

Tesis de Posgrado

Decoherencia en sistemas cuánticos caóticos

Monteoliva, Diana Beatriz

2003

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias
Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Monteoliva, Diana Beatriz. (2003). Decoherencia en sistemas cuánticos caóticos. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3643_Monteoliva.pdf

Cita tipo Chicago:

Monteoliva, Diana Beatriz. "Decoherencia en sistemas cuánticos caóticos". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2003.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3643_Monteoliva.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

Universidad de Buenos Aires (UBA)
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (FCEyN)
Departamento de Física Juan José Giambiagi
Pabellón 1, Ciudad Universitaria, 1428 Buenos Aires, Argentina.

Tesis Doctoral

DECOHERENCIA EN SISTEMAS CUÁNTICOS CAÓTICOS

AUTOR: DIANA BEATRIZ MONTEOLIVA

DIRECTOR: DR. JUAN PABLO PAZ



Trabajo de Tesis para optar por el título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires

Octubre de 2003

3643

Resumen

El proceso de decoherencia para un sistema cuántico abierto con análogo clásico caótico (un pozo doble perturbado armónicamente acoplado a un baño de infinitos osciladores armónicos) es estudiado. Se analiza el comportamiento de la tasa de producción de entropía mostrando que posee dos regímenes relevantes: Para tiempos cortos ésta es proporcional a la intensidad del acoplamiento sistema-entorno. Posteriormente, pero antes del equilibrio, entra en un régimen donde es fijada por el exponente de Lyapunov del sistema. Este segundo régimen es encontrado siempre que el coeficiente de difusión supere cierto valor umbral. El tiempo de transición entre ambos regímenes muestra una dependencia lineal con la entropía del estado inicial y logarítmica con el coeficiente de difusión.

Además, el desarrollo de estructuras en la función de Wigner es investigado, observando que para sistemas caóticos éstas saturan rápido, en un tiempo que concuerda con el tiempo de Ehrenfest. Comprobamos que, contrariamente a conjeturas previas, cuando el sistema es macroscópico la saturación se produce a escalas que son típicamente *sub-Planckianas*. Estas escalas determinan la sensibilidad de un sistema cuántico a las perturbaciones. Mostramos que para sistemas cuánticos caóticos la tasa de decaimiento de la Fidelidad, medida de la sensibilidad de un sistema cuántico a las perturbaciones, está determinada por sus exponentes de Lyapunov. Esta escala temporal establece el tiempo de decoherencia de un sistema acoplado a un entorno caótico.

Palabras Clave: decoherencia, caos, entropía, fidelidad, sub-Planck.

Abstract

The decoherence process for a classically chaotic quantum open system (a double well harmonically perturbed coupled to a bath of infinite harmonic oscillators) is studied. The behaviour of the entropy production rate is analysed, showing it posses two relevant regimes: For short times it is proportional to the system-environment coupling strength. Afterwards, but before equilibration, it enters a regime where it is fixed by the Lyapunov exponents of the system. This second regime is reached only if the diffusion coefficient is above certain threshold. The transition time between both regimes shows a linear dependence on the initial entropy and a logarithmic one on the diffusion coefficient.

Moreover, the structure development of the Wigner function is investigated, observing that for chaotic systems it quickly saturates, in a timescale which agrees with the Ehrenfest time. Contrarywise to previous conjectures, we verify that when the system is macroscopic saturation happens typically at *sub-Planckian* scales. These scales determine the sensitivity of a quantum system to perturbations. We show that for chaotic quantum systems the rate of decay of the Fidelity, a measure of the sensitivity of a quantum system to perturbations, is determined by its Lyapunov exponent. This timescale establishes the decoherence time of a system coupled to a chaotic environment.

Keywords: decoherence, chaos, entropy, fidelity, sub-Planck.

Índice General

1 Introducción

- 1.1 La mecánica cuántica y su límite clásico
- 1.2 La decoherencia .
- 1.3 Decoherencia en sistemas clásicamente caóticos
- 1.4 Sensibilidad a las perturbaciones
- 1.5 Estructura de la Tesis.

2 Correspondencia Cuántico–Clásica

- 2.1 El problema de la medición
- 2.2 Correlaciones cuánticas y clásicas .
- 2.3 Decoherencia y la emergencia del modelo clásico
 - 2.3.1 El entorno .
 - 2.3.2 Modelos de decoherencia .
 - 2.3.3 Decoherencia y **c-shifts**

3 Dinámica de sistemas abiertos: ecuaciones maestras

- 3.1 Cálculo perturbativo de la ecuación maestra .
- 3.2 Movimiento Browniano Cuántico
- 3.3 Ecuación maestra en el límite de altas temperaturas
- 3.4 Ecuación maestra en la base de Floquet
 - 3.4.1 Base de Floquet
 - 3.4.2 Ecuación maestra promediada .
- 3.5 Decoherencia a altas temperaturas
 - 3.5.1 Escala temporal de la decoherencia .
 - 3.5.2 Decoherencia en el espacio de fases .
 - 3.5.3 Criterio de Predictibilidad . .

4	Sistemas aislados: Ruptura de la correspondencia	51
4.1	Ruptura de la correspondencia	52
4.1.1	Argumentos heurísticos	52
4.1.2	Argumentos cuánticos	54
4.1.3	Inestabilidad en sistemas macroscópicos	56
4.2	Estructuras a pequeña escala en el espacio de fases	58
4.3	Pozo doble con perturbación periódica: el sistema aislado	60
4.3.1	Estados iniciales en una isla regular	63
4.3.2	Estados iniciales en el mar caótico	66
5	Decoherencia en sistemas caóticos	71
5.1	Decoherencia y Caos	73
5.1.1	Restablecimiento de la correspondencia: análisis cualitativo	74
5.1.2	Producción de entropía	77
5.2	Sensibilidad a las perturbaciones	81
5.3	Decoherencia en el Pozo Doble Armónicamente Perturbado	85
5.3.1	Restablecimiento del Principio de Correspondencia	86
5.3.2	Producción de Entropía	87
5.4	Decoherencia y la eliminación del tuneleo.	91
5.5	Sensibilidad a las perturbaciones	93
5.5.1	Rol de las estructuras sub-Planckianas .	94
5.5.2	Escala de tiempos para la hipersensibilidad	95
5.5.3	Sensibilidad de un sistema que interactúa con un entorno	97
	Conclusiones	101
	A Solución numérica de las ecuaciones de Schrödinger y Newton	105
	B Ecuación Maestra Promediada	113
	Bibliografía	117
	Agradecimientos	123

Capítulo 1

Introducción

1.1 La mecánica cuántica y su límite clásico

La Teoría Cuántica ha sido desde sus orígenes una de las teorías más exitosas de la historia de la Física. En todas sus aplicaciones prácticas las predicciones de esta Teoría son correctas; no hay ejemplos de conflicto entre sus pronósticos y los resultados de los experimentos realizados para confirmarlas. Su dominio es notablemente amplio, pues explica con éxito desde la estructura de las estrellas de neutrones a la estructura y función del ADN. Sin embargo, es frecuentemente difícil conciliar nuestra percepción del Universo, que parece ajustarse bien a modelos clásicos, con las predicciones de la Teoría Cuántica (Zurek, 1991). Es así que el debate sobre la relación entre los modelos clásico y cuántico es tan antiguo como esta última Teoría.

La fuente de nuestra incomodidad con la Mecánica Cuántica reside en la contradicción entre el principio de superposición y nuestra experiencia diaria clásica en donde este principio no se cumple. Originalmente fue el mismo Schrödinger quien formuló el problema, ideando su famoso experimento imaginario: Si se encierra a un gato en una caja, pasado un tiempo cabe preguntarse por su suerte, si estará éste vivo o muerto. En una descripción cuántica, el estado del sistema gato cuando éste se encuentra vivo está descrito por el vector de onda $|\psi_1\rangle$, mientras que el estado del gato muerto está descrito por $|\psi_2\rangle$; cada uno de estos estados coincide con un posible estado de la descripción clásica. La linealidad de la ecuación de Schrödinger implica que, siendo $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_1\rangle$ soluciones de la misma, el estado superposición $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle + |\psi_1\rangle$ es también una posible solución. Cabe señalar que un estado de estas características, superposición coherente de los estados que representan al gato vivo y al gato muerto, tiene propiedades que lo hacen drásticamente diferente del estado “clásico” en el que el gato se encuentra vivo con cierta probabilidad (o muerto, con la probabilidad complementaria). En efecto, si calculamos la probabilidad de detectar al gato en una dada posición, esta resulta ser $P(x) = |\psi_1(x) + \psi_2(x)|^2$.

Por lo tanto, si el estado contiene una superposición de las dos alternativas, la probabilidad de detectar la posición (o cualquier otro observable) contendrá términos de interferencia y diferirá de la probabilidad que se obtiene para el estado en el cual sabemos que el gato está vivo o muerto. En efecto, $P(x) = |\Psi_1(x)|^2 + |\Psi_2(x)|^2 + 2\text{Re}(\Psi_1(x)\Psi_2^*(x)) \neq P_1(x) + P_2(x)$. Estados que consisten en la superposición de alternativas macroscópicamente distinguibles suelen denominarse, por analogía con el ejemplo famoso de Schrödinger, “Gatos de Schrödinger”. La función de onda que describe a una partícula en el interior de un dispositivo Stern–Gerlach, o la que describe a las partículas en un experimento de doble rendija son otros posibles ejemplos de estados de este tipo, superposición coherente de dos o más alternativas clásicas.

Está bien establecido que la materia a escala microscópica debe ser descrita apelando permanentemente a estados que contienen superposición de distintas alternativas clásicas. Pero la mecánica cuántica permite la existencia de este tipo de estados para cualquier sistema, incluyendo gatos u otros objetos macroscópicos. ¿Donde está el límite para la aplicabilidad del principio de superposición? ¿A partir de qué escala los objetos se comportan clásicamente, tal como parecen hacerlo innumerables objetos que encontramos en nuestra vida cotidiana? En definitiva: ¿Cómo es posible obtener una descripción clásica macroscópica a partir de leyes cuánticas que tienen al principio de superposición como una de sus bases fundamentales? Estas preguntas generaron un gran debate desde los inicios mismos de la Mecánica Cuántica.

Durante mucho tiempo se eludió la resolución del problema de la correspondencia entre ambas teorías argumentando que el nudo del mismo se encuentra en el proceso de medición: en el ejemplo de Schrödinger el estado del gato puede conocerse sólo realizando una medida sobre el mismo, es decir abriendo la caja para ver. Así, la discusión del problema de correspondencia cuántico-clásica se ha visto largamente dominada por el llamado *problema de la medición*. La primera explicación ampliamente aceptada de cómo en el proceso de medida una sola alternativa (en el experimento imaginario de Schrödinger, el gato está vivo o muerto, no ambas cosas a la vez) emerge de las infinitas posibilidades que permite el principio de superposición, fue la denominada interpretación de Copenhague, propuesta por Niels Bohr, quien insistió en que un aparato por definición *clásico* es necesario para llevar a cabo la medición. Así, la teoría cuántica no sería universal y en el proceso de medición se fuerza a la función de onda a colapsar en una de las alternativas clásicas permitidas. La característica distintiva de la interpretación de Copenhague es la existencia de una línea divisoria entre lo cuántico y lo clásico (Zurek, 1991).

El status de la interpretación de Copenhague siempre fue controversial, ya que si se acepta a la Mecánica Cuántica como universalmente válida, debería ser aplicable a todo el Universo. En ese contexto carece de sentido una frontera rígida entre el mundo cuántico y el clásico.

Habitualmente, en ausencia de un criterio adecuado para distinguir entre el mundo clásico y

el cuántico, se acepta una identificación entre *clásico* y *macroscópico*. Sin embargo, esta forma de plantear el problema es totalmente inadecuada. Ejemplos que señalan la naturaleza cuántica de sistemas macroscópicos son, entre otros, una versión criogénica del detector de ondas gravitatorias (la barra de Weber) que debe ser modelado cuánticamente a pesar de tener una masa de más de una tonelada (Caves et al., 1980), o uniones superconductoras de Josephson que poseen estados cuánticos que involucran un número macroscópico de electrones, pudiendo éstos, sin embargo, tunelear entre los mínimos del potencial efectivo (Caldeira et al., 1983).

Durante décadas renombrados científicos buscaron alguna solución a este problema (Einstein et al., 1935; Bell, 1964; Von Neumann, 1955; Everett, 1957; Wheeler et al., 1983). Si sistemas macroscópicos no pueden ser considerados del lado clásico de la línea divisoria sin riesgos, hubo quien se preguntó si no sería entonces posible que en realidad tal línea divisoria o frontera entre ambos mundos no existiera. La denominada Interpretación de Universos Múltiples (Many World Interpretation, MWI) de la Mecánica Cuántica desarrollada en los años '50 por Hugh Everett III afirma que tal frontera no existe (Everett, 1957). De acuerdo a esta interpretación todo el Universo es descrito por la Teoría Cuántica y evoluciona siguiendo la ecuación de Schrödinger. Cada vez que una interacción adecuada tiene lugar entre dos subsistemas cuánticos del Universo, la función de onda del mismo se subdivide de manera tal que desarrolla cada vez más *ramas* que se multiplican interminablemente. Sin embargo, ninguna de las dos interpretaciones de la Teoría Cuántica ha resuelto el problema. Mientras la interpretación de Copenhagen demanda *a priori* un dominio clásico que fuerza una alternativa clásica como único resultado emergente en un proceso de medida, la interpretación de Everett III, aún acomodando toda posible alternativa clásica en las muchas ramas dinámicamente generadas de la función de onda del Universo, ni siquiera permite definir claramente cuáles estados del Universo corresponden a las tales ramas, debido a la libertad que la Mecánica Cuántica nos da para cambiar de base en el espacio de Hilbert. Ninguna interpretación ha podido explicar porqué un observador percibe sólo una de las alternativas y no una superposición coherente de las mismas.

1.2 La decoherencia

No fue sino en los últimos veinte años que una salida apropiada al problema de la correspondencia entre la Mecánica Cuántica y Clásica ha sido propuesta manteniéndose con éxito como la solución del mismo (Zurek, 1981; Zurek, 1982): la pérdida de coherencia o *decoherencia* causada por la interacción entre el sistema y su entorno conlleva la supervivencia de sólo un pequeño subconjunto de estados de la totalidad que contiene el enorme espacio de Hilbert del sistema. Esta regla de súper-selección ha dado en llamarse *selección inducida por el entorno* (environment-

induced-super-selection, o **einselection**). Como consecuencia, la clasicidad de un sistema es una propiedad *emergente*, inducida sobre el mismo por su interacción con el entorno. Toda superposición arbitraria de estados es desechada y naturalmente surge un conjunto preferido de estados clásicamente permitidos, los denominados *estados punteros*, que corresponden a propiedades bien definidas (las indicaciones de la aguja del aparato en mediciones cuánticas) y a puntos en el espacio de fases de un sistema clásico.

La idea clave en la solución del problema de la medición y más generalmente, de la emergencia del comportamiento clásico a partir de la dinámica cuántica, se conoce desde las fundaciones de la Teoría Cuántica, pero su importancia y significado para resolver la transición cuántico-clásica ha sido reconocida sólo recientemente: un sistema cuántico macroscópico *nunca* se encuentra aislado de su entorno, y por lo tanto, no puede esperarse que su evolución esté gobernada por la ecuación de Schrödinger, que sólo es aplicable a sistemas cerrados. La naturaleza de la interacción sistema-entorno permite que este último monitoree, sin perturbar, algunos estados del primero. Simultáneamente el sistema, que sí perturba al entorno, deja su huella sobre el mismo (Zurek, 1981). Esta huella contiene información sobre algunos estados particulares del sistema. Aquellos estados del sistema que dejan una huella siendo a su vez mínimamente perturbados en el proceso, son los estados preferidos o punteros. Su propiedad principal es la insensibilidad a ser monitoreados por la interacción con el entorno y consecuentemente, su resistencia a ser *entrelazados* con los estados de este último, que sería la consecuencia natural de la interacción. Estos estados del sistema son los únicos que mantendrán una fiel descripción del sistema *solamente*: todos los demás estados evolucionarán en estados conjuntos sistema-entorno, preservando su pureza solamente cuando se amplía la noción de sistema y ambos son incluidos en un sistema más grande.

Después de estos veinte años transcurridos desde los trabajos pioneros de Zurek (Zurek, 1981; Zurek, 1982), el rol del proceso de decoherencia en la emergencia de la clasicidad del mundo que nos rodea está bien establecido y muchas propiedades interesantes de este fenómeno han sido comprendidas. Por ejemplo, la naturaleza de las escalas temporales involucradas en el proceso de pérdida de coherencia (Paz et al., 1993) y las características fundamentales del proceso por el cual los estados punteros son seleccionados por el entorno (Zurek, 1993; Zurek et al., 1993). Más aún, ya se ha iniciado el estudio de la decoherencia desde el punto de vista experimental y los primeros experimentos que exploran la difusa frontera entre lo cuántico y lo clásico están comenzando a dar resultados (Brune et al., 1996; Cheng et al., 1999; Myatt et al., 2000).

1.3 Decoherencia en sistemas clásicamente caóticos

En el curso de estos estudios se fue haciendo evidente que el proceso de decoherencia posee características muy peculiares en sistemas cuánticos cuyos análogos clásicos son caóticos. De hecho, en tales sistemas la decoherencia parece ser absolutamente esencial para restablecer la validez del principio de correspondencia, que en estos casos se ve violado en escalas temporales muy cortas, que dependen sólo logarítmicamente de la constante de Planck. La causa de la ruptura del principio de correspondencia puede entenderse de la siguiente manera: para esta clase de sistemas, la evolución cuántica genera en forma continua la disseminación coherente del estado inicial sobre escalas grandes tanto en posición como en momento. Así, un Hamiltoniano clásico caótico genera una evolución cuántica que produce típicamente estados del tipo Gato de Schrödinger, es decir, si se comienza con un estado bien localizado tanto en posición como en momento, gaussiano por ejemplo, la evolución cuántica produce un estado altamente deslocalizado que exhibe fuertes efectos de interferencia.

La razón por la cual un Hamiltoniano clásico caótico genera en su evolución cuántica estados no-clásicos puede ser relacionada con el hecho de que la dinámica caótica está caracterizada por la divergencia exponencial de trayectorias vecinas, a una tasa fijada por los exponentes de Lyapunov λ del sistema. Para que sea posible presentar este argumento, basado en la noción de trayectorias, es mejor formular la Mecánica Cuántica en el espacio de fases, tarea que puede ser llevada a cabo empleando funciones de Wigner (Wigner, 1932) para representar al estado cuántico. Si se prepara a un sistema cuántico en un estado clásico, con una función de Wigner bien localizada en el espacio de fases y suave sobre regiones de área grande comparada con la constante de Planck $\hbar$, ésta evolucionará inicialmente siguiendo trayectorias clásicas en el espacio de fases. Luego de un tiempo característico, el paquete inicialmente suave se verá estirado en alguna dirección, inestable, del espacio de fases y debido a la conservación requerida del volumen, será contraído en la otra dirección, estable, del mismo. Estas contracción y elongación se ven acompañadas también por el pliegue de las trayectorias clásicas que, en un régimen totalmente caótico, tenderán a llenar todo el espacio de fases disponible. La combinación de estos tres efectos – contracción, elongación y plegamiento – fuerza al sistema a explorar el régimen cuántico: Al ser estirada en una dirección, la función de onda se deslocaliza y como consecuencia del plegamiento de la misma, se desarrollan interferencias cuánticas entre diferentes porciones de la misma, que mantienen la coherencia de la función sobre largas distancias. Cuando la longitud de coherencia alcanza la escala de no linealidad del potencial, el efecto de la energía potencial sobre el movimiento no puede continuar representándose por la expresión clásica de fuerza, ya que no está claro siquiera dónde debe evaluarse ésta para una función de onda deslocalizada. La escala temporal en la que esto sucede,

denominada tiempo de Ehrenfest t_h , es sorprendentemente corta pues depende logarítmicamente de la constante de Planck y puede ser estimada empleando los argumentos delineados en los párrafos anteriores.

Lo primero que a uno se le ocurre pensar es que esta descripción no puede ser válida para objetos macroscópicos y que, seguramente, tales sistemas se encuentran bien a salvo de consideraciones cuánticas. Pero, debido al carácter caótico de la evolución, este *no* es el caso! Existen ejemplos obviamente macroscópicos donde el tiempo de Ehrenfest es preocupantemente corto: Hyperion, una de las lunas de Saturno, hace caóticamente impredecible su orientación en un tiempo de Lyapunov λ^{-1} de tan sólo 42 días (Wisdom, 1985). Las estimaciones del tiempo de Ehrenfest para este componente del sistema solar (Zurek et al., 1995b) indican que luego de tan sólo 20 años la combinación de caos con dinámica cuántica harían que Hyperión se encontrara en una superposición coherente de orientaciones macroscópicamente diferentes!

Concluimos entonces que luego de un tiempo relativamente corto, un cuerpo macroscópico cuya dinámica sea caótica se ve forzado a un estado flagrantemente no local, tipo Gato de Schrödinger, cuya función de distribución estará extendida sobre distancias que, para potenciales gravitatorios, pueden ser del orden del radio de la órbita de un planeta, y donde ciertamente la noción de trayectoria dejará de tener sentido. En la discusión original de Schrödinger era posible desviar la atención hacia los procesos de medición. Sin embargo, para sistemas cuánticos caóticos esta forma de evitar el problema ya no es posible. Éstos evolucionan en estados no locales (extravagantemente cuánticos) simplemente como resultado de la dinámica caótica. Y más aún, esto sucede sorprendentemente rápido, aún para sistemas muy macroscópicos. Hyperión no es el único componente caótico del sistema solar. Algunos asteroides, como Chiron, poseen una órbita inestable. Hay también indicios de que el sistema solar como un todo es caóticamente inestable (Wisdom, 1985; Laskar, 1989). En todos estos casos simples cálculos para t_h conducen a tiempos que son definitivamente menores que la edad del sistema solar. Entonces, si la evolución unitaria de subsistemas cerrados fuese una descripción completa de la dinámica planetaria, los planetas podrían encontrarse deslocalizados a lo largo de sus órbitas!

Afortunadamente, nada de esto sucede en realidad. La paradoja planteada se resuelve abriendo al sistema a la interacción con otros sistemas. El *mismo* fenómeno que soluciona el problema de la medición, la *selección inducida por el entorno* y su consecuencia, la *decoherencia*, se encuentran en la raíz del problema de la correspondencia cuántico-clásica. La posibilidad de abrir un sistema cuántico a la interacción con su entorno como medio para resolver la transición cuántico-clásica ha sido firmemente ignorada por mucho tiempo, quizá porque en física clásica todos los problemas de fundamental importancia han sido resueltos en sistemas aislados. Pero una vez que el sistema ha sido abierto, es la decoherencia quien previene la deslocalización de la función de

distribución y elimina estados como los Gatos de Schrödinger, ayudando a restablecer el principio de correspondencia para objetos macroscópicos que, como Hyperión, se comportan de acuerdo a leyes clásicas.

Además, como fue originalmente sugerido por Zurek y Paz (Zurek et al., 1994), el proceso de decoherencia para sistemas clásicamente caóticos tiene otra característica muy importante. La interacción con el entorno destruye la pureza del sistema puesto que este último se entrelaza con el primero. Entonces, información que inicialmente está almacenada en el sistema se escapa hacia el entorno y por consiguiente la decoherencia está siempre acompañada por producción de entropía. Esto es por supuesto válido tanto para sistemas clásicamente regulares como caóticos. Pero lo que distingue a los sistemas caóticos es la existencia de un rango robusto de parámetros para los cuales la tasa a la cual la información fluye desde el sistema hacia el entorno, es decir, la tasa de producción de entropía, se hace enteramente independiente de la intensidad del acoplamiento entre el sistema y su entorno, y se ve fijada *solamente* por la dinámica del sistema, esto es, por los exponentes de Lyapunov del mismo. La razón de tan sorprendente hecho puede entenderse usando un argumento muy simple: el proceso de decoherencia destruye las interferencias cuánticas entre porciones distantes de la función de Wigner y simultáneamente, ésta no puede continuar contrayéndose indefinidamente sino que este proceso se detiene como consecuencia de su interacción con el entorno, que típicamente es modelado como difusión (Zurek et al., 1994). De esta manera, la decoherencia pone un límite inferior a la estructura de pequeña escala que la función de Wigner puede desarrollar. Como consecuencia, y debido a que ni la elongación ni el plegamiento de la función de Wigner se ven substancialmente afectados por la difusión, la entropía del sistema crece a una tasa esencialmente fijada por la tasa de expansión promedio de la función de Wigner, determinada a su vez por el exponente de Lyapunov del sistema. En este régimen la tasa de producción de entropía se hace *independiente* de la constante de difusión, que por otro lado es responsable de la totalidad del proceso!

El propósito de la presente Tesis es presentar evidencia numérica sólida confirmando este resultado y estudiar algunos otros aspectos relacionados con el proceso de decoherencia, para un sistema caótico particular. Nuestros estudios muestran claramente que la dependencia temporal de la tasa de producción de entropía presenta dos regímenes bien diferenciados. Primero, se observa un régimen inicial donde la tasa es proporcional a la intensidad del acoplamiento entre el sistema y su entorno. En este régimen inicial la misma se comporta de igual manera que para sistemas regulares. Segundo, luego de este transitorio inicial, la tasa entra en un régimen donde su valor se encuentra fijado, como fue conjeturado en (Zurek et al., 1994), por los exponentes de Lyapunov del sistema y es independiente de la intensidad del acoplamiento con el entorno. Nuestros resultados indican claramente que para que exista este segundo régimen es necesario que el coeficiente de

difusión supere cierto valor umbral. Para valores menores del mismo la producción de entropía nunca se hace independiente de la intensidad del acoplamiento con el entorno. También mostramos que el tiempo de transición t_c entre ambos regímenes depende linealmente de la entropía del estado inicial y logarítmicamente de la intensidad del acoplamiento entre el sistema y su entorno.

1.4 Sensibilidad a las perturbaciones

Paralelamente al desarrollo de estos temas y en una línea de investigación que originalmente parecía tener poca relación con la decoherencia, Asher Peres propuso una forma de estudiar la dinámica cuántica de sistemas clásicamente caóticos que permitiera definir el entonces elusivo concepto de caos cuántico (Peres, 1984). El problema surge cuando se lo quiere definir tal como se lo hace en Mecánica Clásica. Caos es la imposibilidad de predecir a tiempos largos el comportamiento de un sistema *determinista*. Surge cada vez que la solución de las ecuaciones de movimiento es hipersensible a imprecisiones en las condiciones iniciales o, alternativamente, a perturbaciones externas incontrolables. El comportamiento dinámico a tiempos largos aparece entonces como *aleatorio* y sólo son posibles predicciones estadísticas. En el contexto de la Mecánica Clásica, el caos aparece siempre asociado a la divergencia exponencial de trayectorias vecinas, o equivalentemente, determina la hipersensibilidad del sistema a perturbaciones en las condiciones iniciales. Una definición similar de caos cuántico, basada en la evolución de estados iniciales levemente diferentes, no conduce a divergencia exponencial alguna, debido a la unitariedad de toda evolución cuántica. Es decir, la distancia entre dos funciones de onda que difieren sólo infinitesimalmente, medida por el producto interno de las mismas, permanece constante en el tiempo. Esta propiedad condujo a algunos autores (Casati et al., 1986; Izrailev, 1990) a afirmar que el caos cuántico no existe, es decir, que la evolución a tiempos largos de la función de onda es perfectamente predecible, siempre que el Hamiltoniano sea *conocido*. Por este motivo la búsqueda de señales de caos cuántico en sistemas con un equivalente clásico caótico se concentró por algún tiempo en la investigación de las propiedades de sus estados estacionarios (Gutzwiller, 1990; Berry, 1989) tales como la rigidez espectral o la morfología de sus funciones de onda (Heller, 1984); en la descripción de las fluctuaciones espectrales por la Teoría de Matrices Aleatorias (Cuccietti et al., 2002) o en la relación entre correlaciones espectrales y transporte (Szafer et al., 1993), entre otros. Sin embargo, el problema real en física cuántica no es la preparación del estado inicial (Lamb, 1969), sino aislar al sistema cuántico microscópico de la influencia de su entorno macroscópico. En otras palabras, el verdadero Hamiltoniano *no es conocido*. Sólo conocemos un Hamiltoniano idealizado que difiere del verdadero en una pequeña perturbación Δ debida al control imperfecto del entorno.

Desde un punto de vista alternativo, Peres sugirió que la dinámica cuántica debiera distinguir

entre dinámicas clásicas regulares y caóticas cuando se compara la evolución temporal de un *mismo* estado inicial bajo la influencia de *Hamiltonianos* levemente diferentes. Es decir, la sensibilidad de un sistema cuántico debe investigarse perturbando al Hamiltoniano y no a las condiciones iniciales. La cantidad natural para este estudio es la Fidelidad $M(t)$ (Peres, 1984; Gardiner et al., 1997; Gardiner et al., 1998; Jacquod et al., 2001; Cerruti et al., 2002) definida como el producto interno entre los estados que resultan de evolucionar, a partir de la misma condición inicial $|\psi\rangle$, bajo Hamiltonianos levemente diferentes. $M(t) = |\langle\psi|\exp[iH_\Delta t/\hbar]\exp[-iHt/\hbar]\psi\rangle|^2$, donde Δ es la perturbación al potencial. $H_\Delta = H + \Delta$. Si el sistema posee un análogo clásico regular, es plausible que la perturbación Δ tenga poca influencia en la evolución cuántica. Por otra parte, cuando el análogo clásico del sistema es caótico, el estado del sistema puede ser fuertemente influido por una pequeña perturbación. Este estado será entonces impredecible si la perturbación Δ es desconocida. Estas consideraciones han sido respaldadas tanto por estudios analíticos como por variadas simulaciones numéricas (Peres, 1984; Peres, 1996; Wisniaki et al., 2001; Jacquod et al., 2001; Jalabert, 2001; Wisniaki et al., 2001b; Karkuszewski et al., 2001). Sin embargo, una de las evidencias más importantes de caos clásico, los exponentes de Lyapunov, permanecieron por un tiempo sin conexión con la dinámica cuántica. Un claro avance en esta dirección fue realizado recientemente por Jalabert y Pastawski (Jalabert, 2001), quienes inspirándose en algunos experimentos de Resonancia Magnética Nuclear (NMR) (Pastawski et al., 1995; Usaj et al., 1998) propusieron que el exponente de Lyapunov clásico se podría medir por la tasa de decaimiento de la Fidelidad $M(t)$, en este contexto conocida como Eco de Loschmidt (Jalabert, 2001). En efecto, la Fidelidad puede interpretarse como la probabilidad de retorno al estado inicial evolucionando durante un tiempo t con el Hamiltoniano original H e involucionando luego, es decir, evolucionando hacia atrás en el tiempo, con un Hamiltoniano perturbado $H + \Delta$, en el espíritu del experimento imaginario propuesto por Loschmidt en su intento de refutar la hipótesis de caos molecular de Boltzman (Balian, 1991). Los trabajos de Jalabert, Pastawski y colaboradores impulsaron una intensa actividad que ha ayudado a comprender algunos aspectos de la dependencia temporal del Eco de loschmidt (Jacquod et al., 2001; Cuccietti et al., 2002; Wisniaki et al., 2001b; Benenti et al., 2002; Cerruti et al., 2002; Vanicek et al., 2003; Prosen, 2002).

Es interesante notar que la sensibilidad de un sistema cuántico frente a perturbaciones es relevante para la decoherencia: Cuando el *entorno* tiene una contraparte clásica caótica, la hipersensibilidad a las perturbaciones hace que produzca decoherencia de manera muy eficaz. En efecto, el decaimiento de la Fidelidad del entorno caótico, determina la eficiencia con la que este es capaz de provocar decoherencia sobre los sistemas a los que se encuentra acoplado.

En esta Tesis presentaremos evidencia clara que muestra que la escala temporal del decaimiento del Eco de Loschmidt de un sistema está determinada, principalmente, por el tamaño de las

estructuras de pequeña escala presentes en la función de distribución del estado en el espacio de fases. Consideremos las funciones de distribución generadas a partir de la evolución con los Hamiltonianos H y $H + \Delta$. Inicialmente estas funciones son idénticas y al evolucionar acumulan lentamente un desplazamiento relativo debido a las perturbaciones diferentes a las que están sometidas. Supongamos que la perturbación es suficientemente pequeña como para no alterar significativamente la evolución del sistema. Entonces, es claro que un decaimiento importante del Eco de Loschmidt ocurrirá cuando la perturbación sea suficiente para “desplazar” al estado en una magnitud tal que ambas distribuciones ya no estén superpuestas. Claramente, esto depende no solamente de la perturbación, sino también de la pequeñez de la estructura que tiene la función de distribución que caracteriza al estado. Las diferencias en el decaimiento del Eco en el caso clásico caótico y su contraparte cuántica surgen justamente porque los mecanismos que gobiernan la emergencia de estructura de escala pequeña en sus correspondientes funciones de distribución son cualitativamente diferentes.

En el caso clásico, la región cubierta por una función de distribución inicialmente suave en el espacio de fases, se contrae exponencialmente como resultado de su evolución caótica de manera que su ancho decrece como $\exp(-\lambda t)$. Como esta contracción no tiene cota inferior, es claro que el decaimiento del Eco ocurrirá a una tasa determinada predominantemente por este exponente de Lyapunov. Contrastando esta situación, sí hay un límite en la estructura fina que la función de Wigner de un sistema cuántico puede desarrollar. La interferencia coherente entre dos porciones de una función de onda separados espacialmente una distancia Δx en un estado tipo Gato de Schrödinger – posee una longitud de onda $\delta_p \approx \hbar/\Delta x$ en la dirección de momento. De manera equivalente cuando la separación es en momento, la escala en posición alcanza valores $\delta_x \approx \hbar/\Delta p$. Entonces, cuando la envolvente de la función de Wigner llega a cubrir la totalidad del volumen A disponible del espacio de fases, las estructuras de la misma llegan a su límite inferior, $a \sim \delta_x \times \delta_p \approx \hbar \times (\hbar/A)$. Para objetos macroscópicos ($A \gg \hbar$), estas escalas son típicamente *sub-Planckianas* y tienen consecuencias físicas de importancia. En el presente contexto, notablemente, el decaimiento del Eco de Loschmidt ocurre cuando el desplazamiento relativo entre las funciones de Wigner perturbada y sin perturbar es suficiente como para que las respectivas estructuras finas interfieran destructivamente. En el curso de esta Tesis, estas ideas intuitivas serán confirmadas mediante estudios numéricos sobre un sistema que es clásicamente caótico.

1.5 Estructura de la Tesis.

La estructura de la Tesis es la siguiente: en el Capítulo 2 presentamos una somera revisión del problema de la correspondencia cuántico-clásica en el contexto del problema de la medición. Comenzamos, empleando sistemas de dos estados, con una introducción a la dinámica condicional. Ésta es responsable tanto del establecimiento del entrelazado entre el sistema y el aparato que determina el problema, como también de la *decoherencia* y la *selección inducida por el entorno* que lo resuelve. Los modelos de decoherencia que allí se presentan son muy sencillos y pueden servir como modelos idealizados del proceso de medición. Sin embargo éstos son demasiado simples para ser realistas. Por este motivo, en el Capítulo 3 el marco correcto para estudiar la dinámica de un sistema cuántico abierto se presenta y discute. Derivamos allí una de las más útiles herramientas para estudiar este problema: la ecuación maestra. Fundamentalmente, dos diferentes aproximaciones de la misma son discutidas, ambas dando resultados consistentes, pero una de ellas nos permite el estudio de la evolución del sistema sobre escalas temporales largas, lo cual es relevante para la discusión del impacto de la decoherencia en el efecto túnel. Discutimos también allí a qué denominamos *entorno*, presentando con detalle la forma en que modelamos su interacción con el sistema de interés. Las ecuaciones maestras derivadas en este Capítulo son inmediatamente aplicadas en la Sección 3.5, donde estudiamos la selección inducida por el entorno y en particular el criterio de predictibilidad. El siguiente Capítulo se dedica al estudio de sistemas aislados clásicamente caóticos, ejemplificando los resultados intuitivos con análisis numéricos realizados sobre el pozo doble perturbado periódicamente, cuya descripción detallada realizamos en la Sección 4.3. La ruptura de la correspondencia para este sistema es investigada, así como también se analiza el desarrollo de estructuras sub-Planckianas en su función de Wigner. En el Capítulo 5 estudiamos el efecto de la decoherencia en la correspondencia cuántico-clásica en sistemas clásicamente caóticos. Para este análisis, seguimos la evolución de nuestro sistema para condiciones iniciales muy simples (gaussianas), es decir, condiciones iniciales que desde un comienzo no exhiben efectos de interferencia cuántica alguna, de manera de fijar nuestra atención en el juego que se establece entre dos efectos contrapuestos: la generación dinámica y la destrucción por decoherencia de interferencias cuánticas. Mostramos en este Capítulo que la decoherencia no sólo explica el origen de la dinámica clásica, sino también que ésta puede ser la responsable de la pérdida de información que da origen a la Segunda Ley de la Termodinámica. Luego en la Sección 5.2 la alta sensibilidad de un sistema cuántico con análogo clásico caótico a las perturbaciones en el Hamiltoniano es analizada determinando la influencia de las estructuras sub-Planckianas en el comportamiento de la misma. Finalmente, en la Sección 5.3 las ideas intuitivas de las Secciones anteriores son analizadas y corroboradas realizando estudios numéricos sobre el pozo doble del

Capítulo anterior.

Los resultados originales contenidos en esta Tesis han sido publicados en *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3373 (2000) y *Phys. Rev. E* **64** 056238 (2001). Estos trabajos contienen los principales resultados relacionados con las características del proceso de decoherencia en sistemas clásicamente caóticos y representan la primera evidencia numérica sólida confirmando la existencia del régimen independiente de la difusión en la tasa de producción de entropía del sistema. Los resultados originales relacionados con el rol de la estructura sub-Planckiana en la hipersensibilidad a las perturbaciones serán enviados a publicar próximamente.

Capítulo 2

Correspondencia Cuántico–Clásica

En este Capítulo introducimos el *problema de la medición*, un tema que ha dominado por mucho tiempo la discusión sobre la relación entre las Teorías Cuántica y Clásica. Una de las propiedades salientes de la Mecánica Clásica ha sido siempre su predictibilidad. Por otro lado, siempre se ha pensado que la característica distintiva de la Mecánica Cuántica es su naturaleza probabilística. Frecuentemente se ha buscado el origen de los problemas de interpretación de la Mecánica Cuántica en este desacuerdo entre el determinismo clásico y la aleatoriedad cuántica. Sin embargo, las ecuaciones fundamentales de ambas Teorías son perfectamente deterministas.

Una de las claves para la resolución del problema de interpretación de la Teoría Cuántica es la comprensión de que éste no surge si consideramos un Universo aislado, pues en este caso la ecuación de Schrödinger dicta una evolución perfectamente determinista para el estado global del Universo (Zurek, 1981; Paz et al., 2001). No hay necesidad alguna de *colapso* de la función de onda del Universo si éste se encuentra aislado (Von Neumann, 1955). Entonces, para poder abordar el problema es necesario dividir al Universo en sistemas. Esta división es, sin embargo, imperfecta y el Universo resulta ser un conjunto de sistemas abiertos interactuantes. Las correlaciones que la interacción mutua induce entre estos sistemas será el concepto central tanto en el problema de la medición que analizaremos en este Capítulo como en el problema más general de la Correspondencia entre las Teorías Cuántica y Clásica.

La necesidad de una transición entre el determinismo cuántico del vector de estado global de un sistema y el carácter definido de los estados de sistemas individuales clásicos puede ilustrarse muy convenientemente con el ejemplo del problema de la medición. El proceso involucrado en una medición es claramente no determinista, y en la interpretación de Copenhague este elemento aleatorio en la Teoría se adjudica al *colapso* de la función de onda toda vez que el sistema entra en contacto con un aparato clásico. En una descripción puramente cuántica del proceso de medición los dos sistemas interactuantes, sistema y aparato, evolucionan unitariamente correlacionándose.

y el colapso de la función de onda no tiene lugar. Más aún, el principio de superposición nos lleva a concluir que no está claro qué observable del sistema está siendo medido por el aparato y, dependiendo del estado inicial del sistema, los roles del aparato y el sistema pueden intercambiarse!

Estos inconvenientes pueden evitarse permitiendo al sistema conjunto aparato-sistema interactuar con un tercero, su entorno (Zurek, 1981). Esta interacción produce *decoherencia* que, en ciertas condiciones particularmente fáciles de satisfacer para objetos macroscópicos, conduce a la *selección inducida por el entorno* de un pequeño subconjunto de estados casi-clásicos en el enorme espacio de Hilbert del problema. Contrastando la situación común en el mundo microscópico, sistemas cuánticos macroscópicos pueden sólo aparecer en uno de los estados clásicos preseleccionados por el entorno. La *clasicidad* es entonces una propiedad *emergente*, inducida en el sistema por su interacción con el entorno. Además, la selección inducida por el entorno permite a un observador externo (aparato) extraer información acerca del sistema sin que éste se vea perturbado.

Iniciamos este Capítulo con una reseña de la dinámica condicional que produce el característico *entrelazado* entre los sistemas cuánticos involucrados y que constituye el nudo del problema de la medición. Esta interacción es también necesaria para producir *decoherencia* y *selección inducida por el entorno*, que resuelven tanto este problema como muchos otros que surgen en el borde entre los dominios cuántico y clásico. Los modelos de decoherencia que presentamos en este Capítulo son muy simples y pueden ser de utilidad en estudios idealizados del proceso de medición.

2.1 El problema de la medición

Consideremos un sistema cuántico S inicialmente en el estado $|\psi\rangle$ que interactúa, de manera apropiada, con un aparato cuántico A inicialmente en el estado $|A_0\rangle$. El estado del sistema conjunto evolucionará *unitariamente* de manera que (Paz et al., 2001)

$$|\Psi_0\rangle = |\psi\rangle \otimes |A_0\rangle = \left(\sum_i \alpha_i |s_i\rangle \right) \otimes |A_0\rangle \xrightarrow{\text{ev. unitaria}} \sum_i \alpha_i |s_i\rangle \otimes |A_i\rangle = |\Psi_I\rangle, \quad (2.1)$$

donde $\{|A_i\rangle\}$ y $\{|s_i\rangle\}$ son estados en los espacios de Hilbert del aparato y del sistema, respectivamente, y los α_i son coeficientes complejos. Inicialmente el sistema conjunto se encuentra descorrelacionado: $|\Psi_0\rangle = |\psi\rangle \otimes |A_0\rangle$. En el estado $|\Psi_I\rangle$ el sistema se encuentra correlacionado con el aparato, de manera que ambos están ahora *entrelazados* (no es posible escribir a $|\Psi_I\rangle$ como producto simple de estados puros de cada subsistema).

¿Qué observable es medido por el aparato?

La interacción requerida para establecer la correlación (2.1) entre el sistema a medir y el aparato puede considerarse como una generalización de la medición bit por bit (Zurek, 1981), donde tanto el sistema como el aparato son sistemas de dos estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$. Por ejemplo, éstos podrían ser spines. Emplearemos esta interacción para ejemplificar la dinámica condicional involucrada en la ecuación (2.1). Supongamos que el sistema de dos estados S se encuentra inicialmente en el estado $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ y que el estado inicial del aparato es $|A_0\rangle$. Una interacción como la descrita por

$$H_{int} = \frac{g}{2} |1\rangle\langle 1| \otimes (1_A - |A_0\rangle\langle A_1| - |A_1\rangle\langle A_0|), \quad (2.2)$$

hará evolucionar unitariamente al estado inicial del sistema conjunto a un estado $|\Psi_t\rangle$. g es la constante de acoplamiento. Como puede comprobarse simplemente resolviendo la ecuación de Schrödinger,

$$|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |A_0\rangle \xrightarrow{H_{int}} \frac{1}{\sqrt{2}} [|0\rangle \otimes |A_0\rangle + |1\rangle \otimes (\cos \theta_t |A_0\rangle + i \sin \theta_t |A_1\rangle)] \quad (2.3)$$

donde $\theta_t = gt/2\hbar$. Este estado es claramente un estado puro. No ha tenido lugar proceso irreversible alguno, ni la función de onda ha colapsado. Sin embargo, si permitimos que la interacción tenga una duración tal que $gt = \pi\hbar$, y consideramos al sistema y al aparato como dos sistemas independientes, la *ilusión* de colapso se hace aparente

$$|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |A_0\rangle \xrightarrow{H_{int}} \frac{1}{\sqrt{2}} [|0\rangle \otimes |A_0\rangle + i |1\rangle \otimes |A_1\rangle] = |\Psi_t\rangle, \quad (2.4)$$

puesto que cada vez que el aparato es encontrado en el estado $|A_0\rangle$, el sistema está en el estado $|0\rangle$, mientras que cuando el aparato es encontrado en el estado $|A_1\rangle$, el sistema está en el estado $|1\rangle$. El estado del sistema se encuentra ahora inseparablemente correlacionado – *entrelazado* – con el estado del aparato.

A primera vista puede parecer que el problema de la medición en mecánica cuántica ha sido así resuelto. Indudablemente, la mecánica cuántica predice una correlación del 100% entre el estado del sistema y el del aparato.

Sin embargo, lo que ha medido el aparato no es tan evidente como pareciera, pues si en lugar de emplear la base $\{|A_0\rangle, |A_1\rangle\}$, empleamos una base alternativa $\{|A_+\rangle, |A_-\rangle\}$ para el aparato, definida por

$$|A_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|A_0\rangle \pm |A_1\rangle), \quad (2.5)$$

el estado $|\Psi_t\rangle$ puede reescribirse como

$$|\Psi_t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \otimes |A_+\rangle + |-\rangle \otimes |A_-\rangle), \quad (2.6)$$

donde los estados $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$ definen la nueva base para el sistema S . Por lo tanto, también hay una correlación del 100% entre el estado del aparato y el del sistema en una base completamente diferente. La pregunta “¿Qué observable ha medido el aparato?” no tiene una respuesta unívoca: depende de la descomposición elegida para $|\Psi_I\rangle$.

La libertad para elegir una base arbitraria está garantizada por el principio de superposición. Se concluye entonces que todo lo que puede lograrse con esta interacción es llevar al aparato a un estado que *entrelace* todas las posibles *alternativas* del mismo consistentes con el estado inicial. En el caso general de la ecuación (2.1), la naturaleza *entrelazada* de este estado se hace evidente si reescribimos la suma en una base diferente

$$|\Psi_I\rangle = \sum_i \alpha_i |s_i\rangle |A_i\rangle = \sum_i \beta_i |r_i\rangle |B_i\rangle = |\Psi_I\rangle \quad (2.7)$$

Por lo tanto, si quisiéramos asociar el estado del aparato con un estado en la descomposición de $|\Psi_I\rangle$, debemos entonces *antes de realizar la medición* decidir qué descomposición de $|\Psi_I\rangle$ emplearemos, puesto que un cambio en la base del aparato corresponde a un cambio en la propiedad a medir: si empleamos la base $\{|A_i\rangle\}$ mediremos el observable $\hat{s} = \sum_i s_i |s_i\rangle \langle s_i|$ del sistema, mientras que si empleamos la base $\{|B_i\rangle\}$ mediremos el observable $\hat{r} = \sum_i r_i |r_i\rangle \langle r_i|$ ^{*}. El aparato, por estar correlacionado con el sistema, contiene no sólo información sobre el observable $\hat{s}$ del mismo, sino también sobre *cualquier* otro observable definido sobre su espacio de Hilbert, aún uno que no conmute con $\hat{s}$. Estas predicciones de la Teoría Cuántica para el proceso de medición se corresponden con la no separabilidad en la paradoja de Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) (Einstein et al., 1935)[†].

Transferencia de información

El ejemplo elegido para ilustrar los problemas que surgen en el modelo cuántico del proceso de medición permite también mostrar otra particularidad del mismo. En el contexto de computación cuántica la interacción involucrada en la medición bit por bit es conocida como la versión cuántica

^{*}La denominación *estados relativos* tiene su origen en la Interpretación de Universos Múltiples de Everett (MWI). La ecuación (2.7) define el conjunto de estados $\{|s_i\rangle\}$ (normalizados pero en general no mutuamente ortogonales) del sistema S , *relativos* a la base del aparato $\{|A_i\rangle\}$ arbitrariamente elegida. De la misma manera, los estados $|r_i\rangle$ son los estados del sistema relativos a la base $|B_i\rangle$ del aparato. En el ejemplo de la medición bit por bit de esta sección, los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ son los *estados relativos* del sistema, relativos a la base del aparato $\{|A_0\rangle, |A_1\rangle\}$ que fue arbitrariamente elegida.

[†]En el experimento de EPR aunque el haz de spines ha sido dividido dentro del dispositivo Stern-Gerlach en dos haces bien separados, uno de ellos portando definitivamente $\text{spin } \uparrow$ y el otro $\downarrow$, una vez que los haces han sido recombinados a la salida del dispositivo el átomo-detector puede proveernos información correcta y determinada acerca de la alineación del spin con respecto a otras direcciones, es decir, sobre observables diferentes de σ_z . Esto es así a pesar de que los observables σ_z y (por ejemplo) σ_y no conmutan.

de la operación lógica “controlled not” o **c-not**. Clásicamente, **c-not** altera el estado del aparato A cuando el sistema se encuentra en el estado 1, caso contrario el estado del aparato no es modificado[‡]

$$\begin{array}{ll} 0 A_0 \longrightarrow 0 A_0 & 1 A_0 \longrightarrow 1 A_1 \\ 0 A_1 \longrightarrow 0 A_1 & 1 A_1 \longrightarrow 1 A_0 \end{array} \quad (2.8)$$

La operación cuántica **c-not** se deriva inmediatamente de la versión cuántica de (2.8), con la única diferencia de permitir superposiciones arbitrarias de los estados del sistema y aparato

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (\gamma|A_0\rangle + \delta|A_1\rangle) \implies \alpha|0\rangle \otimes (\gamma|A_0\rangle + \delta|A_1\rangle) + \beta|1\rangle \otimes (\gamma|A_1\rangle + \delta|A_0\rangle). \quad (2.9)$$

En el **c-not** clásico la transferencia de información tiene una dirección siempre consistente con la designación de roles de los dos sistemas participantes. El estado del sistema permanece inalterado mientras el estado aparato se altera condicionalmente, ecuación (2.8)[§]. Pero aunque la tabla de verdad del **c-not** cuántico, que se deduce de (2.9), es esencialmente la misma que (2.8), la posibilidad de superposiciones hace que la dirección de la transferencia de información sea *ambigua*. Esto puede verse claramente si se emplea la base conjugada (en donde las *fases* entre los estados base son definidas) tanto para el sistema como para el aparato. $|\pm\rangle = (|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$ y $|A_{\pm}\rangle = (|A_0\rangle \pm |A_1\rangle)/\sqrt{2}$. La ecuación (2.9) escrita en esta base conduce a una nueva tabla de verdad

$$\begin{array}{ll} |\pm\rangle |A_+\rangle & \longrightarrow |\pm\rangle |A_+\rangle \\ |\pm\rangle |A_-\rangle & \longrightarrow |\mp\rangle |A_-\rangle \end{array}$$

Es decir, en la base conjugada los roles del sistema y el aparato se han intercambiado! El estado del antiguo aparato permanece inalterado en la nueva base mientras el estado del antiguo sistema es alterado condicionalmente[¶].

Así pues, cuando analizamos el problema de la medición con un modelo sistema-aparato completamente cuántico, no sólo no es claro cuál es el observable que el aparato está midiendo, sino que tampoco puede uno asegurar quién está midiendo y quién está siendo medido!

[‡]En computación cuántica suele denominarse *bit-blanco* al sistema que juega el rol de aparato, y *bit-control* al que juega el rol de sistema

[§]La interacción que define al **c-not** cuántico es justamente la ecuación (2.2). Esta interacción altera condicionalmente el estado del aparato dejando al estado del sistema invariante, justamente porque el observable medido por el aparato, $\hat{s} = s_0|0\rangle\langle 0| + s_1|1\rangle\langle 1|$ conmuta con H_{int} , y es por consiguiente una constante de movimiento.

[¶]Si se reescribe la forma de la interacción (2.2) como $H_{int} = \frac{g}{2}|1\rangle\langle 1| \otimes (\mathbf{1}_A - |A_0\rangle\langle A_1| - |A_1\rangle\langle A_0|) = g|1\rangle\langle 1| \otimes |A_-\rangle\langle A_-|$, la razón para esta inmunidad de los estados $|A_+\rangle, |A_-\rangle$ es evidente, puesto que claramente el observable $\hat{A} = a_+|A_+\rangle\langle A_+| + a_-|A_-\rangle\langle A_-|$ es una constante del movimiento ya que conmuta con el Hamiltoniano H_{int} .

¿Puede encontrarse un aparato en un estado no-clásico?

Por último, analicemos otra propiedad de los estados de nuestro aparato cuántico, su no clasicidad. La libertad en la elección de las bases del espacio de Hilbert de los sistemas involucrados permite elegir de manera arbitraria el observable a medir sobre el sistema S y a través de (2.1) serán seleccionados los correspondientes estados de A . Éstos serán, para casi toda elección de la descomposición de $|\Psi_t\rangle$ completamente no-clásicos y además dependerán del estado inicial del sistema. En el dominio cuántico tal situación no es sorprendente, más aún, es común y ha sido experimentalmente verificada: Monroe *et al.* (Monroe et al., 1996) han podido establecer correlaciones entre los estados internos $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$ de un ion con su localización $|L\rangle$, $|R\rangle$, de manera que el estado tiene la forma

$$\Psi_{ion} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \otimes |L\rangle + |-\rangle \otimes |R\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle \otimes (|L\rangle + |R\rangle) + |\downarrow\rangle \otimes (|L\rangle - |R\rangle)\}, \quad (2.10)$$

donde $|\pm\rangle = (|\uparrow\rangle \pm |\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$. Escrito de la primera forma el ion puede estar en una de sus dos posibles localizaciones, dependiendo de su estado interno definido como una superposición de los estados base y excitado; en la segunda los estados internos naturales del ion están correlacionados con estados claramente no-clásicos, superposiciones del mismo en dos localizaciones diferentes. Monroe *et al.* han logrado medir el estado interno del ion en la segunda descomposición y verificaron que éste se encuentra efectivamente en una superposición de las localizaciones $|L\rangle$, $|R\rangle$ con signo positivo o negativo, es decir, en estados de la forma “Gato de Schrödinger” par o impar. Si las leyes de la Mecánica Cuántica fuesen universalmente válidas, estados no-clásicos debieran ser lo normal en un aparato que mide un sistema cuántico, aún siendo éste macroscópico.

Resumiendo, el modelo del proceso de medición discutido en esta sección adolece de tres problemas: no está claro qué observable mide el aparato; los roles del sistema y el aparato son intercambiables; y los estados posibles del aparato luego de realizada la medición, aún cuando los sistemas que intervengan en el proceso sean macroscópicos, son definitivamente no-clásicos.

Estos tres puntos representan un problema pues contradicen todo lo que nuestra percepción de la realidad indica. Por un lado, en aparatos macroscópicos reales, el estado del mismo está bien definido, es decir, es un estado clásico y no una superposición coherente de los posibles resultados de la medición. También observamos que la elección de qué observable ha medido un aparato no puede hacerse arbitrariamente y *sabemos* que la Mecánica Cuántica no permite la medición simultánea y con precisión arbitraria de dos observables que no conmutan. Un aparato real (macroscópico) construido para medir momento, mide efectivamente momento y no su observable conjugado, posición. Y, por supuesto, nunca se presenta una ambigüedad en los roles del aparato

y el sistema.

Entender porqué esto sucede es el objetivo de la interpretación de la Teoría Cuántica. En la interpretación de Copenhagen el aparato es por definición clásico y entonces estos problema nunca surgen. Pero, si se insiste en la universalidad de la Teoría Cuántica, tal como en la interpretación de Universos Múltiples de Everett (MWI) (Everett, 1957), estos inconvenientes aparecen inmediatamente. Sin embargo esta última teoría interpretativa falla también al no dar una explicación satisfactoria al aparente colapso de la función de onda. Everett y sus seguidores intentaron desviar la atención sobre este problema insistiendo que uno sólo debiera discutir correlaciones. Ciertamente, las correlaciones están en el centro del problema. Pero lo que se necesita saber no es cómo calcularlas, puesto que ya sabemos hacerlo con la Teoría Cuántica tal como está, sino entender porqué algunos estados retienen las correlaciones y la mayoría no, a pesar del principio de superposición, implícito en (2.1), que garantiza la libertad de elegir arbitrariamente una base del espacio de Hilbert. O, dicho de otra manera, se necesita entender porqué en general los estados pierden su característico *entrelazamiento* cuántico pero retienen selectivamente correlaciones clásicas, que son también cuánticas en origen, pero que consistentemente siempre seleccionan la misma base de estados cuánticos, violando así el espíritu del principio de superposición.

Cabe preguntarse, entonces, qué determina, en los aparatos macroscópicos reales, la existencia de esta base aparentemente única $\{|A_p\rangle\}$, que denominaremos base de *estados punteros*, que registra los correspondientes estados relativos $\{|p\rangle\}$ del sistema.

La interacción con el entorno es la característica que distingue al modelo correcto del proceso de medición. Tal como mostró originalmente Zurek (Zurek, 1981), un aparato, debido a su continua interacción con el *entorno* que lo monitorea, no puede ser observado en una superposición de *estados punteros*. Estos estados emergen naturalmente como la base preferencial que nuestra intuición indica.

2.2 Correlaciones cuánticas y clásicas

¿Qué clase de correlaciones esperamos aparezcan en el estado del sistema? Nuestra experiencia (clásica) indica que, aún cuando no sabemos el resultado de una medida, sí tenemos certeza de cuáles son las alternativas. Esto no es así para un sistema cuántico descrito por $|\Phi_t\rangle$, como mostramos en la Sección anterior. ¿Cómo puede un observador que todavía no ha consultado el aparato, expresar su ignorancia acerca del resultado de la medida y simultáneamente expresar su certeza sobre las alternativas posibles? La herramienta correcta para expresar esta información es el operador densidad del sistema.

Imaginemos que dos pelotas, una roja y una verde, se colocan aleatoriamente en sendas cajas

idénticas numeradas 1 y 2. Si un observador mira una de las cajas y ve allí la pelota roja, sabrá con certeza cuál es la que queda en la otra caja. El estado de este sistema clásico conjunto puede describirse por el operador densidad,

$$\rho_{12} = \frac{1}{2} (|R\rangle\langle R|_1 \otimes |V\rangle\langle V|_2 + |V\rangle\langle V|_1 \otimes |R\rangle\langle R|_2), \quad (2.11)$$

que representa correctamente la información que poseemos: la certeza sobre las posibles alternativas – el observador encontrará en la caja 1 o bien la pelota roja R o bien la verde V –; la correlación entre los contenidos de las cajas – si en la caja 1 encuentra la pelota roja, en la otra, con certeza, encontrará la verde –; y finalmente, nuestra ignorancia (clásica) acerca de cuál alternativa se dará en realidad. Una matriz densidad representando los resultados de un aparato correlacionado con un sistema que está siendo medido, *debería* tener la misma forma. Por el contrario, el operador densidad ρ_t asociado al estado $|\Psi_t\rangle$ dado por la ecuación (2.4)

$$\begin{aligned} \rho_t = |\Psi_t\rangle\langle\Psi_t| = \frac{1}{2} (&|0\rangle\langle 0| \otimes |A_0\rangle\langle A_0| - i|0\rangle\langle 1| \otimes |A_0\rangle\langle A_1| \\ &+ i|1\rangle\langle 0| \otimes |A_1\rangle\langle A_0| + |1\rangle\langle 1| \otimes |A_1\rangle\langle A_1|), \end{aligned} \quad (2.12)$$

posee, además de los términos que se desean, términos no diagonales que hacen que las posibles alternativas clásicas ya no sean independientes, y lo que es peor tampoco determina cuáles son las alternativas posibles. Von Neumann (Von Neumann, 1955), consciente de estas dificultades, postuló que además de la evolución unitaria que nos conduce al operador ρ_t , es necesaria la existencia de un proceso *ad hoc*, una reducción no unitaria del estado del sistema, que transforma al estado puro $|\Psi_t\rangle$ en una mezcla apropiada

$$\rho_t = |\Psi_t\rangle\langle\Psi_t| \xrightarrow{\text{proc. no unitario}} \frac{1}{2} (|0\rangle\langle 0| \otimes |A_0\rangle\langle A_0| + |1\rangle\langle 1| \otimes |A_1\rangle\langle A_1|) = \rho_r, \quad (2.13)$$

en donde ahora los coeficientes del operador ρ_r pueden ser interpretados como probabilidades clásicas, en el mismo sentido que en la ecuación (2.11).

Pero esta imposición arbitraria no es necesaria. Zurek propuso (Zurek, 1981; Zurek, 1982) que el exceso de información contenido en un estado puro como el descrito por ρ_t puede ser efectivamente eliminado abriendo el sistema a la interacción con grados de libertad externos al mismo, a los que nos referiremos como *el entorno*.

2.3 Decoherencia y la emergencia del modelo clásico

Usualmente se da por sentado que un aparato mide efectivamente (ya sea perfecta o imperfectamente) un observable particular determinado del sistema. Sin embargo, la Mecánica Cuántica aplicada a sistemas compuestos aislados (aparato-sistema), no puede en principio determinar qué

observable ha sido medido. más aún, tampoco son unívocos los roles desempeñados por los subsistemas del sistema compuesto (aparato-sistema) ya que éstos pueden intercambiarse, según se mostró en la Sección 2.1.

La posibilidad de una solución natural a este problema surge cuando uno reconoce que:

- (a) El aparato A interactúa con su entorno $\mathcal{E}$ mediante un Hamiltoniano específico $H_{A\mathcal{E}}$ y
- (b) el observador consulta *sólo* el resultado de la medición del aparato y *no* el estado del entorno.

En estas condiciones la interacción aparato-entorno puede ser considerada como un proceso adicional de medición, tal como el proceso (2.1), que establece correlaciones no-separables entre ambos. Como resultado, la información acerca del entorno (usualmente considerada como ruido) destruye la información acerca del sistema recién pre-medido S . Sin embargo, como mostraremos en esta Sección, eligiendo adecuadamente el Hamiltoniano de esta nueva interacción $H_{A\mathcal{E}}$, los *estados punteros* del aparato *emergen* como los únicos estados no perturbados por la interacción con el entorno. Y consecuentemente, los correspondiente *estados relativos* del sistema, correlacionados unívocamente con los estados punteros, determinan fehacientemente qué observable ha sido medido por el aparato.

2.3.1 El entorno

Definimos al *entorno* de un sistema como el conjunto de grados de libertad acoplados con el mismo y que pueden, por consiguiente, ‘monitorear’ sus estados, es decir, en el sentido de la ecuación (2.1), entrelazarse con éstos. Un *entorno* puede ser externo (como las partículas del aire, o los fotones que se dispersan al interactuar con el aparato) o interno (como por ejemplo los fonones u otras excitaciones en los materiales con los que está construido un aparato). Frecuentemente, los grados de libertad del *entorno* surgen de la división de los grados de libertad originales en dos partes: el sistema de interés por un lado, y lo que resta por otro. En el problema de la medición, el entorno puede definirse como aquellos grados de libertad que contribuyen significativamente a la evolución del estado del aparato. Para un determinado dispositivo experimental, un criterio posible para determinar cuáles grados de libertad pueden considerarse como el entorno podría estar basado en la intensidad de la interacción entre el aparato y el posible entorno. El objetivo de tal criterio es excluir todos aquellos grados de libertad cuya contribución total a la interacción aparato-entorno puede ser despreciada a fines prácticos. Eventualmente podríamos distinguir entre el entorno más inmediato $\mathcal{E}$ y “el resto del mundo” o entorno remoto $\mathcal{R}$, que no necesita ser tomado en cuenta. La interacción entre $\mathcal{E}$ y $\mathcal{R}$ puede ser intensa en general, pero no será tomada en cuenta en los análisis que haremos pues sólo complicaría los argumentos que serán presentados sin alterar significativamente las conclusiones. Esto es, consideraremos al entorno $\mathcal{E}$ aislado del resto del Universo, y así entonces una base $\{|\epsilon\rangle\}$ que expanda su espacio de Hilbert puede ser

introducida en forma apropiada.

Tres sistemas cuánticos, el sistema medido S , el aparato A y el entorno $\mathcal{E}$, y las correlaciones entre los mismos serán el objeto de la discusión que sigue. En el proceso de medición cuántica, S y A estarán acoplados. El *entrelazado* cuántico entre ambos sistemas, producto de la evolución unitaria del sistema conjunto S - A , será convertido en una correlación efectiva clásica como resultado de la interacción entre el aparato A y el entorno $\mathcal{E}$. Los estados *seleccionados por el entorno* son el foco de interés. En el aparato A , éstos servirán como depósito de información, funcionando como *estados punteros* del aparato. Este triángulo $SA\mathcal{E}$ es necesario para un estudio cuidadoso de la pérdida de coherencia (o decoherencia) del estado $|\Psi_t\rangle$ y sus consecuencias.

2.3.2 Modelos de decoherencia

Medición bit por bit

El modelo más simple de decoherencia involucra tres sistemas de dos estados (Zurek, 1981; Zurek, 1993), denominados S , A y $\mathcal{E}$ en una obvia referencia a sus respectivos roles. Tal como en la Sección 2.1, el proceso de medición comienza con la interacción del sistema con el aparato

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes |A_0\rangle \longrightarrow \alpha|0\rangle \otimes |A_0\rangle + \beta|1\rangle \otimes |A_1\rangle = |\Phi\rangle, \quad (2.14)$$

en donde $\langle A_0|A_1\rangle = 0$. La ecuación (2.14) es un ejemplo de una *premedición* tal como la descripta por la ecuación (2.4). Como ya fue discutido anteriormente, lograr un estado correlacionado de esta forma no es suficiente para afirmar que una medición ha tenido lugar. El estado $|\Phi\rangle$ puede reescribirse en cualquier base del espacio de Hilbert del sistema S ; el principio de superposición garantiza la existencia de los estados puros correspondientes del aparato. Esta ambigüedad de la base seleccionada puede evitarse con la ayuda de un sistema adicional, $\mathcal{E}$, que realiza a su vez una premedición sobre A durante un tiempo $g_{\mathcal{E}}t = \hbar\pi$, donde $g_{\mathcal{E}}$ es la constante de acoplamiento entre el aparato y su entorno en una interacción definida de manera muy similar a (2.2). Como resultado

$$(\alpha|0\rangle \otimes |A_0\rangle + \beta|1\rangle \otimes |A_1\rangle) \otimes |c_0\rangle \longrightarrow \alpha|0\rangle \otimes |A_0\rangle \otimes |c_0\rangle + \beta|1\rangle \otimes |A_1\rangle \otimes |c_1\rangle = |\Psi\rangle. \quad (2.15)$$

Puede parecer que poco puede lograrse repitiendo el paso que condujo a las correlaciones del par S - A y sus problemas asociados, pero, por el contrario, este no es el caso. Tres sistemas cuánticos correlacionados ya no están sujetos a la ambigüedad de la base tal como en $|\Phi\rangle$. Esto es especialmente así cuando los estados del entorno están correlacionados con los productos de los estados de la combinación sistema-aparato (Zurek, 1981). En la ecuación (2.15) esto puede

garantizarse (*independientemente* de los valores de α y β , esto es, de las condiciones iniciales) si^{ll},

$$\langle \epsilon_0 | \epsilon_1 \rangle = 0. \quad (2.16)$$

Cuando esta condición se satisface, la descripción del par S - A puede obtenerse fácilmente en término de la matriz densidad reducida

$$\rho_{SA} = \text{Tr}_{\mathcal{E}} |\Psi\rangle\langle\Psi| = |\alpha|^2 |0\rangle\langle 0| \otimes |A_0\rangle\langle A_0| + |\beta|^2 |1\rangle\langle 1| \otimes |A_1\rangle\langle A_1|. \quad (2.17)$$

Esta matriz densidad contiene sólo términos que corresponden a correlaciones clásicas, como en la ecuación (2.13).

Si la condición (2.16) no fuese satisfecha, es decir, si los estados ortogonales del entorno no estuvieran correlacionados con el aparato en la base en la cual fue realizada la premedición original (entre A y S), entonces sobre la diagonal de la matriz densidad ρ_{AS} aparecerían sumas de productos en vez de simplemente productos de estados de S y A . Un ejemplo extremo de esta situación es la matriz densidad antes de la premedición efectuada por el entorno sobre el aparato, que corresponde al estado puro $|\Phi\rangle$ de la ecuación (2.14)

$$\begin{aligned} \rho_t = |\Phi\rangle\langle\Phi| = & |\alpha|^2 |0\rangle\langle 0| \otimes |A_0\rangle\langle A_0| + \alpha\beta^* |0\rangle\langle 1| \otimes |A_0\rangle\langle A_1| \\ & + \alpha^*\beta |1\rangle\langle 0| \otimes |A_1\rangle\langle A_0| + |\beta|^2 |1\rangle\langle 1| \otimes |A_1\rangle\langle A_1|, \end{aligned} \quad (2.18)$$

que posee términos fuera de la diagonal, responsables de que las diferentes alternativas clásicas ya no sean independientes. La eliminación de estos términos como consecuencia de la interacción con el entorno marca la desaparición de la ambigüedad en la base.

Vemos así que no es necesario el proceso no unitario que introdujo arbitrariamente von Neumann, ya que la decoherencia naturalmente se encarga de eliminar el exceso de información del estado puro contenido en los términos fuera de la diagonal o coherencias, reduciéndolo a una mezcla apropiada que sólo contiene las deseadas correlaciones clásicas. La desaparición de la coherencia cuántica debida a una medición de un bit ha sido experimentalmente verificada en interferometría de neutrones y, más recientemente, de átomos (Rauch, 1998; Chapman et al., 1995).

En este modelo es fácil caracterizar a los estados punteros del aparato: para que estos estados punteros permanezcan inalterados, el Hamiltoniano de la interacción H_{AE} debe tener la estructura de una premedición, como en la ecuación (2.2) y debe ser una función del observable $\hat{A} = a_0|A_0\rangle\langle A_0| + a_1|A_1\rangle\langle A_1|$ del aparato. Entonces, los estados del entorno contendrán información sobre los estados punteros $\{|A_0\rangle, |A_1\rangle\}$. La condición $[H_{AE}, \hat{A}] = 0$ inmediatamente implica que los estados del aparato no son alterados pues $\hat{A}$ es una constante del movimiento.

^{ll}Esta condición puede comprobarse fácilmente simplemente escribiendo $|\Psi\rangle$ en otra base y verificando que no hay ambigüedad solamente si se cumple la ecuación (2.16). Caso contrario y dependiendo de la condición inicial, será posible escribir a $|\Psi\rangle$ en un estado entrelazado de otra base, tal como en (2.15).

Para este modelo tan simple de entorno, y dependiendo de la duración de la interacción aparato-entorno, el estado al que el sistema conjunto SDE evoluciona podría, periódicamente, hacerse independiente del mismo, con lo cual otra vez nos encontraríamos con el problema de no saber qué es lo que el aparato ha medido. Este problema puede evitarse únicamente si el modelo de entorno se hace más realista, incorporando muchos grados de libertad (Zurek, 1982). Hasta aquí nuestro objetivo ha sido simplemente ilustrar cómo el proceso de decoherencia tiene lugar, utilizando para ello un modelo discreto muy sencillo de entorno. Con esta elección obviamos las dificultades propias de considerar un entorno más realista, que de todas maneras no alteraría en esencia los resultados obtenidos. Cuando el modelo de entorno involucra muchos grados de libertad, el proceso de decoherencia se acerca más a una situación realista de decoherencia continua. A continuación presentamos un ejemplo en donde el entorno está representado por N spines.

Entorno de N estados

Consideremos la decoherencia de un único bit cuántico (**qu-bit**) (Zurek, 1982; Paz et al., 2001), para lo cual describimos ahora la interacción de un aparato de dos estados $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ (nótese las negritas, que empleamos para evitar los subíndices) con un entorno de N spines, que pueden pensarse como sistemas de dos estados $\{|0\rangle_k, |1\rangle_k\}$. El ejemplo más simple de esta situación ocurre cuando el Hamiltoniano del aparato puede despreciarse $H_A = 0$ y la interacción tiene la forma

$$H_{AE} = (|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|) \otimes \sum_k g_k (|0\rangle\langle 0|_k - |1\rangle\langle 1|_k). \quad (2.19)$$

Bajo la influencia de este Hamiltoniano el estado inicial

$$|\Phi(0)\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes \prod_{k=1}^N (\alpha_k |0\rangle_k + \beta_k |1\rangle_k), \quad (2.20)$$

evoluciona a

$$|\Phi(t)\rangle = a|0\rangle \otimes |\mathcal{E}_0(t)\rangle + b|1\rangle \otimes |\mathcal{E}_1(t)\rangle, \quad (2.21)$$

donde

$$|\mathcal{E}_0(t)\rangle = \prod_{k=1}^N (\alpha_k \exp(i g_k t) |0\rangle_k + \beta_k \exp(-i g_k t) |1\rangle_k) = |\mathcal{E}_1(-t)\rangle. \quad (2.22)$$

La matriz densidad reducida del **qu-bit** es entonces

$$\rho_A = |a|^2 |0\rangle\langle 0| + ab^* r(t) |0\rangle\langle 1| + a^* b r(t) |1\rangle\langle 0| + |b|^2 |1\rangle\langle 1|. \quad (2.23)$$

El coeficiente $r(t)$, que determina el tamaño relativo de los términos fuera de la diagonal, está dado por

$$r(t) = \langle \mathcal{E}_0 | \mathcal{E}_1 \rangle = \prod_{k=0}^N [\cos(2g_k t) + i(|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2) \sin(2g_k t)]. \quad (2.24)$$

A menos que el k -ésimo spin del entorno esté inicialmente en un autoestado del Hamiltoniano de la interacción, su contribución al producto es menor que uno. Por consiguiente, para entornos grandes con muchos (N) spines y para tiempos largos, los términos fuera de la diagonal serán típicamente pequeños

$$|r(t)|^2 \approx 2^{-N} \prod_{k=1}^N [1 + (|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2)^2]. \quad (2.25)$$

Es posible representar visualmente el proceso de decoherencia para un **qu**-bit. La matriz densidad de todo sistema de dos estados puede representarse como un punto en el interior o en la superficie de una esfera de Bloch (Figura 2.1). En término de los coeficientes a , b y $r(t)$, las coordenadas del punto son $z = |a|^2 - |b|^2$, $x = \mathcal{R}e(ab^*r)$ e $y = \mathcal{I}m(ab^*r)$. Cuando el estado es puro, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, es decir, estados puros están en la superficie de la esfera de Bloch. Cuando el estado es una mezcla, el punto que lo representa se encuentra en el interior de la misma. La decoherencia no afecta a o b , y por lo tanto la evolución de la matriz densidad, que inicialmente corresponde a un estado puro, ocurrirá sobre un plano con z constante. El punto representando el estado del sistema estará a una fracción $|r(t)|$ de su distancia máxima.

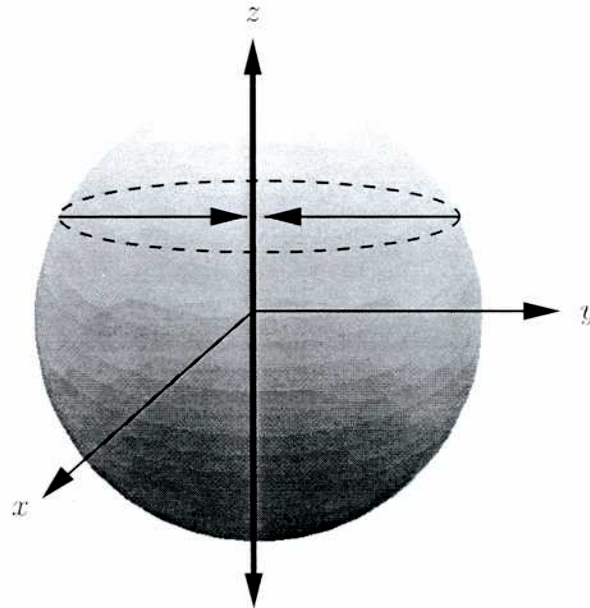


Figura 2.1: Esfera de Bloch representando las matrices densidades de un sistema de dos estados. Puntos en la superficie corresponden a estados puros, mientras que un estado mezcla está representado por un punto en el interior de la esfera. La decoherencia ocurre sobre un plano $z = \text{constante}$, emergiendo en el proceso los estados punteros que están representados por los puntos $(0, 0, 1)$ y $(0, 0, -1)$ sobre el eje z .

El número complejo $r(t)$ puede expresarse como la suma de fases complejas rotando con las frecuencias dadas por diferencias $\Delta\omega_j$ entre los autovalores de energía del Hamiltoniano de interacción, pesados con las probabilidades de encontrar esos autoestados de energía en el estado inicial

$$r(t) = \sum_{j=1}^{2^N} p_j \exp(-i\Delta\omega_j t). \quad (2.26)$$

El índice j denota la parte correspondiente al entorno de los autoestados de energía del Hamiltoniano de interacción (2.19). $|j\rangle = |0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 \otimes \cdots \otimes |0\rangle_N$. Las correspondientes diferencias de autovalores entre dos autoestados de energía $|0\rangle|j\rangle$ y $|1\rangle|j\rangle$ son

$$\Delta\omega_j = \langle 0|\langle j|H_{AE}|j\rangle|1\rangle. \quad (2.27)$$

Hay 2^N estados $|j\rangle$ diferentes y, suponiendo no hay degeneración, el mismo número de $\Delta\omega_j$ diferentes. Las probabilidades p_j son entonces

$$p_j = |\langle j|\mathcal{E}(t=0)\rangle|^2, \quad (2.28)$$

que a su vez pueden expresarse fácilmente en término de los cuadrados de α_k y β_k apropiados.

La evolución de $r(t)$ (2.26) es una consecuencia de las rotaciones de los vectores complejos $p_k \exp(-i\Delta\omega_j t)$ con frecuencias diferentes. El $r(t)$ resultante comenzará con una amplitud 1 y rápidamente se reducirá a un valor aproximadamente igual a

$$\langle |r(t)|^2 \rangle = \sum_{j=1}^{2^N} p_j^2 \sim 2^{-N} \quad (2.29)$$

En este sentido la decoherencia es exponencialmente efectiva con el número de sistemas: términos fuera de la diagonal decrecen exponencialmente con el tamaño físico del entorno N . Cualquier estado inicial se acercará asintóticamente al eje z como resultado de la decoherencia.

Estructura clásica dentro del espacio de Hilbert

La geometría de los flujos inducidos por la decoherencia dentro de la esfera de Bloch exhibe características que también se presentan en situaciones físicas más generales, que involucran decoherencia en espacios de Hilbert más grandes. Estas características son:

- (i) Existencia de estados puros casi clásicos que consisten en todos los estados punteros seleccionados por el entorno, quienes se ven mínimamente afectados por el entorno.
- (ii) Existencia de un dominio clásico de distribución de probabilidades, que consiste en todas las

mezclas de estados punteros.

(iii) Existencia de un dominio cuántico que consiste en matrices densidad más generales. Como resultado de la decoherencia esta parte del espacio de Hilbert es eliminada por la selección inducida por el entorno, *emergiendo* naturalmente el dominio clásico.

La visualización de esta descomposición del espacio de Hilbert inducida por la decoherencia es posible en el caso bidimensional estudiado aquí, en donde los estados punteros son los estados $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ que en este caso permanecen inalterados por el entorno, el dominio clásico corresponde al segmento $[-1, 1]$ del eje z , y el resto de la esfera de Bloch constituye el dominio cuántico. Sin embargo, la existencia de los elementos (i)-(iii) es general y caracteriza la clasicalización de la dinámica.

Una distinción clara entre el dominio clásico y el resto del espacio de Hilbert es posible sólo en situaciones idealizadas. En una situación realista todo lo que puede requerirse es que haya un contraste claro entre las tasas de producción de entropía dentro y fuera del dominio clásico. Para situaciones más generales que las discutidas en los modelos de decoherencia de las secciones previas, como por ejemplo en el caso de sistemas caóticos, veremos en el Capítulo 4 que dentro del dominio clásico hay producción de entropía a una tasa más lenta que la observada fuera del mismo. Notablemente, esta tasa está fijada por la dinámica clásica, es decir, por el Hamiltoniano del sistema y no por el acoplamiento con el entorno. Esta distinción entre las tasas de producción de la entropía fue conjeturada hace ya un tiempo por Paz y Zurek (Zurek et al., 1994) y confirmada numéricamente en el curso de esta Tesis.

2.3.3 Decoherencia y c-shifts

La discusión de las secciones anteriores puede generalizarse a situaciones donde tanto el sistema como el aparato y el entorno tengan muchos estados y donde las interacciones entre ellos sean más complicadas. Supondremos aquí que el sistema se encuentra aislado y que interactúa con el aparato sólo brevemente. Como resultado de tal interacción el estado del aparato se entrelaza con el del sistema, $[\sum_i \alpha_i |s_i\rangle] \otimes |A_0\rangle \rightarrow \sum_i \alpha_i |s_i\rangle \otimes |A_i\rangle$. Por analogía con un **c-not** nos referimos a esta operación condicional como un **c-shift** (Paz et al., 2001; Zurek, 2001). Esta correlación cuántica sufre de la misma ambigüedad de la base discutida previamente: el entrelazamiento entre S y A implica que por cada estado puro de alguno de los dos sistemas, existe el correspondiente estado puro del otro sistema. Más aún, eligiendo adecuadamente el estado inicial del sistema, los roles del sistema y aparato pueden invertirse. Estas ambigüedades para el par S - A pueden evitarse reconociendo el rol del entorno.

En la Figura 2.2a se representa el proceso de decoherencia esquemáticamente, como una secuen-

La ventaja de la representación gráfica del proceso de decoherencia como una secuencia de **c-shifts** reside en su simplicidad. Sin embargo, en la realidad el proceso de decoherencia es usualmente continuo, de manera tal que puede ser quebrado en **c-shifts** discretos sólo aproximadamente. Más aún, la información que almacena el entorno se encuentra usualmente distribuída entre muchos grados de libertad. Y además el observable del aparato podría estar sujeto a ruido y no solamente decoherencia, tal como se ilustra en la Figura 2.2b (Zurek, 2001).

La física básica de la decoherencia consiste en una simple premedición del entorno sobre el aparato, como resultado de su interacción con el mismo

$$|\Psi_{SA}\rangle \otimes |\epsilon_0\rangle = \left(\sum_j \alpha_j |s_j\rangle \otimes |A_j\rangle \right) \otimes |\epsilon_0\rangle \rightarrow \sum_j \alpha_j |s_j\rangle \otimes |A_j\rangle \otimes |\epsilon_j\rangle = |\Phi_{SA\mathcal{E}}\rangle. \quad (2.30)$$

La decoherencia selecciona una base de estados punteros cuando los estados del entorno *relativos* a la misma son ortogonales

$$\langle \epsilon_i | \epsilon_j \rangle = \delta_{ij}. \quad (2.31)$$

Cuando esta condición de ortogonalidad se satisface, la descomposición de Schmidt del estado $|\Phi_{SA\mathcal{E}}\rangle$ en subsistemas SA y $\mathcal{E}$ nos conduce a obtener estados productos $|s_i\rangle \otimes |A_i\rangle$ como compañeros de los estados ortogonales del entorno $|\epsilon_i\rangle$. La matriz densidad que describe el par S - A conteniendo sólo correlaciones clásicas es entonces

$$\rho_{SA}^D = \text{Tr}_{\mathcal{E}} |\Phi_{SA\mathcal{E}}\rangle \langle \Phi_{SA\mathcal{E}}| = \sum_j |\alpha_j|^2 |s_j\rangle \langle s_j| \otimes |A_j\rangle \langle A_j|, \quad (2.32)$$

que es diagonal en la base de estados producto $|s_i\rangle \otimes |A_i\rangle$.

Por simplicidad en la notación muchas veces no se hará referencia al sistema que no interactúa con el entorno (aquí, el sistema S). Sin embargo es muy útil tener siempre en mente que la preservación de las correlaciones entre S y A es el criterio empleado para definir los estados punteros. La matriz densidad de un único objeto evolucionando en contacto con el entorno será siempre diagonal en la misma base instantánea. Esta propiedad no debe ser empleada como único criterio para emergencia de clasicidad; más bien, es decisiva la habilidad de ciertos estados para retener correlaciones a pesar del acoplamiento con el entorno (Paz et al., 2001; Albrecht, 1993). Esto es especialmente obvio en mediciones cuánticas. Cuando la interacción entorno-aparato tiene la forma

$$H_{A\mathcal{E}} = \sum_p \sum_{\epsilon' > \epsilon} |A_p\rangle \langle A_p| \otimes \left(g_{\epsilon', \epsilon}^p |\epsilon\rangle \langle \epsilon'| + g_{\epsilon, \epsilon'}^{p*} |\epsilon'\rangle \langle \epsilon| \right). \quad (2.33)$$

la base $\{|A_k\rangle\}$ permanecerá inalterada. Entonces, cualquier correlación con los estados $\{|A_k\rangle\}$ será preservada. Y por definición, los estados del aparato que preserven correlaciones serán los estados

punteros. Cualquier observable $\hat{A}$ co-diagonal con el Hamiltoniano de interacción H_{AE} será un observable puntero posible, puesto que cuando el Hamiltoniano depende de $\hat{A}$, conmuta con $\hat{A}$, $[H_{AE}(\hat{A}), \hat{A}] = 0$. Más aún, la dependencia del Hamiltoniano de interacción con el observable es una precondition obvia para el “monitoreo” de ese observable por el entorno.

En procesos reales la decoherencia es un proceso continuo, y los modelos simples de medición ilustrados en este capítulo pueden ser considerados como una instancia discreta elemental de dicho proceso. La descripción del fenómeno de decoherencia en sistemas continuos recae totalmente en el uso de lo que se denomina *ecuación maestra*, una de las herramientas más prácticas para el análisis de sistemas abiertos. En el siguiente capítulo realizaremos una revisión de las técnicas más frecuentemente utilizadas para obtener dichas ecuaciones.

Capítulo 3

Dinámica de sistemas abiertos: ecuaciones maestras

El problema de la correspondencia entre los mundos clásico y cuántico no se limita al problema de la medición. Las predicciones de ambas teorías difieren, aún al nivel de los valores de expectación de observables de un sistema, luego de un tiempo t_h denominado tiempo de Ehrenfest. En sistemas clásicamente caóticos, esta escala temporal puede ser extremadamente corta pues depende sólo logarítmicamente de la constante de Planck. En este Capítulo analizamos el rol de la *decoherencia* y de la *selección inducida por el entorno* en el restablecimiento de la correspondencia cuántico-clásica en sistemas dinámicos. Nuestro análisis se basa en el estudio de las *ecuaciones maestras*, que gobiernan la evolución de la matriz densidad reducida del sistema. Estas ecuaciones posibilitan el estudio tanto de sistemas como de entornos con muchos grados de libertad, permitiendo entre otras cosas, generalizar el modelo discreto de entorno a modelos continuos más realistas.

El principio de superposición puede aplicarse solamente cuando el sistema cuántico que se estudia se encuentra aislado. Cuando el sistema está abierto, su interacción con el entorno resulta, inevitablemente, en un incesante monitoreo por el entorno de algunos de sus observables. Esto conduce a la degradación de estados iniciales puros en mezclas, cuyas matrices densidades son muy frecuentemente diagonales en la misma base de estados preferidos. Esta base resulta casi independiente del estado inicial del sistema y del entorno. Los estados preferidos son seleccionados con la ayuda crucial del Hamiltoniano de interacción entre el sistema y su entorno. El proceso de decoherencia *filtra* la totalidad del espacio de Hilbert del problema y sólo un pequeño conjunto de estados, los estados punteros, sobreviven a este proceso. Esta selección, conocida como *selección inducida por el entorno*, es la responsable de la emergencia de una realidad clásica a escalas macroscópicas.

Frecuentemente el conjunto de estados preferidos seleccionados por el entorno es denominado *base de estados punteros* en reconocimiento de su rol en el problema de la medición. El criterio para la selección de estos estados no puede basarse solamente en la diagonalización de la matriz densidad, cuyos autoestados emergen como los estados punteros. La característica esencial de los estados preferidos es su habilidad para sobrevivir el monitoreo del entorno. Este criterio heurístico puede hacerse riguroso cuantificando la predictibilidad de la evolución de los candidatos a estados clásicos (posibles estados punteros).

Las ecuaciones maestras son ecuaciones diferenciales en el operador densidad reducida ρ del sistema de interés $\mathcal{S}$. Este operador, que se obtiene tomando la traza del operador densidad total del universo σ sobre el espacio de Hilbert del entorno $\mathcal{E}$, $\rho = \text{Tr}_{\mathcal{E}}\sigma$, nos permitirá responder a todas las inquietudes de interés físico para el sistema $\mathcal{S}$ solamente. La ecuación de evolución de ρ puede obtenerse en principio resolviendo la ecuación de von Neumann para el operador densidad total, tomando luego la traza parcial. Sin embargo, este procedimiento es imposible de realizar analíticamente salvo en contados casos (Hu et al., 1992) y alguna aproximación debe hacerse en un momento u otro. En este Capítulo intentamos realizar una presentación clara y comprensible de ecuaciones maestras aproximadas, que nos conduzca rápidamente a las aproximaciones que emplearemos posteriormente en esta Tesis. Revisiones completas de ecuaciones maestras aproximadas pueden encontrarse en (Paz et al., 2001; Walls et al., 1994; Cohen-Tannoudji et al., 1992; Hänggi et al., 1998), entre otros.

Nos concentraremos en el esquema de aproximación más simple, que se basa en expansiones perturbativas en el acoplamiento sistema-entorno, que suponemos débil. Primeramente presentamos el esquema general perturbativo obteniendo una ecuación maestra aproximada que aplicamos luego a modelos concretos en las secciones siguientes. El Movimiento Browniano Cuántico, que servirá para introducir muchas de las nociones que acompañan al concepto de decoherencia y selección inducida por el entorno, se discute en la Sección 3.2. En las Secciones 3.3 y 3.4 presentamos las ecuaciones maestras que emplearemos en el Capítulo 5, la ecuación maestra en el límite de altas temperaturas, y la ecuación maestra en la base de Floquet de un sistema $\mathcal{S}$ que presenta una simetría traslacional temporal. Finalmente, en la Sección 3.5 discutimos algunos conceptos importantes como el *tiempo de decoherencia*, que es la escala temporal en que la decoherencia entra en juego, y el criterio de *predictibilidad*.

3.1 Cálculo perturbativo de la ecuación maestra

El procedimiento aquí descripto supone que la intensidad de la interacción entre el sistema y el entorno es pequeña, de modo que la teoría de perturbaciones pueda ser aplicada de la manera

usual. Consideremos el Hamiltoniano del sistema total

$$H = H_S + H_E + V. \quad (3.1)$$

donde H_S y H_E representan los Hamiltonianos del sistema y entorno respectivamente y V es el término que describe la interacción entre ambos. En la representación de interacción, la ecuación de von Neumann que nos da la evolución del operador densidad total σ se escribe

$$i\hbar \dot{\hat{\sigma}} = [\hat{V}(t), \hat{\sigma}]. \quad (3.2)$$

El símbolo $\hat{\cdot}$ sobre un operador indica que éste está en la representación de interacción, es decir $\hat{O}(t) = \hat{O}_I = U_0^\dagger O U_0$, con $U_0 = \exp[-i(H_S + H_E)t/\hbar]$. La ecuación de von Neumann (3.2) puede resolverse perturbativamente, obteniéndose una serie de Dyson

$$\hat{\sigma}(t) = \hat{\sigma}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n [\hat{V}_{t_1}, [\hat{V}_{t_2}, \cdots, [\hat{V}_{t_n}, \hat{\sigma}(0)]]] . \quad (3.3)$$

Tomando la traza sobre los grados de libertad del entorno, la serie (3.3) nos conduce a la correspondiente serie para el operador densidad reducida. Supondremos, además, que el estado inicial del sistema compuesto SE no se encuentra correlacionado, es decir, $\sigma(0) = \rho(0) \otimes \rho_E(0)$. Con esta hipótesis,

$$\hat{\rho}(t) = (1 + U_1 + U_2 + \cdots) \rho(0), \quad (3.4)$$

donde

$$U_n = \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^n \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \text{Tr}_E [\hat{V}_{t_1}, [\hat{V}_{t_2}, \cdots, [\hat{V}_{t_n}, \rho_E(0) \otimes \rho(0)]]] . \quad (3.5)$$

La ecuación maestra puede obtenerse simplemente derivando temporalmente la expresión (3.4) para $\hat{\rho}(t)$, empleando luego nuevamente la expresión (3.4) para expresar el estado inicial del sistema en término de $\hat{\rho}(t)$. $\rho(0) = (1 + U_1 + U_2 + \cdots)^{-1} \hat{\rho}(t)$ y posteriormente, como la intensidad de la interacción entre el sistema y el entorno es débil, se aproxima el lado derecho de la ecuación resultante cortando las expansiones a segundo orden en el potencial de interacción $\hat{V}$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\rho}}(t) &= (\dot{U}_1 + \dot{U}_2 - \dot{U}_1 U_1) \hat{\rho}(t) \\ &= \frac{1}{i\hbar} \text{Tr}_E [\hat{V}(t), \rho_E(0) \otimes \hat{\rho}(t)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt_1 \text{Tr}_E [\hat{V}_{t_1}, [\hat{V}_{t_1}, \rho_E(0) \otimes \hat{\rho}(t)]] \\ &\quad + \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt_1 \text{Tr}_E [\hat{V}_{t_1}, \rho_E(0) \otimes \text{Tr}_E [\hat{V}_{t_1}, \rho_E(0) \otimes \hat{\rho}(t)]] . \end{aligned} \quad (3.6)$$

Es importante notar que esta ecuación, basada solamente en dos hipótesis: (a) la validez de la expansión perturbativa a segundo orden en el acoplamiento sistema-entorno y (b) inicialmente

el sistema y el entorno no se encuentran correlacionados, *es local en el tiempo*. Ninguna otra hipótesis ha sido requerida; en particular esta ecuación no es Markoviana.

Esta ecuación maestra puede simplificarse aún más si además suponemos que la interacción entre el sistema y el entorno tiene la forma

$$V = E \otimes S, \quad (3.7)$$

donde S (E) es un operador que actúa sobre el espacio de Hilbert del sistema (entorno) solamente. Entonces la ecuación (3.6) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) = & \frac{1}{i\hbar} \langle E_t \rangle [S_t, \hat{\rho}(t)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt_1 g_s(t, t_1) [S_t, [S_{t_1}, \hat{\rho}]] \\ & + \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt_1 g_a(t, t_1) [S_t, \{S_{t_1}, \hat{\rho}\}], \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde los núcleos $g_s(t, t_1)$ y $g_a(t, t_1)$ dependen exclusivamente de las propiedades del entorno y están dados por las funciones de correlación a dos tiempos de los operadores del entorno involucrados en la interacción $S\mathcal{E}$

$$\begin{aligned} g_s(t, t_1) &= \langle E_t E_{t_1} + E_{t_1} \bar{E}_t \rangle - 2\langle E_t \rangle \langle E_{t_1} \rangle \\ g_a(t, t_1) &= \langle E_t E_{t_1} - E_{t_1} \bar{E}_t \rangle. \end{aligned} \quad (3.9)$$

La notación $\langle \rangle$ significa que se toma el valor medio del observable sobre el estado inicial del entorno, $\langle O \rangle = \text{Tr}_{\mathcal{E}}(\rho_{\mathcal{E}} O)$.

La ecuación maestra (3.8) a la que hemos llegado es muy general*. Ninguna hipótesis adicional se ha realizado sobre el sistema de interés ni se ha establecido modelo alguno del entorno. En esta ecuación, este último entra en juego solamente a través de los núcleos g_s y g_a . Según sea la forma de las funciones g_s y g_a , podrán hacerse algunas aproximaciones. La más conocida es la llamada aproximación Markoviana, que corresponde al caso en que estos núcleos tienen una forma "picuda" alrededor de $t = t_1$. Cuando este es el caso, el entorno tiene un tiempo de correlación muy corto, es decir, rápidamente pierde memoria del sistema, y entonces la ecuación (3.8) puede simplificarse significativamente. Pero la ecuación maestra (3.8) es válida también cuando no puede hacerse hipótesis Markoviana alguna y el entorno tiene tiempos de correlación largos.

Para poder continuar con el análisis del problema abierto es necesario especificar la forma del Hamiltoniano del sistema, modelar de alguna manera concreta el entorno y/o recurrir a aproximaciones adicionales.

*La forma de la interacción (3.7) puede distenderse a una forma más general $V = \sum_n (S_n \otimes E_n + h.c.)$, llegándose a una ecuación muy similar a la (3.8), como puede verse en (Paz et al., 2001). Como los resultados son esencialmente los mismos, por simplicidad nos restringimos a potenciales de la forma (3.7).

Modelo del entorno y de su interacción con el sistema

Consideramos al entorno como un conjunto infinito de osciladores armónicos de masa m_i y frecuencia natural ω_i , cuyo Hamiltoniano es $H_E = \sum_i \left(\frac{p_i^2}{2m_i} + \frac{1}{2} m_i \omega_i^2 q_i^2 \right)$. Supondremos también que el sistema de interés S es una partícula cuántica que se mueve en un espacio unidimensional e interactúa con el entorno a través del operador $V = S \otimes E = x \otimes \sum_i g_i q_i$, bilineal en los operadores posición x y q_i del sistema y entorno respectivamente, donde g_i son las constantes de acoplamiento. La forma de V está motivada en la naturaleza de las interacciones, que dependen de la distancia. Si además suponemos que el entorno se encuentra inicialmente en equilibrio térmico a temperatura T , la ecuación (3.8) se reduce a

$$\dot{\rho}(t) = - \int_0^t dt' g_s(t-t') [x(t), [x(t'), \rho(t)]] + i \int_0^t dt' g_a(t-t') [x(t), \{x(t'), \rho(t)\}], \quad (3.10)$$

ya que el primer término del lado derecho de la ecuación (3.8) se anula pues $\text{Tr}_E(V(t)\rho_E) = 0$. Los núcleos g_s y g_a dependen solamente de la diferencia $t - t'$ y están definidos por

$$\begin{aligned} g_s(t) &= \frac{1}{2\hbar} \sum_i |g_i|^2 \langle \{q_i(t), q_i(0)\} \rangle = \int_0^\infty d\omega J(\omega) (1 + 2n(\omega)) \cos \omega(t) = \nu(t), \\ g_a(t) &= \frac{i}{2\hbar} \sum_i |g_i|^2 \langle [q_i(t), q_i(0)] \rangle = \int_0^\infty d\omega J(\omega) \sin \omega(t) = \eta(t), \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde $\beta = 1/k_B T$ y $n(\omega)$ es el valor medio del número de ocupación de los osciladores del entorno. $1 + 2n(\omega) = \coth(\beta\hbar\omega/2)$. El último término del lado derecho de la ecuación (3.11) se obtiene definiendo una densidad espectral $J(\omega) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\pi}{\Delta\omega} \sum_{\omega < \omega_i < \omega + \Delta\omega} |g_i|^2$ para el entorno. $\nu(t)$ y $\eta(t)$ se denominan comúnmente núcleos de ruido y disipación respectivamente, por razones que serán evidentes cuando analicemos el Movimiento Browniano Cuántico, en la siguiente sección.

La ecuación maestra (3.10) es el punto de partida para las aproximaciones que emplearemos en nuestros estudios numéricos en los capítulos subsiguientes. En las próximas secciones consideraremos tres diferentes casos. Primero analizaremos el movimiento Browniano cuántico, ya que además de ser ilustrativo, es útil para comprender cualitativamente cómo se realiza el proceso de decoherencia. Muchas veces en el análisis de sistemas no lineales – objeto de estudio de esta Tesis – haremos referencia a los resultados establecidos para este caso lineal. Sin embargo, es importante tener en mente que éstos son solamente simples estimaciones y deben consiguientemente aplicarse con cuidado en otras circunstancias. Posteriormente, en la Sección 3.3 restringiremos la ecuación (3.10) al caso especial de un entorno óhmico en equilibrio térmico a altas temperaturas. Obtendremos en este límite una ecuación maestra a coeficientes constantes en el tiempo, pero que no estará restringida a sistemas lineales, como en el caso del Movimiento Browniano. Es decir, el Hamiltoniano del sistema H_S quedará sin especificar, pudiendo ser en general no lineal. Esta

ecuación maestra será empleada en el Capítulo 5, donde realizaremos una detallada investigación del rol de la decoherencia en sistemas cuyos análogos clásicos son caóticos. Finalmente, como el sistema que elegimos para estos estudios numéricos es dependiente del tiempo y, lo que es aquí más importante, presenta una simetría de traslación temporal, en la Sección 3.4 explotaremos esta propiedad para encontrar una ecuación maestra en la representación de Floquet. La aproximación así obtenida será útil para estudiar algunas propiedades del sistema abierto en el régimen de tiempos largos.

Decoherencia en el espacio de fases

Para el análisis del fenómeno de decoherencia y en particular de su rol en el restablecimiento de la correspondencia cuántico-clásica, será útil analizar la evolución un sistema cuántico empleando su función de Wigner asociada (Wigner, 1932), cuya forma funcional puede ser obtenida a partir del operador densidad

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{2ipu/\hbar} \rho(x-u, x+u). \quad (3.12)$$

La función de Wigner permite el estudio de objetos cuánticos y la visualización de sus propiedades en el espacio de fases clásico. Así, esta herramienta lleva a ambos mundos, clásico y cuántico, a un terreno común, el espacio de fases, y posibilita la comparación de la estructura de sus soluciones, clásicas o cuánticas. Esta función es real y puede ser negativa, de modo que no puede ser considerada como una distribución de probabilidades. Sin embargo, la integral sobre una de sus variables conduce a la distribución de probabilidades para la otra variable: por ejemplo, $\int dp W(x, p) = |\psi(x)|^2$. Para un paquete gaussiano de mínima incerteza $\Psi(x) \sim \exp[-(x-x_0)^2/2\delta^2 + ip_0x/\hbar]$, la función de Wigner es una gaussiana tanto en x como en p

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{\delta^2} - \frac{(p-p_0)^2\delta^2}{\hbar^2}\right] \quad (3.13)$$

Un sistema descrito por este tipo de función de Wigner está localizado tanto en x como en p . Ningún otro objeto del espacio de Hilbert es más cercano a un punto en el espacio de fases clásico.

Es posible mediante el empleo de esta herramienta, diseñar una estrategia para determinar si un estado exhibe comportamiento clásico: cada vez que $W(x, p)$ es una *mezcla* de paquetes de onda localizados, como el de la ecuación (3.13), puede ser considerado como una distribución clásica de probabilidades en el espacio de fases. Pero cuando el estado que le dió origen es realmente cuántico, la función de Wigner asociada presentará signos alternados, debido a que esta función resulta de la transformación de Wigner de una *superposición* de paquetes de onda localizados y

no de una *mezcla* de los mismos. El rol de la decoherencia en restablecer la correspondencia será justamente eliminar las interferencias que dan origen a las oscilaciones de la función de Wigner, tal como veremos en la Sección 3.5. La decoherencia en el espacio de fases debe conducirnos a puntos, trayectorias y a la dinámica Newtoniana.

Por otro lado, es claro que el rol especial de la posición en la física clásica se debe a la naturaleza de las interacciones, que dependen de la distancia y entonces conmutan con la posición (Zurek, 1991; Zurek, 1981). Los estados que sobreviven a la decoherencia deben estar localizados, empero, no pueden estar localizados en un punto x pues esto implicaría por el principio de incerteza de Heisenberg un ancho infinito en momento. Como resultado, un estado bien localizado en un cierto instante estaría muy deslocalizado en el instante siguiente. Felizmente la evolución en el espacio de fases involucra también al Hamiltoniano propio del sistema, y entonces el conjunto de estados preferidos resulta ser un compromiso, pues se encuentran localizados tanto en posición como en momento. Volveremos con más detalle a esta cuestión en la Sección 3.5.3, cuando definamos un criterio de predictibilidad y lo apliquemos al caso del Movimiento Browniano Cuántico.

3.2 Movimiento Browniano Cuántico

Consideremos como sistema S a una partícula cuántica moviéndose en un espacio unidimensional, bajo la acción de un potencial armónico cuyo Hamiltoniano es

$$H_S = \frac{p^2}{2M} + \frac{1}{2}M\Omega^2 x^2. \quad (3.14)$$

Como este sistema es lineal, al igual que el entorno de osciladores, las ecuaciones de Heisenberg para los operadores del sistema S pueden desacoplarse y ser resueltas explícitamente, obteniéndose para el operador posición $x(t) = x \cos \Omega t + \frac{1}{M\Omega} p \sin \Omega t$. Reemplazando en la ecuación (3.10), obtenemos finalmente para la ecuación maestra la expresión

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar} \left[H_S + \frac{1}{2}m\Omega_r^2(t)x^2, \rho \right] &= \frac{i}{\hbar} \gamma(t) [x, \{p, \rho\}] \\ &= D(t) [x, [x, \rho]] - \frac{1}{\hbar} f(t) [x, [p, \rho]], \end{aligned} \quad (3.15)$$

escrita ahora en la representación de Schrödinger. Los coeficientes están definidos por

$$\Omega_r^2(t) = -\frac{2}{M} \int_0^t dt' \eta(t') \cos \Omega t', \quad (3.16)$$

$$\gamma(t) = \frac{1}{M\Omega} \int_0^t dt' \eta(t') \sin \Omega t', \quad (3.17)$$

$$D(t) = \frac{1}{h} \int_0^t dt' \nu(t') \cos \Omega t', \quad (3.18)$$

$$f(t) = -\frac{1}{M\Omega} \int_0^t dt' \nu(t') \sin \Omega t'. \quad (3.19)$$

Todos estos coeficientes dependen del tiempo; Ω_r es el coeficiente de renormalización de la frecuencia del sistema, γ el de disipación y los últimos dos son, respectivamente, los coeficientes de difusión normal D y anómala f .

La ecuación maestra (3.15) es perturbativa. Sin embargo, por ser lineal este problema es susceptible de ser resuelto exactamente (Hu et al., 1992). Lo notable en este caso es que la ecuación maestra del Movimiento Browniano Cuántico a la que se llega tiene la misma forma que su versión perturbativa (3.15), difiriendo solamente en la dependencia temporal de sus coeficientes.

A partir de la ecuación maestra puede encontrarse una ecuación de evolución para la función de Wigner (3.12) asociada al estado ρ . Esta ecuación toma la forma de una ecuación de Fokker-Planck

$$\dot{W} = - \left\{ H_S + \frac{1}{2} m \Omega_r^2(t) x^2, W \right\}_{PB} + \gamma(t) \partial_p (pW) + D(t) \partial_{pp}^2 W - f(t) \partial_{px}^2 W \quad (3.20)$$

Es posible ahora ver cualitativamente el efecto del entorno sobre el sistema, a partir de la ecuación maestra (3.15) o (3.20). El primer término corresponde a la evolución clásica Liouvilleana, idéntico al que se obtendría a partir de la ecuación de Schrödinger para el sistema S aislado. El primer efecto del entorno es la alteración de la frecuencia de oscilación del sistema, renormalizándola; por la forma en que la renormalización interviene en la ecuación maestra (3.15), la evolución *unitaria* de ρ no se ve alterada. Sin embargo, los otros tres términos de la ecuación maestra representan efectos no unitarios. Puede mostrarse fácilmente que el segundo término produce fricción (γ juega el papel de una tasa de relajación), mientras los otros dos producen difusión. Por ejemplo, si a partir de su definición $\langle O \rangle = \int dx dp O(x, p) W(x, p)$ calculamos la evolución de los valores medios de algunos observables del sistema,

$$\begin{aligned} \frac{d\langle p \rangle}{dt} &= -\langle \partial_x V \rangle - \gamma \langle p \rangle, \\ \frac{d\langle p^2 \rangle}{dt} &= -2\langle p \partial_x V \rangle + 2D - 2\gamma \langle p^2 \rangle, \\ \frac{d\langle xp \rangle}{dt} &= -\langle x \partial_x V \rangle - \frac{\langle p^2 \rangle}{m} - f - 2\gamma \langle xp \rangle, \end{aligned} \quad (3.21)$$

venos que el término proporcional a γ genera siempre relajación; en cambio los otros dos términos producen un cambio cuya tasa es proporcional a los coeficientes, positiva en el caso de la difusión normal y negativa en el caso de la difusión anómala. Sin embargo, en el límite de altas temperaturas y entorno óhmico, estos coeficientes son constantes, positivos y dependen de la temperatura del entorno, $D \sim T$ y $f \sim 1/T$, de manera que, para un estado inicial gaussiano por ejemplo, el coeficiente de difusión normal aumentará el ancho de la distribución inicial mientras el otro puede desprejarse[†]. El término proporcional a D es el principal causante de la decoherencia, como veremos en la Sección 3.5. Por otro lado, queda ahora claro el origen de la denominación de los núcleos de ruido y disipación, pues el primero, $\nu(t)$, está presente en los coeficientes de difusión mientras que el segundo, $\eta(t)$ en el coeficiente de renormalización y de disipación.

Aunque la dependencia temporal de los coeficientes de la ecuación maestra es complicada, dada una forma particular de la densidad espectral $J(\omega)$ y del estado inicial del entorno, éstos pueden ser explícitamente calculados (Hu et al., 1992). Los coeficientes de difusión dependen de la temperatura, mientras que los otros dos son independientes de ella. Para una densidad espectral óhmica ($J(\omega) = 2M\gamma_0\omega \exp(-\omega^2/\omega_c^2)$, donde ω_c es una frecuencia de corte, típicamente muy grande), Ω_r y γ toman rápidamente (en tiempos del orden de ω_c^{-1}) valores asintóticos mientras que los coeficientes de difusión poseen un transitorio inicial (en escalas temporales también fijadas por ω_c^{-1}) independiente de la temperatura del entorno. El coeficiente de difusión normal $D(t)$ toma luego un valor asintótico $D_\infty = M\gamma_0\Omega \coth(\beta\hbar\Omega/2)\omega_c/\hbar(\omega_c^2 + \Omega^2)$. El coeficiente de difusión anómalo también se aproxima a un valor asintótico que a altas temperaturas es despreciable frente al valor asintótico D_∞ , aunque la aproximación es más gradual, algebraica más que exponencial. Sin embargo, para otro tipo de entornos no-óhmicos, el comportamiento de los coeficientes es bastante diferente, y su influencia en relación con la decoherencia ha sido analizada por algunos autores (Hu et al., 1992). Felizmente para los estudios numéricos que son el objeto de esta Tesis es suficiente emplear ecuaciones maestras aproximadas que involucran entornos óhmicos a altas temperaturas.

3.3 Ecuación maestra en el límite de altas temperaturas

En esta sección no especificaremos la forma del Hamiltoniano del sistema. Sólo nos restringiremos al caso de una partícula cuántica moviéndose en una dimensión bajo la acción de un potencial general que puede ser dependiente del tiempo y/o no lineal.

El caso especial más simple de la ecuación maestra (3.10) se obtiene si suponemos un entorno

[†]La dependencia con T de los coeficientes de difusión en este límite será justificada con más detalle en la próxima Sección.

óhmico ($J(\omega) = \gamma M \omega / \hbar$) a altas temperaturas. En este caso los núcleos se reducen a $\nu(t) = D \delta(t)$ y $\eta(t) = 2\gamma \dot{\delta}(t)$, con $D = 2m\gamma k_B T$, obteniéndose una ecuación maestra a coeficientes constantes que en la representación de Schrödinger se escribe

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar} [H_S, \rho] - 2i\gamma [x, \{p, \rho\}] - D[\cdot, \cdot][x, \rho]. \quad (3.22)$$

A partir de esta expresión puede encontrarse fácilmente la siguiente ecuación de evolución para la función de Wigner del sistema

$$\begin{aligned} \dot{W} = \{H_0, W\}_{PB} &+ \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \hbar^{2n}}{2^{2n} (2n+1)!} \partial_x^{(2n+1)} V \partial_p^{(2n+1)} W \\ &+ 2\gamma \partial_p (pW) + D \partial_{pp}^2 W. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Esta ecuación es muy conocida y ha sido derivada en diferentes contextos (Hu et al., 1992; Caldeira et al., 1985; Unruh, 1989). Los efectos físicos incluidos en la misma son los mismos que los ya descriptos para la ecuación del movimiento Browniano (3.15), sin la difusión anómala pues en este límite $f \sim 1/T \rightarrow 0$, y con el agregado de un término adicional: al primer término del lado derecho de esta ecuación, el corchete de Poisson que genera la evolución clásica de la función de Wigner, se agregan términos de orden $\hbar^2$ o mayor que representan las correcciones cuánticas a la evolución clásica Liouvilliana. En el caso del Movimiento Browniano estos términos están ausentes justamente por ser el potencial V del sistema lineal, anulándose por consiguiente la tercera derivada espacial del potencial y todas las de mayor orden. El efecto del entorno se reduce aquí a los últimos dos términos, mientras la primera línea en la ecuación (3.23) es la ecuación de Schrödinger del sistema aislado en la representación de Wigner.

En el límite de altas temperaturas aquí considerado, el término disipativo puede ser ignorado y sólo el término difusivo necesita ser tenido en cuenta. Al hacer esta aproximación estamos tomando el límite $\gamma \rightarrow 0$ mientras mantenemos D constante. Además, en nuestros estudios posteriores el valor de la constante de difusión será tomado pequeño de manera tal que la energía se conserve (aproximadamente) sobre las escalas temporales de interés. Es importante notar que el límite de altas temperaturas nos conduce al límite Markoviano, puesto que las expresiones de los núcleos obtenidas más arriba corresponden a tiempos de correlación instantáneos, siendo entonces la memoria del entorno nula a fines prácticos.

Cabe aquí hacer mención de las dificultades que pueden presentarse para resolver la ecuación maestra en este límite o su correspondiente ecuación de Fokker-Planck (3.23): salvo en contados casos, como el movimiento Browniano lineal o problemas de spines por ejemplo, una solución analítica de esta ecuación no es posible. Se debe entonces recurrir a su integración numérica para obtener paso a paso la solución a tiempo $t + \Delta t$ conociendo la misma a un tiempo anterior t , con

la consiguiente acumulación de error. Esto impone una limitación a los tiempos a los que puede calcularse una solución de suficiente precisión. Por ello, en el caso de querer estudiar el proceso de decoherencia en el régimen de tiempos largos, es necesario recurrir a otras aproximaciones, tal como la detallada en la siguiente Sección.

3.4 Ecuación maestra en la base de Floquet

Si el Hamiltoniano del sistema es periódico en el tiempo, $H(t+\tau) = H(t)$, es posible encontrar una ecuación maestra que, haciendo uso de esta simetría temporal, sea válida en escalas temporales largas.

3.4.1 Base de Floquet

Un sistema cuántico descrito por un Hamiltoniano periódico en el tiempo (de período $\tau = 2\pi/\omega$) posee una simetría de traslación temporal discreta que nos permite generar una evolución estroboscópica a partir del operador de Floquet (Shirley, 1965; Sambe, 1973) definido por el operador evolución $\hat{U}(\tau)$ luego de un período completo de la perturbación periódica del sistema. De acuerdo al Teorema de Floquet (Lewis et al., 1969) los autoestados del operador de Floquet, denominados estados de Floquet o estados de cuasienergía, tienen la forma

$$|\Psi_\alpha(t)\rangle = U(t)|\Psi_\alpha(0)\rangle = e^{-i\varepsilon_\alpha t/\hbar} |\phi_\alpha(t)\rangle, \quad (3.24)$$

$$|\phi_\alpha(t)\rangle = |\phi_\alpha(t+\tau)\rangle. \quad (3.25)$$

donde los autovalores ε_α son las denominadas cuasienergías del sistema. Cada una de ellas representa en realidad una clase infinita de autovalores $\varepsilon_{\alpha,k} = \varepsilon_\alpha + k\omega$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ donde cada elemento $\varepsilon_{\alpha,k}$ de esta clase corresponde a soluciones equivalentes a (3.24), como puede verse si definimos $|\phi_{\alpha,k}\rangle = \exp(ik\omega t)|\phi_\alpha\rangle$. En otras palabras, el espectro de cuasienergías es cíclico, definido de manera similar a la estructura de las zonas de Brillouin en estado sólido (Aschcroft et al., 1979).

Los estados de Floquet forman un conjunto completo de soluciones del espacio de Hilbert del problema y se encuentran resolviendo el problema de autovalores del operador de Floquet, $U(\tau)|\Psi_\alpha(0)\rangle = e^{-i\varepsilon_\alpha\tau/\hbar} |\Psi_\alpha(0)\rangle$, como puede verse de la ecuación (3.24). Emplearemos esta base especial del espacio de Hilbert, apropiada pues posee las simetrías traslacionales del problema, para encontrar una representación conveniente de la ecuación maestra (3.10).

3.4.2 Ecuación maestra promediada

Existen en la literatura varias aproximaciones que hacen uso de la simetría de traslación temporal del sistema (Utermann et al., 1994; Blümel et al., 1991). Nosotros seguimos de cerca la aproximación de Kohler *et. al.* (Kohler et al., 1998) aunque estos autores restringieron el uso de la ecuación maestra obtenida al estudio del tuneo caótico cerca de un cruce de cuasienergías.

Cuando la ecuación maestra (3.10) se escribe en la base de Floquet y se toma además el límite Markoviano de temperaturas altas para el entorno, la ecuación resultante posee coeficientes τ -periódicos. Calculando el promedio temporal de esta ecuación sobre un período τ , puede derivarse (ver Apéndice B) una ecuación maestra promediada

$$\dot{\bar{\sigma}}_{\mu\nu} = \sum_{\alpha\beta} M_{\mu\nu\alpha\beta} \bar{\sigma}_{\alpha\beta} \quad (3.26)$$

donde $\bar{\sigma}$ denota el promedio temporal en un período τ del operador ρ , $\bar{\sigma} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \rho(t)$. Los coeficientes $M_{\mu\nu\alpha\beta}$ están definidos por

$$M_{\mu\nu\alpha\beta} = -\frac{i}{\hbar} (\varepsilon_\mu - \varepsilon_\nu) \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} - D \{ \delta_{\beta\nu} \langle x^2 \rangle_{\mu\alpha} + \delta_{\alpha\mu} \langle x^2 \rangle_{\beta\nu} - 2 \langle x \rangle_{\mu\alpha} \langle x \rangle_{\beta\nu} \}$$

y $\langle \langle A \rangle \rangle_{\mu,\nu} = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt' \langle \phi_\mu(t') | A | \phi_\nu(t') \rangle$ es el promedio temporal (en un período τ) de los elementos de matriz del operador A en la base de Floquet. Siendo esta una ecuación a coeficientes *constantes*, una vez que éstos han sido calculados (numéricamente, por ejemplo, en el caso de un sistema no lineal), la solución se conoce entonces formalmente para *todo* tiempo

$$\bar{\sigma}_{\mu\nu}(t) = \sum_{\alpha\beta} (e^{Mt})_{\mu\nu\alpha\beta} \bar{\sigma}_{\alpha\beta}(0) \quad (3.27)$$

Naturalmente esta ecuación es válida siempre que consideremos tiempos de evolución mucho mayores que un período de la perturbación armónica, $t \gg \tau$.

La dificultad en resolver esta ecuación reside en que el número n de estados de Floquet típicamente necesarios para expandir con precisión un estado localizado en una región del espacio de fases clásico de un sistema que presenta caos, es grande ya que los estados de Floquet se encuentran en su mayoría extendidos sobre todo el mar caótico disponible en el espacio de fases clásico, y entonces el número necesario para expandir un estado muy localizado es naturalmente grande.

3.5 Decoherencia a altas temperaturas

3.5.1 Escala temporal de la decoherencia

Cuando nos limitamos a entornos óhmicos y altas temperaturas, la ecuación maestra (3.22) en la representación de posición puede escribirse

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar} [H_S, \rho] - \gamma(x - x')(\partial_x - \partial_{x'})\rho - \frac{2M\gamma k_B T}{\hbar^2}(x - x')^2 \rho. \quad (3.28)$$

En el límite clásico, cuando $\hbar$ es pequeño comparado con toda otra acción (como por ejemplo $\sqrt{2M\gamma k_B T \langle (x - x')^2 \rangle}$), la evolución de la ecuación maestra está dominada por el último término del lado derecho de (3.28) (Zurek, 2001b)

$$\dot{\rho}(x, x', t) = -\gamma \left[\frac{(x - x')}{\lambda_{DB}} \right]^2 \rho, \quad (3.29)$$

donde $\lambda_{DB} = \hbar/\sqrt{2MK_B T}$ es la longitud de onda térmica de de Broglie. La matriz densidad en este caso pierde muy rápidamente sus términos no diagonales en la representación de posición

$$\rho(x, x', t) = \rho(x, x', 0) \exp \left\{ -\gamma t \left[\frac{(x - x')}{\lambda_{DB}} \right]^2 \right\}, \quad (3.30)$$

mientras los términos diagonales permanecen inalterados. La coherencia cuántica decae exponencialmente a una tasa dada por la tasa de relajación multiplicada por el cuadrado de la distancia medida en término de la longitud de onda de de Broglie. Si la ecuación (3.30) fuese siempre válida, los autoestados del observable posición serían los estados punteros. Los efectos de la evolución de la matriz densidad en la representación de posición debidos a la ecuación (3.30) son fáciles de visualizar si consideramos como estado inicial la superposición de dos gaussianas (estados casi clásicos) de ancho δ y separados una distancia Δx

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \Psi_1(x) + \Psi_2(x), \\ \Psi_{1,2}(x) &= N \exp \left(-(x \mp \Delta x)^2 / 2\delta^2 \right), \end{aligned} \quad (3.31)$$

donde N es una constante de normalización.

La Figura 3.1 muestra a la izquierda la función de onda $\Psi(x)$ y al centro su correspondiente matriz densidad a $t = 0$, $\rho(x, x') = \Psi(x)\Psi(x')^*$, que tiene cuatro picos, dos sobre la diagonal y dos fuera de ella, para el caso en que los paquetes están muy separados $\Delta x \gg \delta$. Los picos cerca de la diagonal $x = x'$ corresponden a las dos posibles localizaciones de la partícula. La coherencia cuántica tiene su origen en los picos fuera de la diagonal, para los que x y x' son muy diferentes. Su existencia y tamaño muestra que la partícula no se encuentra en alguna de las

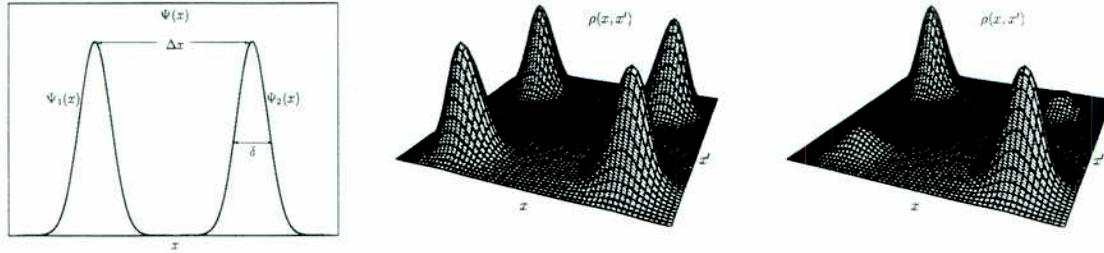


Figura 3.1: Izquierda: Superposición coherente de dos paquetes de onda gaussianos, ecuación (3.31). Esta función de onda $\Psi(x)$, superposición de dos estados clásicos permitidos, se denomina *Gato de Schrödinger*. Centro: Matriz densidad correspondiente a la función de onda $\Psi(x)$, $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$, en la representación de posición. Derecha: Efecto de la decoherencia sobre la matriz densidad. A un tiempo posterior a τ_D la matriz densidad conservará sólo los picos en la diagonal, pudiendo entonces considerarse como una distribución de probabilidades clásica, con una probabilidad igual de encontrar a la partícula en alguna de las localizaciones correspondientes a los paquetes de onda gaussianos.

posibles localizaciones sino que está en una superposición coherente de ellas. Éstos decaen en una escala temporal dada por el *tiempo de decoherencia* τ_D

$$\tau_D^{-1} = \gamma \left[\frac{(x - x')}{\lambda_{DB}} \right]^2 \quad (3.32)$$

cuya inversa, la tasa de decoherencia, es la tasa de relajación multiplicada por un factor que puede ser enorme a escalas macroscópicas (ver Figura 3.1, a la derecha). Por ejemplo, a temperatura ambiente, longitudes del orden del *cm* y masas del orden de un gramo, la ecuación (3.32) predice decoherencia en un tiempo aproximadamente 10^{40} veces más rápido que el tiempo de relajación γ^{-1} .

3.5.2 Decoherencia en el espacio de fases

Es ilustrativo observar el efecto de la decoherencia en el espacio de fases. Cuando el estado inicial es la superposición $\Psi(x)$ dada por (3.31), la función de Wigner, como consecuencia del principio de superposición, presenta efectos de interferencia cuántica, es decir, es oscilante en la región intermedia entre los paquetes localizados. En efecto, realizando una transformación de Wigner sobre la matriz densidad $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$, la función de Wigner asociada a $\Psi(x)$ es

$$W = W_1 + W_2 + W_{int}, \quad (3.33)$$

donde $W_{1,2} = W_{1,2}(x, p)$ son las funciones de Wigner asociadas a las funciones de onda Ψ_1 y Ψ_2 , y tienen la forma gaussiana dada por la ecuación (3.13), con $x_0 = \pm\Delta x$ y $p_0 = 0$ respectivamente. El término

$$W_{int} \sim \exp\left(-\frac{p^2\delta^2}{\hbar^2} - \frac{x^2}{\delta^2}\right) \cos\left(\frac{\Delta x p}{\hbar}\right), \quad (3.34)$$

representa las interferencias coherentes entre los dos estados localizados. Como los estados gaussianos están separados en posición, las franjas de interferencia, de vector de onda $\kappa_p = \Delta x/\hbar$, están alineadas a lo largo del eje p , como se observa en la Figura 3.2. Un estado *mezcla* de dos estados gaussianos estaría descrito por los dos primeros términos W_1 y W_2 , pero el término oscilante estaría ausente. Estados como el descrito por la ecuación (3.31) o (3.33) son otro ejemplo de un estado tipo *Gato de Schödinger*. En una descripción clásica sólo los estados W_1 y W_2 son posibles. La Mecánica Cuántica, sin embargo, permite superposiciones coherentes de los mismos.



Figura 3.2: La función de Wigner correspondiente al estado puro $\Psi(x)$ presenta dos picos positivos y una región entre ellos donde la función oscila, señalando la presencia de interferencias. Es debido a este último término de interferencia que esta función no puede considerarse como una función de distribución de probabilidades clásica.

Si, tal como en la Sección anterior, nos concentramos sobre el último término de la ecuación (3.23), vemos que su efecto sobre la parte oscilatoria de la función de Wigner será muy diferente de su efecto sobre las dos gaussianas, pues el término de interferencia está dominado por el coseno, $W_{int} \sim \cos(\Delta x p/\hbar)$, que es una autofunción del operador de difusión ∂_{pp} . La escala temporal de la decoherencia surge del correspondiente autovalor[‡]

$$\dot{W}_{int} \approx -\{D\Delta x^2/\hbar^2\} \times W_{int}. \quad (3.35)$$

Así, la expresión para τ_D dada por la ecuación (3.32) se recupera desde otro punto de vista.

$$\tau_D^{-1} = \gamma \left[\frac{(x - x')}{\lambda_{DB}} \right]^2 = D\kappa_p^2.$$

En este tiempo τ_D , casi instantáneo para objetos macroscópicos, la función de Wigner de este ejemplo retendrá solamente los dos picos gaussianos, que corresponden a las dos alternativas clásicas. Es decir, como resultado de la interacción con el entorno *emergen* naturalmente los estados preferidos o *punteros* (Paz et al., 2001). Zurek se refiere a estos hechos como los responsables de nuestra confianza en la Mecánica Clásica y en la percepción que tenemos de la realidad (Zurek, 2001b).

[‡]Equivalentemente, puede obtenerse el mismo resultado resolviendo la ecuación $\dot{W} = D\partial_{pp}W$ por separación de variables y con la condición inicial (3.31).

Nótese que para potenciales lineales, cuando el término de correcciones cuánticas está ausente, la ecuación (3.23) no contiene $\hbar$ explícitamente. Igualmente $\hbar$ interviene en el tiempo de decoherencia a través del vector de onda asociado a las oscilaciones de la función de Wigner, $\kappa_p = \Delta x/\hbar$. Es decir, la estructura que desarrolle la función de Wigner está íntimamente ligada a la eficiencia de la decoherencia sobre la misma. Volveremos sobre este importantísimo punto en el siguiente capítulo.

La evolución de estados iniciales puros como el aquí considerado se muestra en la Figura 3.3 para funciones de Wigner superposición de dos gaussianas separadas en x o en p . Hay una diferencia notable en la tasa en la que las interferencias desaparecen entre los dos casos. Este efecto es el esperado puesto que la interacción entre el sistema y el entorno, $H_{int} \sim x \sum_i g_i q_i$ depende de x . El observable x es directamente monitoreado por el entorno, que puede entonces distinguir los picos separados en x . Por ello, superposiciones de gaussianas separadas en x perderán coherencia en escalas τ_D .

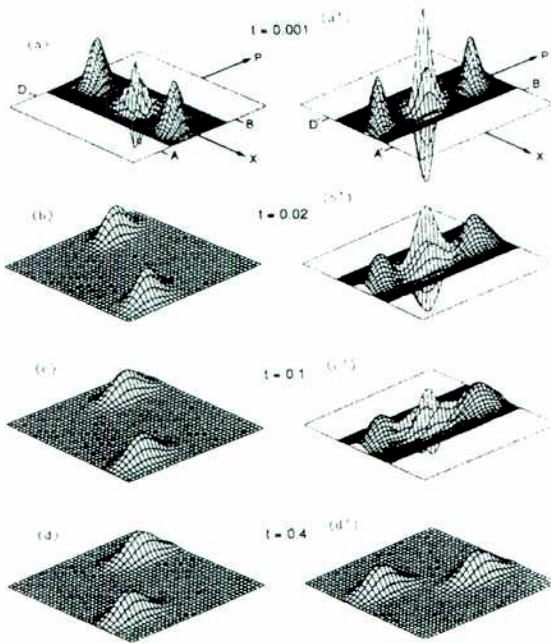


Figura 3.3: Evolución de estados tipo *Gatos de Schrödinger* cuando las gaussianas están inicialmente separadas en (a) x o (b) p .

Por otro lado, superposiciones de gaussianas separadas en p son inicialmente insensibles al monitoreo del entorno puesto que el estado inicial se encuentra bien localizado en posición. Sin embargo, luego de una escala temporal fijada por la dinámica, los picos rotarán en el espacio de fases, transformándose así en superposiciones separadas en x y la decoherencia tendrá lugar.

Los resultados obtenidos en esta Sección deben interpretarse con cuidado, pues las ecuaciones de donde se derivan sólo son válidas bajo ciertas circunstancias. Por ejemplo, el tiempo de decoherencia no puede ser menor que la inversa de la frecuencia de corte ω_c , que es mayor que cualquier otra frecuencia (o energía) involucrada en el problema y que fue introducida al final de la Sección 3.2. No obstante la expresión para τ_D (3.32) no contiene un límite

inferior. También es claro que la dependencia cuadrática con la distancia no puede mantenerse para separaciones arbitrariamente grandes, y la tasa de decoherencia debiera acercarse asintóticamente a algún valor límite, saturando. Este efecto de saturación a grandes distancias ha sido comprobada

en modelos de entorno formados por campos escalares cuánticos (Anglin et al., 1997; Paz et al., 2001).

3.5.3 Criterio de Predictibilidad

La consecuencia más importante del proceso de decoherencia es la selección, inducida por el entorno, de un conjunto de estados *estados punteros*, que resultan ser los menos afectados por la interacción con el entorno. Estos estados pueden obtenerse empleando un criterio de *predictibilidad* sistemático (Zurek, 1993; Zurek et al., 1993), cuya idea básica es la siguiente: para encontrar los estados punteros se deben considerar todos los estados puros posibles del sistema y calcular la entropía asociada con su matriz densidad reducida luego de cierto tiempo t . Los estados punteros serán los que minimicen la producción de entropía.

Este criterio puede aplicarse a los modelos de medición cuántica del Capítulo anterior, para los cuales el Hamiltoniano del sistema puede ser completamente despreciado. En tales casos los estados punteros están asociados directamente con los autoestados del Hamiltoniano de interacción ya que, debido a su estructura, éste conmuta con el observable puntero. En situaciones más realistas donde el Hamiltoniano del sistema no es despreciable los estados punteros no serán seleccionados solamente por el Hamiltoniano de interacción sino por el efecto combinado de éste con el Hamiltoniano propio del sistema. El mejor ejemplo donde podemos calcular estos estados punteros es el modelo de Movimiento Browniano Cuántico de la Sección 3.2.

Para encontrar los estados punteros debemos minimizar la producción de entropía a cierto tiempo, variando sobre estos tiempos para encontrar una respuesta estable. Sin embargo es más simple estudiar la evolución de la pureza del sistema $\xi = \text{Tr} \rho^2$ que emplear la entropía de von Neumann. Esta cantidad es igual a uno para estados puros y decrece cuando el estado del sistema se entrelaza en un estado mixto como resultado de la evolución. La ecuación maestra (3.22) permite escribir una ecuación de evolución para ξ en el límite de altas temperaturas y entornos ómicos. Sólo los términos difusivo y disipativo generan cambios en la entropía o en la pureza pues términos de la forma $\dot{\rho} = [\hat{O}, \rho]$ no alteran las ecuaciones debido a la propiedad cíclica de la traza. Entonces

$$\dot{\xi} = 2\gamma \xi - 4D \text{Tr}(\rho^2 x^2 - \rho x \rho x). \quad (3.36)$$

Si suponemos que el estado inicial es puro ($\rho^2 = \rho$) y despreciamos el efecto del término de fricción en comparación con el término difusivo, se encuentra que para estados iniciales puros

$$\dot{\xi} = -4D (\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2). \quad (3.37)$$

Así entonces la pérdida de pureza es mínima para estados perfectamente localizados. El término

disipativo en la ecuación (3.36) causa, a tiempos tempranos y para estados muy localizados, un crecimiento no físico de la pureza por encima de la unidad. Esto sucede en tiempos muy cortos, menores o del orden de la inversa de la frecuencia de corte ω_c , donde la ecuación maestra en el límite de altas temperaturas tiene un comportamiento anómalo esencialmente no físico (Unruh, 1989; Anglin et al., 1997), que está íntimamente relacionado con el hecho de que la ecuación maestra no posee la forma de Lindblad, que preserva la positividad de la matriz densidad (Lindblad, 1976).

Para un oscilador armónico de masa M y frecuencia Ω los estados punteros relevantes para la dinámica pueden encontrarse considerando la pérdida de pureza sobre un período del oscilador

$$\Delta\xi = -2D \left(\Delta x^2 + \frac{\Delta p^2}{M^2\Omega^2} \right). \quad (3.38)$$

donde Δx y Δp son las dispersiones del estado inicial en posición y momento respectivamente. Para minimizar la pureza debemos variar sobre todos los estados iniciales posibles. Esto puede lograrse fácilmente variando sobre todos los valores de la dispersión inicial tanto en momento como en posición de tal manera que el lado derecho de esta ecuación sea mínimo. Como la relación $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ debe satisfacerse siempre, claramente el mínimo se obtiene cuando el estado es de mínima incerteza. De la ecuación resultante obtenemos los estados punteros como aquellos que tengan $\Delta x^2 = \hbar/2M\Omega$ y $\Delta p^2 = \hbar M\Omega/2$. Así los estados punteros son simplemente *estados coherentes con incerteza mínima*. Este resultado no es sorprendente, después de todo los estados coherentes son los estados más cercanos a puntos en el espacio de fases. Estos estados son los estados punteros de Movimiento Browniano Cuántico pues son los más robustos y resultan ser los más resistentes a la acción combinada del sistema y el entorno. Están bien localizados en posición y por consiguiente no serán perturbados significativamente por el entorno monitoreando su posición. Además, la rotación inducida por el Hamiltoniano propio del sistema transforma la preferencia de estados localizados en posición en preferencia de estados localizados en el espacio de fases.

Existe también un tercer régimen en donde la evolución del entorno es muy lenta comparada con las escalas dinámicas del sistema. Cuando este es el caso es posible mostrar — que los estados punteros son simplemente los autoestados de energía del Hamiltoniano del sistema, aunque para este régimen no es posible emplear el modelo lineal de Movimiento Browniano Cuántico pues, como la ecuación maestra en este límite tiene coeficientes oscilatorios, que no poseen signos bien definidos, el criterio de *predictibilidad* no provee un conjunto robusto de estados en este caso. Sin embargo puede examinarse este régimen usando un argumento muy simple basado en la solución de la ecuación de Schrödinger para el sistema total, tratando al entorno adiabáticamente. Supongamos que el estado inicial del sistema compuesto es $|\Psi(0)\rangle = \sum_i c_i |c_i\rangle \otimes |c_0\rangle$, donde los estados $|c_i\rangle$ son autoestados de energía no degenerados del sistema, con energías diferentes E_i .

y $|\epsilon_0\rangle$ es un estado del entorno que, por simplicidad, consideraremos coherente. La ecuación de Schrödinger para el sistema conjunto puede resolverse en la aproximación adiabática, obteniendo $|\Psi(t)\rangle = \sum_i c_i \exp(-iE_i t/\hbar) |\phi_i\rangle \otimes |\epsilon_i(t)\rangle$, donde el estado $|\epsilon_i(t)\rangle$ que está correlacionado con el i -ésimo autoestado de energía del sistema, obedece la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar |\dot{\epsilon}_i\rangle = \langle\phi_i|H_{int}|\phi_i\rangle |\epsilon_i\rangle. \quad (3.39)$$

En esta ecuación el operador $\langle\phi_i|H_{int}|\phi_i\rangle$ actúa sobre el espacio de Hilbert del entorno y depende paramétricamente de los autoestados de energía del sistema. Si $H_{int} = S \otimes E$, donde el operador S actúa sobre el espacio de Hilbert del sistema y el operador E actúa sobre el espacio de Hilbert del entorno como un generador de traslación (como por ejemplo el operador momento), y como el estado inicial del entorno es coherente, la solución de (3.39) será simplemente $|\epsilon_i(t)\rangle = |\epsilon_0 + S_{ii}t\rangle$ donde $S_{ii} = \langle\phi_i|S|\phi_i\rangle \neq 0$. Entonces el producto interno $\langle\epsilon_i(t)|\epsilon_j(t)\rangle \approx \exp(-t^2(S_{ii} - S_{jj})^2\hbar^2)$. Y de esta manera superposiciones de autoestados de energía serán degradados mientras estados de autoenergía puros permanecerán inalterados, es decir, los autoestados de energía son los estados punteros seleccionados. Este resultado tampoco es sorprendente, puesto que siendo el entorno muy lento no alcanza a reaccionar antes de que el sistema evolucione y por consiguiente solamente puede monitorear observables promediados en el tiempo. La energía es el único observable que no promedia a cero y por consiguiente es el estado puntero que emerge naturalmente en este caso.

Hemos visto en este Capítulo cómo la interacción con el entorno permite la emergencia de estados clásicos permitidos en el límite macroscópico. La decoherencia de estados con interferencia nos conduce a puntos en el espacio de fases. La evolución de estos estados casi-clásicos debiera conducirnos a las nociones de trayectorias y a la dinámica clásica. Sin el monitoreo continuo del entorno los síntomas de pérdida de correspondencia se observan también en las discrepancias entre las evoluciones temporales de observables dinámicos o, más drásticamente, en sus funciones de distribución. Para sistemas integrables como los descritos en este Capítulo, la ruptura de correspondencia ocurre muy lentamente y no representa entonces un problema en el límite macroscópico. Sin embargo, en sistemas cuyos análogos clásicos son caóticos, la desviación del comportamiento cuántico respecto del clásico ocurre muy rápidamente y la decoherencia resulta esencial para el restablecimiento de la correspondencia. Nos ocuparemos de estos problemas en los siguientes capítulos.

Capítulo 4

Sistemas aislados: Ruptura de la correspondencia

El estudio de la correspondencia entre las Teorías Cuántica y Clásica presenta un aspecto que no está motivado por el problema de la medición y que genera interesantes interrogantes. Ya A. Einstein, al tratar en el año 1917 la cuantificación de sistemas integrables anticipó que el movimiento caótico presenta un desafío para la correspondencia cuántico-clásica (Einstein, 1917). Recién muy posteriormente, cuando el alcance de las predicciones de la mecánica clásica caótica fue comprendido en su totalidad, la naturaleza de tal desafío salió a la luz. Los estudios sobre la correspondencia cuántico-clásica han mostrado que en sistemas cuyos análogos clásicos son caóticos la ruptura de la correspondencia ocurre en tiempos muy cortos, ya que éste depende sólo logarítmicamente de la constante de Planck $\hbar$ y no según una ley de potencias como en el caso de sistemas integrables (Berry et al., 1979). En este Capítulo analizaremos las razones de esta violación al Principio de Correspondencia, ejemplificándolas en la Sección 4.3 con estudios numéricos realizados sobre un pozo doble sujeto a una perturbación temporal armónica. Entendiendo las razones de la pérdida de la correspondencia encontraremos cómo ésta puede restablecerse: las estructuras que las funciones de distribución clásica y cuántica son capaces de generar poseen características muy diferentes. A nivel clásico, éstas pueden ser tan pequeñas como se quiera. Sin embargo, en la evolución cuántica existe un límite por debajo del cual un sistema no presenta estructura en el espacio de fases. Para sistemas macroscópicos el tamaño de esta estructura es típicamente *sub-Planckiano* y determina la sensibilidad de los sistemas cuánticos a perturbaciones externas. A su vez, esta sensibilidad es relevante en el proceso de decoherencia que permitirá el restablecimiento de la correspondencia.

4.1 Ruptura de la correspondencia

4.1.1 Argumentos heurísticos

La dinámica clásica caótica está caracterizada por divergencia exponencial de sus trayectorias, mientras la conservación del volumen en el espacio de fases para una evolución Hamiltoniana implica que la divergencia exponencial en alguna dirección inestable del espacio de fases debe estar balanceada por una convergencia exponencial de las trayectorias en la dirección estable complementaria*. Como consecuencia, la función de distribución de probabilidades clásica que describe la evolución del sistema se deformará rápida y drásticamente haciéndose delgada en la dirección estable correspondiente a, por ejemplo momento, y desarrollando estructura en escalas del tamaño de

$$\Delta p(t) = \Delta p_0 \exp(-\lambda t). \quad (4.1)$$

Δp_0 es la extensión en momento de la función de distribución de probabilidades inicial y λ el exponente de Lyapunov relevante que determina la tasa de contracción de la misma. Simultáneamente, en la dirección inestable del espacio de fases, la posición se deslocaliza. Como la mecánica clásica permite la determinación simultánea de observables conjugados – es decir, que no conmutan con infinita precisión, un análisis clásico permitiría calcular la extensión de la distribución en la dirección de posición a partir de su extensión inicial Δx_0 como $\Delta x(t) = \Delta x_0 \exp(\lambda t)$, hasta que ésta se vea confinada por el potencial y comience a plegarse. Sin embargo, en un análisis cuántico esto no está permitido. El principio de indeterminación de Heisenberg pone un límite a la precisión con que pueden determinarse simultáneamente dos observables conjugados. Así, un paquete de onda cuya función de distribución se contraiga según la ecuación (4.1), resultará coherente sobre distancias $l(t)$ que pueden deducirse del principio de Heisenberg,

$$l(t) \geq (\hbar/\Delta p_0) \exp(\lambda t). \quad (4.2)$$

La pérdida de correspondencia entre las evoluciones clásica y cuántica puede entenderse de dos maneras complementarias: una de ellas es consecuencia de la contracción en la dirección estable, que fuerza al sistema caótico a explorar el régimen cuántico; la otra es resultado de la divergencia exponencial en la dirección inestable, que conduce a la extensión coherente de la función de distribución sobre distancias del orden del tamaño del sistema.

*Las tasas de expansión y contracción están dadas por exponentes de Lyapunov λ_i positivos y negativos, respectivamente. Para evolución Hamiltoniana, éstos deben sumar cero debido a la conservación de volumen. *Todo* punto del espacio de fases caótico de un sistema Hamiltoniano es hiperbólico, es decir, sus exponentes de Lyapunov aparecen de a pares $\pm \lambda_i$.

Analizaremos primero la última razón, dejando la primera para la próxima subsección. Que un paquete de ondas se extienda coherentemente cubriendo grandes regiones del espacio de fases conduce inevitablemente a una pérdida de correspondencia: la evolución clásica idealiza puntos en el espacio de fases, sobre los cuales actúa una fuerza dada por el gradiente $\partial_x V(x)$ del potencial $V(x)$ evaluada en ese punto. Pero el paquete de ondas puede extenderse coherentemente sobre regiones donde el potencial deja de ser lineal, y dentro de las cuales el gradiente del potencial cambia significativamente. La escala de no linealidad del potencial χ puede ser estimada equiparando la fuerza clásica ($\partial_x V$) con el término de mayor orden en las contribuciones no lineales al potencial ($\partial_x^3 V$), es decir $\chi = \sqrt{\partial_x V / \partial_x^3 V}$. Por ejemplo, para el potencial gravitatorio $\chi \sim L$ donde L es el tamaño del sistema, que puede ser el radio de la órbita de un planeta. Cuando la longitud de coherencia del paquete de onda alcanza la escala de no linealidad

$$l(t) \approx \chi, \quad (4.3)$$

el efecto de la energía potencial sobre el movimiento no puede continuar representándose por la expresión clásica de fuerza, $F(x) = -\partial_x V(x)$, puesto que ni siquiera está claro dónde debe evaluarse el gradiente para una función de onda deslocalizada (Zurek et al., 1994; Zurek et al., 1995). Como consecuencia, de la ecuación (4.3) se concluye que, luego de un tiempo dado por

$$t_h = \lambda^{-1} \ln \left(\frac{\Delta p_0 \chi}{\hbar} \right), \quad (4.4)$$

las predicciones que siguen de la evolución cuántica diferirán de sus correspondientes clásicas. Este tiempo t_h se denomina tiempo de Ehrenfest: es el tiempo hasta el cual un sistema cuántico que comenzó su evolución en un estado gaussiano bien localizado continuará estándolo suficientemente, de manera que las correcciones cuánticas a las ecuaciones de movimiento que gobiernan sus valores medios sean despreciables[†]. Pero los síntomas de discrepancia no aparecen solamente a nivel de los valores medios. Para tiempos mayores a t_h la combinación de caos clásico y el principio de incerteza hacen *en principio* imposible el empleo del concepto de trayectoria. Un sistema caótico que ocupe inicialmente un volumen de tamaño del orden de $\hbar$ de manera regular, luego de un tiempo t_h habrá evolucionado de una manera posiblemente muy complicada, a una función de onda cuya envolvente se extenderá a todo el espacio de fases disponible y cuyas dimensiones son comparables al tamaño del sistema. De esta manera la función de distribución resultante será muy diferente de su correspondiente clásica, tal como muestra la Figura 4.1. El tiempo de Ehrenfest t_h define el horizonte de predictibilidad cuántica, más allá del cual hacer algún tipo de predicción es, en principio, imposible.

[†]Las correcciones cuánticas dependen de las derivadas de orden mayor a tres de la función de distribución respecto de p . Si el estado se deforma, pero continúa localizado y suficientemente suave, estas derivadas serán despreciables.

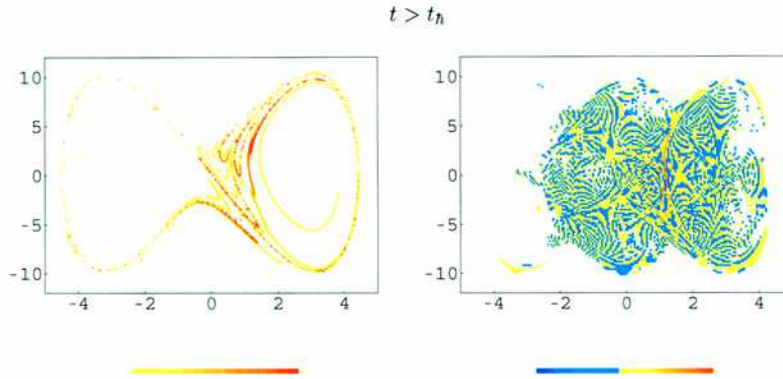


Figura 4.1: Funciones de distribución clásica (izquierda) y cuántica (derecha) para el sistema caótico de la Sección 4.3 a $t > t_h$. Mientras la distribución cuántica presenta fuertes efectos de interferencia, signo de la coherencia a grandes distancias característica de la evolución unitaria, en la distribución clásica estos efectos están ausentes.

La expresión (4.4) es válida para sistemas caóticos; su dependencia logarítmica con $\hbar$ resulta de la sensibilidad exponencial en la evolución. En ausencia de inestabilidad exponencial, es decir cuando $\lambda = 0$, la divergencia de trayectorias es típicamente polinómica, lo que conduce a una relación también polinómica para el tiempo de Ehrenfest: $t_h \sim (A/\hbar)^\alpha$, donde A es la acción clásica del sistema. De esta manera, sistemas macroscópicos integrables ($A \gg \hbar$) seguirán una evolución clásica por tiempos muy largos, siempre que estén bien localizados inicialmente. En el límite $\hbar \rightarrow 0$, t_h también se hace infinito para sistemas caóticos, pero mucho más lentamente debido al comportamiento logarítmico. Como veremos, esta lentitud causa inconvenientes en el contexto del problema de la correspondencia cuántico-clásica.

4.1.2 Argumentos cuánticos

Los argumentos presentados en la subsección anterior pueden parecer inconsistentes, puesto que el principio de indeterminación de Heisenberg no puede ser aplicado a sistemas que son clásicos. Sin embargo un análisis completamente cuántico muestra que estos argumentos son esencialmente correctos. Aún sistemas ostensiblemente clásicos deben respetar el principio de Heisenberg, pues éstos son últimamente cuánticos.

La ruptura del Principio de Correspondencia puede ser estudiada más rigurosamente recurriendo a la representación de Wigner del estado cuántico de un sistema (Zurek, 1998). La ecuación de evolución de la función de Wigner se obtiene tomando la transformada de Wigner (ver ecuación (3.12)) de la ecuación de von Neumann, o equivalentemente de la ecuación de Schrödinger. Cuando el potencial V es analítico puede realizarse una expansión en términos de la constante de

Planck y la ecuación de Schrödinger en esta representación resulta

$$\dot{W} = \{H_S, W\}_{PB} + \sum_{n \geq 1} \frac{\hbar^{2n} (-1)^n}{2^{2n} (2n+1)!} \partial_x^{2n+1} V(x) \partial_p^{2n+1} W(x, p), \quad (4.5)$$

donde $H_S = p^2/2m + V$ es el Hamiltoniano del sistema. El primer término del lado derecho de la ecuación (4.5) es el corchete de Poisson que gobierna la evolución Liouvilleana clásica del sistema. Los siguientes son los términos de corrección cuántica, que serán despreciables cuando $W(x, p)$ sea una función razonablemente suave de p , es decir, cuando las derivadas de orden mayor que tres de W con respecto a p sean pequeñas.

Sin embargo, para sistemas caóticos la evolución cuántica de una función de distribución inicialmente suave puede conducir rápidamente a la pérdida de la correspondencia debido a dos aspectos del mismo problema: la contracción y el plegamiento de la función de distribución. Por un lado, la presencia mera del corchete de Poisson predice que, en sistemas caóticos, las derivadas de la función de Wigner van a crecer exponencialmente como resultado de su contracción en momento, ecuación (4.1). De esta manera, los términos en derivadas n -ésimas de la función de Wigner son de la forma $\partial_p^n W \sim \Delta p^{-n} W$ con Δp dado por la ecuación (4.1). Así, las correcciones cuánticas serán importantes luego de un tiempo t_h que puede ser estimado comparando la magnitud de las correcciones no-lineales con la contribución del corchete de Poisson a la ecuación (4.5). Teniendo en cuenta la definición para χ de la sección anterior, se obtiene exactamente la ecuación (4.4) para el tiempo de Ehrenfest. Luego de este tiempo t_h las correcciones cuánticas serán comparables al primer término del lado derecho de (4.5) y entonces el corchete de Poisson ya no será suficiente para aproximar la evolución. Por otro lado, luego del tiempo t_h la función de distribución se habrá extendido sobre distancias del orden del tamaño del sistema, de acuerdo con la ecuación (4.2) y comenzará entonces a plegarse sobre sí misma. Es decir, la evolución cuántica de un sistema caótico confinado en el espacio de fases, genera en forma dinámica estados del tipo *Gato de Schrödinger*. Estos estados son flagrantemente no-clásicos. Un ejemplo simple de estos estados fue presentado en el Capítulo anterior: la superposición de dos estados gaussianos localizados separados una distancia Δx presenta términos clásicos y términos de interferencia cuya longitud de onda es inversamente proporcional a la separación de los primeros, $\delta p \sim \hbar/\Delta x$, tal como muestran las Figuras 3.1 y 3.2. Los estados coherentes forman una base sobre-completa del espacio de Hilbert, de manera que un estado puro puede representarse como una superposición de los mismos. De esta manera pares de estados coherentes que contribuyen a la descomposición del estado puro separados una distancia Δx producen interferencias cuánticas cuya longitud de onda característica es pequeña ($\delta p \sim \hbar/\Delta x$). La presencia de estas interferencias coherentes hace que W deje de ser suave y entonces las derivadas de la función de Wigner presentes en las correcciones

cuánticas de la ecuación (4.5) crecen considerablemente, ahora por otros motivos. Esto también conduce a la pérdida de correspondencia.

4.1.3 Inestabilidad en sistemas macroscópicos

Podría argumentarse que sistemas realmente macroscópicos, tal como nos lo indica la experiencia diaria, están fuera del alcance de la dinámica cuántica. Por otro lado, muchas veces, a falta de un criterio mejor que defina el posible borde entre los mundos clásico y cuántico se ha identificado lo macroscópico con lo clásico. Sin embargo, si el sistema macroscópico considerado presenta un comportamiento caótico, esta identificación es incorrecta.

Consideremos un objeto obviamente macroscópico y analicemos cuán rápidamente puede el mismo caer en un régimen cuántico. Hyperion, una de las lunas de Saturno tiene aproximadamente la forma de un elipsoide alargado. La interacción entre el momento cuadrupolar de su campo gravitatorio y las mareas del campo gravitatorio de Saturno conduce a una oscilación caótica que resulta en una divergencia exponencial de las posibles orientaciones de su eje en una escala temporal de aproximadamente el doble de su período orbital de 21 días (Wisdom, 1985). Hay también numerosos ejemplos de caos en el cinturón de asteroides (como el caso de Chiron), con inestabilidades exponenciales en sus órbitas del orden de unos 100.000 años (Wisdom, 1985). Estimaciones del tiempo de Ehrenfest para un sistema como Hyperion pueden realizarse fácilmente empleando la relación $t_r = \lambda^{-1} \ln(LP/\hbar) = \lambda^{-1} \ln(A/\hbar)$ (Berry et al., 1979), donde L y P representan el tamaño del espacio de fases en posición y momento respectivamente, mientras $A \sim LP$ es la acción del sistema. Esta expresión es más conveniente que la expresión (4.4) debido a su insensibilidad a las condiciones iniciales. De todas maneras, como $L \sim \lambda$ y $P > \Delta p_0$ resulta $t_r > t_h$, siendo entonces t_r una cota superior del tiempo de Ehrenfest. Una estimación exagerada de la acción clásica de Hyperión puede obtenerse de su energía de enlace E_B y su tiempo orbital t_O : $A/\hbar \approx E_B t_O/\hbar \approx 10^{77}$, que es por supuesto enorme. Sin embargo, en el cálculo de t_r hay un logaritmo, y así el tiempo de Ehrenfest estimado es sorprendentemente corto, $t_h^{Hyperion} = 42$ días $\ln(10^{77}) \approx 20$ años. La combinación de las dinámicas caótica y cuántica predice que luego de tan sólo 20 años Hyperión se encontraría en una superposición coherente de orientaciones macroscópicamente diferentes!! Algunos estudios (?: Sussman et al., 1992) muestran indicios de que aún el sistema solar como un todo es caóticamente inestable, siendo el exponente de Lyapunov que determina la tasa de divergencia de trayectorias vecinas en el espacio de fases, del orden de $\lambda = .25 \times 10^{-6}$ años⁻¹. Afortunadamente y de acuerdo con la abrumadora evidencia experimental disponible, es muy probable que tal inestabilidad no altere de manera crucial propiedades de las órbitas de los planetas, tales como su distancia media al sol, aunque sus excentricidades podrían no estar tan a salvo de posibles alteraciones (Sussman et al., 1992). Es más bien la localización del

planeta a lo largo de su órbita quien es exponencialmente susceptible a pequeñas perturbaciones. Aunque las inestabilidades en estos sistemas tienen lugar en tiempos muy largos, en todos los casos el tiempo de Ehrenfest estimado es definitivamente menor que la edad del sistema solar.

Estos ejemplos hacen evidente que el tamaño macroscópico de un sistema no es suficiente para garantizar su clasicidad. Así, la teoría cuántica implica que aún un sistema tan grande como el sistema solar (o cualquier otro sistema caótico) es indeterminista *en principio*, y no simplemente caóticamente determinista: la predictibilidad clásica requiere, para sistemas caóticos, condiciones iniciales de cada vez mayor precisión: este requerimiento es posible, en principio, en mecánica clásica, pero, de acuerdo a la teoría cuántica, podría eventualmente violar el principio de indeterminación de Heisenberg.

Un análisis cuántico de la evolución de un objeto tan macroscópico como Hyperión fuerza al mismo a existir en un estado no local, similar al del famoso ejemplo de Schrödinger. Pero mientras en el caso del gato era posible suponer que el estado final superposición del gato vivo y muerto podía ser evitado si el proceso de medida era cabalmente comprendido, esta forma de escapar al problema no es posible para el caso del sistema planetario. Si la evolución unitaria de subsistemas cerrados del sistema solar fuese una descripción adecuada de su dinámica, los planetas se encontrarían deslocalizados alrededor de sus órbitas y la dinámica planetaria ya no seguiría las leyes de Newton. Sus componentes evolucionarían a estados altamente no clásicos simplemente como resultado de su evolución dinámica (cuántica), y el proceso de medición no juega papel alguno en la resolución de la paradoja. Pero de alguna manera, afortunadamente, esto no es lo que sucede. Los planetas se mueven siguiendo las leyes de Newton y nunca encontramos a algún constituyente del sistema solar extendido a lo largo de su órbita. ¿Cuál es, entonces, la solución de esta paradoja, si se insiste en la validez universal de la Teoría Cuántica?

Así como la decoherencia inducida sobre el sistema por el entorno resuelve el problema de la medición, veremos en el próximo Capítulo que el mismo fenómeno logra explicar la *emergencia* de clasicidad en sistemas caóticos. Es necesario y *esencial* entonces abrir al sistema y considerar su interacción con otros sistemas (el entorno) para que estas descabelladas predicciones de la mecánica cuántica para sistemas macroscópicos dejen de molestarnos. La ecuación de Schrödinger, que gobierna la evolución de sistemas cuánticos cerrados, no puede aplicarse a sistemas abiertos ni tampoco puede aplicarse tan inocentemente el principio de superposición, fuente y origen de todos estos problemas.

4.2 Estructuras a pequeña escala en el espacio de fases

Hay un aspecto de la dinámica cuántica que la diferencia de su correspondiente clásica más allá de su rol en la pérdida de correspondencia, pues juega un papel decisivo en la determinación de la sensibilidad de un sistema cuántico (o un entorno cuántico) a las perturbaciones y consecuentemente es de suma importancia en el contexto de los procesos de decoherencia.

Tal como indica la ecuación (4.1), la estructura que un sistema clásico caótico puede desarrollar no tiene límite inferior. ¿Qué sucede con la estructura a pequeña escala en la versión cuántica de estos sistemas? En un sistema cuántico las estructuras más pequeñas de la función de onda están determinadas por las frecuencias más altas en el espacio de fases. Dada una energía finita (es decir, frecuencia finita), la función de onda, y consiguientemente, la función de Wigner asociada, no podrá alcanzar escalas tan pequeñas como las posibles para el sistema clásico, que decrecen exponencialmente. Entonces, en un sistema cuántico debe existir una escala por debajo de la cual no debiera haber estructura. Algunos autores han conjeturado (Berry et al., 1979) que la estructura que la función de Wigner es capaz de desarrollar debe saturar, es decir, su contracción debe detenerse a escalas del orden de la constante de Planck. Esta conjetura está de acuerdo con el principio de Heisenberg, y entonces usualmente se ha considerado que éste implica que estructuras en el espacio de fases asociadas con escalas *sub-Planckianas* no existen o carecen de significado físico. Si éste fuese el caso, la función de Wigner debiera ser suave en escalas pequeñas comparadas con $\hbar$.

Es evidente de la Figura 4.1 que, al menos en sistemas caóticos, pueden aparecer estructuras a escalas *sub-Planckianas*. Las más pequeñas provienen de las interferencias y su origen puede ilustrarse considerando nuevamente el estado tipo *gato de Schrödinger* de la Sección 3.5. El término $W_{int} \sim \exp(-p^2\delta^2/\hbar^2 - x^2/\delta^2) \cos(\Delta xp/\hbar)$ representa las interferencias entre los dos paquetes gaussianos de ancho δ y tiene una frecuencia proporcional a la separación entre sus picos, $\kappa_p = \Delta x/\hbar$. Si un estado puro se representa como una superposición de estados coherentes, las interferencias de menor longitud de onda surgen de pares de estados coherentes separados la distancia máxima posible para el sistema en el espacio de fases. Así, esperamos que las menores escalas ocurran con longitudes de onda

$$a_x = \hbar/P, \quad a_p = \hbar/L. \quad (4.6)$$

Entonces, en sistemas macroscópicos la estructura *sub-Planckiana* aparecerá a escalas asociadas con la acción

$$a \approx a_x a_p \approx \hbar \times \frac{\hbar}{A}. \quad (4.7)$$

donde A es la acción clásica del sistema, que puede aproximarse como el producto de la extensión de la envolvente de la función de Wigner en posición $\Delta x = L$ y momento $\Delta p = P$, $A \approx L \times P$. Estos valores de L y P están determinados a su vez por la energía E disponible y la forma del potencial $V(x)$. Es decir, $P \leq \sqrt{2mE}$ y $E - V(x) \geq 0$ determinan el soporte efectivo de la distribución de probabilidades en el espacio de fases. Cálculos simples basados en la superposición de cuatro gaussianas de incerteza mínima llevan a los mismos resultados (Zurek, 2001). Estados cuánticos ocupando un volumen $A = LP$ en el espacio de fases pueden contener estructuras en su distribución de Wigner tan pequeñas como a . Estos estados surgen naturalmente: la evolución llevará a casi cualquier sistema, con la notable excepción del oscilador armónico, a un estado del tipo *gato de Schrödinger* que inevitablemente, luego del tiempo que tome a la función de onda extenderse sobre todo el espacio de fases disponible, presentará un patrón de interferencias en una escala dada por las ecuaciones (4.6) y (4.7). El tiempo que tarda el sistema en desarrollar esta estructura es justamente el tiempo de Ehrenfest dado por la expresión (4.4).

Esta escala a en que la estructura satura puede expresarse de una manera más sugestiva: el número de estados ortogonales que pueden contenerse dentro de un volumen A del espacio de fases es $n = A/(2\pi\hbar)$. Es decir, $a \approx \hbar/n$, donde n es la dimensión del espacio de Hilbert disponible.

De acuerdo con el principio de Heisenberg un sistema cuántico no puede estar localizado en un volumen sub-Planckiano en el espacio de fases. De ahí que uno se vea tentado a despreciar escalas sub-Planckianas como irrelevantes aún si éstas aparecen en la distribución de Wigner. En particular, si un estado no puede estar confinado por una medición a un volumen menor que $\hbar$, entonces podría esperarse que no sea notablemente perturbado por desplazamientos mucho menores que $\sqrt{\hbar}$. Esto no es así, como veremos en el próximo Capítulo. La escala $a \ll \hbar$ juega un papel fundamental en la determinación de la sensibilidad de sistemas cuánticos a perturbaciones; desplazamientos en el espacio de fases del orden de $\delta \sim \sqrt{a} \ll \sqrt{\hbar}$ sobre un estado con estructura mayoritariamente en escalas del orden de a producirán un estado ortogonal al original (Peres, 1984; Peres, 1996). Esta sensibilidad a las perturbaciones, a su vez, determina el límite de la eficiencia de la decoherencia (Karkuszewski et al., 2001; Cuccietti et al., 2003).

En el resto del presente Capítulo ilustraremos a través de estudios numéricos sobre un sistema caótico particular cómo la evolución cuántica del mismo pierde rápidamente su correspondencia clásica, tanto a niveles de sus valores medios como también, y aún más drásticamente, en sus funciones de distribución en el espacio de fases. Además, el mismo sistema servirá para ilustrar cómo la evolución cuántica rápidamente satura la estructura de la función de Wigner a escalas sub-Planckianas.

4.3 Pozo doble con perturbación periódica: el sistema aislado

Aún cuando la mecánica cuántica predice que luego de un tiempo t_h la función de onda de un sistema caótico se encuentra deslocalizada y la correspondencia con las predicciones clásicas se pierden, es difícil encontrar a nuestro alrededor ejemplos de esta situación. Buscaremos al analizar el ejemplo de esta Sección síntomas de pérdida de correspondencia que sean factibles de corroborar a través de experimentos. Una de las formas de más fácil acceso experimental es la comparación de valores medios. También analizaremos las consecuencias de la generación dinámica de interferencias en la evolución cuántica, que conduce rápidamente a la formación (y saturación) de estructuras en el espacio de fases de muy pequeña escala, típicamente *sub-Planckiana*.

Analizaremos la dinámica de una partícula cuántica aislada bajo la acción de un potencial de pozo doble simétrico sujeto a una perturbación armónica, cuyo Hamiltoniano es

$$H_S(x, p, t) = \frac{p^2}{2m} - Bx^2 + \frac{x^4}{64A} + Fx \cos(\omega t). \quad (4.8)$$

Este sistema no-lineal ha sido extensamente estudiado (Reichl et al., 1984; Lin et al., 1990; Lin et al., 1992). A continuación detallamos someramente las características de su dinámica clásica, discutimos la clase de condiciones iniciales que convienen a nuestros propósitos y finalmente mencionamos muy brevemente los métodos empleados en la resolución numérica de las ecuaciones de Schrödinger y de Newton (una presentación más exhaustiva de los mismos puede encontrarse en el Apéndice A). Finalmente se presentan y discuten los resultados obtenidos numéricamente.

Dinámica clásica

Cuando la perturbación armónica es nula, es decir $F = 0$, el sistema es integrable y exhibe el espacio de fases genérico de un sistema biestable. Tiene dos puntos fijos estables en $x = \pm\sqrt{32BA}$, $p = 0$, con energía asociada $E = -16B^2A$ y un punto fijo inestable en $x = 0$ y $p = 0$, con $E = 0$. A partir de este último punto fijo la dinámica genera un toro denominado separatriz, pues divide regiones del espacio de fases donde la partícula está ligada a uno de los pozos ($E < 0$) de las regiones donde la partícula se encuentra libre ($E > 0$). La presencia de la perturbación armónica introduce un número infinito de zonas de resonancia primaria en el espacio de fases del sistema. Los toros cerca de la separatriz del sistema integrable ($E = 0$) y los toros invariantes de KAM en la región entre resonancias son destruidos progresivamente a medida que la amplitud F de la perturbación crece. El espacio de fases del sistema comienza a verse caótico, presentando en general una naturaleza mixta, como puede verse en la Figura 4.2 para dos conjuntos diferentes de parámetros del mismo. Las zonas alrededor de los dos puntos fijos estables y las cadenas de islas resonantes forman regiones regulares del espacio de fases donde la dinámica del sistema es casi

integrable. Los estratos caóticos entre regiones regulares se desarrollan a partir del entrelazado homoclínico, los intrincados entrelazamientos de los subespacios estable e inestable originados en los puntos fijos hiperbólicos entre las islas resonantes o el punto fijo hiperbólico en el origen.

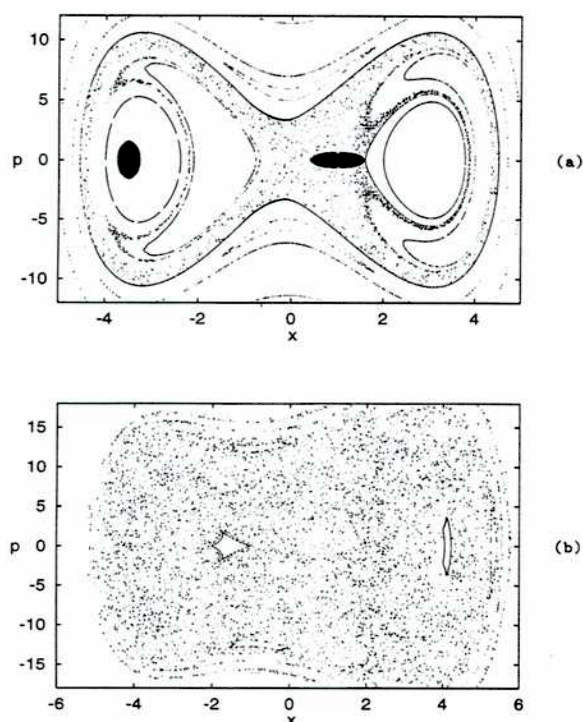


Figura 4.2: Espacio de fases estroboscópico del pozo doble (4.8) con parámetros (a) $m = 1$, $B = 10$, $A = 1/32$, $F = 1$, $\omega = 5.35$ y (b) $m = 1$, $B = 10$, $A = 1/32$, $F = 10$, $\omega = 6.07$. Los bordes de las elipses oscuras representan contornos de condiciones iniciales gaussianas de mínima incerteza a $1/20$ de su máximo valor, centradas en $x_0 = -3.7$, $p_0 = 0$, y con varianzas $\Delta x^2 = .05$, $\Delta p = 1$ sobre la isla regular a la izquierda y $x_0 = 1$, $p_0 = 0$, $\Delta x^2 = .05$, $\Delta p^2 = .05$ sobre el mar caótico.

Condiciones iniciales

Dada la divergencia exponencial de trayectorias en sistemas caóticos, la comparación de predicciones obtenidas a través de una sola trayectoria en el caso clásico y un paquete de ondas en el cuántico, conducirá a una rápida pérdida de correspondencia. Pero el uso de una sola trayectoria es cuestionable. Los estados iniciales tanto clásico como cuántico debieran prepararse de

Para valores pequeños de la amplitud de la perturbación, los estratos caóticos son tan delgados que sólo aquellos cercanos al punto fijo inestable del sistema integrable pueden ser observados en el espacio de fases estroboscópico del sistema. A medida que el valor de F crece, estas regiones caóticas incrementan su relevancia mientras las islas resonantes de mayor orden que las fundamentales (primarias) cercanas a los puntos fijos estables del sistema integrable se hacen a su vez más y más pequeñas hasta ser casi invisibles. Para valores grandes de F los diferentes estratos caóticos se unifican en lo que se denomina el mar caótico; las islas de estabilidad y las dos primeras islas resonantes reducen su tamaño notablemente (ver Figura 4.2b). En el estudio que sigue elegiremos los parámetros del sistema de manera tal que o bien la mayoría del espacio de fases es caótico, como en la Figura 4.2b, donde las islas de estabilidad alrededor de los puntos fijos del sistema integrable se encuentran reducidas a la invisibilidad y solamente se observan las dos islas de resonancia primaria, o bien las regiones regulares coexisten con el mar caótico, tal como se ve en la Figura 4.2a.

manera que pueda accederse a ellos con mediciones que satisfagan el principio de indeterminación de Heisenberg. En particular, sería sensato comparar la evolución de una función de Wigner de mínima incerteza con la evolución de una distribución de probabilidad clásica inicialmente idéntica (Ballentine et al., 1994; Miller et al., 1998).

Por otro lado, nos interesa concentrar la atención en la competencia entre dos efectos: la generación dinámica de interferencias y destrucción por la decoherencia. Por esta razón estudiaremos la evolución de nuestro sistema para condiciones iniciales muy simples – gaussianas – de manera que estas no exhiban desde un comienzo efecto alguno de interferencia. Éstas surgirán naturalmente a causa de la evolución cuántica del sistema.

Es nuestro propósito seguir la evolución de estados cuya distribución de Wigner inicial está totalmente contenida bien en alguna isla de regularidad o bien en el mar caótico, como se muestra en la Figura 4.2a, pues, como ya mencionamos, la dinámica de estos estados es bien distinta. Este requerimiento nos obliga a tomar un valor para $\hbar$ suficientemente pequeño, ya que, por ejemplo, para los parámetros correspondientes a la Figura 4.2a, la isla más a la izquierda tiene un área aproximada de $\mathcal{A} = 6\pi$; si necesitamos estados bien localizados dentro de cada región (ya sea el mar caótico o alguna isla de regularidad) necesitamos comparar éste área con la que ocupan las elipses determinadas por los contornos de la función de Wigner digamos a $1/20$ de su máximo valor – el valor en el pico de la gaussiana – es decir $\mathcal{A}_c = 2\pi \ln(20)\Delta x\Delta p = \pi \ln(20)\hbar$ (esta última igualdad hace uso de $\Delta x\Delta p = \hbar/2$, pues estamos considerando estados iniciales puros, coherentes y de mínima incerteza). Entonces, un valor razonable para $\hbar$, que es el que elegimos para nuestros cálculos numéricos, es $\hbar = 0.1$ de manera que el área de la isla es cerca de 20 veces el tamaño del estado inicial. Para los parámetros del sistema correspondientes a la Figura 4.2b, valores mayores para $\hbar$ pueden también ser elegidos.

Métodos numéricos

La ecuación de Schrödinger para este sistema fue resuelta utilizando dos métodos diferentes. Primero, integramos esta ecuación por medio de un algoritmo iterativo que emplea un método espectral de alta resolución (Feit et al., 1982), que detallamos en el Apéndice A. Este algoritmo tiene la ventaja conservar la unitariedad de la solución, propiedad importante a la hora de analizar los efectos del entorno, pues los procesos que éste induce son esencialmente no-unitarios. De este modo garantizamos que la pérdida de unitariedad no es debida a errores numéricos inherentes al método empleado. Segundo, resolvimos la misma ecuación aplicando una técnica numérica basada en los estados de Floquet del sistema (Shirley, 1965). Este método consiste en encontrar numéricamente los autoestados $|\Psi_\alpha\rangle$ del operador de Floquet definido en la Sección 3.4.1, que forman una base completa del espacio de Hilbert del problema. Expandiendo el estado inicial

en esta base, $|\Psi(0)\rangle = \sum_{\alpha=1}^N c_{\alpha} |\Psi_{\alpha}\rangle$, la solución de la ecuación de Schrödinger se hace trivial, $|\Psi(t)\rangle = \sum_{\alpha=1}^N c_{\alpha} \exp(-i\epsilon_{\alpha} t/\hbar) |\Psi_{\alpha}(t)\rangle$, donde ϵ_{α} son las cuasienergías correspondientes al estado de Floquet $|\Psi_{\alpha}\rangle$ (Milfeld et al., 1983). De esta manera, toda la dificultad del método queda reducida al problema de encontrar los estados de Floquet[‡]. Hemos empleado exitosamente este método para algunos parámetros del sistema, pero no en todos los casos de interés. En realidad, la principal dificultad del método es el número n de estados que son necesarios para expandir con precisión los estados iniciales elegidos. Este número crece rápidamente a medida que $\hbar$ se hace pequeño. Por ejemplo, para los parámetros de la Figura 4.2b, y con $\hbar = 0.1$, se necesitan más de 200 estados de Floquet para evolucionar un estado inicial gaussiano centrado en el mar caótico, puestos que éstos se encuentran típicamente extendidos sobre todo el mar caótico.

A su vez, las ecuaciones de Newton fueron resueltas recurriendo a un algoritmo simpléctico que permite la conservación del volumen en la evolución. Este algoritmo, descrito en detalle en el Apéndice A, encuentra la solución a tiempo t iterativamente, con el consiguiente problema de acumulación de error. De allí que la solución de las ecuaciones clásicas sean confiables sólo a tiempos relativamente cortos.

En lo que sigue discutiremos soluciones típicas de la ecuación de Schrödinger para los estados iniciales arriba indicados.

4.3.1 Estados iniciales en una isla regular

La serie temporal de los valores de expectación del observable posición x de la partícula, tanto para la evolución clásica como cuántica se muestra en la Figura 4.3. El estado inicial es una gaussiana centrada en $x_0 = -3.7$, $p_0 = 0$ y con $\sigma_x = 0.05$ y $\sigma_p = 1$, de manera que $\sigma_x \sigma_p = \hbar/2$ con $\hbar = 0.1$ y corresponde a la elipse izquierda en la Figura 4.2a, que dibuja el contorno de la función de Wigner a $1/20$ del máximo valor de la misma. Los valores de expectación clásicos y cuánticos permanecen idénticos, dentro de los errores numéricos de nuestros cálculos, de acuerdo a resultados

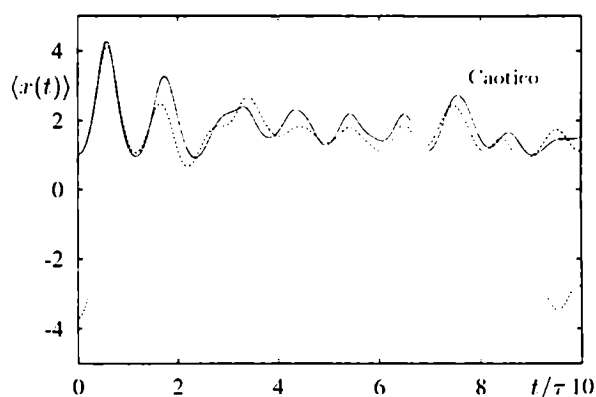


Figura 4.3: Serie temporal de los valores de expectación clásicos y cuánticos del observable x para los estados de la Figura 4.2a.

previos (Lin et al., 1990; Lin et al., 1992; Berry et al., 1979). Para momentos de mayor orden de los observables x o p , diferentes condiciones iniciales inmersas dentro de las islas de estabilidad o las resonantes y diferentes parámetros del sistema, se encontraron resultados similares. Éstos

[‡]Lo mismo ocurre cuando se está resolviendo la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, donde los estados de Floquet no son otros que los autoestados de energía del Hamiltoniano.

pueden entenderse como sigue: cuando el estado inicial se encuentra localizado dentro de una isla regular, su descomposición en la base de estados de Floquet está caracterizada por un número pequeño de estados, en su mayoría localizados sobre las regiones regulares. Entonces sólo muy pocas frecuencias entrarán en juego en la dinámica y la serie temporal del valor de expectación de cualquier observable aparecerá casi-periódica y regular. Más aún, como los estados de Floquet que intervienen en la descomposición se encuentran localizados en toros integrables, la cuantización EBK es posible y los valores de expectación clásicos y cuánticos se verán idénticos por largos tiempos. La ruptura de la correspondencia se observará en tiempos inversamente proporcionales a alguna potencia de $\hbar$ (Utermann et al., 1994), lo cual es suficientemente lento como para no causar dificultades con el límite clásico de la mecánica cuántica.

Sin embargo, como estados de Floquet localizados tienen su origen en la superposición de pares casi degenerados relacionados por la simetría del Hamiltoniano, cada miembro del par con una paridad diferente, la partícula cuántica eventualmente podrá tunelear a través del mar caótico (Lin et al., 1990; Lin et al., 1992; Grossmann et al., 1993; Blümel et al., 1991) hecho que está estrictamente prohibido para la partícula clásica. Las escalas temporales de tuneleo son muy largas para los parámetros elegidos (típicamente del orden de 50–100 veces el período de la perturbación periódica). La acumulación del error hace que una integración de la ecuación de Schrödinger por un método iterativo cause problemas en este régimen de tiempos largos, donde hay tuneleo. Sin embargo, una solución basada en los estados de Floquet es más conveniente ya que nos permite conocer el estado a cualquier tiempo, siempre que lo hayamos calculado dentro del primer período τ de la perturbación periódica (Blümel et al., 1991; Dittrich et al., 1993; Takahashi, 1989).

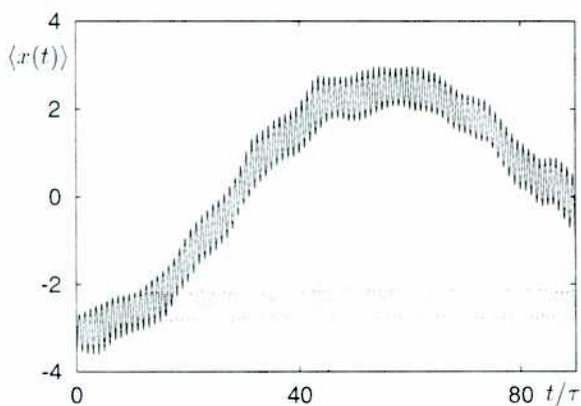


Figura 4.4: Serie temporal de los valores de expectación cuánticos (línea llena) y clásicos (línea a trazos) de x para un estado inicial localizado dentro de una isla regular (ver el texto).

usado de $\hbar$ es diez veces mayor al valor empleado en los estados iniciales de la Figura 4.2a. Para

Aplicamos este método para varios conjuntos de parámetros del sistema, elegidos de manera tal que el número de estados de Floquet necesarios para representar fielmente el espacio de Hilbert del sistema se mantenga relativamente bajo, pero que aún nos permita representar estados bien localizados dentro de las islas regulares. Uno de los conjuntos de parámetros usados con este propósito es: $m = 1$, $B = 10$, $A = 1/32$, $F = 4$, $\omega = 5.35$ y $\hbar = 1$. El espacio de fases estroboscópico correspondiente a estos parámetros es algo a medio camino entre las Figuras 4.2a y 4.2b, sin embargo el valor

estos parámetros, la Figura 4.4 muestra la evolución del valor de expectación de la posición, para un estado inicial gaussiano, de incerteza mínima, localizado en la isla de regularidad a la izquierda, centrado en $x_0 = -3.52$, $p_0 = 0$, y con desviaciones $\Delta x = .25$ y $\Delta p = 2$. Este estado inicial pudo ser expandido con sólo 20 estados de Floquet. Se observa claramente cómo el sistema tunelea de una isla regular a la otra simétricamente relacionada (desviaciones del comportamiento clásico se observan para tiempos bien por debajo del tiempo de tuneleo, que en este caso es del orden de $t = 56\tau$). La evolución de las funciones de distribución clásicas y cuánticas se muestran en

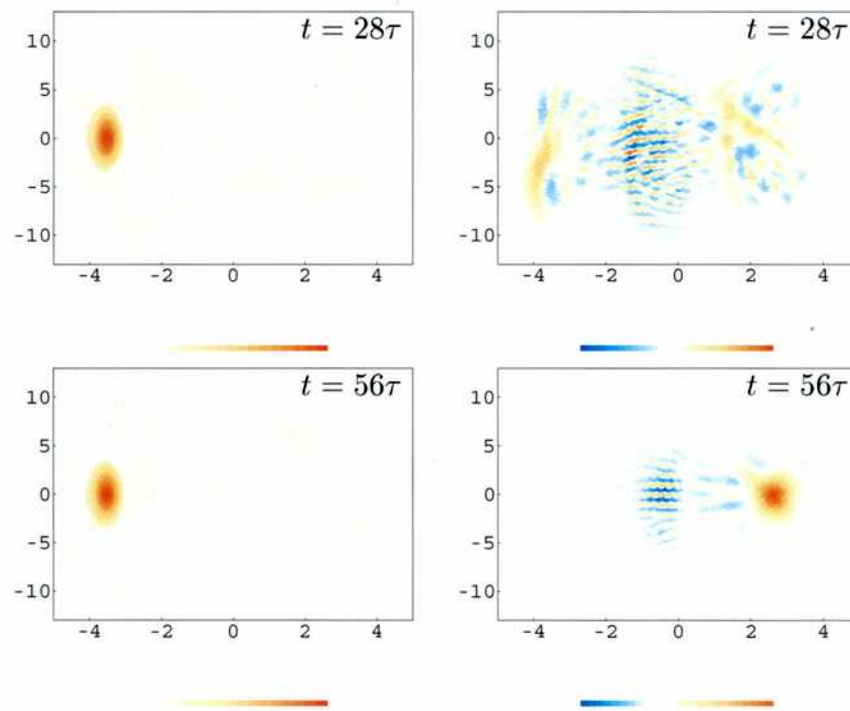


Figura 4.5: Funciones de distribución clásica (izquierda) y cuántica (derecha) para el caso de tuneleo. Los parámetros son los mismos que los de la Figura 4.4. Mientras la dinámica clásica prohíbe el tuneleo de la función de distribución de probabilidades, la correspondiente distribución clásica exhibe este fenómeno claramente.

la Figura 4.5 para dos tiempos diferentes: un tiempo a mitad de camino del tuneleo ($t = 28\tau$), donde la función de onda se encuentra completamente deslocalizada; y otro tiempo para el cual el estado ha tuneleado a la isla regular a la derecha del espacio de fases ($t = 56\tau$). Nótese que aunque el estado inicial tiene un pico dentro de la isla de más a la izquierda, éste tiene una probabilidad no nula de encontrarse en el mar caótico, debido al valor relativamente alto de $\hbar$. Por esta razón la cola de la distribución inicial gaussiana se extenderá sobre todo el mar caótico a medida que transcurra el tiempo. Para el caso clásico este efecto no es muy importante puesto

que éste permanece dentro de la isla regular. Por el contrario, en la evolución cuántica se observa claramente al paquete de onda tunear a través del mar caótico hacia la isla regular relacionada, a la derecha.

4.3.2 Estados iniciales en el mar caótico

Valores medios

La dinámica caótica genera estructura muy fina en el espacio de fases, tal como predice la ecuación (4.1) en el caso clásico. Aunque esta estructura es importante, frecuentemente es un síntoma de pérdida de correspondencia de muy difícil acceso experimental directo y se ve promediada al medir o calcular los valores medios de algún observable. Entonces podríamos esperar que, cuando aparezcan efectos de interferencias, éstos no influyan efectivamente en los valores medios y los resultados cuánticos estén de acuerdo con los clásicos. Sin embargo, la ruptura de correspondencia también se observa en valores de expectación de observables que son suaves en el espacio de fases.

Para estados gaussianos inicialmente localizados dentro del mar caótico, como el correspondiente a la Figura 4.2a, el comportamiento es muy diferente al de un estado inicialmente localizado en una región regular del espacio de fases. La Figura 4.3 muestra la serie temporal de los valores de expectación clásicos y cuánticos del observable posición correspondientes a este estado inicial, centrado en $x_0 = 1$, $p_0 = 0$, y con desviaciones $\Delta x^2 = .05$ y $\Delta p^2 = .05$. Se observa que luego de un tiempo mucho más corto que el correspondiente al caso regular, las discrepancias entre las evoluciones clásicas y cuánticas se hacen evidentes. Para diferentes condiciones iniciales la ruptura de la correspondencia ocurre a tiempos levemente distintos. Esto puede entenderse de la siguiente manera: cada punto (x, p) del espacio de fases es un punto hiperbólico, con exponentes de Lyapunov $\pm\lambda(x, p)$ que difieren de un lugar a otro del mismo. Es decir, dependiendo del lugar en donde esté localizada la condición inicial, cuya función de distribución es $W_0(x, p)$, la distribución de exponentes de Lyapunov asociada será diferente. Una estimación del tiempo $t_h = \frac{1}{\bar{\lambda}} \ln\left(\frac{\Delta p_0 \Delta x}{h}\right)$ puede realizarse empleando el *valor medio* del exponente de Lyapunov pesado sobre la condición inicial, $\bar{\lambda} = \int dx dp W_0(x, p) \lambda(x, p)$, que lógicamente depende de la condición inicial. Dado un conjunto de parámetros para el sistema χ tendrá un valor fijo pero Δp_0 también depende de la condición inicial. Sin embargo, por estar dentro de un logaritmo, el valor estimado de t_h no es muy sensible a los cambios en el producto $\frac{\Delta p_0 \Delta x}{h}$ y sí lo es a variaciones en el valor de $\bar{\lambda}$. Los exponentes de Lyapunov $\lambda(x, p)$ fueron calculados empleando un método simpléctico que describimos en el Apéndice A. De todas maneras la ruptura de la correspondencia ocurre, para diferentes condiciones iniciales y varios conjuntos de parámetros del sistema, en tiempos muy cortos, comparable en todos los casos con la escala dinámica τ . Nuestros resultados son consistentes

con una dependencia logarítmica de este tiempo con $\hbar$.

Es importante destacar que una rápida pérdida de correspondencia es también posible en sistemas integrables, pero sólo para condiciones iniciales muy especiales (como por ejemplo el punto fijo hiperbólico presente en la versión integrable de nuestro sistema, ecuación (4.3) con $F = 0$, en $x = 0$ y $p = 0$). Por el contrario, en el caso caótico la pérdida de correspondencia es típica. Sucede luego de un tiempo muy corto (como muestra la Figura 4.3) para condiciones iniciales genéricas.

Además de la marcada diferencia entre las predicciones cuánticas y clásicas se observa claramente que el valor de expectación tiene un comportamiento mucho más irregular que en el caso integrable. Esto es lo esperado y, en el régimen cuántico, puede ser explicado: contrariamente a lo que ocurre en el caso integrable o regular, el número de estados de Floquet necesarios para expandir el estado inicial es bastante grande. Esto es así pues los estados de Floquet están en su mayoría extendidos sobre la totalidad del mar caótico, y por consiguiente para obtener un estado gaussiano localizado se necesita la superposición de muchos estados de Floquet, en particular en el límite semiclásico. De esta manera, la evolución de este estado inicial contendrá muchas más frecuencias (unos cientos, típicamente), y la serie temporal del valor de expectación se verá irregular.

Distribuciones: saturación de la estructura fina

La diferencia entre los valores de expectación cuánticos y clásicos es una consecuencia natural del hecho de que al evolucionar la función de Wigner se hace cada vez más y más diferente de la correspondiente distribución clásica. Esta situación se ilustra en la Figura 4.6 donde se muestra la evolución de la función de Wigner para el estado inicial gaussiano localizado en el mar caótico de la Figura 4.2a, comparándola con la correspondiente evolución de la distribución clásica, para cuatro tiempos diferentes. Muy rápidamente, aún antes de que los valores de expectación muestren diferencia alguna, la distribución cuántica se ve afectada por efectos de interferencia a pequeña escala, y evoluciona en una función de distribución claramente no-clásica. Estos resultados están de acuerdo con resultados previos (Lin et al., 1990; Lin et al., 1992; Berry et al., 1979; Habib et al., 1998).

La dependencia temporal de la función de Wigner de la Figura 4.6 está gobernada por la ecuación (4.5). Tal como se discutió en las Secciones 4.1.1 y 4.1.2, cuando se comienza con un estado inicial gaussiano los términos de corrección cuántica, que contienen derivadas de alto orden de la función de Wigner, serán inicialmente despreciables y la evolución inicialmente tenderá a seguir un flujo Liouvilleano, es decir, seguirá las trayectorias clásicas. Esto es lo que se observa tempranamente en la Figura 4.6, cuando las evoluciones de ambas distribuciones difieren sólo

levemente. Luego, como todo punto del mar caótico es hiperbólico, la función de Wigner inicial-

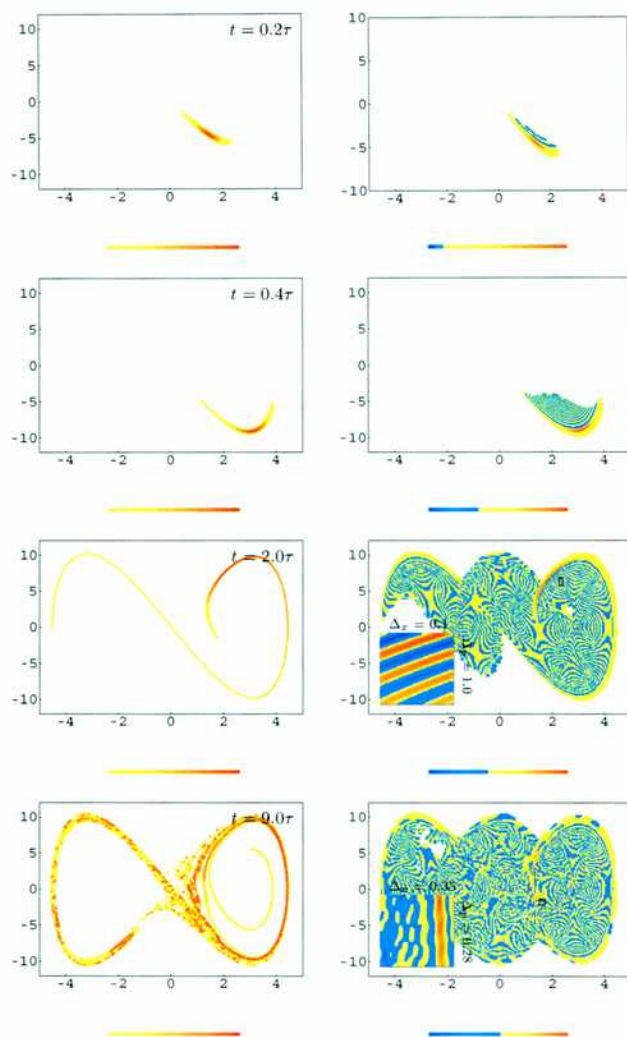


Figura 4.6: Funciones de distribución clásica (izquierda) y cuántica (derecha) para 4 tiempos diferentes. Ya a tiempos tempranos ($t < t_h$) se observan efectos de interferencia en la evolución cuántica, pero luego de $t \sim 2\tau$ éstas invaden la totalidad del espacio de fases y su longitud de onda llega a escalas muy pequeñas, como se muestra en las figuras insertas en los diagramas a $t = 2\tau$ y $t = 9\tau$, que aumentan los diminutos rectángulos de área $\hbar$ dibujados sobre las funciones de Wigner.

mente regular se deformará, estirándose a lo largo del subespacio inestable y contrayéndose a lo largo del estable, creciendo así sus derivadas y, consecuentemente, las correcciones cuánticas en la ecuación (4.5). Además, como el movimiento está acotado, la función de Wigner eventualmente se plegará surgiendo las interferencias y la estructura a pequeña escala. Estos efectos, contracción, estiramiento y plegamiento de la función de distribución se observan claramente en la Figura. A la izquierda, la evolución de la función de distribución de probabilidades clásica, se contrae, estira

y pliega, pero no presenta interferencias, signo de la evolución cuántica. Éstas, evidentes aún a tiempos menores que el tiempo de Ehrenfest, disminuyen su longitud de onda a medida que la función de Wigner ocupa un volumen mayor del espacio de fases.

La escala temporal t_h para la cual las correcciones cuánticas entran en juego fue estimada en la subsección anterior. En nuestras simulaciones numéricas verificamos que, luego de un tiempo aproximadamente $t_h \approx 0.5\tau$ para el conjunto de parámetros aquí considerado, la distribución cuántica en el espacio de fases ya no se asemeja a la correspondiente distribución clásica y la función de Wigner comienza a presentar efectos de interferencia. Para tiempos mayores a $t \approx 2\tau$ la función de Wigner invade la totalidad del espacio de fases disponible y las oscilaciones alcanzan escalas muy pequeñas, de tamaño $a_p \approx 0.1$ y $a_x \approx 0.005$, siendo el producto del orden de $a = a_x a_p \approx 5 \times 10^{-5} \ll \hbar = 0.1$. Los detalles incluídos en la Figura 4.6 a tiempos relevantes, muestran el desarrollo de estructura a pequeña escala mencionado. Allí se muestra la distribución de Wigner sobre una región de área $\hbar$.

La Figura 4.7 muestra una secuencia de sectores de la función de Wigner de área $\hbar$ para tres tiempos diferentes. Es claro que la estructura no es uniforme, como en el caso del ejemplo trivial

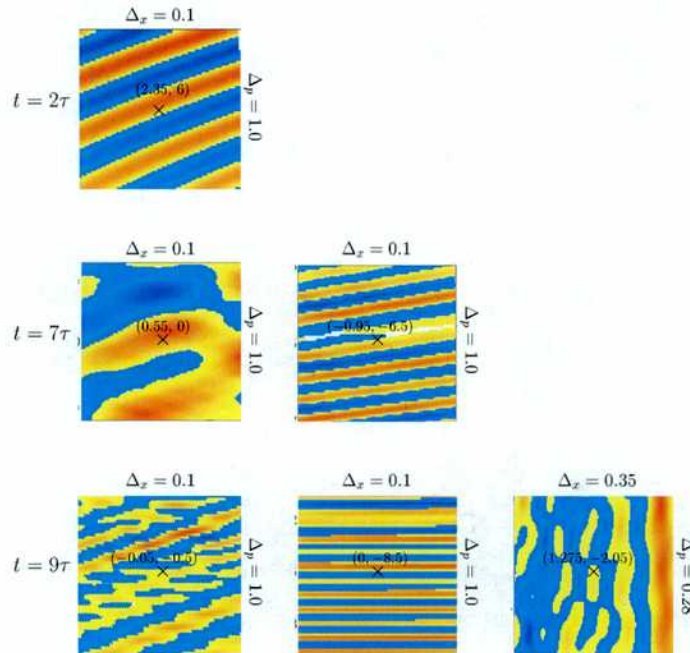


Figura 4.7: Sectores de la función de Wigner de área $\hbar$ para tres tiempos diferentes y en diferentes regiones del espacio de fases. En el centro de cada región, marcado con una cruz, se indican las coordenadas (x, p) del espacio de fases en donde se encuentra localizada esta porción de la función de Wigner.

de la superposición de dos gaussianas; regiones diferentes del espacio de fases presentarán, a un dado tiempo, oscilaciones cuya longitud de onda puede ser muy diferente, tal como se ve en la Figura 4.7 para $t = 9\tau$.

Típicamente la función de Wigner constará de dos partes, una mayoritariamente positiva que refleja el comportamiento clásico de la función de distribución, y otra que manifiesta la naturaleza cuántica de la evolución en donde estarán presentes las interferencias con un complejo patrón de frecuencias. Este patrón posee una frecuencia que será la máxima posible en cada dirección y que indica la saturación de la estructura en el espacio de fases. Las diferentes regiones en que está dividida la función de Wigner, y cuyas contribuciones a la hora de calcular valores de expectación de algún observable serán muy diferentes, se ilustran en la Figura 4.8. Como será discutido en el Capítulo siguiente, cada región posee una sensibilidad muy diferente a las perturbaciones.

La existencia de esta estructura sub-Planckiana en la función de Wigner no ha sido previamente observada y su relevancia ha sido notada sólo recientemente (Monteoliva et al., 2000; Monteoliva et al., 2001; Karkuszewski et al., 2001; Cuccietti et al., 2003). La saturación de la estructura desarrollada por la función de distribución a escalas sub-Planckianas es otra importante característica que distingue las dinámicas cuánticas y caóticas. En dinámica clásica caótica, la estructura más pequeña desarrollada por la función de distribución de probabilidades decrece exponencialmente, de acuerdo con (4.1). La ecuación (4.7) tiene importantes consecuencias para la decoherencia, puesto que el tamaño de las estructuras más pequeñas controla la sensibilidad a las perturbaciones tanto en un sistema caótico como de un entorno caótico (Karkuszewski et al., 2001). Como fue anticipado por Peres (Peres, 1996), los sistemas cuánticos son más sensibles a las perturbaciones cuando sus contrapartes clásicas son caóticas que cuando éstos son regulares. Sin embargo, contrastando con sistemas clásicos caóticos, los sistemas cuánticos no son exponencialmente sensibles a perturbaciones infinitesimales, sino más bien, la menor perturbación por la que pueden ser afectados está determinada por a .

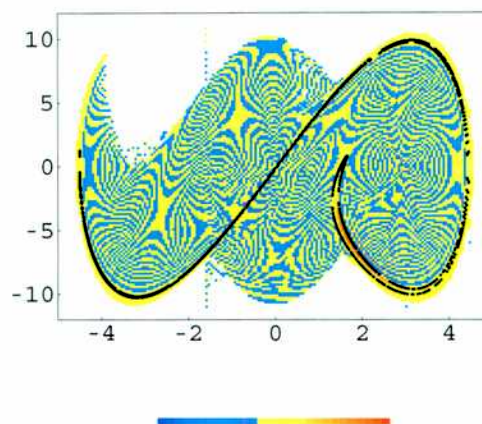


Figura 4.8: Función de Wigner para $t = 2\tau$. Sobre la misma se marca en negro la región “clásica”.

Capítulo 5

Decoherencia en sistemas caóticos

La decoherencia elimina toda superposición extravagante de estados del espacio de Hilbert de un sistema, emergiendo en el proceso de selección inducida por el entorno un conjunto privilegiado de estados clásicamente permitidos, los *estados punteros*. Los casos en donde este proceso puede ser estudiado analíticamente son pocos, como los sistemas de spines o los sistemas lineales. En particular el Movimiento Browniano Cuántico permite mostrar cómo el *entorno* monitoreando al sistema produce el deseado efecto de decoherencia que, en este contexto, es la eliminación de las franjas de interferencias presentes en estados que inicialmente son del tipo Gato de Schrödinger. Es decir, el estado inicial elegido para este análisis es un estado clásicamente prohibido, con el cual claramente no es posible estudiar la correspondencia cuántico-clásica.

Cuando el sistema de interés es caótico es la propia dinámica quien genera, a partir de estados iniciales que pueden ser clásicos, estados deslocalizados y definitivamente no-clásicos produciéndose la ruptura de la correspondencia en un tiempo del orden del tiempo de Ehrenfest t_h . Es por esta razón que el estudio del fenómeno de la decoherencia en sistemas caóticos tiene particular interés: por un lado, salvo para condiciones iniciales especiales, un sistema lineal no genera dinámicamente estados superposición de estados clásicamente permitidos; por otro lado, en sistemas lineales estados iniciales genéricos pierden su correspondencia clásica en tiempos mucho más largos, demasiado como para que representen una real preocupación en el límite clásico. Hay, sin embargo, una excepción a este último punto: en sistemas biestables (integrables o no) la dinámica cuántica permite que un estado inicialmente localizado en las cercanías de un punto fijo estable del espacio de fases tunelee hacia el otro punto fijo estable, mientras que la dinámica clásica prohíbe este fenómeno.

En el presente Capítulo estudiaremos, fundamentalmente, el impacto de la decoherencia en sistemas cuyos análogos clásicos son caóticos. Cuando un sistema clásicamente caótico se encuentra acoplado a un entorno, la decoherencia puede pensarse como el monitoreo, por parte del entorno,

de algunos de los observables del primero. En este contexto las características del fenómeno de decoherencia en sistemas caóticos pueden estudiarse empleando ecuaciones maestras. En la Sección 5.1 consideramos y analizamos cualitativamente un modelo de decoherencia que, a pesar de su extrema simplicidad, captura la física relevante del fenómeno. De este análisis se desprende un criterio para el restablecimiento de la correspondencia cuántico-clásica y simultáneamente se hace evidente que este restablecimiento tiene como precio la irreversibilidad incluíble del proceso, con el consiguiente aumento de la entropía del sistema. En particular, este último fenómeno tiene una característica muy especial cuando el sistema que pierde coherencia es caótico, que puede emplearse para definir caos cuántico: la tasa de producción de entropía coincide con la tasa de Kolmogorov-Sinai para sistemas clásicos. El análisis cualitativo es confirmado numéricamente en la Sección 5.3 para un sistema particular. Luego, en la Sección 5.4 sobre este mismo sistema se analiza numéricamente la influencia de la decoherencia sobre el efecto túnel.

Por otro lado, en este Capítulo también estudiaremos la sensibilidad de un sistema cuántico a las perturbaciones en el potencial. Nuestro interés en este tema reside en su conexión con los procesos de decoherencia: cuando es el *entorno* de un sistema quien se comporta caóticamente, su capacidad para causar decoherencia sobre el mismo está determinada por la sensibilidad del primero a las perturbaciones causadas por el segundo.

La relación entre la decoherencia y la sensibilidad de un sistema cuántico a las perturbaciones puede entenderse fácilmente con un ejemplo ilustrativo (Karkuszewski et al., 2001). Cuando un sistema de dos estados inicialmente en un estado superposición de estados punteros $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ interactúa con un entorno genérico $\mathcal{E}$ inicialmente en el estado *puro* $|\epsilon\rangle$, la evolución conjunta sistema-entorno gobernada por el Hamiltoniano $H = H_{\mathcal{E}} \otimes I_S + V_{\mathcal{E}}^+ |+\rangle\langle +| + V_{\mathcal{E}}^- |-\rangle\langle -|$, conduce al entrelazamiento de los estados de ambos subsistemas $|\Psi(0)\rangle = (\alpha|+\rangle + \beta|-\rangle) \otimes |\epsilon\rangle \longrightarrow \alpha|+\rangle \otimes |\epsilon_+(t)\rangle + \beta|-\rangle \otimes |\epsilon_-(t)\rangle = |\Psi_{\mathcal{SE}}\rangle$, donde los estados condicionales del entorno $|\epsilon_{\pm}(t)\rangle$ resultan de una evolución unitaria generada por $H_{\mathcal{E}} + V_{\mathcal{E}}^{\pm}$. El operador I_S y los proyectores actúan sobre el espacio de Hilbert del sistema mientras $H_{\mathcal{E}}$ es el Hamiltoniano propio del entorno y $V_{\mathcal{E}}^{\pm}$ son operadores que actúan sobre el del entorno y representan el acoplamiento perturbativo sobre el estado del spin. El estado del sistema S , inicialmente puro, se transformará eventualmente en una *mezcla* de los estados punteros $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ como resultado del monitoreo del entorno. El decaimiento del producto interno $\langle \epsilon_+ | \epsilon_- \rangle$ es un indicador de este proceso: una vez que el mismo se hace despreciable, el estado del sistema S puede ser descrito en términos de probabilidades clásicas en vez de amplitudes cuánticas. Es entonces natural medir la efectividad de la decoherencia por la magnitud $|\langle \epsilon_+ | \epsilon_- \rangle|^2$. Por otra parte, esta magnitud es también una medida de la sensibilidad del entorno a las perturbaciones en estrecha relación con la Fidelidad $M(t)$ definida en la Introducción (Peres, 1984). Es importante destacar que si el estado inicial del entorno es una mezcla, la medida

natural de la efectividad de la decoherencia difiere de la mencionada. Este punto será discutido con más detalle en el curso de este Capítulo.

En nuestros estudios hemos recurrido a una medida de la sensibilidad muy simple pero que claramente captura la esencia del problema. Esta medida será definida en la Sección 5.2. en donde además discutiremos cualitativamente algunas de las características esperadas de esta función, en particular la importancia del desarrollo de estructura *sub-Planckiana* en la función de distribución del sistema para la determinación de la sensibilidad de un sistema cuántico. Más aún, la naturaleza de las escalas temporales características de esta propiedad será también analizada. Nuestro análisis, corroborado posteriormente en la Sección 5.5 mediante estudios numéricos sobre un sistema caótico particular, indican que los sistemas caóticos, debido a su extrema facilidad para desarrollar tales estructuras de pequeña escala, son altamente sensibles a las perturbaciones. Más aún, la escala temporal en que esto ocurre está relacionada con los exponentes de Lyapunov del sistema clásico. Esta característica de los sistemas cuánticos caóticos, su capacidad para desarrollar rápidamente estados extendidos sobre gran parte del espacio de fases disponible, hace que sean muy eficientes a la hora de provocar pérdida de coherencia cuando actúan de entorno de otro sistema cuántico. Sin embargo los modelos standard de decoherencia emplean osciladores armónicos, tal como los modelos que hemos presentado en el Capítulo 3. Estos modelos lineales de entorno corrigen esta deficiencia empleando muchos osciladores (infinitos) de manera tal que cada uno es desplazado levemente por la interacción con el sistema.

5.1 Decoherencia y Caos

El problema que nos ocupa es la dinámica de un sistema cuya contraparte clásica es caótica, descrito por un Hamiltoniano general H_S , que interactúa débilmente con un entorno modelado por un conjunto infinito de osciladores armónicos en equilibrio térmico a temperatura T . Cuando (i) la interacción sistema-entorno es bilineal en operadores posición, (ii) los sistemas se encuentran inicialmente desacoplados, (iii) la densidad espectral del entorno es óhmica y (iv) consideramos el límite de altas temperaturas, se obtiene una ecuación maestra muy sencilla, que ya hemos discutido en la Sección 3.3 y que por comodidad reescribimos para futura referencia

$$\dot{W} = \{H_S, W\}_{PB} + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \hbar^{2n}}{2^{2n} (2n+1)!} \partial_x^{(2n+1)} V \partial_p^{(2n+1)} W + D \partial_{pp}^2 W \quad (5.1)$$

Los términos disipativos están ausentes pues limitaremos nuestro análisis a tiempos mucho menores que los tiempos de relajación, del orden de $\sim \gamma^{-1}$ (recordar que $\gamma \rightarrow 0$ en el límite de altas temperaturas aquí considerado). Este modelo, aún siendo muy simple, igualmente nos permitirá realizar un estudio interesante del fenómeno de decoherencia.

Con el objetivo de estudiar la correspondencia cuántico-clásica, la evolución del sistema cuántico abierto debe compararse con la evolución clásica del mismo. Pero la ecuación (5.1) no puede ser comparada con la evolución dictada por las ecuaciones de Newton del sistema, que gobiernan la dinámica clásica del sistema *aislado*. En cambio, la mecánica estadística clásica nos provee de una ecuación de evolución correcta que tiene en cuenta los efectos del entorno sobre el sistema

$$\dot{f}_c = \{H_S, f_c\}_{PB} + D\partial_{pp}^2 f_c \quad (5.2)$$

donde $f_c(x, p, t)$ es la función de distribución de probabilidades clásica del sistema de interés. La ecuación (5.2) es una ecuación de Fokker-Planck y coincide con la ecuación maestra (5.1) en el límite $\hbar \rightarrow 0$, cuando las correcciones cuánticas están ausentes. Su dinámica es equivalente a la ecuación de Langevin $m\ddot{x} = -V'(x) + F(t)$, donde $F(t)$ es un término estocástico que representa ruido blanco gaussiano.

5.1.1 Restablecimiento de la correspondencia: análisis cualitativo

Es instructivo analizar la ecuación maestra (5.1) de manera de tener una idea intuitiva de qué es lo que está pasando con la dinámica de nuestro sistema. Cuando el término de difusión está ausente, los estados simplemente obedecen la ecuación de Schrödinger (4.5). Si el estado inicial es suave, el término dominante en la ecuación (5.1) es el corchete de Poisson y la dinámica será inicialmente idéntica a la correspondiente clásica (5.2) con $D = 0$. Como ya fue discutido en la Sección 4.1.2, la función de Wigner evolucionará inicialmente siguiendo la trayectorias no-lineales clásicas, perderá su forma gaussiana y desarrollará estructura cada vez más fina mientras se pliega. Si el estado inicial está localizado en el mar caótico, esto sucede exponencialmente rápido. Debido a los efectos conjuntos del estiramiento y contracción de la función de Wigner en las direcciones inestable y estable respectivamente, y del plegamiento de la misma por ser acotada la región del espacio de fases disponible para su expansión, los gradientes de la función de distribución crecen y las correcciones cuánticas presentes en la ecuación (5.1) se hacen importantes, de manera tal que las discrepancias entre las predicciones cuánticas y clásicas comienzan a ser relevantes. También comienzan a desarrollarse, simultáneamente, interferencias cuánticas entre porciones diferentes de la función de onda, lo que genera oscilaciones en la función de Wigner y consiguientemente las correcciones cuánticas en la ecuación maestra, también por este motivo, aumentan su importancia relativa.

El término que produce decoherencia en la ecuación (5.1) puede entenderse como el responsable de dos efectos que están interrelacionados. Por un lado, el término de difusión tiende a disminuir las oscilaciones en la función de Wigner, suprimiendo las interferencias cuánticas. Entonces, para

este sistema, la decoherencia es la eliminación de las franjas de interferencia que son producidas dinámicamente por las no linealidades del potencial. Consecuentemente estados deslocalizados como los gatos de Schrödinger perderán su coherencia a gran escala. Una estimación de la escala temporal que caracteriza la desaparición de las franjas de interferencias puede obtenerse a partir de los resultados de la Sección 3.2 para el Movimiento Browniano Cuántico: franjas de interferencia con un vector de onda característico (a lo largo del eje de momentos) k_p , decaen exponencialmente con una tasa dada por la ecuación (3.32), $\Gamma_D = \tau_D^{-1} = Dk_p^2$. Un paquete de onda que se extienda sobre distancias del orden de Δx , con partes que interfieran coherentemente, genera franjas de interferencias con $k_p = \Delta x/\hbar$. Concluimos entonces que $\Gamma_D = D\Delta x^2/\hbar^2$. Esta tasa de decoherencia depende linealmente del coeficiente de difusión D . Cuando la función de Wigner se encuentra coherentemente extendida sobre la totalidad del espacio de fases disponible, uno espera franjas de interferencia con longitud de onda del orden de $\hbar/L$, donde L es el tamaño del sistema en la dirección x^* . La tasa a la cual estas interferencias desaparecen debido a la decoherencia es entonces $\Gamma_D^L = DL^2/\hbar^2$. Así, podemos derivar una condición que debe satisfacerse para que estas interferencias sean destruidas eficientemente por el entorno: la tasa de destrucción Γ_D^L , debe ser más rápida que la de regeneración Ω_f fijada por la dinámica del sistema, y relacionada tanto con los exponentes de Lyapunov como con la tasa de plegamiento de la función de Wigner. Entonces, si

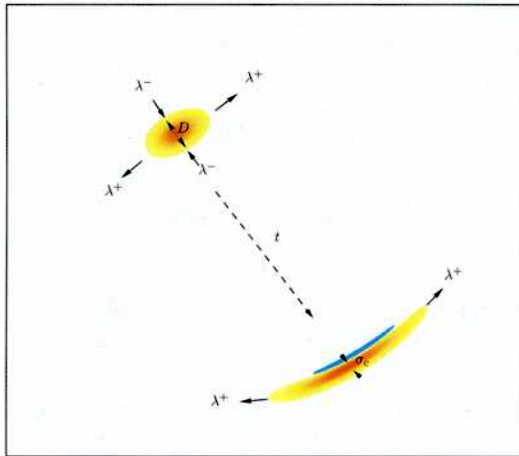


Figura 5.1: En presencia de decoherencia la función de Wigner no puede contraerse por debajo de σ_c ni extenderse coherentemente más allá de $l_c \sim \hbar/\sigma_c$.

estable del espacio de fases, tal como se ilustra en la Figura 5.1, alcanzando un equilibrio cuando se llega a un ancho crítico

$$\sigma_c = \sqrt{2D/\lambda}, \quad (5.4)$$

*Estas franjas de interferencias son las responsables de la estructura sub-Planckiana mencionada en la Sección 4.3.2.

$$\Omega_f \ll \Gamma_D^L, \quad (5.3)$$

las franjas de muy pequeña escala serán eficientemente destruidas y la función de Wigner permanecerá esencialmente positiva.

Sin embargo, la desaparición de las franjas de interferencia no es la única consecuencia de la decoherencia. Relacionado con este proceso hay un segundo efecto, también presente en la evolución clásica dictada por la ecuación (5.2): mientras las franjas de interferencia están siendo destruidas por la decoherencia, el término de difusión tiende a extender las regiones donde la función de Wigner es positiva. Este efecto compite con su contracción en la dirección

por debajo del cual la función de Wigner no puede contraerse. O, equivalentemente, la función de Wigner no puede extenderse coherentemente más allá de $l_c \sim \hbar/\sigma_c$.

Este ancho crítico se obtiene de un análisis cuidadoso de la ecuación maestra (5.1) para un oscilador armónico invertido (Zurek et al., 1994) y coincide muy aproximadamente con la estimación rápida que sigue de la ecuación (5.3), $\Omega_f \sim \lambda \approx D/\sigma_c^2 = \Gamma_D^L$ de donde $\sigma_c \sim \sqrt{D/\lambda}$ (Zurek et al., 1995; Zurek et al., 1995b). Se ve ahora claramente cuándo la evolución Liouvilleana clásica generada por el corchete de Poisson será una buena aproximación de la evolución cuántica del sistema abierto. El término dominante de las correcciones cuánticas es comparable a la fuerza clásica cuando $\frac{\hbar^2}{24} \partial_x^3 V \partial_p^3 W \approx \frac{\hbar^2}{24} \frac{\partial_x V}{\chi^2} \frac{\partial_p W}{\sigma_c^2}$, donde $\partial_x V \partial_p W$ representa la fuerza clásica en el corchete de Poisson y $\chi \sim \sqrt{\partial_x V / \partial_x^3 V}$ es la escala de no-linealidad del potencial. Entonces las correcciones cuánticas serán pequeñas cuando

$$\chi \sigma_c \gg \hbar \quad \text{ó} \quad l_c \ll \chi. \quad (5.5)$$

condición enteramente equivalente a la ecuación (5.3). En este caso la función de Wigner evolucionará clásicamente siguiendo un flujo Liouvilleano más efectos difusivos, ecuación (5.2), y la correspondencia será restablecida. Este efecto puede entenderse como una consecuencia del principio de incerteza de Heisemberg: el observable complementario al que está siendo monitoreado por el entorno resulta indeterminado y la función de Wigner se extenderá a lo largo de la dirección correspondiente en el espacio de fases. Cuando este proceso destruya las interferencias de longitud de onda menor que σ_c o detenga la contracción a escalas σ_c , coherencias a escalas mayores que $l_c \sim \hbar/\sigma_c$ habrán sido eliminadas y estados tipo gato de Schrödinger habrán perdido su no localidad típicamente cuántica.

Volviendo al ejemplo definitivamente macroscópico de la Sección 4.1 (Zurek, 2001b), un medio muy rareado (0.1 átomos/cm³, comparable a la densidad de los gases en la vecindad de planetas masivos externos del sistema solar) a una temperatura de $100K$ (comparable con la temperatura en superficie de los planetas más grandes) sería suficiente para detener la deslocalización de Júpiter, cuya inestabilidad caótica es del orden de $4 \cdot 10^6$ años. El valor de l_c resultante es del orden de $l_c \sim 10^{-29}$ cm!. Así la decoherencia es extremadamente efectiva previniendo la extensión del paquete de onda, y se verifica que $l_c \ll \chi \sim R$ por un margen enorme. De esta manera la paradoja descrita en la Sección 4.1 no tiene posibilidad alguna de materializarse.

El ejemplo de caos cuántico en el sistema solar es una dramática demostración de la eficiencia de la decoherencia, pero sus consecuencias obviamente no están restringidas a constituyentes del sistema solar; en general todo sistema (cuántico) suficientemente macroscópico se verá forzado a comportarse de acuerdo a las leyes de la Mecánica Clásica, como resultado de la selección inducida por el entorno. Este será el caso siempre que $l_c \ll \chi$ ya que l_c puede pensarse como una medida

de la resolución de las ‘mediciones’ que el entorno lleva a cabo sobre el sistema.

Esta increíble eficiencia del entorno en el monitoreo y localización del estado de un objeto cuántico macroscópico no es en realidad una sorpresa. Sabemos, por nuestra experiencia directa, que los fotones son capaces de mantener un excelente registro de la localización de Júpiter, o de cualquier otro cuerpo celeste. Esto debe ser así, puesto que obtenemos información visual acerca del universo interceptando con nuestros ojos solamente una minúscula fracción de la radiación emitida o reflejada por el mismo.

La ecuación (5.5) establece un criterio simple para el restablecimiento de la correspondencia cuántico-clásica. Pero lo más importante no es la existencia de un criterio sino la evidencia de que el *mismo* proceso de decoherencia del que surgen los estados punteros de un aparato es el responsable del restablecimiento de la correspondencia en procesos dinámicos.

5.1.2 Producción de entropía

La decoherencia es un fenómeno causado por el continuo monitoreo del entorno sobre el sistema, que puede entenderse como un proceso de medición. Una medición involucra siempre transferencia de información y la decoherencia no es una excepción, pues el entorno adquiere información sobre el estado del sistema. Para un observador que ha medido el estado del sistema a $t = 0$ la información que posee en un instante posterior está influida (en general, se vé disminuída) por la interacción sistema-entorno. Cuando el observador y el entorno monitorean el *mismo* conjunto de observables, la pérdida de información es mínima. Esta es la idea subyacente en el criterio de predictibilidad de la Sección 3.5.3, una herramienta basada en el concepto de información que permite buscar los estados punteros seleccionados por el entorno. Cuando, sin embargo, el observador y el entorno monitorean observables diferentes (es decir, que no conmutan) el entorno seguirá midiendo el estado del sistema en la base de estados punteros y desde el punto de vista del observador, habrá pérdida de información. Esta pérdida puede analizarse de una manera muy simple calculando la tasa de producción de entropía de von Neumann, $\mathcal{H}_{VN} = -Tr(\rho \ln \rho)$, donde ρ es el operador densidad reducida del sistema. Un aumento de la entropía es un indicador de la irreversibilidad del proceso que acompaña al restablecimiento de la correspondencia cuántico-clásica en sistemas caóticos.

Como se discute en (Zurek et al., 1994; Zurek et al., 1995; Takahashi, 1989) y con detalle para el Movimiento Browniano en la Sección 3.5.3, la tasa de producción de entropía distingue entre los casos regular y caótico. Para estados regulares la decoherencia debiera producir entropía con una tasa dependiente del coeficiente de difusión D , ecuación (3.37). Sin embargo, para estados caóticos la tasa se hace independiente de D y es determinada por el exponente de Lyapunov del sistema. El origen de esta independencia puede comprenderse empleando un argumento muy simple. La

dinámica caótica expande a la función de Wigner exponencialmente rápido en la dirección inestable del espacio de fases. Cuando la evolución es reversible este comportamiento es contrarrestado por la contracción de la función de Wigner en la dirección complementaria, que corresponde a exponentes de Lyapunov negativos. Además, el plegamiento de la función de distribución genera interferencias, signo de coherencias cuánticas de largo alcance. Pero en presencia de la decoherencia la contracción se detendrá en escalas $\sigma_c \sim \sqrt{2D/\lambda}$ y la función de Wigner continuará su expansión solamente a lo largo de la dirección inestable mientras las interferencias son eliminadas. Es así que durante este régimen el volumen cubierto por la función de Wigner crece exponencialmente con el tiempo $A(t) = \sigma_c l(t) \sim \sigma_c \hbar / \Delta p_0 \exp(\lambda t)$ y como consecuencia, la entropía que es proporcional al logaritmo del volumen $A(t)$, crece linealmente con una tasa fijada por el exponente de Lyapunov, $\dot{\mathcal{H}} \sim \lambda$.

Este resultado puede entenderse de una manera alternativa. Cuando la decoherencia restringe la extensión coherente de un paquete de ondas a escalas $l_c \sim \hbar \sqrt{\lambda/2D}$, si éste ocupa una región de extensión mayor que l_c , rápidamente perderá coherencia en un tiempo τ_D menor que el tiempo asociado con la pérdida de predictibilidad clásica $1/\lambda$ y se deteriorará en una mezcla de estados, cada uno coherente sobre un volumen de dimensiones $l_c \times \sigma_c$. Consecuentemente la matriz densidad puede ser aproximada por una suma incoherente de estados razonablemente localizados y aproximadamente puros. Cuando N de estos estados contribuyen más o menos igualmente en la matriz densidad, la entropía resultará $\mathcal{H} = \ln N$. Esta discusión puede extenderse al caso de un sistema d -dimensional, en donde los exponentes de Lyapunov aparecen de a pares $\pm \lambda^i$ en cada dimensión. Mientras la inestabilidad exponencial extiende el tamaño de la distribución en las direcciones inestables, $l^i(t) \sim \exp(\lambda^i t)$, la contracción se detiene en escalas del orden de σ_c^i . En este límite el número de estados puros necesarios para representar la matriz densidad crece exponencialmente en cada dimensión.

$$N^i \approx \frac{l^i(t)}{l_c^i}. \quad (5.6)$$

El menor número de estados puros contenidos por W será entonces $N = \prod_{i=1}^d N^i$. Como resultado la producción de entropía aproximará, asintóticamente, una tasa dada por la suma de exponentes de Lyapunov positivos

$$\dot{\mathcal{H}} \approx \partial_t \ln N \approx \sum_{i=1}^d \lambda^i, \quad (5.7)$$

en concordancia con el resultado para $d = 1$. La ecuación (5.7) se hace precisa cuando el ancho de la función de Wigner alcanza el ancho crítico σ_c^i . Este es un resultado muy importante: la decoherencia ayudará a restablecer la correspondencia cuántico-clásica, pero es evidente ahora que

esto tiene su precio. La pérdida de información es una consecuencia inevitable de la erradicación de estados del tipo gato de Schrödinger. Éstos desaparecen porque el entorno está ‘vigilando’ el espacio de fases, y con su monitoreo localiza al sistema dentro de regiones de tamaño no mayor a $l_c \times \sigma_c$.

La ecuación (5.7) representa un resultado tanto familiar como muy sorprendente. Es familiar porque coincide con la fórmula de Kolmogorov-Sinai para la tasa de producción de entropía de un sistema caótico *clásico*, obtenida a partir de argumentos matemáticos basados en una suerte de promediado arbitrario pero fijo en el espacio de fases. En la discusión de los párrafos anteriores su fundamento cuántico es evidente. El promediado es impuesto naturalmente por el acoplamiento con el entorno. De todas maneras es un resultado sorprendente, puesto que es *independiente* de la intensidad del acoplamiento entre el sistema y el entorno, aún cuando el proceso de decoherencia, causado por esta interacción, es la fuente última del aumento de la entropía. Durante el curso de esta Tesis estos argumentos, originalmente presentados por Zurek y Paz (Zurek et al., 1994), han sido investigados y confirmados numéricamente (Monteoliva et al., 2000; Monteoliva et al., 2001).

Esta independencia es realmente notable y ha conducido a sospechar que la causa de la flecha temporal podría rastrearse hasta el mismo fenómeno responsable de la emergencia de clasicidad en sistemas caóticos o en mediciones cuánticas. En algún sentido esto no es una sorpresa, ya que von Neumann sabía que los procesos de medición son irreversibles (Von Neumann, 1955). Sí es sorprendente, sin embargo, que este resultado de aspecto clásico tenga raíces cuánticas, y que estas raíces estén tan bien escondidas que la tasa de producción de entropía dependa solamente de los exponentes de Lyapunov clásicos.

De todas formas, aunque el entorno no entre explícitamente en la tasa de producción de entropía (5.7), determina cuándo esta fórmula asintótica es válida. Los exponentes de Lyapunov entrarán en juego cuando las dimensiones de la función de distribución excedan los tamaños críticos en las correspondientes direcciones $l^i(t)/l_c^i > 1$. El tiempo en que esto sucede está determinado por la intensidad de la interacción con el entorno, que determina l_c . La decoherencia entonces dibuja el *borde* entre los mundos clásico y cuántico postulado por Bohr, mientras a ambos lados del mismo los tiempos de decoherencia serán menores o mayores que las escalas temporales dinámicas. También nos provee de un esquema para definir las diferentes ramas requeridas por Everett en su teoría MWI, mientras superposiciones coherentes de éstas son eliminadas por la decoherencia. Por otro lado es claro que la expansión exponencial del volumen cubierto por la función de Wigner no ocurre indefinidamente y luego de un tiempo se llegará a un equilibrio. Así, el régimen durante el cual la ecuación (5.7) es válida termina cuando $A(t) \approx A_{cq}$, es decir cuando $t \approx t_{cq} = \lambda^{-1} \ln(A_{cq} \Delta p_0 / \hbar \sigma_c)$.

En la Sección 5.3 presentaremos evidencia numérica sólida confirmando la existencia de esta fase independiente de D . Por simplicidad, en vez de analizar la entropía de von Neumann $\mathcal{H}_{VN} =$

$-Tr(\rho_r \log \rho_r)$ examinaremos la entropía lineal, definida como $\mathcal{H} = -\log(Tr(\rho_r^2))$, que es una buena medida del grado de mezcla del sistema y constituye un límite inferior de la entropía de von Neumann (es decir, puede mostrarse que $\mathcal{H}_{vN} \geq \mathcal{H}$).

El argumento presentado en los párrafos anteriores acerca del rol del ancho crítico σ_c puede parecer demasiado simple, pero captura sin embargo los aspectos esenciales del proceso dinámico. Un argumento más elaborado puede obtenerse usando la ecuación maestra (5.1). Los dos primeros términos de esta ecuación no producen entropía pues corresponden a la evolución del sistema aislado. Entonces la tasa de producción de entropía lineal puede siempre ser escrita como

$$\dot{\mathcal{H}} = 2D \frac{\langle (\partial_p W)^2 \rangle}{\langle W^2 \rangle} . \quad (5.8)$$

donde los corchetes denotan una integral sobre el espacio de fases. El lado derecho de esta ecuación es proporcional al valor medio cuadrático del número de onda calculado con el cuadrado de la transformada de Fourier de la función de Wigner. Esto implica que la tasa de producción de entropía está íntimamente relacionada con la estructura del espacio de fases presente en la función de Wigner. Entonces, el régimen independiente de D comienza cuando la longitud de onda media cuadrática a lo largo del eje de momentos es proporcional a $\sqrt{D}$ (como en σ_c). $\langle (\partial_p W)^2 \rangle / \langle W^2 \rangle \sim k_p^2 \sim \sigma_c^{-2} \sim \lambda / 2D$. Este comportamiento cancela la dependencia con D en $\dot{\mathcal{H}}$, que resulta entonces enteramente determinado por la dinámica, $\dot{\mathcal{H}} \sim \lambda$. Hasta que esto suceda la tasa de producción de entropía será proporcional a D .

Además de analizar el régimen independiente de D de la tasa de producción de entropía, en la Sección 5.3 también analizamos la naturaleza de la transición entre el régimen dominado por la difusión y el régimen caótico. El tiempo t_c en el cual la transición ocurre puede ser estimado siguiendo las mismas ideas del argumento previo: el tiempo para el cual el ancho de la función de Wigner se aproxima al ancho crítico es $t_c \approx \lambda^{-1} \log(\Delta p(0)/\sigma_c)$. De acuerdo a esta estimación t_c debiera depender logarítmicamente de la constante de difusión y del ancho inicial de la función de Wigner. Para estados iniciales gaussianos este último depende exponencialmente de la entropía, y entonces t_c debiera variar linealmente con la entropía inicial. Los cálculos numéricos presentados en la Sección 5.3 intentan corroborar estas ideas intuitivas.

5.2 Sensibilidad a las perturbaciones

El estado de un sistema cuántico cuya dinámica esté acotada a una región de volumen finito en el espacio de fases desarrollará estructuras que no pueden ser menores que la acción $a \approx \hbar \times (\hbar/A)$, definida por la ecuación (4.7), donde A es el máximo volumen cubierto por la envolvente de la función de Wigner en el espacio de fases. Esto es válido tanto para sistemas regulares como caóticos. Sin embargo en este último caso estas escalas se alcanzan exponencialmente rápido, en tiempos del orden del tiempo de Ehrenfest t_h . Para objetos macroscópicos la acción a es *sub-Planckiana*, $a = \hbar \times (\hbar/A) \ll \hbar$. Debido al principio de incerteza, uno podría esperar que escalas mucho menores que $\hbar$ resulten físicamente irrelevantes. Sin embargo, veremos en esta Sección que, definitivamente, este no es el caso.

En la dinámica clásica Hamiltoniana el caos surge pues las órbitas pueden ser inestables, es decir, aparece siempre asociado a la divergencia exponencial de trayectorias vecinas, determinando la hipersensibilidad del sistema a perturbaciones en las condiciones iniciales. Errores en la determinación de las mismas crecen exponencialmente (Casati et al., 1975). En Mecánica Cuántica la situación es muy diferente, pues las leyes dinámicas dictan una evolución *unitaria*, $|\Psi_t\rangle = U|\Psi_0\rangle$. Manteniendo inalterado el Hamiltoniano y comenzando desde condiciones iniciales levemente diferentes, la evolución conduce a $|\Psi'_t\rangle = U|\Psi'_0\rangle$ con el *mismo* operador unitario U . Consecuentemente el producto escalar entre los estados perturbado y sin perturbar es constante: $\langle\Psi'_t|\Psi_t\rangle = \langle\Psi'_0|\Psi_0\rangle$. En otras palabras, pequeñas imperfecciones en la preparación del estado inicial *no crecen*.

Desde un punto de vista alternativo, Asher Peres sugirió que la dinámica cuántica debiera distinguir entre dinámicas clásicas regulares y caóticas cuando se compara la evolución temporal de un *mismo* estado inicial bajo la influencia de *Hamiltonianos* levemente diferentes. Es decir, la sensibilidad de un sistema cuántico debe investigarse perturbando al Hamiltoniano y no a las condiciones iniciales. La cantidad natural para este estudio es la Fidelidad $M(t)$ definida como el producto interno entre los estados que resultan de evolucionar, a partir de la misma condición inicial $|\psi\rangle$, bajo Hamiltonianos levemente diferentes, $M(t) = |\langle\psi|\exp[iH_\Delta t/\hbar]\exp[-iHt/\hbar]\psi\rangle|^2$, donde Δ es la perturbación al potencial, $H_\Delta = H + \Delta$. Sistemas con análogos clásicos regulares se comportan de manera drásticamente diferente de aquellos cuyas contrapartes clásicas sean caóticas. Peres sugirió que la tasa de decaimiento de $M(t)$ podría ser empleada para definir el caos cuántico, es decir, sistemas cuánticos caóticos serían extremadamente sensibles a las perturbaciones en el potencial.

En esta Tesis mostraremos evidencia clara que indica que el desarrollo de estructura sub-Planckiana en la función de Wigner es de suma importancia en la aparición de alta sensibilidad de un sistema cuántico a perturbaciones. Por otra parte, es interesante notar que la estructura

sub-Planckiana tiene un rol central en el comportamiento de un sistema caótico cuando se lo acopla con un entorno.

En efecto, la escala temporal del decaimiento de la Fidelidad de un sistema está determinada, principalmente, por el tamaño de las estructuras de pequeña escala presentes en su función de Wigner. Las funciones de distribución generadas a partir de la evolución de una misma condición inicial con Hamiltonianos H y $H + \Delta$ acumularán lentamente un desplazamiento relativo en el espacio de fases debido a las perturbaciones diferentes a las que están sometidas. Supongamos que la perturbación es suficientemente pequeña como para no alterar significativamente la evolución del sistema. Puede entonces definirse la sensibilidad de un sistema cuántico a las perturbaciones simplemente a partir del decaimiento del producto escalar entre el estado del sistema a cierto tiempo t con el *mismo* estado desplazado una cantidad $\delta = (\delta_x, \delta_p)$ en el espacio de fases

$$\begin{aligned} M_\delta(t) &= N \left| \int dx \Psi^*(x) e^{i\delta_p(x+\delta_x)/h} \Psi(x+\delta_x) \right|^2 \\ &= 2N\pi h \int dx dp W(x, p, t) W(x + \delta_x, p + \delta_p, t), \end{aligned} \quad (5.9)$$

donde $N = \int dx |\Psi(x)|^2$ es una constante de normalización que para estados puros ortonormales es uno. El desplazamiento δ puede interpretarse como el efecto de la perturbación sobre el estado del sistema, que induce una evolución muy simple, equivalente a la acción de un operador desplazamiento en el espacio de fases que actúa en el *último instante* t , es decir, $\Psi(x, t) = D_\delta \Psi(x)$ con $D_\delta = D_x D_p$ donde $D_x \Psi(x) = \Psi(x + \delta_x)$ y $D_p \Psi(x) = \exp(-i\delta_p x/h) \Psi(x)$.

A partir de la ecuación (5.9) es sencillo entender el comportamiento esperado para $M_\delta(t)$. Claramente, el decaimiento de esta función depende no solamente de la perturbación sino también de la pequeñez de la estructura que la función de Wigner desarrolle localmente. Supongamos que la función de Wigner W en la ecuación (5.9) posee estructura de muy pequeña escala tal como muestra la Figura 4.7 del Capítulo anterior. Entonces esta integral tomará su valor máximo, la unidad, solamente cuando las funciones de distribución no estén desplazadas entre sí. Para desplazamientos pequeños respecto del tamaño típico de las estructuras de pequeña escala dominantes, el integrando será aún positivo en casi todo su dominio, pero a medida que la magnitud del desplazamiento aumente, el lado derecho de la ecuación (5.9) se reducirá mucho respecto de la unidad. Si el patrón de interferencias es periódico el comportamiento de $M_\delta(t)$ también será periódico (). Pero cuando las regiones de signos alternados aparecen distribuidas al azar, tal como puede apreciarse abajo a la derecha en la Figura 4.7, $M_\delta(t)$ decaerá cuando $\delta \sim \sqrt{a}$ y no revivirá significativamente para desplazamientos mayores.

Este análisis intuitivo puede ser confirmado más rigurosamente (Zurek, 2001). Para simplificar la notación consideramos un desplazamiento de la forma $\delta = (0, \delta_p)$, en cuyo caso la expresión

(5.9) puede escribirse

$$M_\delta(t) = \int dx e^{i\delta p x/\hbar} |\Psi(x)|^2. \quad (5.10)$$

Este es un resultado simple y sugestivo. El decaimiento de $M_\delta(t)$ está dado por la transformada de Fourier de la distribución de probabilidades del estado del sistema a lo largo de una dirección ortogonal al desplazamiento neto inducido por la perturbación. Esto nos conduce nuevamente a escalas sub-Planckianas: para desplazamientos pequeños el exponente en la integral puede expandirse, con lo cual

$$M_\delta(t) \approx 1 - \delta_p^2 (\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2) / \hbar^2. \quad (5.11)$$

Si la extensión espacial de la función de onda del sistema se define de la manera natural, $L = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$, donde los valores medios se toman sobre el estado del sistema, entonces el desplazamiento que nos conduce a un significativo decaimiento es

$$\delta_p \approx \hbar/L \equiv a_p, \quad (5.12)$$

que concuerda con la estimación de las dimensiones de las estructuras sub-Planckianas, ecuación (4.6). Un análisis equivalente resulta de considerar desplazamientos $\delta = (\delta_x, 0)$, conduciendo a la expresión $\delta_x \approx \hbar/P \equiv a_x$.

Así las estructuras sub-Planckianas de tamaño $a \sim \hbar^2/A$, frecuentemente consideradas sin significado físico relevante, tienen, por el contrario, importantes consecuencias: desplazamientos tan pequeños como $\delta \approx \hbar/\sqrt{A}$ son suficientes para inducir ortogonalidad entre los estados desplazado y sin desplazar del sistema, determinando una alta sensibilidad del sistema cuántico a las perturbaciones. Más aún, en sistemas cuánticos caóticos estas escalas se alcanzan exponencialmente rápido, en tiempos determinados fundamentalmente por el exponente de Lyapunov del mismo. De esta manera, es de esperar que la escala de tiempos para la sensibilidad de estos sistemas esté fijada por el exponente de Lyapunov del sistema clásico.

Por otro lado, si el sistema considerado está abierto a la acción de un entorno, su sensibilidad a las perturbaciones se verá afectada justamente porque la decoherencia inducida por éste afecta el tamaño de las estructuras de pequeña escala que el sistema es capaz de desarrollar. Estudiando la evolución de la función $M_\delta(t)$, ecuación (5.9), es posible analizar este efecto. Naturalmente, el sistema es descrito ahora por la función de Wigner asociada a su matriz densidad reducida, y la constante de normalización N es la inversa del valor de la integral cuando el desplazamiento es cero, $N^{-1} = 2\pi\hbar \int dx dp W^2(x, p, t)$, de manera tal que también para estados mixtos $M_{\delta=0} = 1$. Sabemos que la decoherencia actúa de manera tal que contrarresta los efectos dinámicos de contracción de la función de distribución en las direcciones estables del espacio de fases, imponiendo un límite

inferior $\sigma_c \sim \sqrt{2D/\lambda}$ en el ancho de la función de Wigner, por debajo del cual ésta no podrá contraerse. En otras palabras, en presencia de la decoherencia la mínima estructura desarrollada por la función de Wigner en el espacio de fases dependerá de la temperatura del entorno a través del coeficiente D . Naturalmente, las direcciones estables e inestables no están asociadas a una dirección *fija* del espacio de fases sino que cambian punto a punto. Sin embargo, es claro que la estructura mínima dominante alcanzada por la función de Wigner en alguna dirección del espacio de fases será mayor a mayor temperatura (mayor D), y que esto debiera reflejarse directamente sobre la función $M_\delta(t)$, que debiera decaer cuando δ_x ó δ_p alcancen un límite relacionado con σ_c .

Cabe hacer aquí una importante aclaración: en sistemas cuyos estados iniciales no son puros sino *mezclas*, como el considerado en el párrafo anterior, la ecuación (5.9) no es la correcta medida de la efectividad de la decoherencia si tal sistema actúa como entorno de otro. Un ejemplo muy similar al considerado en la introducción a este Capítulo es de utilidad para visualizar este punto. Consideremos que un sistema de dos estados inicialmente en un estado superposición de estados punteros $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, $|\psi\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle$, interactúa con un entorno genérico $\mathcal{E}$ inicialmente en el estado *mezcla* ρ . La interacción es tal que si el sistema se encuentra en el estado $|-\rangle$ el estado del entorno permanece inalterado, pero si es $|+\rangle$ el estado del entorno sufre un desplazamiento D_δ ($D_\delta = \exp(-i\delta_x p/\hbar) \exp(-i\delta_p x/\hbar)$). La evolución conjunta sistema-entorno conduce al entrelazamiento de los estados de ambos subsistemas

$$\begin{aligned} \sigma_0 = |\psi\rangle\langle\psi| \otimes \rho \longrightarrow \sigma_t = & |\alpha|^2 |-\rangle\langle-| \otimes \rho + |\beta|^2 |+\rangle\langle+| \otimes D\rho D^\dagger \\ & + \alpha\beta^* |-\rangle\langle+| \otimes \rho D^\dagger + \alpha^*\beta |+\rangle\langle-| \otimes D\rho. \end{aligned}$$

Tomando la traza sobre el entorno, los elementos no diagonales de la matriz densidad reducida del sistema en la base de sus estados punteros quedan multiplicados por un factor que es $\text{Tr}(\rho D_\delta)$, es decir, por el valor medio de D_δ . Si el estado es puro $\rho = |\phi\rangle\langle\phi|$ entonces $\text{Tr}(\rho D_\delta) = \langle\phi|D_\delta|\phi\rangle$. Es decir, para estados puros la medida de la decoherencia coincide con nuestra medida de la sensibilidad. Pero si el estado del entorno es una *mezcla* la medida relevante para la decoherencia es $\text{Tr}(\rho D_\delta)$. Estudios numéricos sobre el comportamiento de este observable están siendo analizados al momento de presentar esta Tesis y serán publicados próximamente.

En la Sección 5.5 presentaremos resultados numéricos que confirman el comportamiento esperado para $M_\delta(t)$, en particular mostraremos evidencia numérica sólida que corrobora la importancia de la estructura sub-Planckiana en la determinación de la sensibilidad a las perturbaciones en un sistema cuántico con análogo clásico caótico. La naturaleza de las escalas temporales para la hipersensibilidad encontrada en estos sistemas será también numéricamente analizada, confirmando la hipótesis que establece que esta escala está determinada, fundamentalmente, por el exponente de Lyapunov del sistema. Además, también estudiaremos numéricamente el impacto de la de-

coherencia sobre la sensibilidad de un sistema cuántico caótico, presentando evidencia clara que indica cómo las propiedades del entorno alteran el comportamiento de la sensibilidad al imponer una cota inferior en la escala que la función de Wigner puede desarrollar dinámicamente.

5.3 Decoherencia en el Pozo Doble Armónicamente Perturbado

En esta Sección presentamos resultados numéricos para el pozo doble con perturbación periódica, ecuación (4.3), con la intención de corroborar las ideas presentadas en la Sección 5.1. Primero mostramos cómo la decoherencia restaura la clasicidad eliminando las franjas de interferencia que se generan en la función de Wigner, según se observó en la Sección 4.3, verificando que en todos los casos estudiados se satisfase la condición de clasicidad (5.5). Luego nos concentramos en el objetivo principal de esta Tesis: el estudio del comportamiento temporal de la tasa de producción de entropía del sistema. Presentamos resultados que confirman la drástica diferencia en el comportamiento de la tasa de producción de entropía entre sistemas regulares y caóticos. En el primer caso, encontramos que la tasa depende linealmente del coeficiente de difusión D , confirmando la ecuación (3.37). Por otro lado, para sistemas caóticos el comportamiento encontrado para la tasa muestra claramente que ésta sufre dos regímenes bien diferenciados. Primero la entropía es producida a una tasa proporcional a D , tal como en sistemas regulares, y luego entra en un régimen donde se hace enteramente independiente de la constante de difusión y pasa a estar determinada por el exponente de Lyapunov del sistema. Estos resultados representan la primera evidencia numérica sólida confirmando la conjetura de Paz y Zurek (Zurek et al., 1994).

Los estudios numéricos de esta Sección están basados en la integración de las ecuaciones (5.1) y (5.2). Para este fin empleamos algoritmos espectrales de alta resolución (Feit et al., 1982), generalización a 2- d de los presentados en el Apéndice A[†]. Los resultados son estables ante cambios tanto en la resolución del espacio de fases como en el paso de integración.

[†]Formalmente, la solución de la ecuación (5.1) puede escribirse como $W(x, p, t) = \exp[L_q(x, p, t)] W(x, p, 0)$ donde

$$L_q(x, p, t) = \int_0^t dt \left[\{H_S, \} + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \hbar^{2n}}{2^{2n} (2n+1)!} \partial_x^{(2n+1)} V \partial_p^{(2n+1)} + D \partial_{pp}^2 \right]$$

es un operador integral que actúa sobre la función de distribución a $t = 0$, propagándola al tiempo t . El operador exponencial, de la misma manera que en el Apéndice A puede descomponerse en el producto de tres operadores a orden $\mathcal{O}(dt^3)$ en el paso temporal de integración, empleando para ello el *splitting operator algorithm*. Cada uno de estos tres operadores depende sólo de x o p , actuando entonces como fases multiplicativas en la representación x o p respectivamente. Nos movemos de una a otra con transformadas de Fourier, que muy eficientemente pueden calcularse numéricamente empleando FFT en dos dimensiones. De manera equivalente se integra numéricamente la ecuación (5.2), que es idéntica a (5.1) cuando $\hbar = 0$.

5.3.1 Restablecimiento del Principio de Correspondencia

Valores medios

En la Sección 4.3 mostramos cómo los valores de expectación cuánticos y clásicos del observable posición difieren luego de un tiempo relativamente corto cuando el estado inicial está localizado en el mar caótico. En la Figura 5.2 mostramos cómo ese resultado se ve afectado por la decoherencia. La dependencia temporal del valor de expectación del observable posición obtenida resolviendo la ecuación maestra (5.1) para el conjunto de parámetros del sistema de la Figura 4.3, $\hbar = 0.1$ y para un valor $D = 0.01$ de la constante de difusión, $\langle x(t) \rangle = \int dx dp x W(x, p, t)$, se compara a la correspondiente serie temporal clásica que se obtiene resolviendo la ecuación (5.2), es decir $\langle x(t) \rangle = \int dx dp x f_c(x, p, t)$. Es claro que, de acuerdo con los resultados obtenidos previamente en (Habib et al., 1998), el principio de correspondencia ha sido restablecido aún para acoplamientos débiles.

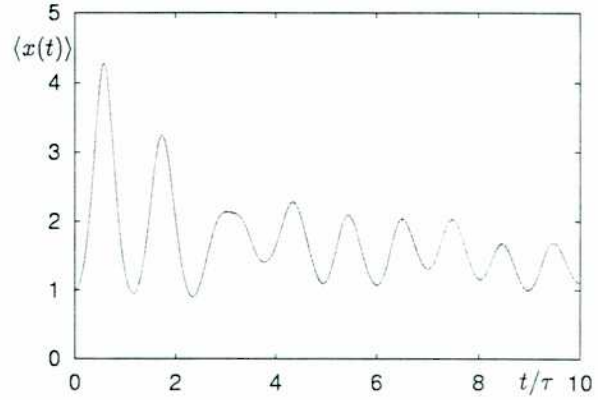


Figura 5.2: Serie temporal de los valores de expectación clásicos y cuánticos de x para el estado inicial localizado en el mar caótico de la Figura 4.2a, cuando el sistema se abre a la acción de un entorno ($D = 0.01$).

Distribuciones

Con respecto al comportamiento de la función de Wigner, que para el caso de una evolución aislada se muestra en la Figura 4.6, el impacto de la decoherencia en las funciones de distribución puede observarse en la Figura 5.3, donde comparamos la función de Wigner W del sistema abierto con la función de distribución de probabilidades clásica f_c , para tres tiempos diferentes. El entorno se encuentra a una temperatura T caracterizada por $D = 0.01$ ($D = 2m\gamma k_B T$). Se observa claramente que la decoherencia es en este caso suficiente para inducir clasicidad, lo cual se refleja a nivel de las funciones de distribución y consecuentemente, también a nivel de cualquier valor de expectación. Es importante mencionar que la condición de clasicidad discutida anteriormente, $\sigma_c \chi \gg \hbar$, se satisface en nuestro caso: para los parámetros empleados en nuestros cálculos $\sigma_c \approx 0.2$ y $\chi \approx 4$; nos encontramos entonces en un régimen (no muy definitivamente) clásico. Recordar que $\hbar = 0.1$ en nuestros cálculos.

La estructura de pequeña escala que la función de Wigner puede desarrollar en una evolución

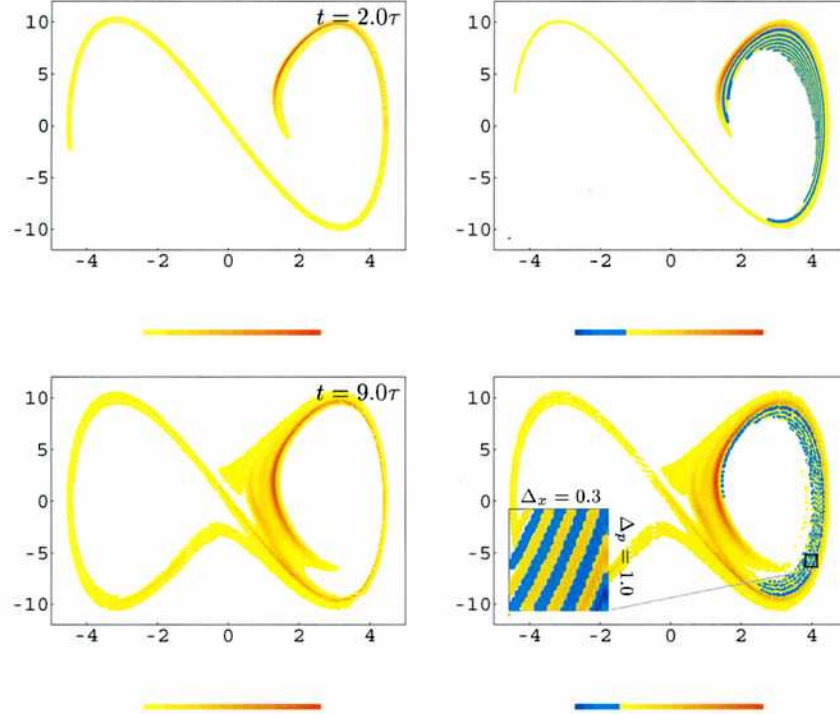


Figura 5.3: Funciones de distribución clásica (izquierda) y cuántica (derecha) para la condición inicial caótica de la Figura 4.6, a $t = 2\tau$ y $t = 9\tau$, cuando el sistema se abre a la acción del entorno ($D = 0.01$).

aislada y que ilustramos en la Figura 4.6, se detiene cuando ésta alcanza la cota inferior σ_c impuesta por el entorno. El detalle en la Figura 5.3 muestra la porción de área $\mathcal{A} = 3\hbar$ de la función de Wigner que se encuentra marcada por el rectángulo diminuto, a $t = 9\tau$. La estructura sub-Planckiana observada en la evolución aislada ya no está presente: las franjas de interferencia tienen un tamaño típico que está por arriba de $\sigma_c = 0.2$.

5.3.2 Producción de Entropía

En esta Sección estudiamos la dependencia temporal de la tasa de producción de entropía lineal. La Figura 5.4 muestra la dependencia temporal de $\log(\frac{d\mathcal{H}}{dt})$ tanto para las condiciones iniciales localizadas en islas de regularidad como para las que están localizadas en el mar caótico en la Figura 4.2a y para el conjunto de parámetros del sistema referido en esa misma Figura. La Figura 5.4 ilustra uno de los puntos principales que queremos establecer en esta Tesis (Monteoliva et al., 2000; Monteoliva et al., 2001). Lo primero que se observa es una drástica diferencia entre el comportamiento de la tasa de producción de entropía para los casos regulares y caóticos. Para

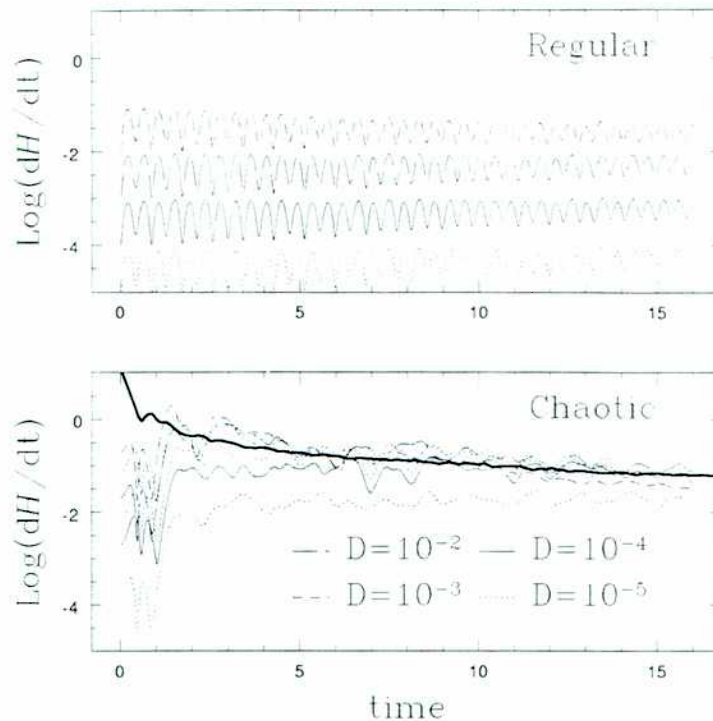


Figura 5.4: Evolución de la tasa de producción de entropía en escala logarítmica. La curva gruesa es el exponente de Lyapunov temporal, promediado sobre la condición inicial caótica. La dependencia lineal de la tasa con D se observa en el gráfico superior, correspondiente a estados iniciales regulares y durante el transitorio inicial en el gráfico inferior, correspondiente a estados iniciales localizados en el mar caótico. En este último caso la tasa se hace independiente de la difusión y es igual al exponente de Lyapunov (si D no es demasiado pequeño, ver el texto).

condiciones iniciales regulares la entropía es siempre producida a una tasa que es linealmente dependiente del coeficiente de difusión D , como se observa claramente en el gráfico superior en la Figura 5.4, tal como se esperaba de la discusión de la Sección 5.1.2. Por otro lado, para condiciones iniciales caóticas el comportamiento es completamente diferente. A tiempos cortos la tasa depende linealmente de D , pero este régimen inicial es rápidamente seguido por otro donde la tasa de producción de entropía es *independiente* del valor del coeficiente de difusión. La existencia del transitorio inicial dependiente de D no es sorprendente. En verdad, es lo que debe esperarse si el aumento de entropía se debe a: (i) la destrucción de las franjas de interferencia (que inicialmente son generadas a una tasa relativamente lenta), (ii) el crecimiento lento del área cubierta por la parte positiva de la función de Wigner. Las oscilaciones, evidentes tanto en la evolución regular como caótica de la tasa, tienen la frecuencia de la perturbación armónica del potencial y están relacionadas con cambios en la orientación de las franjas de interferencia (la decoherencia es más efectiva cuando las franjas están alineadas a lo largo del eje de momentos, puesto que el término

que la produce en la ecuación maestra (5.1) contiene derivadas parciales en esa dirección) y más significativamente, al cambio inducido por la dinámica en el ancho de la función de Wigner en el eje de los momentos.

Contrastando con este comportamiento inicial descrito en el párrafo anterior, condiciones iniciales localizadas en el mar caótico presentan un segundo régimen muy diferente del anterior, donde la tasa de producción de la entropía es *independiente* del valor del coeficiente de difusión D . Más aún, el valor numérico de la tasa oscila alrededor del *exponente local de Lyapunov promediado* del sistema. Éste está representado por la curva gruesa que muestra la Figura 5.4 y se calcula simplemente como el exponente de Lyapunov promedio sobre un conjunto de trayectorias pesado con la distribución inicial, tal como se indica en el Apéndice A. El resultado que muestra la Figura 5.4 es robusto bajo cambios en las condiciones iniciales y en los parámetros caracterizando la dinámica y confirma la conjetura presentada por primera vez en (Zurek et al., 1994; Zurek et al., 1995) y analizada en la Sección 5.1.2 de esta Tesis.

Es interesante destacar que mientras la descripción presentada en (Zurek et al., 1994; Zurek et al., 1995) está cualitativamente en buen acuerdo con los resultados aquí presentados, los argumentos en aquellos trabajos son demasiado simples como para incluir algunos efectos importantes que observamos en nuestros resultados. En particular la naturaleza oscilatoria de la tasa de producción de la entropía fue completamente pasada por alto. Sin embargo, habiendo mencionado este punto, es aún posible corroborar algunos resultados importantes obtenidos en (Zurek et al., 1994; Zurek et al., 1995) para el tiempo de transición t_c entre ambos regímenes. Primero, analizamos la dependencia del tiempo de transición con el coeficiente de difusión D . Los resultados de este análisis se muestran en la Figura 5.5.

Debido a la naturaleza oscilatoria de la tasa, la definición de t_c es ambigua. Aquí hemos definido t_c como el tiempo para el cual la tasa llega a cierto valor luego del transitorio inicial. Como la tasa sufre un salto de dos órdenes de mag-

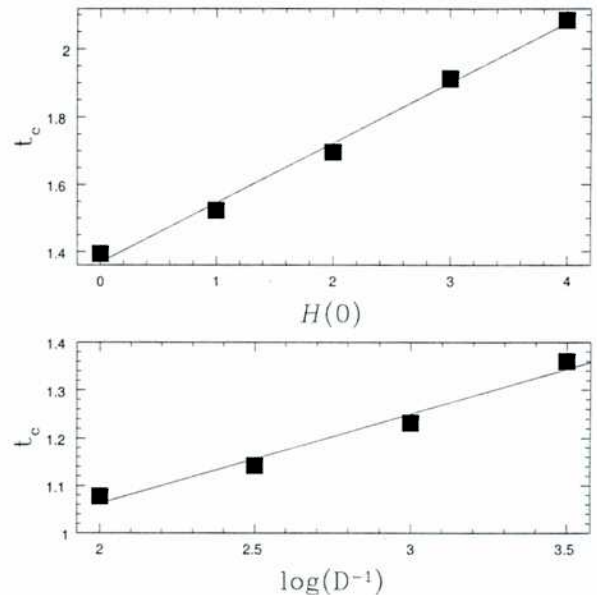


Figura 5.5: El tiempo de transición t_c entre el régimen dominado por difusión y el régimen donde la tasa de producción de la entropía está fijada por el exponente de Lyapunov depende linealmente de la entropía (arriba) y logarítmicamente del coeficiente de difusión (abajo). Los resultados numéricos fueron obtenidos usando los parámetros: $B = 10, a = 0.5, s = 10, \omega = 6.16, D = 10^{-3}$ (arriba), $\mathcal{H}(0) = 0$ (abajo).

nidad cuando pasa de un régimen al otro, esta definición es razonable. Definido t_c de esta manera, encontramos una dependencia logarítmica del tiempo de transición con el coeficiente de difusión, como puede verse en el gráfico inferior de la Figura 5.5. Segundo, investigamos el comportamiento del tiempo de transición como función de la entropía del estado inicial. Los parámetros del sistema elegidos para este estudio fueron los de la Figura 4.2b, que permite estados iniciales contenidos dentro del mar caótico con entropías de hasta $\mathcal{H}(0) = 4$. Los resultados obtenidos se muestran en el gráfico superior de la Figura 5.5, donde se observa claramente una dependencia lineal de t_c con la entropía inicial. Los resultados presentados en las Figuras 5.4 y 5.5 son robustos ante cambios en las condiciones iniciales y otros parámetros que caractericen la dinámica del sistema. Más aún, los mismos confirman la hipótesis concerniente a la naturaleza de t_c discutida en la Sección 5.1.2.

Es realmente notable que para tiempo largos (luego del transitorio) la tasa de producción de entropía se encuentre fijada solamente por la dinámica, haciéndose independiente de D : Aunque la producción de la entropía es en sí misma una consecuencia del acoplamiento con el entorno, el valor de la tasa se hace independiente de él!

Existen dos limitaciones para la obtención de los resultados aquí presentados. Por un lado el coeficiente de difusión no puede ser muy grande: en ese caso el sistema se calienta muy rápidamente y la entropía satura, haciendo poco confiables las simulaciones numéricas. Por otro lado, este coeficiente tampoco puede ser muy pequeño: si ese es el caso, la decoherencia puede hacerse muy débil y las franjas de interferencia persistirán a lo largo de muchos ciclos de la perturbación armónica; el valor mínimo de D requerido para una decoherencia eficiente puede ser estimado con los mismos argumentos mencionados con anterioridad: si la función de Wigner se extiende sobre una región del tamaño de $\Delta x \sim L \approx 10$, se necesita una constante de difusión mayor que $D_{\min} \approx \hbar^2/L^2 \sim 10^{-4}$ para que el entorno sea capaz de eliminar las franjas de interferencia más pequeñas en un período de la perturbación armónica (esta no es otra que la condición $\Omega_f \ll \Gamma_f^L$). De hecho, en la Figura 5.4 se observa que cuando $D = 10^{-5}$ la tasa de producción de entropía es un orden de magnitud menor que la correspondiente a $D = 10^{-4}$. Así, para valores de D que son muy pequeños la condición de clasicidad no es satisfecha y nunca se alcanza la fase independiente de D en la evolución: la función de Wigner retendrá una parte negativa relativamente significativa y la decoherencia no será efectiva.

Concluimos esta Sección resumiendo brevemente estos importantes resultados. Hemos mostrado claramente que el comportamiento temporal de la tasa de producción de entropía para sistemas clásicamente caóticos presenta dos regímenes bien diferenciados. Primero, se observa un régimen inicial donde la tasa es proporcional a la intensidad del acoplamiento entre el sistema y su entorno. En este régimen inicial la misma se comporta de igual manera que para sistemas

regulares, es decir, es proporcional a D . Segundo, luego de este transitorio inicial, la tasa entra en un régimen donde su valor se encuentra fijado, como fue conjeturado en (Zurek et al., 1994), por los exponentes de Lyapunov del sistema y es independiente de la intensidad del acoplamiento con el entorno. Además, es claro que para que exista este segundo régimen es necesario que el coeficiente de difusión supere cierto valor umbral. Para valores menores del mismo la producción de entropía nunca se hace independiente de la intensidad del acoplamiento con el entorno. También mostramos que el tiempo de transición t_c entre ambos regímenes depende linealmente de la entropía del estado inicial y logarítmicamente de la intensidad del acoplamiento entre el sistema y su entorno.

5.4 Decoherencia y la eliminación del tuneleo.

En esta Sección se estudia la eliminación del tuneleo, que es un efecto coherente, por la decoherencia. Si la interacción con el entorno es suficientemente fuerte, la decoherencia debiera inhibir el tuneleo de estados inicialmente localizados en islas regulares hacia las islas de regularidad relacionadas por las simetrías. Este, en efecto, es el resultado observado en nuestros estudios numéricos sobre el pozo doble sujeto a una perturbación armónica. Un estado inicialmente localizado en una isla regular, en presencia de decoherencia permanecerá dentro de la misma, restableciéndose así la correspondencia también en estos casos.

Para sistemas integrables la ruptura de la correspondencia sucede a tiempos tan largos (escalan según una ley de potencias con $\hbar$) que no representan una preocupación. Sin embargo la mecánica cuántica predice la posibilidad de tuneleo del estado inicial a través de la barrera de potencial presente en sistemas biestables como el pozo doble. Este fenómeno está prohibido clásicamente. Es así que nos encontramos con una ruptura de la correspondencia para estos sistemas regulares, también a tiempos largos, que sí representa un problema pues la desviación de las predicciones cuánticas respecto de las clásicas es mucho más marcada. Dado que el efecto túnel es un fenómeno esencialmente coherente, el entorno debiera influir en la dinámica del sistema, ya que su efecto es inducir una pérdida de coherencia.

Concentramos nuestra atención en el pozo doble simétrico con perturbación periódica. Para estados iniciales localizados en islas regulares la correspondencia se rompe a tiempos muy largos, cuando el efecto túnel se hace efectivo, como fue mencionado en la Sección 4.3. La influencia de la decoherencia en este proceso fue investigada usando la ecuación maestra promediada (3.26). Al resolver esta ecuación debemos ser cuidadosos y elegir un número suficientemente grande de estados de Floquet, puesto que aunque el estado inicial puro involucra típicamente sólo unos pocos estados de Floquet, la decoherencia genera una mezcla que involucra a muchos de éstos, haciendo

crecer la entropía hasta un nivel donde todos los estados estarán ocupados con igual probabilidad (nivel de saturación). Llegado este punto, las simulaciones numéricas se hacen poco confiables, indicando que más estados de Floquet deben ser incluidos en la base del espacio de Hilbert. Resolvimos la ecuación maestra promediada calculando la entropía de von Neumann $\mathcal{H}_{VN} = -Tr(\sigma \log \sigma)$, corroborando que esta permanezca siempre bien por debajo de los niveles de saturación mencionados. Para los parámetros del sistema que empleamos en la Sección 4.3.1, y usando esta vez 40 estados de Floquet en vez de sólo 20, hemos podido estudiar con precisión el proceso de tuneleo

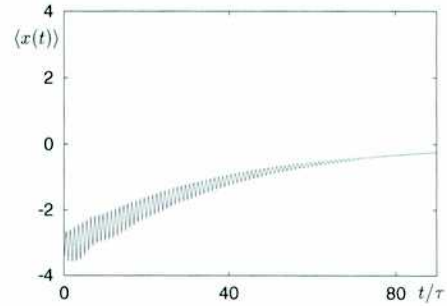


Figura 5.6: Valor de expectación cuántico de x para el estado de la Figura 4.4.

desde un estado localizado en una isla regular a la isla simétricamente relacionada. La Figura 5.6 muestra la evolución del valor de expectación del observable posición. Se observa claramente que el efecto túnel ha sido eliminado. Nótese que el valor asintótico de $\langle x \rangle$, aunque pequeño, no es nulo y puede estimarse como $x_a = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{(x,p) \subseteq \Omega} dx dp x W(x, p, t)$ donde Ω es la región del espacio de

fases dentro de la isla regular en donde está localizado el estado inicial. El resultado numérico que muestra esta Figura es consistente con esta estimación, lo cual significa que una parte significativa del estado final está atrapada en la isla regular inicial.

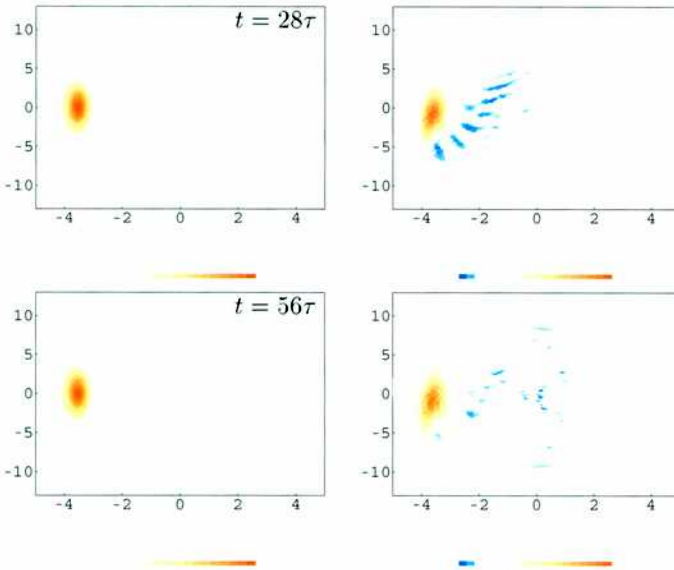


Figura 5.7: Evolución clásica (izquierda) y cuántica (derecha) del estado gaussiano inicialmente localizado en la isla regular de más a la izquierda en el espacio de fases (ver Sección 4.3), cuando el sistema a $t = 0$ se abre a la acción del entorno ($D = 0.01$), para el caso de tuneleo.

La evolución de la función de distribución, que se muestra en la Figura 5.7 para $t = 28\tau$ y $t = 56\tau$, ilustra el comportamiento descrito para el estado del sistema: éste se encuentra atrapado en la isla regular de más a la izquierda como resultado de su interacción con el entorno. Es interesante notar que esta situación cambiaría drásticamente si la interacción con el entorno fuese conectada a un tiempo $t_0 > 0$, es decir, si permitimos al siste-

ma evolucionar libremente con su Hamiltoniano propio antes de acoplarlo con el entorno. Este procedimiento es muy sencillo de implementar cuando se está resolviendo la ecuación maestra

promediada (3.26).

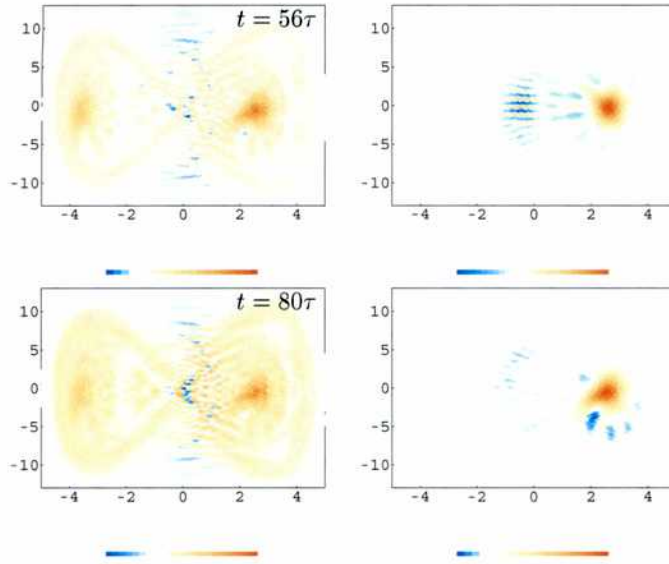


Figura 5.8: Evolución del estado gaussiano inicialmente localizado en la isla regular de más a la izquierda del espacio de fases (ver Sección 4.3), cuando el entorno ($D = 0.01$) es conectado a $t_0 = 28\tau$ (izquierda) o a $t_0 = 56\tau$ (derecha).

misma probabilidad a cada lado de la barrera del potencial, tal como se ilustra en la Figura 5.8, columna izquierda.

5.5 Sensibilidad a las perturbaciones

En esta Sección analizamos la sensibilidad de un sistema cuántico caótico a las perturbaciones en el potencial, estudiando numéricamente el comportamiento de $M_\delta(t)$ para el pozo doble perturbado armónicamente. Los resultados encontrados confirman ampliamente las estimaciones de la Sección 5.2, determinándose así la importancia de las estructuras *sub-Planckianas* presentes en la función de Wigner del sistema, hecho totalmente ignorado en la literatura por mucho tiempo. En efecto, el decaimiento de M_δ ocurre cuando el desplazamiento δ es justamente del orden del tamaño de estas estructuras. Además, en presencia de decoherencia este comportamiento se ve significativamente alterado, ya que el tamaño que la estructura de la función de Wigner puede alcanzar está limitado por una escala crítica que depende de la temperatura del entorno. De esta manera alternativa la hipótesis sobre la importancia de estas estructuras de pequeña escala es corroborada. También hemos analizado la naturaleza del decaimiento, comprobando que éste

Los resultados obtenidos de esta manera son muy simples e intuitivos. Si conectamos la interacción con el entorno cuando el sistema ya ha tuneado a la isla regular relacionada por la simetría a la derecha de la barrera del potencial, a $t = 56\tau$, el entorno simplemente retendrá allí al sistema, impidiéndole tunelear nuevamente hacia la isla de origen. La Figura 5.8 muestra a la derecha la evolución de la función de Wigner en este caso. Por el contrario, si conectamos el entorno a $t = 28\tau$, cuando el estado se encuentra a mitad de camino del proceso de tuneleo, es decir, se encuentra deslocalizado en la región intermedia entre las islas regulares, la decoherencia conduce a un estado asintótico que tiene aproximadamente la

ocurre en un tiempo determinado fundamentalmente por el exponente de Lyapunov del sistema, y luego el ancho de la función M_δ permanece estacionario en un valor directamente relacionado con el tamaño mínimo de las estructuras finas de la función de Wigner. En presencia de decoherencia este último comportamiento se limita a un cierto período, luego del cual el mismo se ve dominado por la difusión.

5.5.1 Rol de las estructuras sub-Planckianas

La sensibilidad se mide a través del decaimiento de $M_\delta(t)$, ecuación (5.9), para un estado $|\Psi\rangle$ inicialmente gaussiano, de incerteza mínima y localizado en una región del espacio de fases que presenta caos, tal como se muestra en la Figura 4.2a. Los parámetros elegidos para el sistema son los correspondientes a esta Figura. Es de esperar que, debido al desarrollo dinámico de estructura fina en los estados de este sistema, desarrollo que fue ilustrado en la Sección 4.3.2, la función $M_\delta(t)$ decaerá justamente cuando $\delta_x \sim a_x$ ó $\delta_p \sim a_p$.

Las diferentes curvas de la Figura 5.9 representan la dependencia de $M_\delta(t)$ con el desplazamiento para dos formas particulares del mismo $\delta = (\delta_x, 0)$ y $\delta = (0, \delta_p)$, a diferentes tiempos $t = 0, 0.5\tau, 1\tau, 2\tau, 3\tau, 5\tau, 10\tau$ y 15τ . Los valores esperados en las mínimas longitudes de onda

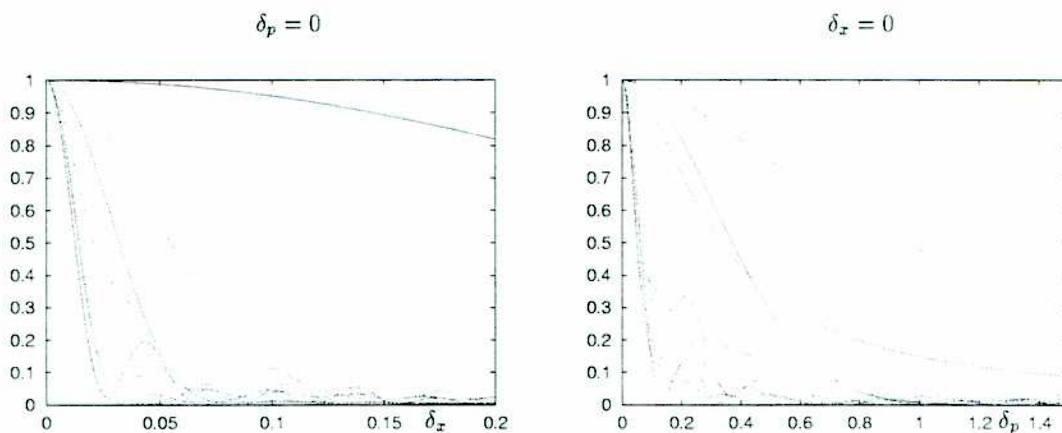


Figura 5.9: Comportamiento $M_\delta(t) = |\langle \Psi(t) | D_x D_p | \Psi(t) \rangle|^2$ para desplazamientos paralelos al eje x (izquierda) o al eje p (derecha). Las diferentes curvas corresponden a tiempos distintos, $t = 0, .5\tau, \tau, 2\tau, 3\tau, 5\tau, 10\tau, 15\tau$. $\hbar = 0.1$.

de la estructura fina fueron estimados calculando numéricamente el máximo ancho que la función de onda $|\Psi\rangle$ del sistema alcanza al evolucionar: $\Delta x(t) = (\langle \Psi(t) | x^2 | \Psi(t) \rangle - \langle \Psi(t) | x | \Psi(t) \rangle^2)^{1/2}$ y $\Delta p(t) = (\langle \Psi(t) | p^2 | \Psi(t) \rangle - \langle \Psi(t) | p | \Psi(t) \rangle^2)^{1/2}$. El comportamiento de estas funciones cambia drásticamente al tiempo $t \approx 1.75\tau$, donde la función de onda se expande bruscamente pasando a

ocupar gran parte del espacio de fases disponible. Los máximos valores alcanzados por Δx y Δp son $\Delta x_{max} = \Delta x(t = 8.75\tau) = 2.4468$ y $\Delta p_{max} = \Delta p(t = 11.5\tau) = 6.7810$. Con estos valores, $a_x = \hbar/\Delta p_{max} = 0.0147$ y $a_p = \hbar/\Delta x_{max} = 0.0408$.

Puede observarse cualitativamente que el decaimiento de M_δ es más pronunciado a medida que t aumenta, y también se observa una cierta estabilización a partir de $t \approx 2\tau$. El comportamiento no es enteramente exponencial: luego del primer decaimiento la función revive periódicamente, aunque cada vez que lo hace, su magnitud disminuye. Pueden entenderse estas oscilaciones atenuadas de la siguiente manera: un desplazamiento de las funciones de Wigner en $\delta_x \approx a_x$ (o $\delta_p \approx a_p$) conducen a una interferencia destructiva en la región en donde domina la estructura sub-Planckiana; sin embargo un desplazamiento doble producirá interferencias constructivas pero, es de esperarse, atenuadas. Además el período de estas oscilaciones debiera permitir, a cada tiempo t , determinar la estructura mínima dominante desarrollada por la función de Wigner del sistema, corrigiendo los valores estimados para a_x y a_p . La estabilización observada ocurre a un tiempo que coincide aproximadamente con el tiempo en que la función de onda del sistema se expande bruscamente y pasa a ocupar gran parte del espacio de fases disponible. Es decir, este resultado está en acuerdo con la conjetura, pues en ese momento en el sistema comienzan a aparecer las estructuras de escala más pequeña.

5.5.2 Escala de tiempos para la hipersensibilidad

Estas observaciones son sólo cualitativas. Con el fin de precisar la determinación del decaimiento, definimos el ancho $\bar{\delta}_x(t)$ como el valor de δ_x para el cual $M_{\delta_x}(t)$ cae a $1/e$ de su valor a $\delta_x = 0$ a cada tiempo. De manera equivalente puede definirse $\bar{\delta}_p(t)$. La Figura 5.10 muestra el comportamiento de ambas cantidades con el tiempo, en escala logarítmica. Primeramente, se observa la estabilización del ancho del decaimiento en ambas direcciones. Los mínimos valores que los anchos alcanzan en este réminen son $\bar{\delta}_x = 0.0145$ y $\bar{\delta}_p = 0.05$. Estos valores se encuentran cerca de los valores de estimados para la estructura sub-Planckiana, $a_x = 0.0147$ y $a_p = 0.0408$ y concuerdan también con los valores observados directamente sobre la función de Wigner, cuyas gráficas se muestran en la Figura 4.7, donde las longitudes de onda mínimas medidas sobre los gráficos son $\lambda_x \approx 0.013$ y $\lambda_p \approx 0.041$ (ambos valores a $t = 9\tau$). Segundo, se observa que antes de la estabilización el comportamiento del ancho es

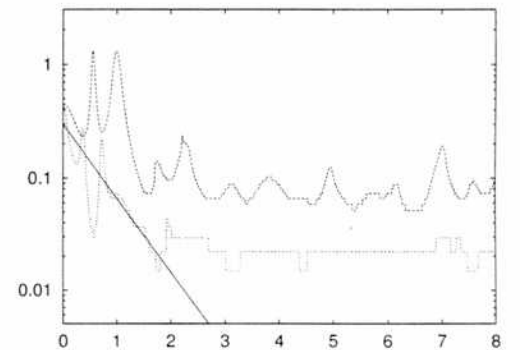


Figura 5.10: Comportamiento temporal del ancho $\bar{\delta}_x(t)$ (punteada) y $\bar{\delta}_p(t)$ (a trazos). La recta representa el exponente de Lyapunov $\bar{\lambda}$ (ver texto).

diferente en uno y otro caso, aunque la escala temporal en la que se alcanza la misma es única.

Es posible realizar una estimación de esta escala temporal, que denominaremos *tiempo de hipersensibilidad* t_s , siguiendo argumentos muy simples. Siendo la función de distribución asociada al estado $|\Psi\rangle$ del sistema inicialmente suave, su evolución estará en una primera etapa gobernada por las ecuaciones clásicas, ya que los términos de corrección cuántica serán despreciables mientras derivadas de mayor orden sean pequeñas, es decir, mientras la función de Wigner no haya desarrollado estructura a pequeña escala. Éstas comienzan a desarrollarse luego de un tiempo determinado por el exponente de Lyapunov λ del entorno, ya que la función de distribución se contrae, en alguna dirección, como $\exp(-\lambda t)$, o bien se estira llegando a la máxima extensión posible en el espacio de fases, como $\exp(\lambda t)$. Así, es de esperarse que el tiempo en que $M_\delta(t)$ decae significativamente sea precisamente el tiempo que el sistema tarde en desarrollar estas estructuras a pequeña escala, de tamaños característicos a_x y a_p . De esta manera, el tiempo de hipersensibilidad t_s será

$$t_s = \lambda^{-1} \ln(\Delta p(0)/a_p) \quad \text{ó} \quad t_s = \lambda^{-1} \ln(\Delta x(0)/a_x), \quad (5.13)$$

siendo $\Delta x(0)$ ($\Delta p(0)$) la extensión inicial de la función de distribución en x (p). Dependiendo de la dinámica de cada sistema particular, la función de Wigner alcanzará masivamente la mínima escala en una dirección antes que en la otra dirección conjugada. Para el pozo doble armónicamente perturbado, empleando los valores de a_x y a_p estimados numéricamente y un valor para el exponente de Lyapunov $\bar{\lambda} = 1.516$, la función de Wigner alcanza la mínima escala en la dirección x antes que en p en el tiempo $t_s = 1.804\tau$. Este valor está en correspondencia con los cálculos numéricos realizados, es decir, se ve en la Figura 5.10 que la estabilización de los anchos δ_x y δ_p ocurre en el t_s estimado. Este cálculo es muy sensible al valor de λ . El valor empleado es un *valor medio temporal* del coeficiente de Lyapunov local promediado sobre la condición inicial $\lambda(t)$ sobre el intervalo en que el comportamiento del ancho es aproximadamente exponencial, es decir $\bar{\lambda} = (1/T) \int_0^T \lambda(t) dt = 1.516$ con $T = 3\tau^{\frac{1}{2}}$.

Además por lo argumentado en el párrafo anterior se espera que, de alguna manera, el comportamiento de las funciones ancho muestren inicialmente una dependencia exponencial cuya tasa esté dominada por el exponente de Lyapunov. La curva inferior (punteada) en la Figura 5.10, que muestra la evolución de $\delta_x(t)$, presenta un comportamiento inicial que coincide muy aproximadamente con el comportamiento esperado. En efecto, su pendiente sigue de cerca una dependencia exponencial, que está representada aquí por la recta de trazo lleno. Ésta tiene la pendiente del coeficiente de Lyapunov λ . La curva superior (línea a trazos) muestra la dependencia temporal

¹Este valor no varía significativamente si el intervalo de integración T se aumenta o disminuye levemente, ya que la función $\lambda(t)$ encierra un área comparativamente pequeña luego de $t = 2\tau$.

de $\bar{\delta}_p(t)$. Se observa un comportamiento inicial bastante diferente y mayores fluctuaciones aún después de la estabilización del ancho. Éstas tienen un período que coincide aproximadamente con el período τ de la perturbación armónica en el potencial. Las diferencias en el comportamiento inicial del ancho $\bar{\delta}_p(t)$ se deben mayormente a cambios en la orientación de la función de distribución debidos a la dinámica. Durante el primer período $0 < t < \tau$, la función de Wigner no ha desarrollado aún mucha estructura y las franjas de interferencia que se van generando estarán orientadas mayormente en alguna dirección que va variando con el tiempo. Para que un desplazamiento en p afecte el comportamiento de M_{δ_p} , la orientación de las franjas de interferencia es importante, puesto que si éstas están orientadas a lo largo del eje de x (es decir, tienen su origen en la superposición de partes positivas de la función de Wigner separadas en p) un desplazamiento en momentos δ_p no alterará mayormente a esta función. Luego, para tiempos $\tau < t < 2\tau$ la función de Wigner se extiende muy rápidamente y hay muchas partes que de manera creciente interfieren coherentemente independientemente de la orientación de la misma, es decir, el patrón de interferencias ya no es tan regular, habrá franjas de interferencia orientadas tanto en x como en p . En este tramo la función de Wigner decae al valor en el que se estabiliza. De todas maneras es evidente que este sistema es más sensible a desplazamientos en x que en p , por las fluctuaciones. Es plausible que la razón de este comportamiento sea que la dinámica genera más rápidamente coherencias con franjas alineadas en la dirección p . De allí que su eliminación sea más eficiente cuando los desplazamientos son en x y no en p , pues en este último caso hay que esperar a que la dinámica haga rotar las franjas mal orientadas.

5.5.3 Sensibilidad de un sistema que interactúa con un entorno

Supongamos ahora que el sistema de la subsección anterior está sujeto a la acción de un entorno modelado por un baño de osciladores armónicos. Consideraremos el límite de altas temperaturas y entornos óhmicos, cuya ecuación maestra analizamos en la Sección 3.3. Sería interesante comprobar cómo la decoherencia que induce el entorno influye en la sensibilidad del sistema cuántico a las perturbaciones.

La Figura 5.11 muestra la evolución del ancho de $M_{\delta}(t)$ definido de la misma manera que en la Sección anterior, $\bar{\delta}_x$ y $\bar{\delta}_p$ para diferentes temperaturas ($D = 2m\gamma kT$) del entorno $D = 10^{-3.5}, 10^{-3}, 10^{-2.5}, 10^{-2}$, comenzando con la condición inicial en la región caótica de la Figura 4.2a y los parámetros correspondientes a la misma Figura. La curva inferior, de línea llena, corresponde a la evolución del sistema aislado de la Sección anterior, donde la estabilización ocurre aproximadamente al valor estimado de a_x o a_p . Inicialmente las curvas no se diferencian entre sí, puesto que la dinámica aún no ha generado estructura suficientemente fina a estos tiempos

tempranos. Pero luego las diferencias son muy marcadas. Lo primero que se observa es que en

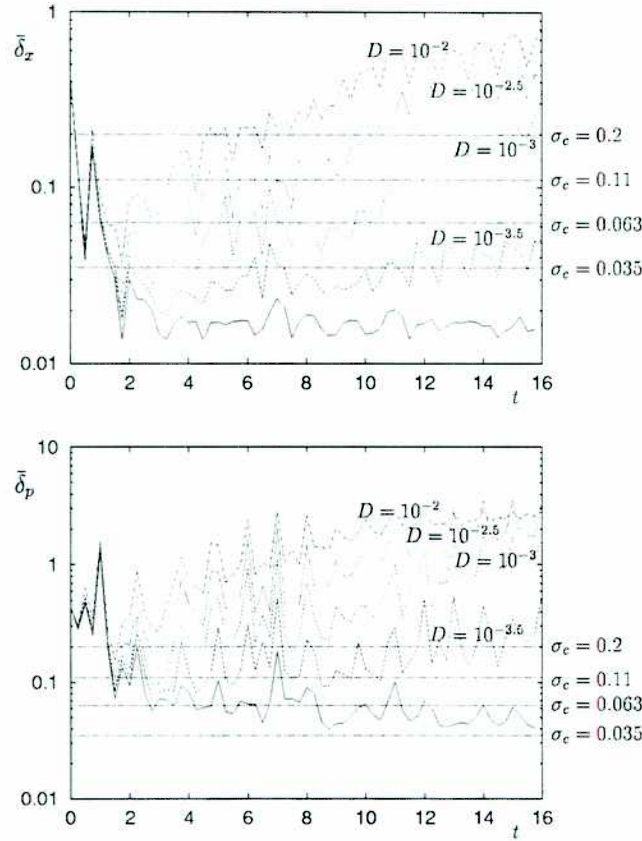


Figura 5.11: Comportamiento temporal de $\bar{\delta}_x(t)$ y $\bar{\delta}_p(t)$. Las diferentes curvas corresponden a diferentes valores del coeficiente de difusión $D = 10^{-3.5}, 10^{-3}, 10^{-2.5}, 10^{-2}$, tal como se indica en el gráfico. La curva inferior, de línea llena, corresponde a la evolución sin decoherencia $D = 0$ de la Sección anterior. Las líneas horizontales en gris corresponden a los valores estimados de $\sigma_c = \sqrt{2D/\lambda}$ a cada valor de D .

ambas direcciones x y p , tal como esperábamos, la estructura mínima desarrollada por la función de Wigner es mayor a mayor valor de D . Para valores bajos de D , es de esperarse que la decoherencia actúe lentamente, la dinámica genera estructura fina a una tasa mayor que su destrucción y ésta tendrá una longitud de onda menor que σ_c . Recién luego el efecto contrarrestante de la difusión entra en juego. Eso es lo que se observa en las curvas para $D = 10^{-3.5}$, en donde el aumento del valor encontrado para el ancho es gradual y recién parece estabilizarse en el último tramo de esta simulación, a tiempos largos. A mayor valor de D los efectos de la decoherencia se observan antes, como es claro en las curvas correspondientes a $D = 10^{-3}, 10^{-2.5}$ y 10^{-2} , en forma progresiva. También, a mayor valor de D , el valor en que se estabiliza el ancho se man-

tiene por menos tiempo, ya que luego la difusión termina dominando el comportamiento de la función de Wigner y el sistema sólo se comportará difusivamente, aumentando su extensión por calentamiento.

Notablemente, los valores estimados para σ_c están en correspondencia aproximada con los valores en que el ancho $\bar{\delta}_x$ (y no $\bar{\delta}_p$) se estabiliza a cada valor de D , tal como se indica en la Figura 5.11. El valor del exponente de Lyapunov empleado en la estimación de σ_c es $\lambda = 0.5$. Esto se debe a que en presencia de la decoherencia las franjas de interferencia que sobreviven, de longitud de onda mayor que σ_c , están mayoritariamente alineadas en dirección x , es decir, provienen de la interferencia de porciones positivas de la función de Wigner separadas en p , puesto que la decoherencia es más eficiente en la dirección de momentos; el término que produce decoherencia es proporcional a $\partial_{pp}W$, mientras que franjas de interferencias alineadas en p tendrán que esperar a que la dinámica las rote para que la decoherencia pueda eliminarlas.

Resumiendo, los resultados presentados en esta Sección muestran claramente el rol fundamental que la estructura *sub-Planckiana* presente en la función de Wigner en la determinación de la sensibilidad de un sistema cuántico a las perturbaciones. Nuestros resultados concuerdan con la conjetura de que desplazamientos del orden de $\delta \sim \sqrt{a}$, donde $a = \hbar \times \hbar/A$ es el tamaño característico de las estructuras de pequeña escala desarrolladas por la función de distribución del sistema, son suficientes para inducir ortogonalidad entre los estados del mismo y determinan la alta sensibilidad de los sistemas clásicamente caóticos. Además, para estos sistemas estas escalas se alcanzan muy rápidamente, estando la escala temporal de la sensibilidad fijada por el exponente de Lyapunov del mismo. Los resultados obtenidos para el caso de que el sistema esté sujeto a decoherencia confirman esta hipótesis, ya que la sensibilidad del mismo se ve significativamente alterada en este caso debido a que el tamaño de las estructuras presentes en la función de Wigner no puede ser menor que el tamaño crítico σ_c , que depende de la temperatura del entorno.

Conclusiones

Como consecuencia de las interacciones entre el sistema y el entorno, se establecen entre ellos correlaciones de manera tal que el segundo adquiere continuamente información sobre el primero. La transferencia de información se mide calculando la entropía de von Neumann asociada al sistema, o alternatively, la entropía lineal. Los resultados presentados en esta Tesis muestran el rol central que la producción de entropía juega en estudios de la decoherencia y hacen plausible que la tasa de producción de entropía durante el proceso de decoherencia pueda emplearse también como herramienta para diagnosticar caos cuántico.

Notablemente, el límite clásico inducido por el entorno es muy diferente en sistemas cuánticos caóticos del correspondiente a sistemas regulares. Para estos últimos la tasa de producción de entropía es proporcional a la intensidad del acoplamiento con el entorno. En este trabajo hemos presentado evidencia contundente indicando que para sistemas caóticos este límite exhibe una fuente inevitable de impredecibilidad. En efecto, la tasa a la cual la información se pierde en el entorno presenta dos regímenes bien diferenciados. Primeramente ésta es proporcional a la intensidad del acoplamiento con el entorno pero este régimen inicial es rápidamente seguido por otro donde la tasa de producción de entropía es *independiente* del mismo. La existencia del transitorio inicial dependiente del coeficiente de difusión D se debe a que el aumento de entropía tiene su origen tanto en la destrucción de las franjas de interferencia, inicialmente generadas a una tasa relativamente lenta, como en el crecimiento lento del área cubierta por la parte positiva de la función de Wigner. Contrastando con este comportamiento inicial, los sistemas caóticos presentan un segundo régimen muy diferente del anterior, donde la tasa de producción de la entropía es *independiente* del valor del coeficiente de difusión D . Más aún, el valor numérico de la tasa oscila alrededor del *exponente local de Lyapunov promediado* del sistema que determina la tasa de producción de entropía de un sistema caótico *clásico*. Este segundo régimen es encontrado siempre que el coeficiente de difusión supere cierto valor umbral. Para valores menores del mismo la producción de entropía nunca se hace independiente de la intensidad del acoplamiento con el entorno pues en ese caso la decoherencia puede hacerse muy débil y las franjas de interferencia persistirán por tiempos largos. Nuestros resultados también confirman estimaciones previas para

el tiempo de transición t_c entre los dos regímenes. Encontramos para t_c resultados que indican una dependencia lineal con la entropía inicial y logarítmica con el coeficiente de difusión.

Se concluye que para sistemas caóticos la clasicidad emerge una vez que la decoherencia es efectiva pero, sorprendentemente, *independientemente* de la interacción con el entorno, aún cuando el proceso de decoherencia, causado por esta interacción, es la fuente última del aumento de la entropía. El entorno no juega un rol explícito en la tasa de producción de entropía pero determina cuándo este régimen asintótico es válido, pues los exponentes de Lyapunov comienzan a regir el comportamiento de la dinámica en el instante en que las dimensiones de la región cubierta por la función de Wigner alcanzan el tamaño crítico impuesto por la intensidad de la interacción con el entorno. Los resultados obtenidos en el curso de nuestra investigación han sido parcialmente publicados en los trabajos Phys. Rev. Lett. **85**, 3373 (2000) y Phys. Rev. E **64** 056238 (2001) y representan la primera evidencia numérica sólida confirmando la existencia de este régimen dominado por la dinámica clásica.

Además, hemos mostrado que funciones de Wigner confinadas a un volumen A en el espacio de fases clásico pueden desarrollar estructuras tan pequeñas como, pero no menores que, la acción $a \sim \hbar^2/A$ que para sistemas macroscópicos es *sub-Planckiana*. Este resultado es sorprendente, puesto que el principio de incerteza ha llevado a algunos autores a conjeturar que escalas sub-Planckianas son inexistentes o físicamente irrelevantes. La existencia de estructuras sub-Planckianas en la función de Wigner ha sido observada por vez primera durante nuestros estudios y los trabajos mencionados en el párrafo anterior presentan evidencia numérica de las mismas.

La saturación de la estructura desarrollada por la función de distribución a escalas sub-Planckianas es una importante característica que distingue las dinámicas caóticas clásicas y cuánticas. En dinámica clásica caótica, la estructura más pequeña desarrollada por la función de distribución de probabilidades decrece exponencialmente, lo cual tiene importantes consecuencias para la decoherencia, puesto que el tamaño de las estructuras más pequeñas controla la sensibilidad a las perturbaciones tanto en un sistema como en un entorno caótico. Sin embargo, contrastando con sistemas clásicos caóticos, los sistemas cuánticos no son exponencialmente sensibles a perturbaciones infinitesimales, sino más bien, la menor perturbación por la que pueden ser afectados está determinada por a . En nuestros estudios hemos mostrado que, contrariamente a las conjeturas mencionadas más arriba, las escalas sub-Planckianas tienen gran importancia física, puesto que desplazamientos del orden de $\delta \sim \hbar/\sqrt{A}$ alcanzan para inducir ortogonalidad, determinando consiguientemente la sensibilidad de sistemas cuánticos a las perturbaciones. En particular, presentamos evidencia que muestra que la escala temporal para la sensibilidad de un sistema cuántico caótico está determinada por el exponente de Lyapunov del mismo. Los resultados obtenidos relacionados a nuestros estudios sobre la hipersensibilidad a las perturbaciones

serán enviados a publicar próximamente.

Es de esperar que entornos que posean una dinámica inestable sean mucho más eficientes en causar decoherencia que aquellos que sean regulares, ya que están evolucionando rápida y constantemente en estados deslocalizados con estructura muy fina. Si un sistema es hipersensible a las perturbaciones, cuando actúa de entorno de otro puede generar decoherencia muy eficazmente. La escala a controla la sensibilidad de los sistemas cuánticos a las perturbaciones en el potencial y por consiguiente, controla la eficiencia del proceso de selección de estados punteros inducido por un entorno hipersensible, lo cual señala la emergencia de la clasicidad.

Apéndice A

Solución numérica de las ecuaciones de Schrödinger y Newton

Integración de la ecuación de Schrödinger

La solución numérica de la ecuación de Schrödinger fue obtenida recurriendo a un algoritmo espectral originalmente desarrollado para potenciales independientes del tiempo (Feit et al., 1982) y que fácilmente hemos generalizado para su aplicación a sistemas dependientes del tiempo. Detallamos a continuación las ideas fundamentales del mismo.

Supongamos que nuestro sistema es una partícula cuántica en una dimensión, cuyo Hamiltoniano es $H = p^2/2m + V(x, t)$, entonces, la ecuación de Schrödinger en la representación de posición es

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x, t)\Psi. \quad (\text{A.1})$$

Un algoritmo para encontrar la solución a tiempo $t + dt$ conociendo la misma a tiempo t puede ser obtenido empleando el denominado *split operator algorithm*, que divide el operador evolución de la siguiente manera

$$\begin{aligned} U(t, t + dt) &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_t^{t+dt} dt' H_{t'}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{dt}{2} \partial_x^2\right) \times \exp\left(-\frac{i}{\hbar} [V_t + \frac{1}{2} V'_t dt] dt\right) \times \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{dt}{2} \partial_x^2\right) + \mathcal{O}(dt^3). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

La última expresión del lado derecho de esta ecuación se obtiene expandiendo el operador exponencial que define al operador evolución, y empleando a su vez una expansión a primer orden en dt para el potencial dependiente del tiempo, es decir aproximando $V_{t'} = V(x, t') = V(x, t) + V'(x, t)(t' - t)$.

Los términos de tercer orden en dt provienen del error al expandir los conmutadores en la exponencial. ¿Cuál es la ventaja de este operador evolución? Primero y principal, este algoritmo preserva la unitariedad de la solución al propagar la solución un paso dt . Segundo, cada exponencial depende de sólo x ó p , lo que nos permitirá, como veremos en el siguiente párrafo, el uso de técnicas muy eficientes para la integración numérica de la ecuación de Schrödinger. La primera característica es muy importante en el estudio numérico que nos ocupa, ya que por ejemplo, la pérdida de unitariedad conlleva un incremento en la entropía. Si deseamos comparar estos resultados con los correspondientes al sistema abierto, en donde el aumento de entropía resulta de la interacción con el entorno, es esencial que las técnicas numéricas empleadas sean confiables en este aspecto: de otra manera no podríamos diferenciar claramente un tipo de evolución del otro y el análisis sería confuso.

Observamos ahora que la aplicación del operador $\exp(i\frac{\hbar^2}{2m}\frac{dt}{2}\partial_x^2)$ sobre $\Psi(x, t)$ es equivalente a resolver la ecuación de la partícula libre para un tiempo $dt/2$ a partir del tiempo inicial t , es decir

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}. \quad (\text{A.3})$$

La solución de la ecuación (A.3) puede obtenerse muy fácilmente con la ayuda de la representación de Fourier de banda limitada de la función de onda Ψ

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=-N/2+1}^{N/2} \Psi_n(t) \exp\left[\frac{2\pi}{L_0}nx\right], \quad (\text{A.4})$$

donde

$$\Psi_n(t + dt) = \Psi_n(t) \exp\left[-i\frac{dt}{2m}\left(\frac{2\pi}{L_0}\right)^2 n^2\right] \quad (\text{A.5})$$

y L_0 es la longitud de la grilla en donde se computa $\Psi(x)$. El lado derecho de la ecuación (A.2) es entonces equivalente a una propagación libre sobre la mitad del incremento temporal dt , un cambio de fase por la acción del potencial en la totalidad del incremento temporal, y una propagación de partícula libre adicional sobre la mitad del dt . Si muchos factores del tipo (A.2) son aplicados sucesivamente, pares de operadores de partícula libre se combinan para formar propagadores de partícula libre en un incremento completo dt . El cálculo se realiza entonces como una sucesión de propagadores de incremento completo dt aplicados en el espacio de los momentos, alternando con cambios de fases de la función de onda, que se realizan en el espacio de posición. Las únicas excepciones son los incrementos mitad al principio y al final del cálculo.

Este procedimiento, si se lo implementa con la ayuda de algoritmos FFT (Fast Fourier Transform), es muy eficiente pues involucra del orden de $N \log_2 N$ operaciones y también muy preciso.

ya que las derivadas espaciales son aproximadas a orden N -ésimo en Δx , donde N es el número de puntos de la grilla para $\Psi(x)$ y $\Delta x = L_0/N$ es el intervalo entre puntos de la grilla. La longitud de la grilla L_0 debe ser elegida suficientemente grande para que la función de onda sea despreciable en los bordes de la misma. Δx , por otro lado, deber ser suficientemente pequeño como para acomodar el ancho de banda espacial de las funciones de onda. Esto último puede asegurarse monitoreando los coeficientes de Fourier y verificando que éstos sean pequeños en el borde de la grilla en el espacio recíproco.

El incremento temporal dt debe ser elegido suficientemente pequeño para asegurar un cálculo preciso de la evolución temporal de la función de onda. El criterio que guía esta selección se basa en el ancho del espectro de energías, determinado por la transformada de Fourier de $\langle \psi(x, 0) | \psi(x, t) \rangle$. El intervalo dt limita el ancho de banda espectral de una función que puede representarse por una serie de Fourier determinada por valores muestreados. Este ancho de banda máximo es $\Delta E_{max} = \pi/dt$. Así, el incremento dt debe ser elegido suficientemente pequeño para acomodar al menos la totalidad del espectro de energías de los estados ligados, ó $dt < \frac{\pi}{\Delta V_{max}}$ donde ΔV_{max} es el máximo valor que toma el potencial para la grilla elegida. Cuando este criterio no se cumple, aparecerán errores del tipo *aliasing* (Stoer et al., 1991). Excelentes resultados son normalmente obtenidos cuando $dt < \pi/3\Delta V_{max}$. Si el potencial no está acotado, será necesario considerar una restricción apropiada para aplicar el método.

Integración de las ecuaciones de Newton

La solución de las ecuaciones de Hamilton se obtiene recurriendo a un algoritmo simpléctico cuya característica fundamental es, al igual que en el método anterior para la ecuación de Schrödinger, que preserva el área (o volumen) en el espacio de fases. Para un sistema unidimensional cuyo Hamiltoniano es $H = p^2/2m + V(x, t)$, las ecuaciones de Hamilton pueden escribirse

$$\dot{\mathbf{R}} = \{H(t), \mathbf{R}\} = L(t)\mathbf{R}, \quad (\text{A.6})$$

donde $\mathbf{R}^T = (x, p)$ y $L(t) = \{H(t), \}$ es un operador que actúa sobre $\mathbf{R}$ llamado operador de Liouville o Liouvilleano. De esta manera las ecuaciones de Hamilton pueden resolverse formalmente de la siguiente manera

$$\mathbf{R}(t + dt) = e^{\int_t^{t+dt} L(t') dt'} \mathbf{R}(t), \quad (\text{A.7})$$

es decir, para avanzar la solución un incremento temporal dt , hay que aplicar a la condición inicial (la solución en el tiempo anterior t) el operador $\exp(\int_t^{t+dt} L(t') dt')$. El método simpléctico de cuarto orden consiste en escribir este operador como producto de tres operadores exponenciales

que separen la dependencia en x de la dependencia en p , tal como en la subsección anterior para la evolución cuántica

$$\exp\left(\int_t^{t+dt} dt' L(t')\right) = \exp\left(\int_t^{t+dt} dt' L_3(t')\right) \exp\left(\int_t^{t+dt} dt' L_2(t')\right) \exp\left(\int_t^{t+dt} dt' L_1(t')\right) + \mathcal{O}(dt^4), \quad (\text{A.8})$$

donde $L_i(t) = \{H_i, \}$, H_1 y H_3 dependen sólo de p , mientras que H_2 depende de x y de t . De esta manera se aproxima la solución exacta, esto es, la evolución con el Liouvilleano L , como una evolución con los Liouvilleanos L_1 , L_2 y L_3 . Además, como cada Liouvilleano depende de en una sola variable, la evolución gobernada por cada uno de ellos es muy sencilla y puede calcularse fácilmente: para el caso de la dependencia en p , la coordenada p de $\mathbf{R}$ no cambia, pero sí lo hace x tal como lo haría una partícula libre; a la inversa en caso de dependencia en x .

De la aplicación de L_1 sobre la condición inicial $\mathbf{R}_0$ se obtiene $\mathbf{R}_1 = \exp\left[\int_{t_0}^{t_0+dt} L_1(t')dt'\right] \mathbf{R}_0$, de donde se observa que $\mathbf{R}_1$ no es más que la solución de las ecuaciones de Hamilton con $H = H_1$, $\dot{\mathbf{R}}_1 = \{H_1(p), \mathbf{R}_1\}$, es decir

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \partial_p H_1(p) \\ \dot{p}_1 = 0, \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

de donde

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + \partial_p H_1(p_0)dt \\ p_0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

De manera similar se calculan $\mathbf{R}_2$ y $\mathbf{R}_3$, que resultan de la aplicación sucesiva de los Liouvilleanos con las condiciones iniciales $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$, respectivamente:

$$\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} x_0 + \partial_p H_1(p_0)dt \\ p_0 - \int_t^{t+dt} \partial_x H_2(x_1, t')dt' \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{R}_3 = \begin{pmatrix} x_0 + \partial_p H_1(p_0)dt + \partial_p H_3(p_2)dt \\ p_0 - \int_t^{t+dt} \partial_x H_2(x_1, t')dt' \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Para obtener la forma de H_1 , H_2 y H_3 deben expandirse las exponenciales en la ecuación (A.8). Dada que el Hamiltoniano del problema es cuadrático en p , es natural suponer la misma dependencia para H_1 y H_3 , es decir $H_1(p) = \alpha p^2/2m$ y $H_3(p) = \gamma p^2/2m$, debiendo solamente ajustarse las constantes de proporcionalidad α y γ . Por otra parte, como sólo deseamos una aproximación a orden 4 en dt , la dependencia temporal en L_2 en la exponencial central de (A.8) puede aproximarse con la expansión de Taylor a segundo orden del integrando, $L_2(t') \approx L_2(t) + L_2'(t)(t' - t) + \frac{1}{2}L_2''(t)(t' - t)^2$ y recién luego expandir la exponencial. Proponiendo $H_2(x, t) = \beta V(x, t)$, luego de mucha álgebra se encuentra que la ecuación (A.8) se satisface para $\alpha = \gamma = 1/2$ y $\beta = 1$. Así, los factores $\exp(\frac{p^2}{m} \frac{dt}{2})$ son equivalentes a la dinámica de una partícula libre sobre un incremento temporal *mitad* $dt/2$.

Por lo dicho, nuestro algoritmo simpléctico de orden 4 se reduce a

$$\begin{aligned} \exp\left(\int_t^{t+dt} dt' L(t')\right) &= \\ &= \exp\left(\frac{p^2}{2m} \frac{dt}{2}\right) \times \exp\left((V + \frac{1}{2}\partial_t V dt + \frac{1}{6}\partial_t^2 V dt^2)dt\right) \times \exp\left(\frac{p^2}{2m} \frac{dt}{2}\right) + O(dt^4). \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Con la aplicación sucesiva de la expresión (A.13) los factores de los extremos se combinan de manera de tener en realidad sólo una exponencial $\exp(\frac{p^2}{2m} dt)$, que representa ahora la evolución de una partícula libre en un incremento temporal *completo* dt . En una propagación a un tiempo $T = m dt$, solamente los extremos de la cadena de exponenciales (primera y última propagación) retendrán el factor mitad $dt/2$.

Exponentes de Lyapunov

Los exponentes de Lyapunov en un sistema caótico cuantifican la divergencia exponencial de trayectorias inicialmente vecinas. Para sistemas Hamiltonianos estos exponentes están relacionados con los autovalores de una matriz simpléctica. El método detallado aquí hace uso de este hecho y sigue básicamente el trabajo de Salman Habib *et al.* (Habib et al., 1995).

Consideremos un sistema $2m$ -dimensional cuya dinámica está gobernada por las ecuaciones

$$\frac{dz}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{z}, t), \quad (\text{A.13})$$

donde $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_m)$ y similarmente para $\mathbf{F}$. Sea $\mathbf{z}_0$ una dada trayectoria y supongamos que deseamos estudiar trayectorias vecinas. Podemos entonces definir desviaciones de $\mathbf{z}_0$, $\mathbf{Z} = \mathbf{z} - \mathbf{z}_0$, y linealizar la ecuación anterior. Se obtiene así un nuevo conjunto de ecuaciones para las variables $\mathbf{Z}$

$$\frac{d\mathbf{Z}}{dt} = \mathbf{D}\mathbf{F}(\mathbf{z}_0, t)\dot{\mathbf{Z}}. \quad (\text{A.14})$$

Este método puede emplearse toda vez que el sistema de ecuaciones lineal (A.14) pueda derivarse de un Hamiltoniano. De ahora en más supondremos que ésta es la situación y escribiremos $\mathbf{Z} = (q_1, q_2, \dots, q_m, p_1, p_2, \dots, p_m)$, donde q_i y p_i son las coordenadas y el momento canónicamente conjugado respectivamente. Entonces, la ecuación (A.14) puede escribirse

$$\frac{d\mathbf{Z}}{dt} = -\{\mathbf{H}, \mathbf{F}\}_{PB}, \quad (\text{A.15})$$

donde H es un polinomio cuadrático homogéneo en coordenadas y momentos. Un sistema de esta clase es gobernado por una matriz simpléctica M que mapea las variables iniciales $\mathbf{Z}^0$ en $\mathbf{Z}(t)$

$$\mathbf{Z}(t) = M\mathbf{Z}^0. \quad (\text{A.16})$$

Sea ahora Λ definido por

$$\Lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} (MM^t)^{1/2t}, \quad (\text{A.17})$$

donde M^t es la matriz traspuesta de M . Los exponentes de Lyapunov son entonces los logaritmos de los autovalores de Λ (Eckmann et al., 1985).

La matriz M satisface la ecuación de movimiento (Dragt et al., 1983)

$$\frac{dM}{dt} = JSM, \quad (\text{A.18})$$

donde S es una matriz simétrica dada por

$$H(\mathbf{Z}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2m} S_{ij} Z_i Z_j, \quad (\text{A.19})$$

y donde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.20})$$

$\mathbf{1}$ es la matriz identidad de dimensión m . De esta ecuación se deduce que la evolución de MM^t está dada por

$$\frac{d}{dt}(MM^t) = JSMM^t - MM^tSJ. \quad (\text{A.21})$$

Los métodos usuales para obtener los exponentes de Lyapunov trabajan con M , que no es real ni simétrica (de ahí la necesidad de reortogonalización) y que tiene elementos que crecen exponencialmente. Para evitar estas dificultades puede explotarse el hecho de que M es simpléctica, de modo que puede escribirse como (Dragt et al., 1983)

$$M = \exp(JS_a) \exp(JS_c). \quad (\text{A.22})$$

donde S_a (S_c) es una matriz simétrica que anticonmuta (conmuta) con J . Nótese que la segunda matriz en el lado derecho de la ecuación anterior es unitaria, de manera que $MM^t = \exp(2JS_a)$. Esta matriz MM^t tiene menos grados de libertad que M y sus autovectores son ortogonales. Entonces, en vez de integrar la ecuación (A.21) que tiene la dificultad del problema de los grandes números, enfocamos nuestra atención sobre el exponente JS_a en la ecuación anterior, que siendo un exponente, no presenta esta dificultad.

El siguiente paso es emplear una representación explícita para $\exp(JS_a)$. Para nuestros propósitos es suficiente restringirnos a sistemas con un espacio de fases bidimensional. Cuando estos sistemas son perturbados, representan el ejemplo más simple de una dinámica continua caótica. Toda matriz simpléctica bidimensional puede escribirse como

$$M = \exp(JS_a) \exp(JS_c) = \exp(\mu(B_2 \cos a + B_3 \sin a)) \exp(bB_1), \quad (\text{A.23})$$

donde a, b y μ son coeficientes reales y los B_i son los elementos de la base del álgebra de Lie $\mathfrak{sp}(2)$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.24})$$

Entonces

$$MM^t = \exp[2\mu(B_2 \cos a + B_3 \sin a)]. \quad (\text{A.25})$$

Así obtenemos para Λ

$$\Lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \exp[(\mu/t)(B_2 \cos a + B_3 \sin a)]. \quad (\text{A.26})$$

Finalmente puede mostrarse fácilmente que los autovalores de esta matriz son $\exp(\pm\mu/t)$. Los exponentes de Lyapunov son entonces $\pm\mu/t$ en el límite $t \rightarrow \infty$. Con esta conveniente elección de variables, la representación explícita de MM^t es

$$MM^t = \begin{pmatrix} \cosh 2\mu + \sin a \sinh 2\mu & \cos a \sinh 2\mu \\ \cos a \sinh 2\mu & \cosh 2\mu - \sin a \sinh 2\mu \end{pmatrix}. \quad (\text{A.27})$$

La dependencia temporal para a y μ se obtiene introduciendo la expresión para MM^t en la ecuación (A.21).

Si por simplicidad suponemos ahora que H en (A.19) no contiene términos proporcionales a qp , de manera que la matriz S tiene la forma

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & 0 \\ 0 & s_{22} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.28})$$

luego de un poco de álgebra se llega finalmente al siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias para a y μ

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{dt} &= \frac{1}{2}(s_{22} - s_{11}) \cos a \\ \frac{da}{dt} &= s_{11} + s_{22} - (s_{22} - s_{11}) \sin a \coth \mu. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

De la condición inicial $M(0) = I$, si elegimos $\mu(0) = 0$ entonces $\cos^2 a(0) = 1$, es decir, $a(0) = 0$ ó π . Estas ecuaciones diferenciales forman la base de nuestro método para calcular exponentes de Lyapunov en sistemas Hamiltonianos. Deben integrarse numéricamente paso a paso hasta encontrar convergencia en los valores $\pm\mu/t$, si lo que se desea son los exponentes de Lyapunov asintóticos. En algunas estimaciones este exponente asintótico, independiente de la condición inicial, es justamente lo que se desea. Sin embargo muchas veces, y en especial en las simulaciones numéricas

del Capítulo 5, se hará uso de un exponente de Lyapunov temporal, definido simplemente como $\lambda(\mathbf{z}_0, t) = \mu/t$, que depende de la condición inicial. Además, cuando lo que propagamos es una función de distribución $f_0(x, p)$ y no una única condición inicial (x, p) , se obtiene en realidad una distribución de exponentes de Lyapunov $\lambda(x, p, t)$, uno para cada punto del dominio de la distribución. El exponente de Lyapunov conveniente entonces es un *exponente de Lyapunov temporal promediado*, definido por

$$\bar{\lambda}(t) = \int dx dp f_0(x, p) \lambda(x, p, t). \quad (\text{A.30})$$

Este exponente depende también de la condición inicial $f_0(x, p)$, aunque para no complicar innecesariamente la notación no se lo indica.

Apéndice B

Ecuación Maestra Promediada

En la parte periódica de la base de Floquet (cuyas propiedades se presentan someramente en la Sección 3.4.1), $\{|\phi_\mu\rangle\}$, el operador densidad reducida del sistema puede escribirse

$$\rho = \sum_{\alpha\beta} |\phi_\alpha\rangle\langle\phi_\alpha|\rho|\phi_\beta\rangle\langle\phi_\beta| = \sum_{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta}(t)\Gamma_{\alpha\beta}(t) \quad (\text{B.1})$$

donde $\Gamma_{\alpha\beta}(t) = |\phi_\alpha\rangle\langle\phi_\beta|$. Para encontrar la ecuación que gobierna la evolución temporal de este operador, derivamos esta expresion respecto del tiempo.

$$\dot{\rho} = \sum_{\alpha\beta} \dot{\rho}_{\alpha\beta}(t)\Gamma_{\alpha\beta}(t) + \rho_{\alpha\beta}(t)\dot{\Gamma}_{\alpha\beta}(t) \quad (\text{B.2})$$

De las propiedades de los estados de Floquet mencionadas en la Sección 3.4.1, $i\hbar|\dot{\phi}_\alpha\rangle = (H_S - \varepsilon_\alpha)|\phi_\alpha\rangle$, expresión que si introducimos en la ecuación para $\dot{\rho}$ nos conduce a

$$\dot{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} [H_S, \rho(t)] + \sum_{\alpha\beta} \dot{\rho}_{\alpha\beta}(t)\Gamma_{\alpha\beta}(t) + \frac{i}{\hbar} \sum_{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta}(t)(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)\Gamma_{\alpha\beta}(t) \quad (\text{B.3})$$

Ahora bien, esta expresión para $\dot{\rho}$ debe ser idéntica a la obtenida vía la ecuación maestra (3.10)*, de donde se deduce

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{i\hbar}(\varepsilon_\mu - \varepsilon_\nu)\rho_{\mu\nu} & - \frac{1}{2} \int_0^t dt' g_s(t') \langle\phi_\mu(t)| [x, [x(t-t', t), \rho]] |\phi_\nu(t)\rangle \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t dt' g_a(t') \langle\phi_\mu(t)| [x, \{x(t-t', t), \rho\}] |\phi_\nu(t)\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

donde los kets $|\phi_\nu(t)\rangle$ representan la parte τ -periódica del espectro de Floquet, $x(t-t', t) = U^\dagger(t-t', t)xU(t-t', t)$ y $U(t-t', t) = \sum_\alpha \exp(i\varepsilon_\alpha t')|\phi_\alpha(t-t')\rangle\langle\phi_\alpha(t)|$. Los operadores posición

*La ecuación (3.10) está escrita en la representación de interacción, mientras que la expresión que se necesita debe estar en la representación de Schrödinger.

también pueden expresarse en esta base periódica, quedando definidos así coeficientes $X_{\alpha\beta}(t)$ que poseen la periodicidad τ de la perturbación armónica del potencial

$$x = \sum_{\alpha\beta} X_{\alpha\beta}(t) \Gamma_{\alpha\beta}(t)$$

$$X_{\alpha\beta}(t) = \langle \phi_\alpha(t) | x | \phi_\beta(t) \rangle \quad (B.5)$$

Siendo estos coeficientes τ -periódicos, pueden expandirse en series de Fourier

$$X_{\alpha\beta}(t) = \sum_n e^{in\omega t} X_{\alpha\beta n} \quad (B.6)$$

Reemplazando las expresiones para los operadores posición en la ecuación maestra (B.4), se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{\mu\nu} = & \frac{1}{i\hbar} (\varepsilon_\mu - \varepsilon_\nu) \rho_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta}(t) \sum_{nm} e^{i(n+m)\omega t} \int_0^t dt' \begin{pmatrix} g_s(t') \\ g_a(t') \end{pmatrix} \times \\ & \left[\mp e^{-i\Delta_{\beta\nu m} t'} X_{\mu\alpha n} X_{\beta\nu m} - e^{-i\Delta_{\mu\alpha m} t'} X_{\beta\nu n} X_{\mu\alpha m} \right. \\ & \left. + \sum_\eta \left(e^{-i\Delta_{\eta\alpha m} t'} X_{\mu\eta n} X_{\eta\alpha m} \delta_{\beta\nu} \pm e^{-i\Delta_{\beta\eta m} t'} X_{\alpha\nu n} X_{\beta\eta m} \delta_{\alpha\mu} \right) \right] \end{aligned} \quad (B.7)$$

donde $\Delta_{\alpha\beta n} = \varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta + n\omega t$ y el segundo término del lado derecho de esta ecuación representa en realidad dos, uno con el núcleo simétrico g_s y los signos de adición superiores, el otro con el núcleo asimétrico g_a y los signos inferiores.

Consideramos ahora el límite de temperaturas altas del entorno, es decir, los núcleos de las integrales toman el valor $g_s(t) = D\delta(t)$ y $g_a(t) = 2\gamma\delta(t)$, con $D = 2m\gamma k_B T$ el coeficiente de difusión y γ la tasa de relajación del sistema. Con esta aproximación se llega a una ecuación diferencial ordinaria para $\rho_{\mu\nu}$ cuyos coeficientes son τ -periódicos

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{\mu\nu} = & \frac{1}{i\hbar} (\varepsilon_\mu - \varepsilon_\nu) \rho_{\mu\nu} - D \sum_{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta} \sum_{nm} e^{i(n+m)\omega t} Z_{\mu\nu\alpha\beta nm} \\ & - 2\gamma \sum_{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta} \sum_{nm} e^{i(n+m)\omega t} Y_{\mu\nu\alpha\beta} \end{aligned} \quad (B.8)$$

$$Z_{\mu\nu\alpha\beta nm} = - (X_{\mu\alpha n} X_{\beta\nu m} + X_{\beta\nu n} X_{\mu\alpha m}) + \sum_\eta (X_{\mu\eta n} X_{\eta\alpha m} \delta_{\beta\nu} + X_{\eta\nu n} X_{\beta\eta m}) \quad (B.9)$$

$$\begin{aligned} Y_{\mu\nu\alpha\beta nm} = & - (\Delta_{\beta\nu n} X_{\mu\alpha n} X_{\beta\nu m} + \Delta_{\mu\alpha m} X_{\beta\nu n} X_{\mu\alpha m}) \\ & + \sum_\eta (\Delta_{\eta\alpha m} X_{\mu\eta n} X_{\eta\alpha m} \delta_{\beta\nu} + \Delta_{\beta\eta m} X_{\alpha\nu n} X_{\beta\eta m} \delta_{\alpha\mu}) \end{aligned} \quad (B.10)$$

Nuestro propósito es emplear esta ecuación maestra para estudiar la decoherencia en el proceso de tunelamiento. Consecuentemente los tiempos de evolución serán típicamente largos (ver Sección 4.3.1)

y podemos hacer una aproximación similar a la de onda rotante, promediando la ecuación en un período de la perturbación del potencial $\tau = 2\pi/\omega$, es decir, $\frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt e^{i(n+m)\omega t} \rho_{\alpha\beta}(t) \approx \sigma_{\alpha\beta}(\tau) \delta_{m,-n}$ y $\frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \dot{\rho}_{\alpha\beta}(t) \approx \frac{\sigma_{\alpha\beta}(\tau) - \sigma_{\alpha\beta}(0)}{\tau}$, donde σ denota el promedio temporal en un período τ del operador ρ . Si además recordamos que $\sum_n \exp(in\omega(t-t')) = \delta(t-t')$ pueden calcularse las sumas

$$\sum_n \sum_\eta X_{\mu\eta n} X_{\eta\alpha-n} \delta_{\beta\nu} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \langle \phi_\mu | x | \phi_\alpha \rangle \langle \phi_\beta | x | \phi_\nu \rangle = \langle \langle \phi_\mu | x | \phi_\alpha \rangle \langle \phi_\beta | x | \phi_\nu \rangle \rangle \quad (\text{B.11})$$

Introduciendo todas estos resultados en la ecuación (B.10), y suponiendo además que $D \gg \Delta_{\alpha\beta\eta}\gamma \forall \alpha\beta\eta$ (esta hipótesis es generalmente válida en el límite de altas temperaturas, ya que $D \sim T$ mientras que $\gamma \sim 1/T$, y en particular, durante nuestras simulaciones numéricas hemos corroborado que la desigualdad se cumpla) se llega a la ecuación maestra promediada (3.26) de la Sección 3.4.2.

Bibliografía

- [1] Albrecht, A., Phys. Rev. D **48** 3768 (1993). y referencias allí mencionadas.
- [2] Anglin, J. R., Paz, J. P. y Zurek, W. H., Phys. Rev. A **53** 4041 (1997).
- [3] Aschcroft, N. W. y Mermin, N. D. *Solid State Physics*, Holt, Rinehart y Winston, New York (1976).
- [4] Balian, R., *From Microphysics to Macrophysics*, Vol. 1, Springer, New York, (1991).
- [5] Ballentine, L. E., Yang, Y. y Zibin, J. P., Phys. Rev. A **50** 2854 (1994).
- [6] Bell, J. Physics **1** 195 (1964).
- [7] Berry, M. V. y Balazs, M. L., J. Phys. A. **12** 625 (1979).
- [8] Berry, M. V., Phys. Scripta **40** 335 (1989).
- [9] Blümel R., Buchleitner A., Graham R., Sirko L., Smilansky U. y Walther H., Phys. Rev. A **44** 4521 (1991)
- [10] Brune, M., Hagley, E., Dreyer, J. Maître. X. Maali, A. Wunderlich, C. Raimond. J-M. y Haroche, S., Phys. Rev. Lett **77** 4887 (1996).
- [11] Caldeira, A. O., y Leggett, A. J., *Physica* **121A**, 587-616 (1983); *Phys. Rev. A* **31**, 1059 (1985).
- [12] Caldeira, A. O., and Leggett, A. J., *Physica* **149**, 374 (1983).
- [13] Benenti G. y Casati G., Phys. Rev. E **65** 066205(2002).
- [14] Casati G. y Ford J., Phys. Rev. A **12** 1702 (1975).
- [15] Casati G., Chirikov , Guarneri I. y Shepelyansky D. L., Phys. Rev. Lett **56**, 2437 (1986).

-
- [16] Caves C. M., Thorne K. S., Drewer R. W. P., Sandberg V. D. and Zimmerman M., *Rev Mod. Phys* **52**, 341 (1980).
 - [17] Cerruti N. R. y Tomsovic S., *Phys. Rev. Lett* **88**, 054103 (2002). También disponible en [nlin.CD/0108016](#).
 - [18] Chapman, M. S., *et. al.*, *Phys. Rev. Lett.* **75** 3783 (1995).
 - [19] Cheng, C. y Raymer M. G. *Phys Rev Lett* **82** 4802 (1999).
 - [20] Cohen-Tannoudji, C., Dupont-Roc J. y Grynberg G., *Atom-Photon Interactions*. Wiley-Sons, INC, New York (1992).
 - [21] Cuccietti F. M., Dalvit D. A. R., Paz J. P. y Zurek W. H., [quant-ph/0306142](#).
 - [22] Cuccietti F. M. *et al.* *Phys. Rev. E* **65**046209 (2002). También disponible en [nlin.CD/0112015](#).
 - [23] T. Dittrich, B. Oelschlägel and P. Hänggi, *Europhys. Lett.* **22** 5 (1993).
 - [24] Dittrich T., Hänggi P., Ingold G., Kramer B. Schön G and Zwirger W., *Quantum Transport and Dissipation*, Wiley-VCH (1998).
 - [25] Dragt A. J. y Forest E., *J. Math. Phys.* **24**, 2734(1983).
 - [26] Eckmann J. P. y Ruelle D., *Rev. Mod. Phys.* **57**, 617 (1985). y referencias allí citadas.
 - [27] Einstein A., *Vehr. Deutsch Phys. Ges.* **19** 82 (1917).
 - [28] Einstein, A. Podolsky, B. and Rosen, N., *Phys. Rev.* **47** 777 (1935).
 - [29] Everett H. III, *Rev. Mod. Phys.* **29** 454 (1957).
 - [30] Feit M. y Fleck Jr. y Steiger A., *J. Comp. Phys.* **47** 412 (1992).
 - [31] Feynman R., Leighton L. y Sands M., *The Feynman Lectures on Physics*. Vol. 3, Addison-Wesley (1965).
 - [32] Gardiner S. A., Cirac J. I. y Zoller P., *Phys. Rev. Lett.* **79** 4790 (1997).
 - [33] Gardiner S. A., Cirac J. I. y Zoller P., *Phys. Rev. Lett.* **80** 2968E (1998).
 - [34] Grossmann F., Dittrich T., Jung P. y Hänggi P., *J. Stat. Phys.* **70** 229 (1993).
 - [35] Gutzwiller M., *chaos in Classical and Quantum Mechanics*, Springer Verlag NY (1990).

- [36] Habib S. y Ryne R., *Phys. Rev. Lett* **74** 70 (1995).
- [37] Habib, S., Shizune. K., y Zurek. W. H., *Phys. Rev. Lett.* **80**, 4361 (1998).
- [38] Heller, E. J., *Phys. Rev. Lett.* **53** 1515 (1984).
- [39] Hu, B. L., Paz, J. P., y Zhang, Y., *Phys. Rev. D* **45**, 2843 (1992).
- [40] Izrailev, F. M., *Phys. Rep.* **196**, 299 (1990).
- [41] Jacquod, Ph., Silvestrov, P. G. y Beenakker. C. W., *Phys. Rev. E* **64** 055203 (2001).
- [42] Jalabert R. A. y Pastawski H., *Phys. Rev. Lett.* **86**, 2490 (2001).
- [43] Karkuszewski, Z. P., Jarzynski C. y Zurek, W. H., [quant-ph/0111002](#).
- [44] Kohler, S., R. Utermann, Hänggi P. y Dittich T., [quant-ph/9804041](#) (1998).
- [45] Lamb W. E. Jr., *Physics Today* **22**(4), 23 (1969).
- [46] Laskar S., *Nature* **338** 237 (1989).
- [47] Lewis H. R. y Riesenfeld W. B., *J. Math. Phys.* **10** 1458 (1969).
- [48] Lin W. A. y Ballentine L. E., *Phys. Rev. Lett.* **65** 2927 (1990).
- [49] Lin W. A. y Ballentine L. E., *Phys. Rev. A* **45** 3637 (1992).
- [50] Lindblad, G., *Comm. Math. Phys.* **48** 119 (1976)
- [51] Lloyd, S., *Phys. Rev. A* **55** 1613 (1997).
- [52] Milfeld. K. F., y Wyatt, R., *Phys. Rev. A* **27** 72 (1983).
- [53] Miller, P. A., y Sarkar, S. *Phys. Rev. E* **58**, 4217 (1998); **E 60**, 1542 (1999).
- [54] Miller, P. A., Sarkar, S. y R. Zarum, *Acta Phys. Polonica* **B29**, 4643 (1998).
- [55] Monroe C., Meekhof D., King B. E. y Wineland D. J., *Science* **272** 1131 (1996).
- [56] Monteoliva. D., and Paz, J. P., *Phys. Rev. Lett.* **87** (2000) 3373.
- [57] Monteoliva, D., and Paz, J. P., *Phys. Rev. D* (2001).
- [58] Myatt C. J. *et. al.*, *Nature* **403** 269 (2000).
- [59] Pastawski, H. M., Levstein P. R. y Usaj G., *Phys. Rev. Lett.* **75** 4310 (1995).

-
- [60] Pattanayak, A. K., *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4526 (2000).
- [61] Paz, J. P., Habib, S. y Zurek, W., *Phys. Rev. D* **47**, 488 (1993).
- [62] Paz, J. P. y Zurek, W., *Proceedings of the 72nd Les Houches Summer School*, Springer-Verlag (2001); también disponible en quant-ph/0010011.
- [63] Peres, A., *Phys. Rev. A* **30** 1610 (1984).
- [64] Peres, A., *Phys. Rev. A*, **54**, 4361 (1996).
- [65] Prosen, T., *Phys. Rev. E* **65** 036208 (2002).
- [66] Rauch, H. *Physica Scripta* **T76**, 24 (1998).
- [67] Reichl, L. E. y Zheng, W., *Phys. Rev. A* **29** 2186 (1984).
- [68] Sambe, H., *Phys. Rev. A* **7** 2203 (1973).
- [69] Schumacher, B. W., *Phys. Rev. A* **54** 2614 (1996).
- [70] Shiokawa, K., y Hu, B. L., *Phys. Rev E* **52**, 2497 (1995).
- [71] Shirley, J. H., *Phys. Rev.* **138B979** (1965).
- [72] Stoer J. y Bulirsch R., *Introduction to Numerical Analysis*, 2nd Ed. Springer Verlag (1991).
- [73] Sussman, G. J., y Wisdom, J. *Science* **257** 56 (1992).
- [74] Szafer, A. y Altshuler, B., *Phys. Rev. Lett.* **70** 587(1993).
- [75] Takahashi, K., *Prog. Theor. Phys. Supp.* bf 98 109 (1989).
- [76] Unruh, W. G. y Zurek, W. H., *Phys. Rev. D* **40**, 1071-1094 (1989).
- [77] Usaj, G., Pastawski H. M., y Levstein, P. R., *Mil Phys.* **95** 1229 (1998).
- [78] Utermann, R., Dittrich T. y Hánggi, P., *Phys. Rev. E* **49** 273 (1994).
- [79] Vanicek J. y Heller, E., arXiv: quant-ph/0301025.
- [80] Von Neumann, J. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* Princeton Univ. Press. Princeton (1955).
- [81] Walls D. F. and Milburn G. J., *Quantum Optics*, Springer Verlag, Berlin (1994).

- [82] Wheeler J. A., Zurek W. H. eds. *Quantum Theory and Measurements*. Princeton U. P., Princeton, N. J. (1983).
- [83] Wigner, E. P., *Phys. Rev.* **40**, 749 (1932). Para una buena reseña ver también Hillery, M., O'Connell, R. F., Scully, M. O., y Wigner, E. P., *Phys. Rep.* **106**, 121 (1984).
- [84] Wisdom, J., *Icarus* **63**, 272 (1985).
- [85] Wisniacki, D. A., y Cohen, D., quant-ph/0111125.
- [86] Wisniacki, D. A., Vergini, E. G., Pastawski H. M., y Cucciatti, F. M. *Phys. Rev. E. Rap. Comm.* También disponible en quant-ph/0111051.
- [87] Zurek W., *Phys. Rev. D* **24** 1516 (1981).
- [88] Zurek W., *Phys. Rev. D* **26** 1862 (1982).
- [89] Zurek, W., *Frontiers of Nonequilibrium Statistical Mechanics* G. T. Moore y O. Scully, eds., Plenum, New York, (1986).
- [90] Zurek W., *Physics Today*, October 1991, 36, y referencias allí mencionadas.
- [91] Zurek, W. *Progr. Theor. Phys.* **89** 281 (1993).
- [92] Zurek, W. Habib, S. y Paz, J. P., *Phys. Rev. Lett* **70** 1187 (1993).
- [93] Zurek W., y Paz, J. P., *Phys. Rev. Lett* **72** 2508 (1994).
- [94] Zurek W., y Paz, J. P., *Phys. Rev. Lett* **75** 351 (1995).
- [95] Zurek W., y Paz, J. P., *Physica D* **83** 300 (1995b).
- [96] Zurek, W. H., *Physica Scripta* **T76**, 186 (1998). También disponible en quant-ph/9802054.
- [97] Zurek, W. H., *Lett. to Nature* **412** 712 (2001).
- [98] Zurek, W. H., quant-ph/0105127.

Agradecimientos

Para que este trabajo haya sido posible innumerables personas me han respaldado de una u otra manera. Imposible hacer mención de todos ellos. Sin embargo, quisiera agradecer especialmente al Dr. Josué Núñez, al Dr. Juan Pablo Paz, a Fabio Zyserman y a mis padres.

Josué, siendo mi director en la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires (CIC) además de un buen amigo, no sólo permitió sino me alentó para que eligiera con toda libertad mi camino. Eso posibilitó, entre otras cosas, que esta Tesis siquiera tuviera lugar.

Juan Pablo es quien dirigió los trabajos de investigación que culminaron en la Tesis, y a él quiero agradecer todo su apoyo, la valiosa formación que me brindó, y también (no es cosa menor) la paciencia que me tuvo en estos años.

Fabio Zyserman, mi esposo y compañero, no sólo me soportó estoicamente durante el transcurso de estos años, con creciente esfuerzo de su parte hacia el final, sino que también me brindó muchísimas veces su inestimable ayuda programando, instalando programas en mi PC, y tantas cosas más.

Agradezco por último a Olga y Oscar, mis padres, por el esfuerzo de una vida dedicada a la educación de sus hijas. Gracias a este esfuerzo, por cierto no menor, tuve acceso a una formación universitaria. Pero fundamentalmente, porque gracias a ellos he crecido con la convicción de que la educación es un valor inestimable y aprender un placer, a pesar de que en estos tiempos y en esta sociedad tal convicción parezca haber perimido o sea vista como rareza de exéntrico.

Diana Monteoliva

