UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

ACOTACIÓN Y TIPO DÉBIL DE OPERADORES FUERTEMENTE SINGULARES LATERALES EN ESPACIOS L^p_ω CON PESO $\omega \in A^+_p$

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

Ricardo Testoni

Director de tesis: Dr. Carlos Segovia Fernández

Lugar de trabajo: Departamento de Matemática

Buenos Aires, 2005

Acotación y tipo débil de operadores fuertemente singulares laterales en espacios L^p_ω con peso $\omega \in A^+_p$

En este trabajo estudiamos propiedades de acotación fuertes y débiles de operadores fuertemente singulares laterales en espacios L^p_ω, donde ω es un peso en la clase de Sawyer A^+_p. Es de particular interés el tipo débil $(1,1)$ con peso que no era conocido.

Probamos y utilizamos un teorema de interpolación entre espacios de Hardy laterales, el cual obtuvimos gracias a una descomposición atómica con la propiedad de que cada átamo tiene un vecino soportado a su derecha.

Para obtener esta descomposición desarrollamos una sencilla técnica que permite partir un átomo en una suma de otros átomos.

Utilizando la descomposición mencionada, también probamos un teorema de multiplicadores de Hörmander en $H^1_+(\omega)$.

Palabras y frases clave: **operador fuertemente singular lateral, núcleo fuertemente singular lateral, pesos, espacio de Hardy laterales, descomposición atómica, interpolación.**

Strong and weak type inequalities for one-sided strongly singular operators in L^p_ω spaces with weight $\omega \in A^+_p$

In this work we study weak and strong type inequalities for one-sided strongly singular operators in L^p_ω spaces with weights ω belonging to the Sawyer classes A^+_p. We are particularly interested in the weighted weak $(1,1)$ inequality which was not known.

We prove and use an interpolation theorem between one-sided Hardy spaces. To prove it we obtain an atomic decomposition in which for every atom there exists another supported contiguously at its right.

In order to get this atomic decomposition we have developed a rather simply technique to break up an atom into a sum of others atoms.

Also, using this decomposition, we prove a Hörmander multiplier theorem in $H^1_+(\omega)$.

Keywords and phrases: **one-sided strongly singular operator, one-sided strongly singular kernel, weights, one-sided Hardy spaces, atomic decomposition, interpolation**

Agradecimientos

Deseo agradecer a las muchas personas que me han ayudado (a veces sin saberlo) con este trabajo.

A mis compañeros que han compartido su oficina cuando yo no tenía: Silvia, Analía, Carlos y Julián.

A mis compañeros de la oficina de becarios con los que compartimos largas horas: Sigrid, Corina, Ariel, Pablo, Leandro, Rafael y Yuri.

A los profesores y compañeros del taller de tango de Exactas, que proveyeron el necesario cable a tierra.

En la persona del Dr. Gustavo Corach, a la gente del IAM, donde se realizó gran parte de este trabajo.

A María del Carmen Calvo y Cristina López por estar siempre dispuestas a ayudar.

A Sheldy Ombrosi, quien me ha ayudado muchísimo, en especial con el método para partir átomos.

No hay palabras para agradecer a mi director, Dr. Carlos Segovia, por todo lo que ha hecho por mí. Solo mencionaré su gran generosidad y paciencia entre las muchas virtudes que caracterizan a este gran maestro.

Este trabajo está dedicado a mi familia:
mamá, papá, Gustavo, Mariana y
el gran Ezequiel.

Índice

Introducción

Sea $0 < b < 1$, se define el Operador Fuertemente Singular por medio del multiplicador

$$\widehat{Tf}(\xi) = \theta(\xi) \frac{\exp\left(i|\xi|^{b}\right)}{|\xi|^{b/2}} \widehat{f}(\xi), \tag{1}$$

donde $\theta \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $\theta(\xi) = 1$ si $|\xi| \geq 1$ y $\theta(\xi) = 0$ si $|\xi| \leq 1/2$.

El núcleo asociado a T es esencialmente como

$$K(x) = \frac{\exp\left(i|x|^{-b'}\right)}{|x|^{n}} \chi_{[-1,1]}(x),$$

donde $b' = \frac{b}{1-b}$.

I. I. Hirschman ([4]) y S. Wainger ([15]) estudian este operador obteniendo acotaciones fuertes en L^p. En [2], C. Fefferman prueba el tipo débil $(1,1)$ en L^1 y, utilizando la dualidad de H^1 y BMO, C. Fefferman y E. M. Stein prueban en [3] que es acotado de H^1 en H^1.

El estudio de este operador en el contexto de los espacios L^p_ω, donde ω es un peso en la clase de Muckenhoupt, A_p, es realizado por S. Chanillo en [1].

Para obtener el tipo débil $(1,1)$ con pesos en A_1, Chanillo sigue la demostración de Fefferman en [2] hasta que se encuentra con un muy ingenioso argumento basado en el Teorema de Plancharel, el cual no es válido al trabajar con pesos.

Chanillo sortea este problema utilizando un teorema de interpolación entre espacios de Hardy con pesos debido a J.-O. Strömberg y A. Torchinsky ([13]). También utiliza un argumento geométrico con el que localiza el peso de manera compatible con la descomposición de Calderón-Zygmund utilizada en la demostración.

Para obtener el tipo fuerte (p,p) con pesos para $1 < p < \infty$, Chanillo hace uso de las cancelaciones producidas por las oscilaciones presentes en el núcleo K. Este es el Lema 2.1 en [1] que transcribimos más adelante como Lema 2.12.

C. Segovia observa que la demostración de este lema dada por Chanillo es lateral y, junto con L. de Rosa estudian este operador en su versión lateral:

$$K(x) = \frac{\exp\left(i|x|^{-b'}\right)}{|x|} \chi_{[-1,0]}(x),$$

$x \in \mathbb{R}$, en el contexto de pesos en la clase de Sawyer, A_p^+.

No les fue difícil obtener el tipo fuerte (p,p) con pesos para $1 < p < \infty$, pero al encarar el tipo débil $(1,1)$ se encontraron con la necesidad de definir y estudiar los espacios de Hardy laterales ([9], [10]).

En este trabajo probamos el tipo débil buscado siguiendo el trabajo y las ideas de Chanillo.

Como primer paso obtuvimos un teorema de interpolación entre espacios de Hardy laterales. Para esto hallamos una descomposición en átomos de estos espacios con la propiedad de que cada átomo de la descomposición esta “seguido” por otro, con soporte contiguo. Con este fin se desarrolló una técnica bastante sencilla para “partir” un átomo.

También utilizamos esta descomposición atómica especial para demostrar un teorema de multiplicadores del tipo Hörmander-Mihlin en $H^1_+(\omega)$, donde $\omega \in A^+_1$.

No logramos generalizar el argumento geométrico de Chanillo, y sospechamos que no es posible hacerlo, pero dimos otro argumento que utiliza el teorema de la Integral Fraccionaria con pesos, que si se generaliza al caso lateral.

En la Sección 1 verificamos que el Núcleo Fuertemente Singular Lateral satisface las condiciones de los núcleos que se estudian en [2] y en [3] y por lo tanto el Operador Fuertemente Singular Lateral es acotado en L^p, $1 < p < \infty$, y es débil $(1,1)$ en L^1.

En la Sección 2 seguimos las ideas de Chanillo en [1] para obtener la acotación en L^p_ω, $\omega \in A^+_p$ y $1 < p < \infty$. Se utilizan la Maximal Sharp Lateral y el espacio BMO^+ definidos por F. J. Martín-Reyes y A. de la Torre en [7].

En la Sección 3 demostramos el resultado principal de este trabajo: el tipo débil $(1,1)$ en L^1_ω, $\omega \in A^+_1$. En la demostración se utiliza la Proposición 3.3 que se obtendrá en la Sección 8 por un resultado de intepolación entre espacios de Hardy laterales.

En la Sección 4 damos la defininción de los epacios $H^p_+(\omega)$ introducida por L. de Rosa y C. Segovia en [9] y [10] y obtenemos la desompocision atómica ya mencionada.

En la Sección 5 construimos una función interpoladora entre espacios de Hardy laterales similar a la que construyen J.-O. Strömberg y A. Torchinsky en el Capítulo XII de [13] en el caso bilatero.

En la Sección 6 demostramos un teorema de multiplicadores de Hörmader-Mihlin en $H^1_+(\nu)$, $\nu \in A^+_1$. Como aplicación probamos que el Operador Integral Fraccionaria Imaginaria es acotado en $H^1_+(\nu)$ (Ejemplo 6.10) que utilizaremos en la Sección 8.

En la Sección 7 probamos la acotación del Operador Fuertemente Singular Lateral de $H^1_+(\nu)$ y L^1_ν, $\nu \in A^+_1$.

Con los resultados de las Secciones 4, 5, 6 y 7, y siguiendo las ideas de Chanillo, obtenemos en la Sección 8 la demostración del la Proposición 3.3. Queda así termida la demostración del tipo débil deseado.

En la Sección 9 damos un Teorema de Interpolación entre espacios de Hardy laterales análogo al que se encuentra en el Capítulo XII de [13] en el caso bilatero. Como aplicación damos otra demostración de la Proposición 3.3.

Notación

A continuación indicaremos algunas notaciones y convenciones que hemos adopatado en este trabajo, algunas de las cuales ya fueron usadas en la Introducción.

Si E es un subconjunto medible Lebesgue de los números reales entonces su medida se denotará por $|E|$.

La norma de L^p_ω se denotará en forma indistinta como $\|\cdot\|_{p,\omega}$ o $\|\cdot\|_{L^p_\omega}$; y en el caso $\omega(x) = 1$ se escribirá $\|\cdot\|_p$ o $\|\cdot\|_{L^p}$.

Como es usual, C^∞ representará al espacio de funciones reales infinitamente derivables; y C_0^∞ al de funciones reales infinitamente derivables con soporte compacto. $\mathcal{S}$ será el espacio de funciones de C^∞ con derivadas rápidamente decrecientes.

Si f y g son funciones, se dirá que f es $O(g)$ si existe una constante c tal que $|f(x)| \leq c\,|g(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

La transformada de Fourier de una distribución f se notará $\widehat{f}$ y la trasformada inversa, $f^\vee$. En el caso en que f sea una función integrable la definición de la trasformada será:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-i\xi x} dx.$$

Si $1 < p < \infty$ entonces $p' = \frac{p}{p-1}$ es el conjugado de p. El conjugado de 1 es ∞ y viceversa. En el caso $0 < b < 1$ el conjugado será $b' = \frac{b}{1-b}$.

Si $I = (a-\delta, a)$ es un intervalo de diámetro $\delta > 0$ y $r > 0$ entonces $rI = (a - r\delta, a)$.

Las letras c, C y k suelen representar diferentes constantes, incluso en una misma fórmula o razonamiento. Algunas veces subíndices indican la dependencia respecto de algunos parámetros.

1. Operadores Fuertemente Singulares Laterales en L^p, $1 < p < \infty$

En esta primera sección definiremos los Operadores Fuertemente Singulares Laterales y obtendremos el tipo fuerte (p, p) con $1 < p < \infty$ y el tipo débil $(1, 1)$ con respecto a la medida de Lebesgue.

1.1. Definición

Sea $0 < b < 1$ definiremos el Operador Fuertemente Singular Lateral T_b como el operador de convolución asociado al Núcleo Fuertemente Singular Lateral

$$K_{b'}(x) = \frac{\exp\left(i\,|x|^{-b'}\right)}{|x|}\chi_{[-1,0]}(x),$$

donde $x \in \mathbb{R}$ y $b' = \frac{b}{1-b}$.

$K_{b'}(x)$ define una distribución temperada soportada en $[-1, 0]$, que también llamaremos $K_{b'}$ del siguiente modo: sea φ en la clase de Schwartz $\mathcal{S}$, entonces

$$\langle K_{b'}, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int \frac{\exp\left(i\,|y|^{-b'}\right)}{|y|}\chi_{[-1,-\varepsilon]}(y)\,\varphi(y)\,dy.$$

Utilizando la fórmula de integración por partes podemos ver que efectivamente el límite existe y que $K_{b'}$ es una funcional continua. En efecto,

$$\begin{aligned}
\langle K_{b'}, \varphi\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int \frac{\exp\left(i\,|y|^{-b'}\right)}{|y|}\chi_{[-1,-\varepsilon]}(y)\,\varphi(y)\,dy = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{1} \frac{\exp\left(iy^{-b'}\right)}{y}\varphi(-y)\,dy = \frac{i}{b'}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{1}\left(\exp\left(iy^{-b'}\right)\right)' y^{b'}\varphi(-y)\,dy = \\
&= \frac{i}{b'}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\exp\left(iy^{-b'}\right)y^{b'}\varphi(-y)\Big|_{\varepsilon}^{1} - \int_{\varepsilon}^{1}\exp\left(iy^{-b'}\right)\left(y^{b'}\varphi(-y)\right)' dy\right) = \\
&= \frac{i}{b'}\left(\exp(i)\,\varphi(-1) - \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{1}\exp\left(iy^{-b'}\right)\left(b'y^{b'-1}\varphi(-y) - y^{b'}\varphi'(-y)\right)dy\right),
\end{aligned}$$

que existe por ser φ y φ' funciones acotadas y $b' > 0$. Además se tiene que

$$|\langle K_{b'}, \varphi\rangle| \le \frac{1}{b'}\,\|\varphi\|_\infty + \int_0^1 y^{b'-1}dy\,\|\varphi\|_\infty + \|\varphi'\|_\infty$$

que, por ser $b' > 0$, implica que $K_{b'}$ es una distribución temperada.

Para $f \in \mathcal{S}$, se tiene que

$$T_b f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int \frac{\exp\left(i|y|^{-b'}\right)}{|y|} \chi_{[-1,-\varepsilon]}(y) f(x-y)\, dy.$$

En efecto, si $\varphi \in \mathcal{S}$ y $f \in \mathcal{S}$ entonces

$$\begin{aligned}
\langle T_b f, \varphi \rangle &= \langle K_{b'} * f, \varphi \rangle = \left\langle K_{b'}, \int f(x-y)\varphi(x)\, dx \right\rangle = \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\exp\left(i|y|^{-b'}\right)}{|y|} \int f(x-y)\varphi(x)\, dx\, dy = \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\exp\left(i|y|^{-b'}\right)}{|y|} f(x-y)\, dy\, \varphi(x)\, dx = \\
&= \int \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\exp\left(i|y|^{-b'}\right)}{|y|} f(x-y)\, dy\, \varphi(x)\, dx.
\end{aligned}$$

En la última igualdad se puede aplicar Convergencia Mayorada pues $\varphi \in \mathcal{S}$ y, utilizando integración por partes como antes, se tiene que

$$\left| \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\exp\left(i|y|^{-b'}\right)}{|y|} f(x-y)\, dy \right| \leq \frac{1}{b'} \|f\|_\infty + \int\limits_0^1 y^{b'-1} dy\ \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty .$$

1.2. Acotaciones en L^p

El siguiente teorema resume resultados que se encuentran en [2] y en [3]:

Teorema 1.1 *Sea $0 < b < 1$ y sea K una distribución en $\mathbb{R}^n$ de soporte compacto que coincide con una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n - \{0\}$ y tal que su transformada de Fourier $\widehat{K}$ es una función que verifica*

$$\left|\widehat{K}(\xi)\right| \leq c\,(1+|\xi|)^{-nb/2} \qquad \text{para } \xi \in \mathbb{R}^n,$$

$$\int\limits_{|x|>2|y|^{1-b}} |K(x-y) - K(x)|\, dx \leq c \qquad \text{para } 0 < |y| \leq 1.$$

Entonces el operador de convolución $Tf = K * f$ verifica

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{c_1}{\lambda} \|f\|_1 ,$$

donde la constante $c_1 > 0$ es independiente de f y de $\lambda > 0$; y para $1 < p < \infty$,

$$\|Tf\|_p \leq c_p \|f\|_p ,$$

donde la constante $c_p > 0$ es independiente de f .

En la siguiente proposición obtendremos que la trasformada de Fourier del Núcleo Fuertemente Singular Lateral satisface la estimación del teorema anterior. Este resultado será útil a lo largo de este trabajo.

Proposición 1.2 *Existe una constante* $c = c\,(b) > 0$ *tal que*

$$\left|\widehat{K_{b'}}\,(\xi)\right| \leq c\,(1 + |\xi|)^{-b/2}.$$

Demostración. Este resultado puede encontrarse en la página 339 de [12] para el caso $b = 1/2$.

Recordemos que $0 < b < 1$, $b' = \frac{b}{1-b}$ y $(b' + 1)\,(1 - b) = 1$.

Podemos escribir

$$\begin{aligned}
\widehat{K_{b'}}\,(\xi) &= \int \frac{\exp(i\,|x|^{-b'})}{|x|}\chi_{[-1,0]}\,(x)\exp(-ix\xi)dx = \int_0^1 \frac{\exp(i\left(x\xi + x^{-b'}\right))}{x}dx \\
&= \int_0^1 \frac{\exp(i\Phi\,(x))}{x}dx,
\end{aligned}$$

donde

$$\Phi\,(x) = x\xi + x^{-b'},$$

$$\Phi'\,(x) = \xi - b'x^{-\left(b'+1\right)},$$

$$\Phi''\,(x) = b'\,(b' + 1)\,x^{-\left(b'+2\right)}.$$

Notar que la integral

$$\int_0^1 \frac{\exp(ix^{-b'})}{x}\exp(ix\xi)dx$$

esta definida por el límite

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{\exp(ix^{-b'})}{x}\exp(ix\xi)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \left(\exp(ix^{-b'})\right)'\frac{x^{b'+1}}{(-ib')}\frac{\exp(ix\xi)}{x}dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\exp(ix^{-b'})\frac{x^{b'}\exp(ix\xi)}{(-ib')}\bigg|_\varepsilon^1 - \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \exp(ix^{-b'})\frac{\left(x^{b'}\exp(ix\xi)\right)'}{(-ib')}dx \\
&= \exp(i)\frac{\exp(i\xi)}{(-ib')} - \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \exp(ix^{-b'})\frac{\left(b'x^{b'-1}\exp(ix\xi) + i\xi x^{b'}\exp(ix\xi)\right)}{(-ib')}dx
\end{aligned}$$

que existe pues $b' > 0$. Esta cuenta prueba que $\widehat{K_{b'}}\,(\xi)$ es una función acotada.

Estudiaremos el decaimiento en el infinito. Primero consideremos el caso $\xi \to +\infty$.

Es inmediato verificar que $\Phi'(x_0) = 0$ si, y solo si,

$$x_0 = \left(\frac{\xi}{b'}\right)^{\frac{-1}{b'+1}} = \left(\frac{\xi}{b'}\right)^{b-1} = c_b \xi^{b-1},$$

donde $c_b = b'^{1-b}$.

Sean

$$\alpha = \tfrac{1}{2} c_b \xi^{b-1},$$

$$\beta = \tfrac{3}{2} c_b \xi^{b-1}.$$

Partamos la integral en tres:

$$\begin{aligned} \widehat{K_{b'}}(\xi) &= \int_0^\alpha \frac{\exp(i\Phi(x))}{x} dx + \int_\alpha^\beta \frac{\exp(i\Phi(x))}{x} dx + \int_\beta^1 \frac{\exp(i\Phi(x))}{x} dx \quad (2) \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Para estimar I_3, notemos que para $\beta \le x \le 1$ existe $c > 0$ tal que

$$\Phi'(x) \ge c\xi.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= \xi - b' x^{-\left(b'+1\right)} \ge \xi - b' \beta^{-\left(b'+1\right)} = \xi - b' \left(\frac{3}{2} c_b \xi^{b-1}\right)^{-\left(b'+1\right)} \\ &= \xi - b' \left(\frac{3}{2} b'^{1-b}\right)^{-\left(b'+1\right)} \xi = \xi - \left(\frac{3}{2}\right)^{-\left(b'+1\right)} \xi = \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{b'+1}\right) \xi > 0. \end{aligned}$$

Luego, integrando por partes, y teniendo en cuenta que como $\Phi''(x) > 0$ entonces $\frac{1}{x\Phi'(x)}$ es decreciente, se tiene que

$$\begin{aligned}
|I_3| &= \left|\int_\beta^1 \frac{\exp(i\Phi(x))}{x}dx\right| = \left|\int_\beta^1 (\exp(i\Phi(x)))' \frac{1}{x\Phi'(x)}dx\right| \\
&\le \left|\exp(i\Phi(x))\frac{1}{x\Phi'(x)}dx\right|_\beta^1 + \left|\int_\beta^1 \exp(i\Phi(x))\left(\frac{1}{x\Phi'(x)}\right)' dx\right| \\
&\le \frac{1}{\Phi'(1)} + \frac{1}{\beta\Phi'(\beta)} + \int_\beta^1 \left|\left(\frac{1}{x\Phi'(x)}\right)'\right| dx \\
&\le \frac{1}{\Phi'(1)} + \frac{1}{\beta\Phi'(\beta)} - \int_\beta^1 \left(\frac{1}{x\Phi'(x)}\right)' dx \\
&= 2\frac{1}{\beta\Phi'(\beta)} \le \frac{c}{\xi^{b-1}\xi} \le \frac{c}{\xi^b}.
\end{aligned}$$

Para estimar I_1 tengamos en cuenta que, para $0 \le x \le \alpha = \frac{1}{2}c_b\xi^{b-1}$ existe $c > 0$ tal que

$$|\Phi'(x)| \ge c\xi.$$

En efecto

$$\begin{aligned}
\Phi'(x) &= \xi - b'x^{-(b'+1)} \le \xi - b'\left(\frac{1}{2}c_b\xi^{b-1}\right)^{-(b'+1)} \\
&= \xi - b'\left(\frac{1}{2}c_b\right)^{-(b'+1)} \xi^{(1-b)(b'+1)} = \left(1 - b'\left(\frac{1}{2}b'^{1-b}\right)^{-(b'+1)}\right)\xi \\
&= \left(1 - 2^{b'+1}\right)\xi < 0.
\end{aligned}$$

Luego, de manera análoga a la estimación de I_3, se tiene que

$$\begin{aligned}
|I_1| &= \left|\int_0^\alpha \frac{\exp(i\Phi(x))}{x}dx\right| = \left|\int_0^\alpha (\exp(i\Phi(x)))' \frac{1}{x\Phi'(x)}dx\right| \\
&\le \left|\exp(i\Phi(x))\frac{1}{x\Phi'(x)}dx\right|_0^\alpha + \left|\int_0^\alpha \exp(i\Phi(x))\left(\frac{1}{x\Phi'(x)}\right)' dx\right| \\
&\le \left|\frac{1}{\alpha\Phi'(\alpha)}\right| + \int_0^\alpha \left|\left(\frac{1}{x\Phi'(x)}\right)'\right| dx
\end{aligned}$$

En la última desigualdad se usa que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x\Phi'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{b'}}{b' - x^{b'+1}\xi} = 0$.

Como $\frac{1}{x\Phi'(x)}$ es decreciente entonces

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \left|\frac{1}{\alpha\Phi'(\alpha)}\right| - \int_0^\alpha \left(\frac{1}{x\Phi'(x)}\right)' dx = 2\left|\frac{1}{\alpha\Phi'(\alpha)}\right| \\ &\leq c\frac{1}{\xi^{b-1}\xi} = \frac{c}{\xi^b}. \end{aligned}$$

En el caso $\alpha \leq x \leq \beta$ se tiene que

$$\begin{aligned} \Phi''(x) &= b'(b'+1)x^{-\left(b'+2\right)} \geq b'(b'+1)\beta^{-\left(b'+2\right)} \\ &= c\left(\xi^{b-1}\right)^{-\left(b'+2\right)} = c\xi^{(1-b)\left(b'+1\right)+(1-b)} = c\xi^{2-b}. \end{aligned} \tag{3}$$

Luego, si

$$F(x) = \int_\alpha^x \exp(i\Phi(t))dt,$$

entonces

$$|F(x)| \leq c\xi^{(b-2)/2}. \tag{4}$$

En efecto, siguiendo la demostración del Lema de van der Corput (véase por ejemplo página 332 en [12]), sea $\delta > 0$ a determinar más adelante, y dividamos del siguiente modo:

$$|F(x)| \leq \left|\int_\alpha^{x_0-\delta} \exp(i\Phi(t))dt\right| + \left|\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \exp(i\Phi(t))dt\right| + \left|\int_{x_0+\delta}^{x} \exp(i\Phi(t))dt\right|. \tag{5}$$

Sin perdida de generalidad, hemos supuesto $\alpha < x_0 - \delta < x_0 < x_0 + \delta < x$; en otro caso no aparecería alguno de los sumandos anteriores.

Como $\Phi'(x_0) = 0$, y usando el Teorema del Valor Medio y (3), se tiene, para $\alpha \leq t \leq x_0 - \delta$ que

$$|\Phi'(t)| = |\Phi'(t) - \Phi'(x_0)| \geq c\xi^{2-b}(x_0 - t) \geq c\xi^{2-b}\delta \tag{6}$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\left|\int\limits_{\alpha}^{x_0-\delta}\exp(i\Phi(t))dt\right| &= \left|\int\limits_{\alpha}^{x_0-\delta}(\exp(i\Phi(t)))'\frac{1}{\Phi'(t)}dt\right| \\
&\leq \left|\exp(i\Phi(t))\frac{1}{\Phi'(t)}\right|_{\alpha}^{x_0-\delta} + \left|\int\limits_{\alpha}^{x_0-\delta}\exp(i\Phi(t))\left(\frac{1}{\Phi'(t)}\right)'dt\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{\Phi'(x_0-\delta)}\right| + \left|\frac{1}{\Phi'(\alpha)}\right| + \int\limits_{\alpha}^{x_0-\delta}\left|\left(\frac{1}{\Phi'(t)}\right)'\right|dt \\
&= \left|\frac{1}{\Phi'(x_0-\delta)}\right| - \frac{1}{\Phi'(\alpha)} - \int\limits_{\alpha}^{x_0-\delta}\left(\frac{1}{\Phi'(t)}\right)'dt \\
&= \left|\frac{1}{\Phi'(x_0-\delta)}\right| - \frac{1}{\Phi'(\alpha)} - \frac{1}{\Phi'(x_0-\delta)} + \frac{1}{\Phi'(\alpha)} \\
&\leq 2\left|\frac{1}{\Phi'(x_0-\delta)}\right|.
\end{aligned}$$

Y usando (6),

$$\left|\int\limits_{\alpha}^{x_0-\delta}\exp(i\Phi(t))dt\right| \leq c\frac{1}{\xi^{2-b}\delta}.$$

Análogamente se tiene que

$$\left|\int\limits_{x_0+\delta}^{x}\exp(i\Phi(t))dt\right| \leq c\frac{1}{\xi^{2-b}\delta}.$$

Además

$$\left|\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\exp(i\Phi(t))dt\right| \leq \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}|\exp(i\Phi(t))|\,dt \leq 2\delta.$$

Reemplazando en (5)

$$|F(x)| \leq c\frac{1}{\xi^{2-b}\delta} + 2\delta.$$

y, eligiendo $\delta = \xi^{(b-2)/2}$, se obtiene (4).

Usamos (4) para estimar

$$\begin{aligned}
|I_2| &= \left|\int_\alpha^\beta \frac{\exp(i\Phi(x))}{x}dx\right| = \left|\int_\alpha^\beta F'(x)\frac{1}{x}dx\right| \\
&\leq \frac{|F(\beta)|}{\beta} + \int_\alpha^\beta |F(x)|\frac{1}{x^2}dx \leq c\frac{\xi^{(b-2)/2}}{\xi^{b-1}} + c\xi^{(b-2)/2}\int_\alpha^\beta \frac{1}{x^2}dx \\
&\leq c\frac{\xi^{(b-2)/2}}{\xi^{b-1}} + c\xi^{(b-2)/2}\frac{1}{\alpha} = c\frac{\xi^{(b-2)/2}}{\xi^{b-1}} + c\xi^{(b-2)/2}\frac{1}{\xi^{b-1}} \\
&= \frac{c}{\xi^{b/2}}.
\end{aligned}$$

Reemplazando en (2) todas las estimaciones obtenidas se tiene que

$$\left|\widehat{K_{b'}}(\xi)\right| \leq \frac{c}{\xi^b} + \frac{c}{\xi^{b/2}}$$

y, por lo tanto, como $0 < b < 1$, se tiene que

$$\widehat{K_{b'}}(\xi) = O\left(\xi^{-b/2}\right) \qquad (\xi \to +\infty),$$

como queríamos mostrar.

El caso $\xi \to -\infty$ es más sencillo pues $\Phi'(x) \neq 0$ para todo $0 \leq x \leq 1$. Es más,

$$|\Phi'(x)| = b'x^{-(b'+1)} - \xi \geq -\xi = |\xi|. \tag{7}$$

Luego, integrando por partes como se hizo para acotar I_1 e I_3, podemos estimar

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{K_{b'}}(\xi)\right| &= \left|\int_0^1 \frac{\exp(i\Phi(x))}{x}dx\right| = \left|\int_0^1 (\exp(i\Phi(x)))'\frac{1}{x\Phi'(x)}dx\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{x\Phi'(x)}\right|_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{1}{x\Phi'(x)}\right)' dx \\
&= \left|\frac{1}{\Phi'(1)}\right| - \frac{1}{\Phi'(1)} = 2\left|\frac{1}{\Phi'(1)}\right| \leq \frac{2}{|\xi|},
\end{aligned}$$

y, por lo tanto, se tiene que

$$\widehat{K_{b'}}(\xi) = O\left(\xi^{-1}\right) \qquad (\xi \to -\infty).$$

Juntando todas las estimaciones hemos probado que existe una contante $c = c(b) > 0$ tal que

$$\left|\widehat{K_{b'}}(\xi)\right| \leq c(1 + |\xi|)^{-b/2}.$$

■

Ahora probaremos que el Núcleo Fuertemente Singular Lateral satisface la estimacón del el Teorema 1.1.

Lema 1.3 *Existe una constante* $c > 0$ *tal que*

$$\int\limits_{|x|>2|y|^{1-b}} |K_{b'}(x-y) - K_{b'}(x)|\, dx \leq c,$$

para todo $0 < |y| \leq 1$.

Demostración. Notar que como $|y| \leq 1$ y $0 < b < 1$ entonces

$$|x| > 2\,|y|^{1-b} \geq 2\,|y|\,. \tag{8}$$

Recordemos que

$$|K_{b'}(x-y) - K_{b'}(x)| = \frac{\exp\left(i|x-y|^{-b'}\right)}{|x-y|}\chi_{[-1,0]}(x-y) - \frac{\exp\left(i|x|^{-b'}\right)}{|x|}\chi_{[-1,0]}(x)\,.$$

Dividiremos el estudio en varios casos según las funciones caracteristicas sean 0 o 1.

Supongamos $x > 0$ y $-1 < x - y < 0$. Entonces

$$y > x > 0,$$

y, por (8),

$$y > 2y > 0.$$

Con lo cual este caso es vacío.

Supongamos $x < -1$ y $-1 < x - y < 0$. Entonces

$$y < 1 + x < 0$$

y, por (8), resulta que

$$x < 2y < 2(1+x)\,,$$

de donde

$$-2 < x.$$

Además, por (8), es

$$|x-y| \geq |x| - |y| > \frac{|x|}{2} > \frac{1}{2}.$$

Luego, en este caso

$$\int\limits_{|x|>2|y|^{1-b}} |K_{b'}(x-y) - K_{b'}(x)|\, dx \leq \int\limits_{|x|>2|y|^{1-b}} \left|\frac{\exp\left(i|x-y|^{-b'}\right)}{|x-y|}\chi_{[-2,-1]}(x)\right| dx \leq 2.$$

Supongamos $-1 < x < 0$ y $x - y > 0$. Entonces, por (8),

$$y < x < 2y < 0$$

y, por lo tanto, este caso es vacío.

Supongamos $-1 < x < 0$ y $x - y < -1$. Entonces

$$0 < x + 1 < y$$

y, por (8),

$$1 > |x| > 2y,$$

de donde

$$y < \frac{1}{2}$$

Luego

$$|x| = -x > 1 - y > \frac{1}{2}.$$

y, por lo tanto, en este caso

$$\int\limits_{|x|>2|y|^{1-b}} |K_{b'}(x-y) - K_{b'}(x)|\, dx = \int\limits_{|x|>2|y|^{1-b}} \left| \frac{\exp\left(i|x|^{-b'}\right)}{|x|} \chi_{[-1,0]}(x) \right| dx \leq 2.$$

Por último en el caso $-1 < x < 0$ y $-1 < x - y < 0$ se usa el Teorema del Valor Medio para obtener

$$\left| \frac{\exp\left(i(y-x)^{-b'}\right)}{y-x} - \frac{\exp\left(i(-x)^{-b'}\right)}{-x} \right| \leq \left(\frac{c}{|ty - x|^{b'+2}} + \frac{c}{|ty - x|^{2}} \right) |y|,$$

donde $0 < t < 1$.

Por (8),

$$|ty - x| \geq |x| - t\,|y| > \frac{|x|}{2},$$

de donde

$$\left| \frac{\exp\left(i(y-x)^{-b'}\right)}{y-x} - \frac{\exp\left(i(-x)^{-b'}\right)}{-x} \right| \leq \left(\frac{c}{|x|^{b'+2}} + \frac{c}{|x|^{2}} \right) |y| \leq c \frac{|y|}{|x|^{b'+2}}$$

pues $-1 < x < 0$.

Luego, en este caso,

$$\int\limits_{|x|>2|y|^{1-b}} |K_{b'}(x-y) - K_{b'}(x)|\, dx \leq c \int\limits_{|x|>2|y|^{1-b}} \frac{|y|}{|x|^{b'+2}} dx$$

$$= c\,|y| \left. \frac{(-1)}{|x|^{b'+1}} \right|_{2|y|^{1-b}}^{\infty} = c\,|y| \frac{1}{|y|^{(1-b)(b'+1)}} = c,$$

pues $(1-b)(b'+1) = 1$. ■

Como consecuencia de la proposición y el lema anteriores y el Teorema 1.1 se tiene el tipo débil $(1,1)$ y la acotación del operador T_b en L^p:

Teorema 1.4 *El Operador Fuertemente Singular Lateral* $T_b f = K_{b'} * f$ *verifica*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |T_b f(x)| > \lambda\}| \leq \frac{c_1}{\lambda} \|f\|_1 ,$$

donde la constante $c_1 > 0$ *es independiente de* $f \in L^1$ *y de* $\lambda > 0$*; y para* $1 < p < \infty$,

$$\|T_b f\|_p \leq c_p \|f\|_p ,$$

donde la constante $c_p > 0$ *es independiente de* $f \in L^p$.

2. Operadores Fuertemente Singulares Laterales en L^p_ω, $\omega \in A^+_p$, $1 < p < \infty$

En esta sección probaremos que los Operadores Fuertemente Singulares son acotados en los espacios L^p_ω, $1 < p < \infty$, donde $\omega \in A^+_p$.

Primero daremos definiciones y propiedades correspondientes a las clases A^+_p y a los espacios BMO^+.

2.1. Pesos de las clases A_p, A^+_p y A^-_p

Un peso en $\mathbb{R}$ es una función ω medible Lebesgue tal que $\omega(x) \geq 0$ para casi todo $x \in \mathbb{R}$. Si $E \subset \mathbb{R}$ es un conjunto medible Lebesgue entonces su ω-medida es

$$\omega(E) = \int_E \omega(x)\, dx.$$

Se define la función maximal de Hardy-Littlewood bilátera como

$$Mf(x) = \sup_{s,h>0} \frac{1}{s+h} \int_{x-s}^{x+h} |f(t)|\, dt,$$

donde $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Sea $1 < p < \infty$. La clase de pesos para los cuales el operador M resulta acotado en L^p_ω se denomina A_p y fue caracterizada en [8] por B. Muckenhoupt como la de aquellos pesos ω que satisfacen la condición

$$\left(\int_a^b \omega(t)\, dt \right) \left(\int_a^b \omega(t)^{-\frac{1}{p-1}}\, dt \right)^{p-1} \leq C (b-a)^p,$$

donde la constante $C = C(\omega, p)$ no depende de $-\infty < a < b < \infty$.

Para el caso $p = 1$, se denomina A_1 a la clase de pesos para los cuales el operador M es débil $(1,1)$ en L^1_ω y esta caracterizada por la condición

$$M\omega(x) \leq C\omega(x),$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}$. La constante $C = C(\omega)$ no depende de x.

Se definen las funciones maximales de Hardy-Littlewood laterales como

$$M^+ f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t)|\, dt$$

y

$$M^- f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x} |f(t)|\, dt$$

donde $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Sea $1 < p < \infty$. La clase de pesos para los cuales el operador M^{+} resulta acotado en L_{ω}^{p} se denomina A_{p}^{+} y fue caracterizada en [11] por E. Sawyer como la de aquellos pesos ω que satisfacen la condición

$$\left(\int_{a}^{b} \omega(t)\, dt\right)\left(\int_{b}^{c} \omega(t)^{-\frac{1}{p-1}}\, dt\right)^{p-1} \leq C\,(c-a)^{p},$$

donde la constante $C = C(\omega, p)$ no depende de $-\infty < a < b < c < \infty$.

Para el caso $p = 1$, se denomina A_{1}^{+} a la clase de pesos para los cuales el operador M^{+} es débil $(1,1)$ en L_{ω}^{1} y está caracterizada por la condición

$$M^{-}\omega(x) \leq C\omega(x),$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}$. La constante $C = C(\omega)$ no depende de x.

También se define $A_{\infty}^{+} = \bigcup\limits_{p\geq 1} A_{p}^{+}$.

Definiciones análogas corresponden a las clases A_{p}^{-}. Por ejemplo la condición A_{p}^{-} con $p > 1$ es

$$\left(\int_{b}^{c} \omega(t)\, dt\right)\left(\int_{a}^{b} \omega(t)^{-\frac{1}{p-1}}\, dt\right)^{p-1} \leq C\,(c-a)^{p},$$

donde la constante $C = C(\omega, p)$ no depende de $-\infty < a < b < c < \infty$.

En el siguiente lema enunciaremos algunas de las propiedades de las clases A_{p}^{+} que necesitaremos. (Resultados análogos se obtienen para las clases A_{p}^{-}.)

Lema 2.1 *1. Si $1 \leq p < q$ entonces $A_{p}^{+} \subset A_{q}^{+}$.*

2. Si $\omega \in A_{p}^{+}$ para algún $p \geq 1$ entonces ω es duplicante a izquierda. Esto es existe una constante $c = c(\omega, p) > 0$ tal que

$$\omega(x-2\delta, x) \leq c\omega(x-\delta, x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $\delta > 0$. En cambio, si $\omega \in A_{p}^{-}$ para algún $p \geq 1$ entonces ω es duplicante a derecha.

3. Si $\omega \in A_{p}^{+}$, $p \geq 1$, entonces $\omega(a, \infty) = \infty$ para todo $a \in \mathbb{R}$ o $\omega(x) = 0$ para casi todo x.

4. Si $\omega \in A_{p}^{+}$, $p \geq 1$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $\omega^{1+\delta} \in A_{p}^{+}$.

5. Si $\omega \in A_{p}^{+}$, $p > 1$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $\omega \in A_{p-\varepsilon}^{+}$.

6. Si $\omega \in A_{p}^{+}$, $p > 1$, entonces $\omega^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{p'}^{-}$, donde $(p-1)(p'-1) = 1$.

7. Si $\omega \in A_{p}^{+}$, $p > 1$, entonces $\omega^{1-p'} \in A_{p'}^{-}$, donde $(p-1)(p'-1) = 1$.

8. Si $\omega \in A_{1}^{+}$ y $0 < \alpha < 1$ entonces $\omega^{\alpha} \in A_{1}^{+}$.

Demostración. Las propiedades 1, 6, 7 y 8 son inmediatas de la caracterización de las clases de Sawyer y la desigualdad de Hölder.

La propiedad 4 para el caso $p = 1$ es el Teorema 6 en [5] que, combinado con el Teorema de Factorización (Corolario 1 en [5]) da el caso $p > 1$. También se puede encontrar en [11].

La propiedad 5 es el Corolario 2 en [5].

Para probar la propiedad de duplicación notemos que para $y \in (x - 2\delta, x)$ se tiene que

$$M^+\chi_{(x-\delta,x)}(y) \geq \frac{1}{2}.$$

Luego, como M^+ es acotado en L^p_ω, tenemos que

$$\omega(x - 2\delta, x) = \int_{x-2\delta}^{x} \omega(y)\,dy \leq 2^p \int \left(M^+\chi_{(x-\delta,x)}(y)\right)^p \omega(y)\,dy \leq 2^p c\,\omega(x - \delta, x).$$

Por último probaremos la propiedad 3. Si $\omega(a, \infty) < \infty$ tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a+n}^{a+2n} \omega(x)dx = 0. \tag{9}$$

Por la propiedad de duplicacion resulta que

$$\omega(a, a+n) \leq C_\omega \omega(a+n, a+2n),$$

y, como consecuencia de (9), $\omega(a, \infty) = 0$. Esto y la propiedad de duplicación implican que $\omega(x) = 0$ para casi todo x. ■

Observación 2.2 *Puede probarse que si $\omega \in A_p^+$ entonces existen $-\infty \leq x_{-\infty} \leq x_\infty \leq \infty$ tales que $\omega(x) = 0$ para casi todo $x \in (-\infty, x_{-\infty})$, $\omega(x) > 0$ para casi todo $x \in (x_{-\infty}, x_\infty)$ y $\omega(x) = \infty$ para casi todo $x \in (x_\infty, \infty)$.*
Por simplicidad, en este trabajo supondremos que $x_{-\infty} = -\infty$ y $x_\infty = \infty$. Esta suposición junto con la condición A_p^+ garantizan que ω es localmente integrable.

El siguiente lema será utilizado en varias ocaciones.

Lema 2.3
1. *Sea $\Psi : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ una función con $sop(\Psi) \subset [0, \infty)$ decreciente e integrable en $[0, \infty)$ entonces existe una constante $c > 0$ tal que*

$$|\Psi_\varepsilon * f(z)| \leq c\,M^- f(z),$$

para todo $\varepsilon > 0$ y toda $f \in L^1_{loc}$.

2. *Sea $\Psi : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ una función con $sop(\Psi) \subset (-\infty, 0]$ creciente e integrable en $(-\infty, 0]$ entonces existe una constante $c > 0$ tal que*

$$|\Psi_\varepsilon * f(z)| \leq c\,M^+ f(z),$$

para todo $\varepsilon > 0$ y toda $f \in L^1_{loc}$.

Demostración. Daremos la demostración del caso 1 siendo la otra similar.

$$
\begin{aligned}
|\Psi_\varepsilon * f(z)| &\leq \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{z}\Psi\left(\frac{z-y}{\varepsilon}\right)|f(y)|\,dy\\
&= \frac{1}{\varepsilon}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{z-\varepsilon 2^{n+1}}^{z-\varepsilon 2^{n}}\Psi\left(\frac{z-y}{\varepsilon}\right)|f(y)|\,dy \leq\\
&\leq \frac{1}{\varepsilon}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Psi(2^n)\int_{z-\varepsilon 2^{n+1}}^{z}|f(y)|\,dy\\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\Psi(2^n)\,2^{n+1}\frac{1}{\varepsilon 2^{n+1}}\int_{z-\varepsilon 2^{n+1}}^{z}|f(y)|\,dy \leq\\
&\leq 4\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Psi(2^n)\,2^{n-1}\right)M^{-}f(z) \leq 4\left(\int\Psi(t)\,dt\right)M^{-}f(z).
\end{aligned}
$$

■

2.2. Maximal sharp lateral

En [7] F. J. Martín-Reyes y A. de la Torre definen la función maximal sharp lateral y estudian el espacio BMO^{+} asociado.

Definición 2.4 *Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ una función a valores reales. Se define*

$$
f_{+}^{\#}(x) = \sup_{h>0}\frac{1}{h}\int\limits_{x}^{x+h}\left(f(y) - \frac{1}{h}\int\limits_{x+h}^{x+2h}f(t)\,dt\right)^{+}dy,
$$

donde $z^{+} = \text{máx}(z,0)$.

Definición 2.5 *$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ pertenece a BMO^{+} si $f_{+}^{\#} \in L^{\infty}$.*

El siguiente teorema también se encuentra en [7].

Teorema 2.6 *Sean $\omega \in A_{\infty}^{+}$ y $f \geq 0$ tal que $M^{+}(f) \in L_{\omega}^{p_0}$ para algún $0 < p_0 < \infty$. Entonces para todo p, $p_0 \leq p < \infty$, se tiene que*

$$
\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(M^{+}(f)(x)\right)^{p}\omega(x)\,dx \leq c\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(f_{+}^{\#}(x)\right)^{p}\omega(x)\,dx,
$$

donde la constante $c > 0$ no depende de f.

Definiremos otra maximal sharp lateral, que resultará ser mayor que la anterior.

Definición 2.7 *Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, se define*

$$f_+^{\#\#}(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \left| f(y) - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt \right| dy.$$

Lema 2.8 *Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, se tiene que*

$$(|f|)_+^{\#}(x) \leq 8 f_+^{\#\#}(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. Para cada $h > 0$.

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} \left(|f(y)| - \frac{1}{h} \int_{x+h}^{x+2h} |f(t)|\, dt \right)^+ dy \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \left| |f(y)| - \frac{1}{h} \int_{x+h}^{x+2h} |f(t)|\, dt \right| dy =$$

$$= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \left| \frac{1}{h} \int_{x+h}^{x+2h} (|f(y)| - |f(t)|)\, dt \right| dy \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \frac{1}{h} \int_{x+h}^{x+2h} ||f(y)| - |f(t)||\, dt\, dy \leq$$

$$\leq \frac{1}{h^2} \int_x^{x+2h} \int_x^{x+2h} |f(y) - f(t)|\, dt\, dy \leq$$

$$\leq \frac{1}{h^2} \int_x^{x+2h} \int_x^{x+2h} \left(\left| f(y) - \frac{1}{h} \int_x^{x+2h} f(u)\, du \right| + \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+2h} f(u)\, du - f(t) \right| \right) dt\, dy =$$

$$= \frac{4}{2h} \int_x^{x+2h} \left| f(y) - \frac{1}{h} \int_x^{x+2h} f(u)\, du \right| dy + \frac{4}{2h} \int_x^{x+2h} \left| f(t) - \frac{1}{h} \int_x^{x+2h} f(u)\, du \right| dt.$$

De donde, tomando supremo para $h > 0$,

$$(|f|)_+^{\#}(x) \leq 8 f_+^{\#\#}(x).$$

■

Como consecuencia inmediata del Teorema 2.6 y el lema anterior tenemos:

Corolario 2.9 *Sean $\omega \in A_\infty^+$ y f tal que $M^+(f) \in L_\omega^{p_0}$ para algún $0 < p_0 < \infty$. Entonces para todo p, $p_0 \leq p < \infty$, se tiene que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(M^+(f)(x) \right)^p \omega(x)\, dx \leq c \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_+^{\#\#}(x) \right)^p \omega(x)\, dx,$$

donde la constante $c > 0$ no depende de f.

Lema 2.10 *Sean $N \in \mathbb{N}$ y $\varphi \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Si para cada $x \in \mathbb{R}$ existe $g(x) \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\delta > 0$, φ se descompone como $\varphi = \varphi_{\delta,1} + \cdots + \varphi_{\delta,n}$ $(n \leq N)$ con*

$$\frac{1}{\delta} \int\limits_x^{x+\delta} \left|\varphi_{\delta,i}(y) - a_{x,\delta,i}\right| dy \leq g(x)$$

para algún $a_{x,\delta,i} \in \mathbb{C}$ entonces $\varphi_+^{\#\#}(x) \leq 2N\, g(x)$.

Demostración. No es difícil ver que

$$\varphi_+^{\#\#}(x) \leq 2 \sup_{h>0} \inf_{a \in \mathbb{C}} \frac{1}{h} \int\limits_x^{x+h} |\varphi(y) - a|\, dy$$

Luego, si para cada $h > 0$, es $a_{x,h} = a_{x,h,1} + \cdots + a_{x,h,n}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi_+^{\#\#}(x) &\leq 2 \sup_{h>0} \frac{1}{h} \int\limits_x^{x+h} |\varphi(y) - a_{x,h}|\, dy \leq 2 \sup_{h>0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h} \int\limits_x^{x+h} \left|\varphi_{h,i}(y) - a_{x,h,i}\right| dy \leq \\ &\leq 2n\, g(x) \leq 2N\, g(x). \end{aligned}$$

■

2.3. Acotación en L^p_ω, $1 < p < \infty$

Definición 2.11 *Sean $0 < b' < \infty$ y $2 \leq p < \infty$ se define el núcleo*

$$\tilde{K}(x) = \frac{\exp\left(i\, |x|^{b'}\right)}{|x|^{(2+b')/p}}.$$

El siguiente lema es el Lema 2.1 en [1].

Lema 2.12 *Si $(2 + b')/p < 1$ entonces existe una constante $c = c(p, b') > 0$ tal que*

$$\left\|\tilde{K} * f\right\|_p \leq c\, \|f\|_{p'},$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

El siguiente lema es la versión lateral del Lema 2.15 en [1]. La demostración que damos es esencialmente la de Chanillo.

Lema 2.13 *Sea $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Si $r > 1$ entonces existe una constante $c = c(r, b') > 0$, que no depende de f, tal que*

$$(K_{b'} * f)_+^{\#\#}(x_0) \leq c \left(M^+(|f|^r)(x_0)\right)^{1/r}$$

para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

Demostración. Bastará con probar que $K_{b'} * f$ está en las condiciones del Lema 2.10 con $g(x_0) = c\left(M^+(|f|^r)(x_0)\right)^{1/r}$

Sea $I = (x_0, x_0 + \delta)$. Fijamos un número $\delta_0 = \delta_0(b') > 0$ tal que

$$2\delta_0 < \delta_0^{1/(b'+1)} < 1.$$

Como $\left(M^+(|f|^r)(x_0)\right)^{1/r}$ es creciente en la variable r entonces bastará probar el lema para valores de r cercanos a 1 y, por lo tanto se puede suponer que

$$(2 + b')/r' < 1, \tag{10}$$

donde $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$.

Se divide la demostración en dos casos.

Caso $\delta \geq \delta_0$.

Si $I^* = \left(x_0, x_0 + \frac{2}{\delta_0}\delta\right)$ se descompone $f = f_1 + f_2$, donde $f_1 = f\chi_{I^*}$.

Se tiene que

$$\int_I |K_{b'} * f(x)|\, dx \leq \int_I |K_{b'} * f_1(x)|\, dx + \int_I |K_{b'} * f_2(x)|\, dx.$$

El segundo sumando es nulo. En efecto, como $sop(K_{b'}) \subset [-1, 0]$ entonces, para $t < x_0 \leq x$ se tiene que $K_{b'}(x - t) = 0$. Y si $t > x_0 + \frac{2}{\delta_0}\delta$ y $x \in I$ entonces $t - x = t - x_0 + x_0 - x > \frac{2}{\delta_0}\delta - \delta \geq \left(\frac{2}{\delta_0} - 1\right)\delta_0 = (2 - \delta_0) > 1$ y, por lo tanto, también se tiene que $K_{b'}(x - t) = 0$.

El primer sumando se acota usando la Desigualdad de Hölder y el Teorema 1.4:

$$\int_I |K_{b'} * f_1(x)|\, dx \leq \delta^{1/r'} \left(\int_I |K_{b'} * f_1(x)|^r\, dx\right)^{1/r} \leq c\delta^{1/r'} \left(\int_{\mathbb{R}} |f_1(x)|^r\, dx\right)^{1/r}$$

$$= c\delta^{1/r'}\delta^{1/r} \left(\frac{1}{\frac{2}{\delta_0}\delta} \int_{x_0}^{x_0 + \frac{2}{\delta_0}\delta} |f(x)|^r\, dx\right)^{1/r} \leq c\delta \left(M^+(|f|^r)(x_0)\right)^{1/r}.$$

Por lo tanto en este caso hemos obtenido que

$$\frac{1}{\delta}\int_I |K_{b'} * f(x)|\, dx \leq c\left(M^+(|f|^r)(x_0)\right)^{1/r}.$$

Caso $\delta \leq \delta_0$.

Se descompone $f = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5$ donde

$f_1 = f\chi_{(x_0, x_0 + 2\delta)}$,

$f_2 = f\chi_{\left[x_0 + 2\delta, x_0 + \delta^{1/(b'+1)}\right)}$,

$f_3 = f\chi_{\left[x_0 + \delta^{1/(b'+1)}, x_0 + 1\right)}$ y

$f_4 = f\chi_{[x_0+1,x_0+2)}$.

Igual que en el caso anterior se tiene que

$$\int_I |K_{b'} * f_1(x)|\, dx \leq \delta \left(M^+ (|f|^r)(x_0)\right)^{1/r}.$$

Como $sop(K_{b'}) \subset [-1,0]$, el soporte de f_5 implica que $K_{b'} * f_5(x) = 0$ para todo $x \in I$.

Para estimar $\int_I |K_{b'} * f_4(x)|\, dx$ basta observar que

$$\begin{aligned} |K_{b'} * f_4(x)| &\leq \int_{x_0+1}^{x_0+2} \frac{|f(t)|}{t-x} dt \leq \int_{x_0+1}^{x_0+2} \frac{|f(t)|}{1-\delta} dt \leq \frac{1}{1-\delta_0} \int_{x_0}^{x_0+2} |f(t)|\, dt \\ &\leq cM^+(f)(x_0) \leq c\left(M^+(|f|^r)(x_0)\right)^{1/r}, \end{aligned}$$

de donde

$$\int_I |K_{b'} * f_4(x)|\, dx \leq c\delta \left(M^+(|f|^r)(x_0)\right)^{1/r}.$$

Ahora estimaremos $\int_I |K_{b'} * f_3(x) - a_I|\, dx$, donde

$$a_I = \int_{x_0+\delta^{1/(b'+1)}}^{x_0+1} \frac{\exp(i(t-x_0)^{-b'})}{t-x_0} f_3(t)\, dt \in \mathbb{C}.$$

Para $x \in I$ y $x_0+\delta^{1/(b'+1)} < t < x_0+1$ se tiene que $0 < t-x < x_0+1-x < 1$ y, por lo tanto,

$$|K_{b'} * f_3(x) - a_I| \leq \int_{x_0+\delta^{1/(b'+1)}}^{x_0+1} \left| \frac{\exp(i(t-x)^{-b'})}{t-x} - \frac{\exp(i(t-x_0)^{-b'})}{t-x_0} \right| |f_3(t)|\, dt.$$

Usando el Teorema del Valor Medio obtenemos para $x \in I$ y $x_0+\delta^{1/(b'+1)} < t < x_0+1$,

$$\left| \frac{\exp(i(t-x)^{-b'})}{t-x} - \frac{\exp(i(t-x_0)^{-b'})}{t-x_0} \right| \leq \left(\tfrac{c}{(t-\xi)^{2+b'}} + \tfrac{c}{(t-\xi)^2} \right)(x-x_0) \leq c\tfrac{\delta}{(t-\xi)^{2+b'}}$$

donde $x_0 < \xi < x$.

Como $t - \xi > \delta$ entonces

$$t-\xi = t-x_0+x_0-\xi > t-x_0-\delta > t-x_0-(t-\xi),$$

de donde

$$t-\xi > \frac{1}{2}(t-x_0).$$

Luego

$$\left|\frac{\exp(i\,(t-x)^{-b'})}{t-x}-\frac{\exp(i\,(t-x_0)^{-b'})}{t-x_0}\right|\leq c\frac{\delta}{(t-x_0)^{2+b'}}$$

y, por lo tanto,

$$|K_{b'}*f_3\,(x)-a_I|\leq c\int\limits_{x_0+\delta^{1/(b'+1)}}^{x_0+1}\frac{\delta\;|f_3\,(t)|}{(t-x_0)^{2+b'}}dt.$$

Reescribiendo el miembro de la derecha para usar el Lema 2.3,

$$|K_{b'}*f_3\,(x)-a_I|\leq c\int\limits_{t-x_0\geq\delta^{1/(b'+1)}}\frac{\delta\;|f\,(t)|}{(t-x_0)^{2+b'}}dt=c\int\limits_{t-x_0\geq\delta^{1/(b'+1)}}\frac{\delta\;|f\,(t)|}{\delta^{\frac{2+b'}{b'+1}}\left(\frac{t-x_0}{\delta^{1/(b'+1)}}\right)^{2+b'}}dt$$

$$=c\int\limits_{t-x_0\geq\delta^{1/(b'+1)}}\frac{|f\,(t)|}{\delta^{\frac{1}{b'+1}}\left(\frac{t-x_0}{\delta^{1/(b'+1)}}\right)^{2+b'}}dt=c\int\limits_{t-x_0\geq\delta^{1/(b'+1)}}\frac{|f\,(t)|}{\delta^{\frac{1}{b'+1}}\left(\frac{t-x_0}{2\delta^{1/(b'+1)}}+\frac{t-x_0}{2\delta^{1/(b'+1)}}\right)^{2+b'}}dt$$

$$\leq c\int\limits_{t-x_0\geq 0}\frac{|f\,(t)|}{\delta^{\frac{1}{b'+1}}\left(1+\frac{t-x_0}{\delta^{1/(b'+1)}}\right)^{2+b'}}dt\leq cM^+\,(f)\,(x_0)\leq c\left(M^+\,(|f|^r)\,(x_0)\right)^{1/r}.$$

Y, promediando en el intervalo I, tenemos que

$$\int\limits_I|K_{b'}*f_3\,(x)|\,dx\leq c\delta\left(M^+\,(|f|^r)\,(x_0)\right)^{1/r}.$$

Por último se estima el término correspondiente a f_2.

Para $x\in I$ y $x_0+2\delta<t<x_0+\delta^{1/(b'+1)}$ se tiene, como en el caso anterior, que $0<t-x<1$. Luego puede escribirse

$$K_{b'}*f_2\,(x)=\int\frac{\exp(i\,(t-x)^{-b'})}{t-x}f_2\,(t)\,dt=$$

$$=\int\frac{\exp(i\,(t-x)^{-b'})}{(t-x)^{(2+b')/r'}}\left(\frac{1}{(t-x)^{1-(2+b')/r'}}-\frac{1}{(t-x_0)^{1-(2+b')/r'}}\right)f_2\,(t)\,dt+$$

$$+\int\frac{\exp(i\,|t-x|^{-b'})}{|t-x|^{(2+b')/r'}}\left(\frac{f_2\,(t)}{(t-x_0)^{1-(2+b')/r'}}\right)dt=A+B.$$

Por el Teorema del Valor Medio se tiene que

$$\left|\frac{1}{(t-x)^{1-(2+b')/r'}}-\frac{1}{(t-x_0)^{1-(2+b')/r'}}\right|=c\frac{(x-x_0)}{(t-\xi)^{2-(2+b')/r'}},$$

donde $x_0 < \xi < x$. Y teniendo en cuenta que para todo $u \in I$ y $x_0 + 2\delta < t$ vale que

$$t - u \geq \frac{1}{2}(t - x_0),$$

podemos estimar

$$\begin{aligned}
|A| &\leq c \int \frac{1}{(t-x_0)^{(2+b')/r'}} \frac{(x-x_0)}{(t-x_0)^{2-(2+b')/r'}} |f_2(t)|\, dt \leq \\
&\leq c\delta \int\limits_{t-x_0>\delta} \frac{1}{(t-x_0)^2} |f(t)|\, dt = c\delta \int\limits_{t-x_0>\delta} \frac{|f(t)|}{\delta^2 \left(\frac{t-x_0}{\delta}\right)^2} dt = \\
&= c \int\limits_{t-x_0>\delta} \frac{|f(t)|}{\delta \left(\frac{t-x_0}{2\delta} + \frac{t-x_0}{2\delta}\right)^2} dt \leq c \int\limits_{t-x_0>0} \frac{|f(t)|}{\delta \left(1 + \frac{t-x_0}{\delta}\right)^2} dt.
\end{aligned}$$

Aplicando el Lema 2.3 tenemos que,

$$|A| \leq cM^+(f)(x_0) \leq c\left(M^+(|f(t)|^r)(x_0)\right)^{1/r}. \tag{11}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta (10) podemos utilizar el Lema 2.12 para obtener,

$$\begin{aligned}
\int\limits_I |B|\, dx &= \int\limits_I \left|\tilde{K} * \left(\frac{f_2(\cdot)}{(\cdot - x_0)^{1-(2+b')/r'}}\right)(x)\right| dx \leq \\
&\leq \delta^{1/r} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left|\tilde{K} * \left(\frac{f_2(\cdot)}{(\cdot - x_0)^{1-(2+b')/r'}}\right)\right|^{r'} (x)\, dx\right)^{1/r'} \leq \\
&\leq c\delta^{1/r} \left(\int \left|\frac{f_2(x)}{(x-x_0)^{1-(2+b')/r'}}\right|^r dx\right)^{1/r} = \\
&= c\delta^{1/r} \left(\int\limits_{x_0+2\delta}^{x_0+\delta^{1/(b'+1)}} \frac{|f(x)|^r}{(x-x_0)^{r-(2+b')(r-1)}} dx\right)^{1/r}.
\end{aligned}$$

Entonces, si k_0 es un entero tal que $2^{k_0}\delta < \delta^{1/\left(b'+1\right)} \leq 2^{k_0+1}\delta$, se puede estimar

$$\begin{aligned}
\int_I |B|\, dx &\leq c\delta^{1/r}\left(\sum_{k=1}^{k_0}\int_{x_0+2^k\delta}^{x_0+2^{k+1}\delta}\frac{|f(x)|^r}{(x-x_0)^{r-(2+b')(r-1)}}dx\right)^{1/r} = \\
&\leq c\delta^{1/r}\left(\sum_{k=1}^{k_0}\frac{2^k\delta}{\left(2^k\delta\right)^{r-(2+b')(r-1)}}\frac{1}{2^{k+1}\delta}\int_{x_0}^{x_0+2^{k+1}\delta}|f(x)|^r\, dx\right)^{1/r} \leq \\
&\leq c\delta^{1/r}\left(\sum_{k=1}^{k_0}\left(2^k\delta\right)^{\left(1+b'\right)(r-1)}\right)^{1/r}\left(M^+\left(|f|^r\right)(x_0)\right)^{1/r} \leq \\
&\leq c\delta^{1/r}\left(\left(2^{k_0}\delta\right)^{\left(1+b'\right)(r-1)}\right)^{1/r}\left(M^+\left(|f|^r\right)(x_0)\right)^{1/r} \leq \\
&\leq c\delta^{1/r}\left(\left(\delta^{1/\left(b'+1\right)}\right)^{\left(1+b'\right)(r-1)}\right)^{1/r}\left(M^+\left(|f|^r\right)(x_0)\right)^{1/r} = \\
&= c\delta^{1/r}\delta^{1/r'}\left(M^+\left(|f|^r\right)(x_0)\right)^{1/r} = c\delta\left(M^+\left(|f|^r\right)(x_0)\right)^{1/r}.
\end{aligned}$$

Esta estimación junto con (11) nos da

$$\int_I |K_{b'} * f_2(x)|\, dx \leq \int_I |A|\, dx + \int_I |B|\, dx \leq c\delta\left(M^+\left(|f|^r\right)(x_0)\right)^{1/r}.$$

■

Teorema 2.14 *Sea $\omega \in A_p^+$, $1 < p < \infty$ entonces existe una constante $c > 0$ tal que*

$$\|K_{b'} * f\|_{p,\omega} \leq c\,\|f\|_{p,\omega},$$

para toda $f \in L_\omega^p$.

Demostración. Supondremos $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Para utilizar el Corolario 2.9 probaremos que $M^+(K_{b'} * f) \in L_\omega^p$. Por el Teorema Maximal bastará con probar que $K_{b'} * f \in L_\omega^p$. Teniendo en cuenta (vease 4 del Lema 2.1) que existe $s > 1$ tal que $\omega^s \in A_p^+$, y que $K_{b'} * f$ tiene soporte en un intervalo acotado I, se tiene por el Teorema 1.4 y la Observación 2.2 que

$$\begin{aligned}
\|K_{b'} * f\|_{p,\omega}^p &= \int_I |K_{b'} * f(x)|^p\,\omega(x)\, dx \leq \\
&\leq \left(\int_I |K_{b'} * f(x)|^{ps'}\, dx\right)^{1/s'}\left(\int_I \omega(x)^s\, dx\right)^{1/s} \leq \\
&\leq c\left(\int_I |f(x)|^{ps'}\, dx\right)^{1/s'}\left(\int_I \omega(x)^s\, dx\right)^{1/s} < \infty.
\end{aligned}$$

Luego, como $|K_{b'} * f(x)| \leq M^{+}(K_{b'} * f)(x)$ para casi todo x, y por el Corolario 2.9 tenemos que

$$\|K_{b'} * f\|_{p,\omega} \leq \left\|M^{+}(K_{b'} * f)\right\|_{p,\omega} \leq c \left\|(K_{b'} * f)_{+}^{\#\#}\right\|_{p,\omega}.$$

Por el Lema 2.13

$$\|K_{b'} * f\|_{p,\omega} \leq c \left\|\left(M^{+}(|f|^{r})\right)^{1/r}\right\|_{p,\omega},$$

donde $r > 1$.

Por 5 del Lema 2.1 podemos eligir r suficientemente cerca de 1 de manera que $\omega \in A_{p/r}^{+}$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|K_{b'} * f\|_{p,\omega} &\leq c \left\|\left(M^{+}(|f|^{r})\right)^{1/r}\right\|_{p,\omega} = \\ &= c \left\|\left(M^{+}(|f|^{r})\right)\right\|_{p/r,\omega}^{1/r} \leq c \left\|(|f|^{r})\right\|_{p/r,\omega}^{1/r} = c \|f\|_{p,\omega}. \end{aligned}$$

■

3. Tipo débil $(1,1)$ en L^1_ω, $\omega \in A^1_+$

En esta sección demostraremos el resultado principal de este trabajo: el tipo débil $(1,1)$ del Operador Fuertemente Singular Lateral $T_{b'}$ en L^1_ω donde $\omega \in A^1_+$.

Primero enunciaremos varios resultados que se utilizarán en la demostración, algunos de los cuales serán probados en secciones posteriores.

3.1. Resultados previos

Definición 3.1 *Para $0 < \alpha < 1$ se define el operador Integral Fraccionaria I^+_α como*

$$I^+_\alpha f(x) = \int_x^\infty \frac{f(y)}{(y-x)^{1-\alpha}} dy,$$

donde f es una función medible.

El siguiente Teorema de la Integral Fraccionaria Lateral se encuentra en [6]:

Teorema 3.2 *Sean $0 < \alpha < 1$, $1 < p < \frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$, $r = 1 + \frac{q}{p'}$ y $\mu^q \in A^+_r$. Existe una constante c tal que para toda función medible f,*

$$\left\| I^+_\alpha f \right\|_{q,\mu^q} \leq c \left\| f \right\|_{p,\mu^p}.$$

La siguiente proposición es la versión lateral del Lema (3.5) en [1], y será demostrada en la Sección 8:

Proposición 3.3 *Sea $\omega \in A^+_1$. Existe $p_0 = p_0(\omega)$, $1 < p_0 < 2$, tal que el operador P_{b/p'_0} dado por el multiplicador*

$$\widehat{P_{b/p'_0} f}\,(\xi) = \widehat{K_{b'}}\,(\xi)\,(\xi + i)^{b/p'_0}\,\widehat{f}\,(\xi)$$

resulta acotado en $L^{p_0}_\omega$.

Definición 3.4 *Dado $0 < \alpha < 1$ se define el operador G^+_α por el multiplicador*

$$\widehat{G^+_\alpha f}\,(\xi) = \frac{1}{(\xi + i)^\alpha} \widehat{f}\,(\xi).$$

Observación 3.5 *El operador G^+_{b/p'_0} reemplazará al operador G_{b/p'_0} en la demostración del Teorema C en la página 100 de [1].*

Lema 3.6 *El núcleo asociado a G^+_α es*

$$\Phi(x) = c_\alpha \frac{\exp(x)}{(-x)^{1-\alpha}} \chi_{(-\infty,0)}(x).$$

Demostración. La demostración de este lema puede encontrarse en [14] . Verificaremos que $\widehat{\Phi}(\xi) = (\xi + i)^{-\alpha}$.

Utilizando el cálculo de residuos es fácil ver que para $0 < \alpha < 1$,

$$(\xi + i)^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{-\alpha}}{x - (\xi + i)} dx,$$

e integrando directamente se tiene que

$$\int_0^{+\infty} e^{-iu(x-\xi)} e^{-u} du = \frac{1}{i\,(x - (\xi + i))}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
(\xi + i)^{-\alpha} &= 2\pi \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \frac{1}{x^{\alpha}} \left(\int_0^{+\infty} e^{-iu(x-\xi)} e^{-u} du \right) dx \\
&= 2\pi \lim_{N\to\infty} \int_0^{+\infty} e^{iu\xi} e^{-u} \left(\int_{-N}^{N} \frac{1}{x^{\alpha}} e^{-iux} dx \right) du \\
&= 2\pi \lim_{N\to\infty} \int_0^{+\infty} e^{iu\xi} e^{-u} u^{\alpha-1} \left(\int_{-uN}^{uN} \frac{1}{t^{\alpha}} e^{-it} dt \right) du \\
&= 2\pi \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha}} e^{-it} dt \right) \int_0^{+\infty} e^{iu\xi} e^{-u} u^{\alpha-1}\, du \\
&= c_{\alpha} \int_{-\infty}^{0} e^{-ix\xi} e^{x} (-x)^{\alpha-1}\, dx \\
&= \left(c_{\alpha} e^{x} (-x)^{\alpha-1} \chi_{(-\infty,0)}(x) \right)^{\widehat{}}(\xi),
\end{aligned}$$

donde $c_{\alpha} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha}} e^{-it} dt$.

En la página 181 de [14] se calcula $c_{\alpha} = (2\pi)^2 e^{-\pi i\alpha/2}/\Gamma(\alpha)$ donde Γ es la función Gamma. ■

3.2. Tipo débil $(1,1)$ con peso $\omega \in A_1^+$

Teorema 3.7 *Si $\omega \in A_1^+$ entonces existe una constante $c = c(\omega, b) > 0$ tal que para toda $f \in L_{\omega}^1$ y $\lambda > 0$*

$$\omega\{x : |T_b f(x)| > \lambda\} \le \frac{c}{\lambda} \|f\|_{1,\omega}.$$

Demostración. Se supondrá $f \in C_0^{\infty}$. Sea el abierto $\Omega = \{t : M^{+}(f)(t) > \lambda\}$. Si $I^k = (a^k, b^k)$ es una de las componentes conexas de Ω entonces, por ser $f \in C_0^{\infty}$, I^k es un intervalo acotado.

En cada intervalo I^k consideramos la siguiente descomposición de Whitney lateral:

$$x_1^k = b^k \qquad \text{y} \qquad x_{j+1}^k = \frac{a^k + x_j^k}{2},$$

$j = 1, 2....$

Luego, si $I_j^k = \left[x_{j+1}^k, x_j^k\right)$, entonces $I^k = \cup_j I_j^k$.

Se tiene control sobre los promedios de f en I_j^k, esto es

$$\frac{1}{\left|I_j^k\right|} \int_{I_j^k} |f(t)|\, dt \leq 2\lambda. \tag{12}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\left|I_j^k\right|} \int_{I_j^k} |f(t)|\, dt &= \frac{1}{x_j^k - x_{j+1}^k} \int_{x_{j+1}^k}^{x_j^k} |f(t)|\, dt \\
&\leq \frac{x_j^k - a^k}{x_j^k - x_{j+1}^k} \frac{1}{x_j^k - a^k} \int_{a^k}^{x_j^k} |f(t)|\, dt \leq 2M^+(f)\left(a^k\right) \leq 2\lambda.
\end{aligned}$$

Se definen

$$\psi(x) = f(x)\, \chi_{\mathbb{R}-\Omega}(x),$$

$$f_j^k(x) = f(x)\, \chi_{I_j^k}(x),$$

$$h(x) = \textstyle\sum_{j,k} f_j^k(x).$$

Luego, como $f(x) = \psi(x) + h(x)$,

$$\omega\{x : |T_b f(x)| > \lambda\} \leq \omega\{x : |T_b \psi(x)| > \lambda/2\} + \omega\{x : |T_b h(x)| > \lambda/2\}.$$

Utilizando la desigualdad de Chebychev y dado que, por el Teorema 2.14, T_b es de tipo fuerte $(2,2)$ con peso $\omega \in A_1^+ \subset A_2^+$ podemos acotar el primer sumando por

$$\frac{4}{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}} |T_b \psi(x)|^2\, \omega(x)\, dx \leq \frac{c}{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2\, \omega(x)\, dx = \frac{c}{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}-\Omega} |f(x)|^2\, \omega(x)\, dx.$$

Si $x \in \mathbb{R} - \Omega$ y $h > 0$ entonces $\frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t)|\, dt \leq \lambda$ y, por el Teorema de Diferenciación de Lebesgue, $|f(x)| \leq \lambda$, para casi todo $x \in \mathbb{R} - \Omega$. Luego

$$\omega\{x : |T_b \psi(x)| > \lambda/2\} \leq \frac{c}{\lambda} \int_{\mathbb{R}-\Omega} |f(x)|\, \omega(x)\, dx \leq \frac{c}{\lambda} \|f\|_{1,\omega}.$$

Ahora estimaremos $\omega\{x : |T_b h(x)| > \lambda/2\}$.

Sea $\overline{\Omega} = \cup 3I_j^k$, donde $3I_j^k = \left(x_j^k - 3\left|I_j^k\right|, x_j^k\right)$. Luego

$$\omega\{x : |T_b h(x)| > \lambda/2\} \leq \omega\left\{x \in \mathbb{R} - \overline{\Omega} : |T_b h(x)| > \lambda/2\right\} + \omega\left(\overline{\Omega}\right).$$

Como ω es duplicante a izquierda, y usando el tipo débil $(1,1)$ de M^{+} con peso $\omega \in A_1^{+}$, se tiene que

$$\omega\left(\overline{\Omega}\right) \leq \sum \omega\left(3I_j^k\right) \leq c\sum \omega\left(I_j^k\right) = c\,\omega\left(\Omega\right) \leq \frac{c}{\lambda}\left\|f\right\|_{1,\omega}.$$

Luego hay que estimar $\omega\left\{x \in \mathbb{R} - \overline{\Omega} : \left|T_b h\left(x\right)\right| > \lambda/2\right\}$.

Llamando $\delta_b = \left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1-b}{b}}$ se descompone

$$h\left(x\right) = \sum_{\left|I_j^k\right| \leq \delta_b} f_j^k\left(x\right) + \sum_{\left|I_j^k\right| > \delta_b} f_j^k\left(x\right) = h_1\left(x\right) + h_2\left(x\right).$$

Luego es suficiente estimar

$$\omega\left\{x \in \mathbb{R} - \overline{\Omega} : \left|T_b h_1\left(x\right)\right| > \lambda/4\right\} + \omega\left\{x \in \mathbb{R} - \overline{\Omega} : \left|T_b h_2\left(x\right)\right| > \lambda/4\right\}. \qquad (13)$$

Usando la desigualdad de Chebychev en el segundo sumando resulta que

$$\omega\left\{x \in \mathbb{R} - \overline{\Omega} : \left|T_b h_2\left(x\right)\right| > \lambda/4\right\} \leq \frac{4}{\lambda}\int_{\mathbb{R}-\overline{\Omega}} \left|T_b h_2\left(x\right)\right| \omega\left(x\right) dx. \qquad (14)$$

Pero, para $x \in \mathbb{R} - \overline{\Omega}$,

$$\left|T_b h_2\left(x\right)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left(i\left(y-x\right)^{-b'}\right)}{y-x}\chi_{[-1,0]}\left(x-y\right)\left(\sum_{\left|I_j^k\right| > \delta_b} f_j^k\left(y\right)\right) dy\right| \leq$$

$$\leq \sum_{\left|I_j^k\right| > \delta_b} \int_{I_j^k} \frac{\chi_{[-1,0]}\left(x-y\right)}{y-x}\left|f\left(y\right)\right| dy \leq \sum_{\left|I_j^k\right| > \delta_b} \int_{I_j^k} \frac{\chi_{[-1,0]}\left(x-y\right)}{\left(y-x\right)^2}\left|f\left(y\right)\right| dy.$$

Además, si $x \in \mathbb{R} - \overline{\Omega}$, podemos suponer $x_j^k - x \geq 3\left|I_j^k\right|$ pues si $x_j^k < x$ entonces $\chi_{[-1,0]}\left(x-y\right) = 0$ para todo $y \in I_j^k$. Luego

$$0 < x_j^k - x = x_j^k - y + y - x \leq \left|I_j^k\right| + y - x \leq \frac{1}{3}\left(x_j^k - x\right) + y - x,$$

para todo $y \in I_j^k$. O sea,

$$0 < \frac{2}{3}\left(x_j^k - x\right) \leq y - x$$

y, por lo tanto,

$$\left|T_b h_2\left(x\right)\right| \leq c\sum_{\left|I_j^k\right| > \delta_b} \int_{I_j^k} \frac{\chi_{[-1,0]}\left(x-y\right)}{\left(x_j^k - x\right)^2}\left|f\left(y\right)\right| dy.$$

Reemplazando en (14) obtenemos

$$\begin{aligned}\omega\left\{x\in\mathbb{R}-\overline{\Omega}:\left|T_bh_2\left(x\right)\right|>\frac{\lambda}{4}\right\} &\leq \frac{c}{\lambda}\sum_{\left|I_j^k\right|>\delta_b}\int_{\mathbb{R}-\overline{\Omega}}\int_{I_j^k}\frac{\chi_{[-1,0]}(x-y)}{\left(x_j^k-x\right)^2}\left|f\left(y\right)\right|dy\,\omega\left(x\right)dx\\ &\leq \frac{c}{\lambda}\sum_{\left|I_j^k\right|>\delta_b}\int_{I_j^k}\left|f\left(y\right)\right|dy\int_{x_j^k-x\geq 3\left|I_j^k\right|}\frac{\omega\left(x\right)dx}{\left(x_j^k-x\right)^2}.\end{aligned}$$

Para casi todo $z\in I_j^k$ con $\left|I_j^k\right|>\delta_b$, usando el Lema 2.3 y que $\omega\in A_1^+$, se tiene que

$$\int_{x_j^k-x\geq 3\left|I_j^k\right|}\frac{\omega\left(x\right)dx}{\left(x_j^k-x\right)^2}\leq\int_{z-x\geq 2\left|I_j^k\right|}\frac{\omega\left(x\right)dx}{\left(z-x\right)^2}\leq c\int_{z-x>0}\frac{\omega\left(x\right)dx}{\left(\left|I_j^k\right|+z-x\right)^2}<$$

$$<\frac{c}{\delta_b}\int_{z-x>0}\frac{1}{\left|I_j^k\right|}\frac{\omega\left(x\right)dx}{\left(1+\frac{z-x}{\left|I_j^k\right|}\right)^2}\leq c\,M^-\left(\omega\right)\left(z\right)\leq c\,\omega\left(z\right).$$

Luego

$$\begin{aligned}\omega\left\{x\in\mathbb{R}-\overline{\Omega}:\left|T_bh_2\left(x\right)\right|>\lambda/4\right\} &\leq \frac{c}{\lambda}\sum_{\left|I_j^k\right|>\delta_b}\int_{I_j^k}\left|f\left(y\right)\right|dy\inf_{z\in I_j^k} es\ \omega(z)\\ &\leq \frac{c}{\lambda}\left\|f\right\|_{1,\omega}.\end{aligned}$$

Queda así estimado el segundo sumando de (13).

Para estimar $\omega\left\{x\in\mathbb{R}-\overline{\Omega}:\left|T_bh_1\left(x\right)\right|>\lambda/4\right\}$ se hará una nueva simplificación.

Sea $\phi\in C_0^\infty$, $\phi\left(x\right)\geq 0$ tal que $sop\left(\phi\right)\subset\left(-1,0\right)$ y $\int\phi\left(x\right)dx=1$. Se definen

$$\phi_j^k\left(x\right)=\frac{1}{\left|I_j^k\right|^{1/(1-b)}}\phi\left(\frac{x}{\left|I_j^k\right|^{1/(1-b)}}\right).$$

Como $sop\left(\phi_j^k\right)\subset\left(-\left|I_j^k\right|^{1/(1-b)},0\right)$ entonces

$$sop\left(\phi_j^k*f_j^k\right)\subset\left(x_{j+1}^k-\left|I_j^k\right|^{1/(1-b)},x_j^k\right).$$

Además, como en este caso $\left|I_j^k\right|\leq\delta_b$,

$$\left|I_j^k\right|^{1/(1-b)}=\left|I_j^k\right|^{b/(1-b)}\left|I_j^k\right|\leq\delta_b^{b/(1-b)}\left|I_j^k\right|=\frac{\left|I_j^k\right|}{100}=\frac{\left|I_{j+1}^k\right|}{50}$$

y, por lo tanto,

$$sop\left(\phi_j^k * f_j^k\right) \subset I_{j+1}^k \cup I_j^k. \tag{15}$$

Para $x \in \mathbb{R} - \overline{\Omega}$, consideremos la diferencia

$$\left| T_b h_1(x) - T_b\left(\sum_{\left|I_j^k\right| \leq \delta_b} \phi_j^k * f_j^k\right)(x)\right|.$$

Se tiene que, (véase Lema 3.8 más adelante),

$$\left| T_b h_1(x) - T_b\left(\sum_{\left|I_j^k\right| \leq \delta_b} \phi_j^k * f_j^k\right)(x)\right| = \left| T_b\left(\sum_{\left|I_j^k\right| \leq \delta_b} \left(f_j^k - \phi_j^k * f_j^k\right)\right)(x)\right| \leq \tag{16}$$

$$\leq \sum_{\left|I_j^k\right| \leq \delta_b} \left| T_b\left(f_j^k - \phi_j^k * f_j^k\right)(x)\right| \leq \sum_{j,k=1}^{\infty} \left| T_b f_j^k(x) - T_b\left(\phi_j^k * f_j^k\right)(x)\right|.$$

Usando que $\int \phi_j^k(t)\,dt = 1$ se tiene que

$$\left| T_b f_j^k(x) - T_b\left(\phi_j^k * f_j^k\right)(x)\right| =$$

$$= \left| \int K_{b'}(x-y) f_j^k(y)\,dy - \int K_{b'}(x-y)\left(\phi_j^k * f_j^k\right)(y)\,dy\right| =$$

$$= \left| \int K_{b'}(x-y) f_j^k(y)\left(\int \phi_j^k(t)\,dt\right)dy - \int K_{b'}(x-y)\left(\int \phi_j^k(t) f_j^k(y-t)\,dt\right)dy\right| =$$

$$= \left| \int\int K_{b'}(x-y) f_j^k(y)\phi_j^k(t)\,dy\,dt - \int\int K_{b'}(x-y-t) f_j^k(y)\phi_j^k(t)\,dy\,dt\right| =$$

$$\leq \int\int \left|K_{b'}(x-y) - K_{b'}(x-y-t)\right| \left|f_j^k(y)\right| \phi_j^k(t)\,dy\,dt. \tag{17}$$

Si $x \notin 3I_j^k$, $y \in I_j^k$ y $t \in \left(-\left|I_j^k\right|^{1/(1-b)}, 0\right]$ entonces (vease el Lema 3.9 más adelante) se tiene que

$$\left|K_{b'}(x-y) - K_{b'}(x-y-t)\right| \leq c\left(\frac{\left|I_j^k\right|^{1/(1-b)}}{\left(\left|I_j^k\right| + x_j^k - x\right)^{2+b'}} + \frac{1}{1+\left(x_j^k - x\right)^2}\right)\chi_{\left(-\infty, x_j^k - 3\left|I_j^k\right|\right)}(x).$$

Reemplazando en (17) y en (16) e integrando:

$$\int\limits_{\mathbb{R}-\overline{\Omega}} \left| T_b h_1(x) - T_b \left(\sum_{\left|I_j^k\right| \leq \delta_b} \phi_j^k * f_j^k \right)(x) \right| \omega(x)\, dx$$

$$\leq \sum_{j,k=1}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}-\overline{\Omega}} \left| T_b f_j^k(x) - T_b \left(\phi_j^k * f_j^k \right)(x) \right| \omega(x)\, dx$$

$$\leq c \sum_{j,k=1}^{\infty} \int\limits_{x_j^k - x > 3\left|I_j^k\right|} \int\int \left[\frac{\left|I_j^k\right|^{1/(1-b)}}{\left(\left|I_j^k\right| + x_j^k - x\right)^{2+b'}} + \frac{1}{1+\left(x_j^k - x\right)^2} \right] \left| f_j^k(y) \right| \phi_j^k(t)\, dy\, dt\, \omega(x)\, dx$$

$$= c \sum_{j,k=1}^{\infty} \left(\int \left| f_j^k(y) \right| dy \right) \int\limits_{x_j^k - x > 3\left|I_j^k\right|} \left[\frac{\left|I_j^k\right|^{1/(1-b)}}{\left(\left|I_j^k\right| + x_j^k - x\right)^{2+b'}} + \frac{1}{1+\left(x_j^k - x\right)^2} \right] \omega(x)\, dx.$$

Pero, como $\omega \in A_1^+$, la última integral se mayora por $c \inf \mathrm{es}_{I_j^k}\ \omega$. En efecto, para casi todo $z \in I_j^k$, teniendo en cuenta que $2 + b' - \frac{1}{1-b} = 2 + \frac{b}{1-b} - \frac{1}{1-b} = 1$ y usando el Lema 2.3,

$$\int\limits_{x_j^k - x > 3\left|I_j^k\right|} \frac{\left|I_j^k\right|^{1/(1-b)}}{\left(\left|I_j^k\right| + x_j^k - x\right)^{2+b'}} \omega(x)\, dx \leq \int\limits_{z - x > 2\left|I_j^k\right|} \frac{\left|I_j^k\right|^{1/(1-b)}}{\left(\left|I_j^k\right| + z - x\right)^{2+b'}} \omega(x)\, dx \leq$$

$$\leq \int\limits_{z-x>0} \frac{1}{\left|I_j^k\right| \left(1 + \frac{z-x}{\left|I_j^k\right|}\right)^{2+b'}} \omega(x)\, dx \leq c\, M^- \omega(z) \leq\ c\ \omega(z).$$

Análogamente, para casi todo $z \in I_j^k$, se tiene que

$$\int\limits_{x_j^k - x > 3\left|I_j^k\right|} \frac{1}{1 + \left(x_j^k - x\right)^2} \omega(x)\, dx \leq\ c\ \omega(z).$$

Se ha obtenido

$$\int\limits_{\mathbb{R}-\overline{\Omega}} \left| T_b h_1(x) - T_b \left(\sum_{\left|I_j^k\right| \leq \delta_b} \phi_j^k * f_j^k \right)(x) \right| \omega(x)\, dx \leq$$

$$\leq c \sum_{j,k=1}^{\infty} \int \left| f_j^k(y) \right| dy \inf \mathrm{es}_{I_j^k}\ \omega \leq c\, \|f\|_{1,\omega}.$$

Con lo cual,

$$\omega\left\{x\in\mathbb{R}-\overline{\Omega}:\left|T_b h_1(x)\right|>\lambda/4\right\}\leq$$

$$\leq\omega\left\{x\in\mathbb{R}-\overline{\Omega}:\left|T_b h_1(x)-T_b\left(\sum_{\left|I_j^k\right|\leq\delta_b}\phi_j^k*f_j^k\right)(x)\right|>\lambda/8\right\}+$$

$$+\omega\left\{x\in\mathbb{R}-\overline{\Omega}:\left|T_b\left(\sum_{\left|I_j^k\right|\leq\delta_b}\phi_j^k*f_j^k\right)(x)\right|>\lambda/8\right\}\leq$$

$$\leq\frac{c}{\lambda}\left\|f\right\|_{1,\omega}+c\,\omega\left\{x\in\mathbb{R}-\overline{\Omega}:\left|T_b\left(\sum_{\left|I_j^k\right|\leq\delta_b}\phi_j^k*f_j^k\right)(x)\right|>\lambda/8\right\}.$$

El último sumando se acota utilizando la desigualdad de Chebychev con el exponente p_0 dado en la Proposición 3.3, por

$$\frac{c}{\lambda^{p_0}}\int_{\mathbb{R}-\overline{\Omega}}\left|T_b\left(\sum_{\left|I_j^k\right|\leq\delta_b}\phi_j^k*f_j^k\right)(x)\right|^{p_0}\omega(x)\,dx.$$

Utilizando la notación introducida en la Definición 3.4 y en la Proposición 3.3, y si $\frac{1}{p_0}+\frac{1}{p_0'}=1$, entonces es

$$\widehat{T_bf}(\xi)=\widehat{K_{b'}}(\xi)\;\widehat{f}(\xi)=\widehat{K_{b'}}(\xi)\,(\xi+i)^{b/p_0'}\,\frac{1}{(\xi+i)^{b/p_0'}}\widehat{f}(\xi)=\widehat{P_{b/p_0'}}\,(\xi)\,\widehat{G_{b/p_0'}^{+}}(\xi)\;\widehat{f}(\xi),$$

de donde se tiene que

$$T_b=P_{b/p_0'}\circ G_{b/p_0'}^{+}.$$

Luego, por la Proposición 3.3, el tipo débil $(1,1)$ del operador T_b quedará probado si vemos que

$$\int_{\mathbb{R}}\left|G_{b/p_0'}^{+}\left(\sum_{\left|I_j^k\right|\leq\delta_b}\phi_j^k*f_j^k\right)(x)\right|^{p_0}\omega(x)\,dx\leq c\,\lambda^{p_0-1}\left\|f\right\|_{1,\omega}.$$

Observemos que por ser $\left|I_j^k\right|\leq\delta_b$ entonces $\left|I_j^k\right|^{1/(1-b)}\leq\frac{1}{100}\left|I_j^k\right|$ y, por lo tanto,

$$sop\left(\phi_j^k\right)\subset\left(-\frac{1}{100}\left|I_j^k\right|,0\right).$$

Como, (véase Lema 3.10 más adelante),

$$G_{b/p_0'}^{+}\left(\sum_{\left|I_j^k\right|\leq\delta_b}\phi_j^k*f_j^k\right)(x)=\sum_{\left|I_j^k\right|\leq\delta_b}G_{b/p_0'}^{+}\left(\phi_j^k*f_j^k\right)(x),$$

llamando $\overline{I}_j^k = I_{j+1}^k \cup I_j^k$, descomponemos

$$G_{b/p_0'}^{+}\left(\sum_{\left|I_j^k\right|\leq\delta_b}\phi_j^k * f_j^k\right)(x) = \sum_{\left|I_j^k\right|\leq\delta_b} G_{b/p_0'}^{+}\left(\phi_j^k * f_j^k\right)(x)\,\chi_{\overline{I}_j^k}(x) +$$
$$+\sum_{\left|I_j^k\right|\leq\delta_b} G_{b/p_0'}^{+}\left(\phi_j^k * f_j^k\right)(x)\,\chi_{\mathbb{R}-\overline{I}_j^k}(x) = A + B.$$

Teniendo en cuenta (Lema 3.6) que el núcleo asociado a $G_{b/p_0'}^{+}$ es

$$\Phi(x) = c\frac{\exp(x)}{(-x)^{1-b/p_0'}}\chi_{(-\infty,0)}(x),$$

acotamos cada sumando de B para $x < x_{j+2}^k$ (pues si $x > x_j^k$ entonces $G_{b/p_0'}^{+}\left(\phi_j^k * f_j^k\right)(x) = 0$):

$$\begin{aligned}\left|G_{b/p_0'}^{+}\left(\phi_j^k * f_j^k\right)(x)\right| &\leq \int_{I_j^k}\Phi * \phi_j^k(x-y)\left|f_j^k(y)\right| dy\\ &\leq \sup_{y\in I_j^k}\left(\Phi * \phi_j^k(x-y)\right)\int_{I_j^k}\left|f_j^k(y)\right| dy. \qquad (18)\end{aligned}$$

Pero para $x < x_{j+2}^k$, $y \in I_j^k$, $z \in I_j^k$ y $t \in sop\left(\phi_j^k\right) \subset \left(-\frac{1}{4}\left|I_j^k\right|, 0\right)$ (con lo cual $\frac{1}{4}\left|I_j^k\right| \leq y + t - x$) se tiene que

$$0 < z + t - x = z - y + y + t - x \leq \left|I_j^k\right| + y + t - x \leq 5(y + t - x),$$

o sea

$$x - y - t \leq \frac{1}{5}(x - z - t) < 0,$$

y, por lo tanto,

$$\Phi(x - y - t) \leq \Phi\left(\frac{1}{5}(x - z - t)\right). \qquad (19)$$

Luego, llamando $\overline{\Phi}(u) = \Phi\left(\frac{u}{5}\right)$, tenemos

$$\Phi * \phi_j^k(x - y) \leq \overline{\Phi} * \phi_j^k(x - z),$$

y, promediando en $z \in I_j^k$,

$$\Phi * \phi_j^k(x - y) \leq \frac{1}{\left|I_j^k\right|}\int_{I_j^k}\overline{\Phi} * \phi_j^k(x - z)\, dz$$

para todo $y \in I_j^k$.

Reemplazando en (18), y usando (12), resulta que

$$\begin{aligned}\left|G^+_{b/p_0'}\left(\phi_j^k * f_j^k\right)(x)\right| \chi_{\mathbb{R}-\overline{I}_j^k}(x) &\leq \int_{I_j^k} \overline{\Phi} * \phi_j^k(x-z)\, dz \frac{1}{\left|I_j^k\right|} \int_{I_j^k} \left| f_j^k(y)\right| dy \\ &\leq 2\lambda \int_{I_j^k} \overline{\Phi} * \phi_j^k(x-z)\, dz = 2\lambda\, \overline{\Phi} * \phi_j^k * \chi_{I_j^k}(x)\,.\end{aligned}$$

Luego,

$$|B| \leq 2\lambda\, \overline{\Phi} * \sum_{\left|I_j^k\right| \leq \delta_b} \phi_j^k * \chi_{I_j^k}(x)\,.$$

Como $sop\left(\phi_j^k * \chi_{I_j^k}\right) \subset I_{j+1}^k \cup\, I_j^k$ y $\left\|\phi_j^k * \chi_{I_j^k}\right\|_\infty \leq \left\|\phi_j^k\right\|_1 = 1$, entonces

$$\left\|\overline{\Phi} * \sum_{j,k} \phi_j^k * \chi_{I_j^k}\right\|_\infty \leq 2\left\|\overline{\Phi}\right\|_1 < \infty.$$

Luego $|B| \leq c\lambda$ y

$$\int_{\mathbb{R}} |B|^{p_0}\, \omega(x)\, dx \leq c\, \lambda^{p_0-1} \int_{\mathbb{R}} |B|\, \omega(x)\, dx$$

$$= c\, \lambda^{p_0-1} \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{\left|I_j^k\right| \leq \delta_b} G^+_{b/p_0'}\left(\phi_j^k * f_j^k\right)(x)\, \chi_{\mathbb{R}-\overline{I}_j^k}(x)\right| \omega(x)\, dx$$

$$\leq c\, \lambda^{p_0-1} \int_{\mathbb{R}} \sum_{\left|I_j^k\right| \leq \delta_b} \int \Phi(x-y) \left|\phi_j^k * f_j^k(y)\right| dy\, \chi_{\mathbb{R}-\overline{I}_j^k}(x)\, \omega(x)\, dx$$

$$= c\, \lambda^{p_0-1} \sum_{\left|I_j^k\right| \leq \delta_b} \int_{\mathbb{R}-\overline{I}_j^k} \int \Phi(x-y) \left|\phi_j^k * f_j^k(y)\right| dy\, \omega(x)\, dx.$$

Por (19) y usando la desigualdad de Young,

$$\int_{\mathbb{R}} |B|^{p_0}\, \omega(x)\, dx \leq c\, \lambda^{p_0-1} \sum_{\left|I_j^k\right| \leq \delta_b} \int_{\mathbb{R}-\overline{I}_j^k} \overline{\Phi}(x-z)\, \omega(x)\, dx \int_{I_j^k} \left|f_j^k(y)\right| dy,$$

para todo $z \in I_j^k$.

Por el Lema 2.3 y, por ser $\omega \in A_1^+$,

$$\int_{\mathbb{R}-\overline{I}_j^k} \overline{\Phi}(x-z)\, \omega(x)\, dx \leq c\, M^-\omega(z) \leq c\, \omega(z)\,,$$

para todo $z \in I_j^k$.

Con lo cual,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |B|^{p_0}\,\omega(x)\,dx &\leq c\,\lambda^{p_0-1}\sum_{\left|I_j^k\right|\leq\delta_b} \inf es_{z\in I_j^k}\omega(z)\int_{I_j^k}\left|f_j^k(y)\right|dy \\ &\leq c\,\lambda^{p_0-1}\,\|f\|_{1,\omega}\,,\end{aligned}$$

como queríamos probar.

Por último veamos que $\int |A|^{p_0}\,\omega(x)\,dx \leq c\,\lambda^{p_0-1}\,\|f\|_{1,\omega}$.

Como cada $x\in\mathbb{R}$ está a lo sumo en dos intervalos $\overline{I}_j^k$ entonces

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |A|^{p_0}\,\omega(x)\,dx &\leq c\sum_{\left|I_j^k\right|\leq\delta_b}\int_{\overline{I}_j^k}\left|G^+_{b/p_0'}\left(\phi_j^k * f_j^k\right)(x)\right|^{p_0}\omega(x)\,dx \\ &\leq c\sum_{\left|I_j^k\right|\leq\delta_b}\int_{\mathbb{R}}\left(I^+_{b/p_0'}\left(\left|\phi_j^k * f_j^k\right|\right)(x)\right)^{p_0}\omega(x)\,dx, \quad (20)\end{aligned}$$

donde $I^+_{b/p_0'}$ es el operador Integral Fraccionaria (ver Definición 3.1).

Si $\frac{1}{p}=\frac{1}{p_0}+\frac{b}{p_0'}=1+\frac{b-1}{p_0'}$ entonces $\frac{b}{p_0'}<\frac{1}{p}<1$ y, como $\left(\omega^{1/p_0}\right)^{p_0}\in A_1^+$, podemos aplicar el Teorema 3.2 con $\alpha=\frac{b}{p_0'}$, $q=p_0$ y $\mu=\omega^{1/p_0}$ para obtener

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\left(I^+_{b/p_0'}\left(\left|\phi_j^k * f_j^k\right|\right)(x)\right)^{p_0}\omega(x)\,dx &\leq c\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\left(\phi_j^k * f_j^k\right)(x)\right|^{p}\omega^{p/p_0}(x)\,dx\right)^{p_0/p} \\ &= c\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\int\phi_j^k(x-y)\,f_j^k(y)\,dy\right|^{p}\omega^{p/p_0}(x)\,dx\right)^{p_0/p}\leq\end{aligned}$$

aplicando la desigualdad de Minkowski,

$$\begin{aligned}&\leq c\left(\int\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\phi_j^k(x-y)\,f_j^k(y)\right|^{p}\omega^{p/p_0}(x)\,dx\right)^{1/p}dy\right)^{p_0} = \\ &= c\left(\int\left(\int_{\mathbb{R}}\phi_j^k(x-y)^{p}\,\omega^{p/p_0}(x)\,dx\right)^{1/p}\left|f_j^k(y)\right|dy\right)^{p_0} = \\ &= c\left(\int\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{\left|I_j^k\right|^{\frac{1-p}{1-b}}}{\left|I_j^k\right|^{1/(1-b)}}\phi\left(\frac{x-y}{\left|I_j^k\right|^{1/(1-b)}}\right)^{p}\omega^{p/p_0}(x)\,dx\right)^{1/p}\left|f_j^k(y)\right|dy\right)^{p_0}\leq\end{aligned}$$

como $\phi \in C_0^\infty$, $\phi(x) \geq 0$ con $sop(\phi) \subset (-1,0)$ podemos usar el Lema 2.3,

$$\leq c\left(\int \left(\left|I_j^k\right|^{\frac{1-p}{1-b}} M^- \omega^{p/p_0}(y)\right)^{1/p} \left|f_j^k(y)\right| dy\right)^{p_0} \leq$$

y como $\omega^{p/p_0} \in A_1^+$ pues $0 < p/p_0 < 1$ y $\omega \in A_1^+$ (ver Lema 2.1),

$$\leq c\left(\left|I_j^k\right|^{\frac{1-p}{1-b}}\right)^{p_0/p} \left(\int \left|f_j^k(y)\right| \omega^{1/p_0}(y)\, dy\right)^{p_0} \leq$$

usando la desigualdad de Hölder con exponentes p_0 y p_0',

$$\leq c\left(\left|I_j^k\right|^{\frac{1-p}{1-b}}\right)^{p_0/p} \left(\int \left|f_j^k(y)\right| dy\right)^{p_0-1} \int \left|f_j^k(y)\right| \omega(y)\, dy \leq$$

por (12),

$$\leq c\lambda^{p_0-1} \left|I_j^k\right|^{p_0-1} \left(\left|I_j^k\right|^{\frac{1-p}{1-b}}\right)^{p_0/p} \int \left|f_j^k(y)\right| \omega(y)\, dy.$$

Recordando que $\frac{1}{p} = 1 + \frac{b-1}{p_0'}$ o, equivalentemente $\frac{1}{p'} = \frac{1-b}{p_0'}$, se tiene que

$$\frac{1-p}{1-b}\frac{p_0}{p} = \frac{-1}{1-b}\frac{p_0}{p'} = -\frac{p_0}{p_0'} = 1 - p_0.$$

Luego hemos probado que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(I_{b/p_0'}^+\left(\left|\phi_j^k * f_j^k\right|\right)(x)\right)^{p_0} \omega(x)\ dx \leq c\lambda^{p_0-1} \int_{I_j^k} \left|f_j^k(y)\right| \omega(y)\, dy.$$

Con lo cual, reemplazando en (20), tenemos

$$\int_{\mathbb{R}} |A|^{p_0} \omega(x)\ dx \leq c\,\lambda^{p_0-1} \sum_{\left|I_j^k\right| \leq \delta_b} \int_{I_j^k} \left|f_j^k(y)\right| \omega(y)\, dy \leq c\,\lambda^{p_0-1} \|f\|_{1,\omega},$$

quedando así probado el tipo débil $(1,1)$ del operador T_b.
■

Lema 3.8 *Con la notación de la demostración del Teorema 3.7 se tiene, para casi todo $x \in \mathbb{R}$, que*

$$\left|T_b\left(\sum_{\left|I_j^k\right| \leq \delta_b} \left(f_j^k - \phi_j^k * f_j^k\right)\right)(x)\right| \leq \sum_{\left|I_j^k\right| \leq \delta_b} \left|T_b\left(f_j^k - \phi_j^k * f_j^k\right)(x)\right|.$$

Demostración. Para abreviar llamemos $\Psi_j^k(x) = f_j^k(x) - \phi_j^k * f_j^k(x)$. Por el Teorema 1.4 sabemos que T_b es un operador acotado en L^2. Luego

$$\left\| T_b\left(\sum_{j,k=1}^{N} \Psi_j^k\right) - T_b\left(\sum_{j,k=1}^{\infty} \Psi_j^k\right)\right\|_2 = \left\| T_b\left(\sum_{j,k=N+1}^{\infty} \Psi_j^k\right)\right\|_2 \leq c\left\|\sum_{j,k=N+1}^{\infty} \Psi_j^k\right\|_2, \tag{21}$$

donde se sobreentiende que se suma sobre aquellos índices j, k tales que $\left|I_j^k\right| \leq \delta_b$.

Y como, por (15), $sop\left(\Psi_j^k\right) \subset I_{j+1}^k \cup I_j^k$ que se solapan de a dos, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{j,k=N+1}^{\infty} \Psi_j^k\right\|_2^2 &= \int \left|\sum_{j,k=N+1}^{\infty} \Psi_j^k(t)\right|^2 dt \leq 2\int \sum_{j,k=N+1}^{\infty} \left|\Psi_j^k(t)\right|^2 dt \leq \\
&\leq 4\int \sum_{j,k=N+1}^{\infty} \left(\left|f_j^k(t)\right|^2 + \left|\phi_j^k * f_j^k(t)\right|^2\right) dt \\
&= 4\sum_{j,k=N+1}^{\infty} \int \left|f_j^k(t)\right|^2 dt + 4\sum_{j,k=N+1}^{\infty} \int \left|\phi_j^k * f_j^k(t)\right|^2 dt.
\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Young, y como $\int \phi_j^k(t)dt = 1$, tenemos que

$$\left\|\sum_{j,k=N+1}^{\infty} \Psi_j^k\right\|_2^2 \leq 8 \int\limits_{\cup_{j,k=N}^{\infty} I_j^k} |f(t)|^2\, dt,$$

que, por ser $f \in C_0^\infty$, tiende a 0 si N tiende a $+\infty$.

Luego, teniendo en cuenta (21),

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} T_b\left(\sum_{j,k=1}^{N} \Psi_j^k\right) = T_b\left(\sum_{j,k=1}^{\infty} \Psi_j^k\right)$$

en L^2. Esto asegura la existencia de una subsucesión $(N_i)_{i=1}^{\infty}$ tal que para casi todo x,

$$\lim_{i\longrightarrow\infty} T_b\left(\sum_{j,k=1}^{N_i} \Psi_j^k\right)(x) = T_b\left(\sum_{j,k=1}^{\infty} \Psi_j^k\right)(x).$$

Por lo tanto, para casi todo x,

$$\left|T_b\left(\sum_{j,k=1}^{\infty}\Psi_j^k\right)(x)\right|=\lim_{i\longrightarrow\infty}\left|\sum_{j,k=1}^{N_i}T_b\Psi_j^k(x)\right|\le\sum_{j,k=1}^{\infty}\left|T_b\Psi_j^k(x)\right|,$$

como se había afirmado. ■

Lema 3.9 *Con la notación de la demostración del Teorema 3.7 se tiene que, si* $\left|I_j^k\right|\le\delta_b$, $x\notin 3I_j^k$, $y\in I_j^k$ *y* $t\in\left(-\left|I_j^k\right|^{1/(1-b)},0\right]$, *entonces*

$$|K_{b'}(x-y)-K_{b'}(x-y-t)|\le c\left(\frac{\left|I_j^k\right|^{1/(1-b)}}{\left(\left|I_j^k\right|+x_j^k-x\right)^{2+b'}}+\frac{1}{1+\left(x_j^k-x\right)^2}\right)\chi_{\left(-\infty,x_j^k-3\left|I_j^k\right|\right)}(x).$$

Demostración. Para $x\notin 3I_j^k$, $y\in I_j^k$ y $t\in\left(-\left|I_j^k\right|^{1/(1-b)},0\right]$ estimemos la diferencia:

$$|K_{b'}(x-y)-K_{b'}(x-y-t)|=$$
$$=\left|\frac{\exp\left(i(y-x)^{-b'}\right)}{y-x}\chi_{[-1,0]}(x-y)-\frac{\exp\left(i(y+t-x)^{-b'}\right)}{y+t-x}\chi_{[-1,0]}(x-y-t)\right|.$$

Si $x>x_j^k$ entonces $\chi_{[-1,0]}(x-y)=\chi_{[-1,0]}(x-y-t)=0$. Por lo tanto consideraremos

$$3\left|I_j^k\right|<x_j^k-x.$$

Luego se tiene que para todo $y\in I_j^k$ y $t\in\left(-\left|I_j^k\right|^{1/(1-b)},0\right]$ es

$$\begin{aligned}x_j^k-x &= x_j^k-y-t+y+t-x<\left|I_j^k\right|+\left|I_j^k\right|^{1/(1-b)}+y+t-x\\ &< 2\left|I_j^k\right|+y+t-x<\frac{2}{3}\left(x_j^k-x\right)+y+t-x,\end{aligned}$$

esto es

$$\frac{1}{3}\left(x_j^k-x\right)<y+t-x. \tag{22}$$

Sea $d_b=1+\delta_b^{1/(1-b)}+\delta_b$. Para $3\left|I_j^k\right|<x_j^k-x$ consideraremos tres casos.

Si $x_j^k-x>d_b$ entonces

$$y+t-x=x_j^k-x+y-x_j^k+t>d_b-\left|I_j^k\right|-\left|I_j^k\right|^{1/(1-b)}>1$$

y, por lo tanto, $\chi_{[-1,0]}(x-y)=\chi_{[-1,0]}(x-y-t)=0$. Con lo cual, en este caso, es

$$|K_{b'}(x-y)-K_{b'}(x-y-t)|=0.$$

Si $x_j^k-x<1$ entonces

$$0<y+t-x\le x_j^k-x<1,$$

y, por lo tanto, $\chi_{[-1,0]}(x-y)=\chi_{[-1,0]}(x-y-t)=1$, y

$$|K_{b'}(x-y)-K_{b'}(x-y-t)|=\left|\frac{\exp\left(i(y-x)^{-b'}\right)}{y-x}-\frac{\exp\left(i(y+t-x)^{-b'}\right)}{y+t-x}\right|\chi_{\left[-1,-3\left|I_j^k\right|\right]}\left(x-x_j^k\right).$$

Usando el Teorema del Valor Medio tenemos que

$$\left|\frac{\exp\left(i(y-x)^{-b'}\right)}{y-x}-\frac{\exp\left(i(y+t-x)^{-b'}\right)}{y+t-x}\right|\leq\left[\frac{c}{(y+\theta t-x)^{2+b'}}+\frac{c}{(y+\theta t-x)^{2}}\right]|t|,$$

donde $0<\theta<1$. Por (22) podemos acotar el último miembro por

$$\left[\frac{c}{\left(x_j^k-x\right)^{2+b'}}+\frac{c}{\left(x_j^k-x\right)^{2}}\right]\left|I_j^k\right|^{1/(1-b)}.$$

Y, siendo $0<x_j^k-x<1$, tenemos que

$$\left|\frac{\exp\left(i(y-x)^{-b'}\right)}{y-x}-\frac{\exp\left(i(y+t-x)^{-b'}\right)}{y+t-x}\right|\leq\frac{c}{\left(x_j^k-x\right)^{2+b'}}\left|I_j^k\right|^{1/(1-b)}.$$

Luego, en este caso, es

$$|K_{b'}(x-y)-K_{b'}(x-y-t)|\leq c\frac{\left|I_j^k\right|^{1/(1-b)}}{\left(x_j^k-x\right)^{2+b'}}\chi_{\left[-1,-3\left|I_j^k\right|\right]}\left(x-x_j^k\right)$$

$$=c\frac{\left|I_j^k\right|^{1/(1-b)}}{\left(\frac{\left(x_j^k-x\right)+x_j^k-x}{2}\right)^{2+b'}}\chi_{\left[-1,-3\left|I_j^k\right|\right]}\left(x-x_j^k\right)\leq c\frac{\left|I_j^k\right|^{1/(1-b)}}{\left(\left|I_j^k\right|+x_j^k-x\right)^{2+b'}}.$$

Por último, si $1\leq x_j^k-x\leq d_b$ entonces por (22),

$$\left|\frac{\exp\left(i\left(y+t-x\right)^{-b'}\right)}{y+t-x}\chi_{[-1,0]}(x-y-t)\right|\leq 3\frac{\chi_{[-3,-1]}\left(x-x_j^k\right)}{x_j^k-x}\leq\frac{c}{1+\left(x_j^k-x\right)^2}$$

y, por lo tanto, en este caso es

$$|K_{b'}(x-y)-K_{b'}(x-y-t)|\leq 2\frac{c}{1+\left(x_j^k-x\right)^2}.$$

■

Lema 3.10 *Con la notación de la demostración del Teorema 3.7 se tiene que*

$$G^{+}_{b/p_0'}\left(\sum_{\left|I_j^k\right|\leq\delta_b}\phi_j^k*f_j^k\right)(x)=\sum_{\left|I_j^k\right|\leq\delta_b}G^{+}_{b/p_0'}\left(\phi_j^k*f_j^k\right)(x).$$

Demostración. Por (15), $sop\left(\phi_j^k * f_j^k\right) \subset \overline{I}_j^k = I_{j+1}^k \cup I_j^k$ que se solapan de a dos y por lo tanto $\sum_{j,k=1}^{\infty} \phi_j^k * f_j^k(y)$ converge puntualmente.

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^{N} G_{b/p_0'}^{+}\left(\phi_j^k * f_j^k\right)(x) &= G_{b/p_0'}^{+}\left(\sum_{j,k=1}^{N} \phi_j^k * f_j^k\right)(x) \\ &= \int \Phi(x-y) \sum_{j,k=1}^{N} \phi_j^k * f_j^k(y)\, dy,\end{aligned}$$

donde se sobreentiende que sólo se suma sobre aquellos índices tales que $\left|I_j^k\right| \leq \delta_b$. El lema sigue si podemos aplicar Convergencia Mayorada, para obtener

$$\lim_{N\to\infty} \int \Phi(x-y) \sum_{j,k=1}^{N} \phi_j^k * f_j^k(y)\, dy = \int \Phi(x-y) \sum_{j,k=1}^{\infty} \phi_j^k * f_j^k(y)\, dy.$$

En efecto

$$\left|\Phi(x-y) \sum_{j,k=1}^{N} \phi_j^k * f_j^k(y)\right| \leq |\Phi(x-y)| \sum_{j,k=1}^{\infty} \left|\phi_j^k * f_j^k(y)\right|,$$

y, utilzando la desigualdad de Young, y teniendo en cuenta que $\left\|\phi_j^k\right\|_1 = 1$ y que los soportes de f_j^k son disjuntos, resulta

$$\begin{aligned}\int |\Phi(x-y)| \sum_{j,k=1}^{\infty} \left|\phi_j^k * f_j^k(y)\right| dy &\leq \|\Phi\|_1 \sum_{j,k=1}^{\infty} \left\|\phi_j^k * f_j^k\right\|_1 \leq \\ &\leq \|\Phi\|_1 \sum_{j,k=1}^{\infty} \left\|\phi_j^k\right\|_1 \left\|f_j^k\right\|_1 \leq \|\Phi\|_1 \|f\|_1,\end{aligned}$$

que es finito por ser $\Phi \in L^1$ y $f \in C_0^{\infty}$. ■

4. Espacios de Hardy Laterales

El tipo débil demostrado en la sección anterior utiliza la Proposición 3.3 cuya demostración, que daremos en la última sección, se basa en un resultado de interpolación entre espacios de Hardy laterales, $H_+^p(\omega)$, y en la acotación del operador T_b entre $H_+^1(\omega)$ y L_ω^1. Estos resultados serán estudiados en las Secciones 7 y 8.

En esta sección daremos las defininciones y propiedades de los espacios de Hardy laterales que fueron definidos y estudiados por L. de Rosa y C. Segovia en [9] y [10]. Obtendremos una descomposición atómica de estos espacios con propiedades especiales que nos permitirán superar las dificultades que aparecen al trabajar con pesos laterales.

4.1. Definición de $H_+^p(\omega)$

Sea $\omega \in A_s^+$, $s \geq 1$. Recordemos (veáse la Observación 2.2) que en este trabajo supondremos $0 < \omega(x) < \infty$ para casi todo $x \in \mathbb{R}$. Para mayor generalidad en la definición de los espacios $H_+^p(\omega)$ véase [9].

Se denominará $\mathcal{D}$ al espacio de funciones $C^\infty(\mathbb{R})$ con soporte compacto con la topología usual, y $\mathcal{D}'$ al espacio dual (espacio de distribuciones).

Se denominará $\mathcal{S}$ al espacio de funciones $C^\infty(\mathbb{R})$ con derivadas rápidamente decrecientes de todos los órdenes con la topología dada por la familia de normas

$$\|\varphi\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left[(1+|x|)^\beta \sum_{k=0}^{\alpha} \left| D^k \varphi(x) \right| \right],$$

donde α es un entero no negativo y $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. El espacio dual $\mathcal{S}'$ es el espacio de distribuciones temperadas.

Para cada $c \in \mathbb{R}$ sea el subespacio cerrado de $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}_c = \{\varphi \in \mathcal{S} : sop(\varphi) \subset [c, +\infty)\}$ y sea $\mathcal{S}_c'$ su dual.

Se define $\mathcal{S}_{-\infty}^+$ como la unión

$$\mathcal{S}_{-\infty}^+ = \bigcup_{-\infty < c} \mathcal{S}_c,$$

y se denotará por $\left(\mathcal{S}_{-\infty}^+\right)'$ al conjunto de funcionales lineales de $\mathcal{S}_{-\infty}^+$ que restringidas a $\mathcal{S}_c$ están en $\mathcal{S}_c'$, para todo $-\infty < c$.

Dadas $\phi \in \mathcal{S}$ con $sop(\phi) \subset (-\infty, 0]$ y $f \in \mathcal{S}'$, en [10] se define la maximal

$$M_1^+(f, \phi, x) = \sup_{0 \leq y-x < t} |f * \phi_t(y)|,$$

donde $f * \phi_t(y) = \langle f, \phi_t(y - \cdot)\rangle$ y $\phi_t(u) = \frac{1}{t}\phi\left(\frac{u}{t}\right)$.

Sean $0 < p < \infty$ y $\omega \in A_s^+$, se dirá que $f \in \left(\mathcal{S}_{-\infty}^+\right)'$ pertenece a $H_{+,\phi}^p(\omega)$ si

$$\|f\|_{H_{+,\phi}^p(\omega)} := \left(\int_{-\infty}^{+\infty} M_1^+(f, \phi, x)^p \, \omega(x)\, dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Sea γ un entero no negativo. Se define Φ_γ^+ como la clase de funciones $\varphi \in \mathcal{D}$ tal que $sop\,(\varphi) \subset I = [-a, 0]$ para algún $a > 0$ y

$$|I|^{\gamma+1} \|D^\gamma \varphi\|_\infty \leq 1.$$

Sea $f \in \mathcal{D}'$, en [9] (ver también [10]) se define la maximal

$$f_{+,\gamma}^* (x) = \sup_{\varphi \in \Phi_\gamma^+} |f * \varphi (x)| \, .$$

Sean $0 < p < \infty$ y $\omega \in A_s^+$, se dirá que $f \in \mathcal{D}'$ pertenece a $H_{+,\gamma}^p (\omega)$ si

$$\|f\|_{H_{+,\gamma}^p(\omega)} := \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{+,\gamma}^* (x)^p \, \omega (x) \, dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Los siguientes teoremas son los Teoremas A y B en [10].

Teorema 4.1 *Sean $0 < p < \infty$ y $\omega \in A_s^+$. Si β , $\gamma \in \mathbb{N}$ tales que $p\,(\beta + 1) > s$ y $p\,(\gamma + 1) > s$ entonces*

$$H_{+,\beta}^p (\omega) = H_{+,\gamma}^p (\omega) \, .$$

Además existen constantes $c_1 > 0$ y $c_2 > 0$ tales que

$$c_1 \|f\|_{H_{+,\beta}^p(\omega)} \leq \|f\|_{H_{+,\gamma}^p(\omega)} \leq c_2 \|f\|_{H_{+,\beta}^p(\omega)} \, ,$$

para toda $f \in \mathcal{D}'$.

Teorema 4.2 *Sean $0 < p < \infty$, $\omega \in A_s^+$ y $\phi \in \mathcal{S}$ con $sop\,(\phi) \subset (-\infty, 0]$ y $\int \phi \neq 0$. Entonces, si $p\,(\gamma + 1) > s$,*

$$H_{+,\phi}^p (\omega) = H_{+,\gamma}^p (\omega) \, .$$

Además existen constantes $c_1 > 0$ y $c_2 > 0$ tales que

$$c_1 \|f\|_{H_{+,\gamma}^p(\omega)} \leq \|f\|_{H_{+,\phi}^p(\omega)} \leq c_2 \|f\|_{H_{+,\gamma}^p(\omega)} \, ,$$

para toda $f \in \left(\mathcal{S}_{-\infty}^+\right)'$.

Teniendo en cuenta estos resultados siempre que se pueda nos referiremos al espacio $H_+^p (\omega)$ y a "la" norma $\|\cdot\|_{H_+^p(\omega)}$.

Cabe aclarar que $\|\cdot\|_{H_+^p(\omega)}$ es una norma si $p \geq 1$ y una p-norma si $0 < p < 1$. En ambos casos, con la métrica que inducen, $H_+^p (\omega)$ es completo.

4.2. Relación entre los espacios $H_+^p(\omega)$ y L_ω^p

En el caso de que $\omega \in A_p^+$ con $p > 1$, probaremos que el espacio $H_+^p(\omega)$ se identifica con L_ω^p.

Veamos primero algunos lemas previos que necesitaremos.

Lema 4.3 *Para toda $h \in L_\omega^p$, $p \geq 1$, es, para cada $x \in \mathbb{R}$,*

$$M_1^+(h, \phi, x) = \sup_{0 \leq y - x < t} \left| \int h(u)\, \phi_t(y-u)\, du \right| \leq c M^+ h(x),$$

donde la constante c sólo depende de $\phi \in \mathcal{S}$ con $sop(\phi) \subset (-\infty, 0]$.

Demostración. Sea $\phi \in \mathcal{S}$ con $sop(\phi) \subset (-\infty, 0]$. Como $h \in L_\omega^p$, la convolución $\int_y^{+\infty} h(u)\, \phi_t(y-u)\, du$ está definida.

Sean $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ y $t > 0$ tales que $0 \leq y - x < t$.

Se tiene que

$$\begin{aligned}
\left| \int_y^{y+t} h(u)\, \phi_t(y-u)\, du \right| &\leq \|\phi\|_\infty \frac{1}{t} \int_y^{y+t} |h(u)|\, du \leq \|\phi\|_\infty \frac{1}{t} \int_x^{x+2t} |h(u)|\, du \leq \\
&\leq 2\|\phi\|_\infty M^+ h(x).
\end{aligned}$$

Además como $\phi \in \mathcal{S}$

$$\left| \int_{y+t}^{+\infty} h(u)\, \phi_t(y-u)\, du \right| \leq c\frac{1}{t} \int_{y+t}^{+\infty} \frac{|h(u)|}{\left(\frac{u-y}{t}\right)^2} du = c\frac{1}{t} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{y+2^n t}^{y+2^{n+1}t} \frac{|h(u)|}{\left(\frac{u-y}{t}\right)^2} du \leq$$

$$\leq c\frac{1}{t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \int_y^{y+2^{n+1}t} |h(u)|\, du \leq c \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{2^n} \frac{1}{2^{n+1}t} \int_x^{x+2^{n+1}t} |h(u)|\, du \leq c \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} M^+ h(x).$$

Juntando estas dos estimaciones queda demostrado el lema. ■

Lema 4.4 *Sea $\delta \in L^1_{loc}$ un peso duplicante a derecha. Si $g \in \mathcal{S}_a$ entonces $g \in L_\delta^q$ para todo $q \geq 1$ y existen $\beta \in \mathbb{N}$ y una constante c tal que*

$$\|g\|_{q,\delta} \leq c \|g\|_{0,\beta}.$$

Demostración. Bastará con acotar

$$\int_1^{+\infty} |g(x)|^q\, \delta(x)\, dx,$$

pues en caso de ser $a < 1$ entonces

$$\int_a^1 |g(x)|^q\, \delta(x)\, dx \leq \|g\|_\infty^q\, \delta([a, 1]) < \infty.$$

Si 2^d es la constante de duplicación a derecha de δ entonces, para $\beta \in \mathbb{N}$ tal que $q\beta > d$, se tiene que

$$\int_1^{+\infty} |g(x)|^q \delta(x)\, dx \leq \|g\|_{0,\beta}^q \int_1^{+\infty} \frac{\delta(x)}{|x|^{q\beta}} dx = \|g\|_{0,\beta}^q \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{2^n}^{2^{n+1}} \frac{\delta(x)}{|x|^{q\beta}} dx \leq$$
$$\leq \|g\|_{0,\beta}^q \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{q\beta n}} \int_{2^n}^{2^{n+1}} \delta(x)\, dx \leq \|g\|_{0,\beta}^q \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{dn}}{2^{q\beta n}} \delta([1,2]) < \infty.$$

■

Lema 4.5 *Sean $\omega \in A_p^+$, $p > 1$, $\omega(x) > 0$, y $h \in L_\omega^p$. Si para cada $g \in \mathcal{S}_{-\infty}^+$ definimos*

$$\langle f, g \rangle = \int h(x)\, g(x)\, dx,$$

entonces $f \in \left(\mathcal{S}_{-\infty}^+\right)'$.

Demostración. Como $\omega \in A_p^+$ con $p > 1$ entonces (véase Lema 2.1) se tiene que $\omega^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{p'}^-$ donde $(p-1)(p'-1) = 1$ y, por lo tanto, $\omega^{-\frac{1}{p-1}}$ es duplicante a derecha. Además como $\omega^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{p'}^-$ entonces la hipótesis $\omega(x) > 0$ asegura que $\omega^{-\frac{1}{p-1}} \in L_{loc}^1$.

Luego, si $g \in \mathcal{S}_a$ tenemos, por la desigualdad de Hölder y el Lema 4.4, que

$$\begin{aligned} |\langle f, g \rangle| &= \left| \int h(x)\, g(x)\, dx \right| = \left| \int h(x)\, \omega(x)\, g(x)\, \omega(x)^{-1}\, dx \right| \leq \\ &\leq \|h\|_{p,\omega} \left(\int |g(x)|^{p'} \omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}\, dx \right)^{1/p'} \leq c\, \|h\|_{p,\omega} \|g\|_{0,\beta}, \end{aligned}$$

para algún $\beta \in \mathbb{N}$. ■

Teorema 4.6 *Sean $p > 1$ y $\omega \in A_p^+$, $\omega(x) > 0$, entonces $H_+^p(\omega)$ se identifica con L_ω^p y*

$$\|\cdot\|_{H_+^p(\omega)} \equiv \|\cdot\|_{p,\omega}.$$

Demostración. Sea $h \in L_\omega^p$. Por el Lema 4.5, h se identifica con una $f \in \left(\mathcal{S}_{-\infty}^+\right)'$.

Por el Lema 4.3, $M_1^+ f(x) = M_1^+ h(x) \leq c M^+ h(x)$ y como $\omega \in A_p^+$ con $p > 1$, entonces

$$\|f\|_{H_+^p(\omega)} = \left\| M_1^+ f \right\|_{p,\omega} \leq c \left\| M^+ h \right\|_{p,\omega} \leq c\, \|h\|_{p,\omega}.$$

Sea $f \in H_+^p(\omega)$. Para todo $t > 0$,

$$|f * \phi_t(x)| \leq \sup_{0 \leq y - x < t} |f * \phi_t(y)| = M_1^+ f(x) \in L_\omega^p, \tag{23}$$

y, por lo tanto, el conjunto

$$\{f * \phi_t : t > 0\}$$

es un compacto débil en L^p_ω. Luego existen $t_n \to 0$ y $h \in L^p_\omega$ tal que $f * \phi_{t_n}$ converge a h débilmente. Esto es

$$\int f * \phi_{t_n}(x)\, \psi(x)\, \omega(x)\, dx \longrightarrow \int h(x)\, \psi(x)\, \omega(x)\, dx \qquad (24)$$

para toda $\psi \in L^{p'}_\omega$.

Para cada $g \in \mathcal{S}_a$ sea $\psi = g/\omega$. Como $\omega^{1-p'} \in A^-_{p'}$ (véase Lema 2.1) y $\omega(x) > 0$ entonces $\omega^{1-p'} \in L^1_{loc}$ y es duplicante a derecha. Luego, por el Lema 4.4, se tiene que $g \in L^{p'}_{\omega^{1-p'}}$ y $\psi = g/\omega \in L^{p'}_\omega$ y, por (24),

$$\int f * \phi_{t_n}(x)\, g(x)\, dx \longrightarrow \int h(x)\, g(x)\, dx.$$

Por otro lado

$$\int f * \phi_{t_n}(x)\, g(x)\, dx = \left\langle f, \int \frac{1}{t_n}\phi\left(\frac{\cdot - x}{t_n}\right) g(x)\, dx \right\rangle \longrightarrow \langle f, g\rangle$$

y por lo tanto

$$\langle f, g\rangle = \int h(x)\, g(x)\, dx$$

para toda $g \in \mathcal{S}^+_{-\infty}$. Luego f es la funcional lineal de $\left(\mathcal{S}^+_{-\infty}\right)'$ asociada a $h \in L^p_\omega$.

Además, de (24) se tiene, aplicando la desigualdad de Hölder, que

$$\begin{aligned} \|h\|_{p,\omega} &= \sup_{\|\psi\|_{p',\omega}=1} \left| \int h(x)\, \psi(x)\, \omega(x)\, dx \right| = \sup_{\|\psi\|_{p',\omega}=1} \lim_{n\to\infty} \left| \int f * \phi_{t_n}(x)\, \psi(x)\, \omega(x)\, dx \right| \\ &\leq \liminf \left\| f * \phi_{t_n} \right\|_{p,\omega}, \end{aligned}$$

y, teniendo en cuenta (23),

$$\|h\|_{p,\omega} \leq \|f\|_{H^p_+(\omega)}.$$

■

4.3. Descomposición atómica de los espacios $H^p_+(\mu)$

Daremos el Teorema de Descomposición Atómica obtenido en [9] pero con una formulación análoga a la dada en [13] para el caso bilátero.

Definición 4.7 *Si $N \geq 0$ es un entero y $1 \leq q \leq \infty$, una función a definida en $\mathbb{R}$ es un (q, N)-átomo si existe un intervalo I que contiene al soporte de a tal que*

1. $\|a\|_q \leq \|\chi_I\|_q$,

2. $\int_I y^k a(y)dy = 0$, *para todo entero* k, $0 \leq k \leq N$.

Notar que en la defnción anterior se tiene que $\|a\|_q \leq |I|^{1/q}$ si $1 \leq q < \infty$, y $\|a\|_\infty \leq 1$ si $q = \infty$.

La condición 2. es la denominada condición de momentos nulos.

Teorema 4.8 *Sea μ un peso duplicante a izquierda con constante de duplicación 2^d. Sean $0 < p < \infty$ y N un entero no negativo tal $N > \frac{d}{p_1} - 2$ donde $p_1 = \text{mín}\{1, p\}$. Entonces, si $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $\{a_k\}$ es una sucesión de (∞, N)-átomos soportados en intervalos acotados $\{I_k\}$ respectivamente, tales que $\left\|\sum \lambda_k \chi_{I_k}\right\|_{L^p_\mu} < \infty$, entonces $\sum_k \lambda_k a_k$ converge incondicionalmente tanto en el sentido de las distribuciones como en la norma de $H^p_+(\mu)$ a una distribución $f \in H^p_+(\mu)$. Además existe una constante a $C_1 = C_1(N, d, p_1)$ tal que*

$$\|f\|_{H^p_+(\mu)} \leq C_1 \left\|\sum \lambda_k \chi_{I_k}\right\|_{L^p_\mu}.$$

Demostración. Sea a un (∞, N)-átomo soportado en un intervalo $I = (x_0 - r, x_0)$ donde $|I| = r > 0$ y sea $2I = (x_0 - 2r, x_0)$.

Recordemos que

$$M_1^+(a, x) = \sup_{0 \leq y - x < t} |a * \phi_t(y)|,$$

$\phi \in \mathcal{S}$, *sop*$(\phi) \subset (-\infty, 0]$, $\int \phi(t)dt \neq 0$.

Estimaremos $M_1^+(a, x)$ para $x \notin 2I$.

Si $x \geq x_0$ entonces

$$M_1^+(a, x) = \sup_{0 \leq y - x < t} |a * \phi_t(y)| = \sup_{0 \leq y - x < t} \left| \int_{x_0 - r}^{x_0} a(u)\, \phi_t(y - u)\, du \right| = 0, \tag{25}$$

pues $y - u > 0$ y por lo tanto $\phi_t(y - u) = 0$.

Veamos que existe una constante $c > 0$ tal que si $x \leq x_0 - 2r$ entonces

$$M_1^+(a, x) \leq c \left(\frac{r}{x_0 - x} \right)^{N+2}. \tag{26}$$

Sean $0 \leq y - x < t$ y P_N el Polinomio de Taylor de orden N de ϕ desarrollado en $\frac{y - x_0}{t}$. Usando los N momentos nulos del átomo a y la Fórmula del Resto se tiene que

$$\begin{aligned}
|a * \phi_t(y)| &= \frac{1}{t} \left| \int_{x_0 - r}^{x_0} a(u) \left(\phi\left(\frac{y - u}{t}\right) - P_N\left(\frac{y - u}{t}\right) \right) du \right| \\
&= c\frac{1}{t} \left| \int_{x_0 - r}^{x_0} a(u)\, D^{N+1}\phi\left(\frac{y - \xi}{t}\right) \left(\frac{y - u}{t} - \frac{y - x_0}{t}\right)^{N+1} du \right| \leq \\
&\leq c\frac{1}{t} \int_{x_0 - r}^{x_0} \left| D^{N+1}\phi\left(\frac{y - \xi}{t}\right) \right| \left(\frac{x_0 - u}{t}\right)^{N+1} du,
\end{aligned} \tag{27}$$

donde $u<\xi<x_0$.

Como $\phi\in\mathcal{S}$, existe una constante $c_N>0$ tal que

$$\begin{aligned}\left|D^{N+1}\phi\left(\frac{y-\xi}{t}\right)\right| &\leq \frac{c_N}{\left(1+\left|\frac{y-\xi}{t}\right|\right)^{N+2}}=c_N\frac{t^{N+2}}{\left(t+|y-\xi|\right)^{N+2}}\\ &\leq c\frac{t^{N+2}}{\left(\left(t^2+|y-\xi|^2\right)^{1/2}\right)^{N+2}}.\end{aligned}$$

Siendo $\left(t^2+|y-\xi|^2\right)^{1/2}$ la distancia desde $(\xi,0)$ a un punto cualquiera del semicono $0\leq y-x<t$ por un sencillo argumento geométrico tenemos que

$$\frac{\xi-x}{\sqrt{2}}\leq\left(t^2+|y-\xi|^2\right)^{1/2}$$

y, por lo tanto,

$$\left|D^{N+1}\phi\left(\frac{y-\xi}{t}\right)\right|\leq c\frac{t^{N+2}}{\left(\xi-x\right)^{N+2}}\leq c\frac{t^{N+2}}{\left(x_0-x\right)^{N+2}}.$$

La última desiguadad es debido a que $x\leq x_0-2r$ y $x_0-r<\xi<x_0$ implica que

$$x_0-x\leq c\left(\xi-x\right).$$

Luego, reeplazando en (27), se tiene que

$$\left|a*\phi_t\left(y\right)\right|\leq\frac{c}{t}\int_{x_0-r}^{x_0}\frac{t^{N+2}}{\left(x_0-x\right)^{N+2}}\left(\frac{r}{t}\right)^{N+1}du=c\left(\frac{r}{x_0-x}\right)^{N+2},$$

de donde se deduce inmediatamente (26).

Además, como $\|a\|_\infty\leq 1$, se tiene que para todo x es

$$\left|M_1^+(a,x)\right|\leq\sup_{0\leq y-x<t}\int\left|a\left(y-u\right)\right|\frac{1}{t}\phi\left(\frac{u}{t}\right)du\leq\int\left|\phi\left(u\right)\right|du=c. \qquad (28)$$

Por (28), (26) y (25) resulta que

$$\begin{aligned}M_1^+(a,x) &= \chi_{2I}\left(x\right)M_1^+(a,x)+\chi_{(-\infty,x_0-2r]}\left(x\right)M_1^+(a,x)+\chi_{[x_0,\infty)}\left(x\right)M_1^+(a,x)\\ &\leq c\chi_{2I}\left(x\right)+c\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{r}{x_0-x}\right)^{N+2}\left(\chi_{2^{j+1}I}\left(x\right)-\chi_{2^jI}\left(x\right)\right)\\ &\leq c\chi_{2I}\left(x\right)+c\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{r}{2^jr}\right)^{N+2}\left(\chi_{2^{j+1}I}\left(x\right)-\chi_{2^jI}\left(x\right)\right)\\ &\leq c\sum_{j=0}^{\infty}2^{-(N+2)j}\chi_{2^{j+1}I}\left(x\right).\end{aligned}$$

Luego, dadas una sucesión $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ y una sucesión $\{a_k\}$ de (∞, N)-átomos soportados en intervalos acotados $\{I_k\}$ respectivamente, podemos descomponer para cada k

$$M_1^+(a_k, x) \leq c \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-(N+2)j} \chi_{2^{j+1}I_k}(x) .$$

Con lo cual, para todo $m > n$, si $p_1 = \text{mín}\{1, p\}$, se tiene que

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} \lambda_k a_k \right\|_{H_+^p(\mu)}^{p_1} = \left\| M_1^+ \left(\sum_{k=n}^{m} \lambda_k a_k \right) \right\|_{L_\mu^p}^{p_1} \leq \left\| \sum_{k=n}^{m} \lambda_k M_1^+ a_k \right\|_{L_\mu^p}^{p_1}$$

$$\leq c \left\| \sum_{k=n}^{m} \lambda_k \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j(N+2)} \chi_{2^{j+1}I_k} \right\|_{L_\mu^p}^{p_1} \leq c \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j(N+2)p_1} \left\| \sum_{k=n}^{m} \lambda_k \chi_{2^{j+1}I_k} \right\|_{L_\mu^p}^{p_1} .$$

Si 2^d es la constante de duplicación a izquierda del peso μ se tiene por el Lema 5.3 que

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} \lambda_k a_k \right\|_{H_+^p(\mu)}^{p_1} \leq c \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j(N+2)p_1} 2^{jd} \left\| \sum_{k=n}^{m} \lambda_k \chi_{I_k} \right\|_{L_\mu^p}^{p_1} .$$

Eligiendo $N > \frac{d}{p_1} - 2$ entonces

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} \lambda_k a_k \right\|_{H_+^p(\mu)}^{p_1} \leq C_1 \left\| \sum_{k=n}^{m} \lambda_k \chi_{I_k} \right\|_{L_\mu^p}^{p_1} , \tag{29}$$

para todo $m > n$, donde $C_1 = c \sum_{j=0}^{\infty} 2^{(d-(N+2)p_1)j} < \infty$.

Si $\left\| \sum \lambda_k \chi_{I_k} \right\|_{L_\mu^p} < \infty$ entonces, por (29) se tiene que $\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k \right)_{m=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $H_+^p(\mu)$ y converge a alguna distribución f en $H_+^p(\mu)$. Además de (29) se tiene que

$$\|f\|_{H_+^p(\mu)} \leq C_1 \left\| \sum \lambda_k \chi_{I_k} \right\|_{L_\mu^p} ,$$

donde $C_1 = c \sum_{j=0}^{\infty} 2^{(d-(N+2)p_1)j}$. ■

Teorema 4.9 *Sean $s \geq 1$, $\mu \in A_s^+$ y $0 < p < \infty$. Supondremos que $\mu(x) > 0$ para casi todo x. Entonces existe un entero $N(p, \mu)$ con la siguiente propiedad: para toda $f \in H_+^p(\mu)$ y todo entero $N \geq N(p, \mu)$, exiten una sucesión $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ y una sucesión $\{a_k\}$ de (∞, N)-átomos soportados en intervalos acotados $\{I_k\}$ respectivamente, tales que $\sum_k \lambda_k a_k$ converge incondicionalmente a f tanto* *en el sentido de las distribuciones como en $H^p_+(\mu)$. Además existen constantes $C_1,\ C_2 > 0$ que no dependen de f tales que*

$$C_2 \left\| \sum \lambda_k \chi_{I_k} \right\|_{L^p_\mu} \leq \|f\|_{H^p_+(\mu)} \leq C_1 \left\| \sum \lambda_k \chi_{I_k} \right\|_{L^p_\mu}.$$

En el caso de que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, se tiene, para todo $r > 0$, que

$$\sum \lambda^r_k \chi_{I_k}(x) \leq C_r f^*_{+,N}(x)^r, \tag{30}$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}$, donde $C_r = c^r \frac{2^r}{2^r - 1}$ y c no depende ni de f ni de r.

Demostración. La demostración de este Teorema de Descomposición Atómica se encuentra esencialmemte en [9]. Daremos solamente las pequeñas modificaciones necesarias para adaptar esta demostración a nuestro caso.

Una primera observación es que, como argumentan los mismos autores en [10], la hipótesis $0 < p \leq 1$ requerida en [9] puede ser cambiada por $0 < p < \infty$.

Sean $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ y $n \in \mathbb{Z}$, con la notación utilizada en la demostración del Teorema 2.2 en [9], se tiene que

$$\Omega_n = \left\{ x \in \mathbb{R} / f^*_{+,N}(x) > 2^n \right\}$$

es un conjunto abierto cuyas componentes conexas son intervalos abiertos disjuntos $I_{n,i}$ $(i = 1, 2, ...)$.

Ninguno de los intervalos $I_{n,i}$ puede ser de la forma (a, ∞) pues, por 3) del Lema 2.1, $\mu(a, \infty) = \infty$, pero, por otro lado, usando la desigualdad de Chebichev, se tiene que $\mu(\Omega_n) \leq 2^{-np} \|f\|_{H^p_+(\mu)} < \infty$.

Como suponemos que $\mu(x) > 0$ para casi todo x entonces podría existir un intervalo de la forma $(-\infty, b)$. En este caso será $I_{n,1} = (-\infty, b)$, y si no existe entonces se considerará $I_{n,1} = \emptyset$.

En la demostración del Teorema 2.2 en [9] se obtiene una descomposición para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ en $\mathcal{D}'$ como

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} \tilde{A}_{n,i} \tag{31}$$

donde $\tilde{A}_{n,i}$ son funciones tales que

$$sop\left(\tilde{A}_{n,i}\right) \subset I_{n,i},$$

y

$$\left\| \tilde{A}_{n,i} \right\|_\infty \leq c 2^n$$

donde la constante c no depende ni de f ni de la descomposición dada.

Además si $i > 1$ se tiene que

$$\int \tilde{A}_{n,i}(x)\, x^k dx = 0,$$

para todo $0 \leq k \leq N$. Para $\tilde{A}_{n,1}$ no se obtienen directamente momentos nulos.

Para simplificar supondremos $I_{n,1} = \emptyset$ y por lo tanto no existe $\tilde{A}_{n,1}$. En caso de que $I_{n,1} \neq \emptyset$ entonces $\tilde{A}_{n,1}$ puede ser descompuesto como en la demostración del Teorema 2.4 en [9] para luego seguir la demostración de forma análoga.

Si llamamos

$$a_{n,i}(x) = (c2^n)^{-1}\, \tilde{A}_{n,i}(x)$$

tendremos que $a_{n,i}(x)$ es un (∞, N)-átomo soportado en el intervalo $I_{n,i}$ y, reemplazando en (31),

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=2}^{+\infty} \lambda_{n,i} a_{n,i}, \tag{32}$$

donde $\lambda_{n,i} = c2^n$.

Veamos la desigualdad (30).

Primero observemos que la serie $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{nr} \chi_{\Omega_n}(x)$ es convergente para casi todo $x \in \mathbb{R}$. En efecto para casi todo $x \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{nr} \chi_{\Omega_n}(x)$ tiene solo una cantidad finita de sumandos pues

$$\mu\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \Omega_n\right) \leq \mu(\Omega_k) \leq 2^{-kp} \|f\|_{H_+^p(\mu)},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Siendo $\mu(x) > 0$ para casi todo x entonces se tiene que

$$\left|\bigcap_{n=0}^{+\infty} \Omega_n\right| = 0.$$

Luego,

$$f_{+,N}^*(x)^r = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_{+,N}^*(x)^r \left(\chi_{\Omega_n}(x) - \chi_{\Omega_{n+1}}(x)\right)$$

$$\geq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{nr} \left(\chi_{\Omega_n}(x) - \chi_{\Omega_{n+1}}(x)\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{nr} \chi_{\Omega_n}(x) - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{nr} \chi_{\Omega_{n+1}}(x)$$

$$= \left(1 - 2^{-r}\right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{nr} \chi_{\Omega_n}(x) = \left(1 - 2^{-r}\right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{nr} \sum_{i>1} \chi_{I_{n,i}}(x)$$

$$= c^{-r} \left(1 - 2^{-r}\right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{i>1} \lambda_{n,i}^r \chi_{I_{n,i}}(x),$$

obteniendose la desigualdad (30) para casi todo $x \in \mathbb{R}$.

De esta desigualdad con $r = 1$ es inmediato que

$$\left\| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{i>1} \lambda_{n,i} \chi_{I_{n,i}} \right\|_{L_\mu^p} \leq 2c \left\| f_{+,N}^* \right\|_{L_\mu^p} \leq C \|f\|_{H_+^p(\mu)} < \infty.$$

Por el Teorema 4.8 y por (32) se tiene que

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=2}^{+\infty} \lambda_{n,i} a_{n,i}$$

donde la convergencia es incondicional tanto en el sentido de las distribuciones como en la norma de $H_+^p(\mu)$ y

$$C_2 \left\| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{i>1} \lambda_{n,i} \chi_{I_{n,i}} \right\|_{L_\mu^p} \leq \|f\|_{H_+^p(\mu)} \leq C_1 \left\| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{i>1} \lambda_{n,i} \chi_{I_{n,i}} \right\|_{L_\mu^p}.$$

En caso de que f sea una distribución cualquiera en $H_+^p(\mu)$ entonces, como $L_{loc}^1(\mathbb{R})$ es denso en $H_+^p(\mu)$ (Teorema 3.23 en [10]) existe una sucesión $f_m \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ tal que $f_m \longrightarrow f$ en $H_+^p(\mu)$, $\|f_1\|_{H_+^p(\mu)} \leq 2\|f\|_{H_+^p(\mu)}$ y, para $m \geq 2$, $\|f_m - f_{m-1}\|_{H_+^p(\mu)} \leq 2^{-m}\|f\|_{H_+^p(\mu)}$. Luego, si llamamos $g_1 = f_1$ y, para $m \geq 2$, $g_m = f_m - f_{m-1}$ entonces

$$f = \sum_{m=1}^{+\infty} g_m \tag{33}$$

en la norma de $H_+^p(\mu)$.

Como $g_m \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ entonces se tiene una descomposición atómica

$$g_m = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{m,k} a_{m,k} \tag{34}$$

con las propiedades deseadas.

Además, si $p_1 = \text{mín}\{1, p\}$, entonces

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{m,k} \chi_{I_{m,k}} \right\|_{L_\mu^p}^{p_1} &\leq \sum_{m=1}^{+\infty} \left\| \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{m,k} \chi_{I_{m,k}} \right\|_{L_\mu^p}^{p_1} \\ &\leq C \sum_{m=1}^{+\infty} \|g_m\|_{H_+^p(\mu)}^{p_1} \leq C \left(\sum_{m=1}^{+\infty} 2^{-mp_1} \right) \|f\|_{H_+^p(\mu)}^{p_1} < \infty. \end{aligned}$$

Luego por el Teorema 4.8, (33) y (34) se tiene que

$$f = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{m,k} a_{m,k}$$

donde la convergencia es incondicional en el sentido de la distribuciones y en la norma de $H_+^p(\mu)$. ■

4.4. Una descomposición atómica apropiada

Daremos un descomposición atómica de una distribución $f \in H_+^p(\mu)$ con propiedades adicionales que necesitareremos.

Diremos que un intervalo J sigue al intervalo I si $I = [c, d]$ y $J = [d, e]$.

Probaremos que dada $f \in H_+^p(\mu)$ admite una descomposición atómica como la dada en el Teorema 4.9 tal que para cada intervalo I_k existe otro intervalo I_j que lo sigue. Para esto daremos dos lemas que nos permitirán "partir" un átomo.

Lema 4.10 *Sea $r > 0$. Existe una familia $\{\eta_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ de funciones en $C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que*

1) $0 \leq \eta_j(x) \leq 1$ y $\sum_j \eta_j(x) = \chi_{(-\infty,r)}(x)$,

2) *sop* $(\eta_j) \subset I_j = \left[r - 2^{-j}r, r - 2^{-j-2}r\right]$,

3) si $x \in I_j$ entonces $\frac{1}{4}r_j \leq r - x \leq r_j$, donde $r_j = \frac{r}{2^j}$,

4) cada x pertenece a lo sumo a tres intervalos I_j,

5) para cada entero no negativo i existe una constante $c_i > 0$ tal que $\left|D^i\eta_j(x)\right| \leq c_i r_j^{-i}$, para todo entero j.

Demostración. Sea

$$h(y) = \int_y^{y/2} \rho(t)dt,$$

donde $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ es una función no negativa soportada en $[-2, -1]$ tal que $\int \rho(t)dt = 1$, y sean

$$\eta_j(x) = h\left(\frac{x - r}{2^{-j-2}r}\right).$$

No es difícil ver que la familia $\{\eta_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ verifica las condiciones del lema.Véase [9]. ∎

Lema 4.11 *Sea a un (∞, N)-átomo con soporte contenido en un intervalo acotado I. Existe una sucesión $\{a_j\}$ de (∞, N)-átomos con intervalos asociados $\{I_j\}$ tal que $a = c\sum_j a_j$ puntualmente y en el sentido de las distribuciones, donde c es una constante que no depende del átomo a.*
Además se tiene que $I_j \subset I$, cada $x \in I$ pertenece a lo sumo a tres I_j, el intervalo I_{j+2} sigue al I_j y $|I_{j+2}| \leq |I_j| \leq 4\,|I_{j+2}|$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $I = [0, r]$.
Como a es acotada y de soporte compacto, podemos definir

$$A(x) = \frac{1}{N!}\int_x^\infty (y - x)^N a(y)dy,$$

y se tiene que para casi todo x,

$$D^{N+1}A\left(x\right)=\left(-1\right)^{N+1}a(x).$$

Como $sop\left(a\right)\subset[0,r]$ entonces $A(x)=0$ para todo $x>r$. Y si $x<0$ entonces la condición de los N momentos nulos de a implica que $A(x)=0$. Por lo tanto $sop\left(A\right)\subset[0,r]$.

Luego, si $\left\{\eta_j\right\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ son las funciones del Lema 4.10 asociadas al intervalo $(-\infty,r)$ y teniendo en cuenta la condición 1) se tiene que

$$A(x)=\sum_{j=-1}^{\infty}A(x)\eta_j(x). \tag{35}$$

Llamemos

$$A_j(x)=A(x)\eta_j(x)$$

y

$$b_j(x)=D^{N+1}A_j(x).$$

Notar que, por la condición 2) del Lema 4.10, se tiene para $j\geq 0$ que

$$sop\left(b_j\right)\subset[r-2^{-j}r,r-2^{-j-2}r]=I_j\subset I,$$

y, por lo tanto, el intervalo I_{j+2} sigue al I_j y $|I_j|=4\left|I_{j+2}\right|$.

En el caso $j=-1$ llamaremos $I_{-1}:=[0,r/2]$ con lo cual

$$sop\left(b_{-1}\right)\subset I_{-1}\subset I,$$

I_1 sigue a I_{-1} y $\left|I_1\right|<\left|I_{-1}\right|<4\left|I_1\right|.$

También se tiene que

$$[0,r)=\bigcup_{j=-1}^{\infty}I_j,$$

y cada $x\in I$ pertenece a lo sumo a tres I_j.

Como $sop(A_j)\subset I_j$ entonces b_j tiene N momentos nulos. En efecto, si $0\leq k\leq N$, integrando por partes,

$$\begin{aligned}\int_{I_j}y^k b_j(y)dy&=\int_{I_j}y^k D^{N+1}A_j(y)dy\\&=\left(-1\right)^k k!\int_{I_j}D^{N+1-k}A_j(y)dy=0.\end{aligned}$$

Afirmamos que

$$\left\|b_j\right\|_\infty\leq c,$$

donde c no depende ni de j ni del átomo a.

Por la Fórmula de Leibniz se tiene que

$$D^{N+1}A_j(x)=\sum_{k=0}^{N+1}c_{k,N}\,D^kA(x)\,D^{N+1-k}\eta_j(x). \tag{36}$$

Para $x \in sop\left(\eta_j\right)$ y $k \leq N$, como $\|a\|_\infty \leq 1$, tenemos que

$$\left|D^k A(x)\right| \leq \int_x^r (t-x)^{N-k} |a(t)|\, dt \leq (r-x)^{N+1-k}, \tag{37}$$

y

$$\left|D^{N+1} A(x)\right| = |a(x)| \leq 1.$$

Luego, por (36) y condiciones 5) y 3) del Lema 4.10 obtenemos

$$\begin{aligned} \left|b_j\left(x\right)\right| &= \left|D^{N+1} A_j(x)\right| \leq c_N \sum_{k=0}^{N+1} (r-x)^{N+1-k} \left|D^{N+1-k} \eta_j(x)\right| \\ &\leq c_N \sum_{k=0}^{N+1} \frac{(r-x)^{N+1-k}}{r_j^{N+1-k}} \leq c_N \left(N+2\right) = c, \end{aligned} \tag{38}$$

como habíamos afirmado.

Teniendo en cuenta la condición 4) del Lema 4.10 podemos derivar $N+1$ veces (35) para obtener para casi todo x

$$a\left(x\right) = c \sum_{j=-1}^{\infty} a_j\left(x\right),$$

donde $a_j(x) = \frac{(-1)^{N+1}}{c} b_j(x)$ con c como en (38) son (∞, N)-átomos.

Por último veamos la convergencia en el sentido de las distribuciones. Sea $\varphi \in \mathcal{S}$. Como para casi todo x,

$$c \left| \sum_{j=-1}^{k} a_j\left(x\right) \right| \leq \left|a\left(x\right)\right| + c\left|a_k\left(x\right)\right| \leq 1 + c$$

entonces, por Convergencia Mayorada,

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \left\langle \sum_{j=-1}^{k} a_j, \varphi \right\rangle &= \lim_{k\to\infty} \int_I \sum_{j=-1}^{k} a_j\left(x\right) \varphi\left(x\right) dx \\ &= \int_I a\left(x\right) \varphi\left(x\right) dx = \left\langle a, \varphi \right\rangle. \end{aligned}$$

■

Como consecuencia de este lema y del Teorema 4.9 tenemos la descomposición buscada:

Teorema 4.12 *Sean $\mu \in A_s^+$ y $0 < p < \infty$. Existe un entero $N\left(p,\mu\right)$ con la siguiente propiedad: para toda $f \in H_+^p(\mu)$ y todo entero $N \geq N\left(p,\mu\right)$, exiten una sucesión $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ y una sucesión $\{a_{k,j}\}$ de (∞, N)-átomos soportados en intervalos $\{I_{k,j}\}$ respectivamente, tales que $\sum_{k,j} \lambda_k a_{k,j}$ converge incondicionalmente a f tanto en el sentido de las distribuciones como en $H_+^p(\mu)$.*

Además,

$$\|f\|_{H^p_+(\mu)} \sim \left\| \sum_{k,j} \lambda_k \chi_{I_{k,j}} \right\|_{L^p_\mu}$$

y, para todo j, k, el intervalo $I_{k,j+2}$ sigue al $I_{k,j}$ y $|I_{k,j+2}| \leq |I_{k,j}| \leq 4\,|I_{k,j+2}|$. En el caso de que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, se tiene, para todo $r > 0$, que

$$\left| \sum_{k,j} \lambda_k^r \chi_{I_{k,j}}(x) \right| \leq C_r f^*_{+,N}(x)^r, \tag{39}$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}$, donde $C_r = 3c^r \frac{2^r}{2^r-1}$ y c no depende ni de f ni de r.

Demostración. Sea $N(p,\mu)$ el entero dado por el Teorema 4.9. Se tiene que para $N \geq N(p,\mu)$ y $f \in H^p_+(\mu)$ exiten una sucesión $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ y una sucesión $\{a_k\}$ de (∞, N)-átomos soportados en intervalos acotados $\{I_k\}$ respectivamente, tales que

$$f = \sum_k \lambda_k a_k \tag{40}$$

en el sentido de las distribuciones y existe una constante $C > 0$ que no depende de f tal que

$$\left\| \sum \lambda_k \chi_{I_k} \right\|_{L^p_\mu} \leq C\,\|f\|_{H^p_+(\mu)}\,. \tag{41}$$

Por el Lema 4.11 existe una constante $c > 0$ tal que cada átomo a_k se descompone como

$$a_k = c \sum_j a_{k,j}, \tag{42}$$

donde $\{a_{k,j}\}$ es una sucesión $\{a_{k,j}\}$ de (∞, N)-átomos soportados en intervalos $\{I_{k,j}\}$ que tienen todas las propiedades pedidas.

Luego, de (40) y (42), se tiene que

$$f = c \sum_k \sum_j \lambda_k a_{k,j}, \tag{43}$$

en el sentido de las distribuciones.

Además, como para cada k fijo si $x \in I_k$ entonces x pertenece a lo sumo a tres $I_{k,j}$, tenemos que

$$\sum_k \sum_j \lambda_k \chi_{I_{k,j}}(x) \leq 3 \sum_k \lambda_k \chi_{I_k}(x)\,,$$

de donde, usando (41),

$$\left\| \sum_k \sum_j \lambda_k \chi_{I_{k,j}} \right\|_{L^p_\mu} \leq 3 \left\| \sum_k \lambda_k \chi_{I_k} \right\|_{L^p_\mu} \leq 3C\,\|f\|_{H^p_+(\mu)} < \infty.$$

Luego por el Teorema 4.8 tenemos que $c\sum_{k,j}\lambda_k a_{k,j}$ converge incondicionalmente tanto en el sentido de las distribuciones como en la norma de $H_+^p(\mu)$ a una distribución de $H_+^p(\mu)$ que, por (43), debe ser f. Además existe una constante $C_1 > 0$ que no depende de f tal que

$$\|f\|_{H_+^p(\mu)} \leq C_1 \left\| \sum_{k,j} \lambda_k \chi_{I_{k,j}} \right\|_{L_\mu^p}.$$

La desigualdad (39) es inmediata de la desigualdad (30) en el Teorema 4.9.

■

4.5. Algunos subespacios densos en $H_+^p(\mu)$

Como consecuencia inmediata del Teorema 4.9 se tiene que las combinaciones lineales finitas de (∞, N)-átomos son, para N suficientemente grande, un subespacio denso en $H_+^p(\mu)$.

Veremos que las combinaciones lineales finitas de (∞, N)-átomos que son funciones de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ también son densas en $H_+^p(\mu)$.

Lema 4.13 *Sea* $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $sop(\Psi) \subset [-1, 0]$, $\int \psi(u)du = 1$. *Si* a *es un* (∞, N)*- átomo entonces, para cada* $s > 0$, *se tiene que* $\psi_s * a$ *es un* (∞, N)*-átomo y* $\psi_s * a \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. *Además si* $p > 0$, $q \geq 1$, $\mu \in A_q^+$ *con constante de duplicación a izquierda* 2^d *y* N *un entero no negativo tal que* $p(N+2) > \max\{1, d, q-1\}$ *entonces*

$$\lim_{s \to 0^+} \psi_s * a = a$$

en $H_+^p(\mu)$.

Demostración. Sea a un (∞, N)- átomo soportado en un intervalo $(x_0 - r, x_0)$ donde $r > 0$, y sea $s > 0$. Es inmediato probar que $\psi_s * a$ es un (∞, N)- átomo soportado en $I = (x_0 - (r+s), x_0)$. Veamos la convergencia en $H_+^p(\mu)$.

Recordemos que $\|f\|_{H_+^p(\mu)} = \left\|M_1^+(f)\right\|_{p,\mu}$ donde

$$M_1^+(f)(x) = \sup_{0<y-x<t} |f * \phi_t(y)|,$$

siendo $\phi \in \mathcal{S}$, $sop(\phi) \subset (-\infty, 0]$, $\int \phi(t)dt \neq 0$.

Sea $k \in \mathbb{N}$ y $2^k I = \left(x_0 - 2^k(r+s), x_0\right)$.

Debido a que $sop(\phi) \subset (-\infty, 0]$, se tiene que $M_1^+(\psi_s * a - a)(x) = 0$ si $x \geq x_0$.

Como $\psi_s * a - a$ es una función acotada por 2 y tiene N momentos nulos podemos usar la estimación (26) en la demostración del Teorema 4.8 obteniendo

$$M_1^+(\psi_s * a - a, x) \leq c\left(\frac{|I|}{x_0 - x}\right)^{N+2} \tag{44}$$

para $x \leq x_0 - 2^k |I|$.

Si $x \leq x_0 - 2^k |I|$,

$$\frac{2^{k-1}|I|}{x_0 - x} = \frac{1}{x_0 - x} \int_x^{x_0} \chi_{2^{k-1}I}(t)\, dt \leq M^+\chi_{2^{k-1}I}(x),$$

y, reemplazando en (44), resulta que

$$M_1^+(\psi_s * a - a, x) \leq \frac{c}{2^{(k-1)(N+2)}} \left(M^+\chi_{2^{k-1}I}(x)\right)^{N+2}.$$

Luego, como $\mu \in A_q^+$, $p(N+2) \geq q$ y $p(N+2) > 1$, tenemos que

$$\int_{-\infty}^{x_0 - 2^k|I|} \left|M_1^+(\psi_s * a - a)(x)\right|^p \mu(x)\, dx \leq \frac{c}{2^{(k-1)p(N+2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(M^+\chi_{2^{k-1}I}(x)\right)^{p(N+2)} \mu(x)\, dx \leq$$

$$\leq \frac{c}{2^{(k-1)p(N+2)}} \mu\left(2^{k-1}I\right) \leq c\frac{2^{d(k-1)}}{2^{p(N+2)(k-1)}} \mu(I) = \frac{c}{2^{(p(N+2)-d)(k-1)}} \mu(I). \quad (45)$$

Ahora estimaremos

$$\int_{2^k I} \left|M_1^+(\psi_s * a - a)(x)\right|^p \mu(x)\, dx.$$

Como $M_1^+(f)(x) \leq c\, M^+(f)(x)$ bastará con estimar

$$\int_{2^k I} \left|M^+(\psi_s * a - a)(x)\right|^p \mu(x)\, dx.$$

Aplicando la desigualdad de Hölder con exponente α tal que $p\alpha > q$,

$$\int_{2^k I} \left|M^+(\psi_s * a - a)(x)\right|^p \mu(x)\, dx \leq \mu\left(2^k I\right)^{1/\alpha'} \left\|M^+(\psi_s * a - a)\right\|_{p\alpha,\mu}.$$

Y, como $\mu \in A_q^+ \subset A_{p\alpha}^+$ y $p\alpha > 1$, tenemos que

$$\int_{2^k I} \left|M_1^+(\psi_s * a - a)(x)\right|^p \mu(x)\, dx \leq c\, \mu\left(2^k I\right)^{1/\alpha'} \left\|\psi_s * a - a\right\|_{p\alpha,\mu}. \quad (46)$$

Dado $\varepsilon > 0$, como $p(N+2) > d$, podemos elejir k suficientemente grande como para que el miembro derecho de (45) sea menor que ε. Y siendo ψ_s una aproximación de la identidad, fijado k, podemos elejir $s > 0$ suficientemente pequeño como para que el miembro derecho de (46) sea menor que ε. Obtenemos así que

$$\lim_{s \to 0^+} \left\|\psi_s * a - a\right\|_{H_+^p(\mu)} = 0,$$

como queríamos probar. ■

Como corolario inmediato de este lema y de los Teoremas 4.9 y 4.6 tenemos:

Proposición 4.14 *Si $\mu \in A_q^+$ para algún $q \geq 1$ y N es suficientemente grande entonces el subespacio*

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k : \lambda_k > 0, \ a_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \ (\infty, N) - \acute{a}tomo \right\}$$

es denso en $H_+^p(\mu)$ y, si $p > 1$, es denso en L_μ^p.

Las siguientes observaciones serán utilizadas en la Sección 9.

Observación 4.15 *Sean $a \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ un (∞, N)-átomo soportado en $(x_0 - r, x_0)$, ψ como en el Lema 4.13 y, para $s > 0$, $a^s = \psi_s * a$. Como sop$(\psi) \subset [-1, 0]$ entonces, si $x < x_0$, se tiene que*

$$|a^s(x)| = \left| \int_x^{x_0} a(y) \psi_s(x - y) \, dy \right| \leq \frac{1}{s} \|\psi\|_\infty (x_0 - x).$$

Del mismo modo si $t > 0$ y $a^{s,t} = \psi_t * a^s$ podemos utilizar la estimación anterior para obtener

$$\left| a^{s,t}(x) \right| \leq \int_x^{x_0} |a^s(y) \psi_t(x - y)| \, dy \leq \frac{1}{st} \|\psi\|_\infty^2 (x_0 - x)^2,$$

si $x < x_0$.
Por lo anterior resulta que el conjunto de todas las combinaciones $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k$ donde $\lambda_k > 0$ y $a_k \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ es un (∞, N)-átomo tal que existe una constante $\beta_k > 0$, que depende del átomo a_k, para la cual

$$|a_k(x)| \leq \beta_k (x_0 - x) \tag{47}$$

y

$$|a_k(x)| \leq \beta_k (x_0 - x)^2 \tag{48}$$

es un subespacio denso en $H_+^p(\mu)$, si $p > 1$, es denso en L_μ^p. Llamaremos $\mathcal{A}$ a este subespacio.

Observación 4.16 *Sea $a \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ un (∞, N)-átomo que, sin pérdida de generalidad, supondremos soportado en el intervalo $[0, r]$ que cumple las desigualdades (47) y (48) para alguna constante $\beta > 0$. Si "partimos" a con el procedimiento del Lema 4.11 obtendremos $a = c \sum_j a_j$ donde (ver la demostración del Lema 4.11 y el Lema 4.10) $a_j \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ son (∞, N)-átomos.*

Probaremos que la derivada de los a_j esta acotada independientemente de j. Utilizando la notación de la demostración del Lema 4.11 se tiene que

$$c \, a_j(x) = b_j(x) = D^{N+1} A_j(x)$$

y, derivando una vez más (36), resulta que

$$Db_j\,(x) = D^{N+2}A_j(x) = \sum_{k=0}^{N+2} c_{k,N}\, D^k A(x)\, D_j^{N+2-k}\eta_j(x). \tag{49}$$

De modo análogo a la estimación (37), usando (47), tenemos que

$$\left|D^k A(x)\right| \leq \int_x^r (t-x)^{N-k}\,|a(t)|\,dt \leq \beta\,(r-x)^{N+2-k}\,, \tag{50}$$

para $x < r$ y $k \leq N$. También se tienen

$$\left|D^{N+1}A(x)\right| = |a(x)| \leq \beta\,(r-x)$$

y

$$\left|D^{N+2}A(x)\right| = |Da(x)| \leq \|Da\|_\infty\,.$$

Luego, por (49) y condiciones 5) y 3) del Lema 4.10 obtenemos

$$\begin{aligned} |Db_j\,(x)| &= \left|D^{N+2}A_j(x)\right| \leq c_N \sum_{k=0}^{N+2} (r-x)^{N+2-k} \left|D^{N+2-k}\eta_j(x)\right| \\ &\leq c_N \sum_{k=0}^{N+2} \frac{(r-x)^{N+2-k}}{r_j^{N+2-k}} \leq c_N \sum_{k=0}^{N+2} \frac{r_j^{N+2-k}}{r_j^{N+2-k}} = c_N\,(N+3) = c, \end{aligned}$$

donde la constante c no depende de j como habíamos afirmado.

Utilizando (48) para estimar en (50) se obtiene, de modo análogo, que la derivada segunda de los a_j esta acotada independientemente de j.

Resumiendo: al "partir" un átomo de los que conforman el subespacio denso $\mathcal{A}$ definido en la observación anterior, los nuevos átomos tienen (además de las propiedades enunciadas en el Lema 4.11) sus dos primeras derivadas acotadas en forma uniforme.

5. Una función interpoladora entre espacios de Hardy laterales

Como primera aplicación de la descomposición atómica obtenida en el Teorema 4.12 construiremos una “función interpoladora” entre espacios de Hardy laterales con pesos en A_∞^+. Esto será el Teorema 5.1 y se corresponde con los resultados con pesos biláteros del Capítulo XII de [13].

Luego daremos, como corolario, un caso particular de este teorema que utilizaremos en la Sección 8.

Comenzaremos dando la notación necesaria y enunciando el resultado principal.

5.1. Notación y resultado principal

Llamaremos $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1\}$.

Si $0 < p_0, p_1 < \infty$ y $z \in \Omega$, se define $p(z)$ como

$$\frac{1}{p(z)} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1},$$

y para $0 \leq u \leq 1$ se define el número

$$\mu(u) = \frac{u\,p(u)}{p_1}.$$

Notar que para $0 \leq u \leq 1$ se tiene que $0 \leq \mu(u) \leq 1$.

Con estos números, y dados ω y ν pesos en A_∞^+, se define el peso

$$\mu(u)(x) = \omega(x)^{1-\mu(u)}\nu(x)^{\mu(u)}.$$

En un claro abuso de notación llamamos $\mu(u)$ tanto al número como al peso.

Para un número fijo s, $0 < s < 1$, se definen $p = p(s)$ y $\mu = \mu(s)$.

En el Lema 5.2 se probará que $\mu(u) \in A_\infty^+$. De hecho existe r, $1 \leq r < \infty$ tal que $\mu(u) \in A_r^+$ para todo $0 \leq u \leq 1$.

Con esta notación podemos enunciar el resultado principal de esta sección:

Teorema 5.1 *Sea $f \in H_+^p(\mu)$. Entonces existe una función $f(z)$ de variable compleja $z \in \Omega$, a valores en $H_+^{p_0}(\omega) + H_+^{p_1}(\nu)$ tal que para u, $0 \leq u \leq 1$, $f(u+it) \in H_+^p(\mu(u))$, $f(s) = f$ y*

$$\|f(u+it)\|_{H_+^p(\mu(u))}^{p(u)} \leq c\,\|f\|_{H_+^p(\mu)}^p, \tag{51}$$

donde la constante c no depende ni de $u+it$, ni de f y su dependencia de los pesos ω y ν es sólo através de la constante de la clase A_r^+ a la que pertenezcan. Además, si $\phi \in \mathcal{S}$ con $sop(\phi) \subset (-\infty, 0]$ tal que $\int \phi(x)\,dx \neq 0$, y $F(x,t,z) = f(z) * \phi_t(x)$, se tienen las siguientes propiedades:

1. $F(x,t,z)$ *es uniformemente continua y acotada para* $z \in \Omega$ *y* (x,t) *en un compacto de* $\mathbb{R}^2_+$.

2. $F(x,t,z)$ *es analítica para* (x,t) *fijo y* z *en el interior de* Ω.

5.2. Lemas previos

Los siguientes lemas serán necesarios en la demostración del Teorema 5.1. Se corresponden con el Lema 7 y el Lema 8 del Capítulo XII de [13].

Lema 5.2 *Sean* $\omega \in A^+_p$, $\nu \in A^+_q$ *con constantes* $C_{\omega,p}$ *y* $C_{\nu,q}$ *respectivamente,* $0 < \delta < 1$ *y* $\eta > 0$.
Si $s = p(1-\delta) + q\delta$ *entonces*

$$\omega(x)^{1-\delta}\nu(x)^{\delta} \in A^+_s.$$

Además, para todo par de intervalos $I^- = (a,b)$ *e* $I^+ = (b,c)$ *con* $b - a = \eta(c-b)$, *se tiene que*

$$\left(\frac{1}{|I^-|}\int_{I^-}\omega(x)dx\right)^{1-\delta}\left(\frac{1}{|I^-|}\int_{I^-}\nu(x)dx\right)^{\delta} \leq C\left(\frac{1}{|I^+|}\int_{I^+}\omega(x)^{1-\delta}\nu(x)^{\delta}dx\right),$$

donde $C = (C_{\omega,p})^{1-\delta}(C_{\nu,q})^{\delta}\frac{(1+\eta)^s}{\eta}$ *no depende de* I^- *e* I^+.

Demostración. Supondremos $p > 1$, $q > 1$. Por la desigualdad de Hölder se tiene que

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{I^-}\omega(x)^{1-\delta}\nu(x)^{\delta}dx\right)\left(\int_{I^+}\left(\omega(x)^{1-\delta}\nu(x)^{\delta}\right)^{-\frac{1}{s-1}}dx\right)^{s-1}\\
&\leq \left(\int_{I^-}\omega(x)dx\right)^{1-\delta}\left(\int_{I^-}\nu(x)dx\right)^{\delta}\left(\int_{I^+}\left(\omega(x)^{1-\delta}\nu(x)^{\delta}\right)^{-\frac{1}{s-1}}dx\right)^{s-1}\\
&\leq \left[\int_{I^-}\omega(x)dx\left(\int_{I^+}\omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1}\right]^{1-\delta}\left[\int_{I^-}\nu(x)dx\left(\int_{I^+}\nu(x)^{-\frac{1}{q-1}}dx\right)^{q-1}\right]^{\delta}.
\end{aligned}$$

En la última desigualdad se utilizó la desigualdad de Hölder con exponentes $\alpha = \frac{s-1}{(p-1)(1-\delta)}$ y $\beta = \frac{s-1}{(q-1)\delta}$.

Como $\omega \in A^+_p$ y $\nu \in A^+_q$ entonces

$$\int_{I^-}\omega(x)^{1-\delta}\nu(x)^{\delta}dx\left(\int_{I^+}\left(\omega(x)^{1-\delta}\nu(x)^{\delta}\right)^{-\frac{1}{s-1}}dx\right)^{s-1} \leq C^{1-\delta}_{\omega,p}C^{\delta}_{\nu,q}(c-a)^s,$$

y, por lo tanto, $\omega(x)^{1-\delta}\nu(x)^{\delta} \in A^+_s$.

Utilizando nuevamente que $\omega \in A_p^+$ y $\nu \in A_q^+$ y la desigualdad de Hölder con exponentes α and β, tenemos que

$$\left(\int_{I^-} \omega(x)dx\right)^{1-\delta} \left(\int_{I^-} \nu(x)dx\right)^{\delta}$$

$$\leq C_{\omega,p}^{1-\delta} C_{\nu,q}^{\delta} (c-a)^s \left[\left(\int_{I^+} \omega(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx\right)^{(p-1)(1-\delta)} \left(\int_{I^+} \nu(x)^{-\frac{1}{q-1}} dx\right)^{(q-1)\delta}\right]^{-1}$$

$$\leq C_{\omega,p}^{1-\delta} C_{\nu,q}^{\delta} (c-a)^s \left(\int_{I^+} \left(\omega(x)^{1-\delta}\nu(x)^{\delta}\right)^{-\frac{1}{s-1}} dx\right)^{(s-1)(-1)}$$

$$\leq C_{\omega,p}^{1-\delta} C_{\nu,q}^{\delta} \left(\frac{c-a}{|I^+|}\right)^s \int_{I^+} \omega(x)^{1-\delta}\nu(x)^{\delta} dx.$$

Si $b-a = \eta\,(c-b)$ entonces

$$\left(\frac{1}{|I^-|}\int_{I^-} \omega(x)dx\right)^{1-\delta} \left(\frac{1}{|I^-|}\int_{I^-} \nu(x)dx\right)^{\delta} \leq C\frac{1}{|I^+|}\int_{I^+} \omega(x)^{1-\delta}\nu(x)^{\delta}dx,$$

donde $C = C_{\omega,p}^{1-\delta} C_{\nu,q}^{\delta} \frac{(1+\eta)^s}{\eta}$. ■

Lema 5.3 *Dados $0 < p < \infty$ y $\eta > 0$, existe una constante $C = C(p,\eta)$ tal que si δ es un peso en la recta real entonces*

$$\left\|\sum \lambda_k \chi_{I_k}\right\|_{L_\delta^p} \leq C \left\|\sum \lambda_k \chi_{E_k}\right\|_{L_\delta^p},$$

cualesquiera sean los números $\lambda_k > 0$, los intervalos I_k y los conjuntos $\delta-$medibles E_k, donde $E_k \subset I_k$ y $\delta(E_k) \geq \eta\delta(I_k)$.
Además, si p está entre p_0 y p_1, la constante $C = C(p_0, p_1, \eta)$ se puede elejir independiente de p.

Demostración. Las principales ideas de esta demostración se encuentran en la página 116 of [13].

Para el caso $p \geq 1$, sea $g \in L_\delta^{p'}$, donde $pp' = p + p'$, $g \geq 0$ y $\|g\|_{L_\delta^{p'}} = 1$.

Considerando la Maximal de Hardy-Littlewood con peso δ,

$$M_\delta(g)\,(y) = \sup_{y\in I} \frac{1}{\delta\,(I)} \int_I |g\,(t)|\,\delta\,(t)\,dt,$$

(donde el supremo se toma sobre los intervalos acotados de $\mathbb{R}$ que contienen a y) tenemos, para cada k, que

$$\int \chi_{I_k}(y)g(y)\delta(y)dy \leq \delta(I_k) \inf_{y\in E_k} M_\delta(g)(y)$$

$$\leq \eta^{-1}\delta(E_k) \inf_{y\in E_k} M_\delta(g)(y) \leq \eta^{-1} \int \chi_{E_k}(y) M_\delta(g)(y)\delta(y)dy.$$

Luego,

$$\int \left(\sum \lambda_k \chi_{I_k}(y)\right) g(y)\delta(y)dy \leq \eta^{-1} \int \left(\sum \lambda_k \chi_{E_k}(y)\right) M_\delta(g)(y)\delta(y)dy$$

$$\leq \eta^{-1} \left\|\sum \lambda_k \chi_{E_k}\right\|_{L^p_\delta} \|M_\delta(g)\|_{L^{p'}_\delta}.$$

Como estamos trabajando en la recta real tenemos que

$$\|M_\delta(g)\|_{L^{p'}_\delta} \leq C_p \|g\|_{L^{p'}_\delta},$$

donde la constante C_p no depende del peso δ ni de g. De hecho $(C_p)^{p'} = 2^{p'+1}p$.

Por lo tanto

$$\int \left(\sum \lambda_k \chi_{I_k}(y)\right) g(y)\delta(y)dy \leq C_p \eta^{-1} \left\|\sum \lambda_k \chi_{E_k}\right\|_{L^p_\delta},$$

de donde se deduce inmediatamente el lema para el caso $p \geq 1$.

Veamos el caso $0 < p < 1$.

Llamando $\Psi = \sum \lambda_k \chi_{E_k}$ y $\Phi = \sum \lambda_k \chi_{I_k}$ definimos, para $t > 0$ fijo, los conjuntos

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R} : \Psi(x) > t\} \quad \text{y} \quad \mathcal{O} = \left\{x \in \mathbb{R} : M_\delta \chi_{\mathcal{E}}(x) > \frac{\eta}{2}\right\}.$$

Si $\mathcal{O}^c \cap I_k \neq \varnothing$ entonces $\delta(\mathcal{E} \cap I_k) \leq \frac{\eta}{2}\delta(I_k)$, de donde

$$\delta(\mathcal{E} \cap E_k) \leq \delta(\mathcal{E} \cap I_k) \leq \frac{\eta}{2}\delta(I_k) \leq \frac{1}{2}\delta(E_k),$$

y,

$$\delta(E_k) \leq \frac{1}{2}\delta(E_k) + \delta(\mathcal{E}^c \cap E_k).$$

Por lo tanto

$$\delta(E_k) \leq 2\delta(\mathcal{E}^c \cap E_k)$$

y,

$$\eta\delta(\mathcal{E}^c \cap I_k) \leq \eta\delta(I_k) \leq \delta(E_k) \leq 2\delta(\mathcal{E}^c \cap E_k) \quad \text{if } \mathcal{O}^c \cap I_k \neq \varnothing. \tag{52}$$

Tomemos $s \geq 1$ cualquiera. Por el Teorema de Diferenciación de Lebesgue tenemos que para casi todo $x \in \mathcal{O}^c$ entonces $x \in \mathcal{E}^c$ y, por lo tanto,

$$\int_{\mathcal{O}^c} \Phi(x)^s \delta(x)\, dx \leq \int_{\mathcal{E}^c} \left(\sum_{\mathcal{O}^c \cap I_k \neq \varnothing} \lambda_k \chi_{I_k}(x)\right)^s \delta(x)\, dx.$$

Como se cumple (52), podemos aplicar, con peso $\delta(x)\chi_{\mathcal{E}^c}(x)$, el caso $s > 1$ que acabamos de probar, para estimar el último término por

$$c\int_{\mathcal{E}^c} \left(\sum_{\mathcal{O}^c \cap I_k \neq \varnothing} \lambda_k \chi_{E_k}(x)\right)^s \delta(x)\, dx,$$

donde $c = \left(C_s 2\eta^{-1}\right)^s$

Así, tenemos que

$$\int_{\mathcal{O}^c} \Phi\left(x\right)^s \delta\left(x\right) dx \leq c \int_{\mathcal{E}^c} \Psi\left(x\right)^s \delta\left(x\right) dx. \tag{53}$$

Como estamos trabajando en la recta real, M_δ es de tipo débil $(1,1)$ con respecto al peso δ con constante 2 y, por lo tanto, tenemos que

$$\delta\left(\mathcal{O}\right) \leq \frac{4}{\eta}\delta\left(\mathcal{E}\right).$$

Luego

$$\begin{aligned}\delta\left(\{x : \Phi\left(x\right) > t\}\right) &\leq \delta\left(\mathcal{O}\right) + \delta(\mathcal{O}^c \cap \{x : \Phi\left(x\right) > t\}) \\ &\leq \frac{4}{\eta}\delta\left(\mathcal{E}\right) + \frac{1}{t^s}\int_{\mathcal{O}^c} \Phi\left(x\right)^s \delta\left(x\right) dx.\end{aligned}$$

y, por (53),

$$\delta\left(\{x : \Phi\left(x\right) > t\}\right) \leq \frac{4}{\eta}\delta\left(\mathcal{E}\right) + \frac{c}{t^s}\int_{\mathcal{E}^c} \Psi\left(x\right)^s \delta\left(x\right) dx.$$

De esta estimación se tiene que

$$\left\|\sum \lambda_k \chi_{I_k}\right\|_{L^p_\delta}^p = \int_0^{+\infty} pt^{p-1}\delta\left(\{x : \Phi\left(x\right) > t\}\right) dt \leq$$

$$\leq \frac{4}{\eta}\int_0^{+\infty} pt^{p-1}\delta\left(\mathcal{E}\right) dt + c\int_0^{+\infty} pt^{p-1-s}\int_{\mathcal{E}^c} \Psi\left(x\right)^s \delta\left(x\right) dx\, dt,$$

obteniéndose el lema pues para $0 < p < 1$ el último término es igual a

$$\left(\frac{4}{\eta} + c\frac{p}{s-p}\right)\left\|\sum \lambda_k \chi_{E_k}\right\|_{L^p_\delta}^p.$$

Además, si p está entre p_0 y p_1 eligiendo $s > \text{máx}\,(p_0, p_1)$, se puede elejir la constante $C = C(p_0, p_1, \eta)$ de manera que no dependa de p. ■

El siguiente lema está contenido en el Teorema 1 de [6].

Lema 5.4 *Sea* $\delta \in A^+_\infty$.
1) Existe $\beta > 0$ *tal que dados* $\lambda > 0$ *y* (a, b) *un intervalo tal que* $\lambda \leq \frac{\delta(a,x)}{x-a}$ *para todo* $x \in (a, b)$ *entonces*

$$|\{x \in (a, b) : \delta(x) > \beta\lambda\}| > \frac{1}{2}(b - a).$$

2) Existe $\gamma > 0$ *tal que dados* $\lambda > 0$ *y* (a, b) *un intervalo tal que* $\lambda \geq \frac{\delta(x,b)}{b-x}$ *para todo* $x \in (a, b)$ *entonces*

$$\delta(\{x \in (a, b) : \delta(x) < \gamma\lambda\}) > \frac{1}{2}\delta(a, b).$$

Para la segunda parte del lema también ver Remark (1) de [6].

Cabe señalar que si $\delta \in A_s^+$ con constante C_s entonces β sólo depende de C_s y s. De hecho puede tomarse β como cualquier número positivo menor que $\left(2^{1/s}C_s\right)^{-1}$. Una afirmación similar puede hacerse para la segunda parte del lema: γ no depende del peso en A_s^+ sino de la constante de la clase A_s^+ (vease [6]).

5.3. Demostración del Teorema 5.1

Demostración. Sea $f \in H_+^p(\mu)$ entonces existe una descomposición

$$f = \sum_{k,j} \lambda_k a_{k,j}$$

como la dada en el Teorema 4.12, donde *sop* $(a_{k,j}) \subset I_{k,j}$ e $I_{k,j+2}$ "sigue" a $I_{k,j}$. Se supondrá que los átomos $a_{k,j}$ tienen la cantidad de momentos nulos que fuera necesaria.

Con la notación introducida al comienzo de esta sección y para $z \in \Omega$, definimos

$$f(z) = \sum_{k,j} \lambda_{k,j}(z) a_{k,j},$$

donde

$$\lambda_{k,j}(z) = \lambda_k^{p/p(z)} \left(\frac{\omega(I_{k,j+2})}{\nu(I_{k,j+2})}\right)^{\frac{(z-s)p}{p_0 p_1}}.$$

Probaremos que

$$\left\|\sum |\lambda_{k,j}(u+it)|\chi_{I_{k,j}}\right\|_{L^{p(u)}_{\mu(u)}} \leq C\,\|f\|_{H_+^p(\mu)}^{p/p(u)} < \infty \tag{54}$$

con lo cual, por el Teorema 4.8, se tiene que $f(u+it) \in H_+^{p(u)}(\mu(u))$ y existe una constante C, que no depende de u, tal que

$$\|f(u+it)\|_{H_+^{p(u)}(\mu(u))} \leq C \left\|\sum |\lambda_{k,j}(u+it)|\chi_{I_{k,j}}\right\|_{L^{p(u)}_{\mu(u)}}. \tag{55}$$

En efecto, como $\mu(u) \in A_r^+$ con la misma constante C_r cualquiera sea u (ver la demostración del Lema 5.2) entonces $\mu(u)$ es duplicante a izquierda con constante de duplicación independiente de u. También hay que observar en la demostración del Teorema 4.8 que la dependendecia de la constante respecto de $p\,(u)$ es continua. Luego C en (55) puede elejirse independiente de u.

Además de (54) y (55) se obtiene (51).

Primero probaremos que existe $\beta_{k,j} \in I_{k,j+2}$ y una constante c tal que

$$\frac{\mu(u)\left(x, \beta_{k,j}\right)}{\beta_{k,j} - x} \leq 4c\frac{\mu(u)(I_{k,j+2})}{|I_{k,j+2}|}, \tag{56}$$

para todo $x \in I_{k,j} \cup I_{k,j+2}$, $x < \beta_{k,j}$.

En efecto, como M^- es de tipo débil $(1,1)$ con constante 2, tenemos que, para cada k, j,

$$\left|\left\{x \in I_{k,j+2} : M^-(\mu(u)\chi_{I_{k,j}\cup I_{k,j+2}})(x) > 4\frac{\mu(u)(I_{k,j}\cup I_{k,j+2})}{|I_{k,j+2}|}\right\}\right| \leq \frac{|I_{k,j+2}|}{2},$$

y, por lo tanto, existe $\beta_{k,j} \in I_{k,j+2}$ tal que

$$M^-(\mu(u)\chi_{I_{k,j}\cup I_{k,j+2}})(\beta_{k,j}) \leq 4\frac{\mu(u)(I_{k,j}\cup I_{k,j+2})}{|I_{k,j+2}|} \leq 4c\frac{\mu(u)(I_{k,j+2})}{|I_{k,j+2}|},$$

donde c es la constante de duplicación a izquierda de $\mu(u)$ y no depende de u. Esto implica 56.

Llamaremos $\alpha_{k,j}$ al extremo izquierdo de $I_{k,j}$, y

$$E_{k,j} = \left\{x \in (\alpha_{k,j}, \beta_{k,j}) : \mu(u)(x) < \gamma 4c\frac{\mu(u)(I_{k,j+2})}{|I_{k,j+2}|}\right\},$$

donde γ es la constante de la parte 2 del Lema 5.4. Debido a (56) podemos aplicar la parte 2 del Lema 5.4 con $\lambda = 4c\frac{\mu(u)(I_{k,j+2})}{|I_{k,j+2}|}$ para obtener

$$\mu(u)(E_{k,j}) \geq \frac{\mu(u)(\alpha_{k,j}, \beta_{k,j})}{2}. \tag{57}$$

Notar que como $\mu(u) \in A_r^+$ con la misma constante C_r cualquiera sea u entonces la constante γ del Lema 5.4 puede ser elegida en forma independiente de u (ver el comentario después del Lema 5.4).

Usando que $I_{k,j} \subset (\alpha_{k,j}, \beta_{k,j})$ y, teniendo en cuenta (57), por el Lema 5.3 existe una constante $C > 0$ que no depende de u tal que

$$\left\|\sum |\lambda_{k,j}(u+it)|\chi_{I_{k,j}}\right\|_{L^{p(u)}_{\mu(u)}} \leq \left\|\sum |\lambda_{k,j}(u+it)|\chi_{(\alpha_{k,j},\beta_{k,j})}\right\|_{L^{p(u)}_{\mu(u)}}$$

$$\leq C\left\|\sum |\lambda_{k,j}(u+it)|\chi_{E_{k,j}}\right\|_{L^{p(u)}_{\mu(u)}} = C\left\|\sum |\lambda_{k,j}(u+it)|\mu(u)\,(\cdot)^{\frac{1}{p(u)}}\,\chi_{E_{k,j}}\right\|_{L^{p(u)}}.$$

Por las definiciones de $\lambda_{k,j}(u+it)$, $E_{k,j}$ y $\mu(u)(I_{k,j+2})$, el último término se acota por

$$C\left\|\sum \lambda_k^{\frac{p}{p(u)}}\left[\frac{\omega(I_{k,j+2})}{\nu(I_{k,j+2})}\right]^{\frac{(u-s)p}{p_0p_1}}\left[\gamma 4c\frac{\mu(u)(I_{k,j+2})}{|I_{k,j+2}|}\right]^{\frac{1}{p(u)}}\chi_{E_{k,j}}\right\|_{L^{p(u)}}$$

$$\leq C\left\|\sum \lambda_k^{\frac{p}{p(u)}}\left[\frac{\omega(I_{k,j+2})}{\nu(I_{k,j+2})}\right]^{\frac{(u-s)p}{p_0p_1}}\left[\frac{1}{|I_{k,j+2}|}\int\limits_{I_{k,j+2}}\omega(x)^{1-\mu(u)}\nu(x)^{\mu(u)}dx\right]^{\frac{1}{p(u)}}\chi_{E_{k,j}}\right\|_{L^{p(u)}}.$$

Como $\frac{(u-s)p}{p_0 p_1} = \frac{\mu(u)-\mu}{p(u)}$ y usando la desigualdad de Hölder esta expresión se acota por

$$C \left\| \sum \lambda_k^{\frac{p}{p(u)}} \left(\frac{\omega(I_{k,j+2})}{\nu(I_{k,j+2})} \right)^{\frac{\mu(u)-\mu}{p(u)}} \left[\frac{\omega(I_{k,j+2})^{1-\mu(u)} \nu(I_{k,j+2})^{\mu(u)}}{|I_{k,j+2}|} \right]^{\frac{1}{p(u)}} \chi_{E_{k,j}} \right\|_{L^{p(u)}}$$

$$\leq C \left\| \sum \lambda_k^{\frac{p}{p(u)}} \left(\frac{\omega(I_{k,j+2})^{1-\mu} \nu(I_{k,j+2})^{\mu}}{|I_{k,j+2}|} \right)^{\frac{1}{p(u)}} \chi_{I_{k,j} \cup I_{k,j+2} \cup I_{k,j+4} \cup I_{k,j+6}} \right\|_{L^{p(u)}}.$$

Por el Lema 5.2 y el Lema 5.3, el último término se acota por

$$C \left\| \sum \lambda_k^{\frac{p}{p(u)}} \left(\frac{\mu(I_{k,j+4})}{|I_{k,j+4}|} \right)^{\frac{1}{p(u)}} \chi_{I_{k,j+6}} \right\|_{L^{p(u)}} \leq C \left\| \sum \lambda_k^{\frac{p}{p(u)}} \left(\frac{\mu(I_{k,j+2})}{|I_{k,j+2}|} \right)^{\frac{1}{p(u)}} \chi_{I_{k,j+4}} \right\|_{L^{p(u)}},$$

donde C no depende de u.

Consideremos

$$M_\mu^+ g\,(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{\mu(x,x+h)} \int_x^{x+h} g\,(t)\,\mu(t)dt.$$

Como M_μ^+ es de tipo débil $(1,1)$ respecto del peso μ con constante 2, tenemos que, para cada k, j,

$$\mu\left(\left\{ x \in I_{k,j+2} : M_\mu^+(\mu^{-1}\chi_{I_{k,j+2}\cup I_{k,j+4}})(x) > 4\frac{|I_{k,j+2} \cup I_{k,j+4}|}{\mu(I_{k,j+2})} \right\} \right) \leq \frac{\mu\,(I_{k,j+2})}{2},$$

y, como $\mu\,(I_{k,j+2}) > 0$, existe $c_{k,j} \in I_{k,j+2}$ tal que

$$M_\mu^+(\mu^{-1}\chi_{I_{k,j+2}\cup I_{k,j+4}})(c_{k,j}) \leq 4\frac{|I_{k,j+2} \cup I_{k,j+4}|}{\mu(I_{k,j+2})} \leq 8\frac{|I_{k,j+2}|}{\mu(I_{k,j+2})}.$$

Esto implica que

$$\frac{\mu(I_{k,j+2})}{8\,|I_{k,j+2}|} \leq \frac{\mu(c_{k,j},x)}{x - c_{k,j}}$$

para todo $x \in I_{k,j+2} \cup I_{k,j+4}$, $x > c_{k,j}$. Luego, si llamamos $d_{k,j}$ al extremo derecho de $I_{k,j+4}$, y

$$F_{k,j} = \left\{ x \in (c_{k,j}, d_{k,j}) : \mu(x) > \frac{\beta\ \mu(I_{k,j+2})}{8|I_{k,j+2}|} \right\},$$

podemos aplicar la parte 1 del Lema 5.4 con $\lambda = \frac{\mu(I_{k,j+2})}{8\,|I_{k,j+2}|}$ para obtener

$$|F_{k,j}| \geq \frac{d_{k,j} - c_{k,j}}{2}.$$

Usando que $I_{k,j+4} \subset (c_{k,j}, d_{k,j})$, el Lema 5.3 y la defininción de $F_{k,j}$, tenemos que

$$\left\| \sum \lambda_k^{\frac{p}{p(u)}} \left(\frac{\mu(I_{k,j+2})}{|I_{k,j+2}|} \right)^{\frac{1}{p(u)}} \chi_{I_{k,j+4}} \right\|_{L^{p(u)}} \leq \left\| \sum \lambda_k^{\frac{p}{p(u)}} \left(\frac{\mu(I_{k,j+2})}{|I_{k,j+2}|} \right)^{\frac{1}{p(u)}} \chi_{(c_{k,j},d_{k,j})} \right\|_{L^{p(u)}}$$

$$\leq C \left\| \sum \lambda_k^{\frac{p}{p(u)}} \left(\frac{\mu(I_{k,j+2})}{|I_{k,j+2}|} \right)^{\frac{1}{p(u)}} \chi_{F_{k,j}} \right\|_{L^{p(u)}} \leq C \left\| \sum \lambda_k^{\frac{p}{p(u)}} \mu(\cdot)^{\frac{1}{p(u)}} \chi_{F_{k,j}} \right\|_{L^{p(u)}}$$

$$\leq C \left\| \sum \lambda_k^{\frac{p}{p(u)}} \chi_{I_{k,j+2} \cup I_{k,j+4}} \right\|_{L_\mu^{p(u)}} \leq C \left\| \sum \lambda_k^{\frac{p}{p(u)}} \chi_{I_{k,j+4}} \right\|_{L_\mu^{p(u)}} \leq C \left\| \sum \lambda_k^{\frac{p}{p(u)}} \chi_{I_{k,j}} \right\|_{L_\mu^{p(u)}}.$$

Hasta este punto hemos probado que

$$\left\| \sum |\lambda_{k,j}(u+it)| \chi_{I_{k,j}} \right\|_{L_{\mu(u)}^{p(u)}} \leq C \left\| \sum \lambda_k^{\frac{p}{p(u)}} \chi_{I_{k,j}} \right\|_{L_\mu^{p(u)}}. \tag{58}$$

Primero supondremos que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ con lo cual podemos usar la desigualdad (39) con $r = \frac{p}{p(u)}$ que, junto con el Teorema 4.2, nos da

$$C \left\| \sum \lambda_k^{\frac{p}{p(u)}} \chi_{I_{k,j}} \right\|_{L_\mu^{p(u)}} \leq C \left\| f_{+,N}^{*\,\frac{p}{p(u)}} \right\|_{L_\mu^{p(u)}} = C \left\| f_{+,N}^* \right\|_{L_\mu^p}^{p/p(u)} \leq C \left\| f \right\|_{H_+^p(\mu)}^{p/p(u)} < \infty.$$

Luego, teniendo en cuenta (55), es

$$\|f(u+it)\|_{H_+^{p(u)}(\mu(u))}^{p(u)} \leq C \left\| \sum |\lambda_{k,j}(u+it)| \chi_{I_{k,j}} \right\|_{L_{\mu(u)}^{p(u)}}^{p(u)} \leq C \|f\|_{H_+^p(\mu)}^p, \tag{59}$$

como queríamos probar.

En el caso general de que $f \in H_+^p(\mu)$, como $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ es denso en $H_+^p(\mu)$, podemos considerar funciones $f_l \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tales que

$$\left\| f - \sum_{l=1}^n f_l \right\|_{H_+^p(\mu)} \leq 2^{-n}$$

y

$$\|f_l\|_{H_+^p(\mu)} \leq 2^{-l} \|f\|_{H_+^p(\mu)}. \tag{60}$$

Luego, si utilizamos el Teorema 4.12 para descomponer

$$f_l = \sum_{k,j} \lambda_{l,k} a_{l,k,j},$$

tendremos que

$$f = \sum_{l,k,j} \lambda_{l,k} a_{l,k,j} \tag{61}$$

con

$$\left| \sum_{l,k,j} \lambda_{l,k}^r \chi_{I_{l,k,j}}(x) \right| \leq C_r \sum_l (f_l)_{+,N}^*(x)^r. \tag{62}$$

Utilizando la descomposición (61) de f para construir $f(z)$ podemos repetir todo lo anterior hasta (58). De donde, usando la desigualdad puntual (62), se obtiene

$$\left\|\sum |\lambda_{l,k,j}(u+it)|\chi_{I_{l,k,j}}\right\|_{L^{p(u)}_{\mu(u)}} \leq C\left\|\sum \lambda_{l,k}^{\frac{p}{p(u)}}\chi_{I_{l,k,j}}\right\|_{L^{p(u)}_{\mu}} \leq C\left\|\sum_l (f_l)^{*\frac{p}{p(u)}}_{+,N}\right\|_{L^{p(u)}_{\mu}}.$$

En el caso de que $p(u) \geq 1$ podemos aplicar la desigualdad de Minkowski, el Teorema 4.2 y (60) para obtener

$$\left\|\sum |\lambda_{l,k,j}(u+it)|\chi_{I_{l,k,j}}\right\|_{L^{p(u)}_{\mu(u)}} \leq C\sum_l \left\|(f_l)^{*\frac{p}{p(u)}}_{+,N}\right\|_{L^{p(u)}_{\mu}} = C\sum_l \left\|(f_l)^{*}_{+,N}\right\|^{\frac{p}{p(u)}}_{L^{p}_{\mu}} \leq$$
$$\leq C\sum_l \|f_l\|^{\frac{p}{p(u)}}_{H^p_+(\mu)} \leq C\sum_l 2^{-l\frac{p}{p(u)}}\|f\|^{\frac{p}{p(u)}}_{H^p_+(\mu)} \leq C\|f\|^{\frac{p}{p(u)}}_{H^p_+(\mu)}.$$

En el caso $0 < p(u) < 1$, tenemos

$$\left\|\sum |\lambda_{l,k,j}(u+it)|\chi_{I_{l,k,j}}\right\|_{L^{p(u)}_{\mu(u)}} \leq C\left\|\sum_l (f_l)^{*\frac{p}{p(u)}}_{+,N}\right\|_{L^{p(u)}_{\mu}} =$$
$$= C\left(\int\left(\sum_l \left((f_l)^*_{+,N}(x)\right)^{\frac{p}{p(u)}}\right)^{p(u)}\mu(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p(u)}} \leq$$
$$\leq C\left(\int\sum_l \left((f_l)^*_{+,N}(x)\right)^{p}\mu(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p(u)}} = C\left(\sum_l \|f_l\|^p_{H^p_+(\mu)}\right)^{\frac{1}{p(u)}} \leq$$
$$\leq C\left(\sum_l 2^{-lp}\right)^{\frac{1}{p(u)}}\|f\|^{p/p(u)}_{H^p_+(\mu)} \leq C\|f\|^{p/p(u)}_{H^p_+(\mu)}.$$

En ambos casos obtenemos (59) con otra constante C, como queríamos probar.

Veamos que $f(z) \in H^{p_0}_+(\omega) + H^{p_1}_+(\nu)$. Sea $z = u + it \in \Omega$, fijo.

Como

$$|\lambda_{k,j}(u+it)| = \lambda_{k,j}(0)^{1-\mu}\lambda_{k,j}(1)^{\mu}$$

entonces se cumple una de las siguientes desigualdades:

$$|\lambda_{k,j}(u+it)| \leq \lambda_{k,j}(0) \qquad \text{ó} \qquad |\lambda_{k,j}(u+it)| \leq \lambda_{k,j}(1).$$

Sea $I = \{(k,j) : |\lambda_{k,j}(u+it)| \leq \lambda_{k,j}(0)\}$. Se definen

$$f_0(z) = \sum_{(k,j)\in I} \lambda_{k,j}(u+it)\,a_k$$

y

$$f_1(z) = f(z) - f_0(z).$$

Entonces $f(z) = f_0(z) + f_1(z)$ y, usando (59),

$$\|f_0(z)\|_{H_+^{p_0}(\omega)} \leq C \left\| \sum_{(k,j)\in I} |\lambda_{k,j}(u+it)| \chi_{I_{k,j}} \right\|_{L_\omega^{p_0}}$$

$$\leq C \left\| \sum \lambda_{k,j}(0) \chi_{I_{k,j}} \right\|_{L_\omega^{p_0}} \leq C \|f\|_{H_+^{p(u)}(\mu)}^{p/p_0} < \infty,$$

y

$$\|f_1(z)\|_{H_+^{p_1}(\upsilon)} \leq C \left\| \sum_{(k,j)\notin I} |\lambda_{k,j}(u+it)| \chi_{I_{k,j}} \right\|_{L_\nu^{p_1}}$$

$$\leq C \left\| \sum \lambda_{k,j}(1) \chi_{I_{k,j}} \right\|_{L_\nu^{p_1}} \leq C \|f\|_{H_+^{p(u)}(\mu)}^{p/p_1} < \infty.$$

Veamos que $F(x,t,z) = f(z) * \phi_t(x)$ es uniformemente continua y acotada para $z \in \Omega$ y (x,t) en un compacto K de $\mathbb{R}_+^2 = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0\}$, y analítica en el interior de Ω.

Para esto consideremos

$$f_n(z) = \sum_{k,j=1}^{n} \lambda_{k,j}(z)\ a_{k,j}.$$

Luego, como,

$$F_n(x,t,z) = f_n(z) * \phi_t(x) = \sum_{k,j=1}^{n} \lambda_{k,j}(z)\ a_{k,j} * \phi_t(x)$$

es uniformemente continua y acotada para $z \in \Omega$ y (x,t) en un compacto K de $\mathbb{R}_+^2$, y analítica para en el interior de Ω, bastará probar que

$$F_n \to F \tag{63}$$

uniformemente en $K \times \Omega$.

Como, por (59), se tiene que

$$\left\| \sum \lambda_{k,j}(i) \chi_{I_{k,j}} \right\|_{L_i^{p_i}} \leq C \|f\|_{H_+^p(\mu)}^{p/p_i} < \infty,$$

para $i = 0, 1$, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe n tal que

$$C \left\| \sum_{k,j=n+1}^{\infty} \lambda_{k,j}(i) \chi_{I_{k,j}} \right\|_{L_i^{p_i}} < \varepsilon, \qquad i = 0, 1.$$

Repitiendo la descomposición hecha para $f(z)$, ahora para $f(z) - f_n(z)$, se tiene que, para cada $z \in \Omega$ fijo,

$$f(z) - f_n(z) = f_0^n(z) + f_1^n(z) \in H_+^{p_0}(\omega) + H_+^{p_1}(\nu)$$

con

$$\left\| f_i^n(z) \right\|_{H_i^{p_i}} \leq C \left\| \sum_{k,j=n+1}^{\infty} \lambda_{k,j}(i) \chi_{I_{k,j}} \right\|_{L_i^{p_i}} < \varepsilon,$$

donde $i = 0, 1$. Notar que n no depende de $z \in \Omega$.

Luego obtenemos (63) pues, para todo $(x, t, z) \in K \times \Omega$,

$$|F(x,t,z) - F_n(x,t,z)| = |(f(z) - f_n(z)) * \phi_t(x)|$$

$$\leq |f_0^n(z) * \phi_t(x)| + |f_1^n(z) * \phi_t(x)| \leq 2C_K\,\varepsilon,$$

donde la última desigualdad se debe a que si $(x, t) \in K$ entonces

$$|g * \phi_t(x)| \leq C_K \|g\|_{H_+^r(\delta)}$$

para toda $g \in H_+^r(\delta)$. En efecto, por ser compacto de $\mathbb{R}_+^2$, K puede descomponerse en una cantidad finita de conjuntos $K = \cup_{j=1}^k K_j$ contenidos en la intersección de dos semiconos $\left\{(y,s) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 < y - a_j < s\right\}$ y $\left\{(y,s) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 < y - b_j < s\right\}$, donde $a_j < b_j$. Luego, si $(x,t) \in K_j$, se tiene que, para cada $a_j \leq u \leq b_j$,

$$|g * \phi_t(x)| \leq \sup_{0 \leq y-u < s} |g * \phi_s(y)| = M_1^+(g, \phi, u),$$

y, por lo tanto,

$$|g * \phi_t(x)| \leq \left(\frac{1}{\delta(a_j, b_j)} \int_{a_j}^{b_j} M_1^+(g, \phi, u)^r \,\delta(u)\, du \right)^{1/r} \leq C_K \|g\|_{H_+^r(\delta)}.$$

■

Observación 5.5 *La constante C obtenida en (59) depende de los pesos ω y ν sólo a través de la constante de la clase A_r^+ a la que pertenezcan. Luego para pesos que esten en una misma clase con la misma constante se obtendrá la misma constante C. Esta observación será importante en la demostración de la Proposición 3.3.*

5.4. Un caso particular

Aplicaremos el Teorema 5.1 a un caso particular que utilizaremos en la Sección 8. Obtendremos una "función interpoladora" entre $H_+^1(\nu)$ y L^2.

Corolario 5.6 *Sean $1 < p < 2$, $\nu \in A_1^+$ y $f \in H_+^p\left(\nu^{2-p}\right)$. Existe una función $f(z)$ definida en $1/2 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1$ tal que $f\left(\frac{1}{p}\right) = f$ y*

$$\|f(u+it)\|_{H_+^{1/u}(\nu^{2-1/u})}^{1/u} \leq c\,\|f\|_{H_+^p(\nu^{2-p})}^p.$$

Demostración. Consideremos $p_0 = 2$, $p_1 = 1$ y $\omega(x) = 1$. Entonces con la notación del Teorema 5.1 se tiene

$$\frac{1}{p(\xi)} = \frac{1-\xi}{2} + \xi = \frac{1+\xi}{2},$$

$$\mu(\xi) = \frac{2\xi}{1+\xi}$$

y

$$\mu(\xi)(x) = \nu(x)^{\frac{2\xi}{1+\xi}},$$

donde $0 \leq \xi \leq 1$.

Sea $\widetilde{f}(z)$ la función dada por el Teorema 5.1, tal que

$$\widetilde{f}\left(\frac{2}{p} - 1\right) = f$$

y

$$\left\|\widetilde{f}(\xi + it)\right\|^{p(\xi)}_{H^{p(\xi)}_{+}(\mu(\xi))} \leq c\,\|f\|^{p}_{H^{p}_{+}(\nu^{2-p})}.$$

La función lineal $z \mapsto 2z - 1$ transforma $1/2 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1$ en $0 \leq \xi \leq 1$ y por lo tanto

$$f(z) = \widetilde{f}(2z - 1)$$

esta bien definida y

$$f\left(\frac{1}{p}\right) = f.$$

Además, como

$$p(2u - 1) = \frac{1}{u}$$

y

$$\mu(2u-1)(x) = \nu(x)^{2-1/u},$$

entonces

$$\|f(u + it)\|^{1/u}_{H^{1/u}_{+}(\nu^{2-1/u})} \leq c\,\|f\|^{p}_{H^{p}_{+}(\nu^{2-p})}.$$

■

Como consecuencia inmediata del Teorema 4.6 tenemos el siguiente corolario:

Corolario 5.7 *Sean $1 < p < 2$, $\nu \in A_1^+$ y $f \in L^p_{\nu^{2-p}}$. Existe una función $f(z)$ definida en $1/2 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1$ tal que $f\left(\frac{1}{p}\right) = f$,*

$$\left\|f(\frac{1}{2} + it)\right\|^{2}_{2} \leq c\,\|f\|^{p}_{p,\nu^{2-p}}$$

y

$$\|f(1 + it)\|_{H^{1}_{+}(\nu)} \leq c\,\|f\|^{p}_{p,\nu^{2-p}}.$$

6. Un teorema de multiplicadores de Hörmander

En la demostración de la Proposición 3.3 usaremos que el operador integral fraccionaria imaginaria R_σ, $\sigma \in \mathbb{R}$, definido a través de la transformada de Fourier por el multiplicador

$$\widehat{R_\sigma f}\,(\xi) = (\xi + i)^{i\sigma}\,\widehat{f}\,(\xi)\,,$$

es acotado en $H^1_+(\nu)$, $\nu \in A^+_1$. También estaremos interesados en como depende de σ la constante de acotación.

Este resultado se obtendrá al final de esta sección como ejemplo de un teorema de multiplicadores de Hörmander.

La demostración de este teorema sigue las ideas del Capítulo XI en [13] y se usa la descomposición atómica de $H^1_+(\nu)$ con la propiedad del "siguiente" dada en el Teorema 4.12.

Cabe aclarar que este teorema de multiplicadores es válido en $H^p_+(\nu)$ con $0 < p < \infty$ y $\nu \in A^+_s$ para algún $s \geq 1$, pero, por simplicidad, sólo daremos la demostración en el caso $p = 1$, $s = 1$.

6.1. Resultado principal y lemas previos

En [12] puede encontrarse el siguiente resultado clásico sobre multiplicadores:

Teorema 6.1 *Sea $m : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 tal que existe una constante $A > 0$ tal que*

$$|m\,(\xi)| \leq A$$

y

$$|Dm\,(\xi)| \leq A\,|\xi|^{-1}$$

entonces m es un multiplicador en L^p, $1 < p < \infty$. Esto es que el operador R_m definido por $\widehat{R_m f}\,(\xi) = m\,(\xi)\,\widehat{f}\,(\xi)$ para $f \in L^2$satisface

$$\|R_m f\|_p \leq c\,\|f\|_p\,,$$

donde la constan c no depende de $f \in L^2 \cap L^p$, y, por lo tanto, se extiende a un operador acotado en L^p. Además la constante de acotación es un múltiplo de A.

Probaremos un resultado similar para multiplicadores en $H^1_+(\nu)$:

Teorema 6.2 *Sea $m : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^{α_0} tal que existe una constante $A > 0$ tal que*

$$|D^\alpha m(\xi)| \leq A\;|\xi|^{-\alpha}\,, \tag{64}$$

para todo $\xi \neq 0$, $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$. Supongamos, además, que m se extiende a una función analítica y acotada en el semiplano superior.

Sean $\nu \in A_1^+$ y 2^d la constante de duplicación a izquierda correspondiente a ν. Supondremos que α_0 es suficientemente grande como para que $\alpha_0 > 2^d + 1$. Entonces m define un operador acotado en $H_+^1(\nu)$ y la constante de acotación es un múltiplo de A.

Primero necesitaremos algunos lemas.

Lema 6.3 *Sean $\nu \in A_1^+$, $r > 0$, $J = (x_0 - |J|, x_0)$ y $J^+ = (x_0, x_0 + r|J|)$, entonces existen constantes $\varepsilon > 0$ y $c = c(r) > 0$ tales que*

$$\left(\frac{1}{|J|}\int_J \nu(x)^{1+\varepsilon}\,dx\right)^{1/1+\varepsilon} \le c\frac{\nu(J^+)}{|J^+|}.$$

Demostración. Como $\nu \in A_1^+$ entonces (vease 4 del Lema 2.1) existe $\varepsilon > 0$ tal que $\nu^{1+\varepsilon} \in A_1^+$. Luego, para cada $y \in J^+$, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{1}{|J|}\int_J \nu(x)^{1+\varepsilon}\,dx &\le \frac{|J|+|J^+|}{|J|}\frac{1}{|J|+y-x_0}\int_{x_0-|J|}^{y} \nu(x)^{1+\varepsilon}\,dx \\ &\le (1+r)\,M^-\left(\nu^{1+\varepsilon}\right)(y) \le c\,(1+r)\,\nu(y)^{1+\varepsilon}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, promediando en J^+,

$$\left(\frac{1}{|J|}\int_J \nu(x)^{1+\varepsilon}\,dx\right)^{1/1+\varepsilon} \le c\frac{1}{|J^+|}\int_{J^+} \nu(x)\,dx = c\frac{\nu(J^+)}{|J^+|}.$$

■

Lema 6.4 *Si $\nu \in A_1^+$ entonces existe p, $1 < p < \infty$, tal que para todo $(p,0)$ átomo b soportado en un intervalo $I = (x_0 - |I|, x_0)$, se tiene que*

$$\|b\|_{H_+^1(\nu)} \le c\,\nu\left(I^+\right).$$

donde $I^+ = (x_0, x_0 + r|I|)$, $r > 0$, y la constante $c = c(r) > 0$ no depende de b.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ dado por el lema anterior y sea p tal que $p' = 1+\varepsilon$. Si b es un $(p,0)$ átomo b soportado en un intervalo $I = (x_0 - |I|, x_0)$, probaremos que

$$\left\|M_1^+(b)\right\|_{1,\nu} \le c\,\nu\left(I^+\right),$$

donde

$$M_1^+(b,x) = \sup_{0\le y-x<t} |b * \phi_t(y)|,$$

$\phi \in \mathcal{S}$, $sop(\phi) \subset (-\infty, 0]$, $\int \phi(t)dt \neq 0$.

Sea $2I = (x_0 - 2|I|, x_0)$.

Como

$$M_1^+(b,x) = \sup_{0\le y-x<t} |b * \phi_t(y)| \le c\,M(b)(x),$$

entonces, utilizando la desigualdad de Hölder y el Teorema Maximal, se tiene que

$$\int_{2I} M_1^+(b,x)\,\nu(x)\;dx \le c\int_{2I} M(b)(x)\,\nu(x)\;dx$$
$$\le c\left(\int M(b)(x)^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_{2I}\nu(x)^{p'}\;dx\right)^{1/p'}$$
$$\le c\left(\int |b(x)|^p\;dx\right)^{1/p}\left(\frac{1}{|2I|}\int_{2I}\nu(x)^{p'}\;dx\right)^{1/p'}|2I|^{1/p'}$$

Por la definición de átomo (Definición 4.7) y el Lema 6.3 donde $1+\varepsilon=p'$, $J=2I$ y $J^+=I^+$ se tiene que

$$\int_{2I} M_1^+(b,x)\,\nu(x)\;dx \le c\,|I|^{1/p}\,\frac{\nu(I^+)}{|I^+|}\,|2I|^{1/p'} = c\frac{|I|}{|I^+|}\nu\left(I^+\right) = \frac{c}{r}\,\nu\left(I^+\right). \tag{65}$$

Sea $x\notin 2I$.

Si $x\ge x_0$ e $y>x$, como $sop\,(\phi_t)\subset(-\infty,0]$ entonces

$$b*\phi_t\,(y)=\int_I b\,(u)\,\phi_t\,(y-u)\,du=0$$

y, por lo tanto,

$$M_1^+(b,x)=0. \tag{66}$$

Por último veamos el caso $x\le x_0-2|I|$ y $0<y-x<t$.

Utilizando la integral nula de b y el Teorema del Valor Medio, se tiene que

$$\begin{aligned}
|b*\phi_t\,(y)\,| &= \frac{1}{t}\left|\int_I b\,(u)\,\phi\left(\frac{y-u}{t}\right)du\right| = \\
&= \frac{1}{t}\left|\int_I b\,(u)\left(\phi\left(\frac{y-u}{t}\right)-\phi\left(\frac{y-x_0}{t}\right)\right)du\right| \\
&\le \frac{1}{t}\int_I |b\,(u)|\left|D\phi\left(\frac{y-\xi}{t}\right)\right|\frac{|u-x_0|}{t}du,
\end{aligned} \tag{67}$$

donde $u<\xi<x_0$.

Como $\phi\in\mathcal{S}$ existe $c>0$, tal que

$$\left|D\phi\left(\frac{y-\xi}{t}\right)\right|\le c\frac{1}{1+\left(\frac{y-\xi}{t}\right)^2}=c\frac{t^2}{t^2+(\xi-y)^2}.$$

Observemos que para $\xi\in I$ fijo, $t^2+(\xi-y)^2$ es el cuadrado de la distancia del punto $(\xi,0)$ al punto (y,t) del semicono $0\le y-x<t$. Por un argumento geométrico tenemos que la distancia es mínima si $y=\frac{x+\xi}{2}$, esto es

$$t^2+(\xi-y)^2\ge t^2+\left(\frac{\xi-x}{2}\right)^2\ge\left(\frac{\xi-x}{2}\right)^2$$

y, por lo tanto,

$$\left|D\phi\left(\frac{y-\xi}{t}\right)\right| \leq c\frac{t^2}{(\xi-x)^2}.$$

Si $z \in I$ entonces, $0 < z-x = z-\xi+\xi-x < |I|+\xi-x < 2\,(\xi-x)$. Luego

$$\left|D\phi\left(\frac{y-\xi}{t}\right)\right| \leq c\frac{t^2}{(z-x)^2},$$

para todo $z \in I$, $\xi \in I$ y $0 \leq y-x < t$.

Mayorando en (67), obtenemos

$$|b*\phi_t\,(y)\,| \leq c\frac{|I|}{(z-x)^2}\int_I |b\,(u)|\,du,$$

para todo $0 \leq y-x < t$ y $z \in I$.

Luego

$$\begin{aligned} M_1^+(b,x) &\leq c\frac{|I|}{(z-x)^2}\int_I |b\,(u)|\,du \\ &\leq c\frac{|I|}{(z-x)^2}\left(\int_I |b\,(u)|^p\,du\right)^{1/p}|I|^{1/p'} \\ &\leq c\frac{|I|}{(z-x)^2}|I|^{1/p}|I|^{1/p'} \leq c\frac{|I|^2}{(z-x)^2}, \end{aligned}$$

para todo $z \in I$.

Utilizando el Lema 2.3 y por ser $\nu \in A_1^+$ se tiene que

$$\int\limits_{x_0-x>2|I|} M_1^+(b,x)\;\nu\,(x)\;dx \leq c|I|^2\int\limits_{z-x>|I|}\frac{\nu\,(x)}{(z-x)^2}\,dx$$

$$= c|I|^2\int\limits_{z-x>|I|}\frac{2\,\nu\,(x)}{(z-x)^2+(z-x)^2}\,dx \leq c|I|^2\int\limits_{z-x>|I|}\frac{\nu\,(x)}{|I|^2+(z-x)^2}\,dx$$

$$\leq c|I|\int\limits_{z-x>0}\frac{1}{|I|}\frac{\nu\,(x)}{1+\left(\frac{z-x}{|I|}\right)^2}\,dx \leq c|I|\,M^-\nu(z) \leq c|I|\,\nu(z),$$

para casi todo $z \in I$.

Tomando el promedio en $z \in I$,

$$\int\limits_{x_0-x>2|I|} M_1^+(b,x)\,\nu\,(x)\;dx \leq c\nu(I) \leq c\nu(I\cup I^+) \leq c\nu(I^+). \tag{68}$$

De las estimaciones (65), (66) y (68) se obtiene

$$\left\|M_1^+(b)\right\|_{1,\nu} \leq c\,\nu\left(I^+\right).$$

■

Lema 6.5 *Sea m un multiplicador que satisface (64) y $K \in \mathcal{S}'$ tal que $\widehat{K} = m$. Entonces K coincide en $\mathbb{R} - \{0\}$ con una función $C^{\alpha_0 - 2}$, y para todo $\beta \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq \beta < \alpha_0 - 1$ existe $c_{\beta,\alpha_0} > 0$ tal que, para todo $R > 0$,*

$$\left\| D^{\beta} K \right\|_{\infty, |x| \sim R} \leq c_{\beta,\alpha_0}\, A\, R^{-1-\beta},$$

donde $\left\| D^{\beta} K \right\|_{\infty, |x| \sim R} = \sup \left\{ \left| D^{\beta} K(x) \right| : R/2 < |x| < 2R \right\}.$

Demostración. Sea $\varphi \in C_0^{\infty}$ tal que $\varphi(y) \geq 0$, $sop\,(\varphi) \subset \{y : 1/2 < |y| < 2\}$ y

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varphi\left(2^{-i} y\right) = 1,$$

para todo $y \neq 0$.

Para cada $i = 1, 2, \ldots$ se define

$$m_i(\xi) = \varphi\left(2^{-i} R \xi\right) m(\xi).$$

Notar que

$$sop\left(\varphi\left(2^{-i} R \xi\right)\right) \subset \left\{ y : 2^{i-1} R^{-1} < |y| < 2^{i+1} R^{-1} \right\}.$$

Si

$$\eta(\xi) = 1 - \sum_{i=1}^{+\infty} \varphi\left(2^{-i} \xi\right),$$

se define

$$m_0(\xi) = \eta(R\xi)\, m(\xi).$$

Notar que

$$sop\,(\eta(R\xi)) \subset \left\{ y : |y| < 2R^{-1} \right\},$$

y que

$$|\eta(R\xi)| \leq 1. \tag{69}$$

Para cada $i = 0, 1, 2, \ldots$ sea K_i tal que $\widehat{K_i} = m_i$. Como m_i tiene soporte compacto entonces $K_i \in C^{\infty}$.

Sea $\beta \in \mathbb{N}_0$, veamos que existe una constante $c > 0$ que no depende ni de R ni de i tal que

$$\left\| D^{\beta} K_i \right\|_{\infty, |x| \sim R} \leq c\, A\, 2^{i(\beta - \alpha_0 + 1)} R^{-1-\beta}. \tag{70}$$

En efecto, si $i = 0$,

$$\left\| D^{\beta} K_0 \right\|_{\infty, |x| \sim R} = c \left\| \left(\xi^{\beta} m_0 \right)^{\vee} \right\|_{\infty, |x| \sim R} \leq c \left\| \xi^{\beta} m_0 \right\|_1 = c \int\limits_{|\xi| < 2R^{-1}} |\xi|^{\beta} \left| \eta(R\xi) \right| \left| m(\xi) \right| \, d\xi.$$

Por (64) y (69) tenemos que

$$\left\| D^{\beta} K_0 \right\|_{\infty, |x| \sim R} \leq cA \int\limits_{|\xi| < 2R^{-1}} |\xi|^{\beta} \, d\xi \leq c\, A\, R^{-1-\beta},$$

obteniendo así (70) para $i=0$.

Veamos el caso $i\geq 1$. Como $|x|>R/2$ entonces

$$\left\|D^{\beta}K_i\right\|_{\infty,|x|\sim R}\leq \frac{c}{R^{\alpha_0}}\left\|x^{\alpha_0}D^{\beta}K_i\right\|_{\infty}=cR^{-\alpha_0}\left\|\left(D^{\alpha_0}\left(|\xi|^{\beta}m_i\right)\right)^{\vee}\right\|_{\infty}$$
$$\leq cR^{-\alpha_0}\int\limits_{2^{i-1}R^{-1}<|\xi|<2^{i+1}R^{-1}}\left|D^{\alpha_0}\left(|\xi|^{\beta}\varphi\left(2^{-i}R\xi\right)m\left(\xi\right)\right)\right|d\xi$$
$$\leq cR^{-\alpha_0}\int\limits_{2^{i-1}R^{-1}<|\xi|<2^{i+1}R^{-1}}\sum_{r+s+t=\alpha_0}\left|D^{r}\left(|\xi|^{\beta}\right)\right|\left|D^{s}\left(\varphi\left(2^{-i}R\xi\right)\right)\right|\left|D^{t}\left(m\left(\xi\right)\right)\right|d\xi.$$

Para $2^{i-1}R^{-1}<|\xi|<2^{i+1}R^{-1}$ es

$$\left|D^{r}\left(|\xi|^{\beta}\right)\right|\leq c\,|\xi|^{\beta-r}\leq c\left(2^{i}R^{-1}\right)^{\beta-r}.$$

Por ser $\varphi\in C_0^{\infty}$ es

$$\left|D^{s}\left(\varphi\left(2^{-i}R\xi\right)\right)\right|\leq\left(2^{-i}R\right)^{s}\left|D^{s}\varphi\left(2^{-i}R\xi\right)\right|\leq c\left(2^{-i}R\right)^{s}.$$

Por (64) se tiene que, para $2^{i-1}R^{-1}<|\xi|$,

$$\left|D^{t}\left(m\left(\xi\right)\right)\right|\leq A\;|\xi|^{-t}\leq c\,A\;\left(2^{i}R^{-1}\right)^{-t}.$$

Luego, si $r+s+t=\alpha_0$, es

$$\left|D^{r}\left(|\xi|^{\beta}\right)\right|\left|D^{s}\left(\varphi\left(2^{-i}R\xi\right)\right)\right|\left|D^{t}\left(m\left(\xi\right)\right)\right|\leq c\,A\,2^{i(\beta-\alpha_0)}R^{-\beta+\alpha_0}$$

y, por lo tanto,

$$\left\|D^{\beta}K_i\right\|_{\infty,|x|\sim R}\leq c\,A\,R^{-\alpha_0}\int\limits_{2^{i-1}R^{-1}<|\xi|<2^{i+1}R^{-1}}2^{i(\beta-\alpha_0)}R^{-\beta+\alpha_0}d\xi\leq c\,A\;2^{i(\beta-\alpha_0+1)}R^{-1-\beta},$$

obteniendo así (70).

Para $0\leq\beta<\alpha_0-1$ se tiene por (70) que

$$\sum_{i=0}^{\infty}D^{\beta}K_i\left(x\right)$$

converge uniformemente en $\{x:R/2<|x|<2R\}$.

Observar que

$$m=\sum_{i=0}^{\infty}m_i,$$

puntualmente y en el sentido de las distribuciones, con lo cual

$$K=\sum_{i=0}^{\infty}K_i,$$

en el sentido de las distribuciones.

Si $\psi \in \mathcal{S}$ con $sop\,(\psi) \subset \{x : R/2 < |x| < 2R\}$,

$$\begin{aligned}
\left\langle D^{\beta}K, \psi \right\rangle &= (-1)^{\beta} \left\langle K, D^{\beta}\psi \right\rangle = (-1)^{\beta} \left\langle \sum_{i=0}^{\infty} K_i, D^{\beta}\psi \right\rangle \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{\beta} \left\langle K_i, D^{\beta}\psi \right\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{\beta} \int K_i\,(x)\, D^{\beta}\psi\,(x)\ dx \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \int D^{\beta}K_i\,(x)\,\psi\,(x)\ dx = \int \sum_{i=0}^{\infty} D^{\beta}K_i\,(x)\,\psi\,(x)\ dx.
\end{aligned}$$

Luego, para todo $R > 0$, $D^{\beta}K$ coincide con $\sum_{i=0}^{\infty} D^{\beta}K_i\,(x)$ en $\{x : R/2 < |x| < 2R\}$.

Finalmente,

$$\left\| D^{\beta}K \right\|_{\infty,|x|\sim R} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \left\| D^{\beta}K_i \right\|_{\infty,|x|\sim R} \leq c\,A \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i(\beta-\alpha_0+1)} R^{-1-\beta} \leq c\,A\ R^{-1-\beta}.$$

■

Lema 6.6 *Sea m un multiplicador que se extiende a una función analítica y acotada en el semiplano superior. Si $K \in \mathcal{S}'$ tal que $\widehat{K} = m$ entonces $sop\,(K) \subset (-\infty, 0]$.*

Demostración. Sea $\psi \in \mathcal{S}$, con $sop\left(\widehat{\psi}\right) \subset (0, \infty)$. Queremos ver que

$$\left\langle K, \widehat{\psi} \right\rangle = 0.$$

Por la Fórmula de Inversión se tiene que

$$\psi\,(x) = c \int_0^{\infty} \widehat{\psi}\,(t)\, e^{ixt} dt.$$

Si $z \in \mathbb{C}$ consideramos

$$\psi\,(z) = c \int_0^{\infty} \widehat{\psi}\,(t)\, e^{izt} dt. \tag{71}$$

Como

$$\left\langle K, \widehat{\psi} \right\rangle = \langle m, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} m\,(x)\,\psi\,(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} m\,(x)\,\psi\,(x)\,dx,$$

y siendo $m\,(z)\,\psi\,(z)$ analítica en el semiplano superior, por el Teorema de Cauchy bastará probar que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} m\,(z)\,\psi\,(z)\,dz = 0, \tag{72}$$

donde C_R es la semicircunferencia en el semiplano superior de radio R y centro 0.

Integrando dos veces por partes en (71) y usando que $sop\left(\widehat{\psi}\right) \subset (0,\infty)$ se tiene que

$$z^2\psi(z) = -c\int_0^\infty D^2\widehat{\psi}(t)\, e^{izt}dt.$$

Luego, por ser $\left|e^{izt}\right| \leq 1$ para $\operatorname{Im}(z) > 0$ y $\widehat{\psi} \in \mathcal{S}$, resulta

$$\left|z^2\psi(z)\right| \leq c\int_0^\infty \left|D^2\widehat{\psi}(t)\, e^{izt}\right| dt \leq C < \infty,$$

de donde, por ser $m(z)$ acotada, se obtiene inmediatamente (72). ■

Lema 6.7 *Sea m un multiplicador que cumple las hipótesis de los Lemas 6.5 y 6.6, y $K \in \mathcal{S}'$ tal que $\widehat{K} = m$. Sea a un (∞, N_0) átomo soportado en un intervalo $I = (x_0 - |I|, x_0)$ y sea φ como en la demostración del Lema 6.5. Si se definen para $i = 1, 2, ..,$*

$$\varphi_i(x) = \varphi\left(2^{-i-1}|I|^{-1}x\right)$$

y

$$K_i(x) = \varphi_i(x)\, K(x)$$

entonces, si $\beta \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \beta \leq N_0 + 1$, $\beta < \alpha_0 - 1$, existe una constante $c > 0$, que no depende de a tal que

$$b_i = cA^{-1}2^{i(\beta+1)}\left(K_i * a\right)$$

es un (∞, N_0) átomo soportado en el intervalo$\left(x_0 - 2^{i+3}|I|, x_0 - 2^i|I|\right)$.

Demostración. Primero veamos el soporte de $K_i{*}a(x) = \int_I a(y)\, K_i(x-y)\, dy$. Notar que, por la definición de φ y el Lema 6.6, se tiene que

$$sop(K_i) \subset sop(\varphi_i) \cap sop(K) \subset \left(-2^{i+2}|I|, -2^i|I|\right)$$

y, por lo tanto, si $x \notin \left(x_0 - 2^{i+3}|I|, x_0 - 2^i|I|\right)$ entonces $K_i * a(x) = 0$.

En efecto, para $y \in I$, si $x < x_0 - 2^{i+3}|I|$ entonces

$$x - y < \left(x_0 - 2^{i+3}|I|\right) - (x_0 - |I|) = \left(1 - 2^{i+3}\right)|I| < -2^{i+2}|I|.$$

y si $x > x_0 - 2^i|I|$ entonces

$$x - y > \left(x_0 - 2^i|I|\right) - x_0 > -2^i|I|.$$

Y, por lo tanto,

$$sop(K_i * a) \subset \left(x_0 - 2^{i+3}|I|, x_0 - 2^i|I|\right).$$

Veamos que $K_i * a$ tiene N_0 momentos nulos.

Si $0 \leq n \leq N_0$, entonces

$$\int K_i * a(x)\; x^n dx = \int \int a(x-y)\, K_i(y)\, dy\, x^n dx$$
$$= \int K_i(y) \int a(x-y)\; x^n dx\, dy = \int K_i(y) \int a(u)\; (u+y)^n\, du\, dy = 0,$$

pues a tiene N_0 momentos nulos.

Veamos que para $0 \leq \beta < \alpha_0 - 1$ existe una constante $c > 0$ tal que si $x \in (-2R, -R/2)$,

$$\left| D^\beta K_i(x) \right| \leq cA\, R^{-1-\beta}, \tag{73}$$

para todo $R > 0$ y para todo $i = 1, 2, ...$

En efecto, para cada $x \in (-2R, -R/2)$,

$$\left| D^\beta K_i(x) \right| = \left| D^\beta \left(\varphi\left(2^{-i-1}|I|^{-1}x\right) K(x) \right) \right| \leq$$
$$\leq c \sum_{r+s=\beta} \left(2^{-i-1}|I|^{-1}\right)^r \left| D^r \varphi\left(2^{-i-1}|I|^{-1}x\right) \right| \left| D^s K(x) \right|. \tag{74}$$

Como $sop\,(D^r\varphi) \subset (-2,2)$ entonces $\left|2^{-i-1}|I|^{-1}x\right| \leq 2$ y, por lo tanto,

$$2^{-i-1}|I|^{-1} \leq \frac{2}{|x|} < \frac{4}{R}.$$

Luego

$$\left(2^{-i-1}|I|^{-1}\right)^r < cR^{-r}.$$

Como $\varphi \in C_0^\infty$ entonces

$$\left| D^r \varphi\left(2^{-i-1}|I|^{-1}x\right) \right| \leq c.$$

Por el Lema 6.5

$$\left| D^s K(x) \right| \leq cA\, R^{-1-s}.$$

Juntando estas estimaciones tenemos que si $r + s = \beta$ entonces

$$\left(2^{-i-1}|I|^{-1}\right)^r \left| D^r \varphi\left(2^{-i-1}|I|^{-1}x\right) \right| \left| D^s K(x) \right| \leq cA\, R^{-1-s} R^{-r} = cA\, R^{-1-\beta},$$

y, por lo tanto, de (74), tenemos

$$\left| D^\beta K_i(x) \right| \leq cA\, R^{-1-\beta},$$

para todo $x \in (-2R, -R/2)$, obteniendo (73).

Supongamos $\beta \geq 1$ y, para cada $x \in sop\,(K_i * a) \subset \left(x_0 - 2^{i+3}|I|, x_0 - 2^i|I|\right)$, sean $P_\beta(y)$ el Polinomio de Taylor de orden $\beta - 1$ de $K_i(x-y)$ como función de y en el punto x_0 y

$$R_\beta(y) = (y - x_0)^\beta \int_0^1 (1-s)^{\beta-1}\, D^\beta K_i\left((x - x_0) + s(y - x_0)\right) ds,$$

el resto.

Si $0 < \beta \leq N_0 + 1$ entonces, como a tiene N_0 momentos nulos,

$$\begin{aligned} K_i * a\,(x) &= \int_I a\,(y)\, K_i\,(x-y)\; dy \\ &= \int_I a\,(y)\,(P_\beta(y) + R_\beta\,(y))\, dy = \int_I a\,(y)\, R_\beta\,(y)\, dy \\ &= \int_I a\,(y)\,(y-x_0)^\beta \int_0^1 (1-s)^{\beta-1}\, D^\beta K_i\,((x-x_0)+s\,(y-x_0))\; ds\, dy. \end{aligned}$$

Afirmamos que

$$\left|D^\beta K_i\,((x-x_0)+s\,(y-x_0))\right| \leq cA\left(2^i|I|\right)^{-1-\beta}.$$

En efecto, la afirmación se deduce inmediatamente de (73) con $R = 2^{i+1}|I|$ ya que como $sop\,(K_i) \subset \left(-2^{i+2}|I|, -2^i|I|\right)$ entonces podemos suponer que

$$-2R = -2^{i+2}|I| < (x-x_0) + s\,(y-x_0) < -2^i|I| = -R/2.$$

Luego podemos acotar,

$$\begin{aligned} |K_i * a\,(x)| &\leq c\int_I |a\,(y)|\,|y-x_0|^\beta \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} \left|D^\beta K_i\,((x-x_0)+s\,(y-x_0))\right| ds\, dy \\ &\leq cA\left(2^i|I|\right)^{-1-\beta}|I|^\beta \int_I dy \int_0^1 (1-s)^{\beta-1}\; ds \; \leq cA2^{i(-1-\beta)}, \end{aligned}$$

y, por lo tanto,

$$b_i = cA^{-1}\, 2^{i(1+\beta)}\,(K_i * a)$$

es un (∞, N_0) átomo soportado en el intervalo $\left(x_0 - 2^{i+3}|I|, x_0 - 2^i|I|\right)$.

El caso $\beta = 0$ es análogo y no es necesario considerar Polinomio de Taylor alguno. ■

Lema 6.8 *Con la misma notación e hipótesis del Lema 6.7, se definen*

$$\varphi_0\,(x) = 1 - \sum_{i=1}^{+\infty} \varphi_i\,(x)$$

y la distribución

$$K_0 = \varphi_0\, K.$$

Si a es un (∞, N_0) átomo soportado en un intervalo $I = (x_0 - |I|, x_0)$ entonces existe una constante $c > 0$, que no depende de a, tal que

$$b_0 = cA^{-1}\,(K_0 * a)$$

es un (p, N_0) átomo $(1 < p < \infty)$ soportado en el intervalo $(x_0 - 2^3|I|, x_0]$.

Demostración. Notar que $\varphi_0(x) = 1 - \varphi_1(x)$ si $|x| < 4|I|$ y $\varphi_0(x) = 0$ en otro caso, y como $sop(K) \subset (-\infty, 0]$ entonces

$$sop(K_0) \subset (-4|I|, 0].$$

Luego

$$sop(K_0 * a) \subset (x_0 - 2^3|I|, x_0].$$

En efecto, si $\psi \in \mathcal{S}$ con soporte disjunto de $(x_0 - 2^3|I|, x_0]$, entonces $\int_I a(y)\,\psi(x+y)\,dy$ está soportada fuera de $(-4|I|, 0]$, y, por lo tanto,

$$\langle K_0 * a, \psi \rangle = \left\langle K_0, \int_I a(y)\,\psi(x+y)\,dy \right\rangle = 0.$$

Por ser los soportes de $K_i * a$ disjuntos del soporte de $K_0 * a$ si $i \geq 3$, se tiene que

$$K_0 * a = K * a - \sum_{i=1}^{2} K_i * a$$

en $(x_0 - 2^3|I|, x_0]$. En efecto, si $\psi \in \mathcal{S}$ con $sop(\psi) \subset (x_0 - 2^3|I|, x_0]$, entonces

$$\begin{aligned} \langle K_0 * a, \psi \rangle &= \left\langle \left[\left(1 - \sum_{i=1}^{+\infty} \varphi_i \right) K \right] * a, \psi \right\rangle = \\ &= \left\langle \left(K * a - \sum_{i=1}^{+\infty} K_i * a \right), \psi \right\rangle = \\ &= \langle K * a, \psi \rangle - \sum_{i=1}^{2} \langle K_i * a, \psi \rangle, \end{aligned}$$

pues los soportes de $K_i * a$ son disjuntos de $(x_0 - 2^3|I|, x_0]$ si $i \geq 3$.

Por ser a acotada y de soporte compacto entonces, si R_m es el operador definido por el multiplicador $m = \widehat{K}$, se tiene que $K * a = R_m a$ y, por el Teorema 6.1, sabemos que $K * a \in L^p$ para todo p, $1 < p < \infty$, y

$$\|K * a\|_{L^p} \leq cA \|a\|_{L^p} \leq cA|I|^{1/p}.$$

Además, por el Lema 6.7, para $\beta = 0$ e $i = 1, 2$ se tiene que

$$\|K_i * a\|_{L^p} \leq cA2^{-i} |sop(K_i * a)|^{1/p} \leq cA|I|^{1/p}.$$

Luego

$$\|K_0 * a\|_{L^p} \leq \|K * a\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{2} \|K_i * a\|_{L^p} \leq cA|I|^{1/p}.$$

Por último veamos los momentos nulos. Sean $0 \leq n \leq N_0$ y $\theta \in C_0^\infty$ tal que $\theta(t) = 1$ para todo $t \in \left(x_0 - 2^3|I|, x_0\right)$ entonces

$$\int\limits_{x_0-2^3|I|}^{x_0} K_0 * a(x)\ x^n dx = \int\limits_{x_0-2^3|I|}^{x_0} K_0 * a(x)\ x^n \theta(x)\, dx$$

$$= \langle K_0 * a, x^n \theta(x)\rangle = \left\langle K_0, \int_I a(y)(x+y)^n \theta(x+y)\, dy \right\rangle.$$

$$= \left\langle K_0, \int_I a(y)(x+y)^n\, dy \right\rangle = \langle K_0, 0\rangle = 0,$$

donde se ha usado que para $x \in sop(K_0) \subset (-4|I|, 0]$ e $y \in I = (x_0 - |I|, x_0)$ se tiene que $x + y \in \left(x_0 - 2^3|I|, x_0\right)$ y, por lo tanto, $\theta(x+y) = 1$.

Por lo tanto existe $c > 0$ tal que $cA^{-1}(K_0 * a)$ es un (p, N_0) átomo soportado en el intervalo $\left(x_0 - 2^3|I|, x_0\right)$. ■

6.2. Demostración del Teorema 6.2

Demostración. Sea $f \in H_+^1(\nu)$, por el Teorema 4.12, para N_0 suficientemente grande se tiene una descomposición atómica

$$f \overset{H_+^1(\nu)}{=} \sum_{k,j} \lambda_k\, a_{k,j}, \tag{75}$$

donde $\lambda_k > 0$ y $a_{k,j}$ son (∞, N_0) átomos soportados en intervalos $I_{k,j}$. Además $I_{k,j+2}$ es contiguo a la derecha de $I_{k,j}$, $|I_{k,j+2}| \leq |I_{k,j}| \leq 4\,|I_{k,j+2}|$ y

$$\sum_{k,j} \lambda_k\, \nu(I_{k,j}) = \left\| \sum_{k,j} \lambda_k\, \chi_{I_{k,j}} \right\|_{1,\nu} \leq c\, \|f\|_{H_+^1(\nu)}. \tag{76}$$

Si 2^d es la constante de duplicación a izquierda correspondiente a ν, por hipótesis existe $\beta \in \mathbb{N}$ tal que $2^d - 1 < \beta < \alpha_0 - 1$, y sea $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\beta \leq N_0 + 1$. De este modo estamos en las hipótesis de los lemas anteriores.

Sea $M \in \mathbb{N}$, por los Lemas 6.7 y 6.8 se tiene

$$K * \sum_{k,j=1}^{M} \lambda_k\, a_{k,j} = \sum_{k,j=1}^{M} \lambda_k\, (K * a_{k,j}) = cA \sum_{k,j=1}^{M} \lambda_k \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i(-1-\beta)} b_{k,j,i}\,, \tag{77}$$

donde $b_{k,j,i}$ es un (∞, N_0) átomo soportado en el intervalo $2^{i+3} I_{k,j}$ si $i \geq 1$ y $b_{k,j,0}$ es un (p, N_0) átomo soportado en el intervalo $2^3 I_{k,j}$, donde p es el dado por el Lema 6.4. De este modo tenemos que

$$\|b_{k,j,0}\|_{H_+^1(\nu)} \leq c\, \nu(I_{k,j+2}).$$

Para $i \geq 1$, $b_{k,j,i}$ es un (∞, N_0) átomo y tenemos que

$$\|b_{k,j,i}\|_{H^1_+(\nu)} \leq c\, \nu \left(2^{i+3} I_{k,j}\right) \leq c\, 2^{i\,d} \nu \left(I_{k,j}\right) \leq c\, 2^{i\,d} \nu \left(I_{k,j+2}\right).$$

Luego, por la elección de β y teniendo en cuenta (77) y (76),

$$\begin{aligned} \left\| K * \sum_{k,j=1}^{M} \lambda_k\, a_{k,j} \right\|_{H^1_+(\nu)} &\leq cA \sum_{k,j=1}^{M} \lambda_k \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i(-1-\beta)} \|\, b_{k,j,i}\|_{H^1_+(\nu)} \\ &\leq cA \sum_{k,j=1}^{M} \lambda_k \left(\sum_{i=0}^{\infty} 2^{i(-1-\beta)}\, 2^{i\,d} \right) \nu \left(I_{k,j+2}\right) \qquad (78) \\ = cA \sum_{k,j=1}^{M} \lambda_k \nu \left(I_{k,j+2}\right) = cA & \left\| \sum_{k,j=1}^{M} \lambda_k\, \chi_{I_{k,j+2}} \right\|_{1,\nu} \leq cA \|f\|_{H^1_+(\nu)}. \end{aligned}$$

El resultado buscado se obtiene haciendo tender M a ∞. Daremos un argumento que justifique esto.

Notar que en la deducción de (78) también probamos que para todo $M > N$,

$$\left\| K * \sum_{k,j=N}^{M} \lambda_k\, a_{k,j} \right\|_{H^1_+(\nu)} \leq cA \left\| \sum_{k,j=N}^{M} \lambda_k\, \chi_{I_{k,j+2}} \right\|_{1,\nu}$$

y como $\sum\limits_{k,j} \lambda_k\, \chi_{I_{k,j}}$ converge en L^1_ν entonces la sucesión $\left(K * \sum\limits_{k,j=1}^{M} \lambda_k\, a_{k,j} \right)_{M \geq 1}$ es de Cauchy en $H^1_+(\nu)$ y, por lo tanto converge a alguna distribución $g \in H^1_+(\nu)$. Luego tomando límite en (78) se tiene que

$$\|g\|_{H^1_+(\nu)} \leq cA \|f\|_{H^1_+(\nu)}.$$

El Teorema quedará probado si vemos que $g = K * f$ para f acotada y de soporte compacto, que son densas en $H^1_+(\nu)$. En este caso la descomposición atómica de f (véase Teorema 4.12) cumple

$$\sum_{k,j} \lambda_k\, \chi_{I_{k,j}}(x) \leq c f^*_{+,\gamma}(x),$$

donde c no depende ni de f ni de la descomposición y $f^*_{+,\gamma}$ es la gran maximal para algún γ suficientemente grande.

Como $f^*_{+,\gamma}(x) \leq c\, M(f)(x)$ y $f \in L^2$, se tiene que $f^*_{+,\gamma} \in L^2$ y, por Convergencia Mayorada, $\sum\limits_{k,j} \lambda_k\, \chi_{I_{k,j}}$ converge en L^2. Luego, por ser

$$\left\| \sum_{k,j=N}^{M} \lambda_k\, a_{k,j} \right\|_2 \leq \left\| \sum_{k,j=N}^{M} \lambda_k\, \chi_{I_{k,j}} \right\|_2,$$

la sucesión $\left(\sum\limits_{k,j=1}^{M} \lambda_k\, a_{k,j}\right)_{M\geq 1}$ es de Cauchy en L^2, y, por lo tanto, converge en L^2. Además, teniendo en cuenta (75), debe converger a f.

Por ser m una función acotada entonces el operador que define es acotado en L^2, por lo que la sucesión $\left(K * \sum\limits_{k,j=1}^{M} \lambda_k\, a_{k,j}\right)_{M\geq 1}$ converge a $K * f$ en L^2.

Esto implica que $\left(K * \sum\limits_{k,j=1}^{M} \lambda_k\, a_{k,j}\right)_{M\geq 1}$ converge tanto a g como a $K * f$ en el sentido de las distribuciones, y, por lo tanto, $g = K * f$. ■

Observación 6.9 *Notar que en la demostración anterior, la dependencia de la constante c con el peso ν es a través de su constante en la clase A_1^+. Luego, para distintos pesos con la misma constante en la clase A_1^+ se tiene la misma constante de acotación c. Esta observación será importante en la demostración de la Proposición 3.3.*

Ejemplo 6.10 *Sean $\sigma \in \mathbb{R}$ y*

$$m(\xi) = (\xi + i)^{i\sigma} .$$

Se tiene que

$$D^{\alpha} m(\xi) = i\sigma\,(i\sigma - 1)\cdots(i\sigma - \alpha + 1)\,(\xi + i)^{i\sigma - \alpha}$$

y

$$|D^{\alpha} m(\xi)| \leq (|\sigma| + \alpha)^{\alpha} \left|(\xi + i)^{i\sigma}\right| |\xi + i|^{-\alpha} \leq (|\sigma| + \alpha)^{\alpha} \exp(\pi\,|\sigma|)\,|\xi|^{-\alpha}$$

para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0$.
Además $m\,(z) = (z + i)^{i\sigma}$ es una función analítica y acotada en el semiplano superior. Luego, si $\nu \in A_1^+$, m define un operador R_σ acotado en $H_+^1(\nu)$ y, para α suficientemente grande, es

$$\|R_\sigma f\|_{H_+^1(\nu)} \leq c\,(|\sigma| + \alpha)^{\alpha} \exp(\pi\,|\sigma|)\,\|f\|_{H_+^1(\nu)}$$

para todo $f \in H_+^1(\nu)$.

7. Acotación del operador T_b de $H^1_+(\nu)$ en L^1_ν

La siguiente proposición es la versión lateral del Lema 3.6 en [1].

Proposición 7.1 *Si $\nu \in A_1^+$ entonces existe una constante $c > 0$ tal que para toda $f \in H^1_+(\nu)$,*

$$\|T_b f\|_{1,\nu} \leq c \|f\|_{H^1_+(\nu)}.$$

Demostración. Bastará probar que existe una constante $c > 0$ tal que para todo átomo $a \in H^1_+(\nu)$ soportado en un intervalo I,

$$\|T_b a\|_{1,\nu} \leq c\nu(I). \tag{79}$$

En efecto sea f acotada y de soporte compacto, que son densas en $H^1_+(\nu)$, y sea

$$f \overset{H^1_+(\nu)}{=} \sum_k \lambda_k a_k$$

una descomposición atómica de f dada por el Teorema 4.9, que cumple

$$\|f\|_{H^1_+(\nu)} \sim \left\| \sum \lambda_k \chi_{I_k} \right\|_{1,\nu}$$

donde I_k son los intervalos asociados a cada átomo a_k y, además,

$$\left| \sum \lambda_k \chi_{I_k}(x) \right| \leq C f^*_{+,\gamma}(x), \tag{80}$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}$ y algún γ suficientemente grande. Como $f^*_{+,\gamma}(x) \leq c\,Mf(x)$ y $f \in L^2_\nu$, se tiene que $f^*_{+,\gamma} \in L^2_\nu$ y teniendo en cuenta (80), por Convergencia Mayorada, $\sum \lambda_k \chi_{I_k}$ converge en L^2_ν. Al ser

$$\left\| \sum_{k=N}^{M} \lambda_k a_k \right\|_{2,\nu} \leq \left\| \sum_{k=N}^{M} \lambda_k \chi_{I_k} \right\|_{2,\nu},$$

entonces la sucesión $\sum\limits_{k=1}^{M} \lambda_k a_k$ es de Cauchy en L^2_ν, y, por lo tanto, converge en L^2_ν. Luego, como $\nu \in A^1_+ \subset A^2_+$ entonces, por el Teorema 2.14, T_b es acotado en L^2_ν y por lo tanto $T_b\left(\sum_{k=1}^{M} \lambda_k a_k\right)$ converge a $T_b f$ en L^2_ν.

Por otro lado, por (79), se tiene que, para $M > N$,

$$\begin{aligned} \left\| T_b \left(\sum_{k=N}^{M} \lambda_k a_k \right) \right\|_{1,\nu} &\leq \sum_{k=N}^{M} \lambda_k \|T_b a_k\|_{1,\nu} \leq c \sum_{k=N}^{M} \lambda_k \nu(I_k) \\ &= c \left\| \sum_{k=N}^{M} \lambda_k \chi_{I_k} \right\|_{1,\nu}. \end{aligned}$$

Luego, como $\sum \lambda_k \chi_{I_k}$ converge en L^1_ν, la sucesión $T_b\left(\sum_{k=1}^M \lambda_k a_k\right)$ es de Cauchy en L^1_ν y, teniendo en cuenta el párrafo anterior, converge a $T_b f$ en L^1_ν.

Además

$$\left\| T_b\left(\sum_{k=1}^M \lambda_k a_k\right)\right\|_{1,\nu} \leq c\left\|\sum_{k=1}^M \lambda_k \chi_{I_k}\right\|_{1,\nu} \leq c\,\|f\|_{H^1_+(\nu)}$$

de donde se deduce la proposición.

Probemos (79).

Sea $a(x)$ un $(0,\infty)$ átomo de $H^1_+(\nu)$ soportado en un intervalo $I=(x_0-\delta,x_0)$, $|I|=\delta$. Esto es

$$\int_I a(y)dy = 0,$$
$$|a(y)| \leq 1.$$

La demostración se divide en dos casos según el tamaño del soporte.

Sea $\delta_0>0$ tal que $2\delta_0<\delta_0^{1-b}<1$.

Caso: $\delta>\delta_0$.

Sea $I^*=(x_0-2\delta/\delta_0,x_0)$.

Si $x\notin I^*$ entonces $T_b a(x)=0$. En efecto, recordando que

$$T_b a(x) = \int_I \frac{\exp\left(i\,(y-x)^{-b'}\right)}{(y-x)}\chi_{[0,1]}\,(y-x)\;a(y)\,dy,$$

basta observar que para todo $y\in I$ si $x>x_0$ entonces $y-x>0$; y si $x_0-x>2\delta/\delta_0$ entonces

$y-x=y-x_0+x_0-x>-\delta+2\delta/\delta_0=(2/\delta_0-1)\delta>\delta/\delta_0>1.$

Luego, utilizando que T_b es acotado en L^2_ν (Teorema 2.14) y que ν es duplicante a izquierda, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |T_b a|\;\nu\,dx &= \int_{I^*} |T_b a|\;\nu\,dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |T_b a|^{\,2}\nu\,dx\right)^{1/2} \nu\left(I^*\right)^{1/2} \\ &\leq c\left(\int_I |a|^{\,2}\nu\,dx\right)^{1/2}\nu\,(I)^{1/2} \leq c\,\nu\,(I)^{1/2}\,\nu\,(I)^{1/2} = c\,\nu\,(I)\,,\end{aligned}$$

como se quería demostrar.

Caso: $\delta<\delta_0$.

Sea $I^*=(x_0-2\delta,x_0)$. Como $T_b a(x)=0$ si $x>x_0$ entonces

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |T_b a|\;\nu\,dx &= \int_{I^*} |T_b a|\;\nu\,dx + \int_{x_0-1}^{x_0-2\delta} |T_b a|\;\nu\,dx + \int_{-\infty}^{x_0-1} |T_b a|\;\nu\,dx \\ &= A+B+C.\end{aligned}$$

Igual que en el primer caso se tiene que $A\leq c\,\nu\,(I)\,.$

Para acotar C notemos que si $x_0 - x \geq 1$ entonces, para todo $y \in I$, se tiene que

$$y - x = x_0 - x - (x_0 - y) > 1 - \delta_0,$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} |T_b a(x)| &= \left| \int_I \frac{\exp\left(i\,(y-x)^{-b'}\right)}{(y-x)} \chi_{[-1,0]}\,(x-y)\ a(y)\,dy \right| \\ &\leq c \int_I \chi_{[-1,0]}\,(x-y)\ dy. \end{aligned}$$

Usando la estimación anterior y que $\nu \in A_1^+$, se tiene que

$$\begin{aligned} C &\leq c \int_{\mathbb{R}} \int_I \chi_{[-1,0]}\,(x-y)\ dy\,\nu(x)\,dx = c \int_I \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-1,0]}\,(x-y)\ \nu(x)\,dx\,dy \\ &= c \int_I \int_{y-1}^{y} \nu(x)\,dx\,dy \leq c \int_I M^- \nu(y)\ dy \leq c \int_I \nu(y)\ dy = c\,\nu\,(I)\,. \end{aligned}$$

Falta estimar B. Como $x_0 - 1 < x < x_0 - 2\delta$ implica que para todo $y \in I$, $0 < y - x < 1$, entonces

$$T_b a(x) = \int_I \frac{\exp\left(i\,(y-x)^{-b'}\right)}{y-x}\ a(y)\,dy.$$

Como en este caso $2\delta < \delta^{1-b} < 1$, consideremos

$$B = \int_{2\delta \leq x_0 - x < 1} |T_b a|\ \nu\,dx = \int_{\delta^{1-b} \leq x_0 - x < 1} |T_b a|\ \nu\,dx + \int_{2\delta \leq x_0 - x < \delta^{1-b}} |T_b a|\ \nu\,dx = B_1 + B_2.$$

Para estimar B_1 usamos que $\int a(y)\,dy = 0$ y el Teorema del Valor Medio, obteniendo

$$\begin{aligned} |T_b a(x)| &= \left| \int_I \left(\frac{\exp\left(i\,(y-x)^{-b'}\right)}{y-x} - \frac{\exp\left(i\,(x_0-x)^{-b'}\right)}{x_0-x} \right)\ a(y)\,dy \right| \\ &\leq \delta \int_I \left(\frac{c}{(\xi-x)^{b'+2}} + \frac{c}{(\xi-x)^2} \right)\ |a(y)|\ dy \leq \delta \int_I \frac{c}{(\xi-x)^{b'+2}}\ dy, \end{aligned}$$

donde $y < \xi < x_0$.

Notar que si $z \in I$ y $u \in I$, como $x - u > \delta$ entonces $u - x = u - z + z - x \geq -\delta + z - x \geq -(u-x) + z - x$, con lo cual

$$2\,(u-x) \geq z - x. \tag{82}$$

Por lo tanto, considerando $u = \xi$,

$$|T_b a(x)| \le c\,\delta^2 \,\frac{1}{(z-x)^{b'+2}}$$

para todo $z \in I$.

Luego, usando el Lema 2.3,

$$\begin{aligned}
B_1 &\le c\,\delta^2 \int\limits_{x_0 - x \ge \delta^{1-b}} \frac{\nu(x)}{(z-x)^{b'+2}}\,dx \le c\,\delta^2 \int\limits_{z-x \ge \delta^{1-b}/2} \frac{\nu(x)}{(z-x)^{b'+2}}\,dx \\
&= c\,\delta^2 \frac{1}{\left(\delta^{1-b}\right)^{b'+1}} \int\limits_{z-x \ge \delta^{1-b}/2} \frac{1}{\delta^{1-b}} \frac{\nu(x)}{\left(\frac{z-x}{\delta^{1-b}}\right)^{b'+2}}\,dx \le c\,\delta^2 \frac{1}{\left(\delta^{1-b}\right)^{b'+1}} M^- \nu(z).
\end{aligned}$$

Como $\nu \in A_1^+$ y $(1-b)\,(b'+1) = 1$ se tiene que, para casi todo $z \in I$,

$$B_1 \le c\,\delta \nu(z),$$

y, promediando en I,

$$B_1 \le c\,\nu\,(I)\,.$$

Para estimar B_2 escribamos

$$\begin{aligned}
T_b a(x) = \int\limits_I \frac{\exp\left(i\,(y-x)^{-b'}\right)}{(y-x)^{(2+b')/p}} \left[\frac{1}{(y-x)^{1-(2+b')/p}} - \frac{1}{(x_0-x)^{1-(2+b')/p}}\right] a(y)\,dy + \\
+ \int\limits_I \frac{\exp\left(i\,(y-x)^{-b'}\right)}{(y-x)^{(2+b')/p}} \,\frac{1}{(x_0-x)^{1-(2+b')/p}}\, a(y)\,dy = E + F.
\end{aligned}$$

Utilizando el Teorema del Valor Medio y (82), podemos estimar E por

$$|E| \le \int\limits_I \frac{1}{(y-x)^{(2+b')/p}} \frac{\delta}{(\xi - x)^{2-(2+b')/p}}\,|a(y)|\,dy \le c \frac{\delta^2}{(z-x)^2},$$

donde z es cualquiera en I.

Luego, usando el Lema 2.3 y que $\nu \in A_1^+$, se tiene,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{2\delta \le x_0 - x < \delta^{1-b}} |E|\;\nu(x)\,dx &\le c\,\delta^2 \int\limits_{\delta \le z-x < \delta^{1-b}} \frac{1}{(z-x)^2}\,\nu\,(x)\;dx \\
&\le c\,\delta \int\limits_{\delta \le z-x} \frac{1}{\delta} \frac{1}{\left(\frac{z-x}{\delta}\right)^2}\,\nu\,(x)\;dx \le c\,\delta\,M^- \nu(z) \le c\,\delta\,\nu(z),
\end{aligned}$$

para casi todo $z \in I$.

Y, promediando en I,

$$\int\limits_{2\delta\le x_0-x<\delta^{1-b}} |E|\,\nu(x)\,dx \le c\,\nu\,(I)\,.$$

Por último, utilizando la Definición 2.11, estimemos

$$\begin{aligned}\int\limits_{2\delta\le x_0-x<\delta^{1-b}} |F|\,\nu(x)\,dx &= \int\limits_{2\delta\le x_0-x<\delta^{1-b}} \left|\tilde{K}*a(x)\right| \frac{\nu(x)}{(x_0-x)^{1-(2+b')/p}}\,dx\\ &\le \int\limits_{\delta\le z-x<\delta^{1-b}} \left|\tilde{K}*a(x)\right| \frac{\nu(x)}{(z-x)^{1-(2+b')/p}}\,dx,\end{aligned}$$

donde z es cualquiera en I.

Sean $p>1$ y p'su conjugado. Por la desigualdad de Hölder el último término se acota por

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left|\tilde{K}*a(x)\right|^p dx\right)^{1/p} \left(\int\limits_{\delta\le z-x<\delta^{1-b}} \frac{\nu(x)^{p'}}{(z-x)^{p'-(2+b')(p'-1)}}\,dx\right)^{1/p'}.$$

Eligiendo p suficientemente grande se tiene que $(2+b')\,/p<1$ (con lo que se puede usar el Lema 2.12) y que $\nu^{p'}\in A_1^+$. Sea k_0 tal que $2^{k_0}\delta\le\delta^{1-b}<2^{k_0+1}\delta$. Estimamos lo anterior por

$$\begin{aligned}&c\left(\int\limits_{\mathbb{R}} |a(x)|^{p'}\,dx\right)^{1/p'} \left(\sum_{k=0}^{k_0}\int\limits_{2^k\delta\le z-x<2^{k+1}\delta} \frac{\nu(x)^{p'}}{(z-x)^{p'-(2+b')(p'-1)}}\,dx\right)^{1/p'}\\ &\le c\,\delta^{1/p'}\left(\sum_{k=0}^{k_0}\left(2^k\delta\right)^{1-p'+\left(2+b'\right)(p'-1)}\frac{1}{2^{k+1}\delta}\int\limits_{0\le z-x<2^{k+1}\delta}\nu(x)^{p'}\,dx\right)^{1/p'}\\ &\le c\,\delta^{1/p'}\left(\sum_{k=0}^{k_0}\left(2^k\delta\right)^{\left(1+b'\right)(p'-1)}\right)^{1/p'}\left(M^-\nu^{p'}(z)\right)^{1/p'}\\ &\le c\,\delta^{1/p'}\left(\left(2^{k_0}\delta\right)^{\left(1+b'\right)(p'-1)}\right)^{1/p'}\left(\nu^{p'}(z)\right)^{1/p'}\\ &\le c\,\delta^{1/p'}\left(\delta^{(1-b)\left(1+b'\right)(p'-1)}\right)^{1/p'}\nu(z) = c\,\delta^{1/p'}\left(\delta^{(p'-1)}\right)^{1/p'}\nu(z).\end{aligned}$$

Luego, para casi todo $z\in I$, se tiene que

$$\int\limits_{2\delta\le x_0-x<\delta^{1-b}} |F|\,\nu(x)\,dx \le c\,\delta\,\nu(z).$$

Y, promediando en I,

$$\int\limits_{2\delta \leq x_0 - x < \delta^{1-b}} |F| \; \nu(x)\, dx \leq c\, \nu\,(I)\,.$$

■

Observación 7.2 *En la proposición anterior, la dependencia de la constante c con el peso ν es a través de su constante en la clase A_1^+. Luego, para distintos pesos con la misma constante en la clase A_1^+ se tiene la misma constante de acotación c. Esto será importante en la demostración de la Proposición 3.3.*

8. Demostración de la Proposición 3.3

8.1. Lemas previos

La siguiente versión del Lema de las Tres Líneas puede hallarse en el Capítulo XII de [16].

Lema 8.1 *Sea* $\Phi(z)$ *una función de variable compleja continua en* $1/2 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1$ *y analítica en* $1/2 < \mathrm{Re}(z) < 1$ *tal que*

$$\log|\Phi(z)| \leq A\exp(a\,|\mathrm{Im}(z)|), \tag{83}$$

donde $A > 0$ *y* $0 < a < \pi$.
Además, para $j = 1/2, 1$

$$|\Phi(j + it)| \leq M_j(t) \tag{84}$$

donde $\log|M_j(t)|$ *es* $O(\exp(a\,|t|))$ *y* $a < \pi$.
Entonces para cada $1/2 < u < 1$ *existe una constante* $c = c\left(u, M_{1/2}, M_1\right) > 0$ *tal que*

$$|\Phi(u)| \leq c.$$

Lema 8.2 *Sea* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *un abierto y sea* $H : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *una función tal que* $H(w, x)$ *es analítica en* Ω *para casi todo* $x \in \mathbb{R}$ *y, para todo* $\mathcal{K}$ *conjunto compacto en* Ω, *existe una constante* $c > 0$ *tal que* $\|H(w, \cdot)\|_2 \leq c$, *para todo* $w \in \mathcal{K}$. *Entonces, para cada* $z \in \Omega$, *se tiene que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{|h|} \left\| H(z + h, \cdot) - H(z, \cdot) - h\frac{\partial}{\partial z} H(z, \cdot) \right\|_2 = 0.$$

Demostración. Sean $z \in \Omega$ fijo y $r > 0$ tal que $C_r(z) = \{w : |w - z| = r\} \subset \Omega$. Por las Fórmulas Integrales de Cauchy se tiene que

$$\frac{1}{|h|} \left\| H(z + h, \cdot) - H(z, \cdot) - h\frac{\partial}{\partial z} H(z, \cdot) \right\|_2 =$$

$$= \frac{c}{|h|} \left\| \int_{C_r(z)} \left(\frac{H(w, \cdot)}{w - z - h} - \frac{H(w, \cdot)}{w - z} - h\frac{H(w, \cdot)}{(w - z)^2} \right) dw \right\|_2 =$$

$$= c\,|h| \left\| \int_{C_r(z)} \frac{H(w, \cdot)}{(w - z - h)(w - z)^2} dw \right\|_2 \leq$$

$$\leq c\,|h| \left\| \int_{C_r(z)} \frac{|H(w, \cdot)|}{|w - z - h|\,|w - z|^2}\,|dw| \right\|_2 \leq c\frac{|h|}{r^3} \left\| \int_{C_r(z)} |H(w, \cdot)|\,|dw| \right\|_2 .$$

Utilizando la Desigualdad Integral de Minkowski y la hipótesis sobre H tenemos que el último término se acota por

$$c\frac{|h|}{r^3}\int\limits_{C_r(z)}\|H(w,\cdot)\|_2\,|dw|\leq c\frac{|h|}{r^2}\longrightarrow 0.$$

$\blacksquare$

Lema 8.3 *Sean $\nu\in A_1^+$ tal que $\nu(x)>0$ para casi todo $x\in\mathbb{R}$, I e I_j intervalos acotados de $\mathbb{R}$ tales que $I_j\subset I$ entonces existe una constantes $C=C(\nu,I)$ que no depende de j tal que*

$$\frac{|I_j|}{\nu(I_j)}<C.$$

Demostración. Si I^- es el intervalo contiguo a la izquierda de I de igual longitud, se tiene que

$$I^-\subset\left\{x:M^+\chi_{I_j}(x)>\frac{|I_j|}{3|I|}\right\}.$$

En efecto, si $x\in I^-$ y h es la distancia de x al extremo derecho de I, entonces

$$M^+\chi_{I_j}(x)\geq\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\chi_{I_j}(t)\,dt=\frac{|I_j|}{h}\geq\frac{|I_j|}{2|I|}.$$

Luego,

$$\nu\left(I^-\right)\leq\nu\left(\left\{x:M^+\chi_{I_j}(x)>\frac{|I_j|}{3|I|}\right\}\right)$$

y, como $\nu\in A_1^+$, se tiene que M^+ es débil $(1,1)$ respecto del peso ν, y por lo tanto

$$\nu\left(I^-\right)\leq c\frac{3|I|}{|I_j|}\nu(I_j).$$

Luego, como $\nu(x)>0$, existe $C=3c|I|/\nu(I^-)>0$ tal que

$$\frac{|I_j|}{\nu(I_j)}\leq C$$

para todo j. $\blacksquare$

Lema 8.4 *Si $\nu\in A_1^+$ y $\rho>0$ entonces $\nu_\rho(x)=\text{mín}\{\nu(x),\rho\}\in A_1^+$. Además satisfacen la condición A_1^+ con la misma constante.*

Demostración. Sea $C_{1,\nu}\geq 1$ la constante de la condición A_1^+ para ν, esto es

$$M^-\nu(x)\leq C_{1,\nu}\nu(x).$$

Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $\nu_\rho(x) = \nu(x)$. Entonces para todo $h > 0$ se tiene que

$$\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} \nu_\rho(t)\,dt \leq \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} \nu(t)\,dt \leq C_{1,\nu}\nu(x) = C_{1,\nu}\nu_\rho(x).$$

Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $\nu_\rho(x) = \rho$. Entonces para todo $h > 0$ se tiene que

$$\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} \nu_\rho(t)\,dt \leq \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} \rho\,dt = \rho = \nu_\rho(x) \leq C_{1,\nu}\nu_\rho(x).$$

■

Lema 8.5 *Sean $\nu \in A_1^+$ tal que $\nu(x) > 0$ para casi todo $x \in \mathbb{R}$, I e I_j intervalos acotados de $\mathbb{R}$ tales que $I_j \subset I$ y $\rho > 0$. Si ν_ρ es el peso definido en el lema anterior entonces*

$$0 < 1/\rho < \frac{|I_j|}{\nu_\rho(I_j)} < C,$$

donde $C = C(\nu_\rho, I)$ no dependen de j.

Demostración. Por los lemas anteriores se tiene que

$$\frac{|I_j|}{\nu_\rho(I_j)} < C,$$

con $C = C(\nu_\rho, I)$.

Por otro lado,

$$\frac{|I_j|}{\nu_\rho(I_j)} = \frac{|I_j|}{\int_{I_j}\nu_\rho(t)dt} \geq \frac{|I_j|}{\int_{I_j}\rho\,dt} = \frac{1}{\rho}.$$

■

8.2. Demostración de la Proposición 3.3

Recordemos que queremos probar que existe $p_0 = p_0(\omega)$, $1 < p_0 < 2$, tal que el operador $P_{b/p_0'}$ dado por el multiplicador

$$\widehat{P_{b/p_0'}f}\,(\xi) = \widehat{K_{b'}}\,(\xi)\,(\xi + i)^{b/p_0'}\,\widehat{f}(\xi)$$

resulta acotado en $L_\omega^{p_0}$.

Como $\omega \in A_1^+$ entonces (véase Corolario 3 en [5]) $\omega(x) = h(x)\left(M^- W(x)\right)^\sigma$ donde $W \in L^1_{loc}$, $0 < \sigma < 1$ y h es una función tal que existe una constante $c > 0$ y $c^{-1} < h(x) < c$. Sin pérdida de generalidad puede suponerse $h(x) \equiv 1$.

Siguiendo el argumento de Chanillo, sea $\nu(x) = \left(M^- W(x)\right)^\eta$ donde $\sigma < \eta < 1$. Luego, $\nu \in A_1^+$.

Sea $p_0 = 2 - \sigma/\eta$, con lo cual $1 < p_0 < 2$, $(2 - p_0)\,\eta = \sigma$ y $\nu^{2-p_0} = \omega$.

Dado $\rho > 0$ sea $\nu_\rho(x) = \text{mín}\{\nu(x), \rho\}$. Por el Lema 8.4 se tiene que $\nu_\rho \in A_1^+$.

Consideramos la familia de operadores $\mathcal{L}_z$, donde $1/2 \leq \text{Re}(z) \leq 1$, definida por el multiplicador

$$\widehat{\mathcal{L}_z f}(\xi) = \widehat{K_{b'}}(\xi)\ (\xi + i)^{b(1-z)}\ \widehat{f}(\xi). \tag{85}$$

Notar que $\mathcal{L}_{1/p_0} = P_{b/p_0'}$.

Como, por la Proposición 1.2, $\left|\widehat{K_{b'}}(\xi)\right| \leq c(1 + |\xi|)^{-b/2}$ y $1/2 \leq \text{Re}(z)$ entonces

$$\left|\widehat{K_{b'}}(\xi)\ (\xi + i)^{b(1-\text{Re}(z))}\right| \leq \left|\widehat{K_{b'}}(\xi)\right|\ (1 + |\xi|)^{b/2} \leq c.$$

Luego

$$\begin{aligned} \left|\widehat{K_{b'}}(\xi)\ (\xi + i)^{b(1-z)}\right| &= \left|\widehat{K_{b'}}(\xi)\ (\xi + i)^{b(1-\text{Re}(z))}\right| \left|(\xi + i)^{-ib\,\text{Im}(z)}\right| \\ &\leq c\left|(\xi + i)^{-ib\,\text{Im}(z)}\right| \leq c\, e^{b\,\text{Im}(z) Arg(\xi+i)} \leq c\, e^{b\pi|\text{Im}(z)|}, \end{aligned} \tag{86}$$

y, por lo tanto, $\mathcal{L}_z$ es un multiplicador en L^2.

Sea

$$f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k,$$

donde $\lambda_k > 0$ y a_k son (∞, N)-átomos soportados en intervalos acotados I_k.

Sea

$$f_\rho(z) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{k,j}^{\rho}(z) \quad a_{k,j}$$

la función de variable compleja z en $1/2 \leq \text{Re}(z) \leq 1$ construida en el Corolario 5.7 para interpolar entre $H_+^1(\nu_\rho)$ y L^2 tal que

$$f_\rho\left(\frac{1}{p_0}\right) = f,$$

$$\left\|f_\rho(\tfrac{1}{2} + it)\right\|_2^2 \leq c\,\|f\|_{p_0,\nu_\rho^{2-p_0}}^{p_0} \leq c\,\|f\|_{p_0,\omega}^{p_0} \tag{87}$$

y

$$\|f_\rho(1 + it)\|_{H_+^1(\nu_\rho)} \leq c\,\|f\|_{p_0,\nu_\rho^{2-p_0}}^{p_0} \leq c\,\|f\|_{p_0,\omega}^{p_0}. \tag{88}$$

Es importante notar que la constante c en (87) y en (88) no dependen de ρ. En efecto (ver la Observación 5.5) c depende de la constante de la condición A_1^+ del peso ν_ρ que por el Lema 8.4 es la misma para todo $\rho > 0$.

Además, se tiene que $f_\rho(z) \in L^2$ con

$$\|f_\rho(z)\|_2 \leq c, \tag{89}$$

donde la constante c no depende de $z = u + it$ con $1/2 \leq u \leq 1$. En efecto, como, (véase Teorema 5.1),

$$\lambda_{k,j}^{\rho}(z) = \lambda_k^{p_0 z} \left(\frac{|I_{k,j+2}|}{\nu_\rho(I_{k,j+2})} \right)^{p_0 z - 1},$$

y como, por el Lema 8.5, para cada k existe $C_k > 0$ tal que

$$\frac{1}{\rho} < \frac{|I_{k,j+2}|}{\nu_\rho(I_{k,j+2})} < C_k$$

para todo j, entonces existen constantes $\eta_{k,\rho}$ tales que

$$\left| \lambda_{k,j}^{\rho}(z) \right| \leq \eta_{k,\rho}$$

para todo $1/2 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1$ y todo j. Luego, teniendo en cuenta que $I_k = \cup_j I_{k,j}$ donde los intervalos $I_{k,j}$ se solapan a lo sumo de a tres (véase Lema 4.11), se obtiene (89):

$$\left\| f_\rho(z) \right\|_2 = \left\| \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{k,j}^{\rho}(z) \quad a_{k,j} \right\|_2 \leq \sum_{k=1}^{n} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \left| \lambda_{k,j}^{\rho}(z) \right| \quad \chi_{I_{k,j}} \right\|_2 \leq \sum_{k=1}^{n} \eta_{k,\rho} 3 \left| I_k \right|^{1/2} = c.$$

En forma análoga, como $\lambda_{k,j}^{\rho}(z)$ son funciones analíticas en $1/2 < \mathrm{Re}(z) < 1$ y los intervalos $I_{k,j}$ se solapan una cantidad finita de veces, se tiene que, para cada $x \in \mathbb{R}$, $f_\rho(z, x)$ es analítica en $1/2 < \mathrm{Re}(z) < 1$ y $\frac{\partial}{\partial z} f_\rho(z) \in L^2$.

Como el subespacio de las combinaciones lineales finitas de (∞, N)-átomos es denso en $L_\omega^{p_0}$, $p_0 > 1$, para obtener la proposición bastará con probar que existe una constante c, que no depende de f, tal que

$$\left\| P_{b/p_0'} f \right\|_{p_0,\omega} \leq c \left\| f \right\|_{p_0,\omega}. \tag{90}$$

Dado $\rho > 0$ sea g una función acotada y de soporte compacto con $\|g\|_{p_0', \nu_\rho^{2-p_0}} = 1$ y consideremos

$$U(z) = \int \mathcal{L}_z \left(f_\rho(z) \right)(x) \frac{g(x)}{|g(x)|} \left| g(x) \right|^{p_0'(1-z)} \left(\nu_\rho(x) \right)^{1-p_0(1-z)} dx.$$

Llamando

$$G(z, x) = \frac{g(x)}{|g(x)|} \left| g(x) \right|^{p_0'(1-z)} \left(\nu_\rho(x) \right)^{1-p_0(1-z)},$$

como g es acotada de soporte compacto, ν_ρ es acotada y $1/2 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1$ entonces

$$\left\| G(z) \right\|_2 \leq c, \tag{91}$$

donde la constante c no depende de z.

Siendo $\mathcal{L}_z$ un multiplicador en L^2, de (89) y (91) se deduce la buena definición de $U(z)$.

Si probamos que

$$\Phi(z) = \frac{U(z)}{\left(\|f\|_{p_0,\omega}\right)^{p_0 z}}$$

está en las condiciones del Lema 8.1 de manera tal que las funciones $M_j(t)$ en (84) no dependan de f, g y ρ, tendremos que

$$\left|U\left(\tfrac{1}{p_0}\right)\right| \leq c\,\|f\|_{p_0,\omega},$$

donde c no depende de f, g y ρ. Con lo cual

$$\left|\int \left(P_{b/p_0'}f\right)(x)\, g(x)\, (\nu_\rho(x))^{2-p_0}\, dx\right| \leq c\,\|f\|_{p_0,\omega}.$$

Luego, tomando supremo en g, $\|g\|_{p_0',\nu_\rho^{2-p_0}} = 1$, acotada y de soporte compacto, resulta que

$$\left\|P_{b/p_0'}f\right\|_{p_0,\nu_\rho^{2-p_0}} \leq c\,\|f\|_{p_0,\omega},$$

y, por el Teorema de Fatou, obtenemos (90).

Veamos primero que Φ verifica (84).

Si $z = \frac{1}{2} + it$,

$$\begin{aligned}
\left|U\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\right| &\leq \int |\mathcal{L}_z(f_\rho(z))(x)|\,|g(x)|^{p_0'/2}\,(\nu_\rho(x))^{1-p_0/2}\,dx \\
&\leq \|\mathcal{L}_z(f_\rho(z))\|_2 \left(\int |g(x)|^{p_0'}\,(\nu_\rho(x))^{2-p_0}\,dx\right)^{1/2} \\
&= \|\mathcal{L}_z(f_\rho(z))\|_2\,\|g\|_{p_0',\nu_\rho^{2-p_0}}^{p_0'/2} = \|\mathcal{L}_z(f_\rho(z))\|_2.
\end{aligned}$$

Luego, usando Plancharel y (86), y por (87), se tiene que

$$\left|U\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\right| \leq c\, e^{b\pi|t|}\,\left\|f_\rho\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\right\|_2 \leq c\,e^{b\pi|t|}\,\|f\|_{p_0,\omega}^{p_0/2},$$

donde c no depende de f, g y ρ.

Si $z = 1 + it$,

$$\widehat{\mathcal{L}_z(f_\rho(z))}(\xi) = \widehat{K_{b'}}(\xi)\,(\xi+i)^{ibt}\,\widehat{f_\rho(z)}(\xi).$$

Luego, por el Ejemplo 6.10 y la Proposición 7.1, el operador $\mathcal{L}_{1+it} : H_+^1(\nu_\rho) \longrightarrow L_{\nu_\rho}^1$ es acotado y, utilizando (88), se tiene que

$$\begin{aligned}
|U(1+it)| &\leq \int |\mathcal{L}_{1+it}(f_\rho(1+it))(x)|\,\nu_\rho(x)\,dx \\
&\leq \alpha(t)\,\|f_\rho(1+it)\|_{H_+^1(\nu_\rho)} \leq c\alpha(t)\,\|f\|_{p_0,\omega}^{p_0},
\end{aligned}$$

donde (véase Ejemplo 6.10) $\log(\alpha(t)) = O(\exp(|t|))$. Además c y $\alpha(t)$ no dependen de ρ pues su dependencia con el peso ν_ρ es através de su constante de la condición A_1^+ que, por el Lema 8.4, es la misma que la del peso ν (véase Observaciones 6.9 y 7.2).

Veamos que $U(z)$ es una función analítica en $1/2 < \mathrm{Re}(z) < 1$. Probaremos que la derivada de U es

$$U'(z) = \int \frac{\partial}{\partial z}(\mathcal{L}_z f_\rho(z))(x)\, G(z,x)\, dx + \int \mathcal{L}_z(f_\rho(z))(x) \frac{\partial}{\partial z} G(z,x)\, dx$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial z}(\mathcal{L}_z f_\rho(z)) = \left(\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{L}_z\right) f_\rho(z) + \mathcal{L}_z\left(\frac{\partial}{\partial z} f_\rho(z)\right)$$

y $\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{L}_z$ esta definido por

$$\widehat{\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{L}_z f}(\xi) = \frac{\partial}{\partial z}\widehat{\mathcal{L}_z f}(\xi) = -b\widehat{K_{b'}}(\xi)\log(\xi+i)\ (\xi+i)^{b(1-z)}\ \widehat{f}(\xi).$$

Notar que como $1/2 < \mathrm{Re}(z)$ entonces, por (86), se tiene que

$$\left|\widehat{K_{b'}}(\xi)\log(\xi+i)\ (\xi+i)^{b(1-z)}\right| \le c\, e^{b\pi|\mathrm{Im}(z)|},$$

y, por lo tanto, $\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{L}_z$ es un multiplicador en L^2.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|h|}\left|U(z+h) - U(z) - U'(z)h\right| = \\
&= \frac{1}{|h|}\Big|\int (\mathcal{L}_{z+h} f_\rho(z+h))(x)\, G(z+h,x)\, dx - \\
&\quad - \int (\mathcal{L}_z f_\rho(z))(x)\, G(z,x)\, dx - \\
&\quad -h\int \frac{\partial}{\partial z}(\mathcal{L}_z f_\rho(z))(x)\, G(z,x)\, dx - \\
&\quad -h\int (\mathcal{L}_z f_\rho(z))(x) \frac{\partial}{\partial z} G(z,x)\, dx\Big| \le
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\le\ & \frac{1}{|h|}\left|\int \left(\mathcal{L}_{z+h} f_\rho(z+h) - \mathcal{L}_z f_\rho(z) - h\frac{\partial}{\partial z}(\mathcal{L}_z f_\rho(z))\right)(x)\, G(z+h,x)\, dx\right| + \\
&+\frac{1}{|h|}\left|\int (\mathcal{L}_z f_\rho(z))(x)\left(G(z+h,x) - G(z,x) - h\frac{\partial}{\partial z}G(z,x)\right) dx\right| + \\
&+\left|\int \frac{\partial}{\partial z}(\mathcal{L}_z f_\rho(z))(x)\left(G(z+h,x) - G(z,x)\right) dx\right| = S_1 + S_2 + S_3.
\end{aligned}$$

El sumando S_2 tiende a cero con h. En efecto,

$$\frac{1}{|h|}\left|\int\left(\mathcal{L}_z f_\rho(z)\right)(x)\left(G(z+h,x)-G(z,x)-h\frac{\partial}{\partial z}G(z,x)\right)dx\right|\leq$$
$$\leq\left\|\mathcal{L}_z f_\rho(z)\right\|_2\frac{1}{|h|}\left\|G(z+h)-G(z)-h\frac{\partial}{\partial z}G(z)\right\|_2\longrightarrow 0,$$

por el Lema 8.2 (tener en cuenta (91)).

El sumando S_3 tiende a cero con h. En efecto,

$$\left|\int\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathcal{L}_z f_\rho(z)\right)(x)\left(G(z+h,x)-G(z,x)\right)dx\right|\leq$$
$$\leq\left\|\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathcal{L}_z f_\rho(z)\right)\right\|_2\left\|G(z+h)-G(z)\right\|_2\longrightarrow 0,$$

por Convergencia Mayorada.

Ver que el sumando S_1 tiende a cero con h es tedioso:

$$\frac{1}{|h|}\left|\int\left(\mathcal{L}_{z+h}f_\rho(z+h)-\mathcal{L}_z f_\rho(z)-h\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathcal{L}_z f_\rho(z)\right)\right)(x)\,G(z+h,x)\;dx\,\right|\leq$$
$$\leq\frac{c}{|h|}\left\|\mathcal{L}_{z+h}f_\rho(z+h)-\mathcal{L}_z f_\rho(z)-h\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathcal{L}_z f_\rho(z)\right)\right\|_2\leq$$
$$\leq\frac{c}{|h|}\left\|\mathcal{L}_{z+h}f_\rho(z+h)-\mathcal{L}_{z+h}f_\rho(z)-h\mathcal{L}_{z+h}\left(\frac{\partial}{\partial z}f_\rho(z)\right)\right\|_2+$$
$$+\frac{c}{|h|}\left\|\mathcal{L}_{z+h}f_\rho(z)-\mathcal{L}_z f_\rho(z)-h\left(\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{L}_z\right)f_\rho(z)\right\|_2+$$
$$+c\left\|\left(\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{L}_z\right)f_\rho(z)+\mathcal{L}_{z+h}\left(\frac{\partial}{\partial z}f_\rho(z)\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathcal{L}_z f_\rho(z)\right)\right\|_2=$$
$$=N_1+N_2+N_3.$$

$$N_1=\frac{c}{|h|}\left\|\mathcal{L}_{z+h}f_\rho(z+h)-\mathcal{L}_{z+h}f_\rho(z)-h\mathcal{L}_{z+h}\left(\frac{\partial}{\partial z}f_\rho(z)\right)\right\|_2=$$
$$=\frac{c}{|h|}\left\|\mathcal{L}_{z+h}\left(f_\rho(z+h)-f_\rho(z)-h\frac{\partial}{\partial z}f_\rho(z)\right)\right\|_2\leq$$
$$\leq\frac{c}{|h|}\left(1+e^{b\pi\operatorname{Im}(z+h)}\right)\left\|f_\rho(z+h)-f_\rho(z)-h\frac{\partial}{\partial z}f_\rho(z)\right\|_2\longrightarrow 0,$$

por el Lema 8.2 (tener en cuenta (89)).

$$N_2=\frac{1}{|h|}\left\|\mathcal{L}_{z+h}f_\rho(z)-\mathcal{L}_z f_\rho(z)-h\left(\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{L}_z\right)f_\rho(z)\right\|_2=$$
$$=\frac{1}{|h|}\left\|\widehat{K_{b'}}(\xi)\left((\xi+i)^{b(1-(z+h))}-(\xi+i)^{b(1-z)}-h\frac{\partial}{\partial z}(\xi+i)^{b(1-z)}\right)\widehat{f_\rho(z)}(\xi)\right\|_2\longrightarrow 0,$$

aplicando el Lema 8.2 a la función

$$H_z\left(u+it,\xi\right)=\widehat{K_{b'}}\left(\xi\right)\left(\xi+i\right)^{b(1-u-it)}\widehat{f_\rho\left(z\right)}\left(\xi\right)$$

que para todo $u+it$ en un compacto de $1/2<u<1$ cumple

$$\left\|H_z\left(u+it\right)\right\|_2\le c\left\|f_\rho\left(z\right)\right\|_2\le c,$$

pues, por (86),

$$\left|\widehat{K_{b'}}\left(\xi\right)\left(\xi+i\right)^{b(1-u-it)}\right|\le c\, e^{b\pi|t|}\le c.$$

$$\begin{aligned}N_3=\left\|\left(\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{L}_z\right)f_\rho\left(z\right)+\mathcal{L}_{z+h}\left(\frac{\partial}{\partial z}f_\rho\left(z\right)\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathcal{L}_zf_\rho\left(z\right)\right)\right\|_2&=\\=\left\|\mathcal{L}_{z+h}\left(\frac{\partial}{\partial z}f_\rho\left(z\right)\right)-\mathcal{L}_z\left(\frac{\partial}{\partial z}f_\rho\left(z\right)\right)\right\|_2&=\\=\left\|\left(\widehat{K_{b'}}\left(\xi\right)\ \left(\xi+i\right)^{b(1-z-h)}-\widehat{K_{b'}}\left(\xi\right)\ \left(\xi+i\right)^{b(1-z)}\right)\ \widehat{\frac{\partial}{\partial z}f_\rho\left(z\right)}\left(\xi\right)\right\|_2&\longrightarrow 0,\end{aligned}$$

por Convergencia Mayorada (nuevamente se usa (86) y, por lo tanto, para $|h|$ pequeño se tiene que $\left|\widehat{K_{b'}}\left(\xi\right)\ \left(\xi+i\right)^{b(1-z-h)}-\widehat{K_{b'}}\left(\xi\right)\ \left(\xi+i\right)^{b(1-z)}\right|\le c$).

Veamos que $U\left(z\right)$ es una función continua en $\mathrm{Re}(z)=1/2$ y en $\mathrm{Re}(z)=1$.

$$\begin{aligned}&\left|U\left(z+h\right)-U\left(z\right)\right|=\\&=\left|\int\left(\mathcal{L}_{z+h}f_\rho\left(z+h\right)\right)\left(x\right)G\left(z+h,x\right)dx-\int\left(\mathcal{L}_zf_\rho\left(z\right)\right)\left(x\right)G\left(z,x\right)dx\right|\le\\&\le\left|\int\left(\mathcal{L}_{z+h}f_\rho\left(z+h\right)-\mathcal{L}_{z+h}f_\rho\left(z\right)\right)\left(x\right)G\left(z+h,x\right)dx\right|+\\&+\left|\int\left(\mathcal{L}_{z+h}f_\rho\left(z\right)-\mathcal{L}_zf_\rho\left(z\right)\right)\left(x\right)G\left(z+h,x\right)dx\right|+\\&+\left|\int\left(\mathcal{L}_zf_\rho\left(z\right)\right)\left(x\right)\left(G\left(z+h,x\right)-G\left(z,x\right)\right)dx\right|=I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

Para h tal que $1/2\le\mathrm{Re}(z+h)\le 1$ usamos (91) y (86) para acotar:

$$\begin{aligned}I_1&\le c\left\|\mathcal{L}_{z+h}\left(f_\rho\left(z+h\right)-f_\rho\left(z\right)\right)\right\|_2\le\\&\le c\, e^{b\pi|\mathrm{Im}(z+h)|}\left\|f_\rho\left(z+h\right)-f_\rho\left(z\right)\right\|_2\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

De modo análogo a la acotación de N_3, se tiene que

$$\begin{aligned}I_2&\le\left\|\mathcal{L}_{z+h}f_\rho\left(z\right)-\mathcal{L}_zf_\rho\left(z\right)\right\|_2\le\\&\le\left\|\left(\widehat{K_{b'}}\left(\xi\right)\ \left(\xi+i\right)^{b(1-z-h)}-\widehat{K_{b'}}\left(\xi\right)\ \left(\xi+i\right)^{b(1-z)}\right)\ \widehat{f_\rho\left(z\right)}\left(\xi\right)\right\|_2\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Y, por Convergencia Mayorada,

$$I_3 \leq \left\| \mathcal{L}_z f_\rho(z) \right\|_2 \left\| G(z+h) - G(z) \right\|_2 \longrightarrow 0.$$

Por último, veamos que $\Phi(z)$ cumple la condición (83). En efecto, basta observar que por (86), (91) y (89),

$$|U(z)| \leq \left\| G(z) \right\|_2 \left\| \mathcal{L}_z f_\rho(z) \right\|_2 \leq c\, e^{b\pi|\mathrm{Im}(z)|} \left\| f_\rho(z) \right\|_2 \leq c\, e^{b\pi|\mathrm{Im}(z)|}.$$

9. Interpolación entre espacios de Hardy laterales con pesos

En esta última sección probaremos un Teorema de Interpolación entre espacios de Hardy laterales con pesos en A_∞^+ similar al probado por Strönberg y Torchinsky en [13]. Como aplicación daremos otra demostración de la Proposición 3.3.

9.1. Definiciones

Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial topológico y A_j $(j = 0, 1)$ subespacios de $\mathbb{V}$. Sobre A_j esta definida $\|\cdot\|_j$ que, para todo $x, y \in A_j$ y todo escalar λ, satisface:

- $\|x\|_j = 0 \implies x = 0$.
- $\|\lambda x\|_j = |\lambda| \, \|x\|_j$.
- $\|x + y\|_j \leq c \left(\|x\|_j + \|y\|_j \right)$, donde c es una constante que no depende de x e y.
- $\left(A_j, \|\cdot\|_j \right) \hookrightarrow \mathbb{V}$.

Definición 9.1 *En $A_0 + A_1$ se define*

$$\|v\| = \inf \left\{ \|a_0\|_0 + \|a_1\|_1 : v = a_0 + a_1, \ a_j \in A_j \right\}.$$

Se verifican, para todo $v, w \in A_0 + A_1$ y todo escalar λ,

- $\|v\| = 0 \implies v = 0$.
- $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$.
- $\|v + w\| \leq c \left(\|v\| + \|w\| \right)$.

Definición 9.2 *Sean $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1\}$ y $\mathcal{F} = \{f\}$ una familia de funciones de variable compleja, $f : \Omega \longrightarrow A_0 + A_1$ que cumple para todo $t \in \mathbb{R}$ y $j = 0, 1$:*

1. $f(j + it) \in A_j$
2. $\|f(j + it)\|_j \leq C$.
   Se define

$$\|f\|_F = \text{máx} \left\{ \sup_t \|f(it)\|_0 \, , \, \sup_t \|f(1 + it)\|_1 \right\}.$$

Definición 9.3 *Si $0 < s < 1$, se definen los espacios intermedios*

$$A_s = \{a \in A_0 + A_1 : \ \exists f \in \mathcal{F} \ , a = f(s)\}$$

y

$$\|a\|_s = \inf_{\substack{f(s) = a \\ f \in \mathcal{F}}} \|f\|_F \, .$$

Se verifican

- $\|\lambda f\|_F = |\lambda| \, \|f\|_F$ para toda $f \in \mathcal{F}$.
- $\|\lambda a\|_s = |\lambda| \, \|a\|_s$ para todo $a \in A_s$.

9.2. Teorema de interpolación

Consideremos, con las definiciones de la sección anterior,

- $\left(A_j, \|\cdot\|_{A_j}\right)$, $\left(B_j, \|\cdot\|_{B_j}\right)$, $j = 0, 1$.
- $\mathcal{F} = \{f\}_{f \in \mathcal{F}}$, $\widetilde{\mathcal{F}} = \left\{\tilde{f}\right\}_{\tilde{f} \in \widetilde{\mathcal{F}}}$.
- $A_s = \{f(s)\}_{f \in \mathcal{F}}$, $B_s = \left\{\tilde{f}(s)\right\}_{\tilde{f} \in \widetilde{\mathcal{F}}}$.

Entonces tenemos el siguiente teorema de interpolación:

Teorema 9.4 *Sea $\mathcal{L}_z : A_0 + A_1 \longrightarrow B_0 + B_1$ $(z \in \Omega)$ una familia de operadores tal que para $j = 0, 1$,*

$$\mathcal{L}_{j+it} : A_j \longrightarrow B_j$$

y, además, existen constantes c,$\beta > 0$ tales que para todo $a_j \in A_j$ y todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\|\mathcal{L}_{j+it} a_j\|_{B_j} \leq c \exp(\beta t^2) \, \|a_j\|_{A_j} \, .$$

Si para toda $f \in \mathcal{F}$ y $\kappa \in \mathbb{R}$ se tiene que $\kappa e^{\beta z^2} \mathcal{L}_z f \in \widetilde{\mathcal{F}}$, entonces para cada s, $0 < s < 1$,

$$\mathcal{L}_s : A_s \longrightarrow B_s$$

y existe $c_s > 0$ tal que

$$\|\mathcal{L}_s a\|_{B_s} \leq c_s \, \|a\|_{A_s} \, ,$$

para todo $a \in A_s$.

Demostración. Dados $\varepsilon > 0$ y $a \in A_s$ existe (Definición 9.3) $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(s) = a$ y $\|f\|_F \leq \|a\|_{A_s} + \varepsilon$.

Si definimos

$$g(z) = c^{-1} e^{\beta z^2} \mathcal{L}_z f(z),$$

entonces, por hipótesis, $g \in \widetilde{\mathcal{F}}$ y, por la Definición 9.3, es

$$\|g(s)\|_{B_s} \leq \|g\|_{\tilde{F}}.$$

Como $f(s) = a$, entonces

$$c^{-1} e^{\beta s^2} \|\mathcal{L}_s a\|_{B_s} = \|g(s)\|_{B_s} \leq \|g\|_{\tilde{F}} = \max\left\{\sup_t \|g(it)\|_{B_0}, \sup_t \|g(1+it)\|_{B_1}\right\}$$

$$= \max\left\{\sup_t \left(\left(c^{-1} e^{-\beta t^2}\right) \|\mathcal{L}_{it} f(it)\|_{B_0}\right), \sup_t \left(\left(c^{-1} e^{\beta\left(1-t^2\right)}\right) \|\mathcal{L}_{1+it} f(1+it)\|_{B_1}\right)\right\}$$

$$\leq \max\left\{\sup_t \left(e^{-\beta t^2} e^{\beta t^2} \|f(it)\|_{A_0}\right), \sup_t \left(e^{\beta\left(1-t^2\right)} e^{\beta t^2} \|f(1+it)\|_{A_1}\right)\right\} \leq$$

$$\leq e^{\beta} \max\left\{\sup_t \|f(it)\|_{A_0}, \sup_t \|f(1+it)\|_{A_1}\right\} = e^{\beta} \|f\|_F \leq e^{\beta}\left(\|a\|_{A_s} + \varepsilon\right).$$

Siendo $\varepsilon > 0$ arbitrario se tiene que

$$\|\mathcal{L}_s a\|_{B_s} \leq c\, e^{1-\beta s^2} \|a\|_{A_s},$$

como queríamos probar. ■

9.3. Caracterización de $\|\cdot\|_s$

Con las definiciones introducidas en 9.1 tenemos la siguiente proposición que relaciona a las "normas" intermedias con las $\|\cdot\|_j$ $(j = 0, 1)$.

Proposición 9.5 *Si $\mathcal{F}$ es una familia como la dada en la Definición 9.2 que además cumple las siguientes dos condiciones:*

3. para toda $f \in \mathcal{F}$ se tiene que $k\, e^{\lambda z} f \in \mathcal{F}$ donde $k, \lambda \in \mathbb{R}$,

4. si para $j = 0$ o $j = 1$ es $\|f(j+it)\|_j = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ entonces $f(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$,

entonces

$$\|a\|_s = \inf_{\substack{f(s) = a \\ f \in \mathcal{F}}} \left\{\left(\sup_t \|f(it)\|_0\right)^{1-s} \left(\sup_t \|f(1+it)\|_1\right)^{s}\right\}.$$

Demostración. Veamos primero que el miembro de la izquierda es menor o igual que el de la derecha.

Sea $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(s) = a$. Si para $j = 0$ o $j = 1$ es $\sup_t \|f(j+it)\|_j = 0$ entonces, por la Condición 4, es $f(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$ y $\|a\|_s = 0$, valiendo la igualdad. Si no, sea $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$e^{\lambda} = \frac{\sup\limits_t \|f(it)\|_0}{\sup\limits_t \|f(1+it)\|_1}.$$

Sea $g(z) = e^{\lambda(z-s)} f(z)$. Por la Condición 3 se tiene que $g \in \mathcal{F}$ y, además, $g(s) = f(s) = a$.

Por la definición de λ se tiene que

$$\|g(it)\|_0 = e^{-\lambda s} \|f(it)\|_0 \leq \left(\sup_t \|f(it)\|_0\right)^{1-s} \left(\sup_t \|f(1+it)\|_1\right)^{s},$$

$$\|g(1+it)\|_1 = e^{\lambda(1-s)} \|f(1+it)\|_1 \leq \left(\sup_t \|f(it)\|_0\right)^{1-s} \left(\sup_t \|f(1+it)\|_1\right)^{s}.$$

Y, por lo tanto, (Definiciones 9.3 y 9.2),

$$\|a\|_s \leq \|g\|_F \leq \left(\sup_t \|f(it)\|_0\right)^{1-s} \left(\sup_t \|f(1+it)\|_1\right)^{s},$$

para toda $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(s) = a$.

Para ver la otra desigualdad, consideremos $\varepsilon > 0$ y $g \in \mathcal{F}$ tal que $g(s) = a$ con $\|g\|_F \leq \|a\|_s + \varepsilon$.

Luego

$$\inf_{\substack{f(s)=a \\ f \in \mathcal{F}}} \left\{ \left(\sup_t \|f(it)\|_0\right)^{1-s} \left(\sup_t \|f(1+it)\|_1\right)^{s} \right\} \leq$$

$$\leq \left(\sup_t \|g(it)\|_0\right)^{1-s} \left(\sup_t \|g(1+it)\|_1\right)^{s} \leq$$

$$\leq \text{máx}\left\{\sup_t \|g(it)\|_0 \, , \, \sup_t \|g(1+it)\|_1\right\} = \|g\|_F \leq \|a\|_s + \varepsilon.$$

■

9.4. Identificación de los espacios intermedios

En el caso en que los espacios A_j $(j = 0, 1)$ sean espacios de Hardy laterales, se identificarán los espacios intermedios con los espacios de Hardy correspondientes.

Definición 9.6 *Sean* $\omega, \nu \in A_\infty^+$ *y sea* $\phi \in \mathcal{S}$ *con* $sop(\phi) \subset (-\infty, 0]$, $\int \phi \neq 0$. *Llamaremos* $\mathcal{F} = \{f\}$ *a la familia de las funciones de variable compleja* $f : \Omega \longrightarrow H_+^{p_0}(\omega) + H_+^{p_1}(\nu) = H_0^{p_0} + H_1^{p_1}$ *tales que:*

1. $F(x,t,z) = f(z) * \phi_t(x)$ *es uniformemente continua y acotada para* $z \in \Omega$ *y* (x,t) *en un compacto de* $\mathbb{R}_+^2$.
2. $F(x,t,z)$ *es analítica para* $(x,t) \in \mathbb{R}_+^2$ *fijo y* z *en el interior de* Ω.
3. $f(j+it) \in H_j^{p_j}$ *y* $\|f(j+it)\|_j \leq C$ *para* $j = 0, 1$.

Es claro que $\mathcal{F}$ cumple las Condiciones 1, 2 y 3 dadas en la Definción 9.2 y la Proposición 9.5.

Con esta definición y la notación dada en 9.1 y en la Sección 5 podemos enunciar el resultado principal de esta sección:

Teorema 9.7 *Sean* $A_0 = H_+^{p_0}(\omega)$ *y* $A_1 = H_+^{p_1}(\nu)$, $0 < s < 1$, $p = p(s)$ *y* $\mu = \mu(s)$.

1. *Si* $f \in \mathcal{F}$ *entonces* $f(s) \in H_+^p(\mu)$ *y*

$$\|f(s)\|_{H_+^p(\mu)} \leq \left(\sup_t \|f(it)\|_0\right)^{1-s} \left(\sup_t \|f(1+it)\|_1\right)^s .$$

2. *Si* $h \in H_+^p(\mu)$ *entonces existe* $f \in \mathcal{F}$ *tal que* $f(s) = h$ *y, para* $0 \leq u \leq 1$, *se tiene que*

$$\|f(u+it)\|_{H_+^{p(u)}(\mu(u))}^{p(u)} \leq c \|h\|_{H_+^p(\mu)}^p ,$$

donde la constante c *no depende ni de* $u+it$, *ni de* h *y su dependencia de los pesos* ω *y* ν *es sólo a través de la constante de la clase* A_r^+ *a la que pertenezcan.*

La segunda parte de este teorema es el Teorema 5.1 que ya hemos demostrado en la Sección 5. La demostración de la primera parte se hará en las próximas dos subsecciones y es similar a la dada en [13].

Los siguientes corolarios dan la identificación de los espacios intermedios buscada.

Corolario 9.8 *La familia* $\mathcal{F}$ *cumple la Condición 4 de la Proposición 9.5.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{F}$ tal que si $j = 0$ o $j = 1$ es $\|f(j+it)\|_j = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Por la primera parte del Teorema 9.7 se tiene que $f(s) = 0$ para todo $0 < s < 1$.

Del mismo modo, como $f(\cdot + it_0) \in \mathcal{F}$ para cada $t_0 \in \mathbb{R}$, se tiene que $f(s+it_0) = 0$ para todo $0 < s < 1$.

Esto implica que $F(x,t,z) = 0$ para todo z en el interior de Ω.

Por la continuidad dada en 1 de la Definición 9.6 es $F(x,t,z) = 0$ para todo z en Ω y, por lo tanto, $f(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$.

■

Corolario 9.9 *Si* $A_0 = H_+^{p_0}(\omega)$, $A_1 = H_+^{p_1}(\nu)$, $0 < s < 1$, $p = p(s)$ *y* $\mu = \mu(s)$ *entonces*

$$A_s = H_+^p(\mu)$$

y

$$\|\cdot\|_s \equiv \|\cdot\|_{H_+^p(\mu)} .$$

Demostración. Sea $h \in A_s$. Por la primera parte del Teorema 9.7 se tiene que para toda $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(s) = h$ entonces $h = f(s) \in H_+^p(\mu)$ y

$$\|h\|_{H_+^p(\mu)} = \|f(s)\|_{H_+^p(\mu)} \leq \left(\sup_t \|f(it)\|_0\right)^{1-s} \left(\sup_t \|f(1+it)\|_1\right)^s .$$

Luego, por la Proposición 9.5 se tiene que $\|h\|_{H_+^p(\mu)} \leq \|h\|_s$.

Sea ahora $h \in H_+^p(\mu)$. Por la segunda parte del Teorema 9.7 existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $h = f(s) \in A_s$ y

$$\|f(j+it)\|_j^{p_j} \leq c\,\|h\|_{H_+^p(\mu)}^p ,$$

para $j = 0, 1$. Luego, usando la Proposición 9.5, resulta

$$\begin{aligned} \|h\|_s &\leq \left(\sup_t \|f(it)\|_0\right)^{1-s} \left(\sup_t \|f(1+it)\|_1\right)^s \\ &\leq c\left(\|h\|_{H_+^p(\mu)}\right)^{\frac{p}{p_0}(1-s)} \left(\|h\|_{H_+^p(\mu)}\right)^{\frac{p}{p_1}s} = c\,\|h\|_{H_+^p(\mu)} . \end{aligned}$$

■

Observación 9.10 *Sean* A_0, A_1, p *y* μ *como en el Teorema 9.7. Consideremos el subespacio* $\mathcal{A}$ *definido en la Observación 4.15. Para cada combinación lineal finita de* (∞, N)*- átomos*

$$h = \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k \in \mathcal{A},$$

sean f *construida como en la demostración de la segunda parte del Teorema 9.7 y sus múltiplos por funciones exponenciales,* $r\,e^{\lambda z} f$ *donde* $r, \lambda \in \mathbb{R}$.
La familia de todas estas funciones de variable compleja es una subfamilia de la dada en la Definición 9.6 y cumple las condiciones de la Definición 9.2 y la Proposición 9.5. Además, debido a su construcción, con esta subfamilia sigue siendo válido el Teorema 9.7, reemplazando $H_+^p(\mu)$ *por* $\mathcal{A}$*. Luego, si utilizamos esta familia para definir los espacios intermedios tendremos la identificación dada por el Corolario 9.9:*

$$A_s = \mathcal{A}$$

y

$$\|\cdot\|_s \equiv \|\cdot\|_{H_+^p(\mu)} .$$

Proposición 9.11 *Sea* $B_0 = L^{p_0}_{\omega}$*,* $B_1 = L^{p_1}_{\nu}$ *y* $\widetilde{\mathcal{F}} = \left\{ \widetilde{f} \right\}$ *la familia de las funciones de variable compleja* $\widetilde{f} : \Omega \longrightarrow L^{p_0}_{\omega} + L^{p_1}_{\nu}$ *tales que:*

1. $\widetilde{f}(z)$ *es continua en la variable* $z \in \Omega$ *para casi todo* $x \in \mathbb{R}$*.*

2. Para casi todo $x \in \mathbb{R}$*, existen constantes* $A, c \in \mathbb{R}$ *y* $0 < a < \pi$ *tales que*

$$\left| \widetilde{f}\,(z) \right| \leq c \exp\left(A \exp\left(a \left|\mathrm{Im}\,(z)\right|\right)\right).$$

3. $\widetilde{f}(z)$ *es analítica en el interior de* Ω *para casi todo* $x \in \mathbb{R}$*.*

4. $\widetilde{f}(j + it) \in B_j$ *y* $\left\| \widetilde{f}(j + it) \right\|_j \leq C$ *para* $j = 0, 1$ *y* $t \in \mathbb{R}$*.*

En en el Capítulo XII de [13] se demuestra que para $0 < s < 1$*,* $p = p(s)$ *y* $\mu = \mu(s)$ *los espacios intermedios asociados son* $B_s = L^p_{\mu}$*.*

9.5. Lemas previos a la demostración de la primera parte del Teorema 9.7

El siguiente lema puede encontrarse en el Capítulo XII de [16].

Lema 9.12 *Sea* $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *una función continua en* Ω *y analítica en el interior de* Ω *tal que*

$$|g(z)| \leq c \exp(A(\exp(a\,|\mathrm{Im}(z)|))$$

para constantes $c > 0$*,* A *y* $0 < a < \pi$*.*

Entonces, para $0 < s < 1$*, se tiene que*

$$\ln\left(|g(s)|\right) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(|g(it)|\right) P_0\left(s, t\right) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(|g(1 + it)|\right) P_1\left(s, t\right) dt,$$

donde P_0 *y* P_1 *son los núcleos de Poisson para* Ω*.*

Corolario 9.13 *Con las hipótesis del Lema 9.12 y la notación introducida en la Sección 5 se tiene que*

$$|g(s)|^p \leq \left(\frac{1}{1-s} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(it)|^{p_0} P_0\left(s, t\right) dt \right)^{1-\mu} \left(\frac{1}{s} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(1 + it)|^{p_1} P_1\left(s, t\right) dt \right)^{\mu}.$$

Demostración. Por el Lema 9.12,

$$\begin{aligned}
|g(s)|^p &\leq \exp\left(p\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\left(|g(it)|\right)P_0\left(s,t\right)dt + p\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\left(|g(1+it)|\right)P_1\left(s,t\right)dt\right)\\
&= \exp\left(p\frac{p_0}{p_0}\frac{1-s}{1-s}\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\left(|g(it)|\right)P_0\left(s,t\right)dt\right)\times\\
&\quad\times\exp\left(p\frac{p_1}{p_1}\frac{s}{s}\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\left(|g(1+it)|\right)P_1\left(s,t\right)dt\right)\\
&= \left[\exp\left(\frac{1}{1-s}\int_{-\infty}^{+\infty}\ln|g(it)|^{p_0}P_0\left(s,t\right)dt\right)\right]^{\frac{p}{p_0}(1-s)}\times\\
&\quad\times\left[\exp\left(\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{+\infty}\ln|g(1+it)|^{p_1}P_1\left(s,t\right)dt\right)\right]^{\frac{p}{p_1}s}.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\int P_0\left(s,t\right)dt = 1-s$ y $\int P_1\left(s,t\right)dt = s$ podemos utilizar la desigualdad de Jensen para mayorar el último término por

$$\left(\frac{1}{1-s}\int_{-\infty}^{+\infty}|g(it)|^{p_0}P_0\left(s,t\right)dt\right)^{\frac{p}{p_0}(1-s)}\left(\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{+\infty}|g(1+it)|^{p_1}P_1\left(s,t\right)dt\right)^{\frac{p}{p_1}s}.$$

Y el corolario sigue pues (ver Sección 5) $\mu = \frac{p}{p_1}s$ y $1-\mu = \frac{p}{p_0}\left(1-s\right)$. ■

Lema 9.14 *Sea* $F:\Omega\longrightarrow L_\omega^{p_0}+L_\nu^{p_1}=L_0^{p_0}+L_1^{p_1}$ *tal que*

1) Para casi todo $x\in\mathbb{R}$ *(*x *fijo)* $F(\cdot,x)$ *es una función continua y acotada en* Ω *y analítica en el interior de* Ω*.*

2) Si $j=0,1$ *entonces* $F(j+it,\cdot)\in L_j^{p_j}$ *y* $\|F(j+it)\|_{L_j^{p_j}}\leq k$*.*

Entonces $F(s,\cdot)\in L_\mu^p$ *y*

$$\|F(s)\|_{p,\mu}\leq\left(\sup_t\|F(it)\|_{p_0,\omega}\right)^{1-s}\left(\sup_t\|F(1+it)\|_{p_1,\nu}\right)^{s}.$$

Demostración. Por el Corolario 9.13 tenemos que, para casi todo $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\|F(s)\|_{p,\mu}^{p} &= \int_{-\infty}^{+\infty} |F(s,x)|^{p}\,\omega(x)^{1-\mu}\nu(x)^{\mu}dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{1-s}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(it,x)|^{p_0}\,P_0\left(s,t\right)dt\omega(x)\right)^{1-\mu}\times \\
&\quad\times\left(\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(1+it,x)|^{p_1}\,P_1\left(s,t\right)dt\nu(x)\right)^{\mu}dx
\end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad de Hölder e intercambiando el orden de integración podemos mayorar el último término por

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{1-s}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(it,x)|^{p_0}\,\omega(x)dxP_0\left(s,t\right)dt\right)^{1-\mu}\times \\
&\times\left(\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(1+it,x)|^{p_1}\,\nu(x)dxP_1\left(s,t\right)dt\right)^{\mu} \\
\leq\;&\left(\sup_t\|F(it)\|_{p_0,\omega}\right)^{p_0(1-\mu)}\left(\frac{1}{1-s}\int_{-\infty}^{+\infty}P_0\left(s,t\right)dt\right)^{1-\mu}\times \\
&\times\left(\sup_t\|F(1+it)\|_{p_1,\nu}\right)^{p_1\mu}\left(\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{+\infty}P_1\left(s,t\right)dt\right)^{\mu} \\
=\;&\left(\sup_t\|F(it)\|_{p_0,\omega}\right)^{(1-s)p}\left(\sup_t\|F(1+it)\|_{p_1,\nu}\right)^{sp}.
\end{aligned}$$

La última igualdad se obtiene recordando que $p_1\mu = sp$ y $p_0(1-\mu) = (1-s)\,p$ y que $\int P_0\left(s,t\right)dt = 1-s$ y $\int P_1\left(s,t\right)dt = s$. ■

Lema 9.15 *Sean* $0 < p < \infty$ *y* $f \in H_{+}^{p}(\delta)$.
Entonces

$$\sup_{(y(\cdot),t(\cdot))}\left\|f*\phi_{t(\cdot)}\left(y\left(\cdot\right)\right)\right\|_{p,\delta} = \left\|M_1^{+}\left(f\right)\right\|_{p,\delta},$$

donde el supremo se toma sobre todos los pares de funciones medibles $y:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *y* $t:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}_{>0}$ *que satisfacen la relación* $0\leq y(x)-x<t(x)$ *para todo* $x\in\mathbb{R}$.

Demostración. Se supondrá que $\delta\left(x\right) > 0$ para casi todo $x\in\mathbb{R}$. Sean $y:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ y $t:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}_{>0}$ funciones medibles tales que $0\leq y(x)-x<t(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Recordando que

$$M_1^{+}(f,x) = \sup_{0\leq u-x<s}\left|f*\phi_s\left(u\right)\right|$$

tenemos que, para todo $x\in\mathbb{R}$,

$$\left|f*\phi_{t(x)}\left(y\left(x\right)\right)\right| \leq M_1^{+}(f,x).$$

Luego

$$\left\| f * \phi_{t(\cdot)}\left(y\left(\cdot\right)\right) \right\|_{p,\delta} \leq \left\| M_1^+\left(f\right) \right\|_{p,\delta}.$$

Para terminar la demostración, dado $\varepsilon > 0$ y si $q = \text{mín}\{p, 1\}$, construiremos un par de funciones medibles $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ tales que $0 \leq Y(x) - x < T(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y para las cuales se verifique

$$\left\| M_1^+\left(f\right) \right\|_{p,\delta}^q \leq \left\| f * \phi_{t(\cdot)}\left(y\left(\cdot\right)\right) \right\|_{p,\delta}^q + \varepsilon^q$$

de donde es inmediato el lema.
Para $m \in \mathbb{N}$, sea

$$A_m = \{x \in \mathbb{R} : m - 1 \leq |x| < m\}.$$

Sean $\{(y_k, t_k) : k \in \mathbb{N}\}$ denso en $\mathbb{R}_+^2$ y $\varepsilon_m^p = \frac{\varepsilon^p}{2^m \delta(A_m)}$ entonces definimos

$$E_k^m = \left\{x \in A_m : M_1^+(f,x) - \varepsilon_m < \left| f * \phi_{t_k}\left(y_k\right) \right|, 0 \leq y_k - x < t_k \right\}.$$

Los conjuntos E_k^m son medibles pues $M_1^+(f,\cdot)$ es una función medible.

Consideraremos

$$F_1^m = E_1^m$$

y, si $k \geq 2$,

$$F_k^m = E_k^m - E_{k-1}^m.$$

Luego los conjuntos F_k^m son medibles y disjuntos.

Como $M_1^+(f) \in L_\delta^p$ y $\delta\left(x\right) > 0$ para casi todo $x \in \mathbb{R}$ entonces $M_1^+(f,x)$ es finita para casi todo x. Luego, por la definición de $M_1^+(f,\cdot)$ y la densidad de $\{(y_k, t_k) : k \in \mathbb{N}\}$, se tiene que, salvo medida nula,

$$A_m = \bigcup_k F_k^m$$

y, por lo tanto,

$$\mathbb{R} = \bigcup_{m,k} F_k^m.$$

Definimos

$$Y(x) = \sum_{m,k} y_k \chi_{F_k^m}(x)$$

y

$$T(x) = \sum_{m,k} t_k \chi_{F_k^m}(x).$$

Resulta que $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ son funciones medibles por ser F_k^m conjuntos medibles. Además, para casi todo $x \in \mathbb{R}$ existen únicos k y m tal que $x \in F_k^m$ y, por lo tanto, $0 \leq Y\left(x\right) - x = y_k - x < t_k = T\left(x\right)$ y

$$M_1^+(f,x) - \varepsilon_m < \left| f * \phi_{t_k}\left(y_k\right) \right| = \left| f * \phi_{T(x)}\left(Y(x)\right) \right| \leq M_1^+(f,x)$$

Luego

$$\left\| M_1^+(f,\cdot) - \left| f * \phi_{T(\cdot)}\left(Y\left(\cdot\right)\right)\right|\right\|_{p,\delta}^p = \int \left(M_1^+(f,x) - \left| f * \phi_{T(x)}\left(Y\left(x\right)\right)\right|\right)^p \delta(x)dx$$

$$= \sum_{m,k} \int_{F_k^m} \left(M_1^+(f,x) - \left| f * \phi_{T(x)}\left(Y\left(x\right)\right)\right|\right)^p \delta(x)dx \leq \sum_{m,k} \int_{F_k^m} \varepsilon_m^p \delta(x)dx$$

$$= \sum_m \int_{A_m} \varepsilon_m^p \delta(x)dx = \sum_m \varepsilon_m^p \delta(A_m)dx = \sum_m \frac{\varepsilon^p}{2^m}dx = \varepsilon^p.$$

Si $p \geq 1$,

$$\left\| M_1^+(f,\cdot)\right\|_{p,\delta} - \left\| f * \phi_{T(\cdot)}\left(Y\left(\cdot\right)\right)\right\|_{p,\delta} \leq \left\| M_1^+(f,\cdot) - \left| f * \phi_{T(\cdot)}\left(Y\left(\cdot\right)\right)\right|\right\|_{p,\delta} \leq \varepsilon.$$

Si $0 < p < 1$,

$$\left\| M_1^+(f,\cdot)\right\|_{p,\delta}^p - \left\| f * \phi_{T(\cdot)}\left(Y\left(\cdot\right)\right)\right\|_{p,\delta}^p \leq \left\| M_1^+(f,\cdot) - \left| f * \phi_{T(\cdot)}\left(Y\left(\cdot\right)\right)\right|\right\|_{p,\delta}^p \leq \varepsilon^p.$$

■

9.6. Demostración de la primera parte del Teorema 9.7

Sean $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $t : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ funciones medibles que satisfacen la relación $0 \leq y(x) - x < t(x)$ y sea $F(z,x) = f(z) * \phi_{t(x)}\left(y\left(x\right)\right)$. Como (ver 1 de la Definición 9.6) $f(z) * \phi_t(y)$ es continua para todo $(z,y,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^2$ entonces F es una función medible por serlo $(z, y(x), t(x))$. Veamos que a F puede aplicársele el Lema 9.14.

Para $z \in \Omega$ fijo se tiene (ver Definición 9.6)

$$f(z) = f_0(z) + f_1(z) \in H_0^{p_0} + H_1^{p_1}.$$

Luego, para $j = 0, 1$,

$$\left| f_j(z) * \phi_{t(x)}\left(y\left(x\right)\right)\right| \leq \sup_{0 \leq y - x < t} \left| f_j(z) * \phi_t\left(y\right)\right| = M_1^+\left(f_j\left(z\right), x\right) \in L_j^{p_j}$$

y, entonces,

$$\begin{aligned} F(z,x) &= f(z) * \phi_{t(x)}\left(y\left(x\right)\right) \\ &= f_0(z) * \phi_{t(x)}\left(y\left(x\right)\right) + f_1(z) * \phi_{t(x)}\left(y\left(x\right)\right) \in L_0^{p_0} + L_1^{p_1}. \end{aligned}$$

Además,

$$|F(z,x)| = \left| f(z) * \phi_{t(x)}\left(y\left(x\right)\right)\right| \leq M_1^+\left(f\left(z\right), x\right)$$

y, en particular, por 3 de la Definición 9.6, se tiene que para $j = 0, 1$ y para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\|F(j+it)\|_{L_j^{p_j}} \leq \left\|M_1^+(f(j+it))\right\|_{L_j^{p_j}} = \|f(j+it)\|_{H_j^{p_j}} \leq k. \qquad (92)$$

Por último, por 1 y 2 de la Definición 9.6, se tiene que para $x \in \mathbb{R}$ fijo $F(z,x)$ es una función continua y acotada para $z \in \Omega$ y analítica para z en el interior de Ω.

Luego, por el Lema 9.14 y por (92), se tiene que $F(s,\cdot) \in L_\mu^p$ y

$$\begin{aligned} \|F(s)\|_{p,\mu} &\leq \left(\sup_t \|F(it)\|_{p_0,\omega}\right)^{1-s} \left(\sup_t \|F(1+it)\|_{p_1,\nu}\right)^s \\ &\leq \left(\sup_t \|f(it)\|_{H_+^{p_0}(\omega)}\right)^{1-s} \left(\sup_t \|f(1+it)\|_{H_+^{p_1}(\nu)}\right)^s \end{aligned}$$

Por el Lema 9.15 obtenemos el resultado buscado:

$$\begin{aligned} \|f(s)\|_{H_+^p(\mu)} &= \left\|M_1^+(f(s))\right\|_{p,\mu} \\ &= \sup_{(y(\cdot),t(\cdot))} \left\|f * \phi_{t(\cdot)}(y(\cdot))\right\|_{p,\mu} = \sup_{(y(\cdot),t(\cdot))} \|F(s)\|_{p,\mu} \\ &\leq \left(\sup_t \|f(it)\|_{H_+^{p_0}(\omega)}\right)^{1-s} \left(\sup_t \|f(1+it)\|_{H_+^{p_1}(\nu)}\right)^s. \end{aligned}$$

9.7. Aplicación: otra demostración de la Proposición 3.3

Por un cambio de variable lineal, todos los resultados obtenidos hasta ahora en la franja $0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1$ se obtienen considerando cualquier otra franja. En particular para esta aplicación se utilizará la franja $1/2 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1$.

Consideremos la familia de operadores $\mathcal{L}_z$, donde $1/2 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1$, definida por el multiplicador en L^2

$$\widehat{\mathcal{L}_z f}(\xi) = \widehat{K_{b'}}(\xi)\,(\xi+i)^{b(1-z)}\,\widehat{f}(\xi),$$

y los pesos ω, ν y ν_ρ de A_1^+ y el número p_0, $1 < p_0 < 2$, tales que

$$\nu^{2-p_0} = \omega,$$

definidos en la demostración de la Proposición 3.3.

Sean $A_{1/2} = H_+^2$, $A_1 = H_+^1(\nu_\rho)$ (en este caso es $p(u) = 1/u$ y $\mu(u) = 2 - 1/u$ para $1/2 \leq u \leq 1$), y sea $\mathcal{F}$ la familia dada en la Observación 9.10 tal que

$$A_{1/p_0} = \mathcal{A}$$

y

$$\|\cdot\|_{1/p_0} \equiv \|\cdot\|_{H_+^{p_0}(\nu_\rho^{2-p_0})}.$$

Además las constantes de equivalencia de estas normas no dependen de $\rho > 0$ pues la constante de A_1^+ de ν_ρ no depende de ρ (ver Lema 8.4, Observación 5.5 y Corolario 9.9).

Sean $B_{1/2} = L^2$ y $B_1 = L^1_{\nu_\rho}$ y $\widetilde{\mathcal{F}} = \left\{\widetilde{f}\right\}$ la familia dada en la Proposición 9.11. Entonces se tiene que para $1/2 \leq s \leq 1$ es $B_s = L^{1/s}_{\nu_\rho^{2-1/s}}$y en particular

$$B_{1/p_0} = L^{p_0}_{\nu_\rho^{2-p_0}}.$$

También aquí cabe observar que las normas son equivalentes con constantes que no dependen de $\rho > 0$.

Probaremos que para toda $h \in A_{1/p_0}$,

$$\left\|\mathcal{L}_{1/p_0} h\right\|_{p_0,\nu_\rho^{2-p_0}} \leq C \left\|h\right\|_{H_+^{p_0}(\nu_\rho^{2-p_0})}, \tag{93}$$

donde la constante C no depende ni de h ni de $\rho > 0$. Luego, como $\mathcal{L}_{1/p_0} = P_{b/p_0'}$ y $\left\|h\right\|_{H_+^{p_0}(\nu_\rho^{2-p_0})} \leq c \left\|h\right\|_{p_0,\nu_\rho^{2-p_0}}$, donde c no depende ni de h ni de ρ (véase el Lema 4.6 y la demotración del Lema 5.2), tendremos que

$$\left\|P_{b/p_0'} h\right\|_{p_0,\nu_\rho^{2-p_0}} \leq c \left\|h\right\|_{p_0,\nu_\rho^{2-p_0}} \leq c \left\|h\right\|_{p_0,\nu^{2-p_0}} = c \left\|h\right\|_{p_0,\omega}.$$

Aplicando el Teorema de Fatou resultará

$$\left\|P_{b/p_0'} h\right\|_{p_0,\omega} \leq c \left\|h\right\|_{p_0,\omega},$$

y siendo A_{1/p_0} denso en $L^{p_0}_\omega$ quedará demostrada la Proposición 3.3.

Para probar (93) mostraremos que la familia $\mathcal{L}_z$ satisface las hipótesis del Teorema 9.4 con constantes que no dependen de ρ.

Si $z = \frac{1}{2} + it$,

$$\widehat{\mathcal{L}_{\frac{1}{2}+it} g}\,(\xi) = \widehat{K_{b'}}\,(\xi)\,(\xi + i)^{b\left(\frac{1}{2}+it\right)}\,\widehat{g}\,(\xi)$$

donde $g \in L^2 \equiv H^2_+$. Como (véase (86) en la Sección 8)

$$\left|\widehat{K_{b'}}\,(\xi)\,(\xi + i)^{b\left(\frac{1}{2}+it\right)}\right| \leq c\, e^{b\pi|t|}$$

entonces por el Teorema de Plancharel se tiene que

$$\left\|\mathcal{L}_{\frac{1}{2}+it} g\right\|_2 \leq C \exp\left(\beta t^2\right) \left\|g\right\|_2, \tag{94}$$

donde C y β son constantes positivas suficientemente grandes.

Si $z = 1 + it$,

$$\widehat{\mathcal{L}_z g}\,(\xi) = \widehat{K_{b'}}\,(\xi)\,(\xi + i)^{ibt}\,\widehat{g}\,(\xi).$$

Luego, por el Ejemplo 6.10 y la Proposición 7.1, el operador $\mathcal{L}_{1+it} : H^1_+(\nu_\rho) \longrightarrow L^1_{\nu_\rho}$ es acotado y

$$\left\|\mathcal{L}_{1+it} g\right\|_{1,\nu_\rho} \leq C \exp\left(\beta t^2\right) \left\|g\right\|_{H^1_+(\nu_\rho)}, \tag{95}$$

donde C y β son constantes positivas suficientemente grandes. Además la constante C no depende de $\rho > 0$ (véase las Observaciones 6.9 y 7.2 y el Lema 8.4).

Veamos que para toda $f \in \mathcal{F}$ se tiene que $\kappa e^{\beta z^2} \mathcal{L}_z f \in \widetilde{\mathcal{F}}$.
Dada $f \in \mathcal{F}$ entonces

$$f_\rho(z) = r\, e^{\lambda z} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{k,j}^{\rho}(z) \quad a_{k,j}$$

donde $r, \lambda \in \mathbb{R}$ y $\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_{k,j}^{\rho}(z)\, a_{k,j}$ ha sido construida como se hizo en la demostración de la segunda parte del Teorema 9.7 a partir de una combinación lineal finita de (∞, N)- átomos

$$h = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k \in \mathcal{A},$$

donde $\lambda_k > 0$ y $a_k \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ estan soportados en intervalos I_k.

Recordemos (véase Lema 4.11) que $a_k(x) = c \sum_j a_{k,j}(x)$ donde $a_{k,j} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ es un (∞, N) −átomo soportado en un intervalo $I_{k,j}$. Además $I_k = \cup_j I_{k,j}$ donde los intervalos $I_{k,j}$ se solapan a lo sumo de a tres y $|I_{k,j}| \le c 2^{-j} |I_k|$.

También recordemos (véase Teorema 5.1) que

$$\lambda_{k,j}^{\rho}(z) = \lambda_k^{p_0 z} \left(\frac{|I_{k,j+2}|}{\nu_\rho(I_{k,j+2})} \right)^{p_0 z - 1}.$$

Como, por el Lema 8.5, para cada k existe una constante $C = C(k, \nu_\rho)$ tal que

$$\frac{1}{\rho} < \frac{|I_{k,j+2}|}{\nu_\rho(I_{k,j+2})} < C$$

para todo j, entonces $\lambda_{k,j}^{\rho}(z)$ es acotada en la franja $1/2 \le \mathrm{Re}(z) \le 1$ uniformemente en j. Esto es, existen constantes $\eta_{k,\rho}$ tales que

$$\left| \lambda_{k,j}^{\rho}(z) \right| \le \eta_{k,\rho} \tag{96}$$

para todo $1/2 \le \mathrm{Re}(z) \le 1$ y todo j.

Notar que $f_\rho(z) \in L^2$ pues para cada k,

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{k,j}^{\rho}(z) \quad a_{k,j}(x) \right| \le \eta_{k,\rho} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{k,j}(x)| \le \eta_{k,\rho} \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{I_{k,j}}(x) \le 3\eta_{k,\rho} \chi_{I_k}(x),$$

y, por lo tanto, tiene sentido $\mathcal{L}_z(f_\rho(z))$.

Para probar que $\kappa e^{\beta z^2}\mathcal{L}_z f_\rho$ cumple las propiedades 1, 2 y 3 de la definición de $\widetilde{\mathcal{F}}$ dada en la Proposición 9.11 bastará con ver que las cumplen $\mathcal{L}_z f_k$, donde

$$f_k(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{k,j}^{\rho}(z)\ a_{k,j},$$

$k = 1, .., n$. Y, como esta serie converge en L^2, se tiene que

$$\mathcal{L}_z(f_k(z)) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{k,j}^{\rho}(z)\ \mathcal{L}_z a_{k,j}$$

en L^2. Luego, para casi todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}_z(f_k(z))(x) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{k,j}^{\rho}(z)\ \ \mathcal{L}_z a_{k,j}\right)(x). \tag{97}$$

Probaremos que, para casi todo $x \in \mathbb{R}$, la serie $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_{k,j}^{\rho}(z)\ \ \mathcal{L}_z a_{k,j}(x)$ converge, y por (97) tendremos que

$$\mathcal{L}_z(f_k(z))(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{k,j}^{\rho}(z)\ \ \mathcal{L}_z a_{k,j}(x), \tag{98}$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}$.

Primero estudiaremos el comportamiento de $\mathcal{L}_z a_{k,j}(x)$ como función de z. Para esto reescribamos la definición de $\mathcal{L}_z$ aplicada a $a_{k,j} \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{L}_z a_{k,j}}(\xi) &= \widehat{K_{b'}}(\xi)\ (\xi + i)^{b(1-z)}\ \widehat{a_{k,j}}(\xi) \\
&= (\xi + i)^{b(1-z)-2}\,\widehat{K_{b'}}(\xi)\ (\xi + i)^2\ \widehat{a_{k,j}}(\xi) \\
&= (\xi + i)^{b(1-z)-2}\,\widehat{K_{b'}}(\xi)\ \left(c(D+i)^2(a_{k,j})\right)^{\wedge}(\xi).
\end{aligned}$$

Luego, si llamamos $b_{k,j} = c(D+i)^2(a_{k,j})$ y si $\psi(z) \in L^2$ es tal que $\widehat{\psi(z)} = (\xi + i)^{b(1-z)-2}$, se tiene que, para casi todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}_z a_{k,j}(x) = \psi(z) * K_{b'} * b_{k,j}(x). \tag{99}$$

Utilizando la Desigualdad de Hölder y el Teorema Plancharel tenemos que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}_z a_{k,j}(x)| &= |\psi(z) * K_{b'} * b_{k,j}(x)| \leq \|\psi(z)\|_2\,\|K_{b'} * b_{k,j}\|_2 = \\
&= \left\|(\xi + i)^{b(1-z)-2}\right\|_2 \|K_{b'} * b_{k,j}\|_2.
\end{aligned}$$

Como para $z = u + iy$, con $1/2 \leq u \leq 1$, es

$$\begin{aligned}
\left|(\xi + i)^{b(1-z)-2}\right| &\leq e^{by\arg(\xi+i)}\,|\xi + i|^{b(1-u)-2} \leq e^{b\pi|y|}\,|\xi + i|^{b/2-2} \leq \\
&\leq e^{b\pi|y|}\,|\xi + i|^{-1},
\end{aligned}$$

y teniendo en cuenta el Teorema 1.4 y que $\|b_{k,j}\|_\infty \leq c_k$, $sop\,(b_{k,j}) \subset I_{k,j}$ y $|I_{k,j}| \leq c2^{-j}\,|I_k|$ resulta que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}_z a_{k,j}\,(x)| &\leq e^{b\pi|y|} \left\|(\xi+i)^{-1}\right\|_2 \|K_{b'} * b_{k,j}\|_2 \leq ce^{b\pi|y|}\,\|b_{k,j}\|_2 \qquad (100)\\
&\leq C_k 2^{-j/2}\,|I_k|^{1/2}\,e^{b\pi|y|},
\end{aligned}$$

donde $C_k > 0$ no depende de j.

Utilizando (100) y (96) para acotar en (98) se tiene que la serie converge como habíamos afirmado y que, para casi todo $x \in \mathbb{R}$,

$$|\mathcal{L}_z\,(f_k\,(z))\,(x)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left|\lambda^{\rho}_{k,j}\,(z)\right|\,|\,\mathcal{L}_z a_{k,j}\,(x)| \leq C_k \eta_{k,\rho}\,|I_k|^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j/2}\right) e^{b\pi|y|}, \qquad (101)$$

de donde se deduce inmediatamente que $\mathcal{L}_z f_k$ cumple la propiedad 2 de la definición de $\widetilde{\mathcal{F}}$.

Además de (101) se tiene que la serie en (98) converge uniformemente para z en un compacto de la franja $1/2 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1$. Por lo tanto para probar que $\mathcal{L}_z\,(f_k\,(z))\,(x)$ es continua en $1/2 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1$ y analítica en $1/2 < \operatorname{Re}(z) < 1$ para casi todo $x \in \mathbb{R}$ (propiedades 1 y 3 de la definición de $\widetilde{\mathcal{F}}$) bastará con probar que $\mathcal{L}_z a_{k,j}\,(x)$ es continua y analítica.

Primero veremos la continuidad.

Utilizando (99), resulta que

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{L}_{z+h} a_{k,j}\,(x) - \mathcal{L}_z a_{k,j}\,(x)| = |\psi\,(z+h) * K_{b'} * b_{k,j}\,(x) - \psi\,(z) * K_{b'} * b_{k,j}\,(x)| \leq\\
&\leq \|\psi\,(z+h) - \psi\,(z)\|_2\,\|K_{b'} * b_{k,j}\|_2 = \|K_{b'} * b_{k,j}\|_2 \left\|(\xi+i)^{b(1-z-h)-2} - (\xi+i)^{b(1-z)-2}\right\|_2,
\end{aligned}$$

que tiende a 0 cuando h tiende a 0, pues se puede aplicar Convergencia Mayorada ya que si $z = u + iy$ y $h = h_1 + ih_2$ con $|h| < 1/2$ entonces

$$\begin{aligned}
&\left|(\xi+i)^{b(1-z-h)-2} - (\xi+i)^{b(1-z)-2}\right| = \left|(\xi+i)^{b(1-z)-2}\right| \left|(\xi+i)^{-bh} - 1\right| \leq\\
&\leq e^{by\arg(\xi+i)}\,|\xi+i|^{b(1-u)-2} \left|\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\,(-b\,h\ln(\xi+i))^m\right) - 1\right| \leq\\
&\leq e^{b\pi|y|}\,|\xi+i|^{b(1-u)-2}\,|h\,b\ln(\xi+i)| \left|(\xi+i)^{-bh}\right| \leq\\
&\leq e^{b\pi|y|}\,|\xi+i|^{b/2-2}\,b\,|\ln(\xi+i)|\,e^{b\pi|h_2|}\,|\xi+i|^{-bh_1} \leq\\
&\leq e^{b\pi|y|}\,|\xi+i|^{-3/2}\,b\,|\ln(\xi+i)|\,e^{b\pi/2}\,|\xi+i|^{1/2} =\\
&= c\,|\xi+i|^{-1}\,b\,|\ln(\xi+i)|,
\end{aligned}$$

donde la constante $c > 0$ no depende de h y $|\xi+i|^{-1}\,|\ln(\xi+i)| \in L^2$.

Ahora veremos la analiticidad de $\mathcal{L}_z a_{k,j}(x)$.

Como $\frac{\partial}{\partial z}(\xi+i)^{b(1-z)-2} = -b\ln(\xi+i)(\xi+i)^{b(1-z)-2} \in L^2$ entonces existe $\psi'(z) \in L^2$ tal que $\widehat{\psi'(z)} = \frac{\partial}{\partial z}(\xi+i)^{b(1-z)-2}$, y, utilizando (99), resulta que

$$\frac{1}{h}\left|\mathcal{L}_{z+h} a_{k,j}(x) - \mathcal{L}_z a_{k,j}(x) - h\psi'(z) * K_{b'} * b_{k,j}(x)\right| =$$

$$= \frac{1}{h}\left|\psi(z+h) * K_{b'} * b_{k,j}(x) - \psi(z) * K_{b'} * b_{k,j}(x) - h\psi'(z) * K_{b'} * b_{k,j}(x)\right| \leq$$

$$\leq \left\|\frac{1}{h}\left(\psi(z+h) - \psi(z) - h\psi'(z)\right)\right\|_2 \|K_{b'} * b_{k,j}\|_2 =$$

$$= \|K_{b'} * b_{k,j}\|_2 \left\|\frac{1}{h}\left((\xi+i)^{b(1-z-h)-2} - (\xi+i)^{b(1-z)-2} - h\frac{\partial}{\partial z}(\xi+i)^{b(1-z)-2}\right)\right\|_2,$$

que tiende a 0 cuando h tiende a 0, pues se puede aplicar Convergencia Mayorada ya que si $z = u + iy$ y $h = h_1 + ih_2$ con $|h| < 1/2$ entonces

$$\frac{1}{|h|}\left|(\xi+i)^{b(1-z-h)-2} - (\xi+i)^{b(1-z)-2} - h\frac{\partial}{\partial z}(\xi+i)^{b(1-z)-2}\right| =$$

$$= \frac{1}{|h|}\left|(\xi+i)^{b(1-z)-2}\right|\left|(\xi+i)^{-bh} - 1 - h(-b)\ln(\xi+i)\right| =$$

$$= \frac{1}{|h|}\left|(\xi+i)^{b(1-z)-2}\right|\left|\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(h(-b)\ln(\xi+i)\right)^m\right) - 1 - h(-b)\ln(\xi+i)\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|h|}\left|(\xi+i)^{b(1-z)-2}\right| |hb\ln(\xi+i)|^2 \left|(\xi+i)^{-bh}\right| \leq$$

$$\leq e^{b\pi|y|}|\xi+i|^{b/2-2}|h||b\ln(\xi+i)|^2 e^{b\pi|h_2|}|\xi+i|^{-bh_1} \leq$$

$$\leq e^{b\pi|y|}|\xi+i|^{-3/2}|b\ln(\xi+i)|^2 e^{b\pi|h_2|}|\xi+i|^{1/2} \leq$$

$$\leq c|\xi+i|^{-1}|\ln(\xi+i)|^2,$$

donde la constante $c > 0$ no depende de h y $|\xi+i|^{-1}|\ln(\xi+i)|^2 \in L^2$.

Por último veamos que $\kappa e^{\beta z^2}\mathcal{L}_z f_\rho$ cumple la propiedad 4 de la definición de $\widetilde{\mathcal{F}}$. En efecto, usando (94), (95) y la segunda parte del Teorema 9.7, se tiene que si $z = \frac{1}{2} + it$

$$\left\|\kappa e^{\beta(1/2+it)^2}\mathcal{L}_{1/2+it}\left(f_\rho(1/2+it)\right)\right\|_2 = \kappa e^{\beta\left(1/4-t^2\right)}\left\|\mathcal{L}_{1/2+it}\left(f_\rho(1/2+it)\right)\right\|_2 \leq$$

$$\leq \kappa e^{\beta\left(1/4-t^2\right)}Ce^{\beta t^2}\|f_\rho(1/2+it)\|_2 \leq \kappa Ce^{\beta/4}e^{\lambda/2}c\|h\|^{p_0/2}_{H^{p_0}_{+}(\nu_\rho^{2-p_0})} < \infty,$$

y si $z = 1 + it$

$$\left\|\kappa e^{\beta(1+it)^2}\mathcal{L}_{1+it}\left(f_\rho(1+it)\right)\right\|_2 = \kappa e^{\beta\left(1-t^2\right)}\left\|\mathcal{L}_{1+it}\left(f_\rho(1+it)\right)\right\|_2 \leq$$

$$\leq \kappa e^{\beta\left(1-t^2\right)}Ce^{\beta t^2}\|f_\rho(1+it)\|_2 \leq \kappa Ce^{\beta/4}e^{\lambda}c\|h\|^{p_0}_{H^{p_0}_{+}(\nu_\rho^{2-p_0})} < \infty.$$

Referencias

[1] S. Chanillo, *Weighted norm inequalities for strongly singular convolution operators,* Trans. Amer. Soc. **282 (1),** (1984), 77-107.

[2] C. Fefferman, *Inequalities for strongly singular convolution operators*, Acta Math. **124** (1970), 9-36.

[3] C. Fefferman, E.M. Stein, *H^p spaces of several variables*, Acta Math. **129** (1972), 137-193.

[4] I. I. Hirschman, *Multiplier transformations,* Duke Math. J. **26** (1959), 222-242.

[5] F. J. Martín-Reyes, P. Ortega Salvador, A. de la Torre, *Weighted inequalities for one-sided maximal functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **319 (2)** (1990), 517-534.

[6] F. J. Martín-Reyes, L. Pick, A. de la Torre, *A_∞^+ condition*, Can. J. Math. **45 (6)** (1993), 1231-1244.

[7] F. J. Martín-Reyes, A. de la Torre, *One-sided BMO spaces*, J. London Math. Soc. **49 (2)** (1994), 529-542.

[8] B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Soc. **165** (1972), 207-226.

[9] L. de Rosa, C. Segovia, *Weighted H^p spaces for one sided maximal functions,* Contemporary Math. **189** (1995), 161-183.

[10] L. de Rosa, C. Segovia, *Equivalence of norms in one-sided H^p spaces*, Collet. Math. **53 (1)** (2002), 1-20.

[11] E. Sawyer, *Weighted inequalities for the one-sided Hardy-Littlewood maximal functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **297 (1)** (1986), 53-61.

[12] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Prees, 1970.

[13] J.-O. Strömberg, A. Torchinsky, *Weighted Hardy Spaces*, Lecture Notes in Math. **1381**, Springer-Verlag, 1989.

[14] E. C. Titchmarsh, *Introduction to the theory of Fourier integrals*, Oxoford Univ. Press, 1937.

[15] S. Wainger, *Special trigonometric series in k-dimensions,* Mem. Amer. Math. Soc. **59** (1965), 1-102.

[16] A. Zygmund, *Trigonometric series*, vol.2, Cambridge Univ. Press, 1997.