dicha identificación.

Para satisfacer (1.18) hay que tener en cuenta que un elemento del ideal  $\mathcal{N}$  puede ser expresado como una combinación lineal de los vínculos con funciones en el espacio de fases como coeficientes. Es decir que

$$F \approx 0 \Leftrightarrow F = F^a G_a.$$

Introduciremos entonces los generadores  $\mathcal{P}_a$  (momentos fantasmas) del complejo de Koszul-Tate definiendo la acción de  $\delta$  sobre los mismos como

$$(1.20) \quad \delta \mathcal{P}_a = -G_a.$$

De esta manera se satisface que

$$F \approx 0 \Leftrightarrow F = \delta(-F^a \mathcal{P}_a) = -F^a \delta(\mathcal{P}_a) = F^a G_a,$$

es decir que las funciones  $F$  que se anulan sobre la superficie de vínculo  $\Sigma$  pertenecen a la imagen del diferencial  $\delta$ . La idea intuitiva es la de definir un “cero” generalizado que contenga a todas aquellas funciones que se anulen sobre la superficie de vínculo  $\Sigma$ . Como por (1.19), todas las funciones sobre el espacio de fases  $F(z^A)$  son  $\delta$ -cerradas, es necesario definir el complejo de modo tal que las funciones nulas sobre la superficie de vínculo sean  $\delta$ -exactas. De esta manera dichas funciones, aún siendo  $\delta$ -cerradas, desaparecerán al pasar a la homología. Podemos decir entonces que los nuevos generadores  $\mathcal{P}_a$  “matan” a las funciones nulas sobre la superficie de vínculo al hacer que sean exactas, es decir, homológicamente nulas<sup>10</sup>.

Como *antigh*  $G_a = 0$ , (1.20) implica que *antigh*  $\mathcal{P}_a = 1$  (dado que en un complejo homológico la derivación reduce el grado). La paridad de Grassmann de  $\mathcal{P}_a$  se define como  $\varepsilon(\mathcal{P}_a) = 1$ . La derivada  $\delta$  puede ser extendida a cualquier elemento del álgebra  $\mathbb{C}[\mathcal{P}_a] \otimes \mathcal{C}^\infty(P)$  (polinomios en  $\mathcal{P}_a$  con funciones en el espacio de fases como coeficientes) pidiendo que  $\delta$  sea una derivada impar. Como  $\delta^2$  se anula sobre los generadores,

---

<sup>10</sup>En términos generales, para eliminar ciertos elementos  $\vartheta$  de una teoría se pueden agregar variables adicionales  $\mathcal{P}_a$ , un diferencial nilpotente  $\delta$  y la graduación pertinente de modo tal que se satisfaga

$$\begin{aligned} \delta \vartheta &= 0, \\ \delta \mathcal{P}_a &= \vartheta. \end{aligned}$$

De esta manera al pasar a la homología los elementos  $\mathcal{P}_a$  desaparecerán por no ser  $\delta$ -cerrados mientras que los elementos  $\vartheta$  desaparecerán por ser  $\delta$ -exactos. La extensión de las variables originales por medio del agregado de las nuevas variables  $\mathcal{P}_a$  posibilita la eliminación homológica de los elementos  $\vartheta$ . Puede decirse entonces las nuevas variables  $\mathcal{P}_a$  “matan” homológicamente a los elementos  $\vartheta$ .

$\delta$  es nilpotente y define el diferencial de Koszul-Tate. Esta construcción puede ser resumida por medio del siguiente diagrama

$$0 \xleftarrow{\delta_0} \mathcal{C}^\infty(P) \supset \mathcal{N} \xleftarrow{\delta_1} \mathbb{C}_1[\mathcal{P}_a] \otimes \mathcal{C}^\infty(P) \leftarrow \dots,$$

donde  $\mathbb{C}_1[\mathcal{P}_a] \otimes \mathcal{C}^\infty(P)$  son los polinomios lineales en  $\mathcal{P}_a$  con coeficientes en  $\mathcal{C}^\infty(P)$ .

En virtud de su construcción puede afirmarse entonces que el álgebra diferencial  $[\mathbb{C}[\mathcal{P}_a] \otimes \mathcal{C}^\infty(P), \delta]$  provee una *resolución homológica* del álgebra de funciones  $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$  sobre la superficie de vínculo  $\Sigma$  (es decir que se satisface (1.16)).

1.3.2. *Diferencial vertical.* Las funciones de vínculo  $G_a$  definen vectores “verticales” (o longitudinales) por medio de la expresión

$$X_a^\lambda = \sigma^{\lambda\mu} \partial_\mu G_a,$$

donde  $\sigma^{\lambda\mu}$  es un tensor antisimétrico que define la estructura simpléctica del espacio de fases. Dicho tensor está definido como

$$\sigma^{\lambda\mu} = [x^\lambda, x^\mu],$$

donde  $x^\lambda$  son coordenadas del espacio de fases  $P$ . La estructura simpléctica dada por  $\sigma^{\lambda\mu}$  permite expresar el corchete de Poisson entre dos funciones  $F$  y  $G$  como

$$[F, G] = \partial_\lambda F \sigma^{\lambda\mu} \partial_\mu G.$$

La transformación de gauge de una función  $F$  puede entonces ser expresada como

$$[F, G_a] = X_a^\lambda \partial_\lambda F \equiv \partial_a F.$$

Puede afirmarse entonces que los vectores  $X_a^\lambda$  tangentes a las órbitas son los generadores de las transformaciones de gauge. Puede definirse el álgebra de *formas diferenciales verticales* como el álgebra de formas que actúan *solamente* sobre dichos vectores verticales. Es posible también definir un diferencial vertical  $d$  que actúe sobre dichas formas diferenciales verticales. Dicho diferencial satisface la propiedad

$$(dF)(X) = \partial_X F,$$

donde  $F$  es una función sobre la superficie de vínculo  $\Sigma$  y  $X$  un vector longitudinal. Dada esta álgebra diferencial, es posible definir la *cohomología vertical* como

$$(1.21) \quad H^p(d) = \frac{\text{Ker } (d)^p}{\text{Im } (d)^{p-1}}.$$

Para  $p = 0$ , (1.21) define a las funciones invariantes de gauge.

En el caso irreducible, los vectores  $X_a$  son independientes. Puede entonces definirse sobre la superficie de vínculo  $\Sigma$  una base de 1-formas  $\eta^a$  tal que

$$\eta^a(X_b) = \delta_b^a,$$

con  $a, b = 1, \dots, m$ . Las 1-formas  $\eta^a$  serán en lo sucesivo denominadas *fantasmas*. Las formas verticales serán entonces polinomios en las 1-formas  $\eta^a$  con funciones sobre la superficie de vínculo  $\Sigma$  como coeficientes. El *álgebra exterior vertical* es entonces isomorfa a  $C^\infty(\Sigma) \otimes \mathbb{C}[\eta^a]$ . En dicha representación, el diferencial  $d$  queda completamente caracterizado por las propiedades

$$\begin{aligned} dF &= (\partial_a F) \eta^a, \\ d\eta^a &= \frac{1}{2} \eta^b \eta^c f_{cb}^a, \end{aligned}$$

donde las funciones de estructura  $f_{cb}^a$  satisfacen

$$[X_a, X_b] = f_{ab}^c X_c.$$

La graduación del álgebra exterior vertical es denominada *número de fantasma puro*. Se tiene entonces

$$\begin{aligned} \text{pure gh } \eta^a &= 1, \\ \text{pure gh } z^A &= 0. \end{aligned}$$

Aún cuando las formas diferenciales verticales están definidas sobre la superficie de vínculo  $\Sigma$ , sus componentes pueden ser consideradas como funciones en el espacio de fases  $P$ . Las formas diferenciales verticales serán entonces polinomios en  $\eta^a$  con funciones en el espacio de fases  $P$  como coeficientes

$$(1.22) \quad \alpha = \frac{1}{p!} \alpha_{a_1 \dots a_1}(q, p) \eta^{a_1} \dots \eta^{a_1}.$$

Para ello es necesario identificar dos formas si coinciden en  $\Sigma$

$$\alpha \sim \alpha' \Leftrightarrow \alpha_{a_1 \dots a_1}(q, p) \approx \alpha'_{a_1 \dots a_1}(q, p).$$

Dado que las transformaciones de gauge y las funciones de estructura  $f_{cb}^a(q, p)$  están definidas en todo el espacio de fases  $P$ , la derivada exterior  $d$  puede ser extendida a las formas (1.22). Sin embargo, en general  $d^2$  es zero solamente sobre la superficie de vínculo

$$d^2 \approx 0,$$

dado que los campos vectoriales  $X_q$  no cierran fuera de  $\Sigma$ . En términos de esta descripción, la cohomología longitudinal está definida por los polinomios (1.22) débilmente cerrados modulo los polinomios débilmente exactos.

1.3.3. *Espacio de fases extendido.* El complejo de Koszul-Tate y el complejo exterior vertical poseen el mismo número de generadores con la misma paridad de Grassmann. Es entonces posible considerar a los fantasmas  $\eta^a$  y a los momentos fantasmas  $\mathcal{P}_a$  como variables canónicamente conjugadas en un espacio de fases extendido  $P_{ext}$ . El correspondiente corchete de Poisson será

$$[\mathcal{P}_a, \eta^a] = -\delta_a^b.$$

Las graduaciones *antigh* y *pure gh* pueden ser extendidas a  $P_{ext}$  definiendo

$$\begin{aligned} \text{antigh } \eta^a &= 0, \\ \text{pure gh } \mathcal{P}_a &= 0. \end{aligned}$$

En número de fantasma *gh* se define como

$$\text{gh } A = \text{pure gh } A - \text{antigh } A,$$

y

$$\text{gh } AB = \text{gh } A + \text{gh } B.$$

Contrariamente a las graduaciones *antigh* y *pure gh*, el número de fantasma *gh* tiene un generador canónico dado por

$$\mathcal{G} = i\eta^a \mathcal{P}_a,$$

tal que verifica

$$[A, \mathcal{G}] = i(\text{gh } A) A.$$

Los diferenciales  $\delta$  y  $d$  fueron definidos en  $\mathbb{C}[\mathcal{P}_a] \otimes \mathcal{C}^\infty(P)$  y  $\mathcal{C}^\infty(P) \otimes \mathbb{C}[\eta^a]$  respectivamente. El diferencial  $\delta$  puede ser extendido a todo el espacio de fases extendido imponiendo

$$\delta\eta^a = 0.$$

La extensión de la derivada exterior longitudinal  $d$  al espacio de fases extendido se realiza definiendo

$$d\mathcal{P}_a = \eta^c f_{ca}^b \mathcal{P}_b.$$

Esta definición permite satisfacer

$$[\delta, d] = 0.$$

Por otra parte puede demostrarse que  $d^2$  es  $\delta$ -exacto (lo cual es una consecuencia de la nilpotencia de  $d$  sobre la superficie de vínculo  $\Sigma$ ). Como se explicará en la sección siguiente esta propiedad es fundamental a los efectos de combinar el diferencial vertical  $d$  con el diferencial del



complejo de Kozsul-Tate  $\delta$  a los efectos de definir el diferencial BRST  $\delta_{BRST}$ .

1.3.4. *Diferencial modulo  $\delta$* . Sea  $\delta$  un diferencial y  $d$  una derivación impar. Se dice que  $d$  es un *diferencial modulo  $\delta$*  si (i)  $d$  conmuta con  $\delta$  (en sentido graduado)

$$d\delta + \delta d = 0,$$

(es decir que  $d$  induce una derivación en la homología  $H_*(\delta)$ ) y (ii) si  $d^2$  es  $\delta$ -exacto, es decir si

$$d^2 = -[\delta, \Delta] \equiv -\delta\Delta - \Delta\delta,$$

para alguna derivación  $\Delta$  (es decir que la derivación inducida es un diferencial  $d^2 = 0$  en  $H_*(\delta)$ ). Estas dos condiciones implican entonces que  $d$  define un diferencial nilpotente en  $H_*(\delta)$ . Puede considerarse por lo tanto la cohomología de  $d$  en  $H_*(\delta)$ , que denotaremos  $H^*(d|_{H_*(\delta)})$ . Una clase de cohomología de  $d$  estará entonces determinada por un elemento  $x$  que es  $\delta$ -cerrado

$$\delta x = 0$$

y  $d$ -cerrado módulo  $\delta$

$$dx = \delta y.$$

La cohomología  $H^*(d|_{H_*(\delta)})$  está entonces caracterizada por las identificaciones

$$x \sim x + dz + \delta z',$$

con  $\delta z = 0$ .

En nuestro caso un observable  $\mathcal{O}$  es una función invariante de gauge sobre la superficie de vínculo  $\Sigma$ . Que  $\mathcal{O}$  sea invariante de gauge significa que debe pertenecer al núcleo de  $d$ . Sin embargo estamos calculando la cohomología de  $d$  restringida a  $H_*(\delta)$  (es decir a las funciones sobre la superficie de vínculo  $\Sigma$ ) y el cero en  $H_*(\delta)$  está formado por el conjunto de funciones que se anulan sobre la superficie de vínculo  $\Sigma$  (es decir por los elementos exactos  $\delta y \approx 0$ ). Es necesario entonces que  $d\mathcal{O} = 0 \approx F^a G_a = \delta(-F^a \mathcal{P}_a)$ .

El ejemplo que nos interesa de diferencial modulo  $\delta$  es entonces el siguiente. Sea  $s$  un diferencial y supongamos que la graduación del álgebra es tal que la expansión de  $s$  en dicha graduación comienza por  $\delta$  y sigue con  $d$ , es decir

$$(1.23) \quad \begin{aligned} s &= \delta + d + \dots, \\ gr(d) &= gr(\delta) + 1. \end{aligned}$$

La condición de nilpotencia  $s^2 = 0$  implica que  $\delta$  es un diferencial ( $\delta^2 = 0$ ) y que  $d$  es un diferencial modulo  $\delta$ .

Dado un diferencial  $\delta$  y un diferencial  $d$  modulo  $\delta$ , en general no es posible construir un diferencial  $s$  que los combine como en (1.23). Sin embargo si  $\delta$  define una resolución homológica como en nuestro caso, entonces sí es posible. Este resultado constituye un teorema fundamental de la *teoría de perturbaciones homológica* (ver Ref.[50], Teorema 8.3):

**Teorema.** (a) Si  $H_*(\delta) = 0$  para todo  $k \neq 0$ , entonces existe un diferencial  $s$  con  $gh s = 1$  que combina  $d$  con  $\delta$  según

$$\begin{aligned} s &= \delta + d + s^{(1)} + s^{(2)} + \dots, \\ s^2 &= 0, \end{aligned}$$

con *antigh*  $s^{(k)} = k$  y *gh*  $s^{(k)} = 1$ .

(b) Un diferencial  $s$  que combina  $d$  con  $\delta$  de esta manera satisface

$$H^k(s) = H^k(d|_{H_*(\delta)}).$$

La cohomología de  $d$  en  $H_*(\delta)$  está definida por las ecuaciones

$$\begin{aligned} dx &= \delta y, \\ x &\sim x + dz + \delta z', \end{aligned}$$

con

$$\textit{antigh } x = \textit{antigh } z = 0$$

y

$$\textit{antigh } y = \textit{antigh } z' = 1.$$

1.3.5. *Acción canónica del diferencial BRST.* Es posible mostrar que la acción del diferencial BRST  $\delta_{BRST}$  sobre una función  $F$  admite una representación canónica por medio de los corchetes de Poisson de la forma

$$\delta_{BRST} F = [F, \Omega].$$

Las propiedades asociadas a la graduación de  $\delta_{BRST}$  implican

$$\begin{aligned} \varepsilon(\Omega) &= 1, \\ \textit{gh } \Omega &= 1. \end{aligned}$$

Se pedirá también que el operador BRST  $\Omega$  sea real

$$\Omega^* = \Omega.$$

La nilpotencia de orden 2 de  $\delta_{BRST}$  asumirá la forma

$$(1.24) \quad [\Omega, \Omega] = 0$$

(dado que  $\Omega$  es una cantidad fermiónica, esta es una condición no trivial sobre  $\Omega$ ).

Con el objeto de satisfacer  $[\mathcal{P}_a, \Omega] = \delta\mathcal{P}_a + \dots$ , el operador BRST  $\Omega$  debe comenzar como

$$(1.25) \quad \Omega = \eta^a G_a + \dots$$

Con el objeto de determinar los otros términos puede seguirse un método recursivo. Para ello se expande a  $\Omega$  en términos del número de antifantasma (graduación *antigh*), es decir

$$(1.26) \quad \begin{aligned} \Omega &= \sum_{p \geq 0} \Omega^p, \\ \Omega^0 &= \eta^a G_a, \\ gh \Omega^p &= 1, \\ antigh \Omega^p &= p. \end{aligned}$$

Las funciones  $\Omega^p$  pueden entonces escribirse como polinomios en  $\eta^a$  y  $\mathcal{P}_a$  de la forma

$$\Omega^p = \eta^{b_1} \dots \eta^{b_{p+1}} U_{b_{p+1} \dots b_1}^{(p)a_1 \dots a_p} \mathcal{P}_{a_p} \dots \mathcal{P}_{a_1}.$$

Los coeficientes  $U_{b_{p+1} \dots b_1}^{(p)a_1 \dots a_p}$  son funciones solamente de las variables del espacio de fases original y son denominados *funciones de estructura de orden p*. Imponiendo la condición de nilpotencia (1.24) se obtiene un conjunto de ecuaciones para los términos  $\Omega^p$  que pueden resolverse en forma recursiva teniendo en cuenta que el primer término está dado por (1.25). Puede también demostrarse que el operador BRST  $\Omega$  es único *a menos de transformaciones canónicas*.

Un caso particular de fundamental importancia -dado que será el caso relevante para teorías de Yang-Mills- se da cuando las transformaciones de gauge forman un grupo, es decir cuando se satisface

$$[G_a, G_b] = f_{ab}^c G_c,$$

con  $f_{ab}^c$  constantes. En ese caso la condición de nilpotencia (1.24) se satisface usando únicamente los dos primeros términos  $\Omega^0$  y  $\Omega^1$  de la expansión (1.26). Puede demostrarse entonces que el operador BRST  $\Omega$  está dado por la expresión

$$(1.27) \quad \Omega = \eta^a G_a - \frac{1}{2} \eta^b \eta^c f_{cb}^a \mathcal{P}_a.$$

En el caso general de álgebras abiertas (donde  $f_{ab}^c$  son ahora funciones) los términos de orden superior  $\Omega^p$  con  $p \geq 2$  serán necesarios afín de garantizar la nilpotencia de  $\Omega$ .

1.3.6. *Dinámica en el espacio de fases extendido.* En general, dada la propiedad fundamental del formalismo BRST

$$H^0(s) = \{ \text{Observables} \},$$

se denominará *observable BRST* a toda función  $A(z, \eta, \mathcal{P})$  en el espacio de fases extendido que satisfaga

$$\begin{aligned} sA \equiv [A, \Omega] &= 0, \\ gh A &= 0. \end{aligned}$$

En general los observables BRST  $A(z, \eta, \mathcal{P})$  tendrán la forma

$$\begin{aligned} A(z, \eta, \mathcal{P}) &= A_0(z) + \sum_{p \geq 1} A^{(p)}, \\ antigh A^{(p)} &= p. \end{aligned}$$

donde  $A_0(z)$  es el correspondiente observable clásico. La condición  $[A, \Omega] = 0$  determina entonces un conjunto de ecuaciones para los términos  $A^{(p)}$  que pueden ser resueltas recursivamente.

Puede demostrarse que esta *extensión BRST-invariante de  $A_0$*  está definida a menos de un término BRST-exacto. En la teoría original, un observable  $F(q, p)$  satisface

$$\{F, G_a\} \approx 0,$$

y está representado por la clase de equivalencia

$$(1.28) \quad F'(q, p) = F(q, p) + k^a G_a \approx F(q, p).$$

En el espacio de fases extendido, puede demostrarse que dada una función  $K$  con  $gh K = -1$ , la cantidad  $\{K, \Omega\}$  es un observable, es decir que satisface  $\{\{K, \Omega\}, \Omega\} = 0$  y  $gh \{K, \Omega\} = 0$ . Dado que  $gh K = -1$ , la función  $K$  debe ser de la forma

$$K = -k^a(q, p)\mathcal{P}_a + \eta^a K_a^{bc}\mathcal{P}_b\mathcal{P}_c + \dots$$

Por lo tanto tendremos

$$\{K, \Omega\} |_{\eta=\mathcal{P}=0} = k^a G_a.$$

En consecuencia, en el espacio de fases extendido la extensión BRST-invariante de un observable estará dada por la clase de equivalencia

$$F' \approx F + \{K, \Omega\},$$

siendo esta definición equivalente a (1.28).

Es interesante señalar que, dado que  $H^k(s)$  es en general distinto de cero para  $k > 0$ , la cohomología BRST no provee una resolución del álgebra de observables clásicos. Para recuperar dichos observables

no es suficiente con pasar a la cohomología, siendo necesario también imponer la condición de número de fantasma cero.

Estudiaremos ahora la extensión BRST-invariante del Hamiltoniano  $H_0$ . Como  $H_0$  es invariante de gauge (para asegurar la consistencia dinámica de la teoría)

$$[H_0, G_a] = V^b G_b,$$

$H_0$  posee una extensión BRST-invariante

$$(1.29) \quad \begin{aligned} H_0 &\rightarrow H, \\ [H, \Omega] &= 0. \end{aligned}$$

La ecuación (1.29) tiene como consecuencia no solo que el Hamiltoniano extendido  $H$  es un observable, *sino también que  $\Omega$  es una cantidad conservada* dado que  $\frac{d\Omega}{dt} = [\Omega, H]$ . En este sentido puede afirmarse que  $\Omega$  define una simetría *global* de la teoría.

Este Hamiltoniano extendido  $H$  genera la evolución temporal de cualquier función  $F$  en el espacio de fases extendido según

$$\dot{F} = [F, H].$$

La dinámica de las funciones BRST-invariantes no se modificará a nivel cohomológico si se modifica el Hamiltoniano extendido  $H$  agregando términos BRST-exactos

$$(1.30) \quad H \rightsquigarrow H + [K, \Omega],$$

con  $gh K = -1$ . Elegir un elemento  $K$  en (1.30) implica elegir un representante de  $H$  en la clase de equivalencia  $[H]$  de Hamiltonianos cohomológicamente equivalentes. Dado que el Hamiltoniano  $H$  genera la evolución dinámica, se dirá que la elección de dicho representante equivale a *fijar el gauge* y el elemento  $K$  se denominará *fermión de fijado de gauge*.

Para cualquier fermión de fijado de gauge  $K$ , se satisface

$$[H + [K, \Omega], \Omega] = 0.$$

De esta manera se puede afirmar que la teoría con el gauge fijo es invariante ante la transformación BRST *global* generada por  $\Omega$ . La correspondiente acción invariante BRST con el gauge fijo  $S_{gf}$  es

$$S_{gf} = \int (\dot{q}^i p_i + \dot{\eta}^a \mathcal{P}_a - H - [K, \Omega]) dt.$$

1.3.7. *Cohomología BRST cuántica.* Con el objeto de implementar el formalismo BRST a nivel cuántico, es necesario promover a los fantasmas  $\eta$  y a sus momentos canónicamente conjugados  $\mathcal{P}$  al rango de operadores en el correspondiente espacio de Hilbert. Al mismo tiempo la carga BRST  $\Omega$  debe también estar representada por un operador lineal en dicho espacio de Hilbert. Dado que el corchete de Poisson de dos funciones que anticonmutan define a nivel cuántico un anticonmutador, la nilpotencia de  $\Omega$  toma la forma

$$(1.31) \quad [\Omega, \Omega] = \Omega^2 = 0.$$

Por otra parte, dado que a nivel clásico  $\Omega$  es real, se pide que el correspondiente operador lineal sea auto-adjunto

$$\Omega^* = \Omega,$$

donde  $*$  denota el conjugado hermítico. La realización de un operador BRST cuántico dependerá de si es efectivamente posible construir un operador que satisfaga (1.31). Esta construcción puede ser obstruida debido al problema del ordenamiento de los operadores.

Análogamente al formalismo BRST clásico, un observable será un operador lineal  $A$  que satisfice

$$[A, \Omega] = 0,$$

y que está definido a menos de términos BRST-exactos de la forma  $[B, \Omega]$ :

$$A \sim A + [B, \Omega].$$

Dado que los operadores BRST-exactos son BRST-cerrados es posible definir la cohomología BRST cuántica para los operadores  $H_{op}^*(\Omega)$ .

Del mismo modo que en el método de Dirac, es necesario implementar una condición que permita seleccionar a los estados físicos del sistema. Dado que a nivel clásico la invariancia BRST y la invariancia de gauge son equivalentes, a nivel cuántico la correspondiente condición será que los estados físicos deben ser invariantes BRST

$$(1.32) \quad \Omega\psi = 0.$$

Esta definición de los estados físicos satisfice que un observable  $A$  mapea estados físicos en estados físicos. En efecto

$$\Omega A\psi = A\Omega\psi = 0,$$

dado que  $[A, \Omega] = 0$ .

Por otra parte, dada la hermiticidad de  $\Omega$ , los observables BRST-exactos de la forma  $[K, \Omega]$  definirán elementos de matriz nulos entre

estados físicos

$$(\psi_1, [K, \Omega] \psi_2) = 0.$$

Dado que  $\Omega$  es también nilpotente a nivel cuántico,  $\Omega$  definirá la correspondiente cohomología BRST cuántica para los estados  $H_{st}^*(\Omega)$ . La condición (1.32) no es suficiente para seleccionar a los estados físicos. Además de dicha condición es necesario también identificar a los estados que difieren en elementos BRST-exactos e imponer la condición de número de fantasma cero. Esto significa que  $\psi$  y  $\psi + \Omega\chi$  deben ser identificados. La identificación de  $\Omega\chi$  con cero es legítima dado que el estado BRST-exacto  $\Omega\chi$  tiene producto escalar nulo con cualquier estado físico  $\psi$

$$(\psi, \Omega\chi) = (\Omega\psi, \chi) = 0 \Leftrightarrow \Omega\psi = 0,$$

donde se usó la hermiticidad de  $\Omega$ .

La extensión BRST cuántica de los vínculos clásicos es

$$\hat{G}_a = [\hat{\mathcal{P}}_a, \hat{\Omega}].$$

En efecto, el operador de Dirac  $\hat{G}_a$  corresponde al término sin fantasmas en el resultado del conmutador. Esto significa que los operadores  $\hat{G}_a$  son cohomológicamente nulos. En consecuencia, dichos operadores producen estados nulos cuando actúan sobre estados físicos  $\psi$

$$\hat{G}_a\psi = \Omega(-\mathcal{P}_a\psi) = \Omega\chi \sim 0,$$

donde se usó que  $\Omega\psi = 0$ .

## 2. Problema del tiempo en Gravedad Cuántica Canónica

En las Secciones N°2.1-2.6 se estudiarán algunos aspectos del así denominado problema del tiempo en gravedad cuántica canónica. En la Sección N°2.1 se describirá el formalismo ADM gracias al cual la Relatividad General puede ser formulada como una teoría que describe la evolución temporal de la geometría del espacio. En la Sección N°2.2 se describirán algunas de las estrategias propuestas en la bibliografía para resolver el problema del tiempo en gravedad cuántica canónica. En la Sección N°2.3 se presentarán los resultados obtenidos en Ref.[20] en lo referente a la necesidad de contar con un formalismo de sistemas parametrizados con un vínculo hamiltoniano cuadrático en todos sus momentos (como el vínculo de la Relatividad General). En la Sección N°2.4 se presentará el análisis propuesto en Ref.[20] en lo concerniente a los distintos tipos de simetrías temporales propias de las teorías generalmente covariantes como la Relatividad General. En la Sección N°2.5 se ejemplificarán las consideraciones propuestas por medio de algunos modelos de minisuperespacios provenientes de la teoría de cuerdas bosónicas cerradas a bajas energías (ver Ref.[25]). En la Sección N°2.6 se reinterpretarán las condiciones de contorno sobre el espacio de soluciones de la ecuación de Wheeler–DeWitt propuestas en Ref.[24] (para el modelo de Taub) a la luz de las consideraciones precedentes.

### 2.1. Formalismo ADM y Cuantificación Canónica.

En esta sección describiremos la formulación *hamiltoniana* de la Relatividad General conocida como *formulación ADM* (Arnold–Deser–Misner) (ver Refs.[2, 4, 52, 63]).

Con el objeto de poder describir la geometría del espacio-tiempo en términos de la evolución temporal de la geometría del espacio, es necesario que la 4-variedad lorentziana que representa el espacio-tiempo (que denotaremos  $\mathcal{M}$ ) sea difeomorfa a  $\mathbb{R} \times M$ , donde  $M$  es una variedad que representa a las hipersuperficies espaciales (que supondremos compactas) y  $t \in \mathbb{R}$  un parámetro que representa al tiempo. La característica fundamental de esta formulación es que esta *foliación* del espacio-tiempo en un conjunto de hipersuperficies espaciales  $M$  parametrizadas por un parámetro temporal  $t$  es hasta cierto punto arbitraria. En otras palabras, dada una 4-variedad  $\mathcal{M}$ , existen muchos difeomorfismos

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{M} &\rightarrow \mathbb{R} \times M \\ x &\mapsto (\tau(x), \sigma(x)), \end{aligned}$$



con  $\tau : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\sigma : \mathcal{M} \rightarrow M$ . El mapa  $\tau$  es denominado *función de tiempo global*. Esta función de tiempo global  $\tau$  también puede ser definida como el pull-back

$$\tau = \phi^*t,$$

de la proyección  $\mathbb{R} \times M \xrightarrow{t} \mathbb{R}$ . La inversa de  $\phi$  puede considerarse como una familia uniparamétrica de inmersiones

$$\phi_t^{-1} : M \rightarrow \mathcal{M}.$$

Dado que  $M$  es una hipersuperficie *espacial* de  $\mathbb{R} \times M$ , la restricción a  $M$  de la métrica  $g$  de  $\mathcal{M}$  debe ser una métrica riemanniana  ${}^3g$  sobre  $M$ . En otros términos

$$g(v, v) > 0,$$

para todo  $v \in T_pM$  no nulo. Es entonces posible encontrar un campo de vectores temporales unitarios  $n$  normales a  $M$ , es decir un campo de vectores que satisface

$$\begin{aligned} g(n, n) &= -1, \\ g(n, v) &= 0 \quad \forall v \in T_pM. \end{aligned}$$

En principio existen dos direcciones posibles para el vector normal  $n$ . Elegir una de dichas direcciones equivale a definir que dirección de la variedad  $\mathcal{M}$  será considerada como el *futuro*.

Ahora bien, dado un vector  $v \in T_p\mathcal{M}$ , el mismo puede ser descompuesto en las direcciones tangente y normal a  $M$ :

$$v = \underbrace{-g(v, n)n}_{\perp} + \underbrace{(v + g(v, n)n)}_{\parallel}.$$

(ver Figura N°3).

Puede verificarse en efecto que la componente normal de  $n$  es  $n$  mismo y que la componente tangencial de cualquier vector  $v$  es efectivamente ortogonal a  $n$ :

$$\begin{aligned} -g(n, n)n &= n, \\ g(v + g(v, n)n, n) &= g(v, n) + g(v, n)g(n, n) = 0. \end{aligned}$$

En particular, dados dos vectores  $u, v$  en  $M$ , puede descomponerse la derivada covariante  $\nabla_u v$  (donde  $\nabla$  es la conexión de Levi-Civita en  $\mathcal{M}$ ) en sus componentes tangencial y normal:

$$(2.33) \quad \nabla_u v = -g(\nabla_u v, n)n + (\nabla_u v + g(\nabla_u v, n)n).$$

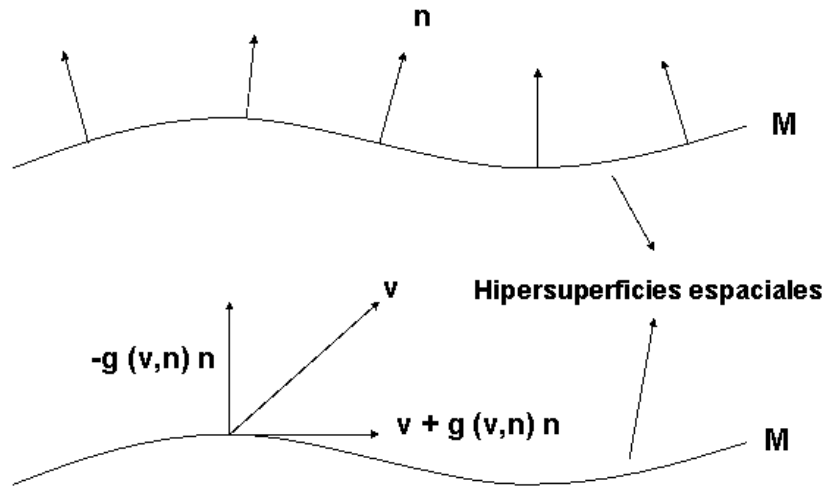


FIG. 3. Descomposición de un vector en las componentes tangente y normal a las hipersuperficies espaciales.

El término normal de dicha descomposición define un tensor simétrico denominado *curvatura extrínseca*  $K$

$$K(u, v) = -g(\nabla_u v, n).$$

La curvatura extrínseca  $K$  mide cuán curvada está la hipersuperficie  $M$  como variedad *sumergida* en el espacio-tiempo  $\mathcal{M}$ . Si la hipersuperficie  $M$  está *extrínsecamente* curvada en  $\mathcal{M}$ , entonces el vector resultante del transporte paralelo de  $v \in T_p M$  definido por la conexión  $\nabla$  en  $\mathcal{M}$  en la dirección definida por  $u \in T_p M$  no será tangente a  $M$ , es decir tendrá una componente normal  $K(u, v)n$ . Por el contrario la así denominada *curvatura intrínseca* de  $M$  mide la curvatura *propia* de  $M$ , independientemente de toda inmersión en una variedad de mayor dimensión. En otras palabras la curvatura intrínseca es la curvatura de la métrica  ${}^3g$  de la variedad  $M$ .

Puede demostrarse que el segundo término de (2.33) define la conexión de Levi-Civita  ${}^3\nabla_u v$  asociada a la métrica  ${}^3g$ . Para ello es necesario demostrar que dicho término satisface la regla de Leibnitz, que preserve la métrica y que no tiene torsión.

Supongamos ahora que elegimos una foliación particular, es decir un cierto difeomorfismo

$$\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \times M.$$

Dicho difeomorfismo define las hipersuperficies espaciales  $M$  como las hipersuperficies que satisfacen  $\tau(x) = ctte.$ , con  $x \in \mathcal{M}$  y  $\tau = \phi^*t$ . Puede también calcularse el pushforward por  $\phi^{-1}$  del campo vector  $\partial_t \in T(\mathbb{R} \times M)$ :

$$\partial_\tau = \phi_*^{-1} \partial_t \in T\mathcal{M}.$$

Para cada  $x \in M$ , el mapa

$$\begin{aligned} \phi_x^{-1} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{M} \\ t &\mapsto \phi^{-1}(x, t) \end{aligned}$$

define una curva en  $\mathcal{M}$ . El campo vector  $\partial_\tau$  es la familia uniparamétrica de vectores tangentes a dicha curva. El punto fundamental es que el campo vector  $\partial_\tau$  no es necesariamente ortogonal a las hipersuperficies  $\tau = ctte.$ . En efecto el vector  $\partial_\tau$  puede ser descompuesto en las direcciones tangenciales y normal a  $M$ :

$$\partial_\tau = -g(\partial_\tau, n)n + (\partial_\tau + g(\partial_\tau, n)n).$$

Ahora definiremos los campos vectores *lapse*  $N$  y *shift*  $\vec{N}$  como

$$\partial_\tau = Nn + \vec{N},$$

es decir

$$\begin{aligned} N &= -g(\partial_\tau, n), \\ \vec{N} &= \partial_\tau + g(\partial_\tau, n)n. \end{aligned}$$

Puede demostrarse que la métrica del espacio tiempo puede ser expresada en términos de los campos vectores lapse  $N$  y shift  $\vec{N}$  como

$$ds^2 = -N^2 d\tau^2 + g_{ij} (dx^i + N^i d\tau) (dx^j + N^j d\tau),$$

donde  $g_{ij}$  son las componentes de la métrica espacial  ${}^3g$ .

Gracias a la foliación del espacio-tiempo, es posible reformular la Relatividad General como una teoría hamiltoniana que describe la evolución temporal de la métrica  ${}^3g$  de las hipersuperficies espaciales. El espacio de configuración de la teoría (también denominado *superspacio*) será entonces el espacio  $Riem(M)$  de todas las métricas riemannianas  ${}^3g_{ij}$  sobre  $M$ .

A los efectos de definir los momentos canónicamente conjugados, es necesario escribir el Lagrangiano de Einstein-Hilbert en términos de  $g_{ij}$  y  $\dot{g}_{ij}$ . En primer lugar es posible mostrar que las derivadas temporales  $\dot{g}_{ij}$  de la métrica están vinculadas a la curvatura extrínseca  $K$  por medio de la expresión

$$(2.34) \quad K_{ij} = \frac{1}{2N} (\dot{g}_{ij} - {}^3\nabla_i N_j - {}^3\nabla_j N_i).$$

En términos de la métrica  $g_{ij}$  y la función de lapso  $N$ , el Lagrangiano  $\mathcal{L} = R\sqrt{-g}$  toma la forma

$$\mathcal{L} = \sqrt{^3g}NR.$$

Si ahora expresamos  $R$  en términos de la métrica  $g_{ij}$  y la curvatura extrínseca, se obtiene (tirando términos de superficie que integran a cero para 3-variedades  $M$  compactas)

$$\mathcal{L} = \sqrt{^3g}N \left( {}^3R + \text{tr}(K^2) - (\text{tr}K)^2 \right).$$

Teniendo en cuenta que la curvatura extrínseca  $K$  depende de  $\dot{g}_{ij}$  de acuerdo a la expresión (2.34), el momento canónicamente conjugado a  $g_{ij}$  es

$$p^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{g}_{ij}} = \sqrt{^3g} \left( K^{ij} - \text{tr}(K) g^{ij} \right).$$

El Hamiltoniano de la Relatividad General será entonces

$$\begin{aligned} H(g_{ij}, p^{ij}) &= \int_M (p_{ij} \dot{g}^{ij} - \mathcal{L}) d^3x \\ &= \int_M \mathcal{H} d^3x \\ &= \int_M (N \mathcal{H}_\perp + N^i \mathcal{H}_i) d^3x, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\perp &= G_{ijkl} p^{ij} p^{kl} - {}^{(3)}R \sqrt{^3g}, \\ \mathcal{H}_i &= -2^3 \nabla^j p_{ij}, \end{aligned}$$

donde  $G_{ijkl}$  es la *supermétrica* definida como

$$G_{ijkl} = \frac{1}{2} \sqrt{^3g} (g_{ik} g_{jl} + g_{il} g_{jk} - g_{ij} g_{kl}).$$

Variando la acción correspondiente con respecto a las variables  $g_{ij}$  y  $p^{ij}$  se obtienen las ecuaciones de movimiento que rigen sus evoluciones dinámicas. Por el contrario, variando con respecto a las funciones de lapso  $N$  y shift  $N^i$  se obtienen los vínculos

$$(2.35) \quad \mathcal{H}_\perp = 0,$$

$$(2.36) \quad \mathcal{H}_i = 0.$$

Estas ecuaciones corresponden a las ecuaciones de Einstein  $G_{00} = 0$  y  $G_{0i} = 0$  respectivamente. Estos dos vínculos representan en el marco del formalismo hamiltoniano la covariancia general de la teoría. En efecto el vínculo (2.35) (denominado *vínculo hamiltoniano*) garantiza

que la teoría sea invariante ante reparametrizaciones del parámetro utilizado para foliar el espacio-tiempo, mientras que el vínculo (2.36) garantiza la invariancia ante cambios en las coordenadas espaciales de las hipersuperficies. Puede demostrarse que este sistema de vínculos es de primera clase, es decir que el corchete de Poisson entre dos cualesquiera de ellos es nulo sobre la superficie de vínculo.

Una vez formulada la Relatividad General como un sistema hamiltoniano, es posible aplicar el método de Dirac para la cuantificación de sistemas hamiltonianos con vínculos (ver Refs.[33, 35]).

La métrica  $g_{ij}$  y los momentos  $p^{ij}$  son promovidos al rango de operadores que satisfacen las reglas de conmutación

$$\begin{aligned} [\hat{g}_{ij}(x), \hat{g}_{kl}(x')] &= 0, \\ [\hat{p}^{ij}(x), \hat{p}^{kl}(x')] &= 0, \\ [\hat{g}_{ij}(x), \hat{p}^{kl}(x')] &= \frac{i}{2} (\delta_i^k \delta_j^l + \delta_i^l \delta_j^k) \delta(x, x'). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que los momentos  $p^{ij}$  están linealmente relacionados con la curvatura extrínseca, el último de estos conmutadores define una “relación de incertidumbre” entre las curvaturas extrínsecas e intrínsecas.

En la representación de coordenadas, los operadores  $\hat{g}_{ij}$  y  $\hat{p}^{ij}$  actúan sobre los estados cuánticos de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \hat{g}_{ij} \Psi(g_{ij}(x)) &= g_{ij}(x) \Psi(g_{ij}(x)), \\ \hat{p}^{ij} \Psi(g_{ij}(x)) &= -i \frac{\delta}{\delta g_{ij}} \Psi(g_{ij}), \end{aligned}$$

donde  $\Psi(g_{ij})$  es un funcional en el espacio  $Riem(M)$  de todas las métricas riemannianas  ${}^3g_{ij}$  sobre  $M$ .

De acuerdo con el método de Dirac, es necesario substituir los operadores  $\hat{g}_{ij}$  y  $\hat{p}^{ij}$  en las expresiones  $\mathcal{H}_\perp$  y  $\mathcal{H}_i$ . Si se imponen los operadores resultantes  $\hat{\mathcal{H}}_\perp$  y  $\hat{\mathcal{H}}_i$  como restricciones sobre los estados cuánticos del sistema  $\Psi(g_{ij}(x))$  se obtienen las ecuaciones

$$(2.37) \quad G_{ijkl}(x) \frac{\delta^2 \Psi(g_{ij}(x))}{\delta g_{ij}(x) \delta g_{kl}(x)} - \sqrt{g(x)} R(x) \Psi(g_{ij}(x)) = 0,$$

$$(2.38) \quad \left. \frac{\delta \Psi(g_{ij}(x))}{\delta g_{ij}(x)} \right|_j = 0.$$

La ecuación (2.37) es la llamada *ecuación de Wheeler-DeWitt* y constituye la versión cuántica del vínculo hamiltoniano clásico (2.35). Las ecuaciones (2.38) garantizan que el funcional  $\Psi(g_{ij})$  sea invariante ante transformaciones de coordenadas en las hipersuperficies espaciales.

## 2.2. Problema del tiempo en Gravedad Cuántica.

El así denominado *problema del tiempo* en Gravedad Cuántica es una consecuencia de los diferentes roles jugados por la noción de tiempo en la Relatividad General y la Mecánica Cuántica. Para una discusión general sobre dicho problema ver Refs.[6, 8, 48, 52, 55, 59, 60, 61].

Puede decirse que en mecánica cuántica el tiempo  $t$  es un *tiempo newtoniano*, es decir un background externo absoluto no asociado a grado de libertad alguno. Dicho tiempo newtoniano aparece explícitamente como un parámetro  $t$  en la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo. Este tiempo paramétrico no está asociado a un operador por lo que no es un observable de la teoría. Por otra parte, la existencia de dicho parámetro temporal es necesaria para las interpretaciones usuales de la misma. En efecto, la *medición* de un sistema cuántico tiene lugar a un cierto tiempo  $t$ , el *producto interno* en el espacio de Hilbert tiene que satisfacer la propiedad de ser conservado en el tiempo  $t$  y un conjunto completo de observables que conmutan deben conmutar a un tiempo  $t$  fijo.

Por el contrario en Relatividad General, la invariancia de la teoría ante el grupo  $Diff(\mathcal{M})$  de difeomorfismos del espacio-tiempo  $\mathcal{M}$ , torna problemática la definición de una variable temporal privilegiada. En efecto, en Relatividad General las coordenadas locales sobre el espacio-tiempo no tienen una significación física observable. A los efectos de dotar a los puntos del espacio-tiempo de significación observable es necesario utilizar grados de libertad físicos de la teoría (partículas, relojes físicos, coincidencias, etc.). Por otra parte en Relatividad General, nociones como *causalidad* y *tiempo propio* dependen de la métrica del espacio-tiempo (es decir del campo gravitatorio), por lo que dichas nociones solo adquieren un sentido definido después de que las ecuaciones de movimiento de la teoría fueron resueltas. Además, dado que una noción de tiempo físicamente relevante depende de grados de libertad genuinos de la teoría, la cuantificación de la misma debería implicar también una *cuantificación del tiempo*, en principio incompatible con el tiempo paramétrico de la mecánica cuántica.

En principio existen tres estrategias fundamentales para intentar resolver dicha incompatibilidad:

- Identificar un tiempo como función de las variables canónicas y resolver los vínculos de la teoría *antes de cuantificar*. La cuantificación es luego efectuada por medio de una ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo. En principio puede suceder que una teoría clásica pueda ser cuantificada por medio

de variables temporales distintas. En ese caso no resulta claro si las teorías cuánticas obtenidas por medio de la separación de tiempos distintos son equivalentes (*problema de la elección múltiple del tiempo*). Por otra parte la presencia de obstrucciones topológicas globales puede tornar imposible la elección de una variable temporal globalmente bien definida (*problema del tiempo global*).

- Identificar una noción de tiempo *despues de cuantificar*.
- Prescindir de toda noción *fundamental* de tiempo.

En las dos últimas opciones la cuantificación se realiza por medio de la ecuación de Wheeler–DeWitt  $\hat{H}\Psi = 0$  asociada al vínculo hamiltoniano clásico  $H = 0$ . Sin embargo, la ausencia de una variable temporal privilegiada impide en principio interpretar la función de onda resultante en términos de un producto interno definido positivo y conservado en el tiempo (*problema del espacio de Hilbert*). La ecuación de Wheeler–DeWitt es, como la ecuación de Klein-Gordon, una ecuación hiperbólica. Se sabe como definir un producto interno definido positivo y conservado en el tiempo para el espacio de soluciones de la ecuación de Schrödinger (ecuación parabólica), pero no para el espacio de soluciones de una ecuación del tipo Klein-Gordon como la ecuación de Wheeler–DeWitt. En teoría de campos en el espacio de Minkowski, el espacio de soluciones de la ecuación de Klein-Gordon puede ser separado en frecuencias positivas y negativas. La restricción al subespacio de frecuencias positivas permite definir un producto interno positivo. En teoría de campos sobre espacios curvos, la separación en frecuencias positivas y negativas solo puede realizarse si tanto la métrica del espacio-tiempo como el potencial son estacionarios, es decir si existe un vector de Killing temporal y el potencial es constante a lo largo de sus órbitas (esta propiedad puede relajarse a vectores de Killing conformes). Si estas condiciones no pueden ser satisfechas, entonces no es posible restringirse a la interpretación de una partícula. Para el caso de la geometrodinámica, dicho conjunto de propiedades no es satisfecho (ver Ref.[60]).

En los casos en los que es posible *separar* una variable temporal adecuada, se puede extraer de la ecuación de Wheeler–DeWitt (independiente del tiempo), una ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo. Como dice J. Barbour en Ref.[8], en gravedad cuántica canónica la situación es en cierto sentido inversa con respecto a la mecánica cuántica ordinaria. Si en esta última la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo  $\hat{h}\psi = E\psi$  es derivada de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo  $\hat{h}\psi = i\frac{\partial\psi}{\partial t}$ , en gravedad cuántica

canónica una ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo tiene que ser definida a partir de la ecuación de Wheeler–DeWitt  $\hat{H}\Psi = 0$  (la cual puede ser considerada como una ecuación de Schrödinger independiente del tiempo con autovalor cero).

Existen en principio dos formas de definir una ecuación de Schrödinger para un sistema dinámico con un vínculo hamiltoniano  $H = 0$  cuadrático en todos sus momentos. La primera posibilidad es realizar una transformación canónica de modo tal que el Hamiltoniano resultante sea *lineal* en uno de los momentos canónicos

$$H(Q, P) \rightsquigarrow H(q^0, p_0, q^\mu, p_\mu) = p_0 + h(q^0, q^\mu, p_\mu).$$

Si el *Hamiltoniano reducido*  $h$  es definido positivo, entonces la coordenada  $q^0$  puede ser definida como un parámetro temporal legítimo para la evolución del sistema (ver Refs.[13, 19, 40]).

La otra posibilidad es llevar el vínculo hamiltoniano por medio de un rescaleo a un vínculo de la forma

$$H = p_0^2 - h^2 = 0,$$

con  $h^2 = p_\mu p^\mu + V(q^\mu, q^0)$ . Un vínculo de ese tipo puede ser luego factorizado en dos hojas disjuntas  $H = (p_0 + h)(p_0 - h) = 0$ . En cada una de dichas hojas el momento  $p_0$  tiene un signo definido. La coordenada  $q^0$  (módulo un signo) puede entonces ser elegida como tiempo  $t$ . Mas adelante analizaremos el significado de esta factorización. Una ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo puede entonces ser asociada a cada factor  $p_0 \pm h$ . Esta separación del vínculo original en dos vínculos lineales en  $p_0$  requiere la existencia de un momento  $p_0$  que no se anule nunca, lo cual no necesariamente sucede en las variables originales. Este requisito es una consecuencia del hecho de que una variable temporal legítima no puede invertir el sentido de su evolución. En efecto para que  $q^0$  pueda ser elegida como tiempo, se debe satisfacer la condición  $[q^0, \mathcal{H}] > 0$ , lo cual conduce a la condición  $p_0 \neq 0$  (ver Ref.[47]). Además, para que las teorías cuánticas en cada hoja estén bien definidas, es necesario que el operador correspondiente al Hamiltoniano reducido  $h$  sea autoadjunto para garantizar de esta manera que la evolución sea unitaria. Dado que en el proceso de factorización el Hamiltoniano reducido  $h$  es obtenido tomando una raíz cuadrada ( $h = \sqrt{p_\mu p^\mu + V(q^\mu, q^0)}$ ), el operador asociado  $\hat{h}$  será auto-adjunto solo si el término dentro de la raíz cuadrada es definido positivo. Esta condición impone una fuerte restricción al proceso de reducción descrito. También puede suceder que el modelo no pueda ser reducido en las variables canónicas originales, siendo en consecuencia necesario



realizar una transformación canónica a un nuevo conjunto de variables que permita reducir el sistema y definir un operador Hamiltoniano  $\hat{h}$  auto-adjunto. En ese caso, es posible que la variable elegida como tiempo dependa tanto de las coordenadas originales como de los momentos ( $t \equiv q^0 = q^0(q^\mu, p_\mu)$ ). Dado que los momentos dependen de la curvatura extrínseca de las hipersuperficies, este tipo de variables temporales son denominadas *tiempos extrínsecos* [58]. Por el contrario, las variables temporales que solo dependen de las coordenadas  $q^\mu$  (es decir de la geometría intrínseca de las hipersuperficies) son denominadas *tiempos intrínsecos*. El modelo cosmológico de Friedmann-Robertson-Walker con  $k = 0, -1$  con constante cosmológica acoplado a un campo escalar no masivo y el modelo de Kantowski-Sachs son ejemplos de este último caso (con Hamiltonianos reducidos dependientes del tiempo).

Si el proceso de reducción puede ser llevado a cabo satisfactoriamente, entonces se tendrán dos espacios de Hilbert, cada uno con su correspondiente ecuación de Schrödinger  $\pm i \frac{\partial \psi}{\partial q^0} = \hat{h} \psi$ . Podemos decir entonces que dicho método de cuantificación preserva la topología de la superficie de vínculo: la separación de las soluciones clásicas en dos conjuntos disjuntos tiene como consecuencia a nivel cuántico la separación de la teoría en dos espacios de Hilbert.

Llegados a este punto, existen distintos caminos posibles. En primer lugar, se puede considerar al modelo reducido como un sistema cuántico ordinario. Se considera entonces que la variable  $q^0$  juega el mismo rol que el parámetro  $t$  de la ecuación de Schrödinger ordinaria. En cada espacio de Hilbert, el producto interno físico es definido como

$$(\Psi|\Phi) = \int dq \delta(q^0 - \tilde{q}^0) \Psi^*(q) \Phi(q).$$

Este producto interno es el producto interno usual *a tiempo fijo*  $t \equiv q^0 = \tilde{q}^0$ , pudiéndose recuperar así la estructura de espacio de Hilbert de la mecánica cuántica ordinaria. El fijado de dicho tiempo por medio de la delta de Dirac opera como una *fijación de gauge*, ya que el producto interno sin dicha delta incluye una integración sobre la variable “espúrea”  $t = q^0$ . Sin embargo, dicho procedimiento olvida que la variable  $q^0$ , lejos de ser el parámetro  $t$  de la mecánica cuántica ordinaria, es un grado de libertad *genuino* (geométrico o no) elegido como *reloj físico*. En ese caso no resulta claro por que, al cuantificar el modelo, dicho grado de libertad debería ser tratado como un mero parámetro.

Otra propuesta para el producto interno proviene de la así denominada *interpretación de Schrödinger naïf*. En el marco de dicha interpretación el producto interno es definido como

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \int dq \Psi^*(q) \Phi(q).$$

Este producto interno es una extensión a variables genéricas  $q$  del producto interno

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \int_{\text{Riem}(M)} dg \Psi^*(g) \Phi(g),$$

donde la medida  $dg$  está definida sobre el espacio  $\text{Riem}(M)$  de las métricas riemannianas sobre la 3-variedad  $M$ . Este tipo de producto interno no es un producto interno a *tiempo fijo*, ya que se está integrando también sobre el reloj físico  $q^0$ . La cantidad  $|\Psi(q^0, q^\mu)|^2$  es interpretada como la amplitud de probabilidad *estática* de encontrar al sistema en el punto  $(q^0, q^\mu)$  del espacio de configuración extendido  $\mathcal{C}_0$  (y no como la amplitud de probabilidad *dependiente del parámetro temporal*  $q^0$  de encontrar al sistema en  $q^\mu$  al medir  $\hat{q}^\mu$  a tiempo  $q^0$ ). El problema con esta interpretación es que ni el reloj físico  $q^0$  ni el resto de las variables  $q^\mu$  definen *observables* del sistema (ya que no conmutan con el superhamiltoniano  $H = p_0 + h(q^\mu, p_\mu)$ ). No resulta entonces claro cual es el sentido *operacional* de una tal asignación de probabilidades.

### 2.3. Sistemas parametrizados cuadráticos.

En esta sección se describirán los análisis efectuados en Ref.[20] sobre la relación entre el vínculo hamiltoniano de los sistemas generalmente covariantes como la Relatividad General y el formalismo de los sistemas parametrizados (ver Refs.[50, 55]).

Una de las propiedades fundamentales de la estructura hamiltoniana de la Relatividad General es la presencia del vínculo hamiltoniano  $H = 0$ . Dado que los así denominados *sistemas parametrizados* poseen un vínculo similar, estos sistemas han sido considerados como modelos privilegiados para analizar el problema del tiempo en gravedad cuántica. La idea fundamental de los sistemas parametrizados es la de promover *formalmente* el tiempo  $t$  (el tiempo absoluto de Newton) al rango de variable dinámica por medio de la incorporación de un nuevo parámetro “temporal” arbitrario  $\tau$ .

Comencemos entonces con una acción ordinaria de la forma

$$(2.39) \quad S[q^\mu(t), p_\mu(t)] = \int_{t_1}^{t_2} p_\mu dq^\mu - h(q^\mu, p_\mu) dt, \quad \mu = 1, \dots, n.$$

El conjunto original de variables canónicas  $\{q^\mu, p_\mu\}$  ( $\mu = 1, \dots, n$ ) puede ser extendido por medio de la identificación  $q^0 \equiv t$ ,  $p_0 \equiv -h$ . El conjunto extendido de variables dependerá ahora de un nuevo parámetro físicamente irrelevante  $\tau$ . El conjunto  $\{q^0, q^\mu, p_0, p_\mu\}$  puede ser variado en forma independiente si la definición de  $p_0$  es incorporada en la acción por medio del vínculo

$$(2.40) \quad H = p_0 + h = 0,$$

con el correspondiente multiplicador de Lagrange  $N$ . La nueva acción es ahora

$$(2.41) \quad S[q^i(\tau), p_i(\tau), N(\tau)] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( p_i \frac{dq^i}{d\tau} - NH \right) d\tau, \quad i = 0, \dots, n.$$

Las ecuaciones de Hamilton correspondientes a esta acción son

$$\begin{aligned} \frac{dq^0}{d\tau} &= N, \\ \frac{dq^\mu}{d\tau} &= N \frac{\partial h}{\partial p_\mu}, \\ \frac{dp_\mu}{d\tau} &= -N \frac{\partial h}{\partial q^\mu}. \end{aligned}$$

La presencia del multiplicador de Lagrange  $N(\tau)$  tiene entonces como consecuencia que la dinámica del sistema esté indeterminada en el parámetro físicamente irrelevante  $\tau$ . Es entonces necesario fijar el gauge. El fijado de gauge  $N = 1$  ( $q^0 = \tau$ ) permite recuperar las ecuaciones de Hamilton correspondientes a la acción (2.39).

En el *espacio de configuración extendido*  $\mathcal{C}_0 = \{q^0 \equiv t, q^\mu\}$  las soluciones de las ecuaciones de movimiento son “curvas” estáticas sin una parametrización privilegiada. La teoría es entonces invariante ante reparametrizaciones del parámetro físicamente irrelevante  $\tau$ . En efecto, no tiene sentido hablar de la velocidad absoluta de movimiento del sistema en el espacio de configuración extendido  $\mathcal{C}_0$ . Sin embargo es importante destacar que dichas curvas tienen un *sentido* privilegiado: la dirección creciente de  $q^0 \equiv t$ .

Veremos ahora cuales son las transformaciones de las variables  $q^i$ ,  $p_i$  y  $N$  que dejan a la acción extendida (2.41) invariante ante la reparametrización  $\tau \rightarrow \tau + \varepsilon(\tau)$ . Dado que el vínculo de primera clase  $H$

genera transformaciones de gauge se tiene

$$\begin{aligned}\delta q^i(\varepsilon) &= \varepsilon(\tau) \{q^i, H\} = \varepsilon(\tau) \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \delta p_i(\varepsilon) &= \varepsilon(\tau) \{p_i, H\} = -\varepsilon(\tau) \frac{\partial H}{\partial q^i}.\end{aligned}$$

La variación de la acción extendida (2.41) será

$$\delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau (\dot{q}^i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}^i - H \delta N - N \delta H).$$

El último término es cero y una integración por partes del segundo permite expresar la acción como

$$\delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left( -\varepsilon \frac{\partial H}{\partial q^i} \dot{q}^i - \varepsilon \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i - H \delta N \right) + \left[ p \varepsilon \frac{\partial H}{\partial p_i} \right]_{\tau_1}^{\tau_2}.$$

Si el multiplicador de Lagrange  $N$  transforma como

$$\delta N(\tau) = \dot{\varepsilon}(\tau),$$

se tendrá

$$\delta S = \left[ \varepsilon(\tau) \left( p \frac{\partial H}{\partial p_i} - H \right) \right]_{\tau_1}^{\tau_2}.$$

Si se pide que la transformación se anule en los extremos

$$\varepsilon(\tau_1) = \varepsilon(\tau_2) = 0,$$

la acción (2.41) será invariante ante reparametrizaciones.

En general, la propiedad de un Lagrangiano  $\mathcal{L}$  que determina que la acción correspondiente  $S = \int \mathcal{L} d\tau$  sea invariante ante reparametrizaciones  $\tau \rightarrow \tilde{\tau} \equiv f(\tau)$  con  $\dot{f} > 0$  es que sea *homogéneo* de grado uno en las velocidades, es decir que satisfaga

$$\mathcal{L}(q, \lambda \dot{q}) = \lambda \mathcal{L}(q, \dot{q}).$$

En efecto

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}) d\tau = \int_{\tilde{\tau}_1}^{\tilde{\tau}_2} \mathcal{L} \left( q, \frac{dq}{d\tilde{\tau}} \dot{f} \right) \frac{d\tilde{\tau}}{\dot{f}} = \int_{\tilde{\tau}_1}^{\tilde{\tau}_2} \mathcal{L} \left( q, \frac{dq}{d\tilde{\tau}} \right) d\tilde{\tau}.$$

Dado un Lagrangiano homogéneo, el correspondiente Hamiltoniano es

$$\begin{aligned} H &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{q} - \mathcal{L} \\ &= \lambda^{-1} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(q, \lambda \dot{q})}{\partial (\lambda \dot{q})} \lambda \dot{q} - \mathcal{L}(q, \lambda \dot{q}) \right) \\ &= \lambda^{-1} H. \end{aligned}$$

Como  $\lambda$  es arbitrario,  $H$  debe ser nulo. Por otra parte, si  $H$  es nulo se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q, \lambda \dot{q})}{\partial \dot{q}} \dot{q} = \mathcal{L}(q, \lambda \dot{q}).$$

El lado izquierdo puede ser escrito como  $\lambda p_q \dot{q} = \lambda \mathcal{L}$ . En consecuencia  $\lambda \mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{L}(q, \lambda \dot{q})$ , por lo que  $\mathcal{L}$  es homogéneo.

De esta manera cualquier sistema dinámico puede ser formulado como un sistema parametrizado. En el proceso de parametrización, el tiempo “verdadero”  $t$  es promovido *formalmente* al rango de variable dinámica. El tiempo  $t$  “escondido” entre las variables dinámicas puede sin embargo ser fácilmente identificado debido al hecho de que su momento canónicamente conjugado aparece linealmente en el vínculo (2.40).

El formalismo de los sistemas parametrizados ha sido utilizado como modelo para entender la estructura canónica de la Relatividad General. Dado que dicha teoría tiene un vínculo hamiltoniano de la forma  $H = 0$ , podría suponerse que la Relatividad General es un sistema dinámico ordinario con una acción expresada en forma parametrizada. Si este fuese el caso, se podría intentar reducir el sistema separando al “verdadero” tiempo  $t$  y formulando la teoría como un sistema dinámico ordinario de la forma (2.39). Existe una cierta interpretación general de las teorías de gauge según la cual la presencia de vínculos entre las variables canónicas pone de manifiesto la existencia de variables espúreas en la teoría, es decir de variables no asociadas a grados de libertad genuinos. En el caso de los sistemas generalmente covariantes como la Relatividad General, la variable redundante sería el tiempo  $t$ , el cual habría sido identificado formalmente a una variable dinámica  $q^0$  a los efectos de garantizar la covariancia explícita de la teoría. Según esta concepción, la reducción del sistema equivale a identificar los verdaderos grados de libertad separando dichas variables redundantes.

Diferentes alternativas fueron propuestas para dicha variable temporal, pero ninguna de ellas ha podido superar los diferentes problemas que aparecen en el proceso de reducción (ver Refs.[59, 60]).

La estrategia descrita parte del supuesto de que una invariancia de gauge no tiene contenido físico, no siendo más que un lenguaje particular para expresar una teoría. Desde la célebre objeción de Kretschmann contra el supuesto sentido físico de la covariancia general, se ha propuesto que, dado que cualquier teoría ordinaria puede ser formulada en lenguaje covariante, toda teoría de gauge no es más que una teoría ordinaria formulada en dicho lenguaje. Sin embargo, esta interpretación de la invariancia de gauge no tiene en cuenta la asimetría entre ambos lenguajes. Un formalismo covariante es lo suficientemente poderoso como para poder reexpresar covariantemente teorías ordinarias (la mecánica newtoniana puede ser efectivamente reformulada en lenguaje covariante). Esto no significa que toda teoría de gauge sea una reexpresión covariante de una teoría ordinaria. Que un lenguaje sea más poderoso que otro significa que todo lo que podía expresarse con este último puede también ser expresado en el nuevo lenguaje. Sin embargo gracias al nuevo lenguaje deben poder expresarse cosas fuera del alcance del lenguaje anterior. El punto decisivo no es entonces si la mecánica newtoniana puede formularse en lenguaje covariante, sino si la Relatividad General podría haberse formulado en un lenguaje no covariante. En el caso de los sistemas parametrizados, esto significa que si bien todo sistema mecánico ordinario puede parametrizarse incorporando un vínculo hamiltoniano de la forma  $H = p_0 + h = 0$ , no todo vínculo hamiltoniano  $H = 0$  puede reducirse a un vínculo de esa forma particular.

Según esta otra interpretación, la presencia de vínculos no implica que existan en la teoría variables espúreas o redundantes: *todas* las variables canónicas representan grados de libertad *genuinos*. La presencia de vínculos entre los mismos tiene como consecuencia que solo las *correlaciones* entre los distintos grados de libertad tienen un sentido físico observable (ya que no existe un *background* de fondo que permita dotar de contenido observable a la “posición” absoluta de los distintos grados de libertad). En efecto, y como ya se dijo, ni el reloj físico  $q^0$  ni el resto de las variables  $q^\mu$  definen *observables* de la teoría, ya que no conmutan con el superhamiltoniano  $H = p_0 + h(q^\mu, p_\mu)$ <sup>11</sup>. Ahora bien, si se quiere fijar *arbitrariamente* un sistema de coordenadas, habrá que utilizarse alguno de dichos grados de libertad físicos para definirlo. En

---

<sup>11</sup>Un ejemplo de observable de una teoría parametrizada está dado por la cantidad  $\mathcal{O}(q, q^0) = q - q(q^0)$ , donde  $q(q^0)$  es una solución de las ecuaciones de Hamilton

ese caso podrán resolverse los vínculos para el resto de las variables y trabajar en esta reducción *particular* del sistema, reducción esta que no tiene privilegio absoluto alguno. En el caso de los sistemas generalmente covariantes como la Relatividad General, es en ciertos casos posible elegir una de las variables canónicas para asumir el rol de *reloj físico*. Dicho reloj permitirá describir las soluciones de la teoría en términos de la evolución temporal del resto de los grados de libertad. Sin embargo, dicho reloj físico no *mide* un parámetro absoluto  $t$  privilegiado, sino que *define* una variable temporal posible. Según esta interpretación, la suposición de que hay un tiempo “escondido” entre las variables dinámicas es una hipótesis infundada que atenta contra el espíritu covariante de la Relatividad General.

Además de no haberse podido separar para el caso general un “verdadero” tiempo global  $t$ , existe otra importante objeción contra la interpretación de la estructura canónica de la Relatividad General como un sistema ordinario expresado en lenguaje parametrizado: el vínculo (2.40) es lineal en el momento  $p_0$  conjugado al tiempo  $q_0 \equiv t$ , mientras que el vínculo hamiltoniano de la Relatividad General es cuadrático en *todos* sus momentos. A los efectos de comprender esta diferencia, en Ref.[20] se propuso una extensión del formalismo de los sistemas parametrizados con el objeto de poder describir sistemas físicos que no necesariamente pueden ser considerados en términos de una *evolución temporal* de sus variables dinámicas. El formalismo propuesto (sistemas parametrizados *cuadráticos*) es más *general* que la mecánica ordinaria, en el sentido de que si bien toda teoría ordinaria puede ser parametrizada, no toda teoría parametrizada puede ser reducida a una teoría ordinaria.

Se considerará por lo tanto que una de las propiedades fundamentales de la Relatividad General es que sus soluciones no representan en general una *evolución temporal* de ciertas variables dinámicas, siendo por el contrario una teoría que selecciona ciertas configuraciones *relativas* (no dinámicas) de sus variables canónicas. Solo en ciertos casos dichas configuraciones estáticas podrán ser consideradas como evoluciones dinámicas. Para ello será necesario, no recuperar el verdadero tiempo, sino elegir un *reloj físico* adecuado. Un reloj físico es un grado de libertad genuino que puede asumir el rol de parámetro de evolución para el resto de las variables canónicas. Como fué señalado por varios

---

asociadas al Hamiltoniano reducido  $h$  (ver Refs.[70, 72]). En efecto

$$\{\mathcal{O}, p_0 + h\} = \frac{\partial h}{\partial p_q} - \frac{\partial q}{\partial q^0} = 0.$$

autores, no es posible observar la evolución de variables canónicas como  $q_1$  o  $q_2$  a lo largo del tiempo newtoniano  $t$ , sino solamente la evolución de ciertas variables relativa al cambio de otra variable, es decir evoluciones de la forma  $q_2(q_1)$  (ver por ejemplo Refs.[70, 72])<sup>12</sup>. En ese caso no es realmente importante si el reloj físico es un grado de libertad geométrico o un grado de libertad asociado a los campos de materia (ver por ejemplo Ref.[19]). De hecho, y como se verá más adelante, en ciertos modelos cosmológicos con un campo dilatónico, este último jugará el rol de reloj físico. Por el contrario, si uno estuviese buscando el “verdadero” tiempo, debería esperarse que dicho tiempo fuese un grado de libertad estrictamente *geométrico* de la teoría. La elección de un reloj físico debe ser entonces interpretada como un fijado de gauge parcial (elección del multiplicador de Lagrange  $N(\tau)$ ). En general en teorías de gauge, el fijado de gauge no es un método para seleccionar los verdaderos grados de libertad, sino una elección particular de un sistema de coordenadas sin privilegio alguno. De hecho es necesario garantizar que la teoría con el gauge fijo no depende del gauge elegido.

En Ref.[20] el formalismo de los sistemas parametrizados fué modificado convenientemente con el objeto de implementar la nueva interpretación propuesta.

El primer punto a tener en cuenta es que, no existiendo un par de variables canónicas privilegiadas  $\{q^0 = t, p_0 = -h\}$ , *todos* los momentos deben aparecer en pie de igualdad en el vínculo hamiltoniano (como efectivamente sucede en la Relatividad General). Esto significa que ningún momento canónico debe aparecer linealmente en el vínculo como sucede con el vínculo de los sistemas parametrizados (2.40). La interpretación propuesta en Ref.[20] impone entonces la necesidad de encontrar un formalismo en el que todos los momentos aparezcan cuadráticamente en el vínculo hamiltoniano.

Existe también un segundo argumento para buscar un formalismo de sistemas parametrizados con un vínculo cuadrático en todos los momentos canónicos. Como ya se dijo, las soluciones de la teoría son trayectorias estáticas en el espacio de configuración extendido  $\mathcal{C}_0$ , es decir configuraciones relativas entre las diferentes variables de la forma  $q^2(q^1)$ . Con el objeto de describir dichas trayectorias estáticas como

---

<sup>12</sup>En 1918 el filósofo Ludwig Wittgenstein escribió en la proposición 6.3611 de su *Tractatus Logico-philosophicus*: “We can no compare any process with ‘the flow of time’ -which does not exist-, but with another process (as the motion of a chronometer, for example). Therefore the description of the flow of time is only possible using another process.”



evoluciones dinámicas, es necesario elegir un reloj físico. La diferencia fundamental con el formalismo ordinario de los sistemas parametrizados es que estas trayectorias no tienen un sentido de evolución privilegiado. Ambas direcciones pueden ser elegidas como dirección de avance del reloj físico. Esta ambigüedad puede ser introducida en el formalismo de los sistemas parametrizados modificando convenientemente el vínculo hamiltoniano. Si uno quiere seleccionar una cierta variable  $q^0$  como reloj físico se tiene que elegir también que sentido de la trayectoria será considerado como el sentido de avance del reloj ( $t = q^0$  o  $t = -q^0$ ). La trayectoria estática no privilegia ningún sentido en particular por lo que ambas posibilidades deben ser accesibles para reducir el sistema. Estas dos opciones corresponden a los vínculos  $K_+ = p_0 + h = 0$  y  $K_- = p_0 - h = 0$  respectivamente. Ambas posibilidades pueden ser incorporadas en el formalismo si se usa un vínculo hamiltoniano de la forma  $H = (p_0 + h)(p_0 - h) = p_0^2 - h^2 = 0$ . Para que dicha factorización pueda ser efectuada es necesario que el vínculo hamiltoniano original sea cuadrático en el momento conjugado a  $q^0$ . La existencia de dos hojas en el vínculo hamiltoniano, lejos de ser una redundancia innecesaria, adquiere de esta manera un significado preciso asociado a la necesidad de no privilegiar ninguno de los sentidos posibles de evolución de la trayectoria. Cada hoja del vínculo hamiltoniano  $H = 0$  estará entonces asociada a cada uno de los posibles sentidos de evolución. La acción resultante es

$$(2.42) \quad S[q^i(\tau), p_i(\tau), N(\tau)] = \int p_\mu dq^\mu + p_0 dq^0 - N(p_0^2 - h^2) d\tau.$$

El vínculo  $H = 0$  se satisface si uno de los factores se anula. El sistema puede ser entonces reducido eligiendo  $t = q^0$  o  $t = -q^0$ , correspondiendo cada una de dichas elecciones a las hojas  $p_0 + h = 0$  y  $p_0 - h = 0$  respectivamente. La ecuación de Hamilton para la variable  $q^0$  es

$$\frac{dq^0}{d\tau} = N \frac{\partial H}{\partial p_0} = 2Np_0$$

La condición de fijado de gauge  $t \equiv q^0 = \tau$  equivale a la siguiente elección del multiplicador de Lagrange  $N$ :

$$\frac{dq^0}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} = 2Np_0 = 1,$$

es decir

$$N(\tau) = \frac{1}{2p_0(\tau)}.$$

Si ahora introducimos el fijado de gauge ( $q^0 = t, p_0 = -h$ ), la acción asume la forma standard (2.39). El vínculo  $p_0 + h = 0$  implica que el

multiplicador de Lagrange  $N$  puede también ser expresado como

$$N = -\frac{1}{2h}$$

Por el contrario, la elección de fijado de gauge  $t \equiv -q^0 = \tau$  implica que el multiplicador de Lagrange  $N$  debe satisfacer

$$\frac{dq^0}{d\tau} = -\frac{dt}{d\tau} = 2Np_0 = -1,$$

es decir

$$N = -\frac{1}{2p_0}.$$

Si ahora introducimos el fijado de gauge ( $q^0 = -t, p_0 = h$ ) en la acción (2.42), se reobtiene la acción standard (2.39) de un sistema no parametrizado. En términos de  $h$ , el multiplicador de Lagrange  $N$  sigue valiendo  $N = -\frac{1}{2h}$ .

Resumiendo, si  $t = q^0$ , entonces  $p_t = p_0 = -h$ ; si  $t = -q^0$ , entonces  $p_t = -p_0 = -h$ . En ambos casos  $p_t = -h$  con  $h > 0$ . Habiéndose elegido uno de los factores del vínculo hamiltoniano como factor nulo, el otro tendrá, sobre la superficie de vínculo, un signo definido, siendo entonces posible reescalar el vínculo hamiltoniano con este factor. Si por ejemplo se elige  $K_+ = p_0 + h = 0$  ( $t = q^0$  como reloj físico), se tendrá  $p_0 = -h < 0$  y entonces el otro factor será  $K_- = p_0 - h = -2h < 0$ .

De esta manera, tanto la necesidad de tener un vínculo hamiltoniano en el que todos los momentos aparezcan en pie de igualdad (cuadráticamente), así como la necesidad de no privilegiar ninguno de los dos sentidos posibles para la “temporalización” de las trayectorias estáticas, conducen naturalmente al formalismo de los *sistemas parametrizados cuadráticos* propuesto en Ref.[20]. En dicho trabajo se postuló entonces que dicho formalismo es el adecuado para el estudio de la estructura canónica de la Relatividad General.

El formalismo de los sistemas parametrizados *lineales* es el adecuado para describir sistemas en los que un verdadero tiempo esta “escondido” entre las variables canónicas. Este tiempo escondido define un sentido de evolución privilegiado, por lo que es innecesaria la presencia en el vínculo hamiltoniano de la hoja correspondiente al otro posible sentido de la evolución. Por el contrario, el formalismo de los sistemas parametrizados cuadráticos es el adecuado para describir sistemas en los que no existe ninguna variable temporal “escondida”. Si se quiere describir las soluciones en términos de evoluciones temporales, entonces será necesario, en los casos en los que sea posible, elegir un reloj físico. Sin embargo ninguno de los sentidos de dicho reloj son privilegiados por el sistema. Diremos en consecuencia que la Relatividad General

no es una teoría parametrizada, sino una teoría que admite soluciones desparametrizables. La existencia de una variable temporal global no es una propiedad de la teoría sino únicamente de algunas de sus soluciones.

En la terminología propuesta en Ref.[70] se dirá que una teoría física generalmente covariante describe *correlaciones entre observables parciales*. Una solución de un sistema dinámico (un *movimiento físico*) estará dada por una curva *no parametrizada*  $\gamma$  en el *espacio de configuración extendido*  $\mathcal{C}_0$  (espacio de configuración que incluye a todo posible reloj físico). Cada una de las coordenadas  $q$  de  $\mathcal{C}_0$  será denominada un *observable parcial* (de esta manera, el tiempo medido por todo posible reloj físico será también un observable parcial). Dicha curva  $\gamma$  será solución de una cierta ecuación  $f(q) = 0$ . Se denotará  $\Gamma$  al espacio de los movimientos físicos  $\gamma$  del sistema (o *espacio de fases covariante*). Un punto de  $\Gamma$  (es decir una curva  $\gamma$  en  $\mathcal{C}_0$ ) será denominado un *estado covariante*. Resumiendo, cada estado covariante  $\gamma$  en el espacio  $\Gamma$  define una correlación entre observables parciales en el espacio de configuración extendido  $\mathcal{C}_0$ .

Un sistema físico estará entonces caracterizado por el *espacio de configuración extendido*  $\mathcal{C}_0$  de sus *observables parciales*, por el *espacio de fases covariante*  $\Gamma$  de los *estados covariantes*  $\gamma$  y por una *ecuación de evolución*  $f = 0$  con

$$f : \Gamma \times \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathbb{R}.$$

En el lenguaje covariante  $(\mathcal{C}_0, \Gamma, f)$  las nociones de *estado instantáneo de un sistema*, de *evolución temporal* o de *observable a un tiempo fijo* no juegan un rol fundamental.

En los casos *particulares* en los que un sistema puede ser reducido por medio de la elección de un reloj físico global, el espacio de configuración extendido tendrá la forma

$$\mathcal{C}_0 = \mathbb{R} \times \mathcal{C},$$

donde  $\mathcal{C}$  es el espacio de configuración ordinario.

Esta formulación *extendida* (o *covariante*) de la mecánica es más general que la formulación ordinaria dado que todo sistema mecánico ordinario puede ser parametrizado, mientras que no todo sistema extendido puede ser reducido e interpretado en términos de una evolución temporal. En este sentido la *mecánica covariante* (sistemas parametrizados cuadráticos) no es una teoría de la evolución temporal de las variables físicas, sino una teoría de la correlación entre observables parciales.

## 2.4. Transformaciones de inversión de movimiento y de inversión del reloj.

La interpretación del vínculo hamiltoniano de la Relatividad General presentada en la sección anterior tiene consecuencias en lo referente a las simetrías temporales de una teoría con un vínculo de ese tipo. En Ref.[20] se estudiaron dichas simetrías. En esta sección describiremos los resultados obtenidos.

En un sentido vago se podría afirmar que cada una de las elecciones del sentido de evolución del reloj físico ( $t = q$  o  $t = -q$ ) corresponde a una cierta “inversión temporal” de la otra. Si este fuese el caso, entonces la elección de un sentido de evolución correspondería a una suerte de ruptura de la simetría ante inversiones temporales de la teoría. Sin embargo, al elegirse un reloj físico y un sentido para su evolución, es decir al elegir una de las hojas del vínculo hamiltoniano  $H = (p_0 + h)(p_0 - h) = 0$ , se obtiene un sistema clásico ordinario descrito por una acción no parametrizada. Es sabido que un sistema clásico o cuántico ordinario posee, bajo ciertas condiciones, una simetría ante “inversiones temporales”. Si cada hoja posee una simetría ante “inversiones temporales”, entonces el pasaje de una hoja a la otra no puede ser identificado con la operación de inversión temporal. La elección de una hoja del vínculo hamiltoniano no puede corresponder entonces a una ruptura de la simetría ante inversiones temporales propia de una teoría ordinaria. En Ref.[20] esta situación fué clarificada. El resultado del análisis es que existen dos tipos de operaciones de inversión temporal que deben ser cuidadosamente diferenciadas.

La primera de dichas operaciones de simetría es la transformación de inversión temporal ordinaria de la mecánica clásica o cuántica. Esta operación no corresponde a una inversión en la dirección del tiempo, sino a una *inversión del movimiento* del sistema. En efecto, dicho movimiento invertido se despliega en la misma dirección del tiempo que la solución original. En Ref.[20] esta operación fué denominada *transformación de inversión de movimiento*. Dada una trayectoria clásica  $\{q(q_i, p_i, t_i, t), p(q_i, p_i, t_i, t)\}$  que se extiende desde  $\{q_i, p_i\}$  a tiempo  $t_i$  hasta  $\{q_f, p_f\}$  a tiempo  $t_f$ , puede definirse otra trayectoria dada por

$$\begin{aligned} q^{mr} (q_i^{mr} = q_f, p_i^{mr} = -p_f, t_i, t) &= q(q_f, -p_f, t_i, t), \\ p^{mr} (q_i^{mr} = q_f, p_i^{mr} = -p_f, t_i, t) &= p(q_f, -p_f, t_i, t). \end{aligned}$$

En estas expresiones, el tiempo  $t$  corresponde a algún reloj físico  $q_r$ . Esta trayectoria “invertida” será solución de las *mismas* ecuaciones de

movimiento solo si el Hamiltoniano reducido es cuadrático en  $p$  e independiente de  $t$ . Esta solución con el movimiento invertido  $\{q^{mr}, p^{mr}\}$  se despliega desde  $q_f$  a tiempo  $t_i$  hasta  $q_i$  a tiempo  $t_f$ . Dicha solución comienza entonces en el mismo tiempo  $t_i$  que la solución original y evoluciona en la misma dirección del tiempo  $t$ . Sin embargo sus condiciones iniciales fueron invertidas con respecto a la solución original: la nueva solución  $\{q^{mr}, p^{mr}\}$  comienza con momento invertido  $p_i^{mr} = -p_f$  en la posición final  $q_i^{mr} = q_f$  de la trayectoria original.

Esta *transformación de inversión de movimiento* no corresponde como suele afirmarse a la operación de “pasar la película al revés”. Con el objeto de clarificar este punto, es necesario tener en cuenta que, siendo el reloj una variable dinámica, el mismo debe ser incluido en la hipotética película. Si se pasa la película al revés, se verá al reloj marchar hacia atrás. Sin embargo, como ya se dijo, la solución con el movimiento invertido  $\{q^{mr}, p^{mr}\}$  avanza en la misma dirección del tiempo  $t$  que la solución original. En otras palabras, en la solución con el movimiento invertido el reloj debe continuar marchando hacia adelante. En consecuencia, la solución con el movimiento invertido no corresponde a la operación de “pasar la película al revés”, operación está en la que todos los grados de libertad, tanto el reloj físico como el resto de las variables dinámicas, marcharían hacia atrás. Por el contrario, la solución con el movimiento invertido corresponde a *otra* película en la que todo se comporta como si marchase hacia atrás, *con excepción del reloj físico que continúa marchando hacia adelante*. La operación de inversión de movimiento invierte todas las variables, *salvo el reloj físico*. Dada una cierta solución en el espacio de configuración extendido  $\mathcal{C}_0 = \{q_r, q\}$ , el resultado de la operación de inversión de movimiento no es la misma curva (la misma película) desplegada en sentido inverso, sino *otra* curva (otra película) que se despliega en la *misma* dirección del tiempo. Sin embargo si se considera esta situación en el espacio de configuración reducido  $\mathcal{C} = \{q\}$  la trayectoria con el movimiento invertido sí coincide con la trayectoria original (recorrida en sentido contrario). Sin embargo esta coincidencia es una apariencia producto del hecho de que no se consideró la dinámica del reloj (estas trayectorias en el espacio de configuración reducido  $\mathcal{C} = \{q\}$  corresponden a películas en las que no se incluye al reloj físico).

Por otra parte, existe otra simetría asociada al pasaje de una hoja a otra del vínculo hamiltoniano  $H = (p_0 + h)(p_0 - h) = 0$ . Esta operación involucra *también* un cambio en la dirección de evolución de la variable utilizada como reloj físico. Esta transformación fué denominada en Ref.[20] *operación de inversión del reloj*. La solución

con el reloj invertido será una solución de las ecuaciones de Hamilton correspondientes a la *otra* hoja del vínculo hamiltoniano. Esta transformación sí corresponde ahora a la operación de “pasar la película al revés”. Dada una cierta solución en el espacio de configuración extendido  $\mathcal{C}_0 = \{q_r, q\}$ , el gráfico de la curva obtenida por medio de dicha operación de inversión del reloj *coincide con la curva original*, siendo la única diferencia el sentido de la evolución a lo largo de dicha curva. En otras palabras, la solución con el reloj invertido corresponde a la misma película (la misma curva en el espacio de configuración extendido  $\mathcal{C}_0$ ) proyectada hacia atrás.

Dada una solución  $S_1$  de las ecuaciones de movimiento en una de las hojas (hoja I) del vínculo hamiltoniano, es posible definir otras tres soluciones relacionadas con la primera por medio de estas dos operaciones de simetría. En primer lugar es posible, por medio de la operación de inversión de movimiento  $IM$ , encontrar otra solución  $S_2 = S_1^{mr}$  en la misma hoja I del vínculo hamiltoniano. En segundo lugar, por medio de la operación de inversión del reloj  $IR$ , es posible encontrar la solución correspondiente a la inversión del reloj de  $S_1$ . Esta solución  $S_3 = S_1^{cr}$  está en la hoja II del vínculo hamiltoniano. En último lugar es posible encontrar una cuarta solución  $S_4$  componiendo estas dos operaciones: la inversión de movimiento  $IM$  de la solución  $S_3 = S_1^{cr}$  encontrada por medio de la inversión del reloj  $IR$  de  $S_1$  da como resultado una solución  $S_4 = S_3^{mr}$  en la hoja II del vínculo. Esta última solución también puede ser obtenida a partir de la inversión del reloj  $IR$  de  $S_2$ , es decir  $S_4 = S_3^{mr} = S_2^{cr}$ . El siguiente diagrama resume las relaciones entre las distintas soluciones:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hoja I :} & S_1 & \xrightarrow{IM} & S_2 = S_1^{mr} \\
 & \downarrow IR & & \downarrow IR \\
 \text{Hoja II :} & S_3 = S_1^{cr} & \xrightarrow{IM} & S_4 = S_3^{mr}.
 \end{array}$$

Supongamos que tenemos un sistema dinámico compuesto de dos variables  $q_1$  y  $q_2$  con un vínculo hamiltoniano  $H(q_1, q_2, p_1, p_2) = 0$ . Supongamos ahora que existe una solución particular de las ecuaciones de movimiento que describe una trayectoria en el espacio de configuración extendido  $(q_1, q_2)$  que pasa por los puntos  $(q_1 = -1, q_2 = A)$  y  $(q_1 = 1, q_2 = B)$ . Como todavía no se ha elegido un reloj físico esta trayectoria es una trayectoria estática. Supongamos ahora que elegimos a  $q_1$  como reloj físico (para ello es necesario que para un cierto valor de  $q_1$  no existan dos valores de  $q_2$ ). Como se dijo, tenemos ahora dos opciones en lo referente a la dirección de avance del reloj físico, a saber

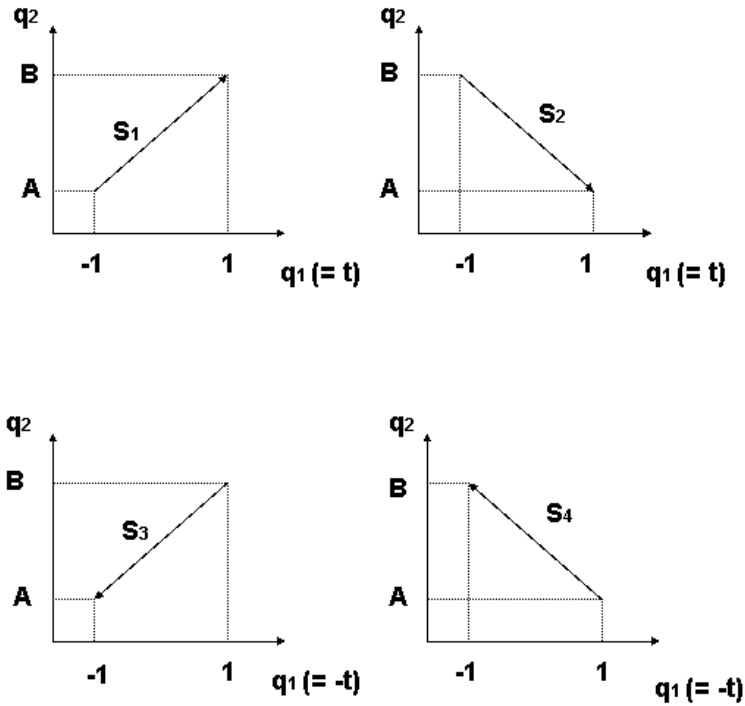


FIG. 4. Transformaciones de inversión de movimiento y de inversión del reloj.

$t = q_1$  o  $t = -q_1$ . Supongamos que elegimos a la dirección creciente de  $q_1$  como dirección creciente del tiempo  $t$ , es decir  $t = q_1$ . Solo ahora podemos afirmar que el sistema se mueve desde  $A$  hasta  $B$  a medida que el tiempo  $t (= q_1)$  avanza (solución  $S_1$  de la Figura N°4). A partir de esta primera solución  $S_1$  es posible construir otras tres soluciones por medio de las dos transformaciones definidas. En primer lugar es posible definir una solución  $S_2$  obtenida a partir de la primera por medio de una transformación de inversión de movimiento (ver Figura N°4). Esta solución está en la misma hoja I del vínculo hamiltoniano que la solución original  $S_1$ . La trayectoria correspondiente a esta solución va desde  $(t = q_1 = -1, q_2 = B)$  hasta  $(t = q_1 = 1, q_2 = A)$ . La variable dinámica  $q_2$  se mueve desde  $B$  hasta  $A$  a medida que el tiempo  $(t = q_1)$  pasa. En segundo lugar es posible definir otra solución  $S_3$  obtenida a partir de la primera por medio de una transformación de inversión de reloj (ver Figura N°4). En esta solución  $S_3 = S_1^{cr}$  el sistema se mueve desde  $B$  hasta  $A$  a medida que el tiempo  $t = -q_1$  pasa. Finalmente podemos definir otra solución  $S_4$  a partir de una transformación de inversión de movimiento de la solución  $S_3$  (ver Figura N°4). En esta solución  $S_4$  el sistema se mueve desde  $A$  hasta  $B$  a medida que el tiempo

$t = -q_1$  pasa. Estas dos últimas soluciones ( $S_3$  y  $S_4$ ) corresponden a la elección de la dirección decreciente de  $q_1$  como dirección creciente del tiempo  $t$ , es decir al fijado de gauge  $t = -q_1$ . Estas dos soluciones se encuentran en la hoja II del vínculo. Este ejemplo debería clarificar la diferencia entre la transformación de inversión de movimiento propia de la mecánica clásica y la mecánica cuántica y la transformación de inversión del reloj por la cual se pasa de una hoja a otra del vínculo hamiltoniano. La confusión entre estas dos operaciones proviene del hecho de que usualmente se piensa el problema en el espacio de configuración reducido  $\mathcal{C}$ , lo cual equivale a mirar una película en la cual no aparece ningún reloj. En el espacio de configuración reducido de nuestro ejemplo (el eje  $q_2$ ) estas cuatro soluciones se reducen efectivamente a dos.

Es importante destacar que las soluciones relacionadas por medio de una operación de inversión del reloj *poseen el mismo contenido físico*. Este contenido físico está determinado por las correlaciones dadas por las curvas  $\gamma$  (definidas por ecuaciones de la forma  $f(q_1, q_2) = 0$ ) en el espacio de configuración extendido  $\mathcal{C}_0$ . Dicho contenido físico viene expresado por proposiciones de la forma :“*Cuando  $q_1$  vale  $x$ ,  $q_2$  vale  $y$ .*” Si por ejemplo,  $q_1$  es el volumen del universo y  $q_2$  una variable que mide su anisotropía solo puede afirmarse que para cierto volumen  $q_1$  la anisotropía  $q_2$  vale tanto. Sin embargo no tiene sentido hablar del cambio en la anisotropía *a medida que el universo se expande* (o se contrae). Afirmar que una cierta solución  $\gamma$  describe un universo en expansión o contracción *es puro gauge*. Solo existen correlaciones entre el volumen  $q_1$  y la anisotropía  $q_2$ . En otras palabras, la inversión del reloj invierte el sentido de *todas* las variables. Sin embargo como no existe un *background* externo que permita referenciar dicha inversión, la misma es inobservable y el sentido de avance a lo largo de la trayectoria  $\gamma$  en el espacio de configuración extendido  $\mathcal{C}_0$  es puro gauge. Dicho en términos clásicos, *dado que no hay un background externo absoluto, solo es observable el movimiento relativo*.

La principal diferencia entre el formalismo de los sistemas parametrizados lineales y el formalismo de los sistemas parametrizados cuadráticos es que este último es invariante ante la operación de inversión del reloj. En general, cualquier solución de un sistema dinámico ordinario (la cual tiene un sentido de evolución intrínseco) puede ser considerada como una trayectoria estática  $\gamma$  si se considera formalmente al tiempo como una variable dinámica en un espacio de configuración extendido  $\mathcal{C}_0 = \{q_0 = t, q_\mu\}$ . Inversamente, cualquier trayectoria estática  $\gamma$  (la cual no posee en consecuencia un sentido de evolución



determinado *a priori*) puede ser “temporalizada” por medio de la elección de un reloj físico. Podría decirse que si el formalismo de los sistemas parametrizados lineales es adecuado para describir las soluciones de un sistema dinámico como soluciones estáticas en un espacio de configuración extendido  $\mathcal{C}_0 = \{q_0, q_\mu\}$ , el formalismo de los sistemas parametrizados cuadráticos es el adecuado para describir una trayectoria estática  $\gamma$  en  $\mathcal{C}_0 = \{q_0, q_\mu\}$  como una trayectoria dinámica en un espacio de configuración reducido  $\mathcal{C} = \{q_\mu\}$ . En el primer caso, la solución dinámica tiene un sentido de evolución privilegiado definido por el verdadero tiempo  $t$ . En consecuencia, al considerarla formalmente como una solución estática por medio del procedimiento de parametrización, es innecesario considerar un vínculo hamiltoniano con una estructura de dos hojas. Por el contrario, en el segundo caso no existe un sentido privilegiado para la “temporalización” de la trayectoria estática. Todas las variables canónicas son grados de libertad genuinos, no hay un tiempo “escondido” entre ellas. Esto tiene como consecuencia que no exista un sentido de evolución privilegiado para su temporalización. El vínculo hamiltoniano debe por lo tanto incluir los dos posibles sentidos de evolución, lo cual significa que debe ser cuadrático en todos sus momentos.

A continuación caracterizaremos la implementación de estas simetrías a nivel clásico y cuántico.

2.4.1. *Transformaciones clásicas.* Las ecuaciones de Hamilton para las variables reducidas correspondientes a la acción (2.42) son

$$\begin{aligned}\frac{dq^\mu}{d\tau} &= N \frac{\partial H}{\partial p_\mu}, \\ \frac{dp_\mu}{d\tau} &= -N \frac{\partial H}{\partial q^\mu}.\end{aligned}$$

En el gauge  $t \equiv q^0 = \tau$ ,  $p_0 = -h$  estas ecuaciones toman la forma

$$(2.43) \quad \begin{aligned}\frac{dq^\mu}{dq^0} &= \frac{\partial h}{\partial p_\mu}, \\ \frac{dp_\mu}{dq^0} &= -\frac{\partial h}{\partial q^\mu},\end{aligned}$$

donde se usó que  $N = -\frac{1}{2h}$ .

Como ya se dijo, la transformación de inversión de movimiento de una cierta solución es una solución de las *mismas* ecuaciones de movimiento.

Ahora definiremos la transformación de inversión temporal  $\{q^{cr}, p^{cr}\}$  de una solución  $\{q, p\}$ . Para ello se tendrá en cuenta que dicha transformación equivale a una transformación de inversión de movimiento

más una inversión del reloj físico  $t \rightarrow t^{cr} = -t$

$$q^{cr} (q_i^{cr} = q_f, p_i^{cr} = -p_f, t_i^{cr} = -t_f, t^{cr} = -t) = q (q_f, -p_f, -t_f, -t),$$

$$p^{cr} (q_i^{cr} = q_f, p_i^{cr} = -p_f, t_i^{cr} = -t_f, t^{cr} = -t) = p (q_f, -p_f, -t_f, -t).$$

Estas soluciones no satisfacen las ecuaciones de Hamilton (2.43) correspondientes al gauge  $t \equiv q^0 = \tau$ . Por el contrario, estas soluciones son soluciones en la otra hoja  $p_0 - h = 0$  del vínculo hamiltoniano. En otras palabras, son soluciones correspondientes al gauge  $t \equiv -q^0 = \tau$ . En efecto estas soluciones satisfacen las ecuaciones de Hamilton

$$\frac{dq^\mu}{d(-q^0)} = \frac{\partial h}{\partial p_\mu},$$

$$\frac{dp_\mu}{d(-q^0)} = -\frac{\partial h}{\partial q^\mu},$$

correspondientes al gauge  $t \equiv -q^0 = \tau$ ,  $p_0 = h$ .

2.4.2. *Transformaciones cuánticas.* En mecánica cuántica estas dos operaciones asumen formas muy sencillas. Dada una solución particular  $\Psi_+(q^\mu, q^0)$  de la ecuación de Schrödinger

$$(2.44) \quad i \frac{\partial}{\partial q^0} \Psi_+(q^\mu, q^0) = \hat{h} \Psi_+(q^\mu, q^0)$$

correspondiente a la hoja  $p_0 + h = 0$  (denotada “+”) del vínculo hamiltoniano, la solución obtenida a partir de la operación de inversión de movimiento está dada por

$$(2.45) \quad \Psi_+^{mr}(q^\mu, q^0) = T \Psi_+(q^\mu, -q^0),$$

donde  $T$  es un operador antiunitario que, en representación de coordenadas, es igual al operador de conjugación compleja  $T\Psi(q) = \Psi^*(q)$ . Es importante destacar que la solución con el movimiento invertido  $\Psi_+^{mr}$  es una solución de la *misma* ecuación de Schrödinger (2.44). Por ejemplo para el caso de la función de onda de una partícula libre

$$\Psi(x, t) = e^{-i(\omega t - kx)},$$

la transformación (2.45) transforma dicho estado en

$$\Psi^{mr}(x, t) = e^{-i(\omega t + kx)}.$$

Esta función de onda representa un estado de la misma energía que  $\Psi(x, t)$ , avanzando en la misma dirección del tiempo, pero con el momento lineal  $k$  invertido.

Podría decirse que si el operador  $T$  invierte el sentido de todas las variables  $q^i = \{q^0, q^\mu\}$ , la *substitución*  $q^0 \rightarrow -q^0$  en (2.45) *cancela dicha inversión para la variable*  $q^0$ . Dado que para efectuar esta operación es necesario invertir el signo de la variable  $q^0$  que define al

tiempo, esta operación fué usualmente denominada “*inversión temporal*”. Sin embargo, resulta ahora claro que es necesario invertir el signo de la variable elegida como tiempo, *justamente para que la operación resultante no invierta el sentido del tiempo*.

Por el contrario, la versión cuántica de la operación de inversión del reloj es efectuada *únicamente* por medio de la acción del operador antiunitario  $T$  (ahora se quiere invertir *también* el sentido de  $q^0$ ):

$$\Psi_-^{cr} (q^\mu, q^0) = T\Psi_+ (q^\mu, q^0) .$$

La solución con el reloj invertido  $\Psi_-^{cr}$  no es una solución de la ecuación de Schrödinger (2.44), sino una solución de la ecuación de Schrödinger correspondiente a la hoja  $p_0 - h = 0$  del vínculo hamiltoniano (denotada “-”):

$$(2.46) \quad -i \frac{\partial}{\partial q^0} \Psi_- (q^\mu, q^0) = \hat{h} \Psi_- (q^\mu, q^0) .$$

Esta ecuación es una ecuación de Schrödinger ordinaria en el tiempo  $t = -q^0$ .

Es importante remarcar que cada hoja del vínculo hamiltoniano ( $p + h = 0$  y  $p - h = 0$ ) corresponde a soluciones de energía positiva. Lo que cambia al pasar de una hoja a la otra es el sentido de avance del reloj físico y no el signo de la energía. De hecho, si  $h \neq h(t)$  las soluciones estacionarias de la ecuación de Schrödinger (2.44) son

$$\Psi_+^E (q^\mu, q^0) = e^{-iEq^0} \varphi (q_\mu) = e^{-iEt} \varphi (q_\mu) ,$$

mientras que las soluciones estacionarias de la ecuación de Schrödinger (2.46) son

$$\Psi_-^E (q^\mu, q^0) = e^{iEq^0} \varphi^* (q_\mu) = e^{-iEt} \varphi^* (q_\mu) ,$$

lo cual muestra que ambos conjuntos de soluciones son soluciones de energía positiva para las dos posibles elecciones del reloj físico ( $t = q^0$  o  $t = -q^0$ ).

Una consecuencia importante del presente análisis es que la simetría asociada a la operación de inversión del reloj *no depende de la separación efectiva de un reloj físico*. A nivel cuántico dicha transformación asume la forma de una conjugación compleja. A los efectos de efectuar esta operación no es necesario haber elegido una variable que defina al tiempo  $t$ . Por el contrario, una transformación cuántica de inversión de movimiento depende de la separación efectiva de un reloj físico. Para efectuar dicha transformación es en efecto necesario elegir una variable canónica para definir el tiempo  $t$ , ya que hay que substituir  $t$  por  $-t$  en la ecuación de Schrödinger (ademas de efectuar una conjugación compleja).

## 2.5. Modelos cosmológicos.

En esta sección ejemplificaremos las consideraciones precedentes con algunos modelos cosmológicos de minisuperespacios. Dichos modelos provienen en su mayoría de la teoría de cuerdas bosónicas cerradas a bajas energías (ver Ref.[25] para un *review* general). También se considerará la cuantificación canónica del modelo de Taub estudiada en Ref.[24] (ver también Ref.[20]).

2.5.1. *Tiempo intrínseco.* Comenzaremos considerando un vínculo hamiltoniano (escaleado) de la forma

$$(2.47) \quad -p_1^2 + p_2^2 + Ae^{(aq^1+bq^2)} = 0,$$

con  $a \neq b$ . Este vínculo hamiltoniano corresponde a varios modelos cosmológicos dilatónicos (ver ecs. (4.123) y (4.124) en el Apéndice A2), a saber a los casos  $\lambda = 0, k = 0, c \neq 0$ ;  $\lambda = 0, k = \pm 1, c = 0$ ;  $\lambda \neq 0, k = 0, c = 0$ . Se puede ver que el cambio de coordenadas

$$x \equiv \frac{1}{2}(a\Omega + b\phi), \quad y \equiv \frac{1}{2}(b\Omega + a\phi)$$

conduce a un vínculo de la forma

$$(2.48) \quad H = -p_x^2 + p_y^2 + \zeta e^{2x} = 0,$$

con  $\text{sgn}(\zeta) = \text{sgn}(A/(a^2 - b^2))$ . La ecuación de Wheeler-DeWitt correspondiente a este vínculo es

$$(2.49) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \zeta e^{2x} \right) \Psi_\omega(x, y) = 0.$$

La solución general para el caso  $\zeta > 0$  es

$$(2.50) \quad \begin{aligned} \Psi_\omega(x, y) &= [a_+(\omega)e^{i\omega y} + a_-(\omega)e^{-i\omega y}] \\ &\times [b_+(\omega)J_{i\omega}(\sqrt{|\zeta|}e^x) + b_-(\omega)N_{i\omega}(\sqrt{|\zeta|}e^x)], \end{aligned}$$

con  $J_{i\omega}$  y  $N_{i\omega}$  las funciones de Bessel y Neumann de orden imaginario respectivamente. Por el contrario, para  $\zeta < 0$ , la solución general es

$$(2.51) \quad \begin{aligned} \Psi_\omega(x, y) &= [a_+(\omega)e^{i\omega y} + a_-(\omega)e^{-i\omega y}] \\ &\times [b_+(\omega)I_{i\omega}(\sqrt{|\zeta|}e^x) + b_-(\omega)K_{i\omega}(\sqrt{|\zeta|}e^x)], \end{aligned}$$

donde  $I_{i\omega}$  y  $K_{i\omega}$  son funciones modificadas de Bessel. La obtención de dichas soluciones no finaliza el proceso de cuantificación ya que todavía no se sabe que condiciones de contorno hay que imponer sobre el correspondiente espacio de soluciones.

En lugar de resolver la ecuación de Wheeler-DeWitt, se podría haber reducido el sistema por medio de la identificación de un reloj físico y

la resolución de la correspondiente ecuación de Schrödinger. En efecto este modelo admite un reloj físico intrínseco ya que el potencial no se anula para valores finitos de las coordenadas. Dependiendo del signo de la constante  $\zeta$  en el vínculo (2.48), estos modelos admiten como reloj físico global a las variables  $x$  o  $y$ . Para el caso  $\zeta > 0$  el tiempo estará definido por la variable  $t = \pm x$ , siendo el Hamiltoniano reducido (dependiente del tiempo)

$$h = \sqrt{p_y^2 + \zeta e^{2x}}.$$

Si por el contrario  $\zeta < 0$ , el reloj físico será  $t = \pm y$  y el Hamiltoniano reducido (independiente del tiempo) estará dado por

$$h = \sqrt{p_x^2 - \zeta e^{2x}}.$$

En ambos casos puede elegirse como dirección de avance del tiempo así definido a cualquiera de los signos de la variable elegida como reloj ( $\pm x$  para  $\zeta > 0$  o  $\pm y$  para  $\zeta < 0$ ).

En el primer caso,  $\zeta > 0$  ( $t = \pm x$ ), la ecuación de Schrödinger correspondiente es

$$i \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, y) = \pm \left( -\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \zeta e^{2x} \right)^{1/2} \Psi(x, y).$$

En el segundo caso ( $\zeta < 0$ ,  $t = \pm y$ ) la ecuación de Schrödinger es

$$i \frac{\partial}{\partial y} \Psi(x, y) = \pm \left( -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \zeta e^{2x} \right)^{1/2} \Psi(x, y).$$

En ambos casos se tiene un par de espacios de Hilbert asociados a las dos hojas del vínculo hamiltoniano, cada uno con su correspondiente ecuación de Schrödinger. Si se considera a estas ecuaciones como ecuaciones de Schrödinger ordinarias, las variables elegidas como reloj físico cumplen el rol de parámetro temporal externo. En ese caso, se tendrá en cada uno de dichos espacios de Hilbert el producto interno ordinario definido positivo, lo cual permite aplicar la interpretación probabilística usual de las funciones de onda. Sin embargo esta interpretación no es realista ya que las variables elegidas como reloj físico son genuinas variables dinámicas por lo que no resulta consistente no cuantificarlas. En otras palabras, la cuantificación de una teoría con un reloj físico debería contemplar también la cuantificación del reloj.

Es importante destacar que en estos modelos los relojes físicos ( $t = \pm x$  para  $\zeta > 0$  o  $t = \pm y$  para  $\zeta < 0$ ) pueden ser elegidos entre las coordenadas originales, siendo en consecuencia innecesario efectuar transformaciones canónicas. En casos como este la cuantificación por medio

de una ecuación de Schrödinger puede ser aplicada directamente. Sin embargo esta situación no es representativa del caso general.

También es importante destacar que los casos  $\zeta > 0$  y  $\zeta < 0$  no son simétricos: si en el caso  $\zeta < 0$  ( $t = \pm y$ ) el Hamiltoniano reducido  $h = h(x, p_x)$  es independiente del tiempo, en el caso  $\zeta > 0$  ( $t = \pm x$ ) el Hamiltoniano reducido  $h = h(x, p_y)$  es dependiente del tiempo.

Para el caso  $\zeta < 0$ , las soluciones estacionarias a las ecuaciones de Schrödinger correspondientes a ambas hojas ( $t = \pm y$ ) son

$$(2.52) \quad \Psi_{\pm}^{\omega}(x, y) = e^{\mp i\omega y} \left[ b_{+}(\omega) I_{i\omega}(\sqrt{|\zeta|}e^x) + b_{-}(\omega) K_{i\omega}(\sqrt{|\zeta|}e^x) \right].$$

En lo que respecta al factor dependiente de  $x$ , pueden aplicarse las condiciones de contorno habituales, es decir exigir que las funciones de onda decaigan en las zonas clásicamente prohibidas. Esta prescripción selecciona las funciones  $K_{i\omega}(\sqrt{|\zeta|}e^x)$ . Es claro a partir de esta expresión que el espacio de soluciones (2.51) de la ecuación de Wheeler–DeWitt para  $\zeta < 0$  es la suma directa de los espacios de soluciones de las ecuaciones de Schrödinger correspondientes a cada hoja del vínculo hamiltoniano. Para el caso en el que el Hamiltoniano reducido  $h$  depende del tiempo ( $\zeta > 0, t = \pm x$ ) la relación entre ambos espacios de soluciones no es directa debido a la presencia de ambigüedades en el ordenamiento de los operadores. En ese caso no existe una equivalencia directa entre las soluciones de la ecuación de Wheeler–DeWitt y las soluciones de la ecuación de Schrödinger (ver Sección N°2.6).

Como consecuencia de una correcta elección de los relojes físicos, en ambos casos el Hamiltoniano reducido  $h$  es real, por lo que el operador de evolución es auto-adjunto y la evolución unitaria. Por el contrario, una incorrecta elección de los relojes, como por ejemplo  $t = \pm x$  para el caso  $\zeta < 0$ , conduce a un Hamiltoniano reducido que no es real para todos los valores de las variables, siendo la teoría resultante no unitaria. Otro aspecto remarcable es que los relojes físicos no están necesariamente asociados a grados de libertad *geométricos*. Por ejemplo, para el caso  $\lambda \neq 0, k = 0, c = 0$  la coordenada geométrica  $\Omega$  es un reloj físico legítimo y el Hamiltoniano reducido depende únicamente del campo dilatónico y del campo antisimétrico (este último a través de la constante  $\lambda$ ). Por el contrario, para el caso  $\lambda = 0, k = 1, c = 0$ , el reloj físico es el campo dilatónico, mientras que el Hamiltoniano depende solo de la geometría (ver ecs. (4.123) y (4.124) en el Apéndice A2).

2.5.2. *Tiempo extrínseco.* En Ref.[24] se estudió la cuantificación del modelo homogéneo y anisótropo de Taub. Dicho modelo es particularmente interesante ya que, aún cuando no es posible separar un tiempo

intrínseco, puede ser reducido por medio de un tiempo extrínseco con un Hamiltoniano reducido independiente del tiempo. El espacio de configuración correspondiente está definido por una variable  $\beta_+$  que mide la anisotropía y una variable  $\Omega$  que mide el volumen del universo. El vínculo hamiltoniano de dicho modelo es

$$(2.53) \quad H = -p_\Omega^2 + p_+^2 + 12\pi^2 e^{-4\Omega} (e^{-8\beta_+} - 4e^{-2\beta_+}),$$

mientras que los vínculos de los momentos son idénticamente satisfechos. El vínculo hamiltoniano (2.53) no tiene un potencial definido positivo, por lo cual la variable  $\Omega$  no puede ser usada como tiempo intrínseco para la reducción del sistema. Sin embargo, por medio de la transformación de coordenadas

$$\begin{aligned} \Omega &= v - 2u, \\ \beta_+ &= u - 2v, \end{aligned}$$

el vínculo hamiltoniano (2.53) puede ser llevado a la forma

$$(2.54) \quad H = \frac{1}{6} (p_v^2 + 36\pi^2 e^{12v}) - \frac{1}{6} (p_u^2 + 144\pi^2 e^{6u}).$$

En Ref.[24] se mostró que por medio de la transformación canónica

$$\begin{aligned} q &= \text{Arcsinh} \left( -\frac{p_v}{6\pi} e^{-6v} \right), \\ p_q^2 &= \frac{1}{36} (p_v^2 + 36\pi^2 e^{12v}), \end{aligned}$$

con función generatriz

$$(2.55) \quad F_1(v, q) = -\pi e^{6v} \sinh q,$$

es posible llevar el vínculo hamiltoniano a la forma

$$(2.56) \quad H = 6p_q^2 - \frac{1}{6} (p_u^2 + 144\pi^2 e^{6u}).$$

El sistema tiene entonces un reloj físico dado por la variable  $q$  con un Hamiltoniano reducido  $h$  independiente del tiempo. Es necesario elegir entonces cual dirección del reloj  $q$  será utilizada como dirección de tiempo creciente. La expresión (2.56) puede ser factorizada como

$$(2.57) \quad H = \left( 6p_q + \sqrt{p_u^2 + \pi^2 e^{6u}} \right) \left( 6p_q - \sqrt{p_u^2 + 144\pi^2 e^{6u}} \right).$$

El vínculo  $H = 0$  se satisface si alguno de los factores es nulo. La elección de uno de dichos factores equivale a elegir cual dirección del reloj  $q$  será considerada como dirección de tiempo creciente. El otro factor tendrá sobre la superficie de vínculo un signo definido por lo que es posible reescalar el vínculo de modo tal que el nuevo vínculo sea lineal en  $p_q$ .

Este modelo puede entonces ser cuantificado tanto por medio de una ecuación de Wheeler–DeWitt (como en Ref.[64]), como por medio de las ecuaciones de Schrödinger correspondientes a cada hoja del vínculo factorizado (2.57). Es importante remarcar que esta reducción a un vínculo factorizable no es directa, dado que fué necesario utilizar una transformación canónica no trivial. Si esta transformación canónica no fuese conocida, uno estaría obligado a trabajar con las soluciones de la ecuación de Wheeler–DeWitt y a imponer condiciones de contorno sobre dicho espacio de soluciones.

Otro ejemplo que puede ser resuelto siguiendo la prescripción propuesta en Ref.[24] deriva del modelo cosmológico dilatónico definido por el vínculo hamiltoniano escaleado (ver Apéndice A2)

$$(2.58) \quad H = -p_\Omega^2 + p_\phi^2 + 2ce^{6\Omega+\phi} + \lambda^2 e^{-2\phi} = 0.$$

Este modelo corresponde a un universo plano con un campo dilatónico  $\phi$  y un campo antisimétrico no nulo  $B_{\mu\nu}$  proveniente del sector  $NS$ - $NS$  de las teorías efectivas de cuerdas. Este modelo no puede ser resuelto separando variables y en el caso  $c < 0$  el potencial puede anularse, por lo que no admite un tiempo intrínseco. Sin embargo, dado que este modelo proviene de la teoría de cuerdas a bajas energías, lo cual tiene sentido en el límite  $\phi \rightarrow -\infty$ , el factor  $e^\phi \equiv V(\phi)$  en el primer término del potencial verifica  $V(\phi) = V'(\phi) \ll 1$ . Puede entonces estudiarse el vínculo que se deriva de reemplazar  $ce^\phi$  por una constante  $\bar{c}$  que satisface  $|\bar{c}| \ll |c|$ . El nuevo vínculo es entonces

$$(2.59) \quad H = -p_\Omega^2 + p_\phi^2 + 2\bar{c}e^{6\Omega} + \lambda^2 e^{-2\phi} = 0.$$

La ecuación de Wheeler–DeWitt asociada a este vínculo es

$$(2.60) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial \Omega^2} - \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + 2\bar{c}e^{6\Omega} + \lambda^2 e^{-2\phi} \right) \Psi(\Omega, \phi) = 0,$$

y sus soluciones son

$$(2.61) \quad \begin{aligned} \Psi_\omega(\Omega, \phi) &= [a(\omega)I_{i\omega}(|\lambda|e^{-\phi}) + b(\omega)K_{i\omega}(|\lambda|e^{-\phi})] \\ &\times [c(\omega)I_{i\omega/2}(\sqrt{|2\bar{c}|}e^{3\Omega}) + d(\omega)K_{i\omega/2}(\sqrt{|2\bar{c}|}e^{3\Omega})], \end{aligned}$$

donde  $I_\nu$  y  $K_\nu$  son funciones modificadas de Bessel.

En principio no se sabe cuales son las condiciones de contorno a ser impuestas sobre dichas soluciones. Si se utiliza el criterio standard, los términos que incluyen a las funciones  $I_\nu$  deberían ser descartados, ya que dichas soluciones divergen en las regiones clásicamente prohibidas. De hecho, esta ha sido la elección para el caso del modelo de Taub en Ref.[64]. Sin embargo, como se mostró en Ref.[24], las funciones



$I_{i\omega}(|\lambda|e^{-\phi})$  no deben ser descartadas, ya que en el modelo reducido el dilatón  $\phi$  está asociado al reloj físico usado para reducir el modelo.

Por medio de una transformación canónica análoga a la utilizada en Ref.[24] para el modelo de Taub, el vínculo puede ser llevado a la forma

$$(2.62) \quad H = -p_\Omega^2 + p_s^2 + 2\bar{c}e^{6\Omega} = 0,$$

con

$$(2.63) \quad \begin{aligned} s &= \pm \operatorname{arcsinh} \left( \frac{p_\phi e^\phi}{|\lambda|} \right), \\ p_s &= \pm |\lambda| e^{-\phi} \cosh s. \end{aligned}$$

Para el caso  $\bar{c} < 0$ , el momento  $p_s$  no se anula y el reloj físico es  $t = \pm s$ . De acuerdo a la definición de la nueva variable  $s$  el reloj  $t = \pm s$  es una función tanto de  $\phi$  como de  $p_\phi$ , siendo en consecuencia un *tiempo extrínseco*. Este reloj físico no está entonces asociado a la métrica, sino al campo de materia.

El vínculo (2.62) puede ser ahora factorizado en dos hojas

$$(2.64) \quad H = \left( p_s - \sqrt{p_\Omega^2 - 2\bar{c}e^{6\Omega}} \right) \left( p_s + \sqrt{p_\Omega^2 - 2\bar{c}e^{6\Omega}} \right) = 0$$

y llevado por medio de un reescalo a un vínculo lineal en  $p_s$ . Si se impone la condición  $p_s = h = \sqrt{p_\Omega^2 + |2\bar{c}|e^{6\Omega}}$ , entonces el reloj físico estará dado por la variable  $-s$  ( $t = -s$  y  $p_t = -p_s$ ). Si por el contrario se impone la condición  $p_s = -h = -\sqrt{p_\Omega^2 + |2\bar{c}|e^{6\Omega}}$ , entonces el reloj físico será la variable  $s$  ( $t = s$  and  $p_t = p_s$ ). En ambos casos el Hamiltoniano reducido  $h$  no depende del tiempo  $t = \pm s$ . Esto asegura la equivalencia a nivel cuántico del vínculo factorizado (2.64) y del vínculo original (2.62). Las ecuaciones de Schrödinger asociadas a las elecciones  $t = \pm s$  son

$$(2.65) \quad \pm i \frac{\partial}{\partial s} \Psi_\pm(\Omega, s) = \left( -\frac{\partial^2}{\partial \Omega^2} + |2\bar{c}|e^{6\Omega} \right)^{1/2} \Psi_\pm(\Omega, s),$$

donde las soluciones  $\Psi_\pm$  corresponden a las hojas  $K_\pm = p_s \pm h = 0$ . Dado que dichas funciones de onda están relacionadas entre sí por medio de una transformación de inversión del reloj físico, las mismas satisfacen  $\Psi_+ = (\Psi_-)^*$ . Como el Hamiltoniano reducido  $\hat{h}$  no depende del tiempo, puede proponerse una solución general (válida para las dos hojas) de la forma  $\Psi_E(\Omega, t) = \varphi_E(\Omega) e^{-iEt}$ , donde  $\varphi_E(\Omega)$  satisface la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo  $\hat{h}(\Omega) \varphi_E(\Omega) = E \varphi_E(\Omega)$ . Dado que  $\hat{h}$  es un operador con una raíz cuadrada, es necesario usar el teorema espectral y resolver la ecuación derivada

$\hat{h}^2(\Omega)\varphi_E(\Omega) = E^2\varphi_E(\Omega)$  (ver Ref.[15]). La solución general de esta ecuación es

$$(2.66) \quad \varphi_\omega(\Omega) = \left[ c(\omega)I_{i\omega/2}\left(\sqrt{|2\bar{c}|}e^{3\Omega}\right) + d(\omega)K_{i\omega/2}\left(\sqrt{|2\bar{c}|}e^{3\Omega}\right) \right].$$

Las funciones  $I_{i\omega/2}\left(\sqrt{|2\bar{c}|}e^{3\Omega}\right)$  tiene que ser descartadas ya que divergen en la zona clásicamente prohibida  $\Omega \rightarrow \infty$ . Las soluciones estacionarias de las ecuaciones de Schrödinger (2.65) son entonces de la forma

$$(2.67) \quad \Psi_\pm^\omega(\Omega, s) = d(\omega)K_{i\omega/2}\left(\sqrt{|2\bar{c}|}e^{3\Omega}\right) e^{\mp i\omega s}.$$

## 2.6. Condiciones de contorno para la ecuación de Wheeler-DeWitt.

Como se mostró en los ejemplos precedentes, existen principalmente dos esquemas de cuantificación. Siendo la ecuación de Wheeler-DeWitt una ecuación hiperbólica, tiene el doble de soluciones que la ecuación parabólica de Schrödinger (lineal en  $\frac{\partial}{\partial t}$ ). Si el Hamiltoniano reducido  $h$  no depende del tiempo, el espacio de soluciones de la ecuación de Wheeler-DeWitt  $\hat{H}\Psi = 0$  será simplemente la suma directa de los espacios de soluciones de las ecuaciones de Schrödinger correspondientes a las dos hojas del vínculo hamiltoniano

$$Ker \hat{H} = Ker \hat{K}_+ \oplus Ker \hat{K}_-,$$

donde  $\hat{K}_+$  y  $\hat{K}_-$  son los operadores correspondientes a los factores  $p_0 + h$  y  $p_0 - h$  respectivamente.

Podría suceder sin embargo que, aún cuando el Hamiltoniano reducido  $h$  sea independiente del tiempo, la correspondencia entre las soluciones de la ecuación de Wheeler-DeWitt y las soluciones de la ecuación de Schrödinger no sea directa. Para el modelo cosmológico dilatónico descrito por el vínculo hamiltoniano (2.59), el pasaje a la forma factorizada (2.64) está mediado por la transformación canónica (2.63). Las soluciones (2.61) de la ecuación de Wheeler-DeWitt (2.60) y las soluciones (2.67) de las ecuaciones de Schrödinger (2.65) no están expresadas en términos de las mismas variables ( $(\Omega, \phi)$  y  $(\Omega, s)$  respectivamente). En Ref.[24], esta situación fué analizada para el modelo de Taub. En dicho trabajo se propuso un criterio para imponer condiciones de contorno sobre el espacio de soluciones de la ecuación de Wheeler-DeWitt para aquellos casos en los que no se sabe como reducir el sistema. Describiremos ahora dicha propuesta.

En Ref.[24] se propuso que las soluciones de la ecuación de Wheeler-DeWitt (2.60) pueden ser puestas en relación con las soluciones de las

ecuaciones de Schrödinger (2.65) por medio de una versión cuántica de la transformación canónica clásica (2.63) utilizada para reducir el sistema. Bajo ciertas condiciones dos sistemas cuánticos cuyos Hamiltonianos son canónicamente equivalentes a nivel clásico, tienen como estados cuánticos funciones de onda que pueden ser puestas en relación por medio de las correspondientes “transformaciones canónicas cuánticas”. Esta versión cuántica de las transformaciones canónicas clásicas puede ser entendida como una generalización de la transformada de Fourier. Es en efecto posible considerar a la transformada de Fourier como la versión cuántica de la transformación canónica clásica que intercambia coordenadas y momentos. La función generatriz de dicha transformación canónica es  $F_1(q, Q) = Qq$  y las ecuaciones que definen dicha transformación son

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = Q, \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = -q.$$

La transformada de Fourier

$$\Psi(q) = N \int dp e^{ipq} \Phi(p)$$

puede ser expresada como

$$(2.68) \quad \Psi(q) = N \int dQ e^{iF_1(q,Q)} \Phi(Q).$$

Es natural preguntarse entonces si dicha expresión sigue siendo válida para una transformación canónica dada por una función generatriz cualquiera  $F_1(q, Q)$ . Si este fuese el caso, se dispondría de una *transformada de Fourier generalizada* entre representaciones cuánticas asociadas a sistemas canónicamente equivalentes a nivel clásico. Se tendría entonces el siguiente esquema

$$\begin{array}{ccc} H(q) & \longrightarrow & \Psi(q) \\ \downarrow F_1(q,Q) & & \uparrow \int dQ e^{iF_1(q,Q)} \\ H(Q) & \longrightarrow & \Phi(Q). \end{array}$$

En general este no es el caso: ciertas condiciones deben cumplirse para que dichas transformaciones generalizadas sean válidas. En Ref. [42] se mostró que la expresión (2.68) es válida si la siguiente condición se satisface

$$(2.69) \quad H_q \left( -i \frac{\partial}{\partial q}, q \right) e^{iF_1(q,Q)} = H_Q \left( i \frac{\partial}{\partial Q}, Q \right) e^{iF_1(q,Q)}$$

(donde se asumen también ciertas condiciones de contorno en los límites de integración). Si la transformación canónica está definida por medio

de otro tipo de función generatriz ( $F_2$ ,  $F_3$  or  $F_4$ ), expresiones análogas pueden ser utilizadas.

En particular, la transformación canónica (2.63) utilizada para pasar del vínculo hamiltoniano (2.59) al vínculo hamiltoniano factorizado (2.64) satisface este requerimiento. Las soluciones de las ecuaciones de Schrödinger (2.65) pueden entonces ser puestas en relación con las soluciones de la ecuación de Wheeler-DeWitt (2.60) por medio de la transformada de Fourier generalizada.

Por medio de este formalismo puede estudiarse ahora el problema de imponer condiciones de contorno en el espacio de soluciones de la ecuación de Wheeler-DeWitt (2.60). En primer lugar, hay que notar que la dependencia en  $\Omega$  es la misma para ambas representaciones ( $(\Omega, \phi)$  y  $(\Omega, s)$ ). Esto significa que se pueden aplicar, sobre el factor que depende de  $\Omega$  en las soluciones (2.61) de la ecuación de Wheeler-DeWitt, las mismas condiciones de contorno que se impusieron previamente sobre las soluciones de las ecuaciones de Schrödinger. En efecto, dada nuestra elección del reloj físico como función de  $\phi$  y  $p_\phi$  (ver (2.63)), la variable  $\Omega$  es una auténtica variable dinámica. De esta manera pueden descartarse en la solución (2.61) las funciones  $I_{i\omega/2} \left( \sqrt{|2\bar{c}|} e^{3\Omega} \right)$ , dado que divergen en la zona clásicamente prohibida  $\Omega \rightarrow \infty$ . A continuación es necesario imponer condiciones de contorno sobre el factor que depende de  $\phi$  en (2.61). Es necesario entonces decidir si se descartarán las funciones  $I_{i\omega} (|\lambda|e^{-\phi})$  o las funciones  $K_{i\omega} (|\lambda|e^{-\phi})$ . El criterio utilizado es que las soluciones físicas serán aquellas funciones cuyas transformadas de Fourier generalizadas coinciden con los factores  $e^{-i\omega s}$  o  $e^{i\omega s}$  en las soluciones  $\Psi_\pm$  (2.67) de las ecuaciones de Schrödinger (2.65). Se podría suponer que las soluciones correctas son aquellas que tienden a cero en la zona clásicamente prohibida  $\phi \rightarrow -\infty$ , es decir las funciones  $K_{i\omega} (|\lambda|e^{-\phi})$ . Pero la transformada de estas funciones es una combinación lineal de la forma

$$ae^{i\omega s} + be^{-i\omega s},$$

por lo que deben ser descartadas. Si por el contrario se aplica la transformada de Fourier generalizada a las funciones  $I_{\pm i\omega} (|\lambda|e^{-\phi})$  se obtiene la correspondencia

$$I_{\pm i\omega} (|\lambda|e^{-\phi}) \leftrightarrow e^{\mp i\omega s}.$$

Las funciones  $I_{i\omega} (|\lambda|e^{-\phi})$  y  $I_{-i\omega} (|\lambda|e^{-\phi})$  representan entonces los estados de energía positiva correspondientes a las elecciones del reloj físico  $t = s$  y  $t = -s$  respectivamente. Si elegimos  $t = s$ , la solución de

la ecuación de Wheeler-DeWitt (2.60) es entonces

$$(2.70) \quad \Psi_{\omega}(\Omega, \phi) = \tilde{a}(\omega) I_{i\omega}(|\lambda|e^{-\phi}) K_{i\omega/2}\left(\sqrt{|2\bar{c}|}e^{3\Omega}\right).$$

Sin embargo el verdadero problema en el caso general es el de definir condiciones de contorno para las soluciones de la ecuación de Wheeler-DeWitt *cuando no se sabe como reducir el sistema* o bien *cuando ambas cuantificaciones no son equivalentes debido al problema del ordenamiento de los operadores* (para hamiltonianos reducidos dependientes del tiempo). Si se tiene un sistema reducido con su correspondiente ecuación de Schrödinger como en el modelo de Taub, entonces ya no es necesario pasar por la “representación” de Wheeler-DeWitt. Sin embargo, dado que para el modelo de Taub ambos conjuntos de soluciones son conocidos, su análisis es de gran importancia a los efectos de comprender que tipo de condiciones de contorno es necesario imponer sobre la ecuación Wheeler-DeWitt para el caso general. Para los casos en los que se sabe como reducir el sistema, estas condiciones de contorno generales deberían seleccionar los mismos estados cuánticos que la cuantificación del modelo reducido (módulo los cambios de representación correspondientes). En Refs.[20, 24] se estudió dicho problema. Describiremos ahora estos resultados.

Supongase que se tiene el siguiente vínculo hamiltoniano escaleado

$$(2.71) \quad H = p_0^2 + V(q^0) - h^2(q^\mu, p_\mu),$$

con  $V(q^0) > 0$ . En otras palabras, supongase que no existe un acoplamiento no minimal entre cierta variable  $q^0$  y el resto de las variables canónicas  $q^\mu$ . Dada esta forma del vínculo hamiltoniano, las soluciones de la correspondiente ecuación de Wheeler-DeWitt tendrán la forma

$$\Psi(q^0, q^\mu) = \Theta(q^0) \Phi(q^\mu).$$

Si el potencial  $V(q^0)$  fuese idénticamente nulo, podría elegirse la variable  $q^0$  como reloj físico. Puede suponerse entonces que un reloj físico adecuado es una cierta función de  $q^0$  que, en la región donde  $V(q^0) \rightarrow 0$ , coincide con  $q^0$ . Sería de esperar entonces que las soluciones físicas  $\Psi(q^0, q^\mu)$  de la ecuación de Wheeler-DeWitt correspondiente a (2.71) tiendan, en la región donde  $V(q^0) \rightarrow 0$ , a funciones de onda de la forma

$$e^{-iEq^0} \Phi(q^\mu),$$

con  $\Phi(q^\mu)$  tendiendo a cero en la región clásicamente prohibida asociada a  $q^\mu$ . En otros términos, si no se sabe como separar un reloj físico, pero se sabe que una cierta variable  $q^0$  es un reloj físico *en una cierta zona* con un Hamiltoniano reducido  $h$  independiente del tiempo,

entonces se pueden imponer como condiciones de contorno que los estados físicos deben ser los estados que tienden en esa región a funciones con un factor de la forma  $e^{-iEq^0}$ .

La aplicación de este criterio a las soluciones de la ecuación de Wheeler-DeWitt (2.60) permite seleccionar a los estados cuánticos correctos, es decir a los estados cuánticos (2.70) correspondientes a la cuantificación del modelo reducido (módulo un cambio de representación). El vínculo hamiltoniano (2.59) tiene en efecto la forma (2.71). En la región donde el término de potencial  $\lambda^2 e^{-2\phi}$  va a cero, es decir en la región  $\phi \rightarrow \infty$ , la variable  $\phi$  es un reloj físico. De acuerdo con el criterio propuesto, hay que seleccionar aquellas funciones que tienden en la región  $\phi \rightarrow \infty$  a funciones con un factor  $e^{-iE\phi}$ . Si se consideran las expresiones asintóticas de las funciones  $K_{i\omega}(|\lambda|e^{-\phi})$  y  $I_{\pm i\omega}(|\lambda|e^{-\phi})$  en ese límite, se ve que la primera tiende a una combinación lineal de la forma  $ae^{iE\phi} + be^{-iE\phi}$ , mientras que  $I_{\pm i\omega}(|\lambda|e^{-\phi})$  tiende a funciones de la forma  $e^{\pm iE\phi}$ .

Por otra parte, la relación entre estos dos formalismos de cuantificación se torna problemática cuando el Hamiltoniano reducido  $h$  depende del tiempo. Mientras que los vínculos  $H = p_0^2 - h^2 = 0$  y  $H = (p_0 + h)(p_0 - h) = 0$  son clásicamente equivalentes, a nivel cuántico esta equivalencia se rompe si el Hamiltoniano reducido  $h$  depende de la variable elegida como reloj físico. En efecto, una función de onda en el núcleo de alguno de los operadores  $\widehat{K}_+$  o  $\widehat{K}_-$  correspondientes a los factores  $(p_0 + h)$  y  $(p_0 - h)$  respectivamente (es decir una solución de la ecuación de Schrödinger), no es necesariamente aniquilada por el operador  $\widehat{H}$  asociado a la ecuación de Wheeler-DeWitt. En efecto, si el Hamiltoniano reducido  $h$  depende del tiempo el producto de los operadores de Schrödinger  $\widehat{K}_+$  y  $\widehat{K}_-$  no es igual al operador de Wheeler-DeWitt  $\widehat{H}$ . Los dos posibles ordenamientos de los operadores de Schrödinger son

$$\widehat{K}_\pm \widehat{K}_\mp = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hat{h}^2 \mp \left[ -i \frac{\partial}{\partial t}, \hat{h} \right].$$

Si  $h \neq h(t)$  (i.e.,  $[p_t, h] = 0$ ), entonces

$$\widehat{K}_+ \widehat{K}_- = \widehat{K}_- \widehat{K}_+ = \widehat{H} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hat{h}^2.$$

Si  $h = h(t)$ , entonces el operador de Wheeler-DeWitt  $\widehat{H}$  es igual a

$$\widehat{H} = \frac{1}{2} \left( \widehat{K}_+ \widehat{K}_- + \widehat{K}_- \widehat{K}_+ \right).$$

Las soluciones de las ecuaciones de Schrödinger  $\widehat{K}_\pm \Psi_\pm = 0$  no son entonces soluciones de la ecuación de Wheeler-DeWitt  $\widehat{H}\Psi = 0$  cuando

el Hamiltoniano reducido  $h$  depende del tiempo. De esta manera, un vínculo con un potencial dependiente del tiempo constituye una obstrucción a la existencia de una correspondencia directa entre las soluciones de la ecuación de Wheeler-DeWitt y las ecuaciones de Schrödinger<sup>13</sup>.

Esta no equivalencia entre cuantificaciones distintas debido al problema del ordenamiento de los operadores, no es sin embargo un problema específico de la gravedad cuántica canónica, sino un problema asociado a toda cuantificación de una teoría clásica. La forma particular en que dicho problema aparece en gravedad cuántica canónica establece una diferencia entre una cuantificación que permite una interpretación en términos de evoluciones temporales (cuantificación por medio de una ecuación de Schrödinger) y una cuantificación que no permite dicha interpretación (cuantificación por medio de una ecuación de Wheeler-DeWitt).

Un ejemplo de un sistema con un Hamiltoniano reducido  $h$  dependiente del tiempo está dado por el modelo cosmológico dilatónico correspondiente al vínculo hamiltoniano (2.48) para  $\zeta > 0$ . La forma factorizada de dicho vínculo es

$$H = \left(-p_x + \sqrt{p_y^2 + \zeta e^{2x}}\right) \left(p_x + \sqrt{p_y^2 + \zeta e^{2x}}\right) = 0,$$

siendo el potencial dependiente del tiempo para  $t = \pm x$ . En consecuencia, a pesar de que a nivel clásico este producto es equivalente al vínculo (2.48), a nivel cuántico ambos vínculos difieren en términos asociados

<sup>13</sup>Como se explica en Ref.[15], si el Hamiltoniano reducido  $h$  depende del tiempo la solución a la ecuación de Schrödinger  $i \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = \hat{h}(x,p,t) \Psi(x,t)$  toma la forma

$$(2.72) \quad \Psi(x,t) = T \left[ e^{-i \int_{t_0}^t \hat{h}(t') dt'} \right] \Psi(x,t_0),$$

donde  $T$  es el operador de ordenamiento temporal. Si la condición

$$(2.73) \quad [h(t), h(t')] = 0$$

se satisface, la expresión (2.72) asume la forma

$$\Psi(x,t) = e^{-i \int_{t_0}^t \hat{h}(t') dt'} \Psi(x,t_0).$$

La condición (2.73) implica también que existe un conjunto completo conservado de autoestados del operador hamiltoniano  $\hat{h}(t)$ , es decir una base de estados que son autoestados de  $\hat{h}$  a todo tiempo. Si  $\Psi_E(x)$  es un autoestado de  $\hat{h}(t_0)$ , entonces  $\Psi_E(x)$  será un autoestado de  $\hat{h}(t)$  a todo tiempo, es decir existirá una función  $E(t)$  tal que

$$\hat{h}(t) \Psi_E(x) = E(t) \Psi_E(x).$$

La evolución temporal de un tal estado está dada por

$$\Psi_E(x,t) = e^{-i \int_{t_0}^t E(t') dt'} \Psi_E(x,t_0).$$

a los conmutadores entre  $\hat{p}_x$  y el potencial  $\zeta e^{2x}$ . En consecuencia, estos vínculos clásicamente equivalentes tienen asociadas teorías cuánticas distintas. Sin embargo, para este caso particular un cambio de coordenadas permite eliminar esta ambigüedad (ver Ref.[77]). Considérese el vínculo (2.47) y defínanse las variables

$$\begin{aligned} u &= \alpha e^{\frac{1}{2}(aq^1+bq^2)} \cosh\left(\frac{bq^1+aq^2}{2}\right), \\ v &= \alpha e^{\frac{1}{2}(aq^1+bq^2)} \sinh\left(\frac{bq^1+aq^2}{2}\right), \end{aligned}$$

con  $\alpha = \sqrt{|A|}$ . Estas coordenadas permiten escribir el vínculo escaleado en la forma equivalente

$$H = -p_u^2 + p_v^2 + \eta m^2 = 0,$$

con  $\eta = \text{sgn}(A)$  y  $m^2 = 4/|a^2 - b^2|$ . Las soluciones de la ecuación de Wheeler-DeWitt correspondientes a este vínculo hamiltoniano coinciden ahora con las soluciones de las correspondientes ecuaciones de Schrödinger, pudiendo elegirse como reloj físico a las coordenadas  $u$  o  $v$  dependiendo de  $\eta$  (para  $\eta = 1$  se tiene  $p_u \neq 0$  y  $t = \pm u$ , mientras que para  $\eta = -1$  se tiene  $p_v \neq 0$  y  $t = \pm v$ ).

Por supuesto, una solución de este tipo solo puede ser aplicada a un número limitado de modelos de minisuperespacios. El caso de un Hamiltoniano reducido  $h$  dependiente del tiempo es en efecto el caso general. Es una idealización pensar que es posible encontrar un grado de libertad no acoplado al resto (además del acoplamiento minimal dado por el vínculo hamiltoniano) para ser utilizado como reloj físico. En otras palabras, no es de esperar que sea posible encontrar un “reloj libre”. En general, el sistema reducido será un *sistema abierto*, es decir un sistema que interactúa con el reloj. Si el Hamiltoniano reducido  $h$  depende del tiempo, la energía del sistema reducido cambiará. Dado que el reloj físico es un grado de libertad genuino, el cambio en la energía del sistema reducido es una consecuencia de su interacción con el reloj. Este cambio en la energía “reducida” del sistema corresponderá entonces a la variación del momento del reloj físico ( $p_t = -h$ ): si el reloj cambia su “velocidad” de avance, la energía total de los otros grados de libertad también se modificará.

Una consecuencia de este análisis es que si en general todo Hamiltoniano reducido  $h$  depende del tiempo definido por el reloj físico correspondiente, la teoría resultante no será invariante ante una inversión de movimiento (operación esta que corresponde a la inversión “temporal” usual). De esta manera, la necesidad de definir al tiempo por medio



de un grado de libertad genuino tiene como consecuencia que la teoría sea irreversible ante inversiones temporales. En general se considera que los sistemas con un Hamiltoniano dependiente del tiempo surgen cuando se estudian subsistemas abiertos del universo que interactúan con un cierto entorno. La dependencia temporal de la energía es una consecuencia de la interacción del sistema con su entorno. Si se considera a todo el universo, no existe por definición un entorno con el que pueda intercambiar energía, por lo que el Hamiltoniano del universo no debería depender del tiempo. Sin embargo, de las consideraciones precedentes se desprende que solo es posible hablar de evoluciones temporales si se elige a un grado de libertad genuino para ser utilizado como reloj físico (en otros términos, solo es posible hablar de la evolución temporal de un *subsistema abierto* del universo). Como dicho reloj estará necesariamente acoplado a los grados de libertad restantes el Hamiltoniano reducido dependerá del tiempo así definido y la teoría será necesariamente irreversible (ante inversiones de movimiento).

De esta manera las condiciones de contorno sobre el espacio de soluciones de la ecuación de Wheeler-DeWitt propuestas en Ref.[24] fueron reinterpretadas en Ref.[20] como una ruptura de simetría de la invariancia ante inversión del reloj físico propia de una teoría con un vínculo hamiltoniano cuadrático en todos los momentos canónicos. Dichas condiciones de contorno permiten separar al espacio de soluciones en aquellos estados que avanzan en el tiempo  $t = q^0$ , de aquellos que avanzan en el tiempo  $t = -q^0$ , estando estos dos subespacios relacionados por medio del operador  $T$  de inversión del sentido de avance del reloj físico. El hecho de que el operador de Wheeler-DeWitt  $\hat{H}$  sea real tiene como consecuencia que, dada una cierta solución  $\Psi$  de la ecuación de Wheeler-DeWitt  $\hat{H}\Psi = 0$ , el estado complejo conjugado  $\Psi^*$  también será una solución. El espacio de soluciones  $S$  de la ecuación de Wheeler-DeWitt puede entonces ser descompuesto como una suma directa  $S = C \oplus C^*$ .

En el caso de la solución (2.61) de la ecuación de Wheeler-DeWitt (2.60), el factor dependiente de  $\phi$  puede expresarse equivalentemente como una combinación lineal de las funciones modificadas de Bessel  $K_\nu$  y  $I_\nu$  o como una combinación lineal de las funciones modificadas de Bessel  $I_\nu$  y  $I_{-\nu}$ . Pero mientras que las funciones  $K_\nu$  y  $I_\nu$  no están relacionadas por medio de una conjugación compleja, las funciones  $I_{\pm\nu}$  satisfacen la propiedad  $I_\nu = I_{-\nu}^*$ . Como  $\phi$  es la variable asociada al reloj físico, los factores asociados a los estados físicos deben estar dados por las funciones  $I_{\pm i\omega} (|\lambda|e^{-\phi})$ , es decir por las funciones que

admiten una transformación de inversión del reloj no trivial. Si ahora consideramos el factor dependiente de  $\Omega$ , vemos que el factor elegido  $K_{i\omega/2} \left( \sqrt{|2\bar{c}|} e^{3\Omega} \right)$  satisface  $K_{\nu}^* = K_{-\nu} = K_{\nu}$ . Este factor es entonces real por lo que no contiene información sobre el *sentido* de la evolución temporal de la solución. Las soluciones seleccionadas por la condiciones de contorno propuestas

$$\Psi_{\omega}(\Omega, \phi) = \tilde{a}(\omega) I_{\pm i\omega} (|\lambda| e^{-\phi}) K_{i\omega/2} \left( \sqrt{|2\bar{c}|} e^{3\Omega} \right)$$

tienen entonces un factor  $I_{\pm i\omega}$  que define el sentido de avance temporal de la solución y un factor  $K_{i\omega/2}$  invariante ante inversiones de dicho sentido. Es importante destacar que estas condiciones de contorno eliminan la posibilidad de tener soluciones reales de la ecuación de Wheeler-DeWitt.

Una diferencia importante entre las transformaciones de inversión del reloj y de inversión del movimiento es que una teoría con un Hamiltoniano reducido dependiente del tiempo  $h(t)$ , aún cuando no sea simétrica ante una transformación de inversión del movimiento, será simétrica ante una transformación de inversión del reloj. Esto significa que aún cuando no sea posible reducir el sistema por medio de un Hamiltoniano reducido  $h$  independiente del tiempo, el espacio de soluciones de la ecuación de Wheeler-DeWitt deberá seguir siendo una suma directa de subespacios relacionados por medio del operador de inversión del reloj  $T$ . Por otra parte, y como ya se dijo, la operación de inversión del reloj, es decir del sentido de avance temporal de la solución, *no requiere de la separación efectiva de un reloj físico*. Esto significa que estas condiciones de contorno deberían poder ser extrapoladas al caso general en el que no se sabe como separar un reloj físico.

Comentando la interpretación de la ecuación de Wheeler-DeWitt en términos de la ecuación de Klein-Gordon y el consiguiente intento de separar las frecuencias positivas de las negativas, C. Isham dice Ref.[52]:

There are good physical reasons for selecting just the positive-energy solutions for the point-particle but the justification for the analogous step in the gravitational case is not clear. In particular, it is quite legitimate for the geometries along a path in superspace to both expand and contract in volume, and this means a classical solution to Einstein's equations can have either sign of  $E$ . Therefore, there is no justification for picking just the positive-frequency modes.

Sin embargo no es correcto considerar las soluciones asociadas a cada hoja como soluciones con un contenido físico *distinto* (en el caso cosmológico una expansión o una contracción). En efecto, *el contenido físico de ambas hojas es exactamente el mismo*. Aún cuando las soluciones asociadas a cada hoja son interpretadas como soluciones que avanzan en los tiempos  $t = q_0$  y  $t = -q_0$ , la única información relevante que puede ser extraída de la teoría concierne las posibles correlaciones entre la variable  $q_0$  y el resto de las variables canónicas. En otras palabras, los únicos enunciados relevantes tienen la forma : “*Cuando el volumen del universo  $\omega$  vale  $x$ , la anisotropía  $\beta$  vale  $y$* ”. El sentido de evolución de la trayectoria es entonces *puro gauge*. En consecuencia, es posible elegir una de las dos hojas *sin que dicha elección implique una pérdida de soluciones con un contenido físico distinto*.

### 3. Principio de Gauge Extendido en Teorías de Yang-Mills

En esta segunda parte se estudiará la estructura geométrica y la cuantificación con integral de camino de las teorías de gauge del tipo Yang-Mills a partir de lo que se denominó en Ref.[21] *Principio de Gauge Extendido*. En términos geométricos el espacio de configuración de una teoría de Yang-Mills está dado por el conjunto  $\mathcal{A}$  de conexiones  $A$  sobre el  $G$ -fibrado principal  $P \rightarrow M$ , donde  $M$  es el espacio-tiempo y  $G$  un grupo de Lie compacto. Dada una familia de secciones  $\sigma_i : U_i \subset M \rightarrow P$ , una conexión  $A$  define una familia de 1-formas  $A_\mu$  en  $M$  (*campos de gauge*). El *grupo de gauge*  $\mathcal{G}$  es el grupo de los automorfismos del fibrado  $P \rightarrow M$  (denominados *transformaciones de gauge locales*). La acción del grupo de gauge  $\mathcal{G}$  sobre las conexiones  $A$  en  $\mathcal{A}$  garantiza la invariancia de la teoría ante estas transformaciones de gauge locales. El espacio de las configuraciones *físicas* de campo corresponde entonces al espacio de las órbitas  $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ . Puede demostrarse que bajo ciertas hipótesis se obtiene una estructura de  $\mathcal{G}$ -fibrado principal  $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$ . Dado que en general es difícil poder trabajar en el espacio de las órbitas  $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ , es usual trabajar en  $\mathcal{A}$  por medio de una *fijación de gauge*. Para ello es necesario elegir para cada configuración física de campo en  $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ , un representante en la órbita correspondiente. Esta elección define una *sección de fijado de gauge*  $\sigma$

$$\begin{array}{ccc} & \sigma & \\ & \curvearrowright & \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{A}/\mathcal{G}. \end{array}$$

Sin embargo, debido a obstrucciones topológicas asociadas a la no trivialidad del fibrado  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$ , es en general imposible definir una única sección de fijado de gauge *global* (*obstrucción de Gribov*, ver Refs.[45, 78]).

Los antecedentes históricos para el estudio de la estructura geométrica subyacente al *principio de gauge extendido* propuesto en Ref.[21] son los siguientes. En los años 80' las teorías de gauge fueron el centro de importantes desarrollos matemáticos, especialmente la teoría de Donaldson sobre invariantes de 4-variedades [36] y la interpretación de la misma debida a Witten en términos de una *teoría de campos topológica* [86, 87] (para una introducción general sobre teorías topológicas de campos ver Refs.[14, 28, 41]). Estos trabajos motivaron el estudio de las propiedades topológicas del espacio de las órbitas  $\mathcal{A}/\mathcal{G}$  de los campos de gauge. Se demostró que la no trivialidad de ciertos invariantes está estrechamente relacionada con la no trivialidad topológica

del fibrado  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$ . En Ref.[10] Baulieu y Singer mostraron que la teoría de Witten puede ser interpretada en términos del fijado de gauge por medio del método BRST de una acción con una simetría topológica. A dichos efectos, los autores unificaron los campos de gauge  $A$  y los campos fantasmas  $c$  correspondientes a la simetría ordinaria de una teoría de Yang-Mills en una conexión extendida  $\omega = A + c$  definida en un fibrado principal convenientemente elegido. La curvatura  $\mathcal{F}$  de  $\omega$  se separa naturalmente en la forma  $\mathcal{F} = F + \psi + \phi$ , donde  $\psi$  y  $\phi$  son el fantasma para la simetría topológica y el fantasma de fantasma respectivamente (la necesidad de introducir un fantasma de fantasma proviene de la dependencia entre la simetría topológica y la simetría ordinaria de una teoría de Yang-Mills). Expandiendo las expresiones para la curvatura  $\mathcal{F}$  y la correspondiente identidad de Bianchi, las transformaciones BRST de los distintos campos son elegantemente recobradas. Usualmente se afirma que el pasaje de esta teoría topológica a una teoría ordinaria -no topológica- de Yang-Mills está mediado por las así llamadas *condiciones de horizontalidad* (o *platitud*), es decir por la imposición de las condiciones  $\psi = \phi = 0$  o, equivalentemente  $\mathcal{F} = F$  (ver por ejemplo Refs.[9, 11, 41, 81]). En ese caso, una conexión extendida de la forma  $\omega = A + c$  puede ser también definida para una teoría de Yang-Mills *ordinaria* con una curvatura *horizontal*  $\mathcal{F} = F$ .

En Ref.[21] se consideró una extensión del principio de gauge por medio de la definición de una conexión extendida en el marco de las teorías de Yang-Mills *ordinarias*. Según este principio de gauge extendido la localización de una teoría con una simetría global requiere la definición de una *conexión extendida* en un fibrado principal apropiadamente elegido. Por medio de dicha conexión extendida se definen los *campos de gauge*, los *fantasmas* del complejo BRST y el *fijado de gauge* de la teoría.

Intuitivamente si los fantasmas  $c$  pueden combinarse con las conexiones  $A$  como fué propuesto en Ref.[10], esto significa que los fantasmas deberían estar asociados a alguna conexión en un cierto espacio fibrado (para que la formula  $\omega = A + c$  propuesta en Ref.[10] pueda intepretarse como una suma de conexiones). Sin embargo, como se mostró en Ref.[16] los fantasmas pueden identificarse con las formas de Maurer-Cartan del grupo de gauge  $\mathcal{G}$ . Ahora bien, puede verse que las formas de Maurer-Cartan pueden asociarse a la *parte vertical canónica* de una conexión en el  $\mathcal{G}$ -fibrado principal  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$ . Los fantasmas no son entonces una conexión, sino una cierta parte de una conexión. De esta manera se propuso en Ref.[21] que de alguna manera la conexión extendida  $\omega = A + c$  propuesta en Ref.[10] está incompleta:

en lugar del fantasma  $c$  habría que agregar una conexión  $\eta$  en el fibrado  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$ , estando los fantasmas  $c$  incluidos naturalmente en la parte vertical canónica de dicha conexión  $\eta$ . De esta manera la conexión extendida propuesta en Ref.[21] tiene la forma  $\mathbb{A} = A + \eta$ . El punto fundamental es que la conexión  $\eta$ , siendo por definición una distribución horizontal, *puede ser usada para definir un fijado de gauge generalizado de la teoría*. El argumento principal es que una conexión define en cada punto del fibrado un espacio horizontal que puede ser pensado como un germen infinitesimal de primer orden de una sección. De esta manera, los fantasmas  $c$  y el fijado de gauge son dos aspectos de la misma entidad geométrica, a saber la conexión  $\eta$ . En consecuencia la nueva conexión extendida  $\mathbb{A} = A + \eta$  incluye los *campos de gauge*  $A$ , los *fantasmas*  $c$  y el *fijado de gauge* definido por  $\eta$ . El principio de gauge extendido puede entonces resumirse por medio del siguiente diagrama

$$\text{Conexión extendida } \mathbb{A} = A + \eta \left\{ \begin{array}{l} A \text{ Campos de gauge} \\ \eta \left\{ \begin{array}{l} \text{Fantasmas BRST} \\ \text{Fijado de gauge.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Técnicamente, se demostró en Ref.[21] que las conexiones  $A$  en el  $G$ -fibrado principal sobre el espacio-tiempo  $P \rightarrow M$  y la conexión de fijado de gauge  $\eta$  en el  $\mathcal{G}$ -fibrado principal  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$  pueden ser unificadas en una única conexión extendida  $\mathbb{A} = A + \eta$  en el  $G$ -fibrado principal  $\mathcal{A} \times P \rightarrow \mathcal{A} \times M$ .

Por otra parte el fijado de gauge por medio de una conexión es una noción más general que la habitual ya que dada cualquier sección  $\sigma : \mathcal{A}/\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A}$ , siempre existe una única conexión  $\eta$  tal que  $\sigma(\mathcal{A}/\mathcal{G})$  define una sección paralela. Por el contrario no toda conexión puede ser integrada a una sección (debido a la monodromía o a la curvatura de la conexión). Además, aún cuando no sea posible definir una sección de fijado de gauge global  $\sigma$  (obstrucción de Gribov), es siempre posible definir una conexión de fijado de gauge global  $\eta$ .

Se mostró también en Ref.[21] que el nuevo formalismo permite recobrar las transformaciones BRST para una teoría de Yang-Mills ordinaria *sin imponer las condiciones de horizontalidad usuales*. Esto significa que la curvatura extendida derivada de  $\mathbb{A}$  no tendrá necesariamente la forma horizontal  $\mathcal{F} = F$ , aún en el caso de una teoría de Yang-Mills ordinaria (no topológica).

En Ref.[22] se estudió la aplicación del principio de gauge extendido a la cuantificación de teorías de Yang-Mills por medio de integrales de camino. El punto fundamental es que la conexión  $\eta$  puede ser usada

para definir una sección inducida  $\sigma_\eta$  en el *espacio de los caminos* en  $\mathcal{A}$ . A cada camino  $[\gamma]$  en  $\mathcal{A}/\mathcal{G}$  la sección  $\sigma_\eta$  le asigna el camino en  $\mathcal{A}$  obtenido por medio del transporte paralelo definido por  $\eta$  de una condición inicial en  $\mathcal{A}$ . Con el objeto de introducir el fijado de gauge generalizado definido en Ref.[21], se mostró que es posible utilizar el método de Faddeev-Popov. De esta manera se encontró la acción con el gauge fijo  $S_{gf}$ . Se mostró también que dicho fijado de gauge puede alternativamente ser implementado por medio de los fermiones de fijado de gauge usuales. Dado que el parámetro de los transportes paralelos de fijado de gauge es el tiempo  $t$ , el contexto natural para implementar dicho fijado de gauge es la formulación hamiltoniana de las teorías de Yang-Mills.

En la Sección N°3.1 se resumen las principales nociones de la teoría de conexiones sobre espacios fibrados (en lo referente a la teoría de espacios fibrados ver Apéndice A1). En la Sección N°3.2 se definen el escenario geométrico general y la conexión extendida  $\mathbb{A}$ . En la Sección N°3.3 se calcula la curvatura  $\mathbb{F}$  de  $\mathbb{A}$  y se reobtienen las transformaciones BRST para los campos de gauge y los fantasmas. En la Sección N°3.4 se compara el formalismo propuesto con el formalismo usado en teorías de Yang-Mills topológicas. En la Sección N°3.5 se estudia la relación entre los fantasmas y la conexión de fijado de gauge  $\eta$ . En la Sección N°3.6 se resume la formulación hamiltoniana de las teorías de Yang-Mills. En la Sección N°3.7 se define el fijado de gauge generalizado a nivel de la integral de camino. En la Sección N°3.8 se calcula la acción con el gauge fijo  $S_{gf}$  por medio del método de Faddeev-Popov. En la Sección N°3.9 se muestra que la acción  $S_{gf}$  puede también ser encontrada por medio de la definición de un fermión de fijado de gauge.

### 3.1. Conexiones en espacios fibrados.

En lo que sigue se hará un uso extensivo de la noción de *conexión* sobre un fibrado principal. En el caso de un fibrado principal sobre una variedad de dimensión finita con grupo estructural compacto existen tres definiciones equivalentes de conexión (ver Refs.[27, 36, 56]). En lo que sigue se considerarán también conexiones en dimensión infinita. La teoría de conexiones en dimensión infinita es discutida en Ref.[57]. En el Apéndice A1 de esta tesis podrán encontrarse las definiciones básicas de la teoría de espacios fibrados (fibrados principales, fibrados asociados, etc.).

Sea  $K$  un grupo de Lie con álgebra de Lie  $\mathfrak{k}$  y sea

$$\pi : E \rightarrow X$$

un  $K$ -fibrado principal sobre la variedad  $X$  (tanto  $K$  como  $X$  pueden ser de dimensión infinita). Una *conexión* sobre  $E$  es una *distribución*  $H$ , es decir, un campo suave de espacios vectoriales

$$H_p \subset TE_p, \quad p \in E,$$

donde  $TE_p$  es el espacio tangente a  $E$  en  $p$ , tal que

(1) Para todo  $p \in E$  existe una descomposición de la forma

$$TE_p = H_p \oplus \text{Ker } d\pi_p.$$

(2) El campo es preservado por la acción de  $K$  sobre  $TE$  (*equivariancia*).

En otros términos, una conexión puede ser considerada como una separación  $K$ -invariante de la secuencia exacta<sup>14</sup>

$$0 \longrightarrow \text{Ker } d\pi \longrightarrow TE \xrightarrow{d\pi} TX \longrightarrow 0.$$

El término  $\text{Ker } d\pi_p$  define los denominados *subespacios verticales*  $V_pE$  del tangente a  $E$ . El subespacio vertical  $V_pE$  de un  $K$ -fibrado principal  $E \rightarrow X$  en un punto  $p \in E$  es un subespacio de  $T_pE$  tangente a la fibra  $F_x$  con  $x = \pi(p)$ . Estos subespacios verticales pueden también definirse del modo siguiente. Para cada punto  $p$  de un  $K$ -fibrado principal  $E \rightarrow X$  existe una transformación lineal

$$\iota_p : \mathfrak{k} \rightarrow T_pE$$

que define un isomorfismo entre el álgebra de Lie  $\mathfrak{k}$  y el espacio tangente a la fibra  $T_pF$  en  $p$ . Dicha transformación lineal  $\iota_p$  se define del modo siguiente. Sea  $\xi \in \mathfrak{k}$  y  $g_t$  el subgrupo uniparamétrico generado por  $\xi$ . El vector  $\xi$  satisface entonces

$$\left. \frac{d}{dt} g_t \right|_{t=0} = \xi \in \mathfrak{k}.$$

Si  $g \in K$ , entonces escribiremos  $R_g : E \rightarrow E$  para la función  $p \mapsto pg$  (acción a derecha de  $K$  sobre las fibras de  $E$ ). Dado que  $\pi(p) = \pi(pg_t) = x$ , la curva  $pg_t$  está incluida en  $F_x$ . El isomorfismo  $\iota_p$  se define según

$$(3.74) \quad \xi^\# = \iota_p(\xi) = \left. \frac{d}{dt} (pg_t) \right|_{t=0} \in V_pE.$$

<sup>14</sup>Que una secuencia

$$\dots \xrightarrow{m_{n-2}} C_{n-1} \xrightarrow{m_{n-1}} C_n \xrightarrow{m_n} C_{n+1} \xrightarrow{m_{n+1}} \dots$$

sea *exacta* significa que los morfismos  $m_n$  satisfacen

$$\text{Ker } (m_n) = \text{Im } (m_{n-1}) \quad \forall n.$$



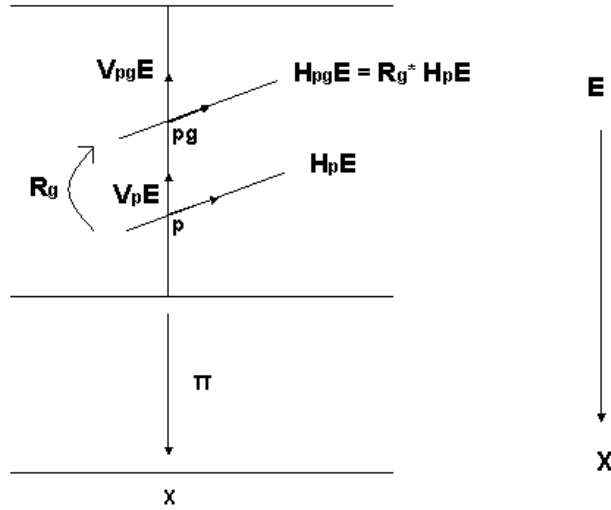


FIG. 5. Equivariancia de las distribuciones horizontales.

De esta manera, se puede definir un vector  $\xi^\sharp$  *vertical* en cada punto de  $E$  y construir un campo vector  $\xi^\sharp$  denominado *campo vector fundamental*.

Una conexión define entonces una única separación del espacio tangente  $T_p E$  en un subespacio vertical y uno horizontal

$$T_p E = H_p E \oplus V_p E.$$

La condición (2) de la definición de conexión significa que los subespacios horizontales  $H_p E$  son *equivariantes* ante la acción del grupo estructural  $K$ . En otros términos, los subespacios horizontales  $H_p E$  satisfacen

$$(3.75) \quad H_{pg} E = R_{g*} H_p E,$$

con  $p \in E$  y  $g \in K$ . Esto significa que un subespacio  $H_p E$  en  $p$  genera todos los subespacios horizontales sobre la misma fibra. En efecto el subespacio horizontal  $H_{pg} E$  en  $pg$  puede ser obtenido a partir de  $H_p E$  por medio del pushforward  $R_{g*} H_p E$  (ver Figura N°5). Una conexión en un  $K$ -fibrado principal es entonces una *distribución horizontal  $K$ -equivariante*.

Esta definición de conexión es una definición puramente geométrica. Es necesario entonces establecer un modo sistemático de separar los

subespacios horizontales  $H_p E$  y verticales  $V_p E$  que pueda ser utilizado en cálculos concretos. A dichos efectos se define una 1-forma  $\omega$  sobre  $E$  valuada en el álgebra de Lie de  $K$  ( $\omega \in \Omega^1(E) \otimes \mathfrak{k}$ ) y  $K$ -equivariante. La 1-forma  $K$ -equivariante  $\omega$  define una proyección sobre los subespacios verticales  $V_p E \simeq \mathfrak{k}$  tal que se satisface

$$\omega_p(\xi^\#) = \xi,$$

con  $\xi^\# \in V_p E$  y  $\xi \in \mathfrak{k}$ . En otros términos, vale

$$\omega_p \circ \iota_p = id_{\mathfrak{k}}.$$

El subespacio horizontal  $H_p E$  se define entonces como el *núcleo* de  $\omega$

$$(3.76) \quad H_p E \equiv \text{Ker } \omega_p = \{v \in T_p E \mid \omega_p(v) = 0\}.$$

La acción de  $K$  sobre  $\omega$  se define por medio de la acción adjunta

$$(3.77) \quad R_g^* \omega = ad_{g^{-1}} \omega.$$

Como la acción adjunta  $ad_{g^{-1}}$  está definida sobre el álgebra de Lie  $\mathfrak{k}$ , en la expresión (3.77)  $ad_{g^{-1}}$  actúa sobre la imagen de  $\omega$ . En otros términos se tiene la composición

$$T_p E \xrightarrow{\omega_p} \mathfrak{k} \xrightarrow{ad_{g^{-1}}} \mathfrak{k}.$$

Para  $v \in T_p E$  vale entonces

$$(R_g^* \omega_{pg})(v) = \omega_{pg}(R_{g^*} v) = g^{-1} \omega_p(v) g.$$

En otras palabras, es lo mismo calcular la imagen por el mapa  $ad_{g^{-1}}$  de  $\omega_p(v) \in \mathfrak{k}$  que contraer el vector  $R_{g^*} v \in T_{pg} E$  con la 1-forma de conexión en ese punto  $\omega_{pg}$ . La propiedad (3.77) es la traducción en términos de la 1-forma  $\omega$  de la  $K$ -equivariancia (3.75) de las distribuciones horizontales  $H_p E$ .

Para verificar que las definiciones en términos de distribuciones y de 1-formas son compatibles mostraremos ahora que los subespacios horizontales definidos en (3.76) satisfacen la propiedad (3.75). Para ello tomemos un vector  $v \in H_p E$ , donde  $H_p E$  está definido por (3.76), y apliquemos  $\omega$  sobre su pushforward en  $pg$ , es decir sobre el vector  $R_{g^*} v \in T_{pg} E$ :

$$\omega_{pg}(R_{g^*} v) = (R_g^* \omega_{pg})(v) = g^{-1} \omega_p(v) g = 0,$$

ya que  $\omega_p(v) = 0$ . En consecuencia se satisface que  $R_{g^*} v \in H_{pg} E$ .

Otra forma alternativa de definir una conexión es utilizar una trivialización local de  $E$  definida sobre un cubrimiento  $\{U_i\}$  de  $X$ . Una conexión puede ser entonces definida por medio de una familia  $\{\omega_i\}$  de

1-formas en  $\{U_i \subset X\}$  valuadas en  $\mathfrak{k}$  ( $\omega_i \in \Omega^1(U_i) \otimes \mathfrak{k}$ ). Sean entonces los homeomorfismos

$$\phi_i : U_i \times K \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$$

y las funciones de transición

$$\phi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow K.$$

Sobre el abierto  $U_i$  se puede definir una sección local  $\sigma_i$  inducida por la trivialización local  $\phi_i$  como

$$\sigma_i(x) = \phi_i(x, e),$$

donde  $e$  es el elemento identidad de  $K$ . Dada una conexión  $\omega \in \Omega^1(E) \otimes \mathfrak{k}$ , los elementos de la familia  $\{\omega_i\}$  pueden ser entonces definidos como

$$\omega_i = \sigma_i^* \omega \in \Omega^1(U_i) \otimes \mathfrak{k}.$$

En los puntos  $x \in U_i \cap U_j$  los elementos de la familia  $\omega_i$  y  $\omega_j$  definidos a partir de la conexión  $\omega$  por medio de las trivializaciones locales  $\phi_i$  y  $\phi_j$  están relacionados por medio de la expresión

$$\omega_i(x) = ad_{\phi_{ji}(x)^{-1}} \omega_j(x) + (\phi_{ji}^* \theta_{MC})(x) \in \mathfrak{k},$$

donde  $\theta_{MC} \in \Omega^1(K) \otimes \mathfrak{k}$  es la *forma de Maurer-Cartan* del grupo  $K$  (ver Apéndice A1). Inversamente, dada una familia de 1-formas locales  $\{\omega_i\}$  tal que satisfacen estas relaciones, entonces puede demostrarse que existe una única conexión  $\omega \in \Omega^1(E) \otimes \mathfrak{k}$  tal que  $\omega_i = \sigma_i^* \omega$ .

3.1.1. *Levantado horizontal y transporte paralelo.* Dada una conexión  $\omega$  en un  $K$ -fibrado principal  $E \xrightarrow{\pi} X$  es posible definir los *levantados horizontales* de caminos  $\gamma$  en la base  $X$  del fibrado. Sea

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow X$$

una curva en  $X$ . La curva

$$\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow E$$

es denominada el *levantado horizontal* de  $\gamma$  si satisface

- $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ .
- el vector  $\dot{\tilde{\gamma}}(t)$  tangente a  $\tilde{\gamma}(t)$  es  $\omega$ -horizontal, es decir  $\dot{\tilde{\gamma}}(t) \in H_{\tilde{\gamma}(t)}^\omega E$  (o equivalentemente  $\omega_{\tilde{\gamma}(t)}(\dot{\tilde{\gamma}}) = 0$ ).

Si  $u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ , entonces existe un único levantado horizontal  $\tilde{\gamma}(t)$  tal que  $\tilde{\gamma}(0) = u_0$ . El levantado horizontal  $\tilde{\gamma}(t)$  define el *transporte paralelo* de  $u_0$  a lo largo del camino  $\gamma(t) \subset X$ .

3.1.2. *Curvatura de una conexión.* Una conexión  $\omega$  permite separar a un vector tangente  $X \in T_p E$  como

$$X = X^h + X^v,$$

con  $X^h \in H_p E$  y  $X^v \in V_p E$ .

Sea  $\zeta \in \Omega^r(E) \otimes \mathfrak{k}$  y  $X_1, \dots, X_{r+1} \in T_p E$ . La *derivada covariante* de  $\zeta$  se define como

$$D\zeta(X_1, \dots, X_{r+1}) \equiv d_E \zeta(X_1^h, \dots, X_{r+1}^h),$$

donde  $d_E$  es la derivada exterior en  $E$ .

La curvatura  $\Omega$  de la conexión  $\omega$  se define como

$$\Omega = D\omega \in \Omega^2(E) \otimes \mathfrak{k}.$$

Puede demostrarse que la curvatura  $\Omega$  satisface

$$R_g^* \Omega = ad_{g^{-1}} \Omega.$$

Si  $X, Y \in T_p E$ , entonces la conexión  $\omega$  y la curvatura  $\Omega$  satisfacen la *ecuación de estructura de Maurer-Cartan*

$$(3.78) \quad \Omega(X, Y) = d_E \omega(X, Y) + \frac{1}{2} [\omega(X), \omega(Y)],$$

la cual puede expresarse también como

$$\Omega = d_E \omega + \frac{1}{2} \omega \wedge \omega.$$

Una propiedad importante de la curvatura  $\Omega$  es que es *horizontal*, es decir que  $\Omega(X, Y) = 0$  si  $X$  o  $Y$  son vectores verticales ( $X$  o  $Y$  en  $V_p E$ ).

También es posible demostrar que la curvatura  $\Omega$  satisface la *identidad de Bianchi*

$$D\Omega = 0.$$

Dada una trivialización local de  $E \rightarrow X$  definida sobre un cubrimiento  $\{U_i\}$  de  $X$  por medio de una familia de secciones locales  $\sigma_i$ , la forma local de la curvatura es

$$\Omega_i = \sigma_i^* \Omega \in \Omega^2(U_i) \otimes \mathfrak{k}.$$

En estas coordenadas locales, la identidad de Bianchi toma la forma

$$(3.79) \quad d_X \Omega_i + [\omega_i, \Omega_i] = 0,$$

donde  $d_X$  es la derivada exterior en  $X$ .

Las formas locales de la curvatura pueden expresarse en términos de las formas locales de la conexión por medio de la expresión

$$\Omega_i = d_X \omega_i + \frac{1}{2} \omega_i \wedge \omega_i.$$

3.1.3. *Derivada covariante en fibrados asociados.* Mostraremos ahora de que manera una conexión en un fibrado principal  $E$  permite definir una derivada covariante en los fibrados asociados a  $E$ . Sea  $\Lambda = \Lambda_\mu^\alpha X_\alpha dx^\mu$  la forma local de una conexión  $\omega$  en un  $K$ -fibrado principal  $E \rightarrow X$  (donde  $\{X_\alpha\}$  es una base del álgebra de Lie  $\mathfrak{k}$ ) y sea  $V = E \times_K F$  un fibrado vectorial asociado a  $E$  donde  $F$  es un espacio vectorial de dimensión  $p$ . Sea  $\rho$  una representación del álgebra de Lie  $\mathfrak{k}$  tal que  $\rho(X_\alpha)_j^i$  es una matriz de  $p \times p$  que define un endomorfismo del espacio vectorial  $F$ . En lo sucesivo indicaremos  $\mu, \nu, \dots$  los índices de la base  $X$ ,  $i, j, \dots$  los índices del espacio vectorial  $F$  y  $\alpha, \beta, \dots$  los índices del álgebra de Lie  $\mathfrak{k}$ . La imagen

$$\rho(\Lambda) = \Lambda_\mu^\alpha \rho(X_\alpha) dx^\mu$$

se denomina *matriz de conexión* y sus elementos son las cantidades

$$\rho(\Lambda)_j^i = \Lambda^\alpha \rho(X_\alpha)_j^i$$

con  $\Lambda^\alpha = \Lambda_\mu^\alpha dx^\mu$ . Si establecemos la notación

$$\begin{aligned} T_\alpha &\doteq \rho(X_\alpha), \\ \Lambda_j^i &\doteq \rho(\Lambda)_j^i, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \Lambda_j^i &= \Lambda^\alpha (T_\alpha)_j^i \\ &= \Lambda_{j\mu}^i dx^\mu, \end{aligned}$$

con  $\Lambda_{j\mu}^i = \Lambda_\mu^\alpha (T_\alpha)_j^i$ . Los números  $\Lambda_{j\mu}^i$  se denominan *coeficientes de conexión*.

Se puede ahora definir el diferencial covariante

$$\nabla : \Gamma(V) \rightarrow \Omega^1(X) \otimes \Gamma(V),$$

el cual verifica la propiedad

$$\nabla(f\sigma + \tau) = \sigma \otimes (df) + (\nabla\sigma)f + \nabla\tau.$$

El operador  $\nabla$  estará definido si se conocen los valores de  $\nabla e_i$ , donde  $e_i(x) \in V$  (con  $x \in X$ ) es una base de secciones independientes. Dichos valores se definen como

$$\nabla e_i = e_j \Lambda_i^j.$$

Si  $v = v^j e_j$  es una sección de  $V$  entonces se tendrá

$$\begin{aligned} \nabla v &= (\nabla e_j) v^j + e_j dv^j \\ &= e_i \Lambda_j^i v^j + e_i dv^i \\ &= e_i (\Lambda_j^i v^j + dv^i) \\ &= e_i (\Lambda_{j\mu}^i v^j + \partial_\mu v^i) dx^\mu. \end{aligned}$$

Dado que la imagen de  $\nabla$  son 1-formas en  $\Omega^1(X)$  valuadas en secciones de  $V$ , podemos evaluar  $\nabla v$  en un vector  $\xi = \xi^\nu \partial_\nu$  tangente a  $X$

$$\nabla_\xi v = \langle \nabla v, \xi \rangle = e_i (\Lambda_{j\mu}^i v^j + \partial_\mu v^i) \xi^\mu.$$

La sección  $\nabla_\xi v$  representa la derivada covariante de la sección  $v$  en la dirección dada por  $\xi$ .

### 3.2. Principio de gauge extendido.

En esta sección construiremos la *conexión extendida*  $\mathbb{A}$  introducida en Ref.[21]. Dicha conexión extendida es la entidad geométrica fundamental de lo que en dicho trabajo se denominó *principio de gauge extendido*.

A dichos efectos consideraremos un  $G$ -fibrado principal  $P \rightarrow M$ , donde  $M$  es ahora el espacio-tiempo y  $G$  un grupo de Lie compacto con álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ .

Una *transformación de gauge* es un automorfismo  $f : P \rightarrow P$  del fibrado  $P \rightarrow M$  definido por un mapa equivariante

$$\varphi : P \rightarrow G,$$

con  $\varphi(ua) = a^{-1}\varphi(u)a = Ad_{a^{-1}}\varphi(u)$  para  $u \in P$  y  $a \in G$  (ver Refs.[29, 30]). El automorfismo  $f$  se define entonces como

$$f(u) = u\varphi(u).$$

La equivariancia de  $\varphi$  implica

$$f(ua) = ua\varphi(ua) = uaa^{-1}\varphi(u)a = f(u)a.$$

Si ahora tomamos el fibrado asociado

$$Ad(P) = P \times_G G \rightarrow M,$$

donde la acción de  $G$  sobre  $G$  es la acción adjunta  $Ad_a g = aga^{-1}$ , puede demostrarse que existe una correspondencia biunívoca entre secciones de  $Ad(P)$  y mapas equivariantes  $\varphi : P \rightarrow G$  (ver Apéndice A1). Las transformaciones de gauge pueden identificarse entonces con las secciones de  $Ad(P)$  y el grupo de gauge  $\mathcal{G}$  con el espacio  $\Gamma(Ad(P))$  de secciones de  $Ad(P)$ .

Si en particular  $P \rightarrow M$  es un fibrado trivial, es posible definir una sección global  $\sigma : M \rightarrow P$ . En ese caso las transformaciones de gauge pueden ser consideradas como mapas  $\tilde{\varphi} : M \rightarrow G$ . Cualquier  $u \in \pi^{-1}(x)$  puede escribirse como  $u = \sigma(x)a$  para algún  $a \in G$ . Por lo

tanto  $\varphi(u) = \varphi(\sigma(x)a) = a^{-1}\varphi(\sigma(x))a$ . En consecuencia, si se define un mapa

$$\tilde{\varphi} = \varphi \circ \sigma : M \rightarrow G,$$

valdrá  $\varphi(u) = a^{-1}\tilde{\varphi}(x)a$  con  $u = \sigma(x)a$ .

También puede definirse el fibrado vectorial

$$\text{ad}(P) = P \times_G \mathfrak{g} \rightarrow M$$

asociado a la representación adjunta de  $G$  sobre su álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  ( $\text{ad}_g \xi = g\xi g^{-1}$  con  $g \in G$  y  $\xi \in \mathfrak{g}$ ). El álgebra de Lie  $\mathcal{L}ie(\mathcal{G})$  del grupo de gauge  $\mathcal{G}$  puede identificarse con el espacio  $\Gamma(\text{ad}(P))$  de secciones de  $\text{ad}(P)$ . Los elementos de  $\mathcal{L}ie(\mathcal{G})$  pueden ser entonces identificados con los mapas  $G$ -equivariantes

$$\mathfrak{g} : P \rightarrow \mathfrak{g}.$$

Ahora consideraremos conexiones  $A \in \Omega^1(P) \otimes \mathfrak{g}$  sobre el  $G$ -fibrado principal  $P \rightarrow M$  con curvatura  $F \in \Omega^2(P) \otimes \mathfrak{g}$ . Pasando a coordenadas locales definidas por una familia de secciones  $\{\sigma_i\}$  se definen entonces los *campos de gauge*  $A_i = \sigma_i^* A \in \Omega^1(M) \otimes \mathfrak{g}$  y la *intensidad de campo*  $F_i = \sigma_i^* F \in \Omega^2(M) \otimes \mathfrak{g}$ . Dichas cantidades pueden expresarse como

$$\begin{aligned} A_i &= A_{i\mu}^a dx^\mu \otimes T_a, \\ F_i &= F_{i\mu\nu}^a dx^\mu \wedge dx^\nu \otimes T_a, \end{aligned}$$

donde  $T_a$  es una base de  $\mathfrak{g}$ .

Denotaremos  $\mathcal{A}$  al espacio de configuración de todas las conexiones  $A$  en  $P$ . El espacio  $\mathcal{A}$  es un espacio afín modelado sobre el espacio  $\Omega^1(M) \otimes \mathfrak{g}$ . Si  $A$  es una conexión en  $P$ , puede demostrarse que el pull-back  $g^*A$  con  $g \in \mathcal{G}$  es también una conexión en  $P$ . Se dirá que  $g^*A$  define la acción a derecha del grupo de gauge  $\mathcal{G}$  sobre la conexión  $A$

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \times \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \\ (g, A) &\mapsto A \cdot g \doteq g^*A. \end{aligned}$$

A nivel de los campos de gauge  $A_i = \sigma_i^* A$  sobre  $M$ , las transformaciones de gauge pueden ser vistas como una transformación de las secciones  $\sigma_i : U_i \rightarrow P$ . En efecto, un automorfismo  $g : P \rightarrow P$  induce una transformación

$$A_i \rightsquigarrow \sigma_i^*(g^*A) = (g \circ \sigma_i)^* A.$$

Ahora bien,  $g \circ \sigma_i$  es una sección  $\tilde{\sigma}_i : U_i \rightarrow P$ . Existirá entonces algún  $\varrho : U_i \rightarrow G$  tal que, para cada  $x \in U_i$ ,  $\sigma_i(x) = \tilde{\sigma}_i(x)\varrho(x) = g \circ \sigma_i(x)\varrho(x)$ .

Si el fibrado  $P \rightarrow M$  es trivial puede demostrarse que los campos de gauge  $A_\mu^a$  transforman según la expresión

$$(3.80) \quad {}^g A_\mu^a = g^{-1} A_\mu^a g + g^{-1} dg,$$

con  $g : M \rightarrow G$ .

La acción del grupo de gauge  $\mathcal{G}$  sobre  $\mathcal{A}$  no es libre por lo que en general el cociente  $\mathcal{A}/\mathcal{G}$  no es una variedad. El problema puede ser sin embargo resuelto utilizando las así llamadas *conexiones referenciadas* (*framed connections*, ver Ref.[36]). Si  $x_0$  es un punto en  $M$ , entonces una conexión referenciada  $A$  sobre  $P$  es un par  $(A, \varphi)$  formado por una conexión  $A$  sobre  $P$  junto con un isomorfismo de  $G$ -espacios  $\varphi : G \rightarrow P_{x_0}$ . El grupo  $\mathcal{G}$  actúa libremente sobre el espacio  $\mathcal{A}_{Fr} = \mathcal{A} \times \text{Hom}(G, P_{x_0})$  de las conexiones referenciadas. Se denotará  $\mathcal{B}$  al cociente

$$\mathcal{B} = (\mathcal{A} \times \text{Hom}(G, P_{x_0})) / \mathcal{G}.$$

Otro modo de mirar el problema es fijar la referencia  $\phi$  y considerar el estabilizador  $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$

$$\mathcal{G}_0 = \{g \in \mathcal{G} \mid g(x_0) = 1\}.$$

Entonces  $\mathcal{B} = \mathcal{A}/\mathcal{G}_0$ . Dado que la acción es libre y usando el teorema del fijado de gauge de Coulomb de Uhlenbeck se sigue que  $\mathcal{A}_{Fr} \rightarrow \mathcal{B}$  es un  $\mathcal{G}$ -fibrado principal. En lo sucesivo denotaremos  $\mathcal{A}$  para el espacio de las conexiones referenciadas  $\mathcal{A}_{Fr}$ .

Según el procedimiento usual para fijar el gauge, es necesario definir una sección  $\sigma : \mathcal{A}/\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A}$  que seleccione un único representante  $A \in \mathcal{A}$  para cada órbita  $[A] \in \mathcal{A}/\mathcal{G}$ . Dicha sección puede ser definida por medio de una función

$$(3.81) \quad F({}^g A) = 0,$$

con  ${}^g A$  dado por (3.80). Esta ecuación permite despejar  $g = g(A)$  tal que para todo  $A$ , vale que  ${}^{g(A)} A$  satisface (3.81).

Sin embargo puede demostrarse que si la topología del fibrado no es trivial, entonces no es posible definir una única sección *global*  $\sigma$ . Esta obstrucción a la fijación del gauge por medio de una única sección se denomina *problema de Gribov* (ver Refs.[45, 78]). Con el objeto de demostrar que en general no existe una sección global  $\sigma$  consideremos la secuencia exacta de grupos de homotopía

$$\dots \rightarrow \pi_n(\mathcal{G}) \rightarrow \pi_n(\mathcal{A}) \rightarrow \pi_n(\mathcal{A}/\mathcal{G}) \rightarrow \pi_{n-1}(\mathcal{G}) \rightarrow \dots$$



(ver Refs.[30, 66, 73]). Si el fibrado tiene una sección global  $\sigma : \mathcal{A}/\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A}$ , entonces puede definirse una trivialización

$$\mathcal{A} \simeq \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{G}} \times \mathcal{G}.$$

En ese caso la secuencia exacta larga se parte en secuencias exactas cortas de la forma

$$0 \rightarrow \pi_n(\mathcal{G}) \rightarrow \pi_n(\mathcal{A}) \rightarrow \pi_n(\mathcal{A}/\mathcal{G}) \rightarrow 0.$$

Tendremos en consecuencia que

$$(3.82) \quad \pi_n(\mathcal{A}) \simeq \pi_n(\mathcal{G}) \oplus \pi_n(\mathcal{A}/\mathcal{G}) \quad \forall n.$$

Como  $\mathcal{A}$  es un espacio afín, es contraíble, es decir que  $\pi_n(\mathcal{A}) = 0 \forall n$ . Por otra parte, puede demostrarse que el grupo de gauge  $\mathcal{G}$  posee grupos de homotopía no triviales por lo que no es posible satisfacer la relación (3.82). En consecuencia el fibrado  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$  no puede ser trivial como se supuso al principio. No puede existir entonces una sección de fijado de gauge *global*  $\sigma : \mathcal{A}/\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A}$ . Este importante resultado fué obtenido por I.M. Singer en Ref.[78].

En una teoría de Yang-Mills existen en consecuencia dos espacios fibrados de relevancia, a saber el  $G$ -fibrado principal  $P \rightarrow M$  y el  $\mathcal{G}$ -fibrado principal  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$ . Con el objeto de definir un escenario geométrico unificado es necesario construir un nuevo espacio fibrado que incluya a estos dos fibrados. Para ello se tomará el pull-back del fibrado  $P \rightarrow M$  por la proyección  $p : \mathcal{A} \times M \rightarrow M$ . El nuevo fibrado es un  $G$ -fibrado principal  $p^*(P) \rightarrow \mathcal{A} \times M$ , donde el espacio total  $p^*(P)$  puede ser identificado con  $\mathcal{A} \times P$ :

$$\begin{array}{ccc} p^*(P) = \mathcal{A} \times P & & P \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A} \times M & \xrightarrow{p} & M. \end{array}$$

El grupo de gauge  $\mathcal{G}$  tiene una acción sobre  $\mathcal{A} \times M$  inducida por su acción sobre  $\mathcal{A}$ . Esta acción está cubierta por la acción de  $\mathcal{G}$  sobre  $p^*(P)$  inducida por su acción sobre  $\mathcal{A}$  y  $P$ .

El fibrado  $p^*(P)$  induce un  $G$ -fibrado principal (ver Ref.[3])

$$Q = (\mathcal{A} \times P)/\mathcal{G} \xrightarrow{\pi} \mathcal{A}/\mathcal{G} \times M.$$

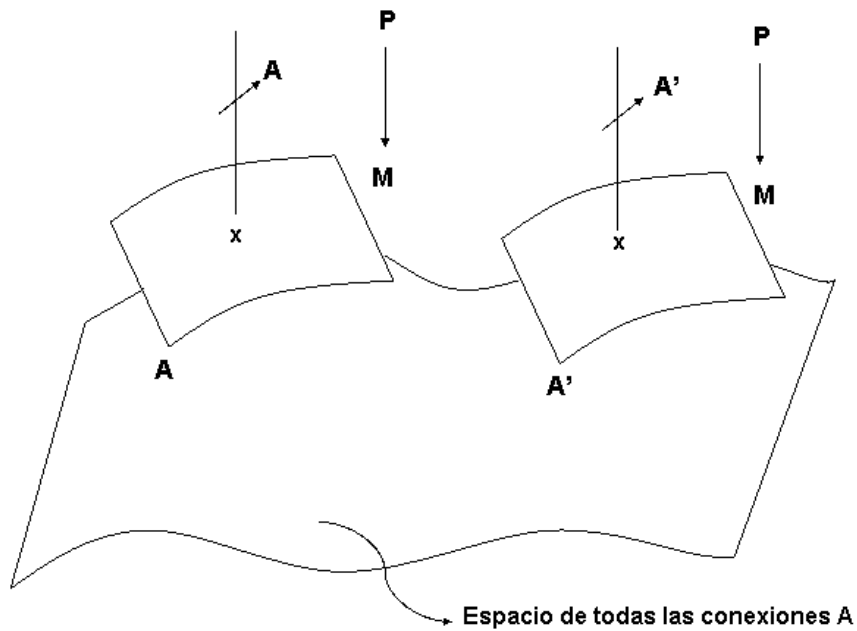


FIG. 6. Familia universal de conexiones.

Se tiene entonces la torre de fibrados principales:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{G} & \longrightarrow & p^*(P) = \mathcal{A} \times P \\
 & & \downarrow q \\
 G & \longrightarrow & Q = (\mathcal{A} \times P) / \mathcal{G} \\
 & & \downarrow \pi \\
 & & \mathcal{A} / \mathcal{G} \times M.
 \end{array}$$

El  $G$ -fibrado principal

$$p^*(P) = \mathcal{A} \times P \rightarrow \mathcal{A} \times M$$

puede ser considerado como una *familia universal* (parametrizada por el espacio  $\mathcal{A}$  de todas las conexiones) de  $G$ -fibrados principales  $P \rightarrow M$  con conexiones tautológicas  $A$ . Esto significa que en cada punto  $A$  en el espacio de todas las conexiones  $\mathcal{A}$  existe una copia del  $G$ -fibrado principal  $P \rightarrow M$  con conexión  $A$  (ver Figura N°6).

Puede definirse entonces una *familia universal de conexiones A* del modo siguiente. Sea  $(A, x)$  un punto de  $\mathcal{A} \times M$ . Entonces los elementos

de la fibra  $p^*(P)_{(A,x)}$  tienen la forma  $(A, p)$ ,  $p \in P$ . Fijemos uno de dichos elementos. Sea

$$v \in Tp^*(P)_{(A,p)}$$

un vector tangente tal que

$$\pi_*(v) \in TM \subset T(\mathcal{A} \times M)$$

(es decir que  $v$  está contenido en una copia de  $P$  en  $\mathcal{A} \times P$ ). Entonces  $\mathbf{A}(v) = A(v)$ . Se escribirá  $H_U$  para la distribución asociada a la familia  $\mathbf{A}$ . Para cada elemento  $A \in \mathcal{A}$  la distribución  $H_U$  induce la distribución  $H_A \subset TP$  definida por la conexión  $A$ . Esta familia universal de conexiones  $\mathbf{A}$  permite definir transportes paralelos a lo largo de caminos contenidos en cualquier copia de  $M$  dentro de  $\mathcal{A} \times M$ .

Elijamos ahora una conexión en el  $\mathcal{G}$ -fibrado principal  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$ . Escribiremos

$$\eta \in \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{L}ie(\mathcal{G})$$

para la 1-forma asociada a esta conexión y  $\mathcal{H}_\eta$  para la distribución correspondiente.

La conexión  $\eta$  definirá el fijado de gauge de la teoría. En lugar de seleccionar por medio de una sección de fijado de gauge  $\sigma$  un representante fijo  $A \in \mathcal{A}$  para cada elemento  $[A]$  en el espacio de las órbitas  $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ , la conexión  $\eta$  permite transportar paralelamente cualquier condición inicial  $A_0$  perteneciente a la fibra  $\pi^{-1}([A_0])$ .

Esta noción de fijado de gauge es más general que el fijado de gauge usual por medio de una sección  $\sigma$ . En efecto, toda sección

$$\sigma : \mathcal{A}/\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A}$$

puede ser obtenida integrando una conexión plana  $\eta_\sigma$  a partir de una condición inicial  $A_0$  perteneciente a la sección  $\sigma$  (es decir  $A_0/\sigma(\pi(A_0)) = A_0$ ). En efecto, dada una sección  $\sigma$ , puede definirse una conexión asociada  $\eta_\sigma$  tal que la distribución  $\mathcal{H}_{\eta_\sigma}$  sea siempre tangente a la sección  $\sigma$ . En los puntos  $A \in \mathcal{A}$  no pertenecientes a la imagen de  $\sigma$ , los subespacios horizontales pueden ser definidos usando la equivariancia de las conexiones. Por ejemplo, si  $A = A_0 \cdot g$  con  $g \in \mathcal{G}$  y  $A_0 \in \sigma(\mathcal{A}/\mathcal{G})$  la distribución  $\mathcal{H}_{\eta_\sigma}$  en  $A$  valdrá

$$\mathcal{H}_{\eta_\sigma}(A) = R_{g*}\mathcal{H}_{\eta_\sigma}(A_0).$$

Si ahora integramos la distribución  $\mathcal{H}_{\eta_\sigma}$  con  $A_0$  como condición inicial, se reobtiene la sección  $\sigma$ . Por el contrario, una conexión no puede en general ser integrada, aún localmente, a una sección. Una obstrucción local es la curvatura y una obstrucción global es la monodromía. Este es un resultado standard para el caso de fibrados de

dimensión finita. Para el caso de dimensión infinita el resultado está establecido en Ref.[57]. Por otra parte, es siempre posible definir una conexión *global*  $\eta$ , aún cuando la topología del fibrado  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$  sea no trivial (obstrucción de Gribov). De esta manera, el fijado de gauge por medio de una conexión  $\eta$  es efectivamente una generalización del fijado de gauge usual por medio de secciones.

Esta generalización de la noción de fijado de gauge puede verse como una reproducción a nivel del fibrado  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$  de lo que sucede con el fibrado  $P \rightarrow M$ . Como se explicó en la Sección N°1, en lugar de identificar de un modo *global* y *rígido* a todas las fibras  $G_x$  (con  $x \in M$ ) por medio de una sección trivializante  $s : M \rightarrow P$ , se puede definir una *conexión*  $A$ , la cual permite realizar transportes paralelos entre las distintas fibras. A diferencia de una sección, estos transportes paralelos no establecen una identificación entre las distintas fibras (ya que en general dependen del camino) por lo que no trivializan el fibrado: las fibras  $G_x$ , aún siendo isomorfas, siguen siendo explícitamente distintas. Esta estrategia permitió en el caso del fibrado  $P \rightarrow M$  introducir naturalmente a los campos de gauge  $A_\mu^a$  asociados a las distintas interacciones fundamentales. En el caso del fibrado  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$ , el fijado de gauge usual por medio de una sección  $\sigma : \mathcal{A}/\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A}$ , establece una identificación entre todas las fibras  $\pi^{-1}([A])$  (con  $[A] \in \mathcal{A}/\mathcal{G}$ ), identificando cada una de ellas al grupo de gauge  $\mathcal{G}$ . Dicha identificación equivale a trivializar el fibrado (al menos localmente). Sin embargo, si seguimos la analogía con el fibrado  $P \rightarrow M$ , deberíamos preguntarnos si, en lugar de identificar a las fibras y trivializar el fibrado, no sería más conveniente relacionar a las distintas fibras  $\pi^{-1}([A])$  por medio de transportes paralelos definidos por una conexión. Como veremos a continuación esta estrategia permite en primer lugar introducir naturalmente a los fantasmas del complejo BRST. En segundo lugar no existen obstrucciones globales al fijado de gauge por medio de una conexión. En tercer lugar es posible considerar a los campos de gauge y a la conexión de fijado de gauge como partes de una única *conexión extendida* en un espacio fibrado convenientemente elegido.

De esta manera tenemos un  $G$ -fibrado principal  $P \rightarrow M$  con conexiones  $A$  y un  $\mathcal{G}$ -fibrado principal  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$  con conexión  $\eta$ . Analizaremos ahora como es posible, a partir de estas dos conexiones, definir una única conexión en el fibrado unificado  $\mathcal{A} \times P \rightarrow \mathcal{A} \times M$ .

La distribución  $\mathcal{H}_\eta$  asociada a la conexión de fijado de gauge  $\eta$  y la distribución  $H_U$  asociada a la familia universal de conexiones  $\mathbf{A}$  definen

una distribución suave  $\widetilde{\mathcal{H}}$  sobre  $Tp^*(P)$ . Si  $(A, p) \in p^*(P)$ , entonces

$$(3.83) \quad \widetilde{\mathcal{H}}_{(A,p)} = \mathcal{H}_\eta(A) \oplus H_U(A)(p).$$

Demostraremos ahora la siguiente proposición:

**Proposición.** *La distribución  $\widetilde{\mathcal{H}}$  es transversal a las órbitas de la acción de  $\mathcal{G}$  sobre  $\mathcal{A} \times P$  y a las fibras de  $p^*(P)$ .*

*Dem.* Sea  $(A, p) \in p^*(P)$ . Entonces se tienen dos homomorfismos de espacios vectoriales

$$\iota : \mathfrak{g} \rightarrow T_p P$$

y

$$\kappa : \mathcal{L}ie(\mathcal{G}) \rightarrow T_A \mathcal{A}.$$

Estos homomorfismos son inducidos por las estructuras de fibrado principal de  $P$  y  $\mathcal{A}$ . Para cada punto  $p$  hay también un homomorfismo de evaluación entre álgebras de Lie

$$\tau_p : \mathcal{L}ie(\mathcal{G}) \rightarrow \mathfrak{g}$$

dado por

$$\tau_p(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}(p),$$

donde se usó la identificación de los elementos de  $\mathcal{L}ie(\mathcal{G})$  con mapas equivariantes  $\mathfrak{g} : P \rightarrow \mathfrak{g}$ . Con estas definiciones, el espacio tangente a la órbita  $F_\mathcal{G}$  de la acción de  $\mathcal{G}$  en un punto  $(A, p)$  es igual a

$$(3.84) \quad TF_\mathcal{G}(A, p) = \{\mathbf{v} - v \in T_A \mathcal{A} \oplus T_p P \mid \mathbf{v} = \kappa(\mathfrak{g}) \text{ y } v = \iota(\tau_p(\mathfrak{g}))\}.$$

Diagramáticamente se tiene

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \in \mathcal{L}ie \mathcal{G} & \xrightarrow{\kappa} & V_A \mathcal{A} \\ \tau_p \downarrow & \searrow \iota \circ \tau_p & \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\iota} & V_p P. \end{array}$$

La proposición se sigue del hecho de que el espacio tangente a las órbitas está contenido en la suma de los espacios tangentes a las órbitas en  $\mathcal{A}$  y  $P$

$$TF_\mathcal{G}(A, p) \subset V_A \mathcal{A} \oplus V_p P.$$

Ahora bien, la distribución  $\widetilde{\mathcal{H}}_{(A,p)}$  dada por (3.83) es transversal a dichos espacios.  $\square$

La distribución  $\widetilde{\mathcal{H}}$  no define sin embargo una conexión en  $p^*(P)$  ya que el espacio tangente a  $(A, p)$  se descompone como

$$Tp^*(P)_{(A,p)} = TF_{\mathcal{G}}(A, p) \oplus \underbrace{\mathcal{H}_{\eta}(A) \oplus H_U(A)(p)}_{\widetilde{\mathcal{H}}_{(A,p)}} \oplus \iota(\mathfrak{g}),$$

siendo  $\iota(\mathfrak{g})$  el subespacio vertical. En otras palabras, la distribución  $\widetilde{\mathcal{H}}$  no define espacios vectoriales complementarios a los subespacios verticales  $\iota(\mathfrak{g})$ . Esto es una consecuencia del hecho de que el grupo de gauge  $\mathcal{G}$  no forma parte de la dirección vertical en el fibrado  $\mathcal{A} \times P \rightarrow \mathcal{A} \times M$ . Podría decirse que en esta descomposición “sobra” el término  $TF_{\mathcal{G}}(A, p)$ . Si eliminásemos dicho término, entonces  $\widetilde{\mathcal{H}}$  definiría subespacios complementarios al subespacio vertical  $\iota(\mathfrak{g})$ . En efecto, si cocentamos el fibrado  $\mathcal{A} \times P \rightarrow \mathcal{A} \times M$  por el grupo de gauge  $\mathcal{G}$ , la distribución  $\widetilde{\mathcal{H}}$  sí define una conexión. Tenemos entonces el siguiente lema.

**Lema.** *La distribución  $\widetilde{\mathcal{H}}$  es  $\mathcal{G}$ -invariante e induce una conexión  $\mathcal{H}$  en el  $G$ -fibrado principal  $Q = (\mathcal{A} \times P)/\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G} \times M$ .*

Este lema se sigue de la invariancia de las distribuciones  $\mathcal{H}_{\eta}$  y  $H_U$ .

La situación puede entonces ser resumida mediante el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{A} \times P & \\ q \swarrow & & \searrow \\ Q = \frac{\mathcal{A} \times P}{\mathcal{G}} & & \mathcal{A} \times M \\ & \searrow & \swarrow \\ & \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{G}} \times M & \end{array}$$

Sea ahora  $\mathcal{E}$  una conexión sobre el fibrado  $\mathcal{A} \times P \rightarrow \mathcal{A} \times M$  obtenida como el pull-back de la conexión  $\mathcal{H}$  por la proyección  $\mathcal{A} \times M \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G} \times M$ . Este pull-back puede ser visto tanto en el lenguaje de las distribuciones como en el de las formas.

El mapa

$$q : \mathcal{A} \times P \rightarrow Q$$

induce un mapa

$$q_* : T(\mathcal{A} \times P) \rightarrow TQ.$$

En cada punto  $(A, p)$  el subespacio de

$$T_{(A,p)}(\mathcal{A} \times P)$$

que define  $\mathcal{E}$  es

$$q_*^{-1}(\mathcal{H}_{q(A,p)}).$$

La 1-forma  $\mathbb{A} \in \Omega^1(\mathcal{A} \times P) \otimes \mathfrak{g}$  asociada a  $\mathcal{E}$  es el pull-back por  $q$  de la 1-forma asociada a  $\mathcal{H}$ . Identificaremos ahora la distribución  $\mathcal{E}$  y la 1-forma  $\mathbb{A}$ .

La distribución que define la nueva conexión en cada punto  $(A, p)$  es la suma directa

$$(3.85) \quad \mathcal{E}_{(A,p)} = TF_{\mathcal{G}}(A, p) \oplus \underbrace{\mathcal{H}_{\eta}(A) \oplus H_U(A)(p)}_{\widetilde{\mathcal{H}}_{(A,p)}}.$$

Si  $(A, p) \in \mathcal{A} \times P$  y  $v = v_1 + v_2 \in T_A\mathcal{A} \oplus T_pP$ , entonces definiremos la 1-forma  $\mathbb{A}$  valuada en  $\mathfrak{g}$  sobre  $\mathcal{A} \times P$  como

$$(3.86) \quad \mathbb{A}(v) = \mathbf{A}_{(A,p)}(v_2) + \eta(v_1)(p) \in \mathfrak{g}.$$

Demostremos ahora que efectivamente cualquier vector  $v$  en la distribución (3.85) pertenece al núcleo de la 1-forma  $\mathbb{A}$ .

**Lema.** Si  $v \in TF_{\mathcal{G}}(A, p) \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_{(A,p)}$ , entonces  $\mathbb{A}(v) = 0$ .

*Dem.* (i) Si

$$v \in H_U(A)(p) \subset \widetilde{\mathcal{H}}_{(A,p)},$$

entonces

$$\mathbb{A}(v) = \mathbf{A}_{(A,p)}(v) = A(v) = 0$$

por definición de la conexión  $A$ .

(ii) Si

$$v \in \mathcal{H}_{\eta}(A) \subset \widetilde{\mathcal{H}}_{(A,p)},$$

entonces

$$\mathbb{A}(v) = \eta(v)(p) = 0$$

por definición de la conexión  $\eta$ .

(iii) Si

$$v = \kappa(\mathfrak{g}) - \iota(\tau_p(\mathfrak{g})) \in TF_{\mathcal{G}}(A, p),$$

entonces

$$\mathbb{A}(v) = -\mathbf{A}_{(A,p)}(\iota(\tau_p(\mathfrak{g}))) + \eta(\kappa(\mathfrak{g}))(p) = -A(\iota(\tau_p(\mathfrak{g}))) + \eta(\kappa(\mathfrak{g}))(p).$$

Por definición de conexión  $A \circ \iota = id_{\mathfrak{g}}$  y  $\eta \circ \kappa = id_{\mathcal{L}ie(\mathcal{G})}$ . Se tiene entonces  $\mathbb{A}(v) = -\tau_p(\mathfrak{g}) + \mathfrak{g}(p) = 0$  por definición del homomorfismo de evaluación  $\tau_p$ . Diagramáticamente se tiene

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{g} \in \text{Lie } \mathcal{G} & \xrightarrow{\tau_p} & g \in \mathfrak{g} & \xrightarrow{\iota} & T_pP \\ \downarrow \kappa & \searrow id = \eta \circ \kappa & & \searrow id = A \circ \iota & \downarrow A \\ T_A\mathcal{A} & \xrightarrow{\eta} & \mathfrak{g} \in \text{Lie } \mathcal{G} & \xrightarrow{\tau_p} & g \in \mathfrak{g}. \end{array}$$

□

Se ve de esta manera que el espacio  $TF_{\mathcal{G}}(A, p)$  tangente a la acción del grupo de gauge  $\mathcal{G}$  sobre  $\mathcal{A} \times P$  está incluido en la distribución  $\mathcal{E}$  definida por la 1-forma  $\mathbb{A}$ . La presencia del término  $TF_{\mathcal{G}}(A, p)$  en dicha distribución muestra que el grupo de gauge  $\mathcal{G}$ , aún viniendo del factor  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{A} \times P$ , tiene que actuar tanto sobre  $\mathcal{A}$  como sobre  $P$  a los efectos de definir un subespacio horizontal. Esto significa que esta construcción geométrica no es una adición trivial de conexiones en un espacio producto. El hecho de que  $TF_{\mathcal{G}}(A, p)$  defina un subespacio horizontal gracias a la cancelación de los factores  $\mathbf{A}_{(A,p)}(v_2)$  y  $\eta(v_1)$  en (3.86) es otra manifestación del hecho de que la teoría así definida será invariante ante la acción del grupo de gauge  $\mathcal{G}$  gracias a la cancelación mutua de la acción de  $\mathcal{G}$  sobre  $P$  con la acción de  $\mathcal{G}$  sobre las conexiones  $A$ .

La conexión definida por  $\mathbb{A}$  en el  $G$ -fibrado principal  $\mathcal{A} \times P \rightarrow \mathcal{A} \times M$  será la *conexión extendida* definitoria del *principio de gauge extendido*.

### 3.3. Curvatura extendida y transformaciones BRST.

En esta sección se estudiará la curvatura  $\mathbb{F}$  de la conexión extendida  $\mathbb{A}$ . Dado que se tiene el difeomorfismo

$$p^*(P) \simeq \mathcal{A} \times P,$$

el complejo de de Rham de  $p^*(P)$  es el producto tensorial graduado de los complejos de de Rham de  $\mathcal{A}$  y  $P$ . Este hecho tiene dos consecuencias. En primer lugar, las formas diferenciales tienen una bigraduación natural ( $(q, p)$ -formas  $\in \Omega^q(\mathcal{A}) \otimes \Omega^p(P)$ ). En segundo lugar, la derivada exterior  $\Delta$  en  $p^*(P)$  puede ser descompuesta como la suma de la derivada exterior  $\delta$  en  $\mathcal{A}$  y la derivada exterior  $d$  en  $P$ :

$$\Delta = \delta + d.$$

Usando esta separación de la derivada exterior y la bigraduación natural de las formas diferenciales se obtiene la siguiente descomposición de la curvatura  $\mathbb{F}$ :

$$\mathbb{F} = \Delta_{\mathbb{A}} \mathbb{A} = \Delta \mathbb{A} + \frac{1}{2} [\mathbb{A}, \mathbb{A}] = \mathbb{F}^{(2,0)} + \mathbb{F}^{(1,1)} + \mathbb{F}^{(0,2)},$$

donde

$$(3.87) \quad \mathbb{F}^{(2,0)} = \delta \eta + \frac{1}{2} [\eta, \eta] \equiv \phi,$$

$$(3.88) \quad \mathbb{F}^{(1,1)} = \delta \mathbf{A} + d\eta + [\mathbf{A}, \eta] \equiv \psi,$$

$$(3.89) \quad \mathbb{F}^{(0,2)} = d\mathbf{A} + \frac{1}{2} [\mathbf{A}, \mathbf{A}] \equiv \mathbf{F}.$$



La familia de  $(0, 2)$ -formas  $\mathbf{F}$  es la familia universal de formas de curvatura correspondientes a la familia universal de conexiones  $\mathbf{A}$ . En este sentido la ecuación (3.89) es la extensión a familias de la ecuación de estructura de Maurer-Cartan.

La  $(2, 0)$ -forma  $\phi$  es la curvatura de la conexión  $\eta$  y la  $(1, 1)$ -forma  $\psi$  es un término mixto que involucra tanto el campo de gauge  $A$  como la conexión de fijado de gauge  $\eta$ . Este último término muestra nuevamente que esta construcción geométrica mezcla de un modo no trivial las estructuras geométricas provenientes de los fibrados  $P \rightarrow M$  y  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$ .

Ahora procederemos a descomponer las ecuaciones (3.87) y (3.88) con el objeto de recobrar las transformaciones BRST usuales de los campos de gauge y de los fantasmas. La foliación del espacio de las conexiones  $\mathcal{A}$  por las fibras de la proyección  $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$  determina un subfibrado  $\ker d\pi$  de  $T\mathcal{A}$ . Las secciones  $\Omega_V^k(\mathcal{A})$  de  $\wedge^k(\ker d\pi)^*$  para  $k > 0$  serán denominadas *formas diferenciales verticales*. Se definirá

$$\Omega_V^0(\mathcal{A}) = \mathcal{C}^\infty(\mathcal{A}).$$

El diferencial del complejo de de Rham de  $\mathcal{A}$  induce un diferencial  $\delta_V$  sobre las formas verticales. El complejo

$$\Omega_V^*(\mathcal{A}) \otimes \Omega^*(P) \otimes \mathcal{L}ie(\mathcal{G})$$

será denominado *complejo vertical*. La existencia de una conexión  $\eta$  en el  $\mathcal{G}$ -fibrado principal  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$  define en cada punto una separación

$$T_A\mathcal{A} = \ker d\pi \oplus \mathcal{H}_\eta$$

y una separación similar en los espacios duales

$$T_A\mathcal{A}^* = \ker d\pi^* \oplus \mathcal{H}_\eta^*.$$

Tomando secciones se obtiene

$$(3.90) \quad \Omega^1(\mathcal{A}) = \Omega_V^1(\ker d\pi^*) \oplus \Gamma(\mathcal{H}_\eta^*).$$

Tensorizando ambos lados de (3.90) con  $\Omega^*(P) \otimes \mathcal{L}ie(\mathcal{G})$  se obtiene

$$(3.91) \quad \begin{aligned} \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes \Omega^*(P) \otimes \mathcal{L}ie(\mathcal{G}) &= (\Omega_V^1(\mathcal{A}) \otimes \Omega^*(P) \otimes \mathcal{L}ie(\mathcal{G})) \\ &\oplus (\Gamma(\mathcal{H}_\eta^*) \otimes \Omega^*(P) \otimes \mathcal{L}ie(\mathcal{G})). \end{aligned}$$

Esta decomposición muestra que se puede identificar el complejo vertical con un subcomplejo de

$$\Omega^*(\mathcal{A}) \otimes \Omega^*(P) \otimes \mathcal{L}ie(\mathcal{G}).$$

Por medio de dicha identificación la forma  $\eta$  puede ser identificada con una forma vertical. En particular, se ve que las  $(1, 1)$ -formas tienen

una decomposición en dos términos uno de los cuales es la parte de grado (1, 1) del complejo vertical.

Escribiremos ahora la descomposición explícita de ambos lados de la ecuación (3.88). Sean  $p_V$  y  $p_H$  los proyectores sobre los factores asociados a la decomposición (3.90). Si se consideran a los elementos de

$$\Omega^0(\mathcal{A}) \otimes \Omega^1(P) \otimes \mathcal{L}ie(\mathcal{G})$$

como funciones sobre  $\mathcal{A}$  valuadas en

$$\Omega^1(P) \otimes \mathcal{L}ie(\mathcal{G}),$$

entonces  $\delta$  tiene una descomposición natural

$$\delta = \delta_V + \delta_H,$$

donde  $\delta_V = p_V \circ \delta$  y  $\delta_H = p_H \circ \delta$ .

La 1-forma  $\mathbf{A}$  correspondiente a la familia universal de conexiones puede ser interpretada como una función

$$\mathbf{A} : \mathcal{A} \rightarrow \Omega^1(P) \otimes \mathfrak{g}.$$

La inclusión natural  $\mathfrak{g} \subset \mathcal{L}ie(\mathcal{G})$  induce la inclusión

$$\Omega^1(P) \otimes \mathfrak{g} \subset \Omega^1 \otimes \mathcal{L}ie(\mathcal{G}).$$

La 1-forma  $\mathbf{A}$  puede ser considerada entonces como una función

$$\mathbf{A} : \mathcal{A} \rightarrow \Omega^1(P) \otimes \mathcal{L}ie(\mathcal{G}).$$

El elemento  $\delta \mathbf{A} \in \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes \Omega^1(P) \otimes \mathcal{L}ie(\mathcal{G})$  puede entonces ser descompuesto como

$$\delta \mathbf{A} = \delta_V \mathbf{A} + \delta_H \mathbf{A},$$

con

$$\delta_V \mathbf{A} \in \Omega_V^1(\mathcal{A}) \otimes \Omega^*(P) \otimes \mathcal{L}ie(\mathcal{G}),$$

$$\delta_H \mathbf{A} \in \Gamma(\mathcal{H}_\eta^*) \otimes \Omega^*(P) \otimes \mathcal{L}ie(\mathcal{G}).$$

La familia universal de conexiones  $\mathbf{A}$  induce una familia de conexiones en cada uno de los fibrados vectoriales asociados a  $P$ . En particular,  $\mathbf{A}$  determina una familia de conexiones sobre  $\text{ad}(P) = P \times_G \mathfrak{g} \rightarrow M$ . Recordando que  $\mathcal{L}ie(\mathcal{G}) = \Gamma(\text{ad}(P))$ , esta familia de conexiones puede ser vista como un homomorfismo

$$d_{\mathbf{A}} : p^*(\mathcal{L}ie(\mathcal{G})) \rightarrow p^*(\Omega^1(P)) \otimes p^*(\mathcal{L}ie(\mathcal{G})),$$

dado en cada copia  $\{A\} \times \mathcal{L}ie(\mathcal{G})$  por la derivada covariante

$$d_A : \mathcal{L}ie(\mathcal{G}) \rightarrow \Omega^1(P) \otimes \mathcal{L}ie(\mathcal{G})$$

asociada a la conexión  $A$ . Para definir el codominio de este homomorfismo se usó que

$$\Omega^1(M) \simeq \Omega^1(P)_{\text{básicas}} \subset \Omega^1(P),$$

donde  $\Omega^1(P)_{\text{básicas}}$  son las 1-formas *básicas* en  $P$ , es decir las 1-formas  $\omega$  *invariantes* ( $\mathcal{L}_X\omega = 0$ ) y *horizontales* ( $\omega(X) = 0$ ) con  $X \in VP$ .

El término  $d_{\mathbf{A}}\eta$  es por definición la extensión

$$\mathbf{1} \otimes d_{\mathbf{A}} : \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes \text{Lie}(\mathcal{G}) \rightarrow \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes \Omega^1(P) \otimes \text{Lie}(\mathcal{G})$$

aplicada a  $\eta$ . Dado que el homomorfismo  $\mathbf{1} \otimes d_{\mathbf{A}}$  actúa sobre el segundo factor, el mismo preserva las formas verticales. Se sigue entonces que

$$d_{\mathbf{A}}\eta = d\eta + [\mathbf{A}, \eta]$$

es una forma vertical. A partir de estas consideraciones se ve que el sumando vertical en el lado izquierdo de (3.88) es

$$(3.92) \quad \delta_V \mathbf{A} + d\eta + [\mathbf{A}, \eta].$$

Consideraremos ahora el lado derecho de la ecuación (3.88). Dado que la conexión  $\mathbb{A}$  es el pull-back de la conexión definida por la distribución  $\mathcal{H}$  en el  $G$ -fibrado principal

$$Q = (\mathcal{A} \times P)/\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G} \times M,$$

lo mismo es cierto de la curvatura  $\mathbb{F}$ . Si llamamos  $\omega_{\mathcal{H}}$  y  $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$  a las formas de conexión y curvatura asociadas a la distribución  $\mathcal{H}$  respectivamente, entonces tendremos

$$\mathbb{A} = q^*\omega_{\mathcal{H}}$$

y

$$\mathbb{F} = q^*\mathcal{F}_{\mathcal{H}},$$

donde  $q$  es la proyección

$$\mathcal{A} \times P \xrightarrow{q} (\mathcal{A} \times P)/\mathcal{G}.$$

Vale entonces que

$$\mathbb{F}(X) = q^*\mathcal{F}_{\mathcal{H}}(X) = \mathcal{F}_{\mathcal{H}}(q_*X).$$

Ahora bien, si  $X$  es un vector tangente a las fibras de la acción de  $\mathcal{G}$  sobre  $\mathcal{A} \times P$  (es decir si  $X = (\mathbf{v}, -v) \in TF_{\mathcal{G}}$  con  $TF_{\mathcal{G}}$  dado por (3.84)), entonces vale que  $q_*X = 0$  (ya que al cocentar por  $\mathcal{G}$ , los vectores tangentes a la acción de  $\mathcal{G}$  se anulan). Se tiene en consecuencia que

$$\mathbb{F}(X) = \mathcal{F}_{\mathcal{H}}(q_*X) = 0.$$

Obtuvimos entonces que la contracción de la curvatura  $\mathbb{F}$  con un vector  $(\mathbf{v}, -v)$  tangente a las fibras de la acción de  $\mathcal{G}$  sobre  $\mathcal{A} \times P$  es cero:

$$(3.93) \quad \iota_{(\mathbf{v}, -v)} \mathbb{F} = 0.$$

Analizando las diferentes componentes de  $\mathbb{F}$ , se obtiene que

(1)  $\iota_{(\mathbf{v}, -v)} \mathbb{F}^{(2,0)} = \iota_{(\mathbf{v})} \mathbb{F}^{(2,0)} = 0$  dado que  $\mathbb{F}^{(2,0)}$  es inducida por la conexión  $\eta$  y  $\mathbf{v}$  es vertical para esta conexión.

(2)  $\iota_{(\mathbf{v}, -v)} \mathbb{F}^{(0,2)} = \iota_{-v} \mathbb{F}^{(0,2)} = 0$  dado que  $\mathbb{F}^{(0,2)}$  es inducida por la conexión  $A$  y  $v$  es vertical para esta conexión.

(3)  $\iota_{-v} \mathbb{F}^{(1,1)} = 0$  dado que  $v$  es tangente a las fibras de  $p^*(P)$ .

De estas consideraciones y de la ecuación (3.93) se sigue que

$$0 = \iota_{(\mathbf{v}, -v)} \mathbb{F} = \iota_{(\mathbf{v}, -v)} \mathbb{F}^{(1,1)} = \iota_{\mathbf{v}} \mathbb{F}^{(1,1)} = \iota_{\mathbf{v}} \psi.$$

De esta manera se demostró la siguiente proposición:

**Proposición.** *El elemento  $\psi$  es horizontal para la conexión  $\eta$ .*

La ecuación (3.88) se separa entonces en las ecuaciones

$$(3.94) \quad \delta_V \mathbf{A} = -d_{\mathbf{A}} \eta,$$

$$(3.95) \quad \delta_H \mathbf{A} = \psi.$$

Si efectuamos la substitución  $\eta \rightsquigarrow c$  (donde  $c$  son los fantasmas asociados a la simetría de gauge de una teoría de Yang-Mills) e identificamos el diferencial vertical  $\delta_V$  con el operador BRST, la ecuación (3.94) es la extensión a familias de la transformación BRST usual de la conexión  $A$ . En la Sección N°3.5 se aclarará cual es la relación entre los fantasmas  $c$  y la conexión de fijado de gauge  $\eta$  que autoriza a intepretar la ecuación (3.94) como la transformación BRST de los campos de gauge  $A$ .

La ecuación para la  $(2, 0)$ -forma  $\phi$  también puede ser canónicamente descompuesta en componentes pertenecientes a los complejos verticales y horizontales. El diferencial  $\delta$  actuando sobre elementos de

$$\Omega^1(\mathcal{A}) \otimes \Omega^0(P) \otimes \mathcal{L}ie(\mathcal{G})$$

también tiene una decomposición

$$\delta = \delta_V + \delta_H,$$

donde ahora

$$\delta_V = \delta \circ p_V$$

y

$$\delta_H = \delta \circ p_H.$$

La parte horizontal  $\delta_H$  corresponde a la derivada covariante con respecto a la conexión  $\eta$ . Se tiene en consecuencia la separación

$$\delta\eta = \delta_V\eta + \delta_H\eta \in \Omega^2(\mathcal{A}) \otimes \Omega^0(P) \otimes \mathcal{L}ie(\mathcal{G}).$$

Por definición de la curvatura  $\phi$  asociada a la conexión  $\eta$  se tiene

$$(3.96) \quad \delta_H\eta = \phi.$$

La componente vertical  $\delta_V\eta$  de la ecuación debe ser tal que

$$\delta_V\eta + \delta_H\eta = \delta\eta = \phi - \frac{1}{2} [\eta, \eta],$$

donde se usó la ecuación de estructura de Maurer-Cartan. Se obtiene entonces

$$(3.97) \quad \delta_V\eta = -\frac{1}{2} [\eta, \eta].$$

Nuevamente, si efectuamos la substitución  $\eta \rightsquigarrow c$  (e identificamos  $\delta_V$  con  $\delta_{BRST}$ ), esta última ecuación coincide con la transformación BRST usual de los fantasmas  $c$ . Este resultado (así como la ecuación (3.94)) parece indicar que los fantasmas deberían poder asociarse -en algún sentido a precisar- con la “parte vertical” de la conexión de fijado de gauge  $\eta$ . En la Sección N°3.5 aclararemos dicha identificación así como la relación entre los fantasmas y las formas de Maurer-Cartan del grupo de gauge  $\mathcal{G}$ .

Resulta remarcable que a los efectos de recuperar las transformaciones BRST para una teoría de Yang-Mills ordinaria (es decir no topológica) no haya sido necesario imponer las así denominadas *condiciones de horizontalidad* (o *plitud*) sobre la curvatura extendida  $\mathbb{F}$ . Dichas condiciones de horizontalidad tienen la forma

$$\mathbb{F} = F$$

o equivalentemente

$$\phi = \psi = 0$$

(ver por ejemplo Refs.[9, 11, 41, 81]). Por otra parte, si la topología del fibrado  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$  es tal que no es posible definir una conexión  $\eta$  *plana*, entonces es estrictamente incorrecto imponer la condición de horizontalidad  $\phi = 0$ .

### 3.4. Principio de gauge extendido y teorías de Yang-Mills topológicas.

El principal antecedente para la definición de una conexión extendida en teorías de Tang-Mills es el trabajo de L. Baulieu y I. M. Singer sobre teorías de Yang-Mills topológicas [10]. Procederemos ahora a comparar ambos formalismos.

Las teorías de Yang-Mills topológicas fueron introducidas por E. Witten en Ref.[86] con el objeto de proveer una representación en términos de teoría de campos de los invariantes de Donaldson de 4-variedades (ver Ref.[36]). Sin embargo fué recién en el trabajo de L. Baulieu y I. M. Singer que la teoría de Witten fué reinterpretada en el contexto de la cuantificación BRST de una acción con una simetría topológica (para una introducción general a teorías topológicas de campo ver Refs.[14, 28, 41]).

La acción clásica de una teoría de Yang-Mills topológica es la integral sobre una 4-variedad  $\mathcal{M}$  de la primera clase de Chern del  $G$ -fibrado principal  $P \rightarrow \mathcal{M}$ . La acción es entonces

$$S_{YMT} = \int_{\mathcal{M}} Tr(F \wedge F),$$

donde  $F$  es la curvatura de la conexión  $A$ . Como esta acción es la integral de una clase de cohomología, su valor no depende del representante particular elegido dentro de cada clase. En consecuencia,  $S_{YMT}$  es invariante ante deformaciones continuas arbitrarias de la conexión  $A$ . Esta invariancia define la *simetría topológica*  $\delta_{Top}A = \epsilon(x)$  donde  $\epsilon(x)$  es una 1-forma valuada en el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Además de esta simetría topológica, la acción  $S_{YMT}$  es invariante ante las transformaciones de gauge usuales  $\delta_{YM}A = d_A\xi(x)$  donde  $\xi(x)$  es una 0-forma valuada en  $\mathfrak{g}$ . La teoría es entonces invariante ante transformaciones generales de la forma

$$\delta A = d_A\xi(x) + \epsilon(x).$$

En el marco del formalismo BRST es necesario introducir campos fantasmas para cada una de dichas simetrías. Se definen entonces la 0-forma  $c$  y la 1-forma  $\psi$ , ambas de número de fantasma  $gh = 1$  (donde el número de fantasma está definido por la graduación como forma en  $\mathcal{A}$ ). Dichas formas son los fantasmas correspondientes a la simetría de gauge ordinaria y la simetría topológica respectivamente. La transformación BRST del campo de gauge  $A$  tendrá entonces la forma

$$(3.98) \quad \delta_{BRST}A = -d_{AC} + \psi,$$

donde los parámetros infinitesimales fueron reemplazados por los correspondientes campos fantasmas.

Dado que el parámetro  $\epsilon$  de la simetría topológica está definido a menos de una transformación de gauge  $\epsilon \sim \epsilon + d_A \epsilon(x)$  (es decir que  $\epsilon$  posee su propia invariancia de gauge), estas dos simetrías no son independientes. Es entonces necesario introducir un *fantasma de fantasma*. Se define entonces una 0-forma  $\phi$  de número de fantasma  $gh \phi = 2$ .

En Ref.[10] la transformación BRST (3.98) así como las transformación BRST para el resto de los campos fueron reobtenidas por medio del formalismo geométrico definido en Ref.[3]. Para ello se definió una *conexión extendida*  $\omega = A + c$  con curvatura  $\mathcal{F} = \Delta_\omega \omega = \mathcal{F}^{(2,0)} + \mathcal{F}^{(1,1)} + \mathcal{F}^{(0,2)}$ , donde  $\Delta = \delta + d$ . Expandiendo esta ecuación en la bigraduación correspondiente e identificando  $\mathcal{F}^{(0,2)} \doteq \mathbf{F}$ ,  $\mathcal{F}^{(1,1)} \doteq \psi$  y  $\mathcal{F}^{(2,0)} \doteq \phi$  se obtiene

$$\begin{aligned}\phi &= \delta c + \frac{1}{2} [c, c], \\ \psi &= \delta \mathbf{A} + d_A c, \\ \mathbf{F} &= d\mathbf{A} + \frac{1}{2} [\mathbf{A}, \mathbf{A}].\end{aligned}$$

Si efectuamos la substitución  $c \rightsquigarrow \eta$ , estas ecuaciones son equivalentes a las ecuaciones (3.87, 3.88, 3.89) obtenidas en Ref.[21] en el marco del principio de gauge extendido para teorías de Yang-Mills ordinarias.

Dado que las teorías de Yang-Mills topológicas son invariantes ante deformaciones continuas *arbitrarias* de la conexión  $A$ , el diferencial  $\delta$  en  $\mathcal{A}$  coincide con el diferencial BRST correspondiente  $\delta_{BRST-Top}$ . Por el contrario, en teorías de Yang-Mills ordinarias el diferencial BRST  $\delta_{BRST-YM}$  coincide con el diferencial del complejo vertical  $\delta_V$  asociado al álgebra exterior sobre las fibras (ver Figura N°7).

El formalismo introducido en Ref.[10] para teorías de Yang-Mills *topológicas* y el formalismo denominado *principio de gauge extendido* definido en Ref.[21] para teorías de Yang-Mills *ordinarias* poseen importantes diferencias:

1- En la teoría topológica la conexión extendida  $\omega = A + c$  está formada a partir del campo de gauge  $A$  y el fantasma  $c$  asociado a la simetría de gauge ordinaria. El gauge de la teoría topológica debe luego ser fijado para cada una de las simetrías. Por el contrario, en el marco del principio de gauge extendido para teorías de Yang-Mills ordinarias, en la conexión extendida  $\mathbb{A} = A + \eta$  no aparece explícitamente el fantasma  $c$  sino la conexión de fijado de gauge  $\eta$ . Como se aclarará en la Sección N°3.5 existen el menos dos formas de vincular al fantasma

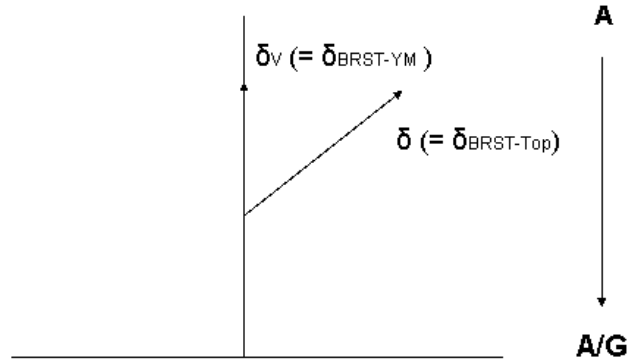


FIG. 7. Diferencial BRST en teorías de Yang-Mills ordinarias y topológicas.

$c$  con la conexión  $\eta$ . En primer lugar, dada una trivialización local, el fantasma  $c$  puede asociarse a la *parte vertical canónica* de la conexión  $\eta$ . En segundo lugar la conexión  $\eta$  puede ser *definida* como la imagen del fantasma  $c$  (considerado como la forma de Maurer-Cartan del grupo de gauge  $\mathcal{G}$ ) ante un *homomorfismo de Chern-Weil*. Sin embargo la conexión  $\eta$ , además de introducir a los fantasmas,  *fija el gauge de la teoría*. De esta manera la conexión extendida  $\mathbb{A}$  incluye a los *campos de gauge*  $A$ , a los *fantasmas*  $c$  y el  *fijado de gauge* definido por  $\eta$ .

2- En el marco del principio de gauge extendido los campos  $\psi$  y  $\phi$  no son interpretados como campos fantasmas. En efecto en teorías de Yang-Mills ordinarias solo es necesario introducir el fantasma  $c$  asociado a la simetría de gauge ordinaria. En estas teorías, el número de fantasma está definido como la graduación como forma en el complejo *vertical* (y no como forma en *todo*  $\mathcal{A}$  como en las teorías topológicas). Dado que los campos  $\psi$  y  $\phi$  son horizontales (ya que son componentes de la curvatura  $\mathbb{F}$  de  $\mathbb{A}$ ), *poseen número de fantasma cero*. Sin embargo, dado que en Ref.[21] no fué necesario imponer las condiciones de horizontalidad  $\psi = \phi = 0$  para reobtener las transformaciones BRST de los campos,  $\psi$  y  $\phi$  pueden ser no nulos *aún en teorías no topológicas*. A partir de dichos campos debería ser posible calcular observables topológicos asociados a la no trivialidad del fibrado  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$ . En particular, si el fibrado no admite una conexión  $\eta$  plana, el campo  $\phi$  (curvatura de  $\eta$ ) *no puede ser cero*.

3- En el trabajo de L. Baulieu y I.M. Singer la conexión  $\omega$  es una conexión *natural*, definida por medio de los complementos ortogonales



a las órbitas de  $G$ . Con el objeto de definir dichos complementos ortogonales se usa el hecho de que el espacio  $\mathcal{A} \times P$  tiene una métrica riemanniana invariante ante  $\mathcal{G} \times G$  (ver Ref.[3]). En nuestro caso la conexión  $\mathbb{A}$ , siendo tautológica en la dirección de  $P$ , *no es natural en la dirección de  $\mathcal{A}$* . En efecto, la conexión de fijado de gauge  $\eta$  -la cual define la conexión extendida  $\mathbb{A}$  en la “dirección” de  $\mathcal{A}$ - puede ser libremente elegida. Esta libertad es justamente la libertad de elegir el gauge en el marco del principio de gauge extendido.

### 3.5. Relación entre los fantasmas y la conexión de fijado de gauge.

En esta sección se analizará la relación entre los fantasmas de una teoría de Yang-Mills ordinaria y la conexión de fijado de gauge  $\eta$  introducida en Ref.[21].

Sea una sección local

$$\sigma_i : U_i \subset \mathcal{A}/\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A},$$

y la trivialización inducida correspondiente

$$\varphi_{\sigma_i} : U_i \times \mathcal{G} \rightarrow \pi^{-1}(U_i) \subset \mathcal{A}.$$

Por medio de esta trivialización  $\varphi_{\sigma_i}$ , podemos tomar el pull-back de  $\eta$ , es decir considerar  $\eta$  del lado de  $U_i \times \mathcal{G}$ . La sección local  $\sigma_i$  define por medio de su tangente otra dirección “horizontal” además de la definida por la distribución  $\mathcal{H}_\eta$ . Esta distribución puede entonces ser descompuesta en las nuevas direcciones horizontales ( $U_i$ ) y verticales ( $\mathcal{G}$ ) definidas por  $\sigma_i$ . Para hacer esto es necesario primero tomar el pull-back de  $\eta$  por  $\sigma_i$

$$\eta_i = \sigma_i^* \eta \in \Omega^1(U_i) \otimes \mathcal{L}ie(\mathcal{G}).$$

Este pull-back definirá la componente “horizontal” de  $\eta$ . Sea ahora un vector tangente  $X$  a  $U_i \times \mathcal{G}$ , es decir un vector de la forma

$$X = W + V \in T_{([A],g)}(U_i \times \mathcal{G}).$$

Puede demostrarse que el pull-back de la conexión  $\eta$  por  $\varphi_{\sigma_i}$  actuando sobre dicho vector  $X$  toma la forma

$$\varphi_{\sigma_i}^* \eta_{([A],g)}(W + V) = ad_{g^{-1}} \eta_i(W) + \theta_{MC}(V),$$

donde

$$\theta_{MC} \in \Omega^1(\mathcal{G}) \times \mathcal{L}ie(\mathcal{G})$$

es la forma de Maurer-Cartan del grupo de gauge  $\mathcal{G}$  (ver Figura N°8). Dicha forma satisface la propiedad  $\theta_{MC}(\kappa(\xi)) = \xi$ , donde  $\xi \in \mathcal{L}ie(\mathcal{G})$

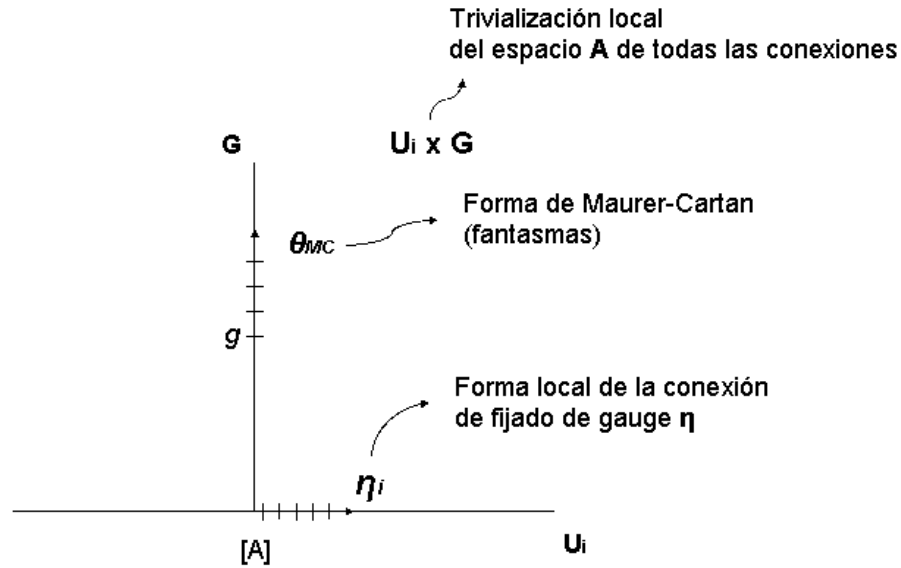


FIG. 8. Pull-back de la conexión de fijado de gauge por medio de una trivialización local.

y  $\kappa$  es el homomorfismo canónico  $\mathcal{L}ie(\mathcal{G}) \xrightarrow{\kappa} T\mathcal{G}$ . La forma de Maurer-Cartan satisface además

$$(3.99) \quad d_{\mathcal{G}}\theta_{MC} = -\frac{1}{2}[\theta_{MC}, \theta_{MC}],$$

siendo esta relación equivalente a (3.97) (para una definición de la forma de Maurer-Cartan ver Apéndice A1). Teniendo en cuenta la similitud entre (3.99) y (3.97), en Ref.[16] los fantasmas del complejo BRST fueron identificados con las formas de Maurer-Cartan  $\theta_{MC}$  del grupo de gauge  $\mathcal{G}$ .

De esta manera la trivialización  $\varphi_{\sigma_i}$  permite separar a la conexión  $\eta$  en una parte horizontal  $ad_{g^{-1}}\eta_i$  que depende de la conexión  $\eta$  y una parte vertical *canónica*  $\theta_{MC}$  (en el sentido de que no depende ni de  $\eta$  ni de la sección  $\sigma_i$ ). Si identificamos de acuerdo con Ref.[16] a los fantasmas con las formas de Maurer-Cartan  $\theta_{MC}$ , entonces el pull-back de la conexión de fijado de gauge  $\eta$  por medio de la trivialización local  $\varphi_{\sigma_i}$  muestra que los fantasmas así definidos pueden ser asociados a la *parte vertical canónica* de  $\eta$ . De esta manera puede decirse que en el marco del principio de gauge extendido los fantasmas y el fijado de gauge de la teoría son diferentes aspectos de la misma entidad geométrica, a saber la conexión  $\eta$  en el  $\mathcal{G}$ -fibrado principal  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$ .

Sin embargo, esta identificación de los fantasmas con la parte vertical canónica de la conexión  $\eta$  reposa sobre una trivialización del fibrado, es decir sobre la definición de una familia  $\{\sigma_i\}$  de secciones locales. Estas secciones establecen una identificación (no canónica) entre las distintas fibras del fibrado  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$  y el grupo de gauge  $\mathcal{G}$ . Es de esperar entonces que la parte “vertical” de la conexión  $\eta$  (la cual es una 1-forma en  $\mathcal{A}$ ) pueda ser identificada con las 1-formas canónicas sobre  $\mathcal{G}$ . Sin embargo, en el marco del principio de gauge extendido, la introducción de la conexión de fijado de gauge  $\eta$  substituye a la trivialización del fibrado por medio de las secciones locales  $\{\sigma_i\}$ . Es necesario entonces preguntarse si no existe una forma alternativa de caracterizar la relación entre la conexión de fijado de gauge  $\eta$  y los fantasmas *que no requiera trivializar el fibrado*. En Refs.[21, 23] se propuso en efecto otra forma de comprender dicha relación. Para ello es necesario introducir el *álgebra de Weil* del grupo de gauge  $\mathcal{G}$  (ver Refs.[32, 46, 54, 80]).

El álgebra de Weil es un modelo algebraico universal para el álgebra generada por una conexión y su curvatura. Una conexión  $\eta$  sobre un  $\mathcal{G}$ -fibrado principal  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$  es un elemento de  $\Omega^1(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{L}ie(\mathcal{G})$ . Estos elementos pueden ser considerados como mapas del dual  $\mathcal{L}ie(\mathcal{G})^*$  en  $\Omega^1(\mathcal{A})$ . Del mismo modo la curvatura  $\phi$  de  $\eta$  es un elemento de  $\Omega^2(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{L}ie(\mathcal{G})$ , es decir un mapa de  $\mathcal{L}ie(\mathcal{G})^*$  en  $\Omega^2(\mathcal{A})$ . Se tiene entonces las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned} \eta \in \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{L}ie(\mathcal{G}) &\leftrightarrow \eta : \mathcal{L}ie(\mathcal{G})^* \rightarrow \Omega^1(\mathcal{A}), \\ \phi \in \Omega^2(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{L}ie(\mathcal{G}) &\leftrightarrow \phi : \mathcal{L}ie(\mathcal{G})^* \rightarrow \Omega^2(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

Esto significa que tanto la conexión  $\eta$  como su curvatura  $\phi$  pueden ser consideradas como mapas de  $\mathcal{L}ie(\mathcal{G})^*$  al álgebra exterior  $\Omega^*(\mathcal{A})$  de formas en  $\mathcal{A}$ . Esto sugiere la posibilidad de construir sobre  $\mathcal{L}ie(\mathcal{G})^*$  un modelo algebraico universal para el álgebra de una conexión y su curvatura. Estas consideraciones deberían motivar las definiciones siguientes.

El álgebra de Weil de un álgebra de Lie  $\mathfrak{k}$  de un grupo de Lie  $K$  es el producto tensorial

$$\mathcal{W}(\mathfrak{k}) = S^*\mathfrak{k}^* \otimes \wedge^*\mathfrak{k}^*$$

de un álgebra simétrica  $S^*\mathfrak{k}^*$  y el álgebra exterior  $\wedge^*\mathfrak{k}^*$  construida a partir del dual  $\mathfrak{k}^*$  al álgebra de Lie  $\mathfrak{k}$ . Sea  $T_a$  una base de  $\mathfrak{k}$  y  $\vartheta^a$  una base de su espacio dual  $\mathfrak{k}^*$ . El álgebra de Weil está entonces generada

por los elementos

$$\begin{aligned}\theta^a &= 1 \otimes \vartheta^a, \\ \zeta^a &= \vartheta^a \otimes 1.\end{aligned}$$

La graduación se define asignando grado 1 a  $\theta^a$  y grado 2 a  $\zeta^a$ . Ya que la conexión y la curvatura pertenecen a un álgebra de formas diferenciales *valuadas en el álgebra de Lie correspondiente*, vamos a tensorizar el álgebra de Weil  $\mathcal{W}(\mathfrak{k})$  con el álgebra de Lie  $\mathfrak{k}$ . Sean entonces los elementos  $\theta$  y  $\zeta$  en  $\mathcal{W}(\mathfrak{k}) \otimes \mathfrak{k}$  definidos como

$$\begin{aligned}\theta &= \theta^a \otimes T_a, \\ \zeta &= \zeta^a \otimes T_a.\end{aligned}$$

El elemento  $\theta$  coincide con la forma de Maurer-Cartan  $\theta_{MC}$  del grupo de Lie. El diferencial de Weil  $\delta_{\mathcal{W}}$  se define de modo que su acción sobre estos elementos sea

$$\begin{aligned}\delta_{\mathcal{W}}\theta &= \zeta - \frac{1}{2}[\theta, \theta], \\ \delta_{\mathcal{W}}\zeta &= -[\theta, \zeta].\end{aligned}$$

Estas ecuaciones reproducen a nivel del modelo universal la ecuación de estructura de Maurer-Cartan (3.78) y la identidad de Bianchi (3.79) respectivamente.

El diferencial de Weil  $\delta_{\mathcal{W}}$  puede ser decompuesto en dos diferenciales

$$\delta_{\mathcal{W}} = \delta_H + \delta_{\mathfrak{k}}.$$

El primero de ellos coincide con la derivada covariante

$$\delta_H = \zeta^a \otimes \iota_a,$$

donde  $\iota_a$  es la multiplicación interior de grado  $-1$  sobre  $\mathcal{W}(\mathfrak{k})$ . El segundo diferencial es

$$\delta_{\mathfrak{k}} = \theta^a K_a + \frac{1}{2} f^{abc} \theta^a \theta^b \iota_c,$$

donde  $K_a$  es una derivación lineal de grado 0 definida como

$$K_a = -f^{abc} \left[ \zeta^b \frac{\partial}{\partial \zeta^c} + \theta^b \iota_c \right],$$

donde  $f^{abc}$  son las constantes de estructura del álgebra de Lie. Estas derivaciones lineales definen una representación de  $K$  sobre  $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$  definidas por la acción coadjunta de  $K$  sobre  $\mathcal{W}(\mathfrak{k})$ . El diferencial  $\delta_{\mathfrak{k}}$  es el diferencial asociado a la *cohomología de álgebra de Lie* de  $\mathfrak{k}$  con

valores en la representación definida por  $K_a$ . La acción de estos dos diferenciales sobre  $\theta$  es

$$\begin{aligned}\delta_H\theta &= \zeta, \\ \delta_{\mathfrak{t}}\theta &= -\frac{1}{2}[\theta, \theta].\end{aligned}$$

Estas ecuaciones coinciden con las ecuaciones (3.96) y (3.97) respectivamente. De esta manera se reproduce a nivel del modelo universal la separación de la ecuación  $\delta\eta = \phi - \frac{1}{2}[\eta, \eta]$  en una componente vertical canónica  $\delta_V\eta = -\frac{1}{2}[\eta, \eta]$  y una componente horizontal  $\delta_H\eta = \phi$  que depende de la conexión de fijado de gauge  $\eta$ . De esta manera es posible identificar el diferencial BRST con el diferencial  $\delta_{\mathfrak{t}}$  y la cohomología BRST con la cohomología del álgebra de Lie a valores en la representación correspondiente.

Ahora mostraremos como es posible vincular a los fantasmas (identificados con las formas de Maurer-Cartan del grupo de gauge  $\mathcal{G}$ ) con la conexión de fijado de gauge  $\eta$  *sin trivializar el fibrado*. Para ello es necesario tener en cuenta que toda conexión  $\eta$  sobre un  $\mathcal{G}$ -fibrado principal  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$  puede ser definida como la imagen de la forma de Maurer-Cartan  $\theta_{MC}$  del grupo de gauge  $\mathcal{G}$  ante un *homomorfismo de Chern-Weil*<sup>15</sup>. Un homomorfismo de Chern-Weil es un mapa  $\omega_{\mathfrak{h}}$  del álgebra  $\mathcal{W}(\mathcal{L}ie(\mathcal{G})) \otimes \mathcal{L}ie(\mathcal{G})$  al álgebra  $\Omega^*(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{L}ie(\mathcal{G})$  de formas diferenciales sobre  $\mathcal{A}$  valuadas en  $\mathcal{L}ie(\mathcal{G})$ :

$$\omega_{\mathfrak{h}} : (\mathcal{W}(\mathcal{L}ie(\mathcal{G})) \otimes \mathcal{L}ie(\mathcal{G}), \delta_{\mathcal{W}}) \longrightarrow (\Omega^*(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{L}ie(\mathcal{G}), \delta).$$

Si identificamos de acuerdo con Ref.[16] a los fantasmas con la forma de Maurer-Cartan  $\theta_{MC}$  del grupo de gauge  $\mathcal{G}$ , entonces esta definición de una conexión nos permite reconsiderar la relación entre los fantasmas y la conexión de fijado de gauge  $\eta$ . En efecto, en lugar de identificar

<sup>15</sup>Esta propiedad de universalidad hace del álgebra de Weil un análogo algebraico del *fibrado universal*  $EG \rightarrow BG$ . Dado un grupo  $G$ , se denomina fibrado universal al  $G$ -fibrado  $EG \rightarrow BG$  tal que todo  $G$ -fibrado principal  $P \rightarrow M$  puede ser obtenido como el pullback de  $EG$  por un mapa  $f : M \rightarrow BG$ . Se tiene entonces el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} P \cong f^*EG & & EG \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & BG. \end{array}$$

Puede demostrarse que si dos mapas  $f, g : M \rightarrow BG$  son homotópicos, entonces los  $G$ -fibrados principales  $f^*EG$  y  $g^*EG$  serán isomorfos. Puede concluirse entonces que las clases de isomorfismo de  $G$ -fibrados principales  $P \rightarrow M$  están en correspondencia biunívoca con las clases de homotopía de mapas  $f : M \rightarrow BG$  (ver Ref.[18])

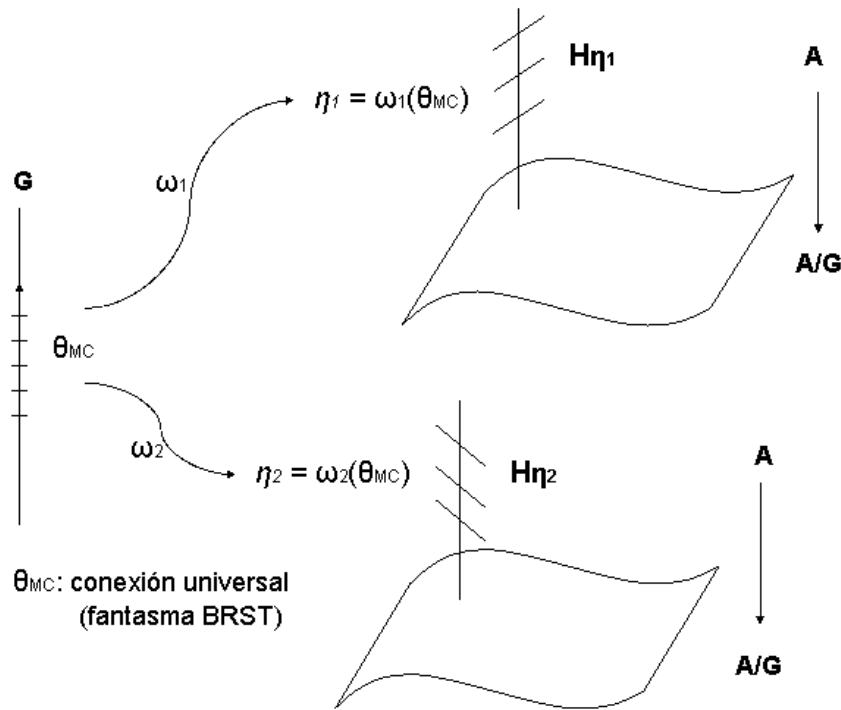


FIG. 9. Homomorfismos de Chern-Weil.

a los fantasmas con la parte vertical canónica de la conexión  $\eta$  (lo cual depende de la definición de una trivialización local), es posible considerarlos, en tanto que formas de Maurer-Cartan, como la *conexión universal* definida en  $\mathcal{W}(\mathcal{L}ie(\mathcal{G})) \otimes \mathcal{L}ie(\mathcal{G})$ . De esta manera, puede afirmarse que la conexión de fijado de gauge  $\eta$  está dada por una *inmersión* particular de los fantasmas (formas de Maurer-Cartan consideradas como conexión universal) en el fibrado  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$ . La inmersión de  $\theta_{MC}$  en  $\Omega^*(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{L}ie(\mathcal{G})$  por medio de un homomorfismo de Chern-Weil *particular*  $\omega_{\natural}$  define entonces una conexión *particular* de fijado de gauge

$$\eta = \omega_{\natural}(\theta_{MC}).$$

Podemos afirmar entonces que fijar el gauge es elegir un homomorfismo de Chern-Weil. De esta manera, diferentes “encarnaciones” del *fantasma universal*  $\theta_{MC}$  definen diferentes fijados de gauge de la teoría (ver Figura N°9).

### 3.6. Formulaci3n hamiltoniana de las teorías de Yang-Mills.

Hasta ahora hemos trabajado con estructuras geométricas *covariantes*, es decir que no hemos separado explícitamente el espacio del tiempo. Dado que el fijado de gauge generalizado se efectúa por medio de transportes paralelos *en el tiempo* definidos por la conexi3n de fijado de gauge  $\eta$ , la implementaci3n del mismo requiere formular la teoría en t3rminos *can3nicos*, es decir en t3rminos de estructuras geométricas espaciales dependientes del tiempo. Es necesario entonces reformular el principio de gauge extendido en el marco de un formalismo hamiltoniano. En esta secci3n fijaremos la notaci3n y resumiremos la formulaci3n hamiltoniana de las teorías de Yang-Mills.

En lo sucesivo denotaremos  $\mathcal{M}$  para el espacio-tiempo. Supondremos que la 4-variedad  $\mathcal{M}$  puede ser foliada con hipersuperficies espaciales por medio de un difeomorfismo

$$\iota : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \times M,$$

donde  $M$  es una 3-variedad riemanniana (asumiremos por simplicidad que  $M$  es compacta). Sea  $G$  un grupo de Lie compacto con un producto interno fijo en su álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  y sea  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M}$  un  $G$ -fibrado principal. Usando el difeomorfismo  $\iota$  y el hecho de que  $\mathbb{R}$  es contraíble podemos asumir que el fibrado  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M}$  sobre el espacio-tiempo  $\mathcal{M}$  es el pullback de un  $G$ -fibrado principal  $P \rightarrow M$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} \cong p^*(P) & & P \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{p} & M, \end{array}$$

donde  $p : \mathcal{M} \simeq \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  es la proyecci3n.

Denotaremos  $\mathcal{A}$  a las conexiones en  $\mathcal{P}$ . Dado que podemos identificar a  $\mathcal{P}$  con  $\mathbb{R} \times P$ , cada conexi3n  $\mathcal{A}$  tiene una descomposici3n can3nica

$$(3.100) \quad \mathcal{A} = A(t) + A_0(t)dt,$$

donde  $A(t)$  es una conexi3n dependiente del tiempo sobre  $P$  y  $A_0(t)$  es una secci3n dependiente del tiempo del fibrado asociado  $\text{ad}(P) = P \times_G \mathfrak{g}$ .

Gracias a la descomposici3n (3.100) una conexi3n en  $\mathcal{P}$  corresponde a un camino en el conjunto de los pares  $(A, A_0)$ . Denotaremos  $\mathcal{G}$  al grupo de los automorfismos de  $P$  y lo llamaremos el *grupo de gauge*. El grupo  $\mathcal{G}$  actúa sobre el conjunto de pares  $(A, A_0)$ . Sobre la primera coordenada la acci3n corresponde a la acci3n usual sobre conexiones. La acci3n sobre la segunda coordenada est3 inducida por la acci3n

natural sobre fibrados asociados. Esta acción es la restricción de la acción del grupo de los automorfismos de  $\mathcal{P}$  a  $\{t\} \times M$ . Sea  $\mathcal{A}$  el espacio de las conexiones  $A$  en  $P$ . La acción del grupo de gauge  $\mathcal{G}$  sobre  $\mathcal{A}$  es libre (ver Ref.[36]). Asumiremos entonces que  $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$  es un  $\mathcal{G}$ -fibrado principal. Denotaremos  $A$  las conexiones en  $\mathcal{A}$  y  $[A]$  las clases de equivalencia en  $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ .

En coordenadas locales esta descomposición 3+1 corresponde a la descripción usual en el marco de la formulación hamiltoniana de las teorías de Yang-Mills (ver Refs.[38, 49]). La correspondiente acción canónica tiene la forma

$$(3.101) \quad S = \int dt \int d^3x \left( \dot{A}_k^a \pi_a^k - \mathcal{H}_0(\pi_a^k, B_a^k) - A_0^a \phi_a \right),$$

donde  $\pi_a^k = F_a^{k0}$  y  $B_k^a = \frac{1}{2} \varepsilon_{kmn} F^{amn}$  (con  $F_{mn}^a$  las intensidades de campo).

El Hamiltoniano de Yang-Mills  $\mathcal{H}_0(\pi_a^k, B_a^k)$  es

$$\mathcal{H}_0(\pi_a^k, B_a^k) = \frac{1}{2} [\pi_a^k \pi_k^a + B_a^k B_k^a],$$

y las funciones  $\phi_a$  son

$$\phi_a = -\partial_k \pi_a^k + f_{ab}^c \pi_c^k A_k^b.$$

De la forma de la acción (3.101) resulta que los pares  $(A_k^a, \pi_a^k)$  son las variables canónicas de la teoría, mientras que la componente temporal  $A_0^a$  de los campos de gauge no es una variable dinámica, sino el multiplicador de Lagrange para el vínculo de Gauss generalizado

$$\phi_a \approx 0.$$

### 3.7. Fijado de gauge generalizado en integrales de camino.

3.7.1. *Fijado de gauge por medio de secciones.* El principal problema en la cuantificación de teorías de gauge es el cómputo de las amplitudes de transición

$$(3.102) \quad \langle [A_0] | [A_1] \rangle = \int_{T^*\mathcal{P}([A_0], [A_1])} \exp\{iS\} \mathcal{D}\mathcal{A} \mathcal{D}\pi,$$

donde  $S$  es la acción definida en (3.101),  $\mathcal{D}\mathcal{A}$  es la medida de Feynman en el espacio  $\mathcal{P}([A_0], [A_1])$  de los caminos en  $\mathcal{A}/\mathcal{G}$

$$\mathcal{P}([A_0], [A_1]) = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G} \mid \gamma(0) = [A_0], \gamma(1) = [A_1]\},$$

y  $\mathcal{D}\pi$  es una medida en el espacio de los momentos.

Dado que la geometría del espacio cociente  $\mathcal{A}/\mathcal{G}$  es en general complicada, se suele reemplazar la integral (3.102) por una integral sobre los caminos en el espacio afín  $\mathcal{A}$ . A dichos efectos, se eligen dos elementos



$A_0 \in \pi^{-1}[A_0]$ ,  $A_1 \in \pi^{-1}[A_1]$  en las fibras de  $[A_0]$  y  $[A_1]$  respectivamente y se reemplaza la integral (3.102) por

$$(3.103) \quad \langle A_0 | A_1 \rangle = \int_{T^*\mathcal{P}(A_0, A_1)} \exp\{iS\} \mathcal{D}\mathcal{A} \mathcal{D}\pi,$$

donde la integral es ahora sobre el espacio cotangente al espacio  $\mathcal{P}(A_0, A_1)$  de los caminos en  $\mathcal{A}$

$$\mathcal{P}(A_0, A_1) = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{A} \mid \gamma(0) = A_0, \gamma(1) = A_1\}.$$

El problema con este procedimiento es que introduce un infinito en la integral de camino proveniente de la integración sobre grados de libertad no físicos. La proyección  $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$  induce una proyección

$$\tilde{\pi} : \mathcal{P}(A_0, A_1) \rightarrow \mathcal{P}([A_0], [A_1]).$$

El grupo de mapas

$$\widetilde{\mathcal{P}\mathcal{G}} = \{g(t) : [0, 1] \rightarrow \mathcal{G} \mid g(0) = g(1) = id_{\mathcal{G}}\}$$

actúa sobre  $\mathcal{P}(A_0, A_1)$  por medio de una multiplicación punto a punto y las fibras de  $\tilde{\pi}$  consisten en las órbitas de la acción de  $\widetilde{\mathcal{P}\mathcal{G}}$ . Dado que la acción  $S$  es invariante ante la acción de  $\widetilde{\mathcal{P}\mathcal{G}}$ , es necesario extraer el volumen de este grupo de la integral (3.103). A dichos efectos, el procedimiento usual es el de *fixar el gauge* definiendo una sección  $\sigma : \mathcal{A}/\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A}$  tal que  $\sigma([A_i]) = A_i$ ,  $i = 0, 1$ . La sección de fijado de gauge  $\sigma$  induce un mapa  $\rho$

$$\mathcal{P}(A_0, A_1) \xrightarrow[\tilde{\pi}]{\rho} \mathcal{P}([A_0], [A_1]),$$

dado por  $\rho(\gamma) = \sigma \circ \gamma$ , el cual define una sección de  $\tilde{\pi}$ . Esta sección  $\rho$  induce una trivialización

$$\mathcal{P}(A_0, A_1) \simeq \mathcal{P}([A_0], [A_1]) \times \widetilde{\mathcal{P}\mathcal{G}},$$

así como una descomposición similar a nivel del fibrado cotangente.

Es importante remarcar que la definición de una sección de fijado de gauge  $\sigma$  en el  $\mathcal{G}$ -fibrado principal  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$  en el *espacio de los campos* (ver Figura N°10), es solo un paso auxiliar para definir una sección  $\rho$  de la  $\widetilde{\mathcal{P}\mathcal{G}}$ -proyección  $\mathcal{P}(A_0, A_1) \rightarrow \mathcal{P}([A_0], [A_1])$  en el *espacio de los caminos en el cual la integral de camino está definida* (ver Figura N°11). Sin embargo, cuando la topología del fibrado  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$  no es trivial, no es posible fijar el gauge por medio de una única sección global  $\sigma$  (ver Refs.[45, 78]).

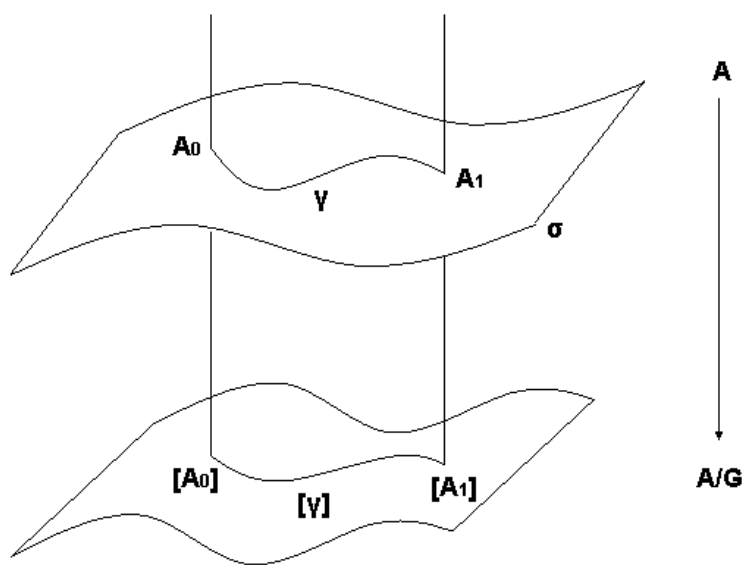


FIG. 10. Fijado de gauge por medio de una sección: espacio de los campos.

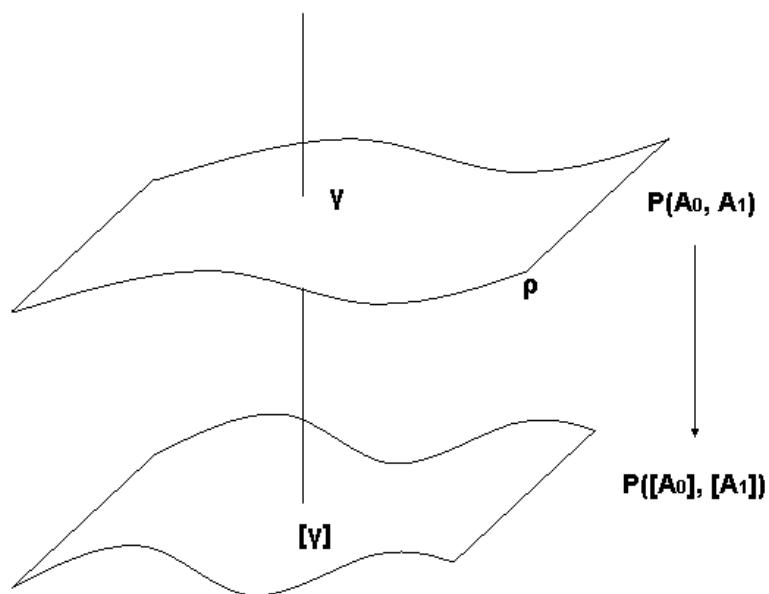


FIG. 11. Fijado de gauge por medio de una sección: espacio de los caminos.

3.7.2. *Fijado de gauge por medio de conexiones.* Consideraremos ahora el *fijado de gauge generalizado* definido en Ref.[21]. Dicho fijado de gauge está definido por medio de una conexión de fijado de gauge  $\eta$  en lugar de por medio de una sección  $\sigma$ .

Consideraremos ahora caminos en  $\mathcal{A}$  con la condición inicial  $A_0$  fija y la condición final definida a menos de una transformación de gauge. En otros términos, la condición final puede ser *cualquier* elemento de la fibra final  $\pi^{-1}[A_1]$ . El espacio de caminos correspondiente es

$$\mathcal{P}(A_0, \pi^{-1}[A_1]) = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{A} \mid \gamma(0) = A_0, \pi(\gamma(1)) = [A_1]\}.$$

El grupo de los caminos

$$\mathcal{P}\mathcal{G} = \{g(t) : [0, 1] \rightarrow \mathcal{G} \mid g(0) = \text{id}_{\mathcal{G}}\}$$

actúa sobre  $\mathcal{P}(A_0, \pi^{-1}[A_1])$ , siendo el cociente  $\mathcal{P}([A_0], [A_1])$ . Denotaremos la proyección como

$$(3.104) \quad \pi : \mathcal{P}(A_0, \pi^{-1}[A_1]) \rightarrow \mathcal{P}([A_0], [A_1]).$$

Puede demostrarse que la acción del grupo de los caminos  $\mathcal{P}\mathcal{G}$  sobre  $\mathcal{P}(A_0, \pi^{-1}[A_1])$  es libre.

Definamos ahora el *fijado de gauge generalizado* por medio de la conexión de fijado de gauge  $\eta$  en el fibrado  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$ . En el caso general (con curvatura o monodromía), la conexión  $\eta$  no induce una sección de  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$  ya que los transportes paralelos dependen del camino. Sin embargo, puede mostrarse que la conexión de fijado de gauge  $\eta$  *siempre* define una sección inducida  $\sigma_\eta$  de la proyección (3.104). En efecto, los transportes paralelos a lo largo de caminos en  $\mathcal{A}/\mathcal{G}$  de la condición inicial  $A_0 \in \pi^{-1}[A_0]$  definen una sección  $\sigma_\eta$  de la proyección  $\pi$

$$\mathcal{P}(A_0, \pi^{-1}[A_1]) \xrightarrow{\pi} \mathcal{P}([A_0], [A_1]).$$

$\overset{\sigma_\eta}{\curvearrowright}$

En otras palabras, la sección  $\sigma_\eta$  asigna a cada camino  $[\gamma] \in \mathcal{P}([A_0], [A_1])$  su levantado horizontal  $\gamma_h$  con condición inicial  $A_0$  definido por medio de  $\eta$

$$\gamma_h = \sigma_\eta([\gamma]) \in \mathcal{P}(A_0, \pi^{-1}[A_1]).$$

La condición local para que un camino  $\gamma$  pertenezca a la imagen de  $\sigma_\eta$  es que los vectores  $\dot{\gamma}$  tangentes a  $\gamma$  pertenezcan en cada punto  $A \in \mathcal{A}$  al subespacio horizontal  $\mathcal{H}_A^\eta$  definido por la forma de conexión  $\eta$ . Teniendo en cuenta que por definición  $\mathcal{H}_A^\eta = \text{Ker } \eta_A$ , esta condición de fijado de gauge asume la forma

$$\eta(\dot{\gamma}) = 0, \quad \forall t.$$

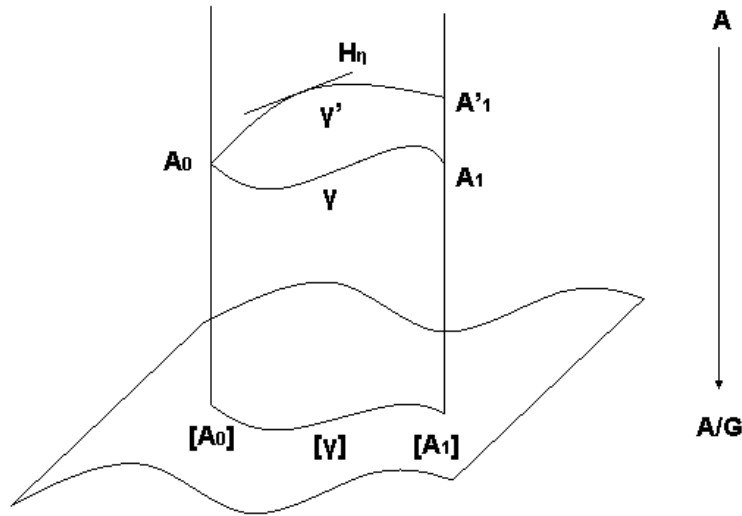


FIG. 12. Fijado de gauge por medio de una conexión: espacio de los campos.

En una trivialización local esta condición define una ecuación ordinaria no lineal (ver Ref.[62])<sup>16</sup>. El punto fundamental es que, aún cuando la conexión de fijado de gauge  $\eta$  no define en general una sección del fibrado  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$  como el fijado de gauge usual, *siempre define una sección  $\sigma_\eta$  de la proyección  $\pi$  en el espacio de los caminos*. En la Figura N°12 los caminos  $\gamma$  y  $\gamma'$  se proyectan sobre el mismo camino  $[\gamma]$  en el espacio de las órbitas  $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ . Sin embargo, solamente el camino  $\gamma'$  satisface la condición de fijado de gauge de ser siempre tangente a la distribución  $\mathcal{H}^\eta$  definida por  $\eta$ . En el espacio de los caminos esto significa que los dos caminos  $\gamma$  y  $\gamma'$  pertenecen a la misma fibra  $\pi^{-1}([\gamma])$ , pero solamente  $\gamma'$  pertenece a la sección  $\sigma_\eta$  inducida por  $\eta$  (ver Figura N°13). Teniendo en cuenta que estrictamente la integral de camino es una integral sobre el espacio de los caminos (y no sobre el espacio de los campos), la sección  $\sigma_\eta$  inducida por la conexión  $\eta$  alcanza para eliminar el volumen infinito del grupo de los caminos  $\mathcal{P}\mathcal{G}$  en la integral de camino.

<sup>16</sup>El teorema de existencia de transportes paralelos fué extendido a dimensión infinita en Ref.[57, Teorema 39.1]. Se demuestra también allí que el transporte paralelo depende suavemente del camino. Asumiremos en consecuencia que la sección  $\sigma_\eta$  es suave y que su imagen es una subvariedad suave de  $\mathcal{P}(A_0, \pi^{-1}[A_1])$ . Por definición, esta subvariedad es transversal a la acción de  $\mathcal{P}\mathcal{G}$ .

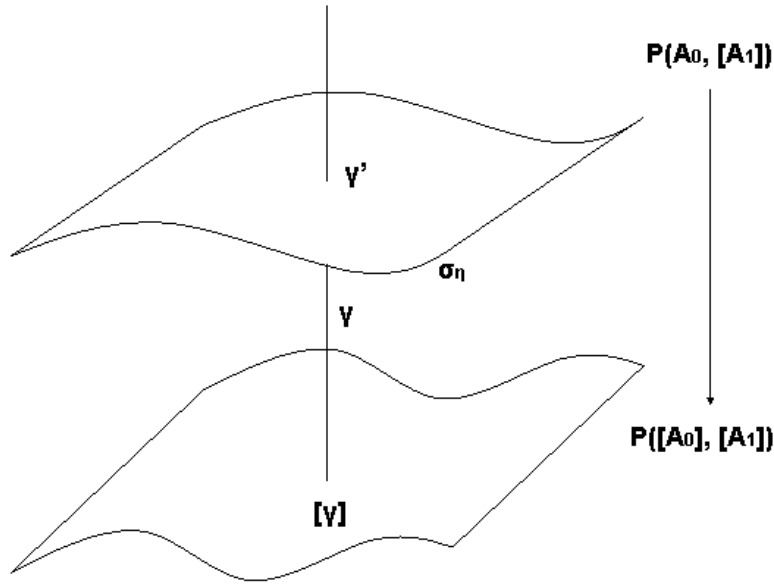


FIG. 13. Fijado de gauge por medio de una conexión: espacio de los caminos.

En general, si  $\pi : X \rightarrow X/G$  es un espacio cociente, entonces cualquier sección  $\sigma : X/G \rightarrow X$  induce una trivialización global  $X \simeq X/G \times G$ . Dicha trivialización está dada por la función

$$\Phi : X/G \times G \rightarrow X, \quad \Phi([x], g) = \sigma([x])g.$$

El espacio de los caminos  $\mathcal{P}(A_0, \pi^{-1}[A_1])$  puede entonces ser factorizado como  $\mathcal{P}([A_0], [A_1]) \times \mathcal{P}\mathcal{G}$  (una descomposición similar es inducida en el fibrado cotangente).

El fijado de gauge generalizado puede también definirse como el *espacio nulo* de un cierto funcional del modo siguiente. Como ya se dijo, el álgebra de Lie  $\mathcal{L}ie(\mathcal{G})$  puede ser identificada con las secciones del fibrado adjunto  $\text{ad}(P)$ . La métrica invariante sobre  $\mathfrak{g}$  induce una métrica  $\langle, \rangle_{\text{ad}(P)}$  sobre  $\text{ad}(P)$ . Usando esta métrica se define una métrica  $\mathcal{G}$ -invariante sobre  $\mathcal{L}ie(\mathcal{G}) = \Gamma(\text{ad}(P))$  como

$$(3.105) \quad \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle_{\mathcal{L}ie(\mathcal{G})} = \int_M \langle \sigma_1(p), \sigma_2(p) \rangle_{\text{ad}(P)} dx.$$

Luego puede definirse el funcional  $\mathcal{F} : \mathcal{P}(A_0, \pi^{-1}[A_1]) \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$(3.106) \quad \mathcal{F}(\gamma) = \int_0^1 \|\eta(\dot{\gamma}(t))\|_{\mathcal{L}ie(\mathcal{G})}^2 dt.$$

Este es un funcional positivo y la imagen de la sección  $\sigma_\eta$  es el *espacio nulo* de  $\mathcal{F}$ .

### 3.8. Principio de gauge extendido y método de Faddeev-Popov.

Se procederá ahora a implementar el fijado de gauge por medio de una conexión a nivel de la integral de camino. A dichos efectos se mostrará que es posible utilizar el método de Faddeev-Popov con el fijado de gauge generalizado. Comenzaremos entonces introduciendo el fijado de gauge generalizado en la amplitud de transición

$$(3.107) \quad \langle A_0 | \pi^{-1}[A_1] \rangle = \int_{T^*\mathcal{P}(A_0, \pi^{-1}[A_1])} \exp\{iS\} \mathcal{D}\mathcal{A} \mathcal{D}\pi.$$

La primera posibilidad para la condición de fijado de gauge es  $\delta(\mathcal{F}(\gamma))$  donde  $\delta$  es la delta de Dirac sobre  $\mathbb{R}$  y  $\mathcal{F}(\gamma)$  el funcional (3.106). La ventaja de este procedimiento es que no requiere un producto de distribuciones. Esta condición de fijado de gauge tiene una representación integral directa de la forma

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{F}(\gamma)) &= \int d\lambda e^{i\lambda \mathcal{F}(\gamma)} \\ &= \int d\lambda e^{i\lambda \int_\gamma \|\eta(\dot{\gamma}(t))\|_{\mathcal{L}ie(\mathcal{G})}^2 dt} \\ &= \int d\lambda e^{i\lambda \int_\gamma \int_M \|\eta(\dot{\gamma}(t))\|_{\mathfrak{g}}^2 dx dt}. \end{aligned}$$

La segunda posibilidad está basada sobre la observación elemental de que la integral de una función continua positiva es cero si y solo si la función es cero en todos los puntos. Se puede entonces definir la condición de fijado de gauge

$$(3.108) \quad \begin{aligned} \delta(\eta(\dot{\gamma})) &= \lim_N \prod_{k=1}^N \delta_{\mathcal{L}ie(\mathcal{G})}(\eta(\dot{\gamma}(t_k))) \\ &= \lim_{N,M} \prod_{k=1}^N \prod_{j=1}^M \delta_{\mathfrak{g}}(\eta(\dot{\gamma}(t_k))(x_j)), \end{aligned}$$

donde  $\delta_{\mathcal{L}ie(\mathcal{G})}$  es la función delta sobre  $\mathcal{L}ie(\mathcal{G})$  definida como un producto infinito de las deltas de Dirac  $\delta_{\mathfrak{g}}$  sobre  $\mathfrak{g}$ . Si  $T_a$  es una base fija de  $\mathfrak{g}$ , puede expresarse  $\delta_{\mathfrak{g}}(\eta(\dot{\gamma}(t_k))(x_j))$  en términos de  $\delta(\eta(\dot{\gamma}(t_k))(x_j)^a)$  donde ahora la función delta es la delta de Dirac usual sobre  $\mathbb{R}^3$ .

Como es usual se define el elemento  $\Delta^{-1}[\gamma]$  como

$$\Delta^{-1}[\gamma] = \int_{\mathcal{P}\mathcal{G}} \mathcal{D}g' \delta(\eta(\dot{\gamma}g')),$$

donde  $\gamma g'$  denota la acción a derecha de  $\mathcal{P}\mathcal{G}$  sobre  $\mathcal{P}(A_0, \pi^{-1}[A_1])$ .

Puede demostrarse ahora que el elemento  $\Delta^{-1}[\gamma]$  es  $\mathcal{P}\mathcal{G}$ -invariante. En efecto

$$\begin{aligned} \Delta^{-1}[\gamma g] &= \int_{\mathcal{P}\mathcal{G}} \mathcal{D}g' \delta(\eta(\dot{\gamma}g'g)) \\ &= \int_{\mathcal{P}\mathcal{G}} \mathcal{D}(gg') \delta(\eta(\dot{\gamma}g'g)) \\ &= \int_{\mathcal{P}\mathcal{G}} \mathcal{D}(g'') \delta(\eta(\dot{\gamma}g'')) \\ &= \Delta^{-1}[\gamma]. \end{aligned}$$

Es posible entonces expresar el número uno del modo siguiente:

$$1 = \Delta[\gamma] \int_{\mathcal{P}\mathcal{G}} \mathcal{D}g' \delta(\eta(\dot{\gamma}g')).$$

El elemento  $\Delta[\gamma]$  corresponde al determinante del operador que mide la variación de la condición de fijado de gauge ante transformaciones de gauge infinitesimales. Insertando este factor en (3.107) se obtiene

$$\langle A_0 | \pi^{-1}[A_1] \rangle = \int_{T^*\mathcal{P}(A_0, \pi^{-1}[A_1])} \mathcal{D}\mathcal{A} \mathcal{D}\pi \Delta[\gamma] \int_{\mathcal{P}\mathcal{G}} \mathcal{D}g' \delta(\eta(\dot{\gamma}g')) \exp\{iS\}.$$

Como ya se mostró, el elemento  $\Delta^{-1}[\gamma]$  es  $\mathcal{P}\mathcal{G}$ -invariante. Si se efectúa ahora una transformación de gauge que lleve  $\gamma g'$  a  $\gamma$  se obtiene

$$\langle A_0 | \pi^{-1}[A_1] \rangle = \int_{\mathcal{P}\mathcal{G}} \mathcal{D}g' \int_{T^*\mathcal{P}(A_0, \pi^{-1}[A_1])} \mathcal{D}\mathcal{A} \mathcal{D}\pi \Delta[\gamma] \delta(\eta(\dot{\gamma})) \exp\{iS\},$$

donde se usó que la acción  $S$  es también invariante ante transformaciones de gauge. De esta manera se pudo aislar el factor infinito asociado al volumen del grupo de caminos  $\mathcal{P}\mathcal{G}$ . Seguiremos ahora el método de Faddeev-Popov a los efectos de encontrar los nuevos términos que aparecen en la acción provenientes de la delta de Dirac  $\delta(\eta(\dot{\gamma}))$  y del determinante de Faddeev-Popov  $\Delta[\gamma]$ .

Con el objeto de encontrar una representación integral de la delta de Dirac  $\delta(\eta(\dot{\gamma}))$  de la condición de fijado de gauge, comenzaremos con la representación integral de la delta de Dirac  $\delta_{\mathcal{L}ie(\mathcal{G})}$  sobre  $\mathcal{L}ie(\mathcal{G})$  usada

en (3.108). Si  $\xi$  es un elemento de  $\mathcal{L}ie(\mathcal{G})$ , la delta de Dirac  $\delta_{\mathcal{L}ie(\mathcal{G})}(\xi)$  definida como

$$\delta_{\mathcal{L}ie(\mathcal{G})}(\xi) = \lim_M \prod_{j=1}^M \delta_{\mathfrak{g}}(\xi(x_j)),$$

puede expresarse en términos de las representaciones integrales de la delta de Dirac  $\delta_{\mathfrak{g}}(\xi(x_j))$  sobre  $\mathfrak{g}$  como

$$\begin{aligned} \delta_{\mathcal{L}ie(\mathcal{G})}(\xi) &= \lim_M \prod_{j=1}^M \int d\lambda(x_j) e^{i \sum_{j=1}^M \langle \lambda(x_j), \xi(x_j) \rangle_{\mathfrak{g}}}, \\ &= \int \tilde{\mathcal{D}}\lambda e^{i \int dx \langle \lambda(x), \xi(x) \rangle_{\mathfrak{g}}}, \\ &= \int \tilde{\mathcal{D}}\lambda e^{i \langle \lambda, \xi \rangle_{\mathcal{L}ie(\mathcal{G})}}, \end{aligned}$$

donde  $\lambda$  es una sección de  $\text{ad}(P) = P \times_G \mathfrak{g}$  y  $\tilde{\mathcal{D}}\lambda = \lim_M \prod_{j=1}^M d\lambda(x_j)$ . La delta de Dirac  $\delta(\eta(\dot{\gamma}))$  de la condición de fijado de gauge puede entonces ser expresada como

$$\begin{aligned} \delta(\eta(\dot{\gamma})) &= \lim_N \prod_{k=1}^N \delta_{\mathcal{L}ie(\mathcal{G})}(\eta(\dot{\gamma}(t_k))) \\ &= \lim_N \prod_{k=1}^N \int \tilde{\mathcal{D}}\lambda_k e^{i \sum_{k=1}^N \langle \lambda_k, \eta(\dot{\gamma}(t_k)) \rangle_{\mathcal{L}ie(\mathcal{G})}} \\ &= \int \mathcal{D}\lambda e^{i \int_{\gamma} \langle \lambda, \eta(\dot{\gamma}(t)) \rangle_{\mathcal{L}ie(\mathcal{G})} dt} \\ &= \int \mathcal{D}\lambda e^{i \int_{\gamma} \int_M \langle \lambda, \eta(\dot{\gamma}(t)) \rangle_{\mathfrak{g}} dx dt}, \end{aligned}$$

donde  $\lambda$  es una sección dependiente del tiempo de  $\text{ad}(P) = P \times_G \mathfrak{g}$ . La medida final  $\mathcal{D}\lambda$  es entonces

$$\mathcal{D}\lambda = \lim_N \prod_{k=1}^N \tilde{\mathcal{D}}\lambda_k = \lim_{N,M} \prod_{k=1}^N \prod_{j=1}^M d\lambda_k(x_j).$$

Calcularemos ahora el determinante de Faddeev-Popov  $\Delta[\gamma]$ . Dado un camino  $\gamma(t)$  en  $\mathcal{P}(A_0, \pi^{-1}[A_1])$ , queremos calcular la variación de la condición de fijado de gauge  $\eta(\dot{\gamma}) = 0$  ante una transformación de gauge infinitesimal definida por un vector  $\mathbf{X}$  en el álgebra de Lie del grupo de los caminos  $\mathcal{P}\mathcal{G} = \{g(t) : [0, 1] \rightarrow \mathcal{G} | g(0) = id_{\mathcal{G}}\}$ . Sea  $u \rightarrow k_u$  el subgrupo uniparamétrico de  $\mathcal{P}\mathcal{G}$  generado por  $\mathbf{X}$ . El vector  $\mathbf{X}$  está entonces dado por

$$\mathbf{X} = \frac{d}{du} k_u |_{u=0} \in \mathcal{L}ie(\mathcal{P}\mathcal{G}).$$



Este vector puede también ser considerado como un camino  $t \rightarrow X_t$  donde  $0 \leq t \leq 1$  y  $X_t \in \mathcal{L}ie(\mathcal{G}) \forall t$ . Con el objeto de encontrar una expresión para los vectores  $X_t \in \mathcal{L}ie(\mathcal{G})$  es necesario considerar el hecho de que  $k_u$  describe una familia de caminos en el grupo de gauge  $\mathcal{G}$  (en otros términos  $k_u$  para un cierto  $u$  fijo define un camino  $g(t) \subset \mathcal{G}$ ). Escribamos  $k_u(t)$  para enfatizarlo. En consecuencia, para un cierto tiempo  $t$ , el vector  $X_t \in \mathcal{L}ie(\mathcal{G})$  está dado por

$$X_t = \mathbf{X}(t) = \frac{d}{du} k_u(t) \Big|_{u=0} \in \mathcal{L}ie(\mathcal{G}).$$

Si  $\gamma \in \mathcal{P}(A_0, \pi^{-1}[A_1])$  la variación infinitesimal de la condición de gauge está dada por la expresión

$$(3.109) \quad \frac{d}{du} \left( \eta_{\gamma(t)k_u(t)} \left( \frac{d}{dt} R_{k_u(t)} \gamma(t) \right) \right) \Big|_{u=0}.$$

El camino  $k_u(t)$  en  $\mathcal{G}$  parametrizado por  $t$  (con  $k_u(0) = id_{\mathcal{G}}$ ) puede ser expresado como

$$k_u(t) = k_u(t_0) e^{X_u(t-t_0)},$$

con  $X_u \in \mathcal{L}ie(\mathcal{G})$ . Se tiene entonces

$$X_u = k_u(t_0)^{-1} \frac{d}{dt} k_u(t) \Big|_{t=t_0} \in \mathcal{L}ie(\mathcal{G})$$

(ver Figura N°14).

A un cierto tiempo  $t_0$  la derivada temporal en (3.109) está dada por

$$(3.110) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} R_{k_u(t)} \gamma(t) \Big|_{t=t_0} &= \frac{d}{dt} R_{k_u(t_0)k_u(t_0)^{-1}k_u(t)} \gamma(t) \Big|_{t=t_0} \\ &= \left( \frac{d}{dt} R_{k_u(t_0)} \gamma(t) \Big|_{t=t_0} \right) \\ &+ \frac{d}{dt} R_{k_u(t_0)^{-1}k_u(t)} (R_{k_u(t_0)} \gamma(t_0)) \Big|_{t=t_0} \\ &= dR_{k_u(t_0)}(\dot{\gamma}(t_0)) + \iota_{(\gamma(t_0)k_u(t_0))}(X_u). \end{aligned}$$

El primer término es el diferencial de la acción de  $k_u(t)$ <sup>17</sup> y el segundo es el homomorfismo entre el algebra de Lie de  $\mathcal{G}$  y los campos vectoriales verticales definido por (3.74)<sup>18</sup>.

<sup>17</sup>Se usó que el diferencial  $df$  de una función  $f$  se define como

$$df(X) = \frac{df(\gamma(t))}{dt} \Big|_{t=t_0},$$

con  $X = \frac{d\gamma(t)}{dt} \Big|_{t=t_0}$ .

<sup>18</sup>Si se usa la forma usual para las transformaciones de gauge de las conexiones

$$\gamma^{k_u} = k_u^{-1} \gamma k_u + k_u^{-1} dk_u,$$

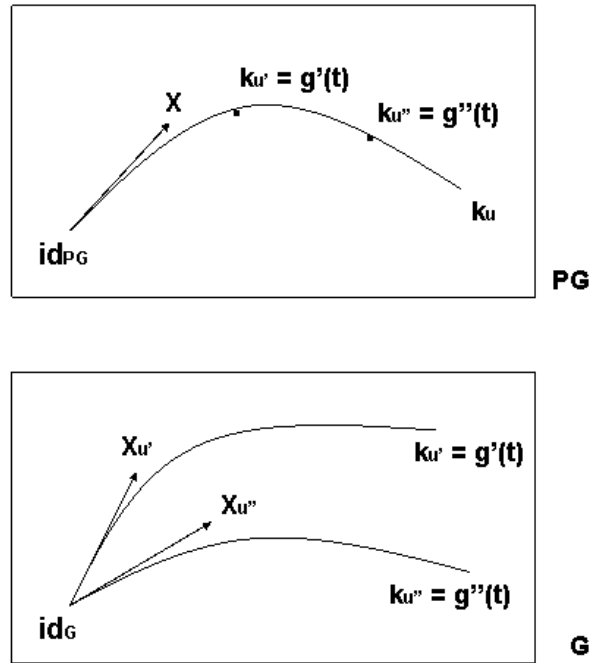


FIG. 14. Grupo de los caminos y grupo de gauge.

Aplicaremos ahora la conexión  $\eta$  a cada uno de dichos términos. En primer lugar se tiene

$$\eta_{\gamma(t_0)k_u(t_0)}(dR_{k_u(t_0)}(\dot{\gamma}(t_0))) = \text{ad}(k_u^{-1}(t_0))\eta_{\gamma(t_0)}(\dot{\gamma}(t_0)).$$

Esta igualdad se sigue de la propiedad de equivariancia de la conexión:  $R_g^*\eta_{pg}(v) = \eta_{pg}(R_{g*}v) = \text{ad}_{g^{-1}}\eta_p(v)$ . Aplicando  $\eta$  al segundo término de (3.110) se obtiene

$$\eta_{\gamma(t_0)k_u(t_0)}(\iota_{(\gamma(t_0)k_u(t_0))}(X_u)) = X_u.$$

La variación *infinitesimal* definida por  $\mathbf{X} \in \mathcal{L}ie(\mathcal{P}\mathcal{G})$  está dada entonces por la suma de

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} (\text{ad}(k_u^{-1}(t_0))\eta_{\gamma(t_0)}(\dot{\gamma}(t_0))) \Big|_{u=0} &= \text{ad}(-X_{t_0})\eta_{\gamma(t_0)}(\dot{\gamma}(t_0)) \\ &= [-X_{t_0}, \eta_{\gamma(t_0)}(\dot{\gamma}(t_0))] \end{aligned}$$

esta derivada temporal toma la forma

$$\text{ad}(k_u^{-1}(t_0))\dot{\gamma}(t_0) + \frac{d}{dt} (\text{ad}(k_u^{-1}(t))\gamma(t_0) + k_u^{-1}(t)dk_u(t)) \Big|_{t=t_0},$$

siendo el primer término igual al diferencial de la acción  $dR_{k_u(t_0)}(\dot{\gamma}(t_0))$  y el segundo igual a  $\iota_{(\gamma(t_0)k_u(t_0))}(X_u)$ .

y

$$\left. \frac{d}{du} X_u \right|_{u=0}.$$

Calculando este último término se obtiene

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{du} X_u \right|_{u=0} &= \left. \frac{d}{du} \left( k_u(t_0)^{-1} \frac{d}{dt} k_u(t) \right) \right|_{u=0, t=t_0} \\ &= \left. \left( -k_u(t_0)^{-2} \frac{dk_u(t_0)}{du} \frac{dk_u(t)}{dt} + k_u(t_0)^{-1} \frac{d}{dt} \frac{dk_u(t)}{du} \right) \right|_{u=0, t=t_0} \\ &= -k_0(t_0)^{-2} \left. \frac{dk_u(t_0)}{du} \right|_{u=0} \left. \frac{dk_0(t)}{dt} \right|_{t=t_0} \\ &\quad + k_0(t_0)^{-1} \left. \frac{d}{dt} \left[ \left. \frac{dk_u(t)}{du} \right|_{u=0} \right] \right|_{t=t_0} \\ &= \dot{X}_{t_0}, \end{aligned}$$

donde en el último paso se usó que  $k_0(t) = id_{\mathcal{G}} \forall t$ .

La variación infinitesimal de la condición de fijado de gauge es entonces

$$\left. \frac{d}{du} \left( \eta_{\gamma(t)k_u(t)} \left( \frac{d}{dt} R_{k_u(t)} \gamma(t) \right) \right) \right|_{u=0} = [-X_t, \eta_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))] + \dot{X}_t.$$

Para cada camino fijo  $\gamma(t)$  esta expresión define un endomorfismo lineal  $M_\gamma$  en  $\mathcal{L}ie(\mathcal{P}\mathcal{G})$  (o un endomorfismo  $M_\gamma(t)$  en  $\mathcal{L}ie(\mathcal{G})$  para cada  $t$ ).

Con el objeto de seguir el procedimiento usual para exponenciar el determinante de un operador introduciremos un álgebra de Grassmann generada por las variables anticonmutantes  $c$  y  $\bar{c}$ . El determinante de Faddeev-Popov  $\Delta[\gamma]$  puede entonces ser expresado como

$$\Delta[\gamma] = \int \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{\int \langle \bar{c}_t, M_\gamma(t) c_t \rangle_{\mathfrak{g}} d^3x dt},$$

donde

$$\mathcal{D}c = \lim_N \prod_{k=1}^N \tilde{\mathcal{D}}c_{t_k} = \lim_{N,M} \prod_{k=1}^N \prod_{j=1}^M dc_{t_k}(x_j),$$

y lo mismo para  $\mathcal{D}\bar{c}$ .

Los campos anticonmutantes  $c_t$  y  $\bar{c}_t$  pueden ser identificados con las formas de Maurer-Cartan de  $\mathcal{L}ie(\mathcal{G})$ , es decir con los elementos canónicos de  $\Omega^1(\mathcal{G}) \otimes \mathcal{L}ie(\mathcal{G})$  tal que  $c_t(\xi) = \xi, \forall \xi \in \mathcal{L}ie(\mathcal{G})$ .

Juntando todas las piezas, la amplitud de transición toma la forma

$$(3.111) \quad \langle A_0 | \pi^{-1}[A_1] \rangle = \int_{\mathcal{P}\mathcal{G}} \mathcal{D}g \int \mathcal{D}\mathcal{A} \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\lambda \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \exp\{iS_{gf}\},$$

donde  $S_{gf}$  es la acción con el gauge fijo

$$S_{gf} = \int d^4x \left( \dot{A}_k \pi^k - \mathcal{H}_0 - A_0 \phi + \langle \lambda, \eta(\dot{\gamma}) \rangle_{\mathfrak{g}} - i \langle \bar{c}, M_\gamma c \rangle_{\mathfrak{g}} \right).$$

Introduciendo explícitamente los índices del álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , los endomorfismos  $M_\gamma(t)(x)$  pueden ser expresados como

$$M_\gamma(t)(x)_a^c = -\eta_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))^b f_{ab}^c + \delta_a^c \partial_0,$$

donde  $f_{ab}^c$  son las constantes de estructura de  $\mathfrak{g}$ . La acción con el gauge fijo toma entonces la forma

$$(3.112)$$

$$S_{gf} = \int d^4x \left( \dot{A}_k^a \pi_a^k - \mathcal{H}_0 - A_0^a \phi_a + \lambda_a \eta(\dot{\gamma})^a + i \bar{c}^a \eta(\dot{\gamma})^b f_{ab}^c c_c - i \bar{c}^a \dot{c}_a \right).$$

Es interesante remarcar que el último término puede ser reescrito como  $+i \dot{c}_a \bar{c}^a$ . Este término puede entonces ser interpretado como el término cinético correspondiente al nuevo par de variables canónicas  $(c, i\bar{c})$ .

### 3.9. Fijado de gauge canónico.

En esta sección, mostraremos que también es posible reobtener la acción con el gauge fijo (3.112) por medio del procedimiento canónico de definir un *fermión de fijado de gauge*  $K$  (ver Refs.[49, 50]). Se mostrará que por medio de la substitución

$$H_0 \rightarrow H_0 + \delta_{BRST} K,$$

con  $H_0 = \int d^3x \mathcal{H}_0$  y un fermión de fijado de gauge  $K$  adecuadamente elegido, es en efecto posible recuperar la acción  $S_{gf}$  dada por (3.112).

Para ello definiremos el par canónico de fantasmas  $(c^a, \mathcal{P}_a)$  con corchete de Poisson  $[c^a, \mathcal{P}_b] = -\delta_b^a$  correspondiente al vínculo  $\phi_a \approx 0$  (ley de Gauss generalizada). El operador BRST correspondiente a esta extensión minimal del espacio de las fases es

$$\Omega_{BRST} = c^a \phi_a - \frac{1}{2} c^a c^b f_{ba}^c \mathcal{P}_c.$$

Las correspondientes transformaciones BRST de los fantasmas  $c^a$  y sus momentos conjugados  $\mathcal{P}_a$  son

$$(3.113) \quad \begin{aligned} \delta_{BRST} c^a &= -\frac{1}{2} c^c c^b f_{bc}^a, \\ \delta_{BRST} \mathcal{P}_a &= -\phi_a + c^b f_{ba}^c \mathcal{P}_c. \end{aligned}$$

En lo sucesivo es necesario considerar al multiplicador de Lagrange  $A_0$  para el vínculo de Gauss  $\phi_a \approx 0$  como una variable canónica. A

dichos efectos es necesario imponer un nuevo vínculo, a saber que su momento canónicamente conjugado  $\pi_0$  sea nulo

$$\pi_0 \approx 0.$$

Es entonces necesario definir un nuevo par canónico de fantasmas  $(\rho^a, \bar{c}_a)$  asociado a este nuevo vínculo de primera clase. En consecuencia, el operador BRST tiene que ser extendido agregando un sector *no minimal* de la forma

$$\Omega_{BRST}^{Nonmin} = -i\rho^a \pi_{0a}.$$

Esta extensión no minimal genera las siguientes transformaciones BRST

$$(3.114) \quad \begin{aligned} \delta_{BRST} \bar{c}_a &= i\pi_{0a}, \\ \delta_{BRST} \pi_{0a} &= 0, \\ \delta_{BRST} A_0^a &= -i\rho^a, \\ \delta_{BRST} \rho^a &= 0. \end{aligned}$$

De acuerdo con estas transformaciones, las variables  $\bar{c}_a$  y  $A_0^a$  no son BRST-cerradas por lo que no contribuyen a la cohomología. Por otra parte, las variables  $\pi_{0a}$  y  $\rho^a$ , aún siendo BRST-cerradas, son BRST-exactas y en consecuencia cohomológicamente nulas. Los pares  $(\pi_{0a}, \bar{c}_a)$  y  $(\rho^a, A_0^a)$  son entonces pares *cohomológicamente triviales*.

Con el objeto de considerar a los pares  $(A_0^a, \pi_{0b})$  y  $(\rho^a, \bar{c}_b)$  como pares de variables canónicas con corchetes de Poisson  $[\pi_{0b}, A_0^a] = [\rho^a, \bar{c}_b] = -\delta_b^a$ , incluiremos en la acción el término cinético

$$\int \left( \dot{\bar{c}}_a \rho^a + \dot{A}_0^a \pi_{0a} \right) dt.$$

Mostraremos ahora que la condición de fijado de gauge  $\eta(\dot{\gamma}(t)) = 0$  puede ser expresada como  $\chi^a + \dot{A}_0^a = 0$  para algún  $\chi$ . Si  $\mathcal{A} = A(t) + A_0(t)dt$  es una conexión, entonces la componente  $A_0$  es una sección de  $\text{ad}(P)$ , pudiendo ser en consecuencia identificada con un elemento de  $\mathcal{L}ie(\mathcal{G})$ . Por lo tanto, si se tiene un camino  $(A(t), A_0(t))$ , entonces  $A_0(t)$  es un elemento de  $\mathcal{L}ie(\mathcal{P}\mathcal{G})$ . Dado que este álgebra de Lie es un espacio vectorial, la derivada  $\dot{A}_0(t)$  puede también ser identificada con un elemento del álgebra de Lie de  $\mathcal{P}\mathcal{G}$ . Puede entonces garantizarse que existe un elemento  $\chi \in \mathcal{L}ie(\mathcal{P}\mathcal{G})$  tal que

$$\chi(t) = \eta(\dot{\gamma}(t)) - \dot{A}_0(t).$$

Elegiremos en consecuencia un fermión de fijado de gauge de la forma usual (ver Ref.[50])

$$(3.115) \quad K = \int d^3x (i\bar{c}_a\chi^a - \mathcal{P}_a A_0^a).$$

La acción con el gauge fijo es entonces

$$(3.116) \quad S_{gf} = \int d^4x \left( \dot{A}_k^a \pi_a^k + \dot{A}_0^a \pi_a^0 + \dot{c}^a \mathcal{P}_a + \dot{\bar{c}}_a \rho^a - \mathcal{H}_0 - \delta_{BRST} \tilde{K} \right),$$

donde  $\tilde{K} = i\bar{c}_a\chi^a - \mathcal{P}_a A_0^a$ .

Utilizando las transformaciones BRST (3.113) y (3.114), la extensión de fijado de gauge  $\delta_{BRST} \tilde{K}$  está dada por

$$\delta_{BRST} \tilde{K} = -\pi_{0a} \chi^a + i\bar{c}_a \delta_{BRST} \chi^a + A_0^a \phi_a - A_0^a c^b f_{ba}^c \mathcal{P}_c + i\mathcal{P}_a \rho^a.$$

Si se identifica  $\pi_{0a}$  con  $\lambda_a$ , los términos  $\dot{A}_0^a \pi_a^0$  y  $\pi_{0a} \chi^a$  dan el término de fijado de gauge

$$\begin{aligned} \dot{A}_0^a \pi_a^0 + \pi_{0a} \chi^a &= \pi_{0a} \left( \chi^a + \dot{A}_0^a \right), \\ &= \lambda_a \eta (\dot{\gamma}(t))^a. \end{aligned}$$

Puede mostrarse que la combinación de términos

$$(3.117) \quad \dot{c}^a \mathcal{P}_a + A_0^a c^b f_{ba}^c \mathcal{P}_c - i\mathcal{P}_a \rho^a$$

da cero. Para ello, es necesario utilizar la ecuación de movimiento

$$\frac{\delta S_{gf}}{\delta \mathcal{P}_a} = \dot{c}^a + A_0^c c^b f_{bc}^a + i\rho^a = 0,$$

la cual puede ser resuelta para  $\rho^a$ . Substituyendo  $\rho^a$  en (3.117) y usando que  $\dot{c}^a$  y  $\mathcal{P}_a$  son variables anticonmutantes, se obtiene que (3.117) es idénticamente cero.

Por medio de una integración por partes se puede escribir  $\dot{\bar{c}}_a \rho^a \sim -\bar{c}_a \dot{\rho}^a$ . Si se incluye todo esto en (3.116), la acción con el gauge fijo toma la forma

$$S_{gf} = \int d^4x \left( \dot{A}_k^a \pi_a^k - \mathcal{H}_0 - A_0^a \phi_a + \lambda_a \eta (\dot{\gamma}(t))^a - i\bar{c}_a (\delta_{BRST} \chi^a - i\dot{\rho}^a) \right).$$

Usando que  $\chi^a = \eta (\dot{\gamma}(t))^a - \dot{A}_0^a(t)$ , esta acción coincide con la acción  $S_{gf}$  (3.112) si  $\dot{A}_0(t)$  transforma según la expresión

$$\delta_{BRST} \dot{A}_0(t)^a = -i\dot{\rho}^a.$$

## 4. Conclusiones

En esta tesis se estudiaron ciertos aspectos de la estructura geométrica y la cuantificación de teorías de gauge, es decir de teorías caracterizadas por la presencia de vínculos entre sus variables canónicas. A pesar de contarse con diversos métodos para cuantificar teorías con vínculos (método de Dirac y formalismo BRST), existen diversos tipos de obstrucciones -tanto conceptuales como técnicas- a su cuantificación. Ejemplos paradigmáticos de dichas obstrucciones son el *problema del tiempo* en sistemas generalmente covariantes como la Relatividad General y el *problema de Gribov* en teorías de gauge en general.

En la primera parte de esta tesis se continuó el trabajo [24] sobre la cuantificación canónica de modelos cosmológicos de minisuperespacios. El principal obstáculo para una correcta interpretación de la estructura canónica de la Relatividad General y de su cuantificación es la presencia de un vínculo hamiltoniano  $\mathcal{H} = 0$ . Como es bien sabido, una teoría con un vínculo hamiltoniano no puede ser *directamente* interpretada en términos de la evolución de sus grados de libertad en función de un parámetro temporal privilegiado. Con el objeto de comprender las consecuencias de la presencia de un tal vínculo es usual utilizar el *formalismo de los sistemas parametrizados*. Sin embargo, dado que el vínculo hamiltoniano de la Relatividad General es cuadrático en *todos* los momentos canónicos, la analogía con el formalismo de los sistemas parametrizados no es completamente adecuada ya que dichos sistemas poseen un vínculo hamiltoniano *lineal* en uno de sus momentos. En Ref.[20] se clarificó la diferencia entre el formalismo de los sistemas parametrizados *lineales* y las teorías generalmente covariantes con un vínculo hamiltoniano *cuadrático* en todos los momentos. Los sistemas parametrizados lineales surgen cuando en una teoría ordinaria el tiempo es *formalmente* incluido entre los grados de libertad dinámicos de la teoría. En otros términos, dicho formalismo permite expresar una teoría ordinaria en lenguaje covariante. Sin embargo, como se argumentó en Ref.[20], que toda teoría puede ser formulada en forma covariante no significa que toda teoría covariante sea una teoría ordinaria expresada en forma parametrizada. En efecto, una teoría con un vínculo hamiltoniano cuadrático no puede ser interpretada en términos de una teoría ordinaria con una variable temporal formalmente “escondida”. Con el objeto de “temporalizar” una teoría generalmente covariante es necesario elegir un *reloj físico*, es decir una variable dinámica monotonamente creciente sobre las soluciones que pueda servir como parámetro temporal para la evolución del resto de

las variables canónicas. La noción de reloj físico no es entonces interpretada en términos de una variable temporal privilegiada formalmente considerada como un grado de libertad (espúreo) de la teoría, sino en términos de un grado de libertad *genuino* apto para ser utilizado como reloj (no es en consecuencia necesario que dicho reloj físico sea un grado de libertad *geométrico* de la teoría). Ahora bien, si todos los grados de libertad son igualmente genuinos, todos los momentos conjugados deben aparecer en el vínculo hamiltoniano en pie de igualdad, es decir cuadráticamente. Por otra parte, reducir el sistema significa “temporalizar” una trayectoria originalmente estática, es decir una trayectoria que se limita a establecer correlaciones entre los distintos grados de libertad. En principio no existe ninguna razón para privilegiar alguno de los dos sentidos posibles de evolución de la trayectoria. Esto tiene como consecuencia que el vínculo hamiltoniano *debe* ser cuadrático en el momento conjugado a la variable elegida como reloj físico (ya que cada uno de los signos de dicho momento corresponde a cada uno de los sentidos posibles de temporalización de la trayectoria). Estos dos argumentos permiten concluir que una teoría *fundamentalmente covariante*, es decir sin una variable temporal privilegiada, tiene necesariamente que tener un vínculo hamiltoniano cuadrático en *todos* sus momentos. Como se mostró en Ref.[20] lo que cambia de una hoja a la otra del vínculo no es el signo de la energía sino la dirección de avance del reloj físico, correspondiendo ambas hojas a soluciones de energía positiva. Se mostró también que el contenido físico en ambas hojas es exactamente el mismo, siendo la diferencia entre ambas *puro gauge*.

Esta estructura de doble hoja de un vínculo hamiltoniano cuadrático en todos sus momentos tiene consecuencias en lo referente a las simetrías temporales de una teoría generalmente covariante como la Relatividad General. En Ref.[20] se distinguieron los dos tipos de simetrías temporales características de una teoría con un vínculo hamiltoniano cuadrático. La Relatividad General, a diferencia de la mecánica clásica o cuántica ordinarias (sin vínculos) es invariante ante la transformación que permite pasar de una hoja a otra del vínculo hamiltoniano. Según la interpretación propuesta esta operación consiste en invertir la dirección de avance del reloj físico. Sin embargo, es sabido que la mecánica clásica o cuántica ordinarias (teorías estas cuyas versiones *formalmente* parametrizadas tienen un vínculo hamiltoniano con una *única* hoja) son bajo ciertas condiciones invariantes ante inversiones temporales. Se tiene entonces una simetría asociada al pasaje de una hoja a otra del vínculo hamiltoniano, pero cada hoja por separado tiene a su vez una simetría ante inversiones temporales. En Ref.[20] se aclaró



esta aparente paradoja. A dichos efectos se estableció una distinción entre las *transformaciones de inversión del movimiento* características de los sistemas clásicos y cuánticos ordinarios (sin vínculos) y las *transformaciones de inversión del reloj* (características de los sistemas *fundamentalmente covariantes* con un vínculo hamiltoniano cuadrático). Esta distinción entre ambos tipos de simetría temporal fué formulada tanto a nivel clásico como a nivel cuántico. De esta manera, si una teoría clásica o cuántica ordinaria solo puede poseer una simetría ante inversiones de movimiento, una teoría fundamentalmente covariante puede poseer ambos tipos de simetría.

A la luz de estas consideraciones, las condiciones de contorno sobre las soluciones de la ecuación de Wheeler-DeWitt propuestas en Ref.[24] fueron clarificadas en Ref.[20]. La idea fundamental es que dichas condiciones de contorno actúan como una ruptura de la simetría ante inversiones del reloj. Dado que la física en ambas hojas es completamente equivalente es necesario elegir arbitrariamente una de dichas hojas. Como a nivel cuántico la transformación de inversión del reloj asume la forma de una conjugación compleja, el problema de definir condiciones de contorno sobre las soluciones de la ecuación de Wheeler-DeWitt se reduce a encontrar una realización del espacio de soluciones de la forma  $S = C \oplus C^*$ . El espacio de las soluciones físicas será entonces  $C$  o  $C^*$ . La teoría resultante no es más invariante ante inversiones del reloj, pero todavía puede ser simétrica ante inversiones de movimiento (como la mecánica clásica o cuántica ordinarias). De esta manera es posible definir condiciones de contorno para la ecuación de Wheeler-DeWitt con el significado preciso de seleccionar un sentido para la temporalización de las trayectorias. Es importante destacar que la noción de sentido de una trayectoria estática no depende de la separación efectiva de un reloj físico, por lo que las condiciones de contorno propuestas deberían poder implementarse en el caso general. En Ref.[25] se ejemplificaron estas consideraciones con algunos modelos cosmológicos con un número finito de grados de libertad. Queda como un problema abierto el de proponer un modo sistemático de implementar las condiciones de contorno propuestas para el caso general.

En la segunda parte de este trabajo se estudió la estructura geométrica y la cuantificación del segundo caso paradigmático de teorías de gauge, a saber las *teorías de Yang-Mills*. El objetivo principal de esta segunda parte fué el de construir una única entidad geométrica -definida en un escenario geométrico extendido- que permita unificar las tres estructuras fundamentales de una teoría de Yang-Mills, a saber

los *campos de gauge*, los *fantasmas* generadores del complejo BRST, y el *fijado de gauge*. La entidad geométrica que permite efectuar dicha unificación es una *conexión* en un fibrado principal convenientemente elegido. Se definió de esta manera un *principio de gauge extendido* según el cual la formulación de una teoría con una simetría de gauge local requiere la definición de una tal conexión. Esta unificación es una extensión del hecho conocido que los campos de gauge  $A$  y los fantasmas  $c$  pueden ser unificados en una única entidad  $\omega$  como  $\omega = A + c$  (ver Ref.[10]). La construcción de la conexión extendida fue realizada en Ref.[21]. En Ref.[22] se estudió la implementación del principio de gauge extendido en el marco de la cuantificación con integral de camino de las teorías de Yang-Mills. En Ref.[23] se presentó una versión resumida del formalismo propuesto en ambos trabajos y se clarificó la relación entre los fantasmas y el fijado de gauge.

A los efectos de definir una *conexión extendida* que incluya también la definición del fijado de gauge de la teoría, fué necesario en Ref.[21] generalizar la noción de fijado de gauge. El primer paso en el proceso de unificación fué en efecto el reemplazo de la *sección* de fijado de gauge  $\sigma : \mathcal{A}/\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A}$  por una *conexión* de fijado de gauge  $\eta$  en el mismo fibrado principal. En lugar de elegir por medio de la sección  $\sigma$  un representante fijo  $A$  para cada elemento  $[A]$  en el espacio de las órbitas  $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ , la conexión de fijado de gauge  $\eta$  permite transportar paralelamente cualquier condición inicial  $A_0 \in \mathcal{A}$  perteneciente a una fibra  $\pi^{-1}[A_0]$ . Esta generalización de la noción de fijado de gauge tiene la importante ventaja de que, dada una trivialización local del fibrado  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$ , los fantasmas pueden ser asociados a la *parte vertical canónica* de la conexión  $\eta$ . De esta manera los fantasmas y el fijado de gauge pueden ser considerados como distintos aspectos de una única entidad geométrica. Sin embargo, se mostró en Ref.[23] que es posible también entender la relación entre los fantasmas y la conexión  $\eta$  sin utilizar una trivialización del fibrado. Para ello es necesario definir el *álgebra de Weil* del grupo de gauge  $\mathcal{G}$ , la cual es un modelo algebraico universal para el álgebra definida por una conexión genérica y su curvatura. Puede verse entonces que el fantasma puede ser naturalmente identificado con el generador canónico de dicha álgebra (forma de Maurer-Cartan), mientras que la conexión de fijado de gauge  $\eta$  puede ser considerada como la imagen de dicho generador ante un *homomorfismo de Chern-Weil*. De esta manera puede afirmarse el fantasma es una *conexión universal* sobre el grupo de gauge  $\mathcal{G}$ , mientras que su “encarnación” en el fibrado  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$  bajo la forma de la conexión  $\eta$  define el fijado de gauge de la teoría.

El proceso de unificación puede ser luego continuado teniendo en cuenta que las conexiones  $A$  (los campos de gauge) y la conexión de fijado de gauge  $\eta$  pueden ser unificadas en una única conexión extendida  $\mathbb{A}$  en el  $G$ -fibrado principal  $\mathcal{A} \times P \rightarrow \mathcal{A} \times M$ . Los *campos de gauge*, el *fijado de gauge* y los *fantasmas* son de esta manera introducidos como diferentes aspectos de esta única entidad geométrica extendida.

A partir de las ecuaciones que definen a las distintas componentes de la curvatura  $\mathbb{F} = \Delta_{\mathbb{A}}\mathbb{A} = F + \psi + \phi$  de la conexión extendida fué posible en Ref.[21] recobrar las transformaciones BRST de los campos de gauge y de los fantasmas sin necesidad de imponer las condiciones de *horizontalidad* o *platitud* usuales ( $\phi = \psi = 0$  o, equivalentemente  $\mathbb{F} = F$ ; ver Refs.[9, 11, 41, 81]).

A continuación se estudió en Ref.[22] la aplicación del principio de gauge extendido para la cuantificación de teorías de Yang-Mills por medio de integrales de camino. Dado que el fijado de gauge se realiza por medio del transporte paralelo de las condiciones iniciales, el formalismo natural para su implementación es la formulación hamiltoniana de las teorías de Yang-Mills. El reemplazo de la sección de fijado de gauge  $\sigma$  por una conexión de fijado de gauge  $\eta$  tiene la importante ventaja de permitir definir un fijado de gauge *global* aún cuando la topología del fibrado  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$  no sea trivial (obstrucción de Gribov). De esta manera, se mostró en Ref.[22] que aún cuando en general no es posible definir una sección global  $\sigma$  en el fibrado asociado a los campos de gauge, *siempre* es posible por medio de la conexión de fijado de gauge  $\eta$  definir una sección inducida  $\sigma_{\eta}$  en el  $\mathcal{P}\mathcal{G}$ -fibrado principal  $\mathcal{P}(A_0, \pi^{-1}[A_1]) \rightarrow \mathcal{P}([A_0], [A_1])$  asociado al espacio de los caminos. Dado que estrictamente la integral de camino no es una integración en el *espacio de los campos*  $\mathcal{A}$ , sino una integración en el *espacio de los caminos*  $\mathcal{P}(A_0, \pi^{-1}[A_1])$ , la sección  $\sigma_{\eta}$  permite en efecto eliminar el volumen infinito del grupo  $\mathcal{P}\mathcal{G}$  de la integral de camino. A los efectos de introducir este fijado de gauge en la integral de camino, se mostró que los métodos usuales (Faddeev-Popov o fermión de fijado de gauge) pueden seguir usándose con el nuevo fijado de gauge generalizado. De esta manera se obtuvo la acción con el gauge fijo  $S_{gf}$  correspondiente al gauge generalizado definido por la conexión  $\eta$ .

Queda como un problema abierto el estudio de la aplicación del formalismo propuesto para el cálculo de observables topológicos asociados a la no trivialidad del fibrado  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}$ .

## APÉNDICES

### A1. Elementos matemáticos.

4.0.1. *Variables de Grassmann y álgebras diferenciales graduadas.* Se dirá que un álgebra asociativa<sup>19</sup>  $A$  es  $\mathbb{Z}_2$ -graduada o superconmutativa si  $A$  es una suma directa

$$A = A_0 \oplus A_1,$$

de dos espacios complementarios tal que

$$xy = (-)^{\varepsilon_x \varepsilon_y} yx,$$

con  $\varepsilon_u = 0$  si  $u \in A_0$  y  $\varepsilon_u = 1$  si  $u \in A_1$ . Esto implica

$$A_0 A_0 \subset A_0,$$

$$A_0 A_1 \subset A_1,$$

$$A_1 A_1 \subset A_0.$$

La paridad  $\varepsilon_u$  es denominada *paridad de Grassmann*. Dado que toda álgebra superconmutativa  $A$  es un espacio vectorial  $\mathbb{Z}_2$ -graduado, el conjunto  $End(A)$  de transformaciones lineales de  $A$  es un álgebra de Lie graduada. Dadas dos transformaciones lineales  $M_1$  y  $M_2$ , su conmutador graduado es

$$[M_1, M_2] = M_1 M_2 - (-)^{\varepsilon_{M_1} \varepsilon_{M_2}} M_2 M_1.$$

Puede demostrarse que el conmutador graduado satisface una versión graduada de la identidad de Jacobi. La graduación de  $A$  induce una graduación natural en  $End(A)$ : una transformación lineal  $M$  tendrá una paridad definida  $\varepsilon_M$  si  $Mx$  tiene paridad definida  $\varepsilon_M + \varepsilon_x$ .

Las transformaciones lineales que satisfacen la regla de Leibnitz

$$D(xy) = xDy + (-)^{\varepsilon_D \varepsilon_y} (Dx)y,$$

son denominadas *derivaciones graduadas*.

4.0.2. *Pushforwards y pullbacks.* Dado un mapa entre dos variedades  $f : M \rightarrow N$ , el mismo induce diversos mapas en los espacios tangentes y cotangentes asociados.

En primer lugar el mapa  $f$  permite definir por medio de la composición de funciones el *pullback* de una función  $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ , es decir un mapa de la forma  $f^* : \mathcal{C}(N) \rightarrow \mathcal{C}(M)$ , como  $f^*g = g \circ f : M \rightarrow \mathbb{R}$ .

---

<sup>19</sup>Es decir un espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$  con un producto bilineal y asociativo con respecto a la adición y a la multiplicación por escalares.

En segundo lugar es posible definir el *pushforward*  $f_*$  de un campo vectorial  $V$  en  $M$ , es decir un mapa de la forma

$$\begin{aligned} f_* : T_p M &\rightarrow T_{f(p)} N \\ V &\mapsto f_* V. \end{aligned}$$

El pushforward  $f_* V$  debe actuar sobre las funciones  $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ . Dada la función  $g$  y el mapa  $f$ , se puede definir la acción de  $f_* V$  sobre  $g$  a partir de la acción de  $V$  sobre el pullback de  $g$  por  $f$ , es decir sobre la función compuesta  $f^* g = g \circ f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . El pushforward de  $V$  se define entonces como

$$(f_* V)(g) = V(g \circ f).$$

Una vez definido el pushforward de campos vectoriales, es posible definir el pullback de 1-formas en  $N$ , es decir un mapa de la forma

$$\begin{aligned} f^* : T_{f(p)}^* N &\rightarrow T_p^* M \\ \omega &\mapsto f^* \omega. \end{aligned}$$

El pullback  $f^* \omega$  debe actuar sobre campos vectoriales  $V$  en  $M$ . La acción de  $f^* \omega$  sobre  $V$  puede ser definida a partir de la acción de  $\omega$  sobre el pushforward  $f_* V$  de  $V$  en  $N$ . El pullback de  $\omega$  se define entonces como

$$(f^* \omega)(V) = \omega(f_* V).$$

En resumen el mapa  $f : M \rightarrow N$  permite definir los siguientes mapas (ver Figura N°15).

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ f^* g = g \circ f & \xleftarrow{f^*} & g \\ V & \xrightarrow{f_*} & (f_* V)(g) = V(g \circ f) \\ (f^* \omega)(V) = \omega(f_* V) & \xleftarrow{f^*} & \omega. \end{array}$$

4.0.3. *Grupos y álgebras de Lie.* Sea  $G$  un grupo de Lie. Las acciones a derecha y a izquierda  $R_g, L_g : G \rightarrow G$  son definidas como

$$R_g h = hg$$

y

$$L_g h = gh,$$

para  $g, h \in G$ . Dado  $L_g$  puede definirse el pushforward de campos vectoriales

$$L_{g*} : T_h(G) \rightarrow T_{gh}(G).$$

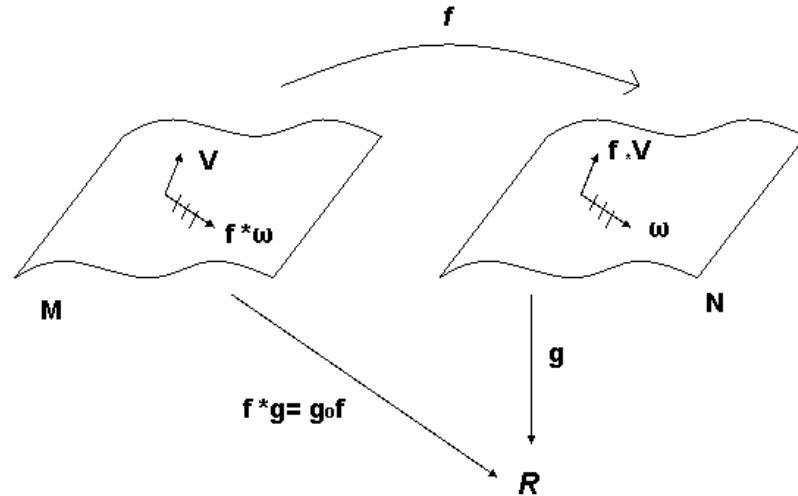


FIG. 15. Pushforwards y Pullbacks.

Un campo vectorial  $X$  *invariante a izquierda* es un campo que satisface la propiedad

$$L_{g^*}(X|_h) = X|_{gh},$$

es decir un campo tal que el pushforward  $L_{g^*}$  del vector asignado por el campo  $X$  a  $h$  es igual al mismo campo vector  $X$  evaluado en  $gh$ . Un campo vector invariante a izquierda define el *álgebra de Lie*  $\mathfrak{g}$  de  $G$ . Dado que un campo vector invariante a izquierda  $X \in \mathfrak{g}$  queda completamente especificado por su valor en el elemento unidad  $e$  (y viceversa), existe un isomorfismo de espacios vectoriales

$$\mathfrak{g} \cong T_e G.$$

El álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  es cerrada ante la operación definida por el corchete de Lie

$$[T_\alpha, T_\beta] = f_{\alpha\beta}^\gamma T_\gamma,$$

donde  $\{T_\alpha\}$  es una base de  $\mathfrak{g}$  y  $f_{\alpha\beta}^\gamma$  las constantes de estructura.

Es posible definir una representación de  $G$  sobre sí mismo dada por la *acción adjunta*

$$\begin{aligned} Ad_g : G &\rightarrow G \\ h &\mapsto Ad_g h \equiv ghg^{-1}. \end{aligned}$$

El mapa tangente a  $Ad_g$  será el pushforward

$$Ad_{g*} : T_h(G) \rightarrow T_{ghg^{-1}}(G).$$

Si restringimos dicho mapa a  $T_e(G) \simeq \mathfrak{g}$ ,  $Ad_{g*}$  mapea  $\mathfrak{g}$  sobre sí mismo, ya que  $Ad_g e = geg^{-1} = gg^{-1} = e$  y  $T_{geg^{-1}}(G) = T_e(G) \simeq \mathfrak{g}$ . Se puede demostrar que el correspondiente mapa  $ad_g \equiv Ad_{g*}|_{T_e(G)}$  en  $\mathfrak{g}$  está dado por

$$\begin{aligned} ad_g : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g} \\ A &\mapsto gAg^{-1}, \end{aligned}$$

con  $A \in \mathfrak{g}$ . Esta acción define entonces la *representación adjunta* de  $G$  sobre su álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  dada por

$$\begin{aligned} ad : G \times \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g} \\ (g, A) &\mapsto ad_g A = gAg^{-1}. \end{aligned}$$

Una curva  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow G$  con  $\phi(0) = e$  será denominada *subgrupo uniparamétrico* de  $G$  si satisface la propiedad

$$\phi(t)\phi(s) = \phi(t+s).$$

Puede verse fácilmente que  $\phi^{-1}(t) = \phi(-t)$ . Dado un subgrupo uniparamétrico  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow G$ , existe un campo vector  $X$  tal que

$$\frac{d\phi^\mu(t)}{dt} = X^\mu(\phi(t)).$$

Puede demostrarse que  $X$  es un campo vector invariante a izquierda. Inversamente puede demostrarse que a todo campo vector invariante a izquierda puede asignársele un subgrupo uniparamétrico  $\phi(t)$ . Existe en consecuencia una correspondencia biunívoca entre subgrupos uniparamétricos y campos vectores invariantes a izquierda.

Sea ahora  $G$  un grupo de Lie y  $V \in T_e G$ . El *mapa exponencial*  $exp : T_e G \rightarrow G$  se define como

$$exp(tV) = \phi_V(t) \quad t \in \mathbb{R},$$

donde  $\phi_V$  es el subgrupo uniparamétrico de  $G$  generado por el campo vector invariante a izquierda  $X_V$  (con  $X_V|_g = L_{g*}V$ ).

4.0.4. *Formas de Maurer-Cartan.* Dada una base  $\{V_1, \dots, V_n\}$  de  $\mathfrak{g}$ , pueden definirse en cada punto  $g \in G$   $n$  campos vectoriales invariantes a izquierda  $\{X_1, \dots, X_n\}$  como  $X_\mu|_g = L_{g*}V_\mu$ . Como  $[X_\mu, X_\nu]|_g$  es un elemento de  $\mathfrak{g}$  en  $g$ , puede ser expresado en términos de  $\{X_\mu\}$  como

$$[X_\mu, X_\nu] = c_{\mu\nu}^\lambda X_\lambda,$$

donde  $c_{\mu\nu}^\lambda$  son las constantes de estructura del grupo de Lie  $G$ .

Introduzcamos ahora una base dual a  $\{X_\mu\}$  que denotaremos  $\{\theta^\mu\}$ , es decir tal que  $\langle \theta^\mu, X_\nu \rangle = \delta_\nu^\mu$ . Puede verse que  $\{\theta^\mu\}$  es una base de 1-formas invariantes a izquierda. Si  $G$  es un grupo de Lie conexo de dimensión finita entonces el álgebra  $\bigwedge \mathfrak{g}^*$  generada por  $\{\theta^\mu\}$  es el subálgebra diferencial graduada de  $\Omega^*(G)$  de formas diferenciales invariantes a izquierda, donde  $\Omega^*(G)$  es el álgebra de formas diferenciales sobre  $G$ . En otras palabras tenemos una inclusión  $i : \bigwedge \mathfrak{g}^* \hookrightarrow \Omega^*(G)$ . Puede demostrarse que estas 1-formas satisfacen la *ecuación de estructura de Maurer-Cartan*

$$d\theta^\mu = -\frac{1}{2}c_{\nu\lambda}^\mu \theta^\nu \wedge \theta^\lambda.$$

Es posible ahora definir una 1-forma  $\theta : T_g G \rightarrow \mathfrak{g}$  valuada en el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  que lleva cada vector  $X_\mu$  al elemento  $V_\mu \in \mathfrak{g}$  a partir del cual se generó el campo vector invariante a izquierda al cual pertenece  $X$ . Dicha 1-forma se define entonces como

$$\theta : X \mapsto (L_{g^{-1}})_* X = (L_g)^{-1} X, \quad X \in T_g G.$$

La 1-forma  $\theta$  será denominada *forma de Maurer-Cartan*. Es posible demostrar que dicha 1-forma  $\theta$  puede expresarse como

$$\theta = V_\mu \otimes \theta^\mu.$$

La 1-forma  $\theta$  satisface

$$d\theta = -\frac{1}{2}\theta \wedge \theta,$$

donde  $d\theta \equiv V_\mu \otimes d\theta^\mu$  y

$$\theta \wedge \theta = [V_\mu, V_\nu] \otimes \theta^\mu \wedge \theta^\nu.$$

4.0.5. *Espacios fibrados.* A continuación se establecerán las principales nociones de la teoría de espacios fibrados: *espacio fibrado*, *sección* de un fibrado, *pull-back*, *fibrados vectoriales*, *fibrados principales* y *fibrados asociados*.

Un espacio fibrado diferenciable  $(E, \pi, M, F, G)$  consiste en los siguientes elementos

- Una variedad diferenciable  $E$  llamada *espacio total* del fibrado.
- Una variedad diferenciable  $M$  llamada *base* del fibrado.
- Una variedad diferenciable  $F$  llamada *fibra* del fibrado.
- Un mapa suryectivo  $\pi : E \rightarrow M$  llamado *proyección*. La imagen inversa  $\pi^{-1}(p) = F_p \cong F$  con  $p \in M$  es la fibra sobre  $p$ .
- Un grupo  $G$ , llamado el *grupo de estructura*, que actúa sobre  $F$  por la izquierda.



- Un cubrimiento  $\{U_i\}$  de  $M$  con difeomorfismos

$$\phi_i : U_i \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_i),$$

tal que  $\pi \circ \phi_i(p, f) = p$ . Los mapas  $\phi_i$  definen *trivializaciones locales* del fibrado ya que  $\phi_i^{-1}$  mapea  $\pi^{-1}(U_i)$  en el producto directo  $U_i \times F$ .

- Si escribimos  $\phi_i(p, f) \equiv \phi_{i,p}(f)$ , el mapa  $\phi_{i,p} : F \rightarrow F_p$  es un difeomorfismo. Sobre las intersecciones  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  se pide que  $t_{ij}(p) \equiv \phi_{i,p}^{-1} \circ \phi_{j,p} : F \rightarrow F$  sea un elemento del grupo de estructura  $G$ . De esta manera  $\phi_i$  y  $\phi_j$  están relacionadas por medio de las *funciones de transición*

$$t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G.$$

Estas funciones de transición deben satisfacer las siguientes *condiciones de cociclo*:

$$\begin{aligned} t_{ii}(p) &= id_G & p \in U_i, \\ t_{ij}(p) &= t_{ji}(p)^{-1} & p \in U_i \cap U_j, \\ t_{ij}(p) \cdot t_{jk}(p) &= t_{ik}(p)^{-1} & p \in U_i \cap U_j \cap U_k. \end{aligned}$$

Un fibrado es una *fibrado trivial* si globalmente es isomorfo a un espacio producto  $M \times F$ . Intuitivamente, un espacio fibrado es un “producto” en general no trivial entre dos variedades  $M$  y  $F$  tal que localmente puede ser representado (en forma no canónica) por productos triviales de la forma  $U_i \times F$ .

Dado un fibrado  $E \xrightarrow{\pi} M$ , una *sección*  $s$  es un mapa  $s : M \rightarrow E$  tal que  $\pi \circ s = id_M$ . En otras palabras  $s$  manda elementos de la base  $p \in M$  a elementos de la fibra  $F_p$  sobre  $p$ . Si la sección  $s$  está definida solo localmente, se dirá que  $s$  es una *sección local*.

Sea un fibrado  $E \xrightarrow{\pi} M$  con fibra típica  $F$ . Dado un mapa  $f : N \rightarrow M$ , el par  $(E, f)$  define otro fibrado sobre  $N$  con la misma fibra típica  $F$ . Este nuevo fibrado, llamado el *pull-back* de  $E$  por  $f$ , se denota  $f^*E$  y se define como

$$f^*E \equiv \{(p, u) \in N \times E \mid f(p) = \pi(u)\},$$

siendo la proyección  $\tilde{\pi}(p, u) = p$ . En otras palabras, la fibra de  $f^*E$  sobre cada punto  $p \in N$  será igual a la fibra de  $E$  sobre  $f(p) \in M$ . Se tiene entonces el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} f^*E & & E \\ \downarrow \tilde{\pi} & & \downarrow \pi \\ N & \xrightarrow{f} & M. \end{array}$$

Un *fibrado vectorial* es un fibrado cuya fibra típica es un espacio vectorial real o complejo. Las funciones de transición son transformaciones lineales pertenecientes a  $GL(k, \mathbb{R})$  o  $GL(k, \mathbb{C})$  respectivamente, donde  $k$  es la dimensión de la fibra.

Un  *$G$ -fibrado principal* es un fibrado  $P \xrightarrow{\pi} M$  en el que la fibra típica coincide con el grupo de estructura  $G$ . Además de la acción a izquierda propia de todo fibrado, un fibrado principal posee una acción a derecha de  $G$  sobre  $P$ :

$$\begin{aligned} P \times G &\rightarrow P \\ (u, a) &\mapsto ua, \end{aligned}$$

con  $\pi(ua) = \pi(u)$ . Dado que la acción de  $G$  sobre  $P$  es *transitiva*, las fibras  $F_p = \pi^{-1}(p)$  son difeomorfas a  $G$ . Es decir que, dados  $u_1, u_2 \in \pi^{-1}(p)$ , existe un único elemento  $a \in G$  tal que  $u_1 = u_2a$ . Es entonces posible reconstruir la fibra  $F_p$  como  $F_p = \{ua | a \in G\}$  con  $\pi(u) = p$ . Esto significa que, dado un elemento  $u \in F_p$  se puede establecer un isomorfismo entre la fibra  $F$  y el grupo  $G$  dado por  $ua \leftrightarrow a$ . Dada una sección  $s_i$  sobre  $U_i$  es entonces posible definir una *trivialización local*  $\phi_i : U_i \times G \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$  dada por

$$\phi_i(p, g) = s_i(p)g.$$

El siguiente teorema permite determinar cuando un fibrado principal es trivial:

**Teorema.** *Un  $G$ -fibrado principal  $P \xrightarrow{\pi} M$  es trivial si y solo si admite una sección global  $\sigma$ .*

*Dem.* La sección  $\sigma$  define un homeomorfismo entre  $P$  y  $M \times G$ . Como la acción a derecha es libre y transitiva, cualquier elemento  $u \in P$  con  $\pi(u) = p$  puede ser escrito como  $u = \sigma(p)a$  con  $a \in G$ . Se puede entonces definir el mapa

$$\begin{aligned} \Phi : P &\rightarrow M \times G \\ u = \sigma(p)a &\mapsto (p, a). \end{aligned}$$

Se tiene entonces que  $P$ , siendo isomorfo al producto  $M \times G$ , es trivial. Inversamente, si  $P \simeq M \times G$ , entonces existe una trivialización  $\phi : M \times G \rightarrow P$ . Si se toma un elemento fijo  $g$  de  $G$ , entonces el mapa

$$\begin{aligned} \sigma_g : M &\rightarrow P \\ p &\mapsto \phi(p, g) \end{aligned}$$

es una sección global.

Dado un  $G$ -fibrado principal  $P \xrightarrow{\pi} M$  es posible construir un *fibrado asociado* del modo siguiente. Supongase que  $G$  actúa a izquierda sobre

una variedad  $F$  (es decir que existe una representación  $\rho$  de  $G$  sobre  $F$ ). Se puede entonces definir una acción de  $G$  sobre  $P \times F$  como

$$(u, f) \mapsto (ug, g^{-1}f).$$

Puede demostrarse que el cociente con respecto a esta acción

$$\frac{P \times F}{G} \equiv P \times_G F,$$

es un fibrado sobre  $M$  con fibra típica  $F$ .

El siguiente lema permite caracterizar a los elementos del grupo de gauge  $\mathcal{G}$  como secciones de un fibrado asociado a  $P$ .

**Lema.** *Existe una correspondencia uno a uno entre secciones del fibrado asociado  $E = P \times_G F \rightarrow M$  y mapas  $\varphi : P \rightarrow F$  que satisfacen la propiedad de equivariancia  $\varphi(ua) = a^{-1} \cdot \varphi(u)$  para todo  $u \in P$  y  $a \in G$ .*

*Dem.* Para todo  $p \in M$  podemos elegir un punto  $u \in P$  tal que  $\pi(u) = p$ . El par  $(u, \varphi(u)) \in P \times F$  determina un elemento sobre  $p$  en  $P \times_G F$  dado por la clase de equivalencia  $(ua, a^{-1}\varphi(u))$ . Ahora bien, puede verse que esta clase de equivalencia no depende del punto  $u \in \pi^{-1}p$ . En efecto, tomemos  $u' = ug$ . El par  $(ug, \varphi(ug))$  determinará el punto  $(uga, a^{-1}g^{-1}\varphi(u)) = (ug', g'^{-1}\varphi(u))$  con  $g' = ga \in G$ . De esta manera cada mapa equivariante  $\varphi : P \rightarrow F$  define un elemento de  $E = P \times_G F$  sobre cada  $p \in M$ . Tenemos así definida una sección del fibrado asociado  $E = P \times_G F \rightarrow M$ .

## A2. Teoría de cuerdas bosónicas y modelos cosmológicos.

La acción que describe la dinámica de la hoja de mundo de una cuerda en una variedad con curvatura en presencia de un campo de fondo es

$$(4.118) \quad S_{WS} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\sigma d\tau \sqrt{h} (h_{\alpha\beta} g_{\mu\nu}(X) + i\varepsilon_{\alpha\beta} B_{\mu\nu}(X)) \partial^\alpha X^\mu \partial^\beta X^\nu + \frac{1}{2\pi} \int d\sigma d\tau \sqrt{h} R(X) \phi(X),$$

donde  $h_{\alpha\beta}$  es la métrica en la hoja de mundo de la cuerda,  $R$  es el escalar de Ricci de esta métrica,  $g_{\mu\nu}$  es la métrica del espacio-tiempo de fondo,  $B_{\mu\nu}$  es un campo antisimétrico (usualmente denominado  $NS$ - $NS$  campo de 2-formas) y  $\phi$  es el campo escalar del dilatón (ver Refs.[68, 69]). Estos tres campos aparecen en el espectro sin masa de la teoría de cuerdas bosónicas cerradas. Los índices  $\alpha, \beta$  corresponden a las coordenadas en la hoja de mundo bidimensional, mientras que los índices  $\mu, \nu, \rho$  corresponden a las coordenadas del espacio-tiempo

$D$ -dimensional. El parámetro  $\alpha'$  (usualmente llamado *Regge slope*) es la inversa de la tensión de la cuerda,  $T = 1/(2\pi\alpha')$ , la cual define la escala de la teoría a nivel cuántico. La acción (4.118) define una teoría de campos en dos dimensiones. Esta teoría es invariante ante las transformaciones

$$\begin{aligned}\delta B_{\mu\nu} &= \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu, \\ \delta\phi &= \phi_0,\end{aligned}$$

donde  $\Lambda_\mu$  es un vector arbitrario y  $\phi_0$  una constante.

La acción (4.118) es invariante ante la transformación conforme de Weyl  $h_{\alpha\beta} \rightarrow \Omega^2(\tau, \sigma)h_{\alpha\beta}$ . Si se impone esta simetría a nivel cuántico (teoría sin anomalías conformes) las funciones beta deben anularse [68]. En consecuencia, a primer orden en  $\alpha'$  e introduciendo el tensor de intensidad de campo  $H_{\mu\nu\rho}$  asociado al campo antisimétrico  $B_{\mu\nu}$

$$\mathbf{H}_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\rho B_{\mu\nu} + \partial_\nu B_{\rho\mu},$$

se obtienen las ecuaciones

$$(4.119) \quad \begin{aligned}R_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu \phi - \frac{1}{4} \mathbf{H}_{\mu\rho\delta} \mathbf{H}_\nu^{\rho\delta} &= 0, \\ \nabla^\delta \mathbf{H}_{\delta\mu\nu} - \nabla^\delta \phi \mathbf{H}_{\delta\mu\nu} &= 0, \\ c - \nabla_\mu \nabla^\mu \phi + \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - \frac{1}{6} \mathbf{H}_{\mu\nu\rho} \mathbf{H}^{\mu\nu\rho} &= 0,\end{aligned}$$

donde, en principio,  $c = 2(D - 26)/(3\alpha')$ . Sin embargo,  $c$  puede modificarse incluyendo más campos, de modo que en lo que sigue lo consideraremos como un número real arbitrario.

Estamos ahora interesados en una formulación espacio-temporal de la teoría de la gravitación, análoga a la acción de Einstein-Hilbert para la Relatividad General. Puede verse que las ecuaciones (4.119) pueden ser interpretadas como las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange de una teoría de campos correspondientes a la acción

$$(4.120) \quad S_{SF} = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^D x \sqrt{-g} e^{-\phi} \left( -c + R + \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - \frac{1}{12} \mathbf{H}_{\mu\nu\rho} \mathbf{H}^{\mu\nu\rho} \right),$$

donde  $G_N$  es la constante de Newton en  $D$  dimensiones y  $R$  es el escalar de Ricci del espacio-tiempo. De este modo, podemos interpretarla como la acción efectiva a bajas energías de la teoría de cuerdas bosónicas cerradas en el límite de tensión grande ( $\alpha' \rightarrow 0$ ). Una configuración consistente de campos de fondo para la formulación de la teoría de cuerdas debe ser una solución clásica obtenida a partir del principio variacional correspondiente a la acción (4.120). En otras palabras, el requerimiento de preservar a nivel cuántico la invariancia conforme de

la hoja de mundo bidimensional, a primer orden en la inversa de la tensión de la cuerda, conduce a las mismas ecuaciones de movimiento resultantes del principio variacional  $\delta S = 0$  aplicado a la teoría de campos en  $D$  dimensiones dada por la acción (4.120).

Una formulación más familiar puede ser obtenida redefiniendo los campos según  $g_{\mu\nu} \rightarrow e^\phi g_{\mu\nu}$ , de modo tal que la acción espacio-temporal es ahora

$$S_{EF} = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^D x \sqrt{-g} \times \left( R - ce^{2\phi/(D-2)} + \frac{1}{D-2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - \frac{e^{-4\phi/(D-2)}}{12} \mathbf{H}_{\mu\nu\rho} \mathbf{H}^{\mu\nu\rho} \right).$$

De este modo se obtiene la acción de Einstein en  $D$  dimensiones incluyendo los términos de acoplamiento con el dilatón y el campo antisimétrico. Esta forma para la teoría de campos efectiva es conocida como *Einstein frame action*, mientras que la acción (4.120) es usualmente denominada *string frame action*. La interpretación de los aspectos gravitatorios de la teoría es más directo en el *Einstein frame*. En efecto, para el caso particular  $D = 4$ , el principio variacional  $\delta S = 0$  conduce a las ecuaciones

$$(4.121) \quad \begin{aligned} \nabla_\mu \partial^\mu \phi + ce^\phi - \frac{1}{16} e^{-2\phi} \mathbf{H}^2 &= 0, \\ \nabla_\delta \mathbf{H}_{\mu\nu}^\delta + 2 \nabla_\delta \phi \mathbf{H}_{\mu\nu}^\delta &= 0, \\ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \frac{c}{2} g_{\mu\nu} e^\phi &= \frac{1}{2} \left( \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla \phi)^2 \right) + \\ &+ \frac{1}{4} e^{-2\phi} \left( \mathbf{H}_{\mu\rho\delta} \mathbf{H}_\nu^{\rho\delta} - \frac{1}{6} g_{\mu\nu} \mathbf{H}^2 \right), \end{aligned}$$

y a las identidades de Bianchi

$$(4.122) \quad \nabla_{[\mu} \mathbf{H}_{\mu\rho\delta]} = 0.$$

Puede reconocerse en (4.121) las ecuaciones de Einstein con una función cosmológica dada por  $\Lambda = ce^\phi$  y con el tensor de energía-impulso del dilatón y el tensor antisimétrico como fuente. La relación entre el *string frame* y el *Einstein frame* puede ser clarificada si consideramos las soluciones de las ecuaciones para el caso homogéneo e isótropo. Dado que la métrica  $ds^2$  en el *string frame* está relacionada con la métrica correspondiente  $d\tilde{s}^2$  en el *Einstein frame* por medio de la expresión  $ds^2 = e^\phi d\tilde{s}^2$ , los resultados pueden ser fácilmente traducidos. Por ejemplo, para el caso  $c = 0$  una solución posible es una cosmología plana donde el factor de escala se comporta como  $a \sim \tau^{1/3}$ . Recordando la correspondiente evolución del dilatón en  $\tau$ , este comportamiento

puede ser traducido al *Einstein frame* como una evolución del factor de escala  $b \sim \tau^{1/2}$ , es decir a la misma evolución que un universo dominado por radiación (ver Ref.[43]).

Las ecuaciones de campo derivadas de la acción espacio-temporal (4.120) admiten soluciones homogéneas e isotropas en cuatro dimensiones (ver Refs.[1, 43, 82, 83]). Estas soluciones tienen una métrica de tipo Friedmann–Robertson–Walker

$$ds^2 = N(\tau)d\tau^2 - a^2(\tau) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right),$$

donde  $a$  es el factor de escala y  $k = (-1, 0, 1)$  determina la curvatura. Para el dilatón  $\phi$  y la intensidad de campo  $H_{\mu\nu\rho}$  las condiciones de homogeneidad e isotropía conducen a

$$\phi = \phi(\tau), \quad \mathbf{H}_{ijk} = \lambda(\tau)\varepsilon_{ijk},$$

donde  $\varepsilon_{ijk}$  es la forma de volumen sobre las superficies de tiempo constante y  $\lambda$  es un número real. Las identidades de Bianchi (4.122) implican que  $\lambda$  no depende del parámetro  $\tau$ .

Escribamos ahora la forma explícita de la acción para los modelos considerados. Si se define  $b^2(\tau) \equiv e^{2\Omega(\tau)}$ , la acción en el *Einstein frame* en cuatro dimensiones para el caso  $\lambda = 0$  (el cual corresponde al campo  $B_{\mu\nu}$  igual a cero) está dada por

$$S = \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau N e^{3\Omega} \left[ -\frac{\dot{\Omega}^2}{N^2} + \frac{\dot{\phi}^2}{N^2} - 2ce^\phi + ke^{-2\Omega} \right],$$

donde el punto significa  $d/d\tau$ . Por otra parte, para el caso  $k = 0$  (universo plano) la acción asume la forma

$$S = \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau N e^{3\Omega} \left[ -\frac{\dot{\Omega}^2}{N^2} + \frac{\dot{\phi}^2}{N^2} - 2ce^\phi - \lambda^2 e^{-6\Omega - 2\phi} \right]$$

(el factor  $(8\pi G_N)^{-1}$  fue absorbido por medio de una redefinición de los campos).

La forma hamiltoniana en el *Einstein frame* para los modelos considerados es

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[ p_\Omega \dot{\Omega} + p_\phi \dot{\phi} - N\mathcal{H} \right].$$

Para  $\lambda = 0$  el vínculo hamiltoniano es

$$(4.123) \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2} e^{-3\Omega} (-p_\Omega^2 + p_\phi^2 + 2ce^{6\Omega+\phi} - ke^{4\Omega}) = 0,$$

mientras que para  $k = 0$  el vínculo hamiltoniano es

$$(4.124) \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2}e^{-3\Omega} (-p_\Omega^2 + p_\phi^2 + 2ce^{6\Omega+\phi} + \lambda^2 e^{-2\phi}) = 0.$$

Estos dos vínculos hamiltonianos (o sus formas escaleadas  $H \equiv 2e^{3\Omega}\mathcal{H} = 0$ ) son el punto de partida para la cuantificación canónica de estos modelos.

## REFERENCES

1. Antoniadis I., Bachas C., Ellis J. y Nanopoulos D. V., *Cosmological string theories and discrete inflation*, Phys. Lett. **B211**, 393, 1988.
2. Arnowitt R., Deser S. y Misner C., *The dynamics of General Relativity, en Gravitation: An Introduction to Current Research*, editado por Witten, Wiley and Sons, 1962.
3. Atiyah M. F. y Singer I. M., *Dirac operators coupled to vector potentials*, Proc. of the National Academy of Sciences of the U.S.A **81**, 2597, 1984.
4. Baez J. C. y Muniain J. P., *Gauge fields, knots and gravity*, World Scientific, Singapore, 1994.
5. Barbour J. B., *Einstein and Mach's Principle*, en *Studies in the History of General Relativity*, ed. por J. Eisenstaedt y A. J. Kox, The Center for Einstein Studies, Boston University, Boston, 1992.
6. Barbour J. B., *The timelessness of quantum gravity: I. The evidence from the classical theory*, Class. Quant. Grav. **11**, 2853, 1994; *The timelessness of quantum gravity: II. The appearance of dynamics in static configurations* Class. Quant. Grav. **11**, 2875, 1994.
7. Barbour J. B. y Pfister H. (Eds.), *Mach's Principle-From Newton's Bucket to Quantum Gravity*, Birkhauser, Boston, 1995.
8. Barbour J. B., *The end of time*, Oxford University Press, New York, 1999.
9. Baulieu L. y Bellon M., *p-forms and Supergravity: Gauge symmetries in curved space*, Nucl. Phys. B **266**, 75, 1986.
10. Baulieu L. y Singer I. M., *Topological Yang-Mills symmetry*, Nucl. Phys. (Proc. Suppl.) B **5**, 12, 1988.
11. Baulieu L. y Thierry-Mieg J., *The principle of BRST symmetry: An alternative approach to Yang-Mills theories*, Nucl. Phys. B **197**, 477, 1982.
12. Becchi C., Rouet A. y Stora R., *The Abelian Higgs Kibble Model, Unitarity of the S-Operator*, Phys. Lett. B **52**, 344, 1974; *Renormalization of the Abelian Higgs-Kibble Model*, Commun. Math. Phys. **42**, 127, 1975; *Renormalization of Gauge Theories*, Ann. Phys. (N.Y.), **98**, 287, 1976.
13. Beluardi S. C. y Ferraro R., *Extrinsic Time in Quantum Cosmology*, Phys. Rev. **D52**, 1963, 1995.
14. Birmingham D., Blau M., Rakowski M. y Thompson G., *Topological Field Theory*, Phys. Rep. **209**, 1991.
15. Blyth W. F. y Isham C. J., *Quantization of a Friedmann universe filled with a scalar field*, Phys. Rev. **D11**, 768, 1975.
16. Bonora L. y Cotta-Ramusino P., *Some Remarks on BRS Transformations, Anomalies and the Cohomology of the Lie Algebra of the Group of Gauge Transformations*, Commun. Math. Phys. **87**, 589, 1983.
17. Bonora L., Cotta-Ramusino P., Rinaldi M. y Stasheff J., *The Evaluation Map in Field Theory, Sigma-Models and Strings I*, Commun. Math. Phys. **112**, 237, 1987.
18. Bott R. y Tu L. W., *Differential Forms in Algebraic Topology*, Grad. Texts in Math., **82**, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
19. Brown J. D. y Kuchař K. V., *Dust as a standard of space and time in Canonical Quantum Gravity*, Phys. Rev. **D51**, 5600, 1995.



20. Castagnino M., Catren G. y Ferraro R., *Time asymmetries in quantum cosmology and the search for boundary conditions to the Wheeler-DeWitt equation*, *Class. Quant. Grav.* **19**, 4729, 2002.
21. Catren G. y Devoto J., *Extended Gauge Principle, Gribov's ambiguity and BRST Symmetry for Yang-Mills Theories*, ha ser enviado.
22. Catren G. y Devoto J., *Path integral formulation of the Extended Gauge Principle for Yang-Mills Theories*, ha ser enviado.
23. Catren G. y Devoto J., *Extended Gauge Principle and Quantization of Gauge Theories*, presentado en la Albert Einstein Century International Conference, 18-22 Julio 2005, Palais de l'UNESCO, Paris, France.
24. Catren G. y Ferraro R., *Quantization of the Taub model with extrinsic time*, *Phys. Rev.* **D63**, 023502, 2001.
25. Catren G. y Simeone C., *Notes on Dilaton Quantum Cosmology*, aparecerá en el libro *Trends in General Relativity and Quantum Cosmology* (capítulo 3), editado por A. Reimer, Nova Science Publishers, New York, ISBN: 1-59454-794-7, math-ph/0504011.
26. Chan Hong-Mo y Tsou Sheung Tsun, *Some elementary gauge theory concepts*, World Scientific, Singapore, 1993.
27. Choquet-Bruhat Y. y DeWitt-Morette C., *Analysis, Manifolds and Physics, Part I: Basics*, Elsevier Science Publishers, New York, 1982.
28. Cordes S., Moore G. y Ramgoolam S., *Lectures on 2D Yang-Mills Theory, Equivariant Cohomology and Topological Field Theories*, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **41**, 184, 1995.
29. Cotta-Ramusino P. y Reina C., *The action of the group of bundle-automorphisms on the space of connections and the geometry of gauge theories*, *Jour. of Geom. and Phys.*, Vol. 1, n 3, 121, 1984.
30. Daniel M. y Viallet C. M., *The geometrical setting of gauge theories of the Yang-Mills type*, *Rev. of Mod. Phys.*, **52**, 1, 1980.
31. De Cicco H. y Simeone C., *Gauge invariance of parametrized systems and path integral quantization*, *Int. J. Mod. Phys.* **A14**, 5105, 1999.
32. Dubois-Violette M., *The Weil-B.R.S. algebra of a Lie algebra and the anomalous terms in gauge theory*, *Jour. of Geom. and Phys.*, Vol. 3, n. 4, 525, 1986.
33. DeWitt B. S., *Quantum Theory of Gravity. 1. The Canonical Theory*, *Phys. Rev.* **160**, 1113, 1967.
34. DeWitt B. S., *The Global Approach to Quantum Field Theory*, Oxford University Press, New York, 2003.
35. Dirac P. A. M., *Lectures on Quantum Mechanics*, Yeshiva University, New York, 1964.
36. Donaldson S. K. y Kronheimer P. B., *The geometry of four-manifolds*, Oxford University Press, New York, 1990.
37. Earman J. y Norton J., *What price space-time Substantivalism? The Hole Story*, *British Journal for the Philosophy of Science*, **38**, 1987.
38. Faddeev L. y Slavnov A., *Gauge fields: An introduction to quantum theory*, *Frontiers in Physics*, Perseus Books, 1991.
39. Ferraro R. y Simeone C., *Canonical gauges in the path integral for parametrized systems*, *J. Math. Phys.* **38**, 599, 1997.
40. Ferraro R., *The Problem of Time in Quantum Gravity*, *Grav. Cosmol.* **5**, 195, 1999.

41. Fre P. y Soriani P., *The N=2 Wonderland. From Calabi-Yau Manifolds to Topological Field Theory*, World Scientific, Singapore, 1995.
42. Ghandour G. I., *Effective generating functions for quantum canonical transformations*, Phys. Rev. **D35**, 1289, 1987.
43. Goldwirth D. S. y Perry M. J., *String-dominated cosmology*, Phys. Rev. **D49**, 5019, 1994.
44. Govaerts J., *Hamiltonian Quantization and Constrained Dynamics*, Leuven Notes in Mathematical and Theoretical Physics, Leuven University Press, 1991.
45. Gribov V., *Quantization of non-Abelian gauge theories*, Nucl. Phys. B **139**, 1, 1978.
46. Guillemin V. W. y Sternberg S., *Supersymmetry and equivariant de Rham theory*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999.
47. Hájíček P., *Origin of nonunitarity in quantum gravity*, Phys. Rev. **D34**, 1040, 1986.
48. Halliwell J. J., *Introductory Lectures on Quantum Cosmology*, Proceedings of the Jerusalem Winter School on Quantum Cosmology and Baby Universes, editado por T. Piran, World Scientific, Singapore, 1990.
49. Henneaux M., *Hamiltonian form of the path integral for theories with a gauge freedom*, Phys. Rep. **126**:1, 1985.
50. Henneaux M. y Teitelboim C., *Quantization of Gauge Systems*, Princeton Univ. Press, New Jersey, 1992.
51. Henneaux M., Teitelboim C. y Vergara J. D., *Gauge Invariance for Generally Covariant Systems*, Nucl. Phys. **B387**, 391, 1992.
52. Isham C. J., *Canonical Quantum Gravity and the Problem of Time*, Lectures presentadas en el NATO Advanced Study Institute "Recent Problems in Mathematical Physics", 1992, gr-qc/9210011.
53. Isham C. J., *Modern Differential Geometry for Physicists*, World Scientific, Singapore, 1999.
54. Kalkman J., *BRST Model for Equivariant Cohomology and Representatives for the Equivariant Thom Class*, Commun. Math. Phys. **153**, 447, 1993.
55. Kiefer C., *Quantum Gravity*, Clarendon Press, Oxford, 2004.
56. Kobayashi S. y Nomizu K., *Foundations of differential geometry*, vol. I, Wiley, New York, 1963.
57. Kriegl A. y Michor P., *A convenient setting for global analysis*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 53, A.M.S, 1997.
58. Kuchař K. V., *Canonical Quantization of Cylindrical Gravitational Waves*, Phys. Rev. **D4**, 955, 1971.
59. Kuchař K. V., en *Quantum Gravity 2: A Second Oxford Symposium*, editado por Isham C. J., Penrose R. y Sciama D. W., Clarendon Press, 1981.
60. Kuchař K. V., *Time and Interpretations of Quantum Gravity*, en *Proceedings of the 4th Canadian Conference on General Relativity and Relativistic Astrophysics*, editado por Kunstatter G., Vincent D. y Williams J., World Scientific, Singapore, 1992.
61. Kuchař K. V., *Canonical Quantum Gravity*, en *General Relativity and Gravitation 1992*, Proceedings of the 13th International Conference on General Relativity and Gravitation, Córdoba, Argentina, editado por Gleiser R., Kozameh C. N. y Moreschi O. M., IOP Publishing, Bristol, 1993.

62. Michor P., *Gauge theory for fiber bundles*, Monographs and Textbooks in Physical Sciences, Lecture Notes **19**, Bibliopolis, Napoli, 1991.
63. Misner C., Thorne K. y Wheeler J. A., *Gravitation*, Freeman, San Francisco, 1973.
64. Moncrief V. y Ryan M. P., *Amplitude-real-phase exact solutions for quantum mixmaster universes*, Phys. Rev. **D44**, 2375, 1991.
65. Nakahara M., *Geometry, Topology and Physics*, Institute of Physics Publishing, London, 2003.
66. Nash C., *Differential Topology and Quantum Field Theory*, Academic Press Limited, 1991.
67. Norton J., *The Physical Content of General Covariance*, en *Studies in the History of General Relativity*, editado por Eisenstaedt J. y Kox A. J., The Center for Einstein Studies, Boston University, Boston, 1992.
68. Polchinski J., *String Theory I, An Introduction to the Bosonic String*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
69. Polyakov A. M., *Quantum geometry of bosonic strings*, Phys. Lett. **B103**, 207, 1981.
70. Rovelli C., *Quantum Gravity*, Cambridge University Press, 2004.
71. Rovelli C., *Partial observables*, gr-qc/011035.
72. Rovelli C., *Is there Incompatibility Between the Way Time is Treated in General Relativity and in Standard Quantum Mechanics?*, en *Conceptual Problems of Quantum Gravity*, editado por Ashtekar A. y Stachel J., The Center for Einstein Studies, Boston University, Boston, 1991.
73. Schwarz A. S., *Topology for Physicists*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1994.
74. Simeone C., *Quantization of minisuperspaces as ordinary gauge systems*, J. Math. Phys. **39**, 3131, 1998.
75. Simeone C., *Gauge fixation and global phase time for minisuperspaces*, J. Math. Phys. **40**, 4527, 1999.
76. Simeone C., *Deparametrization and Path Integral Quantization of Cosmological Models*, World Scientific, Singapore, 2002.
77. Simeone C., *Path integral for minisuperspaces and its relation with nonequivalent canonical quantizations*, Phys. Lett. **A310**, 143 (2003).
78. Singer I. M., *Some Remarks on the Gribov Ambiguity*, Commun. Math. Phys. **60**, 7, 1978.
79. Stasheff J., *Homological (ghost) approach to constrained Hamiltonian systems*, Contemporary Mathematics, Vol. **132**, 1992.
80. Szabo R., *Equivariant cohomology and localization of path integrals*, Springer-Verlag, 2000.
81. Thierry-Mieg J., *Geometrical reinterpretation of Faddeev-Popov ghost particles and BRS transformations*, J. Math. Phys. **21**, 2834, 1980.
82. Tseytlin A. A., *Dilation, winding modes and cosmological solutions*, Class. Quant. Grav. **9**, 979, 1992.
83. Tseytlin A. A. y Vafa C., *Elements of String Cosmology*, Nucl. Phys. **B372**, 443, 1992.
84. Tyutin I. V., *Gauge invariance in field theory and in statistical mechanics in the operator formalism*, Lebedev preprint FIAN N39.

- 
85. van Holten J. W., *Aspects of BRST Quantization*, Lectures dadas en la Summer School *Geometry and Topology in Physics*, Germany, 2001, hep-th/0201124.
  86. Witten E., *Topological quantum field theory*, Commun. Math. Phys. **117**, 353, 1988.
  87. Witten E., *Introduction to Cohomological Field Theory*, Intern. J. Mod. Phys. **A6**, 2775, 1991.

## Agradecimientos.

Querría agradecer

- a mi director de tesis Dr. Rafael Ferraro, a mi director asistente Dr. Jorge Devoto y a mi consejero de estudios y director de beca Dr. Mario Castagnino.
- a Marc Henneaux por sus valiosos comentarios sobre los trabajos [21, 22] (Sección N°3 de esta tesis).
- a mis amigos “iafeanos” Susana Boudemont, Andrea Costa, Graciela Domenech, Gastón Giribet, Jorge Guerón, Mauricio Leston y Claudio Simeone.
- a mis amigos y compañeros de carrera Carolina Cincunegui, María Eugenia Lascano y David Schneider.
- nuevamente a Graciela Domenech por los diversos tipos de apoyo logístico brindados para la presentación de esta tesis.

Este trabajo no podría haberse efectuado sin el financiamiento otorgado por la Universidad de Buenos Aires y la Fundación Antorchas.