Índice General

Introducción **1**

Parte I. Horizonte finito **12**

Capítulo 1. Introducción **13**

1.1 Presentación 13
1.2 Notación y descripción precisa del modelo 14
1.3 Resultado General 16

Capítulo 2. Resultados preliminares **17**

2.1 Perturbaciones 17
2.2 Existencia de perturbaciones 18
2.3 Propiedades de las perturbaciones 24
2.4 Construcción de ternas admisibles 27

Capítulo 3. Demostración del Teorema 1.3.1 **33**

3.1 Resultado previo 33
3.2 Demostración del Resultado General 37
3.3 Caso diferencial 39
3.4 Tiempo final dado 40
3.5 Controles Medibles Lebesgue 41
3.6 Funcional de tipo Mayer 44
3.7 Ejemplo 47

Parte II Horizonte infinito **49**

Capítulo 4. Introducción **50**

4.1 Presentación 50
4.2 Descripción del modelo y resultado general 51
4.3 Algunas consideraciones 53

Capítulo 5. Perturbaciones **56**

5.1 Existencia de pares perturbados 56
5.2 Propiedades de pares perturbados 62
5.3 Construcción de pares admisibles 65

Capítulo 6. Demostración del Teorema **69**

6.1 Resultado previo 69
6.2 Demostración del Resultado General 72
6.3 Resultado sin restricciones y caso diferencial 73
6.4 Controles Medibles Lebesgue 73
6.5 Funcional de tipo Mayer 75
6.6 Ejemplo 77

Parte III Apéndice **80**

A Ecuaciones de Volterra **81**

A.1 Existencia y unicidad de solución 81
A.2 Ecuación dual 83
A.3 Propiedades 84
A.4 Caso infinito 84

B Variación entre dos perturbaciones diferentes **86**

C Hipótesis alternativas para la Resolvente **94**

PROBLEMAS DE CONTROL ÓPTIMO CON EVOLUCIÓN DE TIPO VOLTERRA

Resumen

En el presente trabajo se estudian problemas de control óptimo donde el estado evoluciona según una ecuación integral de tipo Volterra.

Para el caso de horizonte finito se buscan condiciones necesarias y de transversalidad para un problema de horizonte variable con restricciones.

Para el caso de horizonte infinito se analizan condiciones necesarias para un control óptimo con restricciones en el comportamiento asintótico del estado.

Palabras Claves

Principio del Máximo, Control Óptimo, Ecuaciones de Volterra, Condiciones Necesarias, Condiciones de Transversalidad.

OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH VOLTERRA TYPE EVOLUTION

Abstract

We consider optimal control problems where the state is governed by a Volterra integral equation.

For the case of a finite interval, we study necessary and transversality conditions for a variable horizon problem with restrictions.

For the infinite horizon case we analyze necessary conditions for an optimal control with restrictions on the asymptotic behavior of the state.

Keywords

Maximum Principle, Optimal Control, Volterra Equations, Necessary Conditions, Transversality Conditions.

Introducción

Dado I un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ cuyo extremo izquierdo es t_0 y las funciones $f : I \times I \times \mathbb{R}^N \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^N$ y $g : I \to \mathbb{R}^N$, consideramos un proceso descripto por la siguiente ecuación de Volterra:

$$x(t) = g(t) + \int_{t_0}^{t} f(t, s, x(s), u(s))\, ds \tag{1}$$

para $t \in I$. La función $u : I \to \mathcal{U}$ llamada *control* será, en un principio, una función continua a trozos y el conjunto de controles $\mathcal{U}$ un espacio topológico Hausdorff. Para cada control, la curva $x : I \to \mathbb{R}^N$ solución continua del sistema (1) es llamada *estado.*

El problema que consideramos consiste en dar condiciones necesarias que debe cumplir un par (x, u) para maximizar una integral de la forma

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t))\, dt \tag{2}$$

sobre una clase de pares de funciones $(x(t), u(t))$ que satisfacen la ecuación de Volterra (1) sujeto a ciertas restricciones. Analizaremos dos casos distintos, uno de horizonte finito en donde t_1, el límite superior de la integral anterior, es variable y finito de manera que la dinámica del sistema (1) se considera en el intervalo $I = [t_0, t_1]$ y otro de horizonte infinito en donde t_1 es fijo e igual a $+\infty$ y por lo tanto $I = [t_0, +\infty)$.

Comencemos con el problema de horizonte finito. El caso en que la clase de funciones sobre las cuales se debe maximizar (2) satisfacen la ecuación diferencial en $\mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{3}$$

donde los controles u son tomados en la clase de funciones continuas a trozos fue estudiado por la escuela de Pontryagin [1] en 1964 y Hestenes [2] en 1966 desde distintos puntos de vista. Ambos autores obtienen condiciones necesarias que debe cumplir un control óptimo, llamadas *Principio del Máximo.* El resultado de Pontryagin considera un sistema autónomo

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= f(x(t), u(t)) \\
x(t_0) &= x_0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

con f, f_x continuas y una funcional a maximizar del tipo

$$
\int_{t_0}^{t_1} L\left(x\left(t\right), u\left(t\right)\right) dt
$$

con L y L_x continuas y en la familia de controles $\mathcal{U}$ formada por funciones medibles Lebesgue. Con estas hipótesis establece que si u^* es un control óptimo y x^* es la solución de (4) que corresponde a u^*, entonces existe una constante $\alpha \geq 0$ y una función vectorial $\lambda(t)$ absolutamente continua tal que el vector (α, λ) no es idénticamente nulo y:

$$
\begin{aligned}
\lambda'(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}\left(x^*(t), u^*(t), \lambda(t)\right) \\
\left(x^*\right)'(t) &= \frac{\partial H}{\partial \lambda}\left(x^*(t), u^*(t), \lambda(t)\right) \\
H(x^*(t), u^*(t), \lambda(t)) &= \max_{u \in \mathcal{U}} H(x^*(t), u, \lambda(t))
\end{aligned}
$$

en casi todo punto $t \in [t_0, t_1]$, donde el Hamiltoniano H está dado por

$$
H(x, u, \lambda) = \alpha L(x, u) + \lambda \cdot f(x, u).
$$

Además determina que $H(x^*(t_1), u^*(t_1), \lambda(t_1)) = 0$.

La demostración del teorema anterior se basa fundamentalmente en la dependencia continua de la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias en los valores iniciales asi como en la propiedad de semigrupo de dichas soluciones.

Más tarde, en 1977, Michel [3] demuestra una versión más general del Principio del Máximo donde la funcional a maximizar es de tipo Mayer

$$
\psi_0(x(t_1)),
\tag{5}
$$

(el caso en que la funcional es de tipo Lagrange como en (2) se deduce a partir de este como se indica más adelante) y el sistema evoluciona según una ecuación diferencial no autónoma de tipo (3). Asimismo, se les pide a los estados que verifiquen restricciones en el tiempo final

$$\begin{aligned} &\psi_j(x(t_1)) \le 0 \qquad 1 \le j \le p \\ &\psi_j(x(t_1)) = 0 \qquad p+1 \le j \le q. \end{aligned} \tag{6}$$

La demostración de Michel es completamente diferente de la de Pontryagin. No utiliza la dependencia continua de soluciones y reduce el problema a un resultado clásico de programación no lineal en dimensión finita. En este caso considera controles u continuos a trozos y comenta que se puede obtener el mismo resultado para controles medibles Lebesgue en puntos regulares de la función $f(s, x^*(s), u^*(s))$, es decir, en puntos τ tales que

$$\lim_{a\to 0, b\to 0} \frac{1}{a} \int_{\tau+b}^{\tau+b+a} f(s, x^*(s), u^*(s))ds = f(\tau, x^*(\tau), u^*(\tau)).$$

Observar que si τ es punto regular, entonces es punto de Lebesgue, pero no vale la recíproca.

El resultado de Michel establece que bajo las condiciones descriptas anteriormente, si (x^*, u^*) es un par óptimo, existen números c_j, $0 \le j \le m$ y una función continua $q(t)$ que no se anula tales que

$$c_j \ge 0 \text{ para } 0 \le j \le p, \text{ y } c_j\psi_j(x^*(t_1)) = 0 \text{ para } 1 \le j \le p;$$
$$q(t_1) = \sum_{j=0}^{m} c_j\psi_j'(x^*(t_1)) \text{ y } q'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}\,(t, x^*(t), u^*(t), q(t))$$

y el Hamiltoniano $H\,(t, x, v, q(t)) = q(t) \cdot f(t, x, v)$ alcanza su máximo respecto de v en el espacio U en $u^*(t)$ para todo $t \in [0, t_1]$.

A partir de este resultado vemos que podemos también resolver el problema de maximizar una integral del tipo (2) para un sistema que evoluciona según una ecuación diferencial del tipo (3) con las restricciones (6), agregando una variable al sistema, es decir, consideramos

$$x_i'(t) = f_i(t, x(t), u(t))$$
$$x_{n+1}'(t) = L(t, x(t), u(t))$$

y tomando

$$\psi_0(x) = x_{n+1}.$$

Luego, aplicando el resultado anterior tenemos en este caso que

$$H\left(t, x, v, q(t)\right) = q(t) \cdot (f(t, x, v), L(t, x, v)),$$

y si llamamos $\lambda(t) = (q_1(t), ..., q_n(t))$ y siendo $q_{n+1}(t)$ constante, se tiene que el Hamiltoniano resulta ser

$$H\left(t, x, v, q(t)\right) = \alpha L(t, x, v)) + \lambda(t) \cdot f(t, x, v).$$

Más aún, si suponemos que $x(t_1)$ es libre, es decir, no tenemos las restricciones (6), obtenemos que

$$q(t_1) = c_0 \psi_0'(x^*(t_1)) = (0, ..., 0, c_0)$$

y por lo tanto se obtiene la condición de transversalidad

$$\lambda(t_1) = 0. \tag{7}$$

Un intento por extender el problema de maximizar (2) sobre una clase de funciones que verifican la ecuación diferencial (3) a una clase de funciones que verifican la ecuación de Volterra (1) utilizando perturbaciones de tipo Pontryagin fue hecho por Vinokurov [4] en 1969. Pero como señalan Neustadt y Warga [5] en 1970 la demostración es cuestionable.

Observemos que las ecuaciones diferenciales de tipo (3) se obtienen a partir de las ecuaciones de Volterra de tipo (1) si tomamos $g(t)$ constante y $f(t, s, x, u)$ independiente de t. Sin embargo, no es cierto que cualquier ecuación de Volterra se pueda reducir a una ecuación diferencial. Además, las ecuaciones de Volterra tienen la "desventaja"de no tener la propiedad de semigrupo. Es decir, si tomamos un tiempo $t_0 < \tau < t_1$, entonces no es cierto en general que la solución $x(t)$ de (1) con $g(t) = x_0$ sea solución de la nueva ecuación de Volterra

$$y(t) = x(\tau) + \int_{\tau}^{t} f\left(t, s, y\left(s\right), u\left(s\right)\right) ds,$$

como sí pasa en el caso en que el integrando f no depende de su primer coordenada t.

Más tarde, fueron desarrollados otros resultados que involucran ecuaciones integrales por Neustadt (1976) [6], Bakke (1974) [7] y Hartl y Sethi (1984) [8]. El resultado que aparece en el libro de Neustadt parece el más general, utilizando resultados previos de teoría de operadores continuos en espacios de Banach, pero no incluye ninguna variable adjunta. El resultado de Bakke se obtiene utilizando el método de Hestenes, es decir, el uso de conjuntos derivados. Además, el autor considera una clase de estados más pequeña, al tomar funciones con derivada continua a trozos. Y el Principio del Máximo que deducen Hartl y Sethi se obtiene transformando una ecuación integro-diferencial en un problema de control óptimo en derivadas parciales no estandar, para el cual se consiguen condiciones necesarias usando programación dinámica. Es decir, se llega a una ecuación integro-diferencial en derivadas parciales (ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman) que debe verificar la solución del problema transformado.

En 1987, Carlson [9] estudia el problema de encontrar condiciones necesarias para un control óptimo de una funcional de tipo Mayer, donde el estado evoluciona según una ecuación de Volterra del tipo (1) dando una demostración elemental del Principio del Máximo. Si bien el autor utiliza perturbaciones de tipo Pontryagin, toma una clase de controles (funciones medibles Lebesgue) mayor que la clase de funciones utilizadas por Vinokurov y Bakke (funciones continuas a trozos). Es por eso que debe considerar una función f particular del tipo

$$f(t, s, x, u) = h(t, s, x) + G(t, s, x)k(s, x, u)$$

en el integrando de la ecuación de Volterra con hipótesis de acotación en ella y sus derivadas respecto de la variable x, es decir, se pide que para todo compacto $H \subset E^n$, donde E es un espacio euclídeo, existan constantes M y K tales que

$$|k(s,x,u)| \leq M$$
$$|k_x(s,x,u)| \leq K$$

para todo $(s,x,u) \in [t_0,t_1] \times H \times U$.

La demostración de este resultado es una modificación del trabajo de Michel [3] y establece que si (x^*, u^*) es un par óptimo del funcional de tipo Mayer (5) , entre todos los pares (x,u) que verifican la ecuación de Volterra (1) y las restricciones (6), con $x : [0,t_1] \rightarrow E^n$ continua, , $u : [0,t_1] \rightarrow U \subset E^m$ medible, donde U es cerrado, entonces existen constantes $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_q$ y una función $p : [0,t_1] \rightarrow E^n$ tal que

i) $\sum_{j=0}^{q} |\lambda_j| = 1$;

ii) $\lambda_j \leq 0$ para $j = 0,1,...,p$;

iii) $\lambda_j \psi_j(x^*(t_1)) = 0$ para $j = 1,...,p$;

iv) $p(t) = -d(\lambda) \cdot D_x[h(t_1,t,x^*(t)) + G(t_1,t,x^*(t))F(t,x^*(t),u^*(t))]$

$+\int_t^{t_1} p(s)D_x[h(s,t,x^*(t)) + G(s,t,x^*(t))F(t,x^*(t),u^*(t))]ds$, donde

$$d(\lambda) = -\sum_{j=0}^{q} \lambda_j D_x[\psi_j(x^*(t_1))];$$

v) para casi todo $t \in [0,t_1]$

$$H(t,u^*(t)) = \max_{u \in U} H(t,u),$$

donde el Hamiltoniano está definido por

$$H(t,u) = \left[d(\lambda)G(t_1,t,x^*(t)) - \int_t^{t_1} p(s)G(s,t,x^*(t))ds \right] F(t,x^*(t),u).$$

Más recientemente, en 1999, Burnap y Kazemi [10] estudiaron el mismo problema de Carlson con el agregado de retardo no lineal en la variable de estado.

Todos los autores anteriores que estudiaron condiciones necesarias con restricciones integrales en horizonte finito, lo hicieron con el tiempo final t_1 fijo.

La existencia de solución para problemas de control óptimo de horizonte finito con restricción de tipo Volterra fue estudiado por Angell [12]. En este artículo se prueba existencia de un par óptimo para un problema donde el estado evoluciona según una ecuación de Volterra del tipo

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} g(t, s, x(s)) f(s, x(s), u(s)) ds.$$

En la primera parte del presente trabajo se estudia un problema de control óptimo de horizonte variable, es decir, se buscan condiciones necesarias que debe cumplir un control que maximiza la funcional (2) entre todos los tiempos finitos t_1 y una clase de pares de funciones $(x(t), u(t))$ (con x continua y u continua a trozos en $[t_0, t_1]$) que satisfacen una ecuación integral de Volterra del tipo (1) con restricciones en el tiempo final t_1 y en el estado en el tiempo final $x(t_1)$. La diferencia fundamental de este trabajo con los autores previos es que t_1 no es fijo, sino una variable a optimizar junto con el control u, por lo cual se necesitan condiciones de derivabilidad de g y f respecto de t y se obtiene una condición de transversalidad que debe cumplir el tiempo final t_1. El desarrollo se basa en construir perturbaciones admisibles de tipo Pontryagin que incluyan una variación en el tiempo final (Capítulo 2).

A partir del resultado obtenido en la primera parte de esta tesis (Teorema 1.3.1 , sección 3.2), si consideramos que el integrando de la ecuación de Volterra (1) no depende de su primer coordenada t, se deducen los resultados clásicos para ecuaciones diferenciales (ver sección 3.3). Asimismo, en la sección 3.4, se considera el caso en que el tiempo final t_1 es fijo.

Luego, en las secciones 3.5 y 3.6 se extiende el Teorema 1.3.1 en dos sentidos. En primer lugar, se consideran controles u en la clase de funciones medibles y en segundo lugar se maximizan funcionales de tipo Mayer en lugar de funcionales de tipo Lagrange (2) . A partir de estas generalizaciones, se analiza la relación con los resultados anteriores para el caso en que el tiempo final t_1 es dado.

Los resultados mencionados en los párrafos anteriores, demostrados en la primera parte del presente trabajo, fueron aceptados para publicar en 'Journal of Optimization Theory and Applications'[11].

En la segunda parte del trabajo analizamos el problema de maximizar una funcional descripta por una integral impropia del tipo (2) donde $t_1 = +\infty$, sobre una clase de pares admisibles que satisfacen una ecuación de Volterra y restricciones en el infinito.

El estudio de las condiciones necesarias en intervalos no acotados donde el sistema evoluciona según una ecuación diferencial del tipo (3) fue sólo comentado por Pontryagin en [1] y posteriormente estudiado por varios autores. El primero en estudiar la extensión del caso horizonte finito a horizonte infinito para un criterio de óptimo más débil fue Halkin [13] en 1974. En este paper, se demuestran condiciones necesarias análogas a las de horizonte finito para una funcional de tipo Lagrange impropia y un control óptimo débilmente dominado (x^*, u^*), es decir, (x^*, u^*) es tal que para todo par admisible (x, u),

$$\lim \sup_{\tau \to +\infty} \left[\int_{t_0}^{\tau} L(t, x^*(t), u^*(t))dt - \int_{t_0}^{\tau} L(t, x(t), u(t))dt \right] \geq 0. \qquad (8)$$

Asimismo se muestra que las condiciones de transversalidad que ñaturalmente'se deberían heredar del caso finito ($\lim_{t \to +\infty} \lambda(t) = 0$), ver (7), no se verifican para este problema. La técnica utilizada por Halkin consiste en transformar el problema de horizonte infinito en un problema de horizonte finito usando la propiedad de semigrupo de las soluciones.

Más tarde, Michel [14] en 1982, demuestra un Principio del Máximo para un problema de tipo Lagrange de horizonte infinito con tasa de descuento intertemporal, donde el estado evoluciona según una ecuación diferencial autónoma. Reescalando el problema de horizonte infinito y agregando una variable más al sistema, Michel consigue reducirlo a un problema de horizonte finito y obtiene las condiciones necesarias pasando al límite. Este reescale en el tiempo es posible nuevamente gracias a la propiedad de semigrupo de la solución fundamental de la ecuación diferencial ordinaria, lo cual no es posible para Volterra. Asimismo, Michel prueba que con ciertas hipótesis adicionales, se puede obtener la condición de transversalidad esperada.

Un estudio detallado sobre problemas de control óptimo en intervalos no acotados donde el sistema evoluciona según una ecuación diferencial (3) se puede encontrar en el libro de Carlson, Haurie y Leizarowitz [15]. Este libro presenta un resumen de los desarrollos del tema desde Halkin hasta 1987 e inlcuye resultados de existencia y condiciones necesarias.

Por otro lado, Gani y Wiese [16] en 1987, prueban condiciones necesarias para un problema de control óptimo de horizonte infinito más general donde la evolución del estado viene dada por una ecuación diferencial con hipótesis más débiles en la función f (se pide diferenciable Frechet a valores en un espacio normado) y con la condición de que $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

Luego, Smirnov [17] en 1996 presenta condiciones necesarias de optimalidad para un problema de tipo Lagrange donde el estado evoluciona según una ecuación diferencial y tal que $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$. La novedad del trabajo de Smirnov es que deduce condiciones de transversalidad usando teoría de estabilidad y es formulada en términos de exponentes de Lyapunov de la solución de una ecuación adjunta.

Finalmente, Seiertad [18] en 1999, prueba condiciones necesarias para un problema de control óptimo donde el funcional a optimizar es de tipo Mayer lineal

$$\sum_{1\leq i\leq m} v_i y_i(\infty)$$

entre todos los pares (y, u) tal que y es localmente absolutamente continua y tiene límite en el infinito y u es medible Lebesgue. Admás el estado evoluciona según una ecuación diferencial con restricciones en el infinito. Observar que aunque el funcional es bastante restrictivo, cualquier funcional de tipo Lagrange puede ser llevado a un problema de este tipo. Si bien en este caso se trabaja en $\mathbb{R}^n$ se pide poca regularidad sobre la función f que determina la evolución del estado. Asimismo, deduce las condiciones de transversalidad esperadas para las restricciones dadas. Por otro lado, con un ejemplo, pone en duda las condiciones de transversalidad obtenidas por Smirnov.

Como ya mencionamos en cada caso, todos los resultados anteriores se refieren a problemas de control óptimo de horizonte infinito donde el estado evoluciona según una *ecuación diferencial ordinaria* del tipo (3) . No se conocen resultados de condiciones necesarias en donde la evolución del sistema sea dada por una ecuación de Volterra.

La pregunta sobre existencia de soluciones para un problema de control óptimo de tipo Lagrange de horizonte infinito donde el estado evoluciona según una ecuación de Volterra fue estudiada por Carlson [19] en 1990. Esta pregunta incluye el problema de convergencia de la integral impropia. Para asegurar dicha convergencia normalmente se considera una función de peso apropiada que representa el factor de descuento. Esta función es tomada usualmente como una exponencial negativa e^{-rt} con $r > 0$. Sin esta función de peso, es necesario considerar nociones más débiles de optimalidad para las cuales no se necesita la convergencia de la integral impropia (2) cuando tomamos $t_1 = +\infty$. El criterio de optimalidad más utilizado para estos casos se llama óvertaking optimality', que nosotros llamamos optimalidad dominada, es decir, diremos que (x^*, u^*) es un par óptimo dominado si para todo par admisible (x, u),

$$\lim_{\tau \to +\infty} \inf \left[\int_{t_0}^{\tau} L(t, x^*(t), u^*(t))dt - \int_{t_0}^{\tau} L(t, x(t), u(t))dt \right] \geq 0.$$

Notar que esta noción de optimalidad es más débil que la noción clásica pero más fuerte que la dada en (8) .

En este artículo, Carlson prueba existencia de un óptimo de una funcional de tipo Lagrange, que incluye una función de peso más general que una exponencial negativa, para un problema de control de horizonte infinito donde la dinámica del sistema es descripta por una ecuación de Volterra. Para ello necesita condiciones clásicas de convexidad y seminormalidad en relación al integrando L.

Sin embargo, si no consideramos el peso en el integrando, el argumento no funciona.

Por otro lado, en 1993, nuevamente Carlson [20], prueba la existencia de un óptimo dominado para un problema de control de tipo Lagrange de horizonte infinito sin condiciones de convexidad ni función de peso en el integrando L, pero donde la evolución del sistema está dada por una ecuación diferencial.

En la segunda parte del trabajo que presentamos a continuación, se desarrollan condiciones necesarias para problemas de control óptimo de horizonte infinito cuyas variables de estado evolucionan según una ecuación de Volterra. El enfoque es muy distinto al utilizado por los autores que estudiaron el problema para ecuaciones diferenciales ya que en ningún momento se reduce el problema a horizonte finito. Las ideas utilizadas son una extensión de la primera parte. Al igual que en la primera parte, se prueba un resultado para un funcional de tipo Lagrange y controles continuos a trozos (Teorema 4.2.2 en sección 6.2) para luego deducir resultados más generales para funcionales de tipo Mayer y controles medibles Lebesgue.

Finalmente, se incluye un Apéndice que contiene algunos resultados clásicos de ecuaciones de Volterra.

Parte I

Horizonte finito

Capítulo 1

Introducción

1.1 Presentación

Consideremos un proceso descripto por la siguiente ecuación de Volterra

$$x(t) = g(t) + \int_{t_0}^{t} f(t, s, x(s), u(s))\, ds \tag{1.1}$$

para $t \in [t_0, t_1]$ donde el estado $x(t) \in \mathbb{R}^N$ y el control $u(t) \in \mathcal{U}$ un espacio topológico Hausdorff.

Dados $t_1 > t_0$ y un par de funciones $\{x, u\} : [t_0, t_1] \subset I \to \mathbb{R}^N \times \mathcal{U}$, que satisfacen la ecuación integral (1.1), se requiere también que el tiempo final t_1 y el estado en el tiempo final $x(t_1)$ verifiquen

$$\phi(t_1, x(t_1)) = 0, \tag{1.2}$$

$$\psi(t_1, x(t_1)) \leq 0. \tag{1.3}$$

El problema de control óptimo que analizamos en el siguiente trabajo consiste en dar condiciones necesarias que debe cumplir un tiempo final t_1, un estado x y un control u para ser óptimos de la funcional

$$J(t_1, x, u) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t))\, dt \tag{1.4}$$

entre todas las ternas “admisibles” (t_1, x, u) (ver definición 1.2.1) de una clase de tiempos, estados y controles que satisfacen (1.1) , (1.2) y (1.3) para todo $t \in [t_0, t_1]$. Una terna (t_1^*, x^*, u^*) es óptima si maximiza J sobre todas las ternas admisibles (t_1, x, u).

En la sección 1.2 se da una descripción precisa del problema y en la sección 1.3 el Principio del Máximo que se probará para una terna óptima (t_1^*, x^*, u^*) (teorema 1.3.1). En el Capítulo 2, dada una terna óptima, procedemos a definir nuevas ternas (t_1, x, u), perturbaciones de la óptima, de manera que resulten admisibles. Usando esta construcción, en el Capítulo 3 se prueba que dados finitos puntos en el intervalo $[t_0, t_1^*]$ vale el teorema 1.3.1 para esos puntos, a partir de lo cual se deduce el resultado general descripto en el Capítulo 1. A continuación se prueba el mismo resultado para controles medibles Lebesgue y una función f más particular, y se deducen los resultados obtenidos por otros autores considerando el tiempo final t_1 fijo. Además, se demuestra un Principio del Máximo análogo para el caso en que la funcional de tipo Lagrange (1.4) es reemplazada por una funcional de tipo Mayer. Finalmente, se da una aplicación del teorema probado en la sección 3.2.

1.2 Notación y descripción precisa del modelo

Vamos a considerar los siguientes conjuntos:

$\mathbb{R}_+^N = \left\{x \in \mathbb{R}^N : x_i \geq 0\right\}$ y $\mathbb{R}_{++}^N = \left\{x \in \mathbb{R}^N : x_i > 0\right\}$.

$Q_+^n(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i < \varepsilon\}$ y $Q^n(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : -\varepsilon < x_i < \varepsilon\}$.

Dado un vector $x = (x_1, ..., x_n)$ llamaremos $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ a la norma en ℓ^1 y $|x|$ a la norma usual en $\mathbb{R}^n$ o en un espacio Euclídeo n dimensional cualquiera. Dado un conjunto A llamaremos $\mathrm{cl}(A)$ a la clausura y A^c al complemento. Siempre que no de lugar a confusión usaremos indistintamente x para determinar un vector fila o columna.

Sea $\mathcal{U}$ un espacio topológico Hausdorff, I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $t_0 \in I$ fijo.

Definimos

$$\Delta = \{(t,s) \in I \times I : t_0 \leq s \leq t\}.$$

A lo largo del presente trabajo vamos a asumir las siguientes hipótesis:

H1) $f \in C\left(\Delta \times \mathbb{R}^N \times \mathcal{U}, \mathbb{R}^N\right)$ y es continuamente diferenciable respecto de sus primer y tercer coordenadas.

H2) $g \in C^1\left(I, \mathbb{R}^N\right)$.

H3) $\phi \in C^1\left(I \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{k_1}\right)$ y $\psi \in C^1\left(I \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{k_2}\right)$.

H4) $L \in C\left(I \times \mathbb{R}^N \times \mathcal{U}, \mathbb{R}\right)$ y es continuamente diferenciable respecto de la variable x.

Definición 1.2.1 *Una terna* (t_1, x, u) *se llama admisible si* $[t_0, t_1] \subsetneq I$, *el control* $u : [t_0, t_1] \to \mathcal{U}$ *es una función continua a trozos con finitas discontinuidades de a lo sumo primera especie y el estado* $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^N$ *es una función continua tales que la ecuación integral* (1.1) *y las ecuaciones* (1.2) *y* (1.3) *se satisfacen.*

Vamos a asumir que existe al menos una terna admisible.

Sea (t_1^*, x^*, u^*) una terna óptima, llamaremos

$$P^* = f\left(t_1^*, t_1^*, x^*\left(t_1^*\right), u^*\left(t_1^*\right)\right) + \int_{t_0}^{t_1^*} f_t\left(t_1^*, s, x^*\left(s\right), u^*\left(s\right)\right) ds + g_t\left(t_1^*\right),$$

$R(t,s)$ a la resolvente de la ecuación lineal de Volterra (ver Apéndice A) con núcleo

$$f_x\left(t, s, x^*\left(s\right), u^*\left(s\right)\right)$$

y $w^*(t)$ a la solución de la ecuación de Volterra dual

$$w(t) = \int_t^{t_1^*} w\left(s\right) f_x\left(s, t, x^*\left(t\right), u^*\left(t\right)\right) ds + L_x\left(t, x^*\left(t\right), u^*\left(t\right)\right).$$

1.3 Resultado General

El resultado que probaremos en esta primera parte del trabajo es el siguiente:

Teorema 1.3.1 *Sea (t_1^*, x^*, u^*) una terna óptima de J tal que t_1^* es un punto de continuidad de u^*. Luego, existe $(\mu_1, \mu_2, \alpha) \in \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}_+^{k_2} \times \mathbb{R}_+$, $(\mu_1, \mu_2, \alpha) \neq (0,0,0)$ tal que para todo $t \in [t_0, t_1^*]$ punto de continuidad de u^*, se tiene que*

$$H(t, u^*(t)) = \max_{v \in \mathcal{U}} H(t, v)$$

donde $H(t, v)$ está definido por

$$H(t,v) = \alpha L(t, x^*(t), v) + \lambda f(t_1^*, t, x^*(t), v) + \int_t^{t_1^*} z^*(s) f(s, t, x^*(t), v)\, ds$$

con $\lambda = -\mu_1 \phi_x (t_1^*, x^*(t_1^*)) - \mu_2 \psi_x (t_1^*, x^*(t_1^*))$ y $z^*(s) = \alpha w^*(s) + \lambda R(t_1^*, s)$. Más aún, se verifican las siguientes condiciones de transversalidad

$$\mu_1 \phi_t (t_1^*, x^*(t_1^*)) + \mu_2 \psi_t (t_1^*, x^*(t_1^*)) = \alpha L(t_1^*, x^*(t_1^*), u^*(t_1^*)) + \lambda P^* \quad (1.5)$$

y

$$(\mu_2)_j \psi_j (t_1^*, x^*(t_1^*)) = 0 \qquad \text{para todo } j = 1, ..., k_2. \quad (1.6)$$

Capítulo 2

Resultados preliminares

2.1 Perturbaciones

Dada una terna óptima (t_1^*, x^*, u^*), se quieren definir perturbaciones admisibles. Para eso vamos a definir tiempos t_1 y controles u para los cuales probaremos que existe x de manera que se satisfagan las ecuaciones (1.1), (1.2) y (1.3). Comenzamos definiendo

$$b = \begin{cases} t_1^* + 1 & \text{si} \quad I \text{ no es acotado} \\ \min\{t_1^* + 1, \sup I\} & \text{si} \quad I \text{ es acotado} \end{cases}$$

$$I^* = \{t \in I : t_0 \leq t \leq b\}.$$

Consideramos una partición del intervalo $[t_0, t_1^*]$:

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq ... \leq \tau_n < t_1^*$$

donde $\tau_1, ..., \tau_n$ son puntos de continuidad de u^*, y sean $\varepsilon > 0$,

$$l = (l_1, l_2, ..., l_n) \in \mathbb{R}_+^n, \qquad l_{n+1} \in \mathbb{R}$$

y $v_1, v_2, ..., v_n$ tal que $v_i \in \mathcal{U}$ para todo $i = 1, ..., n$. Construimos los intervalos $I_1, I_2, ..., I_n$ de la siguiente manera:

1. Si $\tau_i < \tau_{i+1}$, entonces $I_i = [\tau_i, \tau_i + \varepsilon l_i)$.

2. Si $\tau_{k-1} < \tau_k = \cdots = \tau_m < \tau_{m+1}$, entonces para $k \leq i \leq m-1$ se define $I_i = [\tau_i + \varepsilon \sum_{j=k}^{i-1} l_j, \tau_i + \varepsilon \sum_{j=k}^{i} l_j)$.

3. Finalmente, $I_{n+1} = \left(t_1^* - \varepsilon l_{n+1}^-, t_1^* + \varepsilon l_{n+1}^+\right]$ con $l_{n+1}^{\pm} = \max\{0, \pm l_{n+1}\}$ y $\tau_{n+1} = t_1^* - \varepsilon l_{n+1}^-$.

Se tiene entonces que $|I_i| = \varepsilon l_i$ y para ε suficientemente pequeño, los intervalos $I_1, I_2, ..., I_{n+1}$ son disjuntos. Ahora, definimos una ε-perturbación (de tipo Pontryagin) como

$$u(t) = \begin{cases} u^*(t) & \text{si } t \notin \bigcup_{i=1}^n I_i \\ v_i & \text{si } t \in I_i \end{cases} \tag{2.1}$$

para $t \leq t_1^*$ y la extendemos continuamente al intervalo $[t_1^*, b]$ con $u^*(t_1^*)$. Diremos que $u : [t_0, t_1] \to \mathcal{U}$ es una ε- perturbación admisible de $u^*(t)$ si $u(t)$ es un control admisible en $[t_0, t_1]$ con $t_1 = t_1^* + \varepsilon l_{n+1} < b$, es decir si existe $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^N$ tal que se verifiquen las ecuaciones (1.1), (1.2) y (1.3). Observar que si $l_{n+1} > 0$, y t_1^* es un punto de continuidad de u^*, entonces t_1^* es un punto de continuidad de las perturbaciones u.

2.2 Existencia de perturbaciones

Proposición 2.2.1 *Dados (t_1^*, x^*, u^*) una terna óptima, $v_1, ..., v_n$ tales que $v_i \in \mathcal{U}$ para todo $i = 1, ..., n$ y $t_0 = \tau_0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq ... \leq \tau_n < t_1^*$ tal que τ_i es un punto de continuidad de u^* para todo $i = 1, ..., n$, entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, si $u : [t_0, t_1] \to \mathcal{U}$ es una ε- perturbación de u^*, existe una única $x(t)$ solución de la ecuación integral* (1.1) *definida en* $[t_0, t_1]$ *y* $\delta x(t) = x(t) - x^*(t) = O(\varepsilon |l|)$ *para todo* $t \in [t_0, \tau_{n+1}]$.

Demostración. Para probar esta proposición, primero vamos a probar que existe solución en un entorno a derecha de t_0, y usando que la solución se mantiene en un compacto, vamos a probar que está definida en el intervalo $[t_0, t_1]$.

Sean (t_1^*, x^*, u^*) una terna óptima, $\bar{l} = (l_1, l_2, ..., l_n, l_{n+1})$ tal que $\left\|\bar{l}\right\|_1 \leq M_l$ y $\rho > 0$. A partir de aquí vamos a tomar $\varepsilon_0 < 1$ y $M_l < b - t_1^*$, de manera que t_1 sea menor que b. Dado que x^* está definida en $[t_0, t_1^*]$ la extendemos al intervalo $[t_0, b]$ constantemente igual a $x^*(t_1^*)$. Definimos entonces los compactos

$$\begin{aligned}
\Delta^* &= \{(t,s) \in I^* \times I^* : s \leq t\}, \\
Y &= \left\{x \in \mathbb{R}^N : |x - x^*(s)| \leq \rho \text{ con } s \in [t_0, b]\right\}, \\
\mathcal{V} &= \bigcup_{i=1}^{n+1} \{v_i\} \cup \mathrm{cl}\,\{u^*(s) : s \in [t_0, t_1^*] \text{ es un punto de continuidad de } u^*\}.
\end{aligned}$$

y sea C el subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathcal{U}$

$$C = \Delta^* \times Y \times \mathcal{V}.$$

Siendo f, f_t y f_x continuas, son uniformemente acotadas en C, es decir existe M_C tal que

$$|f| + |f_t| + |f_x| \leq M_C$$

de donde tenemos también que f es uniformemente Lipschitz en x. Además siendo g' continua también podemos asumir que

$$|g'| \leq M_C$$

para todo $t \in I^*$.

Sea $\nu < \min\left\{\frac{\rho}{2M_C}, \frac{1}{M_C}, b - t_0\right\}$ y u una ε-perturbación (definida por los parámetros fijados anteriormente y $\varepsilon > 0$). Definimos entonces el espacio métrico completo con la métrica del máximo

$$D_1 = \{x : [t_0, t_0 + \nu] \to \mathbb{R}^N, \text{ continuas tal que } |x(s) - x^*(s)| \leq \rho\},$$

y el operador

$$\begin{gathered}
A_1 : D_1 \to D_1, \\
A_1(x)(t) = g(t) + \int_{t_0}^{t} f(t, s, x(s), u(s))ds.
\end{gathered}$$

Veamos que A_1 está bien definido y es una contracción. Veremos primero que dado $x \in D_1$, $A_1(x) \in D_1$. Siendo g y f continuas, $A_1(x) : [t_0, t_0 + \nu] \to \mathbb{R}^N$ resulta continua. Sea $t_2 \in [t_0, t_0 + \nu]$, y supongamos $t < t_2$, la diferencia

$$
\begin{aligned}
&|A_1(x)(t) - A_1(x)(t_2)| \\
&\leq |g(t) - g(t_2)| + \int_{t_0}^{t} |f(t, s, x(s), u(s)) - f(t_2, s, x(s), u(s))| \, ds \\
&+ \int_{t}^{t_2} |f(t_2, s, x(s), u(s))| \, ds
\end{aligned}
$$

es chica si $|t - t_2|$ es pequeño.

Por otro lado, dado $t \in [t_0, t_0 + \nu]$

$$
\begin{aligned}
|A_1(x)(t) - x^*(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(t, s, x(s), u(s)) - f(t, s, x^*(s), u^*(s))| ds \\
&\leq 2M_C \nu < \rho
\end{aligned}
$$

puesto que $(t, s, x(s), u(s)) \in \mathcal{C}$ si $t_0 \leq s \leq t \leq t_0 + \nu$.

Probemos ahora que la aplicación A_1 es una contracción. Sean x_1 y x_2 dos elementos en $\mathcal{D}_1$, luego

$$
\begin{aligned}
|A_1(x_1)(t) - A_1(x_2)(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(t, s, x_1(s), u(s)) - f(t, s, x_2(s), u(s))| ds \\
&= \int_{t_0}^{t} |f_x(t, s, \tilde{x}(s), u(s))| |x_1(s) - x_2(s)| ds \\
&\leq M_C \nu \max |x_1(s) - x_2(s)|
\end{aligned}
$$

donde $M_C \nu < 1$ y $\tilde{x}(s)$ es un punto intermedio. Luego, existe x solución definida en $[t_0, t_0 + \nu]$ tal que para todo $s \in [t_0, t_0 + \nu]$ se verifica que $|x(s) - x^*(s)| \leq \rho$.

Dado

$$
\varepsilon_1 < \min \left\{ \frac{\rho}{2 \left(e^{-M_C |I^*|} + M_C |I^*| \right)}, \rho \right\}
$$

vamos a probar que se puede definir $\varepsilon_2 \in (0, 1)$ tal que la perturbación definida para cualquier $\varepsilon < \varepsilon_2$ verifica que el estado asociado x tiene intervalo maximal de existencia $[t_0, T)$ con $T > t_1^*$ y es tal que $|x(s) - x^*(s)| < \varepsilon_1$ en $[t_0, T)$. Sea

$$\varepsilon_2 = \min\left\{\frac{\varepsilon_1}{2M_C M_l e^{M_C|I^*|}}, \varepsilon_1, 1\right\},$$

$\varepsilon < \varepsilon_2$, u una ε- perturbación, x solución de la ecuación integral (1.1) (que sabemos está definida en $[t_0, t_0+\nu]$) y supongamos que su intervalo maximal de existencia es $[t_0, T)$. Sea $T' = \min\{T, t_1^*\}$. Supongamos que existe un $t \in (t_0, T')$ tal que $|x(t) - x^*(t)| \geq \varepsilon_1$. Sea $t^* = \inf\ \{t \in [t_0, T')$ tal que $|x(t) - x^*(t)| \geq \varepsilon_1\}$. Entonces $|x(t^*) - x^*(t^*)| = \varepsilon_1$ y $|x(t) - x^*(t)| < \varepsilon_1$ para todo $t < t^*$. Sin embargo,

$$\begin{aligned}
|x(t^*) - x^*(t^*)| &\leq \int_{t_0}^{t^*} |f(t,s,x(s),u(s)) - f(t,s,x^*(s),u^*(s))|ds \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{I_i \cap [t_0,t^*]} |f(t,s,x(s),v_i) - f(t,s,x^*(s),u^*(s))|\, ds + \\
&\int_{[t_0,t^*] \setminus UI_i} \left| f_x(t,s,\tilde{x}(s),u^*(s)) \right| |x(s) - x^*(s)|ds \\
&\leq 2M_C \left(\sum_{i=1}^{n} l_i\right) \varepsilon + \int_{t_0}^{t^*} M_C|x(s) - x^*(s)|ds \\
&\leq 2M_C M_l \varepsilon + \int_{t_0}^{t^*} M_C|x(s) - x^*(s)|ds
\end{aligned}$$

donde $\tilde{x}(s)$ es un punto intermedio. Luego, por Gronwall, obtenemos que

$$|x(t^*) - x^*(t^*)| \leq \left(2M_C M_l e^{M_C|I^*|}\right) \varepsilon < \varepsilon_1.$$

Tenemos entonces que la solución x definida en $[t_0, T)$ verifica que $|x(s) - x^*(s)| < \varepsilon_1$ para todo $s \in [t_0, T')$. Supongamos que $T \leq t_1^*$. Veamos que se puede extender. Sea $\eta < \min\left\{\frac{1}{2M_C}, 2\left(b - t_1^*\right)\right\}$, definimos el espacio métrico completo

$$D_2 = \{y : \left[T - \frac{\eta}{2}, T + \frac{\eta}{2}\right] \to \mathbb{R}^N \text{ continuas tal que } |y(s) - x^*(s)| \leq \rho\}$$

con la métrica del máximo y la aplicación

$$A_2(y)(t) = \tilde{g}(t) + \int_a^t f(t,s,y(s),u(s))ds$$

donde $\tilde{g}(t) = g(t) + \int_{t_0}^{a} f(t,s,x(s),u(s))ds$, y x es la solución en $[t_0,T)$. Veamos que $A_2(\mathcal{D}_2) \subset \mathcal{D}_2$. Siendo y continua, $A_2(y)$ resulta continua. Hay que ver que $|A_2(y)(s) - x^*(s)| \leq \rho$ para todo $s \in \left[T - \frac{\eta}{2}, T + \frac{\eta}{2}\right]$. Llamamos $a = T - \frac{\eta}{2}$ y notamos $P = \cup I_i \cap [t_0,a]$, $N = [t_0,a] - \cup I_i$ el complemento de P en $[t_0,a]$, $P' = \cup I_i \cap [a,s]$ y $N' = [a,s] - \cup I_i$ el complemento de P' en $[a,s]$. Si $s \leq t_1^*$

$$
\begin{aligned}
&|A_2(y)(s) - x^*(s)| \\
&\leq \int_{t_0}^{a} |f(s,r,x(r),u(r)) - f(s,r,x^*(r),u^*(r))|\, dr \\
&+ \int_{a}^{s} |f(s,r,y(r),u(r)) - f(s,r,x^*(r),u^*(r))|\, dr \\
&\leq \int_{P} |f(s,r,x(r),u(r)) - f(s,r,x^*(r),u^*(r))|\, dr \\
&+ \int_{N} |f(s,r,x(r),u^*(r)) - f(s,r,x^*(r),u^*(r))|\, dr \\
&+ \int_{P'} |f(s,r,y(r),u(r)) - f(s,r,x^*(r),u^*(r))|\, dr \\
&+ \int_{N'} |f(s,r,y(r),u^*(r)) - f(s,r,x^*(r),u^*(r))|\, dr \\
&\leq 2M_C\varepsilon \left(\sum_{i=1}^{n} l_i\right) + \int_{N} |f_x(s,r,x_1(r),u^*(r))||x(r) - x^*(r)|dr \\
&+ \int_{N'} |f_x(s,r,x_2(r),u^*(r))||y(r) - x^*(r)|dr \\
&\leq \varepsilon_1 e^{-M_C|I^*|} + M_C\varepsilon_1|a - t_0| + M_C\rho\eta < \rho
\end{aligned}
$$

por la elección de ε_1 y η, y donde $x_1(r)$ y $x_2(r)$ son puntos intermedios. Si $s > t_1^*$, hay que ver que $|A_2(y)(s) - x^*(t_1^*)| \leq \rho$, lo cual se prueba en forma similar al caso $s \leq t_1^*$ pidiendo además que $\eta < \frac{\rho}{2M_C(3+b)}$.

Análogamente al caso anterior A_2 resulta ser una contracción. Luego, existe y solución en $[a, a+\eta]$. Definiendo

$$
z(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si} \quad t \leq a \\ y(t) & \text{si} \quad t > a \end{cases}
$$

se tiene que la solución x está definida en $[t_0, a+\eta]$ donde $a+\eta > T$, lo cual es un absurdo. Luego, x está definida en $[t_0, T)$ con $T > t_1^*$.

Finalmente, para asegurarnos de conseguir una extensión al intervalo $[t_0, t_1^* + \varepsilon l_{n+1}]$ para el caso en que $0 < l_{n+1} < M_l$ tomamos

$$\varepsilon_0 < \min\left\{\varepsilon_2, \frac{\eta}{2M_l}\right\}$$

de donde obtenemos que $t_1^* + \varepsilon l_{n+1} < t_1^* + \varepsilon M_l < t_1^* + \frac{\eta}{2} < T + \frac{\eta}{2}$.

Observar que si extendemos u^* constantemente igual a $u^*(t_1^*)$ para $s \in [t_1^*, b]$, siguiendo el mismo razonamiento anterior, podemos extender x^* solución de la ecuación (1.1) al intervalo $\left[t_1^*, t_1^* + \frac{\eta}{2}\right]$ si $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Probamos luego que fijados $\tau_1, ..., \tau_n,\ v_1, ..., v_n,\ l_1, l_2, ..., l_n, l_{n+1}$ y $\rho > 0$, para toda u, una ε-perturbación con $\varepsilon < \varepsilon_0$, donde ε_0 no depende de $l_1, l_2, ..., l_n, l_{n+1}$ (sino de su cota en norma l^1) tenemos que existe x solución de la ecuación integral (1.1) definida en $[t_0, t_1]$ tal que

$$|x(t) - x^*(t)| < \rho$$

para todo $t \in [t_0, \tau_{n+1}]$. A continuación probaremos que $|\delta x(t)| = O(\varepsilon |l|)$,

$$\begin{aligned}
|\delta x(t)| &= \left|\int_{t_0}^{t} f(t,s,x(s),u(s)) - f(t,s,x^*(s),u^*(s))\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{j} \int_{I_i} |f(t,s,x(s),v_i) - f(t,s,x^*(s),u^*(s))|\, ds + \\
&\int_{[t_0,t]\setminus UI_i} |f(t,s,x(s),u^*(s)) - f(t,s,x^*(s),u^*(s))|\, ds \\
&\leq 2M_C\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{j} l_i\right) + \int_{t_0}^{t} M_C\,|x(s) - x^*(s)|\, ds
\end{aligned}$$

y por Gronwall, obtenemos que existe una contante positiva M tal que

$$|\delta x(t)| \leq M\varepsilon\, |l|\, e^{M_C |I^*|}.$$

■

En el siguiente lema vamos a obtener una escritura de $\delta x(t)$ fundamental para el desarrollo del presente trabajo.

2.3 Propiedades de las perturbaciones

Lema 2.3.1 *Bajo las hipótesis de la anterior (proposición 2.2.1), si* $t \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$ *pero* $t \notin \bigcup_{i=1}^{n+1} I_i$*, entonces*

$$\delta x(t) = \sum_{i=1}^{j} \left[\int_{\tau_i}^{t} R(t,s)\delta f(s,\tau_i,v_i)ds + \delta f(t,\tau_i,v_i) \right] \varepsilon l_i + o(\varepsilon\,|l|) \qquad (2.2)$$

donde $\delta f(s,\tau_i,v_i) = f(s,\tau_i,x^*(\tau_i),v_i) - f(s,\tau_i,x^*(\tau_i),u^*(\tau_i))$.

Demostración. La demostración se hace por inducción en j. Si $j = 0$, entonces $t \in [\tau_0,\tau_1] = [t_0,\tau_1]$ y $t \notin \bigcup_{i=1}^{n+1} I_i$. Como $u(t) = u^*(t)$ en ese intervalo, tenemos que $\delta x(t) = 0$. Supongamos ahora que (2.2) vale para todo $k \leq j$, vamos a probar que vale para $j+1$. Sea $t \in [\tau_{j+1},\tau_{j+2}]$ y $t \notin \cup_{i=1}^{n+1} I_i$. Comencemos observando que si $\tau_{j+1} = \tau_{j+2}$ entonces $[\tau_{j+1},\tau_{j+2}] = \emptyset$ y luego (2.2) se verifica. Asumamos que $[\tau_{j+1},\tau_{j+2}] \neq \emptyset$. Para simplificar la notación escribiremos

$$\begin{aligned} f_x(t,r) &= f_x(t,r,x^*(r),u^*(r)), \\ Q_j^k &= [\tau_j,\tau_k] \backslash \bigcup_{i=1}^{n+1} I_i, \\ P_{j+1} &= \bigcup_{i=0}^{j} Q_i^{i+1} = [t_0,\tau_{j+1}] \backslash \bigcup_{i=1}^{n+1} I_i, \\ Q_j^t &= [\tau_j,t] \backslash \bigcup_{i=1}^{n+1} I_i. \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Dado que τ_i es un punto de continuidad de u^* se tiene que para cada $t \in I$,

$$\int_{I_i} [f(t,s,x(s),v_i) - f(t,s,x^*(s),u^*(s))]\,ds = \delta f(t,\tau_i,v_i)\varepsilon l_i + o(\varepsilon\,|l|). \quad (2.4)$$

Siendo f continuamente diferenciable en variable x y $\delta x(s) = O(\varepsilon\,|l|)$

$$\begin{aligned} &\int_{P_{j+1}} f(t,s,x(s),u^*(s)) - f(t,s,x^*(s),u^*(s))ds \qquad (2.5) \\ &= \int_{P_{j+1}} f_x(t,s,x^*(s),u^*(s))\delta x(s)ds + o(\varepsilon\,|l|). \end{aligned}$$

Usando este mismo resultado (2.5) en el conjunto Q_{j+1}^t y la igualdad (2.4), obtenemos que

$$\delta x(t) = \sum_{i=1}^{j+1} \delta f(t, \tau_i, v_i)\varepsilon l_i + \int_{P_{j+1}} f_x(t,s)\delta x(s)ds + \int_{Q_{j+1}^t} f_x(t,s)\delta x(s)ds$$
$$+ o(\varepsilon\,|l|).$$

Observemos que si $s \in P_{j+1} = [t_0, \tau_{j+1}] \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} I_i$, usando la hipótesis inductiva, $\delta x(s)$ puede ser reemplazado por la ecuación conocida (2.2). Luego, si llamamos

$$h(t) = \sum_{i=1}^{j+1} \delta f(t, \tau_i, v_i)\varepsilon l_i + \int_{P_{j+1}} f_x(t,s)\delta x(s)ds + o(\varepsilon\,|l|),$$

tenemos que

$$\delta x(t) = h(t) + \int_{\tau_{j+1}}^{t} f_x(t,s)\delta x(s)ds$$

que es una ecuación lineal de Volterra con núcleo $f_x(t,s)$ y por lo tanto

$$\delta x(t) = \int_{\tau_{j+1}}^{t} R(t,s)h(s)ds + h(t)$$

es decir,

$$\delta x(t) = \sum_{i=1}^{j+1} \left[\int_{\tau_{j+1}}^{t} R(t,s)\delta f(s, \tau_i, v_i)ds + \delta f(t, \tau_i, v_i) \right] \varepsilon l_i +$$
$$\int_{\tau_{j+1}}^{t} R(t,s) \left(\int_{P_{j+1}} f_x(s,r)\delta x(r)dr \right) ds +$$
$$\int_{P_{j+1}} f_x(t,r)\delta x(r)dr + o(\varepsilon\,|l|).$$

A continuación vamos a reescribir los últimos dos términos. Para empezar observemos que

$$\int_{\tau_{j+1}}^{t} R(t,s) \left(\int_{P_{j+1}} f_x(s,r)\delta x(r)dr \right) ds + \int_{P_{j+1}} f_x(t,r)\delta x(r)dr$$
$$= \int_{P_{j+1}} \left[\int_{\tau_{j+1}}^{t} R(t,s) f_x(s,r)ds + f_x(t,r) \right] \delta x(r)dr.$$

Reemplazando $\delta x(r)$ por la hipótesis inductiva y definiendo

$$S_j(t,r) = \int_{\tau_j}^{t} R(t,s) f_x(s,r) ds + f_x(t,r)$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
&\int_{P_{j+1}} \left[\int_{\tau_{j+1}}^{t} R(t,s) f_x(s,r) ds + f_x(t,r) \right] \delta x(r) dr \\
&= \sum_{k=1}^{j} \int_{Q_k^{k+1}} S_{j+1}(t,r) \left(\sum_{i=1}^{k} \left[\int_{\tau_i}^{r} R(r,q) \delta f(q,\tau_i,v_i) dq + \delta f(r,\tau_i,v_i) \right] \varepsilon l_i \right) dr + o(\varepsilon\,|l|) \\
&= \sum_{k=1}^{j} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} S_{j+1}(t,r) \left(\sum_{i=1}^{k} \left[\int_{\tau_i}^{r} R(r,s) \delta f(q,\tau_i,v_i) dq + \delta f(r,\tau_i,v_i) \right] \varepsilon l_i \right) dr + o(\varepsilon\,|l|) \\
&= \sum_{k=1}^{j} \sum_{i=1}^{k} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} S_{j+1}(t,r) \left[\int_{\tau_i}^{r} R(r,q) \delta f(q,\tau_i,v_i) dq + \delta f(r,\tau_i,v_i) \right] \varepsilon l_i dr + o(\varepsilon\,|l|) \\
&= \sum_{i=1}^{j} \sum_{k=i}^{j} \left(\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} S_{j+1}(t,r) \left[\int_{\tau_i}^{r} R(r,q) \delta f(q,\tau_i,v_i) dq + \delta f(r,\tau_i,v_i) \right] dr \right) \varepsilon l_i + o(\varepsilon\,|l|) \\
&= \sum_{i=1}^{j} \left(\int_{\tau_i}^{\tau_{j+1}} S_{j+1}(t,r) \left[\int_{\tau_i}^{r} R(r,q) \delta f(q,\tau_i,v_i) dq + \delta f(r,\tau_i,v_i) \right] dr \right) \varepsilon l_i + o(\varepsilon\,|l|).
\end{aligned}$$

Para la segunda igualdad usamos que $|\delta x(s)| = O(\varepsilon\,|l|)$ y el intervalo I_k tiene medida εl_k. Haciendo distributiva y sacando factor común $\delta f(r,\tau_i,v_i)$ llegamos a que

$$\begin{aligned}
&\int_{\tau_i}^{\tau_{j+1}} \left[\int_{\tau_{j+1}}^{t} R(t,s) f_x(s,r) ds + f_x(t,r) \right] \left[\int_{\tau_i}^{r} R(r,q) \delta f(q,\tau_i,v_i) dq + \delta f(r,\tau_i,v_i) \right] dr \\
&= \int_{\tau_i}^{\tau_{j+1}} \left[\begin{array}{c} \int_{\tau_{j+1}}^{t} R(t,s) \left[\int_q^{\tau_{j+1}} f_x(s,r) R(r,q) dr + f_x(s,q) \right] ds + \\ \int_q^{\tau_{j+1}} f_x(t,r) R(r,q) dr + f_x(t,q) \end{array} \right] \delta f(q,\tau_i,v_i) dq.
\end{aligned}$$

Llamemos

$$\begin{aligned}
k(t,q) = &\int_{\tau_{j+1}}^{t} R(t,s) \left[\int_q^{\tau_{j+1}} f_x(s,r) R(r,q) dr + f_x(s,q) \right] ds \\
&+ \int_q^{\tau_{j+1}} f_x(t,r) R(r,q) dr + f_x(t,q),
\end{aligned}$$

al primer factor del integrando anterior. Para cada q fijo, se tiene que $k(t,q)$ es la solución de la ecuación integral

$$\begin{aligned} w(t) = &\int_{\tau_{j+1}}^{t} f_x(t,s,x^*(s),u^*(s))w(s)ds \\ &+ \int_{q}^{\tau_{j+1}} f_x(t,r,x^*(r),u^*(r))R(r,q)dr + f_x(t,q,x^*(q),u^*(q)). \end{aligned}$$

Pero por otro lado, sabiendo la siguiente propiedad de resolventes

$$\int_q^t f_x(t,s,x^*(s),u^*(s))R(s,q)ds = R(t,q) - f_x(t,q,x^*(q),u^*(q))$$

(ver Apéndice A) se puede ver que $R(t,q)$ también es solución de la ecuación integral que satisface $w(t)$ y por lo tanto $k(t,q) = R(t,q)$. Luego

$$\begin{aligned} \delta x(t) = &\sum_{i=1}^{j+1} \left[\int_{\tau_{j+1}}^{t} R(t,s)\delta f(s,\tau_i,v_i)ds + \delta f(t,\tau_i,v_i) \right] \varepsilon l_i + \\ &\sum_{i=1}^{j} \left[\int_{\tau_i}^{\tau_{j+1}} R(t,q)\delta f(q,\tau_i,v_i)dq \right] \varepsilon l_i + o(\varepsilon\,|l|) \\ = &\sum_{i=1}^{j+1} \left[\int_{\tau_i}^{t} R(t,s)\delta f(s,\tau_i,v_i)ds + \delta f(t,\tau_i,v_i) \right] \varepsilon l_i + o(\varepsilon\,|l|) \end{aligned}$$

tal como queríamos demostrar. ■

2.4 Construcción de ternas admisibles

Comenzaremos demostrando un lema necesario para construir $\varepsilon-$perturbaciones que verifiquen las restricciones (1.2) y (1.3).

Lema 2.4.1 *Sea $F \in C\left(Q_+^m(\delta), \mathbb{R}^k\right)$ tal que $F(0) = 0$, $DF(0) = M \in \mathbb{R}^{k\times m}$ con $rg(M) = k$ y F es fuertemente diferenciable en el 0, esto es: para todo $x, y \in Q_+^m(\delta)$*

$$|F(x) - F(y) - M(x-y)| = \rho(x,y)\,|x-y|\,, \tag{2.6}$$

donde $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \rho(x,y) = 0$. *Luego para todo* $r \in \mathbb{R}^m_{++}$ *tal que* $Mr = 0$, *existe* $\eta > 0$ *y una aplicación* $\theta : [0,\eta] \to \mathbb{R}^m_+$ *continua en* $[0,\eta]$ *y derivable en* 0 *que verifica:*

1. $\theta(0) = 0$.

2. $\theta'(0) = r$.

3. $\theta(s) \in Q^m_{++}(\delta)$ *para todo* $s \in (0,\eta]$.

4. $F(\theta(s)) = 0$, $s \in [0,\eta]$.

Demostración. Dado que $\operatorname{rg}(M) = k$, sin pérdida de generalidad podemos asumir que $Mr = M'r' + M''r''$ para todo $r \in \mathbb{R}^m$ con $M' \in \mathbb{R}^{k\times k}$ inversible, $M'' \in \mathbb{R}^{k\times(m-k)}$ y $r' = r_1, ..., r_k \in \mathbb{R}^k, r'' = r_{k+1}, ..., r_m \in \mathbb{R}^{m-k}$. Sea $\overline{F}$ una extensión continua de F a $Q^m(\delta)$. Podemos construir $\overline{F}$ inductivamente de la siguiente manera: supongamos que tenemos $F_j \in C\left(Q^j(\delta) \times Q^{m-j}_+(\delta), \mathbb{R}^k\right)$ tal que $F_j|_{Q^m_+(\delta)} = F$, $DF_j(0) = M$ y F_j es fuertemente diferenciable en 0, luego definimos

$$F_{j+1}(x', x_{j+1}, x'') = \begin{cases} F_j(x', x_{j+1}, x'') & \text{si} \quad 0 \le x_{j+1} < \delta \\ 2F_j(x', 0, x'') - F_j(x', -x_{j+1}, x'') & \text{si} \quad -\delta < x_{j+1} < 0 \end{cases}.$$

Se tiene entonces que $F_{j+1} \in C\left(Q^{j+1}(\delta) \times Q^{m-j-1}_+(\delta), \mathbb{R}^k\right)$, $DF_{j+1}(0) = M$ y F_{j+1} es fuertemente diferenciable en 0. Luego, si tomamos $F_0 = F$ podemos definir $\overline{F} = F_m$.

Consideremos ahora el conjunto de nivel $\left\{x \in Q^m(\delta) / \overline{F}(x) = 0\right\}$. Siendo $D\overline{F}(0) = M$, con M' inversible, del Teorema de la Función Implícita (ver [21]) tenemos que existen $\beta > 0$ y $\varphi \in C\left(Q^{m-k}(\beta), \mathbb{R}^k\right)$ tal que:

1. $\varphi(0) = 0$

2. $\overline{F}(\varphi(x''), x'') = 0$ para todo $x'' \in Q^{m-k}(\beta)$.

Además, como $\overline{F}$ es fuertemente diferenciable en 0, se sigue que φ es fuertemente diferenciable en 0 y:

$$M'D\varphi(0) + M'' = 0. \tag{2.7}$$

Ahora, sea $r \in \mathbb{R}^m_{++}$ tal que $Mr = 0$, entonces $M'r' + M''r'' = 0$. Por otro lado, la ecuación (2.7) muestra que $M'D\varphi(0)r'' + M''r'' = 0$. Luego, siendo M' inversible, tenemos $r' = D\varphi(0)r''$. Finalmente, definimos la aplicación $\theta : [0, \eta] \to \mathbb{R}^m$, $\theta(s) = (\varphi(sr''), sr'')$ para η suficientemente pequeño de manera que $\theta(s) \in \mathbb{R}^m_{++}$ para todo $s \in (0, \eta)$. ■

A continuación, dados $v_1, ..., v_n$ en $\mathcal{U}$ y $\tau_1, ..., \tau_n$ en $[t_0, t_1^*]$ puntos de continuidad de u^*, construiremos una matriz M y una aplicación F que verifiquen las hipótesis del lema anterior, de manera que dado $r \in \mathbb{R}^m_{++}$ tal que $Mr = 0$, vamos a poder definir $(l_1, ..., l_{n+1})$ tal que la ε-perturbación que determinan sea admisible. Notamos que en la presente construcción $v_1, ..., v_n$ en $\mathcal{U}$ y $\tau_1, ..., \tau_n$ en $[t_0, t_1^*]$ estarán siempre fijos.

Definimos la matriz $A = (a_1\, a_2 \cdots a_n) \in \mathbb{R}^{N \times n}$ donde a_i son los siguientes vectores columna:

$$a_i = \int_{\tau_i}^{t_1^*} R\left(t_1^*, s\right) \delta f\left(s, \tau_i, v_i\right) ds + \delta f\left(t_1^*, \tau_i, v_i\right).$$

Del lema 2.3.1 se tiene que para cualquier $l_1, ..., l_{n+1}$ y $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$\delta x(\tau_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{\tau_i}^{\tau_{n+1}} R\left(\tau_{n+1}, s\right) \delta f\left(s, \tau_i, v_i\right) ds + \delta f\left(\tau_{n+1}, \tau_i, v_i\right) \right] \varepsilon l_i + o(\varepsilon\,|l|).$$

Luego

$$\delta x(\tau_{n+1}) = A\varepsilon l + o(\varepsilon\,|l|)$$

si $\tau_{n+1} = t_1^*$ (ver $(B.2)$ en Apéndice B para el caso en que $\tau_{n+1} = t_1 < t_1^*$). Definimos también los vectores columna

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \phi_t\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right) + \phi_x\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right) P^*, \qquad (2.8) \\ \omega_2 &= \psi_t\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right) + \psi_x\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right) P^*. \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que

$$\psi_j\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right) = 0 \text{ , para } j = 1, ..., q \text{ ,}$$
$$\psi_j\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right) < 0 \text{ , para } j = q+1, ..., k_2.$$

Siendo ϕ y ψ funciones de clase C^1, dada cualquier ε-perturbación, se verifica que

$$\begin{aligned}\phi\left(t_1, x\left(t_1\right)\right) &= \varepsilon\left(\omega_1 l_{n+1}^+ - \omega_1 l_{n+1}^- + \phi_x\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right) Al\right) \\ &\quad + o(\varepsilon\left|\bar{l}\right|), \qquad (2.9)\\ \psi\left(t_1, x\left(t_1\right)\right) &= \varepsilon\left(\omega_2 l_{n+1}^+ - \omega_2 l_{n+1}^- + \psi_x\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right) Al\right) \\ &\quad + \psi\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right) + o(\varepsilon\left|\bar{l}\right|), \qquad (2.10)\end{aligned}$$

donde $l = (l_1, l_2, ..., l_n)$ y $\bar{l} = (l_1, l_2, ..., l_{n+1})$.

Sea B la matriz de $\mathbb{R}^{(k_1+k_2)\times(2+n+k_2)}$ dada por

$$B = \begin{pmatrix} \omega_1 & -\omega_1 & \phi_x\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right) A & 0_{k_1\times k_2} \\ \omega_2 & -\omega_2 & \psi_x\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right) A & I_{k_2\times k_2} \end{pmatrix}.$$

Definimos M la submatriz de B que se obtiene de suprimir las últimas $k_2 - q$ filas y columnas. Supongamos que $\mathrm{rg}(M) = k_1 + q$. A continuación tomaremos valores de $(l_1, ..., l_{n+1})$ tales que $\left\|\bar{l}\right\|_1 < n+1$. Por lo probado anteriormente existe ε_0 tal que para toda $\varepsilon-$perturbación con $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ existe solución x de la ecuación integral (1.1) en $[t_0, t_1]$. Luego, para cada $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, definimos la aplicación

$$F_\varepsilon : Q_+^{2+n+q}(\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{k_1+q}$$

de la siguiente manera: dados $\sigma_1, \sigma_2 \in [0, \varepsilon)$, $\xi \in Q_+^n(\varepsilon)$ y $\gamma \in Q_+^q(\varepsilon)$, consideramos la ε-perturbación con $l_1, ..., l_{n+1}$ dados por

$$\varepsilon l_{n+1} = \sigma_1 - \sigma_2$$
$$\varepsilon l_i = \xi_i.$$

Observemos que como $\sum_{i=1}^{n+1} |l_i| < n+1$, para toda ε-perturbación con $\varepsilon < \varepsilon_0$ se tiene que existe $x(t)$ el estado asociado. Por lo tanto podemos definir

$$(F_\varepsilon)_j (\sigma_1, \sigma_2, \xi, \gamma) = \phi_j (t_1, x(t_1)) \text{ para } j = 1, \ldots, k_1,$$
$$(F_\varepsilon)_{k_1+j} (\sigma_1, \sigma_2, \xi, \gamma) = \psi_j (t_1, x(t_1)) + \gamma_j \text{ para } j = 1, \ldots, q.$$

De la definición de F_ε se ve que $F_\varepsilon(0) = 0$ y si $(\sigma_1, \sigma_2, \xi, \gamma)$ es tal que $F_\varepsilon(\sigma_1, \sigma_2, \xi, \gamma) = 0$ y elegimos $l_1, ..., l_{n+1}$ como antes, tendremos que la ε-perturbación definida por esos parámetros (con los $v_1, ..., v_n$ y $\tau_1, ..., \tau_n$ fijados anteriormente) es admisible, es decir que ahora también verifican las restricciones (1.2) y (1.3). Además, de las ecuaciones (2.9) y (2.10) concluimos que $DF_\varepsilon(0) = M$.

Queremos aplicar el lema 2.4.1; para eso resta probar que F_ε es continua y fuertemente diferenciable en 0. Podemos ahora proceder en forma análoga al lema 2.3.1. En este caso, dadas dos ε-perturbaciones diferentes (con $v_1, ..., v_n$ y $\tau_1, ..., \tau_n$ fijos), tenemos dos tiempos finales t_1, t_2 diferentes y estados x_1, x_2. Sin pérdida de generalidad asumimos que $t_1 < t_2$. Luego, usando que

$$x_1(t_1) - x_2(t_2) = x_1(t_1) - x_2(t_1) + x_2(t_1) - x_2(t_2)$$

y tomando $d_i = \left|l_i^1 - l_i^2\right|$ para $i = 1, ..., n$; $d_{n+1} = l_{n+1}^1 - l_{n+1}^2$; $d = (d_1, ..., d_n)$ y $\overline{d} = (d_1, ..., d_{n+1})$, se tiene que

$$x_1(t_1) - x_2(t_2) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon d_i + P^* \varepsilon d_{n+1} + \rho\left(\overline{l_1}, \overline{l_2}\right) o(\varepsilon) \left|\overline{d}\right|;$$

donde $\lim_{(l^1,l^2)\to(0,0)} \rho\left(l^1, l^2\right) = 0$ (ver Apéndice B) y siendo ϕ y ψ funciones de clase C^1 se deduce un resultado análogo al obtenido en (2.9) y (2.10):

$$\phi(t_1, x_1(t_1)) - \phi(t_2, x_2(t_2)) \tag{2.11}$$
$$= \varepsilon\left(\omega_1 d_{n+1} + \phi_x(t_1^*, x^*(t_1^*)) Ad\right) + \rho_1\left(\overline{l^1}, \overline{l^2}\right) o(\varepsilon) \left|\overline{d}\right|,$$
$$\psi(t_1, x_1(t_1)) - \psi(t_2, x_2(t_2)) \tag{2.12}$$
$$= \varepsilon\left(\omega_2 d_{n+1} + \psi_x(t_1^*, x^*(t_1^*)) Ad\right) + \rho_2\left(\overline{l^1}, \overline{l^2}\right) o(\varepsilon) \left|\overline{d}\right|,$$

donde

$$\lim_{\left(\overline{l^1},\overline{l^2}\right)\to(0,0)}\left(\rho_1\left(\overline{l^1},\overline{l^2}\right),\rho_2\left(\overline{l^1},\overline{l^2}\right)\right)=(0,0)\,.$$

De (2.11) y (2.12) podemos concluir que F_ε es continua y siendo ϕ y ψ de clase C^1 obtenemos que F_ε es fuertemente diferenciable en 0 ya que si

$$\begin{aligned} x &= \left(\sigma_1^1,\sigma_2^1,\xi_1^1,...,\xi_n^1,\gamma_1^1,...,\gamma_q^1\right) \\ y &= \left(\sigma_1^2,\sigma_2^2,\xi_1^2,...,\xi_n^2,\gamma_1^2,...,\gamma_q^2\right) \end{aligned}$$

y para $i=1,...,n$ y $j=1,2$

$$\begin{aligned} \varepsilon l_{n+1}^j &= \sigma_1^j-\sigma_2^j \\ \varepsilon l_i^j &= \xi_i^j \end{aligned}$$

entonces

$$\left|F_\varepsilon(x)-F_\varepsilon(y)-DF_\varepsilon(0)\,(x-y)\right|=\rho\left(\overline{l^1},\overline{l^2}\right)o(\varepsilon)\left|\overline{d}\right|$$

con $\lim_{\left(\overline{l^1},\overline{l^2}\right)\to(0,0)}\rho\left(\overline{l^1},\overline{l^2}\right)=0$, de donde se deduce el resultado deseado observando que si $(x,y)\to(0,0)$ entonces $\left(\overline{l^1},\overline{l^2}\right)\to(0,0)$ y que $\left|\varepsilon\overline{d}\right|\leq 2\,|x-y|$.

Por lo tanto, fijado $r\in\mathbb{R}_{++}^{2+n+q}$ tal que $Mr=0$, utilizando el lema 2.4.1 se tiene que existen $\eta>0$ suficientemente pequeño y $\theta:[0,\eta]\to\mathbb{R}_{+}^{2+n+q}$ tal que para todo $s\in(0,\eta]$, $\theta(s)\in\mathbb{R}_{++}^{2+n+q}$ y $F_\varepsilon\left(\theta\left(s\right)\right)=0$. Tomando

$$\begin{aligned} \varepsilon l_{n+1} &= \theta_1\left(s\right)-\theta_2\left(s\right) \\ \varepsilon l_i &= \theta_{i+2}\left(s\right) \end{aligned} \tag{2.13}$$

se verifica que si u es una ε-perturbación con esos parámetros, la terna (t_1,x,u) es admisible.

Capítulo 3

Demostración del Teorema 1.3.1

3.1 Resultado previo

Lema 3.1.1 *Bajo las hipótesis del teorema 1.3.1, para cualquier ε-perturbación admisible, existe* $(\mu_1, \mu_2, \alpha) \in \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}_+^{k_2} \times \mathbb{R}_+$, $(\mu_1, \mu_2, \alpha) \neq (0,0,0)$ *tal que*

$$H(\tau_i, v_i) < H(\tau_i, u^*(\tau_i))$$

para $i = 1, ..., n$ *y valen las condiciones de transversalidad* (1.5) *y* (1.6).

Observación 3.1.2 *En este lema* μ_1, μ_2 *y* α *dependen de los parámetros que definen la perturbación* ($\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ *y* $v_1, v_2, ..., v_n$).

Demostración. Comenzamos definiendo el cono convexo cerrado $K = \left\{Mr : r \in \mathbb{R}_+^{2+n+q}\right\}$ de $\mathbb{R}^{k_1+q}$. Pueden ocurrir dos cosas:

1. Si $0 \notin \operatorname{int}(K)$, entonces existe $(\mu_1, \eta) \in \mathbb{R}^{k_1+q}$, $(\mu_1, \eta) \neq (0,0)$ tal que para todo $v \in K$ se tiene que $(\mu_1, \eta)v \geq 0$. Tomando $\mu_2 = (\eta, 0, ..., 0) \in$

$\mathbb{R}^{k_2}$, obtenemos que

$$0 = \mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2,$$
$$0 \leq \mu_1\phi_x\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right) A + \mu_2\psi_x\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right) A,$$
$$0 \leq \mu_2.$$

Definiendo

$$\lambda = -\mu_1\phi_x\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right) - \mu_2\psi_x\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right)$$

y $\alpha = 0$, tenemos que

$$H\left(\tau_i, v_i\right) \leq H\left(\tau_i, u^*\left(\tau_i\right)\right)$$

para todo $i = 1, ..., n$, y las condiciones de transversalidad

$$\mu_1\phi_t\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right) + \mu_2\psi_t\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right) = \lambda P^*,$$
$$\left(\mu_2\right)_j \psi_j\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right) = 0 \qquad \forall j = 1, ..., k_2.$$

2. Si $0 \in \operatorname{int}(K)$, entonces $K = \mathbb{R}^{k_1+q}$ y $\operatorname{rg}(M) = k_1 + q$. Usando el lema (2.4.1), dado $r \in \mathbb{R}_{++}^{2+n+q}$ tal que $Mr = 0$, existen $\eta > 0$ suficientemente pequeño, y $\theta : [0, \eta] \to \mathbb{R}_{+}^{2+n+q}$ tal que $\theta(s) \in \mathbb{R}_{++}^{2+n+q}$ y $F_\varepsilon\left(\theta\left(s\right)\right) = 0$ para todo $s \in (0, \eta]$. Luego tomando los l_i con $i = 1, ..., n+1$ como en las ecuaciones (2.13) y $\varepsilon < \varepsilon_0$ tenemos que las $\varepsilon-$ perturbaciones son admisibles, y por lo tanto
$$\int_{t_0}^{t_1^*} L\left(t, x^*\left(t\right), u^*\left(t\right)\right) dt \geq \int_{t_0}^{t_1} L\left(t, x\left(t\right), u\left(t\right)\right) dt. \tag{3.1}$$
Supongamos que $t_1 < t_1^*$ (el caso $t_1 > t_1^*$ es análogo), tenemos entonces
$$\sum_{i=1}^{n} \int_{I_i} \left[L\left(t, x\left(t\right), v_i\right) - L\left(t, x^*\left(t\right), u^*\left(t\right)\right)\right] dt$$
$$+ \int_{[t_0,t_1]\setminus UI_i} L_x\left(t, x^*\left(t\right), u^*\left(t\right)\right) \delta x(t) dt$$
$$- \int_{t_1}^{t_1^*} L\left(t, x^*\left(t\right), u^*\left(t\right)\right) dt + o(\varepsilon) \leq 0.$$

Definiendo $\delta L(\tau_i, v_i) = L(\tau_i, x^*(\tau_i), v_i) - L(\tau_i, x^*(\tau_i), u^*(\tau_i))$, para el primer término usamos nuevamente que τ_i es un punto de continuidad de $u^*(t)$, de donde tenemos que

$$\int_{I_i} \left[L\left(t, x\left(t\right), v_i\right) - L\left(t, x^*\left(t\right), u^*\left(t\right)\right)\right] dt = \delta L(\tau_i, v_i)\varepsilon l_i + o(\varepsilon l_i). \tag{3.2}$$

Para simplificar la notación en la presente demostración llamaremos

$$L_x(t) = L_x(t, x^*(t), u^*(t))$$

y usaremos la definición de los conjuntos Q_k^{k+1} y $P_{n+1} = [t_0, \tau_{n+1}] \backslash UI_i$ dadas en (2.3).

Para el segundo término, reemplazamos $\delta x(t)$ en cada intervalo Q_k^{k+1} por la ecuación (2.2) y usando que $|I_k| = \varepsilon l_k$ obtenemos

$$\begin{aligned}
&\int_{P_{n+1}} \left[L_x(t, x^*(t), u^*(t))\right] \delta x(t) dt \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} L_x(t) \left[\sum_{j=1}^{k} \int_{\tau_j}^{t} R(t,s)\delta f(s, \tau_j, v_j) ds + \delta f(t, \tau_j, v_j)\right] \varepsilon l_j dt \\
&+ o(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio en las sumas y siendo $|I_{n+1}| = \varepsilon l_{n+1}$ tenemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} L_x(t) \left[\int_{\tau_j}^{t} R(t,s)\delta f(s, \tau_j, v_j) ds + \delta f(t, \tau_j, v_j)\right] \varepsilon l_j dt \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left\{ \int_{\tau_j}^{t_1^*} L_x(t) \left[\int_{\tau_j}^{t} R(t,s)\delta f(s, \tau_j, v_j) ds + \delta f(t, \tau_j, v_j)\right] dt \right\} \varepsilon l_j \\
&+ o(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Si cambiamos el orden de integración, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} \left\{ \int_{\tau_j}^{t_1^*} \int_{\tau_j}^{t} L_x(t) R(t,s) \delta f(s, \tau_j, v_j) ds dt + \int_{\tau_j}^{t_1^*} L_x(t) \delta f(t, \tau_j, v_j) dt \right\} \varepsilon l_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left\{ \int_{\tau_j}^{t_1^*} \left[\int_{s}^{t_1^*} L_x(t) R(t,s) dt + L_x(s)\right] \delta f(s, \tau_j, v_j) ds \right\} \varepsilon l_j
\end{aligned}$$

y utilizando que $w^*(t)$ es la solución de la ecuación integral

$$w(s) = \int_s^{t_1^*} w(t) f_x(t,s)dt + L_x(s)$$

es decir

$$w^*(s) = \int_s^{t_1^*} L_x(t, x^*(t), u^*(t)) R(t,s)dt + L_x(s, x^*(s), u^*(s))$$

se tiene que

$$\int_{P_{n+1}} L_x\left(t\right) \delta x(t)dt = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \int_{\tau_j}^{t_1^*} w^*(s) \delta f(s, \tau_j, v_j) ds \right\} \varepsilon l_j + o(\varepsilon).$$

Para el último término, observamos que t_1^* es un punto de continuidad de u^* (también lo es para u en el caso en que $t_1 > t_1^*$) y por lo tanto

$$\int_{t_1}^{t_1^*} L\left(t, x^*\left(t\right), u^*\left(t\right)\right) dt = -L(t_1^*, x^*(t_1^*), u^*(t_1^*)) \varepsilon l_{n+1} + o(\varepsilon). \quad (3.3)$$

Multiplicando por $\alpha > 0$ los tres términos, obtenemos que

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \left(\alpha \delta L(\tau_i, v_i) + \int_{\tau_i}^{t_1^*} \alpha w^*(s) \delta f(s, \tau_i, v_i) ds \right) \varepsilon l_i \\ &+ \alpha L(t_1^*, x^*(t_1^*), u^*(t_1^*)) \varepsilon l_{n+1} + o(\varepsilon) \leq 0. \end{aligned}$$

Definimos el vector $h \in \mathbb{R}^{2+n+q}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} h_1 &= -\alpha L(t_1^*, x^*(t_1^*), u^*(t_1^*)), \\ h_2 &= \alpha L(t_1^*, x^*(t_1^*), u^*(t_1^*)), \end{aligned}$$

para $j = 3, ..., n+2$,

$$h_j = -\alpha \delta L(\tau_j, v_j) - \int_{\tau_j}^{t_1^*} \alpha w^*(s) \delta f(s, \tau_j, v_j) ds$$

y para $j = n+3, ..., 2+n+q$

$$h_j = 0.$$

Luego, tenemos que

$$h\theta(s) \geq 0$$

para todo $s \in [0, \eta]$, y como $\theta(s) = sr + o(s)$ podemos concluir que

$$hr \geq 0.$$

Por último, por las condiciones de Kuhn Tucker (ver [22]), existe $(\mu_1, \nu) \in \mathbb{R}^{k_1+q}$ tal que $h + (\mu_1, \nu) M \geq 0$. Tomando $\mu_2 = (\nu, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^{k_2}$ y λ como antes, tenemos que

$$H(\tau_i, v_i) \leq H(\tau_i, u^*(\tau_i))$$

para $i = 1, ..., n$ y las condiciones de transversalidad (1.5) y (1.6).

■

3.2 Demostración del Resultado General

Dada una terna óptima (t_1^*, x^*, u^*), definimos las aplicaciones

$$\Gamma_1 : [t_0, t_1^*] \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$$
$$\Gamma_2 : [t_0, t_1^*] \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^N$$

de la siguiente manera:

$$\Gamma_1(t, v) = \delta L(t, v) + \int_t^{t_1^*} w^*(s)\delta f(s, t, v)ds$$
$$\Gamma_2(t, v) = \delta f(t_1^*, t, v) + \int_t^{t_1^*} R(t_1^*, s)\delta f(s, t, v)ds.$$

Ahora, definamos la aplicación $\Gamma(t, v) = (\Gamma_1(t, v), \Gamma_2(t, v)) \in \mathbb{R}^{N+1}$ y el conjunto

$$\mathcal{G} = \{\Gamma(t, v) \text{ con } t \in [t_0, t_1^*] \text{ punto de continuidad de } u^*, v \in \mathcal{U}\} \subset \mathbb{R}^{N+1}.$$

Sea $D = \cup_{i=1}^{\infty} \{\Gamma(\tau_i, v_i)\}$ un subconjunto denso de $\mathcal{G}$ donde τ_i, con $i \geq 1$, son puntos de continuidad de u^* y sean $D_n = \cup_{i=1}^{n} \{\Gamma(\tau_i, v_i)\}$ para $n \geq 1$.

Para cada n, por lema 3.1.1, se tiene que existe $\left(\mu_n^1, \mu_n^2, \alpha_n\right) \in \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}_+^{k_2} \times \mathbb{R}_+$, $\left(\mu_n^1, \mu_n^2, \alpha_n\right) \neq (0,0,0)$ tal que vale la conclusión del lema. Siendo $\left(\mu_n^1, \mu_n^2, \alpha_n\right) \neq (0,0,0)$ podemos dividir el Hamiltoniano $H_n(t,v)$ por su norma. Luego, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\left(\mu_n^1, \mu_n^2, \alpha_n\right)$ tiene norma 1 y obtenemos

$$H_n(\tau_i, v_i) \leq H_n(\tau_i, u^*(\tau_i)) \tag{3.4}$$

para $i = 1, ..., n$, donde

$$H_n(t,v) = \alpha_n L(t, x^*(t), v) + \lambda_n f(t_1^*, t, x^*(t), v) + \int_t^{t_1^*} z_n^*(s) f(s, t, x^*(t), v) ds$$

con $\lambda_n = -\mu_n^1 \phi_x(t_1^*, x^*(t_1^*)) - \mu_n^2 \psi_x(t_1^*, x^*(t_1^*))$ y $z_n^*(s) = \alpha_n w^*(s) + \lambda_n R(t_1^*, s)$.

Además, valen las condiciones de transversalidad:

$$\mu_n^1 \phi_t(t_1^*, x^*(t_1^*)) + \mu_n^2 \psi_t(t_1^*, x^*(t_1^*)) = \alpha_n L(t_1^*, x^*(t_1^*), u^*(t_1^*)) + \lambda_n P^* \tag{3.5}$$

$$\left(\mu_n^2\right)_j \psi_j(t_1^*, x^*(t_1^*)) = 0 \qquad \text{para todo } j = 1, ..., k_2.$$

Sea $\left(\mu_{n_k}^1, \mu_{n_k}^2, \alpha_{n_k}\right)$ una subsucesión convergente de $\left(\mu_n^1, \mu_n^2, \alpha_n\right)$ y sea $\left(\mu^1, \mu^2, \alpha\right)$ su límite. Se sigue que $\left(\mu^1, \mu^2, \alpha\right) \neq (0,0,0)$. Queremos ver que $\left(\mu^1, \mu^2, \alpha\right)$ sirve para probar el teorema. Definimos entonces

$$H(t,v) = \alpha L(t, x^*(t), v) + \lambda f(t_1^*, t, x^*(t), v) + \int_t^{t_1^*} z^*(s) f(s, t, x^*(t), v) ds$$

con $\lambda = -\mu^1 \phi_x(t_1^*, x^*(t_1^*)) - \mu^2 \psi_x(t_1^*, x^*(t_1^*))$ y $z^*(s) = \alpha w^*(s) + \lambda R(t_1^*, s)$.

Tomemos $\tau \in [t_0, t_1^*]$ un punto de continuidad de u^*, $v \in \mathcal{U}$ y supongamos que $H(\tau, v) > H(\tau, u^*(\tau))$. Como

$$H(\tau, v) - H(\tau, u^*(\tau)) = \alpha \Gamma_1(\tau, v) + \lambda \Gamma_2(\tau, v),$$

y D es denso en $\mathcal{G}$, podemos elegir k tal que $H(\tau_k, v_k) - H(\tau_k, u^*(\tau_k)) > 0$. Finalmente, como $\lambda_{n_k} \to \lambda$ y $\alpha_{n_k} \to \alpha$, podemos tomar $n_{k_0} > k$ tal que

$$H_{n_{k_0}}(\tau_k, v_k) - H_{n_{k_0}}(\tau_k, u^*(\tau_k)) > 0$$

lo cual contradice (3.4). Tomando límite cuando $k \to +\infty$ a (3.5) se obtienen las condiciones de transversalidad.

3.3 Caso diferencial

Supongamos que el integrando f en la ecuación de Volterra (1.1) no depende de su primer coordenada t. Luego, estaríamos en el caso análogo a tener una ecuación diferencial. Mostraremos que con el teorema demostrado en la sección anterior podemos deducir el resultado clásico de Pontryagin [1], Hesteness [2]. y Michel [3] para controles continuos a trozos con horizonte variable.

La tesis del teorema 1.3.1 en este caso nos dice que si (t_1^*, x^*, u^*) es una terna óptima de J tal que t_1^* es un punto de continuidad de u^*, entonces existe $(\mu_1, \mu_2, \alpha) \in \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}_+^{k_2} \times \mathbb{R}_+$, $(\mu_1, \mu_2, \alpha) \neq (0, 0, 0)$ tal que para todo $t \in [t_0, t_1^*]$ punto de continuidad de u^*, se tiene que

$$H(t, u^*(t)) = \max_{v \in \mathcal{U}} H(t, v)$$

donde $H(t, v)$ está definido por

$$H(t, v) = \alpha L(t, x^*(t), v) + \lambda f(t, x^*(t), v) + \int_t^{t_1^*} z^*(s) f(t, x^*(t), v) \, ds$$

con $\lambda = -\mu_1 \phi_x(t_1^*, x^*(t_1^*)) - \mu_2 \psi_x(t_1^*, x^*(t_1^*))$ y $z^*(s) = \alpha w^*(s) + \lambda R(t_1^*, s)$. Más aún, una solución óptima verifica las siguientes condiciones de transversalidad

$$\mu_1 \phi_t(t_1^*, x^*(t_1^*)) + \mu_2 \psi_t(t_1^*, x^*(t_1^*)) = \alpha L(t_1^*, x^*(t_1^*), u^*(t_1^*)) + \lambda P^*$$

y

$$(\mu_2)_j \psi_j(t_1^*, x^*(t_1^*)) = 0 \qquad \text{para todo } j = 1, ..., k_2.$$

Observemos que en este caso $P^* = f(t_1^*, x^*(t_1^*), u^*(t_1^*)) + g_t(t_1^*)$ y el Hamiltoniano H puede ser escrito como

$$H(t, v) = \alpha L(t, x^*(t), v) + \lambda(t) f(t, x^*(t), v)$$

donde

$$\lambda(t) = \lambda + \int_t^{t_1^*} z^*(s) \, ds.$$

A partir de aquí se deducen fácilmente los resultados anteriores.

3.4 Tiempo final dado

En esta sección mostraremos que usando el teorema 1.3.1, podemos deducir un resultado para tiempo final fijo, que después relacionaremos con los trabajos anteriores.

Supongamos que el tiempo final $T \in I$ es dado, con las restricciones

$$\begin{aligned} \phi\left(x\left(T\right)\right) &= 0, \\ \psi\left(x\left(T\right)\right) &\leq 0. \end{aligned}$$

Luego, si consideramos las funciones

$$\begin{aligned} \widetilde{\phi}(t_1, x(t_1)) &= (t_1 - T, \phi(x(t_1)) = 0 \\ \widetilde{\psi}\left(t_1, x\left(t_1\right)\right) &= \psi\left(x\left(t_1\right)\right) \leq 0. \end{aligned}$$

y suponemos que (t_1^*, x^*, u^*) es una terna óptima, claramente $t_1^* = T$. Además si aplicamos el teorema 1.3.1 tenemos que existe $(\mu_1, \mu_2, \alpha) \in \mathbb{R}^{k_1+1} \times \mathbb{R}_+^{k_2} \times \mathbb{R}_+$ tal que $(\mu_1, \mu_2, \alpha) \neq (0, 0, 0)$ y para todo $t \in (t_0, T)$ punto de continuidad de u^*, se tiene que

$$H\left(t, u^*\left(t\right)\right) = \max_{v \in \mathcal{U}} H\left(t, v\right)$$

donde $H\left(t, v\right)$ está definido por

$$H\left(t,v\right) = \alpha L\left(t, x^*\left(t\right), v\right) + \lambda f\left(T, t, x^*\left(t\right), v\right) + \int_t^T z^*\left(s\right).f\left(s, t, x^*\left(t\right), v\right) ds$$

con $\lambda = -\mu_1 \widetilde{\phi}_x\left(T, x^*\left(T\right)\right) - \mu_2 \widetilde{\psi}_x\left(T, x^*\left(T\right)\right)$ y $z^*\left(s\right) = \alpha w^*\left(s\right) + \lambda R\left(T, s\right)$. Más aún, una solución óptima verifica las siguientes condiciones de transversalidad

$$\mu_1 \widetilde{\phi}_t\left(T, x^*\left(T\right)\right) = \alpha L\left(T, x^*\left(T\right), u^*(T)\right) + \lambda P^*$$

y

$$\left(\mu_2\right)_j \widetilde{\psi}_j\left(T, x^*\left(T\right)\right) = 0 \qquad \text{para todo } j.$$

Si llamamos $\nu_1 = \left(\mu_1^2, ..., \mu_1^{k_1+1}\right)$ las últimas k_1 coordenadas de μ, se tiene que

$$\lambda = -\nu_1 \phi_x \left(x^* \left(T\right)\right) - \mu_2 \psi_x \left(x^* \left(T\right)\right)$$
$$\mu_1^1 = \alpha L \left(T, x^* \left(T\right), u^*(T)\right) + \lambda P^*$$
$$\left(\mu_2\right)_j \psi_j \left(x^* \left(T\right)\right) = 0 \qquad \text{para todo } j.$$

Observar que la segunda condición siempre se verifica ya que μ_1^1 está libre, por lo cual no hay condiciones de transversalidad en relación a t_1^*.

Por último notar que si bien en el teorema probado anteriormente se utilizan las hipótesis de derivabilidad respecto a la variable t sobre las funciones g y f, si consideráramos el problema para t_1 fijo desde el principio, es fácil ver que se puede reproducir la misma demostración usando sólo la continuidad respecto de t.

3.5 Controles Medibles Lebesgue

En esta sección, queremos relacionar el presente trabajo con los trabajos de Michel [3] y Carlson [9].

La diferencia sustancial es que ambos autores buscan condiciones necesarias para un par (x^*, u^*) que optimice la funcional para un tiempo final t_1^* fijo (en el presente trabajo t_1^* es un parámetro a optimizar). Además de eso, Michel considera como conjunto de controles funciones continuas a trozos y luego lo extiende a funciones medibles Lebesgue para ciertos puntos regulares (ver en la introducción). Por otro lado, Carlson, toma como conjunto de controles admisibles a las funciones medibles Lebesgue definidas de un intervalo fijo acotado $I = [t_0, t_1^*]$ a un espacio Euclídeo de dimensión r. Para poder hacerlo, utiliza una función particular f en el integrando de la ecuación del estado y asume hipótesis de acotación sobre la función y sus derivadas.

A continuación, queremos mostrar que todo el trabajo hecho anteriormente en la presente tesis puede ser desarrollado en forma totalmente análoga para controles medibles Lebesgue en la misma línea que lo desarrollado por Michel en [3]. Para eso, definimos:

Definición 3.5.1 *Se dirá que τ es un punto regular de la función $g(s)$ si*

$$\lim_{a\to 0, b\to 0} \frac{1}{a}\int_{\tau+b}^{\tau+b+a} g(s)ds = g(\tau).$$

Consideremos E^n un espacio Euclídeo de dimensión n, I un intervalo fijo en $\mathbb{R}$ y $\mathcal{U} \subset E^m$ cerrado.

Asumimos $g : I \to E^N$ continuamente diferenciable, $h : I\times I\times E^N \to E^N$ continua con sus derivadas parciales de orden 1 respecto de sus primer y tercer coordenadas continuas; $G : I \times I \times E^N \to E^{N\times r}$ una matriz de $N \times r$ continua y sus entradas (G_{ij}) tienen derivadas parciales de orden 1 respecto de sus primer y tercer coordenadas continuas y $L, k : I \times E^N \times \mathcal{U} \to E \times E^r$ continuas con sus primeras derivadas respecto de $t \in I$ y $x \in E^N$ continuas. Además se satisfacen las siguientes condiciones:

Para todo compacto $S \subset E^N$, existe una constante positiva C tal que

$$|k(t, x, u)| + |k_x(t, x, u)| + |L(t, x, u)| + |L_x(t, x, u)| \leq C$$

para todo $(t, x, u) \in I\times S\times\mathcal{U}$, donde k_x es la matriz de las primeras derivadas parciales de k respecto de x.

Ahora, definimos la función $f : I \times I \times E^N \times \mathcal{U} \to E^N$ como

$$f(t, s, x, u) = h(t, s, x) + G(t, s, x)k(s, x, u).$$

Dado $t_0 \in I$, a la terna (t_1, x, u) la llamamos admisible si las funciones $\{x, u\} : [t_0, t_1] \subset I \to E^{N+m}$ son tales que x es continua en $[t_0, t_1]$, u es medible Lebesgue, se verifica la ecuación (1.1) en $[t_0, t_1]$ y se satisfacen las restricciones (1.2) y (1.3) para $(t_{1,}x(t_1))$.

Dada una terna óptima (t_1^*, x^*, u^*), tal que t_1^* es un punto regular de las funciones

$$V(t, s, x^*(s), u^*(s))$$

para todo $t \in [t_0, t_1^*]$, donde

$$V(t,s,x,u) = (G(t,s,x)k(s,x,u), L(s,x,u)),$$

definimos las $\varepsilon-$perturbaciones de u^* en $\tau_1, ..., \tau_n$ puntos regulares de las funciones $V(t,s,x^*(s),u^*(s))$.

A partir de las hipótesis mencionadas se demuestra el siguiente resultado:

Teorema 3.5.2 *Sea (t_1^*, x^*, u^*) una terna óptima de J tal que t_1^* es un punto regular de las funciones V. Luego, existe $(\mu_1, \mu_2, \alpha) \in \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}_+^{k_2} \times \mathbb{R}_+$, $(\mu_1, \mu_2, \alpha) \neq (0,0,0)$ tal que para todo $t \in [t_0, t_1^*]$ punto regular de las funciones V, se tiene que*

$$H(t, u^*(t)) = \max_{v \in \mathcal{U}} H(t,v)$$

donde $H(t,v)$ está definido por

$$H(t,v) = \alpha L(t, x^*(t), v) + \lambda f(t_1^*, t, x^*(t), v) + \int_t^{t_1^*} z^*(s) f(s,t,x^*(t),v)\, ds$$

con $\lambda = -\mu_1 \phi_x(t_1^*, x^*(t_1^*)) - \mu_2 \psi_x(t_1^*, x^*(t_1^*))$ y $z^*(s) = \alpha w^*(s) + \lambda R(t_1^*, s)$. Más aún, se verifican las siguientes condiciones de transversalidad

$$\mu_1 \phi_t(t_1^*, x^*(t_1^*)) + \mu_2 \psi_t(t_1^*, x^*(t_1^*)) = \alpha L(t_1^*, x^*(t_1^*), u^*(t_1^*)) + \lambda P^*$$

y

$$(\mu_2)_j \psi_j(t_1^*, x^*(t_1^*)) = 0 \qquad \text{para todo } j = 1, ..., k_2.$$

A continuación vamos a hacer algunos comentarios sobre cómo probar el teorema análogo al 1.3.1 con las nuevas hipótesis. En la proposición 2.2.1 tomamos sólo el conjunto compacto Y, de donde obtenemos que existe una constante C tal que

$$|k| + |k_x| \leq C$$

para todo $(t,x,u) \in I \times Y \times \mathcal{U}$. Por otro lado, siendo g', h y G funciones continuas, deducimos que

$$|f| + |f_t| + |f_x| \leq M$$

para todo $(t, x, u) \in I \times Y \times \mathcal{U}$ y

$$|g'| \leq M.$$

A partir de estas acotaciones, se prueba la proposición 2.2.1 de las misma forma que antes.

Pasamos ahora al lema 2.3.1. Siendo τ_i punto regular de

$$G(t, s, x^*(s))k(s, x^*(s), u^*(s))$$

para todo $t \in [t_0, t_1^*]$ y como $h(t, s, x^*(s))$ y $f(t, s, x(s), v_i)$ son funciones continuas en s, se tiene que τ_i es un punto regular de $f(t, s, x(s), v_i) - f(t, s, x^*(s), u^*(s))$ y por lo tanto la igualdad (2.4) se cumple. Asimismo, siendo que f tiene derivadas respecto de x continuas, también vale la igualdad (2.5). A partir de aquí la demostración se sigue igual que el otro caso.

Para probar el lema 3.1.1, observemos nuevamente que, siendo τ_i punto regular de $L(s, x^*(s), u^*(s))$ y como $L\left(t, x\left(t\right), v_i\right)$ es una función continua en la variable t, tenemos que τ_i es un punto regular de

$$L\left(t, x^*\left(t\right), u^*\left(t\right)\right) - L\left(t, x\left(t\right), v_i\right),$$

de donde se deduce que vale la igualdad (3.2). El mismo razonamiento se puede utilizar para probar la igualdad (3.3) . El resto de la demostración sigue igual que el caso anterior.

Finalmente, resta probar que vale el teorema 1.3.1, para lo cual solo hace falta definir el conjunto $\mathcal{G} \subset E^{N+1}$ como la imagen de la función $\Gamma(\tau, v)$ con $\tau \in [t_0, t_1^*]$ punto regular de $V(t, s, x^*(s), u^*(s))$ para todo $t \in [t_0, t_1^*]$ y $v \in \mathcal{U}$. La demostración sigue igual que el caso anterior.

3.6 Funcional de tipo Mayer

Finalmente, en esta sección vamos a obtener condiciones necesarias que debe cumplir una terna (t_1, x, u) que maximice una funcional de tipo Mayer

$$J(t_1, x, u) = \phi_0(t_1, x(t_1)) \tag{3.6}$$

en lugar de la funcional (1.4). A partir de este resultado y los obtenidos en las secciones 3.4 y 3.5 podemos deducir las mismas condiciones necesarias que en [9].

Para eso, vamos a proceder en forma análoga a lo hecho anteriormente. Supogamos que $\phi_0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^1. Se prueba el siguiente teorema:

Teorema 3.6.1 *Sea (t_1^*, x^*, u^*) una terna óptima tal que t_1^* es un punto de continuidad de u^*. Luego, existe $(\mu_1, \mu_2, \alpha) \in \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}_+^{k_2} \times \mathbb{R}_+$, $(\mu_1, \mu_2, \alpha) \neq (0,0,0)$ tal que para todo $t \in [t_0, t_1^*]$ punto de continuidad de u^*, se tiene que*

$$H\left(t, u^*\left(t\right)\right) = \max_{v \in \mathcal{U}} H\left(t, v\right)$$

donde $H(t,v)$ está definido por

$$H\left(t, v\right) = \lambda f\left(t_1^*, t, x^*\left(t\right), v\right) + \int_t^{t_1^*} z^*\left(s\right) f\left(s, t, x^*\left(t\right), v\right) ds$$

con $\lambda = \alpha D_x \phi_0\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right) - \mu_1 D_x \phi\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right) - \mu_2 D_x \psi\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right)$ y $z^*\left(s\right) = \lambda R\left(t_1^*, s\right)$. Más aún, una solución óptima verifica las siguientes condiciones de transversalidad

$$-\alpha D_t \phi_0\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right) + \mu_1 D_t \phi\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right) + \mu_2 D_t \psi\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right) = \lambda P^* \quad (3.7)$$

y

$$\left(\mu_2\right)_j \psi_j\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right) = 0 \qquad \text{para todo } j = 1, ..., k_2. \quad (3.8)$$

Demostración. La demostración es totalmente análoga a la hecha en teorema 1.3.1. Para probar el análogo al lema 3.1.1 sólo hace falta notar que la ecuación (3.1) debe ser reemplazada por

$$\phi_0\left(t_1, x(t_1)\right) \leq \phi_0\left(t_1^*, x^*(t_1^*)\right)$$

y usando el mismo desarrollo que en las ecuaciones (2.9) y (2.10) obtenemos que:

$$0 \geq \varepsilon\left(\omega_0 l_{n+1}^+ - \omega_0 l_{n+1}^- + D_x \phi_0\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right) Al\right) + o(\varepsilon\left|\bar{l}\right|),$$

donde

$$\omega_0 = D_t\phi_0\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right) + D_x\phi_0\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right)P^*.$$

Luego, multiplicamos por $\alpha > 0$ y definimos el vector $h \in \mathbb{R}^{2+n+q}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} h_1 &= -\alpha\omega_0, \\ h_2 &= \alpha\omega_0, \end{aligned}$$

para $j = 3, ..., n+2,$

$$h_j = -\left(D_x\phi_0\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right)A\right)_j$$

y para $j = n+3, ..., 2+n+q$

$$h_j = 0.$$

Siguiendo igual que la otra demostración, obtenemos que

$$hr \geq 0$$

y por lo tanto existe $(\mu_1, \nu) \in \mathbb{R}^{k_1+q}$ tal que $h + (\mu_1, \nu)\,M \geq 0$. Tomando $\mu_2 = (\nu, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^{k_2}$ y λ como antes, tenemos que

$$H\left(\tau_i, v_i\right) \leq H\left(\tau_i, u^*\left(\tau_i\right)\right)$$

para $i = 1, ..., n$ y las condiciones de transversalidad (3.7) y (3.8).

Para terminar con la demostración del teorema, observemos tan sólo que en este caso

$$H(\tau, v) - H(\tau, u^*(\tau)) = \lambda\Gamma_2(\tau, v),$$

pudiendo reproducir la demostración del teorema 1.3.1 como en la sección 3.2. ■

3.7 Ejemplo

Aplicaremos el resultado obtenido a un ejemplo:

Se busca maximizar la funcional

$$J(t_1, x, u) = \int_0^{t_1} \left(x(t) - u^2(t)\right) dt$$

entre todas las ternas $\{t_1, x, u\}$ tales que $\{x, u\} : [0, t_1] \to \mathbb{R}^2$ satisfacen

$$x(t) = \int_0^t \sin(t)e^{-s}x(s)ds + \sin(t).$$

Del teorema 1.3.1 obtenemos que si (t_1^*, x^*, u^*) es óptimo, entonces existe $\alpha > 0$ tal que para todo $t \in (t_0, t_1^*)$ punto de continuidad de u^*, se tiene que

$$H\left(t, u^*\left(t\right)\right) \geq H\left(t, v\right)$$

para todo $v \in \mathbb{R}$, es decir, tomando $\alpha = 1$

$$\begin{aligned} &\left(x^*\left(t\right) - \left(u^*(t)\right)^2\right) + \int_t^{t_1^*} w^*\left(s\right) \sin(s)e^{-t}x^*(t)ds \\ &\geq \left(x^*\left(t\right) - v^2\right) + \int_t^{t_1^*} w^*\left(s\right) \sin(s)e^{-t}x^*(t)ds \end{aligned} \tag{3.9}$$

para todo $v \in \mathbb{R}$ donde

$$w^*(t) = \int_t^{t_1^*} w^*\left(s\right) \sin(s)e^{-t}ds + 1.$$

Además se tienen la condición de transversalidad

$$0 = \left(x^*(t_1^*) - \left(u^*(t_1^*)\right)\right)^2.$$

Como la ecuación de evolución del estado $x(t)$ no depende de $u(t)$ y/o analizando la ecuación (3.9) obtenemos que $u^*(t) \equiv 0$ es un control óptimo. Además si resolvemos la ecuación de Volterra tenemos que

$$\begin{aligned} R(t, s) &= \sin(t)e^{-s}e^{-\frac{1}{2}\left[e^{-t}(\cos t+\sin t)-e^{-s}(\cos s+\sin s)\right]} \\ x^*(t) &= \sin(t)e^{-\frac{1}{2}\left[e^{-t}(\cos t+\sin t)-1\right]}. \end{aligned}$$

De la condición de transversalidad se tiene que $x^*(t_1^*) = 0$, es decir $t_1^* = k\pi$ con $k \geq 1$. A partir de aquí y utilizando que

$$\int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi} x^*(t)dt < 0 \text{ y } \int_{(2n+1)\pi}^{(2n+3)\pi} x^*(t)dt < 0$$

para todo $n \geq 0$ obtenemos que $t_1^* = \pi$.

Parte II

Horizonte infinito

Capítulo 4

Introducción

4.1 Presentación

Consideremos un proceso descripto por la ecuación de Volterra

$$x(t) = g(t) + \int_{t_0}^{t} f(t, s, x(s), u(s))\, ds \tag{4.1}$$

para $t \in [t_0, +\infty)$ donde el estado $x(t) \in \mathbb{R}^N$ y el control $u(t) \in \mathcal{U}$ un espacio topológico Hausdorff. Se quiere maximizar la funcional

$$J(x,u) = \int_{t_0}^{+\infty} L(t, x(t), u(t))\, dt \tag{4.2}$$

entre todos los pares "admisibles" (x, u) (ver definición 4.2.1) de una clase de estados y controles que satisfacen (4.1) para todo $t \in [t_0, +\infty)$ y ciertas restricciones en el comportamiento asintótico del estado.

En la sección 4.2 se da una descripción precisa del problema y el Principio del Máximo que se probará para un par óptimo (x^*, u^*) (teorema 4.2.2). En la sección 4.3 se dan algunas hipótesis alternativas más fáciles de verificar y se muestra la buena definición del Hamiltoniano en el teorema 4.2.2 (es decir, que la integral impropia que incluye el Hamiltoniano es convergente). En el Capítulo 5, dado un par óptimo, procedemos a definir nuevos pares (x, u), perturbaciones del óptimo, de manera que resulten admisibles. Usando esta construcción, en el Capítulo 6, se prueba que dados finitos puntos en el intervalo $[t_0, +\infty)$ vale el teorema 4.2.2 para esos puntos. Luego, se deduce el resultado general descripto en el Capítulo 4. A continuación se prueba el mismo resultado sin restricciones en el comportamiento asintótico del estado y donde la función f de la ecuación (4.1) no depende de su primera coordenada t, deduciendo los resultados obtenidos por otros autores donde el estado evoluciona según una ecuación diferencial. Además, se demuestra un Principio del Máximo análogo tanto para el caso en que los controles son medibles Lebesgue como para el caso en que la funcional de tipo Lagrange (4.2) es reemplazada por una funcional de tipo Mayer. Finalmente, se da una aplicación del teorema probado en la sección 6.2.

4.2 Descripción del modelo y resultado general

Consideramos ahora el problema de maximizar la funcional J definida en (4.2) sobre todos los pares admisibles $\{x, u\} : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^N \times \mathcal{U}$, tales que el límite

$$X = \lim_{t \to +\infty} x(t) \tag{4.3}$$

existe, se satisface la ecuación de Volterra (4.1) y las restricciones

$$\phi_1(X) = 0, \tag{4.4}$$

$$\phi_2(X) \leq 0. \tag{4.5}$$

Definición 4.2.1 *Un par* $\{x, u\} : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^N \times \mathcal{U}$ *se llama admisible si* x *es una función continua,* u *es una función continua a trozos con finitas discontinuidades a lo sumo de primera especie,* (4.2) *es finita, el límite* (4.3) *existe y las relaciones* (4.1), (4.4) *y* (4.5) *se satisfacen.*

Sea $\{x^*, u^*\}$ un par óptimo, vamos a asumir las siguientes hipótesis:

H1) $g : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^N$ es una función continua.

H2) $L : [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ es continua con derivada de primer orden con respecto a $x \in \mathbb{R}^N$ continua y tal que existe $\psi_1(t)$ función integrable tal que:

$$|L_x(t, x^*(t), u^*(t))| \leq \psi_1(t)$$

para todo $t \geq t_0$.

H3) $f : [t_0, +\infty) \times [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^N$ es continua con derivada de primer orden respecto de x continua y se verifica que:

1. (a) Existe $\lim_{t\to+\infty} f(t, s, x, u) = F(s, x, u)$ para todo $s < t$, $x \in \mathbb{R}^N$, $u \in \mathcal{U}$.

   (b) Dado un compacto $K \subset [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathcal{U}$, existe una constante no negativa C_K:

   $$|f(t, s, x, u)| + |f_x(t, s, x, u)| \leq C_K$$

   para todo $t \geq t_0$ y $(s, x, u) \in K$.

   (c) Existe $\psi_2(t)$ función integrable tal que

   $$|f(t, s, x_1, u^*(s)) - f(t, s, x_2, u^*(s))| \leq \psi_2(s)|x_1 - x_2|$$

   para todo $t \geq s$, x_1 y x_2 cerca de x^*.

H4) Dado $R(t, s)$ la resolvente de la ecuación lineal de Volterra (ver Apéndice A) con núcleo $f_x(t, s, x^*(s), u^*(s))$, asumimos que:

1. (a) Existe $\psi^*(t)$ función integrable tal que

   $$|R(t, s)| \leq \psi^*(s)$$

   para todo $t > s$.

   (b) Existe $\lim_{t\to+\infty} R(t, s)$ para todo $s \geq t_0$.

H5) Existe $\psi_3(t)$ función integrable tal que para todo $\zeta > 0$, existe $\upsilon > 0$ tal que si $|x - x^*(s)| < \upsilon$, entonces

$$|\Phi_x(t,s,x,u^*(s)) - \Phi_x(t,s,x^*(s),u^*(s))| \leq \zeta\psi_3(s)$$

para todo $t \geq s \geq t_0$, donde $\Phi(t,s,x,u) = (f(t,s,x,u), L(s,x,u))$.

H6) $(\phi_1, \phi_2) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}$ son funciones de clase C^1.

Bajo las hipótesis dadas anteriormente, vamos a demostrar el siguiente teorema:

Teorema 4.2.2 *Sea $\{x^*, u^*\}$ un par óptimo en la clase de pares admisibles donde $\lim_{t\to+\infty} x^*(t) = X^*$. Luego, existe $(\mu_1, \mu_2, \alpha) \in \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}_+^{k_2} \times \mathbb{R}_+$, $(\mu_1, \mu_2, \alpha) \neq (0,0,0)$ tal que $\forall t \in [t_0, +\infty)$ punto de continuidad de u^* se tiene que*

$$H(t, u^*(t)) = \max_{u\in\mathcal{U}} H(t,u)$$

donde $H(t,u)$ está definido como

$$H(t,u) = \alpha L(t,x^*(t),u) + \lambda \lim_{s\to+\infty} f(s,t,x^*(t),u) + \int_t^{+\infty} z^*(s) f(s,t,x^*(t),u)ds$$

con $\lambda = -\mu_1 D_x\phi_1(X^*) - \mu_2 D_x\phi_2(X^*)$ y $z^*(s) = \alpha w^*(s) + \lambda \lim_{t\to+\infty} R(t,s)$ siendo w^* la solución de la ecuación integral

$$w(t) = \int_t^{+\infty} w(s) f_x(s,t,x^*(t),u^*(t))ds + L_x(t,x^*(t),u^*(t)). \qquad (4.6)$$

Además, se verifica la condición de transversalidad

$$(\mu_2)_j (\phi_2)_j (X^*) = 0 \qquad \forall j = 1,...,k_2. \qquad (4.7)$$

4.3 Algunas consideraciones

La hipótesis H5 puede ser reemplazada por las dos siguientes hipótesis más fuertes:

1. Existen $\gamma_1 > 0$ y $\psi_4(t)$ función integrable tal que:

$$|L_x(t, x(t), u^*(t)) - L_x(t, x^*(t), u^*(t))| \leq \psi_4(t)|x(t) - x^*(t)|^{\gamma_1}$$

   para todo $t \geq t_0$ y x cerca de x^*.

2. Existe $\gamma_2 > 0$ y $\psi_5(t)$ función integrable tal que

$$|f_x(t, s, x(s), u^*) - f_x(t, s, x^*(s), u^*)| \leq \psi_5(s)|x(s) - x^*(s)|^{\gamma_2}$$

   para todo $t \geq s \geq t_0$ y x cerca de x^*.

Por otro lado, siendo que las hipótesis H4) en la resolvente $R(t, s)$ no son fáciles de verificar, a continuación damos dos hipótesis distintas en el núcleo $f_x(t, s, x^*(s), u^*(s))$ a partir de las cuales se deducen las hipótesis H4).

Proposición 4.3.1 *Si existe una función integrable $\psi^*(s)$ con $\|\psi^*\|_1 < 1$ tal que para todo $t \geq s$*

$$|f_x(t, s, x^*(s), u^*(s))| \leq \psi^*(s)$$

y existe $\lim_{t\to+\infty} f_x(t, s, x^*(s), u^*(s)) = F_2(s)$, entonces las hipótesis H4)a) y H4)b) se verifican.

Demostración. Ver Apéndice C. ■

Proposición 4.3.2 *Se pueden obtener la misma conclusión si existe $a > 0$ y ψ^* función acotada e integrable tal que $|f_x(t, s, x^*(s), u^*(s))| \leq e^{-at}\psi^*(s)$.*

Demostración. Ver Apéndice C. ■

A continuación vamos a probar que bajo las hipótesis pedidas el Hamiltoniano $H(t, u)$ está bien definido para todo $t \in [t_0, +\infty)$ y $u \in \mathcal{U}$.

Proposición 4.3.3 *Bajo las hipótesis dadas en la sección anterior, para todo $t \in [t_0, +\infty)$ y $u \in \mathcal{U}$, la siguiente integral converge*

$$\int_t^{+\infty} z^*(s) f(s, t, x^*(t), u) ds.$$

Demostración. Comencemos observando que el conjunto $\{(t, x^*(t), u)\}$ es compacto para cada t fijo, luego por hipótesis H3)b) existe una constante C tal que

$$|f(s, t, x^*(t), u)| \leq C$$

para todo $s \geq t_0$, de donde obtenemos que

$$\left| \int_t^{+\infty} z^*(s) f(s, t, x^*(t), u) ds \right| \leq C \int_t^{+\infty} |z^*(s)| \, ds.$$

Por otro lado, como w^* es solución de la ecuación integral (4.6), hipótesis H2) y H4)a) implican que

$$|w^*(s)| \leq \int_s^{+\infty} \psi_1(r) \psi^*(s) dr + \psi_1(s),$$

y por hipótesis H4) tenemos que

$$\left| \lim_{r \to +\infty} R(r, s) \right| \leq \psi^*(s)$$

para todo $s \geq t_0$.

Luego, siendo $z^*(s) = \alpha w^*(s) + \lambda \lim\limits_{r \to +\infty} R(r, s)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_t^{+\infty} |z^*(s)| \, ds &\leq \alpha \int_t^{+\infty} |w^*(s)| ds + \lambda \int_t^{+\infty} \left| \lim_{r \to +\infty} R(r, s) \right| ds \\
&\leq \alpha \left(\int_t^{+\infty} \int_s^{+\infty} \psi_1(r) \psi^*(s) dr ds + \int_t^{+\infty} \psi_1(s) ds \right) \\
&+ \lambda \int_t^{+\infty} \psi^*(s) ds
\end{aligned}$$

obteniendo el resultado deseado. ■

Capítulo 5

Perturbaciones

Dedicaremos este capítulo a definir una clase de controles admisibles de tipo Pontryagin y establecer la relación entre el estado óptimo y los estados asociados a dichos controles.

5.1 Existencia de pares perturbados

Sea (x^*, u^*) un par óptimo. Luego, dados $t_0 < \tau_1 \leq ... \leq \tau_n$ puntos de continuidad de u^* ; $v_1, ..., v_n$ tales que $v_i \in \mathcal{U}$ para todo $i = 1, ..., n$ y $l = (l_1, l_2, ..., l_n) \in \mathbb{R}^n_+$ tal que $\|l\|_1 < M_l$, para cada $\varepsilon > 0$ definimos los intervalos I_i para $i = 1, ..., n$ de la misma manera que en la Sección 2.1 y los controles perturbados $u : [t_0, +\infty) \to \mathcal{U}$ como sigue:

$$u(t) = \begin{cases} u^*(t) & \text{si} \quad t \notin \cup_{i=1}^n I_i \\ v_i & \text{si} \quad t \in I_i \end{cases} . \tag{5.1}$$

A dichos controles nuevamente los llamaremos $\varepsilon-$ perturbaciones. Además, una vez dados $\tau_1 \leq ... \leq \tau_n$ y $l_1, l_2, ..., l_n$, fijamos $t_1 > \tau_n$. Luego, para ε suficientemente pequeño, los intervalos I_i son disjuntos y para todo $t \in \cup_{i=1}^n I_i$ se verifica que $t < t_1$.

Probaremos ahora que para ε suficientemente pequeño, dada una $\varepsilon-$ perturbación, existe x solución de la ecuación integral (4.1) definida en $[t_0, +\infty)$

que verifica que existe el límite (4.3).

Proposición 5.1.1 *Dados* (x^*, u^*) *un par óptimo,* $v_1, ..., v_n$ *tales que* $v_i \in \mathcal{U}$ *para todo* $i = 1, ..., n$ *y* $t_0 = \tau_0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq ... \leq \tau_n < +\infty$ *tal que* τ_i *es un punto de continuidad de* u^* *para todo* $i = 1, ..., n$*; entonces existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tal que para todo* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *y* u *una* ε*- perturbación de* u^* *definida con esos parámetros, la solución* $x(t)$ *de* (4.1) *está definida en* $[t_0, +\infty)$ *y* $\delta x(t) = x(t) - x^*(t) = O(\varepsilon |l|)$ *para todo* $t \geq t_0$.

Demostración. Esta proposición se prueba en forma análoga a la proposición 2.2.1 de la Parte 1. En este caso, fijemos $\rho > 0$, y sean t_1 como antes tal que $t_1 > \tau_n + \varepsilon l_n$ y los conjuntos

$$Y = \left\{x \in \mathbb{R}^N : |x - x^*(s)| \leq \rho \text{ con } s \in [t_0, t_1]\right\}$$
$$\mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^{n} \{v_i\} \cup \text{cl}\{u^*(s) : s \in [t_0, t_1] \text{ es un punto de continuidad de } u^*\}.$$

Luego definimos K el subconjunto compacto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathcal{U}$

$$K = [t_0, t_1] \times Y \times \mathcal{V}. \tag{5.2}$$

Observemos que en este caso (a diferencia del caso finito) el compacto depende de t_1 que depende de $\tau_1, ..., \tau_n$ y por lo tanto ε_0 va a depender de $\tau_1, ..., \tau_n$ aunque resultará independiente de $l_1, ..., l_n$ si $\|l\|_1 < M_l$.

Trabajando en forma totalmente análoga a la proposición 2.2.1 tenemos que existe una constante M_K tal que

$$|f| + |f_x| \leq M_K$$

de donde obtenemos que f es uniformemente Lipschitz en x. Luego, dada u una ε-perturbación con los parámetros $\tau_1 \leq ... \leq \tau_n$ y $l_1, l_2, ..., l_n$ fijos, existe $\nu > 0$ y una única función continua x definida en $[t_0, t_0 + \nu]$ solución de la ecuación (4.1) tal que $|x - x^*(s)| \leq \rho$.

Dado

$$\varepsilon_1 < \min\left\{\frac{\rho}{2\left(e^{-\|\psi_2\|_1} + \|\psi_2\|_1\right)}, \rho\right\}$$

a continuación vamos a probar que se puede definir $\varepsilon_0 \in (0,1)$ tal que x el estado asociado a cualquier ε-perturbación con $\varepsilon < \varepsilon_0$ verifica que $|x(s) - x^*(s)| < \varepsilon_1$ en $[t_0, T)$, donde $[t_0, T)$ es el intervalo maximal de existencia.

Sea

$$\varepsilon_0 = \min\left\{\frac{\varepsilon_1}{2M_K M_l e^{\|\psi_2\|_1}}, 1\right\},$$

u una $\varepsilon-$perturbación con $\varepsilon < \varepsilon_0$ y supongamos que existe $t \in (t_0, T)$ tal que $|x(t) - x^*(t)| \geq \varepsilon_1$. Sea $t^* = \inf\{t \in [t_0, T) \text{ tal que } |x(t) - x^*(t)| \geq \varepsilon_1\}$. Entonces $|x(t^*) - x^*(t^*)| = \varepsilon_1$ y $|x(t) - x^*(t)| < \varepsilon_1$ para todo $t < t^*$. Sin embargo,

$$\begin{aligned}
|x(t^*) - x^*(t^*)| &\leq \int_{t_0}^{t^*} |f(t,s,x(s),u(s)) - f(t,s,x^*(s),u^*(s))| ds \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{I_i \cap [t_0,t^*]} \left|f(t,s,x(s),v_i) - f(t,s,x^*(s),u^*(s))\right| ds + \\
&\int_{[t_0,t^*]\setminus UI_i} \left|f(t,s,x(s),u^*(s)) - f(t,s,x^*(s),u^*(s))\right| ds \\
&\leq 2M_K\left(\sum_{i=1}^{n} l_i\right)\varepsilon + \int_{t_0}^{t^*} \psi_2(s)|x(s) - x^*(s)| ds \\
&\leq 2M_K\varepsilon + \int_{t_0}^{t^*} \psi_2(s)|x(s) - x^*(s)| ds.
\end{aligned}$$

Luego, por Gronwall, obtenemos que

$$|x(t^*) - x^*(t^*)| \leq \left(2M_K e^{\|\psi_2\|_1}\right)\varepsilon < \varepsilon_1.$$

Tenemos entonces que la solución x definida en $[t_0, T)$ verifica para todo $s \in [t_0, T)$ la desigualdad

$$|x(s) - x^*(s)| < \varepsilon_1.$$

Veamos ahora que x se puede extender más allá de $[t_0, T)$ y por lo tanto está definida en $[t_0, +\infty)$. Sean $\eta < \frac{1}{2M_K}$ y a tal que $T - \eta < a < T$. Además, por absoluta continuidad de la integral podemos elegir η suficientemente pequeño tal que

$$\left(\int_a^{a+\eta} \psi_2(s)ds\right) < 1.$$

Definimos el espacio métrico completo

$$D = \{y : [a, a+\eta] \to \mathbb{R}^N \text{ continuas tal que } |y(s) - x^*(s)| \leq \rho\}$$

con la métrica del máximo y la aplicación

$$B(y)(t) = \tilde{g}(t) + \int_a^t f(t, s, y(s), u(s))ds$$

donde $\tilde{g}(t) = g(t) + \int_{t_0}^a f(t, s, x(s), u(s))ds$, y x es la solución en $[t_0, T)$.

Veamos que $B(D) \subset D$. Siendo y continua, $B(y)$ resulta continua. Hay que ver que $|B(y)(s) - x^*(s)| \leq \rho$ para todo $s \in [a, a+\eta]$. Llamamos $P = \cup I_i \cap [t_0, a]$, $N = [t_0, a] \backslash \cup I_i$ al complemento de P en $[t_0, a]$, $P' = \cup I_i \cap [a, s]$

y $N' = [a,s] \backslash \cup I_i$ al complemento de P' en $[a,s]$

$$
\begin{aligned}
&|B(y)(s) - x^*(s)| \\
&\leq \int_{t_0}^{a} |f(s,r,x(r),u(r)) - f(s,r,x^*(r),u^*(r))|\, dr \\
&+ \int_{a}^{s} |f(s,r,y(r),u(r)) - f(s,r,x^*(r),u^*(r))|\, dr \\
&\leq \int_{P} |f(s,r,x(r),u(r)) - f(s,r,x^*(r),u^*(r))| dr \\
&+ \int_{N} |f(s,r,x(r),u^*(r)) - f(s,r,x^*(r),u^*(r))| dr \\
&+ \int_{P'} |f(s,r,y(r),u(r)) - f(s,r,x^*(r),u^*(r))| dr \\
&+ \int_{N'} |f(s,r,y(r),u^*(r)) - f(s,r,x^*(r),u^*(r))| dr \\
&\leq 2M_K\varepsilon \left(\sum_{i=1}^{n} l_i \right) + \int_{N} \psi_2(r)|x(r) - x^*(r)| dr \\
&+ \int_{N'} |f_x(s,r,\widetilde{y}(r),u^*(r))|\, |y(r) - x^*(r)| dr \\
&\leq 2M_K M_l \varepsilon + \|\psi_2\|_1 \varepsilon_1 + M_K \rho\eta \\
&< \left(e^{-\|\psi_2\|_1} + \|\psi_2\|_1 \right) \varepsilon_1 + \frac{\rho}{2} < \rho
\end{aligned}
$$

por la elección de ε_1 y η, y donde $\widetilde{y}$ es un punto intermedio.

Probemos ahora que la aplicación B es una contracción. Sean y_1, y_2 dos elementos en D. Si $T < t_1$, podemos elegir η tal que $\alpha + \eta < t_1$ y entonces

$$
\begin{aligned}
|B(y_1)(t) - B(y_2)(t)| &\leq \int_{a}^{t} |f(t,s,y_1(s),u(s)) - f(t,s,y_2(s),u(s))| ds \\
&= \int_{a}^{t} |f_x(t,s,\tilde{y}(s),u(s))||y_1(s) - y_2(s)| ds \\
&\leq M_K \eta \max |y_1(s) - y_2(s)|
\end{aligned}
$$

donde $\tilde{y}(s)$ es un punto intermedio y $M_K.\eta < 1/2$.

Si $T \geq t_1$, podemos elegir η tal que $T - \eta > \tau_n + \varepsilon_0 M_l$ de manera que

$T - \eta > \tau_n + \varepsilon l_n$ y entonces acotamos diferente

$$\begin{aligned}
|B(y_1)(t) - B(y_2)(t)| &\leq \int_a^t |f(t,s,y_1(s),u(s)) - f(t,s,y_2(s),u(s))|ds \\
&= \int_a^t |f(t,s,y_1(s),u^*(s)) - f(t,s,y_2(s),u^*(s))|ds \\
&\leq \int_a^t \psi_2(s)|y_1(s) - y_2(s)|ds \\
&\leq \left(\int_a^{a+\eta} \psi_2(s)ds\right) \max|y_1(s) - y_2(s)|
\end{aligned}$$

donde $\left(\int_a^{a+\eta} \psi_2(s)ds\right) < 1$.

Luego, existe y solución en $[a, a+\eta]$. Definiendo

$$z(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si} \quad t \leq a \\ y(t) & \text{si} \quad t > a \end{cases}$$

se tiene que la solución x está definida en $[t_0, a+\eta]$ donde $a+\eta > T$, lo cual es un absurdo. Luego, x está definida en $[t_0, +\infty)$.

Finalmente como teníamos de antes $|x(t) - x^*(t)| < \rho$ para todo $t \geq t_0$ vale que

$$\begin{aligned}
|\delta x(t)| \leq & \sum_{i=1}^{n} \int_{I_i} |f(t,s,x(s),v_i) - f(t,s,x^*(s),u^*(s))|\, ds \\
& + \int_{[t_0,t]\setminus \cup I_i} |f(t,s,x(s),u^*(s)) - f(t,s,x^*(s),u^*(s))|\, ds \\
& \leq 2M_K\varepsilon \textstyle\sum_{i=1}^{n} l_i + \displaystyle\int_{t_0}^{t} |\psi_2(s)||x(s) - x^*(s)|ds.
\end{aligned}$$

Usando el lema de Gronwall obtenemos que

$$|\delta x(t)| \leq 2M_K\varepsilon\, |l|\, e^{\|\psi_2\|_1}$$

para todo $t \geq t_0$. ■

5.2 Propiedades de pares perturbados

Lema 5.2.1 *Bajo las hipótesis de la proposición 5.1.1, si* $t \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$ *y* $t \notin \bigcup_{i=1}^{n} I_i$ *entonces*

$$\delta x(t) = \sum_{i=1}^{j} \left[\int_{\tau_i}^{t} R(t,s) \delta f(s, \tau_i, v_i) ds + \delta f(t, \tau_i, v_i) \right] \varepsilon l_i + o(\varepsilon \left| l \right|) \qquad (5.3)$$

donde $\delta f(s, \tau_i, v_i) = f(s, \tau_i, x^*(\tau_i), v_i) - f(s, \tau_i, x^*(\tau_i), u^*(\tau_i))$.

Demostración. La demostración es similar a la hecha en el lema 2.3.1 de la primera parte. Usaremos la misma notación que en dicho lema para $f_x(t, r)$, Q_j^k, P_j, y Q_j^t.

Dado $\rho > 0$, consideramos nuevamente el compacto K definido en (5.2) y la constante M_K tal que

$$|f| + |f_x| \leq M_K.$$

Dado que τ_i es un punto de continuidad de u^* se tiene nuevamente que para todo $t \geq t_0$,

$$\int_{I_i} \left[f(t, s, x(s), v_i) - f(t, s, x^*(s), u^*(s)) \right] ds = \delta f(t, \tau_i, v_i) \varepsilon l_i + o(\varepsilon \left| l \right|).$$

Usando la hipótesis H5) se obtiene que

$$\int_{P_{j+1}} \left| f(t, s, x(s), u^*(s)) - f(t, s, x^*(s), u^*(s)) - f_x(t, s) \delta x(s) \right| ds = o(\varepsilon \left| l \right|),$$

y usando el mismo resultado en el conjunto Q_{j+1}^t, tenemos que

$$\delta x(t) = \sum_{i=1}^{j+1} \delta f(t, \tau_i, v_i) \varepsilon l_i + \int_{P_{j+1}} f_x(t, s) \delta x(s) ds + \int_{\tau_{j+1}}^{t} f_x(t, s) \delta x(s) ds + o(\varepsilon \left| l \right|).$$

Siguiendo con la misma idea que en el caso finito, y siendo

$$\int_{\tau_{j+1}}^{t} R(t, s) ds \leq \left\| \psi^* \right\|_1$$

tenemos que

$$\delta x(t) = \sum_{i=1}^{j+1} \left[\int_{\tau_{j+1}}^{t} R(t,s)\delta f(s,\tau_i,v_i)ds + \delta f(t,\tau_i,v_i) \right] \varepsilon l_i +$$
$$\int_{\tau_{j+1}}^{t} R(t,s) \left(\int_{P_{j+1}} f_x(s,r)\delta x(r)dr \right) ds +$$
$$\int_{P_{j+1}} f_x(t,r)\delta x(r)dr + o(\varepsilon\,|l|).$$

Si $r \in P_{j+1}$, entonces $r < t_1$ y por lo tanto $(r, x^*(r), u^*(r)) \in K$, en consecuencia existe una constante C tal que

$$\int_{P_{j+1}} \left[\int_{\tau_{j+1}}^{t} R(t,s) f_x(s,r)ds + f_x(t,r) \right] dr \leq C.$$

Luego, usando nuevamente la notación

$$S_j(t,r) = \int_{\tau_j}^{t} R(t,s) f_x(s,r)ds + f_x(t,r)$$

tenemos que

$$\int_{P_{j+1}} \left[\int_{\tau_{j+1}}^{t} R(t,s) f_x(s,r)ds + f_x(t,r) \right] \delta x(r)dr \tag{5.4}$$
$$= \sum_{k=1}^{j} \int_{Q_k^{k+1}} S_{j+1}(t,r) \left(\sum_{i=1}^{k} \left[\int_{\tau_i}^{r} R(r,q)\delta f(q,v_i,\tau_i)dq + \delta f(r,v_i,\tau_i) \right] \varepsilon l_i \right) dr$$
$$+\, o(\varepsilon\,|l|).$$

Observemos que esta cuenta no difiere en nada del caso finito ya que si bien t no está acotado, la variable r se está integrando a lo sumo en el intervalo finito $[t_0, t_1]$ de manera que $(r, x^*(r), u^*(r)) \in K$ como notamos anteriormente. La demostración se sigue totalmente igual al lema 2.3.1. Una observación importante es que $o(\varepsilon\,|l|)$ es independiente de $t \geq t_0$. ■

Probaremos ahora que dada cualquier ε-perturbación, el estado asociado x tiene límite finito. Siendo x^* un estado óptimo, tenemos que existe el límite (4.3). Procederemos a probar la existencia de $\lim\limits_{t\to+\infty} \delta x(t)$.

Proposición 5.2.2 *Dada u una ε-perturbación y x el estado asociado, el límite* (4.3) *existe.*

Demostración. Sea $t > t_1$, entonces

$$\begin{aligned}\delta x(t) &= \int_{t_0}^{t} \left(f(t,s,x(s),u(s)) - f(t,s,x^*(s),u^*(s))\right) ds \\ &= \int_{t_0}^{t_1} f(t,s,x(s),u(s)) - f(t,s,x^*(s),u^*(s)) ds \\ &+ \int_{t_1}^{t} f(t,s,x(s),u^*(s)) - f(t,s,x^*(s),u^*(s)) ds.\end{aligned}$$

Tomamos nuevamente el compacto K definido en (5.2). Luego, por hipótesis H3)a) y H3)b) tenemos que

$$f(t,s,x(s),u(s)) - f(t,s,x^*(s),u^*(s))$$

tiene límite cuando t tiende a $+\infty$ y es uniformemente acotada para todo $s \in [t_0, t_1]$ y para todo $t \geq t_0$, de donde deducimos por el teorema de convergencia acotada de Lebesgue que existe el límite

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{t_0}^{t_1} f(t,s,x(s),u(s)) - f(t,s,x^*(s),u^*(s)) ds.$$

Por otro lado, si $s > t_1$ usando hipótesis H3)c) y la proposición 5.1.1 tenemos que existe una constante C tal que

$$|f(t,s,x(s),u^*(s)) - f(t,s,x^*(s),u^*(s))| \leq \psi_2(s)|x(s) - x^*(s)| \leq C\psi_2(s)$$

donde $\psi_2(s)$ es integrable en $[t_1, +\infty)$. Luego, usando el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, tenemos que el segundo término de la igualdad anterior también tiene límite.

Entonces, concluimos que existe el límite (4.3) y de la proposición 5.1.1

$$X - X^* = O(\varepsilon\,|l|).$$

■

Proposición 5.2.3 *Dada u una ε-perturbación y x el estado asociado, la integral impropia* (4.2) *converge.*

Demostración. Siendo $\{x^*, u^*\}$ un par óptimo, en particular es un par admisible y por lo tanto la integral impropia (4.2) converge. Para simplificar la notación, definimos

$$\delta L(\tau_i, v_i) = L(\tau_i, x^*(\tau_i), v_i) - L(\tau_i, x^*(\tau_i), u^*(\tau_i))$$

y siendo τ_i punto de continuidad de u^* tenemos que

$$\int_{I_i} (L(t, x(t), v_i)) - L(t, x^*(t), u^*(t)))\, dt = \delta L(\tau_i, v_i)\varepsilon l_i + o(\varepsilon\, |l|).$$

Por otro lado, por hipótesis H5) se tiene que

$$\begin{aligned} &\int_{[t_0,+\infty)\backslash UI_i} (L(t, x(t), u(t)) - L(t, x^*(t), u^*(t)))\, dt \\ &= \int_{[t_0,+\infty)\backslash UI_i} L_x(t, x^*(t), u^*(t))\delta x(t) dt + o(\varepsilon\, |l|). \end{aligned}$$

Luego, juntando todo llegamos a que

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{+\infty} (L(t, x(t), u(t)) - L(t, x^*(t), u^*(t)))\, dt \\ &= \sum_{i=1}^{n} \delta L(\tau_i, v_i)\varepsilon l_i + \int_{[t_0,+\infty)\backslash UI_i} L_x(t, x^*(t), u^*(t))\delta x(t) dt + o(\varepsilon\, |l|) \end{aligned}$$

que es finito por hipótesis H2) obteniendo la conclusión deseada. ■

5.3 Construcción de pares admisibles

Hemos probado hasta ahora que dados $t_0 < \tau_1 \leq ... \leq \tau_n$ puntos de continuidad de u^* ; $v_1, ..., v_n$ tales que $v_i \in \mathcal{U}$ para todo $i = 1, ..., n$, entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\varepsilon < \varepsilon_0$ y $l = (l_1, l_2, ..., l_n) \in \mathbb{R}_+^n$ tal que $\|l\|_1 < M_l$, si definimos u una ε-perturbación con esos parámetros, entonces existe x solución de (4.1) definida en $[t_0, +\infty)$ tal que existe el límite (4.3) y la integral impropia (4.2) converge.

Luego, para que dicho par (x, u) resulte admisible, resta probar que el límite X satisface las restricciones (4.4) y (4.5).

El siguiente lema será usado para definir una clase de pares admisibles $\{x, u\}$.

Lema 5.3.1 *Sea u una ε-perturbación tal que x el estado asociado tiene límite* (4.3). *Luego, para $i = 1, 2$ vale la siguiente igualdad*

$$\phi_i(X) = \phi_i(X^*) + D_x\phi_i(X^*) \, Al\varepsilon + o(\varepsilon |l|). \tag{5.5}$$

Demostración. Siendo ϕ_i de clase C^1 y $X - X^* = O(\varepsilon |l|)$ tenemos que

$$\phi_i(X) = \phi_i(X^*) + D_x\phi_i(X^*)(X - X^*) + o(\varepsilon |l|).$$

Comencemos notando que para cada i el conjunto $\{(\tau_i, x^*(\tau_i), v_i)\}$ es compacto y por lo tanto $f(s, \tau_i, x^*(\tau_i), v_i)$ es uniformemente acotada por una constante para todo $s \geq t_0$. Además, por hipótesis, $R(t, s)$ es acotada por la función $\psi^*(s)$ integrable en $[t_0, +\infty)$ y existe

$$\lim_{t\to+\infty} R(t, s) f(s, \tau_i, x^*(\tau_i), v_i).$$

Luego, por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, se tiene que

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{\tau_i}^{t} R(t, s) f(s, \tau_i, x^*(\tau_i), v_i) ds = \int_{\tau_i}^{+\infty} \lim_{t\to+\infty} R(t, s) f(s, \tau_i, x^*(\tau_i), v_i) ds.$$

La misma igualdad vale si en lugar de v_i ponemos $u^*(\tau_i)$. Por lo tanto, podemos definir

$$A_i = \lim_{t\to+\infty} A_i(t)$$

donde

$$A_i(t) = \int_{\tau_i}^{t} R(t, s) \delta f(s, \tau_i, v_i) ds + \delta f(t, \tau_i, vi)$$

y $A = (A_1, ..., A_n) \in \mathbb{R}^{N\times n}$ con A_i los vectores columna de la matriz.

Luego, usando (5.3) tenemos que

$$\begin{aligned} X - X^* &= \lim_{t\to+\infty} \delta x(t) \\ &= \lim_{t\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} A_i(t)\varepsilon l_i + o(\varepsilon\,|l|) \\ &= \sum_{i=1}^{n} A_i \varepsilon l_i + o(\varepsilon\,|l|) \\ &= A\varepsilon l + o(\varepsilon\,|l|) \end{aligned}$$

de donde obtenemos la conclusión deseada. ■

De forma totalmente análoga al caso finito, dados $v_1, ..., v_n$ en $\mathcal{U}$ y $\tau_1, ..., \tau_n$ en $[t_0, +\infty)$ puntos de continuidad de u^*, construiremos una matriz M y una aplicación F que verifiquen las hipótesis del lema 2.4.1 de la Parte 1, de manera que dado $r \in \mathbb{R}^m_{++}$ tal que $Mr = 0$, vamos a poder definir $(l_1, ..., l_n)$ tal que la ε-perturbación que determinan sea admisible. Notamos que en la presente construcción $v_1, ..., v_n$ en $\mathcal{U}$ y $\tau_1, ..., \tau_n$ en $[t_0, +\infty)$ estarán siempre fijos.

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que

$$\begin{aligned} &\phi_{2j}\left(X^*\right) = 0 \text{ , para } j = 1, ..., q \text{ ,} \\ &\phi_{2j}\left(X^*\right) < 0 \text{ , para } j = q+1, ..., k_2. \end{aligned}$$

Sean $B \in \mathbb{R}^{(k_1+k_2)\times(n+k_2)}$ la matriz dada por

$$B = \begin{pmatrix} D_x\phi_1\left(X^*\right) A & 0_{k_1\times k_2} \\ D_x\phi_2\left(X^*\right) A & I_{k_2\times k_2} \end{pmatrix}$$

y M la submatriz de B que se obtiene de suprimir las últimas $k_2 - q$ filas y columnas y supongamos que $\operatorname{rg}(M) = k_1 + q$. Sea $K = \left\{Mr : r \in \mathbb{R}^{n+q}_+\right\}$ el cono convexo cerrado de $\mathbb{R}^{k_1+q}$. Para poder definir una clase de pares admisibles $\{x, u\}$, para cada $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ definimos la aplicación

$$F_\varepsilon : Q^{n+q}_+(\varepsilon) \to \mathbb{R}^{k_1+q}$$

de la siguiente manera: dados $\xi \in Q_+^n(\varepsilon)$ y $\gamma \in Q_+^q(\varepsilon)$, consideramos la ε-perturbación con

$$\varepsilon l_i = \xi_i$$

y $x\,(t)$ la solución de (4.1) que verifica (4.3); luego

$$\begin{aligned} (F_\varepsilon)_j\,(\xi,\gamma) &= (\phi_1)_j\,(X) \text{ para } j = 1,\ldots,k_1, \\ (F_\varepsilon)_{k_1+j}\,(\xi,\gamma) &= (\phi_2)_j\,(X) + \gamma_j \text{ para } j = 1,\ldots,q. \end{aligned}$$

De la definición de F_ε y de (5.5) tenemos que $F_\varepsilon(0) = 0$ y $DF_\varepsilon(0) = M$. Para aplicar el lema 2.4.1 resta probar que F_ε es continua y fuertemente diferenciable en 0. Para eso procedemos en forma análoga al lema 5.2.1. En este caso, dadas dos ε-perturbaciones diferentes tenemos dos estados diferentes x_1 y x_2. Por lo tanto, si $t > t_1$

$$x_2(t) - x_1(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i(t)\varepsilon d_i + \rho(l^1,l^2)o(\varepsilon)\,|d|$$

donde $\lim_{(l^1,l^2)\to(0,0)} \rho\left(l^1,l^2\right) = 0$, $d_i = \left|l_i^2 - l_i^1\right|$ para $i = 1,...,n$ y $d = (d_1,...,d_n)$ (Ver Apéndice B). Luego, tomando limíte cuando $t \to +\infty$ deducimos que

$$X_2 - X_1 = \sum_{i=1}^{n} A_i\varepsilon d_i + \rho(l^1,l^2)o(\varepsilon)\,|d|$$

lo cual implica que

$$\phi_i\,(X_2) - \phi_i\,(X_1) = D_x\phi_i\,(X^*)\,A\varepsilon d + \rho(l^1,l^2)o(\varepsilon)\,|d|$$

para $i = 1, 2$.

Entonces, siendo ϕ_1 y ϕ_2 funciones de clase C^1 tenemos en forma análoga al caso horizonte finito que F_ε es continua y fuertemente diferenciable en 0.

Capítulo 6

Demostración del Teorema

6.1 Resultado previo

Lema 6.1.1 *Bajo las hipótesis del teorema 4.2.2, para cualquier ε-perturbación admisible, existe* $(\mu_1, \mu_2, \alpha) \in \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}_+^{k_2} \times \mathbb{R}_+$, $(\mu_1, \mu_2, \alpha) \neq (0, 0, 0)$ *tal que*

$$H(\tau_i, v_i) < H(\tau_i, u^*(\tau_i))$$

para $i = 1, ..., n$ *y se verifica la condición de transversalidad* (4.7)*.*

Demostración. Vamos a considerar dos posibles casos:

1. Si $0 \notin \mathrm{int}(K)$, entonces existe $(\mu_1, \eta) \in \mathbb{R}^{k_1+q}$, $(\mu_1, \eta) \neq (0, 0)$ tal que para todo $v \in K$ tenemos $(\mu_1, \eta)v \geq 0$. Si tomamos $\mu_2 = (\eta, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^{k_2}$ y $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, obtenemos

$$\mu B \geq 0.$$

Definimos

$$\lambda = -\mu_1 D_x \phi_1(X^*) - \mu_2 D_x \phi_2(X^*)$$

y $\alpha = 0$, de donde deducimos que

$$H(\tau_i, v_i) \leq H(\tau_i, u^*(\tau_i))$$

para todo $i = 1, ..., n$, y la condición de transversalidad

$$(\mu_2)_j (\phi_2)_j (X^*) = 0 \qquad \text{para todo } j = 1, ..., k_2.$$

2. Si $0 \in \operatorname{int}(K)$, entonces $K = \mathbb{R}^{k_1+q}$ y $\operatorname{rank}(M) = k_1 + q$.

   Fijado $r \in \mathbb{R}^{n+q}_{++}$ tal que $Mr = 0$, y dada F_ε como antes, existen $\eta > 0$ suficientemente pequeño y $\theta : [0, \eta] \to \mathbb{R}^{n+q}_{+}$ tal que si $s \in (0, \eta]$ entonces $\theta(s) \in \mathbb{R}^{n+q}_{++}$ y $F_\varepsilon(\theta(s)) = 0$. Tomando

$$\varepsilon l_i = \theta_i(s)$$

la ε-perturbación de $u^*(t)$ resulta admisible. Luego, siendo (x^*, u^*) óptimo tenemos que

$$\int_{t_0}^{+\infty} L(t, x^*(t), u^*(t))dt \geq \int_{t_0}^{+\infty} L(t, x(t), u(t))dt. \tag{6.1}$$

Si procedemos en forma similar a la proposición 5.2.3 tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} \delta L(\tau_i, v_i)\varepsilon l_i + \int_{[t_0,+\infty)\setminus UI_i} L_x(t, x^*(t), u^*(t))\delta x(t)dt + o(\varepsilon) \leq 0. \tag{6.2}$$

Usaremos la misma notación que en el lema (3.1.1) de la primera parte. En el segundo término, reemplazamos $\delta x(t)$ por la ecuación (5.3) en cada intervalo Q_k^{k+1} y usamos que $|I_k| = \varepsilon l_k$

$$\int_{[t_0,+\infty)\setminus UI_i} [L_x(t, x^*(t), u^*(t))]\,\delta x(t)dt$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} L_x(t) \left[\sum_{j=1}^{k} \int_{\tau_j}^{t} R(t,s)\delta f(s, \tau_j, v_j)ds + \delta f(t, \tau_j, v_j) \right] \varepsilon l_j dt$$
$$+ o(\varepsilon)$$

donde $\tau_{n+1} = +\infty$. Haciendo el cambio en las sumas tenemos

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} L_x(t) \left[\int_{\tau_j}^{t} R(t,s)\delta f(s, \tau_j, v_j)ds + \delta f(t, \tau_j, v_j) \right] \varepsilon l_j dt$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \left\{ \int_{\tau_j}^{+\infty} L_x(t) \left[\int_{\tau_j}^{t} R(t,s)\delta f(s, \tau_j, v_j)ds + \delta f(t, \tau_j, v_j) \right] dt \right\} \varepsilon l_j.$$

Si cambiamos el orden de integración, obtenemos

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{\int_{\tau_j}^{+\infty}\int_{\tau_j}^{t}L_x(t)R(t,s)\delta f(s,\tau_j,v_j)dsdt+\int_{\tau_j}^{+\infty}L_x(t)\delta f(t,\tau_j,v_j)dt\right\}\varepsilon l_j$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\left\{\int_{\tau_j}^{+\infty}\left[\int_{s}^{+\infty}L_x(t)R(t,s)dt+L_x(s)\right]\delta f(s,\tau_j,v_j)ds\right\}\varepsilon l_j$$

y utilizando que $w^*(t)$ es la solución de la ecuación integral

$$w(s)=\int_s^{+\infty}w(t)f_x(t,s)dt+L_x(s)$$

es decir

$$w^*(s)=\int_s^{+\infty}L_x(t,x^*(t),u^*(t))R(t,s)dt+L_x(s,x^*(s),u^*(s))$$

se tiene que

$$\int_{[t_0,+\infty)\setminus UI_i}L_x\left(t\right)\delta x(t)dt=\sum_{i=1}^{n}\left\{\int_{\tau_i}^{+\infty}w^*(s)\delta f(s,\tau_i,v_i)ds\right\}\varepsilon l_i+o(\varepsilon).$$

Luego, multiplicando por $\alpha>0$, la expresión (6.2) se escribe como

$$0\le-\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha\delta L(\tau_i,v_i)+\int_{\tau_i}^{+\infty}\alpha w^*(s)\delta f(s,\tau_i,v_i)ds\right)\varepsilon l_i+o(\varepsilon).$$

Definimos el vector $h\in\mathbb{R}^{n+q}$ de la siguiente manera: para $j=1,...,n$,

$$h_j=-\alpha\delta L(\tau_j,v_j)-\int_{\tau_j}^{+\infty}\alpha w^*(s)\delta f(s,\tau_j,v_j)ds$$

y para $j=n+1,...,n+q$

$$h_j=0.$$

Entonces, tenemos que

$$0\le h\theta(s)$$

para todo $s\in[0,\eta]$, y como $\theta(s)=sr+o(s)$ podemos concluir que

$$0\le hr.$$

Por último, por las condiciones de Kuhn Tucker (ver [22]), existe $(\mu_1, \nu) \in \mathbb{R}^{k_1+q}$ tal que $h + (\mu_1, \nu) M \geq 0$. Tomando $\mu_2 = (\nu, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^{k_2}$ y λ como antes, tenemos que

$$H(\tau_i, v_i) \leq H(\tau_i, u^*(\tau_i))$$

para $i = 1, ..., n$ y la condición de transversalidad (4.7).

■

6.2 Demostración del Resultado General

Demostración. La demostración es totalmente análoga a la hecha para el caso horizonte finito sólo que habrá que reemplazar t_1^* por $\lim_{t_1^* \to +\infty}$.

Dado un par óptimo (x^*, u^*), definimos las aplicaciones

$$\Gamma_1 : [t_0, +\infty) \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$$
$$\Gamma_2 : [t_0, +\infty) \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^N$$

como sigue

$$\Gamma_1(t, v) = \delta L(t, v) + \int_t^{+\infty} w^*(r) \delta f(r, t, v) dr$$
$$\Gamma_2(t, v) = \lim_{s \to +\infty} \delta f(s, t, v) + \lim_{s \to +\infty} \int_t^s R(s, r) \delta f(r, t, v) dr.$$

Ahora definimos como antes $\Gamma(t, v) = (\Gamma_1(t, v), \Gamma_2(t, v)) \in \mathbb{R}^{N+1}$ y

$\mathcal{G} = \{\Gamma(t, v)$ con $t \in [t_0, +\infty)$ punto de continuidad de $u^*, v \in \mathcal{U}\} \subset \mathbb{R}^{N+1}$.

La demostración sigue igual al caso horizonte finito sólo que en este caso se define

$$H_n(t, v) = \alpha_n L(t, x^*(t), v) + \lambda_n \lim_{s \to +\infty} f(s, t, x^*(t), v) + \int_t^{+\infty} z_n^*(s) f(s, t, x^*(t), v) ds$$

con $\lambda_n = -\mu_n^1 D_x \phi_1(X^*) - \mu_n^2 D_x \phi_2(X^*)$ y $z_n^*(s) = \alpha_n w^*(s) + \lambda_n \lim_{t \to +\infty} R(t, s)$ y la condición de transversalidad:

$$\left(\mu_n^2\right)_j (\phi_2)_j (X^*) = 0$$

para todo $j = 1, ..., k_2$. ■

6.3 Resultado sin restricciones y caso diferencial

Supongamos que no se dan restricciones del estado en el infinito ($k_1 = k_2 = 0$), es decir se quiere resolver el problema de maximizar la funcional (4.2) entre todos los pares que verifiquen solamente la ecuación integral (4.1).

Es fácil ver del desarrollo hecho anteriormente que en este caso no necesitaremos las hipótesis de límites. Es decir, no hará falta pedir que exista $\lim_{t\to+\infty} f(t,s,x,u)$ (3a) ni que exista $\lim_{t\to+\infty} R(t,s)$ (4b). Además resultará $\lambda = 0, \alpha > 0$ y por lo tanto

$$H(t,u) = \alpha L(t, x^*(t), u) + \alpha \int_t^{+\infty} w^*(s) f(s,t,x^*(t),u)ds$$

pudiendo tomar $\alpha = 1$ sin pérdida de generalidad.

Si además suponemos que f no depende de su primer coordenada, con lo cual estaríamos en el caso diferencial, se obtiene el multiplicador $\lambda(t) = \lambda + \int_t^{+\infty} w^*(s)ds$ que en este caso nos da la conocida condición de transversalidad $\lim_{t\to+\infty} \lambda(t) = 0$.

6.4 Controles Medibles Lebesgue

Nuevamente queremos dar un resultado para cuando los controles son funciones medibles Lebesgue. Seguiremos las mismas ideas que en el caso finito.

Consideramos E^n un espacio Euclídeo $n-$ dimensional, el intervalo $I = [t_0, +\infty)$ fijo en $\mathbb{R}$ y $\mathcal{U} \subset E^m$ cerrado. Asumimos $g : I \to E^N$ continua; $h : I \times I \times E^N \to E^N$ continua con derivadas parciales de primer orden respecto de x continuas, $G : I \times I \times E^N \to E^{N\times r}$ una matriz de $N \times r$ cuyas entradas (G_{ij}) son continuas y tienen derivadas de primer orden respecto de x continuas y $k : I \times E^N \times \mathcal{U} \to E^r$ continua con derivadas parciales de primer orden con respecto a x continuas. Además, la siguiente condición debe satisfacerse: para todo compacto $[t_0, t_1] \times S \subset I \times E^N$, existen constantes K y M tales que

$$|k(t,x,u)| + |k_x(t,x,u)| + |L(t,x,u)| + |L_x(t,x,u)| \leq K$$

para todo $(t, x, u) \in [t_0, t_1] \times S \times \mathcal{U}$, donde k_x es la matriz de las primeras derivadas parciales de k con respecto a x y

$$|h(t, s, x)| + |h_x(t, s, x)| + |G(t, s, x)| + |G_x(t, s, x)| \leq M$$

para todo $t \geq t_0$, $(s, x) \in [t_0, t_1] \times S$.

Definimos la función $f : I \times I \times E^N \times \mathcal{U} \to E^N$ como antes

$$f(t, s, x, u) = h(t, s, x) + G(t, s, x)k(s, x, u).$$

Luego, tenemos que existe una constante C tal que

$$|f(t, s, x, u)| + |f_x(t, s, x, u)| \leq C$$

para todo $t \geq t_0, (s, x) \in [t_0, t_1] \times S$ y $u \in \mathcal{U}$.

Dado un par (x, u) lo llamaremos admisible si las funciones $\{x, u\} : I \to E^{N+m}$ son tales que x es continua en I, u es medible Lebesgue, satisfacen la ecuación integral (4.1) en I, la integral impropia (4.2) es finita, el límite (4.3) existe y se verifican las restricciones (4.4) y (4.5).

Si (x^*, u^*) es un par óptimo, definimos las $\varepsilon-$perturbaciones de u^* exactamente igual al caso finito, es decir en $\tau_1, ..., \tau_n$ puntos regulares de las funciones

$$V(t, s, x^*(s), u^*(s))$$

para todo $t \in I$.

Con las mismas hipótesis que en la Sección 5.2 y las dadas encima en lugar de H3)b) vamos a probar el teorema 4.2.2.

Sólo mencionaremos algunas consideraciones necesarias para probar la proposición 4.3.3, todas las afirmaciones del Capítulo 6 y el apéndice B. Estas son: si tomamos el compacto $K = [t_0, t_1] \times Y$ tenemos las acotaciones necesarias de f y f_x. Además observemos el hecho de que τ_i es punto regular de

$$f(t, s, x(s), v_i) - f(t, s, x^*(s), u^*(s))$$

y de

$$L(t, x(t), v_i)) - L(t, x^*(t), u^*(t)).$$

Por último notemos que en lugar de la hipótesis H3)b) en algunos casos podemos usar que el conjunto $(t, x^*(t))$ es compacto y por lo tanto

$$|f(s, t, x^*(t), u)|$$

está acotado para todo $s \geq t_0$ y $u \in \mathcal{U}$.

Finalmente, para probar el teorema 4.2.2 seguiremos las mismas ideas expuestas para el caso de horizonte finito. Es decir, definimos el conjunto $\mathcal{G} \subset E^{N+1}$ como la imagen de la función $\Gamma(\tau, v)$ con $\tau \in [t_0, +\infty)$ punto regular de $V(t, s, x^*(s), u^*(s))$ para todo $t \in [t_0, +\infty)$ y $v \in \mathcal{U}$ de donde se prueba el resultado deseado.

6.5 Funcional de tipo Mayer

Si ahora quisiéramos maximizar una funcional de tipo Mayer

$$\phi_0(X) \tag{6.3}$$

en lugar de la funcional (4.2), deberíamos proceder en forma análoga a lo hecho en el Capítulo 5 y en las secciones 6.1 y 6.2. Supogamos que $\phi_0 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^1. Se prueba el siguiente teorema:

Teorema 6.5.1 *Sea $\{x^*, u^*\}$ un par óptimo en la clase de pares admisibles donde $\lim_{t\to+\infty} x^*(t) = X^*$. Luego, existe $(\mu_1, \mu_2, \alpha) \in \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}_+^{k_2} \times \mathbb{R}_+$, $(\mu_1, \mu_2, \alpha) \neq (0, 0, 0)$ tal que $\forall t \in [t_0, +\infty)$ punto de continuidad de u^* se tiene que*

$$H(t, u^*(t)) = \max_{u \in \mathcal{U}} H(t, u)$$

donde $H(t, u)$ está definido como

$$H(t, u) = \lambda \lim_{s\to+\infty} f(s, t, x^*(t), u) + \int_t^{+\infty} z^*(s) f(s, t, x^*(t), u) ds$$

con $\lambda = \alpha D_x\phi_0(X^*) - \mu_1 D_x\phi_1(X^*) - \mu_2 D_x\phi_2(X^*)$ *y* $z^*(s) = \lambda \lim_{t\to+\infty} R(t,s)$.

Además, se verifica la condición de transversalidad

$$(\mu_2)_j (\phi_2)_j (X^*) = 0 \qquad \forall j = 1,...,k_2. \tag{6.4}$$

Demostración. La demostración es totalmente análoga. Comencemos observando que la proposición 4.3.3 se prueba de la misma forma si consideramos $\alpha = 0$ en dicha demostración. Por otro lado, no hará falta incluir la proposición 5.2.3. Para probar el análogo al lema 6.1.1 sólo hace falta notar que la ecuación (6.1) debe ser reemplazada por

$$\phi_0(X) \leq \phi_0(X^*)$$

y usando el mismo desarrollo que en las ecuaciones (5.5) tenemos que:

$$0 \geq D_x\phi_0(X^*) Al\varepsilon + o(\varepsilon|l|).$$

Luego, multiplicamos por $\alpha > 0$ y definimos el vector $h \in \mathbb{R}^{n+q}$ de la siguiente manera: para $j = 1,...,n$,

$$h_j = -\left(D_x\phi_0(t_1^*, x^*(t_1^*)) A\right)_j$$

y para $j = n+1,...,n+q$

$$h_j = 0.$$

Siguiendo igual que la otra demostración, obtenemos que

$$hr \geq 0$$

y por lo tanto existe $(\mu_1, \nu) \in \mathbb{R}^{k_1+q}$ tal que $h + (\mu_1, \nu) M \geq 0$. Tomando $\mu_2 = (\nu, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^{k_2}$ y λ como antes, tenemos que

$$H(\tau_i, v_i) \leq H(\tau_i, u^*(\tau_i))$$

para $i = 1,...,n$ y la condición de transversalidad (6.4).

Para terminar con la demostración del teorema, observemos tan sólo que para este nuevo Hamiltoniano H

$$H(\tau, v) - H(\tau, u^*(\tau)) = \lambda\Gamma_2(\tau, v),$$

donde Γ_2 es la misma que antes, pudiendo reproducir la demostración del teorema 4.2.2 como en la sección 6.2. ■

6.6 Ejemplo

A continuación mostraremos una aplicación del resultado obtenido en la segunda parte.

Se quiere encontrar la solución óptima de

$$\max_{u(t)\in U} \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(x(t) - u^2(t)\right) dt \tag{6.5}$$

sujeto a

$$x(t) = \int_0^t \left[\frac{1}{2}e^{-t}e^{-s}x(s) - u^2(s)\right] ds + e^{-t} \tag{6.6}$$

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0, \qquad u(t) \in \mathbb{R}.$$

Si definimos $\phi(x) = x$, tenemos que $\phi(\lim_{t\to+\infty} x(t)) = 0$ y aplicando el teorema de horizonte infinito sabemos que existe $(\mu, \alpha) \neq (0, 0)$ tal que $\lambda = -\mu$, $\alpha \geq 0$ y $\forall t \in [0, +\infty)$ punto de continuidad de u^* se tiene que

$$H(t, u^*(t)) = \max_{u\in\mathbb{R}} H(t, u)$$

donde $H(t, u)$ está definido como

$$H(t, u) = \alpha e^{-t}\left(x(t) - u^2\right) + \lambda(-u^2) + \int_t^{+\infty} z^*(s)\left[\frac{1}{2}e^{-t}e^{-s}x(t) - u^2\right] ds$$

con $z^*(s) = \alpha w^*(s) + \lambda \lim_{t\to+\infty} R(t, s)$ y w^* solución de la ecuación integral

$$w(t) = \int_t^{+\infty} w(s)f_x(s, t, x^*(t), u^*(t))ds + L_x(t, x^*(t), u^*(t)).$$

Siendo $f_x(t,s,x,u) = \frac{1}{2}e^{-t}e^{-s}$ obtenemos que $R(t,s) = \frac{1}{2}e^{-t}e^{-s}e^{\frac{e^{-2s}-e^{-2t}}{4}}$ y por lo tanto $\lim_{t\to+\infty} R(t,s) = 0$ y

$$w^*(t) = \int_t^{+\infty} e^{-s}R(s,t)ds + e^{-t} = e^{-t}e^{\frac{e^{-2t}}{4}}.$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
&\alpha e^{-t}\left(x^*(t) - u^2\right) + \lambda(-u^2) + \alpha\int_t^{+\infty} e^{-s}e^{\frac{e^{-2s}}{4}}\left[\frac{1}{2}e^{-t}e^{-s}x^*(t) - u^2\right]ds \\
&\leq \alpha e^{-t}\left(x^*(t) - [u^*(t)]^2\right) + \lambda(-[u^*(t)]^2) \\
&+ \alpha\int_t^{+\infty} e^{-s}e^{\frac{e^{-2s}}{4}}\left[\frac{1}{2}e^{-t}e^{-s}x^*(t) - [u^*(t)]^2\right]ds
\end{aligned}$$

que es equivalente a

$$\begin{aligned}
&-\left(\alpha e^{-t} + \lambda + \alpha\int_t^{+\infty} e^{-s}e^{\frac{e^{-2s}}{4}}ds\right)u^2 \\
&\leq -\left(\alpha e^{-t} + \lambda + \alpha\int_t^{+\infty} e^{-s}e^{\frac{e^{-2s}}{4}}ds\right)[u^*(t)]^2
\end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$ punto de continuidad de u^* y para todo $u \in \mathbb{R}$.

Supongamos ahora que existe algún $t \geq 0$ punto de continuidad de u^* tal que $A(t) = \alpha e^{-t} + \lambda + \alpha\int_t^{+\infty} e^{-s}e^{\frac{e^{-2s}}{4}}ds < 0$. Luego para ese t se tendría que

$$-A(t)u^2 \leq -A(t)[u^*(t)]^2$$

para todo $u \in \mathbb{R}$, es decir $u^2 \leq [u^*(t)]^2$ para todo $u \in \mathbb{R}$, lo cual es un absurdo. Luego $A(t) \geq 0$ para todo t punto de continuidad de u^*. Queremos probar ahora que $A(t) > 0$ para todo $t \geq 0$ punto de continuidad de u^*.

Supongamos que $\alpha = 0$, luego $\lambda \neq 0$ y como $A(t) = \lambda \geq 0$, resulta $\lambda > 0$. Ahora supongamos que $\alpha > 0$, siendo $A(t)$ una función estrictamente decreciente, continua y no negativa entonces no puede existir $t_0 \geq 0$ tal que $A(t_0) = 0$ y por ende $A(t) > 0$ de donde deducimos que

$$u^2 \geq [u^*(t)]^2$$

para todo $t \geq 0$ punto de continuidad de u^* y para todo $u \in \mathbb{R}$. Es decir, $u^*(t) = 0$ para esos valores de t.

A partir de aquí deducimos que la solución óptima x^* es aquella que verifica la ecuación integral

$$x^*(t) = \int_0^t \frac{1}{2} e^{-t} e^{-s} x^*(s) ds + e^{-t}$$

es decir

$$x^*(t) = \int_0^t R(t,s) e^{-s} ds + e^{-t} = e^{-t} e^{\frac{1-e^{-2t}}{4}}.$$

Parte III

Apéndice

Apéndice A

Ecuaciones de Volterra

A.1 Existencia y unicidad de solución

Una ecuación de Volterra de segundo tipo es una ecuación integral lineal de la forma

$$y(t) = g(t) + \int_a^t N(t,s)y(s)ds \tag{A.1}$$

donde g y N son funciones dadas e y es desconocida. A la función N se la llama núcleo.

Supongamos que g definida de un intervalo $[a,b]$ a $\mathbb{R}^n$ y N definida del triángulo $\Delta = \{(t,s)/a \leq s \leq t \leq b\}$ a $\mathbb{R}^{n\times n}$ son funciones continuas y supongamos que existe y solución de la ecuación de Volterra $(A.1)$, luego se tiene que

$$\begin{aligned}
y(t) &= g(t) + \int_a^t N(t,s)\left[g(s) + \int_a^s N(s,r)y(r)dr\right]ds \\
&= g(t) + \int_a^t N(t,s)g(s)ds + \int_a^t\int_a^s N(t,s)N(s,r)y(r)drds \\
&= g(t) + \int_a^t N(t,s)g(s)ds + \int_a^t\left[\int_r^t N(t,s)N(s,r)ds\right]y(r)dr \\
&= g(t) + \int_a^t R_1(t,s)g(s)ds + \int_a^t R_2(t,r)y(r)dr
\end{aligned}$$

donde

$$R_1(t,r) = N(t,r)$$
$$R_2(t,r) = \int_r^t N(t,s)R_1(s,r)ds.$$

Repitiendo este procedimiento obtenemos que

$$y(t) = g(t) + \sum_{k=1}^{K-1} \int_a^t R_k(t,s)g(s)ds + \int_a^t R_K(t,r)y(r)dr \tag{A.2}$$

donde los núcleos iterados R_k se calculan inductivamente como

$$R_k(t,r) = \int_r^t N(t,s)R_{k-1}(s,r)ds.$$

Sea M la cota superior del valor absoluto del núcleo $N(t,s)$ en el dominio Δ. Es fácil ver que

$$|R_1(t,s)| \leq M$$
$$|R_2(t,s)| \leq M^2 |t-s|$$
$$.......$$
$$|R_k(t,s)| \leq M^k \frac{|t-s|^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Si ahora llamamos m a la cota superior del valor absoluto de g en $[a,b]$, obtenemos que

$$\left| \int_a^t R_k(t,s)g(s)ds \right| \leq m \frac{M^k |t-a|^k}{k!}$$

y por lo tanto la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^t R_k(t,s)g(s)ds$$

es absolutamente convergente y el último término de la igualdad $(A.2)$ tiende a cero si $K \to +\infty$.

Luego, si existiera solución $y(t)$ de la ecuación de Volterra $(A.1)$ es única y viene dada por la fórmula

$$y(t) = g(t) + \int_a^t R(t,s)g(s)ds \tag{A.3}$$

donde

$$R(t,s) = \sum_{k=1}^{+\infty} R_k(t,s).$$

Esta función se llama la resolvente de la ecuación lineal de Volterra con núcleo N.

Finalmente es fácil ver que la función definida por la ecuación $(A.3)$ es continua y solución de la ecuación integral $(A.1)$ con lo cual se probó:

Teorema A.1.1 *Sean $g : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ y $N : \Delta \to \mathbb{R}^{n\times n}$ funciones continuas. Una ecuación de Volterra de segunda especie*

$$y(t) = g(t) + \int_a^t N(t,s)y(s)ds$$

tiene una única solución continua dada por la fórmula

$$y(t) = g(t) + \int_a^t R(t,s)g(s)ds$$

donde la resolvente es la serie convergente

$$R(t,s) = \sum_{k=1}^{+\infty} R_k(t,s).$$

A.2 Ecuación dual

Supongamos que ahora tenemos la ecuación integral dual

$$y(t) = g(t) + \int_t^b y(s)N(s,t)ds. \tag{A.4}$$

Observar que la ecuación anterior $(A.1)$ está en el espacio $\mathbb{R}^{n\times 1}$ mientras que la nueva ecuación $(A.4)$ está en el espacio $\mathbb{R}^{1\times n}$. Procediendo en forma equivalente al caso anterior obtenemos que esta ecuación tiene solución única continua dada por la fórmula

$$y(t) = g(t) + \int_t^b g(s)R(s,t)ds$$

donde R es la misma resolvente anterior. Esto último se debe a que si definimos los núcleos iterados para el caso dual

$$R_k^d(t,r) = \int_r^t R_{k-1}^d(t,s)N(s,r)ds$$

se tiene que

$$R_k(t,s) = R_k^d(t,s)$$

ya que cada uno es igual a integrar k veces el núcleo N y por lo tanto

$$R^d(t,s) = R(t,s).$$

A.3 Propiedades

Dados g y N como antes y R la resolvente de la ecuación lineal de Volterra de núcleo N, valen las siguientes igualdades

$$\int_r^t N(t,s)R(s,r)ds = \int_r^t R(t,s)N(s,r)ds = R(t,r) - N(t,r) \tag{A.5}$$

para todo $a \leq r \leq t \leq b$. La demostración de esta propiedad sale directamente de usar que $N(t,s)$ se escribe como una serie absolutamente convergente de los núcleos iterados R_k.

A.4 Caso infinito

Supongamos ahora que g está definida de un intervalo $[a,+\infty)$ a $\mathbb{R}^n$ y N de $\Delta = \{(t,s)/a \leq s \leq t\}$ a $\mathbb{R}^{n\times n}$. Consideramos la misma ecuación de Volterra $(A.1)$. Usando el resultado anterior para intervalos acotados, para cada $b > a$, se tiene que existe $y_b(t)$ solución única continua definida en $[a,b]$. Además si $b_1 > b_2$, por unicidad en $[a,b_1]$ se tiene que $y_{b_1} \equiv y_{b_2}$. Por lo tanto, existe $y(t)$ solución única continua definida en $[a,+\infty)$. Asimismo, dados $a \leq r \leq t$ fijos, usando la propiedad anterior para el caso finito tenemos que vale las igualdades $(A.5)$, lo cual junto con Fubini nos permite probar que

$$y(t) = g(t) + \int_t^{+\infty} g(s)R(s,t)ds \tag{A.6}$$

es la solución de la ecuación dual

$$y(t) = g(t) + \int_t^{+\infty} y(s)N(s,t)ds.$$

Observar que en este caso pediremos que g sea acotada por una función integrable y $R(t,s)$ también acotada por una función integrable en s para todo t de manera que la ecuación $(A.6)$ resultará convergente para todo t.

Apéndice B

Variación entre dos perturbaciones diferentes

En el presente Apéndice estudiaremos la variación entre dos $\varepsilon-$perturbaciones diferentes tanto para el caso finito como infinito. En el caso de horizonte finito nos interesa estudiar la diferencia

$$x_1(t_1) - x_2(t_2)$$

y para el caso de horizonte infinito

$$\lim_{t \to +\infty} x_1(t) - x_2(t).$$

Dados $v_1, ..., v_n$ en $\mathcal{U}$ y $\tau_1, ..., \tau_n$ en $[t_0, t_1^*]$ ó en $[t_0, +\infty)$ fijos, tomamos dos ε-perturbaciones diferentes. Llamamos x_j al estado asociado a la perturbación definida por los parámetros $l_1^j, ..., l_{n+1}^j$ para el caso horizonte finito y $l_1^j, ..., l_n^j$ para el caso horizonte infinito; y a los intervalos que éstos definen $I_1^j, ..., I_{n+1}^j$ para $j = 1, 2$. Por otro lado, definimos

$$\begin{aligned} K_i &= \left(I_i^1 \cap I_i^2\right) \\ J_i &= \left(I_i^1 \cup I_i^2\right) \backslash K_i \end{aligned}$$

para $i = 1, ..., n+1$,y t_1, t_2 los tiempos finales para el caso de horizonte finito. Observemos que J_i son los intervalos donde las perturbaciones u_1 y u_2 difieren.

Llamamos $d_i = \left| l_i^1 - l_i^2 \right|$ para $i = 1, ..., n$; $d_{n+1} = l_{n+1}^1 - l_{n+1}^2$; $d = (d_1, ..., d_n)$ y $\overline{d} = (d_1, ..., d_{n+1})$. Para el caso de horizonte finito, sin pérdida de generalidad asumimos que $t_1 < t_2$, en cuyo caso $l_{n+1}^1 < l_{n+1}^2$.

Comencemos viendo que la diferencia $x_1(t) - x_2(t)$ para todo t tiene orden $\varepsilon |d|$. Dado $t > t_0$, para algún k se tiene que

$$\begin{aligned} x_1(t) - x_2(t) &= \sum_{i=1}^{k} \int_{J_i} \left(f(t, s, x_1(s), u_1(s)) - f(t, s, x_2(s), u_2(s)) \right) ds \\ &+ \sum_{i=1}^{k} \int_{K_i} \left(f(t, s, x_1(s), v_i) - f(t, s, x_2(s), v_i) \right) ds \\ &+ \int_{[t_0, t] \setminus U\left(I_i^1 \cup I_i^2\right)} \left(f(t, s, x_1(s), u^*(s)) - f(t, s, x_2(s), u^*(s)) \right) ds \end{aligned}$$

Llamamos $\Omega_1(t)$, $\Omega_2(t)$ y $\Omega_3(t)$ al primer, segundo y tercer término respectivamente. Para el caso de horizonte finito, los dos términos $\Omega_2(t)$ y $\Omega_3(t)$ se comportan de la misma manera, siendo la diferencia marcada por la coordenada en x. Por lo tanto como f es continuamente diferenciable en la coordenada x, se tiene que existe una constante positiva M tal que

$$|\Omega_2(t) + \Omega_3(t)| \leq \int_{t_0}^{t} M \left| x_1(s) - x_2(s) \right| ds.$$

Para el caso de horizonte infinito, siendo los intervalos K_i acotados y contenidos en $[t_0, T_1]$ donde T_1 es tal que para todo $t \geq T_1$ entonces $t \notin U_{i=1}^{n} \left(I_i^1 \cup I_i^2 \right)$ y usando la hipótesis 3)b) tenemos que para cada i

$$\begin{aligned} &\left| \int_{K_i} \left(f(t, s, x_1(s), v_i) - f(t, s, x_2(s), v_i) \right) \right| ds \\ &\leq \int_{K_i} \left| f_x(t, s, \widetilde{x}(s), v_i) \right| \left| x_1(s) - x_2(s) \right| ds \\ &\leq M \int_{K_i} \left| x_1(s) - x_2(s) \right| ds \end{aligned}$$

donde $\widetilde{x}(s)$ es un punto intermedio entre x_1 y x_2. Para el tercer término usamos la hipótesis 3)c) y tenemos que

$$\left| \int_{[t_0,t]\setminus U\left(I_i^1 \cup I_i^2\right)} \left(f(t,s,x_1(s),u^*(s)) - f(t,s,x_2(s),u^*(s))\right) ds \right|$$
$$\leq \int_{[t_0,t]\setminus U\left(I_i^1 \cup I_i^2\right)} \psi_3(s) \left|x_1(s) - x_2(s)\right| ds.$$

Entonces, definimos la función integrable

$$\widetilde{\psi}(s) = \begin{cases} \psi_3(s) & \text{si} \quad s \in [t_0,+\infty) - UK_i \\ M & \text{si} \quad s \in UK_i \end{cases}$$

y tenemos que para el caso horizonte infinito

$$|\Omega_2(t) + \Omega_3(t)| \leq \int_{t_0}^{t} \widetilde{\psi}(s) \left|x_1(s) - x_2(s)\right| ds.$$

Por otro lado, tenemos que en el primer término es donde u_1 y u_2 son diferentes, pero siendo la medida de J_i igual a εd_i y como tanto para el caso horizonte finito como horizonte infinito (hipótesis 3)b))

$$|f(t,s,x_1(s),u_1(s)) - f(t,s,x_2(s),u_2(s))|$$

está acotado; se tiene que existe una constante positiva C tal que

$$|\Omega_1(t)| \leq C\varepsilon \left|d\right|.$$

Luego, usando Gronwall obtenemos que

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq C\varepsilon d e^{M(t_1 - t_0)}$$

para todo $t \in [t_0, t_1^*]$ para el caso de horizonte finito y

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq C\varepsilon \left|d\right| e^{\int_{t_0}^{+\infty} \widetilde{\psi}(s) ds}$$

para todo $t \in [t_0, +\infty)$ para el caso de horizonte infinito.

A continuación vamos a probar que si $t \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$ pero $t \notin \bigcup_{i=1}^{n+1} I_i^1 \cup I_i^2$, entonces

$$x_1(t) - x_2(t) = \sum_{i=1}^{j} \left[\int_{\tau_i}^{t} R(t,s)\delta f(s,\tau_i,v_i)ds + \delta f(t,\tau_i,v_i) \right] \varepsilon d_i + \rho(l^1,l^2)o(\varepsilon)\,|d| \tag{B.1}$$

donde $\lim_{(l^1,l^2)\to(0,0)} \rho\left(l^1,l^2\right) = 0$.

La demostración es totalmente análoga a la hecha en lema 2.3.1. Supongamos entonces que la igualdad de arriba vale para todo $k \leq j$, vamos a probar que vale para $j+1$. Sea $t \in [\tau_{j+1}, \tau_{j+2}]$ y $t \notin \cup_{i=1}^{n+1}\left(I_i^1 \cup I_i^2\right)$. Comencemos observando que si $\tau_{j+1} = \tau_{j+2}$ entonces $[\tau_{j+1}, \tau_{j+2}] = \emptyset$ y luego $(B.1)$ se verifica. Asumamos que $[\tau_{j+1}, \tau_{j+2}] \neq \emptyset$. Usamos la misma notación que en el lema 2.3.1

$$P_{j+1} = [t_0, \tau_{j+1}] \backslash \bigcup_{i=1}^{n+1} \left(I_i^1 \cup I_i^2\right)$$

$$Q_j^t = [\tau_j, t] \backslash \bigcup_{i=1}^{n+1} \left(I_i^1 \cup I_i^2\right).$$

Tomamos la siguiente partición de $[t_0,t] = \left(\bigcup_{i=1}^{j+1} J_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{j+1} K_i\right) \cup P_{j+1} \cup Q_{j+1}^t$ y calculamos

$$\int \left(f(t,s,x_1(s),u_1(s)) - f(t,s,x_2(s),u_2(s))\right) ds$$

en cada uno de esos intervalos.

Si $s \in J_i$, entonces

$$f(t,s,x_1(s),u_1(s)) - f(t,s,x_2(s),u_2(s)) = f(t,s,x_1(s),u^*(s)) - f(t,s,x_2(s),v_i)$$

ó

$$f(t,s,x_1(s),u_1(s)) - f(t,s,x_2(s),u_2(s)) = f(t,s,x_1(s),v_i) - f(t,s,x_2(s),u^*(s)).$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que vale la primera igualdad. Luego, como la medida del intervalo J_i es εd_i y $x_j(t) - x^*(t) = O(\varepsilon \left|l^j\right|)$

$$\int_{J_i} \left(f(t,s,x_1(s),u^*(s)) - f(t,s,x^*(s),u^*(s))\right) ds = \rho(l^1,l^2) o(\varepsilon) \left|d_i\right|$$

$$\int_{J_i} \left(f(t,s,x_2(s),v_i) - f(t,s,x^*(s),v_i)\right) ds = \rho(l^1,l^2) o(\varepsilon) \left|d_i\right|$$

con $\lim_{(l^1,l^2)\to(0,0)} \rho\left(l^1,l^2\right) = 0$ (a partir de acá, cada vez que aparezca $\rho\left(l^1,l^2\right)$ tendrá límite cero).

Por lo tanto, siendo τ_i un punto de continuidad de u^* deducimos que

$$\begin{aligned}
&\int_{J_i} \left(f(t,s,x_1(s),u^*(s)) - f(t,s,x_2(s),v_i)\right) ds \\
&= \int_{J_i} \left(f(t,s,x^*(s),u^*(s)) - f(t,s,x^*(s),v_i)\right) ds + \rho(l^1,l^2) o(\varepsilon) \left|d_i\right| \\
&= \delta f(t,\tau_i,v_i)\varepsilon d_i + \rho(l^1,l^2) o(\varepsilon) |d_i|.
\end{aligned}$$

Si $s \in K_i$, entonces

$$f(t,s,x_1(s),u_1(s)) - f(t,s,x_2(s),u_2(s)) = f(t,s,x_1(s),v_i) - f(t,s,x_2(s),v_i)$$

y

$$\int_{K_i} (f(t,s,x_1(s),v_i) - f(t,s,x_2(s),v_i)) ds = \rho(l^1,l^2) o(\varepsilon) \left|d\right|.$$

Por último, si $s \in P_{j+1} \cup Q_{j+1}^t$

$$f(t,s,x_1(s),u_1(s)) - f(t,s,x_2(s),u_2(s)) = f(t,s,x_1(s),u^*(s)) - f(t,s,x_2(s),u^*(s)),$$

siendo $x_1(s) - x_2(s) = O(\varepsilon \left|d\right|)$ y usando que f es continuamente diferenciable en la variable x para el caso de horizonte finito y la hipótesis 5) para horizonte infinito, se obtiene que

$$\begin{aligned}
&\int_{P_{j+1}} \left(f(t,s,x_1(s),u^*(s)) - f(t,s,x_2(s),u^*(s))\right) ds \\
&= \int_{P_{j+1}} f_x(t,s,x^*(s),u^*(s)) \left(x_1(s) - x_2(s)\right) ds + \rho(l^1,l^2) o(\varepsilon) \left|d\right|.
\end{aligned}$$

Similarmente al último término, podemos escribir la integral en el intervalo Q_{j+1}^t. Luego, tenemos que

$$\begin{aligned}
x_1(t) - x_2(t) &= \int_{t_0}^{t} \left(f(t,s,x_1(s),u_1(s)) - f(t,s,x_2(s),u_2(s))\right) ds \\
&= \sum_{i=1}^{j+1} \delta f(t,\tau_i,v_i)\varepsilon d_i + \int_{P_{j+1}} f_x(t,s)\left(x_1(s) - x_2(s)\right) ds \\
&+ \int_{Q_{j+1}^t} f_x(t,s)\left(x_1(s) - x_2(s)\right) ds + \rho(l^1,l^2)o(\varepsilon)\left|d\right|.
\end{aligned}$$

A partir de aquí la demostración se desarrolla totalmente análoga al lema 2.3.1 para el caso de horizonte finito y al lema 5.2.1 para el caso horizonte infinito.

Para el caso horizonte finito todavía nos queda ver cómo reescribir

$$x_1(t_1) - x_2(t_2).$$

Habíamos asumido que $t_1 < t_2$, por lo tanto podemos escribir

$$x_1(t_1) - x_2(t_2) = x_1(t_1) - x_2(t_1) + x_2(t_1) - x_2(t_2).$$

Por lo probado anteriormente, tenemos que

$$\begin{aligned}
x_1(t_1) - x_2(t_1) &= \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{\tau_i}^{t_1} R(t_1,s)\delta f(s,\tau_i,v_i)ds + \delta f(t_1,\tau_i,v_i)\right]\varepsilon d_i \\
&+ \rho(l^1,l^2)o(\varepsilon)\left|d\right| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{\tau_i}^{t_1^*} R(t_1^*,s)\delta f(s,\tau_i,v_i)ds + \delta f(t_1^*,\tau_i,v_i)\right]\varepsilon d_i \\
&+ \rho(l^1,l^2)o(\varepsilon)\left|d\right|. \qquad \text{(B.2)}
\end{aligned}$$

La segunda igualdad vale ya que f es continua en su primera variable y siendo f_x continua en la primera variable, se tiene que $R(t,s)$ también lo es y $R(t_1^*,s)\delta f(s,\tau_i,v_i)$ es acotado.

Resta ahora estudiar la diferencia

$$
\begin{aligned}
x_2(t_2) - x_2(t_1) = g(t_2) + &\int_{t_0}^{t_2} f(t_2, s, x_2(s), u_2(s))ds \\
&- g(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} f(t_1, s, x_2(s), u_2(s))ds \\
&= g(t_2) - g(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f(t_2, s, x_2(s), u_2(s))ds \\
&+ \int_{t_0}^{t_1} \left(f(t_2, s, x_2(s), u_2(s)) - f(t_1, s, x_2(s), u_2(s))\right) ds.
\end{aligned}
$$

Analicemos cada término por separado. Siendo g fuertemente derivable en t_1^*, tenemos que

$$
\begin{aligned}
g(t_2) - g(t_1) &= g^{'}(t_1^*)(t_2 - t_1) + \rho(l_{n+1}^1, l_{n+1}^2)o(\varepsilon)\left|d_{n+1}\right| \\
&= g^{'}(t_1^*)\varepsilon\left(-d_{n+1}\right) + \rho(\overline{l^1}, \overline{l^2})o(\varepsilon)\left|d_{n+1}\right|.
\end{aligned}
$$

El segundo término se analiza igual que los intervalos J_i. Para eso, recordemos que consideramos u^* definida en $[t_0, b]$ extendiéndola constantemente igual a $u^*(t_1^*)$ en $[t_1^*, b]$ y x^* definida en $\left[t_0, t_1^* + \frac{\eta}{2}\right]$. Por la elección de ε_0, tenemos entonces que x^* está definida en el intervalo $[t_0, t_2]$. Para $s \in [t_1, t_2]$,

$$
f(t_2, s, x_2(s), u_2(s)) = f(t_2, s, x_2(s), u^*(s)).
$$

Luego independientemente de que t_1^* sea mayor o menor que t_2 y siendo f continuamente diferenciable en variables t y x,

$$
\int_{t_1}^{t_2} f(t_2, s, x_2(s), u_2(s))ds = \int_{t_1}^{t_2} f(t_1^*, s, x^*(s), u^*(s))ds + \rho\left(\overline{l^1}, \overline{l^2}\right)o(\varepsilon)\left|d_{n+1}\right|,
$$

además siendo t_1^* un punto de continuidad de u^* se tiene que

$$
\int_{t_1}^{t_2} f(t_2, s, x_2(s), u_2(s))ds = f(t_1^*, t_1^*, x^*(t_1^*), u^*(t_1^*))(t_2 - t_1) + \rho\left(\overline{l^1}, \overline{l^2}\right)o(\varepsilon)\left|d_{n+1}\right|.
$$

Para el último término, usamos nuevamente que f_t es una función continua. Luego

$$
f(t_2, s, x_2(s), u_2(s)) - f(t_1, s, x_2(s), u_2(s)) - f_t(t_1^*, s, x_2(s), u_2(s))(t_2 - t_1) = o(\varepsilon d_{n+1})
$$

de donde obtenemos que

$$\int_{t_0}^{t_1} (f(t_2, s, x_2(s), u_2(s)) - f(t_1, s, x_2(s), u_2(s)))\, ds$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} f_t(t_1^*, s, x_2(s), u_2(s))(t_2 - t_1) ds + o(\varepsilon d_{n+1}).$$

Siendo

$$\int_{I_i^2} (f_t(t_1^*, s, x_2(s), u_2(s)) - f_t(t_1^*, s, x_2(s), u^*(s)))\,(t_2 - t_1) ds = \rho\left(l_i^2\right) o(\varepsilon)\, |d_{n+1}|$$

y $u_2(s) = u^*(s)$ para todo $s \notin \bigcup_{i=1}^n I_i^2$, tenemos que

$$\int_{t_0}^{t_1} f_t(t_1^*, s, x_2(s), u_2(s))(t_2 - t_1) ds$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} f_t(t_1^*, s, x_2(s), u^*(s))(t_2 - t_1) ds + \rho\left(l^2\right) o(\varepsilon)\, |d_{n+1}|\,.$$

Nuevamente usamos que f_t es continua para deducir que

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1} f_t(t_1^*, s, x_2(s), u^*(s))(t_2 - t_1) ds &= -\int_{t_0}^{t_1} f_t(t_1^*, s, x^*(s), u^*(s))\varepsilon d_{n+1} ds \\ &\quad + \rho\left(l^2\right) o(\varepsilon)\, |d_{n+1}| \\ &= -\int_{t_0}^{t_1^*} f_t(t_1^*, s, x^*(s), u^*(s))\varepsilon d_{n+1} ds \\ &\quad + \rho\left(\overline{l_1}, \overline{l_2}\right) o(\varepsilon)\, |d_{n+1}|\,.\end{aligned}$$

De todo lo probado anteriormente se desprende que

$$\begin{aligned}&x_2(t_2) - x_2(t_1) \\ &= -\left(g^{'}(t_1^*) + f(t_1^*, t_1^*, x^*(t_1^*), u^*(t_1^*)) + \int_{t_0}^{t_1^*} f_t(t_1^*, s, x^*(s), u^*(s)) ds\right)\varepsilon d_{n+1} \\ &+ \rho\left(\overline{l_1}, \overline{l_2}\right) o(\varepsilon)\, |d_{n+1}|\,.\end{aligned}$$

Luego, juntando los dos términos de $x_1(t_1) - x_2(t_2)$ concluimos que

$$x_1(t_1) - x_2(t_2) = \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon d_i + P^* \varepsilon d_{n+1} + \rho\left(\overline{l_1}, \overline{l_2}\right) o\left(\varepsilon\right) \left|\overline{d}\right|.$$

Apéndice C

Hipótesis alternativas para la Resolvente

Demostración de la Proposición 4.3.1

Probaremos por inducción en n que $|R_n(t,s)| \leq \psi^*(s)||\psi^*||_1^{n-1}$,

$$|R_1(t,s)| = |f_x(t,s)| \leq \psi^*(s)$$
$$|R_n(t,s)| \leq \int_s^t \psi^*(r)\psi^*(s)||\psi^*||_1^{n-2}dr \leq \psi^*(s)||\psi^*||_1^{n-1}.$$

Luego
$$|R(t,s)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |R_n(t,s)| \leq \psi^*(s) \sum_{n=0}^{+\infty} ||\psi^*||_1^n = K\psi^*(s).$$

Por otro lado, si $t_2 > t_1$ probaremos por inducción en n que

$$|R_n(t_1,s) - R_n(t_2,s)| \underset{t_1,t_2 \to +\infty}{\to} 0.$$

Por hipótesis

$$|R_1(t_1,s) - R_1(t_2,s)| = |f_x(t_1,s) - f_x(t_2,s)|$$

tiende a cero si $t_{1,}t_2$ tienden a infinito y

$$
\begin{aligned}
|R_n(t_1,s) - R_n(t_2,s)| &\leq \int_s^{t_1} |f_x(t_1,r) - f_x(t_2,r)||R_{n-1}(r,s)|dr \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} |f_x(t_2,r)||R_{n-1}(r,s)|dr \\
&\leq \psi^*(s) \int_s^{t_1} |f_x(t_1,r) - f_x(t_2,r)|dr \\
&+ \psi^*(s) \int_{t_1}^{t_2} \psi^*(r)dr
\end{aligned}
$$

también tiende a cero si $t_{1,}t_2$ tienden a infinito.

Además, dado $\rho > 0$ existe una constante $N > 0$ tal que

$$\sum_{n=N}^{+\infty} ||\psi^*||_1^n < \rho.$$

Por lo tanto, siendo $\sum_{n=N}^{+\infty} |R_n(t_1,s) - R_n(t_2,s)| \leq \sum_{n=N}^{+\infty} 2\psi^*(s) \left(||\psi^*||_1\right)^{n-1}$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
|R(t_1,s) - R(t_2,s)| &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} |R_n(t_1,s) - R_n(t_2,s)| \\
&= \sum_{n=1}^{N-1} |R_n(t_1,s) - R_n(t_2,s)| \\
&+ \sum_{n=N}^{+\infty} |R_n(t_1,s) - R_n(t_2,s)|
\end{aligned}
$$

tiende a cero si $t_{1,}t_2$ tienden a infinito.

Demostración de la Proposición 4.3.2

Comencemos probando por inducción en n que

$$|R_n(t,s)| \leq \frac{e^{-at}\psi^*(s)}{(n-1)!} \left(\frac{A\left(e^{-as} - e^{-at}\right)}{a} \right)^{n-1}$$

donde A es tal que $|\psi^*(s)| \leq A$ para todo s. Por hipótesis

$$|R_1(t,s)| \leq e^{-at}\psi^*(s)$$

y además usando la hipótesis inductiva

$$\begin{aligned}
|R_n(t,s)| &\leq \int_s^t e^{-at}\psi^*(r)\frac{e^{-ar}\psi^*(s)}{(n-2)!}\left(\frac{A\left(e^{-as}-e^{-ar}\right)}{a}\right)^{n-2} dr \\
&\leq e^{-at}A\frac{\psi^*(s)}{(n-2)!}\left(\frac{A}{a}\right)^{n-2}\int_s^t e^{-ar}\left(e^{-as}-e^{-ar}\right)^{n-2} dr \\
&= e^{-at}A\frac{\psi^*(s)}{(n-2)!}\left(\frac{A}{a}\right)^{n-2}\frac{\left(e^{-as}-e^{-at}\right)^{n-1}}{(n-1)\,a} \\
&= e^{-at}\psi^*(s)\left(\frac{A}{a}\right)^{n-1}\frac{\left(e^{-as}-e^{-at}\right)^{n-1}}{(n-1)!}.
\end{aligned}$$

Luego, obtenemos que

$$|R(t,s)| \leq e^{-at}\psi^*(s)e^{\frac{A}{a}\left(e^{-as}-e^{-at}\right)},$$

y siendo $e^{-at}e^{\frac{A}{a}\left(e^{-as}-e^{-at}\right)}$ acotada para $t \geq s$, deducimos las hipótesis $4)a)$ y $4)b)$. Observemos que en este caso se tiene $\lim\limits_{t\to+\infty} R(t,s) = 0$.

Bibliografía

[1] PONTRYAGIN, L.S., BOLTYANKSKII, V.G., GAMKRELIDZE, R.S. AND MISCHENKO, E.F, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Macmillan, New York, New York, 1964.

[2] HESTENES, M.R. , *Calculus of Variations and Optimal Control Theory,* John Wiley and Sons, New York, New York, 1966.

[3] MICHEL, P. *Une Demonstration Elementaire du Principe du Maximum de Pontryagin,* Bulletin de Matematique Economiques, Vol. 14, pp. 9-23, 1977.

[4] VINOKUROV, V. R, *Optimal control of processes described by integral equations.* SIAM Journal on Control 7 , 324–336, 1969.

[5] NEUSTADT, L. W.; WARGA, J., *Comments on the Paper "Optimal Control of Processes Described by Integral Equations, I"by V.R. Vinokurov, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 8, p. 572, 1970.*

[6] NEUSTADT, L. W., *Optimization: A Theory of Necessary Conditions,* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1976.

[7] BAKKE, V. L. *A Maximum Principle for an Optimal Control Problem with Integral Constraints,* Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 13, No. 1, 1974.

[8] HARTL, R.F. ; SETHI, S.P. , *Optimal Control of a Class of Systems with Continuous Lags: Dynamic Programming Approach and Economic Interpretations,* Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 43, No. 1, 1984.

[9] CARLSON, D. A., *An elementary proof of the maximum principle for optimal control problems governed by a Volterra integral equation*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 54, No. 1,pp. 43–61, 1987.

[10] BURNAP, C.; KAZEMI M., *Optimal control of a system governed by nonlinear Volterra integral equations with delay,* IMA Journal of Mathematical Control & Information (1999) 16, pp. 73-89.

[11] DE LA VEGA, *Necessary Conditions for Optimal Terminal Time and Control Problems Governed by a Volterra Integral Equation.* Por aparecer en Journal of Optimization Theroy and Applications.

[12] ANGELL, T.S., *On the optimal control of systems governed by nonlinear Volterra equations,* Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 19, No. 1,pp. 29-45, 1976.

[13] HALKIN, H. *Necessary Conditions for Optimal Control Problems with Infinite Horizon.* Econometrica, Vol. 42, pp. 267-271. 1974.

[14] MICHEL, P. *On the Transversality Condition in Infinite-Horizon Problems.* Econometrica, Vol. 50, pp. 975-985. 1982.

[15] CARLSON, D.A.; HAURIE, A.B. and LEIZAROWITZ, A. *Infinite Horizon Optimal Control; Deterministic and Stochastic Systems.* 2nd. Edition, Springer Verlag, Berlin, Germany, 1991.

[16] GANI, N. WIESE, K.E. *Necessary Conditions for an Infinite Time Optimal Control Problem.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 122, pp. 308-324. 1987.

[17] SMIRNOV, G.V. *Transversality Conditon for Infinite-Horizon Problems.* Journal of Optimization Theory and Applications. Vol 88, No. 3, pp. 671-688. 1996.

[18] SEIERSTAD, A. *Necessary Conditions for Nonsmooth, Infinite-Horizon, Optimal Control Problems.* Journal of Optimization Theory and Applications. Vol 103, No. 1, pp. 201-229. 1999.

[19] CARLSON, D.A. *Infinite-Horizon Optimal Controls for Problems Governed by a Volterra Integral Equation with State-and-Control-Dependent Discount Factor.* Journal of Optimization Theory and Applications. Vol 66, No. 2, pp. 331-336. 1990.

[20] CARLSON, D.A. *Nonconvex and Relaxed Infinite-Horizon Optimal Control Problems.* Journal of Optimization Theory and Applications. Vol 78, No. 3, pp. 465-491. 1993.

[21] LIMA, E. L., *Curso de Analise Vol.2,* Projeto Euclides, IMPA, Brasil, 1981.

[22] LUENBERGER, D. G., *Optimization by vector space methods*, Wiley, New York, 1969.

[23] POGORZELSKI, W., *Integral Equations and their Applications,* Vol. 1, Pergamon Press, 1966.

[24] PETROVSKI, I.G., *Lectures on the theory of integral equations* (Spanish), Second edition, Translated from the third Russian edition by Juan Jose Tolosa, Mir, Moscow, 1976.