UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Solución de ecuaciones diferenciales provenientes de modelos financieros, utilizando métodos topológicos

Por Corina G. Averbuj

Directora de Tesis: Dra. María Cristina Mariani
Director de Tesis: Dr. Pablo Amster

Lugar de Trabajo: Departamento de Matemática- FCEyN (UBA)

Buenos Aires, Diciembre de 2004.

En este trabajo estudiamos ecuaciones diferenciales generalizadas obtenidas a partir del modelo de Black y Scholes, quien inicialmente fue desarrollado para la valuación de instrumentos derivados. En el Capítulo1 se introducen las definiciones y los resultados previos en el área de la matemática financiera necesarios en los capítulos próximos, entre ellos se presenta el clásico modelo de Black y Scholes para la valuación de opciones.

En el Capítulo 2 se presentan las herramientas matemáticas necesarias para el desarrollo de la tesis.

En el modelo de Black y Scholes presentado en el Capítulo 1 el precio del activo subyacente de la opción sigue el proceso de Ito dado por

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

donde la volatilidad σ era un parámetro constante. En el Capítulo 3 proponemos un modelo de volatilidad estocástica, probaremos la existencia de al menos una solución para el problema estacionario utilizando los métodos topológicos descriptos en el Capítulo 2.

Mas aún, construímos la presente solución utilizando un procedimiento iterativo descripto en el capítulo previo.

Asimismo, probamos la existencia de al menos una solución del problema de Dirichlet estacionario aplicando el método de sub y super soluciones.

Numerosos autores han estudiado el efecto de los costos de transacción y la comercialización discreta del precio de la opción ([4], [19]). Se ha notado que el reajuste continuo del portafolio a replicar en presencia de costos de transacción resulta oneroso y por lo tanto no sería una estrategia óptima. Es por ello que autores como [19] introducen en el modelo de Black- Scholes la noción de costo de transacción como un ajuste directamente proporcional a la cantidad de activos comprados o vendidos.

En 1985, Leland mostró que bajo los supuestos descriptos, una opción de compra europea sigue el modelo de Black y Scholes con volatilidad modificada dada por

$$\sigma_A = \sigma\sqrt{1 - A}$$

donde

$$A = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{k}{\sigma\sqrt{\delta t}}$$

con σ la volatilidad del activo subyacente, k es el ajuste expresado como fracción y δt es el intervalo de tiempo entre sucesivos ajustes de la cartera.

En el Capítulo 4 suponemos que los costos de transacción se comportan como una función lineal decreciente $f(\nu) = (a - b\,|\nu|)$, $(a, b > 0)$, dependiente de la cantidad del activo necesario en cada rebalanceo.

Bajo condiciones adecuadas, estudiamos el problema elíptico asociado mostrando la existencia de una única solución convexa.

En forma mas general, consideramos el problema de evolución con condiciones de contorno y demostramos que tiene una única solución clásica.

Finalmente, en el Capítulo 5 se ha generalizado el modelo de Black y Scholes considerando el problema parabólico resultante bajo los supuestos de volatilidad estocástica en un dominio no acotado.

Bajo condiciones adecuadas, se ha demostrado la existencia y unicidad de solución usando el método de sub y super soluciones y un argumento diagonal.

Agradecimientos **B"H**

Al Dr. Pablo Amster por su dedicación e invalorable apoyo.
A la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales por permitirme el uso de sus instalaciones.
A mi querida Familia.

Solución de ecuaciones diferenciales provenientes de modelos financieros, utilizando métodos topológicos.

Resumen

En este trabajo se estudian ecuaciones generalizadas obtenidas a partir del modelo clásico de valuación de opciones de Black y Scholes.

En primer lugar, se considera un problema introducido por los analistas, quienes encontraron necesario modificar el parámetro que reflejaba la volatilidad cuando utilizaban el modelo de Black-Scholes para valuar instrumentos derivados. Como consecuencia, en esta tesis se han estudiado modelos de valuación bajo el supuesto de volatilidad estocástica, cuyo comportamiento sigue un proceso de distribución lognormal.

Hemos construido una solución del problema estacionario con condiciones de Dirichlet a partir del método de Continuación, y hemos mostrado la existencia de una solución utilizando el método de sub y super soluciones.

El siguiente tema de estudio se basa en uno de los supuestos clásicos para la resolución de modelos tipo Black-Scholes al considerarse que la cartera del inversor se revalúa en forma continua. Este dinamismo implica costos de transacción, debido a la compra/venta de los títulos necesarios para el rebalanceo del portafolio.

En el capítulo 4 se incorporan costos de transacción al modelo, los cuales se comportan como una función lineal decreciente, $f(x) = a - bx$, (a, b >0), dependiente de la cantidad del activo subyacente necesario en cada rebalanceo. Se prueba la existencia de una solución del problema estacionario no lineal asociado así como también se estudian la existencia y unicidad de la solución del problema de evolución con condiciones de contorno adecuadas.

Finalmente se ha generalizado el modelo de Black- Scholes considerando el problema parabólico resultante bajo los supuestos de volatilidad estocástica y en un dominio no acotado.
Bajo condiciones adecuadas, se ha demostrado la existencia y unicidad de soluciones usando el método de sub y super soluciones y un argumento diagonal.

Palabras clave: instrumento derivado, ecuación de Black- Scholes, ecuaciones en derivadas parciales, espacios de Sobolev, método de Continuación.

Solutions for differential equations arising on financial models by Topological methods.

Abstract

This work is devoted to the study of differential equations that generalize the classical Black- Scholes model.

Firstly, we consider the problem that has been introduced by practitioners, who observed the necessity of changing the volatility parameter of the model. In this thesis, we study a pricing model in which the volatility parameter is assumed to be stochastic. We obtain a solution of the stationary Dirichlet problem by the Continuation method, and we show the existence of a solution by the method of lower and upper solutions.

On the other hand, we recall that one of the classic assumptions in Black-Scholes model is that the investor's portfolio rehedged in a continuous way. This dynamic implies transaction costs, due to the bid/offer spread of stocks that are needed to maintain the portfolio equilibrium. Thus, in the chapter 4 we introduce transaction costs to the model. We assume that the costs behave as a nonincreasing linear function $f(x) = a - bx$, (a, b >0), that depends on the amount of the asset that is needed to hedge the replicating portfolio. We prove the existence of solutions for the stationary nonlinear problem. Moreover, we prove the existence and uniqueness of solutions for the nonstationary parabolic problem under value boundary conditions.

Finally, we study a parabolic problem that arises on Black- Scholes model with stochastic volatility in an unbounded domain. Under suitable conditions, we prove existence and uniqueness of solution using the method of lower and upper solutions and a diagonal argument.

Key words: financial derivatives, Black- Scholes equation, partial differential equations, Sobolev spaces, Continuation method.

Índice General

Capítulo 1

Definiciones y resultados previos

1.1 Interpretacion de los riesgos financieros

Las empresas productoras de bienes y servicios operan en diversos mercados de donde no solo utilizan insumos sino también colocan su propia producción. Debido a las interacciones entre ellas que involucran movimientos de fondos, éstas operan en cuatro mercados básicos de servicios financieros:

Financiero: por depósitos y préstamos de corto y mediano plazo.

Cambiario: por compra-venta de distintas monedas al contado.

Empréstitos: por colocaciones u obtención de fondos a mediano plazo mediante títulos públicos y obligaciones negociables en compraventa al contado de acciones ordinarias.

Capitales: por compraventa al contado de acciones ordinarias.

Al operar en los mercados de sus proveedores y de sus clientes, la empresa se encuentra con disimilitudes en cuanto al plazo de pago, niveles de descuento ofrecido por pagos anticipados y en cuanto a moneda de contratación.

Así la situación patrimonial y los resultados no sólo están sujetos a variables propias de la actividad empresaria sino también a las variables características de cada uno de los cuatro mercados de servicios financieros, surgiendo de esta manera los "**Riesgos Financieros**".

Para cada riesgo inherente a cada mercado (tipo de cambio, tasa de interés) la empresa debe realizar un análisis de exposición para ver la sensibilidad de los flujos de fondos. La decisión a tomar para cada riesgo detectado involucra tres posibles acciones:

a) **Posición abierta**: se deja a los resultados de la empresa librados a los riesgos financieros.

b) **Compensación de riesgos**: mediante la realización de operaciones complementarias con comportamiento opuesto al proyectado.

c) **Cobertura de riesgo**: mediante la realización de operaciones complementarias que generen resultados opuestos a los proyectados en la medida en que éstos últimos resulten desfavorables a la empresa.

Las operaciones complementarias mencionadas en los incisos b) y c) son instrumentadas en el Mercado de Instrumentos Derivados mediante contratos a término, de futuros, de opción y sus respectivas combinaciones.

Estos contratos son denominados Instrumentos Financieros Derivados, dado que sus bases técnicas de valuación o los resultados consecuentes de la toma de posición en ellos son función del comportamiento de un bien o variable subyacente.

En el presente trabajo, nos limitaremos a estudiar el comportamiento de opciones, donde el bien subyacente será una acción.

1.1.1 Beneficios del tratamiento de los riesgos financieros.

En función de lo expuesto podemos señalar que las unidades económicas productoras de bienes y servicios cuentan con un mercado de instrumentos financieros sofisticados que les permite adecuar su exposición a los diversos riesgos financieros de acuerdo al grado deseado de la relación riesgo-beneficio.

De esta manera, se logra acotar la incertidumbre respecto del comportamiento de los riesgos financieros, permitiendo la fijación de precios de bienes y servicios para los distintos plazos de negociación, sobre bases objetivas con reducción de recargos por aversión al riesgo mejorando así las condiciones de competencia en el mercado local y en el internacional.

Esta concepción en la gestión empresaria está incluida en la denominada "Innovación Financiera", la cual se caracteriza por el uso generalizado de empréstitos de corto, mediano y largo plazo conjuntamente con contratos a término, futuros financieros y opciones, negociados en mercados bursátiles líquidos y transparentes juntamente con mercados de productos financieros bancarios altamente especializados. Todo ello vinculando no sólo demandantes de instrumentos para atender riesgos ("Hedger") sino también arbitrajistas, intermediarios, inversores y especuladores[1].

[1]"Hedger"está interesado en reducir el riego que implica una posición tomada.

Especulador: Apuestan a futuros movimientos en el precio de un activo, desean obtener

Dado lo expuesto anteriormente, pondremos énfasis en los contratos de **Opciones.** Pasaremos a dar una definición de éste tipo de contratos.

1.1.2 Caracteristicas de los mercados de Opciones

Introduccion

En nuestro pais las operaciones de opción sobre acciones y otros instrumentos financieros están en pleno proceso de crecimiento, observándose operaciones en el Mercado de Valores de Buenos Aires y en el Sistema Financiero. Otras operaciones de opción realizadas en el pais están vinculadas con operaciones de mercancías, comercio exterior, inversión y financiamiento externo.

Este trabajo focaliza su atención en las opciones sobre acciones, ya hemos notado que el instrumento financiero derivado aplicable a la cobertura de riesgos es el de "Opción", en realidad ha de tenerse en cuenta también como "Canal de Inversión", permitiendo el desarrollo de estrategias de inversión que en términos prácticos pueden mejorar la relación riesgo-beneficio.

El contrato de Opcion

La caracteristica clásica de un contrato de opción, estrechamente vinculada a opciones sobre acciones, es la de un contrato de compraventa de un derecho entre dos personas, titular y lanzador, tal que el **Titular** (tomador) de una operación adquiere, mediante el pago de la **prima** al **Lanzador** (vendedor), el **derecho** a comprar (opción de compra[2]) o a vender (opción de venta[3]), según el caso, un determinado **bien subyacente**, de acuerdo con las pautas contractuales establecidas al origen sobre: **plazo, modalidad de ejercicio y precio de ejercicio.**

Son opciones con ejercicio de **modalidad europea** las que solo se pueden ejercer con valor a la fecha de vencimiento del contrato, mientras que las de **modalidad americana** pueden ser ejercidas y liquidadas en cualquier momento dentro del plazo contractual.

En los Mercados de Valores las opciones son clasificadas conforme:

I- TIPO: Existen dos tipos de opciones:

---

ganancias extras.

Arbitrajista: Busca obtener una ganancia libre de riesgo, tomando ventaja de la discrepancia de precios entre dos mercados.

[2]Llamada "call"

[3]Llamada "put"

de Compra
de Venta.

II- CLASE: Son opciones de un mismo tipo y sobre un mismo bien subyacente ("underlying asset").

III- SERIE: Son opciones de una misma clase con iguales fecha de vencimiento ("maturity date") y precio de ejercicio ("strike price" o "exercise price").

Rol de los Mercados de Valores.

Los Mercados de Valores organizan las transacciones de contratos de opción sobre bases normalizadas y normas técnicas que aseguren la liquidez, transpariencia y seguridad (riesgo de crédito) de las operaciones.

El Mercado reglamenta las características de los contratos fijando en particular:

a. especies susceptibles de ser incluidas en contratos de opción,

b. cantidad de acciones de cada especie a ser considerada en cada contrato, la que usualmente se denomina "lote",

c.definición de las series: en función de las especies, fechas de vencimiento y precios de ejercicio,

d. plazos de pago de la prima, y de las transacciones vinculadas con el ejercicio,

e. modalidad de la cotización, aspectos referidos a unidades monetarias de precio,

f. aspectos atinentes al control del mercado y sistemas de garantías: límites de posición por comitente, cupos por agente del mercado, rango de fluctuación diaria de precios, márgenes de garantías y su reposición.

g. aranceles a la apertura y cierre de posiciones.

1.2 Principios de Valuacion

1.2.1 Introduccion

En esta sección se mostrarán aspectos conceptuales, basados en conceptos financieros denominados "arbitraje", "equilibrio"o "paridad ".

Nos interesará señalar:

a. cuáles son los elementos de mercado que determinan la prima de una opción,

b. cuál es la condición de equilibrio entre opciones de distinto tipo

c. cuáles son las relaciones entre las primas de opciones con distinto plazo y/o precio de ejercicio.

1.2.2 Elementos determinantes del valor de las Opciones.

Durante el transcurso de un contrato de opción, su valor es función de las condiciones de emisión y de la evolución de las condiciones de mercado. Así en toda operación de opción ha de tenerse en cuenta los elementos siguientes:

a. contractuales:
- definición del bien subyacente, (en nuestro caso particular una acción)
- fecha de valuación
- fecha de vencimiento
- precio de ejercicio
- modalidad (europea o americana)

b. de mercado:
- precio (de contado) vigente del bien subyacente
- tasa de interés libre de riesgo hasta el vencimiento
- comportamiento esperado del bien subyacente
- gastos de transacción y aspectos impositivos

En consecuencia, consideramos los siguientes elementos básicos:
1.- Precio de contado del bien subyacente: S
2.- Plazo remanente de la opción: t
3.- Tasa de interés anual: i
4.- Precio de ejercicio de la opción: K
5.- Volatilidad del rendimiento instantáneo
diario del bien subyacente: σ

Esta última medida es la que generalmente se toma como caracteristica del patrón de comportamiento del bien subyacente dentro de los diversos modelos de valuación.

En este trabajo partiremos del supuesto de mercados perfectos: por lo tanto serán mercados libres de costo de transacción (esta hipótesis será relajada en el Capítulo 4.), sin diferencia entre las tasas de interés activas y pasivas ("Spread") y libre de efectos impositivos.

1.2.3 Valor final de las opciones

Al comienzo de un contrato de opción nos encontramos ante una situación de incertidumbre sobre el valor final del contrato. Al vencimiento (o al ejercicio-en opciones americanas-) la situación adquiere certeza.

a- Opciones de compra:

Al vencimiento del plazo, el valor de la opción (como función del precio de ejercicio K y del precio de mercado S^* del bien subyacente) adquiere un valor cierto:

Si $S^* > K$, entonces el titular ejercerá su derecho y el valor final (VFc) será igual a $S^* - K$.

Si $S^* \leq K$, el VFc $= 0$, por lo tanto el valor final ("payoff") de un opción de compra será del $\max(0, S^* - K)$.

b- Opciones de venta:

De manera análoga, podemos pensar que el valor final de una opción de venta (VFv) será del $\max(0, K - S^*)$.

1.2.4 Paridad entre Operaciones de Opcion:

En esta sección aplicaremos el concepto de "Arbitraje Estático" para establecer la relación de equilibrio entre opciones y operaciones de contado.

Quien lanza una opción de compra europea, sobre un determinado bien subyacente, considerando un precio de ejercicio "K" y un plazo "t", recibiendo una prima igual a "Pc", se enfrenta ante un conjunto de posibles valores finales en función del precio del bien subyacente al vencimiento del contrato, "S^*". El valor inicial es entonces "Pc"y el final "$\max(0, S^* - K)$".

Si por otra parte el lanzador conforma una canasta de activos y pasivos de manera tal que:

a) compra una unidad del bien, al precio de contado "S",

b) toma fondos prestados, por un capital igual al valor actual del precio de ejercicio, según la tasa de interés correspondiente al plazo "t" , "$i(0,t)$",

c) adquiere una opción de venta concordante con la opción de compra lanzada, abonando la prima "Pv";

El valor inicial de la canasta será

$S - \frac{K}{1+i(0,t)} + Pv$

y el valor final de dicha canasta será

$S^* - K + \max(0, K - S^*)$

Así, comparando los valores finales de las dos operaciones, para cada situación posible, tenemos:

situación al vencimiento	lanzamiento de opción de compra	canasta
$S^* < K$	0	$S^* - K + S^* - K = 0$
$S^* \geq K$	$S^* - K$	$S^* - K + 0 = S^* - K$

Se puede apreciar que el comportamiento de la opción de compra lanzada es igual a la canasta considerada, con valores finales iguales, por lo tanto la prima de la opción de compra será igual al capital neto invertido en la canasta, asi tenemos:

$$Pc = S - \frac{K}{1+i(0,t)} + Pv$$

En consecuencia, obtenemos una relación de "Paridad entre Opciones y Operaciones de Contado".

Esta relación es muy importante puesto que nos da una noción de equilibrio económico (vinculado al mercado de contado del bien subyacente, al financiero y al de opciones) y por otra parte permite la simulación de operaciones en un mercado a través de operaciones en otros, dando origen a las llamadas operaciones sintéticas, de esta manera:

* efectuar una operación financiera por un capital en el momento inicial de $C(0) = \frac{K}{1+i(0,t)}$, con un valor final de $C(t) = K$,es equivalente a comprar un bien al contado, lanzar una opción de compra y tomar una opción de venta, siempre considerando el mismo bien, modalidad europea, igual plazo y precio de ejercicio.

1.3 Modelos de Valuacion

1.3.1 Modelo Binomial

En esta sección comenzaremos suponiendo que el precio del activo sigue un proceso binomial sobre tiempo discreto.

La tasa de retorno en cada periodo tendrá dos posibles valores: $u - 1$,con probabilidad p, o $d - 1$, con probabilidad $1 - p$. Si el precio actual de la acción es S, al final del periodo será uS o dS. Por consiguiente tenemos:

$$S = \begin{cases} uS & \text{con probabilidad } p \\ dS & \text{con probabilidad } 1 - p \end{cases}$$

Se asume:

* Tasa de interés constante.

* No existen impuestos ni costos de transacción.

* Los mercados son competitivos: un individuo puede comprar o vender tantos activos como quiera sin afectar su precio.

Sea r el factor de capitalización financiero (1+ tasa de interés), requeriremos que $u > r > d$, pues si estas desigualdades no se satisficieran habría oportunidades de arbitraje.

Para ver cómo valuar la opción "Call " sobre esta acción, comenzaremos considerando un solo periodo.

Sea C el valor actual de la opción, C_u será el valor de la opción si el precio del activo al final del período es uS, y C_d si es de dS.

Por lo visto en la sección anterior tenemos que el valor final será $C_u = \max(0, uS - K)$ y $C_d = \max(0, dS - K)$

$$C = \begin{cases} C_u = \max(0, uS - K) \text{ con probabilidad } p \\ C_d = \max(0, dS - K) \text{ con probabilidad } 1 - p \end{cases}$$

Formemos un portafolio conteniendo Δ acciones y un monto B de bonos libres de riesgo; su valor actual será de $S\Delta + B$, pero al final del periodo el valor de la cartera será:

$$S\Delta + B = \begin{cases} uS\Delta + rB \text{ con probabilidad } p \\ dS\Delta + rB \text{ con probabilidad } 1 - p \end{cases}$$

Podemos elegir Δ y B de tal manera que al final del periodo el portafolio formado tome el mismo valor que la opción:

$$\begin{aligned} uS\Delta + rB &= C_u \\ dS\Delta + rB &= Cd \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema lineal de ecuaciones obtenemos que

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{(u - d)S}$$

$$B = \frac{uC_d - dC_u}{(u - d)r}$$

Si no hay oportunidades de arbitraje, el valor actual del "Call", C, no puede ser menor que el valor actual del portafolio, $S\Delta + B$. Si asi fuera, podriamos obtener una ganancia libre de riesgo comprando el "Call" y vendiendo el portafolio.

Se concluye que si no hay oportunidades de arbitraje, debe ocurrir que:

$$\begin{aligned} C &= S\Delta + B \\ &= \frac{C_u - C_d}{(u-d)} + \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)r} \\ &= \frac{\left[\left(\frac{r-d}{u-d}\right) C_u + \left(\frac{u-r}{u-d}\right) C_d\right]}{r} \end{aligned} \tag{1.1}$$

si este valor es mas grande que $S - K$, sino será, $C = S - K$.

Tomando $p_* = \frac{r-d}{u-d}$ tenemos

$$C = \frac{p_* C_u + (1 - p_*)\, C_d}{r} \tag{1.2}$$

La ecuación (1.2) tiene una serie de características notables. Primero, notamos que la probabilidad p no aparece, lo cual significa que aunque los diferentes inversores posean diversas probabilidades subjetivas acerca de los movimientos del precio del activo subyacente, ellos están de acuerdo con la relación del precio de la opción en función de S y r .

Segundo, el valor de la opción no depende de la actitud de los inversores hacia el riesgo, la única suposición que se ha hecho hacia la conducta de los individuos es que prefieren mas riqueza a menos por lo que tienen mas incentivo a tomar ventajas de ganancias obtenidas a partir oportunidades de arbitraje.

Tercero, la única variable aleatoria de la cual depende la opción es el precio de la acción. En particular, no depende de la aleatoridad de los precios de otros activos o carteras. Sin embargo, la actitud de los inversores hacia el riesgo o las características de otros activos pueden influir en forma indirecta en el valor de la opción.

Finalmente, podemos observar que $0 < \frac{r-d}{u-d} < 1$, por lo que p_* resulta una probabilidad; si los inversores fueran neutrales al riesgo[4], en condiciones de

[4]Definimos un inversor neutral al riesgo como aquel que es indiferente entre una inversión con rendimiento cierto y otra con tasa de retorno incierto, mientras que la inversión posea el mismo retorno esperado.

equilibrio, p_* debería ser igual a p. Para ver esto, notar que la tasa esperada de retorno del activo será igual a la tasa libre de riesgo,

$$p(uS) + (1-p)(dS) = rS$$

Despejando, obtenemos que $p = \frac{r-d}{u-d} = p_*$.

Entonces, el valor de la opción de compra puede ser interpretada como la esperanza de su valor futuro descontado en un mundo neutral al riesgo.

Pasemos a generalizar nuestro modelo binomial a varios períodos, aplicando las fórmulas vistas anteriormente en forma recurrente.

Consideremos N periodos, el precio del activo en el momento t será S_t, $t = 0, ...N-1$. Este precio varia de acuerdo a:

$$S_{t+1} = S_t \; h_{t+1}, \qquad t = 0, ...N-1 \tag{1.3}$$

donde h_{t+1} es la variable aleatoria dada por:

$$h_{t+1} = \begin{cases} u & \text{con probabilidad} \quad p \\ d & \text{con probabilidad } 1-p \end{cases}$$

El proceso del precio de la acción S, puede ser modelado de acuerdo a

$$S_t = S_0 \prod_{n=1}^{t} h_n \qquad \forall \; t \leq N$$

Equivalentemente,

$$S_t = S_0 \exp(\sum_{n=1}^{t} H_n) \qquad \forall t \leq N$$

donde $H_{t+1} = \begin{cases} \ln u & \text{con probabilidad} \quad p \\ \ln d & \text{con probabilidad } 1-p \end{cases}$

Para cada $t \leq N$, consideramos α_t el número de acciones en cartera durante el período $[t, t+1)$ y β_t el dinero invertido en un bono libre de riesgo durante el mismo período. Para determinar el precio de una opción de compra, debemos mostrar, que mediante ajustes del portafolio $\Phi_t = (\alpha_t, \beta_t)$, $t = 0, ...N-1$ al comienzo de cada período, un inversor puede replicar el valor terminal de la opción.

Dado un tiempo fijo de expiración N, empecemos nuestro análisis, considerando el último período antes de la expiración, $[N-1, N]$. Asumimos que el portafolio que replica el valor terminal de la opción de compra es establecido en el momento $N-1$, y que permanece fijo hasta el momento N. Necesitamos encontrar la composición de una cartera $\Phi_{N-1=}(\alpha_{N-1}, \beta_{N-1})$ de manera que al comienzo del último período su valor terminal coincida con el valor terminal de la opción, es decir

$$\alpha_{N-1} S_N + \beta_{N-1} r = \max(0, S_N - K) \tag{1.4}$$

En virtud de la igualdad (1.3), reescribiendo (1.4) tenemos el siguiente sistema lineal

$$\begin{cases} \alpha_{N-1} u S_{N-1} + \beta_{N-1} r = \max(0, u S_{N-1} - K) \\ \alpha_{N-1} d S_{N-1} + \beta_{N-1} r = \max(0, d S_{N-1} - K) \end{cases}$$

donde las soluciones que resuelven el sistema lineal son

$$\alpha_{N-1} = \frac{\max(0, u S_{N-1} - K) - \max(0, d S_{N-1} - K)}{S_{N-1}(u-d)}$$

$$\beta_{N-1} = \frac{u \max(0, d S_{N-1} - K) - d \max(0, u S_{N-1} - K)}{r(u-d)}$$

Mas aún, la riqueza del portafolio en el momento $N-1$ será igual a

$$\alpha_{N-1} S_{N-1} + \beta_{N-1} = r^{-1}(p_* \max(0, u S_{N-1} - K) + (1-p_*) \max(0, d S_{N-1} - K))$$

donde $p_* = \frac{(r-d)}{(u-d)}$.

Asumiendo la ausencia de arbitraje, el valor de la cartera en el momento $N-1$, debe ser igual a la opción de compra en $N-1$. Continuando el procedimiento descripto para el período $[N-2, N-1]$, buscamos un portafolio $\Phi_{N-2} = (\alpha_{N-2}, \beta_{N-2})$ construido en el momento $N-2$, donde su valor en el momento $N-1$ replique el valor de la opción de compra en ese mismo momento, esto es

$$\alpha_{N-2} S_{N-1} + \beta_{N-2} r = C_{N-1} \tag{1.5}$$

Puesto que el valor de la opción de compra en el momento $N-1$, C_{N-1}, coincide con el valor del portafolio Φ_{N-1}, tenemos que

$$\alpha_{N-2}S_{N-1} + \beta_{N-2}r = \alpha_{N-1}S_{N-1} + \beta_{N-1}$$

Recordando que $S_{N-1} = S_{N-2}h_{N-2}$ y que $h_{N-2} \in \{u, d\}$, obtenemos la igualdad equivalente a (1.5)

$$\begin{cases} \alpha_{N-2}uS_{N-2} + \beta_{N-2}r = C^u_{N-1} \\ \alpha_{N-2}dS_{N-2} + \beta_{N-2}r = C^d_{N-1} \end{cases} \tag{1.6}$$

donde

$$\begin{aligned} C^u_{N-1} &= \frac{1}{r}(p_* \max(0, u^2 S_{N-2} - K) + (1-p_*) \max(0, udS_{N-2} - K)) \\ C^d_{N-1} &= \frac{1}{r}(p_* \max(0, udS_{N-2} - K) + (1-p_*) \max(0, d^2 S_{N-2} - K)) \end{aligned}$$

En vista de (1.6), tenemos que

$$\alpha_{N-2} = \frac{C^u_{N-1} - C^d_{N-1}}{S_{N-2}(u-d)}, \qquad \beta_{N-2} = \frac{uC^d_{N-1} - dC^u_{N-1}}{r(u-d)}$$

Consecuentemente, el valor del portafolio $\Phi_{N-2} = (\alpha_{N-2}, \beta_{N-2})$ en el momento $N-2$ será igual a C_{N-2}, por lo tanto

$$\begin{aligned} \alpha_{N-2}S_{N-2} + \beta_{N-2} &= \frac{1}{r}\left[p_* C^u_{N-1} + (1-p_*)C^d_{N-1}\right] \\ &= \frac{1}{r^2}\left[\begin{array}{c} p_*^2 \max(0, u^2 S_{N-2} - K) + 2p_* q_* \max(0, udS_{N-2} - K) + \\ + \, q_*^2 \max(0, d^2 S_{N-2} - K) \end{array} \right] \end{aligned}$$

Es evidente que repitiendo el procedimiento descripto, podemos determinar completamente el precio de la opción en cualquier momento $t \leq N$, asi como también la única estrategia que replica su valor.

Para cada $m \in \mathbb{N}_0$ se define la función $a_m : \mathbb{R} \to \mathbb{N}_0$

$$a_m(x) = Inf \ \left\{ j \in \mathbb{N}_0, xu^j d^{m-j} > K \right\}$$

Se denota

$$\Delta_m(x, \ j) = \begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} p_*^j (1-p_*)^{m-j} (u^j d^{m-j+1} x - K)$$

Proposición 1.3.1 *El precio de arbitraje de una opción de compra Europea, en el momento $t = N - m$ es*

$$C_{N-m} = S_{N-m} \sum_{j=a}^{m} \left(\begin{array}{c} m \\ j \end{array} \right) \overline{p}^{j} (1 - \overline{p})^{m-j} - \frac{K}{r^m} \sum_{j=a}^{m} \left(\begin{array}{c} m \\ j \end{array} \right) p_*^j (1 - p_*)^{m-j} \quad (1.7)$$

para $m = 1, ..., N,$ *donde* $a = a_m(S_{N-m})$, $p_* = \frac{(r- \; d)}{(u- \; d)}$ *y* $\overline{p} = \frac{p_* \quad u}{r}$.

Para $t = N - m - 1$*, la única estrategia* Φ *que replica el valor de la opción es*

$$\alpha_{N-m-1} = \sum_{j=a^d}^{m} \left(\begin{array}{c} m \\ j \end{array} \right) \overline{p}^{j} (1 - \overline{p})^{m-j} + \frac{\delta \;\; \Delta_m(\;u \;\; S_{N-m-1}, \; a^u)}{S_{N-m-1}(u- \;\; d)},$$

$$\beta_{N-m-1} = -\frac{K}{r^{m+1}} \sum_{j=a^d}^{m} \left(\begin{array}{c} m \\ j \end{array} \right) p_*^j (1 - p_*)^{m-j} - \frac{d\delta\Delta_m(\; uS_{N-m-1}, \; a^u)}{r(u-d)}$$

donde $a^d = a_m(dS_{N-m-1})$, $a^u = a_m(uS_{N-m-1})$ *y* $\delta = \begin{cases} 0 & si \; a^u = a^d \\ 1 & si \; a^u \neq a^d \end{cases}$

Dem: Se procede por inducción sobre m.

Los parámetros N y r dependen de la elección de los momentos de ajuste del portafolio construido y de la tasa de interés. Sea T la duración del contrato de la opción medido en años y sea R la tasa de interés continuamente compuesta anualizada. Asumiendo que el intervalo entre cada período es idéntico, tenemos que la duración será

$$dt = \frac{T}{N}$$

y la tasa de interés por período será

$$r - 1 = e^{Rdt} - 1 \simeq Rdt$$

Por definición, la tasa de crecimiento anualizada de la acción es,

$$Y = \frac{1}{T} \ln \left(\frac{S_N}{S_0} \right)$$

Como

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{S_N}{S_0}\right) &= \sum_{j=1}^{N} \ln\left(\frac{S_j}{S_{j-1}}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{N} H_j
\end{aligned}$$

tenemos que la **tasa de crecimiento esperada** será

$$\begin{aligned}
\mu &= E\{Y\} \\
&= \sum_{j=1}^{N} E\left\{\frac{1}{T}\ln\left(\frac{S_j}{S_{j-1}}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{N} p\ln u + (1-p)\ln d \\
&= \frac{1}{dt}\left[p\ln u + (1-p)\ln d\right]
\end{aligned}$$

La **varianza de la tasa de crecimiento** será

$$\begin{aligned}
Var\{Y\} &= Var\left\{\frac{1}{T}\sum_{j=1}^{N} H_j\right\} \\
&= \frac{1}{T^2} N * Var\{H_1\} \qquad \text{por ser } \{H_j\}_j \text{ independientes} \\
&= \frac{1}{Tdt}\left\{\left[p(\ln u)^2 + (1-p)(\ln d)^2\right] - \left[p\ln u + (1-p)\ln d\right]^2\right\} \\
&= \frac{1}{Tdt}\left[\ln(\frac{u}{d})\right]^2 p(1-p)
\end{aligned}$$

Definición 1.3.2 *Se denomina volatilidad (del activo subyacente) al desvío estandar de la tasa de crecimiento anualizada.*

1.3.2 Precio de la opcion de compra segun Black-Scholes

En esta sección deduciremos, através de estudiar las propiedades asintóticas de (1.7) la clásica fórmula de valuación de opciones obtenida por Black y

Scholes[5].

Para ello tomemos $T > 0$ un número real arbitrario fijo. Sea n un número natural de la forma $n = 2^k$, dividimos el intervalo $[0, T]$ en n subintervalos I_j de longitud $\Delta_n = \frac{T}{n}$, por lo tanto $I_j = [j\Delta_n, (j+1)\Delta_n]$, $j = 0, ..., n-1$.

Denotamos por r_n la tasa libre de riesgo vigente durante el período I_j, entonces tenemos que el activo libre de riesgo será

$$B_{j\Delta_n} = (1 + r_n)^j \qquad \forall\ j = 0, ...n-1$$

Para cada n, asumimos que en el período I_j, el precio de la acción subyacente sigue el siguiente proceso

$$S_{(j+1)\Delta_n} = \zeta_{n,j+1} S_{j\Delta_n}$$

donde

$$\zeta_{n,j} = \begin{cases} u_n & \text{con probabilidad } p \\ d_n & \text{con probabilidad } 1-p \end{cases}$$

Con el objetivo de garantizar la convergencia del modelo binomial, especificaremos la conducta de r_n, u_n, d_n como

$$1 + r_n = e^{r\Delta_n}, \qquad u_n = e^{\sigma\sqrt{\Delta_n}}, \qquad d_n = u_n^{-1}$$

donde $r > 0$ y $\sigma > 0$ son valores reales dados.

Sea $t = j\Delta_n$ para algún j y n arbitrario, tomemos la siguiente sucesión

$$m_n(t) = n\frac{(T-t)}{T}$$

donde para n suficientemente grande toma valores naturales; mas aún tenemos que $T - t = m_n(t)\Delta_n$,

por lo tanto $m_n(t)$ representa el número de períodos de comercialización de la opción en el intervalo $[t, T]$.

Asimismo notemos que

$$\lim_{n\to\infty} (1 + r_n)^{-m_n(t)} = \lim_{n\to\infty} e^{-r\Delta_n m_n(t)} = e^{-r(T-t)}$$

[5]Black, Fisher y Myron Scholes.1973."The pricing of Options and Corporate Liabilities."Journal of Political Economy 81, 637-659.

Mas aún, para cada $n > r^2\sigma^{-2}T$ tenemos

$$d_n = u_n^{-1} < \widehat{r}_n^{-1} \leq \widehat{r}_n < u_n$$

donde $\widehat{r}_n = 1 + r_n$. Además se puede verificar que

$$\lim_{n\to\infty} p_{*,n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{r\Delta_n} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta_n}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta_n}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta_n}}} = 1/2$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \overline{p}_n = \lim_{n\to\infty} \widehat{r}_n^{-1} p_{*,n} u_n = 1/2$$

Sea $S_t = S_{T-m_n(t)\Delta_n}$ el valor del activo subyacente en el momento t, se define

$$b_n(t) = Inf\left\{j \in \mathbb{N}_0, S_t u^j d^{m_n(t)-j} > K\right\}$$

La siguiente proposición nos muestra la derivación de la clásica fórmula de Black y Scholes para el cálculo del precio de una opción de compra europea mediante un procedimiento asintótico.

Se desea aclarar que el límite del precio de la opción mediante el modelo binomial descripto en la sección anterior, depende esencialmente de la elección de las sucesiones u_n y d_n.

Para esta elección específica, la dinámica asintótica del precio de la acción sigue un *movimiento geométrico browniano*. Esto significa en particular, que la evolución asintótica del precio de la acción puede ser descripta mediante un proceso estocástico, cuya distribución, para cada tiempo continuo t, es lognormal.

Un análisis del modelo de Black-Scholes en tiempo continuo será presentado en la próxima sección.

Proposición 1.3.3 *La siguiente convergencia es válida, para todo $t \in [0, T]$*

$$lim_{n\to\infty} \sum_{j=b_n(t)}^{m_n(t)} \left(\begin{array}{c} m_n(t) \\ j \end{array} \right) \left\{ S_t \overline{p}_n^j \overline{q}_n^{m_n(t)-j} - K \widehat{r}_n^{-m_n(t)} p_{*,n}^j q_{*,n}^{m_n(t)-j} \right\} = C_t$$

donde $\overline{q}_n = 1 - \overline{p}_n$, y C_t está dado por la fórmula de Black-Scholes

$$C_t = S_t N(d_1(S_t, T-t)) - K e^{-r(T-t)} N(d_2(S_t, T-t))$$

donde

$$d_1(s,t) = \frac{\ln(s/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2(s,t) = d_1(s,t) - \sigma\sqrt{t} = \frac{\ln(s/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

y N es la función de la distribución normal estándar acumulada

1.3.3 Procesos en tiempo continuo

Comenzaremos esta sección dando las definiciones y resultados previos necesarios para la deducción de la ecuación de Black-Scholes.

Definición 1.3.4 *Un proceso de Wiener-también llamado movimiento Browniano-es un proceso estocástico en tiempo continuo que posee tres propiedades que lo caracteriza.*[6]

a. *Es un proceso de Markov, lo cual significa que la distribución de probabilidad de todos los valores futuros del proceso, dependen solamente del valor actual, no viéndose afectada por los valores que ha tomado el proceso en el pasado. Como consecuencia, lo único necesario para el análisis y el pronóstico de su valor futuro es el valor actual del proceso.*

b. *Posee incrementos independientes, por lo tanto la distribución de probabilidad de la variación del proceso en un intervalo, es independiente de la variación en otro intervalo.*

c. *La variación del proceso en cualquier intervalo de tiempo finito tiene una distribución* **normal** *, donde la varianza crece linealmete respecto del tiempo.*

Sea $Z(t)$ el proceso descripto, ΔZ la variación en Z, correspondiente a un intervalo de tiempo Δt , reescribiendo las propiedades de $Z(t)$ mas formalmente tenemos:

1.

$$\Delta Z = e_t\sqrt{\Delta t} \tag{1.8}$$

[6]En 1827, R. Brown fue el primero en describir el movimiento de pequeñas partículas suspendidas en líquido, como resultado de sucesivos impactos aleatorios.En 1905 A.Einstein propuso una teoría matemática para los movimientos brownianos, la cual fue desarrollada en forma más rigurosa por N.Wiener en 1923.

donde $e_t \sim \mathcal{N}(0,1)$

2. $\mathcal{E}(e_t, e_s) = 0 \qquad \forall\ t \neq s$

Dividamos un intervalo de longitud T, en n subintervalos de longitud Δt. Entonces la variación de Z sobre éste intervalo está dada por

$$Z(s+T) - Z(s) = \sum_{i=1}^{n} e_i \sqrt{\Delta t}$$

Como los $\{e_i\}_i$ son independientes, por el Teorema Central del Límite deducimos que

$Z(s+T) - Z(s)$ está normalmente distribuido, con media cero y varianza $n\Delta t = T$, lo que prueba que la varianza de la variación de un proceso de Wiener crece linealmente con el horizonte temporal.

Cuando $\Delta t \to 0$, podemos representar el proceso de Wiener, dz, en tiempo continuo como

$$dz = e_t \sqrt{dt} \tag{1.9}$$

Puesto que $e_t \sim \mathcal{N}(0,1)$, tenemos que $\mathcal{E}(dz) = 0$, y la $V(dz) = \mathcal{E}\left[(dz)^2\right] = dt$

Es posible generalizar el proceso de Wiener (1.9) considerando, por ejemplo, el movimiento browniano siguiente:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \tag{1.10}$$

donde dz es el incremento de un proceso de Wiener descripto arriba, $a(x,t)$ y $b(x,t)$ son funciones dadas no aleatorias. El proceso estocástico $x(t)$ representado por la ecuación (1.10) es denominado proceso de Ito.

Consideremos la media y la varianza de los incrementos de este proceso. Puesto que $\mathcal{E}(dz) = 0$, $\mathcal{E}(dx) = a(x,t)dt$. La varianza de dx es igual a $\mathcal{E}(dx^2) - \mathcal{E}(dx)^2$, la cual contiene términos en dt, $(dt)^2$ y en $(dt)(dz)$, quienes son del orden de $(dt)^{3/2}$. Para dt suficientemente pequeño, los términos en $(dt)^2$ y en $(dt)^{3/2}$ pueden ser ignorados y la varianza es

$$V\left[dx\right] = b^2(x,t)dt$$

Un caso especial de la ecuación (1.10) es el *movimiento geométrico browniano*, donde $a(x,t) = \alpha x$ y $b(x,t) = \sigma x$ para α, σ constantes.

El precio del activo como proceso estocastico

El retorno esperado de un inversor es independiente al precio del activo, por lo tanto podríamos considerar al retorno esperado del activo, y expresarlo como una proporción constante del precio; esto implica que si S es el precio del activo, el flujo de retorno esperado será μS.

Entonces, en un intervalo de tiempo $\triangle t$, el crecimiento esperado será de $\mu S \triangle t$. El parámetro μ es la tasa esperada de retorno del activo, expresada en forma decimal.

También notamos que el precio del activo presenta volatilidad, un supuesto razonable será que la varianza del porcentaje de retorno, en un periodo corto de tiempo $\triangle t$, sea la misma independientemente del precio del activo.

Definimos σ^2 como la varianza del cambio proporcional en el precio del activo; por lo tanto $\sigma^2 \triangle t$ será la varianza del cambio proporcional en el precio del activo, en un periodo de tiempo $\triangle t$.

Estos argumentos sugieren que S puede ser representado por un proceso de Ito, donde la tasa instantánea de flujo esperada será μS y la tasa de varianza instantánea de S será $\sigma^2 S^2$.

Por lo tanto, escribimos al proceso descripto como

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \tag{1.11}$$

1.3.4 Lema de Ito

El precio de una opción cuyo activo subyacente es una acción, es función del precio de este activo y del tiempo.

Un importante resultado, sobre el proceso estocástico que rige a un instrumento derivado, en general, es conocido con el nombre del Lema de Ito, consultar por ejemplo [15].

Supongamos que tenemos $z = (z_1, ..., z_d)$ el vector formado por d movimientos Brownianos independientes y $X = (X^1, ...X^N)$ el vector formado por N procesos de Ito, la ecuación que generaliza la descripta en (1.10), puede ser escrita como:

$$dX = a(X,t)dt + \sum_{i=1}^{d} b_i(X,t)dz_i$$

donde $a(X,t) = (a_{1,........,}a_N)$

Sea $G(X,t)$ una función escalar del vector de procesos X y t, el presente lema demuestra que G, sigue el siguiente proceso:

$$dG = D_X G(X,t)dt + \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial G}{\partial X^j}b_i(X,t)dz_i$$

$$D_X G(X,t) = \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial G}{\partial X^j}a_j(X,t) + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}Tr\left[(b_i)_i\,(b_i)_i^T\,(\frac{\partial^2 G}{\partial X^i X^j})_{i,j}\right]$$

donde $Tr(A)$ denota la traza de la matriz cuadrada A.

En nuestro caso particular tenemos:

$$dG = (\frac{\partial G}{\partial S}\mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)dt + \frac{\partial G}{\partial S}\sigma S dz \qquad (1.12)$$

Notemos que tanto S como G, están afectados por el mismo grado de incertidumbre dz.

Aplicacion al Logaritmo del precio del activo.

Se define

$$G = lnS$$

tenemos que:

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S} \qquad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2} \qquad \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

se sigue de la ecuación (1.12) que G sigue el proceso descripto por:

$$dG = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dz$$

Puesto que μ y σ son constantes, esta ecuación indica que G sigue un proceso generalizado de Wiener, mas aún, el cambio de G entre el momento actual t y el momento futuro T, está normalmente distribuido con media

$$(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)$$

y varianza

$$\sigma^2(T-t)$$

1.3.5 Deduccion de la ecuacion de Black y Scholes.

Pasemos a deducir la ecuacion diferencial de Black y Scholes.

Para ello asumiremos que el precio del activo sigue el proceso descripto en (1.11):

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

Supongamos que f es el precio de una opción de compra europea, cuyo activo subyacente es S, de la ecuación (1.12) tenemos

$$df = (\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dz$$

Podemos pensar estas ecuaciones en tiempo discreto como:

$$\triangle S = \mu S \triangle t + \sigma S \triangle z \tag{1.13}$$

y

$$\triangle f = (\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)\triangle t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S \triangle z \tag{1.14}$$

Ya hemos visto, en la sección anterior que f y S siguen el mismo proceso de Wiener, por lo tanto $\triangle z$ $(= \varepsilon\sqrt{\triangle t})$ es el mismo en ambas ecuaciones.

Eligiendo un portafolio adecuado compuesto por el derivado y la acción S, podemos eliminar el proceso de Wiener, de esta manera tenemos:

$$\begin{aligned} -1 &: \textit{opción} \\ \frac{\partial f}{\partial S} &: \textit{acciones} \end{aligned}$$

El propietario de esta cartera está vendido en una opción y comprado en un monto de $\frac{\partial f}{\partial S}$ acciones. Notemos que $\frac{\partial f}{\partial S}$ es la cantidad de acciones mantenidas en cartera en el período $(t, t + \Delta t)$.

Si denominamos Π al valor del portafolio, vemos que

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S}S \tag{1.15}$$

El cambio $\triangle\Pi$ en el valor de la cartera en $\triangle t$ está dado por

$$\triangle\Pi = -\triangle f + \frac{\partial f}{\partial S}\triangle S \tag{1.16}$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.13)- (1.14) en la ecuación (1.16), tenemos

$$\triangle\Pi = (-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)\triangle t \tag{1.17}$$

Puesto que esta ecuación no involucra términos $\triangle z$, notamos que el retorno del valor del portafolio Π en el período $\triangle t$ debe ser la tasa libre de riesgo r, en consecuencia tenemos que

$$\triangle\Pi = r\Pi\triangle t$$

que al ser sustituido en las ecuaciones (1.14)- (1.17), nos queda

$$(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)\triangle t = r(f - \frac{\partial f}{\partial S}S)\triangle t$$

o

$$\frac{\partial f}{\partial t} + r\frac{\partial f}{\partial S}S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 - rf = 0 \tag{1.18}$$

La ecuación (1.18) es la **Ecuación Diferencial de Black − Scholes**.

Para obtener una única solución de esta ecuación debemos considerar las condiciones de contorno apropiadas.

Notamos que es una ecuación parabólica antidifusiva, por lo tanto necesitaremos una condición final (cuando $t = T$):

$$f(T) = max(S_T - K, 0)$$

En particular notamos que debido al proceso (1.13), cuando $S = 0$, tenemos que $dS = 0$, por lo tanto S no puede variar, luego para todo $t \leq T$

$$f(0,t) = 0$$

Para S suficientemente grande, el valor de K resulta menos significativo, por lo tanto si $S \to +\infty$

$$f(S,t) \sim S$$

1.3.6 Resolucion de la ecuacion diferencial de Black- Scholes.

En esta sección, obtendremos la solución explícita de la ecuación (1.18), con las condiciones de contorno recientemente presentadas.

Para ello, haremos un cambio de variable dado por:
$(S,t) = \Phi(x,\tau) = (Ke^x, T - \tau/\frac{1}{2}\sigma^2), \qquad f(S,t) = Kv(x,\tau)$
mediante el cual obtenemos la ecuación dada por:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1)\frac{\partial v}{\partial x} - kv = 0 \tag{1.19}$$

donde $k = r/\frac{1}{2}\sigma^2$.
Las nuevas condiciones de contorno resultan:

$$v(x,0) = max(e^x - 1, 0)$$

La ecuación (1.19) puede ser escrita como la ecuación del calor[7], mediante un simple cambio de variable:

$$v = e^{\alpha\ x + \beta\ \tau} u(x,\tau)$$

para α y β constantes a determinar.
Diferenciando $u(x,\tau)$ obtenemos

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \alpha^2 u + 2\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k-1)(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x}) - ku = 0$$

Para que los términos que contengan a u y a $\frac{\partial u}{\partial x}$ sean eliminados, α y β deben satisfacer

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha^2 + (k-1)\alpha - k \\ 0 &= 2\alpha + (k-1) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\alpha = -\frac{1}{2}(k-1), \qquad \beta = -\frac{1}{4}(k+1)^2$$

[7]es decir, $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Entonces debemos resolver la siguiente ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{para todo } x \in \Re,\ \tau > 0$$

$$u(x,0) = u_0(x) = max(e^{\frac{1}{2}(k\ +\ 1)\ x} - e^{\frac{1}{2}(k\ -\ 1)\ x}, 0)$$

cuya solución es[8]

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{\frac{-(x-s)^2}{4\tau}} ds$$

Mediante el cambio de variable $x' = \frac{s-x}{\sqrt{2\tau}}$, resulta

$$\begin{aligned} u(x,\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+x'\sqrt{2\tau})}\ e^{-\frac{1}{2}x'^2} dx' \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+x'\sqrt{2\tau})}\ e^{-\frac{1}{2}x'^2} dx' \\ &= I_1 - I_2 \end{aligned}$$

Para evaluar I_1 completamos cuadrados en el exponente, obteniéndose

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}-\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho \\ &= e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1) \end{aligned}$$

donde

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$$

[8]se puede resolver usando transformada de Fourier

y N es la función de distribución normal acumulada.

El cálculo para I_2 es análogo, solo que $(k+1)$ es reemplazado por $(k-1)$.

Volviendo a nuestras variables originales, finalmente tenemos que la solución está dada por:

$$f(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r\ (T\ -\ t)}N(d_2)$$

Observación 1.3.5 *Observar que los resultados obtenidos son similares a los deducidos en la Proposición 1.*

Capítulo 2

Notaciones

En este capítulo especificaremos las notaciones necesarias que utilizaremos a lo largo del presente trabajo y enunciaremos algunos resultados que serán empleados mas adelante.

Usaremos frecuentemente los espacios de Sobolev, que serán notados en la forma $W^{k,p}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, cuya norma está dada por:

$$\|u\|_{k,p} = \sum_{|\alpha| \leq k} \left\| \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right\|_{L^p(\Omega)}$$

En particular para $k = 2$, $p = 2$, tendremos $W^{2,2}(\Omega) = H^2(\Omega)$ y para $k = 1$, $p = 2$, tendremos $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$.

Por $C^k(\overline{\Omega})$ entenderemos a los espacios de funciones de clase C^k en $\overline{\Omega}$ y por $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ $\alpha \in (0,1)$ definiremos los espacios de Hölder con la norma usual.

Asimismo, diremos que $u(x,y) \in W_p^{2,1}(V \times U)$ sii $u(x,.) \in W^{2,p}(V)$ y $u(.,y) \in W^{1,p}(U)$.

2.1 Algunos resultados previos

Definición 2.1.1 *Sea $T : E \rightarrow E$, donde (E,d) es un espacio métrico cualquiera:*

i) T es un operador compacto sii T es continuo y además $\overline{T(X)}$ es compacto para todo $X \subset E$ acotado.

ii) T es una contracción si existe $k < 1$ tal que $d(Tx, Ty) \leq kd(x,y)$ para todo $x, y \in E$.

Teorema 2.1.2 *Sea (E, d) un espacio métrico completo, y $T : E \to E$ una contracción. Entonces T tiene un único punto fijo en E.*

Teorema 2.1.3 *(Schauder) Sea C un conjunto convexo cerrado contenido en un espacio de Banach, y $T : C \to C$ un operador continuo tal que $\overline{T(C)}$ es compacto. Entonces T tiene al menos un punto fijo en C.*

Teorema 2.1.4 *Tendremos en cuenta la inmersión de Sobolev siguiente:*
$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega})$, para $0 \leq m < k - \frac{n}{p}$ resulta compacta.

Teorema 2.1.5 *(Morrey) Sea $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p > n$. Entonces $u \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, donde $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$*

Teorema 2.1.6 *(Estimadores de Schauder) $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m\ \beta}(\overline{\Omega})$, para $p > n$, $0 \leq m < k - \frac{n}{p}$ y $\beta < k - n \ / \ p - m$ resulta compacta.*

2.2 Resultados de existencia y unicidad para ecuaciones elipticas. Acotaciones a priori.

Definición 2.2.1 *Sea $L : W^{k,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$, el operador lineal definido por*

$$Lu = \sum a_{ij}(x) D_{i,j} u + \sum b_i(x) D_i u + c(x) u$$

L se dice elíptico cuando la matriz simétrica (a_{ij}) es definida positiva. Diremos que L es estríctamente elíptico sii existe $\lambda > 0$ tal que para todo $x \in \Omega$

$$\Lambda |v|^2 \geq \sum_{i,j=1}^{d} a^{ij}(x) v_i v_j \geq \lambda |v|^2 \qquad (\Lambda \geq \lambda > 0)$$

El siguiente teorema es un conocido resultado de la teoría de Ecuaciones elípticas:

Teorema 2.2.2 *Sea $\partial\Omega \in C^{1,1}$ y L estrictamente elíptico en Ω con coeficientes $a_{ij} \in C(\overline{\Omega})$, $b_i, c \in L^\infty(\Omega)$, $c \leq 0$.*

Entonces, dadas $f \in L^p(\Omega)$, $\varphi \in W^{2,p}(\Omega), 1 < p < \infty$, el siguiente problema de Dirichlet

$$\begin{cases} Lu = f & en\ \Omega \\ u = \varphi & en\ \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

admite una única solución en $W^{2,p}(\Omega)$.

Lema 2.2.3 *Sean* Ω *y* L *como en el teorema 2.2.2. Entonces existe* κ *independiente de* u *tal que*

$$\|u\|_{2,p} \leq \kappa\ \|Lu\|_p \tag{2.2}$$

para toda $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$.

Definición 2.2.4 *Diremos que* u *es una super (sub) solución del problema (2.1) si*

$$\begin{cases} Lu & \leq\ (\geq)\ f & en & \Omega \\ u(x) & \geq\ (\leq)\ \varphi(x) & sobre & \partial\Omega \end{cases}$$

2.3 Combinacion del argumento de Continuacion y del metodo de Newton

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un dominio con frontera suave Γ.

A modo de ejemplo consideramos el siguiente problema

$$\begin{cases} -\triangle\ u = f(u) & \text{en } \Omega \\ u = \varphi & \text{sobre } \Gamma \end{cases} \tag{2.3}$$

donde $\triangle$ denota el Laplaciano.

Para describir el siguiente argumento, el primer paso será incluir el presente problema en una familia de problemas (P_t) dados por

$$(P_t) \begin{cases} -\triangle\ u = tf(u) & \text{en } \Omega \\ u = \varphi & \text{sobre } \Gamma \end{cases}$$

para $t \in [0,1]$. Si notamos a la solución de (P_t) por $u(x,t)$, $u(x,1)$ será la solución del problema original (2.3).

Observamos que para $t = 0$, $u(x,0)$ es la solución del problema de Dirichlet para el Laplaciano.

Usando la solución $u(x,0)$ como aproximación inicial, podemos resolver (P_t) para $t = t_1 > 0$ por el método de Newton.

Recordemos entonces que $u(x,t_1)$ se obtiene a partir de la siguiente ecuación:

$$u(x,t_1) = u(x,0) - [DFu(x,0)]^{-1} Fu(x,0) \tag{2.4}$$

donde

$$F(u) = -\triangle\ u - t_1 f(u)$$

y su operador diferencial está dado por

$$DF(u)(\varphi) = -\triangle\ \varphi - t_1 f'(u)\varphi$$

Luego, por el teorema 2.2.2 y tomando $f' \leq 0$, este operador lineal resulta inversible a izquierda para toda $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ y en consecuencia (2.4) está bien definida.

La solución aproximada obtenida $u(x,t_1)$ puede ser utilizada como la aproximación inicial para $u(x,t_2)$, donde $t_2 > t_1$, y volver a utilizar el procedimiento iterativo de Newton.

Mostraremos que luego de finitos pasos

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < .....t_N = 1$$

la solución del problema (P_t) para $t = 1$, puede ser encontrada.

Por el procedimiento de Newton, tenemos que $u(x,t_{j-1})$ es la solución para el problema $(P_{t_{j-1}})$ para t_{j-1} fijo, $0 \leq t_{j-1} < 1$.

Entonces como una aproximación a la solución de (P_t) para $t = t_j$, donde $t_{j-1} < t_j \leq 1$, definimos la sucesión $u_{n+1}(x,t_j)$ como en (2.4):

$$u_0(x,t_j) = u(x,t_{j-1}) \tag{2.5}$$

$$u_{n+1}(x,t_j) = u_n(x,t_j) - [DFu_n(x,t_j)]^{-1} Fu_n(x,t_j) \tag{2.6}$$

donde

$$F(u_n(x,t_j)) = -\triangle\ u_n(x,t_j) - t_j f(u_n(x,t_j))$$

y su operador diferencial está dado por

$$DF(u_n)(\varphi) = -\triangle\ \varphi - t_j f'(u_n)\varphi$$

Aplicando el operador diferencial a ambos lados de la igualdad (2.6), obtenemos que $u_{n+1}(x, t_j)$ es la solución del problema lineal dado por

$$-\triangle u_{n+1} = t_j f'(u_n)\left\{u_{n+1} - u_n\right\} + t_j f(u_n) \qquad \text{en } \Omega \tag{2.7}$$

$$u_{n+1} = \varphi \qquad \text{sobre } \Gamma \tag{2.8}$$

Observamos que en el método de Newton clásico, la convergencia de la sucesión aproximada u_n, depende de la elección de la solución inicial, la cual debe estar lo suficientemente cerca de la solución exacta.

Sin embargo, en este método, la solución inicial elegida $u_0(x, t_j)$ dada por (2.5), será una buena aproximación a $u(x, t_j)$ mientras la distancia $t_j - t_{j-1}$ sea suficientemente pequeña.

Pasaremos a estudiar el problema lineal asociado dado por (2.7)-(2.8)

2.3.1 Resultados de convergencia

En esta sección, probaremos la convergencia de (2.7)-(2.8).

Observemos que la diferencia $(u_{n+1} - u_n)$ satisface la ecuación

$$-\Delta\left(u_{n+1} - u_n\right) = t_j\left\{f'(u_n)(u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{2}\widetilde{f}_{uu}(u_{n-1})\left(u_n - u_{n-1}\right)^2\right\} \text{en } \Omega, \tag{2.9}$$

$$(u_{n+1} - u_n) = 0 \qquad \text{sobre } \Gamma$$

donde $\widetilde{f}_{uu}$ está dada por la fórmula del valor medio

$$\widetilde{f}_{uu}(u_{n-1}) = \int_0^1 f''(\tau u_n + (1-\tau)u_{n-1})\tau d\tau \tag{2.10}$$

Con el objetivo de justificar el procedimiento descripto en (2.5-2.8), haremos los siguientes supuestos sobre el término no lineal f :

(A1) $f(\xi)$ está definida para todo $\xi \in \mathbb{R}$. Mas aun, $f(v)(x) := f(v(x))$ $\forall v \in H^2(\Omega)$ y $f(v) \in L^2(\Omega)$ con $\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq M$.

$\forall v \in H^2(\Omega), \|f(v) - f(w)\|_{L^2(\Omega)} \to 0$, si $\|v - w\|_{2,2} \to 0$

(A2) $f'(\xi)$ está definida para todo $\xi \in \mathbb{R}$. Mas aun, $f'(v)(x) := f'(v(x))$
$\forall v \in H^2(\Omega)$ $f'(v) < 0$, $f'(v) \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ con $\|f'\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \leq M$.
$\forall v \in H^2(\Omega), \|f'(v) - f'(w)\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \to 0$, si $\|v - w\|_{2,2} \to 0$

(A3) $f''(\xi)$está definida para todo $\xi \in \mathbb{R}$. Mas aun, $f''(v)(x) := f''(v(x))$
$\forall v \in H^2(\Omega)$ $f"(v) \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ con $\|f''\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \leq M$.
$\forall v \in H^2(\Omega), \|f''(v) - f''(w)\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \to 0$, si $\|v - w\|_{2,2} \to 0$.

Bajo estos supuestos, notamos que el problema definido por (2.7)-(2.8) tiene solución única y cada solución $u_{n+1}(x)$ pertenece a $H^2(\Omega)$, si $u_n(x)$ pertenece a $H^2(\Omega)$. Aplicando el estimador a priori (2.2), obtenemos

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - u_n\|_{H^2(\Omega)} &\leq k \left\| \frac{1}{2} t_j \widetilde{f}_{uu}(u_{n-1}) \left(u_n - u_{n-1}\right)^2 \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{2} t_j k \left\| \widetilde{f}_{uu} \right\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \left\| (u_n - u_{n-1})^2 \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (\frac{k}{2} t_j M c \left\| u_n - u_{n-1} \right\|_{H^2(\Omega)}) \left\| u_n - u_{n-1} \right\|_{H^2(\Omega)} \end{aligned} \tag{2.11}$$

para $n = 0, 1, ...$ y c una constante positiva. Debido a (2.11) tenemos que la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $H^2(\Omega)$, si

$$\frac{k}{2} t_j M c \left\| u_1 - u_0 \right\|_{H^2(\Omega)} < 1 \tag{2.12}$$

Asumiendo la desigualdad (2.12) y notando a u_* al limite de la sucesión $\{u_n\}$ en $H^2(\Omega)$, tenemos que $u_* \in H^2(\Omega)$ satisface la ecuación variacional de la forma

$$\int_\Omega \nabla u_* \nabla v - t_j \int_\Omega f(u_*) v = R_n(u_*, v) \qquad \text{para toda } v \in H_0^1(\Omega)$$

donde
$R_n(u_*, v) = \int_\Omega \nabla(u_{n+1} - u_*) v + t_j \int_\Omega (f(u_n) - f(u_*)) v + t_j \int_\Omega (f'(u_n)(u_{n+1} - u_n) v$

Luego, debido a la continuidad de f y a que f' es acotada podemos ver que

$$R_n(u_*, v) \to 0, \qquad n \to \infty$$

Por la unicidad de la solución de (2.3), podemos concluir que la sucesión $\{u_n\}$ converge a $u_* = u(x, t_j)$, la solución de (2.3) para $t = t_j$.

Observemos que es suficiente pedir que

$$t_j - t_{j-1} < (\frac{1}{2}k^2M^2c)^{-1} \qquad j \in N \tag{2.13}$$

para que la condición (2.12) se cumpla.

Sin embargo, de la definición de u_0 y u_1, obtenemos la siguiente estimación

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_0\|_{H^2(\Omega)} &\leq k\,\|(t_j - t_{j-1})f(u_0)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq kM(t_j - t_{j-1}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, si elegimos t_j tal que

$$\frac{k^2}{2}t_j(t_j - t_{j-1})M^2 < 1$$

o equivalentemente

$$t_j(t_j - t_{j-1}) < (\frac{1}{2}k^2M^2)^{-1}$$

para $j = 1, 2, ...$, la condición (2.12) será satisfecha. Puesto que $t_j \leq 1$, la condición (2.13) será suficiente, además es útil remarcar que el témino derecho de la desigualdad (2.13) nos brinda una cota uniforme para la diferencia $(t_j - t_{j-1})$, por lo tanto el método de Continuación que acabamos de describir, puede ser extendido para $t = 1$ en finitos pasos.

Ahora veremos la unicidad de la solución del problema definido por (2.3).

Sean u y v dos soluciones del presente problema, entonces la diferencia $u - v$ debe satisfacer el siguiente problema:

$$\begin{cases} -\triangle\ (u - v) = \widetilde{f_u}\ (u - v) & \text{en } \Omega \\ u - v = 0 & \text{sobre } \Gamma \end{cases}$$

La función $\widetilde{f_u}$ se define en forma análoga a (2.10) y es negativa debido al supuesto (A2), por lo tanto por el teorema 2.2.2 tenemos que $u \equiv v$.

Resumiendo los resultados obtenidos tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.3.1 *Sea $\varphi \in H^2(\Omega)$, bajo los supuestos (A1)- (A3), el problema (2.3) posee única solución $u \in H^2(\Omega)$, la cual puede ser construida mediante el presente método, con la condición dada por (2.13).*

Teorema 2.3.2 *Sea α un número real dado, tal que $0 < \alpha < 1$. Para t_j fijo, $0 \leq t_j \leq 1$, supongamos que el t-ésimo paso del método de Continuación satisface la cota uniforme dada por:*

$$t_k - t_{k-1} \leq \frac{2\alpha}{k^2 M^2}$$

para $k = 1, 2, ...j$. Entonces el error estimado en este paso será dado por

$$\|u - u_n(., t_j)\|_{2,2} \leq kM(1 - t_j) + 2(\alpha t_j)^{2^{(n-1)}}$$

Como $\alpha < 1$, el error será eventualmente dominado por el primer término, para n suficientemente grande, n_0 de tal manera que la solución del proceso iterativo $u_{n_0}(x, t_j)$ nos dará una buena aproximación para u.

Capítulo 3

Soluciones para la ecuacion de Black y Scholes, con volatilidad estocastica.

En el presente capítulo probaremos la existencia de solución para la ecuación no lineal de Black y Scholes, utilizando los métodos topológicos descriptos en el Capítulo 2.

La respectiva ecuación fue obtenida a partir del supuesto de la volatilidad del precio del activo sigue un proceso estocástico de Ito. Mas aún, construimos la presente solución utilizando el procedimiento iterativo descripto en el capítulo anterior.

Asimismo, probamos la existencia de al menos una solución del problema de Dirichlet estacionario aplicando el método de sub y super soluciones.

3.1 Introduccion

En el modelo de Black y Scholes presentado en el Capítulo 1. el precio del activo S subyacente de la opción sigue el proceso de Ito dado por

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

donde la volatilidad σ era un parámetro constante.

Notemos que hay varias maneras de estimar dicha volatilidad:

1. La volatilidad histórica es definida como el estimador de la varianza del logaritmo del precio del activo subyacente, obtenido a partir de los datos del mercado. Esta definición fue dada en el Capítulo 1.

2. La volatilidad implícita es el parámetro numérico que hace al precio del mercado de la opción coincidir con el valor teórico del mismo, o sea, el valor que obtendríamos de la ecuación de Black y Scholes.

El problema de utilizar la volatilidad histórica es el supuesto que los precios futuros del activo subyacente tendrán el mismo comportamiento que en el pasado, sin considerar los posibles cambios de política monetaria, política económica e incluso de cambios mismos en la política de la compañía (modificar su capital social, dividendos).

La volatilidad implícita es derivada a partir del precio de una única opción, pero existen formas mas avanzadas de calcular el punto de vista del mercado usando mas de una opción. En particular, usando el precio de opciones que tienen el mismo activo subyacente, pero distintos días de expiración, se puede deducir la opinión del mercado sobre los futuros valores de la volatilidad del activo subyacente (estructura temporal de la volatilidad).

Una característica de la volatilidad implícita es que no parece ser constante respecto de los precios de ejercicio, por lo tanto los "practitioners" encuentran necesario cambiar el parámetro de volatilidad frecuentemente cuando utilizan Black y Scholes para valuar opciones.

En orden de evitar los mencionados inconvenientes, proponemos un modelo de volatilidad estocástica.

Especificamente, consideramos como en [2] los siguientes procesos

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

$$d\sigma = \alpha\sigma dt + V\sigma dw$$

donde dz y dw son dos movimientos Brownianos estándar con coeficiente de correlación ρ, formalmente

$E(dz, dw) = \rho dt.$

Sea $f(S, \sigma, t)$ el precio de un instrumento derivado pensado como función del activo subyacente S, de la volatilidad σ y del tiempo t, por el lema de Ito descripto en el Capítulo 1., tenemos que el proceso del precio del derivado satisface

$$df = D_X f(X,t)dt + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial X^j} b_i(X,t) dz_i$$

donde

$$D_X f(X,t) = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial X^j} a_j(X,t) + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} Tr\left[(b_i)_i \, (b_i)_i^T \, (\frac{\partial^2 f}{\partial X^i X^j})_{i,j} \right]$$

En nuestro caso tenemos,
$(X^1, X^2) = (S, \sigma)$
$(a_1, a_2) = (\mu S, \alpha\sigma)$
$(b_1, b_2) = (\sigma S, V\sigma)$
donde reemplazando en la anterior ecuación, obtenemos que

$$df(S,\sigma,t) = f_S dS + f_\sigma d\sigma + Lf dt$$

para L el generador infinitesimal dado por:

$$L = \partial_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + \frac{1}{2} V^2 \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + \rho\sigma^2 SV \frac{\partial^2}{\partial S \partial \sigma}$$

Con la finalidad de replicar el valor del derivado, construimos un portafolio compuesto por una opción de compra con precio $C(S, K, \sigma, \triangle t)$, donde $\triangle t$ es el período de vencimiento y K es el precio de ejercicio cuyo valor será especificado; el activo subyacente es S y el derivado con precio f .

Vendemos una unidad del derivado con precio f, compramos $\triangle$ unidades del activo con precio S y μ unidades de la opción de compra con precio C.

En consecuencia, en el período $(t, t+dt)$ la variación en el valor del portafolio será

$$\begin{aligned} df - \triangle dS - \mu dC &= (f_S dS + f_\sigma d\sigma + Lf dt) - \triangle dS - \mu(C_S dS + C_\sigma d\sigma + LC dt) \\ &= (f_S - \triangle - \mu C_S) dS + (f_\sigma - \mu C_\sigma) d\sigma + (Lf - \mu LC) dt \end{aligned}$$

Una cartera libre de riesgo es obtenida tomando

$$f_S = \triangle + \mu C_S, \qquad f_\sigma = \mu C_\sigma$$

Por lo tanto, el cambio en el valor del portafolio está dado por:

$$df - \triangle dS - \mu dC = (Lf - \mu LC) dt$$

De acuerdo al principio de arbitraje visto en el Capítulo 1., el retorno de un portafolio libre de riesgo debe ser el mismo que el de un flujo monetario colocado en el mercado a la tasa libre de riesgo r,es decir

$$(Lf - \mu LC)dt = r(f - \triangle S - \mu C)dt \tag{3.1}$$

Si asumimos que el precio de la opción de compra es el que se obtiene a partir de la solución de la ecuación de Black y Scholes, tenemos:

$$LC = (\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}) + \frac{1}{2}V^2\sigma^2\frac{\partial^2 C}{\partial \sigma^2} + \rho\sigma^2 SV\frac{\partial^2 C}{\partial S\partial\sigma}$$

$$= rC - rSC_S + \frac{1}{2}V^2\sigma^2 C_{\sigma\sigma} + \rho\sigma^2 SVC_{S\sigma} \tag{3.2}$$

Reemplazando (3.2) en (3.1), obtenemos:

$$Lf - \rho\sigma^2 SV\frac{C_{S\sigma}}{C_\sigma}f_\sigma - \frac{1}{2}V^2\sigma^2\frac{C_{\sigma\sigma}}{C_\sigma}f_\sigma = rf - rf_S S \tag{3.3}$$

De la fórmula de Black y Scholes para C deducida en el Capítulo 1.,

$$C(S, K, \sigma, \triangle t) = SN(d_1) - Ke^{-r\triangle t}N(d_2)$$

obtenemos que

$$C_\sigma = SN'(d_1)\sqrt{\triangle t}$$

$$C_{\sigma\sigma} = SN''(d_1)\sqrt{\triangle t}(-\frac{ln(Se^{r\triangle t})}{\sigma^2\sqrt{\triangle t}} + \frac{1}{2}\sqrt{\triangle t})$$

$$C_S = N(d_1)$$

$$C_{S\sigma} = N'(d_1)(-\frac{ln(Se^{r\triangle t})}{\sigma^2\sqrt{\triangle t}} + \frac{1}{2}\sqrt{\triangle t})$$

Asumiendo que K depende solamente de la tasa de interés r, en la próxima sección estudiaremos la existencia de solución del problema no lineal asociado.

3.2 Soluciones estacionarias para una ecuacion no lineal

Suponiendo que $K = Sexp(r\triangle t)$ tenemos:

$$C_\sigma = SN'(d_1)\sqrt{\triangle t}$$

$$C_{\sigma\sigma} = SN''(d_1)\frac{\sqrt{\triangle t}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}Se^{-d_1^2/2}\frac{1}{4}(\triangle t)^{3/2}$$

$$C_{S\sigma} = N'(d_1)\frac{\sqrt{\triangle t}}{2}$$

Reemplazando estas derivadas en (3.3), y descartando los términos de orden mayor a dos en $\triangle t$, finalmente obtenemos:

$$Lf - \frac{1}{2}\rho\sigma^2 V f_\sigma = rf - rf_S S$$

A partir de lo recientemente desarrollado generalizamos la ecuación resultante para estudiar el problema de Dirichlet estacionario:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{1}{2}V^2\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} + \rho\sigma^2 SV\frac{\partial^2 f}{\partial S\partial\sigma} - \frac{1}{2}\rho\sigma^2 V\frac{\partial f}{\partial\sigma} \\ = rg(f)f - r\frac{\partial f}{\partial S}S \qquad \text{en } \Omega_0 \\ f = h_0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega_0 \end{array} \right. \tag{3.4}$$

con $g \in C^2(\mathbb{R})$, $h_0 \in H^2(\Omega_0)$, $\overline{\Omega}_0 \subset (0,a)\times(0,b)$ con frontera $C^{1,1}$.

En esta sección aplicaremos el método iterativo de Continuación- Newton estudiado en el Capítulo 2. para resolver (3.4)

Comenzaremos introduciendo el cambio de variables Φ dado por $y = lnS$, $x = \sigma/V$ y el parámetro $\lambda \in [0,1]$; obteniendo el siguiente problema para $u(x,y) = f(S,\sigma)$ en el dominio $\Omega = \Phi(\Omega_0)$:

$$\left\{ \begin{array}{c} \triangle u + 2\rho\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \lambda(\rho\frac{\partial u}{\partial x} + (1 - \frac{2r}{x^2V^2})\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{2rg(u)}{x^2V^2}u) \qquad \text{en } \Omega, \\ u = h \qquad \text{sobre } \partial\Omega \end{array} \right. \qquad (3.5)_\lambda$$

Por simplicidad, definimos

$$F(x,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}) = \rho\frac{\partial u}{\partial x} + (1 - \frac{2r}{x^2V^2})\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{2rg(u)}{x^2V^2}u$$

y el operador lineal

$$Lu = \triangle u + 2\rho \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

Notamos que el operador L es estrictamente elíptico para $|\rho| < 1$ pues en ese caso, la matriz asociada al operador L es definida positiva.

Comenzaremos hallando una solución u_0 del problema $(3.5)_{\lambda_0}$ y construiremos en forma recursiva una solución de $(3.5)_{\lambda_0+\varepsilon}$ para algún ε positivo. Luego, tendremos soluciones para $\lambda_0 < \lambda_1 <$ .... $< \lambda_n <$ ..., y si ε puede ser elegido uniformemente, el procedimiento nos dará una solución del problema $(3.5)_1$.

Para obtener una solución del problema, construímos una sucesión $\{u_n\}$ convergente utilizando el argumento detallado en el Capítulo 2., de manera tal que su límite sea la solución buscada.

Se considera el operador $\Psi : H^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ dado por

$$\Psi(u) = Lu - \varepsilon F(x, u, \nabla u)$$

y definimos u_{n+1} a partir de u_n, como la solución de la ecuación

$$u_{n+1} = u_n - [D\Psi(u_n)]^{-1} (\Psi(u_n))$$

Bajo condiciones apropiadas que enunciaremos mas abajo, el operador diferencial dado por

$$\begin{aligned} D\Psi(u)(\varphi) &= L\varphi - \varepsilon(\frac{\partial F}{\partial u}(x, u, \nabla u)\varphi + \frac{\partial F}{\partial u_x}(x, u, \nabla u)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u_y}(x, u, \nabla u)\frac{\partial \varphi}{\partial y}) \\ &= L\varphi - \varepsilon(\frac{2r\,[g(u)u]'}{x^2V^2}\varphi + \rho\frac{\partial \varphi}{\partial x} + (1 - \frac{2r}{x^2V^2})\frac{\partial \varphi}{\partial y}) \end{aligned}$$

resultará inversible a izquierda en $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ y en consecuencia la sucesión $\{u_n\}$ estará bien definida.

Observemos que si $z = [D\Psi(u_n)]^{-1} (\Psi(u_n))$ tenemos

$$Lz - \varepsilon(\frac{2r\,[g(u_n)u_n]'}{x^2V^2}z + \rho\frac{\partial z}{\partial x} + (1 - \frac{2r}{x^2V^2})\frac{\partial z}{\partial y}) = \Psi(u_n) = Lu_n - \varepsilon F(x, u_n, \nabla u_n).$$

Entonces $u_{n+1} = u_n - z$ es la única solución del problema lineal

$$\begin{aligned} Lu_{n+1} &= \varepsilon \left[\rho(\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial u_n}{\partial x}) + (1 - \frac{2r}{x^2 V^2})(\frac{\partial u_{n+1}}{\partial y} - \frac{\partial u_n}{\partial y}) \right] + \\ &+ \varepsilon \left[\frac{2r(g(u_n) + g'(u_n) u_n)}{x^2 V^2} (u_{n+1} - u_n) + F(x, u_n, \nabla u_n) \right] \end{aligned} \tag{3.5}$$

con la condición de contorno

$$u_{n+1} = h \qquad \text{sobre } \partial\Omega$$

Bajo el supuesto que $g(u)u$ es creciente respecto de u, tenemos el siguiente lema que muestra la buena definición de la sucesión $\{u_n\}$.

Lema 3.2.1 *Sea $s \in C(\overline{\Omega})$ y $L_s : H^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ el operador lineal dado por*

$L_s z = Lz - \lambda \left[\rho \frac{\partial\ z}{\partial\ x} + (1 - \frac{2\ r}{x^2\ V^2}) \frac{\partial\ z}{\partial\ y} + sz \right]$, *con $s \geq 0$ y $0 \leq \lambda \leq 1$.*

Entonces el operador $L_s : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es suryectivo e inversible. Mas aún existe una constante $c > 0$ dependiente únicamente de $\|s\|_\infty$ tal que $\|z\|_{2,2} \leq c \|L_s z\|_2$ para todo $z \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Dem:

Por los resultados previos enunciados en el teorema 2.2.2, sabemos que el problema lineal

$$\begin{cases} L_s z = \varphi & \text{en } \Omega \\ z = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

tiene solución única en el espacio de Sobolev $H^2(\Omega)$ para toda $\varphi \in L^2(\Omega)$. Por lo tanto el operador L_s es inversible.

Veamos la desigualdad $\|z\|_{2,2} \leq c \|L_s z\|_2$ para todo $z \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ y $c > 0$ dependiente únicamente de $\|s\|_\infty$.

Supongamos que esta desigualdad no ocurre, podemos asumir la existencia de las sucesiones $s_n \geq 0$ y $u_n \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ de manera tal que

$$\|\ s_n\|_\infty \leq M, \qquad \|\ u_n\|_{2,2} = 1, \qquad \|L_{s_n} u_n\|_{2,2} \to 0.$$

Como $\|\ u_n\|_{2,2} = 1$ y $\|L_{s_n} u_n\|_{2,2} \to 0$ tenemos que $\int\limits_\Omega L_{s_n} u_n . u_n \to 0$.

Reemplazando

$$-\int_\Omega Lu_n.u_n + \lambda\left[\rho\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x}u_n + \int_\Omega (1-\frac{2r}{x^2V^2})\frac{\partial u_n}{\partial y}u_n + \int_\Omega s_n u_n^2\right] \to 0$$

Debido a la elipticidad de L y a sus coeficientes acotados tenemos que , $-\int_\Omega Lu_n.u_n \geq k\left\|u_n\right\|_{1,2}^2$ para alguna constante positiva k.

Mas aún, definiendo los siguientes campos:

$$F_1(x,y) = (u_n^2, 0), \qquad F_2(x,y) = (1-\frac{2r}{x^2V^2})(0, u_n^2),$$

tenemos, debido al teorema de la divergencia que

$$\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x}u_n = \frac{1}{2}\int_\Omega divF_1 = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} F_1.\nu dS = 0$$

y

$$\int_\Omega (1-\frac{2r}{x^2V^2})\frac{\partial u_n}{\partial y}u_n = \frac{1}{2}\int_\Omega divF_2 = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} F_2.\nu dS = 0$$

Como $s_n \geq 0$, deducimos que la sucesión $\|u_n\|_{1,2} \to 0$. Esto implica que $\|Lu_n\|_2 \to 0$, pero debido a la invertibilidad de L, tenemos que $\|u_n\|_{2,2} \leq k\|Lu_n\|_2$ y por lo tanto $\|u_n\|_{2,2} \to 0$ lo cual contradice las hipótesis dadas.

Teorema 3.2.2 *Sea $g(u)u$ creciente respecto de u. Entonces existe una constante $\varepsilon > 0$ tal que la sucesión $\{u_n\}$ converge con la norma $\|.\|_{2,2}$ a una única solución del problema $(3.5)_{\lambda_0+\varepsilon}$*

Dem:
Sea $z_n = u_{n+1} - u_n$, consideramos
$s_n(x,y) = \frac{2\ r\ (g\ (u_n)+g'\ (u_n)\ u_n)}{x^2\ V^2} \geq 0$
Por la definición del operador L_{s_n}, tenemos que

$$\begin{aligned} L_{s_n}z_n &= \varepsilon F(x,u_n,\nabla u_n) - Lu_n \\ &= \varepsilon\left[F(x,u_n,\nabla u_n) - F(x,u_{n-1},\nabla u_{n-1})\right. \\ &\quad \left.-DF(x,u_{n-1},\nabla u_{n-1})(x,z_{n-1},\nabla z_{n-1})\right] \\ &= \varepsilon\frac{r}{x^2\ V^2}(\xi_n g''(\xi_n) + 2g'\ (\xi_n)\ )z_{n-1}^2 \end{aligned}$$

para algún valor medio $\xi_n(x,y) \in H^2(\Omega)$ entre u_n y u_{n-1}.

Supongamos que $\| u_n - u_0\|_{2,2} \leq R$ para alguna constante R y para todo $n \leq N$.

Dado que $g \in C^2(\mathbb{R})$ existe una constante K tal que para todo $n \leq N$

$$\|g(u_n) + g'(u_n)u_n\|_\infty \leq K, \qquad \|\xi_n g''(\xi_n) + 2g'(\xi_n)\|_\infty \leq K$$

Debido al lema anterior, sabemos que

$$\| z_n\|_{2,2} \leq c \| L_{s_n} z_n\|_2 \leq c\varepsilon \frac{r}{x^2\ V^2} K \ \left\| z_{n-1}^2 \right\|_2 \leq \varepsilon M \| z_{n-1}\|_{2,2}^2$$

para alguna constante $c_1 = \varepsilon M > 0$.

Inductivamente, tenemos

$$\| z_n\|_{2,2} \leq (c_1 \|z_0\|_{2,2})^{2^n - 1} \| z_0\|_{2,2}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \| u_{N+1} - u_0\|_{2,2} &\leq \| u_{N+1} - u_N\|_{2,2} + \| u_N - u_{N-1}\|_{2,2} + ... + \| u_1 - u_0\|_{2,2} \\ &\leq \sum_{j=0}^{N} T^{2^j - 1} \| z_0\|_{2,2} \end{aligned}$$

para $T = c_1 \| z_0\|_{2,2}$.

Dada la desigualdad $\| z_0\|_{2,2} \leq R$, podemos elegir $\varepsilon > 0$ de manera tal que $\varepsilon < \frac{1}{RM}$ por ende $R < \frac{1}{c_1}$ y en consecuencia $T < 1$.

Como $L_{s_0}\ z_0 = \varepsilon F(x, u_0, \nabla u_0)$ y $\| z_0\|_{2,2} \leq c \| L_{s_0} z_0\|_2$

$$\| u_{N+1} - u_0\|_{2,2} \leq c\varepsilon \| F(x, u_0, \nabla u_0)\|_2 \frac{1}{1-T}$$

Luego, tomando ε suficientemente pequeño podemos asumir que $\| u_n - u_0\|_{2,2} \leq R$ para todo n.

Veamos que $\{u_n\}$ es de Cauchy en $H^2(\Omega)$.

Dado $M \in \mathbb{N}$, tomemos $N > M$. Por un cálculo análogo al anterior tenemos

$$\begin{aligned}\| u_N - u_M\|_{2,2} &\leq \| u_N - u_{N-1}\|_{2,2} + \| u_{N-1} - u_{N-2}\|_{2,2} + \ldots + \| u_{M-1} - u_M\|_{2,2} \\ &\leq \sum_{j=M}^{N-1} T^{2^j-1} \| z_0\|_{2,2} \to 0 \quad \text{si } N \to \infty\end{aligned}$$

pues $T < 1$ y por lo tanto la sucesión $\{u_n\}$ es de Cauchy en $H^2(\Omega)$ y es convergente a una función u perteneciente a $H^2(\Omega)$, luego basta tomar límite a la ecuación (3.5) para obtener que u es la solución buscada.

Asimismo, podemos ver que la solución hallada es única.

Sean u y v dos soluciones del problema $(3.5)_{\lambda_0+\varepsilon}$ luego

$$L(u-v) - (\lambda_0 + \varepsilon)\left[F(x,u,\nabla u) - F(x,v,\nabla v)\right] = 0 \text{ en } \Omega \tag{3.6}$$

$$u - v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega$$

Reescribiendo (3.6) tenemos

$$L(u-v) - (\lambda_0 + \varepsilon)\left[F(x,u,\nabla u) - F(x,v,\nabla v)\right] =$$

$$= L(u-v) - (\lambda_0 + \varepsilon)\left[\rho\frac{\partial\ (u-v)}{\partial\ x} + (1 - \frac{2\ r}{x^2\ V^2})\frac{\partial\ (u-v)}{\partial\ y}\right]$$

$$-(\lambda_0 + \varepsilon)\left[\frac{2r}{x^2V^2}(g(u)u - g(v)v)\right] = 0$$

Dado que $g(u)u - g(v)v = (g(\xi)\xi)'\,(u-v)$ para algún valor medio $\xi(x,y)$ $\in H^2(\Omega)$ entre u y v, tomemos

$s(x,y) = \frac{2r}{x^2V^2}\,(g(\xi)\xi)'$; notamos que $s(x,y)$ es continua, positiva pues g es una función creciente respecto de u y también es acotada.

Luego por el lema 17. podemos ver la existencia de $c > 0$ tal que

$$\| u - v\|_{2,2} \leq c \| L_s(u-v)\|_2$$

donde $u - v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Como $L_s(u-v) = 0$, concluímos que $u = v$ en Ω y por tanto la solución hallada es única.

El siguiente teorema que veremos muestra que, bajo condiciones adecuadas, podemos elegir al paso ε de manera uniforme y por lo tanto independiente de u_0.

Teorema 3.2.3 *Supongamos que*

$0 \leq \frac{d\ [g(u)\ u]}{d\ u} \leq M$

para alguna constante M. Entonces el paso ε del teorema anterior puede elegirse en forma independiente de u_0.

Mas aún, existe una sucesión

$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < .... < \lambda_N = 1,$

donde las soluciones u_j del problema (3.5)$_{\lambda_j}$ son construidas como en el teorema 3.2.2, y u_N es la única solución del problema original.

Dem:

Es suficiente mostrar la existencia de una constante C tal que si u satisface $(3.5)_\lambda$ para algún λ, entonces $\|u\ \|_{2,2} \leq C$, donde C es independiente de ε.

Como u_0 es solución $(3.5)_0$, tenemos que

$\|u_0\|_{2,2} \leq \|u_0 - h\|_{2,2} + \|h\|_{2,2} \leq c\,\|L(u_0 - h)\|_2 + \|h\|_{2,2} = c\,\|Lh\|_2 + \|h\|_{2,2} = C$ pues L es un operador lineal elíptico; asimismo por la inclusión $H^2(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ podemos concluir que la constante K puede ser tomada de manera tal que

$$\|g(u) + g'(u)u\|_\infty \leq K, \qquad \|ug''(u) + 2g'(u)\|_\infty \leq K$$

para todo $u \in B_{C+R}(u_0) \subset H^2(\Omega)$.

Si u satisface $(3.5)_\lambda$, con la notación del lema 3.2.1 tenemos que $Lu = \lambda F(x, u, \nabla u)$ y por definición del operador L_s vemos que $L_s u = \lambda \left(\frac{2\ r\ g(u)}{x^2\ V^2} - s\right) u$.

Por otro lado

$\frac{2\ r}{x^2\ V^2} g(u)u = \frac{2\ r}{x^2\ V^2}\,[g(u)u - g(0)0] = \frac{2\ r}{x^2\ V^2}(g(\xi)\xi)'u$ para $\xi \in H^2(\Omega)$ un valor medio entre 0 y u.

Luego u será solución de $L_s u = 0$, tomando $s = \frac{2\ r\ (g(\xi) + g'(\xi)\xi)}{x^2\ V^2}$, notamos que $\|s\|_\infty$ resulta acotada. Como consecuencia vemos que

$$\|u\|_{2,2} \leq \|u - h\ \|_{2,2} + \|h\ \|_{2,2} \leq c\,\|L_s(u - h)\ \|_2 + \|h\ \|_{2,2} = c\,\|L_s(h)\ \|_2 + \|h\ \|_{2,2} \leq C$$

para alguna constante C, independiente de ε, por lo tanto nuestro teorema queda demostrado.

3.2.1 Un metodo de super y subsoluciones.

En esta sección obtendremos soluciones del problema (3.2) utilizando el método de super y subsoluciones. Como en la sección anterior, consideramos el problema equivalente $(3.5)_1$. Nuestro principal resultado es el siguiente:

Teorema 3.2.4 *Supongamos que existe una constante no negativa α tal que*
i) $h(x,y) \leq \alpha$ para $(x,y) \in \partial\Omega$
ii) $g(\alpha) \geq 0$.
Entonces el problema $(3.5)_1$admite una solución $u \in H^2(\Omega)$, con $0 \leq u \leq \alpha$.

Dem:
Sea
$M = 0 \leq u \leq \alpha sup\,(g(u) + g'(u)u)\,,$
y elegimos una constante positiva s tal que
$s > \frac{2}{x^2}\frac{r}{V^2}M$
para cualquier x que verifique que $(x,y) \in \overline{\Omega}$ para algún y.
Sea la función $\Psi(x,u) = \frac{2}{x^2}\frac{rg(u)}{V^2}u - su$.
Ψ es estrictamente decreciente respecto de u, para $u \in [0,\alpha]$. Definimos la sucesión $\{u_n\}$ de la manera siguiente:
$u_0 \equiv \alpha$ y consideramos u_{n+1} como la única solución (dada por el teorema 2.2.2) del problema lineal

$$\begin{cases} Lu - su = \frac{2}{x^2}\frac{rg(u_n)}{V^2}u_n - su_n & \text{en } \Omega \\ u = h & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde

$$Lu = \triangle u + 2\rho\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \rho\frac{\partial u}{\partial x} - (1 - \frac{2r}{x^2V^2})\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Aseguramos que
(i) $0 \leq u_n \leq \alpha$ para todo n.
(ii) Para todo $(x,y) \in \Omega$, la sucesión $\{u_n(x,y)\}$ es decreciente.
Con el objetivo de demostrar los items (i) y (ii), procederemos inductivamente: asumamos, por ejemplo, que $u_1(x_0,y_0) > \alpha$ para algún $(x_0,y_0) \in \overline{\Omega}$. Como $u_1\mid_{\partial\Omega}= h \leq \alpha$, deducimos que $(x_0,y_0) \in \Omega$ y podemos asumir que (x_0,y_0) es un máximo. Como $\nabla u_1(x_0,y_0) = 0$, tenemos

$$\left(\triangle u_1 + 2\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} - su_1\right)\mid_{(x_0,y_0)} = \frac{2}{x^2}\frac{rg(\alpha)}{V^2}\alpha - s\alpha \geq -s\alpha.$$

Entonces

$$\left(\triangle u_1 + 2\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y}\right)\mid_{(x_0,y_0)} = s\left[u_1(x_0,y_0) - \alpha\right] > 0$$

Lo cual contradice el principio del máximo. Por otro lado, como Ψ es decreciente tenemos que $Lu_1 - su_1 = \Psi(x,\alpha) \leq \Psi(x,0) \leq 0$, y siendo que $u_1 \mid_{\partial\Omega}= h \geq 0$, obtenemos por el principio del mínimo que $u_1 \geq 0$.

Por hipótesis inductiva suponemos que $0 \leq u_n \leq u_{n-1}$. Como antes si $(u_{n+1} - u_n)(x_0, y_0) > 0$ es máximo, tenemos

$$\begin{aligned}(Lu_{n+1} - su_{n+1}) \quad \mid_{(x_0,y_0)} &= \left(\frac{2\ rg(u_n)}{x^2\ V^2}u_n - su_n\right) \mid_{(x_0,y_0)} \\ &\geq \left(\frac{2\ rg(u_{n-1})}{x^2\ V^2}u_{n-1} - su_{n-1}\right) \mid_{(x_0,y_0)}= (Lu_n - su_n) \mid_{(x_0,y_0)} .\end{aligned}$$

Entonces, como $\nabla u_{n+1}(x_0, y_0) = \nabla u_n(x_0, y_0)$, podemos concluir que

$$\left(\triangle(u_{n+1} - u_n) + 2\rho\frac{\partial^2(u_{n+1} - u_n)}{\partial x\partial y}\right) \mid_{(x_0,y_0)}= s\left[u_{n+1}(x_0, y_0) - u_n(x_0, y_0)\right] > 0,$$

lo cual resulta una contradicción. La desigualdad $u_{n+1} \geq 0$ se deduce como antes.

Luego, existe una función $u : \overline{\Omega} \to \Re$ tal que $u_n(x,y) \to u(x,y)$ para todo (x,y). Por el teorema 2.2.2, existe $H \in H^2(\Omega)$ tal que

$LH - sH = 0, \qquad H \mid_{\partial\Omega}= h.$

Mas aún,

$$\|u_{n+1} - H\ \|_{2,2} \leq c\,\|Lu_{n+1} - su_{n+1} - (LH - sH)\ \|_2 = c\,\|\Psi(.,u_n)\|_2$$

y $|\Psi(.,u_n)| \leq K$ para una constante K independiente de n. Entonces la sucesión $\{u_n\}$ es acotada en $H^2(\Omega)$. Sea p fijo tal que $2 < p < \infty$, y supongamos que $u_n \nrightarrow u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Luego debe existir una subsucesión $\{u_{n_j}\}$ donde

$\left\|u_{n_j} - u\right\|_{1,p} \geq \varepsilon$ para algún ε.

Por compacidad de la inclusión $H^2(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega)$, la sucesión $\{u_{n_j}\}$ admite una subsucesión que converge en $W^{1,p}(\Omega)$ para algún v con $\|v - u\|_{1,p} \geq \varepsilon$, una contradicción pues debido al teorema 8. tenemos que $u_n \to u$ puntualmente. Nos queda sólo tomar límite en la igualdad

$$Lu_{n+1} - su_{n+1} = \left(\frac{2\ rg(u_n)}{x^2\ V^2}u_n - su_n\right),$$

para concluir que

$$Lu = \frac{2\ rg(u)}{x^2\ V^2}u.$$

Capítulo 4

Modelo de Black y Scholes con costos de transaccion.

4.1 Introduccion

Numerosos autores han estudiado el efecto de los costos de transacción y la comercialización discreta del precio de la opción ([4], [19]). Se ha notado que el reajuste continuo del portafolio a replicar en presencia de costos de transacción resultaria oneroso y por lo tanto no sería una estrategia óptima. Es por ello que autores como [19] introducen en el modelo de Black- Scholes la noción de costo de transacción como un ajuste directamente proporcional a la cantidad de activos comprados o vendidos.

En 1985, Leland mostró que bajo los supuestos descriptos, una opción de compra europea sigue el modelo de Black y Scholes donde la volatilidad modificada estará dada por

$$\sigma_A = \sigma\sqrt{1 - A}$$

con

$$A = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{k}{\sigma\sqrt{\delta t}}$$

donde σ es la volatilidad del activo subyacente, k es el ajuste expresado como porcentaje y δt es el intervalo de tiempo entre sucesivos ajustes de la cartera.

En este trabajo suponemos que los costos de transacción se comportan como una función lineal decreciente $f(\nu) = (a - b\,|\nu|)$, $(a, b > 0)$, dependiente de la cantidad del activo necesario en cada rebalanceo.

Sea el portafolio constituido, en el instante t por

$\Pi = V - \triangle S$, donde $V = V(S,t)$ es el precio del intrumento derivado y S el precio del activo subyacente.

La variación del valor del portafolio en el período $(t, t + \delta t)$ estará dada por

$$\delta\Pi = \delta V - \triangle\delta S - [(a - b\,|\nu|)S\,|\nu|] = \delta V - \triangle\delta S - [(a - b\,|\nu|)\delta S\,|\nu|] + [(a - b\,|\nu|)S\,|\nu|] \tag{4.1}$$

donde v es el número de acciones compradas $(v > 0)$ o vendidas $(v < 0)$, comercializadas para mantener el portafolio en equilibrio y $\delta S = S(t + \delta t) - S(t)$.

Recordando el lema de Ito tenemos que

$$\delta V = \frac{\partial\, V}{\partial\, S}\delta S + \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial\,^2 V}{\partial\, S^2}\right]\delta t \tag{4.2}$$

Reemplazando (4.2) en (4.1) obtenemos

$$\delta\Pi = (\frac{\partial\, V}{\partial\, S} - \triangle)\delta S + \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial\,^2 V}{\partial\, S^2}\right]\delta t + [(a - b\,|\nu|)\delta S\,|\nu|] - [(a - b\,|\nu|)S\,|\nu|]$$

Puesto que $E\left[\delta S\,|\nu|\right] \simeq (\delta t)^{3/2}$, abandonando los términos de orden superior a uno en δt, escribimos

$$\delta\Pi = (\frac{\partial\, V}{\partial\, S} - \triangle)\delta S + \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial\,^2 V}{\partial\, S^2}\right]\delta t - [(a - b\,|\nu|)S\,|\nu|]$$

Siguiendo la misma estrategia que vimos en el Capítulo 1. para construir una cartera libre de riesgo, elegimos $\triangle = \frac{\partial\, V}{\partial\, S}(S,t)$ como el número de acciones mantenidas en el momento t, cuando el precio del activo es S.

Entonces, el número de acciones que hemos comercializado en el período $(t, t + \delta t)$ para permanecer con una estrategia de cobertura ha sido de:

$$\nu = \frac{\partial\, V}{\partial\, S}(S + \delta S, t + \delta t) - \frac{\partial\, V}{\partial\, S}(S,t)$$

Aplicando el lema de Ito a v, obtenemos

$$v \simeq \frac{\partial\,^2 V}{\partial\, S^2}\delta S + o(\delta t)$$

Puesto que $\delta S = \sigma S \phi \sqrt{\delta t} + O(\delta t)$, con $\phi \sim N(0,1)$; abandonando los términos de orden δt, vemos que

$$\nu \simeq \frac{\partial\,^2\, V}{\partial\, S\,^2}(S,t)\sigma S \phi \sqrt{\delta t}$$

Luego, el valor esperado de los costos de transacción está dado por

$$\begin{aligned} E\left[(a - b\,|\nu|)S\,|\nu|\right] &= E\left[aS\,|\nu| - bS\nu^2\right] = E(aS\,|\nu|) - E(bS\nu^2) = \quad (4.3) \\ &= aE(\left|\frac{\partial\,^2\, V}{\partial\, S\,^2}\right| \sigma S^2\,|\phi|) - bE(\left(\frac{\partial\,^2\, V}{\partial\, S\,^2}\right)^2 S^3 \sigma^2 \phi^2) \end{aligned}$$

Recordando que $E(|\phi|) = \sqrt{\frac{2\delta t}{\pi}}$ y $E(\phi^2) = \delta t$ y reemplazando en (4.3) obtenemos que

$$E\left[(a - b\,|\nu|)S\,|\nu|\right] = \left|\frac{\partial\,^2 V}{\partial\, S^2}\right| \sigma S^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\delta t} a - bS^3 \left(\frac{\partial\,^2\, V}{\partial\, S\,^2}\right)^2 \sigma^2 \delta t$$

Dado que la estrategia resulta libre de riesgo tenemos que $\delta\Pi = r\Pi\delta t$ donde r es la tasa de interés.

Reemplazando, obtenemos finalmente la ecuación

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial\,^2 V}{\partial\, S^2} - a\left|\frac{\partial\,^2 V}{\partial\, S^2}\right| \sigma S^2 \sqrt{\frac{2}{\pi \delta t}} + \left(\frac{\partial\,^2\, V}{\partial\, S\,^2}\right)^2 bS^3\sigma^2 + r\left(\frac{\partial\, V}{\partial\, S}S - V\right) = 0 \quad (4.4)$$

Asumiendo que a es suficientemente pequeña, tenemos que $\widetilde{\sigma}^2 = \sigma^2 \left(1 - \frac{a}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi\ \delta t}}\right) > 0$.

Como deducimos en el capítulo 1., la solución de la ecuación clásica de Black y Scholes es

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial\, C}{\partial\, S}(S,t) = N(d_1)$$

$$\frac{\partial\, ^2C}{\partial\, S^2}(S,t) = \frac{e^{\frac{-d_1^2}{2}}}{S\sigma\sqrt{t}} > 0$$

Dado que la solución es una función convexa en S, podemos asumir que las soluciones del problema generalizado también son convexas respecto de S y en consecuencia el problema estacionario para (4.4) nos queda de la siguiente manera

$$\frac{1}{2}\widetilde{\sigma}^2 S^2 \frac{\partial\, ^2V}{\partial\, S^2} + b\sigma^2 S^3 \left(\frac{\partial\, ^2\, V}{\partial\, S\, ^2}\right)^2 + r\left(\frac{\partial\, V}{\partial\, S} S - V\right) = 0 \tag{4.5}$$

En la presente sección estudiaremos el problema (4.5) bajo condiciones de Dirichlet,

$$V(c) = V_c, \qquad V(d) = V_d, \tag{4.6}$$

para constante fijas $d > c > 0$.

Nuestro principal resultado es el siguiente:

Teorema 4.1.1 *El problema (4.5)- (4.6) admite una solución convexa (la cual es única) si y sólo si*
$\frac{V\,_d}{d} \leq \frac{V\,_c}{c}$

Dem:

Mediante el cambio de variables dado por

$x = lnS, \qquad u(x) = V(S)$

entonces, si $y(x) = \frac{\partial\, u}{\partial\, x} - u$, tenemos que $y'(x) = S^2 V''(S)$ y dado que V es una función convexa,

$y'(x) > 0.$

Mas aún, (4.5)- (4.6) puede ser escrito como

$$\frac{1}{2}\widetilde{\sigma}^2 y' + b\sigma^2 e^{-x}\,(y')^2 + ry = 0$$

o en forma equivalente

$$y'(x) = f(x,y), \qquad \overline{c} \leq x \leq \overline{d} \tag{4.7}$$

donde $f(x,y) = \frac{-\frac{1}{2}\widetilde{\sigma}^2 + \sqrt{\frac{\widetilde{\sigma}^4}{4} - 4ryb\sigma^2 e^{-x}}}{2b\sigma^2 e^{-x}}$, $\overline{c} = ln\ c$, $\overline{d} = ln\ d$.

Como $y' > 0$, podemos deducir que $y \leq y(\overline{d})$.

Para $K \leq 0$ consideramos y_K como la única solución de (4.7) con $y_K(\overline{d}) = K$.

Debido a resultados clásicos, consultar por ejemplo [11], se sigue que y_K está definida en $\left[\overline{c}, \overline{d}\right]$ y la función $K \to y_K$ es continua con la norma de $C\left(\left[\overline{c}, \overline{d}\right]\right)$.

Por otro lado, si definimos u_K como la única solución de $u_K' - u_K = y_K$, asumiendo la condición que $u_K(\overline{d}) = V_d$, obtenemos que

$$u_K(x) = \left(e^{-\overline{d}} V_d - \int_x^{\overline{d}} y_K(t) e^{-t} dt \right) e^x$$

Como $y_K \leq K$ en $\left[\overline{c}, \overline{d}\right]$, vemos que

$u_K(\overline{c}) \geq e^{\overline{c}-\overline{d}} V_d - K(1 - e^{\overline{c}-\overline{d}}) \to +\infty$ cuando $K \to -\infty$.

Asimismo notamos que $u_K(\overline{c})$ es estrictamente decreciente respecto de K. En efecto

$\frac{\partial}{\partial\ K}(u_K(\overline{c})) = \left(-\int_{\overline{c}}^{\overline{d}} \frac{\partial}{\partial\ K} y_K(t) e^{-t} dt \right) e^x.$

Veamos que $\frac{\partial}{\partial\ K} y_K(t) > 0$.

Sea $v(t) = \frac{\partial}{\partial\ K} y_K(t)$, por resultados clásicos [11], sabemos que $v(t)$ es solución de

$$\begin{cases} v'(t) = \frac{\partial f(t,y)}{\partial\ y} v(t) \\ v(0) = 1 \end{cases}$$

y por lo tanto $v(t) = e^{\int_0^t \frac{\partial\ f(s,y)}{\partial\ y} v(s) ds} > 0$.

Luego $\frac{\partial}{\partial\ K}(u_K(\overline{c})) < 0$ y en consecuencia $u_K(\overline{c})$ es estrictamente decreciente respecto de K.

Resumiendo lo expuesto podemos concluir :

(i) Si $u_0(\overline{c}) \leq V_c$, existe un único $K \leq 0$ tal que $V_c = u_K(\overline{c})$ y por lo tanto $V(S) = u_K(x)$ es una solución de (4.5)- (4.6).

(ii) Si $u_0(\overline{c}) > V_c$, (4.5- 4.6) no tiene solución.

Como $y_0 \equiv 0$, $u_0(x) = e^{x-\overline{d}} V_d$ y por lo tanto $u_0(\overline{c}) = e^{\overline{c}-\overline{d}} V_d \leq V_c$ y el resultado se sigue en forma análoga al item (i).

4.1.1 Soluciones para el problema de evolucion

En esta sección consideraremos el problema no estacionario (4.4) bajo condiciones de Dirichlet y condiciones finales:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\widetilde{\sigma}^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + b\sigma^2 S^3 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)^2 + r\left(\frac{\partial V}{\partial S}S - V\right) = 0 \\ V(T,S) = f(S) \qquad S \in (c,d) \\ V(t,c) = f(c) \qquad V(t,d) = f(d) \end{cases}$$

para $f \in C([c,d])$.

Sea el cambio de variable dado por $W(t,x) = V(T-t, e^x)$ en el dominio $\Omega = (0,T) \times (\overline{c}, \overline{d})$.

Luego obtenemos el siguiente problema

$$\begin{cases} -\frac{\partial W}{\partial t} + A(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial W}{\partial x}) + r\left(\frac{\partial W}{\partial x} - W\right) = 0 \\ W(0,x) = f(e^x) \qquad x \in (\overline{c}, \overline{d}) \\ W(t,\overline{c}) = f(e^{\overline{c}}) \qquad V(t,\overline{d}) = f(e^{\overline{d}}) \end{cases} \tag{4.8}$$

donde

$$A = \frac{1}{2}\widetilde{\sigma}^2 + b\sigma^2 e^{-x}(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial W}{\partial x})$$

Llamando

$$Z(t,x) = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(t,x) - \frac{\partial W}{\partial x}(t,x), \qquad P = Z_x$$

obtenemos la siguiente ecuación

$$-Z_t + a(x,Z)Z_{xx} + d(x,Z,P) = 0 \tag{4.9}$$

bajo las condiciones dadas por

$$\begin{aligned} Z(0,x) &= Z_0(x) \qquad x \in \left[\overline{c}, \overline{d}\right] \\ Z(t,\overline{c}) &= Z_0(\overline{c}), \qquad Z(t,\overline{d}) = Z_0(\overline{d}) \end{aligned} \tag{4.10}$$

donde

$$a(x,Z) = \frac{1}{2}\widetilde{\sigma}^2 + 2b\sigma^2 e^{-x} Z$$

$$d(x,Z,P) = -6b\sigma^2 e^{-x} ZP + 2b\sigma^2 e^{-x} P^2 + (r - \frac{1}{2}\widetilde{\sigma}^2)P - Z(r - 2b\sigma^2 e^{-x} Z)$$

y $Z_0(x) = f''(e^x)e^{2x}$.
Definamos

$$\widetilde{a}(x, Z) = a(x, [Z]_+)$$

y

$$\widetilde{d}(x, Z, P) = -6b\sigma^2 e^{-x} ZP + 2b\sigma^2 e^{-x} P^2 + (r - \frac{1}{2}\widetilde{\sigma}^2)P - Z\left[r - 2b\sigma^2 e^{-x} Z\right]_+$$

Consideremos el problema

$$-Z_t + \widetilde{a}(x, Z)Z_{xx} + \widetilde{d}(x, Z, P) = 0 \tag{4.11}$$

con las condiciones (4.10).

Proposición 4.1.2 *Dada* $Z_0 \in C(\left[\overline{c}, \overline{d}\right])$, *existe una solución* $Z \in C^{2,1}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *para (4.11)- (4.10).*

Dem:
Vemos que $\widetilde{a}(x, Z) \geq \frac{1}{2}\widetilde{\sigma}^2$, y es claro que para cada $R > 0$, $\widetilde{a}$ es una función de Lipschitz en $\left[\overline{c}, \overline{d}\right] \times [-R, R]$. Mas aún $\widetilde{d}(x, Z, P)$ es una función de Lipschitz en $\left[\overline{c}, \overline{d}\right] \times [-R, R] \times [-R, R]$ y satisface

$$Z\widetilde{d}(x, Z, 0) \leq 0$$

Notemos que, para todo Z fijo tenemos que

$$|P| \left|\frac{\partial\, \widetilde{a}}{\partial Z}(x, Z)\right| + \left|\frac{\partial\, \widetilde{a}}{\partial x}(x, Z)\right| + \widetilde{d}(x, Z, 0) \leq C\, |P|^2$$

cuando $|P| \to +\infty$. Debido al Teorema 12.16 en [20] se sigue la demostración.

Teorema 4.1.3 *Para* $Z_0(x) = f''(e^x)e^{2x}$, *sea* Z *la solución dada por la proposición anterior, y asumiendo que*

$$0 \leq f''(y) \leq \frac{r}{2b\sigma^2 y} \qquad \textit{para } y \in [c, d]$$

Entonces Z *es solución de (4.9)- (4.10).*

Dem:

Se sigue de la hipótesis que $Z_0(x) \leq \frac{r\ e^x}{2b\sigma^2}$. Luego por el principio del máximo Z satisface

$$0 \leq Z(t,x) \leq \frac{r\ e^x}{2b\sigma^2}, \qquad (t,x) \in [0,T] \times \left[\overline{c}, \overline{d}\right]$$

Entonces

$$\widetilde{a}(x,Z) = a(x,Z), \qquad \widetilde{d}(x,Z,P) = d(x,Z,P)$$

por lo tanto queda asi probado.

Observación 4.1.4 *Si Z es solución de (4.9)- (4.10), es fácil obtener una solución de (4.8) a partir de la igualdad $Z(t,x) = \frac{\partial\ ^2W}{\partial\ x^2}(t,x) - \frac{\partial\ W}{\partial\ x}(t,x)$ y de las condiciones de contorno.*

Observación 4.1.5 *Es claro que los coeficientes $a(x,Z)$, $d(x,Z,P)$ y sus derivadas parciales respecto a Z y a P son acotadas sobre cualquier subconjunto compacto de $\left[\overline{c}, \overline{d}\right] \times \Re^2$.*

Por lo tanto, debido al teorema 2.8 en [18] podemos concluir que el problema (4.11) no tiene mas de una solución en $C^{2,1}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Capítulo 5

Un problema parabolico sobre un dominio no acotado

5.1 Introduccion

En el Capítulo 3. hemos estudiado el problema estacionario con condiciones de Dirichlet obtenido a partir de suponer que la volatilidad del activo subyacente sigue un movimiento browniano.

Modelos mas generales con volatilidad estocástica han sido considerados, por ejemplo, en [3], donde por medio de la relación de Feynman- Kac [9], se obtiene el siguiente problema:

$$\begin{cases} u_t &= \frac{1}{2}Tr\,(M(x,\tau)D^2u) + q(x,\tau)\cdot Du, \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{cases}$$

En esta ecuación M es una matriz difusiva y u_0 es la función de "payoff".

En base a esta introducción, podemos considerar el siguiente problema parabólico

$$\begin{cases} Lu - u_t &= g(u,x,t) \quad en \quad \Omega \times (0,T) \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad en \quad \Omega \times \{0\} \\ u(x,t) &= h(x,t) \quad en \quad \partial\Omega \times (0,T) \end{cases} \tag{5.1}$$

Asumimos que $\Omega \subset \Re^d$ es un dominio suave no acotado, $g : [0,+\infty) \times \overline{\Omega} \times [0,T] \to [0,+\infty)$ es continua y continuamente diferenciable con respecto a u, L es el operador elíptico definido en el capítulo 2. cuyos coeficientes pertenecen al espacio de Hölder $C^{\delta,\delta/2}\left(\overline{\Omega}\times[0,T]\right)$ y satisfacen las siguientes condiciones:

$$\Lambda|v|^2 \geq \sum_{i,j=1}^{d} a^{ij}(x,t)v_i v_j \geq \lambda|v|^2 \qquad (\Lambda \geq \lambda > 0)$$

$$|b^i(x,t)| \leq C, \qquad c(x,t) \leq 0.$$

Asimismo, asumimos que $u_0 \in C^{2+\delta}(\overline{\Omega})$, $h \in C^{2+\delta,1+\delta/2}(\overline{\Omega} \times [0,T])$ y satisface la siguiente condición de compatibilidad:

$$h(x,0) = u_0(x) \qquad \forall\, x \in \partial\Omega \tag{5.2}$$

Nuestro principal resultado es el siguiente.

Teorema 5.1.1 *Sea $T > 0$, $g(0,x,t) = 0$ y L el operador elíptico definido anteriormente.*

Entonces existe $\theta_0 = \theta_0(\Lambda, d, \|b\|_\infty, T)$ tal que si $\theta < \theta_0$ y u_0, h satisfacen las siguientes acotaciones:

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_0(x) \leq kT^{-\frac{d}{2}} e^{\frac{\theta}{T}|x|^2} \\ 0 &\leq h(x,t) \leq k(T-t)^{-\frac{d}{2}} e^{\frac{\theta}{T-t}|x|^2} \end{aligned}$$ *para $x \in \partial\Omega$, $0 \leq t < T$, siendo k una constante positiva.*

El problema (5.1) tiene al menos una solución u que satisface:

$$0 \leq u(x,t) \leq k(T-t)^{-\frac{d}{2}} e^{\frac{\theta}{T-t}|x|^2}.$$

Daremos una demostración del teorema 5.1.1 en la sección (5.2), usando el método de super y sub soluciones y un argumento diagonal. Recordemos que u es una super (sub) solución del problema (5.1) si

$$\begin{cases} Lu - u_t & \leq\ (\geq) & g(u,x,t) & en & \Omega \times (0,T) \\ u(x,0) & \geq\ (\leq) & u_0(x) & en & \Omega \times \{0\} \\ u(x,t) & \geq\ (\leq) & h(x,t) & en & \partial\Omega \times (0,T) \end{cases}$$

Asimismo, deduciremos que la solución es única, a partir de la siguiente versión del principio del máximo.

Teorema 5.1.2 ***Teorema 5.1.3*** *En la situación del teorema 5.1.1, sea $\tilde{T} < T$ y u una subsolución de (5.1) en el dominio $V = \Omega \times (0, \tilde{T})$ tal que $0 \leq u \leq$*

$Ke^{A|x|^2}$ para ciertas constantes A y K tal que $A \leq \theta_0$. Ademas, asumimos que g es creciente en u. Entonces

$$\sup_V u = \sup_{\partial' V} u,$$

donde $\partial' V = (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, \tilde{T}])$ denota la frontera parabólica V.

La demostración del teorema 5.1.3 será probada en la sección 5.3.

5.2 El metodo de super y subsoluciones

Con el objeto de probar el teorema 5.1.1, aplicaremos el método de super y sub soluciones.

Hemos de considerar $\alpha \equiv 0$ y $\beta = k(T-t)^{-\frac{d}{2}} e^{\frac{\theta}{T-t}|x|^2}$. Dado que $g(0,x,t) = 0$, resulta que α es una subsolución, y mediante un cálculo simple se puede ver que β satisface:

$$L\beta - \beta_t = \beta \Big\{ \left(\frac{2\theta}{T-t}\right)^2 \sum_{i,j=1}^{d} a^{ij} x_i x_j + \frac{2\theta}{T-t} \sum_{i=1}^{d} a^{ii} + \frac{2\theta}{T-t} \sum_{i=1}^{d} b^i x_i + c - \left[\frac{d}{2(T-t)} + \frac{\theta}{(T-t)^2} |x|^2 \right] \Big\}$$

De nuestros supuestos y del hecho que $\sum_{i=1}^{d} a^{ii} \leq \Lambda$ y $2\sum_{i=1}^{d} b^i x_i \leq \varepsilon |x|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|b\|_\infty^2$, se deduce que

$$\frac{1}{\beta}(L\beta - \beta_t) \leq (4\theta\Lambda - 1 + \varepsilon(T-t)) \frac{\theta |x|^2}{(T-t)^2} + \frac{1}{T-t} \left[2\theta\Lambda - \frac{d}{2} + \frac{1}{\varepsilon}\theta\|b\|_\infty^2 + c \right].$$

Tomando $\varepsilon < \frac{1}{T}$, y

$$\theta \leq \min\left\{ \frac{1 - T\varepsilon}{4\Lambda}, \frac{d\varepsilon}{2\|b\|_\infty^2 + 4\Lambda} \right\},$$

se sigue que

$$L\beta - \beta_t \leq 0 \leq g(\beta).$$

Como $u_0(x) \leq \beta(x,0)$ y $h(x,t) \leq \beta(x,t)$ para $x \in \partial\Omega$, concluimos que β es una supersolución del problema.

Observación 5.2.1 ***Observación 5.2.2*** *Si U es un subconjunto suave y acotado de Ω, por [17], Teo. 10.4.1 y la condición de compatibilidad (5.2), existe una única función $\varphi_U \in C^{2+\delta,1+\delta/2}(\overline{U} \times [0,T])$ tal que*

$$\begin{cases} L\varphi_U - (\varphi_U)_t &= 0, \\ \varphi_U(x,0) &= u_0(x) \quad x \in U \\ \varphi_U(x,t) &= h(x,t) \quad (x,t) \in \partial U \times [0,T] \end{cases}$$

Por el principio del máximo, obtenemos que

$$0 \leq \varphi_U(x,t) \leq \beta(x,t)$$

para $(x,t) \in \overline{U} \times [0,T]$.

Primero resolveremos el problema análogo en un dominio acotado y luego extenderemos nuestros resultados utilizando un argumento diagonal.

Lema 5.2.3 ***Lema 5.2.4*** *Sea $U \subset \mathbb{R}^d$ un dominio suave y acotado, $\tilde{T} < T$ y φ_U definida como en la observación 5.2.2. Entonces el problema*

$$\begin{cases} Lu - u_t &= g(u,x,t) \quad en \quad U \times (0,\tilde{T}) \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad en \quad U \times \{0\} \\ u(x,t) &= \varphi_U(x,t) \quad en \quad \partial U \times (0,\tilde{T}) \end{cases} \tag{5.3}$$

admite al menos una solución u donde $0 \leq u(x,t) \leq \beta(x,t)$ para $x \in U, 0 \leq t \leq \tilde{T}$.

Demostracón 5.2.5 *Dem:*

Sea $\lambda > 0$ tal que la función $g(u,x,t) - \lambda u$ es decreciente en u para $0 \leq u \leq \max_{x\in\partial U} \beta(x,\tilde{T})$. Sea $u^0 = 0$ y $V = U \times (0,\tilde{T})$. Por resultados clásicos, los cuales pueden ser consultados en [10], podemos definir $u^{n+1} \in W_p^{2,1}(V)$, $p > d$, como la única solución del siguiente problema lineal

$$\begin{cases} Lu^{n+1} - u_t^{n+1} - \lambda u^{n+1} &= g(u^n,x,t) - \lambda u^n \quad en \quad U \times (0,\tilde{T}) \\ u^{n+1}(x,0) &= u_0(x) \quad en \quad U \times \{0\} \\ u^{n+1}(x,t) &= \varphi_U(x,t) \quad en \quad \partial U \times (0,\tilde{T}) \end{cases} \tag{5.4}$$

Veamos que la sucesión u^n satisface las siguientes desigualdades

$$0 \leq u^n(x,t) \leq u^{n+1}(x,t) \leq \beta(x,t)$$

para todo $(x,t) \in \overline{U} \times [0,\tilde{T}]$, *para todo* $n \in \mathbb{N}_0$ *y por lo tanto,* u^n *resultará ser una sucesión creciente y acotada. Por el principio del mínimo para dominios acotados tenemos que* $u^1 \geq 0$*; mas aún, como*

$$Lu^1 - u_t^1 - \lambda u^1 = g(0,x,t) \geq g(\beta,x,t) - \lambda\beta \geq L\beta - \beta_t - \lambda\beta$$

por el principio del máximo obtenemos que $u^1 \leq \beta$*. Inductivamente,*

$$Lu^{n+1} - u_t^{n+1} - \lambda u^{n+1} = g(u^n,x,t) - \lambda u^n \leq g(u^{n-1},x,t) - \lambda u^{n-1} =$$

$$= Lu^n - u_t^n - \lambda u^n$$

Entonces $u^{n+1} \geq u^n$*. De la misma manera que antes podemos ver la desigualdad* $u^{n+1} \leq \beta$*.*

Por la inclusión de Morrey, podemos asegurar la existencia de $u(x,t)$ *como el límite puntual de* $u^n(x,t)$*.*

$$u(x,t) = \lim_{n\to\infty} u^n(x,t).$$

Debido a las estimaciones L^p *([20], Teo 7.17), sabemos que existe una constante c>0 tal que*

$$\|D^2(u^n - u^m)\|_{L^p(V)} + \|(u^n - u^m)_t\|_{L^p(V)}$$
$$\leq c\left(\|L(u^n - u^m) - (u^n - u^m)_t\|_{L^p(V)} + \|u^n - u^m\|_{L^p(V)}\right)$$

Por construcción,

$$L(u^n - u^m) - (u^n - u^m)_t = g(u^{n-1},x,t) - g(u^{m-1},x,t) - \lambda(u^{n-1} - u^{m-1})$$

. Como g es continua, u^n *converge puntualmente a u y* $0 \leq u^n \leq \beta$*, por convergencia mayorada se sigue que* $\{u^n\}$ *es una sucesión de Cauchy en* $W_p^{2,1}(V)$*. Por lo tanto* $u^n \to u$ *con la norma de* $W_p^{2,1}(V)$*, luego dado que g es continuamente diferenciable respecto de u tenemos que u pertenece a* $W_p^{3,2}(V)$ *y por lo tanto es una solución fuerte. Mas aún, debido a los estimadores de Schauder, los cuales pueden ser consultados en [17] se sigue que u pertenece a* $C^{2+\delta,1+\delta/2}(V)$ *y por lo tanto es una solución clásica.*

Luego, hemos probado que el problema (5.1) sobre un dominio acotado admite solución.

Demostracion del Teorema 5.1.1

Aproximamos el dominio Ω por una sucesión creciente $(\Omega_N)_{N\in\mathbb{N}}$ de subdominios suaves y acotados de Ω, los cuales pueden ser elegidos de manera tal que $\partial\Omega$ se pueda expresar como la unión de la sucesión creciente $\{\partial\Omega_N \cap \partial\Omega\}_{N\in\mathbb{N}}$.

Luego, se define u^N como la solución del problema

$$\begin{cases} Lu - u_t &= g(u,x,t) \quad en \quad \Omega_N \times (0, T - \frac{1}{N}) \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad en \quad \Omega_N \times \{0\} \\ u(x,t) &= h(x,t) \quad en \quad \partial\Omega_N \times (0, T - \frac{1}{N}) \end{cases} \tag{5.5}$$

tal que $0 \le u^N \le \beta$ en $\Omega_N \times (0, T - \frac{1}{N})$. Definimos $V_N = \Omega_N \times (0, T - \frac{1}{N})$ y elegimos $p > d$. Para cada $M > N$, tenemos que

$$\|D^2(u^M)\|_{L^p(V_N)} + \|(u^M)_t\|_{L^p(V_N)} \le c\left(\|Lu^M - (u^M)_t\|_{L^p(V_N)} + \|u^M\|_{L^p(V_N)}\right)$$

$$\le c\left(\|g(u^M,\cdot)\|_{L^p(V_N)} + \|\beta\|_{L^p(V_N)}\right) \le C$$

para alguna constante C dependiente solamente de N. Debido al teorema 2.1.4, existe una subsucesión que converge uniformemente en $\overline{V}_N$, la cual denotaremos $\{u^N_M\}_M$. Usando un argumento diagonal, podemos extraer una subsucesión ($\{u^N_N\}_{N\in\mathbb{N}} = u^N$) tal que u^N converge uniformemente a una función u sobre subconjuntos compactos de $\Omega \times (0,T)$. Para $V = U \times (0, \tilde{T})$, $U \subset\subset \Omega$, $\tilde{T} < T$, tomando M, N suficientemente grandes tenemos que

$$\|D^2(u^N - u^M)\|_{L^p(V)} + \|(u^N - u^M)_t\|_{L^p(V)}$$

$$\le c\left(\|L(u^N - u^M) - (u^N - u^M)_t\|_{L^p(V)} + \|u^N - u^M\|_{L^p(V)}\right)$$

Por construcción,

$$L(u^N - u^M) - (u^N - u^M)_t = g(u^{M-1}, x, t) - g(u^{M-1}, x, t) - \lambda(u^{N-1} - u^{M-1})$$

Como hicimos anteriormente, dado que g es continua, y que $0 \le u^N \le \beta$, por convergencia mayorada tenemos que $\{u^N\}$ es una sucesión de Cauchy en $W^{2,1}_p(V)$. Luego $u^N \to u$ en $W^{2,1}_p$, y u es una solución clásica en V. Por lo tanto u satisface la ecuación en $\Omega \times (0,T)$. Mas aún, es claro que $u(x,0) = u_0(x)$. Para $M > N$ tenemos que $u_M(x,t) = u_N(x,t)$ con $x \in \partial\Omega \cap \partial\Omega_N$, $t \in (0, T - \frac{1}{N})$. De lo visto anteriormente, se sigue que u satisface la condición de contorno $u(x,t) = h(x,t)$ sobre $\partial\Omega \times [0,T)$.

5.3 El Principio del Maximo para el problema (5.1)

En esta sección daremos una demostración del Teorema 5.1.3.

Queremos ver que

$$\sup_{\overline{V}} u(x,t) = \sup_{\partial' V} u(x,t)$$

donde $V = \Omega \times \left(0, \widetilde{T}\right)$y $\partial' \, V = (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times \left[0, \widetilde{T}\right])$ denota la frontera parabólica de V.

Consideramos $M = \sup_{\partial' V} u(x,t)$

Si M no es un número finito, dado que $\sup_{\overline{V}} u(x,t) \geq \sup_{\partial' V} u(x,t)$ concluímos que $\sup_{\overline{V}} u(x,t) =$ tampoco es un número finito y por lo tanto la igualdad que queremos probar se satisface trivialmente.

Luego, supongamos que $\sup_{\partial' V} u(x,t)$ es finito.

Para $\varepsilon > 0$ tomamos

$$v(x,t) = u(x,t) - \varepsilon\beta(x,t).$$

Como β es una función creciente en t,

$$v(x,t) \leq Ke^{A|x|^2} - \varepsilon T^{-\frac{d}{2}} e^{\frac{\theta}{T}|x|^2}.$$

Eligiendo $\theta > TA$, podemos concluir que

$$\lim_{|x|\to\infty} \left[\sup_{0 \leq t \leq \tilde{T}} v(x,t) \right] = -\infty.$$

Entonces podemos elegir R suficientemente grande de manera tal que

$$v(x,t) \leq M = \sup_{\partial' V} u(x,t)$$

para $x \in \Omega$, $|x| \geq R$ y $0 \leq t \leq \tilde{T}$.

Tomando $\varepsilon \to 0$, concluímos que

$$\sup_{\overline{V}} u \leq M = \sup_{\partial' V} u(x,t) \text{ cuando } |x| \geq R \text{ , y } 0 \leq t \leq \tilde{T}.$$

Por otro lado tenemos,

$$\begin{aligned} Lv - v_t - g(v,x,t) &= Lu - u_t - \varepsilon(L\beta - \beta_t) - g(u - \varepsilon\beta, x, t) \geq Lu - u_t - g(u,x,t) \\ &\quad -\varepsilon(L\beta - \beta_t - \lambda\beta) \end{aligned}$$

pues $g(u) - \lambda u$ es decreciente respecto de u.

Recordando que u es una subsolución y β es una supersolución del problema (5.1), vemos que $Lu - u_t - g(u,x,t) \geq 0$ y que $L\beta - \beta_t - g(\beta,x,t) \leq 0$ y por lo tanto $L\beta - \beta_t \leq g(\beta,x,t) \leq \lambda\beta$.

Luego concluímos

$$Lv - v_t - g(v,x,t) \geq 0$$

Como en la demostración presentada en el teorema 5.1.1, podemos aproximar el dominio Ω por una sucesión creciente $(\Omega_N)_{N\in\mathbb{N}}$ de subdominios suaves y acotados de Ω, elegidos de tal manera que $\partial\Omega$ se pueda expresar como la unión de una sucesión creciente $\partial\Omega_N \cap \partial\Omega$. Dado $R > 0$ podemos elegir N suficientemente grande, de manera tal que si $x \in \partial\Omega_N$ entonces $x \in \partial\Omega$ o $|x| \geq R$.

Cuando $|x| \geq R$ ya hemos demostrado la igualdad, luego si $x \in \partial\Omega \cap \partial\Omega_N$ deducimos debido al principio del máximo para dominios acotados que

$$v(x,t) \leq \sup_{\partial'\Omega_N} v(x,t) \leq M.$$

Tomando $\varepsilon \to 0$, podemos concluir que $u(x,t) \leq M$ para $0 \leq t \leq \tilde{T}$ finalizando nuestra demostración.

Bibliografía

[1] Avellaneda M., *Quantitative modeling of derivative securities, Chapman & Hall/CRC, (2000).*

[2] Avellaneda M., Y.Zhu, *Risk neutral stochastic volatily model. Int. J.Theor. Appl.Finance 1, No2, 289-310 (1998).*

[3] Berestycki H., Busca J., Florent I., *Computing the Implied Volatility in Stochastic Volatility Models. Commun. Pure and Appl. Math., (2004).*

[4] Black F., Scholes M., *The pricing of options and corporate liabilities, J. Political Econ. 81, pp. 637-659 (1973).*

[5] Bouchouev I, Isakov V., *Uniqueness, stability and numerical methods for the inverse problem that arises in financial markets. Inverse Problems, 15 pp. R95-R116. (1999).*

[6] Cox J. C., Rubinstein M., *Options Market, Prentice Hall, Inc. (1985).*

[7] Duffie D., *Dynamic asset pricing theory, Princeton University Press, (1996).*

[8] Engl H., Kügler P., *Nonlinear Inverse Problems: Theoretical Aspects and Some Industrial Applications. To appear in Springer Lecture Notes in Mathematics (2003).*

[9] Evans L. C., *An introduction to stochastic differential equations, Department of Mathematics, UC Berkeley.*

[10] Gilbarg, D., Trudinger, N.S, *Elliptic partial differential equations of second order, Springer- Verlag (1983).*

[11] Hartman P., *Ordinary Differential Equations. J Wiley (1964).*

[12] Heston S.L., *A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. Review of Financial Studies 6, 327 (1993).*

[13] Hull J. C., *Options, Futures, and other Derivatives. Prentice - Hall, Inc. (1997).*

[14] Hein T., Hofmann B., *On the nature of ill-posedness of an inverse problem arising in option pricing. Inverse Problems, 19 pp. 1319–1338. (2003).*

[15] Ikeda, S. Watanabe, *Stochastic Differential Equations and Diffusion processes.North- Holland, (1989).*

[16] Jarrow R. A., *Modelling Fixed Income Securities and Interest Rate Options, Mc.GrawHill, (1997).*

[17] Krylov N. V., *Lectures on elliptic and parabolic equations in Hölder Spaces. Graduate Studies in Math. Vol 12, AMS (1996).*

[18] Ladyzenskaja, O.A., *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type.*

[19] Leland H. E., *Option Pricing and replication with Transaction Cost, The Journal of Finance, 40:1283-1301. (1995).*

[20] Lieberman G. M., *Second order parabolic differential equations. World Sc. Publ., (1996).*

[21] Melinsky, E., *Opciones sobre acciones en los mercados de valores, IAMC.*

[22] Wilmott P.,Dewynne J., Howison S., *Option Pricing, Oxford Financial Press, Oxford (1993).*