

Tesis de Posgrado

Dinámica de Mode-Locking por efecto Kerr

Sánchez, Laura Mabel

2003

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Sánchez, Laura Mabel. (2003). Dinámica de Mode-Locking por efecto Kerr. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3667_Sanchez.pdf

Cita tipo Chicago:

Sánchez, Laura Mabel. "Dinámica de Mode-Locking por efecto Kerr". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2003.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3667_Sanchez.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

Dinámica de Mode-Locking por efecto Kerr

por *Laura Mabel Sanchez*

Director de Tesis: Dr. Alejandro A. Hnilo

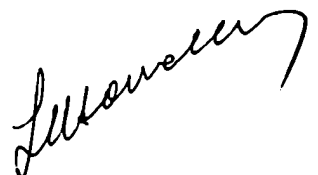
Lugar de Trabajo: Centro de Investigaciones en Láseres y Aplicaciones
(CEILAP), CITEFA-CONICET

Trabajo de Tesis para optar por el título de
Doctor de la universidad de Buenos Aires

30 de septiembre de 2003

3667


A. HNILO



ABSTRACT

Los pulsos laser ultracortos (picosegundos y femtosegundos) son cada vez más importantes en ciencia y tecnología, por lo que es de gran interés el estudio de las técnicas que permiten obtenerlos. La mas difundida es la llamada *Kerr lens mode locking* (KLM), y es la empleada en el laser de Ti:Zafiro, que es actualmente la fuente más utilizada de pulsos ultracortos. Como los pulsos generados por estos lasers presentan a menudo una gran variedad de inestabilidades, (comportamientos cuasi-periódicos, variaciones en algunos parámetros del pulso y no en otros, y hasta caos determinístico), es importante por razones prácticas y académicas entender la dinámica resultante en detalle. En esta Tesis llamada *Dinámica del mode-locking por efecto Kerr* se desarrolla un modelo adecuado para describir el caso más general posible (no restringido ningún otro material activo o diseño de cavidad en particular), y se alcanza una comprensión de la dinámica del fenómeno de KLM y sus características esenciales accesible intuitivamente.

También existe una aparente contradicción entre la postura de algunos autores, que sostienen que la presencia de aberturas espaciales transversales dentro de la cavidad del laser, convenientemente ubicadas son indispensables para que este tipo de funcionamiento se pueda lograr, y las evidencias teóricas y experimentales que indican que una descripción sin aberturas puede explicar satisfactoriamente gran parte del comportamiento de los lasers de Ti:Zafiro. En esta Tesis se determina que las aberturas espaciales no son indispensables para describir al KLM, independientemente del medio activo que se tome.

PALABRAS CLAVE: *Mapas iterativos, cavidades laser, efecto Kerr, Sistemas disipativos, Mode-locking por lente de Kerr*

ABSTRACT

Ultrashort laser pulses (picoseconds and femtoseconds) are becoming very important in Science and technology, so there is a great interest in the technics from they can be obtained. The most important one is the *Kerr lens mode locking* (KLM), which is widely used for Ti:Zafiro laser, the most usual source for short pulses. This pulses exhibit instabilities, as quasiperiodic behaviours, and deterministic chaos, so is very important from both, the academic and practical point of view to understand their dynamics. In this Thesis, a deep comprehension of the KLM dynamics and essential characteristics is achieved, with a very simple and general model, for any active medium and any cavity design.

There is although a conceptual discussion about the roll of apertures in KLM. Some authors put forward the idea of fast saturable absorber, which is usually recognized as essential to KLM, but there are theoretical and experimental evidence indicating that is possible to describe the Ti:Zaphire lasers behaviour, without including apertures in the model. The fact that spatial apertures are not necessary for KLM description, is demonstrated In this Thesis.

KEY WORDS: *Iterative maps, Laser cavities, Kerr effect, Dissipative systems, Kerr-Lens Mode-Locking.*

A Federico, Gabriela y Eduardo

Agradecimientos

Es mucho mas importante poder rescatar todo lo que viví y crecí mientras hacía este trabajo, que el título que ahora obtengo (o cualquier otro), que es un logro hueco si no viene acompañado de muchas cosas para agradecer. Empiezo por agradecer a Eduardo, mi adorado compañero en la vida, por haberme apoyado en esto y en todo como siempre. A mis hijos Gabriela y Federico, los motores para levantarme de cualquier caída, lograr cualquier objetivo que me proponga y ser mejor para ellos cada día. A mis padres que van a estar siempre en mi memoria obligandome a levantarme y progresar. También a mis hermanos, que me acompañan cada uno como puede.

A Citefa y al jefe del Ceilap Dr.Eduardo Quel, por darme la posibilidad de trabajar en una Tesis. Al Dr.Alejandro Hnilo, por la libertad para trabajar, por proporcionar un tema fértil, y por que se llegó a la meta. Dedico un agradecimiento muy especial al Dr. Hernán Solari, quién desinteresadamente cedió su tiempo para discutir el tema de esta Tesis, y su ayuda fué de alcances increíbles.

A mis ex-compañeros Marcelo, David, Richi, Miguel y Damián, por haber aprendido tanto de ellos, y por contagiarme su empuje imparable para salir adelante. A Ana, Mariana (¡cómo olvidar sus enseñanzas para hacer velas!) y Mónica. Agradezco especialmente a Silvina, quién con calidez siempre me ayudó a solucionar cualquier problema que estuviera a su alcance. A Radu por todas sus ayudas con las computadoras. Agradezco a todos los integrantes del Ceilap por las charlas, almuerzos y pequeños momentos compartidos que son el mejor recuerdo que voy a guardar de toda esta época. También por su apoyo en momentos difíciles. No los nombro, por que no quiero olvidar injustamente a ninguno.

Tabla de Contenidos

Resumen	1
Capítulo 1. Introducción	5
1.1 Mode-Locking.	5
1.1.1 Tipos de mode-locking	8
1.1.2 Absorbentes saturables lentos	9
1.1.3 Absorbentes saturables rápidos	9
1.1.4 Mode Locking por efecto Kerr	11
1.2 Pulsos gaussianos y su propagación	13
1.3 Mapas iterativos	16
1.3.1 Dinámica de los mapas	16
1.3.2 Caos y cómo determinar si un sistema es caótico	18
1.4 Fracciones continuas	19
1.5 Geometría hiperbólica	21
1.5.1. El modelo del semiplano Superior (H)	22
1.5.2. Transformación de Möebius	23
Referencias	23
 Capítulo 2. Modelo Preliminar	 25
2.1 El mapa sin perturbación de Kerr y sin aberturas espaciales	26
2.1.1 Construcción del mapa	26
2.1.2 Mapa a n vueltas	29
2.1.3 Análisis general de los puntos fijos y su estabilidad	31
2.1.4 Análisis detallado del caso en que $ A < 1$	33
2.1.5 Orbitas multiperiódicas	37
2.1.6 Análisis exhaustivo del caso en que $ A = 1$	39
2.1.7 Análisis exhaustivo del caso en que $ A > 1$	41
2.2 El mapa sin perturbación de Kerr con aberturas espaciales	44
2.2.1 Construcción del mapa	44

2.2.2 Análisis general de los puntos fijos y su estabilidad	48
Referencias	54
Capítulo 3. Modelo sin aberturas y con efecto Kerr incluido	56
3.1 Mapas acoplados y mode-locking	56
3.2 Efectos dependientes de la energía	63
3.2.1 Perturbación de Kerr	63
3.2.2 Mapa para la intensidad	64
3.2.3 Dependencia de las expresiones para los factores de Kerr dependiendo de la longitud del medio activo	66
3.3 Análisis exhaustivo de un mapa individual de cinco variables	67
3.3.1 Consideraciones generales sobre el mapa	67
3.3.2 El mapa, sus puntos fijos estabilidad de los mismos	69
3.3.3 Cuenca de atracción del punto fijo	72
a) Análisis general	72
b) Elección de parámetros y zona de trabajo	76
Referencias	80
Capítulo 4. Caos órbitas periódicas y bifurcaciones	82
4.1 Descripción fuera de la región plausible e inclusión de aberturas	82
4.1.1 Exponentes de Lyapunov y fronteras:	82
4.1.2 Inclusión de aberturas espaciales en el modelo	85
4.1.3 Ejemplos numéricos para $\text{Signo}(K) = \text{Signo}(A)$	88
4.1.4 Zona con $A < 0$ y $K > 0$	91
4.1.5 Bifurcaciones y caos	93
4.2 Ejemplos y aplicación	99
4.2.1 Algunos ejemplos de atractores no periódicos	99
4.2.2 Discusión acerca de la energía del pulso y algunos ejemplos de atractores periódicos	101
Referencias	104

Resumen y conclusiones	105
Apéndice 1.	112
Elementos ópticos más comunes para el dominio espacial	112
Elementos ópticos más comunes para el dominio temporal	113
Apéndice 2.	114
Apéndice2.1. Mapa para una sola variable si $ A < 1$	114
Apéndice2.2. Propiedades de los valores medios de los polinomios	116
Apéndice2.3. Ejemplo de cálculo del valor medio de una función de las variables	119
Apéndice2.4. Generalización de la demostración de convergencia de una fracción continua presentada en la referencia [1.12]	119
Apéndice2.5. Como establecer el signo que debe usarse para el atractor del mapa a n vueltas	121
Apéndice2.6. La matriz espacial de propagación de ida y vuelta dentro de una cavidad desde un punto cualquiera P (M_{pp}) dentro de la cavidad hasta volver al mismo punto P, tiene la propiedad de tener $A=D$.	122
Apéndice2.7. Como escribir P_2 y P_3 en función de senos y cosenos y como encontrar la equivalencia entre una cavidad óptica con un ducto gaussiano (dominio espacial)	123
Apéndice 3.	126
Apéndice3.1. Saturación de la ganancia	126
Apéndice3.2. Si $(A+\rho^m) < 0$ da al iterar $(A+\rho^{m+1}) > 0$ y $(A+\rho^{m-1}) > 0$	129
Apéndice3.3 Búsqueda de un caso en que $(A+\rho^m) < 0$ da al iterar $(A+\rho^{m+1}) > 0$ y $(A+\rho^{m+2}) > 0$	130

Resumen

Los pulsos laser ultracortos (picosegundos y femtosegundos) son cada vez más importantes en ciencia y tecnología, por lo que es de gran interés el estudio de las técnicas que permiten obtenerlos. Una técnica muy difundida para lograr pulsos laser ultracortos es la llamada *Kerr lens mode locking* (KLM). En particular, esta es la técnica empleada en el laser de Ti:Zafiro, que es actualmente la fuente más utilizada de pulsos ultracortos. A pesar de que estos lasers son relativamente robustos, los pulsos generados muestran a menudo una gran variedad de inestabilidades, incluyendo comportamientos cuasi-periódicos, variaciones en algunos parámetros del pulso y no en otros y hasta caos determinístico. Es así interesante desde el punto de vista académico, e importante desde el punto de vista práctico, entender la dinámica resultante en detalle, y conocer cuáles son las bases mínimas para que el KLM se establezca.

Un problema de interés particular es que, según algunos autores, la presencia de aberturas espaciales transversales dentro de la cavidad del laser, convenientemente ubicadas, son indispensables para que este tipo de funcionamiento se pueda producir [1.14], pero, por otro lado, hay evidencias teóricas y experimentales que indican que una descripción sin aberturas puede explicar satisfactoriamente gran parte del comportamiento de los lasers de Ti:Zafiro. [1.3], [1.4], [1.5], [1.6] y [1.7].

En esta Tesis, llamada *Dinámica del mode-locking por efecto Kerr*, estudio el caso más general posible (es decir, no restringido al Ti:Zafiro ni a ningún otro material activo o diseño de cavidad en particular), apropiado para alcanzar una comprensión de la dinámica del fenómeno de KLM y sus características esenciales, con la idea de determinar, entre otras cosas, si realmente la inserción de aberturas espaciales es indispensable para obtener KLM. Empleo mapas estroboscópicos para describir el sistema, debido a que la existencia de un reloj natural del sistema, dado por el tiempo de round-trip en la cavidad, permite una fácil ubicación de las secciones de Poincaré. El empleo de mapas permite bajar la dimensionalidad del problema y los cálculos son más sencillos que con la descripción alternativa que emplea ecuaciones diferenciales. Además, no es necesario suponer que la variación sufrida por las variables del pulso es pequeña de un round trip al siguiente, (tal como lo requiere la descripción mediante ecuaciones diferenciales), suposición que raramente se cumple en la práctica.

El objetivo de este tipo de estudio no es diseñar láseres u obtener concordancias cuantitativas con observaciones realizadas sobre un medio activo o diseño de cavidad particular, sino alcanzar una descripción cualitativa del KLM y de sus propiedades básicas y generales que sea accesible intuitivamente, por lo que, en cada paso, haré las aproximaciones necesarias para simplificar el sistema lo más posible. Por ejemplo: en el capítulo 3, para simplificar las expresiones analíticas, supondré que el medio de Kerr está en un extremo de la cavidad, lo que es cierto en algunos diseños y no en otros. Sin embargo, por el tipo de tratamiento del problema que se hace, será evidente que las conclusiones que se alcanzan no están restringidas a ese diseño particular.

Este Trabajo está dividido en capítulos, en los cuales describo las nociones teóricas sobre las que se basa y el trabajo realizado. El contenido de estos capítulos puede resumirse como sigue:

Capítulo 1. Introducción

Incluye una breve introducción al Mode-Locking y Mode-Locking por efecto Kerr. A continuación hay una descripción de la propagación de haces gaussianos. Las herramientas matemáticas las describo en las últimas secciones, que corresponden a mapas iterativos, rudimentos sobre fracciones continuas y geometría hiperbólica.

Capítulo 2. Modelo Preliminar

En este capítulo hay un estudio preliminar o primer modelo, que describe al sistema sin perturbación de Kerr. El objetivo es tener un acabado conocimiento de la dinámica de la cavidad "vacía", e introducir el uso de herramientas matemáticas que nunca fueron usadas para describir el KLM (como la geometría hiperbólica). Incluye la obtención del mapa iterativo para el primer modelo, en el que no incluyo el medio Kerr ni aberturas espaciales en la cavidad, y supongo que se preserva la energía total del pulso. Luego introduzco la expresión del mapa a n -vueltas. Considerando al mapa como una fracción continua, en el marco de la geometría hiperbólica y en el marco de la teoría de la dinámica no lineal, estudio la estabilidad de los puntos fijos, y las trayectorias para distintas regiones del espacio de parámetros. Como paso posterior estudio la influencia de la presencia de aberturas espaciales, pero aún sin un medio Kerr dentro de la cavidad.

Capítulo 3 Modelo sin aberturas y con efecto Kerr incluido

En esta instancia, estudio una cavidad sin aberturas, pero con medio Kerr. Analizo numéricamente el acoplamiento de muchos mapas (con energía por pulso constante) mediante la perturbación de Kerr. Encuentro que el KLM aparece espontáneamente como un comportamiento colectivo. Después presento un nuevo mapa en cinco variables, que incluye la potencia del pulso. Encuentro que ésta converge rápidamente, y que se desacoplan las variables espaciales de las temporales por lo que, después de un transitorio, la descripción del sistema queda simplificada a dos mapas de dos variables (o de una variable compleja) desacoplados que tienen, además, una forma muy similar. Este resultado permite comprender la razón del efecto (observado por otros autores en láseres de Ti:Zafiro) de que las variables temporales del pulso se desestabilizan sólo si también lo hacen las espaciales. Analizo la estabilidad de sus puntos fijos. Estudio analíticamente la convergencia a la solución de KLM, y hallo que ésta depende de las condiciones iniciales. Analizo entonces una región del espacio dependiente de los parámetros, que llamo “región plausible”, dentro de la cual es posible la convergencia, y se verifica numéricamente. También busco una región del espacio de parámetros y un conjunto de condiciones iniciales, que llamo "región especial", para la cual pueda asegurar de forma más certera la convergencia al punto fijo. Al hallar que estas condiciones existen, demuestro que no es necesaria la presencia de aberturas para obtener KLM, y al mismo tiempo obtengo un ejemplo de un sistema no lineal conservativo que, sin embargo, como consecuencia de esa perturbación, contrae su espacio de fases. También explico por qué son más eficientes las cavidades cerca del borde de estabilidad geométrica para tener KLM, lo que hasta ahora era un hecho empírico.

Capítulo 4. Caos, órbitas periódicas y bifurcaciones

En este Capítulo, muestro numéricamente qué sucede para otros valores de los parámetros, y otras condiciones iniciales fuera de la "región plausible" sin aberturas. En particular, muestro indicios de que la frontera entre las condiciones que convergen al punto fijo y las que divergen de él tienen una estructura fractal. A continuación presento el modelo para el sistema con aberturas espaciales presentes en la cavidad, y analizo los puntos fijos y su estabilidad. Estudio con cierto detalle el caso en que el mapa es

expansivo y hay aberturas presentes, ya que el juego entre estas dos tendencias opuestas produce dinámicas muy interesantes. Para ciertas combinaciones de los parámetros, muestro cómo aparecen órbitas multiperiodicas, y algunas otras órbitas características. Encuentro que las soluciones multiperiodicas tienden a acumularse cerca de las zonas (en el espacio de los parámetros) que corresponden a órbitas de período bajo de la cavidad "vacía". Incluyo también un estudio numérico sobre cómo bifurcan las soluciones al variar los parámetros. Finalmente, muestro algunas soluciones representativas de distintas combinaciones de signos de los exponentes de Lyapunov, y muestro algunas comparaciones con series temporales de la energía de los pulsos obtenidas experimentalmente por otros autores, obteniendo una interesante concordancia cualitativa en las formas, e inclusive cuantitativa en los valores de las frecuencias principales de oscilación. Estos resultados muestran que no es posible afirmar, sin un estudio más detallado, que ese tipo de oscilaciones se debe necesariamente a una dinámica de mayor dimensionalidad (como Q-switch o batido de modos).

Al final del capítulo hay un resumen y se presentan las conclusiones

Capítulo 1. Introducción.

El propósito de este capítulo, es introducir las bases mínimas necesarias para el desarrollo de los capítulos siguientes de este trabajo.

Describo a continuación el concepto de mode-locking, ML activo y pasivo, ML por efecto Kerr y la propagación de haces gaussianos. Luego presento los mapas iterativos y su dinámica, y algunos rudimentos sobre fracciones continuas y geometría hiperbólica.

1.1 Mode-Locking.

El Mode-Locking (ML) es un método que permite generar pulsos cortos. Se pueden lograr pulsos mucho más cortos que con otras técnicas, como por ejemplo el Q-switching. Para comprender en qué consiste empiezo por describir someramente qué ocurre dentro de la cavidad resonante de un laser. Dicha cavidad tiene modos discretos de oscilación, cada uno con una determinada frecuencia, y la forma de estos modos depende de la simetría de la cavidad. Se dividen en modos longitudinales (separados entre sí por $\Delta\nu=c/2L$, donde L es el largo de la cavidad y c la velocidad de la luz) y modos transversales. Cuando un laser cuyo medio activo tiene ensanchamiento inhomogéneo se enciende, en la cavidad pueden oscilar en principio una gran cantidad de modos longitudinales. Son aquellos que están dentro de la campana de ganancia. La amplitud y la fase de cada uno de ellos no están relacionadas con las de los demás modos. La energía se distribuye entre todos los modos oscilantes que componen la radiación. En la figura 1 se ve como se distribuyen los modos oscilantes dentro de la campana de ganancia de un láser de ensanchamiento inhomogéneo.

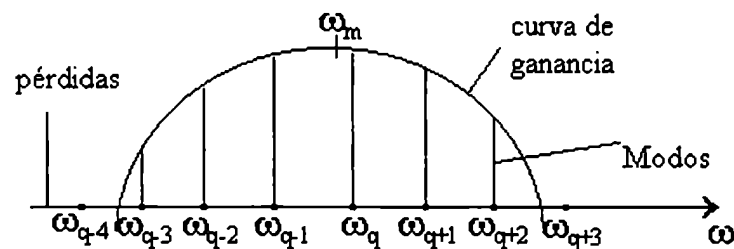


Figura 1 distribución de los modos dentro de la campana y pérdida (ensanchamiento inhomogéneo)

Se dice que hay Mode-Locking si mediante algún mecanismo se logra que las fases de

las componentes de la radiación no cambien relativamente unas con otras. Para poder describir el comportamiento del laser en esta situación, conviene empezar por describir el campo eléctrico total dentro de la cavidad como

$$E(t) = \sum_n^N E_n \exp[i(\omega_q + n\omega)t + \phi_n] \quad (1.1)$$

N es el número total de modos oscilantes, ω_q es una frecuencia de referencia arbitraria, ϕ_n es la fase de el modo n -ésimo, que en un láser de funcionamiento continuo varía al azar con n y generalmente con el tiempo, y ω es la separación entre frecuencias $\omega = \pi c/L$. A pesar de que en la figura 1, muestra que no todas las amplitudes son iguales, supondremos para simplificar $E_n=1$ y $\phi_n=0$ para todos los modos. La expresión (1.1) es entonces

$$E(t) = \sum_{-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \exp[i(\omega_q + n\omega)t] = \exp(i\omega_q t) \frac{\text{sen}(N\omega t/2)}{\text{sen}(\omega t/2)} \quad (1.2)$$

La intensidad a la salida es proporcional a $E(t)E^*(t)$, por lo que

$$P(t) \propto \frac{\text{Sen}^2(N\omega t/2)}{\text{Sen}^2(\omega t/2)} \quad (1.3)$$

La expresión (1.3) muestra claramente como la potencia es emitida en forma de un tren de pulsos con un período $T=2\pi/\omega=2L/c$ que es el tiempo de tránsito de ida y vuelta en la cavidad. Esto es ilustrado en la figura 2a.

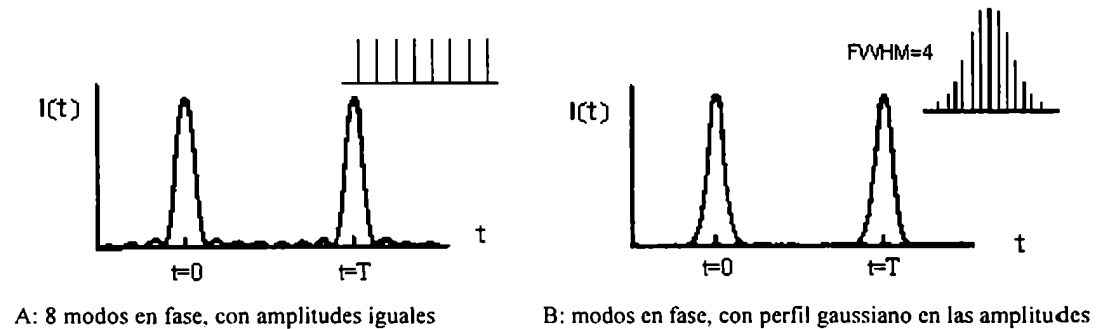


Figura 2 Intensidad emitida [1.1]

Vale la pena analizar la validez de la aproximación $E_n=1$. En la figura 2a se muestra un ejemplo con unos pocos modos en fase con amplitudes iguales, y en la figura 2b se muestra un ejemplo con distribución de amplitudes gaussiana. Se ve que la intensidad que se obtiene en 2b difiere muy poco de la obtenida con la aproximación en 2a. La única diferencia apreciable es que ya no se ven los picos secundarios[1.1]. El pico de potencia de cada uno de estos pulsos es alto, y es igual a N veces la potencia promedio, donde N es el número de modos acoplados. No es indispensable imponer demasiadas condiciones sobre las amplitudes, pues es suficiente con tener los modos en fase para tener un comportamiento pulsado. Aunque la forma de los pulsos varía según sean las E_n [1.1] , se justifica la aproximación de tomar todas las amplitudes $E_n=1$.

Por haber tomado todas las $\phi_n=0$, la señal en el tiempo es aproximadamente la transformada de Fourier de la distribución espectral de modos. Como es sabido, se cumple entonces $\Delta\nu \Delta t \geq K$ donde $\Delta\nu$ y Δt son los anchos a altura mitad de $i(\nu)$ e $I(t)$, respectivamente y K es una constante el orden de la unidad. El pulso más corto que puede obtenerse (pulso limitado por transformada) para un ancho de banda espectral dado tiene una duración

$$\tau = \frac{K}{\Delta\nu} . \quad (1.4)$$

En esta Tesis voy a tratar medios activos con ensanchamiento homogéneo. En este caso todos los átomos o moléculas activas del medio producen transiciones de la misma manera, y en ausencia de moduladores hay un solo modo longitudinal oscilando en la cavidad. Cuando la luz pasa a través del medio activo, la intensidad se amplifica en un factor G_h , que es la ganancia, y para este tipo de materiales es [1.1]

$$G_h = \frac{G_0}{1 + \frac{I}{I_{sat}}} \quad (1.5)$$

donde I_{sat} es la intensidad de saturación, I es la intensidad y G_0 es la ganancia de pequeña señal. Esto es válido cuando la ganancia está en equilibrio con el campo. Como el coeficiente de ganancia es directamente proporcional a la inversión de población, G_h

se obtiene reemplazando el valor estacionario de la inversión de población en el coeficiente de ganancia para el caso homogéneo.

Falta ahora saber como se logra que los modos estén en fase. Hay varias técnicas para hacerlo. Se clasifican en activas y pasivas, según se empleen o no elementos (moduladores) que se activan externamente. A continuación hago una breve descripción de las mismas.

1.1.1 Tipos de Mode-locking.

Hay dos grandes tipos de mode-locking, ML activo y ML pasivo. El activo se logra ubicando un modulador acusto-óptico o electro-óptico, dentro de la cavidad. Estos moduladores pueden ser moduladores de amplitud (AM) o moduladores de fase (FM). Este tipo de mode-locking no tiene relación con el tema que estudia esta Tesis, por lo que no es pertinente discutir aquí sus características. El lector interesado puede consultar [1.1].

El mode-locking pasivo es el método que permite generar los pulsos más cortos. Se ubica un absorbente saturable (SA) dentro de la cavidad que funciona como obturador, pero a diferencia de lo que sucede en el mode-locking activo no es accionado externamente, sino que es el mismo pulso el que lo activa. Se tiene un efecto equivalente al producido por un modulador, con la ventaja de no necesitar sistemas de control y estabilización de frecuencia. El SA funciona entonces como un obturador pasivo que es abierto a una frecuencia $\omega = 2\pi/T$. Generalmente, es un colorante, cuyo espectro de absorción incluye las longitudes de onda del laser. La luz de baja intensidad pasa a través del colorante sin ser absorbida, pero hay una intensidad umbral a partir de la cual el medio satura, permitiendo que la luz pase. El tiempo de absorción es mucho menor que el tiempo de ida y vuelta dentro de la cavidad T . Existe una clasificación entre absorbentes saturables rápidos y lentos, es decir entre SA capaces absorber nuevamente luego de un tiempo típico que está en la escala de pulsos ultracortos (picosegundos, femtosegundos), y los que debido a su tiempo de relajación se recuperan en tiempos más largos. Con los lentos, no es posible generar pulsos ultracortos.

1.1.2 Absorbentes saturables lentos.

El pulso empieza a formarse, a partir del ruido, cuya intensidad inicial es lo suficientemente baja como para que el SA lo absorba de manera lineal. Habrá cada tanto algunas emisiones esporádicas con intensidad mayor que la media. Estas saturan el SA y comienzan a circular dentro de la cavidad. Las pérdidas iniciales deben ser mayores que la ganancia inicial (justo antes de la llegada del pulso), para que se inhíba el funcionamiento continuo (CW) y se recorte el frente del pulso. Como la ganancia del medio activo baja debido a que la inversión de población del mismo empieza a bajar por la emisión estimulada, la cola del pulso se recorta, pues no termina de pasar antes de que la ganancia sea menor que las pérdidas. En la figura 3 muestro como se recorta el frente del pulso en un pasaje por el absorbente saturable, y como se recorta la cola debido al vaciamiento de la ganancia.

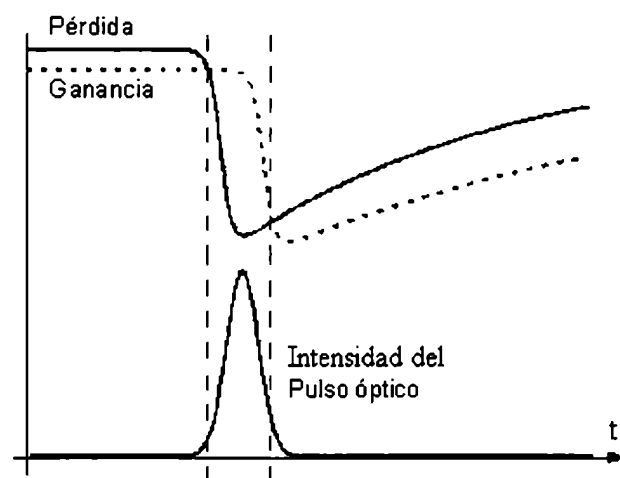


Figura 3: dinámica de la conformación de pulsos por ganancia y pérdida para ML con absorbente saturable lento

1.1.3 Absorbentes saturables rápidos.

En este caso el SA recupera su nivel de absorción inicial en un tiempo corto comparado con la duración del pulso óptico.

Nuevamente, una vez que alguna de las emisiones esporádicas con intensidad mayor que la media satura el SA, comienzan a circular pulsos dentro de la cavidad. A diferencia de lo que sucede para los lentos, donde el SA solamente recorta el frente del

pulso (ya que la cola se recorta por que cae la ganancia), ahora el SA recorta su frente y su cola, que son las partes del pulso de menor intensidad. En principio, esto sucedería en cada pasaje del pulso por el SA, y se acortaría indefinidamente. Esto no es así debido a que hay otro efecto que compite con el ya descrito, y es que las componentes de los pulsos cuyas frecuencias estén en el centro de la campana de ganancia, se amplificarán más que las otras, de modo que las componentes que queden lejos del centro de dicha campana serán absorbidas por el SA. Por lo tanto hay menos ancho de banda efectivo y aporta un ensanchamiento temporal adicional, que limita el acortamiento del pulso al pasar por el SA. En la figura 4, muestro como se recortan el frente y la cola del pulso en un pasaje por el absorbente saturable. La ganancia se supone aproximadamente constante mientras dura el pulso.

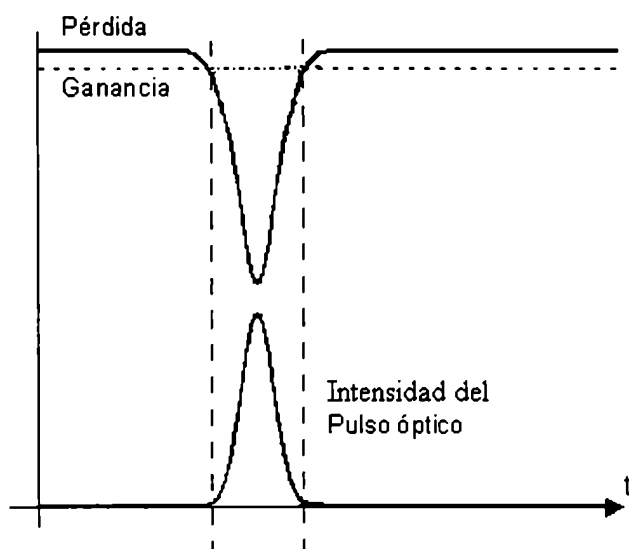


Figura 4: dinámica de conformación de pulso por pérdida para ML por absorbente saturable rápido

Hay varias técnicas para tener un SA ficticio rápido, como ser *Additive Pulse Mode Locking* (APM), espejo no-lineal por reconversión de segunda armónica, etc. Una alternativa novedosa como absorbente saturable rápido para láseres de estado sólido, es el Fabry-Perot saturable anti-resonante o SESAM, que consiste en un absorbente saturable semiconductor integrado dentro de un Fabry-Perot operado en anti-resonancia. Tiene alta intensidad de saturación, bajas pérdidas y un umbral de daño alto. Todos los absorbentes saturables reales tienen como desventaja el daño por potencia y el deterioro acumulado en el tiempo.

1.1.4 Mode Locking por efecto Kerr.

El interés de esta Tesis está centrado en la descripción de la dinámica del Mode Locking por efecto Kerr (KLM). Su gran ventaja radica en el hecho de que no hay daño por potencia ni deterioro acumulado en el tiempo. El efecto Kerr se produce debido a la polarización electrónica en un cristal no lineal. Al propagarse la luz por este tipo de cristales, si la intensidad es lo suficientemente grande se vuelve significativa la respuesta no lineal de la polarización al campo incidente. La aparición de estas contribuciones no lineales es lo que se conoce como efecto Kerr. Si la luz es de mucha intensidad, se puede llegar a apreciar este efecto en cualquier dieléctrico. Estas variaciones en la polarización son muy rápidas, tienen tiempos de respuesta del orden de los pocos femtosegundos y tienen por consecuencia variaciones en el índice de refracción del medio n proporcionales a la intensidad I

$$n = n_0 + n_{2I} I \quad (1.6)$$

donde n_0 es el índice de refracción lineal y n_{2I} es el coeficiente asociado al efecto Kerr. Los medios mas usuales tienen $n_{2I} > 0$, por lo tanto a lo largo de este trabajo lo considero siempre positivo. Este índice de refracción dependiente de la intensidad, es el responsable de lo que se denomina autoenfoco (SF). Debido al perfil gaussiano de los haces de luz dentro de la cavidad del laser, el índice n es mayor en el centro y disminuye hacia los bordes, y forman así lo que se conoce como lente de Kerr. El autoenfoco consiste simplemente en que el haz laser se enfoca debido a esta lente.

En el dominio temporal, hay un efecto análogo conocido como automodulación de fase o SPM. Para explicarlo supongo para simplificar que la intensidad del haz laser que se propaga una distancia L por un medio Kerr, $I(t)$, es homogénea en la coordenada espacial transversal. Hay un desfase dependiente del tiempo que modula al pulso con un factor

$$e^{i \Delta \phi(t)} = e^{\frac{i 2 \pi \Delta n(t) L}{\lambda}} = e^{\frac{i 2 \pi n_{2I} I(t) L}{\lambda}} \quad (1.7)$$

La frecuencia instantánea del pulso es

$$\omega_i = \frac{d\phi}{dt} \quad (1.8)$$

y se va a modificar de acuerdo a

$$\Delta\omega_i = \frac{d \Delta\phi}{dt} \quad (1.9)$$

Esto nos dice que mientras la intensidad sube, es decir durante el flanco delantero del pulso ω_i disminuye, y se incrementa cuando la intensidad decrece. Este efecto genera el “chirp” o automodulación de fase (SPM) como se muestra en la figura 5. Es un efecto análogo a una dispersión no lineal de la velocidad de grupo.

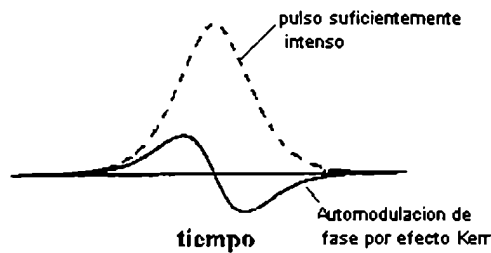


Figura 5 automodulación de fase

Una descripción tradicional del KLM se basa en el efecto combinado del autoenfoco del haz laser debido al efecto Kerr y una abertura espacial dentro de la cavidad responsable de introducir menos pérdidas a los pulsos de mayores intensidades. Se dice que este efecto combinado, que se reconoce como esencial para el KLM, es equivalente al de un absorbente saturable rápido. La presencia de esta abertura espacial tiene además como consecuencia la pérdida de estabilidad del régimen continuo frente al pulsado. Una descripción alternativa considera que el mecanismo por el cual se llega al KLM es de tipo solitónico [1.2], a través de un delicado equilibrio entre la SPM y la dispersión de velocidad de grupo lineal (GVD). Si bien las aberturas están inevitablemente presentes en la práctica, una vez que el laser se ajusta a las aberturas para minimizar las pérdidas, es aparentemente posible hacer una descripción acertada del KLM sin incluir aberturas espaciales [1.3], [1.4] [1.5] [1.6] y [1.7]. Es natural preguntarse entonces si el

efecto Kerr por sí mismo alcanza para producir el KLM. Si así fuera, querría decir que mediante la sola inclusión del término correspondiente al efecto Kerr, que por sí mismo no es disipativo, el sistema completo pasa a serlo (por disipativo entiendo la capacidad de contraer el espacio de fases). El KLM podría entonces ser descrito como la aparición espontánea de un comportamiento colectivo autoorganizado, como consecuencia de la interacción no lineal entre las variables dinámicas. Como la evidencia hallada de este comportamiento hasta el momento es parcial y está solamente relacionada con los láseres de Ti:Zafiro, es deseable encontrar un resultado más general y sus causas.

Precisamente, uno de los propósitos de esta Tesis es establecer conceptualmente si es necesaria o no la presencia de algún tipo de abertura espacial para que cualquier láser pueda funcionar en Kerr-lens-mode-locking (KLM). Esto puede establecerse sólo de manera teórica, debido a que en la práctica es imposible evitarlas debido al diámetro finito de los espejos y demás componentes de la cavidad del láser entre otras cosas.

En la práctica se suponen haces gaussianos, que son las autofunciones del espacio libre, y son las autofunciones de sistemas complejos más generales en los que se verifique la aproximación paraxial.

1.2. Pulsos gaussianos y su propagación.

Supongo que los pulsos son gaussianos dentro de la cavidad, tanto en el tiempo como en el espacio. Estos pulsos son de la forma

$$E(t) = E_0 e^{-i \frac{k r^2}{2 q_s}} e^{-i \frac{k t^2}{2 p_\tau}} \quad (1.10)$$

donde

$$\frac{1}{q_s} = \frac{n}{R} - i \frac{n \lambda}{\pi W^2} \quad (1.11)$$

$$\frac{1}{p_\tau} = \frac{1}{k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - i \frac{n \lambda}{\pi \tau^2}. \quad (1.12)$$

Para que $1/q_{s,\tau}$ tengan sentido físico deben tener parte imaginaria negativa, en caso contrario debería ser por ejemplo el ancho del haz imaginario. La propagación a través

de un sistema óptico general se describe con estas dos variables, que se relacionan mediante matrices de dimensión 4x4 [1.15]. En esta referencia, se muestra cómo un elemento de un sistema óptico modifica la posición y pendiente de la trayectoria, la frecuencia central y tiempo de llegada del pulso al plano de referencia, respecto a esos mismos parámetros de un pulso de referencia. Las variables a la salida del sistema son función de las variables a la entrada del mismo. El desarrollo de Taylor a primer orden de dicha función, permite escribir para sistemas lineales invariantes con el tiempo (sin tener en cuenta un medio tipo Kerr)

$$\begin{pmatrix} x \\ \Theta \\ t \\ f \end{pmatrix}_{\text{SALIDA}} = \begin{pmatrix} A_s & B_s & 0 & E \\ C_s & D_s & 0 & F \\ G & H & 1 & I \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \Theta \\ t \\ f \end{pmatrix}_{\text{ENTRADA}} \quad (1.13)$$

A, B, C y D son los mismos elementos que los usuales en matrices de propagación de rayos, y los elementos restantes dan cuenta de la dispersión. Para redes o prismas individuales G y F son distintos de cero. De todos modos combinando más de un prisma puede lograrse una matriz diagonal en bloques de 2x2. El caso más común en la práctica para las cavidades de los lasers diseñadas para operar en KLM, es aquel en que estas matrices de 4x4 se pueden diagonalizar en dos bloques de 2x2 debido a que no se usan redes, y los prismas, si es que se usan, aparecen de a pares con la cara de entrada del primer prisma paralela a la cara de salida del segundo prisma (para compensar el efecto de la dispersión de la velocidad de grupo). En muchos casos, cuando hay un solo prisma dentro de la cavidad, la matriz general ya no es diagonal en bloques. Voy a analizar solamente las cavidades cuya matriz se puede diagonalizar en dos bloques de 2x2. Uno de estos bloques es una matriz M_s que describe la parte espacial, y el otro es una matriz M_t que describe la parte temporal. Debe advertirse que esta diagonalización no es posible si los pulsos son muy cortos (<10 fs) [1.8]

De modo que la matriz diagonalizada de propagación entre dos puntos P y P' es

$$M = \begin{pmatrix} A_s & B_s & 0 & 0 \\ C_s & D_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_t & B_t \\ 0 & 0 & C_t & D_t \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

El determinante del bloque espacial es uno al igual que el determinante del bloque temporal [1.15]. Después de propagar el parámetro espacial del pulso de P a P', se transforma en

$$\frac{1}{q'_s} = \frac{C_s + D_s \frac{1}{q_s}}{A_s + B_s \frac{1}{q_s}}, \quad (1.15)$$

y después de propagar el parámetro temporal del pulso de P a P', se transforma en

$$\frac{1}{q_{\tau}'} = \frac{C_{\tau} + D_{\tau} \frac{1}{q_{\tau}}}{A_{\tau} + B_{\tau} \frac{1}{q_{\tau}}}. \quad (1.16)$$

Me restrinjo a uno solo de los dos casos, ya sea el temporal o el espacial. La matriz de propagación de varios elementos en cascada donde el haz se propaga en la dirección que indica la figura 6 es $M = M3.M2.M1$. En el Apéndice 1 se reúnen las expresiones para las matrices que representan a los elementos ópticos más comunes.

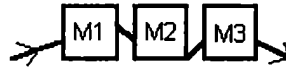


Figura 6 Arreglo de diferentes elementos ópticos

La matriz de round-trip M_{RT} para la cavidad de un laser, es la matriz de propagación desde un plano de referencia hasta volver al mismo después de haber recorrido toda la cavidad (es decir que cruza ese plano dos veces, una al ir y otra al volver). El tiempo T que tarda en hacer este recorrido es el ya mencionado tiempo de ida y vuelta dentro de la cavidad o tiempo de round trip. Para obtener la matriz M_{RT} hay que multiplicar las matrices de todos los elementos que hay dentro de la cavidad. Suponiendo que tenemos el ejemplo de la figura 6, la matriz de ida y vuelta es $M_{RT} = M1.M2.M3.M3.M2.M1$.

Hasta aquí expuse los conceptos básicos involucrados en esta Tesis. A continuación presento las herramientas matemáticas que necesito para poder extraer la mayor cantidad de información posible del sistema. Voy a introducir mapas iterativos, fracciones continuas y la geometría hiperbólica. Serán de mucha utilidad en los próximos capítulos.

1.3 Mapas iterativos.

La descripción del problema mediante mapas o ecuaciones diferenciales es equivalente. La existencia de un reloj interno en la cavidad, provisto por el tiempo de ida y vuelta dentro de la misma, posibilita encontrar fácilmente la posición de las secciones de Poincaré. Los mapas son por lo tanto muy convenientes para describir el KLM, debido a que tienen la ventaja de reducir la dimensionalidad del problema, volviendo los cálculos mas tratables. Permiten hacer simulaciones numéricas simples, y el análisis de la estabilidad de sus soluciones periódicas es de esta manera muy sencillo. Una limitación que tiene esta descripción, es que no permite concluir nada acerca de la forma de los pulsos. Para conocerla, son más convenientes las ecuaciones diferenciales. En la referencia [1.14] , se hace una descripción con una ecuación diferencial, donde se presupone que la modificación del pulso al atravesar cada elemento de la cavidad es infinitesimal, pero eso muchas veces no se cumple. Como en esta Tesis busco comprender de la manera más simple y accesible las propiedades básicas del KLM, describo al sistema mediante mapas, ya que para esta comprensión no interesa la forma precisa de los pulsos. Este formalismo ya ha sido usado con éxito en la descripción de algunos lasers KLM específicos. [1.4] [1.5] [1.7], [1.6], [1.9] y [1.10]

Un mapa es una aplicación de un espacio en sí mismo, es decir, una $f: V \rightarrow V$. V es una variedad del espacio de las fases Γ , y la llamaremos sección estroboscópica. El mapa se construye a partir de las intersecciones de la trayectoria del sistema con V . Si $F(t)$ es dicha trayectoria en Γ , parametrizada con el tiempo t , para $x_n = F(t_n) \in \Gamma \cap V$, se puede encontrar f de manera que $x_{n+1} = f(x_n) = F(t_{n+1}) \in \Gamma \cap V$, siendo t_{n+1} el primer instante posterior a t_n para el que la trayectoria vuelve a intersectar a V . En el caso del laser será $t_{n+1} = t_n + T$. $x \in \mathbb{R}^N$ donde N es la dimensión del mapa. La evolución en el tiempo de un sistema queda perfectamente descrita con su mapa estroboscópico.

1.3.1. Dinámica de los mapas.

Se puede obtener el régimen estacionario del sistema calculando los puntos fijos del mapa, es decir encontrando los puntos invariantes por el mismo, para luego estudiar la estabilidad de estas soluciones. Pueden existir otros tipos de comportamientos, como por ejemplo trayectorias multiperiodicas u otra clase de soluciones hacia las que tienda el sistema cuando n tiende a infinito, y que son conocidas como atractores del mapa. Cada atractor tiene su cuenca de atracción, determinada por todos los puntos que

tomados como condición inicial para el mapa, llevan después de varias iteraciones (pueden ser infinitas según el caso) a dicho atractor. Dado un mapa $f: V \rightarrow V$, se define la cuenca de atracción de un atractor A del mapa $M_s \subset V$ como

$$M_s = \{ \mathbf{x} \in V / f^n(\mathbf{x}) \rightarrow A \} \quad (1.17)$$

$n \rightarrow \infty$

Se dice que un punto fijo \mathbf{x}^* es estable si para cualquier entorno de \mathbf{x}^* , $N(\mathbf{x}^*)$, se cumple que para cualquier condición inicial tomada de dicho entorno, todas las iteraciones del mapa caen dentro del entorno de \mathbf{x}^* . Si escribo los puntos de $N(\mathbf{x}^*)$ como perturbaciones de \mathbf{x}^* , y si el mapa se puede linealizar alrededor de \mathbf{x}^* puedo escribir

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{C} + \delta \mathbf{x}_n \quad (1.18)$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}^* + \delta \mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}^*) + D(\mathbf{x}^*) \delta \mathbf{x}_n \quad (1.19)$$

donde $D(\mathbf{x}^*)$ es el jacobiano del mapa. Entonces se cumple que

$$\delta \mathbf{x}_{n+1} = D(\mathbf{x}^*) \delta \mathbf{x}_n. \quad (1.20)$$

Esta última expresión indica que para conocer la estabilidad, hay que analizar los autovalores λ_i y los autovectores V_i de $D(\mathbf{x}^*)$. Si la dimensión del mapa es d , y si $|\lambda_i| \neq 1$, $1 \leq i \leq d$, los autovalores definen cómo se comporta a primer orden una perturbación $\delta \mathbf{x}_n$ después de sucesivas aplicaciones del mapa. Si $|\lambda_i| < 1$, la proyección de $\delta \mathbf{x}_n$ sobre el autovector V_i se contrae, y si $|\lambda_i| > 1$ diverge. Se dice entonces que el punto fijo \mathbf{x}^* es estable si todos los autovalores de $D(\mathbf{x}^*)$ cumplen $|\lambda_i| < 1$, y se dice que es inestable si algún autovalor cumple $|\lambda_k| > 1$. Puede suceder así que según algunas direcciones la perturbación se contraiga y según otras no. Estos son los puntos de ensilladura. En el caso en que $|\lambda_i| = 1$, los autovalores λ_i ya no definen el comportamiento de la perturbación, y hay que incluir términos de orden superior en (1.19).

Las trayectorias multiperiodicas se encuentran hallando los puntos fijos del mapa a m -vuelatas. Este mapa se obtiene aplicando m veces a una condición inicial genérica. Por lo general son expresiones muy complicadas, pero en algunos casos pueden reducirse a expresiones sencillas. La primera parte de esta Tesis es uno de estos casos. La

estabilidad de las órbitas multiperiodicas se analiza estudiando los puntos fijos del mapa a m -vueltas. En los sistemas sencillos el atractor suele ser un punto, una circunferencia o un toro.

1.3.2. Caos y cómo determinar si un sistema es caótico.

Voy a introducir el concepto de caos, ya que usaré el término muchas veces. Un sistema caótico es aquel que tiene cierto tipo de evolución en el tiempo [1.11]. Describe movimientos turbulentos, que al ser analizados en detalle, son muy complejos. Para definir el caos más exactamente, se consideran solamente las secuencias x_0, x_1, x_2, \dots , generadas por un mapa $x_{n+1}=F(x_n)$ que sean acotadas, es decir que cumplan $P < x_n < Q$ para todos los valores de n . Se dice que dicha secuencia es caótica o turbulenta si:

- i) Es sensiblemente dependiente de las condiciones iniciales, es decir que si se parte de dos condiciones iniciales infinitesimalmente cercanas una de la otra, la distancia entre las sucesivas iteraciones de ambas diverge exponencialmente
- ii) La función de correlación $C(m)$ para una dada secuencia cumple $C(m) \rightarrow 0$ a medida que $m \rightarrow \infty$, donde

$$C(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_n - \langle x \rangle)(x_{n+m} - \langle x \rangle), \quad \langle x \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n \quad (1.21)$$

- iii) La secuencia no es periódica

En los sistemas caóticos, el atractor presenta una forma “extraña”, y se caracteriza por no tener una dimensión entera y ser auto semejante, en suma, ser un fractal. El análisis del atractor es pues una indicación del carácter caótico del fenómeno. El ritmo de pérdida de predecibilidad también nos da información sobre el fenómeno. La medida de este ritmo puede hacerse utilizando diferentes parámetros, por ejemplo, los exponentes de Lyapunov. Para un mapa, la manera de calcularlos consiste en hallar los autovalores λ_j , $j=1 \dots S$ del producto $M(x_0, k)$ de los jacobianos de dimensión S a lo largo de la trayectoria, y buscar el límite cuando k tiende a infinito

$$M(x_0, x_k) = J(x_{k-1}) J(x_{k-2}) \dots J(x_1) J(x_0). \quad (1.22)$$

$$(\lambda_1 \dots \lambda_S) = |Aval[M(x_0, x_k)]|^{\frac{1}{N}} \quad (1.23)$$

Estos exponentes cuantifican la velocidad con que se separan dos trayectorias inicialmente próximas del espacio de fases. Si el máximo autovalor es de módulo mayor que 1, el sistema es caótico. Si el producto de los exponentes es tal que $\lambda_1 \dots \lambda_S < 1$, el mapa contrae el área, y si $\lambda_1 \dots \lambda_S = 1$ el mapa preserva el área. Voy a usar $L_1 = \text{Ln}(\lambda_1) \dots L_S = \text{Ln}(\lambda_S)$ para determinar si hay caos o no. En caso de que alguno de los $(L_1 \dots L_S)$ sea positivo, diré que el sistema es caótico.

1.4 Fracciones continuas.

A pesar de que nunca han sido usadas para describir el comportamiento de las cavidades ópticas, la manera de propagar pulsos gaussianos sugiere una fuerte relación con las fracciones continuas cuando la propagación se hace en una cavidad óptica general. La ventaja de usarlas es que permiten un tratamiento analítico más profundo del sistema. Describo a continuación como surgen en el mismo, como se definen y sus propiedades más importantes. Las expresiones (1.15) (1.16) relacionan la variable que sale de la cavidad con la que entra a la misma. En particular, partiendo de una condición inicial, al ir haciendo las sucesivas iteraciones se obtiene una expresión analítica tanto para la variable compleja espacial dada por (1.11) como para la variable compleja temporal dada por (1.12), que tiene la forma:

$$a_1 + \frac{b_1}{a_2 + \frac{b_2}{a_3 + \frac{b_3}{a_4 + \dots}}} \quad (1.24)$$

en donde a_i y b_i son números reales o complejos (dependiendo de los elementos de la matriz de propagación (1.14)) y es exactamente lo que se define como una fracción continua. El número de términos puede ser tanto finito como infinito. Para una fracción continua, el n-ésimo convergente se define como

$$C_n = a_1 + \frac{b_1}{a_2 + \frac{b_2}{a_3 + \frac{b_3}{a_4 + \dots \frac{b_n}{a_n}}}} = \frac{A_n}{B_n} \quad (1.25)$$

Si existe el límite para n tendiendo a infinito de C_n entonces se dice que la fracción continua es convergente.

Si para cada $i > 1$, todo b_i es 1 y cada a_i es un natural diferente de 0, entonces la fracción se dice que es una fracción continua simple con la siguiente forma:

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \dots}}} \quad (1.26)$$

Las fracciones continuas son muy usadas en teoría de números. Se puede demostrar que “un número es racional si y solo si se puede expresar como una fracción continua simple finita”. Una fracción continua simple infinita puede ser periódica o no periódica. Un irracional es cuadrático (aquel que es solución de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ a, b, c son enteros y $a \neq 0$) si y solo si se puede representar por una fracción continua simple periódica.

Las fracciones continuas se utilizan para obtener aproximaciones racionales de los números reales por medio de los convergentes. Si para cada i , se cumple que $a_i > 2$, $b_i = \pm 1$, se puede demostrar que la fracción continua es convergente [1.12].

Dada una fracción continua donde $A_{-1} = 1$, $A_0 = a_0$, $B_{-1} = 0$, $B_0 = 1$ para el n -ésimo convergente se verifica que

$$A_n = a_n A_{n-1} + b_n A_{n-2} \quad (1.27)$$

$$B_n = a_n B_{n-1} + b_n B_{n-2} \quad (1.28)$$

y también se verifica que

$$A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n = (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^n a_k \quad (1.29)$$

Hay muchas propiedades y teoremas interesantes más, pero no son relevantes para esta Tesis.

1.5 Geometría hiperbólica.

Las expresiones (1.15) (1.16) pueden ser analizadas con la teoría de fracciones continuas, y también dentro del marco provisto por la geometría hiperbólica, pues tienen la particularidad de ser transformaciones de Möebius. Este tipo de transformaciones conservan las distancias y áreas hiperbólicas, que serán definidas en la sección 1.5.1.

Pensando de manera abstracta, la geometría hiperbólica es lo que se tiene al reemplazar el postulado de paralelismo de Euclides por un axioma diferente. Una explicación informal de este axioma es la siguiente: Sea L una línea y p un punto que no pertenezca a dicha línea. Sea M la línea perpendicular a L que pasa por p . El postulado de paralelismo de Euclides establece que hay una sola línea que pase por p , que sea perpendicular a M en el plano definido por M y L (P_{ML}), y que no cruce L . El nuevo axioma establece que existe algún $\theta > 0$ de manera que una línea perteneciente a P_{ML} que no cruce L pasa por p si y sólo si forma un ángulo con M que está entre $90-\theta$ y $90+\theta$.

Cuando Gauss, Bolyai y Lobatchevsky “descubrieron” la geometría hiperbólica, exploraron las consecuencias de este axioma. Lejos de encontrar contradicciones, hallaron muchos teoremas no intuitivos, diferentes a los de la geometría euclídea, pero consistentes entre sí. Observaron que a medida que hacían cálculos y probaban teoremas, todo era consistente. La compararon con la geometría euclídea. Se puede probar que es posible desarrollar una nueva geometría consistente, suponiendo que la geometría euclídea es consistente. Para hacerlo, se construye un modelo de la geometría no euclídea a partir de la euclídea. Es decir, dado un conjunto de axiomas, un modelo para esos axiomas es una construcción matemática dentro de la cual se suponen verdaderos. No es una imagen exacta, pero a partir del mismo se pueden inferir las propiedades geométricas [1.16]. Un modelo queda determinado al explicitar un conjunto y equiparlo con una métrica.

Una dada figura, se puede representar con varios modelos posibles, pero se verá distinta según con cuál se represente. De todos modos, sus propiedades geométricas, por ejemplo medidas de ángulos, área y perímetro, serán las mismas sea cual sea su representación. Pongo como ejemplo los círculos; en la geometría euclídea un círculo está formado por todos los puntos sobre un cierto plano que están a la misma distancia de un determinado centro. En el plano hiperbólico es lo mismo, salvo que hay que usar para definirlo la distancia hiperbólica en lugar de la distancia euclídea. Si tenemos el

círculo hiperbólico $\Gamma = \{z \in M: D(z, z_0) = \rho_0\}$ donde M es cualquier modelo del plano hiperbólico y D es una distancia admisible para ese modelo, también es un círculo euclídeo, cuyo centro y radio pueden ser diferentes de z_0 y ρ_0 .

Un modelo relevante para esta Tesis es el del semiplano superior, y lo presento en la próxima subsección.

1.5.1. El modelo del semiplano Superior (H).

El conjunto de números complejos $H = \{Z \in \mathbb{C} / \text{Im}[Z] > 0\}$ ($Z = x + i y$, $y > 0$) equipado con la métrica

$$ds = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{y} \quad (1.30)$$

define al modelo del plano hiperbólico o de Lobachevsky. Esta métrica lleva naturalmente a la definición de área. Para cualquier conjunto $A \subset H$ el área hiperbólica se define como [1.12]:

$$\mu(A) = \int_A \frac{dx dy}{y^2} \quad (1.31)$$

Si $I = [0, 1]$ es el intervalo unidad y $\gamma: I \rightarrow H$ es un elemento de curva diferenciable en H , entonces:

$$h(\gamma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt \quad (1.32)$$

es la longitud hiperbólica de la curva. Es importante conocer la distancia hiperbólica entre dos puntos $Z, W \in H$, que se define como $\rho(Z, W) = \text{Inf}(h(\gamma))$.

Hay varias fórmulas explícitas que se ajustan a esta definición, como por ejemplo:

$$\operatorname{Tanh}\left(\frac{1}{2} \rho(z, w)\right) = \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|} \quad (1.33)$$

$$\operatorname{Cosh}(\rho(z, w)) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2 \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w)} \quad (1.34)$$

En esta Tesis voy a usar indistintamente el semiplano superior ($Z=x + i y, y>0$) y el inferior ($Z=x - i y, y>0$), donde el modelo es también válido si se toma $H = \{Z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im}[Z] < 0\}$.

1.5.2. Transformación de Möebius.

Las transformaciones de Möebius son una representación del grupo $SL(2, \mathbb{R})$ (Special linear group), que consiste en las matrices de 2×2 invertibles que verifican que el módulo de su determinante es 1. Las transformaciones de Möebius se construyen asignándole a cada matriz $g = \{\{a_{11}, a_{12}\}, \{a_{21}, a_{22}\}\} \in SL(2, \mathbb{R})$, una transformación biyectiva:

$$T_g(Z) = \frac{a_{11}Z + a_{12}}{a_{21}Z + a_{22}}. \quad (1.35)$$

donde $Z \in H$. Estas transformaciones son isometrías. Esto quiere decir que preservan la distancia y el área hiperbólica en H . El signo del determinante correspondiente a la matriz g determina la orientación de la isometría. Si este determinante vale 1, la isometría preserva la orientación, y si el determinante es -1 la isometría invierte la orientación. Si la $|\operatorname{Tr}(g)| > 2$ (< 2), g es una matriz hiperbólica (elíptica), y si $|\operatorname{Tr}(g)| = 2$, es una matriz parabólica. Si $T_g(Z)$ es hiperbólica tiene 2 puntos fijos reales, si es parabólica tiene uno solo, y si es elíptica tiene dos puntos fijos complejos conjugados, es decir uno solo en H . Este último es el caso de mayor interés para esta Tesis.

Referencias

- [1.1] A. E. Siegman, *Lasers* (University Science, Mill Valley, calif. 1986)
- [1.2] O.E. martinez y J. Chilla *Opt.Lett.* Vol. 17 No. 17 p.1210 (1992).
- [1.3] M.Kovalsky, A.Hnilo y C.González Inchauspe; *Opt.Lett.* 24 p.1638 (1999).
- [1.4] A.Hnilo; *J.Opt.Soc.Am.B* 12 p.4 (1995).

- [1.5] M.Marioni y A.Hnilo; *Opt. Commun.* **147**, p.89 (1998).
- [1.6] M.Kovalsky, A.Hnilo, A.Libertun y M.Marconi; *Opt. Commun.* **192** p.333 (2001).
- [1.7] [13]: M.Kovalsky y A.Hnilo; *Opt. Commun.* **186** p.155 (2000).
- [1.8] I.Christov, V.Stoev, M.Murnane y H.Kapteyn; *Opt.Lett.* **20** p.2111 (1995).
- [1.9] Ming-Dar Wei, Wen-Feng Hsieh y C.C Sung; *Opt. Commun.* **155**, p.406 (1998).
- [1.10] J.Jasapara, W.Rudolph, V.Kalashnikov, D.Krimer, I.Poloyko y M.Lenzner; *J.Opt.Soc. Am.B* **17**, p.319 (2000).
- [1.11] E. Ott, rev. of. *Mod. Phys.* Vol. 53, N. 4 (1981)
- [1.12] S. Katok Departamento de matemática, de la universidad del estado de Pennsylvania University Park, PA 16802, U.S.A.Continued Fractions, Hyperbolic Geometry and Quadratic Forms <http://www.math.psu.edu/mass/reu/2001/>
- [1.13] T.K. Crane, Geometry, Notes easter 2002. Departamento de matemática pura y matemática estadística de la universidad de Cambridge
<http://www.dpmms.cam.ac.uk/~tkc/Geometry/Notes.pdf>
- [1.14] Haus, Fujimoto, Ippen, J. *Opt. Soc. Am. B* **8** (1991)2068.
- [1.15]Kostenbauder *IEEE J. Of Quantum Electronics*, Vol. 26 N0. 6 (1990)
- [1.16]<http://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/hyperbolic.html>

Capítulo 2. Modelo Preliminar

Esta parte de la Tesis consiste en el estudio de las cavidades ópticas mediante mapas iterativos. La herramienta básica que uso son los mapas con variables complejas, que por mucho tiempo sólo aparecieron para resolver dificultades matemáticas en algoritmos de cálculo. Sus aplicaciones directas en física eran raras. La que aquí presento es una interesante aplicación de los mapas complejos a la física. Hay antecedentes recientes que usan este tipo de descripción para estudiar la dinámica de ciertos sistemas. Por ejemplo, se ha usado para estudiar el build-up de la radiación y la coherencia del haz en una cavidad con espejos que tienen una variación transversal de la reflectividad [2.1], y como resultado se encontró que la modificación de los parámetros del haz debida al medio amplificador es la causa de la formación de un ciclo límite.

Posteriormente, mediante el estudio de los residuos del jacobiano se determinó la estabilidad de los puntos fijos [2.2]. También se usaron mapas complejos para una generalización de cavidades confocales, encontrando por resultado órbitas con periodicidad 2, y una evolución del sistema que fue calificada como “muy complicada”, y fue descrita como oscilaciones amortiguadas o sobreamortiguadas que se producen a medida que el sistema converge al punto fijo [2.1]. Estas dos últimas referencias citadas tratan cavidades que solamente tienen dos espejos. El objetivo de este capítulo es abordar cavidades más generales. Al comienzo incluyo una sección en la que hallo la forma del mapa para una cavidad óptica general en la que no hay un medio Kerr ni aberturas, ya que el primer objetivo es conocer en profundidad el sistema no perturbado para poder establecer con mayor exactitud, en secciones y capítulos posteriores, las consecuencias de perturbar el sistema (con aberturas, con el efecto Kerr, y finalmente con ambos). Analizo la dinámica de dicho mapa, y busco el mapa a m -vueltas como herramienta para el análisis. Estudio el problema paralelamente dentro de varios marcos teóricos que nunca fueron usados para estudiar cavidades ópticas (fracciones continuas y geometría hiperbólica), para obtener más información. Por ejemplo, hay conclusiones que no pueden ser sacadas del análisis estándar de la dinámica de los mapas, pero que sí pueden obtenerse, por ejemplo, analizándolos como isometrías del plano complejo. En una segunda sección de este capítulo, incluyo aberturas débiles y hago el estudio completo del mapa obtenido con esta perturbación

2.1 El mapa sin perturbación de Kerr y sin aberturas espaciales.

2.1.1 Construcción del mapa:

Para hallar el mapa hago la transformación de las variables espacial y temporal $1/q_{s,T}$ del pulso, dadas por (1.11) y (1.12), después de una ida y vuelta completa por la cavidad. Tomo una posición arbitraria del plano de cálculo, y como matriz genérica de round trip a (1.14). Los parámetros del pulso se transforman como indican (1.15) y (1.16). Escribo juntas las partes espacial y temporal, ya que tienen la misma forma:

$$\frac{1}{q_{s,T}'} = \frac{C_{s,T} + D_{s,T} \frac{1}{q_{s,T}}}{A_{s,T} + B_{s,T} \frac{1}{q_{s,T}}} \quad (2.1)$$

Como las matrices temporal y espacial son de determinante uno, la última expresión se convierte en

$$\frac{B}{q_{s,T}'} = \frac{(A_{s,T} D_{s,T} - 1) + D_{s,T} \frac{B_{s,T}}{q_{s,T}}}{A_{s,T} + B_{s,T} \frac{1}{q_{s,T}}} = D_{s,T} - \frac{1}{A_{s,T} + \frac{B_{s,T}}{q_{s,T}}} \quad (2.2)$$

Ya es una forma bastante sencilla, pero depende de 3 parámetros ($A_{s,T}$, $B_{s,T}$ y $D_{s,T}$). Para simplificar el estudio del mapa busco un cambio de variables adecuado para que dependa de uno solo. La importancia de este paso está en simplificar las expresiones, para poder describir posteriormente de manera más fácil y rigurosa las regularidades en el comportamiento del sistema, y también encontrar exactamente qué magnitud física rige su dinámica. Restando y sumando $D_{s,T}/2$ a ambos miembros queda:

$$\frac{B}{q_{s,T}'} - \frac{A_{s,T} + D_{s,T}}{2} = \frac{A_{s,T} + D_{s,T}}{2} - \frac{1}{\frac{A_{s,T} + D_{s,T}}{2} + \frac{A_{s,T} - D_{s,T}}{2} + \frac{B_{s,T}}{q_{s,T}}} \quad (2.3)$$

Defino ahora la variable $\psi_{s,T}$ a partir de $q_{s,T}$, y el pámetro $m_{s,T}$ de la siguiente manera:

$$\psi_{S,T} = B_{S,T}/q_{S,T} - (D_{S,T} - A_{S,T})/2 = \rho_{S,T} - i S_{S,T} \quad (2.4)$$

$$m_{S,T} = (D_{S,T} + A_{S,T})/2 . \quad (2.5)$$

El parámetro m_S del dominio espacial, determina la estabilidad geométrica de la cavidad. El elemento de matriz B_S que aparece en el cambio de variables, si bien tiene unidades de longitud, no es en general la longitud física o longitud óptica de la cavidad, y puede ser positivo o negativo. Por ejemplo, para una cavidad simétrica (dos espejos de radio R separados por una distancia L), $B_S < 0$ significa que el valor de L/R está entre 1 y 2, o sea que los focos de los espejos no se cruzan. Para la parte temporal, B_T tiene en cuenta la propagación a través de materiales dispersivos o sistemas ópticos como pares de prismas [2.18], por lo que también puede ser positivo o negativo. Para que tenga sentido físico, el signo de $S_{S,T}$ debe ser el mismo que el de $B_{S,T}$. De ahora en adelante, para simplificar la notación trabajaré explícitamente con $S_{S,T} > 0$, o sea $B_S > 0$, pero teniendo en cuenta la existencia de la posibilidad de tener $S_{S,T} < 0$, o sea $B_S < 0$. En el dominio temporal, el parámetro m_T vale siempre 1 debido a la forma de las matrices temporales enumeradas en el apéndice del capítulo 1 de esta Tesis.

Ya que debido a la forma de la matriz (1.14) las variables espaciales no están acopladas a las temporales, y debido a que la forma funcional de (2.3) es la misma para las variables temporales y espaciales, llamo genéricamente $A = m_{S,T}$, $\psi = \psi_{S,T}$ para simplificar la notación. Voy a aclarar cuando sea necesario si nos referimos a las variables espaciales o temporales. La expresión del mapa con que voy a trabajar es entonces:

$$\psi' = A - \frac{1}{A + \psi} . \quad (2.6)$$

Tanto A como ψ son adimensionales. Queda A como el único parámetro del mapa, pero hay que tener en cuenta que habrá un A para el dominio espacial, coincidente con el parámetro de estabilidad geométrica, mientras que el temporal vale siempre 1 (apéndice 1). Como se verá más adelante, esta propiedad general permite comprender fácilmente el papel secundario jugado por las variables temporales en la dinámica del KLM.

Una propiedad importante de (2.6) es que es invertible, y el mapa inverso coincide con el mismo mapa, pero reemplazando A por $-A$.

$$\psi = -A - \frac{1}{-A + \psi'} \quad (2.7)$$

Es un mapa complejo aunque A sea real, pues $\psi = \rho - iS$ es un complejo, y conviene desdoblarlo en sus partes real e imaginaria de la siguiente manera:

$$\rho' = A - \frac{A + \rho}{(A + \rho)^2 + S^2} \quad (2.8)$$

$$S' = \frac{S}{(A + \rho)^2 + S^2}. \quad (2.9)$$

Una forma alternativa de escribir (2.6) es:

$$\psi' = \frac{A^2 - 1 + A\psi}{A + \psi}. \quad (2.10)$$

Si bien es esencialmente el mismo mapa, esta manera de escribirlo sugiere más claramente una transformación de Möbius $T_g(Z) = \frac{a_{11}Z + a_{12}}{a_{21}Z + a_{22}}$ en H . Esta forma de visualizar el mapa es novedosa y de gran potencialidad, ya que permite aprovechar que estas transformaciones son isometrías en H , y por esto conservan las distancias y áreas hiperbólicas. La matriz $g \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ (invertible y el módulo de su determinante es uno) que le corresponde es:

$$g = \begin{pmatrix} A & A^2 - 1 \\ 1 & A \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Como su determinante es $+1$, preserva la orientación. De acuerdo al análisis para las transformaciones de Möbius, presentado en la sección (1.5.2) de la Introducción, habrá cambios cualitativos en la dinámica del sistema cuando el parámetro A cruce por $|A|=1$. Dado que $|\text{Tr}(g)| = 2A$, si $|A| < 1$ tengo que la matriz g asociada a la transformación es elíptica (analizando la parte espacial, corresponde al caso llamado geoméricamente estable). En el caso contrario, es decir cuando $|A| > 1$, la matriz g asociada a la

transformación es hiperbólica (en la parte espacial corresponde al caso geoméricamente inestable), y si $|A|=1$ la matriz g asociada a la transformación es parabólica (en el dominio espacial corresponde al borde de estabilidad geométrica). Por la forma de todas las matrices asociadas a propagaciones temporales, en el dominio temporal, A vale siempre 1.

2.1.2 Mapa a n vueltas:

El mapa a n -vueltas es útil para encontrar órbitas de periodicidades mayores que 1. Se obtiene aplicando n veces seguidas el mapa (2.6). Si ψ_0 es la condición inicial de la cual parto, y aplico el mapa una vez obtengo la expresión (2.10). Aplico nuevamente el mapa a ψ^1 y reacomodando la expresión obtengo

$$\psi^2 = \frac{A^2 - 1 + A\psi^1}{A + \psi^1} = \frac{2A^3 - 1 + (2A^2 - 1)\psi_0}{2A^2 - 1 + 2A\psi_0} \quad (2.12)$$

Repitiendo n veces este procedimiento, llego a:

$$\psi^n = \frac{P_1^n + P_2^n \psi_0}{P_2^n + P_3^n \psi_0} \quad (2.13)$$

donde $P_{1,2,3}^n$ son polinomios que van a jugar un rol fundamental en la dinámica (los hemos publicado en [2.7]). Las expresiones explícitas de los primeros polinomios son:

para $n=0$	$P_1^0 = 0$	$P_2^0 = 1$	$P_3^0 = 0$
para $n=1$	$P_1^1 = A^2 - 1$	$P_2^1 = A$	$P_3^1 = 1$
para $n=2$	$P_1^2 = -1 + 2A^3$	$P_2^2 = -1 + 2A^2$	$P_3^2 = 2A$
para $n=3$	$P_1^3 = 1 - 5A^2 + 4A^4$	$P_2^3 = -3A + 4A^3$	$P_3^3 = -1 + 4A^2$
para $n=4$	$P_1^4 = 4A - 12A^3 + 8A^5$	$P_2^4 = 1 - 8A^2 + 8A^4$	$P_3^4 = -4A + 8A^3$

(2.14)

Una simple inspección permite decir que

$$P_1^n = (A^2 - 1) P_3^n \quad (2.15)$$

$$\frac{dP_2^n}{dA} = n P_3^n \quad (2.16)$$

$$P_2^n = A P_3^n - P_3^{n-1} \quad (2.17)$$

$$(P_3^{n-1})^2 - P_3^n P_3^{n-2} = 1 \quad (2.18)$$

$$(P_2^n)^2 - P_1^n P_3^n = 1 \quad (2.19)$$

$$P_{2,3}^{n+1} = A P_{2,3}^n + P_{1,2}^n \quad (2.20)$$

El grado de P_3^N es M , y coincide con la periodicidad N disminuida en uno, es decir $M=N-1$. Este mapa a n -vueltas (2.13) es el n -ésimo convergente C_n (1.25) de la fracción continua que queda al aplicar n -veces seguidas el mapa a una vuelta (2.6), sin reacomodar la expresión. En este caso los coeficientes de la fracción continua son reales, $a_i = 2A$, $b_i = -1$:

$$\psi_n = A - \frac{1}{2A - \frac{1}{2A - \frac{1}{2A - \dots \frac{1}{A + \psi_0}}}} = \frac{A_n}{B_n} = C_n \quad (2.21)$$

Usando las propiedades (1.27) y (1.28) de las fracciones continuas, obtengo las siguientes relaciones entre los polinomios válidas para cualquier n :

$$P_{2,3}^{n+1} = 2A P_{2,3}^n - P_{2,3}^{n-1} \quad (2.22)$$

Para tener la expresión de $P_{2,3}^n$ hay que aplicar las expresiones (2.22) n veces, tomando como valores iniciales $P_2^0=1$, $P_2^1=A$, $P_3^0=0$, $P_3^1=1$, que se obtienen de (2.14). Al tener determinado P_3^n quedan determinados los polinomios P_1^n por (2.15) y P_2^n por (2.17). Si $N=n-1$, puedo escribir P_3^n como

$$P_3^n = \sum_{i=0}^N a_i A^i \quad (2.23)$$

Puede demostrarse por inducción que los coeficientes hallados para P_3^n satisfacen

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{Si } i = N - (2k + 1) \\ 2^{N-2k} \binom{N-k}{k} (-1)^k & \text{Si } i = N - 2k \end{cases} \quad k \in \text{Naturales} \quad (2.24)$$

En el apéndice 2.7 demuestro cómo los polinomios P_2^n y P_3^n también pueden ser escritos como senos y cosenos de un cierto ángulo θ , y como consecuencia se obtiene la equivalencia entre una cavidad óptica periódica y un ducto gaussiano.

2.1.3 Análisis general de los puntos fijos y su estabilidad.

Las órbitas de periodicidad 1 del mapa (2.6) están dadas por sus puntos fijos que son

$$\psi_f = \pm \sqrt{A^2 - 1}. \quad (2.25)$$

La estabilidad de estas soluciones estacionarias se determina calculando el módulo de los autovalores del jacobiano del mapa (J), evaluado en el punto fijo. Los autovalores de la matriz J de 2x2 satisfacen

$$\text{Det}(J) - \lambda \text{Tr}(J) + \lambda^2 = 0 \quad (2.26)$$

por lo tanto

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{Tr}(J)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\text{Tr}(J)}{2}\right)^2 - \text{Det}(J)}. \quad (2.27)$$

Para calcular los elementos de matriz del jacobiano derivo las expresiones para las partes real e imaginaria de del mapa (2.6), es decir derivo las expreciones (2.8) y (2.9) obteniendo:

$$\frac{\partial \rho_{n+1}}{\partial \rho_n} = \frac{(A + \rho)^2 - S^2}{((A + \rho)^2 + S^2)^2} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \rho_{n+1}}{\partial S_n} = \frac{2S(A + \rho)}{((A + \rho)^2 + S^2)^2} \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial S_{n+1}}{\partial \rho_n} = -\frac{\partial \rho_{n+1}}{\partial S_n} \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial S_{n+1}}{\partial S_n} = \frac{\partial \rho_{n+1}}{\partial \rho_n}. \quad (2.31)$$

Con estos elementos de matriz calculo la semitraza y el determinante:

$$\frac{Tr(J)}{2} = \frac{(A + \rho)^2 - S^2}{((A + \rho)^2 + S^2)^2} \quad (2.32)$$

$$Det(J) = \frac{1}{((A + \rho)^2 + S^2)^2}. \quad (2.33)$$

Reemplazando en (2.27), la expresión general para el autovalor queda:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(A + \rho_{fijo})^2 - S_{fijo}^2 \pm i\sqrt{4(A + \rho_{fijo})^2 S_{fijo}^2}}{((A + \rho_{fijo})^2 + S_{fijo}^2)^2} \quad (2.34)$$

y dado que interesa determinar la estabilidad del punto fijo, calculo su módulo, que tiene una expresión mucho más sencilla:

$$|\lambda_{1,2}| = \frac{1}{(A + \rho_{fijo})^2 + S_{fijo}^2}. \quad (2.35)$$

Si $|A| < 1$, se obtienen entonces dos puntos fijos (2.25), y solamente uno de ellos pertenece al semiplano complejo H (1.5.1), de acuerdo a lo esperado para una isometría asociada a una matriz elíptica. Los autovalores asociados a cada punto fijo son complejos conjugados. Si $|A| = 1$ se obtiene un único punto fijo, $\psi = 0$. Si $|A| > 1$ se

obtienen dos puntos fijos reales, como se espera para una transformación asociada a una matriz hiperbólica. A continuación analizo cada caso con más detalle.

2.1.4 Análisis detallado del caso en que $|A| < 1$.

El mapa (2.6) tiene en esta región del parámetro A un solo punto fijo imaginario puro con sentido físico, ya que es una transformación elíptica. Si el elemento de la matriz de propagación espacial, B_S es positivo (negativo) será el de parte imaginaria negativa (positiva), es decir S_S positivo (negativo). En esta región del espacio de parámetros el punto fijo con sentido físico se corresponde con haces confinados para la aplicación espacial. Para la aplicación temporal, el punto fijo corresponde a un pulso cuya duración y chirp varían a medida que se propaga a través del medio dispersivo de manera solitónica. Con (2.35) calculo su estabilidad. Queda:

$$|\lambda_{1,2}| = 1 \quad (2.36)$$

que implica estabilidad indiferente. Por lo tanto, no alcanza con el análisis a orden uno para conocer la estabilidad del punto fijo.

Voy a describir a continuación las trayectorias, y a hacer algunas consideraciones geométricas acerca de las mismas. Para visualizarlas, la herramienta ideal son las simulaciones numéricas, y los gráficos de las mismas. Al graficar ρ Vs S obtengo trayectorias que están todas sobre circunferencias con centros en $\rho_c=0$, $S_c \neq 0$, para todos los valores de A y condiciones iniciales elegidas. Como ejemplo muestro (figura 7) las iteraciones para $A=0.92388\dots$, que es el máximo cero de P_3^8 , partiendo de la condición inicial $\rho_0=2$ $S_0=-3$:

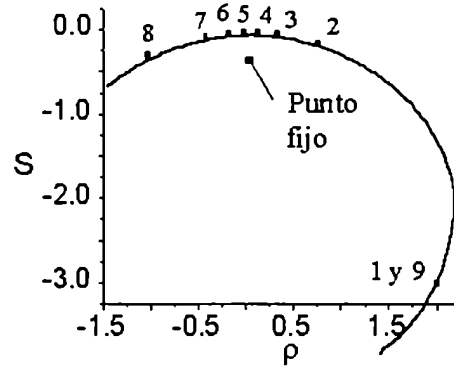


Figura 7 Trayectoria para $A=0.92388\dots$, máximo cero de P_3^8
con condición inicial $\rho_0=2$ $S_0=-3$:

Voy a formalizar este resultado numérico, que muestra que para esta región del parámetro A todas las trayectorias están sobre circunferencias. Para hacerlo, propongo la ecuación para la circunferencia sobre la que está inscripta la trayectoria:

$$\rho^2 + (S - dy)^2 = R^2 \quad (2.37)$$

Quiero verificar que dado un A y una condición inicial, la trayectoria está íntegramente contenida en esta circunferencia, y busco saber cuánto deben valer R y dy . La figura 8 indica quiénes son R y dy , y también la posición del punto fijo.

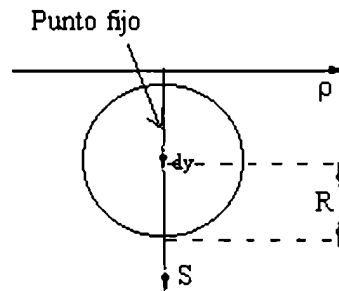


Figura 8 esquema de la circunferencia que incluye la trayectoria

Si una trayectoria está íntegramente contenida en esta circunferencia, se verifica que si un punto que puede ser la condición inicial o no (ρ, S) pertenece a la circunferencia, su iteración siguiente también pertenece a la misma. Esto me permite construir un sistema de ecuaciones de dos incógnitas para resolver:

$$\rho^2 + (S - dy)^2 = R^2 \quad (2.38)$$

$$\left(A - \frac{\rho + A}{(\rho + A)^2 + S^2} \right)^2 + \left(\frac{S}{(\rho + A)^2 + S^2} - dy \right)^2 = R^2 \quad (2.39)$$

cuyo resultado es

$$dy = \frac{1 - A^2 + \rho^2 + S^2}{2 S} \quad (2.40)$$

$$R^2 = dy^2 + A^2 - 1. \quad (2.41)$$

Es decir que si se parte de cualquier condición inicial (ρ_0, S_0) , la trayectoria estará incluida en una circunferencia centrada en $(0, dy)$ de radio R , con R y dy determinados por las expresiones (2.40) y (2.41) evaluadas en (ρ_0, S_0) . Otra forma de determinar que R y dy son constantes es a través de las isometrías de H . La transformación (2.10) conserva las distancias hiperbólicas. Al iterar el punto fijo tengo el mismo punto fijo, y al iterar la condición inicial obtengo los puntos de la trayectoria. Esto me dice que la distancia hiperbólica entre el punto fijo y la condición inicial, debe conservarse a través de sucesivas iteraciones, o sea que la trayectoria estará incluida en un círculo hiperbólico cuyo centro hiperbólico es el punto fijo. En la sección 1.5 del capítulo anterior, dije que un círculo hiperbólico coincide con un círculo euclídeo, aunque el centro y el radio hiperbólicos no coinciden con el centro y radio euclídeos. Por otra parte, cualquier definición apropiada para la distancia hiperbólica, da un valor que se conserva con la transformación. Por lo tanto usando una de las posibles definiciones, (1.33), sé que debe mantenerse constante la siguiente expresión:

$$\frac{|\psi - \psi_F|^2}{2 \operatorname{Im}(\psi_0) \operatorname{Im}(\psi_F)} = \frac{\rho^2 + S^2 + 1 - A^2 - 2 S \sqrt{1 - A^2}}{2 S \sqrt{1 - A^2}} = \frac{dy}{\sqrt{1 - A^2}} - 1 \quad (2.42)$$

por lo tanto dy es constante. Esto me permite afirmar que:

$$1 - A^2 + \rho^2 + S^2 = 2 S dy \quad (2.43)$$

$$\rho^2 + S^2 - 2 S dy + dy^2 = A^2 - 1 + dy^2 = R^2 \quad (2.44)$$

y así queda demostrado, de manera más elegante, que el radio R definido por la

expresión (2.41) es constante.

Al graficar para un dado A las trayectorias obtenidas iterando el mapa (2.6) a partir de distintas condiciones iniciales encuentro una familia de círculos a la que pertenecen dichas trayectorias. En la figura 9 se observan los círculos correspondientes a condiciones iniciales (ρ_0, S_0) que indico con una flecha. Estos círculos están ubicados uno adentro del otro, y a medida que la distancia hiperbólica entre la condición inicial y el punto fijo disminuye, el radio decrece siendo el caso límite el círculo de radio 0 centrado en el punto fijo. Puedo afirmar que el punto fijo del mapa (2.6) tiene estabilidad indiferente, ya que si tomo una pequeña perturbación del punto fijo como condición inicial, me aseguro que su trayectoria va a estar totalmente incluida en una circunferencia determinada por dicha perturbación. La perturbación nunca se va a acercar al punto fijo menos de lo que permite dicha circunferencia, y por lo tanto no es un punto fijo estable. Nunca se va a alejar más de lo que permite dicha circunferencia, por lo que tampoco se puede afirmar que sea inestable.

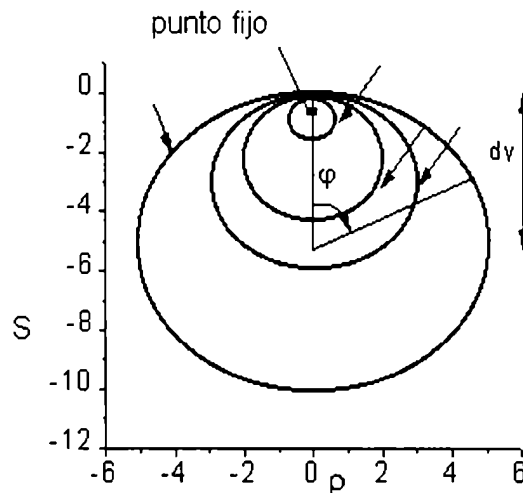


Figura 9 Círculos correspondientes a condiciones iniciales (ρ_0, S_0) , indicadas con una flecha

El cambio de variables introducido en (2.4) y la dependencia del mapa con un único parámetro A , que se obtiene en (2.5) permiten esta descripción tan precisa de las trayectorias. A partir del uso novedoso en este tema de la geometría hiperbólica, se fundamenta el comportamiento del sistema.

Como la trayectoria está sobre una circunferencia, es evidente que el sistema puede ser descrito mediante una sola variable. Las expresiones posibles de esta única variable se discuten en el Apéndice 2.1 En este trabajo de Tesis, sin embargo, utilizaré solamente el mapa complejo.

2.1.5 Órbitas multiperiódicas.

Los puntos fijos del mapa a una vuelta, son órbitas periódicas del sistema (con periodicidad 1) y son a su vez puntos fijos del mapa a n vueltas para cualquier n independientemente del valor de A con que se trabaje. Existe la posibilidad de tener periodicidades mayores. Para investigar estas órbitas multiperiódicas del sistema, uso el mapa a n -vueltas (2.13) cuyos puntos fijos son las órbitas de período de n . Si el parámetro A es tal que se anula P_3^n , por (2.15) también se anula P_1^n , y el mapa a n -vueltas (2.13) queda reducido a la identidad. Estas órbitas periódicas son de estabilidad indiferente, pues para cualquier condición inicial que se tome, después de n iteraciones se vuelve al mismo punto del que se partió, y las perturbaciones ni crecen ni disminuyen. Este tratamiento da una explicación sencilla a resultados numéricos obtenidos con anterioridad. Por ejemplo en la referencia [2.1], trabajando con cavidades simétricas representadas por el esquema de la figura 10, donde

$$g = 1 - \frac{L}{R} \quad (2.45)$$

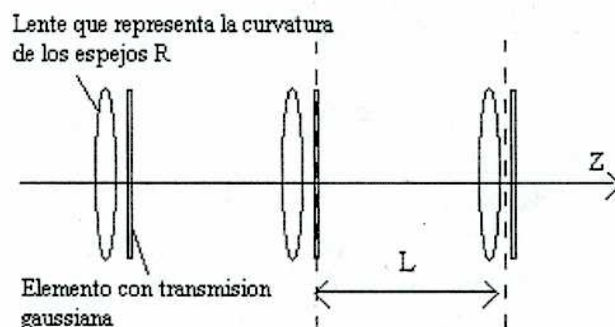


Figura 10 Esquema de una guía óptica generada con una cavidad simétrica

encontraron numéricamente órbitas de período 3 para $g=0.5$. En ese caso la estabilidad geométrica está dada por la condición $2g^2-1=-0.5$, que a su vez coincide con mi parámetro A . Debido a que -0.5 es una raíz de P_3^3 , puedo predecir la periodicidad de la órbita resultante. Estos comportamientos podrían lograrse en la práctica armando una cavidad tal que su parámetro A coincida con alguno de los ceros de algún P_3^n , con $n \in \text{Naturales}$. Es obvio que para estos valores de A , el mapa a n vueltas no converge (ya que tiene órbitas periódicas).

En la sección 2.1.2 muestro como mapa a n vueltas puede ser obtenido de la expresión (2.21), que es el n -ésimo convergente C_n de la fracción continua que queda al aplicar n -veces seguidas el mapa a una vuelta (2.6). Si para cada i , se cumple que $a_i > 2$, $b_i = \pm 1$, se puede demostrar que la fracción continua es convergente (según lo explicado en la introducción). Como los coeficientes son reales, $a_i = 2A$, $b_i = -1$ el mapa a n vueltas no converge si el parámetro A es menor que 1. Es decir que debe verificarse que todos los ceros de los polinomios P_3^n están entre -1 y 1 . En la figura 11, muestro los ceros de los polinomios en función de $1/N$, donde N es el grado del polinomio. A medida que N crece hay cada vez más ceros repartidos en todo el intervalo $(-1,1)$, con una mayor concentración de ellos cerca de $|A|=1$.

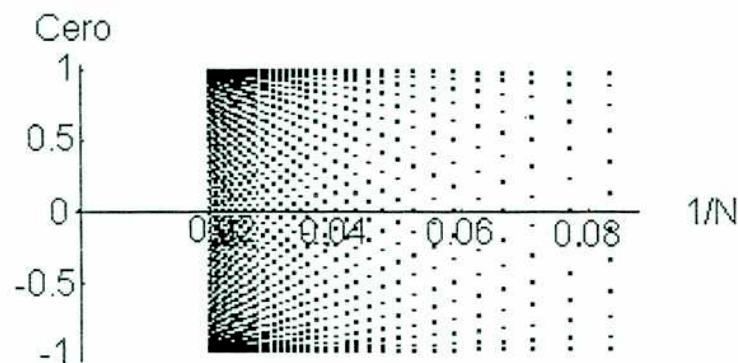


Figura 11 los ceros de los polinomios P_3^N en función de $1/N$

Quiere decir que (pensando solamente en la parte espacial) para cualquier cavidad geoméricamente estable que se tome, hay una probabilidad muy grande de tener órbitas periódicas de período $n > 1$, sobre todo en la proximidad de los límites de estabilidad geométrica $A = \pm 1$. Si no las tuviera, basta con modificar ligeramente las condiciones

geométricas de la cavidad, hasta que el parámetro de estabilidad geométrica A coincida con un cero de algún de un polinomio P_3^M , donde M puede ser cualquiera.

Detallo a continuación algunas propiedades interesantes que pueden tener cierta utilidad, referidas a los promedios de los polinomios hechos sobre $2M$, cuya deducción incluyo en el apéndice 2.2 y agrego una posible aplicación de las mismas en apéndice 2.3:

$$\overline{P_2(x_{max})^2} = \frac{1}{2}. \quad (2.46)$$

$$\overline{(P_3^n)^2} = \frac{1}{2(1-A^2)} \quad (2.47)$$

$$\overline{P_3^{n+1} P_3^n} = \frac{A}{2(1-A^2)}. \quad (2.48)$$

$$\overline{P_2^n P_3^n} = 0 \quad (2.49)$$

$$\overline{P_2^{n+1} P_3^n} = -\frac{1}{2} \quad (2.50)$$

$$\overline{P_2^n P_3^{n+1}} = -\frac{1}{2} \quad (2.51)$$

$$\overline{P_{2,3}^n P_{2,3}^{n+1}} = A \overline{(P_{2,3})^2} \quad (2.52)$$

2.1.6 Análisis exhaustivo del caso en que $|A|=1$.

En principio voy a resaltar nuevamente que, debido a la forma de las matrices de propagación temporales, al hacer el producto de las mismas para obtener la matriz temporal de round-trip, se obtiene por resultado una matriz con $A=1$. Por lo tanto, las variables temporales se encuadran en esta región, como así también las variables espaciales cuando estamos en el límite de estabilidad geométrica. Sabemos que en este caso hay un solo punto fijo real, el origen $\psi_f = 0$. Físicamente, corresponde a una onda plana para la parte espacial, y al funcionamiento continuo para la temporal. De (2.35) no puedo decir si es estable o no, por que el módulo del autovalor evaluado en este punto fijo es $|\lambda| = 1$. Por esto analizo directamente el mapa a n vueltas, y veo a qué tiende para n tendiendo a infinito. Se puede comprobar que

$$P_3^n(1) = n \quad (2.53)$$

$$P_2^n(1) = P_3^n(1) - P_3^{n-1}(1) = 1 \quad (2.54)$$

$$P_1^n(1) = 0. \quad (2.55)$$

El mapa a n-vueltas (2.13) se reduce entonces a:

$$\psi^n = \frac{P_2^n(1)\psi_0}{P_2^n(1) + P_3^n(1)\psi_0} = \frac{\psi_0}{1 + n\psi_0} \quad (2.56)$$

y los mapas para ρ^n y S^n a n-vueltas son:

$$\rho^n = \frac{\rho_0(1 + n\rho_0) - nS_0^2}{(1 + n\rho_0)^2 + S_0^2} \quad (2.57)$$

$$S^n = \frac{S_0}{(1 + n\rho_0)^2 + S_0^2}. \quad (2.58)$$

Independientemente de la condición inicial de la que se parta, (2.57) y (2.58) tienden al punto fijo $\psi_f = 0$ para $n \rightarrow \infty$. En consecuencia, el punto fijo es un atractor, y su cuenca de atracción es todo el espacio H . La transformación es un ejemplo de una transformación parabólica. Hice una simulación numérica para ilustrar las trayectorias, partiendo de una condición inicial cualquiera, $\rho=2$ y $S=-3$, $A=-1$, que muestro en la figura 12, que refleja el comportamiento que encontré en todos los casos que he probado numéricamente. Se observa claramente la convergencia al punto fijo (el origen). Las trayectorias aún están incluidas en circunferencias. Para $A=+1$ tienen exactamente la misma apariencia.

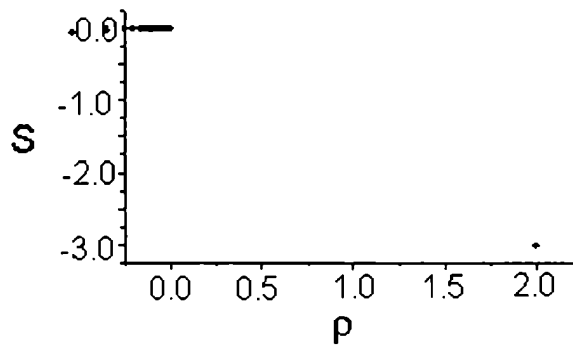


Figura 12 trayectoria para $A=-1$ y condición inicial $\rho=2$ y $S=-3$

Para la región $|A| < 1$, las trayectorias están inscriptas en círculos hiperbólicos con cierto

radio. El radio euclídeo del círculo definido por un cierto A y una cierta condición inicial fija, aumenta al aumentar A . También el radio hiperbólico. En la región $|A|=1$, tengo la situación límite. Retomando las definiciones de distancia hiperbólica, (1.33) y (1.34), se ve fácilmente que la distancia entre cualquier punto de la trayectoria y el punto fijo $\psi_f = 0+0i$ es $\rho(\psi, \psi_f) = \infty$. Es decir que para una condición inicial fija, las trayectorias están incluidas en círculos hiperbólicos cuyo radio hiperbólico tiende a infinito a medida que $|A|$ se acerca a 1.

2.1.7 Análisis exhaustivo del caso en que $|A| > 1$

El mapa (2.10) en esta región es una transformación elíptica. En este caso los dos puntos fijos dados por (2.25) tienen ambos sentido físico y son reales. En esta región del espacio de parámetros tengo para la aplicación espacial ondas esféricas no confinadas. La estabilidad dada por el módulo de los autovalores (2.35) queda:

$$|\lambda_{\pm}| = \left| \frac{1}{A \pm \sqrt{A^2 - 1}} \right| = |A \mp \sqrt{A^2 - 1}| \quad (2.59)$$

Los módulos de los dos autovalores correspondientes a cada punto fijo no son iguales. El punto fijo es estable cuando $A > 0$ (o $A < 0$) es λ_+ (λ_-), y el inestable es λ_- (λ_+). Dado que para $|A|=1$ el punto fijo es un atractor cuya cuenca de atracción es todo H , busco ver si sucede lo mismo con el punto fijo estable de esta región. Para esto veo a dónde converge el mapa a n -vueltas para $n \rightarrow \infty$. Defino x_n como el cociente entre P_3^{n+1} / P_3^n , y por (2.22), puedo decir que

$$x_{n+1} = \frac{P_3^{n+1}}{P_3^n} = 2A - \frac{1}{\left(\frac{P_3^n}{P_3^{n-1}} \right)} = 2A - \frac{1}{x_n} \quad (2.60)$$

La expresión (2.60) introduce una fracción continua para x_n (1.25). En este caso los coeficientes son reales, $a_i = 2A$, $b_i = -1$ para todos los valores de i . También expliqué que si $a_i > 2$, $b_i = \pm 1$ la fracción continua tiene límite. Para el caso de $A > 1$, es evidente que estoy dentro de esta condición. De todos modos este caso también se encuadra en la extensión de la demostración hecha en el apéndice 2.4. Para $A < -1$, basta con definir $y_n = -x_n$ y multiplicar todo por -1 , y queda de este modo definida para y_n una fracción

continua idéntica a la anterior. Debido a (2.60), el $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ debe cumplir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = 2A - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} \quad (2.61)$$

entonces se deduce que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_3^{n+1}}{P_3^n} = A \pm \sqrt{A^2 - 1} \quad (2.62)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_3^n}{P_3^{n+1}} = A \mp \sqrt{A^2 - 1} \quad (2.62bis)$$

Verifico numéricamente que en (2.62) el signo + corresponde a los valores de A positivos y el signo - corresponde a los valores de A negativos. Como (2.62bis) es la inversa de (2.62), el signo - corresponde a los valores de A positivos y el signo + corresponde a los valores de A negativos. Para mostrar como converge el cociente de los polinomios P_3 , incluyo a continuación unos pocos valores de P_3^j para $A=1.9$

$$P_3^1(1.9) = 1$$

$$P_3^2(1.9) = 3.8$$

$$P_3^3(1.9) = 13.44$$

$$P_3^4(1.9) = 47.272$$

$$P_3^5(1.9) = 166.194$$

$$P_3^6(1.9) = 584.264$$

$$P_3^7(1.9) = 2054.01$$

$$P_3^8(1.9) = 7220.97$$

$$P_3^7(1.9) / P_3^8(1.9) = 3.51555$$

$$1.9 + \sqrt{1.9^2 - 1} = 3.51555$$

$$1.9 - \sqrt{1.9^2 - 1} = 0.284451$$

y con $A = -1.9$

$$P_3^1(-1.9) = 1$$

$$P_3^2(-1.9) = -3.8$$

$$P_3^3(-1.9) = 13.44$$

$$P_3^4(-1.9) = -47.272$$

$$P_3^5(-1.9) = 166.194$$

$$P_3^6(-1.9) = -584.264$$

$$P_3^7(-1.9) = 2054.01$$

$$P_3^8(-1.9) = -7220.97$$

$$P_3^7(-1.9)/P_3^8(-1.9) = -3.51555$$

$$-1.9 + \sqrt{(-1.9)^2 - 1} = -0.284450$$

$$-1.9 - \sqrt{(-1.9)^2 - 1} = -3.51555$$

Estos resultados, además de convalidar (2.62bis), muestran que la convergencia es rápida. En solamente 8 iteraciones (2.62bis) es una excelente aproximación al valor límite. Otro cociente que necesito es P_2/P_3 . Usando (2.17) llego a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_2^n}{P_3^n} = A - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_3^{n-1}}{P_3^n} = \pm \sqrt{A^2 - 1} \quad (2.63)$$

donde el signo + corresponde ahora a los valores que cumplen que $A > 0$ y el - a los que cumplen $A < 0$.

Por ahora tengo la convergencia de los cocientes de polinomios, pero lo que busco es quién es el atractor del sistema, es decir el valor al que converge el mapa a n vueltas. Vuelvo a trabajar con la expresión (2.13). Dado que todos los ceros de P_3^n son menores que 1, puedo dividir tanto el numerador como el denominador por P_3^n y calcular el límite para n tendiendo a infinito. El resultado es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{P_1^n}{P_3^n} + \frac{P_2^n}{P_3^n} \psi_0}{\frac{P_2^n}{P_3^n} + \psi_0} = \frac{(A^2 - 1) \pm \sqrt{A^2 - 1} \psi_0}{\pm \sqrt{A^2 - 1} + \psi_0} = \alpha. \quad (2.64)$$

El límite de (2.64) existe sólo si existe el límite de P_2^n / P_3^n , que está dado por (2.63). Si P_2^n/P_3^n tuviera límite infinito, convergería a la misma condición inicial ψ_0 , y eso sería un absurdo. Como (2.64) debe cumplirse para todo ψ_0 entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi^n = \alpha = \pm \sqrt{A^2 - 1} \quad (2.65)$$

donde el signo + corresponde a valores de A positivos, y el - a los negativos. Esto se debe a que el signo de P_2^n / P_3^n es el signo de A , y eso se demuestra fácilmente por inducción en el apéndice 2.5.

Puedo afirmar entonces que el punto fijo estable es además un atractor, y que su cuenca de atracción es todo el espacio complejo con sentido físico.

Como ilustración, muestro en la figura 13 una simulación numérica para $A=1.01$, $\rho_0=2$, $S_0=3$. Del análisis de un gran número de simulaciones para diversos valores de A y condiciones iniciales, concluyo que cuanto mayor es el módulo de A , más rápida es la convergencia.

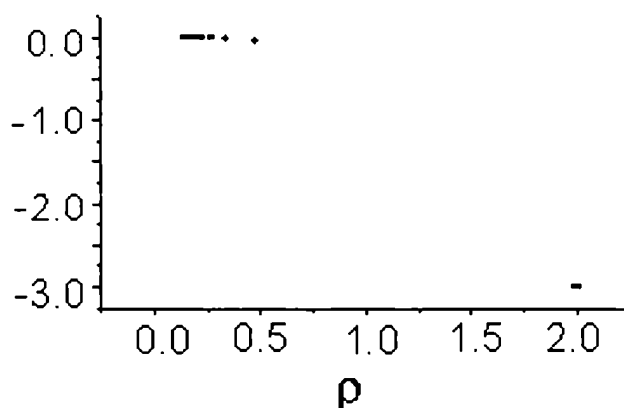


Figura 13 Trayectoria para $A=1.01$, $\rho_0=2$, $S_0=3$.

2.2 El mapa sin perturbación de Kerr con aberturas espaciales

2.2.1 Construcción del mapa:

Todas las cavidades ópticas reales tienen aberturas espaciales por muy débiles que sean, debido a las dimensiones finitas de los elementos que las forman. Para analizar su influencia, supongo una única abertura ubicada en el lugar dentro de la cavidad que simplifique más las cuentas, y ese lugar es uno de los espejos (que pueden ser planos o no), como muestro en la figura 14. Es indistinto poner en el dibujo primero la abertura y después el espejo o al revés, pues el producto entre las matrices correspondientes a un espejo y una abertura es conmutativo (ver el apéndice del capítulo 1 con las expresiones de las matrices). Entonces tomo para trabajar la figura ficticia 14 bis, en la que se indica dónde pongo el plano de cálculo. A diferencia de lo hecho para el caso de no tener aberturas espaciales, donde el plano de cálculo podía estar en cualquier sitio, aquí se lo fija en un lugar para el que las cuentas se simplifiquen. Ya no es un lugar arbitrario. Es un lugar extraño, en el sentido de que no se pueden hacer mediciones allí. El pulso

todavía no terminó de pasar por el espejo y ya le estoy calculando sus parámetros espaciales. De todos modos, la elección de esta posición ficticia para el plano no es una limitación, porque si quiero los parámetros del haz en una posición real basta con propagar hasta la misma. Finalmente, las condiciones de estabilidad no dependen de dónde está el plano de cálculo, y con esta elección las expresiones que se obtienen son, como se dijo, más simples.

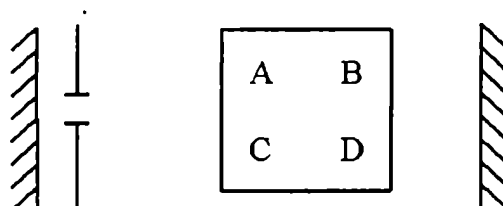


Figura 14 Esquema real de la cavidad

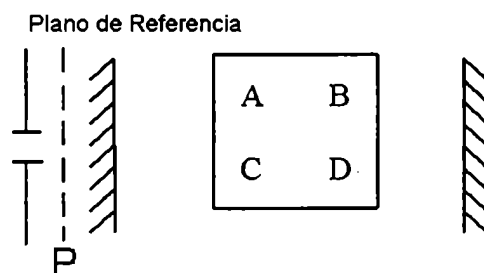


Figura 14 bis Esquema ficticio de la cavidad

La matriz espacial de propagación (M_{pp}) dentro de una cavidad desde un punto cualquiera P de la cavidad hasta volver al mismo punto P, tiene la propiedad de tener $A=D$. No me estoy refiriendo a la matriz de round trip (en la que el haz cruza el plano de cálculo en el mismo sentido), sino a la matriz que corresponde a que el haz va y viene sólo por una parte de la cavidad. La propiedad de M_{pp} de tener $A=D$ se demuestra en el apéndice 2.6. Como se muestra en la figura 14 bis, se ubica el punto P coincidente con la posición del plano de referencia. Entonces M_{pp} tendrá la forma:

$$M_{pp} = \begin{pmatrix} A & B \\ \frac{A^2 - 1}{B} & A \end{pmatrix}. \quad (2.66)$$

Para tener la matriz de round-trip completa, falta incluir dos veces la abertura, ya que pasa a través de la misma una vez al ir y otra al volver. Supongo una abertura gaussiana

débil, así que si $Area = \text{área (muy grande) de la abertura y defino:}$

$$\tilde{a}_1 = \frac{\lambda Area^{-1}}{\pi}, \quad (2.67)$$

que es un valor positivo. Tomar \tilde{a}_1 negativo equivale a usar antiaberturas, es decir objetos cuya transmisión es complementaria a la de las aberturas.

La matriz de propagación correspondiente a la abertura o antiabertura está dada en el apéndice del capítulo 1. Como pasa dos veces seguidas por dicha abertura defino

$$\tilde{a} = 2 \tilde{a}_1. \quad (2.68)$$

La matriz de round trip entonces queda de la forma

$$MRT = \begin{pmatrix} A & B \\ \frac{A^2 - 1}{B} - i A \tilde{a} & A - i B \tilde{a} \end{pmatrix}. \quad (2.69)$$

Nuevamente escalo $1/q$ y defino:

$$\psi_{S,T} = B_{S,T}/q_{S,T} - (D_{S,T} - A_{S,T})/2 = \rho_{S,T} - i S_{S,T} \quad (2.70)$$

$$A = m_{S,T} = (D_{S,T} + A_{S,T})/2 \quad (2.71)$$

$$a = B \tilde{a} \quad (2.72)$$

para obtener a partir de las propagaciones (1.15) y (1.16) de la introducción (1.15) el mapa:

$$\psi' = \frac{(A^2 - 1) + A\psi}{A + \psi} - ia = A - \frac{1}{A + \psi} - ia \quad (2.73)$$

Este nuevo mapa es simplemente el mapa (2.6) corrido en ia . Si defino:

$$A' = A - \frac{ia}{2} \quad (2.74)$$

$$\xi = \psi + \frac{ia}{2} \quad (2.75)$$

la expresión (2.73) se transforma en

$$\xi' = A' - \frac{1}{A' + \xi} \quad (2.76)$$

Que tiene la misma forma del mapa sin aberturas. El mapa inverso, nuevamente es el mismo mapa (2.76), pero evaluado en $-A'$. Uso según convenga (2.73) o (2.76), pues ambos describen la misma dinámica. Hay que tener cuidado de usar en cada caso la variable que corresponda. Tomando partes real e imaginaria a (2.73) obtengo el mapa en dos dimensiones:

$$\rho' = A - \frac{A + \rho}{(A + \rho)^2 + S^2} \quad (2.77)$$

$$S' = \frac{S}{(A + \rho)^2 + S^2} + a \quad (2.78)$$

Nótese que la abertura no afecta el radio de curvatura del haz directamente, sino sólo al tamaño del haz.

Para tener el mapa a n -vueltas, hago n iteraciones del mapa (2.76), y procediendo de la misma manera que en la sección 2.1.2 llego a una expresión análoga a (2.13), pero sin olvidar que los polinomios, a pesar de tener exactamente la misma forma que antes, ahora están evaluados en A' , que es complejo. Por supuesto siguen las mismas leyes de formación que antes y tienen los mismos ceros que antes.

$$\xi'' = \frac{P_1^n(A') + P_2^n(A') \xi_0}{P_2^n(A') + P_3^n(A') \xi_0} \quad (2.79)$$

Las órbitas multiperiódicas que tenía para el caso geométricamente estable, desaparecen al incluir las aberturas, ya que los valores del parámetro A' en este caso son siempre complejos, con parte imaginaria distinta de cero. El parámetro A' correspondiente a las cavidades con aberturas no satisface nunca la condición para tener órbitas multiperiódicas $P_3^n(A')=0$, ya que para cualquier valor n los ceros de $P_3^n(A')$ son reales entre -1 y 1, y A' es complejo.

2.2.2 Análisis general de los puntos fijos y su estabilidad

Los puntos fijos que se obtienen para (2.73) son

$$\psi_{f_{\pm}} = -i \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(A - i \frac{a}{2}\right)^2 - 1} \quad (2.80)$$

$$(A + \psi_{f+})(A + \psi_{f-}) = 1 \quad (2.81)$$

Por (2.81), se cumple que $\text{Sg}(\text{Im}[\psi_{f+}]) = -\text{Sg}(\text{Im}[\psi_{f-}])$ y nuevamente uno solo de ellos tiene sentido físico. Para analizar su estabilidad no hace falta volver a calcular los elementos del jacobiano del mapa (2.73), pues es el mismo mapa (2.6) corrido en una constante compleja, que al derivar es como si no estuviera. Por lo tanto valen las expresiones (2.26) a (2.35). Para determinar la estabilidad uso (2.35), que escrita de manera más conveniente queda

$$|\lambda_{1,2}| = \frac{1}{|A + \psi_{f_{\pm}}|} \quad (2.82)$$

Usando (2.80) y desarrollando en serie de Taylor a orden mas bajo distinto de cero en a , llego a

$$|A + \psi_{f_{\pm}}|^2 \cong 1 \mp a \sqrt{1 - A^2} \quad |A| < 1 \quad (2.83)$$

$$|A + \psi_{f_{\pm}}|^2 \cong \left(A \pm \sqrt{A^2 - 1}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad |A| > 1. \quad (2.84)$$

Entonces

$$|\lambda_{\pm}|^2 \cong 1 \pm a \sqrt{1 - A^2} \quad |A| < 1 \quad (2.85)$$

$$|\lambda_{\pm}|^2 \cong \frac{1}{\left(A \pm \sqrt{A^2 - 1}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \quad |A| > 1 \quad (2.86)$$

Para $|A| < 1$ ψ_{f-} siempre es estable. La presencia de la abertura garantiza la existencia de una solución dinámicamente estable aún para esta región $|A| < 1$, donde no las hay en el

caso sin aberturas. Para $|A| > 1$, el punto fijo estable nuevamente depende del signo de A . Cuando $A > 0$ (o $A < 0$) es estable ψ_{f+} (ψ_{f-}), y el inestable es ψ_{f-} (ψ_{f+}). Por (2.81), la otra solución debe ser necesariamente inestable. El punto fijo estable en ambas regiones es el punto fijo que tiene sentido físico.

Comparando los valores de (2.85) (2.86) con (2.59), veo que la solución estable, es aún más estable que en el caso de no tener aberturas. Estos resultados están en completa coincidencia con los de la ref [2.12], obtenidos por otros medios. Nuevamente, es importante determinar si el punto fijo estable es un atractor del sistema, y ver cuál es su cuenca de atracción. Siguiendo la misma idea que desarrollé en la sección anterior, busco el límite $n \rightarrow \infty$ para el mapa a n vueltas (2.79). Ahora el mapa es para la variable ξ , definida en (2.75). En la sección 2.1.7, para el caso $|A| > 1$, definí x_n , y encontré su límite. Ahora tengo una expresión análoga a (2.60), pero debo tener en cuenta que está todo evaluado en A' . Defino entonces x_{n+1}'

$$x_{n+1}' = \frac{P_3^{n+1}(A')}{P_3^n(A')} = 2 A' - \frac{1}{\left(\frac{P_3^n(A')}{P_3^{n-1}(A')} \right)} = 2 A' - \frac{1}{x_n'} \quad (2.87)$$

En este caso los coeficientes no son reales, ya que $a_i = 2A'$. La referencia [2.17] citada en la introducción, tiene en cuenta fracciones continuas para coeficientes reales. Agrego en el apéndice 2.4 una generalización para el caso a_i complejo, $|a_i| > 2$, $b_i = -1$. En conclusión, para $|A| \geq 1$ puedo decir que x_n converge. De manera análoga a lo hecho para llegar a (2.62) y (2.62bis) llego a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_3^{n+1}}{P_3^n} = A' \pm \sqrt{A'^2 - 1} \quad (2.88)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_3^n}{P_3^{n+1}} = A' \mp \sqrt{A'^2 - 1} \quad (2.88bis)$$

Para $|A| < 1$ debo mostrar de otro modo que x_n tiene límite. Trato de verificar que cualquier área hiperbólica arbitraria, que llamaré $Area_n$, disminuye cada vez que se aplica el mapa (2.73), y veo qué pasa al hacer las sucesivas iteraciones. Si el área euclídea asociada al $Area_n$ tiende a cero, todas las condiciones iniciales que estén en

dicha área tenderán a un mismo límite (el punto fijo estable). Pero dado que el área $Area_h$, es arbitraria, el límite será un atractor cuya cuenca de atracción será todo el espacio. Como corolario también habré demostrado que una fracción continua con a_i complejo / $\text{Im}[a_i] \neq 0$ y $b_i = -1$, converge. Sea entonces el área hiperbólica $Area_h$, el área hiperbólica asociada al área euclídea $Area'_e$. El $Area'_e$ está dada por la transformación (2.73) aplicada sobre el área euclídea $Area_e$. El jacobiano del mapa determinado por (2.77) y (2.78), tiene la misma forma funcional que en (2.33), por lo tanto, de acuerdo a (1.31) de la introducción el $Area_h$ ' queda:

$$Area_h' = \mu(Area_e') = \int_{Area_e'} \frac{d\rho' dS'}{S'^2} = \int_{Area_e} J(\rho, S) \frac{d\rho dS}{S'^2} = \int_{Area_e} \frac{1}{(S + a |A + \psi|^2)^2} d\rho dS \quad (2.89)$$

restando el área hiperbólica asociada al área euclídea $Area_e$ obtengo:

$$\mu(A') - \mu(A) = - \int_{Area_e} \frac{a^2 |A + \psi|^4 + 2 S a |A + \psi|^2}{S (S + a |A + \psi|^2)^2} d\rho dS \quad (2.90)$$

El integrando es negativo independientemente de cuánto valga ψ , por lo tanto el área hiperbólica disminuye para todas las iteraciones. Suponiendo una abertura débil, puedo quedarme a primer orden en a y usar:

$$\mu(A') - \mu(A) \cong \int_{Area_e} \frac{-2 a |A + \psi|^2}{S} d\rho dS = \int_{Area_e} \frac{-2 a}{S'} d\rho dS. \quad (2.91)$$

Por ahora, solamente puedo decir que el área hiperbólica siempre disminuye (no necesariamente tiende a cero). Sea la sucesión dada por $U_n = \mu(A_n)$. Es una sucesión definida positiva y decreciente. Por lo tanto tiene límite y se cumple que $|U_{k+1} - U_k| \rightarrow 0$ para $k \rightarrow \infty$, por lo tanto:

$$U_{k+1} - U_k = - \int_{Area_e} INTEGRANDO d\rho dS \rightarrow 0 \quad (2.92)$$

donde *INTEGRANDO* está dado en (2.90) y es definido positivo. La única manera de

que el límite se cumpla es que el área euclídea tienda a cero. Como la única solución estable a la que puede tender el sistema es el punto fijo, entonces es un atractor de todo el espacio. Nuevamente se verifica numéricamente que en (2.88) el signo + corresponde a los valores de A positivos y el signo - corresponde a los valores negativos de A , al contrario que en (2.88bis). Incluyo a continuación como ejemplo, los valores de P_3^j para $A = 0.25 - 5i$. Los valores para los polinomios son

$$P_3^1(0.25 - 5i) = 1$$

$$P_3^2(0.25 - 5i) = 0.5 - 10i$$

$$P_3^3(0.25 - 5i) = 100.75 - 10i$$

$$P_3^4(0.25 - 5i) = -150.875 - 1012.5i$$

$$P_3^5(0.25 - 5i) = 10150.3 + 2025i$$

$$P_3^6(0.25 - 5i) = 25476 - 101503i$$

$$P_3^7(0.25 - 5i) = -1.01244 \cdot 10^6 - 307537i$$

$$P_3^8(0.25 - 5i) = -3.60707 \cdot 10^6 - 1.00722 \cdot 10^7i$$

$$P_3^7(0.25 - 5i) / P_3^8(0.25 - 5i) = 0.495156 - 10.0988i$$

$$0.25 - 5i + \sqrt{(0.25 - 5i)^2 - 1} = 0.495156 - 10.0988i$$

$$0.25 - 5i - \sqrt{(0.25 - 5i)^2 - 1} = 0.00484352 + 0.0987843i$$

y con $A = -0.25 - 5i$

$$P_3^1(-0.25 - 5i) = 1$$

$$P_3^2(-0.25 - 5i) = -0.5 - 10i$$

$$P_3^3(-0.25 - 5i) = -100.75 + 10i$$

$$P_3^4(-0.25 - 5i) = 150.875 + 1012i$$

$$P_3^5(-0.25 - 5i) = 100150.3 - 2025i$$

$$P_3^6(-0.25 - 5i) = -25476 - 101503i$$

$$P_3^7(-0.25 - 5i) = -1.01244 \cdot 10^6 + 307537i$$

$$P_3^8(-0.25 - 5i) = -3.60707 \cdot 10^6 + 1.00722 \cdot 10^7i$$

$$P_3^7(-0.25 - 5i) / P_3^8(-0.25 - 5i) = -0.495156 - 10.0988i$$

$$-0.25 - 5i + \sqrt{(-0.25 - 5i)^2 - 1} = -0.495156 + 10.0988i$$

$$-0.25 - 5i - \sqrt{(-0.25 - 5i)^2 - 1} = -0.00484352 - 0.0987843i$$

Se ve que la convergencia es rápida. Numéricamente se observa que cuanto mayor sea a ,

más rápida será la convergencia. Calculo el límite usando (2.79) y llego a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A'^2 - 1 + \frac{P_2^n(A')}{P_3^n(A')} \xi_0}{\frac{P_2^n(A')}{P_3^n(A')} + \xi_0} = \pm \sqrt{A'^2 - 1} \quad (2.93)$$

este límite es independiente del valor de ξ_0 . El signo + corresponde a $A > 0$, y el signo - corresponde a $A < 0$. De manera equivalente puedo escribir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi^n = -\frac{i a}{2} \pm \sqrt{A'^2 - 1} = \psi_{\text{fijo estable}} \quad (2.94)$$

Por lo tanto, vuelvo a confirmar que el punto fijo estable es además un atractor del mapa, y su cuenca de atracción es todo H . El punto fijo inestable es además un atractor del mapa inverso, y su cuenca de atracción es todo el espacio, para cualquier valor de A y a que se tomen. La simulación numérica para $a = 10^{-3}$, $\rho_0 = 2$, $S_0 = -3$, $A = 0.9$, (figura 15) muestra que la trayectoria es muy diferente a la trayectoria circular que aparece cuando no se incluyen aberturas (la flecha indica la condición inicial):

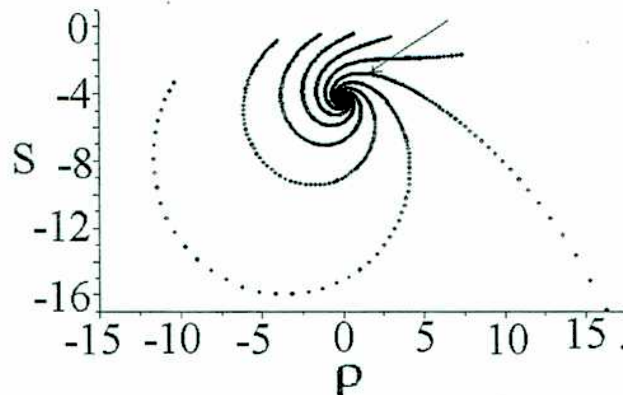


Figura 15 Trayectoria para $a = 10^{-3}$, $\rho_0 = 2$, $S_0 = -3$, $A = 0.9$.

La condición inicial se indica con una flecha

Muestro otra simulación para $a = 0.5$, $\rho_0 = 2$, $S_0 = -3$, $A = 0.5$ (que es un cero de P^3_3) en la figura 16 . Sobrevive en la trayectoria algo de la estructura de la órbita de período 3

que se tiene cuando no hay aberturas.

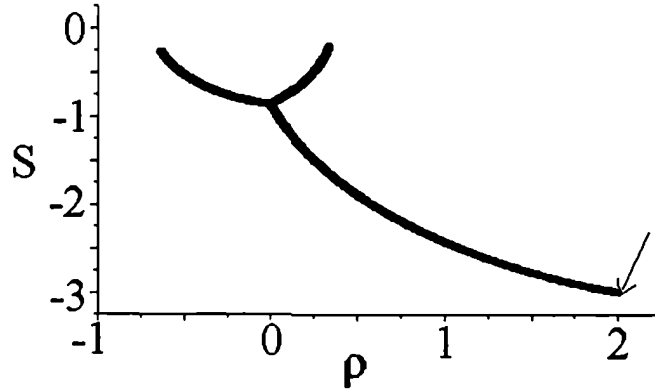


Figura 16 $a = 0.5$, $\rho_0 = 2$, $S_0 = -3$, $A = 0.5$ (que es un cero de P_3^3).

La condición inicial se indica con una flecha

Dependiendo de el valor de los parámetros las proyecciones sobre los ejes real e imaginario de estas trayectorias pueden aparecer como monótonas, amortiguadas o con evoluciones "complicadas", tal como se las describe en la referencia [2.1]. La razón de las diferentes evoluciones fue encontrada en la referencia [2.2] usando el ángulo de rotación de la fase. En este capítulo encontré una explicación muy sencilla y general a los comportamientos descritos como "complicados" en dichas referencias. Si A es un cero de P_3^M para M grande, y $a \neq 0$, según el valor de a pueden aparecer, sobre las proyecciones en los ejes real o imaginario, comportamientos oscilatorios realmente difíciles de interpretar (sin los elementos presentados aquí) antes de alcanzar el punto fijo estable.

Voy a detenerme un poco para analizar el punto fijo inestable (que no tiene sentido físico), dado que es un atractor del mapa inverso de (2.76). Este mapa inverso se obtiene al cambiar los signos de A y a . En principio, una cavidad así puede existir. Cabe preguntarse entonces qué significa la convergencia a un punto fijo sin sentido físico. La respuesta a esta paradoja está en que tener a con el signo cambiado, equivale a tener una antiapertura, es decir un elemento en la cavidad cuya transmisión crece con la distancia al centro del eje óptico. Una cavidad así necesariamente dispersa su energía lejos del eje óptico en unas pocas idas y vueltas por la cavidad, y colapsan la aproximación paraxial y la aproximación gaussiana que subyacen en el formalismo de las matrices ABCD. La distribución de campo debe ser calculada entonces haciendo la integral de Kirchoff-

Fresnel. Por otra parte, en las cavidades reales siempre existen otras aberturas que compensan los efectos de las antiaberturas.

Si bien en este trabajo la ubicación de la abertura (o antiabertura) no es lo más general posible, es presumible que este resultado se mantenga para otras ubicaciones de la misma. Un caso muy común es que la abertura (o antiabertura) sea el mismo medio activo. El caso más común de antiaberturas (espaciales) surge cuando el bombeo y las condiciones de dopaje hacen que haya más ganancia en los bordes del medio activo que en el centro.

Referencias:

- [2.1] C.Palma; *Opt.Comm.* **129**, p.120 (1996).
- [2.2] M.-D Wei, W.-F.Hsieh y C.C.Sung; *Opt.Comm.* **146**, p.201 (1998).
- [2.3] J.Chilla y O.Martínez; *Journal of the Optical Society of America* Vol.**B10** pág.638 (1993)
- [2.4] K.H. Lin, W.F. Hsieh, Analitical spatial-temporal design of the Kerr-lens mode-locked laser resonators”*J. Opt. Soc. Am B.* **13**, 1786-1793 (1996)
- [2.5] I.Sorokina, E.Sorokin and E.Wintner; *Opt.Lett.* **22** p.1716 (1997).
- [2.6] G. Perez, C. Pando-Lambruschini, S Sinha y H. Cerdeira; *Phys.Rev.A* **45**, p.5469 (1992).
- [2.7] L.Sanchez y A.Hnilo; *Opt.Comm.* **166**, p.229 (1999).
- [2.8] V.Magni, G.Cerullo y S.De Silvestri; *Opt.Comm.* **101** p.365 (1993).
- [2.9] J.Chilla y O.Martínez; *J.Opt.Soc.Am.* **B10** p.638 (1993).
- [2.10] M.Marioni y A.Hnilo; *Opt.Comm.* **147**, p.89 (1998).
- [2.11] J.Jasapara, W.Rudolph, V.Kalashnikov, D.Krimer, I.Poloyko y M.Lenzner; *J.Opt.Soc. Am.B* **17**, p.319 (2000).
- [2.12] A. E. Siegman, *Lasers* (University Science, Mill Valley, calif. 1986)
- [2.13] A.Dunlop, W.Firth y E.Wright; *Opt.Comm.* **138** p.211 (1997).
- [2.14] M.Kovalsky, A.Hnilo, A.Libertun y M.Marconi; *Opt.Comm.* **192** p.333 (2001).
- [2.15] M.Kovalsky y A.Hnilo; *Opt.Comm.* **186** p.155 (2000).

[2.16] Balanzat, Matemática avanzada para la física, EUDEBA

[2.17] S. Katok Departamento de matemática, de la universidad del estado de Pennsylvania University Park, PA 16802, U.S.A. Continued Fractions, Hyperbolic Geometry and Quadratic Forms <http://www.math.psu.edu/mass/reu/2001/>

[2.18] Kostenbauder IEEE J. Of Quantum Electronics, Vol. 26 N0. 6 (1990)

Capítulo 3. Modelo sin aberturas y con efecto Kerr incluido

En este capítulo analizo el comportamiento de un laser funcionando en modo pulsado debido al mode-locking producido por la lente de Kerr formada en el medio activo (KLM). La técnica de KLM se ha aplicado en lasers de Titanio-Zafiro [3.1], Nd:YLF [3.2], Nd:YAG [3.3], Cr-Forsterita [3.4] y Cr:LiSaf [3.5]. La dinámica de los mapas obtenidos cuando el efecto Kerr es despreciable, estudiada en el capítulo anterior, es simple debido a que la física subyacente es la de la propagación de las ondas ópticas. Pero, cuando se tiene en cuenta dicho efecto, como sucede en este capítulo, se pone de manifiesto la utilidad de visualizar el formalismo ABCD como un mapa complejo. Uso un modelo para describir el KLM, lo más general y simple posible, independiente del medio activo del laser. Como quiero establecer con claridad si son necesarias o no las aberturas para que este tipo de funcionamiento pueda establecerse, no las incluyo en el modelo. Como primer paso, describo qué sucede cuando hay un número grande (N) de mapas como el de (1.4) del capítulo 2 (2.6) acoplados entre sí mediante la perturbación de Kerr. Este tipo de estudio se ha hecho en [3.6] donde se estudian globalmente mapas de Ikeda acoplados a través de un campo medio. Hay un análisis muy incompleto sobre este punto en [3.7], que amplío en este capítulo. Una vez logrado esto, el paso siguiente es permitir la variación de la potencia del pulso en el modelo. Hago un estudio detallado, dejando ya de lado el acoplamiento entre los mapas, y concentro el esfuerzo en la comprensión de un solo mapa de cinco variables (dos espaciales, dos temporales y la intensidad del pulso), con la perturbación de Kerr incluida. De la misma manera que en el capítulo 2, también uso las herramientas proporcionadas por la geometría hiperbólica.

3.1 Mapas acoplados y mode-locking.

Tomo N mapas como (2.6) acoplados entre sí a través de la perturbación de Kerr, siguiendo el tratamiento introducido en [3.6]. Cada uno de estos mapas tiene diferentes condiciones iniciales a las del resto, y su factor de acoplamiento es función del promedio de las variables de todos los mapas. Este término de acoplamiento corresponde a la lente de Kerr inducida por el conjunto de todos los haces, y afecta a cada uno de ellos de la misma manera. El valor de la lente es la suma inversa (como impedancias en paralelo) de lentes elementales inducidas por cada haz o mapa:

$f_i^{-1} \propto C I_i S_i$ donde f es la distancia focal inducida, i es el índice de cada mapa, I es su intensidad y C es la constante de Kerr. Por lo tanto, suponiendo que el plano de cálculo (cuya posición hasta aquí era arbitraria) está en la posición de la lente de Kerr, cada mapa se convierte en:

$$\psi_{n+1}(i) = A - \frac{1}{A + \psi_n(i)} + zB/f_n \quad (3.1)$$

donde f_n es la distancia focal de la lente obtenida como la suma inversa sobre todas las i -ésimas lentes en la n -ésima iteración. El número complejo z depende de la posición de la lente de Kerr dentro de la cavidad, y del diseño de la cavidad. Es sabido que afecta críticamente el funcionamiento del mode-locking [3.8] y no puede ser tenido en cuenta de una manera simple. Dejaré aquí z como un parámetro libre.

Supondré que la energía está igualmente distribuida entre todos los mapas y que no hay intercambio de energía entre los mapas. Por lo tanto, el factor de área puede separarse de la expresión para la intensidad, agrupando todas las constantes en el factor de acoplamiento ε . La expresión que queda para B/f_n es:

$$B/f_n = \varepsilon \langle S_n(i)^2 \rangle. \quad (3.2)$$

En el caso de la aplicación temporal, la perturbación es la *automodulación de fase* [3.12]. Es proporcional a I_i/τ^2 y el exponente correspondiente a la variable promediada, que ahora es la duración de pulso τ , es -3 en lugar de -2 .

Este modelo es demasiado crudo como para describir apropiadamente el proceso del mode-locking. No se consideran las fases de los campos, ni el proceso de saturación de la ganancia, ni fenómenos de transporte de energía entre modos. Sin embargo, por los resultados presentados en [3.6], es posible anticipar que aún este modelo tan simple logra describir la auto-organización de los modos, y de hecho, como veremos, emerge un comportamiento colectivo. Se hizo una simulación numérica para un número creciente de mapas (3.1) con condiciones iniciales distribuidas de manera aleatoria, y acoplados a través de (3.2). En cualquiera de las variables observadas, el

comportamiento periódico del caso no acoplado cambia. Adoptan un valor casi fijo para el caso acoplado, y como es de esperar, las fluctuaciones decrecen al aumentar el número de mapas o al aumentar el coeficiente de acoplamiento. Como ilustración, muestro en la figura 17 el valor medio de la distancia focal del promedio de las lentes de Kerr en el tiempo, para $N=1000$ y $A=0.9$. En el caso desacoplado se refleja claramente el carácter periódico de las órbitas. Los picos más grandes, alcanzan valores de alrededor de 2 (a.u.). Las unidades son arbitrarias pues el valor con que se reescala ψ , que es el elemento de matriz B, no está establecido. Al agregar el acoplamiento, con un valor (arbitrario) de $z = -(1+i)$ y de $\varepsilon = 0.1$, el promedio de la lente se estabiliza (Figura 18). Por otra parte, la máxima desviación estándar de cada mapa individual de su valor promedio (en S^2) tiende a cero, evidenciando que cada uno de los mapas individuales llega al valor promedio. Este promedio de S sobre los N mapas y en el tiempo, es aproximadamente 0.44, y más grande que el valor del punto fijo no acoplado $S_f = 0.436$. Estos valores significan una reducción en el tamaño del área del haz debido al efecto Kerr. Este resultado concuerda con los resultados experimentales para láseres que funcionan en KLM [3.9].

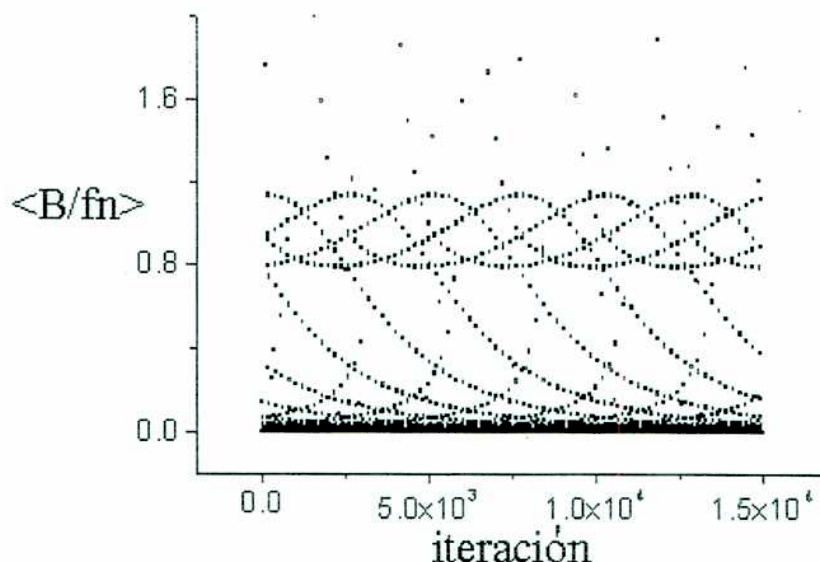


Figura 17 Valor medio de la distancia focal del promedio de las lentes de Kerr en el tiempo, para $N=1000$ y $A=0.9$

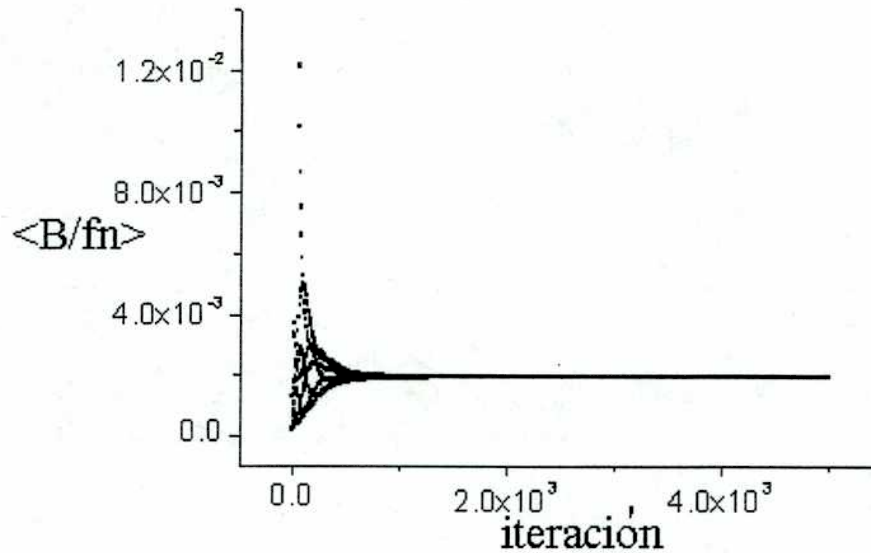


Figura 18 Valor medio de la distancia focal del promedio de las lentes de Kerr en el tiempo, para $N=1000$ y $A=0.9$ con $z = -(1+i)$ y de $\varepsilon = 0.1$

Otras formas funcionales para B/f_n , y otros valores de z también logran reproducir el comportamiento colectivo. Voy a incluir a modo de ejemplo la siguiente expresión para B/f_n :

$$B/f_n = \varepsilon \langle S_n(i) \rangle. \quad (3.3)$$

No es una elección caprichosa, como puede parecer en este momento, sino que está relacionada con resultados que voy a presentar más adelante en este capítulo (sección 3.3.2) para un solo mapa. Tomo $\varepsilon = 0.001$, $A = 0.9$ y $z = -1$. El valor medio para el caso desacoplado refleja nuevamente el carácter periódico de las órbitas de cada mapa individual (figura 19). Al introducir el factor de acople, el valor medio de B/f_n tiende a un valor constante (figura 20) mostrando que todos los mapas individuales se comportan aproximadamente de la misma manera. Las desviaciones estándar de todas las variables respecto a sus promedios tienden a cero. En la figura 21, muestro el valor medio para el caso $\varepsilon = 0.001$, $A = 0.9$ y $z = -1 - i$. Es notoria la influencia de la forma de la cavidad debido a que con este valor de z , converge al comportamiento colectivo de manera diferente que en el caso anterior.

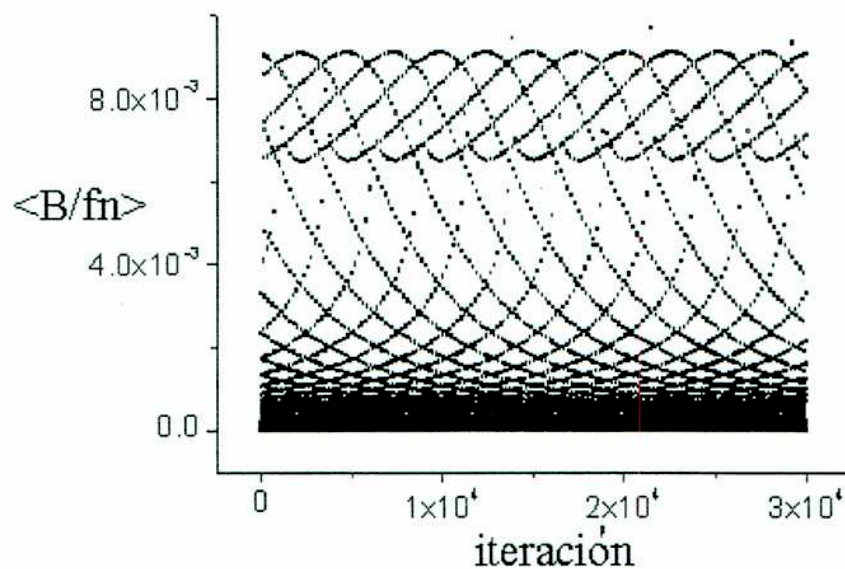


Figura 19 Valor medio de la distancia focal del promedio de las lentes de Kerr en el tiempo, para $N=1000$ y $A = 0.9$

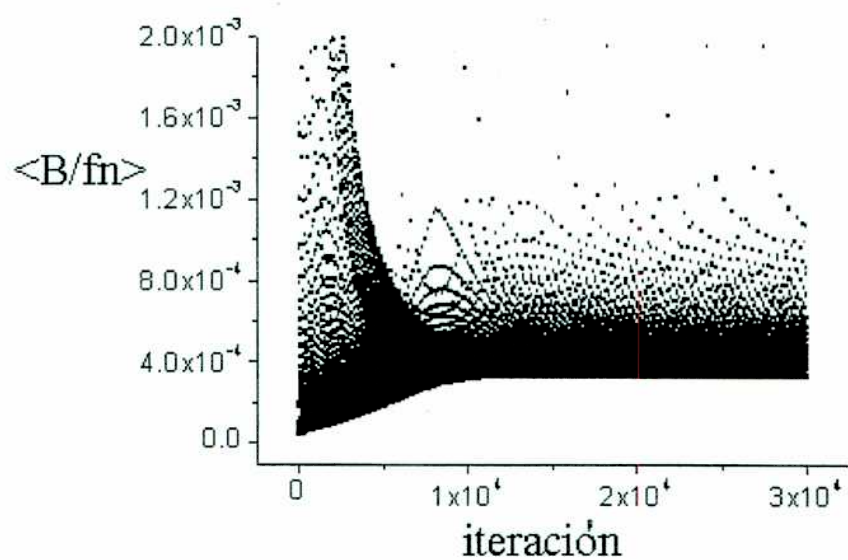


Figura 20 Valor medio de la distancia focal del promedio de las lentes de Kerr en el tiempo, para $N=1000$ con $A = 0.9$, $\varepsilon = 0.001$ y $z = -1$.

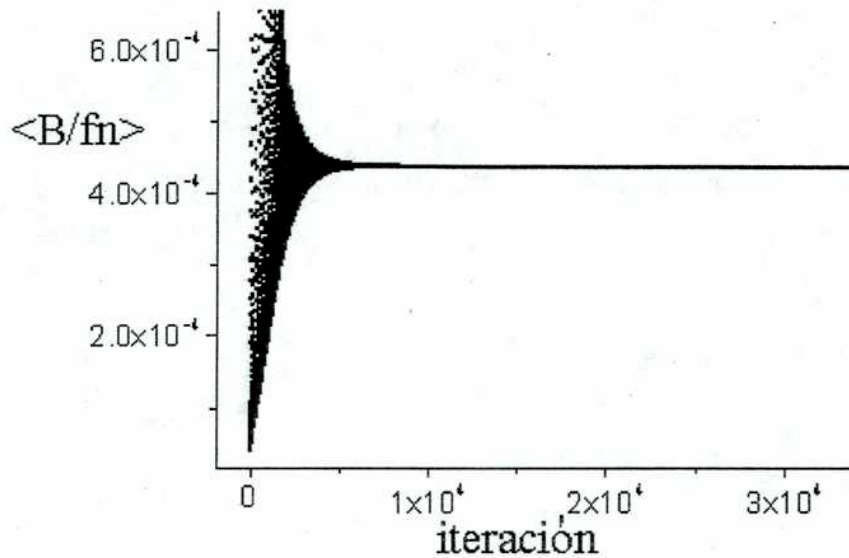


Figura 21 Valor medio de la distancia focal del promedio
de las lentes de Kerr en el tiempo, para $N=1000$ con
 $A = 0.9$, $\varepsilon = 0.001$ y $z = -1 - i$.

Voy a analizar más detalladamente el caso en que $|A|=1$, ya que es el que corresponde al dominio temporal. Para $A=1$, y $z = -1+0i$, cualquiera sea el valor de ε que se tome, el promedio de B/f_n también refleja un comportamiento colectivo de los mapas individuales. En la figura 22, hecha para $\varepsilon = 0.1$, se ve cómo varía el promedio de B/f_n para un número $N=1000$ (izquierda) y $N=10000$ (derecha) de mapas individuales. Se observa que el valor medio permanece muy cercano a cero para las primeras iteraciones. En esta etapa las desviaciones estándar para ρ y S (figuras 23 y 24) son muy cercanas a cero. Esto no se debe a un acoplamiento dinámico entre los mapas, sino simplemente a que cuando $A = 1$, si $\varepsilon = 0$ todos los mapas convergen rápidamente a $\psi = 0 + 0i$, y así las desviaciones estándar para ρ y S en el caso sin acoplar son cero. También en la situación desacoplada, si tenemos un $A \leq 1$, al iterar el mapa se observa que para una gran cantidad de iteraciones está cerca de cero. El acoplamiento se encarga de cambiar el hecho de que el sistema se quede en el punto $\psi = 0 + 0i$, pero su efecto se hace notorio después de varias iteraciones (aproximadamente 11000 iteraciones). A partir de este punto, el promedio de B/f_n oscila en una banda angosta comprendida entre 0.02 y 0.03 u.a. para el caso de tomar el número de mapas $N=10000$. Las desviaciones estándar para ρ y S (figuras 23 y 24) aumentan mucho, y ese aumento es dependiente del número de mapas individuales acoplados. Podría parecer así que el acoplamiento los está

desordenando. En realidad, el acoplamiento sigue generando un comportamiento colectivo (como para el caso en que $|A| < 1$). El aumento en la dispersión se debe a que los mapas sin acople convergen al origen y en ese caso la dispersión es cero. Comparando la situación para $N=1000$ mapas individuales (izquierda) con la de $N=10000$ (derecha), es evidente que estas desviaciones disminuyen mucho al aumentar N . La diferencia fundamental con respecto a los valores de A que cumplen $|A| < 1$, es el aumento en el promedio y las desviaciones alrededor de las 11000 iteraciones. Lo que es común a todos los valores de A , es que las desviaciones estándar disminuyen al aumentar el número N de mapas individuales.

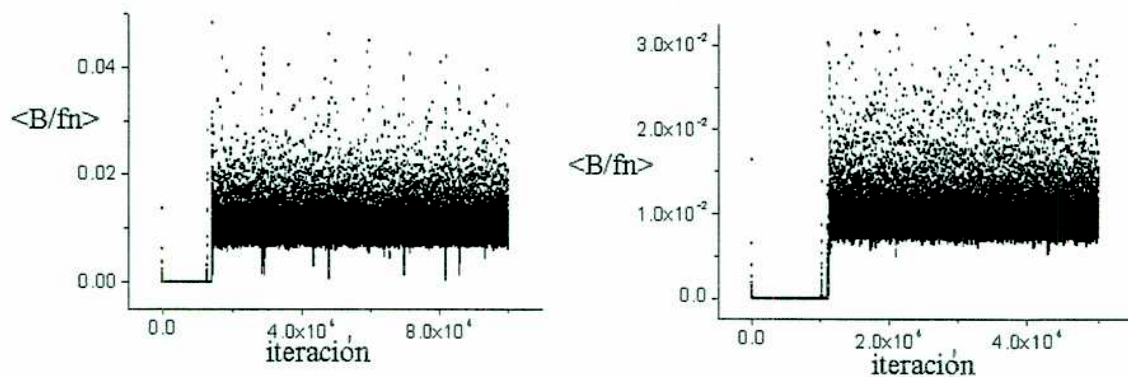


Figura 22 $\varepsilon=0.1$, Variación del promedio de B/f_n $N=1000$ (izquierda) y $N=10000$ (derecha) mapas individuales.

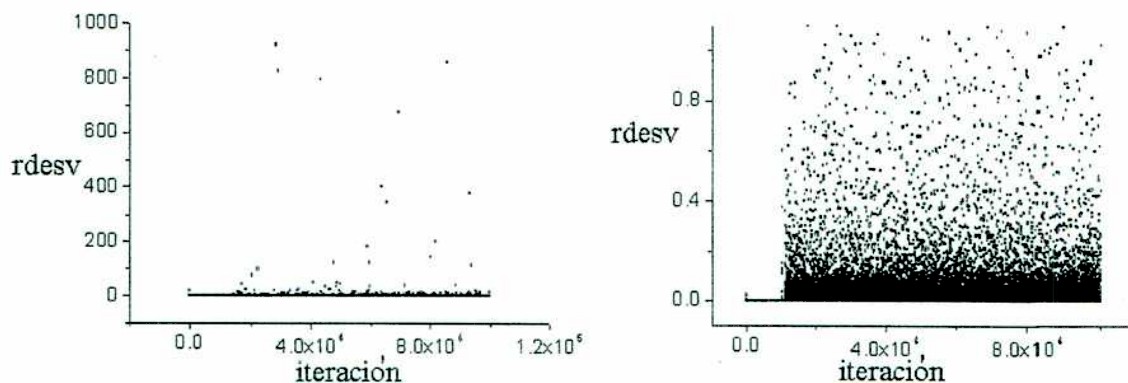


Figura 23 Desviación estándar para p para $N=1000$ (izquierda) y $N=10000$ (derecha) mapas individuales.

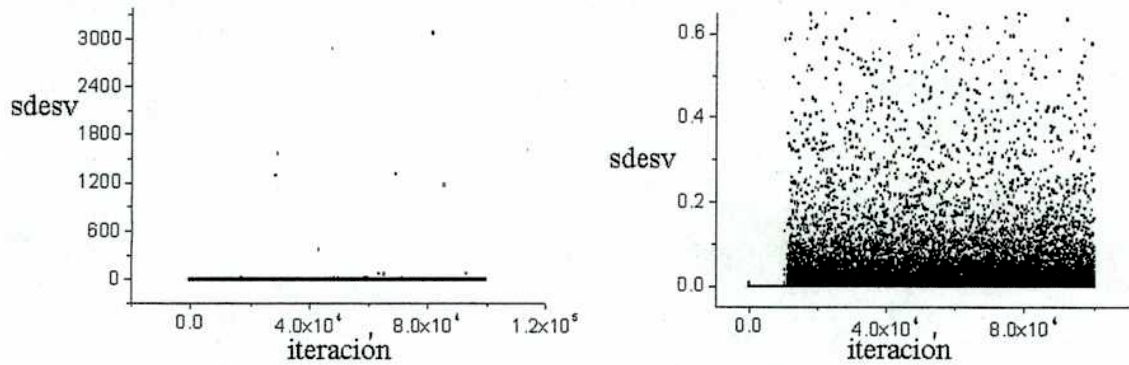


Figura 24 Desviación estándar para N=1000 (izquierda) y N=10000 (derecha) mapas individuales.

Los resultados obtenidos indican la aparición espontánea de un comportamiento colectivo. A pesar de que este modelo está muy lejos de ser una buena descripción para un laser que funciona en KLM, es un claro indicio de que el acoplamiento de Kerr induce, como se espera, un comportamiento colectivo aún en ausencia de aberturas.

3.2 Efectos dependientes de la energía.

3.2.1 Perturbación de Kerr.

El mapa (2.6) del capítulo anterior describe la propagación de un haz dentro del resonador de un laser. No he tenido en cuenta en los capítulos y secciones anteriores ninguna dependencia en la evolución de un haz con la energía del campo. Sin embargo, el amplificador óptico y el material con efecto Kerr apreciable suman dos efectos dependientes de la energía, que son la saturación de la ganancia y el efecto Kerr. El último, afecta a la parte espacial del mapa, debido a la formación de una lente cuya distancia focal f [3.17] es dependiente de la intensidad donde

$$\frac{1}{f} = \frac{8 \gamma \sqrt{2\pi} I I_{SAT} d}{\Sigma} \equiv \beta_s. \quad (3.4)$$

La intensidad I está normalizada con la intensidad de saturación I_{sat} para que no tenga

dimensiones, Σ es el area del haz, n es el índice de refracción, γ es el coeficiente de Kerr, y d es la longitud efectiva del medio de Kerr. La matriz asociada a la perturbación de Kerr [3.10] es entonces:

$$M_{ELK} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta_s & 1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

La perturbación de Kerr afecta la parte temporal del mapa a través de la aparición de un corrimiento de la frecuencia o chirp, que es dependiente de la intensidad, conocida como la automodulación de fase (SPM) [3.17]:

$$\beta_T = \frac{8\gamma\sqrt{2\pi} I I_{SAT} d}{\tau_p^2} \quad (3.6)$$

donde λ es la longitud de onda central del laser. Llamo β_T (β_s) a la perturbación temporal (espacial). La matriz asociada a la perturbación de Kerr para la parte temporal [3.10] es entonces:

$$M_{TLK} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_T & 1 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Al tener en cuenta estas perturbaciones, las variables espaciales y temporales en principio quedan acopladas.

3.2.2 Mapa para la intensidad.

Asumo la validez de la ecuación convencional para la saturación de la ganancia (1.5). El empleo de esta fórmula no es tan inmediato como puede parecer a primera vista, ya que se obtiene de asumir que la ganancia está en equilibrio con la intensidad del campo, y para la mayoría de los lasers que funcionan en KLM, la evolución de la inversión de población es mucho más lenta que la de la intensidad del campo. Incluyo en el Apéndice31 una demostración de su validez para esta situación. De todos modos, si se permite un grado de libertad extra para la inversión de población como se hace al

describir el KLM en lasers de Titanio-Zafiro en [3.10], surgen nuevas inestabilidades que modifican la estabilidad de la solución KLM, pero no su existencia.

Para tener la ganancia total, hay que tener en cuenta que en la ida y vuelta por la cavidad el haz pasa dos veces por el medio amplificador. Debido a (1.5), el valor medio de la intensidad normalizado con la intensidad de saturación (que aparece como I), después de un round-trip está dado entonces por:

$$I_{n+1} = \frac{G_0^2 I_n}{(1 + I'_n)(1 + I_n)} = \frac{G_0^2 I_n}{\{1 + (1 + G_0)I_n\}} \quad (3.8)$$

Donde I'_n es el valor medio temporal de la intensidad cuando el haz cruza el amplificador en la dirección opuesta a I_n y G_0 es la ganancia de pequeña señal multiplicada por un factor de realimentación (*single passage feedback factor*) debido a las pérdidas lineales. Como veremos enseguida, esta aproximación lleva a que se desacoplen las variables temporales de las espaciales, que podrán ser descritas de una manera elegante y simétrica. El mapa (3.8) tiene un punto fijo estable que es a su vez un atractor de todo el espacio $I_{fp} = g - I$. Para comprobarlo escribo el mapa a n-vueltas

$$I_n = \frac{G_0^{2n} I_0}{1 + \left(\sum_{j=0}^{2n-1} G_0^j \right) I_0} = \frac{I_0}{\frac{1}{G_0^{2n}} + \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{G_0^j} \right) I_0}. \quad (3.9)$$

La convergencia a su atractor va como G_0^{-2n} y es muy rápida. Para valores típicos de G_0 converge en unas pocas iteraciones, es decir, en unas pocas idas y vueltas completas del haz dentro de la cavidad. Con un tratamiento completamente distinto, que usa una ecuación diferencial a derivadas parciales (*master equation*) para describir la dinámica del KLM se llega al mismo resultado [3.13].

Mediante simulaciones numéricas se encuentra que el valor medio de la intensidad converge a I_{fp} , mientras que las variables espaciales y temporales siguen sus trayectorias sobre circunferencias perturbadas por el término de Kerr, que es pequeño. La energía del pulso es proporcional a $I/(S_S S_T^{1/2})$, de manera que después que el transitorio de la intensidad ha pasado, se convierte en una variable esclava de S_S (=inversa del área del haz) y de la variable S_T (= inversa de la duración del pulso al cuadrado).

3.2.3 Dependencia de las expresiones para los factores de Kerr dependiendo de la longitud del medio activo.

Generalmente, el haz está enfocado en el medio de Kerr. Por lo tanto, la distancia efectiva d del medio, y en consecuencia las expresiones de β_s , β_T dependen de la relación entre la longitud del medio de Kerr y la longitud de Rayleigh Z_r

$$Z_r = \frac{\pi \omega^2_0}{\lambda} \equiv \frac{B_s}{S_s} \quad (3.10)$$

Supongo el haz focalizado en la barra, así que el ancho mínimo del haz o cintura ω_0 coincide con el ancho del haz en el medio activo. Hay dos casos posibles:

i) $Z_r > L_r$ (el más común en la práctica):

En esta situación la longitud del medio reduce las perturbaciones a:

$$\beta_s = \frac{8 \gamma \sqrt{2 \pi} \pi L_r I_{SAT}}{\lambda n B_s} I S_s \equiv K^*_s S_s \quad (3.11)$$

$$\beta_T = \frac{8 \gamma \sqrt{2 \pi} \pi L_r I_{SAT}}{\lambda n B_T} I S_T \equiv K^*_T S_T \quad (3.12)$$

Después del transitorio en el que la intensidad converge, K^*_s y K^*_T son constantes y la perturbación no acopla las variables espaciales a las temporales.

ii) $Z_r < L_r$:

Como S y Z_r están relacionadas, las expresiones son muy diferentes :

$$\beta_s = \frac{8 \gamma \sqrt{2 \pi} \pi I_{SAT}}{n \lambda} I \quad (3.13)$$

$$\beta_T = \frac{8 \gamma \sqrt{2 \pi} \pi B_s I_{SAT}}{n \lambda B_T} \frac{I S_T}{S_s} \quad (3.14)$$

Después del transitorio para el que el valor medio de la intensidad normalizada con la intensidad de saturación converge, β_S es constante, y la perturbación β_T acopla las variables espaciales a las temporales, contrariamente a lo que sucede en i).

Aclaración: Supongo $S_{S,T} > 0$. Si no lo fueran, en (3.11), (3.12), (3.13) y (3.14) hay que usar $|S_{S,T}|$

3.3 Análisis exhaustivo de un mapa individual de cinco variables.

3.3.1 Consideraciones generales sobre el mapa.

Por ahora tomo una cavidad absolutamente arbitraria, así como la posición del plano de cálculo. También supongo que el pulso induce una perturbación de Kerr de la misma magnitud tanto cuando va como cuando vuelve dentro de la cavidad. Esto no es necesariamente cierto siempre, como se muestra en las referencias [3.14] y [3.15]. La forma general de las matrices de round-trip espaciales y temporales a primer orden en la constante de Kerr, son de la forma:

$$M_{S,T} = \begin{pmatrix} A_{S,T} + a\beta_{S,T} & B_{S,T} + b\beta_{S,T} \\ C_{S,T} + c\beta_{S,T} & D_{S,T} + d\beta_{S,T} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

La forma precisa de β_S y β_T fue descrita en la sección anterior. Si es que hay alguna dependencia de las variables espaciales (temporales) con las temporales (espaciales) está en β_S y β_T . Escalo $q_{S,T}$ de la misma manera que en el capítulo anterior en (2.4) y (2.5), y desarrollo en serie de Taylor a orden uno en la perturbación de Kerr. Los coeficientes β_S y β_T quedan multiplicados también por B_S y B_T respectivamente, por lo que:

$$K_S = B_S K_S^* \quad (3.16)$$

$$K_T = B_T K_T^* \quad (3.17)$$

Resumo la forma completa del mapa de cinco dimensiones que describe al sistema para una cavidad arbitraria:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{S_{n+1}} &= A - \frac{1}{A + \psi_{S_n}} - \beta_s \left(V_1 + \frac{V_2}{A + \psi_{S_n}} + \frac{V_3}{(A + \psi_{S_n})^2} \right) \\ \psi_{T_{n+1}} &= 1 - \frac{1}{1 + \psi_{T_n}} + \beta_T \left(W_1 + \frac{W_2}{1 + \psi_{T_n}} + \frac{W_3}{(1 + \psi_{T_n})^2} \right) \\ I_{n+1} &= \frac{g^2 I_n}{(1 + (1 + g) I_n)} \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

los valores de $V_1 \dots V_3$ y $W_1 \dots W_3$ se obtienen de los coeficientes de la matriz (3.15) y dependen del diseño particular de la cavidad. Los diferentes signos de los términos de la perturbación espacial y temporal provienen del hecho de que los signos de los factores no lineales de la perturbación de cada matriz individual (3.5) y (3.7) son opuestos. La forma general del Jacobiano del mapa (3.18) es:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho_{S_{n+1}}}{\partial \rho_{S_n}} & \frac{\partial S_{S_{n+1}}}{\partial \rho_{S_n}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \rho_{S_{n+1}}}{\partial S_{S_n}} & \frac{\partial S_{S_{n+1}}}{\partial S_{S_n}} & \frac{\partial \rho_{T_{n+1}}}{\partial S_{S_n}} & \frac{\partial S_{T_{n+1}}}{\partial S_{S_n}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \rho_{T_{n+1}}}{\partial \rho_{T_n}} & \frac{\partial S_{T_{n+1}}}{\partial \rho_{T_n}} & 0 \\ \frac{\partial \rho_{S_{n+1}}}{\partial S_{T_n}} & \frac{\partial S_{S_{n+1}}}{\partial S_{T_n}} & \frac{\partial \rho_{T_{n+1}}}{\partial S_{T_n}} & \frac{\partial S_{T_{n+1}}}{\partial S_{T_n}} & 0 \\ \frac{\partial \rho_{S_{n+1}}}{\partial I_n} & \frac{\partial S_{S_{n+1}}}{\partial I_n} & \frac{\partial \rho_{T_{n+1}}}{\partial I_n} & \frac{\partial S_{T_{n+1}}}{\partial I_n} & \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

donde las derivadas cruzadas de las variables espaciales y temporales son proporcionales a la constante de Kerr. La ecuación de autovalores, a primer orden en la constante de Kerr es:

$$\text{Det}(J - \lambda \cdot I) = (\bar{\mathcal{A}}_{n+1} / \bar{\mathcal{A}}_n - \lambda) \cdot \text{Det}(J_S - \lambda \cdot I_S) \cdot \text{Det}(J_T - \lambda \cdot I_T) \quad (3.20)$$

donde J_S (J_T) es el Jacobiano de la matriz de 2x2 espacial (temporal), I_S (I_T) es la matriz identidad correspondiente. La ecuación (3.20) permite calcular de manera fácil los

autovalores λ . Simplemente hay que calcular los autovalores de dos matrices de 2x2 (y una de 1x1), en lugar de una de 5x5. Después del transitorio en el que el valor medio temporal de la intensidad se estabiliza, la ecuación (3.20) es válida para todos los órdenes en la constante de Kerr. A orden uno en la perturbación de Kerr, este resultado es independiente del lugar de la cavidad en el que está ubicado el medio Kerr.

3.3.2 El mapa, sus puntos fijos estabilidad de los mismos

Para obtener el mapa tengo en cuenta el esquema de la figura 25:

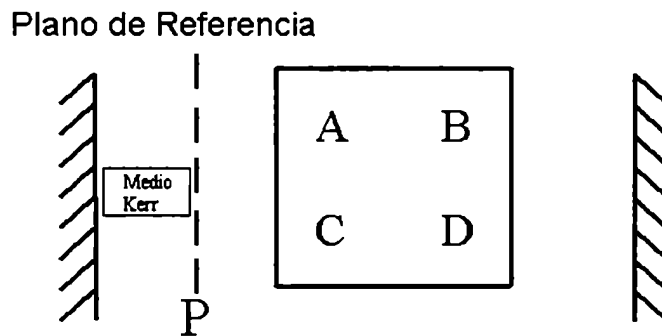


Figura 25 Esquema de la cavidad con medio Kerr incluido

El plano de cálculo está indicado por P. La matriz de round-trip es el producto $M_{rt} = M_{kerr} M$, donde M_{kerr} tiene en cuenta el paso del haz por el medio Kerr tanto a la ida como a la vuelta, $M (=ABCD)$ es la matriz de ida y vuelta por el resto de la cavidad. Considero el caso más típico para los láseres KLM, en el que la longitud de Rayleigh es mayor que la longitud del medio Kerr, y supongo que concluyó el transitorio para el que el valor medio temporal de la intensidad converge. En esta situación los factores de la perturbación son proporcionales a la variable correspondiente (espacial o temporal) de acuerdo a (3.11) y (3.12). El mapa lo hallo de la misma manera que (2.73), suponiendo además que la longitud de Rayleigh es mayor que la longitud del medio, ubicando el medio Kerr en un extremo y usando la matriz M_{kerr} en vez de la matriz para la abertura. Se reobtiene la expresión (3.18) con $V_2 = V_3 = W_2 = W_3 = 0$ y $V_1 = W_1 = 1$. Esto se cumple para algunos diseños de láseres KLM (como en [3.19]), y para otros no. De nuevo, se hace la suposición que permite tener las expresiones más simples:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{S_{n+1}} &= A - \frac{1}{A + \psi_{S_n}} - K_S S_{S_n} \\ \psi_{T_{n+1}} &= 1 - \frac{1}{1 + \psi_{T_n}} + K_T S_{T_n} \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Puedo tomar la parte real e imaginaria para las partes espacial y temporal, quedando como resultado el mapa

$$\left. \begin{aligned} \rho_{S,T_{n+1}} &= A - \frac{A + \rho_{S,T_n}}{A + \psi_{S,T_n}} \mp K_{S,T} S_{S,T} \\ S_{S,T_{n+1}} &= \frac{S_{S,T_n}}{A + \psi_{S,T_n}} \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

donde el signo – corresponde a las variables espaciales y el signo + a las temporales. El Jacobiano de este mapa es el producto del Jacobiano de la parte espacial por el Jacobiano de la parte temporal. Cada uno de ellos tiene la forma

$$J_{S,T} = \frac{1 \mp 2 K_{S,T} (A + \rho_{S,T}) S_{S,T}}{(A + \psi_{S,T_n})^4} \quad (3.23)$$

donde nuevamente donde el signo – corresponde a las variables espaciales y el signo + a las temporales. En K_S y K_T considero que $I_n = I_{pf}$, es decir, estoy en el caso en que ya pasó el transitorio para el que el valor medio de la intensidad converge. Las variables espaciales de las temporales quedan así desacopladas, y puedo calcular los puntos fijos espacial y temporal de (3.21) por separado. A primer orden en la constante de Kerr, los puntos fijos de la parte espacial son:

$$\psi_{S_f} = \pm \frac{\sqrt{1 - A^2} K_S}{2} - i \left(\pm \frac{\sqrt{1 - A^2}}{2} + \frac{K_S A}{2} \right) \quad (3.24)$$

Con esta expresión pueden calcularse los valores del diámetro y radio de curvatura de la solución estacionaria. Solamente una de las dos raíces corresponde a una solución con

sentido físico, debido a que la parte imaginaria de q debe ser negativa. Dependiendo del signo de B_S (que escala q), será estable una u otra. El punto fijo es estable si todos los autovalores del mapa evaluados en el punto fijo tienen módulo menor que 1. Los autovalores son:

$$\lambda_{s1,2} = \frac{(A + \rho_f)^2 - S_f^2 \pm i \sqrt{4(A + \rho_f)^2 S_f^2 - 4 K_S S_f (A + \rho_f) ((A + \rho_f)^2 + S_f^2)^2}}{((A + \rho_f)^2 + S_f^2)^2} \quad (3.25)$$

y su módulo es:

$$|\lambda_{s1,2}|^2 = \frac{1 - 2 K_S (A + \rho_f) S_f}{((A + \rho_f)^2 + S_f^2)^2} \approx 1 - 2 K_S A \sqrt{1 - A^2} \quad (3.26)$$

El punto fijo es entonces estable si $\text{Sign}(A) \cdot \text{Sign}(B_S) > 0$, y es inestable en el caso contrario (recordar que el signo de K_S depende del signo de B_S).

Los puntos fijos ($\psi_{Tf} = \rho_{Tf} - i S_{Tf}$) de la parte temporal de (3.21) son dos: El trivial $S_{Tf}=0 = \rho_{Tf}$, que corresponde al funcionamiento continuo o CW (para el que no hay efecto Kerr); y

$$S_{Tf} = -\text{Abs}(K_T), \rho_{Tf} = -K_T^2/2. \quad (3.27)$$

S_{Tf} es negativo. Como expliqué en el capítulo anterior, el signo de $S_{S,T}$ debe tener el mismo signo que $B_{S,T}$ (2.4), por lo que la solución no trivial existe solamente si el factor que escala las variables y la perturbación, que es el elemento de la matriz temporal B_T es negativo (lo que vuelve $K_T < 0$). Esto significa que, para que el punto fijo sea estable, la dispersión neta de la velocidad de grupo de la cavidad debe ser negativa. Como no hay elementos que limiten el ancho de banda ni efectos inducidos por aberturas en el modelo, esta restricción es natural. Los autovalores se obtienen reemplazando A por 1 en (3.25) y (3.26), teniendo en cuenta que hay que reemplazar K_S por $-K_T$ debido a la diferencia de signo entre la perturbación de Kerr espacial y la temporal en (3.21). Una vez hecho este reemplazo, el mapa temporal es idéntico al mapa espacial con $A=1$ aún con la perturbación de Kerr incluida. La diferencia con el caso espacial es que la

variable ψ_T que tiene sentido físico es la que cumple $\text{Im}(\psi_T) > 0$. El módulo de los autovalores es entonces $1 - 2K_T^2$, y es siempre menor que 1, de modo que el punto fijo de la parte temporal es siempre estable. Este resultado concuerda con los resultados observados en las mediciones hechas en las referencias [3.15] [3.18], que muestran el rol secundario que desempeñan las variables temporales en algunas inestabilidades del laser de Ti:Zafiro. Recordando que en el dominio espacial, A coincide con el parámetro de estabilidad geométrica, puedo agregar que este resultado concuerda con que las cavidades para conseguir KLM son más eficientes si están cerca del límite de estabilidad geométrica, o sea cerca de $A=1$ [3.8].

3.3.3 Cuenca de atracción del punto fijo.

a) Análisis general.

Sin el término de Kerr las iteraciones del mapa están sobre circunferencias, y como el Jacobiano no es constante, sino que es una función del punto en el plano complejo, el espacio de fases puede tanto expandirse como contraerse de una iteración a la otra, pero el promedio de su valor sobre un número muy grande de iteraciones es constante e igual a la unidad. Debido a que el mapa es una isometría en H , el área hiperbólica se preserva en todas las iteraciones. Desde el punto de vista físico, todas estas consideraciones son razonables, porque estoy analizando la propagación de un haz gaussiano, y es un sistema conservativo. Al agregar el término de Kerr, las trayectorias del mapa se complican. Quiero saber ahora si estas trayectorias convergen al punto fijo, es decir a la solución de mode-locking. Sé que si $\text{Signo}(K_{S,T}) = \text{Signo}(A)$ el punto fijo es estable, pero esto no quiere decir necesariamente que es un atractor para todas las condiciones iniciales posibles.

Presento a continuación algunas consideraciones, que permiten establecer con mayor exactitud una región del espacio de parámetros en la cual es seguro obtener el KLM.

Aprovecho la discusión de la sección anterior, que muestra que el mapa temporal es equivalente a el mapa espacial con $A=1$, para trabajar en forma genérica para ambos dominios a la vez, con un mapa como el correspondiente a la parte espacial de (3.21), una variable $\psi = \rho - iS$ y un parámetro K . Hay que tener en cuenta que el signo de S_T es negativo para que la variable total tenga parte imaginaria positiva. Como hice en el

capítulo anterior en la sección (2.2.2), vuelvo a trabajar con el área hiperbólica. Quiero encontrar para qué región y que parámetros puedo verificar que cualquier área hiperbólica arbitraria, que llamaré $Area_h$, disminuye con certeza cada vez que se aplica el mapa.

Sea pues $Area_h$ el área hiperbólica asociada al área euclídea $Area_e$, y $Area'_h$ el área hiperbólica asociada al área euclídea $Area'_e$. $Area'_e$ se obtiene aplicando el mapa (3.21) sobre el área euclídea $Area_e$. De acuerdo a (1.31) de la Introducción, usando la expresión para el Jacobiano dada por (3.23) el $Area'_h$ queda:

$$Area'_h = \mu(Area'_e) = \int_{Area'_e} \frac{d\rho' dS'}{S'^2} = \int_{Area_e} J(\rho, S) \frac{d\rho dS}{S^2} = \int_{Area_e} \frac{1 - 2K(A + \rho)S}{S^2} d\rho dS \quad (3.28)$$

restando el área hiperbólica asociada al área euclídea $Area_e$ queda

$$\mu(Area'_e) - \mu(Area_e) = - \int_{Area_e} \frac{2K(A + \rho)}{S} d\rho dS. \quad (3.29)$$

No puedo afirmar que el integrando sea siempre positivo, pues $A + \rho$ puede adoptar valores negativos. La expresión no permite establecer si el área hiperbólica siempre disminuye, como sucedía en el caso de tener aberturas espaciales incluidas y sin medio Kerr en la cavidad. Para que disminuya, alcanzaría con demostrar que el área hiperbólica decrece en promedio sobre un número "grande" de iteraciones, ya que puede crecer o decrecer de una iteración a la otra. Es muy complicado encontrar este promedio de manera correcta, y no se justifica el esfuerzo de hacerlo, ya que para condiciones iniciales pertenecientes a cierta región del espacio que defino a continuación, en principio se cumpliría $(A + \rho) > 0$ para todas las iteraciones, y el área hiperbólica decrecería. Para precisar quién es esta región, tomo $\rho_i = 0$ y $1 - A < S_i < 1 + A$ que definen una familia de circunferencias C_i sobre las que están contenidas algunas de las posibles trayectorias del mapa sin perturbar. Para cualquier condición inicial que satisfaga la ecuación de dichas circunferencias, es de esperar que se cumpla $-A < \rho_n < A$ para todas las iteraciones del mapa perturbado por el efecto Kerr. Esto es debido a que la constante de Kerr es mucho menor que uno y las trayectorias perturbadas no difieren demasiado de las que no lo están. Llamo a esta familia de circunferencias que cubre el interior de la

circunferencia definida por el parámetro A , junto con $\rho = 0$ y $S=1+A$ (y cuyo radio es $R=|A|$) región plausible. Para las condiciones iniciales pertenecientes a esta región en principio se cumpliría $(A+\rho) > 0$ para todas las iteraciones. Todas las condiciones iniciales de interés están dentro de la región de plausibilidad.

Podría llegar a pensarse que la trayectoria perturbada, no es tan parecida a la trayectoria sin perturbar como sería deseable, y puede salir para alguna iteración de esta zona de plausibilidad. Si tomo un valor de la variable ψ dentro de la región plausible, que esté cerca de $\psi = -A-1/(-2 A-i S') = \rho-i S$ para algún S' apropiado, su iteración sale de la misma, ya que $\psi' = -A-K S | -2 A-i S' |^{-2} -i S'$, y entonces $A+\rho' < 0$. Si algún punto de la trayectoria está definido de esta manera, no puedo asegurar que se quede dentro de la región de interés. Un ejemplo numérico de esta situación para $A=0.9$, $K=0.05$ es el siguiente: Si tomo $\psi = -0.47 - 0.235 i$ como condición inicial (que está dentro de la región plausible), $\psi' = -0.902 - 0.98 i$ está afuera. Al seguir iterando la trayectoria puede volver a entrar o no, por lo que no puedo predecir la convergencia. Este ejemplo numérico corresponde a un punto muy cerca del borde de la región de plausibilidad, y consecuentemente la circunferencia asociada a la trayectoria sin perturbar tiene un radio muy cercano a A ($R=0.89$). Es de esperar que para condiciones iniciales que estén lo suficientemente alejadas de este borde, la trayectoria del mapa no salga de la región.

Retomo la demostración de convergencia. Suponiendo que $(A+\rho) > 0$ para todas las iteraciones, es decir tomando condiciones iniciales dentro de la región plausible, y que estén lo suficientemente alejadas de su borde, defino la sucesión de números reales dada por $S_k = \mu(Areae_k)$, donde $Areae_k$ es el área que queda después de iterar k veces $Areae$. S_k es una sucesión decreciente de números positivos, y por lo tanto tiene límite. Si tiene límite se cumple que $|S_{k+1} - S_k| \rightarrow 0$ para $k \rightarrow \infty$, por lo tanto:

$$S_{k+1} - S_k = \int_{AreaeK} \frac{A+\rho}{S} d\rho dS \rightarrow 0. \quad (3.30)$$

Como $\frac{A+\rho}{S}$ es una función definida positiva a partir de N_s , la única manera de que el límite exista es que el área euclídea arbitraria tienda a cero. Como la única solución estable del sistema es el punto fijo con sentido físico, siempre que $Signo(K)=Signo(A)$,

puedo decir que éste es un atractor.

Las simulaciones numéricas hechas tomando condiciones iniciales pertenecientes a la región plausible, indican que el mapa converge. Estas simulaciones alcanzan por sí mismas para que el objetivo de esta Tesis de mostrar que las aberturas espaciales no son imprescindibles conceptualmente para que se establezca el KLM, esté cumplido. La figura 26 muestra como ejemplo la trayectoria que se obtiene al iterar el mapa (3.21) para $A=0.9$, $K=0.01$, con condición inicial $\psi_0=0.5-1.5 i$ dentro de la región plausible. La trayectoria recuerda las obtenidas en la sección (2.2.2) del capítulo anterior, para un mapa sin efecto Kerr incluido, pero que sí tiene en cuenta aberturas espaciales. Tiene 7 ramas debido $A=0.9$ está muy cerca de $A=0.900969$ que es el máximo cero de P_3^7 (2.22). La figura 27 muestra cómo varía la distancia entre los puntos de la trayectoria y el punto fijo a medida que se va iterando el mapa.

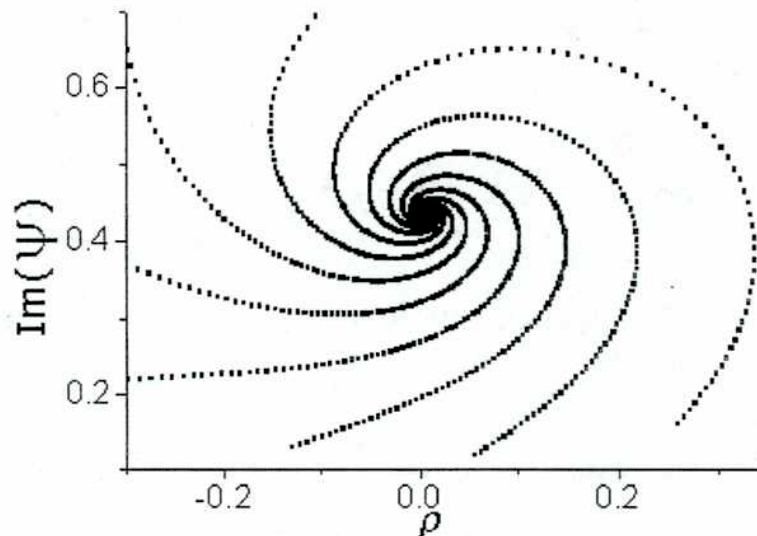


Figura 26 Trayectoria para $A=0.9$, $K=0.01$ y condición inicial $\psi_0=0.5-1.5 i$. Radio de la circunferencia no perturbada=0.78

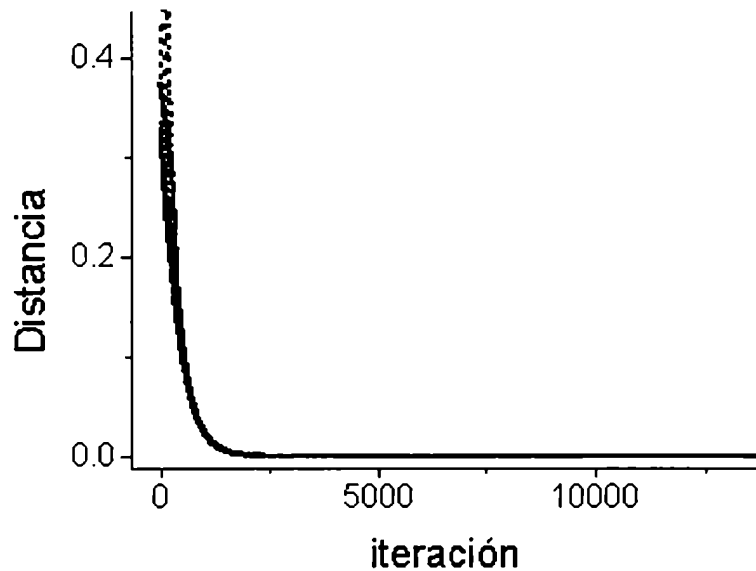


Figura 27 Distancia al punto fijo de los puntos de la trayectoria del mapa para $A=0.9$, $K=0.01$ y condición inicial $\psi_0=0.5-1.5 i$.
Radio de la circunferencia no perturbada= 0.78

Oriento ahora el esfuerzo a encontrar una región del espacio de parámetros y de condiciones iniciales para las que pueda mostrar con más rigor que el área hiperbólica disminuye de iteración en iteración, o sea que $(A+\rho_n)>0$ para todos los valores de n . A esta región de convergencia segura, voy a hallarla en b). Por supuesto pueden existir muchas otras regiones para las que también converja diferentes de esta, pero la virtud de la que voy a presentar radica en que puede explicar el hecho empírico de que las cavidades más favorables para el funcionamiento KLM son aquellas que están cerca del borde de estabilidad geométrica

b) Elección de parámetros y zona de trabajo:

Quiero encontrar parámetros y regiones de condiciones iniciales para las que $(A+\rho_n)>0$ para todas las iteraciones del mapa. Analizo en primer lugar el caso en que $A=1$

La figura 28 muestra en lila los valores de $(A+\rho)$ para los que $(A+\rho')<1$ para $A=1$ y $K=0.1$. Si el valor de K disminuye, la franja superior aparece para valores de S más grandes. Para el caso límite $K=0$, desaparece por completo. La mancha inferior, aumenta ligeramente al disminuir el valor de K (si $K<0.46$ casi no cambia, pero de todos modos me interesan los $K\ll 1$). La diferencia de esa mancha entre $K=0$, y 0.1 es la casi imperceptible marca negra que aparece en la línea que separa las regiones de la figura

28. Analizo el valor razonable más restrictivo, que es $K=0.1$. Para $S < 10$, es decir que si $1-KS > 0$, vale que si $(1+\rho) \geq 1$ entonces $(1+\rho') \geq 1$. La condición $1-KS > 0$ es una aproximación razonable, debido a que la constante de Kerr cumple $K \ll 1$. $1/K = 10$ es una cota razonable para todos los valores de S .

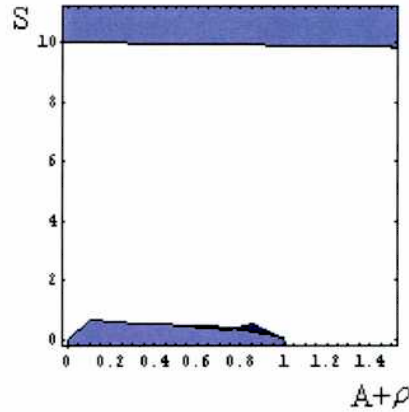


Figura 28 Valores de $(A+\rho)$ para los que $(A+\rho') < 1$ para $A=1$ y $K=0.1$

Por el apéndice 3.2 sé que si algún valor de ρ verifica $(1+\rho_n) < 0$ entonces $(1+\rho_{n+1}) > 0$. Por (3.22) la parte del mapa correspondiente a la parte real para $A=1$ es:

$$\rho_{n+1} = 1 - KS_n - \frac{1 + \rho_n}{|1 + \psi_n|^4} \quad (3.31)$$

por lo tanto si $1 - KS_n > 0$ entonces $\rho_{n+1} > 0$ seguro. Se cumple entonces $(1+\rho_{n+1}) \geq 1$. A partir de este valor n , vale $(1+\rho_{n+j}) \geq 1$ $j=1 \dots \infty$. Lo importante es que, o bien son todos los valores de $(1+\rho)$ positivos, o hay un $(1+\rho_N)$ negativo y a partir de ese N todos los siguientes son positivos. Así, el área hiperbólica disminuye para todos los $n > N$ por (3.29). Sea $Areae$ un área euclídea arbitraria. Defino como $Area_{neg}$ al subconjunto de puntos pertenecientes a $Areae$ $\psi_x = (\rho_x, S_x)$ cuya N_x -ésima iteración cumple $(1+\rho_{N_x}) < 0$. Sea $N_s = \text{Max}(N_x \dots)$ donde cada x representa a cada ψ_x perteneciente a $Area_{neg}$. Entonces si $m > N_s$, $(1+\rho_m) \geq 1$ para todos los puntos de $Areae$, el área hiperbólica asociada a toda $Areae$ disminuye.

Para establecer definitivamente si el punto fijo estable es un atractor o no, defino la sucesión de números reales dada por $S_k = \mu(Areae_k)$, donde $Areae_k$ es el área que queda después de iterar $k+N_s+1$ veces $Areae$. S_k es una sucesión decreciente de números

positivos, y por lo tanto tiene límite. Si tiene límite se cumple que $|S_{k+1} - S_k| \rightarrow 0$ para $k \rightarrow \infty$, por lo tanto se verifica (3.30), y como $(A+\rho)/S$ es una función definida positiva a partir de N_s , la única manera de que el límite exista es que el área euclídea arbitraria tienda a cero. Como la única solución estable del sistema es el punto fijo con sentido físico, siempre que $\text{Signo}(K)=\text{Signo}(A)$, puedo decir que éste es un atractor. Como la parte temporal tiene $A=1$, este es el caso más relevante. Para este modelo la parte espacial converge seguro en el borde de estabilidad geométrica. Como aclaré en a), he buscado una situación de convergencia segura. También va a converger en muchos otros casos, aunque no lo pueda predecir con certeza. Si me aparto infinitesimalmente de $A=1$, el comportamiento es prácticamente el mismo. Para $A=1-\delta$, $\delta > 0$, $\delta \ll 1$, escribo el mapa (3.31) y lo desarrollo en serie de Taylor a orden uno en δ . Queda la expresión:

$$\psi_{n+1} = 1 - \delta - KS_n - \frac{1}{1 - \delta + \psi_n} \cong 1 - KS_n - \frac{1}{1 + \psi_n} - \delta \left(1 + \frac{1}{(1 + \psi_n)^2} \right) \quad (3.32)$$

Tomando la parte real queda:

$$\rho_{n+1} = 1 - KS_n - \frac{1 + \rho_n}{(1 + \rho_n)^2 + S_n^2} - \delta \left(1 + \frac{\rho_n^2 - S_n^2}{((1 + \rho_n)^2 + S_n^2)^2} \right) \quad (3.33)$$

Al pedir la condición $(A+\rho') < 1$ se obtienen figuras similares a las del caso $A=1$, que permiten llegar a las mismas conclusiones. La figura 29, está hecha para $\delta=0.1$ (a), $\delta=0.01$ (b), y $\delta=0.001$ (c). Muestra coloreada (la unión de las regiones en lila y amarillo), la región en que $(A+\rho') < 1$. No hay diferencias apreciables al tomar $K=0$ en la mancha inferior, y la franja superior otra vez desaparece. La sutil diferencia entre $K=0$ y $K=0.1$ se manifiesta en el engrosamiento de la línea inferior que define las regiones coloreadas. Lo que se ve en amarillo es $(1+\rho') < 1$ cuando $K=0$ y $\delta=0$. Para $\delta=0$, el límite a la derecha en $(1+\rho)$ que define el extremo de la mancha inferior, está en $(1+\rho_{\text{lim}})=1$. Al ir aumentando el valor de δ , el valor de $(1+\rho_{\text{lim}})$ se va apartando de 1. Hay una probabilidad muy pequeña de que para alguna iteración n_x , un punto x de la trayectoria cumpla $1 < (1+\rho_x) < (1+\rho_{\text{lim}})$, y partir de n_x , ya no puedo asegurar que tipo de comportamiento va a tener la trayectoria. Esto quiere decir que pueden existir algunas pocas trayectorias que no converjan al punto fijo. Cuanto más chico sea δ , menor va a

ser la probabilidad de tener trayectorias cuyo comportamiento sea impredecible. Por lo tanto cuanto más cerca esté la cavidad del borde de estabilidad, más grande será la cuenca de atracción del atractor del sistema, que es el punto fijo estable. El valor $\delta=0.11$ es suficientemente grande como para correr apreciablemente el límite a la derecha de la región inferior a $(1+\rho_{lim})=1.1$. Ese valor ya no me sirve para predecir el comportamiento del sistema, ya que no puedo asegurar que $(1+\rho')>0$ para toda la trayectoria. Los valores $\delta>0.1$ no sirven, pues $(1+\rho_{lim})$ se aleja mucho de 1. Tomando otros valores de δ , verifico que la franja superior aparece a partir de $S=A/K$, con $A=1-\delta$.

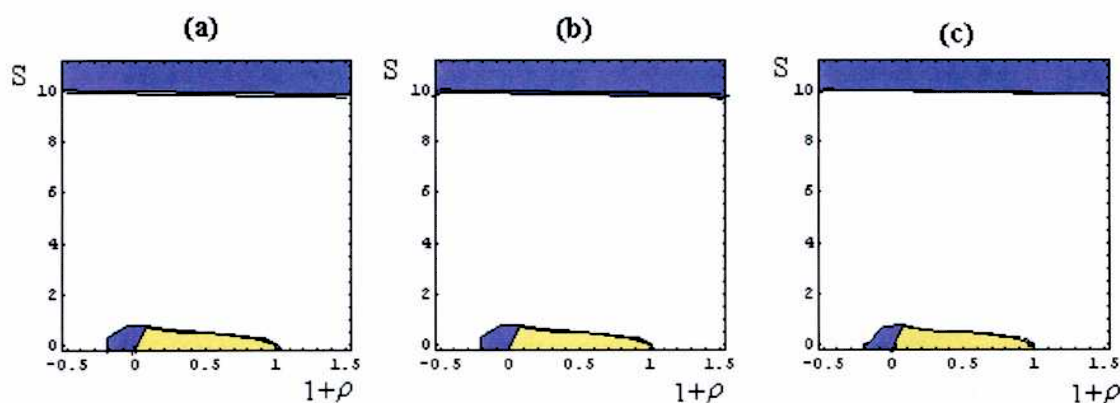


Figura 29 Valores de $(A+\rho)$ para los que $(A+\rho')<1$ para $A=1-\delta$, K entre 0 y 0.1 para $\delta=0.1$ (a), $\delta=0.01$ (b), y $\delta=0.001$ (c).

Repitiendo el mismo análisis que para $A=1$, concluyo que cerca del borde de estabilidad geométrica, encuentro que si $A - K S > 0$ (para estar lejos de la franja superior de la figura 29) el sistema converge al punto fijo estable. Queda explicado así en base a un tratamiento muy general por qué ésta es la situación más favorable para KLM, lo que hasta el momento era un hecho empírico. Nótese que la “región plausible” está incluida en la “región especial”.

El resultado obtenido para la convergencia es también muy importante. No solamente porque establece que las aberturas no son en principio necesarias para llegar a la solución de KLM, sino también porque muestra cómo un sistema conservativo disminuye el volumen del espacio de fases y converge al punto fijo gracias a la presencia de la perturbación de Kerr. La convergencia es posible si $Signo(K)=Signo(A)$ por lo que el punto fijo con sentido físico es estable, y los exponentes de Lyapunov que

se discuten en la sección 4.1.1 son ambos negativos salvo para algunos valores muy chicos de A (del orden de K). Si $\text{Signo}(K) = -\text{Signo}(A)$, el punto fijo con sentido físico es inestable, y los exponentes de Lyapunov (sección 4.1.1) o bien son ambos positivos o uno es positivo y otro negativo para la mayoría de los valores de A . Con esta combinación de signos, el área hiperbólica va a crecer indefinidamente en la región especial discutida ($A - K S > 0$). La causa de fondo de que pueda probarse convergencia para $A \approx 1$, es que la convergencia a $0+0$ i del mapa sin perturbar con $|A|=1$ es muy robusta. Si se aparta el $|A|$ ligeramente de la unidad, el mapa tiene un punto fijo con sentido físico en una vecindad de $0+0$ i , de estabilidad indiferente. Las trayectorias están sobre circunferencias (incluso pueden ser periódicas si A es un cero de algún P_3^N para algún N), pero muchas iteraciones del mapa, están muy cerca de $0+0$ i , y aunque este valor está muy cerca del punto fijo del mapa, no converge al mismo por ser de estabilidad indiferente. El efecto Kerr, estabiliza el punto fijo con sentido físico que sigue estando muy cerca de $0+0$ i , y como la mayor parte del tiempo la trayectoria perturbada también está cerca de ese valor (ya que es efectivamente muy parecida a la trayectoria sin perturbar por que $K S \ll 1$, para valores de S cercanos a cero, $K \ll 1$), termina convergiendo al mismo.

Referencias:

- [3.1] Marconi, Martinez, Diodati, Opt. Comm., **63**, 211 (1987)
- [3.2] Lincoln, Ferguson, Opt. Lett. **16** (1994) 2119
- [3.3] Larotonda, Hnilo, Diodati, Opt. Commun. **183** (2000) 485
- [3.4] Yanovsky, Pang, Wise, Opt. Lett. **18** (1993) 1541
- [3.5] Sokorina, Soroki, Winter, Opt. Lett. **22** (1997) 1716
- [3.6] Perez, Sinha, Pando-Lambruschini, Cerdeira, Phys. Rev. A **45** (1992) 5469
- [3.7] Sanchez, Hnilo, Opt. Commun. **166** (1999) 229
- [3.8] Magni, Cerullo, De Silvestri, Opt. Commun. **365** (1993)
- [3.9] Chilla, Martinez, J. Opt. Soc. Am. B **10** (1993) 638
- [3.10] [Marioni, Hnilo, Opt. Commun. **147** (1998) 89

- [3.11] J.Jasapara, W.Rudolph, V.Kalashnikov, D.Krimer, I.Poloyko y M.Lenzner; *J.Opt.Soc. Am.B* **17**, p.319 (2000).
- [3.12] A. E. Siegman, Lasers (University Science, Mill Valley, calif. (1986)
- [3.13] A.Dunlop, W.Firth y E.Wright; *Opt.Comm.* **138** p.211 (1997).
- [3.14] M.Kovalsky, A.Hnilo, A.Libertun y M.Marconi; *Opt.Comm.* **192** p.333 (2001).
- [3.15] M.Kovalsky y A.Hnilo; *Opt.Comm.* **186** p.155 (2000).
- [3.16] Balanzat, Matemática avanzada para la física, EUDEBA
- [3.17] Sanchez y Hnilo, Opt. Commun. (2001)
- [3.18] M.Kovalsky, A. Hnilo, C.M.F.Gonzalez Inchauspe, "Hidden Instabilities in the Ti:Sapphire Kerr lens mode locked laser", Optics Letters, Vol 24,pg 1638 (1999).
- [3.19] B.E. Bouma, J.G. Fujimoto, "Compact Kerr lens mode locked resonators", Optics Letters, Vol 21, pg 134 (1996).

Capítulo 4. Caos, órbitas periódicas y bifurcaciones.

El capítulo 3 muestra que la solución de KLM aparece espontáneamente, ya que es un atractor del sistema. Si A está cerca del borde de estabilidad geométrica, basta con elegir condiciones iniciales pertenecientes a la "región especial" (región del plano ρ, S que cumple $S < A/K$) para asegurar la convergencia. En caso contrario, basta con tomar condiciones iniciales dentro de la denominada "región plausible" (incluida en la región especial si $A \leq 1$ y determinada por la circunferencia definida por $A, \rho = 0$ y $S = 1 + A$ de radio $R = |A|$). Esta región incluye el atractor del mapa y todas las condiciones iniciales de interés práctico.

Falta explorar el comportamiento para otros valores de A y fuera de la "región plausible". De esto se trata la primera sección este capítulo. Queda en evidencia el hecho de que las aberturas no juegan un rol tan importante para la aparición del KLM como se creía, pero, siempre están presentes en la realidad. Por eso en las secciones siguientes muestro cómo se modifica el comportamiento del sistema cuando tengo en cuenta aberturas en el modelo. En la última sección incluyo ejemplos de trayectorias y muestro qué se observa al medir la energía del pulso, para poder hacer una comparación con resultados experimentales obtenidos por otros autores en un laser de Ti:Zafiro KLM.

4.1 Descripción fuera de la región plausible e inclusión de aberturas:

4.1.1 Exponentes de Lyapunov y fronteras.

Quiero ver qué sucede fuera de la región plausible, como así también qué pasa con otros valores de A . Lo más sencillo es hacer una exploración numérica. Como primer paso varío A dejando fijos los demás parámetros, y estudio los exponentes de Lyapunov. En la figura 30 muestro los exponentes de Lyapunov dentro del rango $|A| < 1$, para $K=0.02$ y una condición inicial: $\psi_0 = 0 + i\{(1-A^2)^{1/2} - A\beta/4\}$. Itero 2×10^7 veces para cada valor de A .

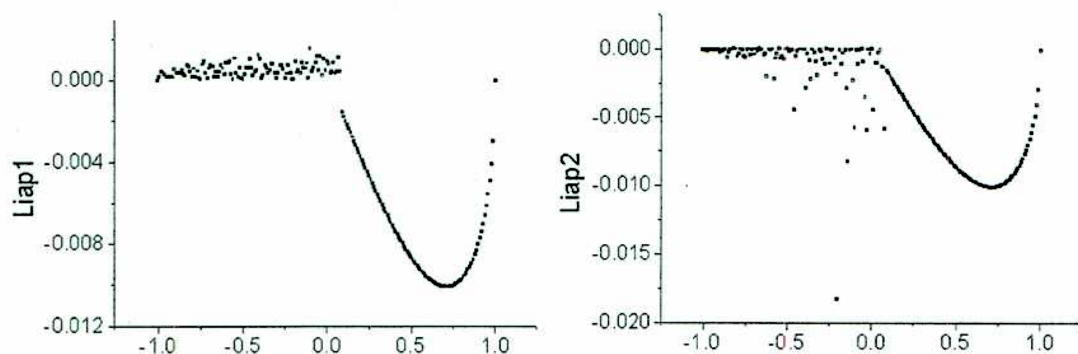


Figura 30 Exponentes de Lyapunov para $|A| < 1$, $K=0.02$
y condición inicial: $\psi_0 = 0 + i\{(1-A^2)^{1/2} - A\beta/4\}$

Si A y K tienen el mismo signo, ambos exponentes de Lyapunov son iguales y negativos, a excepción de algunos valores muy chicos de A (del orden de K). Los dos exponentes negativos reflejan que el sistema converge al punto fijo. Si $\text{Signo}(K) = -\text{Signo}(A)$ (el punto fijo con sentido físico es inestable), para la mayoría de los valores de A se cumple que o bien uno de los exponentes es positivo y el otro negativo, o ambos son positivos. Esto indica la posibilidad de tener caos. La distribución de los valores de A con uno o dos exponentes positivos, cambia con el valor de K .

Para algunas condiciones iniciales aisladas y fuera de la región plausible, aún en la situación en que $\text{Signo}(K) = \text{Signo}(A)$ y con A mayor que K , uno de los dos exponentes de Lyapunov es positivo. Para tener noción de cómo se distribuyen en el plano complejo, la figura 31 muestra las que corresponden a $A=0.9$ y $K=0.08$. Los puntos corresponden a las condiciones iniciales para los que al menos uno de los exponentes es positivo, y tienen valores de $(A+\rho)$ negativos. Los valores más cercanos a cero y todavía apreciables, están alrededor de $(A+\rho) = 0.9 - 1.5 = -0.6$, siendo todos los demás más negativos (fuera de la región plausible). Esta figura muestra una frontera aparentemente fractal entre la zona convergente y la divergente. La figura 31 bis es un zoom de la región (la banda oscura en el centro de la fig.33) donde $\text{Re}(\psi) = \rho$ varía entre -9 y -12 . Se ve que es una réplica de lo que vemos para ρ entre -12 y -20 .

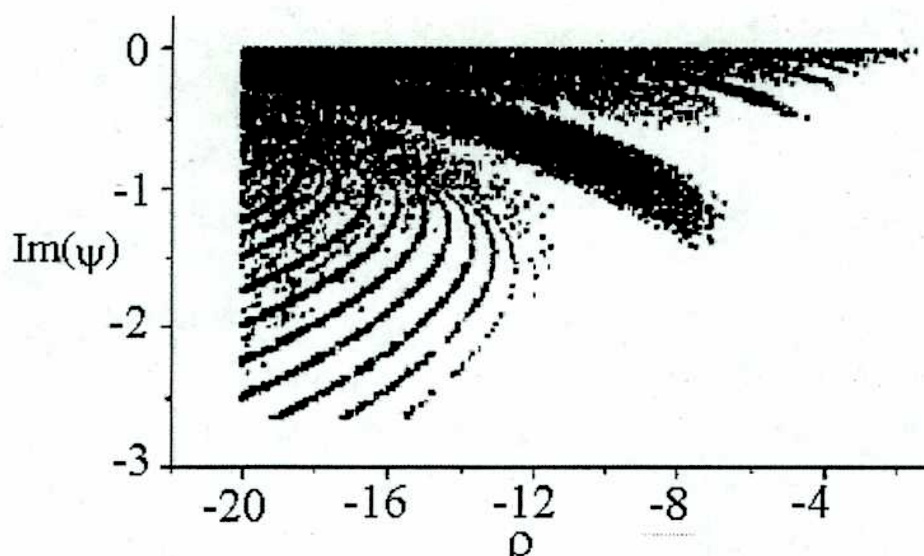


Figura 31 Condiciones iniciales para las que al menos uno de los dos exponentes de Lyapunov es positivo. $A=0.9$ y $K=0.08$.

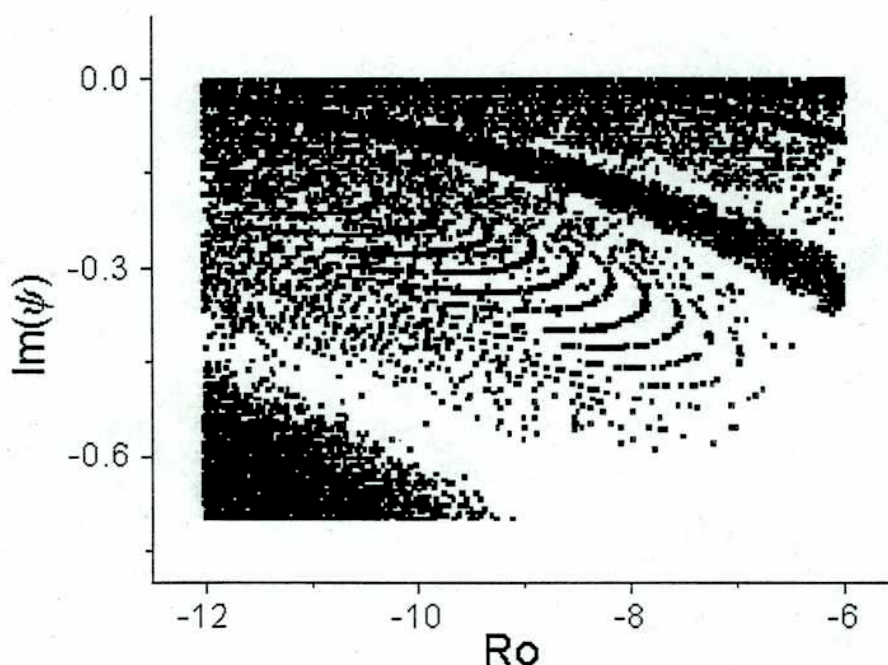


Figura 31 bis Ampliación de la región $-12 < \rho < -6$

En definitiva, si A y K tienen el mismo signo, para la gran mayoría de las condiciones iniciales los dos exponentes de Lyapunov son negativos, y el sistema converge al punto fijo estable. Esto muestra que un mapa individual contrae el espacio de fases y que el sistema puede converger a la solución de KLM de acuerdo a lo predicho por esta teoría aún en ausencia de aberturas espaciales y temporales. Con muchos mapas como estos acoplados por la perturbación de Kerr, el sistema también llega a converger a la solución

de KLM. Ese es precisamente el sistema descrito en la sección 3.1, en donde la función de acoplamiento elegida (3.3) y el valor $z = -1$ corresponden al caso que acabo de analizar.

4.1.2 Inclusión de aberturas espaciales en el modelo.

A pesar de que las aberturas espaciales no son esenciales para tener KLM, son inevitables en la práctica por muy débiles que sean, y es importante saber en qué medida alteran los resultados obtenidos hasta ahora. Por lo tanto las agrego al modelo. La perturbación en esta instancia se divide en dos componentes, una debido al efecto Kerr, y otra debido a las aberturas espaciales.

Para obtener el mapa que incluye ambas perturbaciones tengo en cuenta el siguiente esquema:

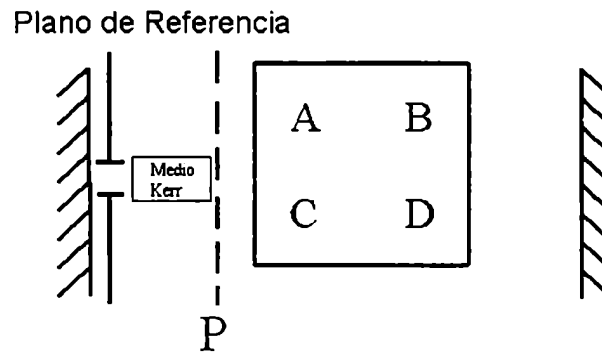


Figura 32 Esquema de la cavidad que incluye un medio Kerr y aberturas espaciales

El plano de cálculo está indicado por P. La matriz de round-trip es el producto $M_{rt} = M_{Kerr_v} \cdot M_{ab} \cdot M_{Kerr_i} \cdot M$, donde M_{ab} tiene en cuenta el paso del haz por la abertura tanto a la ida como a la vuelta, M (ABCD) es la matriz de ida y vuelta por el resto de la cavidad, $M_{Kerr_{ida}}$ (vuelta) tiene en cuenta el paso del haz por el medio Kerr a la ida (vuelta). Como $M_{ab_{12}} = M_{kerr_{12}} = 0$, puedo simplificar escribiendo $M_{rt} = M_{ab} K_{err} M$,

$$M_{ab} K_{err} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -ia - \beta_s & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Considero nuevamente el caso en el que la longitud de Rayleigh es mayor que la longitud de la longitud del medio Kerr, y construyo un mapa que es válido una vez que concluyó el transitorio para el que el valor medio temporal de la intensidad converge. En esta situación los factores de la perturbación son proporcionales a la variable correspondiente (espacial o temporal) de acuerdo a (3.11) y (3.12):

$$\left. \begin{aligned} \psi_{S_{n+1}} &= A - \frac{1}{A + \psi_{S_n}} - K_S S_{S_n} - i a \\ \psi_{T_{n+1}} &= 1 - \frac{1}{1 + \psi_{T_n}} + K_T S_{T_n} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

donde $a = B \lambda / \pi R_{ab}^2$, B_S es el elemento de la matriz de propagación espacial, es la longitud de onda del laser, y R_{ab} es el radio de la abertura.

Voy a trabajar solamente con la parte espacial, ya que, debido a que las variables no se mezclan, el mapa temporal tiene un comportamiento independiente de la abertura espacial. Por lo tanto, no voy a aclarar de ahora en más el subíndice de las variables sobreentendiéndose que se trata de las variables espaciales.

Se puede tomar la parte real e imaginaria y como la variable es $\psi = \rho - i S$, nos queda el mapa

$$\left. \begin{aligned} \rho_{n+1} &= A - \frac{A + \rho_n}{(A + \rho_n)^2 + S_n^2} - K S_n \\ S_{n+1} &= \frac{S_n}{(A + \rho_n)^2 + S_n^2} + a \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

sus puntos fijos son:

$$\psi_{f \pm} = -\frac{K \sqrt{1-A^2}}{2} \pm \frac{A a}{2 \sqrt{1-A^2}} - i \left(\pm \sqrt{1-A^2} \pm \frac{A K}{2} + \frac{a}{2} \right). \quad (4.4)$$

Dependiendo del signo de B_S (que escala q), es estable y con sentido físico una u otra solución para el punto fijo. La abertura no cambia la forma del jacobiano (3.23), ya que

es una constante y al derivar el mapa se anula. Por lo tanto los autovalores también son los mismos que (3.25). Lo que cambia es el valor del punto fijo en el cual los evalúo, que es (4.4)

$$\lambda_{S_z}^2 = \frac{1 - 2 K_s (A + \rho_f) S_f}{((A + \rho_f)^2 + S_f^2)^2} \approx 1 \mp \frac{2a}{\sqrt{1 - A^2}} \mp 2 K_s A \sqrt{1 - A^2} \quad (4.5)$$

Por lo tanto, si $B_S > 0$ (< 0) la solución estable con sentido físico es ψ_+ (ψ_-)

Para ver si es un atractor de todo el espacio de fases, miro qué sucede con la variación del área hiperbólica y la calculo usando el mapa para S dado por (4.3)

$$\mu(A_{n+1}) = \int_A \frac{d\rho' dS'}{S'^2} = \int_A J(\rho_n, S_n) \frac{d\rho dS}{S'^2} = \int_A \frac{1 - 2 K (A + \rho_n) S_n}{(S_n + a |A + \psi_n|^2)^2} d\rho dS \quad (4.6)$$

La variación de la misma después de una iteración es:

$$\mu(A_{n+1}) - \mu(A_n) = \int_A \frac{-2 K (A + \rho_n) S_n^3 - a^2 |A + \psi_n|^4 - 2 S_n a |A + \psi_n|^2}{S_n (S_n + a |A + \psi_n|^2)^2} d\rho dS \quad (4.7)$$

que desarrollada a orden uno en la abertura (que supongo débil) queda de la forma:

$$\mu(A_{n+1}) - \mu(A_n) = - \int_A \left(\frac{2 K (A + \rho_n)}{S_n} + \frac{2 a |A + \psi_n|^2}{S_n^2} \right) d\rho dS. \quad (4.8)$$

Lo que obtengo es lo mismo que en el capítulo anterior sin considerar las aberturas, más un término en el integrando que es siempre positivo. La manera de demostrar la convergencia de la integral del primer término del integrando, es exactamente la misma que en el capítulo anterior para (3.31), y no la repito. Si $\text{Signo}(K) = \text{Signo}(A)$, converge para la región plausible, y la presencia del segundo término en el integrando (que es siempre positivo) contribuye a que converja más rápidamente que (3.31). Como consecuencia el punto fijo estable es un atractor. Si $\text{Signo}(K) = -\text{Signo}(A)$, el análisis es

más complicado, ya que hay una competencia entre la tendencia expansiva del mapa con efecto Kerr y la contractiva debida a la abertura. Este caso es interesante, y será discutido en la sección 4.1.4.

4.1.3 Ejemplos numéricos para $\text{Signo}(K) = \text{Signo}(A)$.

Quiero ver como se distribuyen las condiciones iniciales en el plano complejo para las que realmente converge al punto fijo, es decir quiero ver cómo la abertura cambia la cuenca de atracción. Hago nuevamente una simulación numérica y grafico los puntos para los que alguno de los exponentes de Lyapunov es positivo. La figura 33 muestra la frontera fractal para los mismos parámetros que el capítulo anterior, $A=0.9$, $K=0.08$, $\alpha=0$, representada con puntos oscuros, superpuesta con la frontera obtenida para $A=0.9$, $K=0.08$, $\alpha=10^{-8}$ representada por puntos lila abiertos. Se ve que pertenecen a la misma frontera que obtengo si no hay aberturas. Los puntos se van diluyendo a medida que aumenta el valor de α . Si la abertura es suficientemente fuerte (de diámetro muy pequeño), el punto fijo es un atractor cuya cuenca de atracción es todo el espacio.

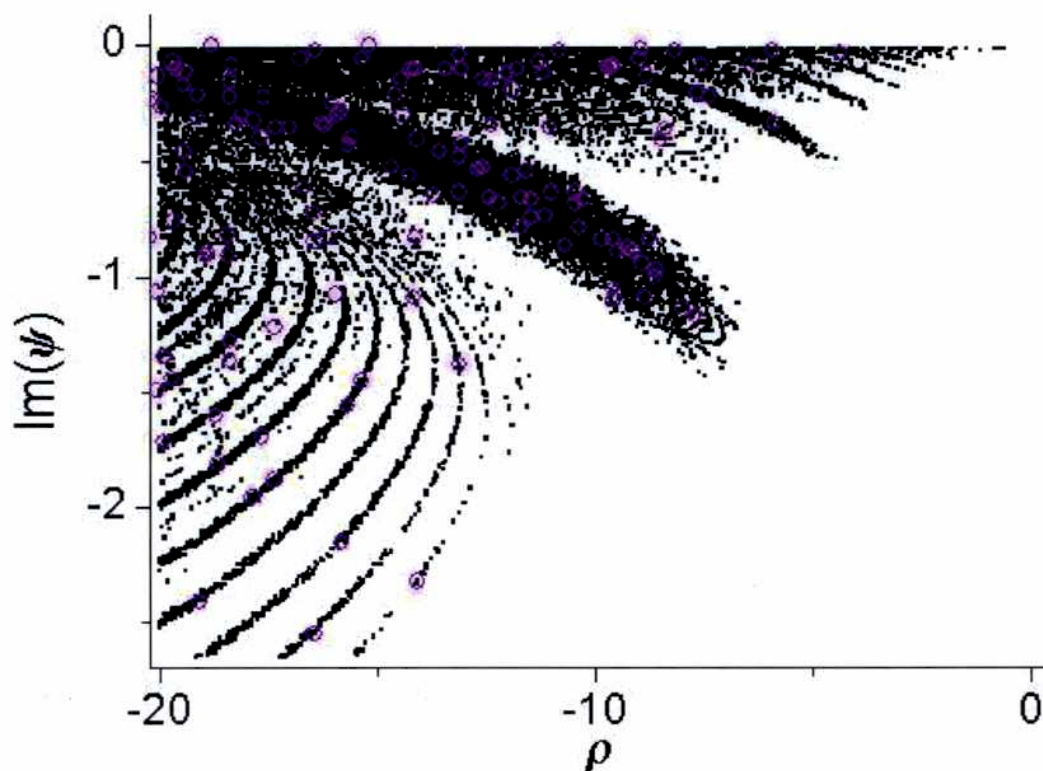


Figura 33 Frontera fractal $A=0.9$, $K=0.08$, $\alpha=0$, representada con puntos oscuros, superpuesta con la frontera obtenida para $A=0.9$, $K=0.08$, $\alpha=10^{-8}$ representada por círculos abiertos

Los ejemplos siguientes apuntan a visualizar cómo cambian las trayectorias con las aberturas. Las Figuras 34 y 35 muestran la evolución del sistema en el plano complejo y la distancia al punto fijo para un caso en que no hay aberturas espaciales cuando $A = 0.7$, $K_S = 0.1$, $\psi_0 = 8-3i$, y las Figuras 36 y 37 muestran la evolución del sistema en el plano complejo y la distancia al punto fijo para los mismos parámetros, pero incluyendo una abertura débil ($a=10^{-3}$). Las trayectorias son cualitativamente similares, y en ambos casos el sistema alcanza al punto fijo después de unos pocos cientos de iteraciones. Estos resultados corroboran el resultado teórico obtenido y muestran que la dinámica está gobernada por el efecto Kerr. Para este ejemplo numérico elegí un valor para a que corresponde a un diámetro de la abertura de media pulgada, es decir el diámetro de un espejo de una cavidad estándar de un laser de Nd:YAG que funciona en el modo KLM. Las aberturas más fuertes, es decir con diámetros más chicos, suavizan la dinámica y hacen que la convergencia al punto fijo sea más rápida.

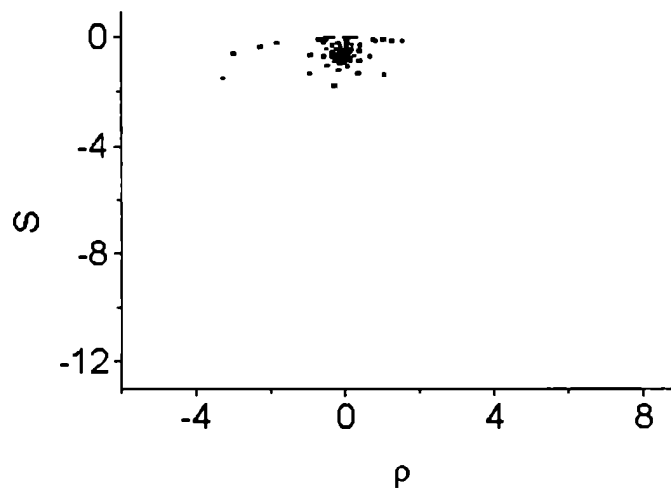


Figura 34 Evolución del sistema en el plano complejo
cuando $a=0$, $A = 0.7$, $K_S = 0.1$, $\psi_0 = 8-3i$

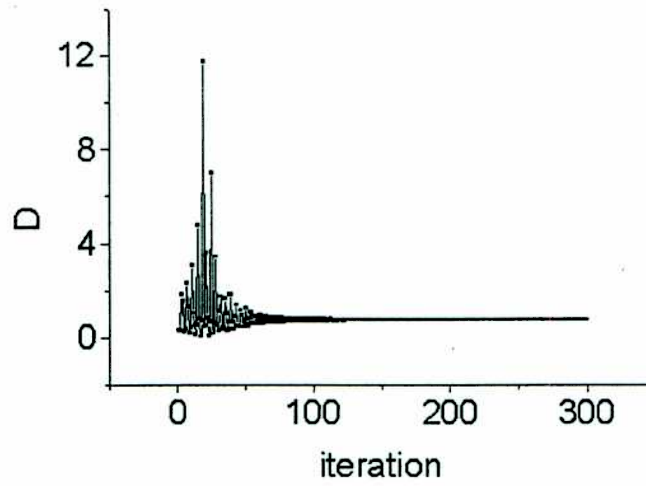


Figura 35 Distancia al punto fijo cuando $a=0$, $A = 0.7$, $K_S = 0.1$, $\psi_0 = 8-3i$

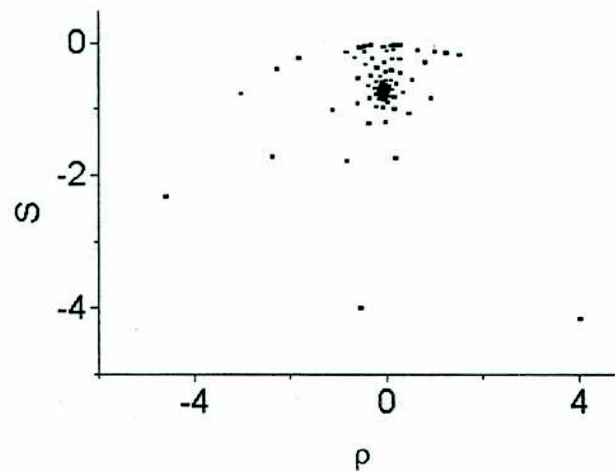


Figura 36 Evolución del sistema en el plano complejo
cuando $a=10^{-3}$, $A = 0.7$, $K_S = 0.1$, $\psi_0 = 8-3i$

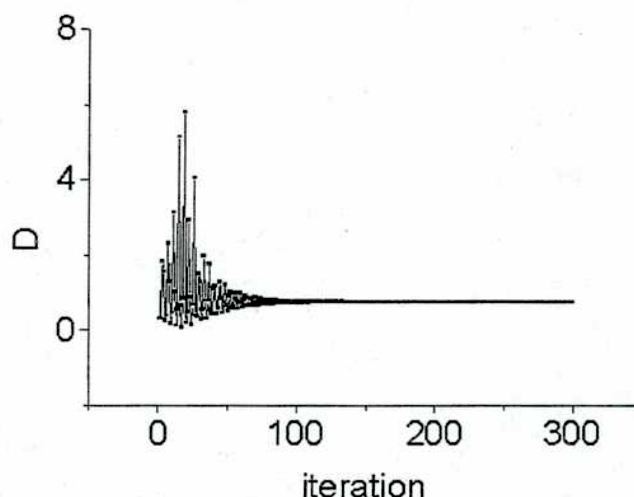


Figura 37 Distancia al punto fijo cuando $\alpha=10^{-3}$, $A = 0.7$, $K_S = 0.1$, $\psi_0 = 8-3i$

Al aumentar α , el módulo de los exponentes de Lyapunov (que en este caso son negativos) aumentan. Para los valores de A cercanos a cero, donde sin aberturas hay un exponente positivo y otro negativo, ambos exponentes se vuelvan negativos al tener $\alpha \neq 0$. Lo mismo sucede para algunas de las condiciones iniciales para las que se tenía algún valor de los exponentes positivo de la figura 33. Estos resultados muestran cómo la abertura agranda la cuenca de atracción del punto fijo. Así, podemos deducir que, si bien la presencia de aberturas no es imprescindible al KLM, ciertamente lo favorece al aumentar la cuenca de atracción y la velocidad de convergencia al punto fijo.

Para $A < 0$ al menos uno de los exponentes de Lyapunov es siempre positivo en el caso de no tener aberturas, y el espacio de fases se expande. Al tenerlas en cuenta, el espacio puede llegar a contraerse. Este es un caso interesante, porque la interacción de dos tendencias opuestas como se observa de (4.8), una debido al efecto Kerr, y la otra debida al término disipativo provisto por la abertura, dan lugar a un comportamiento muy complejo. Voy a describir más detalladamente la zona con $A < 0$ en la próxima sección.

4.1.4 Zona donde $\text{Signo}(K) = -\text{Signo}(A)$.

Para $A < 0$, $K > 0$ y $\alpha = 0$, el mapa diverge, y se puede observar que uno de los exponentes de Lyapunov es positivo y el otro negativo, para casi todos los valores de K . Hay algunos pocos casos para los que ambos exponentes son positivos. Esto se ve en las figuras 30. Si hay una abertura cuyo diámetro es lo suficientemente chico, y el parámetro

A es positivo, dicha abertura fuerza al mapa a converger al punto fijo para cualquier condición inicial. Si A es negativo, la situación es más compleja, pues como ya he dicho hay una competencia entre la expansión debida al efecto Kerr y la contracción debida a la abertura. En esta situación el mapa puede converger a órbitas multiperiodicas, al punto fijo para aberturas lo suficientemente fuertes, o diverger para aberturas más débiles.

En la figura 38 muestro la región del parámetro A en la que aparecen órbitas multiperiodicas. Rutas multiperiodicas al caos han sido observadas en el laser de Ti:Zafiro por [4.1]. Tuve en cuenta para hacer el gráfico periodos hasta 100. Es notable la acumulación de órbitas de período n (genérico) alrededor de determinados valores de A . Estos valores están muy cerca de los valores para los cuales el mapa sin la perturbación de Kerr tiene órbitas de período bajo. Esta afirmación se ve mejor en la figura 39 donde muestro las regiones del parámetro A donde hay órbitas con periodicidad 7 solamente. Están concentradas alrededor de los valores de A ($A < 0$) para los que $P_3^7(A) = 0$, es decir para $A = -0.9009, -0.62469, -0.222521$. Estos valores de A corresponden por lo tanto a los valores donde el mapa sin perturbación de Kerr tiene órbitas multiperiodicas (ceros de P_3^n). Las figuras fueron hechas iterando 10^6 veces el mapa para cada juego de parámetros A, K .

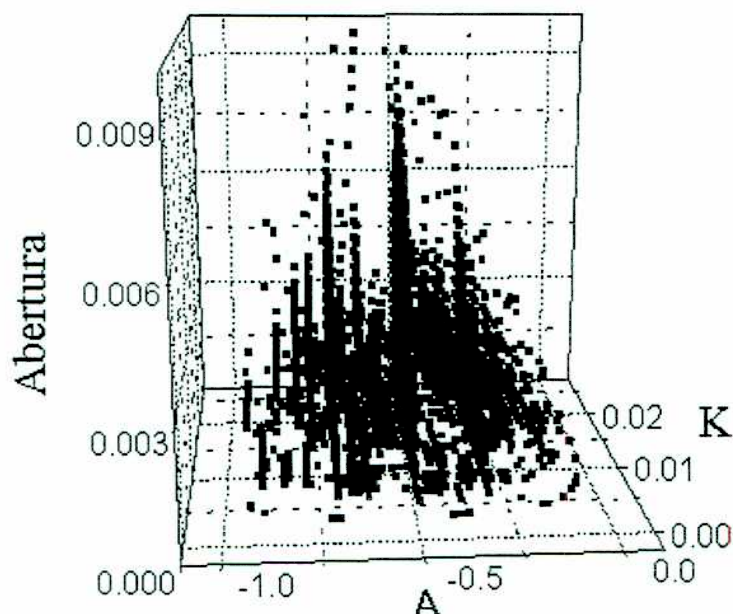


Figura 38 Región del parámetro A en la que aparecen órbitas multiperiodicas

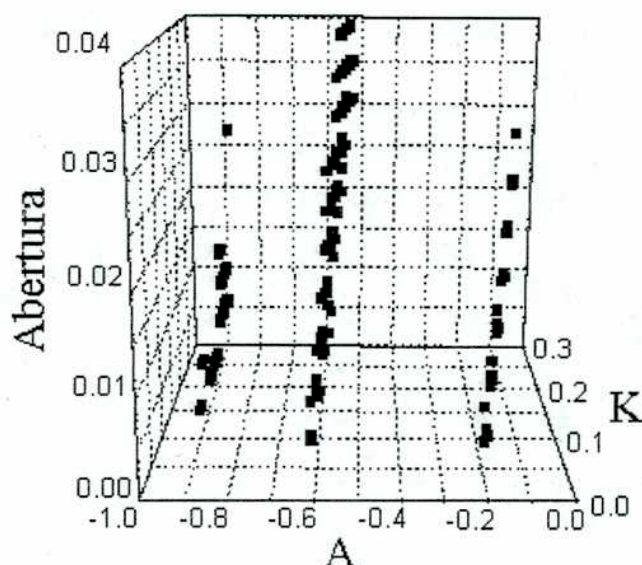


Figura 39 Regiones del parámetro A donde hay órbitas con periodicidad 7

4.1.5 Bifurcaciones y caos

Esta subsección tiene como objetivo ilustrar la sorprendente complejidad del mapa (4.3) mostrando algunas de las bifurcaciones de sus puntos fijos.

Comienzo variando la intensidad de la abertura a para varios valores fijos de A y K . Las figuras 40 y 41 muestran, para un caso representativo, los valores de p y S correspondientes a los puntos del atractor para cada valor de a . Hice 10^5 iteraciones del mapa partiendo de una condición inicial arbitraria, con $A=-0.797$ y $K=0.08$, y sólo tengo en cuenta los últimos p valores, para evadir el transitorio inicial, donde p es la periodicidad del atractor. El valor elegido para A , está muy cerca de 0.809017, que cumple $P_3^5(A) = 0$. Es decir que las iteraciones del mapa sin perturbación de Kerr, evaluado en $A=0.809017$ me dan una órbita de período 5 (y sus múltiplos enteros positivos). El atractor al que el sistema converge para $a=0.003$, es “casualmente” una órbita multiperiodica de periodicidad 5. A medida que a disminuye (es decir a medida que aumento el diámetro de la abertura) las ramas de las órbitas bifurcan, siguiendo la ruta al caos correspondiente a la duplicación del período. Es decir, la periodicidad de las órbitas va aumentando, y las periodicidades son múltiplos pares positivos de 5.

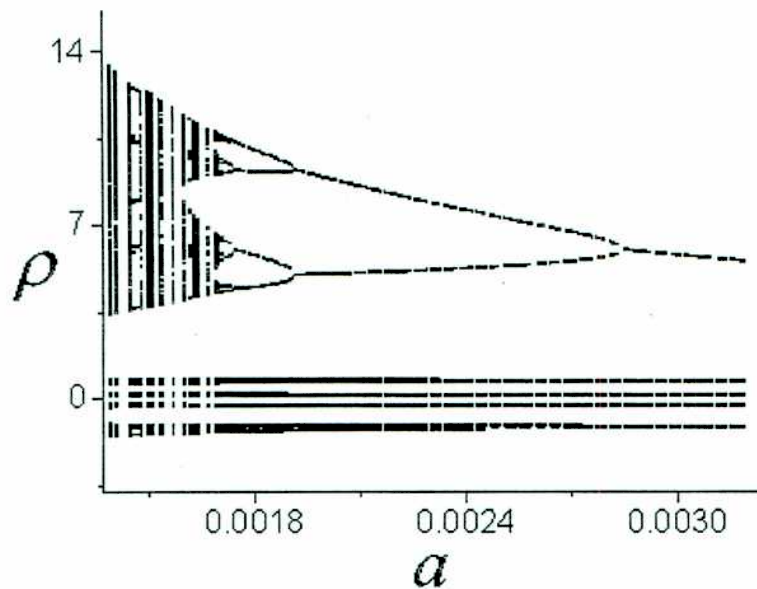


Figura 40 Valores de ρ correspondientes a los puntos del atractor en función de $a \cdot 10^5$ iteraciones con condición inicial arbitraria, con $A = -0.797$ y $K = 0.08$

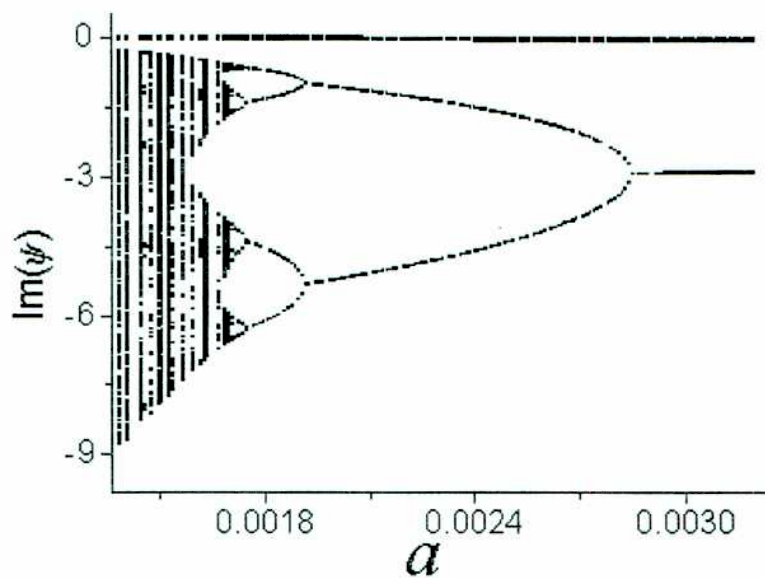


Figura 41 Valores de S correspondientes a los puntos del atractor en función de $a \cdot 10^5$ iteraciones con condición inicial arbitraria, con $A = -0.797$ y $K = 0.08$

El atractor también bifurca al variar A , fijando a y K . Dentro de algunas ventanas el atractor resultante es una órbita multiperiódica. También aparece la ruta al caos correspondiente a la duplicación del período. En las figuras 42 y 43 muestro los valores de ρ y S para las órbitas correspondientes a cada valor de A . Los parámetros fijos son

$\alpha=0.004$ y $K=0.08$, y el paso en A es 10^{-4} . Para los casos donde no encuentro un período definido, dibujo los valores que adopta la trayectoria. Cerca de $A=0.8$ el sistema está en una región caótica. Al disminuir el módulo de A , entra en una ventana multiperiodica, para luego bifurcar duplicando el período (a partir de $A=-0.791$ aproximadamente). Para A entre -0.7876 y -0.7856 aparece otra región caótica.

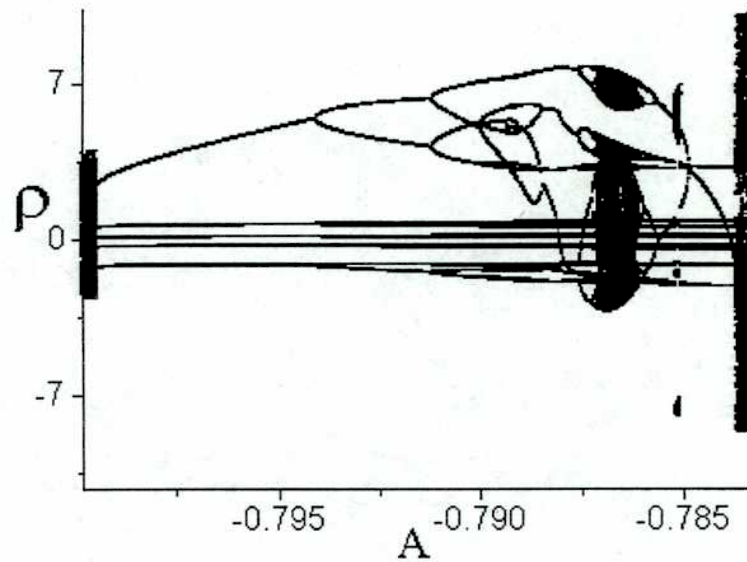


Figura 42 Valores de ρ para las órbitas en función de A para $\alpha=0.004$ y $K=0.08$, con paso en A de 10^{-4}

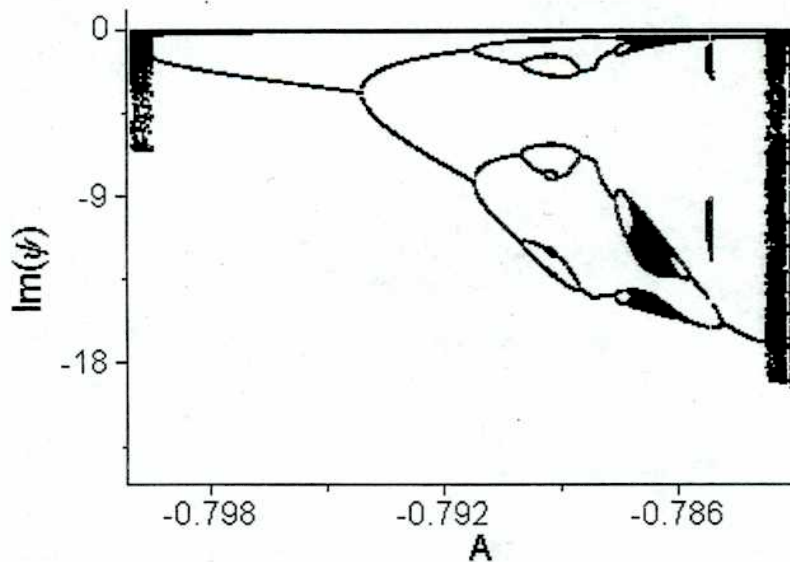


Figura 43 Valores de S para las órbitas en función de A para $\alpha=0.004$ y $K=0.08$, con paso en A de 10^{-4}

En las figuras 44 y 45 se ve un acercamiento de esta última región caótica para los mismos parámetros. Se distinguen pequeñas ventanas periódicas dentro de la misma. Si el módulo de A disminuye (partiendo de la región caótica alrededor de $A=-0.7865$) aparece una cascada inversa. El zoom la muestra claramente. También se observa un resabio de las órbitas multiperiodicas que fueron bifurcando para dar lugar al caos.

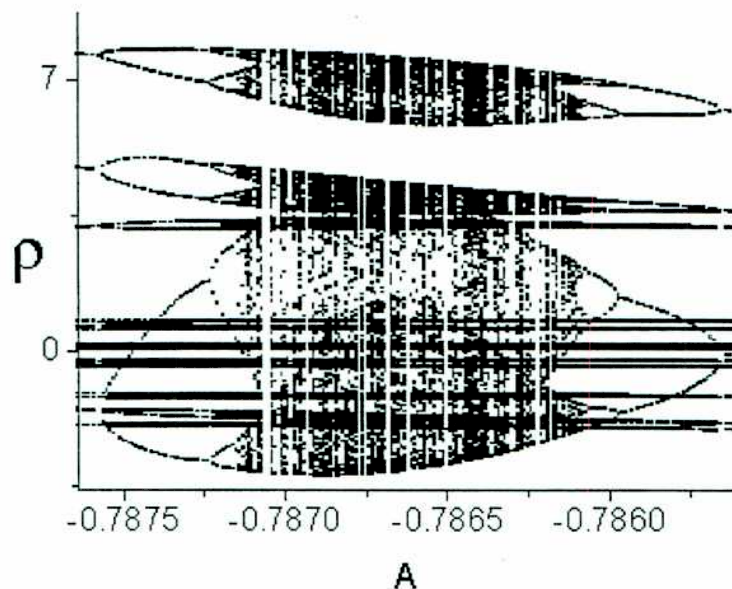


Figura 44 Acercamiento de la región caótica para los valores de S , con $A = -0.797$ y $K=0.08$

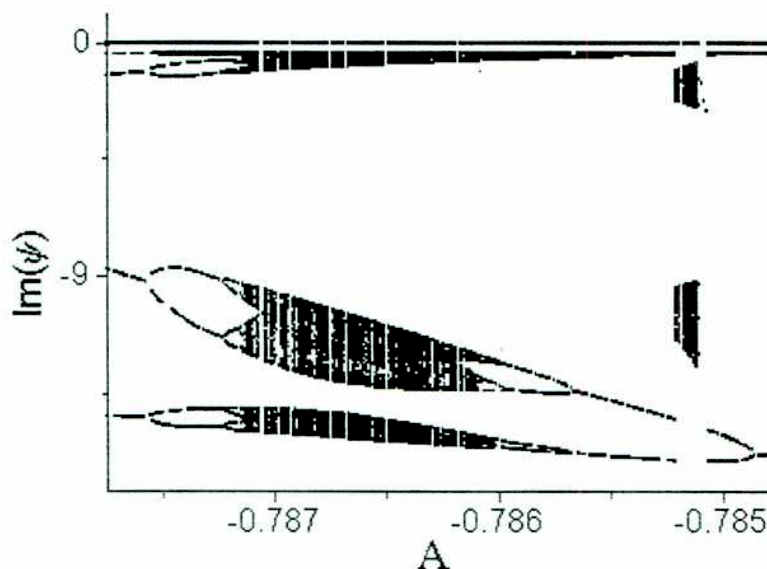


Figura 45 Acercamiento de la región caótica para los valores de S , con $A = -0.797$ y $K=0.08$

En las figuras 46 y 47, (hechas para $\alpha=0.005$ y $K=0.08$, para p y S , con un paso de 10^{-4}), se ve cómo a medida que $A \rightarrow 0$ desde los valores negativos, el atractor tiende a una órbita de periodicidad uno. Al pasar a los valores positivos de A , el atractor sigue siendo una órbita de período uno, y bifurca de manera brusca en una de período dos en $A=0.02$. En esa zona anómala no hay órbitas periódicas. A partir de ese punto no se vuelve a observar un comportamiento tan brusco.

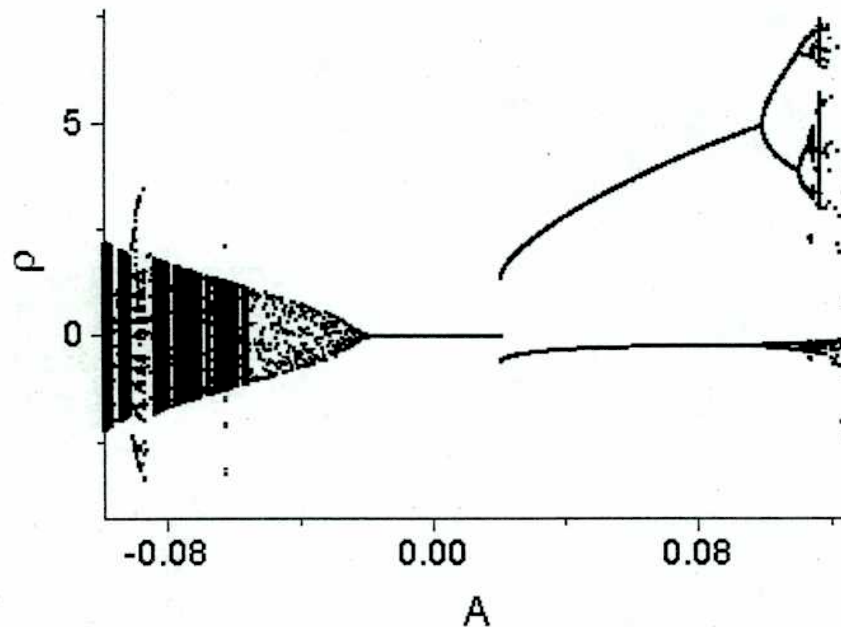


Figura 46 Valores de p para las órbitas en, para $\alpha=0.005$ y $K=0.08$ un paso en A de 10^{-4}

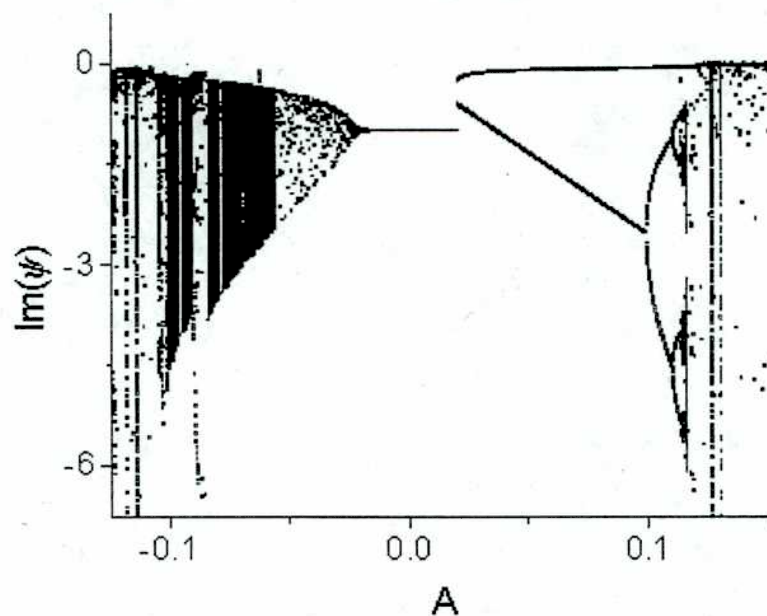


Figura 47 Valores de S para las órbitas en, para $\alpha=0.005$ y $K=0.08$ un paso en A de 10^{-4}

Para tener una mejor aproximación a qué es lo que pasa en la discontinuidad, en las figuras 48 y 49 muestro los puntos correspondientes a la trayectoria no periódica para cada valor de A de esa región ($\alpha=0.005$ y $K=0.08$, para ρ y S , con un paso de 10^{-8})

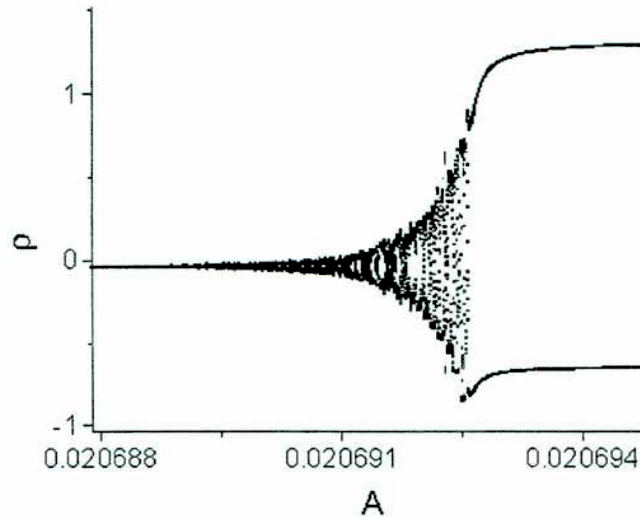


Figura 48 Acercamiento a la zona anómala de ρ , para $\alpha=0.005$ y $K=0.08$ un paso en A de 10^{-4}

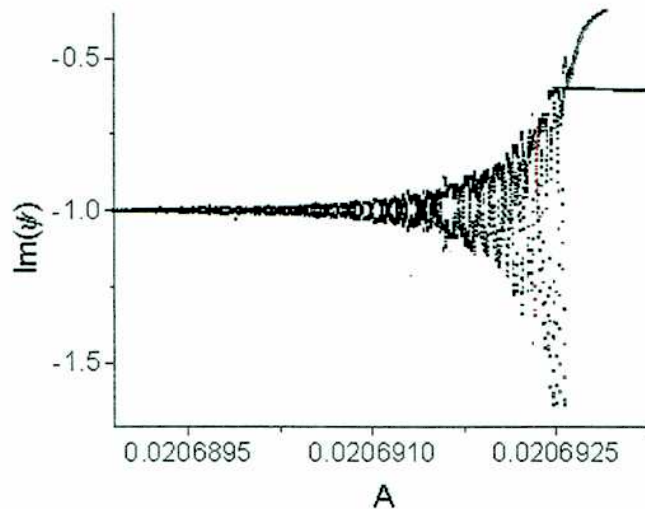


Figura 49 Acercamiento a la zona anómala de S , para $\alpha=0.005$ y $K=0.08$ un paso en A de 10^{-4}

Cabe preguntarse qué sucede con esta región anómala al variar K . Al aumentarlo, las trayectorias no periódicas para cada valor de A de esa región, toman diferentes formas, y la apariencia de las figuras 48 y 49 cambia. A mayor K , la figura se vuelve más compleja. Si $K>0.02$, esta región siempre aparece cerca de $A=0$.

4.2 Ejemplos y aplicación:

4.2.1 Algunos ejemplos de atractores no periódicos.

En subsecciones anteriores hablé de órbitas no periódicas, y de exponentes de Lyapunov positivos. Es interesante mostrar alguna órbita que corresponda a cada una de las combinaciones de signos de dichos exponentes posibles. No quiere decir que las que voy a presentar sean las únicas formas que existen. Haría falta un estudio sistemático para poder afirmarlo. De hecho he encontrado otro tipo de trayectorias, pero voy a incluir sólo las más interesantes. Hay dos exponentes de Lyapunov. Pueden ser ambos positivos (dejo de lado este caso), uno positivo y el otro negativo o bien ambos negativos. Si tengo uno positivo y otro negativo puede haber caos. La figura 50 de la izquierda muestra una trayectoria obtenida numéricamente donde un exponente L_1 es positivo y el otro L_2 es negativo. Los parámetros elegidos son $A=-0.25$, $K=0.04$ y $\alpha=0.004$, teniéndose $L_1=0.108$ y $L_2=-0.035$. La imagen de la derecha muestra el atractor (puntos de la trayectoria entre 425000 y 500000 iteraciones). La imagen estática no termina de reflejar del todo el comportamiento del sistema. Cuando se observa su evolución, se ve que la región se va llenando de manera "pulsada". Con esto quiero significar que la trayectoria (derecha) se va acercando y alejando alternadamente de la región central libre de puntos

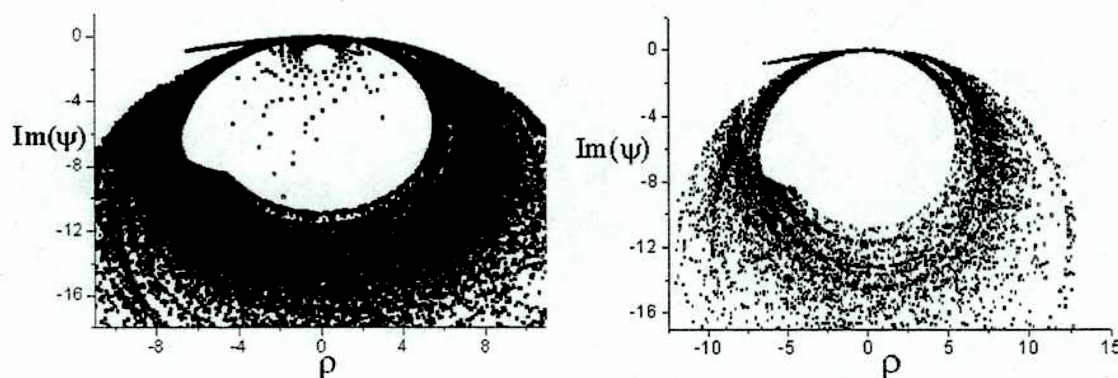


Figura 50 Trayectoria y atractor correspondientes a $A=-0.25$, $K=0.04$ y $\alpha=0.004$, $L_1=0.108$ y $L_2=-0.035$.

Muestro otro ejemplo en la figura 51, para los parámetros $A=-0.46$, $K=0.02$ y $\alpha=0.004$, para los que $L_1=0.11$ y $L_2=-0.062$. Se ve un atractor (derecha) completamente distinto al anterior. El sistema se mueve sobre una región del espacio mucho más acotada, que consiste en tres regiones diferenciadas. Va saltando de una a la otra. Notar que el

exponente positivo L_1 en este caso es casi igual que el del caso anterior, por lo que la expansión en la dirección correspondiente a este exponente no cambia demasiado. El módulo del exponente de Lyapunov negativo, $|L_2|$ en este caso es el doble que en el caso anterior, por lo que el efecto de la contracción en la dirección asociada a L_2 es mucho más importante que antes. Esto explica por que el atractor en este caso está restringido a una región “menos desparramada” en el espacio que el atractor del ejemplo anterior.

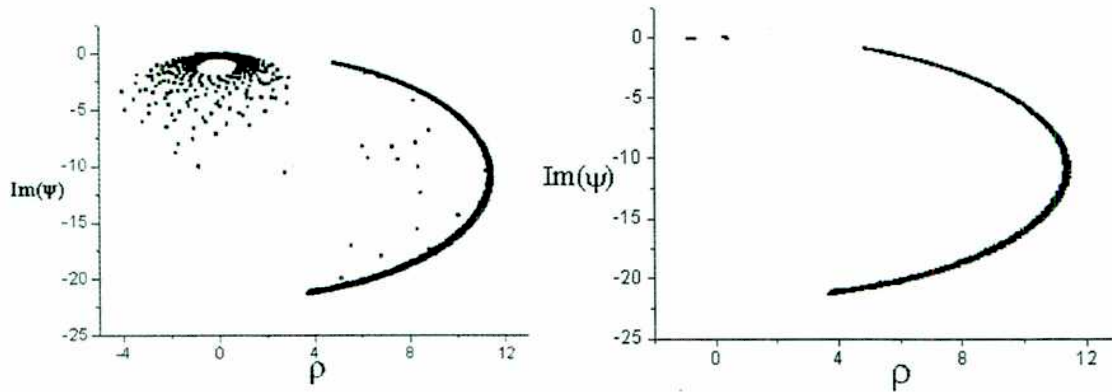


Figura 51 Trayectoria y atractor correspondientes a parámetros

$A=-0.46$, $K=0.02$ y $\alpha=0.004$, $L_1=0.11$ y $L_2=-0.062$.

El último ejemplo es tomando $A=-0.85$, $K=0.08$ y $\alpha=0.004$. (Figura 52). El exponente L_1 disminuyó y $|L_2|$ aumentó respecto a los casos anteriores. Sus valores son $L_1=0.0523$ y $L_2=-0.1117$. La trayectoria es notablemente más simple (izquierda). Se ve un atractor (derecha) restringido a una región mucho más chica del espacio y está compuesto por cuatro segmentos. Va saltando de uno en otro.

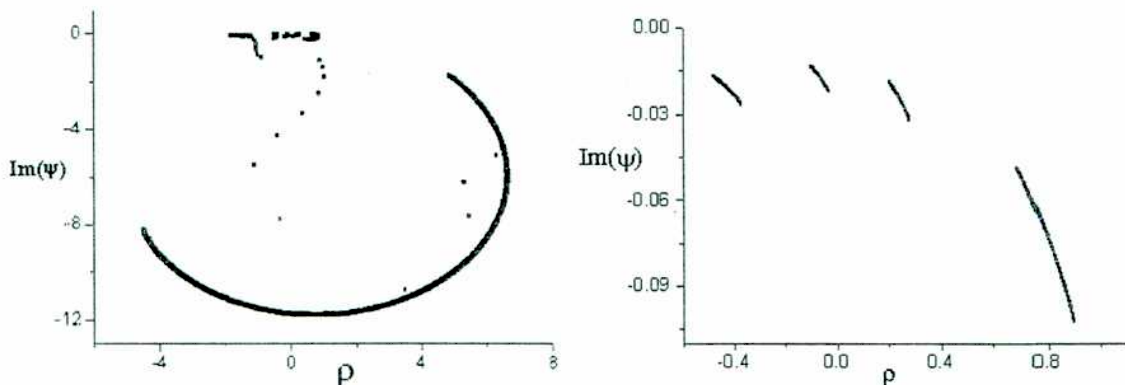


Figura 52 Trayectoria y atractor correspondientes a parámetros

$A=-0.85$, $K=0.08$ y $\alpha=0.004$, $L_1=0.0523$ y $L_2=-0.1117$.

Como se puede imaginar a partir de estas últimas figuras, la variedad de trayectorias y

atractores posibles es muy grande.

4.2.2 Discusión acerca de la energía del pulso y algunos ejemplos de atractores periódicos.

En los últimos tiempos, se empezó a trabajar sobre regímenes no estacionarios de generación de pulsos ultracortos, ya que proveen la posibilidad de explorar los mecanismos físicos que conducen a la formación y estabilización de pulsos ultracortos. La importancia de las modulaciones, ya sean inducidas o automodulaciones, radica en que aumentan mucho la energía de los pulsos en el pico de la modulación. Esto es útil para aplicaciones donde se necesita más energía que la que hay disponible en los osciladores típicos. En la referencia [4.2] se reportan resultados experimentales y teóricos de automodulaciones en láseres de Ti:Zafiro, que ocurren a las frecuencias típicas de las oscilaciones de relajación (efecto de Q-switch). Me propongo mostrar que con el modelo presentado en esta Tesis, pueden obtenerse automodulaciones, cuya frecuencia y características quedan determinadas por el material del medio activo y los parámetros que se eligen para la cavidad del láser, y que son similares a las reportadas en dicha referencia.

En el Apéndice 2 del capítulo 3, mostré como el valor medio temporal (hecho para la duración del pulso simétrico) de la intensidad es constante. Como la intensidad es energía por unidad de tiempo y por unidad de área, la energía total del pulso va a ser proporcional al área del haz. Es decir, va a ser proporcional a la inversa del módulo de la parte imaginaria de mi variable ψ , que es $1/S$. Así que, para realizar una comparación cualitativa con resultados experimentales (en los que se obtiene, en general, la energía de cada pulso) debo graficar $1/S$. El primer ejemplo que voy a mostrar en la figura 55 corresponde a $A=-0.72$, $\alpha=0.003$ y $K=0.07$. Corresponde a un atractor de período $p=142$. Por supuesto, los dos exponentes de Lyapunov son negativos para todos los casos de atractores periódicos. La forma de $1/S$ refleja las modulaciones para la energía con este período p . Para cavidades típicas de KLM, el tiempo de round trip es de aproximadamente 10 ns. Por lo tanto, tengo períodos de aproximadamente 1.4 μ s. Este tiempo no está muy lejos de los tiempos típicos para las modulaciones medidas entre 2.5 y 4.5 μ s en la referencia [4.2], que allí son explicadas como un efecto de Q-switch. Las figuras 53 y 54 muestran dos de las modulaciones obtenidas en dicha referencia.

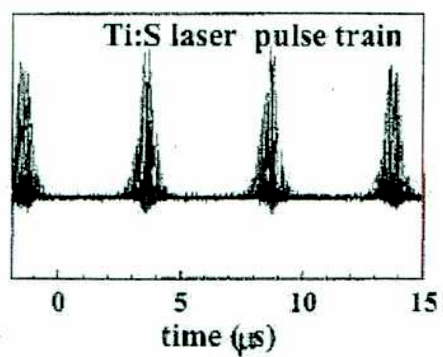


Figura 53 Tren de pulsos medido en [4.2]
(la figura pertenece a dicha referencia)

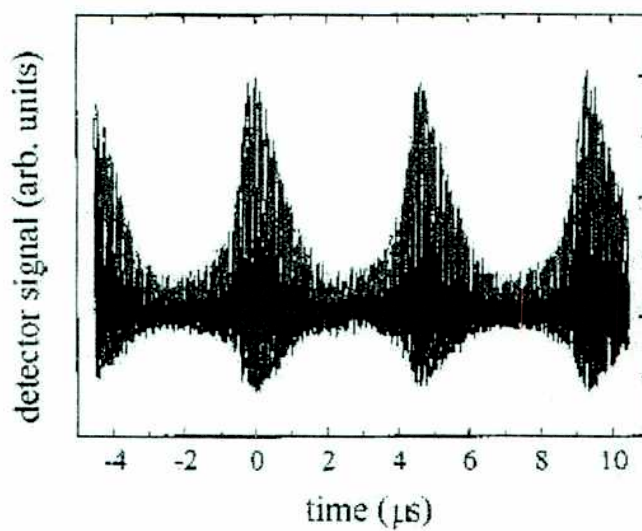


Figura 54 Otro tren de pulsos medido en [4.2]
(la figura pertenece a dicha referencia)

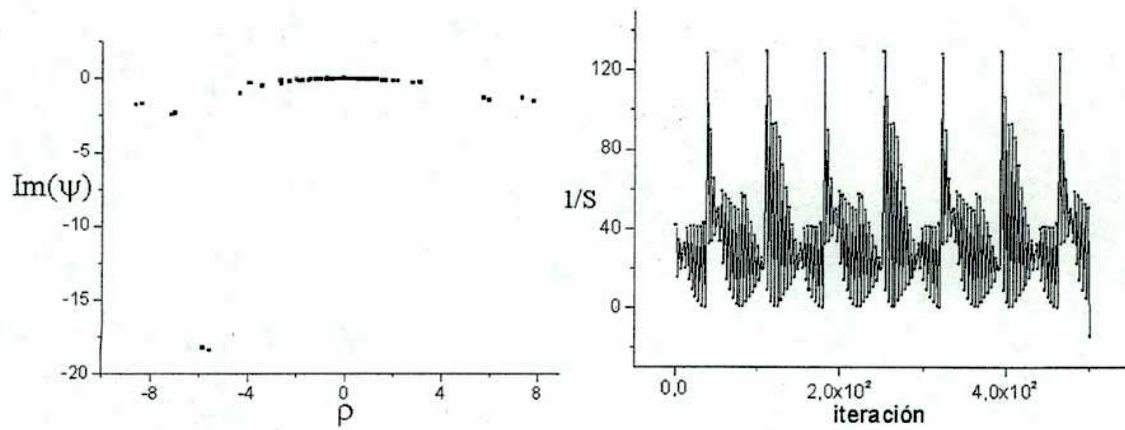


Figura 55 Atractor de período $p=142$ obtenido para $A=-0.72$, $\alpha=0.003$ y $K=0.07$

la figura 56 corresponde a los parámetros $A=-0.92$, $\alpha=0.001$ y $K=0.03$, y corresponde a un atractor de período $p=249$, es decir a modulaciones de períodos de $2.49 \mu s$. La diferencia entre el máximo y el mínimo valor de la modulación (60 u.a, o unidades arbitrarias) es mucho menor que en el caso anterior, que eran más de 100 u.a.

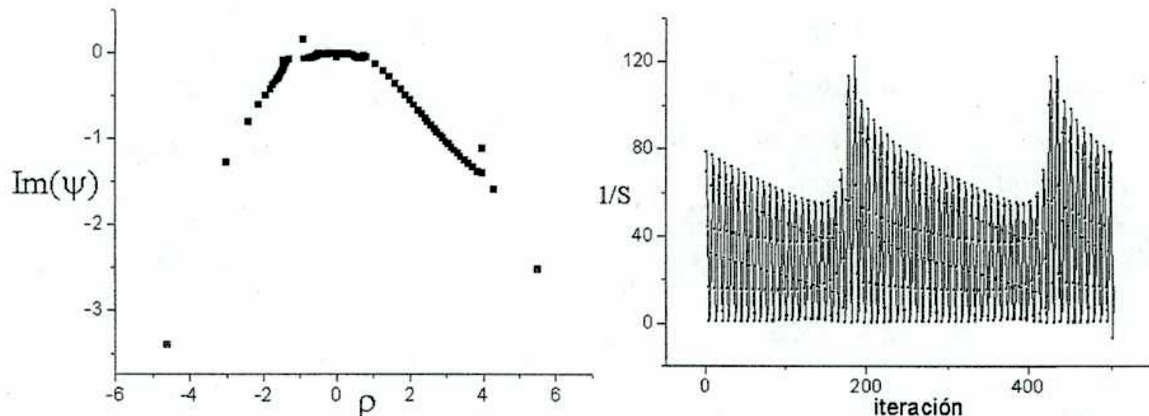


Figura 56 Atractor de período $p=249$ obtenido para $A=-0.92$, $\alpha=0.001$ y $K=0.03$

Mi último ejemplo, en la figura 57 corresponde a los parámetros $A=-0.96$, $\alpha=0.003$ y $K=0.07$, y corresponde a un atractor de período $p=285$, es decir a modulaciones de períodos de $2.85 \mu s$. La modulación es mucho más marcada.

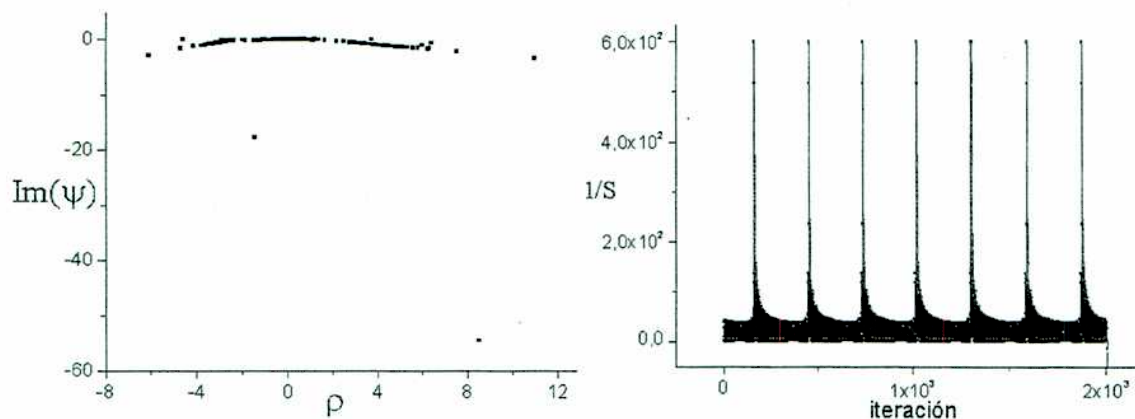


Figura 57 Atractor de período $p=285$ obtenido para $A=-0.96$, $\alpha=0.003$ y $K=0.07$

La conclusión de esta última sección es que pueden obtenerse modulaciones cuyas formas y frecuencias típicas están dentro del orden de las que pueden producirse para oscilaciones de relajación, pero que se explican simplemente como efecto combinado del efecto Kerr y las aberturas espaciales. Esto indica que debe tenerse cautela antes de afirmar que estas oscilaciones sólo pueden ser causadas por dinámicas más complejas (en el sentido de que involucran más grados de libertad) como el Q-switch o batidos entre modos transversales. Una comparación más completa de las propiedades estadísticas y topológicas de las series de tiempo teóricas y experimentales (lo que está mucho más allá de los objetivos de esta Tesis) arrojaría luz sobre este tema.

Referencias:

- [4.1] "A Quasiperiodic Route to Chaos in the Kerr Lens Modelocked Ti:Sapphire Laser", S.R. Bolton, Mark R. Acton '00, *Physical Review A*, **62**, 063803, (2000).
- [4.2] J.Jasapara, W.Rudolph, V.Kalashnikov, D.Krimer, I.Poloyko y M.Lenzner; *J.Opt.Soc. Am.B* **17**, p.319 (2000).

Resumen y conclusiones.

El objetivo primario de esta Tesis es entender las propiedades generales y conocer cuáles son las bases mínimas para que el KLM se establezca. Para alcanzarlo, se eligió, en cada paso para elaborar la descripción del sistema, la alternativa más simple posible, de manera de ir aislando el núcleo del problema de sus complicaciones accesorias. Este fue, naturalmente, un proceso de prueba y error. De los resultados obtenidos es que se deduce que la aproximaciones realizadas no fueron exageradas. Conviene repetir aquí que el proceso de KLM es intrínsecamente complicado, ya que entrelaza de manera no lineal los parámetros geométricos del campo (que tienen su propia evolución por difracción) con los temporales, y también la energía del pulso y la acumulada en el medio activo. Un tema central a considerar fue la importancia de la existencia de aberturas espaciales dentro de la cavidad láser. Según una corriente de pensamiento, éstas funcionan como un absorbente saturable rápido y son esenciales para obtener KLM. Según otro criterio, éstas sirven para eliminar el modo de funcionamiento continuo (que se ve favorecido, comparado al modo de funcionamiento pulsado, por el ancho de banda finito del medio activo, es decir, por la presencia de "aberturas" en el dominio temporal), pero luego no tienen un papel importante ni en la conformación ni en la estabilidad del pulso. Las aberturas (tanto en el dominio espacial como en el temporal) son inevitables en la práctica, pero permanecía la pregunta conceptual de si sería posible, en principio, obtener KLM en ausencia de aberturas.

La primera decisión que se tomó al encarar el problema de obtener un modelo esencial del KLM fue elegir una descripción mediante mapas iterativos. Esta, por un lado, está limitada en el sentido de que no es posible obtener la forma del pulso ni considerar (al menos, en principio) situaciones con más de un pulso por tiempo de ida y vuelta dentro de la cavidad. Por otro lado, permite estudiar soluciones en las que es grande la variación pulso a pulso, o de un mismo pulso al atravesar un determinado elemento dentro de la cavidad (lo que es inaccesible con el tratamiento alternativo que emplea ecuaciones diferenciales). Además, la condición de estabilidad de las soluciones se obtiene muy fácilmente. La segunda decisión que se tomó fue describir el pulso de KLM, tanto en su parte espacial como temporal, mediante parámetros gaussianos (y, en consecuencia, los elementos de la cavidad mediante matrices gaussianas). Esta

aproximación es válida hasta segundo orden en el tiempo y en la distancia transversal al eje, y en la práctica no representa ninguna limitación para pulsos mayores que, típicamente, 10 fs.

Una vez establecido este marco general, el primer problema a resolver fue encontrar una descripción simple y compacta de la evolución del campo dentro de una cavidad láser sin perturbación de Kerr. Así, se desarrolló un estudio preliminar o primer modelo, que describe al sistema mediante un mapa iterativo complejo (restringido, por razones físicas, a un semiplano) cuya variable es adimensional y que tiene un solo parámetro (llamado A , real), que es la semitraza de la matriz de propagación de ida y vuelta dentro de la cavidad. Esta descripción se aplica tanto a la parte espacial del pulso (tamaño y curvatura del frente de onda) como a su parte temporal (duración y chirp).

En la región $|A| < 1$ (que corresponde a la condición usual de estabilidad geométrica) se obtiene el resultado, conocido, de que el mapa tiene dos puntos fijos de estabilidad indiferente, sólo uno de ellos con sentido físico. Las herramientas matemáticas introducidas, como las fracciones continuas y la geometría hiperbólica, permitieron estudiar bajo un ángulo diferente al usual el comportamiento del sistema, y obtener fácilmente resultados tales como los valores de A para los que se tienen órbitas de período arbitrario. Estos surgen de una familia de polinomios similares a los de Legendre, cuya existencia y ley de formación se deduce de la teoría de fracciones continuas. Si el parámetro A del mapa es un cero de alguno de estos polinomios de grado $n-1$, llamado P_3^n , para algún n , la trayectoria es una órbita periódica de periodicidad n . De la geometría hiperbólica, si $|A| \leq 1$ puede inferirse que todas las trayectorias del mapa están contenidas sobre circunferencias, cuyos radio y centro dependen de A y de las condiciones iniciales. En $|A| = 1$ hay una bifurcación global, y aunque las trayectorias siguen perteneciendo a circunferencias, el sistema converge al único punto fijo estable con sentido físico, que es además un atractor para todo el semiplano complejo con sentido físico. El mapa que describe la evolución de las variables temporales cumple $|A| = 1$, y por lo tanto éstas convergen sin excepción a la solución que corresponde a emisión láser continua. Si $|A| > 1$ el sistema tiene dos puntos fijos reales, ambos con sentido físico, pero uno solo es dinámicamente estable y es, además, un atractor para todo el semiplano.

La evolución del campo cuando hay aberturas en la cavidad se describe mediante

un mapa de la misma forma, pero en el que el parámetro ahora es complejo: $A-ia$, donde a es inversamente proporcional al área de la abertura. El sistema es estructuralmente inestable a permitir a distinto de cero. Las aberturas, por muy débiles que sean, modifican radicalmente las trayectorias. En todos los casos hay un punto fijo estable, y es atractor para todo el semiplano. Para $|A| < 1$, la abertura estabiliza el punto fijo, que está ligeramente desplazado del punto fijo primario de estabilidad indiferente que se obtenía con $a=0$. A pesar de todo, las trayectorias mantienen algún "recuerdo" de la estructura primaria, ya que las órbitas de periodicidad n , saltan alternativamente entre n ramas distintas a medida que convergen al punto fijo. Para $|A| = 1$ aparecen dos puntos fijos, uno estable que es atractor del sistema, y otro inestable. Para $|A| > 1$ también hay dos puntos fijos, y la convergencia al dinámicamente estable es más rápida que cuando no hay aberturas.

Se realizó una primera aproximación a una descripción del KLM mediante el análisis numérico del acoplamiento de muchos mapas, sin aberturas, a través de la perturbación de Kerr. La idea es que cada distribución inicial de campo (representada por una condición inicial aleatoria y diferente para cada mapa) induce en el medio Kerr una muy débil lente. Las potencias de estas lentes se suman, y la lente total resultante afecta a todas las distribuciones de campo por igual. Así, el término de Kerr actúa como acoplamiento entre todas las distribuciones de campo iniciales, como si fuera un "campo medio" en común. Se obtuvo que cada mapa tiende a converger a un valor común, de manera que la dispersión entre los valores tomados por las variables de cada mapa disminuye significativamente. Este efecto aumenta con la magnitud del término de acople y también con el número de mapas. Se interpretó este resultado como un indicio de que el KLM puede aparecer espontáneamente como un comportamiento colectivo resultante del acoplamiento no lineal, *aún en ausencia de aberturas espaciales*.

La primera aproximación al KLM recién descrita suponía una distribución uniforme de la energía entre todas las configuraciones iniciales del campo. Un camino posible a seguir era eliminar esta condición artificial de ligadura, y permitir, a través del acoplamiento con el medio activo, un flujo de energía entre los mapas. Sin embargo, enseguida se encontraron evidencias de que esta complicación no era necesaria, y que era posible alcanzar una descripción mucho más sintética del KLM (y analíticamente accesible en gran medida) empleando un solo mapa, convenientemente modificado. El

modelo se obtiene incluyendo el medio Kerr (cuantificado por el parámetro K , que se supone una perturbación) en la cavidad sin aberturas, y permitiendo variaciones en la potencia del pulso. Esto lleva a una descripción mediante un nuevo mapa de cinco variables: las dos espaciales y las dos temporales ya mencionadas, más la intensidad del campo. Para valores convenientes (y usuales) de la ganancia, se encuentra numéricamente que la variable "intensidad" converge rápidamente a un valor constante, desacoplando las variables espaciales de las temporales. Así, después de transcurrido un transitorio, la descripción del sistema queda reducida a dos mapas complejos desacoplados que tienen, además, una forma muy similar.

Se encuentra numéricamente que cada uno de estos mapas converge a la solución de KLM para la mayoría de las condiciones iniciales si $Signo(A)=Signo(K)$. Este hallazgo por sí mismo determina que la inserción de aberturas espaciales no es indispensable para obtener KLM. El rol importante de las mismas queda reducido a que la solución continua pierda estabilidad. Lo sorprendente es que, para todas las condiciones iniciales para las que el mapa converge, se tiene un sistema no lineal conservativo que contrae su espacio de fases como consecuencia únicamente de la perturbación de Kerr, es decir, sin la presencia de ningún término disipativo. Un argumento intuitivo muestra la existencia de una región, a la que pertenecen todas las condiciones iniciales físicamente relevantes, donde es plausible que converja al KLM. También se encuentra una región del espacio de parámetros (cerca del borde de estabilidad) y un conjunto de condiciones iniciales (dado por la condición $2A-KS > 0$), llamada "región especial", para la cual es posible asegurar la convergencia al KLM. El hecho de que converja para $|A|$ próximo a 1 muestra, sobre bases muy generales, por qué son más eficientes para KLM las cavidades cerca del borde de estabilidad geométrica, lo que hasta ahora era un resultado empírico obtenido del diseño específico de cavidades.

Los resultados numéricos y analíticos muestran que:

- i) La convergencia es posible si $Signo(K)=Signo(A)$, donde el punto fijo con sentido físico es estable, y los exponentes de Lyapunov son ambos negativos salvo para algunos valores muy chicos de A (del orden de K).
- ii) No Hay convergencia a la solución de KLM si $Signo(K)= -Signo(A)$, ya que el punto fijo con sentido físico es inestable, y los exponentes de Lyapunov o bien

son ambos positivos o uno es positivo y otro negativo para la mayoría de los valores de A (esta última situación indica la posibilidad de que este mapa muestre una dinámica caótica).

El modelo también proporciona una razón al resultado experimental (observado en láseres de Ti:Zafiro) de que las variables temporales, en general, no se desestabilizan, aunque sí lo hagan las demás. La razón es que, como el mapa para la parte temporal tiene siempre $A=1$, estas variables tienden a converger rápidamente a sus puntos fijos, y son así "esclavas" de las variables espaciales y de la energía del pulso.

La presencia (inevitable en la práctica) de aberturas cambia ligeramente la posición de los puntos fijos, incrementa la estabilidad del que tiene sentido físico y es estable (cuando $\text{Signo}(K)=\text{Signo}(A)$) que sigue siendo atractor, y también acelera la convergencia a éste.

Recuérdese que, para algunas condiciones iniciales, el espacio ocupado por las iteraciones del mapa se expande indefinidamente en lugar de contraerse hacia el punto fijo. La frontera (obtenida numéricamente) entre las condiciones iniciales para las que el mapa converge y aquellas para las que diverge, dadas estas últimas por la condición de que al menos uno de los exponentes de Lyapunov es positivo, tiene características de auto-similaridad que sugieren una dimensión fractal. Si se agregan aberturas, y a iguales valores de los otros parámetros, la frontera "retrocede" alejándose del punto fijo pero manteniendo esencialmente la forma, con la diferencia de que en algunos puntos para los que el mapa divergía ahora pasa a converger, ampliando así la cuenca de atracción del punto fijo KLM.

El estudio detallado del caso en que el mapa (sin aberturas) es expansivo, y al que se le agregan aberturas, evidencia dinámicas muy interesantes debidas al juego entre las dos tendencias opuestas provistas por la contracción debida a la abertura y la expansión debida al efecto Kerr. Aparecen órbitas multiperiodicas, y algunas otras de características más complejas. Las soluciones multiperiodicas tienden a acumularse cerca de las zonas (en el espacio de los parámetros) que corresponden a órbitas de período bajo de la cavidad "vacía". Una vez más, a pesar de todas las perturbaciones existentes, la cavidad sigue teniendo un "recuerdo" de los modos de oscilación primarios, determinados solamente por la difracción. El estudio numérico muestra cómo

las soluciones bifurcan, duplicando su período, al variar los parámetros A y a . La variedad de soluciones es muy grande, y los comportamientos son muy dependientes de los parámetros elegidos. Según se los elija, los atractores presentan diferentes aspectos, correspondiendo a distintas combinaciones de signos y valores de los exponentes de Lyapunov.

El modelo desarrollado permite una nueva y sencilla interpretación de ciertos comportamientos pulsados (aparentemente caóticos) obtenidos experimentalmente. La comparación de los resultados de este modelo con series temporales observados por otros autores en láseres de Ti:Zafiro muestran una concordancia cualitativa en las formas, y cuantitativa en los valores de las frecuencias principales de oscilación. Estos resultados muestran que no es posible afirmar, sin un estudio más detallado, que ese tipo de oscilaciones se debe necesariamente a una dinámica de mayor dimensionalidad (como Q-switch o batido entre modos transversales de orden superior).

Este trabajo de Tesis da una visión sencilla y general de muchos aspectos del funcionamiento KLM. Desde el punto de vista práctico, se han alcanzado algunas conclusiones generales muy importantes. En particular, se logró establecer el rol de las aberturas espaciales en el KLM (= favorecen, pero no determinan), encontrar una causa al resultado experimental de que las variables espaciales (y la energía) del pulso pueden desestabilizarse sin afectar las variables temporales, y dar una explicación general al por qué las cavidades KLM funcionan mejor cerca del límite de estabilidad. Desde el punto de vista académico, se ha propuesto un nuevo objeto de estudio para la matemática no lineal: un mapa iterativo, de forma simple pero de comportamiento complicado (ya que su Jacobiano es función del punto), que tiene interés físico inmediato y que provee además un ejemplo de un sistema no lineal que contrae su espacio de fases a pesar de que su dinámica es conservativa.

Como continuación de la línea de investigación propuesta en esta Tesis, sería interesante encarar un estudio más profundo de las fronteras (aparentemente fractales) entre condiciones iniciales convergentes y divergentes, buscar su dimensionalidad, y ver cómo cambia para variaciones más amplias de los parámetros A y K . Por otra parte, si bien hay evidencia experimental de que los resultados obtenidos son generales, y válidos también para cavidades más complicadas que las consideradas aquí (como las cavidades

en Z típicas para los láseres de Titanio-Zafiro) sería interesante completar la descripción eliminando la restricción de que el medio de Kerr esté en un extremo de la cavidad. Otra cuenta pendiente es cambiar la ecuación de saturación de la ganancia y permitir que la inversión de población no esté en equilibrio con el campo, para que el modelo incluya la posibilidad de tener Q-switching. De comparar los resultados de este nuevo modelo con los del caso presentado en esta Tesis (de competencia expansión de Kerr vs. aberturas) y los experimentales, es plausible que pueda determinarse si esos complejos comportamientos pulsados observados se deben realmente a Q-switch o no. También hay que tener en cuenta que solamente se ha tenido en cuenta el caso más común en la práctica que corresponde a que la longitud de Rayleigh es mayor que la del medio activo, y queda por desarrollar el caso contrario. Para definir otra posible línea a seguir, recuerdo que las trayectorias del mapa perturbado tanto por las aberturas espaciales como por el efecto Kerr, parecieran estar sobre espirales, y guardan cierto recuerdo de las trayectorias sin perturbar. Por ejemplo si el mapa sin perturbar corresponde a una cierta órbita de periodicidad N , la trayectoria perturbada aparece dividida en N ramas. Por lo tanto, otro objetivo sería encontrar una adecuada descripción matemática dentro del plano hiperbólico de dichas espirales para cada perturbación, buscando las funciones que describan la variación de la distancia a su centro (punto fijo) y variaciones en los ángulos de giro. Esto podría llegar a servir para predecir zonas con distintos comportamientos al combinar ambos efectos, y se podrían hallar mapas tal vez sencillos para las distancias y ángulos. También sería hacer una búsqueda sistemática de los trabajos que los matemáticos hallan hecho sobre ruptura de simetrías en el plano hiperbólico, y tratar de relacionar esos “recuerdos” en las trayectorias y formas de las espirales con alguna simetría conservada. Creo que es fundamental para llegar a la esencia de todos los comportamientos un conocimiento hondo de “teoría de grupos en el plano hiperbólico”.

Apéndice 1.

Agrego a continuación una lista de las expresiones de los elementos ópticos más comunes con su matriz correspondiente.

Los elementos más comunes para el dominio espacial son los siguientes:

La matriz de propagación en el espacio libre de longitud L con índice de refracción n_0 es:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{n_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A1.1})$$

La matriz para una lente delgada de distancia focal f es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A1.2})$$

La matriz para un espejo curvo, de radio R es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A1.3})$$

La matriz para una abertura espacial gaussiana débil, es decir una abertura cuya área= $Area$ es muy grande es:

$$M_{abe} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -i \frac{\lambda}{Area \pi} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -i \frac{1}{a_1} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A1.4})$$

La matriz para un ducto gaussiano, cuyo índice de refracción es $n(x) = n_0 - \frac{1}{2} n_2 x^2$ y

$\gamma^2 = \frac{n_2}{n_0}$ es:

$$\begin{pmatrix} \cos(\gamma z) & \frac{\sin(\gamma z)}{n_0 \gamma} \\ -n_0 \gamma \sin(\gamma z) & \cos(\gamma z) \end{pmatrix} \quad (\text{A1.5})$$

Los elementos más comunes para el dominio temporal son los siguientes:

Una abertura temporal, con transmisión es $T(\omega) = e^{-\frac{\alpha \omega^2}{2}}$ cuya matriz es:

$$M_{abt} = \begin{bmatrix} 1 & i 2\pi \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A1.6})$$

La dispersión de la velocidad de grupo cuya matriz es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{dV_G}{df} \frac{1}{V_G^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A1.7})$$

donde V_G es la velocidad de grupo y f es la frecuencia.

Nótese que en ambos casos los elementos de la diagonal son 1.

Apéndice 2

Apéndice2. 1 Mapa para una sola variable si $|A| < 1$.

Como la trayectoria está sobre una circunferencia, es evidente que el sistema puede ser descrito mediante una sola variable.

Con un cambio de variables y algunas consideraciones geométricas llego fácilmente a que siempre que no haya aberturas ni medios no lineales y $|A| < 1$, es posible describir la propagación de un haz gaussiano con una sola variable real. Considero el dibujo de la trayectoria que muestro en la figura A1:

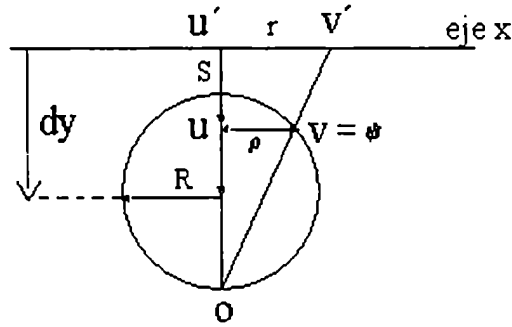


Figura A1

La distancia uv es igual a ρ que es la componente real de la variable ψ , y la distancia $u'u$ es igual a la componente imaginaria de ψ , o sea que es igual a S . Supongo que mi variable real es r , y es la distancia $u'v'$. R es el radio de la circunferencia asociada a la trayectoria. Llamo:

$$\alpha = dy + R \quad (A2.1)$$

Por semejanza de los triángulos ouv y $ou'v'$ se cumple que:

$$\frac{r}{dy + R} = \frac{\rho}{dy + R - S} \quad (A2.2)$$

Por lo tanto:

$$r = \frac{\alpha \rho}{\alpha - S} \quad (\text{A2.3})$$

Falta verificar que se puede reconstruir la trayectoria de la variable compleja original a partir de la trayectoria de r obtenida iterando el mapa. Para esto verifico si el r_{n+1} obtenido al reemplazar en (A2.3) las variables ρ_{n+1} y S_{n+1} (obtenidas al aplicar el mapa (2.6) a ψ) coincide con la expresión que obtengo al aplicar el mapa (2.6) directamente al valor de r dado por (A2.3), es decir veo si las expresiones:

$$r_{n+1} = \alpha \frac{-A + A((A + \rho)^2 + S^2) - \rho}{\alpha((A + \rho)^2 + S^2) - S} \quad (\text{A2.4})$$

$$\tilde{r}_{n+1} = \frac{(A^2 - 1)(\alpha - S) + A \alpha \rho}{A(\alpha - S) + \alpha \rho} \quad (\text{A2.5})$$

son iguales. Lo son si $\alpha = dy \pm R$ que incluye el valor de α que propuse inicialmente. El punto \mathbf{o} coincide con $\alpha = dy + R$ y el punto \mathbf{u}' coincide con $\alpha = dy - R$. Por lo tanto hay dos variables reales posibles para describir al sistema. Una se obtiene hallando r_0 como la intersección entre la recta que une la condición inicial ψ_0 con el punto \mathbf{o} y el eje real. Una vez hecha la transformación se aplica el (2.6) a r_0 . Para hallar la otra forma posible, hay que hallar la intersección entre la recta que une el punto ψ_0 con el punto \mathbf{u}' y el eje real. Y proceder de la misma manera.

Puedo volver a la variable compleja a partir de la variable real r , buscando la intersección de la recta que pasa por \mathbf{o} y \mathbf{v}' con la circunferencia ya mencionada. Las expresiones obtenidas verifican la transformación (A2.3).

$$\rho = \frac{\alpha^2 r}{r^2 + \alpha^2} \quad (\text{A2.6})$$

$$S = \frac{\alpha r^2}{r^2 + \alpha^2} \quad (\text{A2.7})$$

Para esta Tesis, voy a usar el mapa complejo.

Apéndice 2.2 Propiedades de los valores medios de los polinomios:

Aunque sea tedioso de escribir y leer, incluyo una serie de propiedades de los polinomios que se desprenden de estas periodicidades. Analizo valores medios de ciertas funciones de los polinomios. Si el valor medio lo tomo sobre una órbita periódica de periodicidad M , calcularlo equivale a sumar todos los valores que adoptan en las sucesivas iteraciones hasta completar la órbita y dividir por M . Una propiedad interesante de los polinomios P_2 es

$$P_2(\overline{x_{max}})^2 = \frac{1}{2}. \quad (A2.8)$$

donde x_{max} es el máximo de todos los ceros de P_3^{N+1} , y el valor medio está tomado sobre un período. Como paso previo para demostrarla, busco cuanto vale la suma de los cuadrados de los ceros. Factorizo al polinomio P_3^{N+1} y queda

$$P_3^{N+1} = \prod_{i=1}^N (A - x_i). \quad (A2.9)$$

Recuerdo para evitar confusiones que N es el grado del polinomio, y $N+1$ la periodicidad. Si lo expando en potencias de A , los coeficientes quedan escritos en función de los ceros x_i de P_3^{N+1} . De este modo el coeficiente correspondiente a A^{N-1} del polinomio P_3^{N+1} también puede escribirse como

$$a_{N-2} = - \sum_{i \neq j, 1}^N x_i x_j \quad (A2.10)$$

donde x_i y x_j son los ceros del polinomio P_3^{N+1} . Es de gran utilidad la paridad definida de los polinomios. $P_3^{N+1}(A) = P_3^{N+1}(-A)$ si N es un número impar, y $P_3^{N+1}(A) = -P_3^{N+1}(-A)$ si N es un número par. Los ceros entonces serán $x_1, x_2, \dots, x_{[N/2]}, (0), -x_{[N/2]}, \dots, -x_2, -x_1$. Según la paridad aparecerá o no el número 0 entre ellos. Si en (A2.10) aparece el término $x_i x_j$, también va a aparecer $-x_i x_j$ y van a sobrevivir después de hacer la sumatoria solamente los términos de la forma $-x_i^2$. Por otra parte si normalizo al polinomio, de modo que $a_N = 1$, y uso la expresión (2.24) para los coeficientes, el coeficiente a_{N-2} del polinomio se puede escribir

$$a_{N-2} = - \sum_{j=1}^{[N/2]} x_j^2 = - \frac{N-1}{4} \quad (\text{A2.11})$$

donde x_j con j entre 1 y $[N/2]$ son todos los ceros positivos de P_3^{N+1} . Observando la forma de P_3^{N+1} , puedo decir que 0 es raíz para N impar y no lo es para N par, o sea que para cualquier N hay un número par de ceros positivos. Por eso ponemos $[N/2]$ en el límite superior de la sumatoria.

Se verifica numéricamente que $P_2^j(x_{\max})$, al ir variando j va generando a menos de un signo, todos los valores de los ceros de P_3^{N+1} , además del número 1. Como ejemplo veo que pasa para $N=6$. Los ceros de P_3^7 son $\{-0.900969, -0.62349, -0.222521, 0.222521, 0.62349, 0.900969\}$, mientras que los valores que toma $P_2^j(0.900969)$ al ir variando j son $\{1, 0.900969, 0.62349, 0.222521, -0.222521, -0.62349, -0.900969, -1, -0.900969, \dots\}$. Esto quiere decir que el promedio de $(P_2)^2$, no es más que dos veces el promedio de los ceros positivos elevados al cuadrado más uno, y llego a lo que quería demostrar

$$\overline{P_2(x_{\max})^2} = \frac{1}{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} x_j^2 = \frac{1}{N+1} \left(\frac{N-1}{2} + 1 \right) = \frac{1}{2} \quad (\text{A2.12})$$

También se verifica numéricamente que $P_{2,3}^j(x_{\max})$ al variar j toma ciertos valores durante el primer período y los mismos valores pero cambiados de signo durante el segundo. Volviendo a mi ejemplo con $N=7$. El máximo cero de P_3^7 es 0.900969, y $P_3^j(0.900969) = \{1, 1.80194, 2.24698, 2.24698, 1.80194, 1, 0, -1, -1.80194, -2.244698, -2.24698, -1.80194, 0, \dots\}$. Con P_2 sucede lo mismo. Es decir que $P_{2,3}$ tienen periodicidad 2 $(N+1)$. Por esto, en lugar de promediar sobre un período lo hago sobre dos.

El promedio de $(P_2)^2$ sobre un período coincide con el promedio en dos períodos, y a partir de este valor se puede evaluar calcular el promedio de P_3^2 . Recordando (2.17) y (2.22) puedo escribir

$$(P_2^n)^2 = (AP_3^n - P_3^{n-1})^2 = (A^2 - 1)(P_3^n)^2 - 2AP_3^n P_3^{n-1} \quad (\text{A2.13})$$

$$(P_3^{n+1})^2 = (2AP_3^n - P_3^{n-1})^2 = 4A^2(P_3^n)^2 + (P_3^{n-1})^2 - 4AP_3^n P_3^{n-1} \quad (\text{A2.14})$$

Si sumo cada una de estas expresiones para todos los valores de n entre 0 y 2 (N+1), y divido lo obtenido por 2 (N+1), tengo sus promedios sobre dos períodos completos. Es decir que

$$\frac{1}{2} = (A^2 - 1) \overline{(P_3^n)^2} - 2A \overline{P_3^n P_3^{n-1}} \quad (\text{A2.15})$$

$$\overline{(P_3^n)^2} = (4A^2 + 1) \overline{(P_3^n)^2} - 4A \overline{P_3^n P_3^{n-1}} \quad (\text{A2.16})$$

De estas expresiones obtengo entonces

$$\overline{(P_3^n)^2} = \frac{1}{2(1 - A^2)} \quad (\text{A2.17})$$

$$\overline{P_3^{n+1} P_3^n} = \frac{A}{2(1 - A^2)}. \quad (\text{A2.18})$$

Usando (2.17) y (2.22) puedo escribir que

$$P_2^n P_3^n = A (P_3^n)^2 - P_3^{n-1} P_3^n \quad (\text{A2.19})$$

$$P_2^{n+1} P_3^n = A P_3^{n+1} P_3^n - (P_3^{n-1})^2 \quad (\text{A2.20})$$

$$P_2^{n+1} P_3^n = 2A P_2^n P_3^n - P_2^{n-1} P_3^n \quad (\text{A2.21})$$

$$P_{2,3}^{n+1} P_{2,3}^n = 2A (P_{2,3}^n)^2 - P_{2,3}^{n-1} P_{2,3}^n \quad (\text{A2.22})$$

de donde

$$\overline{P_2^n P_3^n} = 0 \quad (\text{A2.23})$$

$$\overline{P_2^{n+1} P_3^n} = -\frac{1}{2} \quad (\text{A2.24})$$

$$\overline{P_2^n P_3^{n+1}} = -\frac{1}{2} \quad (\text{A2.25})$$

$$\overline{P_{2,3}^n P_{2,3}^{n+1}} = A \overline{(P_{2,3}^n)^2} \quad (\text{A2.26})$$

Aquí termino con las propiedades de los polinomios, y doy por terminado el análisis para esta región del parámetro A

Apéndice 2.3 Ejemplo de cálculo del valor medio de una función de las variables:

Calculo el valor medio de $(A+\rho)/S$ para una órbita multiperódica. Por (2.13) y (2.20) puedo decir que

$$\frac{A + \psi^n}{S^n} = \frac{P_2^{n+1} + P_3^{n+1} \psi_0}{P_2^n + P_3^n \psi_0} \frac{1}{S^n}. \quad (\text{A2.27})$$

Haciendo un poco de álgebra se obtiene

$$\frac{A + \psi^n}{S^n} = \frac{P_2^{n+1} P_2^n + P_3^{n+1} P_3^n |\psi_0|^2 + (P_2^{n+1} P_3^n + P_2^n P_3^{n+1}) \rho_0}{S_0} + i (P_2^{n+1} P_3^n - P_2^n P_3^{n+1}) \quad (\text{A2.28})$$

y solo me interesa el valor medio de la parte real

$$\frac{A + \rho^n}{S^n} = \frac{P_2^{n+1} P_2^n + P_3^{n+1} P_3^n |\psi_0|^2 + (P_2^{n+1} P_3^n + P_2^n P_3^{n+1}) \rho_0}{S_0}. \quad (\text{A2.29})$$

Por las propiedades (A2.23) a (A2.26) ese valor medio es

$$\overline{\frac{A + \rho^n}{S^n}} = \frac{A}{2 S_0} + \frac{A |\psi_0|^2}{2 (1 - A^2) S_0} \quad (\text{A2.30})$$

Apéndice 2.4 Generalización de la demostración de convergencia de una fracción continua presentada en la referencia [Katok] para $|a_i| > 2$, $b_i = -1$

Dada una fracción continua defino

$$z_n = a_0 - \frac{1}{a_1 - \frac{1}{a_2 - \dots \frac{1}{a_n}}} \quad (\text{A2.31})$$

defino dos secuencias $\{p_n\}$ y $\{q_n\}$, con $n \geq -2$ inductivamente

$$p_{-2}=0, p_{-1}=1; \quad p_i = a_i p_{i-1} - p_{i-2}, \quad i \geq 2 \quad (\text{A2.32})$$

$$q_{-2}=-1, q_{-1}=0; \quad q_i = a_i q_{i-1} - q_{i-2}, \quad i \geq 2 \quad (\text{A2.33})$$

Voy a probar que $z_n = p_n/q_n$. También voy a demostrar una serie de 3 propiedades para el caso en que $|a_i| > 2 \forall i$ por inducción.

i) En primer lugar hay que demostrar que

$$1 = |q_0| < |q_1| < |q_2| < \dots < |q_n| \dots$$

Para $n=1$, $q_1 = a_1 q_0 - q_{-1} = a_1$ y $|a_i| > 2 \forall i$, entonces se cumple la base de la inducción $1 = |q_0| < |q_1|$.

Si se cumple para $n-1$, $1 = |q_0| < |q_1| < |q_2| < \dots < |q_{n-1}|$, entonces debe cumplirse para n .

$$|q_n| = |a_n q_{n-1} - q_{n-2}| \geq |a_n q_{n-1}| - |q_{n-2}| > 2|q_{n-1}| - |q_{n-2}| > 2|q_{n-1}| - |q_{n-1}| = |q_{n-1}| \text{ qqd.}$$

Como $|q_n| - |q_{n-1}| > |q_{n-1}| - |q_{n-2}|$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \infty$

ii) Partiendo de las definiciones de p_n y q_n se comprueba fácilmente que

$$a_0 - \frac{1}{a_1 - \frac{1}{a_2 - \dots \frac{1}{x}}} = \frac{x p_{n-1} - p_{n-2}}{x q_{n-1} - q_{n-2}} = Z_{n-1} \quad (\text{A2.34})$$

como $p_0 = a_0$, $p_{-1} = 1$, $q_0 = 1$ y $q_{-1} = 0$ entonces

$$Z_1 = \frac{x a_0 - 1}{x} = \frac{x p_0 - p_{-1}}{x q_0 - q_{-1}} \quad (\text{A2.35})$$

y se cumple la base de la inducción. Ahora verifico que si se cumple para Z_{n-1} también se cumple para Z_n . Basta con reemplazar x por $a_n - 1/x$ en (A2.34)

$$\frac{(x a_{n-1} - 1) p_{n-1} - x p_{n-2}}{(x a_{n-1} - 1) q_{n-1} - x q_{n-2}} = \frac{x p_n - p_{n-1}}{x q_n - q_{n-1}} = Z_n \quad (\text{A2.36})$$

iii) Se puede verificar que vale $p_{i-1} q_i - p_i q_{i-1} = 1$ aplicando repetidas veces (A2.32) y (A2.33)

$p_{i-1} q_i - p_i q_{i-1} = p_{i-2} q_{i-1} - p_{i-1} q_{i-2} = \dots = p_{-2} q_{-1} - p_{-1} q_{-2} = 1$ entonces

$$p_{i-1} q_i - p_i q_{i-1} = 1 \quad \forall i. \quad (\text{A2.37})$$

Por lo tanto

$$\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} - \frac{p_i}{q_i} = \frac{-1}{q_i q_{i+1}} \quad (\text{A2.38})$$

y si supongo que $x = a_n$, entonces

$$z_n = p_n / q_n. \quad (\text{A2.39})$$

Usando (A2.38) podemos decir que z_n , que no es mas que nuestra fracción continua (A2.31) tiene límite, pues

$$z_{n+1} - z_n = \frac{1}{q_n q_{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{A2.40})$$

que es lo que quería demostrar.

Apéndice 2.5 Cómo establecer el signo del atractor del mapa a n vueltas.

El límite del mapa a n vueltas es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{p_1^n}{p_3^n} + \frac{p_2^n}{p_3^n} \psi_0}{\frac{p_2^n}{p_3^n} + \psi_0} = \frac{(A^2 - 1) \pm \sqrt{A^2 - 1} \psi_0}{\pm \sqrt{A^2 - 1} + \psi_0} = \alpha \quad (\text{A2.41})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi^n = \alpha = \pm \sqrt{A^2 - 1} \quad (\text{A2.42})$$

Quiero demostrar que el signo $+$ corresponde a valores de A positivos, y el $-$ a los negativos, ya que el signo de p_2^n / p_3^n es el signo de A . Esto último se demuestra

fácilmente por inducción

Para $n=1$, $P_2^1 / P_3^1 = A$ y se verifica. Falta ver que si se cumple para n , también se cumple para $n+1$. Una simple inspección de los polinomios permite ver que se cumple que si $P_{2,3}^n(A) = \pm P_{2,3}^n(-A)$ entonces $P_{2,3}^{n+1}(A) = -[\pm P_{2,3}^{n+1}(-A)]$. Por lo tanto el $Sg[P_2^n(A) P_3^n(A)] (= Sg[A])$ es el mismo que $Sg[P_2^{n+1}(A) P_3^{n+1}(A)]$, y se cumple entonces que $Sg[P_2^n / P_3^n] = Sg[A]$

Apéndice2. 6 La matriz espacial de propagación de ida y vuelta dentro de una cavidad desde un punto cualquiera P (M_{PP}) dentro de la cavidad hasta volver al mismo punto P, tiene la propiedad de tener $A=D$.

Lo haré con el método de inducción completa de inducción completa.

En el dominio espacial, las matrices de propagación a través de lentes, distancias, espejos, aberturas, y todos los elementos que se puedan incluir dentro de una cavidad sin astigmatismo son de esta forma, pues $A=D=1$. También son de esta forma las matrices temporales. Para el caso más sencillo, o sea $N=2$ tengo solamente dos matrices cuyos elementos de matriz x_{ij} cumplen $x_{11} = x_{22}$. Por ejemplo puede ser un espejo y una distancia.

$$M1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \frac{a_{11}^2 - 1}{a_{12}} & a_{11} \end{pmatrix} \quad y \quad M2 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ \frac{b_{11}^2 - 1}{b_{12}} & b_{11} \end{pmatrix} \quad (A2.1)$$

La matriz de propagación desde P a P será el producto $M1.M2.M1$ satisface también que sus elementos diagonales son iguales

$$M1.M2.M1 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & A \end{pmatrix} \quad (A2.2)$$

Supongo que vale para el caso de tener N elementos incluyendo al espejo que cierra la cavidad, es decir que

$$(M_N M_{N-1} \dots M_1 M_0 M_1 \dots M_{N-1} M_N)_{11} = (M_N M_{N-1} \dots M_1 M_0 M_1 \dots M_{N-1} M_N)_{22} \quad (A2.3)$$

entonces por (A2.2) se verifica que al agregar un elemento más (el N+1) a la cavidad,

$$(M_{N+1} M_N M_{N+1})_{11} = (M_{N+1} M_N M_{N+1})_{22} \quad (\text{A2.4})$$

por (A2.2) y queda completa la demostración.

Apéndice 2.7 Como escribir P_2 y P_3 en función de senos y cosenos y como encontrar la equivalencia entre una cavidad óptica con un ducto gaussiano (dominio espacial)

Recordando que $\psi_f^2 = A^2 - 1$ defino x_n y_n de la siguiente manera

$$x_n = P_2^n + P_3^n \psi_f \quad (\text{A2.5})$$

$$y_n = P_1^n + P_2^n \psi_f \quad (\text{A2.6})$$

A partir de (2.20) que puedo escribir

$$x_{n+1} = A (P_2^n + P_3^n \psi_f) + (P_1^n + P_2^n \psi_f) = (P_2^{n+1} + P_3^{n+1} \psi_f) \quad (\text{A2.7})$$

$$y_{n+1} = (A^2 - 1) (P_2^n + P_3^n \psi_f) + A (P_1^n + P_2^n \psi_f) = (P_1^{n+1} + P_2^{n+1} \psi_f) \quad (\text{A2.8})$$

pues

$$(A^2 - 1) P_2^n + A P_1^n = (A^2 - 1) (P_2^n + A P_3^n) = P_1^{n+1} \quad (\text{A2.9})$$

$$(A^2 - 1) P_3^n \psi_f + A P_2^n \psi_f = (P_1^n + A P_2^n) \psi_f = P_2^{n+1} \psi_f \quad (\text{A2.10})$$

Esto quiere decir que si defino $AA = A$, $BB = 1$, $CC = A^2 - 1$, $DD = A$, donde $AA DD - BB CC = 1$, puedo escribir

$$x_{n+1} = AA x_n + BB y_n \quad (\text{A2.11})$$

$$y_{n+1} = CC x_n + DD y_n \quad (\text{A2.12})$$

O sea

$$y_n = (x_{n+1} - AA x_n)/BB \quad (A2.13)$$

$$y_{n+1} = (x_{n+2} - AA x_{n+1})/BB \quad (A2.14)$$

Restando (A2.12) a (A2.14) tengo

$$y_{n+1} - y_n = 0 = x_{n+2} - (AA+DD) x_{n+1} + (AA DD - BB CC) x_n \quad (A2.15)$$

$$x_{n+2} - (AA+DD) x_{n+1} + x_n = 0 \quad (A2.16)$$

Propongo

$$y_n = \xi e^{i n \theta} \quad (A2.17)$$

$$\xi e^{i (n+2) \theta} - (AA+DD) \xi e^{i (n+1) \theta} e^{i \theta} + \xi e^{i n \theta} = 0 \quad (A2.18)$$

$$(e^{i \theta})^2 - (AA+DD) e^{i \theta} + 1 = 0 \quad (A2.19)$$

$$e^{i \theta} = \frac{AA + DD}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{AA + DD}{2}\right)^2 - 1} = A \pm \sqrt{A^2 - 1} \quad (A2.20)$$

$$P_2^n + P_3^n \psi_f = e^{i n \theta} \quad (A2.21)$$

$$P_1^n + P_2^n \psi_f = \psi_f (P_2^n + P_3^n \psi_f) = \psi_f e^{i n \theta} \quad (A2.22)$$

Por lo que

$$P_2^n = \cos(n \theta) \quad (A2.23)$$

$$P_3^n = \sin(n \theta) / \sqrt{1 - A^2} \quad (A2.24)$$

La matriz de un ducto gaussiano (apéndice 1) de longitud z , donde el índice de refracción es

$$n(x) = n_0 - 1/2 n_2 x^2 \quad (A2.25)$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{n_2}{n_0}} \quad (A2.26)$$

tiene la forma

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\gamma z) & \frac{\sin(\gamma z)}{n_0 \gamma} \\ -n_0 \gamma \sin(\gamma z) & \cos(\gamma z) \end{pmatrix} \quad (\text{A2.27})$$

Y de acuerdo a lo que visto en este capítulo (2.13)

$$\psi^n = \frac{P_1^n(A) + P_2^n(A) \psi_0}{P_2^n(A) + P_3^n(A) \psi_0} = \frac{-\sqrt{1-A^2} \sin(n\theta) + \cos(n\theta) \psi_0}{\cos(n\theta) + \frac{\sin(n\theta)}{\sqrt{1-A^2}} \psi_0} \quad (\text{A2.28})$$

y por consiguiente la matriz para n idas y vueltas dentro de la cavidad del laser es

$$M = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & \frac{\sin(n\theta)}{\sqrt{1-A^2}} \\ -\sqrt{1-A^2} \gamma \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix} \quad (\text{A2.29})$$

Por lo tanto una cavidad óptica, cuyo parámetro de estabilidad geométrica es A, es equivalente a un ducto gaussiano cuyo parámetro es $\gamma = \sqrt{1-A^2}/n_0$

Apéndice 3

Apéndice 3.1 Saturación de la ganancia

La aproximación que voy a usar es que el perfil de intensidad del pulso es cuadrado en lugar de gaussiano Figura 1. El ancho está dado por la duración del pulso, y su altura la tomo como el promedio temporal de la intensidad real que es gaussiana. La figura [5] de la introducción, que explica la automodulación de fase cambia. La curva de la automodulación de fase se convierte en dos picos abruptos, uno hacia arriba en $-\tau_p$ y otro hacia abajo en $+\tau_p$. En el medio vale cero. Si bien es una aproximación, no es tan burda como suponer la inversión de población en equilibrio con el campo.

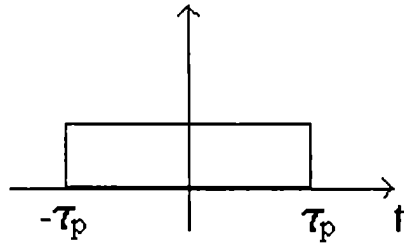


Figura 1 automodulación de fase para un perfil de intensidad del pulso es cuadrado

Busco encontrar una expresión del tipo de la expresión (1.5) de la introducción. Para esto hay que partir de las ecuaciones de balance del laser. Una vez hecha la eliminación adiabática de la polarización, es decir quedan reducidas a dos ecuaciones, una para la inversión de población Δ , y otra para la intensidad del campo I .

$$\Delta = W - g I \Delta - \Delta \gamma_{//} \quad (\text{A3.1})$$

$$\dot{I} = g I \Delta - K I \quad (\text{A3.2})$$

El término $g I \Delta$ representa la emisión estimulada, $\Delta \gamma_{//}$ es el decaimiento espontáneo y $K I$ son las pérdidas y W es el bombeo y es constante, g está relacionado con el momento dipolar atómico, y $\gamma_{//} = 1/T_{//}$ donde $T_{//}$ es el tiempo de relajación del sistema. De (A3.2) se deduce que

$$\ln(I) = g \Delta - K \quad (\text{A3.3})$$

por lo que se cumplirán

$$\Delta = \frac{\ln(I) + K}{g} \quad (\text{A3.4})$$

$$\dot{\Delta} = W - \frac{\gamma_{\parallel}}{g} \ln(I) - \frac{\gamma_{\parallel} K}{g} - \dot{I} - K I \quad (\text{A3.5})$$

Ahora tomo el valor medio temporal de esta última expresión y obtengo

$$\frac{\int_{-\tau_p}^{\tau_p} \dot{\Delta} dt}{2 \tau_p} = W - \frac{\gamma_{\parallel} K}{g} - \frac{\int_{-\tau_p}^{\tau_p} K I dt}{2 \tau_p} \quad (\text{A3.6})$$

ya que para un pulso simétrico que empieza en $-\tau_p$ y termina en τ_p se cumple que el valor medio temporal de la derivada de la intensidad, como también el valor medio temporal de la derivada del logaritmo de la intensidad son nulos, pues

$$\frac{\int_{-\tau_p}^{\tau_p} \dot{F} dt}{2 \tau_p} = \frac{\int_{-\tau_p}^{\tau_p} \frac{dF}{dt} dt}{2 \tau_p} = \frac{F(\tau_p) - F(-\tau_p)}{2 \tau_p} \quad (\text{A3.7})$$

y si $F(\tau_p) = F(-\tau_p)$, como sucede en particular con la intensidad y su logaritmo, el valor medio temporal es nulo. Supongo una forma gaussiana para el pulso

$$I(t) = I_0 e^{-\left(\frac{t}{\tau_p}\right)^2} \quad (\text{A3.8})$$

$$\frac{\int_{-\tau_p}^{\tau_p} \dot{\Delta} dt}{2 \tau_p} = W - \frac{\gamma_{\parallel} K}{g} - \frac{I_0 \sqrt{\pi} \operatorname{Erf}(1) K}{2} \quad (\text{A3.9})$$

donde $Erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$ y $Erf(1) \cong 0.842701$. Defino

$$\dot{\gamma}_{//} = \gamma_{//} + \frac{I_0 \sqrt{\pi} Erf(1) g}{2} \quad (A3.10)$$

$$\langle \dot{\Delta} \rangle = \frac{\int_{-\tau_p}^{\tau_p} \dot{\Delta} dt}{2 \tau_p} = W - \frac{\dot{\gamma}_{//} K}{g} = Kte \quad (A3.11)$$

El valor medio temporal de $\langle \dot{\Delta} \rangle = Kte$. Ahora quiero saber cuanto vale el $\langle \Delta \rangle$. Como el pulso es simétrico, tomando el valor medio temporal de (A3.2) obtengo

$$0 = g \langle I \Delta \rangle - K \langle I \rangle \Rightarrow \langle I \Delta \rangle = \langle I \rangle K/g. \quad (A3.12)$$

Reemplazando en (A3.1)

$$\langle \dot{\Delta} \rangle = W - g \langle I \Delta \rangle - \Delta \dot{\gamma}_{//} = W - K \langle I \rangle - \Delta \dot{\gamma}_{//} \quad (A3.13)$$

a su vez por (A3.5)

$$\langle \dot{\Delta} \rangle = W - \dot{\gamma}_{//} K/g - K \langle I \rangle \quad (A3.14)$$

La única manera de que esto se cumpla es que

$$\langle \Delta \rangle = K/g \quad (A3.15)$$

y por (A3.12)

$$\langle \Delta I \rangle = \langle \Delta \rangle \langle I \rangle \quad (A3.16)$$

Para obtener (1.5) de la introducción, busco la solución estacionaria de el sistema de ecuaciones formado por (A3.1) y (A3.2). Ahora trabajo con los valores medios. Por (A3.1), (A3.11) y (A3.16)

$$\langle \Delta \rangle - Kte = W^* - g \langle I \Delta \rangle - \langle \Delta \rangle \gamma_{//} \quad (A3.17)$$

$$W^* - g \langle I \rangle \langle \Delta \rangle - \langle \Delta \rangle \gamma_{//} = 0 \quad (A3.18)$$

donde

$$W^* = W - Kte \quad (A3.19)$$

Por (A3.15) llego a

$$\langle \Delta \rangle = \frac{K}{g} = \frac{\frac{W^*}{\gamma_{//}}}{1 + \frac{2g\langle I \rangle}{\gamma_{//}}} = \frac{\frac{W^*}{\gamma_{//}}}{1 + \frac{\langle I \rangle}{I_{SAT}}} \quad (A3.20)$$

A partir de aquí, estoy en la misma situación que para la deducción (1.5) de la introducción, donde se toman los valores de I y de Δ estacionarios. Todo se resume en tener en cuenta un bombeo corregido, W^* . Los coeficientes de ganancia en los materiales de los lasers son directamente proporcionales a la inversión de población de la transición laser [3.12]. En mi aproximación, uso el $\langle \Delta \rangle$. Como resultado entonces, para medios con transiciones homogéneamente ensanchadas el coeficiente de ganancia va a saturar al aumentar la intensidad ($\langle I \rangle$), aún cuando la inversión de población no esté en equilibrio con el campo.

En (3.4) y (3.6) usaré entonces $\langle I \rangle$ en lugar de la intensidad I .

Apéndice 3.2 Si $(A+\rho^m) < 0$ da al iterar $(A+\rho^{m+1}) > 0$ y $(A+\rho^{m-1}) > 0$

En principio, siempre que $2A - KS$ sea positivo, debido a (3.22)

$$A + \rho_{m+1} = 2A - KS_m - \frac{A + \rho_m}{\left((A + \rho_m)^2 + S_m^2\right)} \quad (A3.21)$$

es evidente que si $(A+\rho^m)$ es negativo, $(A+\rho^{m+1})$ es positivo. Por lo tanto, se que si $2A - KS$ es positivo, y si $(A+\rho_m)$ es negativo, $(A+\rho_{m+1})$ es positivo seguro, y además $(A+\rho_{m+1}) > 2A - KS$.

Además se cumple que

$$A + \rho_m = 2A - KS_{m-1} - \frac{A + \rho_{m-1}}{\left((A + \rho_{m-1})^2 + S_{m-1}^2\right)} < 0 \quad (A3.22)$$

es decir

$$A + \rho_{m-1} > (2A - KS_{m-1})((A + \rho_{m-1})^2 + S_{m-1}^2) \quad (A3.23)$$

O sea que si $(A + \rho^m)$ es negativo, $(A + \rho^{m+1})$ es también es positivo.

Apéndice 3.3 Búsqueda de un caso en que $(A + \rho^m) < 0$ da al iterar $(A + \rho^{m+1}) > 0$ y $(A + \rho^{m+2}) > 0$

Quiero inferir el signo de $(A + \rho^{m+2})$ sabiendo que $(A + \rho^m)$ es negativo. Debido a (A3.21), si $(A + \rho_{m+1}) > 0$ puedo escribir

$$(2A - KS_m)(A + \rho_m)^2 - (A + \rho_m) + (2A - KS_m)S_m^2 > 0 \quad (A3.24)$$

Es una parábola en $(A + \rho_m)$. Si quiero que la desigualdad valga, debo pedir que no tenga raíces reales, o que $(A + \rho_m)$ sea mayor que la raíz más grande (r_2), o menor que la raíz más chica (r_1)(ver figura 2)

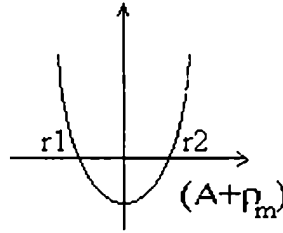


Figura 2

Las raíces de (A3.21) son de la forma

$$(A + \rho_m)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(2A - KS_m)^2 S_m^4}}{2(2A - KS_m)} \quad (A3.25)$$

quiero encontrar algunos casos para los que se cumpla que si $(A + \rho_m) < 0$, (o sea que $(A + \rho_{m+1}) > 2A - KS$ valga $(A + \rho_{m+2}) > 0$. Si encuentro los casos para los que $(A + \rho_{m+1}) > r_2$, donde r_2 es la raíz correspondiente a las variables primadas, el objetivo estará cumplido. Basta con encontrar para que valores vale

$$2 A - K S_m > \frac{1 + \sqrt{1 - 4 (2 A - K S_{m+1})^2 S_{m+1}^4}}{2 (2 A - K S_{m+1})} \quad (\text{A3.26})$$

Si las raíces no son imaginarias se cumple

$$\frac{1 + \sqrt{1 - 4 (2 A - K S_{m+1})^2 S_{m+1}^4}}{2 (2 A - K S_{m+1})} < \frac{1}{(2 A - K S_{m+1})} \quad (\text{A3.27})$$

y alcanza con verificar

$$(2 A - K S_m) > \frac{1}{(2 A - K S_{m+1})} \quad (\text{A3.28})$$

$$4 A^2 - 2 K A (S_{m+1} + S_m) + K^2 S_m S_{m+1} > 0 \quad (\text{A3.29})$$

y pidiendo que $S < A/K$ siempre

$$2 A^2 + \frac{K^2 S_m S_{m+1}}{2} > A K (S_{m+1} + S_m) > 2 A^2 \quad (\text{A3.30})$$

Es decir que si se verifica siempre que $S < A/K$, después de un valor que cumpla $(A + \rho_m) < 0$, tengo dos iteraciones sucesivas que cumplen $(A + \rho_{m+1}) > 0$ y $(A + \rho_{m+2}) > 0$.