

Tesis de Posgrado

Teoría de Cuerdas sobre AdS₃ X N

Giribet, Gastón E.

2003

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Giribet, Gastón E.. (2003). Teoría de Cuerdas sobre AdS₃ X N. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3586_Giribet.pdf

Cita tipo Chicago:

Giribet, Gastón E.. "Teoría de Cuerdas sobre AdS₃ X N". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2003.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3586_Giribet.pdf

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física**

Teoría de Cuerdas sobre $AdS_3 \times \mathcal{N}$

por Gastón E. Giribet

Director de Tesis: Dra. Carmen A. Nuñez.

Lugar de Trabajo: Instituto de Astronomía y Física del
Espacio, IAFE

Trabajo de Tesis para optar por el título de Doctor de
la Universidad de Buenos Aires

Junio de 2003

5 3 6

Teoría de cuerdas sobre $\text{AdS}_3 \times \mathcal{N}$


Gastón E. Giribet

June, 2003

gaston@iafe.uba.ar



GASTÓN GIRIBET



CARMEN NUÑEZ

RESUMEN

En este trabajo de tesis se estudia la teoría de cuerdas sobre AdS_3 en términos del modelo de Wess-Zumino-Novikov-Witten formulado sobre una variedad de grupo $\frac{SL(2)}{U(1)} \times U(1)$. Se analizan el espectro, el espacio de Hilbert y los procesos de interacción de cuerdas en dicho espacio-tiempo. Proponiendo una generalización de la representación integral de Dotsenko para las funciones de correlación en el caso no compacto, se realiza el cálculo explícito de las amplitudes de 2 y 3-puntos en el contexto de la realización tipo gas de Coulomb.

Se consideran las consecuencias de proponer una representación integral para la función de 4-puntos, estudiando sus propiedades de factorización y monodromía.

String theory on $AdS_3 \times \mathcal{N}$

Gastón E. Giribet

June, 2003

Abstract

In this thesis work, the algebraic construction of string theory on AdS_3 is studied in terms of the Wess-Zumino-Novikov-Witten model formulated on $\frac{SL(2)}{U(1)} \times U(1)$ group manifold. The spectrum, the Hilbert space and string interaction processes are studied in this space-time. By proposing a generalization of the Dotsenko representation of correlation functions for the non-compact case, we explicitly calculate 2 and 3-point amplitudes within the context of the Coulomb gas type realization.

The consequences of extending the integral expression for 4-point correlation function proposed in the literature for the case of generic $SL(2)$ representations are analysed. The factorization and the monodromy properties of 4-point functions are studied.

Contents

1	Introducción	7
2	El espacio Anti-de Sitter tridimensional	12
2.1	Propiedades locales de los espacios AdS_{2+1} y AdS_3	12
2.1.1	Estructura métrica del espacio-tiempo Anti-de Sitter	12
2.1.2	Sistemas de coordenadas	13
2.1.3	Álgebra de isometrías	16
2.2	Propiedades globales de los espacios AdS_{2+1} y AdS_3	17
2.2.1	Recubrimiento universal	17
2.2.2	Simetrías asintóticas y el borde de AdS_{2+1}	17
2.2.3	El agujero negro de Bañados, Teitelboim y Zanelli	18
3	Teoría de cuerdas sobre $AdS_3 \times \mathcal{N}$	21
3.1	Modelo σ no lineal sobre AdS_3	21
3.2	El modelo de Wess-Zumino-Novikov-Witten	26
3.2.1	Simetrías y álgebra de Kac-Moody $SL(2)_k$	26
3.2.2	El modelo WZNW sobre la variedad de grupo $SL(2, R)$	28
3.2.3	El modelo WZNW sobre el espacio cociente $SL(2, C)/SU(2)$	29
3.2.4	El modelo WZNW sobre el espacio cociente $SL(2, R)/U(1)$	30
3.3	Teoría de campos conformes sobre $SL(2)$ y la representación de campos libres	31
3.4	La conjetura de correspondencia de Maldacena AdS/CFT	33
4	El espectro de la teoría de cuerdas sobre AdS_3	35
4.1	El espectro de la teoría y las representaciones unitarias de $SL(2)_k$	35
4.1.1	Los estados de la base: el vacío de excitaciones	35
4.1.2	Los estados excitados	37
4.1.3	El problema de la unitariedad y el teorema de no-fantasma	38
4.1.4	El vínculo de unitariedad débil y los niveles de excitación	40
4.1.5	La simetría de flujo espectral	41
4.1.6	Las cuerdas enrolladas en AdS_3 y el límite de unitariedad fuerte	43
4.1.7	Sobre la relación entre la descripción algebraica y la interpretación geométrica de las cuerdas propagándose en AdS_3	45
5	Operadores de vértice y espacio de Hilbert	48
5.1	Operadores de vértice en el modelo WZNW sobre $SL(2)$	48
5.1.1	El límite cercano al borde	50

5.2	Operadores de vértice en el modelo WZNW sobre $\frac{SL(2)}{U(1)} \times U(1)$	56
5.2.1	Preliminares: Analogía con el álgebra superconforme N=2	56
5.2.2	La teoría de cuerdas como el producto $\frac{SL(2)}{U(1)} \times U(1)$	58
5.2.3	Observación sobre la T-dualidad y las soluciones AdS_3	62
6	Interacciones de cuerdas en AdS_3	65
6.1	Funciones de correlación e integral funcional	65
6.1.1	La integración de los modos cero	66
6.2	La representación integral de Dotsenko sobre $\frac{SL(2)}{U(1)} \times U(1)$	69
6.2.1	Preliminares: La representación de Dotsenko para $SU(2)$	70
6.2.2	La representación de Dotsenko para $\frac{SL(2)}{U(1)} \times U(1)$	75
6.2.3	Observaciones sobre las representaciones conjugadas	77
7	Funciones de correlación de 2 y 3-puntos	80
7.1	La función de correlación de 2-puntos	80
7.1.1	La transformada de Fourier de la función de 2-puntos	87
7.1.2	La estructura de polos de la función de 2-puntos	89
7.1.3	La función de 2-puntos a partir de la simetría de reflexión	91
7.2	La función de correlación de 3-puntos	93
7.2.1	La transformada de Fourier de la función de 3-puntos	97
7.2.2	La estructura de polos de la función de 3-puntos	97
7.2.3	Procesos de dispersión que violan la conservación del número de enrollamientos	99
7.2.4	Observaciones sobre los dos operadores de apantallamiento y la relación entre acoplamiento fuerte y débil	101
7.2.5	La función de 2-puntos a partir de la función de 3-puntos	104
8	Funciones de correlación de 4-puntos	107
8.1	La ecuación de Knizhnik-Zamolodchikov	108
8.2	La teoría de Liouville	113
8.3	Representación integral de la función de 4-puntos	115
8.3.1	Las funciones de 2 y 3-puntos a partir de la función de 4-puntos	116
8.3.2	Resultado explícito para un caso particular de la función de 4-puntos y las propiedades de modronomía	117
8.4	Las propiedades de factorización de la función de 4-puntos	120
8.4.1	La condición de polos en el límite $z \rightarrow 0$	121
8.4.2	La unitariedad del estado intermedio y las restricciones sobre los estados externos	126

9 Conclusiones	129
10 Apéndices	137
10.1 La integración de los modos cero	137
10.2 Estados nulos y la estructura de polos a partir de la ecuación de Belavin-Polyakov-Zamolodchikov	140
10.3 La normalización de la solución a la ecuación de Knizhnik-Zamolodchikov: La función de 3-puntos a partir de la función de 4-puntos	144
10.4 Invariancia ante modronomía de las soluciones a la ecuación de Knizhnik-Zamolodchikov	150
10.5 Ansatz de factorización y las soluciones de la ecuación de Knizhnik-Zamolodchikov	157

Martes 3 de Junio de 2003.

I

1 Introducción

Desde hace algo más de diez años la teoría de cuerdas sobre $AdS_3 \times \mathcal{N}$ ha sido estudiada dentro de diferentes contextos y debido a la gran gama de aspectos interesantes que presenta. En efecto, diversos tópicos pueden ser mencionados como motivaciones para el estudio de esta teoría de cuerdas en particular.

Un punto central que determina el interés en el estudio de este modelo es que la teoría en cuestión se describe como un modelo de Wess-Zumino–Novikov–Witten (WZNW) formulado sobre la variedad de grupo $SL(2)$ [1, 2]. En el contexto de la teoría de cuerdas y de otras teorías de gravedad este modelo WZNW aparece asociado a diversas soluciones de agujero negro en dos, tres y cuatro dimensiones [3, 4, 5, 6], describe también la dinámica de cuerdas cerca de puntos singulares de variedades de Calabi-Yau, aparece relacionado con las teorías de *cuerdas pequeñas*¹ [7], rige la dinámica asintótica de la gravedad de Einstein con constante cosmológica negativa en tres dimensiones y también se relaciona con algunos problemas propios del área de la materia condensada tales como el estudio del efecto Hall cuántico y otros sistemas que admiten una descripción en términos de la teoría de Chern-Simons. Todo esto hace de este modelo un objeto de estudio interesante en sí mismo.

Las variedades $AdS_3 \times \mathcal{N}$ con tensor antisimétrico se analizaron inicialmente como un fondo curvo no trivial con una sola coordenada temporal sobre el cual formular una teoría de cuerdas como un modelo conforme exacto más allá de las aproximaciones de las teorías efectivas de bajas energías. Luego, y con la formulación de la conjetura de

¹De la denominación del inglés *Little string theory*.

Maldacena hace poco más de cinco años, el interés por este modelo particular en tres dimensiones adquirió un renovado impulso debido al hecho de que representa la arena propicia para probar y estudiar la correspondencia entre teorías conformes y teorías de gravedad yendo más allá del régimen de supergravedad. En efecto, este modelo permite realizar un análisis de la versión tridimensional de la conjetura de Maldacena, versión que aparece *a priori* como un promisorio caso particular para entender aspectos fundamentales de la correspondencia AdS_D/CFT_{D-1} , debido a que representa la dualidad entre un par de teorías conformes bidimensionales; a saber: la teoría conforme bidimensional que describe la dinámica de la hoja de mundo de la cuerda y la teoría conforme bidimensional que *vive* en el borde del espacio-tiempo AdS_3 . De esta manera, y dado que los modelos conformes bidimensionales han sido intensivamente estudiados en las últimas dos décadas, cabría esperar que en este caso particular ambos lados del mapa de dualidad AdS/CFT sean resolubles y permitan verificar la conjetura.

No obstante, si bien la teoría que rige la dinámica de la hoja de mundo de las cuerdas en AdS_3 es un modelo conforme bidimensional, éste pertenece a una clase muy especial de teorías conformes denominadas teorías conformes no-compactas; no es un modelo conforme racional (RCFT). Estos modelos no-compactos son teorías conformes cuyos aspectos no triviales no son aun completamente entendidos y para las cuales muchas de las propiedades conformes estudiadas para otros casos no está claro que se satisfagan; por ejemplo, no está claro aún la manera de establecer un espectro unitario en estos modelos, no se conocen por completo sus propiedades de factorización ni la interpretación física de la estructura de polos de los bloques conformes. Así, el estudio de la teoría de cuerdas en AdS_3 deviene en un análisis cuidadoso de los aspectos sutiles de las teorías conformes no-compactas involucradas; a saber: el modelo de WZNW sobre grupos no compactos.

En su carácter de teoría perturbativa de cuerdas sobre el espacio-tiempo curvo, el modelo sobre AdS_3 presenta aspectos particulares, propios de los *fondos* no triviales. Uno de los puntos centrales en el estudio de la consistencia de esta teoría ha sido la

unitariedad: la teoría de cuerdas sobre AdS_3 es un modelo conforme no compacto que presenta la peculiaridad de contener estados del espacio de Hilbert con norma negativa (*fantasmas*) aún después de imponer los vínculos de Virasoro y la condición de *criticalidad* $c \equiv 26$. Durante la última década, diferentes prescripciones fueron presentadas a efectos de establecer un criterio para *recortar* un subespacio del espacio de Hilbert tal que sólo presente estados de norma positiva. Podemos decir que estas propuestas están signadas por dos líneas de investigación básicamente; a saber:

- la idea de presentar una forma de acotar superiormente el número cuántico $j \in \mathbf{R}$ que etiqueta las representaciones² discretas de $SL(2)$;
- la idea de incluir grados de libertad adicionales y considerar las representaciones continuas $j \notin \mathbf{R}$ de $SL(2)$ (entre estas construcciones vale mencionar las referencias [8, 9]).

El primer tipo de construcción presenta el problema de implicar una cota superior para la masa de los estados de la teoría de cuerdas, lo que no parece natural y conduce a inconsistencias en la teoría. Por su parte, la inclusión de nuevos grados de libertad debe estar complementada de una interpretación geométrica precisa en términos de la física de los estados de cuerda sobre esta variedad.

La línea de trabajo que predominó durante los dos años que siguieron a la formulación de la conjetura de correspondencia³ AdS/CFT fue la de someter al $SL(2)$ -spín j a una cota superior. Evans, Gaberdiel y Perry demostraron en [10] un teorema de no-fantasma para AdS_3 que establece que los estados de las representaciones discretas de la teoría que son sometidos a dicho vínculo son estados de norma no-negativa; es importante remarcar que este resultado es obtenido analizando la teoría libre, *i.e.* sin considerar las interacciones de cuerdas.

²Notemos que las isometrías de AdS_3 están generadas por el álgebra $SL(2) \otimes SL(2)$, de manera tal que los estados de la teoría pertenecen a las representaciones de este grupo.

³Con la intención de ser precisos, debemos mencionar que la correspondencia AdS_D/CFT_{D-1} fue demostrada para el caso particular $D = 3$ tempranamente en la referencia [19].

Más recientemente, Maldacena y Ooguri presentaron una construcción de la teoría de cuerdas sobre $AdS_3 \times \mathcal{N}$ con las propiedades de: presentar un espectro unitario [11], ser invariante modular [13], describir nuevos estados de cuerda con un espectro infinito de masas y tener un espectro cerrado entre las reglas de fusión [16]. La realización de Maldacena y Ooguri consiste en una combinación entre los dos tipos de construcciones descritas anteriormente, *i.e.* las dos ideas detalladas en los items de arriba. Actualmente, esta propuesta para la descripción de la teoría de cuerdas sobre AdS_3 se yergue como un modelo consistente que parece resolver los problemas formales que habían aparecido a lo largo de los años anteriores.

En los capítulos que siguen describiremos la teoría de cuerdas en el espacio AdS_3 . Comenzaremos en el capítulo 2 estudiando la geometría del espacio-tiempo AdS_3 , sus propiedades globales y locales. En el capítulo 3 describiremos esta teoría como un modelo WZNW, presentaremos las simetrías y el álgebra de corrientes del modelo conforme y haremos un estudio de la construcción algebraica de la teoría conforme sobre la hoja de mundo. Su espectro de estados y la relación con la interpretación geométrica de las cuerdas propagándose en la variedad AdS_3 se estudian en el capítulo 4. En el capítulo 5 estudiaremos la forma funcional y las propiedades conformes de los operadores de vértice en este modelo. Analizaremos el espacio de Hilbert sobre $SL(2)$ y la representación de campos libres de Wakimoto [17, 18].

En el capítulo 6 introduciremos el formalismo de gas de Coulomb [15] a efectos de generalizar la representación integral de Dotsenko [47] con la motivación de proponer una prescripción para calcular funciones de correlación en el modelo conforme sobre $\frac{SL(2)}{U(1)} \times U(1)$ ([15] y [17]). Dichas funciones de correlación representarán las amplitudes de dispersión de cuerdas en AdS_3 . Validos de este formalismo, calcularemos explícitamente las funciones de 2 y 3-puntos en el capítulo 7 [17].

Demostramos en este capítulo que la realización de campos libres⁴ lleva al resultado exacto más allá del límite cercano al borde del espacio AdS_3 , obteniendo de esta man-

⁴Considerando también cierta extensión analítica de las expresiones.

era los resultados conocidos para las expresiones de ciertas funciones de correlación así también como nuevos resultados que representan correladores que no han sido calculados previamente, tales como procesos de dispersión que violan la conservación del número total de enrollamientos de las cuerdas interactuantes.

Luego, el capítulo 8 está dedicado al estudio de las propiedades de la función de 4-puntos. Estudiaremos una representación integral para estos correladores valiéndonos de la generalización directa al caso de representaciones genéricas de resultados obtenidos previamente por otros autores para el caso del modelo WZNW sobre el compacto $SU(2)$ [91] y para el caso particular de representaciones admisibles de $SL(2)$ [92]. Analizaremos las propiedades de factorización de dicha expresión integral y la forma funcional explícita de un caso particular no trivial que nos permitirá estudiar las propiedades de monodromía.

Dejaremos para el capítulo 9 las conclusiones y la síntesis de aportes originales de este trabajo de tesis.

II

2 El espacio Anti-de Sitter tridimensional

En esta sección describiremos la geometría del espacio-tiempo Anti-de Sitter tridimensional AdS_3 . Discutiremos sus propiedades globales y locales tanto en su versión lorentziana cuanto en su versión euclídeana.

2.1 Propiedades locales de los espacios AdS_{2+1} y AdS_3

2.1.1 Estructura métrica del espacio-tiempo Anti-de Sitter

El espacio-tiempo Anti-de Sitter tridimensional (AdS_{2+1}) es la geometría máximamente simétrica que satisface ser solución de las ecuaciones de Einstein de vacío en tres dimensiones con constante cosmológica negativa $\Lambda < 0$. Dicha variedad se obtiene de someter a la variedad pseudoeuclídeana de métrica

$$ds^2 = -dT_1^2 - dT_2^2 + dX_1^2 + dX_2^2 \quad (1)$$

al vínculo hiperbólico

$$-T_1 - T_2 + X_1 + X_2 = l^2 \quad (2)$$

El parámetro l es denominado el *radio* de Anti-de Sitter, abuso de nomenclatura debido a que la curvatura constante de AdS está dada en términos de la inversa de su cuadrado, según $\Lambda = -\frac{2}{l^2}$. Esta geometría es una variedad diferencial máximamente simétrica de curvatura constante negativa.

Por su parte, dado que en tres dimensiones el tensor de Riemann $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ está dado unívocamente en términos del tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ (*i.e.* el tensor de Weyl $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ es

idénticamente cero) según la expresión

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}R_{\nu\rho} - \frac{1}{2}g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}R + \frac{1}{2}g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}R$$

los grados de libertad no son locales y están, pues, asociados sólo a cargas topológicas o del tipo Nöther. No obstante estas simplificaciones, el catálogo de estructuras geométricas en tres dimensiones es muy rico, incluyendo espacios con singularidades cónicas, horizontes de eventos, horizontes causales y otros muchos aspectos interesantes de las geometrías en más dimensiones.

La versión euclideana del espacio AdS_{2+1} , denotada AdS_3 , se construye de manera análoga a la del caso lorentziano pero a partir del vínculo

$$-T_1 + T_2 + X_1 + X_2 = l^2 \quad (3)$$

sobre la variedad hiperbólica

$$ds^2 = -dT_1^2 - dT_2^2 + dX_1^2 + dX_2^2 \quad (4)$$

En efecto, esta construcción corresponde al reemplazo $T_2 \rightarrow iT_2$ sólo en la ecuación (3) (es importante notar que no hay que considerar dicho reemplazo en la ecuación (4) sino sólo en (3), *i.e.* hay que diferenciar esta construcción de la rotación de Wick que lleva a la definición del espacio de de-Sitter tridimensional).

2.1.2 Sistemas de coordenadas

Como es usual en las teorías de gravedad, la referencia a una variedad geométrica se sobrentiende como tomar la clase de equivalencia definida módulo difeomorfismos sobre el conjunto de métricas; claro está que este trabajo no será la excepción y, en consecuencia, dedicaremos esta sección a presentar los distintos sistemas de coordenadas en los que usualmente⁵ se describe al espacio AdS .

⁵Referimos aquí al apéndice de la referencia [89].

Comencemos con el sistema de coordenadas cilíndricas, definido éste por la siguiente parametrización del hiperboloide:

$$\begin{aligned} T_1 + iT_2 &\equiv le^{it} \cosh \rho \\ X_1 + iX_2 &\equiv le^{i\theta} \sinh \rho \end{aligned}$$

En estas coordenadas la métrica toma la forma

$$ds^2 = l^2 (-\cosh^2 \rho dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\theta^2)$$

las coordenadas $\{t, \rho, \theta\}$ tienen topología $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_{\geq 0} \times S^1$ respectivamente, donde θ toma valores unívocos en el segmento $[0, 2\pi)$. En esta descripción, el recubrimiento universal⁶ del espacio AdS_{2+1} es un cilindro sólido extendido en la dirección temporal t . El borde de AdS_{2+1} en este sistema de referencia está alojado en $\rho = \infty$ y corresponde al borde del cilindro que está parametrizado por las variables $\{t, \theta\}$ (en la próxima subsección estudiaremos con más detalle el concepto de borde en el caso de este espacio-tiempo particular).

Otro sistema de coordenadas que será de importancia en nuestro trabajo es el sistema de coordenadas de Poincaré, definido con la siguiente parametrización

$$T_1 + X_1 \equiv le^\phi \tag{5}$$

$$T_1 - X_1 \equiv le^{-\phi} (1 - e^{2\phi} \gamma^+ \gamma^-) \tag{6}$$

$$X_2 + T_2 \equiv le^\phi \gamma^+ \tag{7}$$

$$X_2 - T_2 \equiv le^\phi \gamma^- \tag{8}$$

Las coordenadas $\{\phi, \gamma^+, \gamma^-\}$ tienen topología \mathbf{R}^3 (a pesar de la elección de la letra ϕ para significar una dirección no periódica). Este sistema de coordenadas no está definido globalmente; esto es, no cubre todo el espacio AdS_{2+1} sino sólo una carta que representa la mitad de la variedad. No obstante, no será éste un aspecto que nos impida

⁶Consideraremos el recubrimiento universal de AdS_3 en lugar del espacio propiamente dicho, comentaremos esto en la próxima subsección

trabajar en términos de dicho sistema de coordenadas. La métrica toma, entonces, la forma

$$ds^2 = l^2 (d\phi^2 + e^{2\phi} d\gamma^+ d\gamma^-)$$

El borde de AdS_{2+1} en este marco de referencia está alojado en $\phi = \infty$, de lo que se desprende que $\{\gamma^+, \gamma^-\}$ parametrizan dicho borde. El punto $\phi = -\infty$ corresponde a un horizonte de Rindler⁷.

Es interesante mencionar que la descripción de la variedad euclidea AdS_3 se obtiene a partir del sistema de coordenadas de Poincaré redefiniendo las variables $\{\gamma^+, \gamma^-\} \rightarrow \{\gamma, \bar{\gamma} = \gamma^*\}$ de manera consecuente a la transformación $T_2 \rightarrow iT_2$ sobre el vínculo; a saber

$$X_1 + iT_2 \equiv le^\phi \gamma \quad (9)$$

$$X_1 - iT_2 \equiv le^\phi \bar{\gamma} \quad (10)$$

lo que, como mencionamos antes, equivale a parametrizar de la manera anterior (5)-(8) el hiperboloide minkowskiano.

En las coordenadas $\{\phi, \gamma, \bar{\gamma}\}$ el recubrimiento universal de AdS_3 corresponde a una esfera sólida cuyo borde coincide con el borde del espacio de signatura euclidea. El plano complejo $\{\gamma, \bar{\gamma}\}$ coincide con la proyección estereográfica de Riemann de dicha esfera con foco en el polo norte que coincide con el futuro remoto. De esta manera, el plano complejo $\{\gamma, \bar{\gamma}\}$ representa un mapa del borde del espacio AdS_3 .

Notemos que el borde de AdS_{2+1} en coordenadas cilíndricas y el borde de AdS_3 en coordenadas de Poincaré están relacionados con la transformación que mapea el cilindro en el plano complejo usada usualmente en la cuantización radial de las teorías conformes bidimensionales.

Otro sistema de coordenadas usualmente utilizado en el estudio de la variedad AdS_{2+1} es conocido con el nombre de coordenadas BTZ, y en el cual la métrica toma

⁷Con la intención de ser claros, nos vale decir que las coordenadas de Poincaré usualmente se escriben en términos de las variables $\{r \equiv \ln \phi, \gamma^+, \gamma^-\}$.

la forma

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right) d\tau^2 + \left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2 \quad (11)$$

La topología de las variables $\{r, \tau, \varphi\}$ en este caso vuelve a ser $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_{\geq 0} \times S^1$

2.1.3 Álgebra de isometrías

En su carácter de espacio máximamente simétrico en tres dimensiones, AdS_{2+1} tiene seis vectores de Killing, los cuales generan el álgebra $SO(2, 2)$ como puede verse⁸ fácilmente de su construcción a partir de la variedad (1): el vínculo (2) rompe los cuatro generadores de Poincaré correspondientes a las traslaciones en las coordenadas $\{T^a, X^b\}$. De esta manera, la variedad resultante luego de imponer el vínculo sobre el hiperboloide mantendrá sólo la parte de Lorentz⁹ $SO(2, 2)$.

El álgebra $SO(2, 2)$ es localmente isomorfa al producto $SL(2) \otimes SL(2)$; esto es, a partir de combinaciones lineales de los generadores de $SO(2, 2)$ es posible generar dos copias (conmutantes entre sí) del álgebra $SU(1, 1)$ que es localmente isomorfa a $SL(2, R)$. Para entender esto claramente, notemos que si se considera el álgebra de los generadores del grupo $SO(2, 2)$, una redefinición lineal de sus operadores lleva a dos conjuntos $\{J^1, J^2, J^3\}$ conmutantes entre sí que satisfacen

$$[J^1, J^2] = +iJ^3 \quad (12)$$

$$[J^2, J^3] = -iJ^1 \quad (13)$$

$$[J^1, J^3] = +iJ^2 \quad (14)$$

Definiendo una nueva base de la forma $J^\pm \equiv J^1 \pm iJ^2$ obtenemos dos copias separadas del álgebra correspondiente a los generadores del grupo $SL(2)$; a saber

$$[J^3, J^\pm] = \pm J^\pm \quad (15)$$

⁸Dado que estamos principalmente interesados en las propiedades locales de la variedad, no haremos distinción de notación entre el grupo y el álgebra de Lie asociada, mencionando la distinción en cada caso particular; i.e. no haremos uso de la nomenclatura usual según la cual el álgebra recibe la denominación en letra minúscula, e.g. $sl(2)$

⁹Nos referimos con cierta indulgencia al grupo de Poincaré y al grupo de Lorentz a pesar de que estamos tratando con una variedad 2+2 dimensional. Entiéndase aquí dicho abuso de la nomenclatura.

$$[J^-, J^+] = 2J^3 \quad (16)$$

De esta manera, logramos una realización del álgebra que genera las isometrías del espacio AdS_{2+1} de la forma $SO(2, 2) \sim SL(2) \otimes SL(2)$.

2.2 Propiedades globales de los espacios AdS_{2+1} y AdS_3

2.2.1 Recubrimiento universal

Constructivamente se ve que el espacio AdS presenta curvas temporales cerradas, correspondientes a órbitas cerradas en direcciones temporales del hiperboloide; por lo tanto, para obtener una interpretación espaciotemporal consistente con las aplicaciones físicas se debe tratar con el recubrimiento universal¹⁰, que se denota usualmente \widetilde{AdS} y que se obtiene de considerar la topología $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$ en lugar de la topología $\mathbf{R}^2 \times S^1$ resultante de la construcción. En esta tesis nos referiremos invariablemente al recubrimiento universal de AdS al que denotaremos indistintamente AdS sin riesgo de confusión. De manera consecuente, las representaciones del grupo de isometrías serán deformadas (ampliadas). Trataremos este aspecto en particular más adelante, cuando introduzcamos las representaciones unitarias de $SL(2, R)$.

2.2.2 Simetrías asintóticas y el borde de AdS_{2+1}

El espacio-tiempo AdS_{2+1} es una variedad no compacta que presenta un borde alojado en una región que describiremos por la parametrización $G_{(r=\infty, x, t)}$, siendo $G_{(r, x, t)}$ la métrica del espacio en cierto sistema de coordenadas $\{r, x, t\}$. En términos de física, dicho borde puede definirse en función de las geodésicas nulas: se dice que existe un borde alojado en $r = \infty$ dado que la región $G_{(r=\infty, x, t)}$ es alcanzada por un rayo de luz en un tiempo coordinado finito $t < \infty$. Esta conexión causal con el infinito induce a la definición de un borde para AdS_3 . El borde es, así, una variedad bidimensional parametrizada por las variables $\{x, t\}$.

¹⁰ *recubrimiento universal* reemplaza aquí a la expresión inglesa *universal covering*.

A medida que el valor de la coordenada r crece (*i.e.* acercándose al borde) la métrica $G_{(r,x,t)}$ del espacio AdS_{2+1} tiende a la métrica $G_{(r,x,t)}^\infty$, siendo éstas iguales sólo en el límite $r \rightarrow \infty$, según

$$\lim_{r \rightarrow \infty} G_{(r,x,t)} = \lim_{r \rightarrow \infty} G_{(r,x,t)}^\infty$$

Definamos entonces con el nombre de variedades *asintóticamente* AdS_{2+1} al conjunto de métricas $\{G_{(r,x,t)}^*\}$ con la propiedad

$$\lim_{r \rightarrow \infty} G_{(r,x,t)}^* = \lim_{r \rightarrow \infty} G_{(r,x,t)}^\infty$$

Teorema (Brown y Henneaux): Brown y Henneaux demostraron en 1986 [19] que los difeomorfismos cerrados en el conjunto $\{G_{(r,x,t)}^*\}$ están generados por dos copias del álgebra W_2 de Virasoro con extensión central y cuya carga central c está dada por

$$c = \frac{3l}{2G}$$

siendo G la constante de Newton y l el radio del espacio AdS_{2+1} . En lo sucesivo denotaremos $\{\mathcal{L}_n\}$ a los generadores de la simetría $W_2 \otimes W_2$ de Brown-Henneaux. Claramente, el álgebra generadora del grupo de isometrías del espacio AdS_{2+1} está incluida en estas dos copias del álgebra de Virasoro $W_2 \otimes W_2$; en efecto, el subálgebra global $SL(2) \otimes SL(2)$ corresponde a las isometrías $SO(2,2)$ de la manera discutida antes. Notemos que $SL(2) \otimes SL(2) \subset W_2 \otimes W_2$.

2.2.3 El agujero negro de Bañados, Teitelboim y Zanelli

Hablemos ahora de las soluciones de agujero negro tridimensional en AdS_3 .

La teoría de gravedad de Einstein en 2+1 dimensiones con constante cosmológica negativa admite soluciones de agujero negro descubiertas hace una década por Bañados Teitelboim y Zanelli (BTZ) [4]. Estas soluciones son espacio-tiempos de curvatura constante con horizonte de eventos y pueden ser construidos tomando módulo a la variedad AdS_{2+1} (*i.e.* un orbifold discreto de la variedad AdS_3).

La métrica de la solución está dada por la expresión

$$ds^2 = -N_{(r)}^2 d\tau^2 + N_{(r)}^{-2} dr^2 + r^2 [N_{(r)}^\phi d\tau + d\varphi]^2 \quad (17)$$

donde

$$N_{(r)}^2 = -M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2} \quad (18)$$

$$N_{(r)}^\phi = -\frac{J}{2r^2} \quad (19)$$

Las coordenadas están definidas según $\tau \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R} > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Notemos que la solución BTZ presenta dos horizontes de eventos dados por las raíces de la función $N_{(r)}$; a saber

$$\tau_{\pm} = l \sqrt{\frac{M}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{J}{Ml} \right)^2} \right)} \quad (20)$$

La geometría del agujero negro es asintóticamente AdS_3 en el sentido de la definición presentada anteriormente. Es, a su vez, una variedad localmente AdS_3 .

En términos físicos, el parámetro M representa la masa de la solución mientras que J es la constante que da cuenta del momento angular. Ambos horizontes, cuya existencia demanda la condición $|J| \leq Ml$, coinciden en el caso extremal $J = Ml$. Por otro lado, sólo un horizonte existe cuando $J = 0$.

Las soluciones con valores negativos de M dan origen a singularidades cónicas desnudas, exceptuando el caso $M + 1 = J = 0$ para el cual¹¹ la solución BTZ deviene en el mismo espacio-tiempo AdS_3 .

La solución del agujero negro tridimensional tiene propiedades termodinámicas muy interesantes; de hecho, presenta una entropía dada por la ley de Bekenstein-Hawking y una temperatura consecuente con la segunda ley de la termodinámica generalizada¹²

$$S = \frac{2\pi r_+}{4G} \quad (21)$$

$$T = \frac{r_+^2 - r_-^2}{2\pi r_+} \quad (22)$$

Los generadores de las simetrías asintóticas de Brown-Henneaux en el caso de la solución BTZ, la cual es en efecto una solución asintóticamente AdS_3 , son identificados

¹¹Aquí usamos las unidades de la publicación original, según la cual $G = \frac{1}{8}$.

¹²Para ser más explícitos, aquí cambiamos ligeramente la convención redefiniendo M por un factor $8G$ respecto a las fórmulas anteriores.

con el momento angular y la masa de la solución de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 + \bar{\mathcal{L}}_0 &= Ml \\ \mathcal{L}_0 - \bar{\mathcal{L}}_0 &= J\end{aligned}$$

En [20] se estudió la solución BTZ en el contexto de la supergravedad en tres dimensiones, obteniéndose como resultado que el estado de agujero negro de masa $M = 0$ representa el estado fundamental del sector de Ramond de la teoría, mientras que el espacio AdS_3 conforma el vacío del sector de Neveu-Schwarz. Por otro lado, Horowitz y Welch demostraron en su artículo [21] que, complementado con un campo antisimétrico de fondo B , el agujero negro BTZ representa una solución exacta de la teoría de cuerdas. La construcción del agujero negro tridimensional como un orbifold del espacio-tiempo AdS_3 es, de suyo, una de las principales motivaciones para el estudio de la teoría de cuerdas sobre AdS_3 .

Una descripción más detallada sobre esta solución, sus propiedades geométricas y termodinámicas, así como una lista completa de referencias puede encontrarse en [22].

III

3 Teoría de cuerdas sobre $AdS_3 \times \mathcal{N}$

En esta sección formulamos la teoría de cuerdas sobre el espacio Anti-de Sitter tridimensional. Estudiamos la teoría conforme sobre la hoja de mundo que describe la dinámica de las cuerdas y discutimos la unitariedad del espectro.

3.1 Modelo σ no lineal sobre AdS_3

La teoría clásica de campos conformes bidimensional que describe la dinámica de la hoja de mundo de una cuerda bosónica propagándose en un espacio-tiempo d -dimensional de métrica G y en presencia de campos de fondo (Φ, A, B) es

$$S = \frac{1}{l_s^2} \int_{\Sigma} d\tau d\sigma \left(\sqrt{h} h_{(\tau, \sigma)}^{\alpha\beta} G^{\mu\nu}(X) \partial_{\alpha} X_{\mu} \partial_{\beta} X_{\nu} + \varepsilon^{\alpha\beta} B^{\mu\nu}(X) \partial_{\alpha} X_{\mu} \partial_{\beta} X_{\nu} + l_s^2 \sqrt{h} R(\tau, \sigma) \Phi(X) \right) + \frac{a}{2} \int_{\partial\Sigma} ds K(\tau, \sigma) + \frac{1}{l_s} \int_{\partial\Sigma} ds A^{\mu}(X) \partial_s X_{\mu} \quad (23)$$

donde los índices $(\alpha, \beta) \in \{0, 1\}$ refieren a la hoja de mundo mientras que los índices $(\mu, \nu) \in \{0, 1, 2, \dots, d-1\}$ denotan los de las coordenadas espacio-temporales. Los $h_{\alpha\beta}$ son los componentes de la métrica sobre la variedad bidimensional Σ que representa la hoja de mundo con curvatura escalar $R(\tau, \sigma)$ y $\varepsilon^{\alpha\beta}$ es la forma de Levi-Civita en la variedad Σ . Por su parte, Φ, A y B son p -formas diferenciales que representan campos de fondo ($p = \{0, 1, 2\}$ respectivamente). La 1-forma A se acopla al borde de la variedad Σ , denotado por $\partial\Sigma$, que presenta una curvatura geodésica $K(\tau, \delta)$ y está parametrizado por la coordenada s ; de esta manera, el campo A sólo se acopla a las cuerdas abiertas dado que son éstas las que presentan variedades Σ con topologías con

bordes. La constante de acoplamiento $\alpha' \equiv l_s^2$ tiene unidades del cuadrado de una distancia y representa la inversa de la tensión de las cuerdas, mientras que introduce la escala de longitud fundamental l_s de la teoría.

La acción (23) describe un modelo σ no lineal en dos dimensiones. Si estamos interesados en el caso particular de cuerdas propagándose en la métrica AdS_3

$$ds^2 = l^2 d\phi^2 + l^2 e^{2\phi} d\gamma d\bar{\gamma} \quad (24)$$

y en presencia del campo antisimétrico de fondo

$$B = l^2 e^{2\phi} d\gamma \wedge d\bar{\gamma} \quad (25)$$

el modelo σ considerado deviene en

$$S = k \int d^2 z (\partial\phi\bar{\partial}\phi + \bar{\partial}\gamma\partial\bar{\gamma}e^{2\phi}) \quad (26)$$

donde hemos definido $k \equiv \frac{l^2}{\alpha'}$ y fijado el calibre conforme $h^{\alpha\beta} \equiv \delta^{\alpha\beta}$, mientras que las coordenadas en la hoja de mundo se han transformado según $z = e^{-\tau+i\sigma}$, $\bar{z} = e^{-\tau-i\sigma}$, $\partial = \frac{\partial}{\partial z}$, $\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. Recordemos que la métrica (24) representa el espacio tridimensional AdS_3 de curvatura $-\frac{2}{l^2}$.

La tensión de las cuerdas es usualmente utilizada como un parámetro en función del cual hacer un desarrollo perturbativo de la teoría. El ejemplo particular de la teoría de cuerdas formulada sobre el fondo curvo AdS_3 y en presencia de un campo antisimétrico B dado por (25) representa una solución exacta de las condiciones de invariancia conforme; es decir que esta es una teoría de cuerdas consistente más allá de los regímenes perturbativos en la tensión de la cuerda.

Introduciendo campos auxiliares $(\beta, \bar{\beta})$ podemos escribir la acción del modelo σ de las cuerdas sobre AdS_3 de la siguiente manera

$$S = k \int d^2 z (\partial\phi\bar{\partial}\phi + \beta\bar{\partial}\gamma + \bar{\beta}\partial\bar{\gamma} - \beta\bar{\beta}e^{-2\phi}) \quad (27)$$

En efecto, es posible verificar que dado que tanto β cuanto $\bar{\beta}$ no tienen término cinético, éstos actúan como multiplicadores de Lagrange y luego de integrar en ellos se recupera (26).

Las ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange describen la dinámica de la cuerda clásica en AdS_3 . Las soluciones asociadas a la acción (26) llevan a las soluciones clásicas de la teoría de cuerdas en AdS_3 ; éstas fueron encontradas en la referencia [24]; a saber

$$\phi = \ln(1 + b(z)\bar{b}(\bar{z})) + \rho(z) + \bar{\rho}(\bar{z}) \quad (28)$$

$$\gamma = a(z) + \frac{e^{-2\rho(z)}\bar{b}(\bar{z})}{1 + b(z)\bar{b}(\bar{z})} \quad (29)$$

$$\bar{\gamma} = \bar{a}(\bar{z}) + \frac{e^{-2\bar{\rho}(\bar{z})}b(z)}{1 + b(z)\bar{b}(\bar{z})} \quad (30)$$

siendo $a(z)$, $b(z)$ y $\rho(z)$ funciones holomorfas arbitrarias.

Diversas soluciones a estas ecuaciones han sido analizadas en la literatura. En [11] se estudió el aspecto geométrico de las soluciones clásicas de cuerdas enrolladas en AdS_3 . En dicho artículo se mostró que estas cuerdas se extienden en el cilindro¹³ AdS_{2+1} contrayéndose y expandiéndose, oscilando a medida que evolucionan en la dirección temporal t . En efecto, las superficies bidimensionales embebidas en AdS_{2+1} que representan las hojas de mundo de las soluciones clásicas de cuerdas ω veces enrolladas¹⁴ en torno al borde del espacio-tiempo¹⁵ son obtenidas mediante la revolución rígida con ω vueltas de las soluciones de geodésicas representando líneas de mundo de partículas clásicas en dicha variedad. De esta manera, las diferentes geometrías de las hojas de mundo que describen las ecuaciones clásicas de movimiento de las cuerdas en AdS_3 pueden separarse en dos clases; a saber:

- Las soluciones clásicas de cuerdas largas, que describen hojas de mundo embebidas en AdS_3 que se extienden llegando al borde del espacio-tiempo. Dichas hojas de mundo son superficies bidimensionales que corresponden a las figuras obtenidas a partir de considerar la revolución rígida en torno a la dirección angular de las geodésicas espaciales de AdS_3 .

¹³en clara referencia al sistema de coordenadas cilíndricas de AdS_3 euclideo.

¹⁴Notemos que ω es un número entero

¹⁵Como un ejemplo particular de una solución clásica representando cuerdas enrollándose en AdS_3 , podemos considerar el mapa $\gamma(z) = z^\omega$, el cual representa una cuerda enrollada ω veces en torno a AdS_3 .

- Las soluciones clásicas de cuerdas cortas, que describen hojas de mundo embebidas en AdS_3 que se extienden hasta un radio máximo finito (i.e. sin alcanzar el borde del espacio-tiempo). Estas superficies bidimensionales corresponden a pensar en la revolución rígida en torno a la dirección angular de las geodésicas temporales de AdS_3 .

Las soluciones clásicas de cuerdas en AdS_3 pueden llegar a contraerse hasta un punto en el centro del espacio si éstas tienen momento angular nulo; por el contrario, las soluciones con momento no nulo en la dirección angular θ se contraen hasta una longitud mínima distinta de cero.

La teoría cuántica se define como la integración funcional sobre los campos $\{\beta, \gamma, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \phi; h\}$ de la teoría a partir de la expresión formal

$$Z = \int D[\beta, \gamma, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \phi; h] e^{-\frac{S}{\hbar}} \quad (31)$$

considerándose aquí la teoría en el plano euclideo para que la integración sobre la métrica h esté bien definida y donde se denotó con $D[\beta, \gamma, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \phi; h]$ a la medida de integración de Dirac-Feynman sobre los campos [25], según

$$\int D[\beta, \gamma, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \phi; h] e^{-\frac{S}{\hbar}} \equiv \int D(\beta e^{-\phi}) D(\bar{\beta} e^{-\phi}) D(\gamma e^{\phi}) D(\bar{\gamma} e^{\phi}) D\phi D h e^{-\frac{S}{\hbar}}$$

Por su parte, la integración funcional sobre los campos¹⁶ $(\gamma, \bar{\gamma})$ dará origen a un determinante en la medida de integración funcional que puede ser escrito como un término exponencial de la forma e^{-S_Q} , siendo

$$S_Q = 2 \int d^2z \left(\partial\phi\bar{\partial}\phi + \frac{1}{8}\phi R \right) \quad (32)$$

por lo que redefiniendo el campo ϕ mediante la transformación

$$\phi \rightarrow \sqrt{\frac{2}{k-2}}\phi \quad (33)$$

¹⁶También nos será útil en las próximas secciones adoptar una notación más corta denominando a la medida de integración sobre los campos γ y β simplemente como $D^2\gamma D^2\beta \equiv D(\beta e^{-\phi}) D(\bar{\beta} e^{-\phi}) D(\gamma e^{+\phi}) D(\bar{\gamma} e^{+\phi})$.

llegamos a la siguiente acción efectiva para la teoría conforme cuántica (remitimos a las referencias [26, 25, 73] y las referencias en estos artículos para una detallada descripción)

$$S = \int d^2z [\partial\phi\bar{\partial}\phi - \frac{2}{\alpha_+}R\phi + \beta\bar{\partial}\gamma + \bar{\beta}\partial\bar{\gamma} - \beta\bar{\beta}e^{-\frac{2}{\alpha_+}\phi}]. \quad (34)$$

donde definimos $\alpha_+^2 \equiv 2k - 4$. Notemos que estos efectos cuánticos introducen un dilatón lineal $\Phi \sim \phi$. Redefiniendo el modo cero del campo $\phi \rightarrow \phi + a$ podemos introducir una constante de acoplamiento $\mu = e^{-\frac{2}{\alpha_+}a}$ en el último término, la cual no tiene relevancia física (al menos a nivel perturbativo). Es interesante mencionar que el término (32) es una corrección cuántica debida a la medida de integración $D[\beta, \gamma, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \phi; h]$, por lo que presenta un factor \hbar extra con respecto al término (27); esto hace que el factor k deba ser entendido en verdad como aquél que contiene tanto efectos cuánticos cuanto efectos propios de la curvatura en forma conjunta (*i.e.* sea $k \sim \frac{l^2}{\hbar^2}$). Notemos que bien podríamos decir que k representa el número de Reynolds del problema dado que es éste el único parámetro adimensional que relaciona las dos escalas de longitud intervinientes en la teoría.

Recordemos que en este sistema de coordenadas $\{\phi, \gamma, \bar{\gamma}\}$ el borde de AdS_3 está alojado en $\phi \rightarrow \infty$. Cerca de esta región, el término de interacción $\mu\beta\bar{\beta}e^{-\frac{2}{\alpha_+}\phi}$ se vuelve desdeñable y la teoría puede ser considerada como una teoría libre (*i.e.* la teoría de un campo escalar libre ϕ acoplado a la gravedad bidimensional mediante un acoplamiento con el escalar de curvatura y desacoplada a la teoría de campos libres del sistema de fantasmas (β, γ)) con una *pequeña perturbación*. De esta manera, nosotros describiremos la teoría utilizando una representación de campos libres [27, 28, 30, 31], y nuestros resultados deben ser entendidos como válidos *a priori* sólo para las regiones cercanas al borde. No obstante, nosotros mostraremos en esta tesis que nuestros resultados son exactos para todo el espacio AdS_3 más allá de la aproximación cercana al borde.

3.2 El modelo de Wess-Zumino-Novikov-Witten

3.2.1 Simetrías y álgebra de Kac-Moody $SL(2)_k$

En esta sección estableceremos el puente que permite unir el modelo σ no lineal que describe la propagación de las cuerdas sobre AdS_3 con la descripción algebraica de la teoría. La motivación principal es el hecho de que esta formulación permite una realización del espectro de las cuerdas y de toda la teoría conforme sobre la hoja de mundo de manera sistemática y en términos de un tratamiento algebraico.

La idea es notar que la acción (26) para el modelo σ no lineal es, de hecho, el modelo de Wess-Zumino-Novikov-Witten ($WZNW$) formulado sobre una variedad $H_3^+ = SL(2, C)/SU(2)$. Esto es, la teoría de cuerdas cerradas en AdS_3 es el modelo $WZNW$ sobre H_3^+ ; de manera análoga, la teoría de cuerdas sobre AdS_{2+1} es el modelo $WZNW$ sobre $SL(2, R)$.

La acción del modelo de Wess-Zumino-Novikov-Witten está dada por

$$S_{WZNW} = k \int_{\Sigma} d\sigma d\tau \delta^{\alpha\beta} Tr[(g^{-1}\partial_{\alpha}g)(g^{-1}\partial_{\beta}g)] + \frac{2}{3}k \int_V d^3x \epsilon^{ijk} Tr[(g^{-1}\partial_i g)(g^{-1}\partial_j g)(g^{-1}\partial_k g)] \quad (35)$$

donde g son campos que toman valores sobre el grupo de Lie semisimple G (*i.e.* elementos del grupo, $g \in G$); mientras que V es una bola tridimensional que encierra la variedad Σ ($\partial V \equiv \Sigma$). El traza $Tr[\dots]$ se toma sobre los índices de la representación. Las condiciones de contorno a imponer sobre estos campos que emulan las condiciones de contorno de cuerda cerrada son precisamente

$$g(0, \tau) \equiv g(2\pi p, \tau)$$

para todo $p \in \mathbf{Z}$. La métrica natural del grupo G está dada por

$$ds^2 = \frac{1}{2} Tr[(g^{-1}dg)^2] \quad (36)$$

Es usual definir, como antes, las coordenadas (z, \bar{z}) en el plano complejo. De esta manera, es posible demostrar que el modelo es una teoría conforme que posee invariancias

frente a las transformaciones

$$g \rightarrow gF(z) \quad (37)$$

$$g \rightarrow F(\bar{z})g \quad (38)$$

donde $F(z)$ es un elemento genérico del grupo G . Las corrientes asociadas a estas transformaciones de simetría están dadas por

$$J = J_a T^a = -\frac{k}{2}(\partial g)g^{-1} \quad (39)$$

$$\bar{J} = \bar{J}_a T^a = -\frac{k}{2}g^{-1}(\bar{\partial}g) \quad (40)$$

siendo los T^a los generadores del álgebra de Lie del grupo G . La función J puede ser desarrollada en su serie de Laurent

$$J^a(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^a z^{-n-1} \quad (41)$$

y análogamente para \bar{J} en términos de \bar{z} . Invirtiendo esta expresión obtenemos que los modos de Fourier de las corrientes son

$$J_n^a = \frac{1}{2\pi i} \oint J^a(z) \cdot z^n dz \quad (42)$$

Dichos modos cumplen el álgebra de Kac-Moody con extensión central de nivel k . Escribimos, así, el álgebra de la forma

$$[J_n^a, J_m^b] = i f^{abc} J_{n+m}^c + n \frac{k}{2} g^{ab} \delta_{n+m,0} \quad (43)$$

donde f^{abc} son las constantes de estructura del grupo G , los índices latinos son índices de grupo $a, b \in \{0, 1, 2 \dots \dim(G)\}$ y donde g^{ab} es la métrica de Cartan-Killing definida por

$$f_c^{ad} f_d^{cb} = Q g^{ab}$$

siendo Q un número positivo que se relaciona con el Casimir C del grupo por la igualdad

$$C = \frac{2}{Q} g_{ab}^a J^a J^b$$

A partir del álgebra (43) es posible definir los generadores L_n del álgebra de Virasoro de la manera siguiente:

$$L_n = \frac{g_{ab}}{(Q + 2k)} \sum_n : J_{-m}^a J_{n+m}^b : \quad (44)$$

los cuales cumplen el álgebra W_2 de Virasoro con extensión central; a saber

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{kd}{12(k - Q)} \delta_{n+m,0} (m^3 - m) \quad (45)$$

y pueden ser identificados con los modos de Fourier del tensor de energía-momentos de la teoría conforme según la construcción de Sugawara:

$$T(z) = \sum_n L_n z^{n-2} \quad (46)$$

Los generadores de Kac-Moody satisfacen el siguiente corchete con los generadores de Virasoro

$$[L_n, J_m^a] = -m J_{m+n}^a \quad (47)$$

Es pertinente en este punto hacer un comentario acerca de la relación entre lo aquí planteado y el caso de la propagación de cuerdas en el espacio-tiempo plano. Notemos que los modos cero de las corrientes J^a , denotados por J_0^a según nuestra nomenclatura, verifican el álgebra de Lie del grupo G

$$[J_0^a, J_0^b] = i f^{abc} J_0^c \quad (48)$$

lo que claramente significa que las isometrías del grupo G están incluidas en las transformaciones de simetría (37)-(38) generadas por el álgebra de Kac-Moody.

3.2.2 El modelo WZNW sobre la variedad de grupo $SL(2, R)$

El grupo $G = SL(2, R)$ es el grupo semisimple no compacto que está representado por las matrices cuadradas de dimensión 2 con coeficientes reales y determinante igual a 1. Éste es localmente isomorfo a $SU(1, 1)$, el cual es representado por las matrices unimodulares de dimensión 2 que mantienen invariante la forma hermítica minkowskiana. De esta manera, nos estamos centrando en el modelo que satisface $Q = 2$ y $c = \frac{3k}{k-2}$.

El álgebra de Lie de los generadores de esta variedad G puede ser escrita como

$$[J_3, J_-] = -J_- \quad (49)$$

$$[J_3, J_+] = J_+ \quad (50)$$

$$[J_-, J_+] = 2J_3 \quad (51)$$

que es, en efecto, la parte global del álgebra W_2 de Virasoro, *i.e.* el subálgebra generada por sus modos cero. El operador de Casimir está dado por

$$\hat{C} = J_3 J_3 - \frac{1}{2}(J_+ J_- + J_- J_+)$$

Una parametrización para representar al grupo es

$$g = \begin{pmatrix} l e^{it} \cosh \rho & e^{-i\theta} \sinh \rho \\ e^{i\theta} \sinh \rho & e^{-it} \cosh \rho \end{pmatrix} \quad (52)$$

que lleva a una forma para la métrica natural que viene a coincidir con la métrica del espacio AdS_{2+1} en las coordenadas cilíndricas descritas en la sección 2. De esta manera, podemos concluir en el siguiente corolario.

Corolario: *La acción que rige la dinámica de la hoja de mundo de la teoría de cuerdas en AdS_{2+1} puede escribirse como un modelo de Wess-Zumino-Novikov-Witten formulado sobre el grupo $SL(2, R)$.*

3.2.3 El modelo WZNW sobre el espacio cociente $SL(2, C)/SU(2)$

Por su parte, la variedad cociente H_3^+ se construye tomando módulo $H = SU(2)$ a la variedad de grupo $G = SL(2, C)$. Para ejemplificar esta construcción en términos de la parametrización particular que nos será útil en lo que sigue, digamos que el grupo $SL(2, C)$ puede ser escrito de la manera siguiente

$$g = \begin{pmatrix} e^\phi & \gamma e^\phi \\ \eta e^\phi & \gamma \eta e^\phi + e^{-\phi} \end{pmatrix} \quad (53)$$

y luego, tomar módulo $SU(2)$ en términos de esta parametrización significa someter a las variables $\{\gamma, \eta, \phi\}$ a los vínculos

$$\phi \in \mathbf{R} \quad (54)$$

$$\eta = \bar{\gamma} = \gamma^* \quad (55)$$

de esta manera, la métrica natural del cociente de grupos deviene en la métrica del espacio AdS_3 en coordenadas de Poincaré, presentadas en la sección anterior.

La teoría conforme formulada sobre $SL(2, C)/SU(2)$ y su versión lorentziana $SL(2, R)$ están, de suyo, relacionadas mediante una rotación de Wick. Esto nos llevará a presentar una construcción paralela de ambas teorías a lo largo de las próximas secciones. La relación entre el espectro de la teoría euclídeana y la teoría lorentziana en términos de las representaciones de los grupos $SL(2)$ ha sido estudiada recientemente en la referencia [13] ya en el contexto de la teoría de cuerdas sobre AdS_3 .

Corolario: *La acción que rige la dinámica de la hoja de mundo de la teoría de cuerdas en AdS_3 puede escribirse como un modelo de Wess-Zumino-Novikov-Witten formulado sobre el cociente $SL(2, C)/SU(2)$.*

3.2.4 El modelo WZNW sobre el espacio cociente $SL(2, R)/U(1)$

Una de las soluciones exactas más interesantes de la teoría de cuerdas, y la cual se relaciona íntimamente con la variedad AdS_3 , es el agujero negro bidimensional reportado por Witten en la referencia [3]. La métrica y el campo dilatónico de esta solución de agujero negro están dados por

$$ds^2 = k (-\tanh^2(r)dt^2 + dr^2) \quad (56)$$

$$\Phi = \Phi_0 - 2 \ln(\cosh(r)) \quad (57)$$

El escalar de curvatura de la solución es regular en toda la variedad y está dado por

$$R = \frac{4}{\cosh(r)}$$

Luego, definiendo las coordenadas de Kruskal de la forma

$$u_{\pm} \equiv \pm e^{\pm t} \sinh r$$

obtenemos la siguiente forma para la métrica y el dilatón de la solución de agujero negro

$$\begin{aligned} ds^2 &= k \frac{du_+ du_-}{1 - u_+ u_-} \\ \Phi &= \Phi_0 + \log(1 - u_+ u_-) \end{aligned}$$

que presenta el horizonte en $u_+ u_- = 0$ mientras que las singularidades pasadas y futuras han sido mapeadas en $u_+ u_- = 1$.

La constante de acoplamiento de la teoría de cuerdas $g = e^\Phi$ tiende a cero a medida que lo hace la coordenada r , mientras que alcanza el máximo acoplamiento $g_\infty = e^{\Phi_0}$ en el punto $r = 0$. La acción que describe la dinámica de la hoja de mundo sobre esta variedad es un modelo de Wess-Zumino-Novikov-Witten formulado sobre $SL(2, R)/U(1)$. El agujero negro tiene una masa μ dada en términos del valor de expectación del dilatón, según $\mu \sim g_\infty^{-2}$.

Si se efectúa una rotación de Wick en la coordenada temporal, según $t \rightarrow -i\theta$, obtenemos la geometría conocida con el nombre de *cigarro* de Witten,

$$ds^2 = k (\tanh^2(r) d\theta^2 + dr^2) \quad (58)$$

siendo θ una coordenada de período 2π . Esta geometría tiende a tener topología $\mathbf{R} \times S^1$ conforme r tiende a ∞ . La región de acoplamiento fuerte se aloja en la punta del cigarro semi-infinito, mientras que el acoplamiento débil se obtiene, como antes mencionamos, en el límite de grandes valores de r .

3.3 Teoría de campos conformes sobre $SL(2)$ y la representación de campos libres

El modelo de Wess-Zumino-Novikov-Witten formulado sobre $SL(2)$ presenta, como vimos, una simetría no compacta $SL(2, R)_k \otimes SL(2, R)_k$ generada por ciertas corrientes que denotamos $J^a(z)$ y $\bar{J}^a(\bar{z})$, siendo $a = 1, 2, 3$. En los párrafos que siguen discutiremos sólo la parte holomorfa de estas seis corrientes (*i.e.* las correspondientes a $J^a(z)$) dado que para la parte antiholomorfa las consideraciones son análogas.

Introduciendo la base compleja (J^\pm, J^3) definida de la siguiente manera

$$J^\pm = J^1 \pm iJ^2 \quad , \quad (J^\pm)^\dagger = J^\mp \quad (59)$$

el álgebra de Kac-Moody toma la siguiente forma

$$[J_m^3, J_n^3] = -\frac{k}{2}m\delta_{m+n,0} \quad (60)$$

$$[J_m^3, J_n^\pm] = \pm J_{m+n}^\pm \quad (61)$$

$$[J_m^\pm, J_n^\mp] = -2J_{m+n}^3 + km\delta_{m+n,0} \quad (62)$$

Este álgebra de corrientes $SL(2, R)$ puede ser descripta en términos de los campos libres (ϕ, β, γ) usando la representación de Wakimoto [32]

$$J^+(z) = \beta(z) \quad (63)$$

$$J^3(z) = -\beta(z)\gamma(z) - \frac{\alpha_+}{2}\partial\phi(z) \quad (64)$$

$$J^-(z) = \beta(z)\gamma^2(z) + \alpha_+\gamma(z)\partial\phi(z) + k\partial\gamma(z) \quad (65)$$

donde los propagadores están dados por

$$\langle\phi(z)\phi(w)\rangle = -\ln(z-w) \quad (66)$$

$$\langle\gamma(z)\beta(w)\rangle = -\frac{1}{(z-w)} \quad (67)$$

Es verdaderamente fácil ver que la expansión en producto de operadores de estos campos libres realizan el álgebra de Kac-Moody $SL(2, R)_k$, a saber

$$J^+(z)J^-(w) = \frac{k}{(z-w)^2} - \frac{2}{(z-w)}J^3(w) + \dots$$

$$J^3(z)J^\pm(w) = \pm\frac{1}{(z-w)}J^\pm(w) + \dots$$

$$J^3(z)J^3(w) = \frac{-k/2}{(z-w)^2} + \dots$$

La construcción de Sugawara permite obtener la siguiente expresión para el tensor de energía-momentos en términos de los cuadrados de las corrientes

$$T(z) = \beta(z)\partial\gamma(z) - \frac{1}{2}(\partial\phi(z))^2 - \frac{1}{\alpha_+}\partial^2\phi(z) \quad (68)$$

y, de esta manera, la carga central de la teoría viene dada por

$$c = \frac{3k}{(k-2)} \quad (69)$$

lo que implica que el valor del nivel k de Kac-Moody está fijado en $k = 52/23$ en el caso en el que la teoría de cuerdas es formulada sólo sobre la variedad AdS_3 (dado que debemos imponer la condición $c = 26$). En general, podría considerarse la teoría formulada sobre una variedad que contenga un espacio compacto interno \mathcal{N} (*i.e.* la teoría de cuerdas sobre el producto $AdS_3 \times \mathcal{N}$), y en ese caso se satisfaría $k > 52/23$ ya que la carga central de la teoría de cuerdas está dada por la relación $c = \frac{3k}{k-2} + c_{\mathcal{N}} \equiv 26$.

3.4 La conjetura de correspondencia de Maldacena AdS/CFT

Maldacena, unos cinco años atrás, propuso una fabulosa generalización de la relación existente entre teorías conformes y teorías de gravedad sobre espacios AdS . Ya en [19] Brown y Henneaux habían demostrado que las simetrías asintóticas¹⁷ de la teoría de Einstein tridimensional con constante cosmológica negativa están generadas por dos copias separadas del álgebra de Virasoro $W_2 \otimes W_2$ con carga central, las cuales definen una teoría de campos conforme bidimensional en el borde del espacio AdS_3 . Maldacena [40] conjeturó que toda teoría de gravedad sobre AdS_D es dual a una teoría de campos conforme CFT_{D-1} en el borde de tal espacio-tiempo.

Escudados tras estos dos resultados, Giveon, Kutasov y Seiberg construyeron en su artículo [23] los generadores de Virasoro de la teoría conforme dual que *vive* en el borde del espacio-tiempo para el caso de la teoría de cuerdas sobre AdS_3 . Para hacerlo, partieron de las corrientes que generan la simetría $SL(2) \times SL(2)$ de la teoría de manera de definir la parte global del álgebra, según

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= - \int dz J^3(z) \\ \mathcal{L}_{+1} &= - \int dz J^+(z) \end{aligned}$$

¹⁷*i.e.* las simetrías que dejan la forma asintótica de la métrica, mapeando geometrías con cierta forma asintótica en otras geometrías con el mismo límite.

$$\mathcal{L}_{-1} = - \int dz J^-(z)$$

para luego extender la realización y encontrar los modos de Virasoro restantes; a saber

$$\mathcal{L}_n = - \int dz [(n+1)J^3 \gamma^n + nJ^- \gamma^{n+1}] \quad (70)$$

Es posible verificar que estos operadores satisfacen el álgebra W_2 de Virasoro con extensión central dada por la carga

$$c = 6k\omega \quad (71)$$

donde ω está dado por $\omega = \frac{1}{2\pi i} \int dz \frac{\partial \gamma(z)}{\gamma(z)}$ y que, como antes mencionamos, corresponde al número de veces que las cuerdas largas se enrollan en torno al espacio-tiempo [23],[24],[41].

Los estados de la teoría conforme del borde tienen pesos conformes Δ que están relacionados con los estados de masa M de la teoría de cuerdas según la relación

$$\Delta = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4l^2 M^2} \quad (72)$$

Esta fórmula que da la relación entre los pesos conformes de la teoría del borde y la masa de los estados en AdS es típica de los ejemplos de correspondencia AdS/CFT .

La carga central de la teoría conforme del borde (71) es precisamente la carga central de Brown-Henneaux.

Por otro lado, el álgebra de isometrías $SL(2) \times SL(2)$ de la variedad AdS_3 es generada por las seis corrientes $J_0^\pm, J_0^3, \bar{J}_0^\pm$ y \bar{J}_0^3 , las cuales forman la parte global de las dos copias separadas (en el sentido del producto directo \otimes) del álgebra W_2 de Virasoro que genera las simetrías asintóticas de Brown-Henneaux-Maldacena (la teoría conforme espacio-temporal del borde). Esto es, podemos identificar $\int J_0^3 \sim \mathcal{L}_0$ y $\int J_0^\pm \sim \mathcal{L}_{\pm 1}$ (y algo análogo para la parte antiholomorfa) si entendemos que estos generadores pertenecen al conjunto infinito $\{\mathcal{L}_n\}$, que son los que satisfacen las relaciones de conmutación que definen al álgebra W_2 de Virasoro con carga central $c = \frac{3l}{2G} = 6k\omega$.

IV

4 El espectro de la teoría de cuerdas sobre AdS_3

Aquí, analizaremos el espectro de la teoría de cuerdas sobre AdS_3 en términos de las representaciones de $SL(2)$. Detallaremos el espacio de Fock del modelo, sus propiedades algebraicas y sus simetrías a efectos de dar una idea de la interpretación geométrica de los estados de cuerda sobre esta variedad.

4.1 El espectro de la teoría y las representaciones unitarias de $SL(2)_k$

El espectro de la teoría de cuerdas puede ser obtenido analizando los estados primarios del álgebra de Kac-Moody $SL(2, R)_k$. Estos estados están etiquetados por dos números cuánticos $|j, m\rangle$ que clasifican los estados de las representaciones del grupo $SL(2, R)$; a saber

$$C_0 |j, m\rangle = j(j+1) |j, m\rangle \quad (73)$$

$$J_0^3 |j, m\rangle = m |j, m\rangle \quad (74)$$

siendo $C_0 =: -\frac{1}{2}(J_0^+ J_0^- + J_0^- J_0^+) + J_0^3 J_0^3$: el Casimir (los subíndices refieren a los modos cero de las corrientes y sus derivados).

4.1.1 Los estados de la base: el vacío de excitaciones

Los estados fundamentales (primarios) del álgebra de Kac-Moody $|j, m\rangle$ satisfacen

$$J_n^a |j, m\rangle = 0, \quad n > 0$$

Y, de esta manera, la representación completa de la base $SL(2)$ puede ser construida actuando con los modos cero de las corrientes, a saber

$$J_0^+ |j, m\rangle = (j - m) |j, m + 1\rangle \quad (75)$$

$$J_0^- |j, m\rangle = (-j - m) |j, m - 1\rangle \quad (76)$$

Es posible, por su parte, restringir el conjunto de las representaciones del grupo a ser empleadas para formar el espectro pidiendo que los estados de la base sean autoadjuntos¹⁸ y unitarios. La condición de hermiticidad implica que tanto J_0^3 como \hat{C}_0 tengan un espectro real, *i.e.* $\{m \in \mathbf{R}, j \in \mathbf{R}\}$ o bien $\{m \in \mathbf{R}, j \in -\frac{1}{2} + i\mathbf{R}\}$.

Recordemos, por otro lado, que con la intención de tener una clara interpretación espacio-temporal de la variedad debemos considerar el recubrimiento universal de AdS_3 ; esto significa que debemos considerar el recubrimiento universal de las representaciones de $SL(2, \mathbf{R})$, lo cual deja más libertad en la elección de los estados $|j, m\rangle$. Si no consideramos el recubrimiento universal, por ejemplo, el número j debería estar cuantizado y restringido a ser un número semientero ($2j \in \mathbf{Z}$).

La unitariedad en las representaciones de la base (del álgebra $SL(2, \mathbf{R})$) demanda que [33, 34]

$$m(m \pm 1) - j(j + 1) \geq 0$$

Las representaciones unitarias y hermíticas del recubrimiento universal de $SL(2, \mathbf{R})$ pueden ser clasificadas de la siguiente manera:

- *La serie principal continua* \mathcal{C}_λ con $j = \frac{1}{2} \pm i\lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}$ y $m \in \mathbf{R}$;
- *La serie discreta* de peso máximo \mathcal{D}_j^+ con $m \in j - \mathbf{Z}_{\geq 0}$, $j \in \mathbf{R}$;
- *La serie discreta* de peso mínimo \mathcal{D}_j^- con $m \in -j - \mathbf{Z}_{>0}$, $j \in \mathbf{R}$;
- *La representación excepcional* \mathcal{E}_j restringida según $-\frac{1}{2} \leq j < 0$, $m \in \mathbf{R}$

¹⁸Esto significa, definir un conjunto de estados tal que sobre éste los operadores que generan las simetrías de la teoría se comporten como los operadores acotados hermíticos lo hacen.

- La representación trivial con $j = m = 0$.

Esta última es la única representación finito-dimensional dada la naturaleza no compacta de $SL(2, R)$.

4.1.2 Los estados excitados

Más allá de las representaciones de la base representando los estados fundamentales, los estados excitados de la teoría conforme sobre $SL(2)$ se construyen mediante la aplicación de los restantes modos de las corrientes $J_{n<0}^a$ sobre dichos estados primarios de Kac-Moody; estos nuevos módulos conforman las representaciones $\hat{\mathcal{D}}_j^\pm$ y $\hat{\mathcal{C}}_\lambda$. Así, un estado del L -ésimo nivel excitado $|j, m\rangle^L$ se construye según la forma genérica

$$|j, m\rangle^L = \sum_{p \in \mathbf{Z}} \delta_{(L - \sum_l n_l)} C_q^p \zeta_{a_1 a_2 \dots a_q} \prod_{l=1}^q J_{-n_l}^{a_l} |j, m - r_p\rangle$$

donde r_p es la cantidad de $a_l = (-)$ menos la cantidad de $a_l = (+)$ que aparecen entre las q corrientes J^{a_j} del p -ésimo paso de la sumatoria; siendo los $\zeta_{a_1 a_2 \dots a_m}$ componentes del tensor de polarización del estado mientras que los C_q^p son coeficientes numéricos.

Claramente, los modos J_n^a generalizan el concepto de los osciladores α_n^a de la teoría de cuerdas en el espacio de Minkowski. En efecto, en el límite $k \rightarrow \infty$, donde la curvatura relativa de AdS_3 tiende a cero y la carga c tiende al valor 3, obtenemos que el álgebra de Kac-Moody deviene en el conocido álgebra de los osciladores del espacio plano si identificamos

$$\alpha_n^a \equiv \frac{1}{\sqrt{k}} J_n^a$$

Luego, tengamos en cuenta que los estados de la teoría de cuerdas deben satisfacer los vínculos de Virasoro dados por

$$L_n |j, m\rangle^L = \delta_{n,0} |j, m\rangle^L \quad \forall n \geq 0$$

Estos vínculos implican que los estados son representados por campos primarios de peso conforme h dado por $h = 1$, lo que en términos de los números cuánticos del

álgebra se escribe como

$$-\frac{j(j+1)}{(k-2)} + L = 1 \quad (77)$$

al nivel de excitación L . Notemos que esta expresión es invariante ante la simetría de reflexión definida por la transformación $j \rightarrow -j - 1$ (y éste es un hecho que será de suma importancia en lo que sigue). De esta manera, considerando dicha simetría, uno puede restringir sus consideraciones a estados que pertenezcan bien al caso $j > -\frac{1}{2}$ o bien al caso $j < -\frac{1}{2}$.

Teniendo en cuenta que el Casimir desempeña el papel del cuadrado de la masa [34], podemos llegar a la conclusión que el espectro de masas está dado por

$$M^2 = \frac{\alpha_+^2}{2}(L - 1) \quad (78)$$

Así, vemos que el estado fundamental de la teoría es un taquión, el primer estado excitado corresponde a estados de masa cero y existe, en principio, una torre infinita de estados masivos, lo cual es propio de las teorías de cuerdas. Nuevamente, como en el caso de la teoría de cuerdas sobre el espacio-tiempo plano, obtenemos que el espectro de masas es equiespaciado.

El taquión de la teoría sobre AdS_3 (*i.e.* sin parte interna) tiene el índice j de la representación dado por $j = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{\sqrt{92}}$ y, por ende, pertenece a la serie principal continua. Por su parte, en el caso de existir un espacio compacto interno \mathcal{N} , la ecuación (77) se convertiría en

$$-\frac{j(j+1)}{k-2} + L + h_{\mathcal{N}} = 1 \quad (79)$$

siendo $h_{\mathcal{N}}$ la contribución al peso conforme propio de la teoría conforme compacta sobre \mathcal{N} .

4.1.3 El problema de la unitariedad y el teorema de no-fantasma

Un particular aspecto de la teoría de cuerdas sobre AdS_3 , y lo que conformó la principal motivación del estudio de este modelo hasta la formulación de la correspondencia AdS/CFT , es la presencia de estados de norma negativa en el espacio de Hilbert aun

después de que los vínculos de Virasoro son impuestos sobre los vectores de las representaciones de $SL(2)$. Esto es, al contrario de lo que ocurre en la teoría de cuerdas sobre el espacio plano, en el modelo sobre $AdS_3 \times \mathcal{N}$ las condiciones

$$\frac{3k}{k-2} + c_{\mathcal{N}} = c = 26 \quad (80)$$

$$L_{n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}} |j, m\rangle = \delta_{n,0} |j, m\rangle \quad (81)$$

no son lo suficientemente restrictivas como para eliminar *ipso facto* los estados de norma negativa del espectro. De esta manera, y como adelantamos en la introducción y enfatizamos en el párrafo anterior, el punto central del análisis de este modelo ha sido un estudio crítico de la construcción de un espectro de estados consistente con la interpretación de una teoría de cuerdas unitaria.

En un trabajo de unos pocos años atrás Evans, Gaberdiel y Perry [10] demostraron un teorema de no-fantasmas para la teoría de cuerdas sobre AdS_3 . Este teorema establece que si el número cuántico j de los estados pertenecientes a las representaciones discretas \mathcal{D}_j^\pm son restringidos por la condición

$$-1 < j < \frac{k-1}{2} \quad (82)$$

entonces todos los vectores del espacio de Hilbert tendrán norma no-negativa. Esto lleva a proponer en primera instancia que el espacio de Hilbert de la teoría esté compuesto por los estados

$$|j, m, \bar{m}\rangle = |j, m\rangle \otimes |j, \bar{m}\rangle \in \mathcal{H} \otimes \bar{\mathcal{H}} \quad (83)$$

siendo

$$\mathcal{H} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{k-1}{2}} dj (\mathcal{D}_j^+) \oplus \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{k-1}{2}} dj (\mathcal{D}_j^-) \oplus \int_{\mathbf{R}} d\lambda (\mathcal{C}_{j=-\frac{1}{2}+i\lambda}) \quad (84)$$

y sometiendo a los estados a las condiciones de contorno $j = \bar{j}$ y a las condiciones de Virasoro (81).

No transcribiremos aquí la demostración del teorema por tratarse de un resultado bien conocido entre los que están familiarizados con estos tópicos, y sólo remitiremos a la referencia original [10]. No obstante, podemos mencionar que la idea general de la

demostración del teorema, y sus ulteriores extensiones [11] y [12], tienen como estrategia primero mostrar que el módulo de estados sobre la variedad cociente $SL(2)/U(1)$ está libre de estados de norma negativa y luego se detalla cómo extender la construcción unitaria al considerar el factor $U(1)$ adicional. Entre otros aspectos de la teoría, éste proporciona una motivación para describir la teoría unitaria de cuerdas sobre AdS_3 como una teoría conforme sobre $SL(2)/U(1) \times U(1)$.

4.1.4 El vínculo de unitariedad débil y los niveles de excitación

El teorema de no-fantasmas, si bien resuelve el problema de los estados de norma negativa, trae aparejados nuevos inconvenientes a la hora de interpretar el modelo como una teoría de cuerdas. Por ejemplo, la cota sobre el número cuántico j implica una cota sobre el espectro de masas, o equivalentemente sobre el nivel permitido de excitación de la cuerda. Para ver esto en detalle basta notar que si se tiene en cuenta el límite de unitariedad impuesto por la cota $2j + 1 < k$ y considerando la condición de cáscara de masa $h = 1$ obtenemos que los estados de norma negativa pueden aparecer en el nivel de excitación L de la teoría si

$$L \geq 1 + \frac{k}{4}$$

condición necesaria que en términos de los parámetros de la teoría conforme sobre la variedad interna \mathcal{N} se escribe como

$$L = \frac{3c_{\mathcal{N}} - 72}{2c_{\mathcal{N}} - 46} - h_{\mathcal{N}}$$

siendo $h_{\mathcal{N}}$ la contribución al peso conforme del estado debido a la existencia de una variedad interna de carga central $c_{\mathcal{N}}$. Para el caso de la teoría de cuerdas formulada sólo sobre la variedad AdS_3 (*i.e.* $k = \frac{52}{23}$, $h_{\mathcal{N}} = 0$) los fantasmas pueden estar presentes en el espectro recién en el segundo nivel de excitación $L \geq 2$. De esta manera, las condiciones suficientes para obtener un espectro unitario implican una cota sobre L , lo que es poco natural en el contexto de la teoría de cuerdas. Por otro lado, en [38]

se mostró que la teoría resultante de considerar el espectro sometido al vínculo de unitariedad no es invariante modular, y en consecuencia el modelo no es consistente.

Una solución completa del problema de la unitariedad a efectos de obtener un modelo interpretable en términos de una teoría de cuerdas sobre AdS_3 , debe solucionar también este problema de no-naturalidad que está implícito en la cota sobre el espectro de la teoría.

Maldacena y Ooguri [11] solucionaron el problema al incluir nuevos estados en la descripción del espectro que no habían sido considerados anteriormente. Así, obtuvieron una teoría unitaria e invariante modular.

Estos nuevos estados introducidos en [11] describen cuerdas enrolladas. En términos de la descripción algebraica análoga a la presentada aquí, dichos estados están dados en términos de representaciones adicionales que se obtienen a partir de la aplicación de las operaciones de flujo espectral sobre las representaciones introducidas en las subsecciones anteriores.

La simetría de flujo espectral es un automorfismo del álgebra $SL(2)$ cuyas transformaciones están parametrizadas con un número entero ω y generan, a diferencia del caso análogo compacto $SU(2)$, nuevas representaciones. Así, los estados de estas nuevas representaciones serán identificados con los estados de cuerdas con ω enrollamientos. Veamos esto en detalle.

4.1.5 La simetría de flujo espectral

Pasemos ahora a estudiar un aspecto interesante de la teoría de cuerdas sobre AdS_3 . Recientemente, Maldacena y Ooguri remarcaron en su artículo [11] la relevancia de la simetría de *flujo espectral* en la descripción del espectro del modelo $WZNW$ sobre $SL(2)$. Dicha simetría del álgebra $SL(2)_k$ se manifiesta en la invariancia de los productos de Lie de los generadores del álgebra ante las siguientes transformaciones

$$J_n^3 \rightarrow \tilde{J}_n^3 = J_n^3 - \frac{k}{2}\omega\delta_{n,0} \quad (85)$$

$$J_n^\pm \rightarrow \tilde{J}_n^\pm = J_{n\pm\omega}^\pm \quad (86)$$

donde $\omega \in Z$. Consecuentemente, los coeficientes del desarrollo de Laurent del tensor de energía-momentos se transforman como

$$L_n \rightarrow \tilde{L}_n = L_n + \omega J_n^3 - \frac{k}{4} \omega^2 \delta_{n,0} \quad (87)$$

La simetría de flujo espectral es bien conocida en el contexto de las álgebras superconforme $SCA N = 2$ [60] así también como en el caso de modelos WZNW compactos. Clásicamente, el parámetro ω representa, según la interpretación presentada en [11], el número de veces que un estado de cuerda larga se *enrolla* en torno al borde del espacio AdS_3 . En el contexto de la teoría cuántica de cuerdas, es posible definir estados asintóticos de *cuerdas largas* cuyos números de enrollamiento pueden cambiar en un proceso de dispersión.

Las transformaciones de flujo espectral generan nuevas representaciones del álgebra $SL(2, R)_k$; en efecto, un autoestado $|\tilde{j}, \tilde{m}, \omega\rangle$ de los operadores \tilde{L}_0 y \tilde{J}^3 (obtenidos aplicando el flujo espectral sobre L_0, J^\pm y J^3 con parámetro ω) con sus autovalores dados por

$$\tilde{L}_0 |\tilde{j}, \tilde{m}, \omega\rangle = -\frac{\tilde{j}(\tilde{j}+1)}{(k-2)} |\tilde{j}, \tilde{m}, \omega\rangle \quad (88)$$

$$\tilde{J}^3 |\tilde{j}, \tilde{m}, \omega\rangle = \tilde{m} |\tilde{j}, \tilde{m}\rangle \quad (89)$$

es también un autoestado de los operadores de la base *original*¹⁹ L_0 y J^3 con autovalores dados por

$$L_0 |\tilde{j}, \tilde{m}, \omega\rangle = \left(-\frac{\tilde{j}(\tilde{j}+1)}{(k-2)} - \omega\tilde{m} - \frac{k}{4}\omega^2 \right) |\tilde{j}, \tilde{m}, \omega\rangle \quad (90)$$

$$J^3 |\tilde{j}, \tilde{m}, \omega\rangle = \left(\tilde{m} + \frac{k}{2}\omega \right) |\tilde{j}, \tilde{m}, \omega\rangle \quad (91)$$

lo que se ve fácilmente a partir de la definición de las transformaciones (85), (87).

De las relaciones (85) y (86) es fácil ver que un estado $|\tilde{j}, \tilde{m}, \omega\rangle$ primario de Kac-Moody de peso máximo de la representación \mathcal{D}_j^+ ante los generadores $\tilde{J}^{\pm,3}$ satisface

¹⁹Referidas en lo sucesivo como representaciones *standard*.

ante los $J^{\pm,3}$ lo siguiente

$$J_{n+\omega}^+ |\tilde{j}, \tilde{m}, \omega\rangle = 0 \quad (92)$$

$$J_{n-\omega-1}^- |\tilde{j}, \tilde{m}, \omega\rangle = 0 \quad (93)$$

para todo $n > 0$. De manera análoga, para un estado $|\tilde{j}, \tilde{m}\rangle$ primario de Kac-Moody que transforma en la representación $\mathcal{C}_j^{|\omega|}$ ante los generadores $\tilde{J}^{\pm,3}$ satisface

$$J_{n+\omega}^+ |\tilde{j}, \tilde{m}, \omega\rangle = 0 \quad (94)$$

$$J_{n-\omega}^- |\tilde{j}, \tilde{m}, \omega\rangle = 0 \quad (95)$$

para todo $n > 0$. Y respectivamente cambiando $+\omega$ por $-\omega$ para los casos de las representaciones \mathcal{D}_j^- y $\mathcal{C}_j^{|\omega|}$. Notemos la diferencia existente entre (93) y (95); ésta es la responsable del hecho de que a los estados de las representaciones continuas se les asignen [16] estados conjugados mediante el reemplazo de ω por $-\omega$ mientras que para los estados de las series discretas ω sea reemplazado por $-\omega - 1$.

Por otro lado, es fácil demostrar que un estado $|\tilde{j}, \tilde{m}, \omega\rangle$ primario del álgebra de Kac-Moody generada por los $\tilde{J}^{\pm,3}$ cumple

$$\left(J_0^3 - m - \frac{k}{2}\omega \right) |\tilde{j}, \tilde{m}, \omega\rangle = J_0^+ |\tilde{j}, \tilde{m}, \omega\rangle = 0 \quad (96)$$

para el caso $\omega > 0$, mientras que para $\omega < 0$ se tiene

$$\left(J_0^3 - m + \frac{k}{2}\omega \right) |\tilde{j}, \tilde{m}, \omega\rangle = J_0^- |\tilde{j}, \tilde{m}, \omega\rangle = 0 \quad (97)$$

Estas últimas identidades muestran que aún estados que transforman ante una representación continua del álgebra $SL(2)_k$ generada por $\tilde{J}^{\pm,3}$ pueden satisfacer la condición de estado de peso máximo $J_0^+ |\tilde{j}, \tilde{m}, \omega\rangle = 0$ o de peso mínimo $J_0^- |\tilde{j}, \tilde{m}, \omega\rangle = 0$.

4.1.6 Las cuerdas enrolladas en AdS_3 y el límite de unitariedad fuerte

El espacio de Hilbert de la teoría de cuerdas sobre AdS_3 puede ser consecuentemente extendido $\mathcal{H} \rightarrow \bigoplus_{\omega \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_\omega$ a efectos de incluir los estados $|\tilde{j}, \tilde{m}, \omega\rangle$ obtenidos mediante las operaciones de flujo espectral, estados que satisfacen la siguiente condición de

cáscara de masa (ante el L_0 de la base original que es el *verdadero* hamiltoniano de la teoría conforme)

$$(L_0 - 1) |\tilde{j}, \tilde{m}, \omega\rangle = \left(-\frac{\tilde{j}(\tilde{j} + 1)}{(k - 2)} - \omega\tilde{m} - \frac{k}{4}\omega^2 + L - 1 \right) |\tilde{j}, \tilde{m}, \omega\rangle = 0 \quad (98)$$

(es importante comparar (98) con la ecuación (77) y notar que es ahora posible considerar cotas al número cuántico \tilde{j} sin que esto represente una limitación sobre el nivel de excitación L). Las nuevas representaciones serán indicadas con la nomenclatura $\hat{\mathcal{D}}_{\tilde{j}}^{\pm, \omega}$ y $\hat{\mathcal{C}}_{\tilde{j}}^{\omega}$, siendo esto consistente con el flujo espectral de las representaciones discretas $\hat{\mathcal{D}}_{\tilde{j}}^{\pm, \omega=0} = \hat{\mathcal{D}}_{\tilde{j}}^{\pm}$ y continuas $\hat{\mathcal{C}}_{\tilde{j}}^{\omega=0} = \hat{\mathcal{C}}_{\tilde{j}}$ respectivamente. Estas *nuevas* representaciones también contienen estados de norma negativa, pero Maldacena y Ooguri [11] han extendido el teorema de Evans, Gaberdiel y Perry demostrando que restringiendo el spín \tilde{j} según $\tilde{j} < \frac{k}{2} - 1$ los vínculos de Virasoro remueven todos los fantasmas de la teoría. Más aun, para que el espectro sea cerrado ante la aplicación de las transformaciones de flujo espectral, la cota superior para el número cuántico \tilde{j} debe ser aún más estricta, según $\tilde{j} < \frac{k-3}{2}$. Para ver esto, debe notarse que existe una identidad entre algunas representaciones discretas, a saber $\hat{\mathcal{D}}_{\tilde{j}}^{\pm, \omega=\mp 1} = \hat{\mathcal{D}}_{\frac{k}{2}-2-\tilde{j}}^{\mp, \omega=0}$. Con esto, es posible ver que las transformaciones de flujo espectral mapean la cota inferior $-\frac{1}{2}$ en la cota superior $\frac{k-3}{2}$. De esta manera, los requerimientos de que el espectro no sea redundante ante la simetría de reflexión²⁰ y que sea, a su vez, cerrado ante las transformaciones de flujo espectral definen el límite de unitariedad fuerte

$$-\frac{1}{2} < \tilde{j} < \frac{k-3}{2} \quad (99)$$

Entonces, el espectro de la teoría de cuerdas sobre AdS_3 , según la propuesta de Maldacena y Ooguri, consiste en un producto directo de representaciones izquierdas y derechas tanto discretas cuanto continuas, *i.e.* $\hat{\mathcal{C}}_{\tilde{j}, L}^{\omega} \otimes \hat{\mathcal{C}}_{\tilde{j}, R}^{\omega} \oplus \hat{\mathcal{D}}_{\tilde{j}, L}^{\pm, \omega} \otimes \hat{\mathcal{D}}_{\tilde{j}, R}^{\pm, \omega} \oplus \hat{\mathcal{D}}_{\tilde{j}, L}^{\mp, \omega} \otimes \hat{\mathcal{D}}_{\tilde{j}, R}^{\pm, \omega}$ con el mismo parámetro de flujo espectral y $SL(2)$ -spín (*i.e.* $\omega = \bar{\omega}$ y $j = \bar{j}$, las cuales son requerimientos de la condición de cuerda cerrada); sumado esto a la imposición

²⁰Esto es así debido a que la cota inferior $\tilde{j} > -\frac{1}{2}$ excluye estados redundantes debidos a la presencia de la simetría $\tilde{j} \leftrightarrow -1 - \tilde{j}$.

del *límite de unitariedad fuerte* (99) sobre las representaciones discretas. De ahora en adelante omitiremos las tildes sobre los números cuánticos j y m .

Podemos describir el espectro de la siguiente manera: los estados de la teoría $|j, m, \bar{m}, \omega\rangle$ son

$$|j, m, \bar{m}, \omega\rangle = |j, m, \omega\rangle \otimes |j, \bar{m}, \omega\rangle \in \bigoplus_{\omega \in \mathbf{Z}} \mathcal{H}_\omega \otimes \bar{\mathcal{H}}_\omega \quad (100)$$

siendo

$$\mathcal{H}_\omega = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{k-3}{2}} dj (\mathcal{D}_j^{+, \omega}) \oplus \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{k-3}{2}} dj (\mathcal{D}_j^{-, \omega}) \oplus \int_{\mathbf{R}} d\lambda (\mathcal{C}_{j=-\frac{1}{2}+i\lambda}^\omega) \quad (101)$$

y sometiendo a los estados a las condiciones de contorno ($j = \bar{j}, \omega = \bar{\omega}$) y a las condiciones de Virasoro.

A diferencia de las representaciones unitarias irreducibles de $SL(2, R)$, las representaciones de $SL(2, C)/SU(2)$ están dadas sólo por la serie principal continua $\mathcal{C}_{j=-\frac{1}{2}+i\lambda}$ con $\lambda > 0$. De esta manera, los estados con j reales (propios de las representaciones discretas de $SL(2, R)$), aparecen en el modelo sobre $SL(2, C)/SU(2)$ como estados no normalizables. Así, los observables de la teoría euclideana $SL(2, C)/SU(2)$, cuando están éstos evaluados en valores reales de j , deben entenderse como las extensiones analíticas de dichas cantidades.

4.1.7 Sobre la relación entre la descripción algebraica y la interpretación geométrica de las cuerdas propagándose en AdS_3

Por último, luego de haber introducido los aspectos formales de la descripción algebraica del espectro, dediquémonos en esta subsección a discutir brevemente la interpretación geométrica de la teoría de cuerdas sobre AdS_3 .

Empecemos diciendo que dado que el grupo de isometrías de AdS_3 es precisamente $SO(2,2)$, los estados de la teoría de cuerdas sobre esta variedad, como vimos, son clasificados en términos de las representaciones de $SL(2) \otimes SL(2)$. Como mencionamos, dichas representaciones se indexan ²¹ con el número j que las caracteriza y

²¹usamos la terminología *indexar* que es característica en estos casos

son parametrizadas con otro número m que recorre el módulo de cada representación; también es necesaria la inclusión de un número entero ω que refiere a diferentes sectores del álgebra y que describe el número de enrollamientos del estado de cuerda respectivo. Esto es, es posible caracterizar los estados de cuerda como vectores de las representaciones de $SL(2) \otimes SL(2)$ parametrizados por $|j, m, \omega\rangle \otimes |j, \bar{m}, \omega\rangle$

Los modos cero del álgebra de corrientes $SL(2) \times SL(2)$ admiten una representación en términos de operadores diferenciables que; para las coordenadas cilíndricas, es posible realizar de la manera siguiente

$$J^3 - \bar{J}^3 = i \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (102)$$

$$J^3 + \bar{J}^3 = i \frac{\partial}{\partial t} \quad (103)$$

lo que lleva a interpretar a las cantidades $m + \bar{m}$ y $m - \bar{m}$ como la energía y el momento angular de los estados de cuerda respectivamente. Para los estados de cuerdas enrolladas (*i.e.* estados de cuerda que se enrollan ω veces en torno al borde de AdS_3) se encuentra que la energía de los estados está dada por la forma general $m + \bar{m} + k\omega$, lo cual es consistente con la interpretación de $m + \bar{m}$ como la energía cinética y de k como la tensión de la cuerda.

En términos geométricos, como ya mencionamos al describir cualitativamente las soluciones clásicas del modelo σ no lineal, el espectro de la teoría de cuerdas puede dividirse en dos sectores:

- Las cuerdas largas cuyo acoplamiento con el campo B permite que dichos estados lleguen clásicamente al borde²² del espacio-tiempo AdS_3 con un costo finito de energía. Estos estados de la cuerda tienen un espectro continuo de energías y, consecuentemente, están caracterizados por la serie principal continua del álgebra de corrientes $SL(2)_k$.

²²Esto establece la principal diferencia con la dinámica de una partícula en AdS_3 , la cual claramente no se acopla a la 2-forma B sino sólo a la métrica G .

- Las cuerdas cortas, cuyo espectro de energía está discretizado y sus hojas de mundo no llegan hasta el borde de AdS_3 , de manera similar a como las geodésicas de las partículas masivas retornan hacia el centro de AdS_3 luego de un intento fallido por escapar al borde. Estos estados pertenecen a las series discretas de $SL(2)_k$ y clásicamente son obtenidos revolucionando en torno al eje de AdS_3 las soluciones de geodésicas que describen las líneas de mundo de las partículas masivas.

V

5 Operadores de vértice y espacio de Hilbert

Describiremos aquí los operadores de vértice del modelo conforme sobre $SL(2)/U(1) \times U(1)$. Presentamos así el espacio de Hilbert de la teoría de cuerdas sobre AdS_3 y su realización en términos de campos libres.

5.1 Operadores de vértice en el modelo WZNW sobre $SL(2)$

Dediquémonos en esta sección a comentar algunos aspectos de los operadores de vértice y funciones de onda sobre la teoría euclídeana $SL(2, C)/SU(2) \equiv H_3^+$.

Los operadores de vértice son elementos indispensables para calcular funciones de correlación que describan amplitudes de dispersión en la teoría de cuerdas. Éstos representan los estados de cuerdas entrantes y salientes que interactúan en un proceso de dispersión determinado.

Los operadores de vértice de esta teoría pueden ser asociados a funciones diferenciables sobre la variedad hiperbólica H_3^+ , y pueden ser descompuestos en términos de representaciones de $SL(2) \times SL(2)$. Los operadores diferenciables son modos cero del álgebra. Una base normalizable para el espacio de Hilbert $L^2(H_3^+)$ está dada por [35, 74]

$$\Phi_j(z, x) = \frac{2j+1}{\pi} (|\gamma - x|^2 e^{\phi/\alpha_+} + e^{-\phi/\alpha_+})^{-2j-2} \quad (104)$$

donde $(x, \bar{x}) \in \mathbf{C}^2$ son variables complejas auxiliares que se introducen para caracterizar los vectores de las representaciones de $SL(2)$. Las representaciones con valores del $SL(2)$ -spín j y $-j - 1$ son equivalentes y consecuentemente las funciones $\Phi_j(z, x)$ y

$\Phi_{-j-1}(z, x)$ están relacionados mediante la igualdad

$$\Phi_j(z, x) = \frac{R(j)}{\pi} \int d^2y |x - y|^{-4j-4} \Phi_{-j-1}(z, y), \quad (105)$$

donde $R(j)$ es el coeficiente de reflexión, que verifica

$$R(j)R(-j-1) = -(2j+1)^2. \quad (106)$$

Estos operadores satisfacen la siguiente expansión en producto de operadores con las corrientes de $SL(2)$

$$J^+(z)\Phi_j(w, \bar{w}; x, \bar{x}) = -\frac{1}{(z-w)} \left(x^2 \frac{\partial}{\partial x} + 2jx + 2x \right) \Phi_j(w, \bar{w}; x, \bar{x}) + \dots \quad (107)$$

$$J^3(z)\Phi_j(w, \bar{w}; x, \bar{x}) = -\frac{1}{(z-w)} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + j + 1 \right) \Phi_j(w, \bar{w}; x, \bar{x}) + \dots \quad (108)$$

$$J^-(z)\Phi_j(w, \bar{w}; x, \bar{x}) = -\frac{1}{(z-w)} \frac{\partial}{\partial x} \Phi_j(w, \bar{w}; x, \bar{x}) + \dots \quad (109)$$

y, a partir de esta realización de las corrientes, es posible definir el siguiente ente algebraico

$$J(x; z) \equiv 2xJ^3(z) - J^+(z) - x^2J^-(z) \quad (110)$$

y una expresión similar para su contraparte antiholomorfa. Estos operadores también pueden ser escritos de manera familiar en términos de los campos de Wakimoto; a saber

$$J(x; z, \bar{z}) = k \left(|x - \gamma|^2 e^{\frac{2}{\alpha_+} \phi} \partial \bar{\gamma} + 2(x - \gamma) \partial \phi - \partial \gamma \right) \quad (111)$$

y una expresión análoga para la parte antiholomorfa. Utilizando estas cantidades podemos escribir la expansión en producto de operadores que representa al álgebra $SL(2) \times SL(2)$ de una forma más suscita; a saber

$$\begin{aligned} J(x; z)J(y; w) &= k \left(\frac{x-y}{z-w} \right)^2 + \frac{1}{(z-w)} \left((x-y)^2 \frac{\partial}{\partial y} + 2(x-y) \right) J(y; w) + \dots \\ J(x; z)\Phi_j(w, \bar{w}; y, \bar{y}) &= \frac{1}{(z-w)} \left((x-y)^2 \frac{\partial}{\partial y} - (2j+2)2(x-y) \right) \Phi_j(w, \bar{w}; y, \bar{y}) + \dots \end{aligned}$$

y de manera análoga para la parte antiholomorfa.

5.1.1 El límite cercano al borde

Dado que nosotros estamos primeramente interesados en estudiar el límite cercano al borde de AdS_3 (i.e. $\phi \rightarrow \infty$) donde la realización en términos de campos libres es válida, consideraremos los términos predominantes en valores grandes de ϕ . En efecto, la expansión de los campos Φ_j en torno a $\phi \approx \infty$ fue desarrollada en detalle en la referencia [41] donde se hizo hincapié en el hecho de que el comportamiento de las funciones (104) cambia conforme uno se aproxima al punto $j = -1/2$. Usando la siguiente representación para la delta de Dirac en dos dimensiones

$$\delta^{(2)}(\gamma - x) = \delta(\gamma - x)\delta(\bar{\gamma} - \bar{x}) = \frac{n-1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^{2n-2}}{(\varepsilon^2 + |\gamma - x|^2)^n} \quad (112)$$

podemos relacionar $n = 2j + 2$ y $\varepsilon = e^{-\frac{\phi}{\alpha_+}}$ y así obtener que para $\phi \rightarrow \infty$

$$\Phi_j(x, \bar{x}) \rightarrow e^{\frac{2i}{\alpha_+}\phi} \delta^{(2)}(\gamma - x) + \frac{2j+1}{\pi} |\gamma - x|^{-4j-4} e^{\frac{-2i-2}{\alpha_+}\phi} + \mathcal{O}(e^{\frac{1}{\alpha_+}j\phi}), \quad (113)$$

Es sencillo notar de esta última expresión que el primer término es el dominante para los valores $j > -1/2$ mientras que el segundo rige en la zona $j < -1/2$.

Definiendo la transformada de Fourier como

$$\mathcal{V}_{j,m,\bar{m}}(z, \bar{z}) = \int d^2x \Phi_j(x, \bar{x}) x^{j-m} \bar{x}^{j-\bar{m}}, \quad (114)$$

la cual permite relacionar la base de momentos (m, \bar{m}) definidos en función de la base de coordenadas complejas (x, \bar{x}) definidas, podemos transformar Fourier a ambos lados el límite cercano al borde (113)

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{j,m} &= \frac{1}{2j+1} \int d^2x |x|^{j-m} e^{\frac{2i}{\alpha_+}\phi} \delta^{(2)}(\gamma - x) + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int d^2x |x|^{j-m} |\gamma - x|^{-4j-4} e^{\frac{-2i-2}{\alpha_+}\phi} \end{aligned} \quad (115)$$

y, conociendo la fórmula integral

$$\int d^2y |y|^{2(j-m)} |1-y|^{2(-2-2j)} = \frac{\Gamma(1+j+m)\Gamma(1+j-m)\Gamma(-2j-1)}{\Gamma(-j-m)\Gamma(-j+m)\Gamma(2j+2)} \quad (116)$$

obtener finalmente

$$\mathcal{V}_{j,m,\bar{m}} = V_{j,m,\bar{m}} + (2j+1) \frac{\Gamma(j-m+1)\Gamma(j+\bar{m}+1)\Gamma(-2j-1)}{\Gamma(-j+\bar{m})\Gamma(-j-m)\Gamma(2j+2)} V_{-1-j,m,\bar{m}} \quad (117)$$

donde

$$V_{j,m,\bar{m}} = \gamma^{j-m} \bar{\gamma}^{j-\bar{m}} e^{\frac{2j}{\alpha_+} \phi}. \quad (118)$$

Es fácil ver a partir de la última expresión que la descripción en la base (m, \bar{m}) para el caso $j > -\frac{1}{2}$ y para valores grandes de ϕ está dada por la expresión

$$V_{j>-\frac{1}{2},m,\bar{m}} = \gamma^{j-m} \bar{\gamma}^{j-\bar{m}} e^{\frac{2j}{\alpha_+} \phi} \quad (119)$$

Notemos que la ecuación (114) está bien definida si $m - \bar{m} \in \mathbf{Z}$. Por otro lado, cabe mencionar que, excepto por un factor dependiente de j y de m , las dependencias de ambos términos en (117) están relacionadas por $j \leftrightarrow -j - 1$.

Estos operadores de vértice crean $SL(2)$ -estados a partir de su actuación sobre el vacío invariante $SL(2) \otimes SL(2)$; es decir

$$\lim_{z \rightarrow 0} V_{j,m,\bar{m}}^\omega(z, \bar{z}) |0\rangle = |j, m, \omega\rangle \otimes |j, \bar{m}, \omega\rangle$$

Por su parte, estos operadores de vértice incluirían una parte interna dada por $W_{(p_1, \dots, p_d)}$ en el caso de tratarse de una teoría formulada sobre una variedad $3 + d$ dimensional $AdS_3 \times \mathcal{N}_d$; se obtiene así que los operadores de vértice estarían dados por

$$V_{j,m,\bar{m}}^\omega(z, \bar{z}) \times W_{p_1, \dots, p_d}(z, \bar{z}) \quad (120)$$

Por otro lado, considerando la relación (105) es posible ver que

$$\mathcal{V}_{j,m,\bar{m}} = R(j) \frac{\Gamma(j-m+1)\Gamma(j+\bar{m}+1)\Gamma(-2j-1)}{\Gamma(-j+\bar{m})\Gamma(-j-m)\Gamma(2j+2)} \mathcal{V}_{-j-1,m,\bar{m}}, \quad (121)$$

Consecuentemente, el peso relativo entre ambos términos del operador de vértice está dado por

$$\mathcal{R}(j, m) = R(j) \frac{\Gamma(j-m+1)\Gamma(j+\bar{m}+1)\Gamma(-2j-1)}{\Gamma(-j+\bar{m})\Gamma(-j-m)\Gamma(2j+2)}. \quad (122)$$

El factor clásico $R(j) = 2j + 1$ es aquí reemplazado por el $R(j)$ genérico, el cual fue encontrado en las referencias [74, 42]

$$R(j) = (2j + 1) \left(\frac{\Gamma(1 - \rho)}{\Gamma(1 + \rho)} \right)^{2j+1} \frac{\Gamma(1 + (2j + 1)\rho)}{\Gamma(1 - (2j + 1)\rho)}, \quad (123)$$

donde $\rho = (2 - k)^{-1}$. Observemos que (123) se reduce al valor $2j + 1$ en el límite semiclásico $k \rightarrow \infty$.

Con estas consideraciones, la forma final del operador de vértice en el límite cercano al borde es

$$\mathcal{V}_{j,m,\bar{m}} = V_{j,m,\bar{m}} + \mathcal{R}(j, m) V_{-j-1,m,\bar{m}} \quad (124)$$

El primer término reproduce exactamente la forma conocida de la representación de Wakimoto del operador de vértice [?, 30], al que referiremos detalladamente cuando analicemos las interacciones en la teoría. En efecto, este término es dominante en el límite ϕ grande para las representaciones que satisfacen la cota $-1/2 < j$. No obstante, notemos que ambos términos contribuyen en pie de igualdad en los casos de las representaciones continuas, *i.e.* $j = -1/2 \pm i\lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}_{\neq 0}$, $m \in \mathbf{R}$, y por lo tanto la expresión completa ha de ser usada en tales casos.

Por otro lado, y siguiendo con la representación de las cantidades de movimiento de la teoría en términos de operadores diferenciales, tenemos que el operador d'alambertiano \square corresponderá a la representación diferencial del Casimir de $SL(2)$, por lo cual el cuadrado de la masa está dado explícitamente por la cantidad $j(j + 1)$. Llevando las analogías más allá de esto, se puede mostrar sin mayor dificultad que los operadores de vértice Φ_j satisfacen la ecuación de Klein-Gordon dada por

$$(\square + j(j + 1)) \Phi_j = 0 \quad (125)$$

lo que es consistente con la interpretación de Φ_j como operador de vértice del estado de cuerda cuyo cuadrado de la masa está dado por $j(j + 1)$.

Como puede verse directamente del desarrollo en la región de grandes valores de ϕ , la aparición de un término de la forma $\Phi_j(x, \bar{x}) \sim \delta(\gamma - x)\delta(\bar{\gamma} - \bar{x})$ sugiere la interpretación

natural de los operadores Φ_j como los operadores de una teoría de campos formulada sobre la variedad bidimensional de coordenadas (x, \bar{x}) que está situada en el borde de AdS_3 (borde que se parametriza precisamente con las variables $(\gamma, \bar{\gamma})$); esto es decir que (x, \bar{x}) aparecerán como las coordenadas de la variedad en la cual la CFT₂ dual está formulada; esto se relaciona directamente con aspectos de la conjetura de Maldacena a los cuales ya hemos hecho mención.

Analícemos algunos casos particulares de los operadores de vértice a continuación.

Operadores representando campos de spín $j = -1/2$: Por su parte, es inmediato ver de la expresión (117) que para el caso particular $j = -1/2$ existe una *resonancia* y el término dominante en la expansión es

$$\lim_{\phi \rightarrow \infty} \Phi_{-1/2} \sim \frac{\phi}{\alpha_+} \delta(\gamma - x) \delta(\bar{\gamma} - \bar{x}) e^{-\frac{\phi}{\alpha_+}} \quad (126)$$

Veamos esto en detalle: Como introdujimos anteriormente, los operadores de vértice están dados por [65]

$$\Phi_j(x, \bar{x}) = \frac{1}{\pi} \left(|\gamma - x|^2 e^{\frac{1}{\alpha_+} \phi} + e^{-\frac{1}{\alpha_+} \phi} \right)^{-2j-2} \quad (127)$$

donde se utilizó una normalización distinta que difiere de la anterior en un factor $2j+1$. En esta normalización, se tiene

$$\Phi_j(x, \bar{x}) \approx \frac{e^{\frac{2j}{\alpha_+} \phi}}{2j+1} \delta^{(2)}(\gamma - x) + \frac{1}{\pi} |\gamma - x|^{-4j-4} e^{-\frac{2j+2}{\alpha_+} \phi} + O(e^{-\frac{2(j+2)}{\alpha_+} \phi}) \quad (128)$$

En el caso $j = -\frac{1}{2}$, tanto $e^{\frac{2j}{\alpha_+} \phi}$ cuanto $e^{-\frac{2j+2}{\alpha_+} \phi}$ son términos dominantes cerca del borde de AdS_3 y se está frente a una *resonancia*. En efecto, será muy útil para nuestro análisis futuro estudiar el comportamiento para la región $\phi \approx \infty$ en este caso particular. Para hacerlo, comencemos desde la representación continua $j = -\frac{1}{2} + i\varepsilon$ y luego tomemos el límite $\varepsilon \rightarrow 0$. Así, para valores grandes de ϕ obtenemos

$$\Phi_{-\frac{1}{2}+i\varepsilon}(x) \approx \frac{e^{\frac{-1+2i\varepsilon}{\alpha_+} \phi}}{2i\varepsilon} \delta^{(2)}(\gamma - x) + \frac{1}{\pi} |\gamma - x|^{-2-4i\varepsilon} e^{\frac{-1-2i\varepsilon}{\alpha_+} \phi} + O(e^{-\frac{1}{2\alpha_+} \phi}) =$$

$$= \frac{1}{2i\varepsilon} \left(1 + \frac{2i\varepsilon}{\alpha_+} \phi + O(\varepsilon^2 \phi^2) \right) e^{-\frac{\phi}{\alpha_+}} \delta^{(2)}(\gamma - x) + \frac{1}{\pi} |\gamma - x|^{-2-4i\varepsilon} e^{-\frac{1+2i\varepsilon}{\alpha_+} \phi} \quad (129)$$

Es posible transformar Fourier esta expresión para obtener la representación en términos de la base de momentos (m, \bar{m}) definidos para el operador prelogarítmico $\Phi_{-\frac{1}{2}}$. Es interesante notar que el término $\frac{1}{2i\varepsilon}$ es cancelado por otra contribución $-\frac{1}{2i\varepsilon}$ que viene de la transformada de Fourier de $\frac{1}{\pi} |\gamma - x|^{-2}$. Así, usando nuevamente la integral

$$\int d^2x |x|^{-2r} |1 - x|^{-2s} = \pi \frac{\Gamma(1-r)\Gamma(1-s)\Gamma(r+s-1)}{\Gamma(r)\Gamma(s)\Gamma(2-r-s)} \quad (130)$$

es posible escribir

$$\begin{aligned} V_{-\frac{1}{2}+i\varepsilon, m, \bar{m}} &\approx \left(\frac{1}{2i\varepsilon} + \frac{\phi}{\alpha_+} \right) \gamma^{-\frac{1}{2}+i\varepsilon-m} \bar{\gamma}^{-\frac{1}{2}+i\varepsilon-\bar{m}} e^{-\frac{\phi}{\alpha_+}} + \\ &+ \left(-\frac{1}{2i\varepsilon} - \zeta \right) \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + m + i\varepsilon)\Gamma(\frac{1}{2} - \bar{m} + i\varepsilon)}{\Gamma(1 + 2i\varepsilon)\Gamma(\frac{1}{2} + m - i\varepsilon)\Gamma(\frac{1}{2} - \bar{m} - i\varepsilon)} \gamma^{-\frac{1}{2}-i\varepsilon-m} \bar{\gamma}^{-\frac{1}{2}-i\varepsilon-\bar{m}} e^{-\frac{\phi}{\alpha_+}} + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (131)$$

donde ζ es la constante de Euler-Mascheroni. Tomando el límite ε yendo a cero, obtenemos

$$V_{-\frac{1}{2}, m, \bar{m}} = \left(\frac{2\phi}{\alpha_+} + \ln \gamma - \zeta \right) \gamma^{-\frac{1}{2}-m} \bar{\gamma}^{-\frac{1}{2}-\bar{m}} e^{-\frac{\phi}{\alpha_+}} \quad (132)$$

Esta expresión debe ser entendida como la representación de campos libres del operador de vértice en el caso $j = -\frac{1}{2}$. Efectivamente, esta descripción de $\Phi_{-\frac{1}{2}}$ es una respuesta acabada a la pregunta efectuada en la referencia [66] acerca de la existencia de operadores con la forma $\Phi \sim \phi e^{-\frac{\phi}{\alpha_+}}$ en el modelo $WZNW$ sobre grupos no compactos.

Es también importante recordar que si los efectos cuánticos (correcciones por efectos del régimen de valores finitos de k) son tenidos en cuenta [65], entonces la forma funcional del operador de vértice a ser considerado es

$$\Phi_{-\frac{1}{2}+i\varepsilon}(x) \approx \frac{e^{-\frac{1+2i\varepsilon}{\alpha_+} \phi}}{2i\varepsilon} \delta^{(2)}(\gamma - x) + \frac{R(j)}{2j+1} |\gamma - x|^{-2-4i\varepsilon} e^{-\frac{1-2i\varepsilon}{\alpha_+} \phi} + O(e^{-\frac{1}{2\alpha_+} \phi})$$

habiendo introducido el coeficiente de reflexión en la expansión de ϕ grande directamente en la forma de la función de onda. Así, en este caso, es posible ver que el resultado (132) es recobrado en el límite $\varepsilon \rightarrow 0$.

Es importante mencionar que la representación (132) tiene una expansión en producto de operadores diagonal con respecto a la corriente J^3 , lo que debe ser contrastado con los resultados de la referencia [18]; en dicho trabajo se estudio en detalle el caso particular $j = -\frac{1}{2}$ mostrando que los diferentes órdenes de la expansión en potencias de ϕ restituyen la estructura diagonal del producto de operadores con el álgebra de corrientes.

Operadores representando campos de spín $j = -1$: Sigamos analizando los casos particulares de la forma funcional del límite cercano al borde de los operadores de vértice. Notemos que los operadores (104) tienen un comportamiento peculiar en el caso particular $j = -1$, para el cual $\Phi_j(x, \bar{x})$ es simplemente una constante

$$\Phi_{j=-1} = -\frac{1}{\pi} \quad (133)$$

Claramente este campo representa, salvo un factor numérico, al operador identidad. En efecto, es un campo de peso conforme nulo en la CFT de la hoja de mundo. No obstante, es importante mencionar que no es éste el único campo primario de la teoría con esta propiedad conforme; en la referencia [25], Satoh *et al.* mostraron que otro operador con las propiedades conformes de la identidad está dado por²³

$$\hat{\Phi}_{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+2)} e^{-\frac{2(n+1)}{\alpha_+}\phi} \partial_\gamma^n \partial_{\bar{\gamma}}^n (\delta^{(2)}(\gamma-x)) \quad (134)$$

Podemos transformar Fourier esta expresión y así obtener

$$\begin{aligned} \hat{V}_{-1,m,\bar{m}} &= \lim_{j \rightarrow -1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+2)} e^{-\frac{2(n+1)}{\alpha_+}\phi} \partial_\gamma^n \partial_{\bar{\gamma}}^n \int d^2x x^{j-m} \bar{x}^{j-\bar{m}} \delta^{(2)}(\gamma-x) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+2)} e^{-\frac{2(n+1)}{\alpha_+}\phi} \frac{\Gamma(-1-m)\Gamma(-1-\bar{m})}{\Gamma(-1-m-n)\Gamma(-1-\bar{m}-n)} \gamma^{j-m-n} \bar{\gamma}^{j-\bar{m}-n} \end{aligned} \quad (135)$$

²³En el artículo de Satoh, la notación elegida para este estado es $\hat{\Phi}_0$ en lugar de la elegida aquí $\hat{\Phi}_{-1}$. Esto se debe a que el spín j de su nomenclatura corresponde a nuestros valores $-1-j$.

Así, quedándonos con el término predominante $n = 0$ en la expansión de grandes valores de ϕ , obtenemos

$$\hat{V}_{-1,m,\bar{m}} \approx \gamma^{-1-\bar{m}} \bar{\gamma}^{-1-\bar{m}} e^{-\frac{2}{\alpha_+} \phi} \quad (136)$$

que efectivamente tiene las propiedades conformes de la identidad para el caso $m = \bar{m} = 0$ (*i.e.* satisface tener peso conforme y autovalor de la corriente J^3 nulos). Así, será útil para un desarrollo ulterior introducir la siguiente notación para este estado particular con las propiedades conformes del operador identidad

$$\tilde{L}_s = \hat{V}_{-1,0,0} \approx \gamma^{-1} \bar{\gamma}^{-1} e^{-\frac{2}{\alpha_+} \phi} \quad (137)$$

que es, en efecto, el operador reflejado ante la transformación $j \longleftrightarrow -1 - j$ del estado $V_{j=0,m=0}$, operador que también comparte las propiedades conformes de la identidad. La importancia de los operadores de peso nulo se hará manifiesta cuando tratemos la representación integral de las funciones de correlación al tratar la interacción de cuerdas enrolladas en AdS_3 .

5.2 Operadores de vértice en el modelo WZNW sobre $\frac{SL(2)}{U(1)} \times U(1)$

Para entender la simetría de flujo espectral y eventualmente proponer una realización del espectro que nos permita representar los operadores de la teoría analizaremos previamente dicha simetría en el contexto de las teorías conformes supersimétricas $N=2$. Hacer esto nos proveerá de las analogías necesarias para encontrar una representación en términos de campos libres para las cuerdas enrolladas sobre AdS_3 .

5.2.1 Preliminares: Analogía con el álgebra superconforme $N=2$

Como mencionamos anteriormente, la simetría de flujo espectral ha sido extensamente estudiada en el contexto de las teorías superconformes $N=2$ bidimensionales. Discutamos aquí brevemente este caso. El álgebra superconforme $N=2$ contiene, además de los generadores de Virasoro L_n , dos supercargas fermiónicas G_n^\pm y una corriente

J generadora de la simetría $U(1)$ con coeficientes de Laurent J_n . El isomorfismo del álgebra generada por (L_n, G_n^\pm, J_n) y por su versión obtenida mediante el flujo espectral $(\tilde{L}_n, \tilde{G}_n^\pm, \tilde{J}_n)$ puede ser interpretado en términos del producto de alguna teoría formulada sobre un espacio cociente cuya carga central es $c - 1$ en adición a un campo escalar libre φ el cual realiza la corriente $U(1)$. En efecto, los generadores $N=2$ se descomponen en dos sectores mutuamente conmutantes, uno de los cuales puede ser expresado en términos de los parafermiones definidos por Zamolodchikov y Fateev en [61] y el otro en términos del campo escalar φ . Esta observación lleva a establecer una relación entre las representaciones de $N=2$ y las correspondientes al álgebra $SU(2)$.

La generalización de este mapa entre estructuras algebraicas fue extendido para el caso $c > 3$ en la referencia [49] considerando el grupo no compacto $SL(2, R)$ y los parafermiones correspondientes introducidos en [62]. A continuación escribiremos dicha realización para los generadores del álgebra superconforme $N=2$ de carga central c , la cual está definida por la siguiente expansión en producto de operadores

$$J(z)J(w) = \frac{c/3}{(z-w)^2} + \dots \quad (138)$$

$$J(z)G^\pm(w) = \pm \frac{G^\pm(w)}{(z-w)} + \dots \quad (139)$$

$$G^+(z)G^-(w) = \frac{2c/3}{(z-w)^3} + \frac{2J(w)}{(z-w)^2} + \frac{(2T(w) + \partial_w J(w))}{(w-z)} + \dots \quad (140)$$

$$G^\pm(z)G^\pm(w) = \dots \quad (141)$$

$$T^c(z)T^c(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{T^c(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T^c(w)}{(z-w)} + \dots \quad (142)$$

donde, como es usual, los puntos suspensivos denotan términos regulares en la cantidad $(z-w)$. Así, la realización mencionada arriba involucra la representación siguiente para los generadores

$$G^\pm(z) = \sqrt{\frac{2c}{3}} \psi^\mp(z) e^{\pm i \sqrt{\frac{3}{c}} \varphi(z)} \quad (143)$$

$$J(z) = i \sqrt{\frac{c}{3}} \partial \varphi(z) \quad (144)$$

$$T^c(z) = T^{c-1}(z) - \frac{1}{2} (\partial \varphi(z))^2 \quad (145)$$

donde el sistema de parafermiones (ψ^+, ψ^-) y el campo escalar φ satisfacen las siguientes expansiones en productos de operadores

$$\psi^-(z)\psi^+(w) = (z-w)^{3\frac{(1-e)}{c}} \left(1 + \frac{3}{c}(z-w)^2 T^{c-1}(w) + \dots \right) \quad (146)$$

$$\psi^-(z)\psi^-(w) = \mathcal{O}\left((z-w)^{1-\frac{3}{c}}\right) + \dots \quad (147)$$

$$\varphi(z)\varphi(w) = -\ln(z-w) + \dots \quad (148)$$

$$T^{c-1}(z)T^{c-1}(w) = \frac{(c-1)/2}{(z-w)^4} + \frac{T^{c-1}(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T^{c-1}(w)}{(z-w)} + \dots \quad (149)$$

las cuales definen el Z -álgebra de los campos parafermiónicos. Análogamente, el álgebra $SL(2, R)_k$ admite también una realización en términos de los campos parafermiónicos, a saber

$$J(z)^\pm = \sqrt{k}\psi(z)^\mp e^{\pm\sqrt{\frac{3}{c}}\varphi(z)} \quad (150)$$

$$J(z)^3 = -\sqrt{\frac{k}{2}}\partial\varphi(z) \quad (151)$$

que reproducen los OPE's correspondientes.

Claramente estas realizaciones de campos parafermiónicos de las álgebras dejan ver la existencia de una estrecha relación entre ambas teorías. Las analogías entre sendas construcciones se utilizarán en la próxima subsección para representar la teoría de cuerdas sobre AdS_3 y serán ampliadas más adelante cuando discutamos algunos aspectos de la teoría supersimétrica sobre la hoja de mundo.

5.2.2 La teoría de cuerdas como el producto $\frac{SL(2)}{U(1)} \times U(1)$

Aquí, con la intención de implementar una construcción análoga en la teoría de cuerdas sobre AdS_3 proponemos considerar, como sugiere naturalmente el estudio de las teorías $N=2$, la variedad cociente $SL(2, R)/U(1)$ (que tiene carga central $c-1$, si c es la carga del álgebra W_2 de Virasoro formada por las corrientes de Kac-Moody de $SL(2)$) agregando un bosón escalar libre $Y(z)$ para realizar la corriente $U(1)$. El campo $Y(z)$ tiene signatura temporal, *i.e.* su propagador está dado por $\langle Y(z)Y(w) \rangle = +\ln(z-w)$,

y forma una representación de la corriente J^3 según

$$J(z)^3 \equiv -i\sqrt{\frac{k}{2}}\partial Y(z) \quad (152)$$

Así, para realizar la teoría sobre el producto²⁴ entre el factor $U(1)$ representado por el campo libre $Y(z)$ y el factor $SL(2)/U(1)$, sólo nos resta describir la realización de los operadores de vértice para la teoría sobre el agujero negro de Witten. En efecto, nosotros haremos uso de la descripción de campos libres desarrollada para describir el modelo sobre $SL(2)/U(1)$ que representa la teoría de cuerdas sobre el agujero negro bidimensional de Witten, que ha sido discutida en la literatura [79, 55, 56].

El procedimiento para tomar módulo²⁵ el subgrupo $U(1)$ fue introducido primeramente en las referencias [79, ?]. Éste consiste en agregar un bosón escalar libre $X(z)$ y un sistema fermiónico de fantasmas (b, c) con los propagadores correspondientes

$$\langle X(z)X(w) \rangle = -\ln(z-w) \quad ; \quad \langle c(z)b(w) \rangle = \frac{1}{z-w} \quad (153)$$

Interesándonos en el caso euclideo (*i.e.* la geometría del cigarro), el bosón $X(z)$ es compacto con un radio dado por $R = \sqrt{\frac{k}{2}}$. La carga nilpotente BRST de esta simetría es

$$Q^{U(1)} = \int_{C_0} c(J^3 - i\sqrt{\frac{k}{2}}\partial X) \quad (154)$$

y el tensor de energía-momentos de la teoría $SL(2)/U(1)$ tiene la forma

$$T_{SL(2)/U(1)} = T_{SL(2)} - \frac{1}{2}\partial X\partial X - b\partial c \quad (155)$$

donde $T_{SL(2)}$ es el tensor para el modelo $SL(2)$ discutido anteriormente.

²⁴Nosotros emplearemos la representación de campos libres para el modelo WZNW sobre $SL(2, C)/SU(2)$; éste representa la teoría de cuerdas sobre la versión euclidea de AdS_3 . No obstante, los estados de la teoría conforme sobre $SL(2, R)$ serán representados por estados no-normalizables del modelo euclideo. Por ejemplo, en el capítulo 6 introduciremos representaciones de campos libres para estados de peso máximo que corresponden a las representaciones normalizables de $SL(2, R)$ y no a las de $SL(2, C)/SU(2)$, en estos casos, asumiremos la extensión analíticas de las expresiones obtenidas en el modelo euclideo a efectos de incluir en la descripción los estados no normalizables.

²⁵Aquí usamos la expresión propia de la jerga matemática *tomar módulo* para lo que usualmente en física teórica se denomina con el anglicismo *to gauge*.

Los campos primarios de la teoría cociente $\Psi_{j,m}(z)$ deben ser invariantes ante la simetría generada por la carga $Q^{U(1)}$. Éstos están dados por [30]

$$\Psi_{j,m}(z) = \gamma^{j-m} e^{\frac{2i}{\alpha_+} \phi} e^{i\sqrt{\frac{2}{k}} m X} \quad (156)$$

y sus pesos conformes son

$$h = -\frac{j(j+1)}{k-2} + \frac{m^2}{k} \quad (157)$$

En la teoría conforme sobre el cigarro, los autovalores (m, \bar{m}) de los operadores (J_0^3, \bar{J}_0^3) se encuentran sobre la retícula definida por los enteros $(p, \omega) \in \mathbf{Z}^2$ de la siguiente manera

$$m = \frac{1}{2}(p + \omega k) \quad ; \quad \bar{m} = -\frac{1}{2}(p - \omega k) \quad (158)$$

donde p representa el momento discreto de la cuerda a lo largo de la dirección angular θ y ω es el número de enrollamientos de la cuerda a lo largo de dicha dirección periódica. La suma $m + \bar{m} = \omega k \in k\mathbf{Z}$ y la diferencia $m - \bar{m} \in \mathbf{Z}$. Esto debe ser contrastado con lo que ocurre en el caso $SL(2, R)$ donde $m + \bar{m} + k\omega$ no está cuantizado. En efecto, en AdS_3 la cantidad $m + \bar{m}$ es la energía de la cuerda en el espacio-tiempo, cuyos valores pueden ser discretos para las cuerdas cortas ($\hat{\mathcal{D}}_j^\pm$) o continuos para las cuerdas largas ($\hat{\mathcal{C}}_j$).

El tensor de energía-momentos de la teoría completa sobre el producto $SL(2)/U(1) \times U(1)$ toma la forma

$$T = \beta \partial \gamma - \frac{1}{2} (\partial \phi)^2 - \frac{1}{\alpha_+} \partial^2 \phi - \frac{1}{2} (\partial X)^2 - b \partial c + \frac{1}{2} (\partial Y)^2 \quad (159)$$

Así, un campo primario con carga m ante J^3 puede ser escrito como

$$V_{j,m} = \Psi_{j,m} e^{i\sqrt{\frac{2}{k}} m Y(z)} \quad (160)$$

donde $\Psi_{j,m}$ es un campo primario neutro ante J^3 de la teoría cociente $SL(2)/U(1)$ con peso conforme

$$\Delta(\Psi_{j,m}) = -\frac{j(j+1)}{k-2} + \frac{m^2}{k}. \quad (161)$$

En términos de los campos libres de Wakimoto es posible escribir los operadores de vértice correspondientes de la forma

$$V_{j,m} = \gamma^{j-m} e^{\frac{2i}{\alpha_+} \phi} e^{i\sqrt{\frac{2}{k}} m X} e^{i\sqrt{\frac{2}{k}} m Y(z)}. \quad (162)$$

Tomando en cuenta el flujo espectral, para cada campo $V_{j,m}^\omega$ en el sector $\omega = 0$ es posible escribir un campo en los sectores de ω genérico según

$$V_{j,m}^\omega = \gamma^{j-m} e^{\frac{2i}{\alpha_+} \phi} e^{i\sqrt{\frac{2}{k}} m X} e^{i\sqrt{\frac{2}{k}} (m+\omega k/2) Y(z)} \quad (163)$$

Estos estados tendrán un peso conforme dado por

$$h = -\frac{j(j+1)}{k-2} - m\omega - \frac{k\omega^2}{4} \quad (164)$$

y, por otro lado, tendrán todas las propiedades conformes para ser considerados operadores de vértice en la representación de campos libres de la teoría de cuerdas en AdS_3 .

El método general propuesto para construir la teoría es, entonces, comenzar con operadores locales que crean estados de $SL(2)$ y tomar módulo $U(1)$ removiendo las cargas ante J^3 mediante la inclusión del bosón X . Una vez construidos los módulos unitarios para la teoría del cociente nos es posible combinarlos con el espacio de estados de un bosón temporal libre $Y(z)$ a efectos de construir representaciones unitarias de la teoría de cuerdas sobre $\frac{SL(2)}{U(1)} \times U(1)$. Consecuentemente, los operadores de vértice son un producto directo de un operador en el cociente $SL(2)/U(1)$ y un operador en la teoría del campo escalar $Y(z)$ que representa una dirección temporal.

En este contexto de la inclusión de campos auxiliares $X(z)$ e $Y(z)$, las corrientes de $SL(2)/U(1) \times U(1)$ quedan representadas por

$$J^\pm(z) \rightarrow J^\pm(z) \cdot e^{\mp i\sqrt{\frac{2}{k}} (X(z)+Y(z))} \quad (165)$$

De esta manera, hemos presentado aquí una realización en términos de campos libres la teoría de cuerdas sobre AdS_3 incluyendo los estados de los sectores ω . Ahora,

para completar la formulación de la teoría, es necesaria una prescripción para calcular las funciones de correlación a efectos de introducir las interacciones en el esquema. Haremos esto cuando introduzcamos la representación de Dotsenko para los bloques conformes y ensayaremos una extensión de dicha realización para el caso no compacto.

Dediquémonos ahora a comentar brevemente algunos puntos relevantes de la incorporación de los sectores $\omega \neq 0$ en el espectro.

5.2.3 Observación sobre la T-dualidad y las soluciones AdS_3

A efectos de mostrar la naturalidad de la propuesta de una descripción de la teoría de cuerdas en AdS_3 como un modelo conforme sobre $\frac{SL(2)}{U(1)} \times U(1)$, cabe mencionar un punto interesante en lo que hace a las soluciones de agujero negro tridimensional (y AdS_3 como un caso particular de éstas) y su relación con el agujero negro en dos dimensiones tratado en esta tesis. Esto tiene como propósito establecer un argumento heurístico para acentuar la importancia de la estrecha relación que existe entre los modelos conformes sobre la variedad de grupo $SL(2)$ y sobre la teoría producto $\frac{SL(2)}{U(1)} \times U(1)$.

En su artículo [21] Horowitz y Welch demostraron que el agujero negro BTZ es también una solución exacta del modelo σ no lineal que describe la dinámica de la cuerda bosónica cerrada en presencia de los campos de fondo G , B y Φ . La solución requiere que el dilatón y la fuerza de campo antisimétrico H , definida como la derivada exterior $H \equiv dB$, tengan la forma siguiente

$$\Phi = \Phi_0 \tag{166}$$

$$H = \frac{2}{l}\varepsilon \tag{167}$$

siendo Φ_0 una constante y ε la forma de volumen de Levi-Civita en tres dimensiones. Recordemos que la métrica del agujero negro en las coordenadas BTZ es

$$ds^2 = - \left(\frac{r^2}{l^2} - M \right) dt^2 - J dt d\varphi + \left(\frac{r^2}{l^2} - M + \frac{J^2}{4r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2 \tag{168}$$

Un punto que merece particular atención dentro del contexto de nuestro análisis del espacio-tiempo AdS_3 , es el hecho de que el dual de Buscher de la solución BTZ en la dirección φ para el caso no rotante $J = 0$ toma la forma [21]

$$ds_{dual}^2 = Mdt^2 + \frac{2}{l}dtd\varphi + \left(\frac{r^2}{l^2} - M\right)^{-1} dr^2 + r^{-2}d\varphi^2 \quad (169)$$

$$\Phi_{dual} = \Phi_0 - \ln r \quad (170)$$

$$B_{dual} = 0 \quad (171)$$

Luego, definiendo las coordenadas $\{\tau, X, \phi\}$ según

$$\begin{aligned} t &\equiv \frac{l(X - \tau)}{\sqrt{r_+^2 - r_-^2}} \\ \varphi &\equiv \frac{r_+^2\tau - r_-^2X}{\sqrt{r_+^2 - r_-^2}} \\ r^2 &\equiv le^{2\phi} \end{aligned}$$

la geometría dual está dada por

$$ds_{dual}^2 = -\left(1 - \frac{r_+^2}{l}e^{-2\phi}\right) d\tau^2 + dX^2 + \left(1 - \frac{r_+^2}{l}e^{-2\phi}\right)^{-1} l^2 d\phi^2 \quad (172)$$

$$\Phi_{dual} = \Phi_0 - \ln le^\phi \quad (173)$$

$$B_{dual} = 0 \quad (174)$$

De esta manera, es posible ver que en el caso $r_+ \geq 0$ la métrica (172) tiene la forma del producto directo del agujero negro bidimensional lorentziano por un bosón libre X de signatura espacial. Por su parte, en el caso ($M = -1, J = 0$), para el cual la métrica BTZ representa el espacio AdS_3 , la forma (169) deviene en la geometría compuesta por el producto directo entre el dual del agujero negro bidimensional euclideo [79] (cigarro de Witten) y un bosón libre de signatura temporal. Para ver esto, consideremos el cambio de variables

$$t \equiv Y + \frac{\varphi}{l} \quad (175)$$

y así la geometría dual toma la forma

$$ds_{dual}^2 = -dY^2 + \left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-1} dr^2 + \left(\frac{r^2 l^2}{r^2 + l^2}\right) d\varphi^2 \quad (176)$$

Calculando el dual de Buscher de esta configuración en la dirección φ obtenemos el elemento de línea siguiente

$$ds_{dual-dual}^2 = -dY^2 + \left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-1} dr^2 + \left(\frac{r^2 + l^2}{r^2 l^2}\right) d\varphi^2 \quad (177)$$

que, mediante un nuevo cambio de variables definido por

$$z = l \arcsin\left(\frac{r}{l}\right) \quad (178)$$

reconocemos como la métrica

$$ds_{dual-dual}^2 = -dY^2 + dz^2 + \coth\left(\frac{r}{l}\right) \frac{d\varphi^2}{l^2} \quad (179)$$

que describe el producto directo entre el dual cigarro de Witten $SL(2, R)/U(1)$ y un bosón libre de topología Y con signatura tempral [21, 79]. Esto es, la seguidilla de transformaciones que comienza con una transformación de Buscher en la dirección angular φ , seguida ésta del difeomorfismo (176) y luego por una nueva transformación de Buscher en la dirección φ *torcida* establece una relación de T-dualidad entre el espacio AdS_3 y el producto directo $\frac{SL(2, R)}{U(1)} \times (\text{tiempo})$ como dos CFT's bidimensionales equivalentes [21, 79].

VI

6 Interacciones de cuerdas en AdS_3

En este capítulo describiremos el formalismo que nos permitirá estudiar las interacciones de cuerdas en el espacio-tiempo AdS_3 en términos de funciones de correlación en la teoría conforme sobre $\frac{SL(2)}{U(1)} \times U(1)$ en el formalismo de gas de Coulomb.

6.1 Funciones de correlación e integral funcional

Las amplitudes de dispersión de N estados de cuerda están dadas por la integración sobre la hoja de mundo de las funciones de correlación de N operadores de vértice en la teoría conforme sobre la hoja de mundo.

La filosofía de trabajo de esta tesis es la de estudiar las funciones de correlación en la teoría conforme sobre $SL(2)/U(1) \times U(1)$ en el contexto del formalismo de gas de Coulomb. Comenzaremos repasando los detalles de la realización de los correladores en términos de campos libres; definiremos las funciones de correlación para luego tratar sus propiedades y obtener las expresiones explícitas para los correladores de 2 y 3-puntos.

Analicemos este formalismo para la construcción de las funciones de correlación de N -puntos para estados representados por operadores de vértice de la forma²⁶

$$V_{j,m}^\omega =: \gamma^{j-m}(z) e^{\frac{2i}{\alpha_+} \phi(z, \bar{z})} e^{i\sqrt{\frac{2}{k}} m X(z)} e^{i\sqrt{\frac{2}{k}} (m + \frac{k}{2} \omega) Y(z)} ; \quad (180)$$

Este análisis fue desarrollado con detalle en [31] para el caso de la teoría sobre el agujero negro $SL(2)/U(1)$. El punto de partida será la amplitud de dispersión $A_{m_1 \dots m_N}^{j_1 \dots j_N}$ para

²⁶considerando también la correspondiente parte antiholomorfa.

N estados de la teoría de cuerdas; a saber

$$A_{m_1 \dots m_N}^{j_1 \dots j_N} = \text{Vol}[SL(2, C)]^{-1} \left\langle \prod_{i=1}^N \int d^2 z_i V_{j_i, m_i}^{\omega_i}(z_i) \right\rangle_S \quad (181)$$

donde el promedio representado por $\langle \dots \rangle_S$ es definido con respecto a la acción

$$S_{\mu, \bar{\mu}}[\beta, \gamma, \phi] = \frac{1}{4\pi} \int d^2 z \left(\partial\phi\bar{\partial}\phi - \frac{2}{\alpha_+} R\phi + \beta\bar{\partial}\gamma + \bar{\beta}\partial\bar{\gamma} + \partial X\bar{\partial}X - \partial Y\bar{\partial}Y \right) - \frac{1}{4\pi} \int d^2 z \left(\mu\beta\bar{\beta}e^{-\frac{2}{\alpha_+}\phi} + \bar{\mu}\beta^{\frac{\alpha_+^2}{2}}\bar{\beta}^{\frac{\alpha_+^2}{2}}e^{-\alpha_+\phi} \right) \quad (182)$$

según

$$\langle \mathcal{F} \rangle_S \equiv \int D^2\gamma D^2\beta D\phi DXDY e^{-S\mathcal{F}}$$

donde se introdujeron dos constantes de acoplamiento, μ y $\bar{\mu}$, con la finalidad de ser más generales. En el caso de la teoría formulada sobre el agujero negro bidimensional de Witten, la constante μ está relacionada con la masa de dicho agujero negro (ver la referencia [79]). La dependencia antiholomorfa $\{\bar{j}_i = j_i, \bar{m}_i, \bar{z}_i\}$ está implícita en nuestra notación y se omite sólo por simplicidad.

La integración en los *modos cero* de los campos permite obtener las leyes de conservación como condiciones para que las funciones de correlación no se anulen idénticamente. Dichas condiciones pueden ser satisfechas equivalentemente mediante la inclusión de *operadores de apantallamiento*²⁷ como fue discutido originalmente por Dotsenko y Fateev en el contexto de los modelos minimales [27]. En efecto, los operadores de apantallamiento para esta teoría están dadas por los términos con coeficientes μ y $\bar{\mu}$ de la acción (182). construídos en la referencia [43] y los discutiremos en breve.

6.1.1 La integración de los modos cero

Estudiemos ahora con detalle el cálculo de las funciones de correlación $\mathcal{A}_{m_1, m_2, \dots, m_N}^{j_1, j_2, \dots, j_N}$ definidas, como antes mencionamos, de la siguiente manera

$$\mathcal{A}_{m_1, m_2, \dots, m_N}^{j_1, j_2, \dots, j_N}(z_1, z_2, \dots, z_N) = \int \prod_{i=1}^N d^2 z_i \left\langle 0 \left| \prod_{i=1}^N V_{j_i, m_i, \bar{m}_i}^{\omega_i}(z_i, \bar{z}_i) \right| 0 \right\rangle_{\mu, \bar{\mu}} =$$

²⁷ *Operadores de apantallamiento* es la expresión castellana que emplearemos para significar *screening operators*.

$$= \int D^2\beta D^2\gamma D\phi DX DY e^{-S_{\mu,\tilde{\mu}}[\beta,\gamma,\phi]} \prod_{i=1}^N \int d^2z_i V_{j_i,m_i}^{\omega_i}(z_i) V_{\tilde{j}_i,\tilde{m}_i}^{\omega_i}(\bar{z}_i)$$

siendo $|0\rangle$ el vacío invariante $SL(2)$ del espacio de Fock de la teoría interactuante. Notar que en la expresión de arriba, la acción $S_{\mu,\tilde{\mu}}$ incluye también la contribución de los campos libres $X(z)$ e $Y(z)$.

Ya que ahora estaremos interesados en considerar ambos términos de interacción (*i.e.* ambos operadores de apantallamiento), el valor de expectación $\langle \dots \rangle_{\mu,\tilde{\mu}}$ está definido en términos de la acción (182).

La integral funcional sobre el campo ϕ puede resolverse mediante la separación usual entre los modos cero y las contribuciones restantes del campo escalar. Dejamos los detalles de este cálculo para el apéndice 10.1, donde se muestra que la ley de conservación proveniente de la integración sobre el campo ϕ es

$$s_-(k-2) + s_+ = \sum_{n=1}^N j_n + 1 \quad (183)$$

donde s_- y s_+ refieren al orden de perturbación²⁸ en potencias de μ y $\tilde{\mu}$.

Por su parte, la integración sobre los modos cero de los campos $X(z)$ e $Y(z)$ claramente lleva también a las leyes de conservación siguientes

$$\sum_{i=1}^N m_i = 0. \quad (184)$$

$$\sum_{i=1}^N m_i + \frac{k}{2}\omega_i = 0. \quad (185)$$

Es posible, y usual, absorber un factor global en la definición de la integral funcional y así considerar la expresión final siguiente

$$\left\langle \prod_{n=1}^N V_{j_n,m_n,\tilde{m}_n}^{\omega_n} \right\rangle_{\mu,\tilde{\mu}} = \Gamma(-s_-) \Gamma(-s_+) \mu^{s_+} \tilde{\mu}^{s_-} \times$$

²⁸Veremos abajo que, equivalentemente, corresponden también a las cantidades de operadores de apantallamiento a ser insertados en la realización tipo gas de Coulomb de esta teoría.

$$\times \left\langle \prod_{n=1}^N V_{j_n, m_n, \bar{m}_n}^{\omega_n} \prod_{r=1}^{s_+} \mathcal{S}_{r_+} \prod_{t=1}^{s_-} \mathcal{S}_{t_-} \right\rangle_{\mu=0, \bar{\mu}=0} \delta \left(s_- \frac{\alpha_+^2}{2} + s_+ - 1 - \sum_{n=1}^N j_n \right)$$

Este procedimiento de integración de los modos cero muestra claramente cómo los dos términos de interacción \mathcal{S}_+ y \mathcal{S}_- aparecen como inserciones de operadores de apantallamiento $\mathcal{S}_+ = \int d^2y \beta(y) \bar{\beta}(\bar{y}) e^{-\frac{2}{\alpha_+} \phi(y, \bar{y})}$ y $\mathcal{S}_- = \int d^2w \beta(w) \frac{\alpha_+^2}{2} \bar{\beta}(\bar{w}) \frac{\alpha_+^2}{2} e^{-\alpha_+ \phi(w, \bar{w})}$.

En este contexto, la teoría es interpretada como un modelo tipo gas de Coulomb. De hecho, es fácil verificar que los términos de interacción tienen las propiedades conformes de operadores de apantallamiento.

En efecto, la teoría cuántica es construida de manera similar al caso de la teoría de modelos minimales [27], o del modelo conforme de Liouville [29].

Interpretando la teoría de esta manera, es posible justificar el término con coeficiente $\bar{\mu}$ en la acción (182). En efecto, uno puede verificar que \mathcal{S}_- satisface las mismas propiedades conformes que \mathcal{S}_+ y es igualmente útil para garantizar las condiciones de conservación para las funciones de correlación [72]. Estos dos términos de interacción pueden ser tratados como perturbaciones en el límite cercano al borde ($\phi \rightarrow \infty$) y fueron estudiados en la referencia [77] en el contexto de la correspondencia *AdS/CFT* donde se resaltó que, a diferencia de lo que ocurre con \mathcal{S}_+ , no es posible a partir de \mathcal{S}_- recobrar el modelo σ no lineal sobre la geometría *AdS*₃ integrando sobre los campos auxiliares β y $\bar{\beta}$.

En el caso de la teoría de Liouville los dos términos de interacción son necesarios para obtener la estructura de polos correcta de las funciones de correlación [78]. Nosotros discutiremos en estas secciones las contribuciones de ambos términos de interacción a las funciones de 2 y de 3-puntos.

Un comentario interesante es que \mathcal{S}_+ puede ser considerado como una pequeña perturbación en la región $k \rightarrow 2$ para un valor arbitrario de ϕ mientras que es finito para $k \rightarrow \infty$. El término exponencial presente en \mathcal{S}_- , por el contrario, se vuelve desdeñable en el límite $k \rightarrow \infty$ pero tiende a uno para $k \rightarrow 2$.

Notemos también que s_- y s_+ (*i.e.* la cantidad de operadores de apantallamiento del

tipo \mathcal{S}_- y \mathcal{S}_+ insertados respectivamente) son en general números no enteros y hasta pueden ser números no reales si los estados interactuantes pertenecen a las representaciones continuas²⁹ \mathcal{C}_λ . Sin pérdida de generalidad, nosotros desarrollaremos el cálculo de las funciones de correlación de 2 y 3-puntos en el caso particular $s_+ = 0$, contrariamente a la elección $s_- = 0$ adoptada en la referencia [30]. Y, al final, compararemos los resultados obtenidos en ambos casos.

Así, mostramos que las leyes de conservación obtenidas para estas funciones de correlación para la teoría conforme sobre $SL(2)/U(1) \times U(1)$ están dadas por (183), (184) y (185). Observando estas leyes de conservación inmediatamente vemos que describen procesos de dispersión de cuerdas que conservan el número total de enrollamientos; de esta manera, motivados en dar una prescripción para el cálculo de correladores en la teoría conforme sobre $SL(2)/U(1) \times U(1)$ que permita describir procesos que violen dicha conservación de enrollamientos, propondremos a continuación un análisis extendido de la representación de gas de Coulomb. Ésta será una extensión de la representación integral presentada por Dotsenko para la teoría conforme sobre $SU(2)$.

6.2 La representación integral de Dotsenko sobre $\frac{SL(2)}{U(1)} \times U(1)$

Comenzaremos repasando los aspectos de la construcción de funciones de correlación propuesta por Dotsenko para el caso $SU(2)$. Nuestra estrategia será construir la representación integral análoga para el caso $SL(2)/U(1) \times U(1)$, y lo haremos en tres pasos; a saber:

- Consideraremos la generalización de la representación integral de Dotsenko para el caso compacto $SU(2)$ al caso de la teoría conforme sobre $SL(2)$.
- Luego, extenderemos esa construcción de manera de realizar el caso de la teoría conforme sobre el cociente $SL(2)/U(1)$.

²⁹Una extensión analítica se asume en estos casos.

- Y por último, presentaremos la prescripción acabada para la teoría sobre la variedad producto $SL(2)/U(1) \times U(1)$.

6.2.1 Preliminares: La representación de Dotsenko para $SU(2)$

Dotsenko mostró en su trabajo [47] que la construcción de la representación integral de los bloques conformes para $SU(2)$ requiere, como en el caso de los modelos minimales, la introducción de una representación conjugada para los operadores de vértice. A efectos de encontrar dicha representación conjugada, es importante como primer paso construir el operador conjugado a la identidad. El conjugado a la identidad debe conmutar con todas las corrientes de Kac-Moody y tener peso conforme cero. En la representación de campos libres de $SL(2)$, este operador tiene la siguiente forma³⁰

$$\tilde{\mathcal{I}}_0(z) = \beta^{k-1} e^{\frac{2(1-k)}{\alpha_+} \phi} \quad (186)$$

Por ejemplo, en el caso compacto $SL(2)$ (*idem* en el caso de $SU(2)$ considerando el cambio de signo en k) encontramos que no aparecen polos dobles en la expansión del producto (OPE) de los campos $J^-(z)\tilde{\mathcal{I}}_0(w)$ y que el residuo correspondiente al polo simple es un estado espúreo el cual se desacopla de los bloques conformes que involucran estados físicos.

La inserción del operador conjugado a la identidad en las funciones de correlación, lleva a considerar las siguientes condiciones de simetría de carga

$$N_\beta - N_\gamma = k - 1 \quad ; \quad \sum_i \alpha_i = \frac{2 - 2k}{\alpha_+} \quad (187)$$

donde N_β (N_γ) refiere al número de campos β (γ) en la función de correlación y, por su parte, α_i refiere a la *carga* del campo $\phi(z_i)$.

La representación conjugada para los operadores de vértice de peso máximo, está

³⁰En la comparación entre lo descrito aquí y la aplicación al caso del compacto $SU(2)$ debe tenerse en cuenta el reemplazo de k por $-k$. Este cambio de signo en el nivel del álgebra junto al hecho de que, a diferencia del caso no-compacto, en el modelo sobre $SU(2)$ dicho parámetro está cuantizado proporcionan las distinciones entre el caso $SU(2)$ y $SL(2)$.

dada por³¹

$$\tilde{V}_{j,j}(z) = \beta^{2j+k-1} e^{-2(j-1+k)\phi/\alpha_+} \quad (188)$$

Puede verificarse fácilmente que este operador satisface las propiedades conformes de un estado de peso máximo (*i.e.*, $j = m$). Más aun, puede demostrarse que la función de correlación $\langle \tilde{V}_{j,j} V_{j,-j} \rangle$ no requiere la presencia de operadores de apantallamiento para satisfacer las condiciones (187).

En el caso compacto $SU(2)$ las representaciones conjugadas para estados genéricos $\tilde{V}_{j,m}$ tienen formas funcionales muy complicadas, simplificadas notablemente en el caso particular de estados de peso máximo $\tilde{V}_{j,j}$. Algo idéntico ocurre en el caso no compacto $SL(2)$.

Esta construcción es la presentada por Dotsenko para la cuantización radial en la cual el operador $V_{j,m}$ crea estados desde un vacío del espacio de Fock, mientras que $\tilde{V}_{j,m}$ actúa sobre otro vacío, un vacío conjugado (remitimos a la referencia [47] para los detalles y la presentación original).

La prescripción para construir los bloques conformes de la función de 4-puntos es entonces

$$\langle V_{j_1,m_1}(z_1) V_{j_2,m_2}(z_2) V_{j_3,m_3}(z_3) \tilde{V}_{j_4,j_4}(z_4) \prod_r \mathcal{S}_{r,+} \prod_t \mathcal{S}_{t,-} \rangle \quad (189)$$

donde el número de operadores de apantallamiento insertados se elige de manera de satisfacer (187). Notemos que es posible cumplir dichas condiciones de simetría de carga usando sólo un tipo de operadores de apantallamiento, digamos \mathcal{S}_+ . Igualmente, si bien el cálculo de las funciones de correlación de 2 y 3-puntos utilizando la prescripción de arriba nos llevará al resultado correcto, veremos que al tratar la función de 4-puntos dicha prescripción deberá ser revisada y un análisis mucho más sutil será necesario.

Discutamos ahora algunos aspectos de la construcción de representaciones conjugadas en la teoría sobre el cociente $SL(2)/U(1)$. El operador conjugado a la identidad determina la principal diferencia entre la teoría del cociente $SL(2)/U(1)$ y la teoría

³¹Nuevamente aquí debemos considerar el cambio de signo en k a efectos de relacionar el caso compacto y el caso no-compacto.

sobre $SL(2)$. En el caso del agujero negro bidimensional existen dos representaciones conjugadas adicionales a aquella encontrada para la teoría sobre $SL(2)$, *i.e.* $\tilde{\mathcal{I}}_0$ en la ecuación (186). Estas dos representaciones no triviales de la identidad han sido presentadas en la referencia [11]; a saber

$$\tilde{\mathcal{I}}_+ = \gamma^{-k} e^{-\frac{k}{\alpha_+} \phi} e^{i\sqrt{\frac{k}{2}} X} \quad ; \quad \tilde{\mathcal{I}}_- = e^{-\frac{k}{\alpha_+} \phi} e^{-i\sqrt{\frac{k}{2}} X} \quad (190)$$

Es fácil verificar que satisfacen las mismas propiedades conformes que $\tilde{\mathcal{I}}_0$, *i.e.* conmutan con las corrientes y con los operadores Virasoro $L_{n \geq 0}$. (Estrictamente hablando, $J^+(z)\tilde{\mathcal{I}}_+(w)$ y $J^-(z)\tilde{\mathcal{I}}_-(w)$ tienen polos simples no nulos, pero un argumento similar al válido en el caso compacto para $J^-(z)\tilde{\mathcal{I}}_0(w)$ se aplica aquí; esto es, los residuos son estados espúreos que se desacoplan).

Las condiciones de simetría de carga correspondientes a estos dos nuevos operadores conjugados a la identidad son

$$\begin{aligned} N_\beta - N_\gamma &= k \\ \sum_i \alpha_i &= -\frac{k}{\alpha_+} \\ \sqrt{\frac{2}{k}} \sum_i \xi_i &= \sqrt{\frac{k}{2}} \end{aligned} \quad (191)$$

y

$$\begin{aligned} N_\beta - N_\gamma &= 0 \\ \sum_i \alpha_i &= -\frac{k}{\alpha_+} \\ \sqrt{\frac{2}{k}} \sum_i \xi_i &= -\sqrt{\frac{k}{2}} \end{aligned} \quad (192)$$

para $\tilde{\mathcal{I}}_+$ e $\tilde{\mathcal{I}}_-$ respectivamente. Aquí, ξ_i refiere a la *carga* ante el campo $X(z_i)$.

Notemos, por otro lado, que $\tilde{\mathcal{I}}_0$ dado por (186) es también una buena representación conjugada de la identidad para la teoría del cociente, por lo que las ecuaciones (191) y (192) pueden ser complementadas con una tercera familia

$$N_\beta - N_\gamma = k - 1$$

$$\begin{aligned}\sum_i \alpha_i &= \frac{2-2k}{\alpha_+} \\ \sum_i \xi_i &= 0\end{aligned}\tag{193}$$

Para encontrar la representación integral de los bloques conformes, es necesario obtener la representación conjugada para los operadores de vértice. Estos estados conjugados toman formas funcionales complicadas para el caso general pero pueden ser escritos de forma simple para algunos casos particulares; por ejemplo, los siguientes son tres estados conjugados del estado de peso máximo $\Psi_{j,j}$

$$\tilde{\Psi}_{j,j}^{(0)} = \beta^{2j+k-1} e^{-\frac{2(j-1+k)}{\alpha_+} \phi} e^{i\sqrt{\frac{2}{k}} j X}\tag{194}$$

$$\tilde{\Psi}_{j,j}^{(-)} = \beta^{2j} e^{-\frac{(2j+k)}{\alpha_+} \phi} e^{i\sqrt{\frac{2}{k}} (j-\frac{k}{2}) X}\tag{195}$$

$$\tilde{\Psi}_{j,j}^{(+)} = \gamma^{-2j-k} e^{-\frac{(2j+k)}{\alpha_+} \phi} e^{i\sqrt{\frac{2}{k}} (j+\frac{k}{2}) X}\tag{196}$$

i.e. éstos tienen las mismas propiedades conformes que $\Psi_{j,j}$ y es posible chequear que las funciones de 2-puntos $\langle \tilde{\Psi}_{j,j}^{(0)} \Psi_{j,-j} \rangle_{C^0}$ y $\langle \tilde{\Psi}_{j,j}^{(\pm)} \Psi_{j,-j} \rangle_{C^\pm}$ no requieren la inclusión de operadores de apantallamiento en los correladores a efectos de satisfacer las condiciones de simetría de carga (193) y (192) respectivamente; los subíndices C^0 y C^\pm refieren a las condiciones de simetría de carga obtenidas a partir de las identidades conjugadas $\tilde{\mathcal{I}}_0$ y $\tilde{\mathcal{I}}_\pm$, respectivamente. Así, en la teoría sobre el cociente $SL(2)/U(1)$ tenemos tres diferentes representaciones para los operadores conjugados, una para cada manera no trivial de escribir la identidad. Los operadores conjugados para los otros estados del multiplete $\Psi_{j,m}$ pueden ser obtenidos actuando con J^- sobre los estados conjugados de peso máximo.

A modo de ejemplo, escribamos otros estados del multiplete que presentan formas funcionales sencillas en términos de la representación de Wakimoto. Es éste el caso del siguiente estado

$$\tilde{\Psi}_{j,m}^{(-)}(z) = \frac{(-1)^{j+m}}{\Gamma(m-j)} \beta^{j+m}(z) e^{-\frac{2}{\alpha_+} (j+\frac{k}{2}) \phi(z)} e^{i\sqrt{\frac{2}{k}} (m-\frac{k}{2}) X(z)}\tag{197}$$

que tiene una función de correlación distinta de cero

$$\langle \Psi_{j,-m}(z) \tilde{\Psi}_{j,m}^{(-)}(w) \rangle \neq 0 \quad (198)$$

sin inclusión de cargas de apantallamiento y tiene en efecto las mismas propiedades conformes que su conjugado, a saber

$$h = -\frac{2}{\alpha_+^2} j(j+1) + \frac{m^2}{k} \quad (199)$$

Por otro lado, la representación (197) también satisface la totalidad de las propiedades conformes de un estado ante las corrientes del álgebra de Kac-Moody y veremos luego que las funciones de correlación calculadas usando dicha representación coinciden con el resultado obtenido mediante las representaciones usuales de campos libres para los operadores de vértice.

Habiendo introducido estos nuevos operadores, las funciones de N -puntos en la teoría sobre el agujero negro bidimensional toman la forma

$$A_N^{0,\pm} = \langle \prod_{i=1}^{N-1} \Psi_{j_i, m_i}(z_i) \tilde{\Psi}_{j_N, m_N}^{(0),(\pm)}(z_N) \prod_r \mathcal{S}_{r,+} \prod_t \mathcal{S}_{t,-} \rangle_{C^{0,\pm}} \quad (200)$$

donde el número de cargas de apantallamiento debe ser tal que se satisfagan las condiciones de simetría de carga (193), (191) o (192). El N -ésimo estado define la ley de simetría de carga a ser utilizada; las amplitudes correspondientes a cada condición de simetría de carga serán indicadas por A_N^0 , A_N^+ y A_N^- , respectivamente. Es fácil ver que el operador conjugado $\tilde{\Psi}_{j,j}^{(+)}$ correspondiente a la representación $\tilde{\mathcal{I}}_+$ no puede ser escrito de manera similar (*i.e.* $\tilde{\Psi}_{j,j}^{(+)} \sim \beta^a e^{\frac{2b}{\alpha_+} \phi}$) a la de $\tilde{\Psi}_{j,j}^{(0)}$ y $\tilde{\Psi}_{j,j}^{(-)}$.

Notemos que los operadores (194), (195), (196) y (197) crean estados de peso máximo y pueden ser utilizados como operadores de vértice para tales estados en las posiciones intermedias z_2, \dots, z_{N-1} , *i.e.* es posible elegir diferentes formas para representar los $N-2$ operadores intermedios en la función de N -puntos, a la vez que los estados de vacío entrante $\tilde{\Psi}_{j_N, m_N}^{(0,\pm)} |0\rangle$ y de vacío saliente $\langle 0| \Psi_{j_1, m_1}$ son interpretados como un producto interno entre representaciones conjugadas y directas del espacio de Fock.

6.2.2 La representación de Dotsenko para $\frac{SL(2)}{U(1)} \times U(1)$

Volvamos ahora a nuestra motivación original, la aplicación de estas prescripciones para describir procesos de dispersión en la teoría de cuerdas sobre AdS_3 .

Las funciones de correlación de N -puntos para cuerdas enrolladas en esta teoría son

$$\mathcal{A}_N^{0,\pm} = \langle \prod_{i=1}^{N-1} V_{j_i, m_i}^{\omega_i}(z_i) \tilde{V}_{j_N, j_N}^{\omega_N(0), (\pm)}(z_N) \prod_{r=1}^{s_+} \mathcal{S}_{r,+} \prod_{t=1}^{s_-} \mathcal{S}_{t,-} \rangle_{c_{0,\pm}} \quad (201)$$

donde, los $V_{j,m}^\omega$ están dados por (180) mientras que los estados conjugados ahora son

$$\tilde{V}_{j,j}^{\omega(0)} = \beta^{2j+k-1} e^{-\frac{2(j-1+k)}{\alpha_+} \phi} e^{i\sqrt{\frac{2}{k}} j X} e^{i\sqrt{\frac{2}{k}} (j+\frac{k}{2}) Y} \quad (202)$$

y

$$\tilde{V}_{j,j}^{\omega(-)} = \beta^{2j} e^{-\frac{(2j+k)}{\alpha_+} \phi} e^{i\sqrt{\frac{2}{k}} (j-\frac{k}{2}) X} e^{i\sqrt{\frac{2}{k}} (j+\frac{k}{2}) Y} \quad (203)$$

Para que los correladores sean distintos de cero, la cantidad de operadores de apantallamiento será la necesaria para satisfacer (191), (192) o (193) más la siguiente condición adicional propia de la presencia del campo $Y(z)$

$$\sum \Omega_i = \sum_i (m_i + \frac{\omega_i k}{2}) = 0 \quad (204)$$

donde Ω_i denota la *carga* ante el campo $Y(z_i)$.

Esta última condición de simetría de carga es, de hecho, la ley de conservación de la energía. La cantidad $m + \bar{m} + k\omega$ es la energía total de las cuerdas sobre AdS_3 que recibe una contribución de la energía cinética $m + \bar{m}$ más una propia de la tensión de las cuerdas al estar enrolladas dada por $\frac{k}{2}(\omega + \bar{\omega}) = k\omega$ (recordemos que fijando el radio l del espacio AdS_3 obtenemos que k representa la tensión de la cuerda). Por su parte, los osciladores derechos e izquierdos satisfacen $\sum_i (m_i - \bar{m}_i) = 0$ y determinan la conservación del momento angular total de los estados de cuerda.

Comentemos que un resultado interesante de la prescripción presentada aquí es el hecho de que ésta permite construir también correladores que violan la conservación del número total de enrollamientos $\delta\omega \equiv \sum_{i=1}^N \omega_i \neq 0$. Esto se logra insertando de

manera combinada operadores conjugados en las tres diferentes representaciones en los $N - 2$ puntos intermedios de inserción. Esquemáticamente, si se considera una función de correlación de la forma

$$A_N^{0,\pm} = \langle V_{j_1, m_1}^{\omega_1} \prod_{l=1}^{N_d} V_{j_l, m_l}^{\omega_l} \prod_{i=1}^{N_0} \tilde{V}_{j_i, m_i}^{\omega_i(0)} \prod_{r=1}^{N_+} \tilde{V}_{j_r, m_r}^{\omega_r(+)} \prod_{t=1}^{N_-} \tilde{V}_{j_t, m_t}^{\omega_t(-)} \prod_n^{s_+} \mathcal{S}_{n,+} \prod_m^{s_-} \mathcal{S}_{m,-} \tilde{V}_{j_N, m_N}^{\omega_N(0),(\pm)} \rangle_{\mathcal{C}^{0,\pm}} \quad (205)$$

donde $N = N_d + N_0 + N_+ + N_- + 2$, de las condiciones de simetría presentadas arriba se deduce la siguiente ley de conservación para el número de enrollamientos

$$\sum_{i=1}^N \omega_i = N_+ - N_- \quad (206)$$

$$\left| \sum_{i=1}^N \omega_i \right| \leq N - 2 \quad (207)$$

Así, la cantidad $N - 2$ aparece como una cota superior a la violación del número total de enrollamientos. Una observación similar ha sido hecha en [7], donde se comenta que en el caso de considerar supersimetría sobre la hoja de mundo aparece la misma cota superior. Un artículo no publicado de V. Fateev, A. B. Zamolodchikov y Al. B. Zamolodchikov es la fuente original de este interesante resultado acerca de $N - 2$ como cota suprema a la violación del número $\delta\omega$ en el caso de la teoría sobre el cociente $SL(2)/U(1)$. Esto fue demostrado en un trabajo reciente de Maldacena y Ooguri [16] para la teoría de cuerdas en AdS_3 ; en dicho trabajo se muestra que existe una diferencia entre la violación de la conservación del número de enrollamientos para el caso de estados de las representaciones discretas y el caso de estados de las representaciones continuas, obteniéndose en el caso general a una cota idéntica a la de arriba³²

En el próximo capítulo aplicaremos este formalismo al cálculo de las funciones de correlación de 2 y 3-puntos en AdS_3 .

³²Al nivel de nuestro formalismo no está claro cómo obtener condiciones distintas para las diferentes representaciones. Este es un punto que merecería un análisis futuro.

6.2.3 Observaciones sobre las representaciones conjugadas

Por completitud, digamos también que otras representaciones conjugadas al operador identidad aparecen en el catálogo de campos $\tilde{V}_{j,m}^{\omega(0,\pm)}$ de la teoría conforme sobre la variedad producto $\frac{SL(2)}{U(1)} \times U(1)$; a saber

$$\tilde{V}_{j=0,m=0}^{\omega=0(0)} = \beta^{k-1} e^{\frac{2(1-k)}{\alpha_+} \phi} = \tilde{\mathcal{I}}_0 \quad (208)$$

$$\tilde{V}_{j=0,m=0}^{\omega=0(-)} = V_{j=-\frac{k}{2},m=-\frac{k}{2}}^{\omega=+1} = e^{-\frac{k}{\alpha_+} \phi} e^{-i\sqrt{\frac{k}{2}}X} = \tilde{\mathcal{I}}_- \quad (209)$$

$$\tilde{V}_{j=0,m=0}^{(+)\omega=0} = V_{j=-\frac{k}{2},m=+\frac{k}{2}}^{\omega=-1} = \gamma^{-k} e^{-\frac{k}{\alpha_+} \phi} e^{i\sqrt{\frac{k}{2}}X} = \tilde{\mathcal{I}}_+ \quad (210)$$

$$\tilde{V}_{j=-\frac{k}{2},m=-\frac{k}{2}}^{(0)\omega=+1} = \beta^{-1} e^{\frac{(2-k)}{\alpha_+} \phi} e^{-i\sqrt{\frac{k}{2}}X} \equiv \tilde{\mathcal{I}}_* \quad (211)$$

$$\tilde{V}_{j=-\frac{k}{2},m=-\frac{k}{2}}^{(-)\omega=+1} = \beta^{-k} e^{-i\sqrt{2k}X} \equiv \tilde{\mathcal{I}}_\infty \quad (212)$$

$$V_{j=0,m=0}^{\omega=0} = \tilde{V}_{j=-\frac{k}{2},m=+\frac{k}{2}}^{(-)\omega=-1} = \tilde{V}_{j=-\frac{k}{2},m=-\frac{k}{2}}^{(+)\omega=+1} = 1 \quad (213)$$

$$V_{j=-1,0}^{\omega=0} = \hat{V}_{j=-1,m=0} = \gamma^{-1} e^{-\frac{2}{\alpha_+} \phi} = \tilde{\mathcal{I}}_s \quad (214)$$

Vemos de esto que aparece una nueva serie de representaciones conjugadas, *i.e.* los operadores $\tilde{\mathcal{I}}_*$ y $\tilde{\mathcal{I}}_\infty$ se suman a nuestra lista de operadores de la teoría $\frac{SL(2)}{U(1)} \times U(1)$. En la referencia [16], el operador $\tilde{V}_{j=0,m=0}^{\omega=0(-)}$ es denominado el *operador de flujo espectral*; y es empleado en el cálculo de funciones de correlación que violan la conservación del número de enrollamientos en AdS_3 mediante un procedimiento que consiste en tomar el límite de coincidencia con otro operador interviniente en la función de correlación. En [81], los operadores $\tilde{V}_{j=0,m=0}^{\omega=0(-)}$ y $\tilde{V}_{j=0,m=0}^{\omega=0(+)}$ son considerados también como conjugados del operador identidad en la teoría sobre el agujero negro bidimensional y se utilizan de manera similar que en [16]. El extenso catálogo de realizaciones no triviales de la identidad de la teoría producto está íntimamente relacionada con las igualdades entre representaciones discretas de $SL(2)$ dadas por

$$\hat{\mathcal{D}}_j^{\pm,\omega=\mp 1} \sim \hat{\mathcal{D}}_{-\frac{k}{2}-j}^{\mp,\omega=0} \quad (215)$$

$$\hat{\mathcal{D}}_j^{\pm,\omega} \sim \hat{\mathcal{D}}_{-1-j}^{\pm,\omega} \quad (216)$$

Una forma de entender estas relaciones es interpretar a las identidades $\tilde{\mathcal{I}}_\pm$ como expresiones alternativas del estado $V_{j=0,m=0}^{\omega=0} = 1$ escritas en términos de los sectores $\omega = \mp 1$,

dadas las relaciones (215) y (216). Luego, así como todos los campos $V_j^{\omega=0,\pm 1}$ y $\tilde{V}_j^{\omega=0,\pm 1}$ admiten una representación conjugada en términos de $V_{\frac{-k}{2}-j}^{\omega=\mp 1,0}$ e $\tilde{V}_{\frac{-k}{2}-j}^{\omega=\mp 1,0}$, las relaciones $\tilde{\mathcal{I}}_{\pm}$ y $\tilde{\mathcal{I}}_0$ generan a través de las identidades (215) y (216) toda una nueva red de representaciones no triviales del operador 1 dada por los operadores $\tilde{\mathcal{I}}_*$, $\tilde{\mathcal{I}}_{\infty}$ y los mismos $\tilde{\mathcal{I}}_+$, $\tilde{\mathcal{I}}_-$.

Las identidades conjugadas $\tilde{\mathcal{I}}_{\infty}$ y $\tilde{\mathcal{I}}_*$ definen, por su parte, sus propias condiciones de simetría de carga; éstas están dadas por

$$\begin{aligned} N_{\beta} - N_{\gamma} &= -k \\ \sum_i \alpha_i &= 0 \\ \sqrt{\frac{2}{k}} \sum_i \xi_i &= \sqrt{2k} \end{aligned} \quad (217)$$

y por

$$\begin{aligned} N_{\beta} - N_{\gamma} &= -1 \\ \sum_i \alpha_i &= \frac{2-k}{\alpha_+} \\ \sqrt{\frac{2}{k}} \sum_i \xi_i &= -\sqrt{\frac{k}{2}} \end{aligned} \quad (218)$$

respectivamente.

Por otro lado, es posible obtener otras formas funcionales de operadores con las propiedades conformes de las representaciones conjugadas de la identidad; es éste el caso del operador

$$1 \sim e^{i\sqrt{\frac{2}{k}}(X(z)+Y(z))q} \quad (219)$$

Siguiendo con el análisis de las distintas representaciones conjugadas existentes y las relaciones entre ellas, podemos observar que el operador $\hat{\Phi}_{-1}(x)$ discutido en el capítulo 5 (y presentado en la referencia [25]) se comporta de manera similar a la identidad, análogamente a nuestras representaciones conjugadas a la identidad. En este artículo, Satoh *et al.* definen las funciones de correlación mediante la introducción de dicho

operador,

$$A_{j_1, \dots, j_N} = \langle \Phi_{j_1} \dots \Phi_{j_N} \hat{\Phi}_{-1} \rangle \quad (220)$$

siendo las leyes de conservación,

$$N_\beta - N_\gamma = 1 \quad (221)$$

$$\sum_{i=1}^N j_i + 1 = s \quad (222)$$

$$\sum_{i=1}^N m_i = 0 \quad (223)$$

Éstas son las leyes de conservación correspondientes a la identidad conjugada $\tilde{\mathcal{I}}_s = \hat{\Phi}_{-1}$.

Es importante remarcar que si se considera (220) como la representación conjugada a la identidad a ser insertada en la función de correlación, entonces las leyes de conservación derivadas serán (183), (184) y (185), mientras que la representación conjugada al vértice $V_{j,m}^\omega$ en este caso estará dada simplemente por $V_{-1-j,m}^\omega$, equivalente al tratamiento usual de los modos cero. Esta construcción es, de suyo, similar a la nuestra salvo que difiere en la representación conjugada a la identidad escogida. Nuevamente, aquí, los resultados coinciden. Esto nos permite ver de manera concisa a la integración de los modos cero de una manera completamente análoga a la representación integral tipo Dotsenko basada en la inserción de identidades conjugadas.

VII

7 Funciones de correlación de 2 y 3-puntos

En este capítulo calcularemos de manera explícita las funciones de correlación de 2 y 3-puntos en la teoría de cuerdas sobre AdS_3 usando el formalismo de gas de Coulomb. Compararemos nuestros resultados con los de la literatura y obtendremos resultados originales para correladores que representan procesos de interacciones de cuerdas en los cuales se viola el número total de enrollamientos.

7.1 La función de correlación de 2-puntos

En esta sección realizaremos el cálculo explícito de las funciones de 2-puntos para la teoría de cuerdas sobre $\frac{SL(2)}{U(1)} \times U(1)$ utilizando la representación de campos libres de Wakimoto. Seguiremos caminos similares a los explorados por las hermanas Becker en la referencia [30] pero con la diferencia de que nosotros consideraremos un término de interacción genérico realizando las funciones de correlación sólo con la inserción del operador de apantallamiento \mathcal{S}_- .

Comencemos, pues, considerando la forma genérica de una función de 2-puntos. La invariancia conforme determina completamente (salvo una normalización de los operadores) la estructura general de la función de 2-puntos para una teoría de campos conforme en dos dimensiones; a saber

$$\langle \Phi_{h_1}(z_1, \bar{z}_1) \Phi_{h_2}(z_2, \bar{z}_2) \rangle = |z_1 - z_2|^{-2(h_1+h_2)} \delta_{h_1, h_2}$$

Teniendo en cuenta que el peso conforme h de los campos sobre $SL(2, R)$ está dado en términos del número cuántico j según $h = -\frac{2}{\alpha_+^2} j(j+1)$, tendremos que la función de

2-puntos en este modelo tiene la forma general siguiente

$$\langle V_{j_1, m_1}^{\omega_1}(z_1) V_{j_2, m_2}^{\omega_2}(z_2) \rangle = |z_1 - z_2|^{-4h_1} [A_{(j_1, m_1)} \delta(j_1 + j_2 + 1) + B_{(j_1, m_1)} \delta(j_1 - j_2)] \quad (224)$$

Notemos que para la teoría sobre el agujero negro $SL(2)/U(1)$ se cumple $h = -\frac{2}{\alpha_+^2} j(j+1) + \frac{m^2}{k}$ mientras que para la teoría sobre el producto $\frac{SL(2)}{U(1)} \times U(1)$ se tiene $h = -\frac{2}{\alpha_+^2} j(j+1) + \frac{m^2}{k} - \frac{(m + \frac{k}{2}\omega)^2}{k}$ por lo que las consideraciones son exactamente análogas que para $SL(2)$, considerando que también existen factores globales de la forma $\delta(m_1 + \bar{m}_1)$, $\delta(\bar{m}_1 + \bar{m}_2)$ y $\delta(\omega_1 + \omega_2)$.

De esta manera, las funciones de correlación a ser calculadas para determinar $A(j)$ y $B(j)$ están dadas por

$$\int \prod_{i=1}^{s_-} d^2 w_i \left\langle \gamma_{(z_1)}^{j_1 - m_1} \gamma_{(z_2)}^{j_2 - m_2} \prod_{i=1}^{s_-} \beta_{(w_i)}^{k-2} \right\rangle \times c.c. \times \left\langle e^{\frac{2j_1}{\alpha_+} \phi(z_1, \bar{z}_1)} e^{\frac{2j_2}{\alpha_+} \phi(z_2, \bar{z}_2)} \prod_{i=1}^{s_-} e^{-\alpha_+ \phi(w_i, \bar{w}_i)} \right\rangle \times \\ \times \left\langle e^{i\sqrt{\frac{2}{k}} m_1 X(z_1)} e^{i\sqrt{\frac{2}{k}} (m_1 + \frac{k}{2}\omega_1) Y(z_1)} e^{i\sqrt{\frac{2}{k}} m_2 X(z_2)} e^{i\sqrt{\frac{2}{k}} (m_2 + \frac{k}{2}\omega_2) Y(z_2)} \right\rangle \times c.c. \quad (225)$$

En el caso en consideración elegimos $s_+ = 0$, por lo que las leyes de conservación están determinadas por

$$s_- = -\rho(j_1 + j_2 + 1) \quad (226)$$

$$m_1 = -m_2 \quad (227)$$

$$\omega_1 = -\omega_2 \quad (228)$$

donde $\rho = -\frac{2}{\alpha_+^2} = \frac{1}{2-k}$.

Los correladores del sistema (β, γ) pueden ser computados usando las técnicas de bosonización usuales en el tratamiento de los campos fantasmas introduciendo nuevos campos bosónicos libres u y v tales que

$$\beta = -i\partial v e^{iv-u}, \quad \gamma = e^{u-iv} \quad (229)$$

siendo

$$\langle u(z)u(w) \rangle = \langle v(z)v(w) \rangle = -\ln(z-w). \quad (230)$$

Esto permite entender el sentido de las potencias no enteras de los campos γ , aunque no es así para el caso de los campos β dada la presencia del operador ∂ en la fórmula de bosonización. No obstante, procederemos como si tratásemos con una cantidad entera de operadores de apantallamiento para imponer recién al final del cálculo la condición (226) para s_- , asumiendo que las expresiones estarán definidas por una extensión analítica en s_- (vale decir que no es estrictamente una extensión analítica como fue señalado por Goulian y Li en la referencia [59]). En efecto, la congruencia exacta de nuestros cálculos con los efectuados utilizando otros formalismos sustenta fuertemente este procedimiento.

Claramente, el cálculo del primer término $A(j)$ en (224) no requiere operadores de apantallamiento. Por su parte, las contracciones de los campos exponenciales de los operadores de vértice reproducen el factor global $|z_1 - z_2|^{-4h_1}$. De esta manera, fácilmente vemos que la elección anterior de la normalización de los operadores de vértice fija que $A = 1$.

El término $B(j, m)$ en (224) puede ser calculado de manera similar a la utilizada en la referencia [30]. Es conveniente fijar los puntos de inserción de los operadores de vértice en $z_1 = 0$ y $z_2 = 1$ y la posición de uno de los s_- operadores de apantallamiento en $w_{s_-} = \infty$ a efectos de eliminar el volumen del grupo $SL(2, C)$ que da cuenta de la invariancia ante difeomorfismos y otras transformaciones conformes de la teoría sobre la hoja de mundo (esto no es más que una elección del *calibre*³³ de la integración funcional).

La contribución explícita de los campos (β, γ) puede ser escrita generalizando el procedimiento presentado en [30], donde se mostró que

$$\left\langle \gamma_{(0)}^{j_1 - m_1} \gamma_{(1)}^{j_2 - m_2} \prod_{i=1}^s \beta_{(w_i)} \right\rangle = \mathcal{P}^{-1} \frac{\partial^s \mathcal{P}}{\partial w_1 \dots \partial w_s} \quad (231)$$

siendo

$$\mathcal{P} = \prod_{i=1}^s w_i^{m_1 - j_1} (1 - w_i)^{m_2 - j_2} \prod_{i < j} (w_i - w_j) \quad (232)$$

³³La palabra castellana *calibre* viene a reemplazar al término *gauge*.

A efectos de computar los correladores de la ecuación (225) es conveniente proponer una separación³⁴ de los puntos de inserción de los operadores de apantallamiento, *i.e.* tomar $(k-2)s_-$ diferentes puntos llamados por $w_r^{(n)}$ con $r \in \{1, \dots, s\}$ y $n \in \{1, \dots, k-2\}$ y luego tomar el límite $w_r^{(n)} \rightarrow w_r, \forall n$. Haciendo esta suerte de desdoblamiento, es posible obtener

$$\left\langle \gamma_{(0)}^{j_1-m_1} \gamma_{(1)}^{j_2-m_2} \prod_{i=1}^{s_-} \beta_{(w_i)}^{k-2} \right\rangle = \lim_{w_i^{(n)} \rightarrow w_i^{(1)} = w_i} \mathcal{P}^{-1} \frac{\partial^{(k-2)s_-} \mathcal{P}}{\partial w_1^{(1)} \dots \partial w_1^{(k-2)} \dots \partial w_{s_-}^{(1)} \dots \partial w_{s_-}^{(k-2)}} \quad (233)$$

con

$$\mathcal{P} = \prod_{i=1}^{s_-} \prod_{n=1}^{k-2} (w_i^{(n)})^{m_1-j_1} (1-w_i^{(n)})^{m_2-j_2} \prod_{i<j} (w_i^{(n)} - w_j^{(m)}). \quad (234)$$

Así, la contribución de los correladores propios del sistema (β, γ) es

$$\left| \left\langle \gamma_{(0)}^{j_1-m_1} \gamma_{(1)}^{j_2-m_2} \prod_{i=1}^{s_-} \beta_{(w_i)}^{k-2} \right\rangle \right|^2 = (-)^{-\tilde{\rho}s_-} \Delta(1+j_1-m_1) \Delta(1+j_2-m_2) \prod_{i=1}^{s_-} |w_i|^{2\tilde{\rho}} |1-w_i|^{2\tilde{\rho}}, \quad (235)$$

donde $\Delta(x) = \Gamma(x)/\Gamma(1-x)$, $\tilde{\rho} = \rho^{-1} = 2-k$ y $m_i = \tilde{m}_i$. Notemos que esta restricción es adoptada sólo por simplicidad; el caso más general, para el cual no se satisface la condición $m_i = \tilde{m}_i$ es realizable sin mayor inconveniente mediante el empleo de la representación conjugada (197). Esto generaliza los resultados de [15] y [17].

Por otro lado, efectuando las contracciones del campo ϕ , las $s_- - 1$ integrales sobre los puntos de inserción de los operadores de apantallamiento son

$$\prod_{i=1}^{s_- - 1} \int d^2 w_i |w_i|^{4j_1+2\tilde{\rho}} |1-w_i|^{4j_2+2\tilde{\rho}} \prod_{i<j} |w_i - w_j|^{4\tilde{\rho}}. \quad (236)$$

Éstas son, de hecho, las integrales de Dotsenko y Fateev [27] cuyo resultado está dado por

$$\int \prod_{i=1}^s d^2 w_i \prod_{i=1}^s |w_i|^{2\alpha} |1-w_i|^{2\beta} \prod_{i<j}^s |w_i - w_j|^{4\sigma} = s! \pi^s (\Delta(1-\sigma))^s \prod_{i=1}^s \Delta(i\sigma) \times$$

³⁴la traducción literal al castellano quizá no ofrezca el significado adecuado: nos referimos aquí a una *splitting* en la variable definido según $w_r \rightarrow \{w_r^{(1)}, w_r^{(2)}, \dots, w_r^{(k-2)}\}$.

$$\times \prod_{i=0}^{s-1} \Delta(1 + \alpha + i\sigma) \Delta(1 + \beta + i\sigma) \Delta(-1 - \alpha - \beta - (s - 1 + i)\sigma). \quad (237)$$

Especificando los valores particulares de α y β en (236), el resultado final obtenido para el término $B(j)$ de la función de 2-puntos es

$$B(j, m) = (-\tilde{\mu}\pi\Delta(-\tilde{\rho}))^{s-} \Delta(1+j-m)\Delta(1+j+m)s_- \tilde{\rho}^2 \Delta(1-s_-)\Delta(\tilde{\rho}s_-)\delta(m_1+m_2)\delta(\omega_1+\omega_2), \quad (238)$$

donde $j = j_1 = j_2$ y $m = m_1 = -m_2 = \bar{m}$.

Para comenzar, comparemos este resultado con el obtenido en la referencia [30], donde sólo fueron considerados operadores de la forma \mathcal{S}_+ ; a saber ³⁵

$$B(j, m) = (-\pi\mu\Delta(-\rho))^{s+} \Delta(1+j-m)\Delta(1+j+m)s_+ \rho^2 \Delta(1-s_+)\Delta(\rho s_+)\delta(m_1+m_2)\delta(\omega_1+\omega_2), \quad (239)$$

donde $s_+ = j_1 + j_2 + 1$. La situación es similar al caso de los modelos minimales donde también existen dos tipos distintos de cargas de apantallamiento. Las propiedades conformes de las funciones de correlación no pueden cambiar por la inserción de \mathcal{S}_\pm ya que los correladores satisfacen igualmente el balance de cargas. De esta manera, los resultados (238) y (239) deben coincidir, *i.e.* éstos deben ser interpretados independientemente de los operadores de apantallamiento utilizados en sendos casos.

A efectos de analizar si éste es el caso requeriremos como paso previo recordar que, como fue mostrado en [30], la función de 2-puntos puede ser obtenida a partir de la función de 3-puntos conteniendo un estado de peso máximo V_{j_1, j_1} y luego tomando el límite $j_1 = i\varepsilon \rightarrow 0$. Veremos *a posteriori* (luego de computar explícitamente la función de 3-puntos) que los términos $B(j)$ así obtenidos son precisamente los que se encontraron arriba (*i.e.* las ecuaciones (238) y (239) del cálculo directo) salvo un factor extra $(s_- \tilde{\rho})^{-1}$ y $(s_+ \rho)^{-1}$, respectivamente³⁶. De esta manera, las expresiones a

³⁵En comparación con [30] debe notarse que este resultado contiene un factor extra ρ^2 .

³⁶La discrepancia por un factor proporcional a s_\pm entre ambos métodos de cálculo de la función de 2-puntos es sumamente interesante por cuanto se relaciona con observaciones efectuadas en la referencia

ser comparadas son las siguientes

$$B_-(j, m) = (-\pi\tilde{\mu}\Delta(-\tilde{\rho}))^{s_-} \Delta(1+j-m)\Delta(1+j+m)\tilde{\rho}\Delta(1-s_-)\Delta(\tilde{\rho}s_-)\delta(m_1+m_2)\delta(\omega_1+\omega_2). \quad (240)$$

y

$$B_+(j, m) = (-\pi\mu\Delta(-\rho))^{s_+} \Delta(1+j-m)\Delta(1+j+m)\rho\Delta(1-s_+)\Delta(\rho s_+)\delta(m_1+m_2)\delta(\omega_1+\omega_2). \quad (241)$$

Es interesante notar que estos dos resultados coinciden reemplazando $s_+ = j_1 + j_2 + 1$ y $s_- = -\rho(j_1 + j_2 + 1)$, y si la siguiente igualdad se cumple

$$\pi\tilde{\mu}\Delta(-\tilde{\rho}) = (\pi\mu\Delta(-\rho))^{-\rho^{-1}} \quad (242)$$

Encontraremos una relación similar en el caso del cálculo de las funciones de 3-puntos; así, tomémonos la licencia de posponer para entonces algunos comentarios al respecto.

Por otro lado, es posible realizar el cálculo de los correladores de 2-puntos utilizando las representaciones conjugadas de Dotsenko introducidas en el capítulo anterior. En ese caso, la estructura general de la función de 2-puntos está dada por

$$\left\langle V_{j_1, m_1}^{\omega_1}(z) \tilde{V}_{j_2, m_2}^{\omega_2}(w) \right\rangle = |z-w|^{-4h_1} [A_{(j_1, m_1)}^{\omega} \delta(j_1 - j_2) + B_{(j_1, m_1)}^{\omega} \delta(j_1 + j_2 + 1)] \quad (243)$$

Los términos $A_{(j, m)}^{\omega}$ y $B_{(j, m)}^{\omega}$ pueden ser calculados como

$$\begin{aligned} & \left\langle V_{j_1, m_1}^{\omega_1}(0) \tilde{V}_{j_2, j_2}^{\omega_2(-)}(1) \right\rangle_{c^-} = \int \prod_{i=1}^{s_+-1} d^2 w_i \left\langle \gamma_{(0)}^{j_1 - m_1} \beta_{(1)}^{2j_2} \prod_{i=1}^{s_+-1} \beta_{(w_i)} \right\rangle \times c.c. \times \\ & \times \left\langle e^{\frac{2j_1}{\alpha_+} \phi(0)} e^{-\frac{(2j_2+k)}{\alpha_+} \phi(1)} \prod_{i=1}^{s_+-1} e^{-\frac{2}{\alpha_+} \phi(w_i, \bar{w}_i)} \right\rangle \times \\ & \times \left\langle e^{i\sqrt{\frac{2}{k}} m_1 X(0)} e^{i\sqrt{\frac{2}{k}} (m_1 + \frac{k}{2} \omega_1) Y(0)} e^{i\sqrt{\frac{2}{k}} (j_2 + \frac{k}{2}) X(1)} e^{i\sqrt{\frac{2}{k}} (j_2 + \frac{k}{2} \omega_2) Y(1)} \right\rangle \times c.c. \quad (244) \end{aligned}$$

donde hemos tomado los vértices conjugados con respecto a las condiciones C^- , pero puede ser fácilmente repetido para la utilización de $\tilde{V}_{j, m}^{\omega(0)}$ en (202) (usando las condiciones (193)) y el resultado es idéntico.

[16]. Discutiremos esto más adelante, al tratar la relación entre las funciones de 2 y 3-puntos al final de este capítulo.

Las leyes de conservación C^- toman ahora la forma

$$s_+ = j_1 - j_2 \quad , \quad m_1 + j_2 = 0 \quad , \quad \omega_1 + \omega_2 = 0 \quad (245)$$

(aquí estamos considerando $m_i = \bar{m}_i$).

Claramente, ahora es $A_{(j,m)}^\omega$, *i.e.* el término proporcional a $\delta(j_1 - j_2)$, el que no requiere cargas de apantallamiento. En este caso la contribución del sistema (β, γ) es

$$\langle \gamma^{j-m_1}(z) \beta^{2j}(w) \rangle = \frac{\Gamma(2j+1)}{(z-w)^{2j}}, \quad (246)$$

y los correladores de los exponentiales de los campos escalares ϕ, X, Y reconstruyen el peso conforme de la función de 2-puntos. Así, para normalizar (243) como en las secciones anteriores, el estado conjugado de peso máximo tiene que estar definido según³⁷

$$\tilde{V}_{j,j}^{\omega(-)} = \frac{1}{\Gamma(2j+1)^2} \beta^{2j} e^{-\frac{(2j+k)}{\alpha_+} \phi} e^{i\sqrt{\frac{2}{k}}(j-\frac{k}{2})X} e^{i\sqrt{\frac{2}{k}}(j-\frac{k}{2})Y} \quad (247)$$

y entonces $A^\omega = 1$.

Para computar el término $B_{(j,m)}^\omega$, el sistema (β, γ) puede ser tratado como antes y el resultado es

$$\left\langle \gamma^{j_1-m_1}(0) \beta^{2j_2}(1) \prod_{i=1}^{s_+} \beta(w_i) \right\rangle = \frac{\Gamma(-j_1 + m_1 + 2j_2 + s_+)}{\Gamma(-j_1 + m_1)} \prod_{i=1}^{s_+} w_i^{-1}. \quad (248)$$

Tomando en cuenta la contribución de la parte antiholomorfa y los correladores del campo ϕ , la integral de Dotsenko-Fateev a ser calculada en este caso es

$$\int \prod_{i=1}^{s_+-1} d^2 w_i |w_i|^{-2+8j_1/\alpha_+^2} |1-w_i|^{-4(2j_2+k)/\alpha_+^2} \prod_{i<j}^{s_+-1} |w_i - w_j|^{-8/\alpha_+^2} \quad (249)$$

Y el resultado final obtenido puede ser escrito de la siguiente manera

$$B^\omega(j) = \frac{\Gamma(j_2 + m_1)^2}{\Gamma(1 + 2j_2)^2 \Gamma(m_1 - j_1)^2} (\pi \mu \Delta(-\rho))^{s_+} s_+ \rho^2 \Delta(1 - s_+) \Delta(\rho s_+) \times \\ \times \delta(m_1 + m_2) \delta(\omega_1 + \omega_2). \quad (250)$$

Es fácil mostrar que esta expresión coincide con el término $B(j)$ en la ecuación (239).

Para ver esto es necesario reemplazar j_2 por $-1 - j_2$ y $m_1 = -j_2$ en (239), y hay

³⁷Considerando también la parte antiholomorfa correspondiente.

que usar la igualdad $\Gamma(0)/\Gamma(-s) = (-)^s\Gamma(s+1)$. De este modo, es posible escribir el resultado de manera más sugestiva

$$B^\omega(j) = \Delta(1+j-m)\Delta(1+j+m)(-\pi\mu\Delta(-\rho))^{s+s_+\rho^2}\Delta(1-s_+)\Delta(\rho s_+) \times \\ \times \delta(m_1+m_2)\delta(\omega_1+\omega_2). \quad (251)$$

donde $j = j_1 = -1 - j_2$, $m = m_1$.

Por lo tanto, los factores $A(j)$ y $B(j)$ de las funciones de 2-puntos calculadas en la referencia [30] para el agujero negro $SL(2, R)/U(1)$ concuerdan con los obtenidos aquí para la teoría de cuerdas sobre AdS_3 usando la extensión no compacta del formalismo de Dotsenko basado en la representación de la teoría como un modelo del tipo gas de Coulomb.

De esta manera, vemos que la representación de campos libres lleva a obtener el resultado correcto para las funciones de correlación de 2-puntos; aun cuando dicha representación era considerada *a priori* válida sólo en los regímenes en los cuales las interacciones de cuerdas se desarrollaban cerca del borde del espacio AdS_3 (*i.e.* en los regímenes de grandes valores de ϕ). Así, se observa que inclusive los términos no perturbativos del tipo $\Delta(\rho s_+)$ (*i.e.* efectos de los regímenes de k finito) aparecen en la realización de campos libres³⁸. Por otro lado, el hecho de que estos dos resultados coincidan es otra prueba de la consistencia de nuestra extensión del formalismo de Dotsenko al caso no compacto.

De manera análoga, este cálculo de la función de 2-puntos puede ser repetido usando, por ejemplo, representaciones conjugadas y el operador \mathcal{S}_- ; en ese caso también se reproduce el resultado (240) para $B_-(j, m)$ (nuevamente reemplazando $j_2 \leftrightarrow -1 - j_2$).

7.1.1 La transformada de Fourier de la función de 2-puntos

Por otro lado, es interesante comparar nuestro resultado con las funciones de correlación obtenidas mediante otros métodos en la literatura. La expresión para $B_+(j, m)$ (241)

³⁸La importancia de este aspecto particular nos fue señalada por D. Kutasov y J.M. Maldacena.

es exactamente la transformada de Fourier del resultado obtenido en las referencias [75, 42] (ver también [7]), a saber

$$\langle \Phi_{j_1}(x, \bar{x}) \Phi_{j_2}(x', \bar{x}') \rangle = \frac{k-2}{\pi} [\nu(k)]^{j_1+j_2+1} \frac{\Gamma(1 - \frac{j_1+j_2+1}{k-2})}{\Gamma(\frac{j_1+j_2+1}{k-2})} |x - x'|^{-2(j_1+j_2+2)} \quad (252)$$

donde

$$\nu(k) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma(1 - \rho)}{\Gamma(1 + \rho)}, \quad (253)$$

excepto por un factor irrelevante $(\rho/\pi^2)^{s_+}$ (notemos que cuando $s_+ = 0$ este factor es 1, por lo que no afecta al término $A(j)$ en la función de 2-puntos y puede ser absorbido en la normalización de los vértices). Esto puede verificarse fácilmente sabiendo que

$$\int \int d^2x_1 d^2x_2 |x_1 - x_2|^{-4(j+1)} x_1^{j-m} \bar{x}_1^{j-\bar{m}} x_2^{j-m} \bar{x}_2^{j-\bar{m}} = \pi \frac{\Gamma(j-m+1)\Gamma(j+\bar{m}+1)\Gamma(-2j-1)}{\Gamma(m-j)\Gamma(-\bar{m}-j)\Gamma(2j+2)} \quad (254)$$

Más aun, la transformada de Fourier puede ser computada aun en el caso en el que $j_1 + j_2 + 1 = 0$. Para ver esto, recordemos que la distribución delta de Dirac en dos dimensiones puede escribirse como

$$\delta^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|x|^{2(\varepsilon-1)}}{\Gamma(\varepsilon)} \quad (255)$$

Así, definiendo $j_2 = -1 - j_1 - \varepsilon$ y tomando el límite $\varepsilon \rightarrow 0$, se recupera el término $A(j)$ (i.e. el término que es proporcional a $\delta(j_1 + j_2 + 1)$), a saber

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \Phi_{j_1}(x, \bar{x}) \Phi_{-1-j_1-\varepsilon}(x', \bar{x}') \rangle = \delta^2(x - x'). \quad (256)$$

Por otro lado, es interesante observar que la expresión para la función de 2-puntos que acabamos de calcular tiene la forma general

$$\langle \Phi_{j_1}(x_1, \bar{x}_1; z_1, \bar{z}_1) \Phi_{j_2}(x_2, \bar{x}_2; z_2, \bar{z}_2) \rangle \sim |z_1 - z_2|^{-2(h_1+h_2)} |x_1 - x_2|^{-2(\Delta_1+\Delta_2)} \delta_{h_1+h_2, 0} \delta_{\Delta_1+\Delta_2, 0}$$

lo que es consistente con los pesos conformes h y Δ de la hoja de mundo y del espacio-tiempo respectivamente, y a la vez con la identificación de las coordenadas (x, \bar{x}) como las de la variedad donde se formula la teoría conforme dual del borde, mientras que

(z, \bar{z}) referirán a las coordenadas de la variedad donde se formula la teoría conforme de la hoja de mundo.

Mostraremos que la misma concordancia se obtiene en el caso de las funciones de correlación de 3-puntos. Curiosamente, la dinámica de la teoría en la región cercana al borde, sumada a la extensión analítica en el número de cargas s , es suficiente para recobrar la estructura conforme de la teoría sobre $SL(2)$, al menos hasta donde se ha calculado. Este es uno de los resultados más interesantes de esta tesis.

7.1.2 La estructura de polos de la función de 2-puntos

Hay información física de la función de 2-puntos contenida en la estructura de polos y en los cambios de signo de los correladores. Podemos comenzar separando las condiciones de polos en dos clases distintas:

- *Los polos provenientes de los factores*

$$\Delta(j + 1 \pm m) = \frac{\Gamma(j + 1 \mp m)}{\Gamma(\pm m - j)} \quad (257)$$

los cuales se encuentran en

$$\pm m - j \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \quad (258)$$

y que son precisamente las condiciones de los estados de las series discretas \mathcal{D}_j^\pm de $SL(2)$. Así, los estados de las series discretas aparecen como condiciones de divergencias de los correladores de 2-puntos de la teoría.

Estos correladores han sido obtenidos en el contexto de la teoría de cuerdas sobre la versión euclidea de AdS_3 . Las representaciones irreducibles de la teoría euclidea (*i.e.* del modelo WZNW sobre $\frac{SL(2, \mathbb{C})}{SU(2)}$) son precisamente las representaciones principales continuas, con $j = -\frac{1}{2} + i\lambda$ siendo λ un número real positivo. Notemos que las funciones de 2-puntos son perfectamente regulares en el caso de las representaciones continuas, que son las representaciones irreducibles del modelo sobre $SL(2, \mathbb{C})/SU(2)$. Los estados de las series discretas aparecen en el modelo euclideo como estados no normalizables. Para éstos, la función de 2-puntos se obtiene simplemente extendiendo

analíticamente la expresión obtenida. Dicha expresión resulta divergente para estos estados no normalizables. Esto significa que los estados de la serie discretas (*i.e.* las condiciones que definen a estos estados en términos de los números cuánticos j y m) aparecen como condiciones de polos de la extensión analítica de las expresiones obtenidas para los correladores del modelo sobre $\frac{SL(2),C}{SU(2)}$.

En el caso de la descripción en términos de las variables (x, \bar{x}) estos polos están dados por las divergencias de los factores

$$|x_1 - x_2|^{-2(j_1+j_2)-4} \quad (259)$$

$$\delta(x_1 - x_2)\delta(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \quad (260)$$

que se interpretan en el contexto de la teoría dual CFT_2 del borde de AdS_3 como las divergencias propias de las funciones de correlación que en dicha teoría conforme surgen en el límite de coincidencia de dos operadores insertados en los puntos (x_1, \bar{x}_1) y (x_2, \bar{x}_2) repectivamente. Por su parte, el término (260) representa puntos de contacto en dicha teoría conforme.

- *Los polos provenientes del factor*

$$\Delta \left(\frac{j_1 + j_2 + 1}{2 - k} \right) = \frac{\Gamma \left(-\frac{j_1 + j_2 + 1}{k-2} \right)}{\Gamma \left(1 + \frac{j_1 + j_2 + 1}{k-2} \right)} \quad (261)$$

que se encuentran en

$$\frac{j_1 + j_2 + 1}{k - 2} \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \quad (262)$$

Como un ejemplo particular tenemos el polo alojado en $j_1 + j_2 = k - 3$, condición que muestra que el factor (257) da cuenta de efectos no perturbativos ya que esta última condición de polos requiere para ser satisfecha que los números cuánticos j sean del orden $j \sim k$. Recordando que $k = \frac{l^2}{l^2} \sim \frac{1}{\alpha'}$, se sigue que en el límite semiclásico $k \rightarrow \infty$ la condición $2j \sim k$ no puede ser cumplida por estados con valores finitos de masa ($M \sim j$). Esto es, los estados del espectro de cuya presencia da cuenta la condición (262) no se manifiestan en el límite semiclásico, *i.e.* se trata de efectos no-perturbativos. Este tipo de efectos no-perturbativos aparecerán en las funciones de

3-puntos y en todas las funciones de correlación de la teoría. En la referencia [16] éstos fueron interpretados como instantones de la teoría sobre la hoja de mundo. En [7] estas condiciones de polos se relacionan explícitamente con el límite de unitariedad fuerte.

7.1.3 La función de 2-puntos a partir de la simetría de reflexión

Para concluir esta sección, estudiaremos una forma alternativa de obtener la función de 2-puntos utilizando las propiedades de simetría de reflexión ($j \leftrightarrow -1 - j$) de la teoría.

Con el fin de ser más concisos digamos que: en estos párrafos demostraremos que el término $A_{(j,m)}$ necesariamente aparece en la función de 2-puntos si el término $B_{(j,m)}$ aparece; y esto es debido a la simetría de reflexión y a la forma particular de las correcciones cuánticas del coeficiente de reflexión $R_{(j)}$.

La simetría ante el intercambio $j \leftrightarrow -1 - j$ se manifiesta explícitamente en la forma funcional de los operadores. Como mencionamos anteriormente, el límite cercano al borde de la representación de Wakimoto para los operadores de vértice en la base de momentos definidos tiene la forma

$$\mathcal{V}_{j,m} = \gamma^{j-m} e^{\frac{2j}{\alpha_+} \phi} + (2j+1)\Delta(1+j+m)\Delta(1+j-m)\Delta(-2j-1)\gamma^{-1-j,m} e^{-\frac{2(j+1)}{\alpha_+} \phi}$$

que permite recuperar $V_{j,m} = \gamma^{j,m} e^{2j\phi/\alpha_+}$ en el límite $\phi \rightarrow \infty$ para el caso $j > -\frac{1}{2}$. De esta manera, podemos escribirlos como

$$\mathcal{V}_{j,m} = \gamma^{j-m} e^{\frac{2j}{\alpha_+} \phi} + \mathcal{R}(j, m)\gamma^{-1-j-m} e^{-\frac{2(1+j)}{\alpha_+} \phi} \quad (263)$$

donde

$$\mathcal{R}(j, m) = R(j)\Delta(1+j+m)\Delta(1+j-m)\Delta(-2j-1) \quad (264)$$

y hemos usado una normalización en la cual el límite clásico de $R(j, m)$ es $2j+1$. Así, tenemos que

$$\mathcal{V}_{j,m} = V_{j,m} + \mathcal{R}(j, m)V_{-1-j,m} \quad (265)$$

La función de 2-puntos de estos operadores tiene la forma general

$$\mathcal{A}_{(j_1, j_2)} = \langle \mathcal{V}_{j_1, m_1} \mathcal{V}_{j_2, m_2} \rangle = \langle (V_{j_1, m_1} + \mathcal{R}(j_1, m_1)V_{-1-j_1, m_1}) (V_{j_2, m_2} + \mathcal{R}(j_2, m_2)V_{-1-j_2, m_2}) \rangle \quad (266)$$

Así, es posible escribir

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{V}_{j_1, m_1}(z_1) \mathcal{V}_{j_2, m_2}(z_2) \rangle &= |z_1 - z_2|^{-4} [(B_{(j_1, m_1)} + \mathcal{R}_{(j_1, m_1)}^2 B_{(-j_1-1, m_1)}) \delta(j_1 - j_2) + \\ &\quad + (\mathcal{R}_{(j_1, m_1)} B_{(-j_1-1, m_1)} + \mathcal{R}_{(-j_1-1, m_1)} B_{(j_1, m_1)}) \delta(j_1 + j_2 + 1)] \delta(m_1 + m_2) \end{aligned} \quad (267)$$

De esta manera, conociendo del cálculo explícito la función $B_{(j, m)}$ obtenemos la función de 2-puntos completa

$$\langle \mathcal{V}_{j_1, m_1}(z_1) \mathcal{V}_{j_2, m_2}(z_2) \rangle = 2 |z_1 - z_2|^{-4} (B_{(j_1, m_1)} \delta(j_1 - j_2) + \delta(j_1 + j_2 + 1)) \delta(m_1 + m_2) \quad (268)$$

Por otro lado, invirtiendo el razonamiento, estas consideraciones basadas en la simetría de reflexión (*i.e.* la correspondencia entre j y $-1 - j$) implican directamente que la presencia de un término proporcional a $\delta(j_1 - j_2)$ en la función de 2-puntos requiere ineluctablemente la presencia de un término proporcional a $\delta(j_1 + j_2 + 1)$.

Aquí, la línea del razonamiento fue la siguiente: la función de 2-puntos $\langle V_{j_1, m_1} V_{j_1, m_1} \rangle$ está dada por

$$\langle V_{j_1, m_1} V_{j_1, m_1} \rangle = |z_1 - z_2|^{-4} B_{(j_1, m_1)} \delta(j_1 - j_2) \delta(m_1 + m_2)$$

por lo que obtenemos directamente de (265) que

$$\langle \mathcal{V}_{j, m}(z_1) \mathcal{V}_{j, -m}(z_2) \rangle = |z_1 - z_2|^{-4} (B_{(j, m)} + B_{(-j-1, m)} \mathcal{R}_{(j, -m)}^2) \quad (269)$$

y análogamente

$$\langle \mathcal{V}_{j, m}(z_1) \mathcal{V}_{-j-1, -m}(z_2) \rangle = |z_1 - z_2|^{-4} (\mathcal{R}_{(-j-1, -m)} B_{(j, m)} + B_{(-j-1, -m)} \mathcal{R}_{(j, m)}) \quad (270)$$

de las cuales es inmediato deducir

$$\langle \mathcal{V}_{j_1, m_1}(z_1) \mathcal{V}_{j_2, -m_1}(z_2) \rangle = |z_1 - z_2|^{-4} (b_{(j_1, m_1)} \delta(j_1 - j_2) + a_{(j_1, m_1)} \delta(j_1 + j_2 + 1)) \quad (271)$$

Comparando (269), (270) y (271) obtenemos

$$\frac{b_{(j, m)}}{a_{(j, m)}} = \frac{B_{(j, m)} + B_{(-j-1, m)} \mathcal{R}_{(j, -m)} \mathcal{R}_{(j, -m)}}{\mathcal{R}_{(-j-1, -m)} B_{(j, m)} + B_{(-j-1, -m)} \mathcal{R}_{(j, m)}}$$

que se satisface si

$$\frac{b_{(j,m)}}{a_{(j,m)}} = B_{(j,m)} = \mathcal{R}_{(j,m)} \quad (272)$$

$$A_{(j,m)} = 1 \quad (273)$$

Así, el ingrediente fundamental en esta digresión ha sido la corrección cuántica que recibe la cantidad $R(j)$, corrección que ya ha sido señalada anteriormente en la literatura y calculada por nosotros en las secciones anteriores, según

$$R(j)_{class} \rightarrow \left(\frac{\Gamma(1 - \frac{1}{k-2})}{\Gamma(1 + \frac{1}{k-2})} \right)^{2j+1} \Delta \left(-\frac{2j+1}{k-2} \right) R(j)_{class} \quad (274)$$

Teniendo en cuenta esto, y viendo que (274) no es más que una redefinición provista por efectos cuánticos del cociente entre V_j y V_{-1-j} , debemos ser prudentes en nuestros cálculos y considerar dichas correcciones en el coeficiente $\mathcal{R}(j, m)$. De esta manera, debemos notar que en el caso particular en el cual $j > -\frac{1}{2}$ (donde uno de los términos de (265) se hace desdeñable) se obtiene la siguiente relación

$$\frac{\mathcal{V}_{j,m}}{\mathcal{V}_{-1-j,m}} \sim \frac{1}{\mathcal{R}(-1-j)} \sim \mathcal{R}(j) \quad (275)$$

Así, las correcciones cuánticas se introducen, como en (274), al admitir el cambio

$$\mathcal{R}(j, m)_{class} \rightarrow \mathcal{R}(j, m)_{quant} = \left(-\pi \frac{\Gamma(\frac{1}{k-2})}{\Gamma(1 - \frac{1}{k-2})} \right)^{2j+1} \frac{\Gamma(1 - \frac{2j+1}{k-2})}{\Gamma(\frac{2j+1}{k-2})} \mathcal{R}(j, m)_{class} \quad (276)$$

Otra forma de ver que esta transformación cuántica del $\mathcal{R}(j, m)$ es la correcta es seguir los pasos de Satoh *et al.* en la referencia [26]; esto es: encontrar qué factor $\frac{\mathcal{R}_{quant}}{\mathcal{R}_{class}}$ es el que se requiere para que en el caso particular $j > -\frac{1}{2}$ se recupere la función de correlación calculada en (238).

Así, hemos presentado diferentes verificaciones de la consistencia de la forma funcional de la función de correlación de 2-puntos.

7.2 La función de correlación de 3-puntos

El cálculo explícito de la amplitud para el caso de tres taquiones sigue pasos similares a los descritos en la sección anterior. Para comenzar, y con la intención de ser más

claros, trataremos el caso de las funciones de correlación que contienen un estado de peso máximo, por ejemplo tomando $j_2 = m_2$. En la referencia [30] se muestra cómo el caso genérico de amplitudes de 3-puntos puede ser expresado en términos de las que contienen un estado de peso máximo actuando con las corrientes J^- sobre éstas. Aunque es importante mencionar que esto ha sido realizado para el caso particular de las representaciones discretas.

Es conveniente fijar los puntos de inserción de los tres operadores de vértice en $(z_1, z_2, z_3) = (0, 1, \infty)$. De esta manera, la amplitud toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{m_1, m_2, m_3}^{j_1, j_2, j_3} &= \Gamma(-s_-) \int \prod_{i=1}^{s_-} d^2 w_i \left\langle \gamma_{(0)}^{j_1 - m_1} \gamma_{(\infty)}^{j_3 - m_3} \prod_{i=1}^{s_-} \beta_{(w_i)}^{k-2} \right\rangle \times c.c. \times \\ &\times \left\langle e^{\frac{2j_1}{\alpha_+} \phi(0)} e^{\frac{2j_2}{\alpha_+} \phi(1)} e^{\frac{2j_3}{\alpha_+} \phi(\infty)} \prod_{i=1}^{s_-} e^{-\alpha_+ \phi(w_i, \bar{w}_i)} \right\rangle \\ &\times \left\langle e^{i\sqrt{\frac{2}{k}} m_1 X(0)} e^{i\sqrt{\frac{2}{k}} (m_1 + \frac{k}{2} \omega_1) Y(0)} e^{i\sqrt{\frac{2}{k}} m_2 X(1)} e^{i\sqrt{\frac{2}{k}} (j_2 + \frac{k}{2} \omega_2) Y(1)} e^{i\sqrt{\frac{2}{k}} m_3 X(\infty)} e^{i\sqrt{\frac{2}{k}} (m_3 + \frac{k}{2} \omega_3) Y(\infty)} \right\rangle \end{aligned}$$

y las leyes de conservación son en este caso

$$(k-2)s_- = j_1 + j_2 + j_3 + 1 \quad , \quad m_1 + m_2 + m_3 = 0 \quad , \quad \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0 \quad (277)$$

(notemos que aquí estamos nuevamente usando operadores de apantallamiento del tipo \mathcal{S}_- , a diferencia de lo que se hizo en la referencia [30]).

Los correladores del sistema (β, γ) pueden evaluarse de manera análoga a la ecuación (233), con

$$\mathcal{P} = \prod_{i=1}^{s_-} \prod_{n=1}^{k-2} (w_i^{(n)})^{m_1 - j_1} \prod_{i < j} (w_i^{(n)} - w_j^{(m)}), \quad (278)$$

y el resultado es ahora

$$\left| \left\langle \gamma_{(0)}^{j_1 - m_1} \gamma_{(\infty)}^{j_3 - m_3} \prod_{i=1}^{s_-} \beta_{(w_i)}^{k-2} \right\rangle \right|^2 = (-)^{-\tilde{\rho} s_-} \Delta(1 + j_1 - m_1) \Delta(1 + j_3 - m_3) \prod_{i=1}^{s_-} |w_i|^{2\tilde{\rho}} \quad (279)$$

Luego de efectuar las contracciones de los exponenciales, obtenemos

$$\mathcal{A}_{m_1, j_2, m_3}^{j_1, j_2, j_3} = (-)^{-\tilde{\rho} s_-} \Delta(1 + j_1 - m_1) \Delta(1 + j_3 - m_3) \tilde{\mathcal{I}}(j_1, j_2, j_3, k), \quad (280)$$

donde

$$\tilde{\mathcal{I}}(j_1, j_2, j_3, k) = \tilde{\mu}^{s_-} \Gamma(-s_-) \int \prod_{i=1}^{s_-} d^2 w_i |w_i|^{4j_1+2\tilde{\rho}} |1 - w_i|^{4j_2} \prod_{i<j} |w_i - w_j|^{4\tilde{\rho}} \quad (281)$$

puede ser evaluada nuevamente usando la fórmula de Dotsenko y Fateev (237) y las funciones especiales $G_k(j)$, las cuales se definen a partir de las funciones dobles de Barnes $\Gamma_2(x | 1, y)$ según

$$G_k(x) \equiv (k-2)^{\frac{x(k-1-x)}{2k-4}} \Gamma_2(-x | 1, k-2) \Gamma_2(k-1+x | 1, k-2)$$

siendo las funciones de Barnes definidas como

$$\log(\Gamma_2(x | 1, y)) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \partial_\varepsilon \left(\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} (x+p+qy)^{-\varepsilon} - \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \delta_{p,0} \delta_{q,0} (p+qy)^{-\varepsilon} \right) \quad (282)$$

Las funciones $G_k(x)$ satisfacen las siguientes relaciones funcionales

$$\begin{aligned} G_k(x) &= G_k(-1-x-(k-2)) \\ G_k(x+1) &= \Delta((1+x)\rho) G_k(x) \\ G_k(x-k+2) &= (k-2)^{-2x-1} \Delta(1+x) G_k(x) \end{aligned} \quad (283)$$

y desarrollan polos en

$$x = p + q(k-2) \quad (284)$$

$$x = -(p+1) - (q+1)(k-2) \quad (285)$$

con $(p, q) \in (\mathbf{Z}_{\geq 0})^2$.

Así, el resultado final puede ser expresado de la forma

$$\tilde{\mathcal{I}}(j_1, j_2, j_3, k) = [\pi \tilde{\mu} \Delta(-\tilde{\rho})]^{s_-} D(j_1, j_2, j_3) \quad (286)$$

donde

$$D(j_1, j_2, j_3) = \Delta(-1 - \sum_i j_i) \Delta(1+2j_2) \Delta(j_1-j_3-j_2) \Delta(-j_1-j_2+j_3) C(j_1, j_2, j_3) \quad (287)$$

y

$$C(j_1, j_2, j_3) = \frac{G_k(-2 - \sum_i j_i) G_k(-j_1 + j_2 - j_3 - 1)}{G_k(-1) G_k(-2j_1 - 1)} \times \frac{G_k(j_1 - j_3 - j_2 - 1) G_k(-1 - j_1 - j_2 + j_3)}{G_k(-2j_3 - 1) G_k(-2j_2 - 1)}. \quad (288)$$

Este cálculo puede ser reproducido en detalle usando los operadores de apantallamiento \mathcal{S}_+ , como fue hecho en la referencia [30], en lugar de tratar con \mathcal{S}_- . En ese caso, la integral de Dotsenko y Fateev sería

$$\mathcal{I}(j_1, j_2, j_3, k) = \mu^{s_+} \Gamma(-s_+) \int \prod_{i=1}^{s_+} d^2 w_i |w_i|^{-2-4\rho j_i} |1 - w_i|^{-4\rho j_2} \prod_{i < j} |w_i - w_j|^{4\rho} \quad (289)$$

Teniendo en cuenta el factor de multiplicidad (*i.e.* factor de simetría de las contracciones) del sistema (β, γ) , el resultado final es

$$\mathcal{A}_{m_1, j_2, m_3}^{j_1, j_2, j_3} = (-)^{-s_+} \Delta(1 + j_1 - m_1) \Delta(1 + j_3 - m_3) \mathcal{I}(j_1, j_2, j_3, k) \quad (290)$$

donde

$$\mathcal{I}(j_1, j_2, j_3, k) = [\pi \mu \Delta(-\rho)]^{s_+} D(j_1, j_2, j_3) \quad (291)$$

Y aquí nuevamente, de manera análoga a lo que obtuvimos para el caso de la función de 2-puntos, ambos resultados (280) y (290) coinciden si se cumple la igualdad (242),

$$\pi \tilde{\mu} \Delta(-\tilde{\rho}) = (\pi \mu \Delta(-\rho))^{-\rho^{-1}} \quad (292)$$

Comentaremos sobre esta ecuación en breve.

Es posible observar que, al igual que en el caso de la función de 2-puntos, se obtiene una concordancia exacta si se realiza el cómputo de los correladores de 3-puntos empleando las representaciones conjugadas para representar uno de los estados del correlador. Por ejemplo, si calculamos $\langle V_{j_1, m_1}^{\omega_1} V_{j_2, m_2}^{\omega_2} \bar{V}_{j_3, j_3}^{\omega_3(0)} \rangle_{\mathcal{C}_0}$ o bien $\langle V_{j_1, m_1}^{\omega_1} V_{j_2, m_2}^{\omega_2} \bar{V}_{j_3, j_3}^{\omega_3(-)} \rangle_{\mathcal{C}_-}$, dando (290) o (280) cuando se consideran los operadores \mathcal{S}_+ o \mathcal{S}_- respectivamente. Es interesante remarcar nuevamente que nuestro formalismo lleva a una concordancia exacta para el resultado de las funciones de 2-puntos y de 3-puntos con los resultados

de Teschner [74] (*i.e.* el resultado más allá del límite cercano al borde) cuando se consideran procesos que conservan el número de enrollamientos, a la vez que nos permite extender la prescripción de manera natural a efectos de calcular procesos de dispersión que violan el número de enrollamientos también.

7.2.1 La transformada de Fourier de la función de 3-puntos

No es difícil ver que (290) reproduce completamente la transformada de Fourier del resultado obtenido en las referencias [74, 16, 85], siendo éste

$$\int d^2x_1 d^2x_2 d^2x_3 |x_1|^{2(j_1-m_1)} |x_2|^{2(j_2-m_2)} |x_3|^{2(j_3-m_3)} |x_1-x_2|^{-2(j_1+j_2-j_3)} \times \\ \times |x_1-x_3|^{-2(j_1+j_3-j_2)} |x_2-x_3|^{-2(j_2+j_3-j_1)} C(j_1, j_2, j_3), \quad (293)$$

y

$$\mathcal{A}_{m_1, j_2, m_3}^{j_1, j_2, j_3} = |x_1-x_2|^{-2(j_1+j_2-j_3)} |x_1-x_3|^{-2(j_1+j_3-j_2)} |x_2-x_3|^{-2(j_2+j_3-j_1)} C(j_1, j_2, j_3)$$

Corolario: *Al igual que la función de 2-puntos, la función de 3-puntos calculada con el formalismo de campos libres lleva a un resultado que coincide exactamente con el obtenido por otros formalismos; incluyendo efectos no perturbativos propios de regímenes finitos de k .*

7.2.2 La estructura de polos de la función de 3-puntos

La estructura de polos de los correladores triples también fue analizada en la literatura previamente [7, 16]. Los polos presentados por dichas funciones de correlación permiten establecer las reglas de fusión de la teoría conforme como es usual en las teorías racionales y como veremos en las próximas secciones. Pasemos, pues, a caracterizar estos polos con la siguiente forma de clasificación:

- *Los polos provenientes de los factores*

$$\Delta(j_a + 1 \pm m_a) = \frac{\Gamma(j_a + 1 \mp m_a)}{\Gamma(\pm m_a - j_a)} \quad (294)$$

con $a \in \{1, 2, 3\}$, alojados en

$$\pm m_a - j_a \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \quad (295)$$

que nuevamente se entienden como estados de las series discretas de $SL(2)$. Y, en términos de las variables Fourier-conjugadas (x_a, \bar{x}_a) , representan justamente las divergencias propias del límite de coincidencia de los operadores de la teoría de campos conforme del borde, divergencias del orden

$$|x_a - x_b|^{-2(j_a + j_b - j_c)} \quad (296)$$

para $a, b, c \in \{1, 2, 3\}$, con $a \neq b$, $a \neq c$ y $c \neq b$.

- *Los polos provenientes de los factores*

$$G_k(-1 - j_1 - j_2 + j_3) \quad (297)$$

que se hacen presentes en

$$\{-1 - j_1 - j_2 + j_3 \in p + q(k - 2)\} \cup \quad (298)$$

$$\{-1 - j_1 - j_2 + j_3 \in -(p + 1) - (q + 1)(k - 2)\} \quad (299)$$

siendo $(p, q) \in (\mathbf{Z}_{\geq 0})^2$. Y análogamente para las condiciones obtenidas ante permutaciones de los j_1, j_2, j_3 .

En [16] estos polos son considerados como *naturales* en el contexto de funciones de correlación de una teoría conforme sobre $SL(2)$. Remitimos a dicha referencia para una interesante discusión del significado de los mismos (ver también [7]).

- *Los polos provenientes del factor*

$$G_k(-2 - j_1 - j_2 - j_3) \quad (300)$$

que nuevamente dan cuenta de efectos no-perturbativos $j \sim k$ de la teoría, interpretables como instantones en la hoja de mundo [16].

7.2.3 Procesos de dispersión que violan la conservación del número de enrollamientos

Como recién mencionamos, la novedad que nuestra prescripción proporciona es la posibilidad de calcular procesos de dispersión de N cuerdas en los cuales el número total de enrollamientos de las cuerdas se viola (según $|\delta\omega| \leq N - 2$). Por ejemplo, consideremos

$$\begin{aligned} \left\langle V_{j_1, m_1}^{\omega_1}(z_1) \tilde{V}_{j_2, j_2}^{\omega_2(-)}(z_2) \tilde{V}_{j_3, m_3}^{\omega_3(-)}(z_3) \right\rangle_{c_-} &= \int \prod_{i=1}^{s_+} d^2 w_i \left| \left\langle \gamma_{(z_1)}^{j_1 - m_1} \frac{\beta_{(z_2)}^{2j_2}}{\Gamma(1 + 2j_2)} \frac{\beta_{(z_3)}^{2j_3}}{\Gamma(1 + 2j_3)} \prod_{i=1}^{s_+} \beta_{(w_i)} \right\rangle \right|^2 \times \\ &\times \left\langle e^{\frac{2j_1}{\alpha_+} \phi(z_1, \bar{z}_1)} e^{-\frac{(2j_2+k)}{\alpha_+} \phi(z_2, \bar{z}_2)} e^{-\frac{(2j_3+k)}{\alpha_+} \phi(z_3, \bar{z}_3)} \prod_{i=1}^{s_+} e^{-\frac{2}{\alpha_+} \phi(w_i, \bar{w}_i)} \right\rangle \end{aligned} \quad (301)$$

Los exponenciales de los campos X y Y son omitidos en esta expresión. Las leyes de conservación en este caso son

$$s_+ = j_1 - j_2 - j_3 - \frac{k}{2}, \quad m_1 + j_2 - \frac{k}{2} + j_3 = 0, \quad \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = -1 \quad (302)$$

A efectos de computar los correladores fijamos tres puntos de la manera usual $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ y $z_3 = \infty$. El correlador del sistema (β, γ) está dado por

$$\left\langle \gamma_{(0)}^{j_1 - m_1} \beta_{(1)}^{2j_2} \beta_{(\infty)}^{2j_3} \prod_{i=1}^{s_+} \beta_{(w_i)} \right\rangle = \frac{\Gamma(2j_2 + 2j_3 + s_+ - j_1 + m_1)}{\Gamma(-j_1 + m_1)} \prod_{i=1}^{s_+} w_i^{-1}, \quad (303)$$

y la integral de Dotsenko-Fateev a ser computada luego de contraer los campos ϕ es

$$\int \prod_{i=1}^{s_+} d^2 w_i |w_i|^{-2-4j_1\rho} |1 - w_i|^{4\rho(j_2 + \frac{k}{2})} \prod_{i < j} |w_i - w_j|^{4\rho} \quad (304)$$

Evaluando esta integral y simplificando los productos de funciones $\Delta(x)$ usando (283) el resultado es

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{m_1, j_2, j_3}^{j_1, j_2, j_3} &= \frac{\Gamma(j_2 + j_3 - \frac{k}{2} + m_1)^2}{\Gamma(-j_1 + m_1)^2 \Gamma(2j_2 + 1)^2 \Gamma(2j_3 + 1)^2} (\pi\mu\Delta(-\rho))^{s_+} \times \\ &\times D^\omega(j_1, j_2, j_3, k) \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + 1) \end{aligned} \quad (305)$$

donde

$$D^\omega(j_1, j_2, j_3; k) = D(j_1, -j_2 - \frac{k}{2}, -1 - j_3; k)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{G_k(j_1 - j_2 - j_3 - \frac{k}{2}) G_k(-1 - j_1 - j_2 - \frac{k}{2} - j_3)}{G_k(-1) G_k(-2j_1 - 1)} \times \\
&\quad \times \frac{G_k(1 + j_1 - j_2 + j_3 - \frac{k}{2}) G_k(-j_1 - j_2 - \frac{k}{2} + j_3)}{G_k(1 + 2j_3) G_k(-2j_2 - k)} \quad (306)
\end{aligned}$$

Notemos que el cociente de las funciones $\Gamma(x)$ que viene del factor de multiplicidad de las contracciones de los correladores de los campos (β, γ) y la normalización de los vértices conjugados pueden ser escritos de una manera familiar usando la propiedad

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(-s)} = (-1)^s \Gamma(s + 1) \quad (307)$$

Así, finalmente obtenemos

$$\mathcal{A}_{m_1, j_2, j_3}^{j_1, j_2, j_3} = \Delta(1 + j_1 - m_1) \Delta(-2j_2) \Delta(-2j_3) (-\pi \mu \Delta(1 - \rho))^{s+} \times \times D^\omega(j_1, j_2, j_3, k) \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + 1) \quad (308)$$

Recordemos que los operadores de vértice con números cuánticos $(j_2, m_2 = j_2)$ y $(j_3, m_3 = j_3)$ crean estados conjugados de peso máximo. Así, a efectos de comparar esta expresión con (290), es conveniente hacer la identificación $j_2 \rightarrow -1 - j_2$ (de manera similar para j_3) en los argumentos de las funciones $\Delta(x)$ consideradas arriba .

Resultados similares se obtienen para el caso en el cual se considera el vacío conjugado $\tilde{V}_{j,j}^{\omega(0)}$ en el lugar de $\tilde{V}_{j,j}^{\omega(-)}$. Más aun, la misma expresión se encuentra si se insertan los operadores de apantallamiento \mathcal{S}_- y si nuevamente se reemplaza $(\pi \mu \Delta(-\rho))^{-1/\rho}$ por $\pi \tilde{\mu} \Delta(-\tilde{\rho})$.

Notemos que dado que AdS_3 es una variedad simplemente conexa, cuya homología reducida es trivial, la necesidad de incluir el número de enrollamientos como un grado de libertad para clasificar los estados se debe geoméricamente al hecho de que, debido a la existencia del campo $B_{\mu\nu}$, las cuerdas tienden a expandirse hacia el borde del espacio-tiempo mientras que compiten con el potencial gravitatorio; de manera tal que las cuerdas requieren una energía finita para cambiar su número de enrollamientos. Así, el número de enrollamientos en AdS_3 no es un número topológico (*e.g.* como en el caso de la reducción dimensional tipo Kaluza-Klein) sino un grado de libertad de naturaleza energética. Por esto, no es descabellado el resultado obtenido, según el cual

el número de enrollamientos cambia en un proceso de interacción, debido a algo que podemos pensar como un efecto *túnel*.

Así, la función de 3-puntos que viola la conservación del número total de enrollamientos en una unidad (el máximo según la cota obtenida previamente) está dada por la ecuación (308) que presenta polos dados por las cuatro funciones $G_k(x)$ en el numerador. Estos polos están alojados en

$$\begin{aligned} j_1 - j_2 - j_3 - \frac{k}{2} &= p + q(k - 2) \quad , \quad 1 + j_1 - j_2 + j_3 - \frac{k}{2} = p + q(k - 2) \\ -1 - j_1 - j_2 - \frac{k}{2} - j_3 &= p + q(k - 2) \quad , \quad -j_1 - j_2 - \frac{k}{2} + j_3 = p + q(k - 2) \end{aligned}$$

donde $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$. Como en el caso en el cual el número de enrollamientos se conserva algunos polos están fuera del límite de unitariedad $-\frac{1}{2} < j < \frac{k-3}{2}$.

7.2.4 Observaciones sobre los dos operadores de apantallamiento y la relación entre acoplamiento fuerte y débil

Hagamos ahora algunos comentarios importantes acerca de la ecuación (292). Una relación funcional similar fue discutida por Zamolodchikov, Fateev y Teshner en la literatura (ver [78] y las referencias de dicho artículo) en conexión con la teoría de Liouville, donde refleja la autodualidad de dicha teoría ante $\rho \leftrightarrow \tilde{\rho}$ y aparece como una condición necesaria para producir la estructura de polos correcta de los correladores. No obstante, la teoría sobre el cociente $SL(2)/U(1)$ no es explícitamente autodual. Por su parte, se ha conjeturado que esta teoría es dual al modelo de sine-Liouville [81, 82]. En este caso existe una dualidad entre regímenes de acoplamiento fuerte y débil en la teoría sobre la hoja de mundo. La teoría conforme sobre el cigarro se vuelve débil en el límite $k \rightarrow \infty$ mientras que es fuertemente acoplada en la zona $k \rightarrow 2$, donde la teoría sine-Liouville se vuelve débilmente acoplada. Recordemos, pues, el comentario hecho previamente acerca de los términos de perturbación, los operadores de apantallamiento satisfacen, de hecho, una relación similar, *i.e.* \mathcal{S}_- es desdeñable en el límite $k \rightarrow \infty$ y representa una interacción fuerte cuando $k \rightarrow 2$, contrariamente al caso de \mathcal{S}_+ . Por otro lado, éstos cumplen una relación funcional similar a la que cumplen las dos cargas de

apantallamiento de la teoría de Liouville, a saber $\mathcal{S}_- = (\mathcal{S}_+)^{-1/\rho}$ (aunque no satisfacen otras identidades funcionales, por ejemplo $\mathcal{S}_-(\rho^{-1}) \neq \mathcal{S}_+(\rho)$, lo que hace que la teoría sobre $SL(2)$ no sea *explícitamente* autodual).

No está claro hasta el momento qué conclusiones pueden extraerse de estas observaciones. Las expresiones (240) y (241) podrían estar describiendo las funciones de correlación en dos regímenes distintos de la misma teoría (similarmente para las funciones de 3-puntos). Ya que los cálculos son perturbativos, cabría esperar que (240) y (280) representaran el resultado correcto en la región $k \rightarrow \infty$ mientras que (241) y (290) hiciesen lo propio cuando $k \rightarrow 2$. No obstante, si la igualdad (292) es tomada seriamente, podría estar indicando una autodualidad oculta de la teoría conforme sobre el cociente $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$.

Por otro lado, es posible comentar sobre la relación funcional que satisfacen las constantes de acoplamiento μ y $\bar{\mu}$ en la expresión (292): Consideremos nuevamente un corrimiento del campo ϕ definido por

$$\phi \rightarrow \phi + a \quad (309)$$

siendo a una constante. Redefinamos también las variables γ y β con un factor constante, según

$$\gamma \rightarrow e^{-\alpha} \gamma \quad (310)$$

$$\beta \rightarrow e^{+\alpha} \beta \quad (311)$$

Estas transformaciones son, de hecho, simetrías de la acción de la teoría libre. Y, por su parte, si hacemos estos cambios los términos de interacción se transforman de la siguiente manera

$$\mathcal{L}_{int} = \mu \beta \bar{\beta} e^{-\frac{2}{\alpha_+} \phi} + \bar{\mu} (\beta \bar{\beta})^{\frac{\alpha_+^2}{2}} e^{-\alpha_+ \phi} \rightarrow e^{2\alpha - \frac{2}{\alpha_+} a} \mu \beta \bar{\beta} e^{-\frac{2}{\alpha_+} \phi} + e^{\alpha \alpha_+^2 - \alpha_+ a} \bar{\mu} (\beta \bar{\beta})^{\frac{\alpha_+^2}{2}} e^{-\alpha_+ \phi} \quad (312)$$

lo que interpretamos como

$$\mu \rightarrow \mu \left(1 + 2\alpha - \frac{2}{\alpha_+} a + \dots \right) \quad (313)$$

$$\tilde{\mu} \rightarrow \tilde{\mu} \frac{\alpha_+^2}{2} \left(1 + 2\alpha - \frac{2}{\alpha_+} a + \dots \right) \quad (314)$$

Así, escribimos que

$$\delta\mu = \left(2\alpha - \frac{2}{\alpha_+} a \right) \mu \quad (315)$$

$$\delta\tilde{\mu} = \frac{\alpha_+^2}{2} \left(2\alpha - \frac{2}{\alpha_+} a \right) \tilde{\mu} \quad (316)$$

y, por ende,

$$\frac{\delta\tilde{\mu}}{\delta\mu} = (k-2) \frac{\tilde{\mu}}{\mu} \quad (317)$$

Integrando esta ecuación, obtenemos³⁹

$$\tilde{\mu} = f_k \cdot \mu^{k-2} \quad (318)$$

que precisamente reproduce la relación funcional (292), siendo f_k una constante de integración que podría, eventualmente, depender de k .

Por otro lado, uno podría plantearse si no es posible obtener el valor exacto del factor f_k a partir de las expresiones asintóticas para las funciones $\Gamma(x)$ y $\Delta(x)$ valiéndonos de argumentos similares basados en simetrías de la acción, al menos en el límite $k \rightarrow \infty$. Sin embargo, si observamos atentamente la relación

$$\pi \tilde{\mu} \frac{\Gamma(k-2)}{\Gamma(3-k)} = \left(\pi \mu \frac{\Gamma(\frac{1}{k-2})}{\Gamma(1 - \frac{1}{k-2})} \right)^{k-2} \quad (319)$$

notamos que el lado izquierdo tiene ceros para $k \in \mathbf{Z}_{\geq 3}$ *ad infinitum*, mientras que el lado derecho es perfectamente regular para todo valor de $k > 3$. Así, la relación funcional entre $\tilde{\mu}$ y μ no está bien definida para $k \in \mathbf{Z}_{>3}$ dado que tendríamos un comportamiento del tipo

$$\pi \tilde{\mu} \cdot 0 = \left(\pi \mu \frac{\Gamma(\frac{1}{k-2})}{\Gamma(1 - \frac{1}{k-2})} \right)^{k-2} \neq 0$$

³⁹Agradezco a Juan Martín Maldacena por haberme hecho notar este punto.

que puede satisfacerse sólo en el caso $\mu = 0$. Así, la única información que se puede obtener sobre la forma funcional del factor f_k a nivel de la acción perturbativa es la propiedad

$$f_3 = 1 \quad (320)$$

la cual se desprende del hecho de que es en ese preciso caso en el cual ambos operadores de apantallamiento coinciden.

7.2.5 La función de 2-puntos a partir de la función de 3-puntos

Con la intención de presentar un desarrollo completo, trataremos aquí la derivación de la ecuación (241), *i.e.* la función de 2-puntos obtenida a partir de la función de 3-puntos conteniendo un estado de peso máximo, $j_2 = m_2$ en el límite $j_2 = i\varepsilon \rightarrow 0$. Considerando el operador de apantallamiento \mathcal{S}_+ nosotros obtenemos

$$\mathcal{A}_{m_1, i\varepsilon, m_3}^{j_1, i\varepsilon, j_3} = (-)^{s_+} \Delta(1 + j_1 - m_1) \Delta(1 + j_3 - m_3) \mathcal{I}(j_1, j_3, k) \quad (321)$$

donde $\mathcal{I}(j_1, j_3, k)$ está dado por (289) con $j_2 = i\varepsilon$, *i.e.* simplificando los productos de funciones $\Delta(x)$ llegamos a que

$$\begin{aligned} I(j_1, j_3, k) &= (\pi\mu\Delta(-\rho))^{s_+} \Delta(1 - s_+) \Delta(\rho s_+) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta(1 - 2\rho\varepsilon i) \Delta((\varepsilon i - j_1 + j_3)\rho) \times \\ &\quad \Delta((\varepsilon i + j_1 - j_3)\rho). \end{aligned} \quad (322)$$

El límite $\varepsilon \rightarrow 0$ puede ser evaluado usando que en esta región

$$\Gamma(-n + \varepsilon) = \frac{(-1)^n}{\varepsilon \Gamma(n + 1)} + \mathcal{O}(1) \quad \text{for } n \in N, \quad (323)$$

y teniendo en cuenta la siguiente representación de la delta de Dirac

$$\delta(j_1 - j_3) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + (j_1 - j_3)^2}. \quad (324)$$

Poniendo todo esto junto obtenemos $2\pi i s$ veces la ecuación (241)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{A}_{m_1, i\varepsilon, m_3}^{j_1, i\varepsilon, j_3} = 2\pi i (2j_1 + 1) \mathcal{A}_{m_1, m_3}^{j_1, j_3} \delta(j_1 - j_3) \delta(m_1 + m_3) \quad (325)$$

como habíamos señalado anteriormente. Este factor $2j + 1$ de discrepancia entre el cálculo de la función de 2-puntos obtenida a partir del cálculo directo del correlador con dos operadores de vértice y el cálculo a partir de tomar el límite descrito recién en la función de 3-puntos concuerda con las observaciones efectuadas en [16]. En ese artículo, Maldacena y Ooguri observaron que existe una diferencia de un factor global proporcional a $2j + 1$ entre los correladores de 2-puntos calculados *evaluando* la funcional $\delta(j_1 - j_2)$ en el punto $j_1 - j_2 = 0$ y los correladores que tienen la $\delta(j_1 - j_2)$ como factor multiplicando al coeficiente $B(j, m)$. La idea es que esto introduce, en efecto, una diferencia entre las representaciones discretas y continuas, dado que en el primer caso el rango de valores que toma el número cuántico j que satisface la condición de cáscara de masa es discreto mientras que en el segundo caso j toma valores continuos (parametrizados por λ). De esta manera, el cálculo de las funciones de 2-puntos para las representaciones \mathcal{D}_j corresponde a evaluar la delta en cero⁴⁰ mientras que para las representaciones \mathcal{C}_λ aparece un factor $\delta(\lambda_1 - \lambda_2)$. Así, la función de 2-puntos correspondiente a las representaciones discretas y continuas difieren en un factor $2j + 1$.

Por otro lado, otros límites de la función de 3-puntos pueden llevar a la obtención de la función de 2-puntos. Por ejemplo, teniendo en cuenta que existen otras representaciones conjugadas de la identidad (*e.g.* los estados $(j = -\frac{k}{2}, m = -\frac{k}{2})$ y $(j = -1, m = 0)$), cabe esperar que otros términos de la función de 2-puntos también sean obtenidos en el límite en el cual el tercer operador de una función de 3-puntos genérica tiende a una de dichas configuraciones.

Por ejemplo, considerando la identidad

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{G(\varepsilon - x)G(\varepsilon + x)}{G(-1)G(2\varepsilon - 1)} \right) = -2\pi\Delta(-\rho)\delta(x) \quad (326)$$

es fácil mostrar luego de algunas manipulaciones algebraicas que si se toma el límite

⁴⁰En nuestro cálculo, la representación tipo gas de Coulomb nos permitió fijar el punto de inserción de un operador de apantallamiento a efectos de cancelar el factor divergente en el denominador del volumen grupo $SL(2, C)$, mientras que evaluamos la condición $j_1 = j_2 = j$ explícitamente en el cálculo. Por su parte, de manera consecuente, en [16] los autores observan que el factor $\delta(0)$ proveniente de evaluar dicha condición $j_1 = j_2 = j$ explícitamente cancela el volumen del grupo idénticamente, salvo un factor remanente proporcional a $2j + 1$

$(j_2, m_2) \rightarrow (-1, 0)$, se obtiene

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{A}_{m_1, -\varepsilon, m_3}^{j_1, -1-\varepsilon, j_3} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)} \delta(j_1 + j_3 + 1) \delta(m_1 + m_3) \quad (327)$$

lo que coincide justamente con el término $A(j)$ de la función de 2-puntos. Esto muestra que la inclusión de estados conjugados a la identidad en las funciones de 3-puntos llevan a las expresiones para las funciones de 2-puntos de campos primarios.

Por otro lado, tomando el límite $(j_2, m_2) \rightarrow (-\frac{k}{2}, -\frac{k}{2})$ para obtener, de esta manera, la siguiente relación

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{A}_{m_1, -\frac{k}{2}-\varepsilon, m_3}^{j_1, -\frac{k}{2}-\varepsilon, j_3} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\rho^2}{\Gamma(\varepsilon)} (-\pi \Delta(-\rho))^{2-k} \delta\left(j_1 + j_3 + \frac{k}{2}\right) \delta\left(m_1 + m_3 - \frac{k}{2}\right) \quad (328)$$

El factor $\delta(j_1 + j_2 + \frac{k}{2})$ se puede interpretar como una contribución a la función de 2-puntos relacionando dos estados equivalentes dada la relación entre j y $-\frac{k}{2} - j$. También sería interesante estudiar la implicación de la aparición del factor divergente $\delta(0)$ en el denominadores de las expresiones de arriba.

VIII

8 Funciones de correlación de 4-puntos

En este capítulo discutimos la forma funcional genérica para la función de 4-puntos en el modelo de Wess-Zumino-Novikov-Witten sobre $SL(2)$. Estudiamos una representación integral para esta cantidad analizando configuraciones particulares, sus propiedades de modronomía y el límite de factorización.

La principal motivación para analizar en detalle la función de 4-puntos es el hecho de que en este observable se encuentra toda la información de la teoría; las constantes de estructura y las reglas de fusión pueden ser derivadas a partir de la función de 4-puntos y el espectro completo de la teoría y la forma funcional de los operadores de vértice pueden ser *leídos* del análisis de su estructura de polos en el límite de factorización. En términos de la interpretación del modelo conforme como una teoría de cuerdas, la función de correlación de 4-puntos representa la amplitud de dispersión de cuatro estados de cuerda en el espacio-tiempo; así, el estudio de esta cantidad se vuelve sumamente interesante en este marco.

Por otro lado, en el contexto de esta tesis, una pregunta se yergue también como motivación adicional para analizar la función de 4-puntos en el modelo WZNW no-compacto. Esta pregunta es si el formalismo de campos libres es capaz de reproducir la estructura completa de dicho observable y, en general, cuál es el papel que desempeña la representación tipo gas de Coulomb en el estudio de la función de 4-puntos. Motivados por la observación hecha en [52] acerca de que la prescripción de Dotsenko no es suficiente para reproducir las reglas de fusión completas [93] del modelo conforme, nos

dedicaremos en lo que sigue de este trabajo de tesis al análisis cuidadoso de la función de 4-puntos. En efecto, los autores de [52] señalaron que la representación integral de Dotsenko no permite obtener las reglas de fusión para⁴¹ las representaciones admisibles de $SL(2)$. Según ellos mencionaron en su artículo, este problema está vinculado con los factores no-meromorfos que aparecen en la representación integral de Dotsenko al intentar extenderla analíticamente al caso de spin j genérico.

De esta manera, un análisis profundo de la función de 4-puntos es necesario para poder obtener la forma funcional para esta cantidad. Estudiaremos la propuesta realizada en [91], [92] y [52] que consiste en una representación integral de la función de 4-puntos en $SL(2)$ en términos de ciertas funciones de 5-puntos de la teoría de Liouville basándose en una relación existente entre la ecuación KZ y la ecuación BPZ de los respectivos modelos conformes. Analizaremos la estructura de polos y ciertos límites de dicha fórmula (mostrando que lleva a los resultados esperables para representar una función de 4-puntos en AdS_3).

8.1 La ecuación de Knizhnik-Zamolodchikov

La invariancia conforme determina la forma general de la función de correlación de 4-puntos $\mathcal{A}_{j_1, j_2, j_3, j_4}$; a saber

$$\mathcal{A}_{j_1, j_2, j_3, j_4} = \langle \Phi_{j_1}(z_1) \Phi_{j_2}(z_2) \Phi_{j_3}(z_3) \Phi_{j_4}(z_4) \rangle = \prod_{a < b} |z_a - z_b|^{2h_{ab}} |\mathcal{F}(z)|^2$$

siendo

$$z = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)}$$

y

$$h_{34} = -h_2 - h_1 + h_3 - h_4$$

⁴¹Las reglas de fusión para la teoría sobre $SL(2)$ se conocen para el caso particular de las representaciones admisibles; éstas fueron obtenidas en [93] por el método de los vectores nulos, que consiste en insertar estados con descendientes nulos en las funciones de 3-puntos y resolver las ecuaciones que satisfacen los correladores en estos casos particulares.

$$\begin{aligned}
h_{14} &= -2h_1 \\
h_{24} &= h_2 - h_1 - h_3 - h_4 \\
h_{23} &= h_4 + h_1 - h_2 - h_3
\end{aligned}$$

los demás h_{ab} que no aparecen aquí son cero. La función $\mathcal{F}(z)$ debe ser solución de la ecuación de Knizhnik-Zamolodchikov (KZ). Ésta es una ecuación diferencial en derivadas parciales que satisfacen las funciones de correlación de una teoría conforme con simetría afín; proviene de combinar la expansión en producto de operadores de la construcción de Sugawara del tensor de energía-momentos con las identidades de Ward conformes.

En el caso particular de la teoría conforme sobre $SL(2)$ (y análogamente para $SU(2)$), es conveniente introducir las variables (x_a, \bar{x}_a) a efectos de clasificar las representaciones del grupo; teniendo en cuenta estas variables, la ecuación KZ tiene la forma [91]

$$\langle \Phi_{j_1}(z_1) \Phi_{j_2}(z_2) \Phi_{j_3}(z_3) \Phi_{j_4}(z_4) \rangle = \prod_{a < b} |x_a - x_b|^{2J_{ab}} \prod_{a < b} |z_a - z_b|^{2h_{ab}} |\mathcal{F}(x, z)|^2$$

siendo

$$x = \frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)}{(x_1 - x_4)(x_3 - x_2)}$$

y

$$\begin{aligned}
J_{34} &= j_1 + j_2 - j_3 + j_4 \\
J_{14} &= -2j_1 \\
J_{24} &= j_1 - j_2 + j_3 + j_4 \\
J_{23} &= j_1 + j_2 + j_3 - j_4
\end{aligned}$$

La función de 4-puntos estará dada por cierta combinación lineal precisa de las soluciones de la ecuación de Knizhnik-Zamolodchikov; será aquella combinación compatible con las simetrías de intercambio y con la invariancia ante las transformaciones del grupo de modronomía.

La ecuación de Knizhnik-Zamolodchikov en el modelo WZNW sobre $SL(2)$ tiene la siguiente forma

$$(k-2)z(z-1)\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{F}(x,z) = ((z-1)\mathcal{P} + z\mathcal{Q})\mathcal{F}$$

siendo los operadores

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= x^2(x-1)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - ((j_1 + j_2 + j_3 - j_4 - 1)x^2 + 2j_1x + 2j_2x(1-x))\frac{\partial}{\partial x} + \\ &\quad + 2(j_1 + j_2 + j_3 - j_4)j_2x - 2j_1j_2 \\ \mathcal{Q} &= -(1-x)^2x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + ((-j_1 - j_2 - j_3 + j_4 + 1)(1-x) + 2j_3 - 2j_2x)(x-1)\frac{\partial}{\partial x} + \\ &\quad + 2(j_1 + j_2 + j_3 - j_4)j_2(1-x) - 2j_2j_3\end{aligned}$$

En su artículo [91], Fateev y Zamolodchikov mostraron que la función de 4-puntos en el modelo WZNW sobre $SU(2)$ puede expresarse en términos de una representación integral que corresponde a cierta función de correlación de 5-puntos en la teoría conforme de modelos minimales. La razón de esta identificación es el reconocimiento de que la ecuación de Knizhnik-Zamolodchikov para el modelo WZNW es similar a la ecuación diferencial de Belavin-Polyakov-Zamolodchikov (BPZ) que satisfacen las funciones de 5-puntos en la cual participa un estado que tiene un descendiente nulo. La ecuación BPZ es una ecuación diferencial que satisfacen los correladores de una teoría conforme que contienen estados primarios con descendientes nulos.

Fateev y Zamolodchikov utilizaron tal resultado para obtener el álgebra de operadores de la teoría WZNW en $SU(2)$. Andreev [92], haciendo uso de la generalización de este resultado en el caso no-compacto $SL(2)$, siguió los mismos pasos que los autores originales tratando el modelo WZNW en el caso particular de las representaciones admisibles de $SL(2)$. Él obtuvo las constantes de estructura (funciones de 3-puntos normalizadas) mostrando que en el caso de las representaciones admisibles se recuperan las reglas de fusión que Awata y Yamada [93] ya habían obtenido mediante el método del estado nulo⁴². Una expresión integral similar fue obtenida por Furlan,

⁴²El método del estado nulo consiste en la inserción de un operador de vértice en la función de

Gantchev y Petkova [52], quienes estudiaron la ecuación de Knizhnik-Zamolodchikov y sus simetrías, proponiendo una solución para ésta en términos de una serie de potencias en la cantidad $(z - x)$.

Más recientemente, Teschner [76] y Ponsot [94] hicieron uso del hecho de que la misma relación que se satisface entre el modelo WZNW $SU(2)$ y los modelos minimales la cumplen el modelo WZNW $SL(2,C)/SU(2)$ y la teoría de Liouville. Así, Teschner verificó que su propuesta para la forma general de la función de 4-puntos en el modelo WZNW sobre $\frac{SL(2,C)}{SU(2)}$ satisface la propiedad de simetría ante cruce⁴³. Por su parte, Ponsot obtuvo en [94] representaciones explícitas para la monodromía de los bloques conformes en el modelo WZNW sobre $SL(2,C)/SU(2)$ en términos de cantidades análogas de la teoría de Liouville.

No obstante todos estos trabajos, no hay una expresión explícita para la función de 4-puntos en la teoría WZNW en $SL(2)$ para valores de j genéricos. Aquí analizamos las consecuencias de considerar para estos j generales la representación integral para dicha cantidad basada en la relación mencionada con la función de 5-puntos en la teoría de Liouville. Las representaciones admisibles no son relevantes para la interpretación del modelo conforme como una teoría de cuerdas dado que el límite de unitariedad excluye a dichos estados para valores genéricos de k ; por esto, es necesario extender la representación integral a efectos de contemplar valores de j para representaciones genéricas. De esta manera, algunas de las expresiones deben ser entendidas de manera formal y una extensión analítica debe ser considerada para que las fórmulas estén bien definidas.

Como mencionamos anteriormente, las funciones de 4-puntos del modelo WZNW sobre $SU(2)$ pueden ser escritas en términos de ciertas funciones de 5-puntos de modelos

3-puntos cuyo descendiente es un estado nulo. De esta manera, los correladores satisfacen ciertas ecuaciones diferenciales que pueden ser resueltas a efectos de obtener las reglas de fusión en términos de los números cuánticos de los tres estados del correlador. Precisamente, para el caso de las representaciones admisibles de $SL(2)$ este método permite obtener dichas reglas de fusión debido a la existencia de estados nulos en estas representaciones.

⁴³por crossing symmetry

minimales. La extensión natural de este resultado al caso de $SL(2)$ permite proponer la siguiente expresión para la función de 4-puntos $\mathcal{A}_{j_1, j_2, j_3, j_4}$ en términos de correladores de 5-puntos en la teoría de Liouville $\mathcal{A}_{\alpha_1, \alpha_2, -\frac{1}{2b}, \alpha_3, \alpha_4}^{Liouville}$ (i.e. correladores de 5-puntos que incluyen estados ($\alpha = -\frac{1}{2b}$) con descendientes nulos y, por ende, satisfacen la ecuación BPZ). La relación explícita entre dichos correladores está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{j_1, j_2, j_3, j_4} &= |x|^{-2\alpha_2/b} |1-x|^{-2\alpha_3/b} |x-z|^{-2\alpha_1/b} |z|^{-4(b^2 j_1 j_2 - \alpha_1 \alpha_2)} |1-z|^{-4(b^2 j_3 j_4 - \alpha_3 \alpha_4)} \times \\ &\times f(j_1, j_2, j_3, j_4) \mathcal{A}_{\alpha_1, \alpha_2, -\frac{1}{2b}, \alpha_3, \alpha_4}^{Liouville} \end{aligned} \quad (329)$$

donde⁴⁴

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 &= -b(j_1 + j_2 + j_3 + j_4 + 1) \\ 2\alpha_2 &= -b(j_1 + j_2 - j_3 - j_4 - b^{-2} - 1) \\ 2\alpha_3 &= -b(j_1 - j_2 + j_3 - j_4 - b^{-2} - 1) \\ 2\alpha_4 &= -b(j_1 - j_2 - j_3 + j_4 - b^{-2} - 1) \end{aligned}$$

siendo $b^2 = k - 2$ y $f(j_1, j_2, j_3, j_4)$ un factor de normalización que especificaremos en breve.

Así, tenemos las relaciones entre los números cuánticos intervinientes en las funciones de correlación de 5-puntos de la teoría de Liouville (lado derecho de la ecuación anterior) y los correspondientes números cuánticos de las funciones de correlación de 4-puntos en el WZNW en $SL(2)$.

Entonces, la estrategia de este capítulo es estudiar la forma general y las propiedades de la función de 4-puntos utilizando su representación en términos de una función de 5-puntos en la teoría de Liouville. Así, en las próximas secciones escribiremos la representación tipo gas de Coulomb de los correladores de 5-puntos de la teoría de Liouville; fijaremos la normalización adecuada para que las funciones de correlación de 4-puntos buscadas en el modelo sobre $SL(2)$ satisfagan ciertas condiciones necesarias

⁴⁴Notar que respecto a la referencia [94] debe entenderse un cambio de convención $j_1 \leftrightarrow j_2$ y $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$, a efectos de comparar con la nomenclatura de los artículos mencionados de Zamolodchikov-Fateev [91] y de Andreev [92].

y, luego, estudiaremos el límite de factorización haciendo uso de la realización integral obtenida. Comencemos, pues, reviendo la representación de gas de Coulomb en la teoría de Liouville.

8.2 La teoría de Liouville

Consideremos la acción de Liouville

$$S = \int d^2z ((\partial\phi)^2 - 4\pi QR\phi + \mu e^{2b\phi})$$

siendo

$$Q = (b + b^{-1})$$

En esta notación, la adoptada por Teschner en [78], el propagador del campo de Liouville es

$$\langle \varphi(z)\varphi(w) \rangle = -\frac{1}{2} \ln(z - w)$$

Luego, el tensor de energía-momentos y la carga central son

$$\begin{aligned} T &= -\partial\varphi\partial\varphi + Q\partial^2\varphi \\ c &= 1 + 6Q^2 \end{aligned}$$

respectivamente. Los campos primarios tienen la forma

$$V_\alpha(z) =: e^{2\alpha\varphi(z)} :$$

con peso conforme dado por

$$\Delta = \alpha(Q - \alpha)$$

En este modelo hay dos operadores de apantallamiento; a saber

$$S_\pm = \int d^2z V_{b\pm 1}(z) = \int d^2z : e^{2b\pm 1\varphi(z)} :$$

Las funciones de correlación se escriben de la siguiente manera

$$\mathcal{A}_{\alpha_1, \dots, \alpha_N}^{Liouville} = \langle V_{\alpha_1}(z_1) V_{\alpha_2}(z_2) \dots V_{\alpha_N}(z_N) \rangle =$$

$$\left\langle e^{2\alpha_1\varphi(z_1)} e^{2\alpha_2\varphi(z_2)} \dots e^{2\alpha_{N-1}\varphi(z_{N-1})} e^{2\tilde{\alpha}_N\varphi(z_N)} \prod_{r=1}^{n_-} \int d^2u_r e^{2\alpha_- \varphi(u_r)} \prod_{r=1}^{n_+} \int d^2v_r e^{2\alpha_+ \varphi(v_r)} \right\rangle$$

donde $\tilde{\alpha}_i = Q - \alpha_i$, y donde n_{\pm} refiere a la cantidad de operadores de apantallamiento S_{\pm} necesarios a efectos de satisfacer la ley de conservación que viene de integrar en el modo cero de φ : a saber

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{N-1} + \tilde{\alpha}_N + n_+ b + n_- b^{-1} = Q = b + b^{-1} \quad (330)$$

siendo n_{\pm} las cantidades de operadores de apantallamiento del tipo S_{\pm} que son insertados en los correladores de la teoría de Liouville.

De esta manera, la realización de campos libres de la función de correlación de $N = 5$ puntos en la teoría de Liouville en (329) nos lleva a la siguiente ley de conservación

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i + \tilde{\alpha}_4 - \frac{1}{2b} + n_+ b + n_- b^{-1} = Q \quad (331)$$

donde el término $-\frac{1}{2b}$ de (331) se debe precisamente a la presencia de un quinto operador de vértice con $\alpha_5 = -\frac{1}{2b}$.

Teniendo en cuenta la definición de los α_i en términos de los j_i descripta antes, obtenemos

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i + \tilde{\alpha}_4 = -\frac{b}{2} (4j_1 - 3b^{-2} - 2) \quad (332)$$

Así, es posible escribir (331) como

$$-\frac{b}{2} (4j_1 - 3b^{-2} - 2) - \frac{b^{-1}}{2} = (1 - n_+)b + (1 - n_-)b^{-1}$$

y, ordenándolo, esto es

$$n_+ + n_-(k - 2) = 2j_1$$

que es entonces justamente la cantidad de operadores de apantallamiento que debe aparecer en la realización integral tipo gas de Coulomb de la función de 5-puntos y,

por lo tanto, la cantidad de integrales en términos de las que estará dada la expresión para la función de 4-puntos en el modelo WZNW sobre $SL(2)$ dada la relación entre ambos correladores descripta antes⁴⁵.

8.3 Representación integral de la función de 4-puntos

Este análisis nos lleva a que la función de 4-puntos para el modelo WZNW puede ser escrita de la siguiente forma.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{j_1, j_2, j_3, j_4} &= \prod_{a < b} |z_a - z_b|^{2h_{ab}} |z|^{2j_1 j_2 \rho} |1 - z|^{2j_2 j_3 \rho} |x_a - x_b|^{2J_{ab}} \prod_{r=1}^{2j_1} \times \\
&\times \int d^2 w_r \prod_{r=1}^{2j_1} |w_r|^{-2\rho(j_1 + j_2 - j_3 - j_4 + 1 - k)} |1 - w_r|^{-2\rho(j_1 - j_2 + j_3 - j_4 + 1 - k)} \times \\
&\times |z - w_r|^{-2\rho s} |x - w_r|^{+2} \prod_{r < t}^{2j_1 - 1, 2j_1} |w_r - w_t|^{4\rho} f(j_1, j_2, j_3, j_4; k)
\end{aligned} \tag{333}$$

siendo $s = j_1 + j_2 + j_3 + j_4 + 1$, $\rho = (2 - k)^{-1}$. Y donde el factor de normalización $f(j_1, j_2, j_3, j_4; k)$, que queda determinado por las condiciones necesarias que debe satisfacer la función de 4-puntos (*e.g.* recuperar la función de 3-puntos en el caso particular $j_1 = 0$), es

$$\begin{aligned}
f(j_1, j_2, j_3, j_4; k) &= \left(\pi \frac{\Gamma(1 + \rho)}{\Gamma(1 - \rho)} \right)^s (\Delta(\rho))^{2j_1 + 2} \prod_{a=1}^4 \Delta(1 - (2j_a + 1)\rho) \prod_{r=1}^s \Delta(r\rho) \times \\
&\times \frac{\prod_{r=1}^{-j_1 + j_2 + j_3 - j_4} \Delta(r\rho) \prod_{r=1}^{-j_1 + j_2 - j_3 + j_4} \Delta(r\rho) \prod_{r=1}^{-j_1 - j_2 + j_3 + j_4} \Delta(r\rho)}{\prod_{r=1}^{2j_1} \Delta(r\rho) \prod_{r=1}^{2j_2} \Delta(r\rho) \prod_{r=1}^{2j_3} \Delta(r\rho) \prod_{r=1}^{2j_4} \Delta(r\rho)}
\end{aligned} \tag{334}$$

Así, (333) es la expresión integral de la función de 4-puntos en el modelo WZNW sobre $SL(2)$. Estudiaremos sus propiedades en las próximas secciones.

⁴⁵notemos que como caso particular de esta última condición tenemos $n_+ = 2j_1$, $n_- = 0$ que coincide exactamente con la expresión presentada por Fateev-Zamolodchikov en el artículo original [91] donde la construcción análoga es mostrada para la teoría sobre $SU(2)$

8.3.1 Las funciones de 2 y 3-puntos a partir de la función de 4-puntos

Comencemos mostrando que, efectivamente, se satisfacen ciertas condiciones necesarias para la función de 4-puntos; veamos que la función de 4-puntos con $j_1 = j_2 = 0$ (i.e.

$\mathcal{A}_{0,0,j,j}$) deviene en la función de 2-puntos

Reemplazando $j_1 = j_2 = 0$ y $j_3 = j_4 = j$, en (333) tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{0,0,j,j} &= \prod_{a<b} |z_a - z_b|^{2h_{ab}} |x_a - x_b|^{2J_{ab}} \left(\pi \frac{\Gamma(1+\rho)}{\Gamma(1-\rho)} \right)^{2j+1} \Delta^2(\rho) \Delta^2(1-\rho) \times \\
&\quad \times \Delta^2(1-(2j+1)\rho) \frac{\prod_{r=1}^{2j+1} \Delta(r\rho) \prod_{r=1}^{2j} \Delta(r\rho)}{\prod_{r=1}^{2j} \Delta(r\rho) \prod_{r=1}^{2j} \Delta(r\rho)} = \\
&= |z_3 - z_4|^{-4h_j} |x_3 - x_4|^{4j} \left(\pi \frac{\Gamma(1+\rho)}{\Gamma(1-\rho)} \right)^{2j+1} \times \\
&\quad \times \Delta^2(1-(2j+1)\rho) \Delta((2j+1)\rho) \frac{\prod_{r=1}^{2j} \Delta(r\rho) \prod_{r=1}^{2j} \Delta(r\rho)}{\prod_{r=1}^{2j} \Delta(r\rho) \prod_{r=1}^{2j} \Delta(r\rho)} = \\
&= |z_3 - z_4|^{-4h_j} |x_3 - x_4|^{4j} \left(\pi \frac{\Gamma(1+\rho)}{\Gamma(1-\rho)} \right)^{2j+1} \Delta(1-(2j+1)\rho)
\end{aligned}$$

Esto es

$$\mathcal{A}_{0,0,j,j} = |z_3 - z_4|^{-4h_j} |x_3 - x_4|^{4j} \left(\pi \frac{\Gamma(1+\rho)}{\Gamma(1-\rho)} \right)^{2j+1} \Delta(1-(2j+1)\rho)$$

O sea,

$$\mathcal{A}_{0,0,j,j} = |z_3 - z_4|^{-4h_j} |x_3 - x_4|^{4j} B(j)$$

Corolario: Se obtiene la función de 2-puntos como límite de la función de 4-puntos con dos estados de momento cero.

De manera análoga, un extenso cálculo (cuyos detalles reservamos para el apéndice 10.3) muestra que la función de 4-puntos $\mathcal{A}_{j_1=0,j_2,j_3,j_4}$ es

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{0,j_2,j_3,j_4} &= \prod_{a<b} |z_a - z_b|^{2(h_c - h_a - h_b)} |x_a - x_b|^{J_{ab}} \left(\pi \frac{\Gamma(1+\rho)}{\Gamma(1-\rho)} \right)^s \Delta(\rho) \times \\
&\quad \times \frac{\rho}{\Gamma(0)} \frac{G(1+j_2+j_3+j_4)G(-j_2+j_3+j_4)G(j_2-j_3+j_4)G(j_2+j_3-j_4)}{G(-1)G(2j_2+1)G(2j_3+1)G(2j_4+1)}
\end{aligned}$$

que es la función de 3-puntos, salvo por un factor global $\Gamma(0)$. La presencia de este factor $\Gamma(0)$ es interesante, ya que algo similar ocurre en la de 2-puntos cuando queremos obtenerla desde la de 3-puntos.

Esto muestra que el factor (334) es el adecuado para normalizar la función de 4-puntos.

8.3.2 Resultado explícito para un caso particular de la función de 4-puntos y las propiedades de modronomía

Analícemos ahora un caso particular con la motivación de explorar la forma explícita de la función de 4-puntos en un caso no-trivial; a saber $2j_1 = 1$.

Por otro lado, este caso nos permite estudiar también las propiedades ante transformaciones del grupo de monodromía de la función de 4-puntos. Dado que desconocemos las propiedades de monodromía de la expresión general en términos de $2j_1$ integrales, es interesante probar que, al menos en un caso particular, la solución propuesta es invariante ante monodromía.

En el caso $2j_1 = 1$, sólo una integral aparece en (333). La invariancia conforme nos permite fijar los puntos según $z_2 = x_2 = 0$, $z_1 = z$, $x_1 = x$, $z_3 = x_3 = 1$, $z_4 = x_4 = \infty$; de esta forma, el resultado estará dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\frac{1}{2}, j_2, j_3, j_4} &= |z|^{2j_2\rho} |1 - z|^{2j_3\rho} \\ &\times \left(\pi \frac{\Gamma(1 + \rho)}{\Gamma(1 - \rho)} \right)^s \frac{\Delta^2(\rho)}{\Delta(2\rho)} \prod_{a=2}^4 \Delta(1 - (2j_a + 1)\rho) |K_k(j_2, j_3, j_4)|^2 \\ &= \frac{\prod_{r=1}^s \Delta(r\rho) \prod_{r=1}^{-\frac{1}{2}+j_2+j_3-j_4} \Delta(r\rho) \prod_{r=1}^{-\frac{1}{2}+j_2-j_3+j_4} \Delta(r\rho) \prod_{r=1}^{-\frac{1}{2}-j_2+j_3+j_4} \Delta(r\rho)}{\prod_{r=1}^{2j_2} \Delta(r\rho) \prod_{r=1}^{2j_3} \Delta(r\rho) \prod_{r=1}^{2j_4} \Delta(r\rho)} \end{aligned}$$

siendo

$$|K_k(j_2, j_3, j_4; z, x)|^2 = \int d^2 w |w|^{-2\rho(j_2-j_3-j_4+1-k)} |1 - w|^{2\rho(j_2-j_3+j_4-1+k)} |z - w|^{-2\rho(j_2+j_3+j_4+2)} |x - w|^{+2}$$

Esta integral puede ser explícitamente resuelta en términos de funciones hiperge-

ométricas [91]; a saber

$$|K_k(j_2, j_3, j_4)|^2 = \sum_{p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \sum_{q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} g_{p,q}(z, \bar{z}) x^p \bar{x}^q$$

siendo

$$\begin{aligned} g_{0,0}(z, \bar{z}) &= \frac{\Delta(b)\Delta(c-b)}{\Delta(c)} \left| \frac{b}{c} z^c F(a, b+1, c+1, z) \right|^2 + \\ &\quad + \frac{\Delta(c-1)\Delta(a-c+1)}{\Delta(a)} \left| \left(\frac{1-c}{a-c} \right) F(a-c, b-c+1, 1-c, z) \right|^2 \\ g_{1,0}(z, \bar{z}) &= -\frac{b\Delta(b)\Delta(c-b)}{c\Delta(c)} \bar{z} |z|^{2(c-1)} F(a, b+1, c+1, \bar{z}) F(a, b, c, z) + \\ &\quad + \frac{\Delta(c-1)\Delta(a-c+1)}{\Delta(a)} \left(\frac{1-c}{c-a} \right) F(a-c, b-c+1, 1-c, \bar{z}) \\ &\quad F(a-c+1, b-c+1, 2-c, z) \\ g_{0,1}(z, \bar{z}) &= -\frac{b\Delta(b)\Delta(c-b)}{c\Delta(c)} z |z|^{2c} F(a, b+1, c+1, z) F(a, b, c, \bar{z}) + \\ &\quad + \frac{\Delta(c-1)\Delta(a-c+1)}{\Delta(a)} \left(\frac{1-c}{c-a} \right) F(a-c, b-c+1, 1-c, z) \\ &\quad F(a-c+1, b-c+1, 2-c, \bar{z}) \\ g_{1,1}(z, \bar{z}) &= \frac{\Delta(b)\Delta(c-b)}{\Delta(c)} |z^{c-1} F(a, b, c, z)|^2 + \\ &\quad + \frac{\Delta(c-1)\Delta(a-c+1)}{\Delta(a)} |F(a-c+1, b-c+1, 2-c, z)|^2 \\ g_{p>1,q}(z, \bar{z}) &= g_{p,q>1}(z, \bar{z}) = 0 \end{aligned}$$

y siendo

$$\begin{aligned} a &= 1 + \rho \left(-\frac{1}{2} - j_2 + j_3 - j_4 \right) \\ b &= \rho \left(\frac{1}{2} - j_2 + j_3 + j_4 \right) \\ c &= 1 - \rho(2j_2 + 1) \end{aligned}$$

Este es un resultado explícito para la función de 4-puntos, correspondiente al caso particular $j_1 = \frac{1}{2}$ para valores j_2, j_3, j_4 genéricos. Por otro lado, notemos que el resultado es expresable en una serie de potencias de x y \bar{x} ; en este caso es un polinomio.

Ahora, la pregunta que debemos formular es si esta expresión es invariante ante monodromía. Para ver esto, estudiemos, por ejemplo, el primer término en el desarrollo en potencias de x , es decir, el término $g_{0,0}(z, \bar{z})$; a saber

$$g_{0,0}(z, \bar{z}) = \frac{\Delta(b)\Delta(c-b)}{\Delta(c)} \left| \frac{b}{c} z^{1-\rho(2j_2+1)} F(a, b+1, c+1, z) \right|^2 + \\ + \frac{\Delta(c-1)\Delta(a-c+1)}{\Delta(a)} \left| \left(\frac{1-c}{a-c} \right) F(a-c, b-c+1, 1-c, z) \right|^2$$

Con muy pocos pasos algebraicos (usando las propiedades $\Delta^{-1}(x) = \Delta(1-x)$ y $\Delta(x)\Delta(-x) = -x^{-2}$) es fácil ver que podemos escribir $g_{0,0}(z, \bar{z})$ como

$$g_{0,0}(z, \bar{z}) = \frac{\Delta(c-1)}{\Delta(c-a)\Delta(a)} \left(\frac{1-c}{a-c} \right)^2 (|F(a-c, b-c+1, 1-c, z)|^2 + \\ + \frac{\Delta(a)\Delta(b)b^2(c-a)^2}{\Delta(1+b-c)\Delta(1+a-c)\Delta(c-1)\Delta(c)c^2(1-c)^2} \\ |z^{1-\rho(2j_2+1)} F(a, b+1, c+1, z)|^2)$$

lo que puede, a su vez, ser escrito como sigue

$$g_{0,0}(z, \bar{z}) = \frac{\Delta(c-1)}{\Delta(c-a)\Delta(a)} \left(\frac{1-c}{a-c} \right)^2 \\ \left(|F(\alpha, \beta, \gamma, z)|^2 + \lambda |z^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, z)|^2 \right)$$

siendo

$$\alpha = a - c \\ \beta = b - c + 1 \\ \gamma = 1 - c$$

y con

$$\lambda = \frac{\Delta(a)\Delta(b)b^2(c-a)^2}{\Delta(1+b-c)\Delta(1+a-c)\Delta(c-1)\Delta(c)c^2(1-c)^2} = \\ = \frac{\Delta(\alpha-\gamma+1)\Delta(\beta-\gamma+1)\Delta^2(\gamma)}{\Delta(\alpha)\Delta(\beta)(1-\gamma)^2}$$

que, en efecto, es la única combinación de las soluciones a la ecuación de Knizhnik-Zamolodchikov invariante ante modronomía. Ésta coincide con la combinación lineal

que Maldacena y Ooguri encontraron en [16] (Ver el apéndice 10.4 para el cálculo detallado de la solución invariante ante modronomía).

Análogamente, también los otros términos en el desarrollo de potencias de x y \bar{x} pueden ser analizados en el contexto de la modronomía; por ejemplo, veamos el término proporcional a $|x|^2$. Éste está dado por el coeficiente $g_{1,1}(z, \bar{z})$; que usando trucos algebraicos similares a los de recién, puede ser escrito como sigue

$$g_{1,1}(z, \bar{z}) = \frac{\Delta(c-1)}{\Delta(c-a)\Delta(a)} \left(|F(A, B, C, z)|^2 + \lambda |z^{1-\gamma} F(A-C+1, B-C+1, 2-C, z)|^2 \right)$$

nuevamente con

$$\lambda = -\frac{\Delta(A-C+1)\Delta(B-C+1)\Delta^2(C)}{\Delta(A)\Delta(B)(1-C)^2}$$

que es lo que demanda la invariancia ante modronomía. Siendo esta vez

$$A = a - c + 1$$

$$B = b - c + 1$$

$$C = 2 - c$$

De esta manera, vemos que este término es también invariante ante modronomía.

8.4 Las propiedades de factorización de la función de 4-puntos

Un detallado análisis de las propiedades de factorización de la función de 4-puntos en la teoría de cuerdas en AdS_3 ha sido efectuado por Maldacena y Ooguri recientemente. En esta sección estudiaremos la estructura de polos que desarrolla la expresión (333) para la función de 4-puntos en el límite $z \rightarrow 0$ a efectos de hacer una breve comparación con los resultados obtenidos en la literatura sobre la cota de los estados externos e intermedios a efectos de obtener funciones de 4-puntos *factorizables*.

Veremos que:

- la condición de polo en el límite de coincidencia $z \rightarrow 0$ corresponde a una condición de cáscara de masa para algún estado intermedio con número cuántico j .

- dicho número cuántico j , spín del estado intermedio, es unitario e implica la cota superior sobre los estados entrantes que Maldacena y Ooguri mencionaron en [16].

8.4.1 La condición de polos en el límite $z \rightarrow 0$

La integral interviniente en la función de 4-puntos es la que escribimos antes en (333).

Así, podemos escribir⁴⁶

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{j_1, j_2, j_3, j_4} &= |z|^{-\frac{4j_1 j_2}{k-2}} |1-z|^{-\frac{4j_1 j_3}{k-2}} \times \\ &\times \prod_{r=1}^{2j_1} \int d^2 w_r \prod_{r=1}^{2j_1} |w_r|^{-2\rho(j_1+j_2-j_3-j_4+1-k)} |1-w_r|^{-2\rho(j_1-j_2+j_3-j_4+1-k)} \times \\ &\times |z-w_r|^{-2\rho(j_1+j_2+j_3+j_4+1)} |x-w_r|^{+2} \prod_{r<t}^{2j_1-1, 2j_1} |w_r-w_t|^{4\rho} \times f(j_1, j_2, j_3, j_4; k) \end{aligned} \quad (335)$$

Ahora, separemos l de las $2j_1$ integrales⁴⁷. Hagamos esto definiendo las siguientes variables

$$\begin{aligned} y_{i \leq l} &\equiv \frac{1}{\varepsilon} w_{i \leq l} \\ z &\equiv \varepsilon \end{aligned}$$

mientras que las variables $w_{i > l}$ y x permanecen igualmente nombradas. Reemplazando este cambio de variables en la integral de arriba, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{j_1, j_2, j_3, j_4} &= |\varepsilon|^{-\frac{4j_1 j_2}{k-2}} |1-\varepsilon|^{-\frac{4j_1 j_3}{k-2}} \times \\ &\times |\varepsilon|^{+2l} \prod_{r=1}^l \int d^2 y_r \prod_{r=1}^{2j_1} \int d^2 w_r |\varepsilon|^{-2\rho(j_1+j_2-j_3-j_4+1-k)l} \prod_{r=1}^l |y_r|^{-2\rho(j_1+j_2-j_3-j_4+1-k)} \times \\ &\times \prod_{r=1}^l |1-\varepsilon y_r|^{-2\rho(j_1-j_2+j_3-j_4+1-k)} |\varepsilon-\varepsilon y_r|^{-2\rho(j_1+j_2+j_3+j_4+1)} |x-\varepsilon y_r|^{+2} \end{aligned} \quad (336)$$

⁴⁶teniendo en cuenta que se han fijado los puntos de inserción $z_2 = 0$, $z_3 = 1$, $z_4 = \infty$

⁴⁷que representan en el formalismo tipo gas de Coulomb $n_+ = l = 2j_1$ operadores de apantallamiento S_+ , como vimos antes.

$$\begin{aligned}
& \times \prod_{r=1}^{2j_1} |w_r|^{-2\rho(j_1+j_2-j_3-j_4+1-k)} |1-w_r|^{-2\rho(j_1-j_2+j_3-j_4+1-k)} |\varepsilon-w_r|^{-2\rho(j_1+j_2+j_3+j_4+1)} |x-w_r|^{+2} \\
& \times \prod_{r<t \leq l}^{l-1, l} |y_r-y_t|^{4\rho} \times |\varepsilon|^{-\frac{2}{k-2}l(l-1)} \prod_{l<r<t}^{2j_1-1, 2j_1} |w_r-w_t|^{-\frac{4}{k-2}} \prod_{t=1}^l \prod_{r=l+1}^{2j_1} |w_r-\varepsilon y_t|^{-\frac{4}{k-2}} f(j_1, j_2, j_3, j_4; k)
\end{aligned}$$

Luego, recolectando todos los factores de la forma $|\varepsilon|^{+2p}$, tenemos que en las cercanías de $\varepsilon \approx 0$ podemos escribir

$$\mathcal{A}_{j_1, j_2, j_3, j_4, \varepsilon \approx 0} = |\varepsilon|^{2p} |x|^{2l} \times \quad (337)$$

$$\begin{aligned}
& \prod_{r=1}^l \int d^2 y_r \prod_{r=1}^l |y_r|^{-2\rho(j_1+j_2-j_3-j_4+1-k)} |1-y_r|^{-2\rho(j_1+j_2+j_3+j_4+1)} \prod_{r<t \leq l}^{l-1, l} |y_r-y_t|^{4\rho} \times \\
& \times \prod_{r=1}^{2j_1} \int d^2 w_r \prod_{r=1}^{2j_1} |w_r|^{-2\rho(j_1+j_2-j_3-j_4+1-k)-2\rho(j_1+j_2+j_3+j_4+1)-\frac{4l}{k-2}} |1-w_r|^{-2\rho(j_1-j_2+j_3-j_4+1-k)} \times \\
& \times \prod_{r=1}^{2j_1} |x-w_r|^{+2} \prod_{l<r<t}^{2j_1-1, 2j_1} |w_r-w_t|^{-\frac{4}{k-2}} \times f(j_1, j_2, j_3, j_4; k)
\end{aligned}$$

donde p está dado por

$$p = \frac{-2j_1 j_2 + 2(j_1 + j_2)l + -l(l-1)}{k-2}$$

Usando ahora que debido a la condición de cáscara de masa de los estados externos se satisface

$$\frac{j_1^2 + j_1}{k-2} + 1 = \frac{j_2^2 + j_2}{k-2} + 1 = 0$$

podemos escribir

$$p = -\frac{(j_1 + j_2 - l)(j_1 + j_2 - l + 1)}{k-2} - 2 \quad (338)$$

Al integrar en ε , haciendo un desarrollo de Taylor del integrando, las condiciones de polo son precisamente

$$p + n = -1$$

con $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$. Entonces, las condiciones de polo son

$$-\frac{j(j+1)}{k-2} + n = 1$$

con

$$j = j_1 + j_2 - l \quad (339)$$

siendo l un número tal⁴⁸ que

$$0 < l < 2j_1$$

No es difícil ver que en el caso de utilizar ambos tipos de operadores de apantallamiento, se llega de manera análoga a que $j = j_1 + j_2 - l - l'(k-2)$ y por ende nuevamente tenemos $0 < l + l' < 2j_1$. Veremos esto en la próxima sección. Así, acabamos de demostrar que:

Así, mostramos que las condiciones de polos que la expresión genérica para la función de 4-puntos desarrolla en el límite de coincidencia $z \rightarrow 0$, son justamente condiciones de cáscara de masa para estados de $SL(2)$ con su número cuántico j dado por (339).

Realicemos ahora el caso análogo con ambos tipos de operadores de apantallamiento de la teoría de Liouville; n_+ operadores de apantallamiento del tipo S_+ y n_- operadores de apantallamiento del tipo S_- , satisfaciéndose como vimos anteriormente que $n_+ + n_-(k-2) = 2j_1$.

En este caso, las integrales en el plano complejo estarán dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{j_1, j_2, j_3, j_4} &\propto I_{l, l'} \equiv |z|^{2(h_j - h_{j_1} - h_{j_2})} |x|^{2(j_1 + j_2 - j)} \prod_{r=1}^{n_+} \int d^2 u_r \prod_{r=1}^{n_-} \int d^2 v_{r'} \\ &\prod_{r=1}^{n_+} |u_r|^{-2\rho(j_1 + j_2 - j_3 - j_4 + 1 - k)} |1 - u_r|^{-2\rho(j_1 - j_2 + j_3 - j_4 + 1 - k)} |z - u_r|^{-2\rho s} |x - u_r|^2 \\ &\prod_{r'=1}^{n_-} |v_{r'}|^{2(j_1 + j_2 - j_3 - j_4 + 1 - k)} |1 - v_{r'}|^{2(j_1 - j_2 + j_3 - j_4 + 1 - k)} |z - v_{r'}|^{2(j_1 + j_2 + j_3 + j_4 + 1)} \end{aligned}$$

⁴⁸Esto se desprende del hecho de que l es precisamente la cantidad de integrales que son elegidas para tomar también a las correspondientes variables de integración yendo⁴⁹ a 0, siendo $2j_1$ la cantidad total de integrales.

$$\prod_{r'=1}^{n_-} |x - v_{r'}|^{-2/\rho} \prod_{r<t}^{n_+ - 1, n_+} |u_r - u_t|^{4\rho} \prod_{r'<t}^{n_- - 1, n_-} |v_{r'} - v_t|^{4\rho - 1} \prod_{r=1}^{n_+} \prod_{r'=1}^{n_-} |u_r - v_{r'}|^{-4}$$

De esta manera, y sabiendo que $n_+ + n_-(k-2) = 2j_1$, podemos realizar la factorización. Para hacerlo, comencemos redefiniendo nuevamente las variables siguientes

$$\begin{aligned} y_{i \leq l} &\equiv \frac{1}{\varepsilon} u_{i \leq l} \\ \tau_{i \leq l} &\equiv \frac{1}{\varepsilon} v_{i \leq l'} \\ z &\equiv \varepsilon \end{aligned}$$

Reemplazando este cambio de variables en la integral de arriba, quedándonos con el término predominante en el desarrollo en torno a $z = 0$ y luego tomando el límite $x \rightarrow 0$, tenemos

$$\begin{aligned} I_{l,l'}(j_1, j_2, j_3, j_4) &\sim |z|^{2(h_j - h_{j_1} - h_{j_2})} |x|^{2(j_1 + j_2 - j)} \times \quad (340) \\ &\times \prod_{r=1}^l \int d^2 y_r \prod_{r=1}^l |y_r|^{-2\rho(j_1 + j_2 - j_3 - j_4 + 1 - k)} |1 - y_r|^{-2\rho(j_1 + j_2 + j_3 + j_4 + 1)} \prod_{r<t \leq l}^{l-1, l} |y_r - y_t|^{4\rho} \\ &\prod_{r=1}^{l'} \int d^2 \tau_r \prod_{r=1}^{l'} |\tau_r|^{2(j_1 + j_2 - j_3 - j_4 + 1 - k)} |1 - \tau_r|^{2(j_1 + j_2 + j_3 + j_4 + 1)} \prod_{r<t \leq l'}^{l'-1, l'} |\tau_r - \tau_t|^{4/\rho} \\ &\times \prod_{r=l+1}^{n_+} \int d^2 u_r \prod_{r=l+1}^{n_+} |u_r|^{-2j\rho} |1 - u_r|^{-2\rho(-j_1 + j_2 + j_3 - j_4 + 1 - k)} \prod_{l < r < t}^{n_+ - 1, n_+} |u_r - u_t|^{4\rho} \\ &\prod_{r=l'+1}^{n_-} \int d^2 v_r \prod_{r=l'+1}^{n_-} |v_r|^{2j} |1 - v_r|^{2(-j_1 + j_2 + j_3 - j_4 + 1 - k)} \prod_{l' < r < t}^{n_- - 1, n_-} |v_r - v_t|^{4/\rho} \end{aligned}$$

siendo $j = j_1 + j_2 - l - (k-2)l'$ y, como siempre, $h_j = -\frac{j(j+1)}{k-2}$. Notemos que a los exponentes de $|u_r|^{-2j\rho}$ y de $|v_r|^{2j}$ contribuyen también los términos cruzados del tipo $\prod_{r=l+1}^{n_+} \prod_{t=1}^l |u_r - u_t|^{4\rho}$ y $\prod_{r=l'+1}^{n_-} \prod_{t=1}^l |v_r - v_t|^{-4}$ que, en el límite $|z| = |\varepsilon| \rightarrow 0$ devienen en

$$I_{l,l'} \sim |z|^{2(h_j - h_{j_1} - h_{j_2})} |x|^{2(j_1 + j_2 - j)}$$

$$\begin{aligned}
& \prod_{r=1}^l \int d^2 y_r \prod_{r=1}^l |y_r|^{2b\alpha_1} |1 - y_r|^{2b\alpha_2} \prod_{r < t \leq l}^{l-1, l} |y_r - y_t|^{-4b^2} \\
& \prod_{r=1}^{l'} \int d^2 \tau_r \prod_{r=1}^{l'} |\tau_r|^{2b^{-1}\alpha_1} |1 - \tau_r|^{2b^{-1}\alpha_2} \prod_{r < t \leq l'}^{l'-1, l'} |\tau_r - \tau_t|^{-4b^{-2}} \times \\
& \times \prod_{r=l+1}^{n_+} \int d^2 u_r \prod_{r=l+1}^{n_+} |u_r|^{2jb^2} |1 - u_r|^{2b\alpha_3} \prod_{l < r < t}^{n_+-1, n_+} |u_r - u_t|^{-4b^2} \\
& \prod_{r=l'+1}^{n_-} \int d^2 v_r \prod_{r=l'+1}^{n_-} |v_r|^{2j} |1 - v_r|^{2b^{-1}\alpha_3} \prod_{l' < r < t}^{n_- -1, n_-} |v_r - v_t|^{-4b^{-2}} \quad (341)
\end{aligned}$$

que es esquemáticamente lo siguiente

$$I_{l, l'}(j_1, j_2, j_3, j_4) \sim |z|^{2(h_j - h_{j_1} - h_{j_2}) - 4j_1 j_2} |x|^{2(j_1 + j_2 - j)} J_{l, l'}\left(\frac{\alpha_1}{b}, \frac{\alpha_2}{b}, -1 - j\right) \times J_{n_+ - l, n_- - l'}\left(j, \frac{\alpha_3}{b}, -1 - \frac{\alpha_4}{b}\right) \quad (342)$$

donde se usó que $b^2 = -\rho$ y donde las integrales $J_{m, n}\left(\frac{\alpha_a}{b}, \frac{\alpha_b}{b}, \frac{\alpha_c}{b}\right)$ quedan unívocamente definidas por (341) y refieren a las integrales que se obtienen de la representación de gas de Coulomb de funciones de 3-puntos con operadores primarios de momentos $\left(\frac{\alpha_a}{b}, \frac{\alpha_b}{b}, \frac{\alpha_c}{b}\right)$; el símbolo \sim refiere a que se tomó el límite $z \rightarrow 0$ y, posteriormente, el límite $x \rightarrow 0$.

En efecto, luego de cálculos similares a los efectuados para reobtener la función de 3-puntos a partir de la expresión integral (333), es posible escribir este resultado en términos de los números cuánticos del modelo WZNW. Así, en el límite $z \rightarrow 0$ se obtiene la siguiente estructura de residuos

$$\mathcal{A}_{j_1, j_2, j_3, j_4} \sim |z|^{2(h_j - h_{j_1} - h_{j_2})} |x|^{2(j - j_1 - j_2)} \sum_j c_j \langle \Phi_{j_1}(0) \Phi_{j_2}(1) \Phi_{-1-j}(\infty) \rangle \langle \Phi_j(z) \Phi_{j_3}(1) \Phi_{-1-j_4}(\infty) \rangle$$

donde los coeficientes c_j son funciones de j y de los j_i , y están dados en términos de cocientes de funciones gama⁵⁰.

Es importante mencionar que, dado que para valores de j genéricos se debe considerar la extensión analíticas de las expresiones integrales tratadas aquí, la sumatoria \sum_j de

⁵⁰Teniendo en cuenta la relación funcional $C(j_1, j_2, -1 - j)C(j, j_3, j_4) = \frac{C(j_1, j_2, j)C(j, j_3, j_4)}{B(j)}$ se ve que esta factorización es similar a la analizada en las referencias [16] y [75]

la expresión de arriba refiere a una suma formal (eventualmente una integral sobre rangos continuos de j). En [16] se mostró mediante la manipulación de contornos de integración que la función de 4-puntos puede escribirse como la suma (integral) sobre contribuciones internas que toman valores dentro de la región $-\frac{1}{2} < \text{Re}(j) < \frac{k-3}{2}$.

De esta manera, una lectura de los residuos que aparecen en el límite de coincidencia $z \rightarrow 0$ y $x \rightarrow 0$, permite mostrar que las funciones de 4-puntos A_{j_1, j_2, j_3, j_4} se factorizan en el producto de dos funciones de 3-puntos, *i.e.* $A_{j_1, j_2, -1-j} \times A_{j, j_3, j_4}$, donde el estado intermedio es precisamente j .

Ahora, de forma análoga a la considerada antes, reconocemos el número cuántico del estado intermedio como aquél que está dado por

$$j = j_1 + j_2 - l - l'(k - 2) \quad (343)$$

donde vale la pena notar que l y l' son dos números tales⁵¹ que

$$0 < l + l'(k - 2) \leq 2j_1$$

por lo cual llegamos a que

$$j = j_2 + j_1 - l - l'(k - 2) \leq j_2 + j_1$$

8.4.2 La unitariedad del estado intermedio y las restricciones sobre los estados externos

Analicemos con esto el rango de unitariedad de j . Sabemos que $j = j_1 + j_2 - l - l'(k - 2)$, siendo $0 \leq l + l'(k - 2) \leq 2j_1$; de esto, vemos que los casos límites son

$$|j_2 - j_1| \leq j \leq j_2 + j_1 \quad (344)$$

De esta manera, notemos que si se pide que el estado intermedio sea unitario, lo que implica pedir que se satisfaga $j < \frac{k-3}{2}$, entonces la condición (344) impone la

⁵¹Esto se desprende del hecho de que l y l' son precisamente las cantidades de integrales cuyas variables de integración son elegidas para ser tomadas también yendo a 0 junto a z , siendo $l + l'$ la cantidad total de éstas.

siguiente cota sobre los estados externos

$$j_1 + j_2 < \frac{k-3}{2} \quad (345)$$

De esta forma, si escribimos (345) en términos de la notación adoptada en [16] como

$$j_1 + j_2 < \frac{k-3}{2} \rightarrow j_1 + j_2 - 2 < \frac{k-3}{2}$$

es decir, si hacemos el reemplazo⁵² $j \rightarrow j - 1$ tenemos

$$j_1 + j_2 < \frac{k+1}{2} \quad (346)$$

Maldacena y Ooguri obtienen en su artículo la misma condición sobre los estados externos (ver específicamente la página 33 de la versión del *pre-print* hep-th/0111180v3 de su artículo [16]) siguiendo un camino distinto. En [16] la condición (346) aparece como condición necesaria para que la función de 4-puntos tenga las propiedades de factorización adecuadas. Los autores mostraron que si tal inecuación no se cumple, entonces es posible satisfacer la condición $j = k - j_1 - j_2 + n$ para algún número natural n . Luego, la función de 4-puntos tiene polos en dichos puntos, pero éstos no pueden ser interpretados como condiciones de estados físicos de la teoría de cuerdas sobre AdS_3 [16]. De esta manera, Maldacena y Ooguri obtienen la condición (346) a efectos de asegurar las propiedades de factorización de la amplitud de 4-puntos.

Resumiendo; tenemos que las condiciones de polos que la expresión genérica para la función de 4-puntos desarrolla en el límite de coincidencia $z \rightarrow 0$ son justamente condiciones de cáscara de masa para estados de la teoría de cuerdas con su número cuántico j dado por $j = j_1 + j_2 - l - l'(k-2)$, con l entero entre $0 \leq l \leq 2j_1$. Este j es tal que, si se exige su unitariedad mediante la imposición del límite de unitariedad $-\frac{1}{2} < j < \frac{k-3}{2}$, entonces los estados externos resultan restringidos por $j_1 + j_2 < \frac{k-3}{2}$. Maldacena y Ooguri obtienen una restricción similar en [16] de otra manera; ellos requieren dicha condición para que la función de 4-puntos se factorice de

⁵²Este reemplazo es necesario para comparar con los resultados obtenidos en [16], lo cual resulta sumamente provechoso.

manera tal que los estados intermedios puedan ser interpretados como estados físicos de la teoría de cuerdas. Sería interesante profundizar en este aspecto a efectos de concluir si existe una relación entre ambas formas de obtener la mencionada restricción sobre los estados externos de la función de 4-puntos; es ésta materia de nuestras próximas investigaciones.

Por otro lado, un punto que resulta de interés es la observación de que, dada la relación existente entre los correladores $\mathcal{A}_{j_1, j_2, j_3, j_4}$ y los correladores $\mathcal{A}_{\alpha_1, \alpha_2, -\frac{1}{2b}, \alpha_3, \alpha_4}^{Liouville}$, es posible relacionar cambios producidos en los números cuánticos del modelo WZNW y sus contrapartes en el modelo de Liouville. De esta manera, teniendo en cuenta que los estados de las representaciones $\mathcal{D}_j^{\omega=0}$ se relacionan con los estados de las representaciones del sector $\omega = 1$ de las representaciones $\mathcal{D}_{j'}^{\omega=1}$ mediante la relación $j' = -\frac{k}{2} - j$, es interesante investigar cuáles son los cambios necesarios que deben hacerse en los números cuánticos de los correladores de Liouville a efectos de representar correladores de 4-puntos con número de enrollamientos distinto de cero en la teoría sobre AdS_3 . Para dar una idea de este análisis, permítasenos notar que, por ejemplo, si se efectúa el cambio $\alpha_i \rightarrow Q - \alpha_i$ en los estados de Liouville, entonces los siguientes cambios son inducidos en los correladores del modelo WZNW: $j_i \rightarrow -j_i - \frac{k}{2}$. Por otro lado, si efectuamos el cambio $j_{2,3} \rightarrow -j_{2,3} - \frac{k}{2}$ dejando invariantes j_1 y j_2 , obtenemos que los números cuánticos de los correladores de Liouville sólo sufren un intercambio de la forma $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_4$ y $\alpha_2 \leftrightarrow \alpha_3$. Una de las motivaciones por entender la manera de introducir el número de enrollamientos en la descripción de la función de 4-puntos es el hecho de que en [16] se mostró que estados de las representaciones continuas con $\omega = 1$ circulan en los canales intermedios de la factorización de la función de 4-puntos. Sería interesante explorar este aspecto en detalle en el futuro.

IX

9 Conclusiones

Reservamos para esta última sección las conclusiones sobre los resultados principales de esta tesis. Resumimos, pues, los aspectos más importantes del estudio de la teoría de cuerdas sobre AdS_3 y hacemos una síntesis de los aportes originales de nuestro trabajo.

La línea general de esta tesis se basó en la presentación de la teoría de cuerdas sobre el espacio-tiempo de Anti-de Sitter tridimensional (AdS_3) en términos del modelo de Wess-Zumino-Novikov-Witten (WZNW) formulado sobre $SL(2) \otimes SL(2)$. Dicha descripción nos permitió analizar en detalle y extender las representaciones de campos libres. Entre otros aspectos, nuestra estrategia de trabajo consistió en el análisis de las condiciones necesarias para la construcción de un espectro unitario para la teoría de cuerdas sobre AdS_3 y en el estudio la estrecha relación existente entre la teoría formulada sobre dicha geometría y la teoría formulada sobre el agujero negro bidimensional de Witten (la versión euclídeana de esta variedad). En efecto, ambos puntos (*i.e.* tanto el estudio de la unitariedad cuanto el estudio en relación con la variedad de agujero negro) nos llevó naturalmente a la propuesta de realizar el espectro de la teoría de cuerdas sobre AdS_3 como un modelo conforme formulado sobre la variedad producto $\frac{SL(2)}{U(1)} \times U(1)$. Hicimos esta propuesta emulando la línea general de la realización de la simetría de flujo espectral en los modelos con supersimetría $N=2$. Dicha construcción permite naturalmente describir los estados de cuerdas enrolladas en términos de las representaciones del grupo $SL(2)$ considerando las transformaciones de flujo espectral como automorfismos del álgebra $\widehat{sl}(2)_k$, tal como fue introducido por Maldacena

y Ooguri en [16]. Nuestro análisis de la teoría a lo largo de esta tesis descansa en la filosofía y línea de trabajo de las referencias [11, 14, 13, 15, 16].

Este trabajo de tesis consistió básicamente en cuatro partes orgánicas; a saber

- *Análisis del espectro de la teoría de cuerdas sobre AdS_3 y la descripción del espacio de Hilbert:*

En los primeros cinco capítulos, se hizo un estudio cuidadoso de la teoría conforme bidimensional sobre la hoja de mundo, con una descripción detallada del espacio de Hilbert. Estudiamos la forma funcional de los operadores de vértice en términos de las funciones normalizables sobre $SL(2)$ y analizamos la representación de campos libres de Wakimoto. Propusimos una descripción del modelo conforme sobre $\frac{SL(2)}{U(1)} \times U(1)$ en términos de campos libres mediante la inclusión de campos auxiliares que nos permitieron describir el espacio de estados de la teoría de cuerdas sobre AdS_3 en términos de las representaciones de $\widehat{SL(2)}_k$; los estados de cuerdas enrolladas naturalmente aparecen en este contexto; éste es un resultado original de este trabajo de tesis.

- *Extensión de la representación de Dotsenko al caso no-compacto $\frac{SL(2)}{U(1)} \times U(1)$:*

Propusimos en el capítulo 6 una representación integral de los bloques conformes para $\frac{SL(2)}{U(1)} \times U(1)$ valiéndonos la generalización de la construcción análoga presentada por Dotsenko para el caso compacto $SU(2)$. Hicimos esto en dos pasos: primero extendiéndola realización al caso de la variedad cociente $SL(2)/U(1)$ y luego completando la descripción de la teoría conforme sobre el producto $\frac{SL(2)}{U(1)} \times U(1)$ mediante la extensión de las representaciones conjugadas de Dotsenko al caso en el cual se incluyen los campos auxiliares. Obtuvimos una extensa gama de nuevas representaciones conjugadas que nos permitió proponer una prescripción para calcular amplitudes de dispersión en la teoría de cuerdas sobre AdS_3 en el contexto del formalismo tipo gas de Coulomb.

Y, valiéndonos de la consideración de dichas representaciones conjugadas para el operador identidad y de las leyes de simetría de carga deducidas consecuentemente

a partir de éstas, pudimos mostrar que mediante diferentes combinaciones de representaciones conjugadas utilizadas para describir los N operadores de una función de correlación es factible escribir diferentes amplitudes de dispersión de N cuerdas para las cuales la conservación del número de total de enrollamientos $\sum_{i=1}^N \omega_i$ puede violarse. En efecto, nuestra construcción, *ab initio*, lleva al resultado de que la conservación del número total de enrollamientos de una amplitud de N estados puede violarse según el siguiente patrón

$$\left| \sum_{i=1}^N \omega_i \right| \leq N - 2 \quad (347)$$

La obtención de esta cota en este contexto es un resultado original de nuestro trabajo. En la teoría de cuerdas sobre AdS_3 esta violación de la conservación del número de enrollamientos se entiende en términos de la naturaleza no-topológica del grado de libertad ω , análogamente a un efecto túnel. Es interesante comentar, y así lo hicimos antes, que resultados similares a (347) se encontraron para otros modelos conformes, *i.e.* Fateev, Zamolodchikov y Zamolodchikov lo descubrieron para la teoría de cuerdas sobre el agujero negro de Witten; Giveon y Kutasov obtuvieron un resultado análogo para la teoría con supersimetría $N=2$ en la hoja de mundo; Fukuda y Hosomichi computaron amplitudes satisfaciendo (347) en el modelo sine-Liouville (conjeturado dual a la teoría sobre $\frac{SL(2)}{U(1)}$); y más recientemente, Maldacena y Ooguri obtuvieron idéntico resultado para la teoría de cuerdas sobre AdS_3 .

- *Cálculo explícito de las amplitudes de dispersión de 2 y 3 cuerdas en AdS_3 :*

Realizamos el cálculo explícito de las funciones de correlación en el modelo sobre $\frac{SL(2)}{U(1)} \times U(1)$. Las funciones de correlación en el modelo conforme sobre la hoja de mundo dan las expresiones que representan amplitudes de dispersión de cuerdas interactuando en el espacio-tiempo. En el capítulo 7, calculamos explícitamente los procesos de interacción de 2 y 3 cuerdas en el espacio AdS_3 .

Obtuvimos de nuestro cálculo el resultado exacto (coincidente con previos cálculos exactos y aproximados de la literatura basados en otros formalismos). Los resultados

exactos fueron obtenidos aun cuando, *a priori*, la descripción de campos libres era considerada sólo confiable en el límite cercano al borde⁵³ de AdS_3 . Por ejemplo, esto demuestra que este formalismo es suficiente, al menos en lo que atañe a correladores de 2 y 3 puntos, para obtener los factores no-perturbativos que conforman parte de los resultados, *e.g.*

$$\frac{\Gamma\left(1 - \frac{2j+1}{k-2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2j+1}{k-2}\right)}; \quad (348)$$

Realizamos el cálculo de dichas funciones de correlación en el contexto de una realización de campos libres tipo gas de Coulomb. Hicimos, entonces, hincapié en la existencia de dos tipos distintos de operadores de apantallamiento (\mathcal{S}_+ y \mathcal{S}_-) en el modelo conforme que describe la teoría de campos de la hoja de mundo. Mostramos explícitamente que los resultados exactos de los correladores usando sendos tipos de operadores de apantallamiento coinciden idénticamente si se satisface la siguiente relación funcional entre las constantes de acoplamiento

$$\pi\tilde{\mu}\frac{\Gamma(k-2)}{\Gamma(1-(k-2))} = \left(\pi\mu\frac{\Gamma(\frac{1}{k-2})}{\Gamma(1-\frac{1}{k-2})}\right)^{k-2} \quad (349)$$

siendo μ y $\tilde{\mu}$, las constantes de acoplamiento de los términos de interacción que corresponden a los operadores de apantallamiento \mathcal{S}_+ y \mathcal{S}_- respectivamente. Es también éste un resultado original de esta tesis. Discutimos, entonces, una posible interpretación de la simetría ante el intercambio $(\mu, k-2) \leftrightarrow (\tilde{\mu}, \frac{1}{k-2})$ en el contexto de una dualidad entre acoplamiento débil y acoplamiento fuerte de la teoría conforme sobre la hoja de mundo; notemos que k representa la tensión de la cuerda. La aparición de esta dualidad es sumamente interesante dado que en este modelo conforme dicha simetría, aunque presente, no aparece explícitamente en el lagrangiano derivado del modelo σ no lineal. Distinto es el caso de otros modelos estudiados anteriormente para los cuales se obtiene una relación similar a (349) pero ésta está presente a nivel de la acción, *v.g.* el modelo de Liouville. Por otro lado, quizá sea posible pensar que esta simetría en el modelo

⁵³Debería agradecer en este punto a David Kutasov por remarcar me la importancia de este punto.

conforme esté relacionada con la aparición de correcciones instantónicas⁵⁴ sobre la hoja de mundo de las cuerdas en AdS_3 .

Luego, calculamos explícitamente las funciones de 3-puntos representando procesos de dispersión de cuerdas en los que se viola la conservación del número total de enrollamientos. Damos una expresión de esta cantidad para la teoría de cuerdas sobre AdS_3 ; es éste también un resultado original de este trabajo de tesis.

- *Estudio de la función de 4-puntos para el modelo conforme sobre $SL(2)$:*

Luego de que la descripción de las funciones de correlación de 2 y 3-puntos en términos de representaciones integrales basadas en el formalismo de campos libres resultó ser fecunda para la obtención de los resultados explícitos y exactos, nos abocamos al estudio de la función de 4-puntos. Para hacerlo, estudiamos con detalle una extensión para el caso de representaciones genéricas de la expresión integral que Andreev presentó en [92] para el caso de las representaciones admisibles de $SL(2)$. Andreev propuso dicha expresión basándose en una adaptación de una observación efectuada por Fateev y Zamolodchikov para el caso compacto $SU(2)$ [91], que consiste en notar que los correladores de 4-puntos del modelo WZNW sobre $SU(2)$ están asociados a ciertos correladores de 5-puntos de la teoría de modelos minimales. En el caso no-compacto $SL(2)$ una relación análoga vale entre los correladores de 4-puntos y los correladores de 5-puntos de la teoría de Liouville.

De esta manera, nosotros escribimos una expresión integral para la función de 4-puntos del modelo WZNW sobre $SL(2)$ mediante la generalización directa de los resultados de [91] y [92].

Nosotros mostramos la normalización adecuada que lleva a reobtener los correladores de 3-puntos en el caso en el cual uno de los cuatro estados de la función de 4-puntos tiene un momento nulo $j_1 = 0$ (*idem* con la función de 2-puntos para el caso $j_3 = j_2 = 0$). Valiéndonos del cálculo explícito de un caso particular no-trivial, estudiamos la

⁵⁴También agradezco a Juan Martín Maldacena por discutir conmigo este punto.

propiedades de monodromía de dicho correlador, mostrando que la expresión particular es invariante ante monodromía.

Estudiamos también el límite de factorización de la expresión integral propuesta mostrando que las condiciones de polo que aparecen en el límite de coincidencia de dos estados en el canal s (o resp. en el canal t) pueden ser identificados como condiciones de cáscara de masa de estados de $SL(2)$ de momento j circulando en los canales intermedios. Obtuvimos de esta manera que, a efectos de que los estados intermediados satisfagan las condiciones suficientes para ser estados unitarios, se debe restringir los momentos de los estados entrantes j_1 y j_2 (resp. j_1 y j_3) según la siguiente inecuación

$$j_1 + j_2 < \frac{k-3}{2}$$

que, relacionando las nomenclaturas correspondientemente, deviene en la cota superior sobre los estados externos que Maldacena y Ooguri obtienen como condición necesaria para que la función de 4-puntos del modelo conforme sobre $SL(2)$ se factorice en términos de contribuciones aptas de una interpretación en el contexto del espacio de estados de la teoría de cuerdas sobre AdS_3 . Reobtuvimos, así, dicha condición.

Por último, el análisis presentado aquí para la función de 4-puntos sugiere una pregunta interesante; a saber: Cuál es la forma de introducir el grado de libertad correspondiente a los números de enrollamientos de las cuerdas interactuantes en un proceso de 4 estados?

La respuesta a esta pregunta puede estar, de hecho, vinculada con la relación existente entre los números cuánticos de los correladores de 4-puntos en el modelo sobre $SL(2)$ y los correspondientes estados de los correladores de 5-puntos de Liouville; teniendo en cuenta la relación existente entre las representaciones discretas de los sectores $\omega = 0$ y $\omega = \pm 1$. Esta idea se sugirió al final del capítulo 7, aunque es una idea que requiere investigación futura.

Agradecimientos:

Agradezco a Carmen A. Núñez por la dirección y corrección de este trabajo de tesis. Le agradezco también a Juan Martín Maldacena por las sugerencias y la ayuda.

Estoy muy agradecido a las siguientes personas por haberse tomado tiempo para el intercambio de correspondencia acerca de aspectos técnicos de mi trabajo a lo largo de los últimos cuatro años: Joerg Teschner, Kazuo Hosomichi, Ian Kogan, Alexander Nichols, Jens Fjlestadt, Juan Maldacena y Max Bañados. Le agradezco a Claudio Simeone por haber compartido conmigo varias horas y hojas de trabajo.

Esta tesis ha sido realizada con financiamiento del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) y la Universidad de Buenos Aires (UBA). La mayor parte del trabajo ha sido realizado en el Instituto de Astronomía y Física del Espacio (IAFE). Extiendo mi agradecimiento a las siguientes instituciones científicas por la hospitalidad: Abdus Salam International Center for Theoretical Physics (ICTP), Universidad Autónoma de Madrid (UAM), Centro de Estudios Científicos (CECS), Observatorio Pierre Auger, Karlstad University, Instituto Balseiro y Laboratorio TandAr.

Reconozco a las siguientes personas como aquéllas con las que, indudablemente, más disfruté de compartir charlas sobre mis temas de interés: Mauricio Leston, Marc Thibault, Pablo Mininni y Ernesto Lozano-Telechea; mi respeto hacia ellos.

Quisiera agradecer también a: Jürgen Fuchs, Stephen Hwang, Nicolás Busca, Hernán Deccico, Jorge Guerón, Cristina Mandrini, Daniel Sforza, Fernando Lombardo, Oscar Jofre, Ricardo Troncoso, Mario Castagnino, Fidel Schaposnik; a mis compañeros: Daniel López, Gabriel Catrén, Carla Bonifazi, Daniel Fraiman, Eugenia Lascano, Sebastián Franco, Osvaldo Santillán; a mis profesores: Rafael Ferraro, Daniel Gómez, Jorge Russo, Fernando Cukierman, Juan Pablo Paz, Diego Harari, Esteban Calzetta y Diego Mazzitelli; a aquéllos con quienes comencé a estudiar estos temas: Carlos Núñez, Guillermo Silva, Nicolás Grandi y Martín Kruczenski.

Las siguientes personas merecen mi especial reconocimiento por haberse portado

particularmente bien conmigo: Jorge Zanelli, Gabriel Mindlin, Juan Martín Maldacena, Alfredo Herrera-Aguilar y especialmente Pablo Mininni, Tifi Coluccio, Helena Hansson y Natxo Alonso-Alberca; se los agradezco infinitamente a los ocho.

Por último, un enorme agradecimiento para mi familia: Juan Giribet, Ana Dogliotti, Enrique Giribet, mis padres, Esteban Seijo, Mariano Galvagno y Mauricio Leston.

10 Apéndices

10.1 La integración de los modos cero

En este apéndice discutimos los detalles de la integración de los modos cero de los campos en la integral funcional. Derivamos las leyes de conservación en consecuencia.

La integral funcional sobre el campo ϕ puede resolverse mediante la separación usual entre los modos cero y las contribuciones restantes del campo escalar, a saber: $\phi(z) = \phi_0 + \eta(z)$. De esta manera, podemos escribir

$$\left\langle \prod_{n=1}^N V_{j_n, m_n, \bar{m}_n} \right\rangle_{\mu, \bar{\mu}} = \int D^2\beta D^2\gamma D\eta \int d\phi_0 e^{-S_{0,0}[\beta, \gamma, \eta]} \prod_{n=1}^N \int d^2y_n \gamma^{j_n - m_n} \bar{\gamma}^{j_n - \bar{m}_n} e^{\frac{2ij_n\eta}{\alpha_+}} \times \\ \times e^{\frac{1}{\pi\alpha_+} \int R\phi_0} e^{-\mu \int \beta \bar{\beta} e^{-\frac{2}{\alpha_+}\phi}} e^{-\bar{\mu} \int \beta^{\frac{\alpha_+^2}{2}} \bar{\beta}^{\frac{\alpha_+^2}{2}} e^{-\alpha_+\phi}} e^{\frac{2}{\alpha_+} \sum_{n=1}^N j_n \phi_0} \quad (350)$$

Y reescribiendo los términos exponenciales de la siguiente forma

$$e^{\int d^2z f(z)} = \int_{\epsilon \rightarrow 0^-}^{\infty} dx e^{-x} \delta(x + \int d^2z f(z)) \quad (351)$$

tenemos

$$\left\langle \prod_{n=1}^N V_{j_n, m_n, \bar{m}_n} \right\rangle_{\mu, \bar{\mu}} = \int D^2\beta D^2\gamma D\eta \prod_{n=1}^N \int d^2y_n \gamma^{j_n - m_n} \bar{\gamma}^{j_n - \bar{m}_n} e^{\frac{2ij_n\eta}{\alpha_+}} \times \\ \times \int d\phi_0 e^{-S_{0,0}[\beta, \gamma, \eta]} e^{\frac{1}{\pi\alpha_+} \int R\phi_0} e^{\frac{2}{\alpha_+} \sum_{n=1}^N j_n \phi_0} \times \\ \times \int_{\epsilon \rightarrow 0^-}^{\infty} dx \int_{\epsilon \rightarrow 0^-}^{\infty} dy e^{-x-y} \delta(x + \mu \int d^2w \beta \bar{\beta} e^{-\frac{2}{\alpha_+}\phi}) \times \\ \times \delta(y + \bar{\mu} \int d^2w \beta^{\frac{\alpha_+^2}{2}} \bar{\beta}^{\frac{\alpha_+^2}{2}} e^{-\alpha_+\phi}) \quad (352)$$

El teorema de Gauss-Bonnet sobre superficies cerradas afirma que

$$\int d^2z \sqrt{h} R = 2\pi(1 - g) \quad (353)$$

donde g es el género de la variedad bidimensional de escalar de curvatura R y métrica h . Usando este resultado y la identidad

$$\frac{\delta(x - x_0)}{\frac{dF(x)}{dx} \Big|_{x_0}} = \delta(F(x) - F(x_0)) \quad (354)$$

concluimos en que

$$\begin{aligned}
\left\langle \prod_{n=1}^N V_{j_n, m_n, \bar{m}_n} \right\rangle_{\mu, \bar{\mu}} &= \int D^2\beta D^2\gamma D\eta \int_{\epsilon \rightarrow 0^-}^{\infty} \frac{dx}{x} \int_{\epsilon \rightarrow 0^-}^{\infty} \frac{dy}{y} e^{-x-y} \times \\
&\times \int d\phi_0 e^{-S_{0,0}[\beta, \gamma, \eta]} \delta(\ln x + \ln \mu \int d^2w \beta \bar{\beta} e^{-\frac{2}{\alpha_+} \eta} - \frac{2}{\alpha_+} \phi_0) \times \\
&\times \delta(\ln y + \ln \bar{\mu} \int d^2w \beta^{\frac{\alpha_+^2}{2}} \bar{\beta}^{\frac{\alpha_+^2}{2}} e^{-\alpha_+ \eta} - \alpha_+ \phi_0) e^{\frac{2\phi_0}{\alpha_+} ((1-g) + \sum_{n=1}^N j_n)} \times \\
&\times \prod_{n=1}^N \int d^2y_n \gamma^{j_n - m_n} \bar{\gamma}^{j_n - \bar{m}_n} e^{\frac{2i j_n \eta}{\alpha_+}}
\end{aligned} \tag{355}$$

Algunas propiedades similares de la delta de Dirac nos permiten escribir la función de correlación como

$$\begin{aligned}
\left\langle \prod_{n=1}^N V_{j_n, m_n, \bar{m}_n} \right\rangle_{\mu, \bar{\mu}} &= \frac{2}{\alpha_+^2} \int D^2\beta D^2\gamma D\eta \int_{\epsilon \rightarrow 0^-}^{\infty} \frac{dx}{x} \int_{\epsilon \rightarrow 0^-}^{\infty} \frac{dy}{y} e^{-x-y} \times \\
&\times \int d\phi_0 e^{-S_{0,0}[\beta, \gamma, \eta]} \delta \left(\ln(x\mu \int d^2w \beta \bar{\beta} e^{-\frac{2}{\alpha_+} \eta}) - \frac{2}{\alpha_+} \phi_0 \right) \times \\
&\times \delta \left(\ln(y\bar{\mu} \int d^2w \beta^{\frac{\alpha_+^2}{2}} \bar{\beta}^{\frac{\alpha_+^2}{2}} e^{-\alpha_+ \eta}) - \frac{2}{\alpha_+} \phi_0 \right) e^{\frac{2\phi_0}{\alpha_+} ((1-g) + \sum_{n=1}^N j_n)} \times \\
&\times \prod_{n=1}^N \int d^2y_n \gamma^{j_n - m_n} \bar{\gamma}^{j_n - \bar{m}_n} e^{\frac{2i j_n \eta}{\alpha_+}}
\end{aligned} \tag{356}$$

Integrando en $\frac{2}{\alpha_+} \phi_0$,

$$\begin{aligned}
\left\langle \prod_{n=1}^N V_{j_n, m_n, \bar{m}_n} \right\rangle_{\mu, \bar{\mu}} &= \frac{1}{\alpha_+} \int D^2\beta D^2\gamma D\eta e^{-S_{0,0}[\beta, \gamma, \eta]} \prod_{n=1}^N \int d^2y_n \gamma^{j_n - m_n} \bar{\gamma}^{j_n - \bar{m}_n} e^{\frac{2i j_n \eta}{\alpha_+}} \times \\
&\times \int_{\epsilon \rightarrow 0^-}^{\infty} \frac{dx}{x} \int_{\epsilon \rightarrow 0^-}^{\infty} \frac{dy}{y} e^{-x-y} \times \\
&\times e^{q \ln \left(x\mu \int d^2w \beta \bar{\beta} e^{-\frac{2}{\alpha_+} \eta} \right) ((1-g) + \sum_{n=1}^N j_n)} \\
&\times e^{\frac{2}{\alpha_+} p \ln \left(y\bar{\mu} \int d^2w \beta^{\frac{\alpha_+^2}{2}} \bar{\beta}^{\frac{\alpha_+^2}{2}} e^{-\alpha_+ \eta} \right) ((1-g) + \sum_{n=1}^N j_n)}
\end{aligned} \tag{357}$$

donde esta última igualdad debe entenderse como para cualquier par (p, q) de reales tal que $p + q = 1$; esto no es más que elegir la siguiente prescripción para el producto de δ 's de Dirac

$$\int dx f(x) \delta(x - x_1) \delta(x - x_2) \sim f^p(x_1) f^{1-p}(x_2) \tag{358}$$

donde el signo \sim debe entenderse como refiriéndose al hecho de establecer una clase de equivalencia entre el lado izquierdo y *todos* los casos de p posibles. Esta prescripción es la sugerida por reescribir $f(x)$ de la forma $f(x) = f(x)^p f(x)^{1-p}$ y luego evaluar cada una de las dos δ' s con cada uno de estos dos factores (mitad y mitad).

De este modo, podemos compactar la notación en (357) y por fin concluir en

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_{n=1}^N V_{j_n, m_n, \bar{m}_n} \right\rangle_{\mu, \bar{\mu}} &= \frac{1}{\alpha_+} \int D^2\beta D^2\gamma D\eta e^{-S_{0,0}[\beta, \gamma, \eta]} \prod_{n=1}^N \int d^2y_n \gamma^{j_n - m_n} \bar{\gamma}^{j_n - \bar{m}_n} e^{\frac{2i_n \eta}{\alpha_+}} \times \\ &\times \int_{\epsilon \rightarrow 0^-}^{\infty} dy e^{-y} y^{s_- - 1} \int_{\epsilon \rightarrow 0^-}^{\infty} dx e^{-x} x^{s_+ - 1} \times \\ &\times \prod_{n=1}^{s_-} \bar{\mu} \int d^2w_n \beta^{\frac{\alpha_+^2}{2}} \bar{\beta}^{\frac{\alpha_+^2}{2}} e^{-\alpha_+ \eta} \prod_{n=1}^{s_+} \mu \int d^2w_n \beta \bar{\beta} e^{-\frac{2}{\alpha_+} \eta} \times \end{aligned} \quad (359)$$

donde la condición $p + q = 1$ se escribió como $s_- \frac{\alpha_+^2}{2} + s_+ = 1 - g + \sum_{i=1}^N j_i$. Recordando que

$$\Gamma(-y) = \int dx x^{y-1} e^{-x} \quad (360)$$

tenemos

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_{n=1}^N V_{j_n, m_n, \bar{m}_n} \right\rangle_{\mu, \bar{\mu}} &= \frac{1}{\alpha_+} \Gamma(s_-) \Gamma(s_+) \int D^2\beta D^2\gamma D\eta e^{-S_{0,0}[\beta, \gamma, \eta]} \times \\ &\times \prod_{n=1}^{s_-} \bar{\mu} \int d^2w_n \beta^{\frac{\alpha_+^2}{2}} \bar{\beta}^{\frac{\alpha_+^2}{2}} e^{-\alpha_+ \eta} \prod_{n=1}^{s_+} \mu \int d^2w_n \beta \bar{\beta} e^{-\frac{2}{\alpha_+} \eta} \times \\ &\times \prod_{n=1}^N \int d^2y_n \gamma^{j_n - m_n} \bar{\gamma}^{j_n - \bar{m}_n} e^{\frac{2i_n \eta}{\alpha_+}} \end{aligned} \quad (361)$$

entendiendo la condición $p + q = 1$ como $s_- \frac{\alpha_+^2}{2} + s_+ = 1 - g + \sum_{i=1}^N j_i$, de lo cual no es difícil convencerse si se nota que se ha definido

$$\begin{aligned} s_- &= \frac{2}{\alpha_+^2} p \left(1 - g + \sum_{i=1}^N j_i \right) \\ s_+ &= q \left(1 - g + \sum_{i=1}^N j_i \right) \end{aligned}$$

De todo esto vemos que para la teoría formulada sobre la topología de la esfera ($g = 0$) verdaderamente se satisface

$$s_-(k-2) + s_+ = \sum_{n=1}^N j_n + 1 \quad (362)$$

y que así tendremos polos en

$$\left\{ s_- \in \frac{\mathbf{Z}_{\geq 0}}{k-2} \cup s_+ \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \right\} \quad (363)$$

con polos de un orden más alto en los casos

$$\{(s_-(k-2), s_+) \in \mathbf{Z}_{\geq (0,0)}^2\} \quad (364)$$

Así, al absorber un factor global en la definición de la integral funcional, y la expresión final es

$$\begin{aligned} & \left\langle \prod_{n=1}^N V_{j_n, m_n, \bar{m}_n} \right\rangle_{\mu, \bar{\mu}} = \Gamma(-s_-) \Gamma(-s_+) \mu^{s_+} \bar{\mu}^{s_-} \times \\ & \times \left\langle \prod_{n=1}^N V_{j_n, m_n, \bar{m}_n} \prod_{r=1}^{s_+} \mathcal{S}_+(w_r) \prod_{t=1}^{s_-} \mathcal{S}_-(y_t) \right\rangle_{\mu=0, \bar{\mu}=0} \delta \left(s_- \frac{\alpha_+^2}{2} + s_+ - 1 - \sum_{n=1}^N j_n \right) \end{aligned}$$

10.2 Estados nulos y la estructura de polos a partir de la ecuación de Belavin-Polyakov-Zamolodchikov

En este apéndice comentemos algunos aspectos de la ecuación de Belavin-Polyakov-Zamolodchikov y los estados nulos en la teoría. Este análisis nos permite describir un aspecto interesante acerca de la estructura de polos de la función de 4-puntos.

Específicamente hablando, usaremos la inserción de un estado con descendiente nulo en la función de 4-puntos a efectos de mostrar que, al menos en un caso particular, la función de 4-puntos presenta el comportamiento $\sim (x-z)^{k+j_1+j_2+j_3+j_4}$.

Como paso preliminar, consideremos la siguiente definición de los estados nulos en el modelo WZNW sobre $SL(2)$.

Definición: Sean los estados $|\xi\rangle = |j, m\rangle$, que satisfacen las siguientes propiedades

$$(J_0^-)^{2j+1} |j, m\rangle = 0 \quad (365)$$

$$(J_{-1}^-)^{-k-2j+1} |j, m\rangle = 0 \quad (366)$$

Para entender esto en más detalle, remitimos a [95] pág. 634 (en este caso, la relación entre la nomenclatura general que usan di Francesco *et al.* y la del grupo $SL(2)$ es $(E_{-1}^\theta)^{k-(\theta,\lambda)+1} |\hat{\lambda}\rangle = (J_{-1}^-)^{-k-2j+1} |j\rangle$, notar que también coincide con la ecuación (3.22) de Fateev-Zamolodchikov [91]).

Lema: *El estado $|\frac{-k}{2}, \frac{k}{2}\rangle$ es un estado con descendiente nulo (vale decir, satisfacen las propiedades (365) y (366)).*

Demostración: De esta manera, demostremos que $|j = -\frac{k}{2}, m = \frac{k}{2}, \omega = 0\rangle$ es un estado que satisfacen (365) y (366).

De esta manera, siendo $j = -\frac{k}{2}$, las propiedades (365) y (366) devienen en

$$(J_0^-)^{1-k} \left| -\frac{k}{2}, \frac{k}{2}, 0 \right\rangle = 0 \quad (367)$$

$$J_{-1}^- \left| -\frac{k}{2}, \frac{k}{2}, 0 \right\rangle = 0 \quad (368)$$

Comencemos viendo que se cumple la primera (367): sabemos que podemos escribirlo de la siguiente manera

$$(J_0^-)^{1-k} \left| -\frac{k}{2}, \frac{k}{2}, 0 \right\rangle = (J_0^-)^{-k} J_0^- \left| -\frac{k}{2}, \frac{k}{2}, 0 \right\rangle$$

como se sabe, $J_0^- |j, m, 0\rangle = (-j - m) |j, m - 1, 0\rangle$. Así, escribimos lo de arriba como

$$(J_0^-)^{1-k} \left| -\frac{k}{2}, \frac{k}{2}, 0 \right\rangle = (J_0^-)^{-k} J_0^- \left| -\frac{k}{2}, \frac{k}{2}, 0 \right\rangle = (J_0^-)^{-k} \left(\frac{k}{2} - \frac{k}{2} \right) \left| -\frac{k}{2}, \frac{k}{2} - 1, 0 \right\rangle = 0$$

Por otro lado, veamos que también se satisface (368). Comencemos recordando la definición de la transformación de flujo espectral:

$$J_n^\pm \rightarrow \tilde{J}_n^\pm = J_{n \pm \omega}^\pm$$

Esto es

$$\tilde{J}_{n\mp\omega}^{\pm} = J_n^{\pm}$$

que en el caso particular $\omega = 1$, $n = -1$ nos dice

$$J_{-1}^{-} = \tilde{J}_{-1+1}^{-} = \tilde{J}_0^{-} \quad (369)$$

Luego, recordemos que todo estado de la forma $|j, -j, 0\rangle$ es equivalente al estado $| -j - \frac{k}{2}, j + \frac{k}{2}, \omega = 1 \rangle$, por lo cual se satisface lo siguiente

$$J_{-1}^{-} |j, -j, 0\rangle = J_{-1}^{-} \left| -j - \frac{k}{2}, j + \frac{k}{2}, 1 \right\rangle = \tilde{J}_0^{-} \left| -j - \frac{k}{2}, j + \frac{k}{2}, 1 \right\rangle$$

donde se usó (369). Así, como $\tilde{J}_0^{-} |j, m, 1\rangle = (-j - m) |j, m, 1\rangle$, se tiene

$$\begin{aligned} J_{-1}^{-} |j, -j, 0\rangle &= J_{-1}^{-} \left| -j - \frac{k}{2}, j + \frac{k}{2}, 1 \right\rangle = \tilde{J}_0^{-} \left| -j - \frac{k}{2}, j + \frac{k}{2}, 1 \right\rangle = \\ &= \left(j + \frac{k}{2} - j - \frac{k}{2} \right) \left| -j - \frac{k}{2}, j + \frac{k}{2} - 1, 1 \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

Luego, si escribimos el caso particular $j = -\frac{k}{2}$, llegamos a que

$$J_{-1}^{-} \left| -\frac{k}{2}, \frac{k}{2}, 0 \right\rangle = J_{-1}^{-} |0, 0, 1\rangle = \tilde{J}_0^{-} |0, 0, 1\rangle = 0$$

y así demostramos que el estado $|j = -\frac{k}{2}, m = \frac{k}{2}, \omega = 0\rangle$ satisface tanto la condición (365) cuanto la condición (366), que definen a un estado nulo.

Q.E.D.

Una vez introducido el estado con descendiente nulo, podemos mostrar el siguiente lema acerca de la estructura de polos de la función de 4-puntos en las cercanías del punto $x = z$; a saber:

Lema: *Hay una solución para la función de 4-puntos (el caso particular $j_4 = -\frac{k}{2}$) que satisface tener la forma $U(x, z) = (x - z)^{\delta}$ (como Maldacena y Ooguri mencionan en [16]).*

Mostremos esto aquí en detalle.

Éste es un caso particular de los estados nulos que Fateev-Zamolodchikov escrine en la fórmula (3.22) de su artículo [91]; es justamente el caso $j = -\frac{k}{2}$ (recordar el cambio $k \rightarrow -k$ en la notación respecto a dicho artículo). Como se describe en [91], la función de 4-puntos $U(x, z)$ incluyendo tal estado insertado en z_4 satisface la siguiente ecuación diferencial

$$\sum_{n=1}^3 \frac{1}{(z_4 - z_n)} \left((x_4 - x_n) \frac{\partial}{\partial x_n} + 2j_n(x_4 - x_n) \right) U(x_4, z_4) = 0$$

habiendo sido elegido aquí $j = j_4$.

Por otro lado, esta condición es equivalente a la siguiente [91]

$$\prod_{l=0}^{-k-2j_4} \left((x - z) \frac{\partial}{\partial x} + j_4 - j_1 - j_2 - j_3 + l \right) U(x, z) = 0$$

siendo en este caso $j_4 = -\frac{k}{2}$; es decir, en este caso tenemos

$$\begin{aligned} \prod_{l=0}^0 \left((x - z) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{k}{2} - j_1 - j_2 - j_3 + l \right) U(x, z) &= \\ &= \left((x - z) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{k}{2} - j_1 - j_2 - j_3 \right) U(x, z) = 0 \end{aligned}$$

Denominando $a = \frac{k}{2} + j_1 + j_2 + j_3$, y sabiendo que $U(x, z)$ tiene soluciones generales de la forma $U(x, z) = \sum_{p=p_0}^{p_1} U_p(x - z)^p$ podemos reemplazar arriba y obtener

$$\begin{aligned} (x - z) \frac{\partial}{\partial x} U(x, z) &= aU(x, z) \\ (x - z) \frac{\partial}{\partial x} \sum_{p=p_0}^{p_1} U_p(x - z)^p &= a \sum_{p=p_0}^{p_1} U_p(x - z)^p \\ \sum_{p=p_0}^{p_1} U_p(x - z) \frac{\partial}{\partial x} (x - z)^p &= \sum_{p=p_0}^{p_1} aU_p(x - z)^p \\ \sum_{p=p_0}^{p_1} pU_p(x - z)^p &= \sum_{p=p_0}^{p_1} aU_p(x - z)^p \end{aligned}$$

que claramente tiene sólo soluciones para

$$U_{p \neq a} = 0$$

$$U_{p=a} = 1$$

De esta manera, el caso particular $j_4 = -\frac{k}{2}$ está dado por

$$U(x, z) = (x - z)^a = (x - z)^{\frac{k}{2} + j_1 + j_2 + j_3} = (x - z)^{k + j_1 + j_2 + j_3 + j_4}$$

que es justamente decir que en este caso particular se cumple lo que Maldacena y Ooguri habían predicho en [16] al estudiar la ecuación KZ; a saber

$$U(x, z) = (x - z)^\delta$$

siendo $\delta = k + j_1 + j_2 + j_3 + j_4$ (reiteremos que la relación entre la notación de [16] y la de [91] se relacionan mediante el cambio $j \leftrightarrow -j$).

Obviamente $U(x, z) = (x - z)^a$ módulo algún factor constante que no depende ni se x ni de z , sólo puede depender de (j_i, k) .

Observación: Notemos que si uno adoptase una prescripción *naive* de los correladores de 4-puntos utilizando en la prescripción tipo gas de Coulomb el segundo operador de apantallamiento, entonces la función de 4-puntos tendría un factor global $\Gamma(-s_-)$. Recordando de las primeras secciones de esta tesis que si $s_+ = 0$, se tiene $j_1 + j_2 + j_3 + j_4 + 1 = (k - 2)s_-$, por lo que se ve fácilmente que aparecen en ese caso polos en la condición $j_1 + j_2 + j_3 + j_4 = k - 3$, que si tenemos en cuenta la reflexión $j \rightarrow -1 - j$, nos lleva a $\delta = k + j_1 + j_2 + j_3 + j_4 = -1$ al igual que arriba.

10.3 La normalización de la solución a la ecuación de Knizhnik-Zamolodchikov: La función de 3-puntos a partir de la función de 4-puntos

En este apéndice mostraremos que la función de 4-puntos $\mathcal{A}(j_1 = 0, j_2, j_3, j_4)$ es la función de 3-puntos.

Comencemos reemplazando simplemente $j_1 = 0$. Así; llamaremos así $s = j_2 + j_3 + j_4 + 1$.

$$\mathcal{A}(0, j_2, j_3, j_4) = \prod_{a < b} |z_a - z_b|^{h_{ab}} |x_a - x_b|^{J_{ab}} \left(\pi \frac{\Gamma(1 + \rho)}{\Gamma(1 - \rho)} \right)^s \Delta(\rho) \prod_{a=2}^4 \Delta(1 - (2j_a + 1)\rho) \prod_{r=1}^s \Delta(r\rho) \times$$

$$\times \frac{\prod_{r=1}^{j_2+j_3-j_4} \Delta(r\rho) \prod_{r=1}^{j_2-j_3+j_4} \Delta(r\rho) \prod_{r=1}^{-j_2+j_3+j_4} \Delta(r\rho)}{\prod_{r=1}^{2j_4} \Delta(r\rho) \prod_{r=1}^{2j_3} \Delta(r\rho) \prod_{r=1}^{2j_2} \Delta(r\rho)} \quad (370)$$

Preocupémonos primero por los tres factores del segundo renglón de (370). Este renglón está formado por el cociente

$$\frac{\prod_{r=1}^{-j_2+j_3+j_4} \Delta(r\rho)}{\prod_{r=1}^{2j_2} \Delta(r\rho)}$$

y permutaciones de los j_a ; por esto, basta con que nos preocupemos de esta cantidad.

Separando la productoria según $\prod_{r=1}^{-j_2+j_3+j_4} [\dots] \rightarrow \prod_{r=1}^{2j_2} [\dots] \prod_{r=2j_2+1}^{-j_2+j_3+j_4} [\dots]$ tenemos

$$\frac{\prod_{r=1}^{-j_2+j_3+j_4} \Delta(r\rho)}{\prod_{r=1}^{2j_2} \Delta(r\rho)} = \prod_{r=1}^{2j_2} \Delta^{-1}(r\rho) \prod_{r=1}^{2j_2} \Delta(r\rho) \prod_{r=2j_2+1}^{-j_2+j_3+j_4} \Delta(r\rho) = \prod_{r=2j_2+1}^{-j_2+j_3+j_4} \Delta(r\rho)$$

Luego, separando una productoria nuevamente $\prod_{r=2j_2+1}^{-j_2+j_3+j_4} [\dots] \rightarrow \prod_{r=2j_2+1}^{-2j_2-1} [\dots] \prod_{r=-2j_2}^{-j_2+j_3+j_4} [\dots]$, tenemos

$$\frac{\prod_{r=1}^{-j_2+j_3+j_4} \Delta(r\rho)}{\prod_{r=1}^{2j_2} \Delta(r\rho)} = \prod_{r=2j_2+1}^{-2j_2-1} \Delta(r\rho) \prod_{r=-2j_2}^{-j_2+j_3+j_4} \Delta(r\rho)$$

Ahora, un paso preliminar:

Observación I:

$$\begin{aligned} \prod_{r=-x}^x \Delta(r\rho) &= \frac{\Gamma(-x\rho)\Gamma((1-x)\rho)\dots\Gamma(-\rho)\Gamma(0)\Gamma(+\rho)\dots\Gamma((x-1)\rho)\Gamma(x\rho)}{\Gamma(1+x\rho)\Gamma(1+(x-1)\rho)\dots\Gamma(1+\rho)\Gamma(1)\Gamma(1-\rho)\dots\Gamma(1+(1-x)\rho)\Gamma(1-x\rho)} = \\ &= \frac{\Gamma(-x\rho)\Gamma((1-x)\rho)\dots\Gamma(-\rho)\Gamma(+\rho)\dots\Gamma((x-1)\rho)\Gamma(x\rho)}{\Gamma(x\rho)\Gamma((x-1)\rho)\dots\Gamma(+\rho)\Gamma(-\rho)\dots\Gamma((1-x)\rho)\Gamma(-x\rho)} \times \frac{\Gamma(0)(-1)^x}{(x!)^2 \rho^{2x+1}} = \\ &= \frac{\Gamma(0)(-1)^x}{\rho^{2x+1}\Gamma(x+1)\Gamma(x+1)} = \frac{\Gamma(-x)}{\rho^{2x+1}\Gamma(x+1)} \end{aligned}$$

donde se usó que $\Gamma(0)/\Gamma(-x) = (-1)^x \Gamma(x+1)$. Así, podemos escribir

$$\prod_{r=-x}^x \Delta(r\rho) = \frac{\Gamma(-x)}{\Gamma(x+1)} \rho^{-2x-1} = \frac{\Delta(-x)}{\rho^{2x+1}}$$

Con esto, sabemos que

$$\prod_{r=2j_2+1}^{-2j_2-1} \Delta(r\rho) = \rho^{-4j_2-3} \Delta(2j_2+1)$$

De esta manera, podemos escribir (370) como

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(0, j_2, j_3, j_4) &= \prod_{a < b} |z_a - z_b|^{h_{ab}} |x_a - x_b|^{J_{ab}} \left(\pi \frac{\Gamma(1 + \rho)}{\Gamma(1 - \rho)} \right)^s \Delta(\rho) \times \\ &\times \rho^{-4(s-1)} \prod_{a=2}^4 \Delta(1 - (2j_a + 1)\rho) \prod_{a=2}^4 \Delta(2j_a + 1) \prod_{r=1}^s \Delta(r\rho) \times \\ &\times \prod_{r=-2j_4}^{j_2+j_3-j_4} \Delta(r\rho) \prod_{r=-2j_3}^{j_2-j_3+j_4} \Delta(r\rho) \prod_{r=-2j_2}^{-j_2+j_3+j_4} \Delta(r\rho) \end{aligned}$$

Observación II: Ahora, consideremos un truco más para reescribir el tercer renglón de esta última expresión; notemos que podemos escribir

$$\prod_{r=-2j_2}^{-j_2+j_3+j_4} \Delta(r\rho) = \prod_{l=0}^{s-1} \Delta((l - 2j_2)\rho)$$

lo que se logra renombrando índices definiendo $l = r + 2j_2$. Así, escribimos (370) como

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(0, j_2, j_3, j_4) &= \prod_{a < b} |z_a - z_b|^{h_{ab}} |x_a - x_b|^{J_{ab}} \left(\pi \frac{\Gamma(1 + \rho)}{\Gamma(1 - \rho)} \right)^s \Delta(\rho) \times \\ &\times \rho^{-4(s-1)} \prod_{a=2}^4 \Delta(1 - (2j_a + 1)\rho) \prod_{a=2}^4 \Delta(2j_a + 1) \prod_{r=1}^s \Delta(r\rho) \times \\ &\times \prod_{l=0}^{s-1} \Delta((l - 2j_2)\rho) \prod_{l=0}^{s-1} \Delta((l - 2j_3)\rho) \prod_{l=0}^{s-1} \Delta((l - 2j_4)\rho) \end{aligned}$$

Una observación más,

Observación III: Usando que $\Delta(x) = \Delta^{-1}(1 - x)$ podemos decir que

$$\begin{aligned} &\prod_{l=0}^{s-1} \Delta(1 + (l - 2j_2)\rho) = \prod_{l=0}^{s-1} \Delta^{-1}((2j_2 - l)\rho) = \\ &= \frac{\Gamma(1 - 2j_2\rho)\Gamma(1 - (2j_2 - 1)\rho)\Gamma(1 - (2j_2 - 2)\rho)\dots\Gamma(1 - (2j_2 - s + 1)\rho)}{\Gamma(2j_2\rho)\Gamma((2j_2 - 1)\rho)\Gamma((2j_2 - 2)\rho)\dots\Gamma((2j_2 - s + 1)\rho)} = \\ &= \frac{\Gamma(-2j_2\rho)\Gamma(-(2j_2 - 1)\rho)\Gamma(-(2j_2 - 2)\rho)\dots\Gamma(-(2j_2 - s + 1)\rho)}{\Gamma(2j_2\rho)\Gamma((2j_2 - 1)\rho)\Gamma((2j_2 - 2)\rho)\dots\Gamma((2j_2 - s + 1)\rho)} \times \frac{(-2j_2 + s - 1)!}{(-2j_2 - 1)!} \rho^{(\dots)} \end{aligned} \quad (371)$$

Por su parte, también podemos escribir

$$\prod_{l=0}^{s-1} \Delta((l - 2j_2)\rho) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(-2j_2\rho)\Gamma((1-2j_2)\rho)\Gamma((2-2j_2)\rho)\dots\Gamma((-2j_2+s-1)\rho)}{\Gamma(1+2j_2\rho)\Gamma(1+(2j_2-1)\rho)\Gamma(1+(2j_2-2)\rho)\dots\Gamma(1+(2j_2-s+1)\rho)} = \\
&= \frac{\Gamma(-2j_2\rho)\Gamma(-(2j_2-1)\rho)\Gamma(-(2j_2-2)\rho)\dots\Gamma(-(2j_2-s+1)\rho)}{\Gamma(2j_2\rho)\Gamma((2j_2-1)\rho)\Gamma((2j_2-2)\rho)\dots\Gamma((2j_2-s+1)\rho)} \times \frac{\rho^{(\dots)}}{(2j_2)!/(2j_2-s)!}
\end{aligned} \tag{372}$$

Así, dividiendo (371) por (372) y recordando $\Gamma(x+1) = x!$, tenemos

$$\prod_{l=0}^{s-1} \Delta(1+(l-2j_2)\rho) = \frac{\Delta(2j_2+1)}{\Delta(j_2-j_3-j_4)} \prod_{l=0}^{s-1} \Delta((l-2j_2)\rho) \tag{373}$$

lo que nos permite escribir (370) como

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(0, j_2, j_3, j_4) &= \prod_{a<b} |z_a - z_b|^{h_{ab}} |x_a - x_b|^{J_{ab}} \left(\pi \frac{\Gamma(1+\rho)}{\Gamma(1-\rho)} \right)^s \Delta^2(\rho) \times \\
&\times \rho^{-4(s-1)} \prod_{a=2}^4 \Delta(1-(2j_a+1)\rho) \prod_{a=2}^4 \Delta(2j_a+1) \prod_{r=1}^s \Delta(r\rho) \times \\
&\times \frac{\Delta(2j_2+1)}{\Delta(j_2-j_3-j_4)} \prod_{r=0}^{s-1} (\Delta(1+(r-2j_2)\rho)\Delta((r-2j_3)\rho)\Delta((r-2j_4)\rho))
\end{aligned}$$

donde hemos reemplazado (373) por futura comodidad.

Usando las ecuaciones (2.45) y (2.63) de [17], tenemos las dos siguientes ecuaciones

$$I_k = \Gamma(-s) \prod_{r=1}^s \int d^2 w_r \left(\prod_{r=1}^s (|w_r|^{-4j_2\rho} |1-w_r|^{-2-4j_2\rho}) \prod_{r<t}^{s-1,s} |w_r - w_t|^{4\rho} \right) \tag{374}$$

y también

$$\begin{aligned}
I_k &= -\rho\pi^s (\Delta(-\rho))^s \Delta(-1-j_2-j_3-j_4)\Delta(2j_2+1)\Delta(-j_2-j_3+j_4)\Delta(-j_2+j_3-j_4) \times \\
&\times \frac{G(-2-j_2-j_3-j_4)G(-1+j_2-j_3-j_4)G(-1-j_2+j_3-j_4)G(-1-j_2-j_3+j_4)}{G(-1)G(-2j_2-1)G(-2j_3-1)G(-2j_4-1)}
\end{aligned} \tag{375}$$

Luego, usando la fórmula itegral de Dotsenko-Fateev, tenemos que (374) puede escribirse como

$$I_k = \Gamma(-s)\Gamma(s+1)\pi^s(-1)^s\rho^{2s} (\Delta(-\rho))^s \prod_{r=1}^s \Delta(r\rho) \prod_{r=0}^{s-1} (\Delta(1+(r-2j_2)\rho)\Delta((r-2j_3)\rho)\Delta((r-2j_4)\rho))$$

donde se usó un resultado que podemos resumir en una observación más:

Observación IV:

$$\begin{aligned} \prod_{r=0}^{s-1} \Delta(1 - 1 + (2j_2 + 2j_3 - s + 1 - r)\rho) &= \prod_{r=0}^{s-1} \Delta((j_2 + j_3 - j_4 - r)\rho) = \\ &= \prod_{r=0}^{s-1} \Delta((s - 1 - 2j_4 - r)\rho) \end{aligned}$$

y, redefiniendo índices según $t = -r + s - 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} \prod_{r=0}^{s-1} \Delta(1 - 1 + (2j_2 + 2j_3 - s + 1 - r)\rho) &= \prod_{r=0}^{s-1} \Delta((s - 1 - 2j_4 - r)\rho) = \\ &= \prod_{t=0}^{s-1} \Delta((t - 2j_4)\rho) \end{aligned}$$

Ahora sí, ya sabemos con todo detalle que si despejamos el factor

$$\prod_{r=1}^s \Delta(r\rho) \prod_{r=0}^{s-1} (\Delta(1 + (r - 2j_2)\rho)\Delta((r - 2j_3)\rho)\Delta((r - 2j_4)\rho))$$

de las ecuaciones de arriba, tenemos que

$$\begin{aligned} &\prod_{r=1}^s \Delta(r\rho) \prod_{r=0}^{s-1} (\Delta(1 + (r - 2j_2)\rho)\Delta((r - 2j_3)\rho)\Delta((r - 2j_4)\rho)) = \\ &= I_k \frac{(-1)^s \rho^{-2s}}{\Gamma(-s)\Gamma(s+1)\pi^s \Delta^s(-\rho)} = \\ &= \frac{(-1)^{s+1} \rho^{-2s+1} \pi^s (\Delta(-\rho))^s \Delta(-1 - j_2 - j_3 - j_4) \Delta(2j_2 + 1) \Delta(-j_2 - j_3 + j_4) \Delta(-j_2 + j_3 - j_4)}{\Gamma(-s)\Gamma(s+1)\pi^s \Delta^s(-\rho)} \times \\ &\times \frac{G(-2 - j_2 - j_3 - j_4)G(-1 + j_2 - j_3 - j_4)G(-1 - j_2 + j_3 - j_4)G(-1 - j_2 - j_3 + j_4)}{G(-1)G(-2j_2 - 1)G(-2j_3 - 1)G(-2j_4 - 1)} \quad (376) \end{aligned}$$

Esto es

$$\begin{aligned} &\frac{\Delta(j_2 - j_3 - j_4)}{\Delta(2j_2 + 1)} \prod_{r=1}^s \Delta(r\rho) \prod_{r=0}^{s-1} (\Delta(1 + (r - 2j_2)\rho)\Delta((r - 2j_3)\rho)\Delta((r - 2j_4)\rho)) = \\ &= -\frac{\rho^{(\dots)}}{\Gamma(0)} \frac{\Delta(j_2 - j_3 - j_4)}{\Delta(2j_2 + 1)} \Delta(-1 - j_2 - j_3 - j_4) \Delta(2j_2 + 1) \Delta(-j_2 - j_3 + j_4) \Delta(-j_2 + j_3 - j_4) \times \\ &\times \frac{G(-2 - j_2 - j_3 - j_4)G(-1 + j_2 - j_3 - j_4)G(-1 - j_2 + j_3 - j_4)G(-1 - j_2 - j_3 + j_4)}{G(-1)G(-2j_2 - 1)G(-2j_3 - 1)G(-2j_4 - 1)} \end{aligned}$$

Y entonces,

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta(j_2 - j_3 - j_4)}{\Delta(2j_2 + 1)} \prod_{r=1}^s \Delta(r\rho) \prod_{r=0}^{s-1} (\Delta(1 + (r - 2j_2)\rho) \Delta((r - 2j_3)\rho) \Delta((r - 2j_4)\rho)) = \\ & = -\frac{\rho^{(\dots)}}{\Gamma(0)} \Delta(-1 - j_2 - j_3 - j_4) \Delta(j_2 - j_3 - j_4) \Delta(-j_2 - j_3 + j_4) \Delta(-j_2 + j_3 - j_4) \times \\ & \quad \times \frac{G(-2 - j_2 - j_3 - j_4) G(-1 + j_2 - j_3 - j_4) G(-1 - j_2 + j_3 - j_4) G(-1 - j_2 - j_3 + j_4)}{G(-1) G(-2j_2 - 1) G(-2j_3 - 1) G(-2j_4 - 1)} \end{aligned}$$

Con ayuda de (376), escribimos (370) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(0, j_2, j_3, j_4) &= \prod_{a < b} |z_a - z_b|^{h_{ab}} |x_a - x_b|^{J_{ab}} \left(\pi \frac{\Gamma(1 + \rho)}{\Gamma(1 - \rho)} \right)^s \Delta(\rho) \times \\ & \quad \times \frac{\rho^{(\dots)}}{\Gamma(0)} \Delta(1 - (2j_2 + 1)\rho) \Delta(1 - (2j_3 + 1)\rho) \Delta(1 - (2j_4 + 1)\rho) \times \\ & \quad \times \Delta(2j_2 + 1) \Delta(2j_3 + 1) \Delta(2j_4 + 1) \times \\ & \quad \times \Delta(-1 - j_2 - j_3 - j_4) \Delta(j_2 - j_3 - j_4) \Delta(-j_2 - j_3 + j_4) \Delta(-j_2 + j_3 - j_4) \times \\ & \quad \times \frac{G(-2 - j_2 - j_3 - j_4) G(-1 + j_2 - j_3 - j_4) G(-1 - j_2 + j_3 - j_4) G(-1 - j_2 - j_3 + j_4)}{G(-1) G(-2j_2 - 1) G(-2j_3 - 1) G(-2j_4 - 1)} \end{aligned}$$

Entonces, usando la propiedad de las funciones $G(x)$

$$G(-1 - x) = (-\rho)^{-2x-1} \Delta(1 + x) G(x)$$

tenemos que

$$\Delta(j_2 - j_3 - j_4) G(j_2 - j_3 - j_4 - 1) = (-\rho)^{-2(j_2 - j_3 - j_4) - 1} G(-j_2 + j_3 + j_4)$$

$$G(-2 - j_2 - j_3 - j_4) \Delta(-1 - j_2 - j_3 - j_4) = (-\rho)^{-2s-1} G(1 + j_2 + j_3 + j_4)$$

Por su parte, las propiedades de las funciones $G(x)$ también nos dicen que

$$\frac{G(x+1)}{\Delta((x+1)\rho)} = (-\rho)^{2x+1} \frac{G(-1-x)}{\Delta(1+x)}$$

lo que nos permite decir que

$$\frac{\Delta(2j_2 + 1) \Delta(1 - (2j_2 + 1)\rho)}{G(-2j_2 - 1)} = (-\rho)^{4j_2+1} \frac{1}{G(2j_2 + 1)}$$

Así, la expresión final para (370) es

$$\mathcal{A}(0, j_2, j_3, j_4) = \prod_{a < b} |z_a - z_b|^{h_{ab}} |x_a - x_b|^{J_{ab}} \left(\pi \frac{\Gamma(1 + \rho)}{\Gamma(1 - \rho)} \right)^s \Delta(\rho) \times \\ \times \frac{\rho}{\Gamma(0)} \frac{G(1 + j_2 + j_3 + j_4)G(-j_2 + j_3 + j_4)G(j_2 - j_3 + j_4)G(j_2 + j_3 - j_4)}{G(-1)G(2j_2 + 1)G(2j_3 + 1)G(2j_4 + 1)} \quad (377)$$

que es la función de 3-puntos, pero con un factor $\Gamma(0)$. La presencia de este factor $\Gamma(o)$ es interesante, ya que algo similar ocurre en la de 2-puntos cuando queremos obtenerla desde la de 3-puntos; aparece un factor s de más que puede, en algún caso, ser cero.

Corolario: *Se obtiene la función de 3-puntos como límite de la función de 4-puntos con un estado de momento cero.*

10.4 Invariancia ante modronomía de las soluciones a la ecuación de Knizhnik-Zamolodchikov

En este apéndice, estudiaremos las soluciones invariantes ante modronomía de la ecuación de Knizhnik-Zamolodchikov.

Con la intención de estudiar las propiedades de modronomía⁵⁵ de las soluciones de la ecuación de Knizhnik-Zamolodchikov, pasemos ahora a estudiar la siguiente forma funcional es justamente la que aparece como solución general de dicha ecuación diferencial; a saber

$$g_0(u, \bar{u}) = \sum_{i=\{1,2\}} \sum_{j=\{1,2\}} X_{ij} I_i(a, b, c, u) I_j(a, b, c, \bar{u})$$

donde

$$I_1(a, b, c, u) \equiv F(a, b, c, u)$$

$$I_2(a, b, c, u) \equiv u^{1-c} F(a - c + 1, b - c + 1, 2 - c, u)$$

las cuales forman una base para las soluciones de la ecuación hipergeométrica, que coincide con los primeros órdenes en potencias de x y \bar{x} de la ecuación de Knizhnik-Zamolodchikov (ver [16]).

⁵⁵Agradezco a Fernando Cukierman y a Alicia Dickenstein por las conversaciones y aclaraciones acerca de los aspectos propios de las soluciones invariantes ante modronomía.

Veremos ahora que la invariancia ante modronomía en el punto $u = 0$ lleva a que la matriz X_{ij} resulta diagonal y tendremos una solución de la forma

$$g_0(u, \bar{u}) = |F(a, b, c, u)|^2 + \lambda |u^{1-c} F(a - c + 1, b - c + 1, 2 - c, u)|^2 \quad (378)$$

donde el coeficiente λ terminará estando dado por el requerimiento de la invariancia ante modronomía en el punto $u = 1$.

Para ver todo esto, comencemos definiendo la operación $c_0 : f(u)$, que representa a la operación de hacer circular a la función $f(u)$ en un círculo en torno a $u = 0$. A saber⁵⁶

$$c_0 : g_0(u, \bar{u}) = \lim_{t \rightarrow 1} g_0(ue^{2\pi it}, \bar{u}e^{-2\pi it})$$

Así, tendremos

$$c_0 : I_i(a, b, c, u) = \sum_{j=\{1,2\}} (M_0)_{i,j} I_j(a, b, c, u)$$

que no es más que expresar las funciones $I_i(a, b, c, u)$, las cuales forman la base en la cual se escribe la $g_0(u, \bar{u})$ luego de circular alrededor del punto $u = 0$ del plano complejo, en términos de las dos soluciones generales $I_{1,2}(a, b, c, u)$. Esto es, habiendo denotado c_0 a la transformación que hace circular a la función en torno al punto $u = 0$, $(M_0)_{i,j}$ es la matriz que mezcla las soluciones antes y luego de haber circulado en torno al punto $u = 0$.

Haciendo la cuenta explícitamente es fácil ver que se tiene

$$(M_0)_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i(1-c)} \end{pmatrix}$$

lo que puede verse directamente de la misma definición de $I_1(u)$ y de $I_2(u)$.

La matriz $(M_0)_{i,j}$ es la matriz de modronomía en ese punto $u = 0$, definida como se comentó arriba y que resulta ser diagonal (para $u = 0$). De esta manera, pedir que $g_0(u, \bar{u})$ sea invariante ante modronomía en $u = 0$ lleva a una matriz de modronomía

⁵⁶*sic.* existe aquí un abuso de nomenclatura al querer referir a las transformaciones que sufre la función g_0 luego del recorrido en torno al punto $u = 0$. Lo adoptamos porque es ésta la forma usual en la que aparece esta operación en las referencias clásicas de las teorías de campos conformes bidimensionales. Agradezco a Fernando Cukierman por hacerme notar este punto.

$(M_0)_{ij}$ y entonces esto requiere pedir que $X_{i,j}$ sea también diagonal, *i.e.* $X_j = \delta_{ij}X_i$, según lo cual

$$g_0(u, \bar{u}) = \sum_{j=1,2} X_j |I_j(u)|^2$$

y así llegamos a la forma funcional diagonal mencionada antes; a saber

$$g_0(u, \bar{u}) = |F(a, b, c, u)|^2 + \lambda |u^{1-c} F(a - c + 1, b - c + 1, 2 - c, u)|^2 \quad (379)$$

Por otro lado, nos interesa también que la solución sea invariante ante modronomía en el punto $u = 1$. Para estudiar la modronomía en torno al punto $u = 1$ encontraremos conveniente expresar las funciones $I_i(a, b, c, u)$ en términos de las $I_i(a, b, c, 1 - u)$. Entonces, podemos usar las propiedades de las funciones hipergeométricas para escribir que se satisfacen las siguientes identidades

$$\begin{aligned} I_1(a, b, c, u) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} I_1(a, b, a+b-c+1, 1-u) + \\ &+ \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} I_2(1-a, 1-b, 1-a-b+c, 1-c, 1-u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2(a, b, c, u) &= u^{1-c} \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} I_1(a-c+1, b-c+1, a+b-c+1, 1-u) + \\ &+ u^{1-c} \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)} I_2(c-a, c-b, 1-a-b+c, 1-c, 1-u) \end{aligned}$$

De esta forma, escribimos las funciones $I_i(a, b, c, u)$ en términos de las funciones $I_j(a, b, c, 1-u)$; según

$$I_i(a, b, c, u) = \sum_{j=1,2} f_{ij} I_j(a, b, c, 1-u)$$

donde la matriz f_{ij} queda explícitamente definida por las relaciones funcionales de arriba. De esta manera, escribamos $g_0(u, \bar{u})$ como

$$\begin{aligned} g_0(u, \bar{u}) &= \sum_{j=\{1,2\}} \sum_{k=\{1,2\}} \sum_{l=\{1,2\}} X_j f_{jk} f_{jl} I_k(a, b, c, 1-u) I_l(a, b, c, 1-\bar{u}) = \\ &= \sum_{j=\{1,2\}} Y_{kl} I_k(a, b, c, 1-u) I_l(a, b, c, 1-\bar{u}) \end{aligned}$$

siendo $Y_{kl} = \sum_{k=\{1,2\}} \sum_{l=\{1,2\}} X_j f_{jk} f_{jl}$.

Ahora, repetimos el procedimiento de recién: definamos $c_1 : f(u)$ a la operación de hacer circular a la función $f(u)$ en torno a $u = 1$; la transformación está parametrizada por⁵⁷

$$c_1 : g_0(u, \bar{u}) = \lim_{t \rightarrow 1} g_0(1 + (u - 1)e^{2\pi it}, 1 + (\bar{u} - 1)e^{-2\pi it})$$

con una matriz de modronomía $(M_1)_{ij}$ en el punto $u = 1$ dada por

$$c_1 : I_i(a, b, c, 1 - u) = \sum_{j=\{1,2\}} (M_1)_{i,j} I_j(a, b, c, 1 - u)$$

Entonces, es fácil ver que $(M_1)_{ij}$ también resulta ser una matriz diagonal, lo que demanda que Y_{ij} lo sea, *i.e.* tenemos $g_0(u, \bar{u}) = \sum_{j=1,2} Y_j |I_j(1 - u)|^2$. De esta manera, se satisface que $\sum_{j=\{1,2\}} X_j f_{jk} f_{jl} = Y_{kl} = 0$ para toda combinación tal que $k \neq l$; según lo cual $\frac{X_1}{X_2} f_{11} f_{12} = -f_{21} f_{22}$. Es decir

$$\frac{X_1}{X_2} = -\frac{f_{21} f_{22}}{f_{12} f_{11}}$$

que pueden ser leídas de arriba (donde se escribieron las funciones $I_i(a, b, c, u)$ en términos de las funciones $I_j(a, b, c, 1 - u)$).

Así, simplemente reemplazando, obtenemos que

$$\lambda = \frac{X_1}{X_2} = -\frac{\Delta^2(c)\Delta(a - c + 1)\Delta(b - c + 1)}{(1 - c)^2\Delta(a)\Delta(b)}$$

que es lo que obtienen Maldacena y Ooguri en su artículo [16], al decir cuál es la solución de la ecuación de Knizhnik-Zamolodchikov que, a su vez, cumple ser invariante ante modronomía.

Pasemos ahora a exponer esto de otra manera. La solución de la ecuación⁵⁸ KZ será una combinación lineal de la función $F(-j_1 - j_2 + j, -j_3 - j_4 + j, k + 2j, u)$ y de la función $u^{1-2j-k} F(-j_1 - j_2 - j + 1 - k, -j_3 - j_4 - j + 1 - k, -2j + 2 - k, u)$. Sabiendo que dicha solución debe ser una combinación lineal tal que la matriz X_{ij} debe ser diagonal por

⁵⁷Nuevamente, mencionamos que, como antes, existe un abuso de nomenclatura en la notación de este límite.

⁵⁸*sic.* a primer orden en el desarrollo en potencias de x .

la invariancia ante monodromía en $u = 0$, podemos escribir sin pérdida de generalidad que

$$g_0(u, \bar{u}) = |F(a, b, c, u)|^2 + \frac{B}{A} |u^{1-c} F(a - c + 1, b - c + 1, 2 - c, u)|^2 \quad (380)$$

Entonces, valen los siguientes teoremas

Lema: *Existe una sola combinación lineal (elección particular de $\lambda = B/A$ distinta de cero) tal que sea invariante ante modronomía en los puntos $u = 0$ y $u = 1$.*

Demostración: Mostrado en la subsección anterior por construcción y mencionado por Maldacena y Ooguri en [16].

Lema: *Dicha combinación lineal tal que la solución a su vez resulte ser invariante ante modronomía en los puntos $u = 0$ y $u = 1$, coincide justamente con la única combinación lineal $g_0(u, \bar{u})$ tal que ésta se anula al ser evaluada en el punto $u = 1$, i.e. es decir: $g_0(1, 1) = 0$.*

Demostración: Para mostrar esto, busquemos dicha combinación lineal utilizando las propiedades funcionales de las funciones hipergeométricas.

Como decíamos, sin pérdida de generalidad (sabiendo que tiene que es diagonal la matriz de monodromía $(M_0)_{ij}$ en $u = 0$) podemos escribir la solución general para el caso $2j \notin k - \mathbf{Z}$ de la siguiente manera

$$g_0(u, \bar{u}) = |F(a, b, c, u)|^2 + \frac{B}{A} |u^{1-c} F(a - c + 1, b - c + 1, 2 - c, u)|^2 \quad (381)$$

La estrategia para mostrar esto será la siguiente: en lugar de pedir explícitamente invariancia ante modronomía en $u = 1$, sólo pediremos que $g_0(u = 1, \bar{u} = 1) = 0$ y llegaremos a que la combinación lineal $\frac{A}{B}$ que lo satisface coincide con aquélla que se obtuviera en la sección anterior de pedir invariancia ante modronomía en el punto $u = 1$.

Entonces, sabiendo que las funciones hipergeométricas satisfacen que

$$F(a, b, c, 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \quad (382)$$

podemos escribir

$$g_0(1, 1) = |F(a, b, c, 1)|^2 + \frac{A}{B} |F(a-c+1, b-c+1, 2-c, 1)|^2$$

Así, usando la propiedad funcional de arriba (382), tenemos

$$\begin{aligned} g_0(1, 1) &= \left| \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \right|^2 + \frac{A}{B} \left| \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} \right|^2 = \\ &= \left| \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \right|^2 + \frac{A}{B} \left| \frac{\Gamma(1-c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} \right|^2 (1-c)^2 \end{aligned}$$

Entonces, pedimos que $g_0(1, 1) = 0$ para encontrar el cociente A/B tal que hace la combinación lineal adecuada para que haya monodromía en el punto $u = 1$. De esta manera, despenjando llegamos a que

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{A}{B} = - \left| \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(c-a-b)(1-c)} \right|^2 = \\ &= - \left| \frac{\Gamma(c)\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)(1-c)} \right|^2 = - \left| \frac{\Delta(c)\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}{(1-c)\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \right|^2 = \\ &= - \frac{\Delta^2(c) \Gamma(1-a)\Gamma(1-b) \Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}{(1-c)^2 \Gamma(c-a)\Gamma(c-b) \Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \end{aligned}$$

Luego, usando propiedades funcionales de las funciones $\Gamma(x)$ sabemos que $\frac{\Gamma(1+a-c)}{\Gamma(-a)} = (-1)^c \frac{\Gamma(1+a)}{\Gamma(c-a)} \Rightarrow \frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(c-a)} = (-1)^{c+1} \frac{\Gamma(1+a-c)}{\Gamma(a)}$, por lo cual podemos escribir lo de arriba según

$$\lambda = \frac{A}{B} = - \frac{\Delta^2(c) \Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}{(1-c)^2 \Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} (-1)^{2(c+1)} \frac{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$$

y así concluimos en que

$$\lambda = \frac{A}{B} = - \frac{\Delta^2(c)\Delta(a-c+1)\Delta(b-c+1)}{(1-c)^2\Delta(a)\Delta(b)}$$

que es exactamente lo que obtuvimos en la sección anterior estudiando las matrices de modronomía y, por supuesto, lo que obtienen Maldacena y Ooguri. Así, demostramos

que esa es la función invariante ante modronomía en el punto $u = 1$, *i.e.* en el punto $x = z$.

Q.E.D.

Hay una forma alternativa de llegar a este resultado, y es la siguiente: uno puede escribir tanto el término $F(-j_1 - j_2 + j, -j_3 - j_4 + j, k + 2j, u)$ cuanto el término $u^{1-2j-k}F(-j_1 - j_2 - j + 1 - k, -j_3 - j_4 - j + 1 - k, -2j + 2 - k, u)$ en función de hipergeométricas $F(a, b, c, \frac{1}{1-z})$ usando la propiedad

$$F(a, b, c, z) = (1-z)^{-a} \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} F(a, c-b, a-b+1, \frac{1}{1-z}) + (1-z)^{-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} F(b, c-a, b-a+1, \frac{1}{1-z})$$

y luego mostrar que los polos del desarrollo de la suma $|F(a, b, c, 1)|^2 + \lambda |F(a-c+1, b-c+1, 2-c, 1)$ se cancelan para el λ dado arriba; es lo mismo que hacer lo que hicimos arriba directamente.

Pasemos ahora al análisis de la estructura de polos de la solución en el punto $x = z$.

Teniendo en cuenta la propiedad funcional

$$F(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F(a, b, a+b-c+1, 1-z) + (1-z)^{c-a-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} F(c-a, c-b, c-a-b+1, 1-z)$$

Luego, cerca del cero, tenemos

$$F(a, b, c, z) \approx_{z \rightarrow 1} \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \left(1 + \frac{ab}{a+b-c+1} - z \frac{ab}{a+b-c+1} \right) + (1-z)^{c-a-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \left(1 + \frac{(c-a)(c-b)}{a+b-c+1} - z \frac{(c-a)(c-b)}{a+b-c+1} \right)$$

donde se usó el siguiente desarrollo de Taylor

$$F(a, b, c, 1-z) \approx_{z \rightarrow 1} \left(1 + (1-z) \frac{ab}{c} \right) + O((1-z)^2)$$

Por lo tanto,

$$F(a, b, c, y) \approx_{u \rightarrow 1} \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} (1 + O(1-u)) + (1-u)^{c-a-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1 + O(1-u))$$

y entonces,

$$F(a, b, c, u) \approx_{u \rightarrow 1} \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} + (1-u)^{c-a-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$$

Reemplazando explícitamente los valores de a, b y c definidos antes, tenemos

$$F(-j_1 - j_2 + j, -j_3 - j_4 + j, k + 2j, u) \approx_{u \rightarrow 1} = \frac{\Gamma(k+2j)\Gamma(k+j_1+j_2+j_3+j_4)}{\Gamma(k+j+j_1+j_2)\Gamma(k+j+j_3+j_4)} + \frac{\Gamma(k-2j)\Gamma(-j_1-j_2-j_3-j_4-k)}{\Gamma(-j_1-j_2+j)\Gamma(-j_3-j_4+j)} (1-u)^{k+j_1+j_2+j_3+j_4}$$

De esta manera, recuperamos los polos $\sim (x-z)^{k+j_1+j_2+j_3+j_4}$ que Maldacena y Ooguri tienen en su artículo en el límite $x \rightarrow z$, i.e. en el límite $u \rightarrow 1$.

10.5 Ansatz de factorización y las soluciones de la ecuación de Knizhnik-Zamolodchikov

En este apéndice detallaremos algunos aspectos de las soluciones de la ecuación de Knizhnik-Zamolodchikov. Haremos hincapié en el estudio efectuado en la referencia [16] por Maldacena y Ooguri; debido a esto, emplearemos aquí la nomenclatura y convenciones de dicha referencia a efectos de facilitar la lectura.

Consideremos el siguiente *ansatz* como solución a la ecuación de Knizhnik-Zamolodchikov:

$$\mathcal{F}(x, z, j) = z^{h_j - h_{j_1} - h_{j_2}} x^{j - j_1 - j_2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) z^n$$

esto es

$$\mathcal{F}(x, z, j) = z^{h_j - h_{j_1} - h_{j_2}} x^{j - j_1 - j_2} (f_0(x) + f_1(x)z + f_2(x)z^2 + \dots)$$

donde j actúa como un índice más, que etiqueta y cataloga las diferentes soluciones de la ecuación diferencial (i.e. tenemos j -soluciones distintas).

Reemplazando el ansatz propuesto en la ecuación de Knizhnik-Zamolodchikov, llegamos a la siguiente ecuación para el primer término en la serie de potencias

$$z(z-1)\frac{\partial^2}{\partial x^2}f_0(x) + (2j - (2j - j_1 - j_4 + j_2 + j_3 + 1)z)\frac{\partial}{\partial x}f_0(x) - (j^2 + j(j_3 + j_2 - j_1 - j_4) + j_1j_4 + j_2j_3 - j_1j_3 - j_2j_4)f_0(x) = 0$$

Teschner mostró en [75] que los otros términos del desarrollo en potencias de z (v.g. los términos $f_{n>0}(x)$) de la solución se obtienen a partir de $f_0(x)$ mediante una fórmula recursiva. De esta manera, la solución completa a la ecuación KZ queda unívocamente determinada hallando una solución a la ecuación diferencial de arriba. Por esto, tratemos esta ecuación. Definamos las siguientes variables

$$\begin{aligned} a &= j - j_1 + j_2 \\ b &= j + j_3 - j_4 \\ c &= 2j \end{aligned}$$

Así, no es difícil ver que

$$x(1-x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}f_0(x) + (c - (a+b+1)x)\frac{\partial}{\partial x}f_0(x) - abf_0(x) = 0$$

Esta ecuación diferencial en derivadas parciales se denomina ecuación hipergeométrica y tiene, al tratarse de una ecuación de segundo grado, dos soluciones linealmente independientes. Dichas soluciones se conocen y dependen de los rangos de las variables a, b y c . Pasemos a detallar esto con cuidado:

Caso $2j \notin \mathbf{Z}$: En este caso, las soluciones linealmente independientes que pueden ser tomadas como base para soluciones generales de la ecuación hipergeométrica están dadas por

$$f_0(x) = AF(a, b, c, x) + Bx^{1-c}F(a-c+1, b-c+1, 2-c, x)$$

donde $F(a, b, c, x)$ es la función hipergeométrica y $(A, B) \in \mathbf{R}^2$. En realidad, para ser rigurosos, debemos decir que las soluciones incluyen su parte antiholomorfa también,

v.g.

$$A|F(a, b, c, x)|^2 + B|x^{1-c}F(a-c+1, b-c+1, 2-c, x)|^2$$

Reemplazando tenemos

$$\begin{aligned} f_0(x) = & AF(j-j_1+j_2, j+j_3-j_4, 2j, x) + \\ & + Bx^{1-2j}F(1-j-j_1+j_2, 1-j+j_3-j_4, 2-2j, x) \end{aligned} \quad (383)$$

Esta es la solución que tratan Maldacena y Ooguri en [16]; luego, en las próximas secciones, la analizaremos con sumo detalle. Veamos otras soluciones:

Caso $j = \frac{1}{2}$: En este caso particular, dos soluciones independientes están dadas por

$$\begin{aligned} f_0(x) = & F(j-j_1+j_2, j+j_3-j_4, 1, x)(A+B(\ln x + \\ & + \sum_{r=1}^{\infty} x^r \frac{\Gamma(j-j_1+j_2+r)\Gamma(j+j_3-j_4+r)}{\Gamma(r+1)\Gamma(j-j_1+j_2)\Gamma(j+j_3-j_4)}(\psi(j-j_1+j_2-r) + \\ & + \psi(j-j_4+j_3-r) - \psi(j-j_1+j_2) - \psi(j-j_4+j_3) + -2\psi(1+r) + 2\psi(1))) \end{aligned}$$

donde $(A, B) \in \mathbf{R}^2$ y la función $\psi(x)$ está definida por

$$\psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x)$$

y satisface, entre otras, las siguientes propiedades funcionales

$$\begin{aligned} \psi(x+1) &= \psi(x) + \frac{1}{x} \\ \psi(x-n) &= \psi(x) - \sum_{r=1}^n \frac{1}{x-r} \\ \psi(x+n) &= \psi(x) + \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{x+r} \\ \psi(1-z) &= \psi(z) + \pi \cot g(\pi z) \\ \int_0^x dy \psi(y) &= \ln \Gamma(x) \\ \int_0^1 dy \psi(y+a) &= \ln a \end{aligned}$$

para $x \in \mathbf{R}$, $z \in \mathbf{C}$ y $n \in \mathbf{Z}_{>0}$.

Veamos los otros casos de soluciones a la ecuación de Knizhnik-Zamolodchikov.

Caso $2j \in \mathbf{Z}_{>0}$: Considerando este caso, llegamos a que la ecuación diferencial hipergeométrica admite el siguiente par de soluciones linealmente independientes, las cuales forman una base para la solución general.

$$f_0(x) = F(j - j_1 + j_2, j + j_3 - j_4, 2j_2, x)(A + B(\ln x + \sum_{r=1}^{\infty} x^r \frac{\Gamma(j - j_1 + j_2 + r)\Gamma(j + j_3 - j_4 + r)\Gamma(2j)}{\Gamma(j - j_1 + j_2)\Gamma(j + j_3 - j_4)\Gamma(2j + r)}(\psi(j - j_1 + j_2 - r) + \psi(j - j_4 + j_3 - r) - \psi(j - j_1 + j_2) - \psi(j - j_4 + j_3) + -2\psi(1 + r) + 2\psi(1)) + - \sum_{r=1}^{2j-1} x^{-r} \frac{\Gamma(r)\Gamma(1 - j + j_1 - j_2)\Gamma(1 - j - j_3 + j_4)\Gamma(1 - 2j + r)}{\Gamma(1 - j + j_1 - j_2 + r)\Gamma(1 - j - j_3 + j_4 + r)\Gamma(1 - 2j)}))$$

nuevamente, $(A, B) \in \mathbf{R}^2$.

Caso $2j \in \mathbf{Z}_{\leq 0}$: Este caso admite como soluciones las siguientes

$$f_0(x) = z^{1-2j}F(1 - j - j_1 + j_2, 1 - j + j_3 - j_4, 2 - 2j_2, x)(A + B(\ln x + + z^{1-2j} \sum_{r=1}^{\infty} x^r \frac{\Gamma(1 - j - j_1 + j_2 + r)\Gamma(1 - j + j_3 - j_4 + r)\Gamma(2j)}{\Gamma(1 - j - j_1 + j_2)\Gamma(1 - j + j_3 - j_4)\Gamma(2j + r)\Gamma(r + 1)}(\psi(1 - j - j_1 + j_2 - r) + \psi(1 - j - j_4 + j_3 - r) - \psi(1 - j - j_1 + j_2) - \psi(1 - j - j_4 + j_3) - \psi(1 + r) + \psi(1) - \psi(2 - 2j + r) + \psi(2 - 2j)) + - \sum_{r=1}^{2j-1} x^{-r} \frac{\Gamma(r)\Gamma(j + j_1 - j_2)\Gamma(j - j_3 + j_4)\Gamma(2j - 1 + r)}{\Gamma(j + j_1 - j_2 + r)\Gamma(j - j_3 + j_4 + r)\Gamma(2j - 1)}))$$

Por último, consideremos un caso particular que admite soluciones expresables de una manera más sencilla; a saber:

Caso $2j - 1 = -j_1 + j_2 + j_3 - j_4$: En este caso particular las siguientes satisfacen ser funciones que forman una base.

$$f_0(x) = AF(j - j_1 + j_2, j + j_3 - j_4, 2j, x) + BF(j - j_1 + j_2, j + j_3 - j_4, 2j, 1 - x)$$

De esta manera, acabamos de recorrer un extenso catálogo de soluciones. En efeco, observemos que para algunas de las soluciones descritas arriba aparecen los mencionados términos proporcionales a $\ln(x)$. Por su parte, como caso particular, encontramos

las soluciones que Maldacena y Ooguri escriben en su artículo, éstas son las que escribimos en (383) y que son sólo válidas en el caso $2j \notin \mathbf{Z}$. Interesantes discusiones acerca de las soluciones de la ecuación KZ, sus simetrías y un glosario de los casos resolubles explícitamente pueden ser encontradas [26, 67] y las referencias a las que estos artículos refieren.

Luego, la elección particular no trivial de los coeficientes A y B se hace basándose en condiciones de contorno y propiedades de simetría. En efecto, sólo una elección particular del cociente B/A dará una solución invariante ante el grupo de modronomía distinta de cero; tratemos ahora esto al analizar la región $x \approx z$:

En efecto, de manera similar a la recientemente analizada, podemos proponer el siguiente *ansatz* para la solución $\mathcal{F}(x, z, j)$ reescribiendo el anterior ligeramente; consideremos

$$\mathcal{F}(x, z, j) = x^{j-j_1-j_2+h_j-h_{j_1}-h_{j_2}} \left(\frac{z}{x}\right)^{h_j-h_{j_1}-h_{j_2}} \sum_{n=0}^{\infty} g_n \left(\frac{z}{x}\right) x^n$$

donde se multiplicó y dividió por $x^{h_j-h_{j_1}-h_{j_2}}$ y se definió la suma $\sum_{n=0}^{\infty} g_n \left(\frac{z}{x}\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) z^n$; es decir, desarrollando en otra base de potencias.

Así, reemplazando este *ansatz* en la ecuación de Knizhnik-Zamolodchikov, obtenemos lo siguiente para el modo cero $g_0(u)$

$$u(u-1) \frac{\partial^2}{\partial u^2} g_0(u) + (k-2j - (j_1+j_4+j_2+j_3-2j+1)u) \frac{\partial}{\partial u} g_0(u) + (j_1+j_2-j)(j-j_3-j_4)g_0(u) = 0$$

donde hemos definido $u = \frac{z}{x}$ siguiendo la notación de [16]. Será útil entender que el límite de cercanías $x \approx z$ está determinado por el límite $u \rightarrow 1$.

Nuevamente, obtenemos una ecuación hipergeométrica cuyas soluciones podemos catalogar de manera similar a como lo hicimos antes para el modo $f_0(z)$. De esta manera, encontramos los siguientes casos:

Caso $2j \in k - \mathbf{Z}_{>0}$: Para el cual obtenemos las siguientes soluciones linealmente independientes.

$$\begin{aligned}
g_0(u) = & F(j_1 + j_2 - j, j_3 + j_4 - j, k - 2j, u) (A + B(\ln u + \\
& + \sum_{r=1}^{\infty} u^r \frac{\Gamma(k - 2j)\Gamma(j_1 + j_2 - j + r)\Gamma(j_3 + j_4 - j + r)}{\Gamma(k - 2j + r)\Gamma(j_1 + j_2 - j)\Gamma(j_3 + j_4 - j)} \\
& (\psi(j_1 + j_2 - j + r) + \psi(j_3 + j_4 - j + r) - \psi(j_1 + j_2 - j) + \\
& - \psi(j_3 + j_4 - j) - \psi(r + 1) + \psi(1) + \psi(k - j + 1) + \psi(k - j + 1 + r)) + \\
& - \sum_{r=1}^{k-2j-1} u^{-r} \frac{\Gamma(k)\Gamma(2j + 1 - k + r)\Gamma(1 + j - j_1 - j_2)\Gamma(1 + j - j_3 - j_4)}{\Gamma(2j + 1 - k)\Gamma(1 + j - j_1 - j_2 + r)\Gamma(1 + j - j_3 - j_4 + r)}))
\end{aligned}$$

Caso $2j \in k - \mathbf{Z}_{\leq 0}$: Por su parte, para este caso tenemos el siguiente par de soluciones que forman una base.

$$\begin{aligned}
g_0(u) = & u^{1+2j-k} F(j + j_1 + j_2 + 1 - k, j + j_3 + j_4 + 1 - k, 2j + 2 - k, u) (A + B(\ln u + \\
& + \sum_{r=1}^{\infty} u^{1+2j-k+r} \frac{\Gamma(2j - k + 2)\Gamma(j_1 + j_2 + j - k + r)\Gamma(j_3 + j_4 + j + 1 - k + r)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(2j - k + 2 + r)\Gamma(j_1 + j_2 + j - k)\Gamma(j_3 + j_4 + j + 1 - k)} \\
& (\psi(j_1 + j_2 + j + 1 - k + r) + \psi(j + j_3 + j_4 + 1 - k + r) - \psi(2 + 2j - k + r) + \\
& - \psi(r + 1) - \psi(j + j_1 + j_2 + 1 - k) - \psi(j + j_3 + j_4 + 1 - k) + \psi(2 + 2j - k) + \psi(1)) + \\
& - \sum_{r=1}^{\infty} u^{1+2j-k-r} \frac{\Gamma(k)\Gamma(k - 2j - 1 + r)\Gamma(1 + j - j_1 - j_2)\Gamma(1 + j - j_3 - j_4)}{\Gamma(k - 2j - 1)\Gamma(1 + j - j_1 - j_2 + r)\Gamma(1 + j - j_3 - j_4 + r)}))
\end{aligned}$$

Caso $2j = k - 1$: Para este caso,

$$\begin{aligned}
g_0(u) = & AF(j_1 + j_2 - j, j_3 + j_4 - j, k - 2j, u) (A + B(\ln u + \\
& + \sum_{r=1}^{\infty} u^r \frac{\Gamma(j_1 + j_2 - j + r)\Gamma(j_3 + j_4 - j + r)}{\Gamma(r + 1)\Gamma(j_1 + j_2 - j)\Gamma(j_3 + j_4 - j)} \\
& (\psi(j_1 + j_2 - j + r) + \psi(j_3 + j_4 - j + r) - 2\psi(r + 1) + \\
& - \psi(j_1 + j_2 - j) - \psi(j_3 + j_4 - j) - 2\psi(1))
\end{aligned}$$

De estas soluciones vemos que el caso de los estados instantónicos $j = \frac{k-1}{2}$ cumplen ser soluciones con términos logarítmicos, i.e. con contribuciones proporcionales a $\ln u$ en las soluciones de la ecuación de Knizhnik-Zamolodchikov.

Luego, tratemos un caso más; uno de suma importancia porque es el que mencionan Maldacena y Ooguri en su trabajo [16].

Caso $2j \notin k - \mathbf{Z}$: Así, las siguientes soluciones forman una base

$$g_0(u) = AF(j_1 + j_2 - j, j_3 + j_4 - j, k - 2j, u) + \\ + Bu^{1+2j-k} F(j_1 + j_2 + j + 1 - k, j_3 + j_4 + j + 1 - k, 2j + 2 - k, u)$$

Esta es la única solución que satisface simultáneamente ser solución del caso $2j \notin k - \mathbf{Z}$ y ser invariante ante el grupo de monodromía en los puntos $u = 0$ y $u = 1$; vimos esto en el apéndice 10.4 al tratar la monodromía.

Como fue comentado en el artículo de Maldacena y Ooguri, la solución para $\mathcal{F}(x, z, j)$ de la forma (383) analizada antes

$$\mathcal{F}(x, z, j) = z^{h_j - h_{j_1} - h_{j_2}} x^{j - j_1 - j_2} (f_0(x) + f_1(x)z + f_2(x)z^2 + \dots)$$

en el caso en el cual

$$f_0(x) = F(j - j_1 + j_2, j + j_3 - j_4, 2j, x) + \\ + \lambda x^{1-2j} F(1 - j - j_1 + j_2, 1 - j + j_3 - j_4, 2 - 2j, x)$$

es manifiestamente invariante ante el intercambio $j \longleftrightarrow 1 - j$, ya que el término

$$x^{j - j_1 - j_2} F(j - j_1 + j_2, j + j_3 - j_4, 2j, x)$$

y el término

$$x^{1-j-j_1-j_2} F(1 - j - j_1 + j_2, 1 - j + j_3 - j_4, 2 - 2j, x)$$

se transforman uno en el otro. Así, los dos términos de la solución del modo cero del desarrollo en potencias de z se intercambian ante la transformación de Weyl $\sigma_0 : j \rightarrow 1 - j$.

Por su parte, de manera análoga, una mirada a la solución (381) nos muestra que el argumento del término

$$u^{h_j} F(j_1 + j_2 - j, j_3 + j_4 - j, k - 2j, u)$$

y el argumento del término

$$u^{h_j} u^{1+2j-k} F(j_1 + j_2 + j + 1 - k, j_3 + j_4 + j + 1 - k, 2j + 2 - k, u)$$

se relacionan entre ellos ante la segunda transformación de Weyl $\sigma : j \rightarrow k - 1 - j$. La presencia del factor global u^{1+2j-k} junto con el factor u^{h_j} (recordemos que $h_j = -\frac{j(j-1)}{k-2}$) hacen que cada uno de los términos de arriba se intercambie con el otro ante $j \longleftrightarrow k - 1 - j$. Para ver esto, sólo hace falta notar que

$$h(j) = -\frac{j(j-1)}{k-2} \rightarrow h(k-1-j) = -\frac{j(j-1)}{k-2} + 1 + 2j - k$$

Esta observación sobre las transformaciones de Weyl es interesante ya que muestra que el desarrollo en términos de $g_n(u)$, útil para analizar el punto $x = z$, es el análogo al desarrollo $f_n(x)$ (*i.e.* cada uno se comporta de manera análoga para las dos distintas transformaciones de Weyl); ambas muestran de manera explícita las propiedades de transformación ante las operaciones $\sigma_{0,1}$ de Weyl, *i.e.* el desarrollo $f_n(x)$ para el caso σ_0 y el desarrollo $g_n(u)$ para el caso σ_1 .

Así, podemos enunciar como lema lo que acabamos de observar (demostrar).

Lema: *Los dos términos que representan soluciones linealmente independientes de la ecuación de Knizhnik-Zamolodchikov (para aquella combinación que es invariante ante monodromía) $g_0(u)$ se relacionan entre sí mediante la transformación de Weyl $\sigma_1 : j \rightarrow k - 1 - j$; de manera análoga a como los dos términos que representan soluciones linealmente independientes (invariante ante monodromía) de la ecuación de Knizhnik-Zamolodchikov $f_0(u)$ se relacionan entre sí mediante la transformación de Weyl $\sigma_0 : j \rightarrow 1 - j$.*

Notemos también que la transformación σ_0 deja invariante el peso conforme de la teoría, mientras que la transformación σ_1 deja invariante la fórmula del peso de la teoría

en la reducción hamiltoniana $\tilde{h} = -\frac{j(j-1)}{k-2} + j$; esto es muy interesante porque parece estar sugestivamente relacionado con la observación hecha en [52], donde Furlan et al. señalaron la importancia del límite $x \rightarrow z$ como aquél en el cual se realiza la reducción hamiltoniana; notemos que dicha simetría de Weyl es justamente la simetría de la reducción hamiltoniana y en ese límite ambos términos de la solución invariante ante monodromía se vuelven iguales; sería interesante estudiar esto con más detalle.

Maldacena y Ooguri observaron [16] que ambos términos son necesarios para obtener una solución invariante ante las transformaciones de monodromía en el punto $u = 1$; nosotros lo mostramos en el apéndice 10.4.

Por otro lado, es importante notar también que en todas las fórmulas de arriba hay una simetría explícita ante el intercambio $a \longleftrightarrow b$ dada la propiedad de simetría $F(a, b, c, z) = F(b, a, c, z)$. Tanto en el caso del ansatz $f_n(x)$ cuanto en el caso del ansatz $g_n(u)$ el intercambio ante $a \longleftrightarrow b$ es un intercambio ante los momentos de los estados entrantes y salientes, según $j_1, j_2 \longleftrightarrow j_3, j_4$.

Siguiendo con el análisis de las soluciones a la ecuación KZ, estudiaremos ahora el denominado *Ansatz* de factorización de Teshner y detallaremos el análisis efectuado por Maldacena y Ooguri.

En una teoría conforme racional, se propone la siguiente forma general para el producto de operadores en el límite de coincidencia $z_1 \rightarrow z_2$

$$\Phi_{h_1} \Phi_{h_2} \simeq \sum_h Q_{h, h_1, h_2} \Phi_h$$

Eventualmente se puede pensar en el caso continuo, mediante $\sum_h Q_{h, h_1, h_2} \rightarrow \int d\mu(h) Q(h, h_1, h_2)$. Conocer los coeficientes Q es conocer el álgebra de operadores de la teoría; de sus combinaciones (h, h_1, h_2) tales que hacen a Q distinto de cero (salvo alguna renormalización, ver [85]) se deducen sus reglas de fusión.

Reemplazando esto en la función de 2-puntos $\langle \Phi_{h_1} \Phi_{h_2} \rangle \simeq B(h) \delta(h_1 - h_2)$ y en la de

3-puntos $\langle \Phi_{h_1} \Phi_{h_2} \Phi_{h_3} \rangle \simeq C(h_1, h_2, h_3)$, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{h_1} \Phi_{h_2} \Phi_{h_3} \rangle &\simeq C(h_1, h_2, h_3) \simeq \sum_h Q_{h, h_1, h_2} \langle \Phi_h \Phi_{h_3} \rangle \simeq \\ &\simeq \sum_h Q_{h, h_1, h_2} B(h) \delta(h - h_3) \simeq Q_{h_3, h_1, h_2} B(h_3) \end{aligned}$$

lo que implica que

$$Q_{h, h_1, h_2} = \frac{C(h, h_1, h_2)}{B(h)} \quad (384)$$

donde el signo \simeq sólo indica que estamos considerando el límite de coincidencia de los operadores Φ_{h_1} y Φ_{h_2} y que nuestra notación aquí omite la dependencia de los factores $|z_1 - z_2|^{2h_{12}}$ porque no interesan para los aspectos que estamos interesados en mostrar aquí.

Luego, si consideramos la función de 4-puntos $\langle \Phi_{h_1} \Phi_{h_2} \Phi_{h_3} \Phi_{h_4} \rangle$ y tomamos el límite de coincidencia $z_1 \rightarrow z_2$, tenemos

$$\langle \Phi_{h_1} \Phi_{h_2} \Phi_{h_3} \Phi_{h_4} \rangle \simeq \sum_h Q_{h, h_1, h_2} \langle \Phi_h \Phi_{h_3} \Phi_{h_4} \rangle$$

Y, teniendo en cuenta (384), obtenemos finalmente

$$\langle \Phi_{h_1} \Phi_{h_2} \Phi_{h_3} \Phi_{h_4} \rangle \simeq \sum_h C(h, h_1, h_2) \frac{1}{B(h)} C(h, h_3, h_4) \quad (385)$$

que es la factorización usual, *i.e.* el hecho de poder escribir la función de 4-puntos como

$$\langle \Phi_{h_1} \Phi_{h_2} \Phi_{h_3} \Phi_{h_4} \rangle \simeq \sum_h \langle \Phi_{h_1} \Phi_{h_2} \Phi_h \rangle \frac{1}{L_0 - 1} \langle \Phi_h \Phi_{h_3} \Phi_{h_4} \rangle$$

Así, Teschner [75] propuso una forma general para la función de 4-puntos en $SL(2, C)/SU(2)$ de manera análoga a ésta; asumiendo de que la función de 4-puntos para dicha teoría no-racional cumpliría las propiedades de factorización usuales. Él denominó a esta propuesta para la forma general de la función de 4-puntos el *ansatz de factorización*; a saber

$$\mathcal{F}_{SL(2)}(x, z) = \int_{\frac{1}{2} + i\mathbf{R}} dj C(j, j_1, j_2) \frac{1}{B(j)} C(j, j_3, j_4) |\mathcal{F}_j(x, z)|^2$$

siendo $|\mathcal{F}_j(x, z)|^2$ una medida de integración (funcional peso) que es solución de la ecuación de Knizhnik-Zamolodchikov; alguna solución de las que describimos con detalle arriba. De esta manera, vemos que la estructura de polos de la función de 4-puntos en la hoja de mundo puede ser leída de los polos de los factores $C(j, j_1, j_2)$ y $C(j, j_3, j_4)$. Así, se llega a que existen polos en [16]

$$\begin{aligned} j &= 1 - j_1 - j_2 - (n + m(k - 2)) \\ j &= j_1 + j_2 + (n + m(k - 2)) \\ j &= -j_1 + j_2 - (n + m(k - 2)) \\ j &= j_1 - j_2 - (n + m(k - 2)) \end{aligned}$$

y en

$$\begin{aligned} j &= 1 - j_1 - j_2 - (-(n + 1) - (m + 1)(k - 2)) \\ j &= j_1 + j_2 + (-(n + 1) - (m + 1)(k - 2)) \\ j &= -j_1 + j_2 - (-(n + 1) - (m + 1)(k - 2)) \\ j &= j_1 - j_2 - (-(n + 1) - (m + 1)(k - 2)) \end{aligned}$$

Maldacena y Ooguri notaron que el contorno de integración de Teschner $\int_{-\frac{1}{2}+i\mathbf{R}} dj$ puede ser tomado de manera análoga según

$$\int_{\frac{1}{2}+i\mathbf{R}} dj\{\dots\} + \int_{\frac{k-1}{2}-i\mathbf{R}} dj\{\dots\} = \text{Polos}\left(\frac{1}{2} < \text{Re}(j) < \frac{k-1}{2}\right)$$

lo que se deduce directamente del teorema de Cauchy. Por lo tanto, podemos escribir esto como

$$\int_{\frac{1}{2}+i\mathbf{R}} dj\{\dots\} = + \int_{\frac{k-1}{2}+i\mathbf{R}} dj\{\dots\} + \text{Polos}\left(\frac{1}{2} < \text{Re}(j) < \frac{k-1}{2}\right)$$

notemos que no hay error de signo al escribir la región de integración, ya que ésta cambia al cambiar el signo en la dirección del recorrido según $\frac{k-1}{2} - i\mathbf{R} \rightarrow \frac{k-1}{2} + i\mathbf{R}$. Es interesante notar que si los estados externos (j_1, j_2, j_3, j_4) están dentro del rango

de unitariedad, los únicos polos de todos los enumerados arriba que terminarán por contribuir en la región $Polos(\frac{1}{2} < Re(j) < \frac{k-1}{2})$ son aquéllos de la forma

$$j = j_1 + j_2 + \mathbf{Z}_{\geq 0}$$

y

$$j = k - j_1 - j_2 + \mathbf{Z}_{\geq 0}$$

Es importante notar que si los estados externos interactuantes son restringidos según la condición adicional

$$j_1 + j_2 < \frac{k+1}{2}$$

entonces los polos de la forma $j = k - j_1 - j_2 + \mathbf{Z}_{\geq 0}$ (los segundos de los listados arriba) sólo se cumplen para $j > k - j_1 - j_2 + \mathbf{Z}_{\geq 0} > \frac{k-1}{2}$, lo cual excluye tales polos de la región de integración $[\frac{1}{2}, \frac{k-1}{2}]$. Los polos del primer renglón (*i.e.* los $j = j_1 + j_2 + \mathbf{Z}_{\geq 0}$) llevan a otra restricción $j_1 + j_2 < \frac{k-1}{2}$ en forma de una restricción sobre el entero $\mathbf{Z}_{\geq 0}$ tal que j no exceda el número $\frac{k-1}{2}$ (que garantiza su unitariedad como estado interno), esta restricción eclipsa a la anterior.

El primer paso de Maldacena y Ooguri fue resolver la integral en j para los primeros términos en el desarrollo de potencias de $u = \frac{x}{z}$. Vale mencionar un paso de particular importancia en la integral de Maldacena y Ooguri sobre j ; un paso que cobra nuevamente interés en el contexto de la invariancia ante modronomía; a saber: Como es fácil ver y como notaron Maldacena y Ooguri en [16], la solución general de la forma

$$\mathcal{F}(x, z, j) = x^{j-j_1-j_2+h_j-h_{j_1}-h_{j_2}} u^{h_j-h_{j_1}-h_{j_2}} \sum_{n=0}^{\infty} g_n(u) x^n$$

con

$$g_0(u, \bar{u}) = |F(a, b, c, u)|^2 + \frac{B}{A} |u^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c, u)|^2$$

no tiene el comportamiento para z pequeños que el ansatz

$$\mathcal{F}(x, z, j) = z^{h_j-h_{j_1}-h_{j_2}} x^{j-j_1-j_2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) z^n$$

manifiesta. Esto es debido al término $\left|\frac{z}{x}\right|^{2-2c}$ del segundo término de la expresión para $g_0(u, \bar{u})$. Así, se presenta un problema, que es el siguiente: por un lado, el segundo término en la expresión para $g_0(u, \bar{u})$ no tiene el comportamiento adecuado para valores pequeños de z (lo cual es técnicamente conveniente para efectuar luego la integral en la hoja de mundo $\int dz(\dots)$); pero, por otro lado, ambos términos en la expresión de $g_0(u, \bar{u})$ son requeridos conjuntamente para obtener invariancia ante modronomía (*i.e.* $\lambda \neq 0$).

Maldacena y Ooguri resuelven este problema de manera inteligente, mostrando lo siguiente:

Teorema (Maldacena y Ooguri, 2001): *Si bien la expresión para $g_0(u)$ no es invariante ante modronomía si el segundo término es omitido, la expresión total luego de haber sido integrada en $\int dj(\dots)$ resulta serlo. Veamos esto:*

Demostración: Primero es importante decir que la siguiente identidad se cumple [16]

$$\lambda \frac{C(j_1, j_2, j)C(j, j_3, j_4)}{B(j)} = \frac{C(j_1, j_2, k-j-1)C(k-j-1, j_3, j_4)}{B(k-j-1)}$$

siendo $\lambda = B/A$ el calculado antes por invariancia ante modronomía. Entonces, consideremos la expresión total para la solución $\mathcal{F}(x, z, j)$ de la ecuación de Knizhnik-Zamolodchikov, dada por

$$\mathcal{F}(x, z, j) = x^{j-j_1-j_2+h_j-h_{j_1}-h_{j_2}} u^{h_j-h_{j_1}-h_{j_2}} (g_0(u) + g_1(u)x + g_2(u)x^2 + \dots)$$

con

$$g_0(u, \bar{u}) = |F(a, b, c, u)|^2 + \lambda |u^{1-c}F(a-c+1, b-c+1, 2-c, u)|^2$$

Entonces, vale que a primer orden en potencias de x se tiene

$$\frac{C(j_1, j_2, j)C(j, j_3, j_4)}{B(j)} |\mathcal{F}(x, z, j)|^2 = x^{j-j_1-j_2+h_j-h_{j_1}-h_{j_2}} u^{h_j-h_{j_1}-h_{j_2}} g_0(u, \bar{u}) =$$

$$\begin{aligned}
&= x^{j-j_1-j_2+h_j-h_{j_1}-h_{j_2}} u^{h_j-h_{j_1}-h_{j_2}} \frac{C(j_1, j_2, j)C(j, j_3, j_4)}{B(j)} |F(a, b, c, u)|^2 + \\
&\quad + x^{j-j_1-j_2+h_j-h_{j_1}-h_{j_2}} \lambda \frac{C(j_1, j_2, j)C(j, j_3, j_4)}{B(j)} |u^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c, u)|^2
\end{aligned}$$

que es decir

$$\begin{aligned}
&\frac{C(j_1, j_2, j)C(j, j_3, j_4)}{B(j)} |\mathcal{F}(x, z, j)|^2 = x^{j-j_1-j_2+h_j-h_{j_1}-h_{j_2}} u^{h_j-h_{j_1}-h_{j_2}} g_0(u, \bar{u}) = \\
&= x^{j-j_1-j_2+h_j-h_{j_1}-h_{j_2}} u^{h_j-h_{j_1}-h_{j_2}} \frac{C(j_1, j_2, j)C(j, j_3, j_4)}{B(j)} |F(a, b, c, u)|^2 + \\
&\quad + x^{j-j_1-j_2+h_j-h_{j_1}-h_{j_2}} u^{h_j-h_{j_1}-h_{j_2}} \frac{C(j_1, j_2, k-j-1)C(k-j-1, j_3, j_4)}{B(k-j-1)} \\
&\quad |u^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c, u)|^2
\end{aligned}$$

Luego, recordando que $c = k - 2j$, y como detallamos antes al estudiar las simetrías de Weyl, vemos que el primero y el segundo término de esta expresión para $\frac{C(j_1, j_2, j)C(j, j_3, j_4)}{B(j)} |\mathcal{F}(x, z, j)|^2$ son simétricos ante la transformación $j \rightarrow k - j - 1$. Por otro lado, es importante notar que, como antes también mencionamos, la integral en $\int dj(\dots)$ se realiza en la línea $j \in \frac{k-1}{2} + i\mathbf{R}$; y justamente tales valores de j son los que son cerrados ante la transformación de Weyl σ_1 : *i.e.* hacer $j \rightarrow k - j - 1$ para j tales que $j \in \frac{k-1}{2} + i\mathbf{R}$ es hacer $j \rightarrow j^*$, lo cual es cerrado en la línea de integración.

Así, concluimos que, a primer orden en potencias de x , se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{SL(2)}(x, z) &= \int_{\frac{1}{2}+i\mathbf{R}} dj \frac{C(j, j_1, j_2)C(j, j_3, j_4)}{B(j)} |\mathcal{F}(x, z, j)|^2 = \\
&= \int_{\frac{k-1}{2}+i\mathbf{R}} dj \frac{C(j, j_1, j_2)C(j, j_3, j_4)}{B(j)} |\mathcal{F}(x, z, j)|^2 + \text{Polos}\left(\frac{1}{2} < \text{Re}(j) < \frac{k-1}{2}\right) = \\
&= \frac{1}{2} \int_{\frac{k-1}{2}+i\mathbf{R}} dj x^{j-j_1-j_2+h_j-h_{j_1}-h_{j_2}} u^{h_j-h_{j_1}-h_{j_2}} \frac{C(j_1, j_2, j)C(j, j_3, j_4)}{B(j)} |F(a, b, c, u)|^2 + \\
&\quad + \text{Polos}\left(\frac{1}{2} < \text{Re}(j) < \frac{k-1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Así, escribimos la expresión invariante ante modronomía (la integral completa en $\int dj(\dots)$ sí es invariante aunque no lo sea cada contribución del integrando) en términos del integrando $\sim |F(a, b, c, u)|^2$ solamente, *i.e.* sin el término $\sim |u^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c, u)|^2$.

Q.E.D.

El segundo paso que se requiere para el cálculo de la amplitud de dispersión es integrar la función de 4-puntos en z (para ser correcto, vale decir que Maldacena y Ooguri integraron en la variable cociente $u = \frac{x}{z}$ que definieron por comodidad de cálculo) con el fin de obtener la función de 4-puntos en el espacio-tiempo (integrando sobre la hoja de mundo $\int du(\dots)$). Referimos a [75] y [16] para los detalles y el cálculo original.

Maldacena y Ooguri mostraron que la función de 4-puntos así definida satisface las propiedades de factorización (*i.e.* cumple que las condiciones de polo desarrolladas en el límite de coincidencia de dos operadores de vértice son interpretables como contribuciones provenientes de estados intermedios pertenecientes al espectro de la teoría de cuerdas) si los estados externos satisfacen la cota $j_1 + j_2 < \frac{k+1}{2}$.

References

- [1] S.P. Novikov, Usp.Mat.Nauk **37**, 3 (1982).
- [2] E. Witten, Comm.Math.Phys. **92**, 455 (1984).
- [3] E. Witten, Phys. Rev. **D 44** (1991) 314
- [4] M. Bañados, C. Teitelboim y J. Zanelli, Phys.Rev.Lett. **69** (1992) 1849
- [5] E. Martinec y S. Shatashvili, Nucl. Phys. **B 368** (1992) 338
- [6] J. Maldacena y A. Strominger, JHEP **9812** (1998) 005
- [7] A. Giveon y D. Kutasov, JHEP **0001** 023 (2000), hep-th/9911039
- [8] I. Bars, Phys. Rev. **D 53** (1996) 3308; I. Bars, *Solution of the $SL(2,R)$ string in curved space-time*, hep-th/ 9511187
- [9] I. Bars, C. Deliduman y D. Minic, *String Theory on AdS_3 Revisited*, hep-th/9907087
- [10] J. M. Evans, M. R. Gaberdiel y M. J. Perry, Nucl. Phys. **B 535** (1998) 152
- [11] J. Maldacena y H. Ooguri, Int.J. Mod. Phys. **A 16** (2001) 677
- [12] A. Pakman, BRST Quantization of String Theory in $AdS(3)$, hep-th/0304230. A. Pakman, JHEP 0301 (2003) 077. M. Asano y M. Natsuume, The BRST quantization y the no-ghost theorem for $AdS(3)$, hep-th/0304254.
- [13] J. Maldacena, H. Ooguri y J. Son, *Strings in AdS_3 y the $SL(2,R)$ WZNW model. Part 2: Euclidean Black Hole*, J.Math.Phys. **42** (2001) 2961-2977.
- [14] G. Giribet y C. Núñez, JHEP **99** 11 (1999)031
- [15] G. Giribet y C. Núñez, JHEP **06** (2000) 033

- [16] J. Maldacena y H. Ooguri, Phys.Rev. **D65** (2002) 106006.
- [17] G. Giribet y C. Nuñez, JHEP **0106** (2001), hep-th/0105200
- [18] G. Giribet, Mod.Phys.Lett. **A16** (2001) 281, hep-th/0105248
- [19] J. Brown y M. Henneaux, Comm.Math.Phys. **104** (1986), 207
- [20] O. Coussaert y M. Henneaux, Phys.Rev.Lett. **72** (1994) 183
- [21] Horowitz y D. Welch, Phys.Rev.Lett. **71** (1993) 328
- [22] G. Giribet, *Principio holográfico y teoría de cuerdas sobre AdS_3* , Tesis de Licenciatura, Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, (1999)
- [23] A. Giveon, D. Kutasov y N. Seiberg, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 733, hep-th/9806194
- [24] J. de Boer, H. Ooguri, H. Robins y J. Tannenhauser, JHEP **12** (1998) 026, hep-th/9812046
- [25] N. Ishibashi, K. Okuyama y Y. Satoh, Nucl. Phys. **B 588** (2000) 149
- [26] K. Hosomichi, K. Okuyama y Y. Satoh, Nucl. Phys. **B598** (2001) 451
- [27] V.S. Dotsenko y V.A. Fateev, Nucl. Phys. **B 251** (1985) 691; V.S. Dotsenko y V.A. Fateev, Nucl. Phys. **B 240** (1984) 312
- [28] P. Di Francesco y D. Kutasov, Nucl. Phys. **B375** (1992) 119; hep-th/9109005
- [29] P. Di Francesco y D. Kutasov, Phys. Lett. **B261** (1991) 385
- [30] M. Becker y K. Becker, Nucl. Phys. **B 418** (1994) 206, hep-th/9310046
- [31] K. Becker, *Strings, Black Holes and Conformal Field Theory*, PhD Thesis (1994), hep-th/9404157

- [32] M. Wakimoto, *Comm. Math. Phys.* **104** (1986) 605
- [33] N. Mohammadi, *Int. J. Mod. Phys. A* **5** (1990) 3201
- [34] I. Bars y D. Nemeschanshy, *Nucl. Phys. B* **348** (1991) 89
- [35] I. M. Gelfand, M. I. Graev, N. Ya. Vilenkin: *Generalized Functions*, Vol. 5, Academic Press (1966)
- [36] J. Balog, L. O’Raifeartaigh, P. Forgacs y A. Wipf, *Nucl. Phys. B* **325** (1989) 225
- [37] M. Green, J. Schwarz y E. Witten, *Superstring Theory, Vol. I: Introduction*, Cambridge University Press, (1995)
- [38] P.M.S. Petropoulos, *Phys. Lett. B* **236** (1990) 151
- [39] S. Hwang, *Nucl. Phys. B* **354** (1991) 100
- [40] J. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231, hep-th/9711200
- [41] D. Kutasov y N. Seiberg, *JHEP* **9904:008** (1999); hep-th/9903219
- [42] Y. Satoh, *Nucl. Phys. B* **513** (1998) 213
- [43] A. Gerasimov, A. Morozov, M. Olshanetsky, A. Marshakov y S. Shatashvili, *Int J. Mod. Phys. A* **5** (1990) 2495
- [44] P. M. Petropoulos, “*String theory on AdS₃: some open questions*”, proceedings of the TMR European program meeting *Quantum aspects of gauge theories, supersymmetry and unification*, Paris, France, September 1999, hep-th/9908189
- [45] K. Gawedzki, *Nucl. Phys. B* **328** (1989) 733
- [46] J. Teschner, *Nucl. Phys. B* **571** (2000) 555
- [47] V. S. Dotsenko, *Nucl. Phys. B* **338** (1990) 747

- [48] V. S. Dotsenko, Nucl. Phys. **B358** (1991) 547
- [49] L. Dixon, M. Peskin y J. Lykken, Nucl. Phys. **B325** (1989) 329
- [50] D. Gepner y Z. Qiu, Nucl. Phys. **B285** (1989) 423
- [51] M. Bershadsky y H. Ooguri, Comm. Math. Phys. **126** (1989) 49
- [52] P. Furlan, A. Ganchev, R. Paunov y V. Petkova, Nucl. Phys. **B394** (1993) 665;
P. Furlan, A. Ganchev y V. Petkova, Nucl. Phys. **B491** (1997) 635
- [53] O. Andreev, Int. J. Mod. Phys. **A 10** (1995) 3221.
- [54] J. Petersen, J. Rasmussen y M. Yu, Nucl. Phys. **B457** (1995) 309; Nucl. Phys.
B49 (Proc.Suppl.) (1996) 27
- [55] J. Distler y P. Nelson, Nucl. Phys. **B366** (1991) 255
- [56] M. Bershadsky y D. Kutasov, Phys. Lett. **266B** (1991) 345
- [57] J. Son, *String theory on AdS_3/Z_N* , hep-th/0107131
- [58] Panda y Mukherji, Phys.Lett. **B451** (1999) 53-59
- [59] M. Goulian y M. Li, Phys.Rev.Lett. **66**, 2051 (1991)
- [60] A. Schwimmer y N. Seiberg, Phys. Lett. **184B** (1987) 191
- [61] A.B. Zamolodchikov y V. A. Fateev, Sov. Phys. JETP **63** (1986) 913
- [62] J. Lykken, Nucl. Phys. **B313** (1989) 473
- [63] A. Giveon y D. Kutasov, Nucl.Phys. **B621** (2002) 303-336
- [64] Y. Hikida, K. Hosomichi y Y. Sugawara, Nucl.Phys. **B589** (2000) 134-166
- [65] J. Teschner, Nucl.Phys. **B546** (1999) 369

- [66] I.I. Kogan y A. Lewis, Nucl.Phys. **B509** (1998) 687-704, hep-th/9705240
- [67] A. Nichols y Sanjay, Nucl.Phys. **B597** (2001) 633-651
- [68] A. Lewis, Phys.Lett. **B480** (2000) 348-354, hep-th/9911163
- [69] A. Lewis, *Logarithmic CFT on the boundary and the world-sheet*, hep-th/0009096
- [70] J. Rasmussen, *Applications of free field in 2D current algebra*, PhD Thesis, Niels Bohr Institute at the University of Copenhagen, hep-th/9610167
- [71] N. Seiberg y E. Witten, JHEP **9904** (1999) 017, hep-th/9903224
- [72] V. S. Dotsenko, Nucl. Phys. **B 338** (1990) 747; Nucl. Phys. **B 358** (1991) 547
- [73] C. Gawedzki, *Non-compact WZNW conformal field theories*, in Proc. NATO ASI Cargense (1991), eds. J. Frolich, G. 't Hooft, A. Jaffe, G. Mack, P.K.Mitter, R. Stora. Plenum Press (1992)
- [74] J. Teschner, Nucl. Phys. **B546** (1999) 390
- [75] J. Teschner, Nucl. Phys. **B571** (2000) 555
- [76] J. Teschner, Phys.Lett. **B521** (2001) 127-132
- [77] O. Andreev, Phys. Rev. **D 61** (2000) 126001
- [78] J. Teschner, Class.Quant.Grav. **18** (2001) R153-R222
- [79] R. Dijkgraf, H. Verlinde y E. Verlinde, Nucl. Phys. **B371** (1992) 269; M. Bershadsky y D. Kutasov, Phys. Lett. **B 266** (1991) 345
- [80] G. Giribet y C. Núñez, en preparación (2003).
- [81] V. Fateev, A. Zamolodchikov y Al. Zamolodchikov, notas no publicadas
- [82] V. Kazakov, I. Kostov y D. Kutazov, Nucl.Phys. **B622** (2002) 141-188

- [83] R. Argurio, A. Giveon y A. Shomer, JHEP **0012** (2000) 003. R. Argurio, A. Giveon y A. Shomer, JHEP **0012** (2000) 025. R. Argurio, A. Giveon y A. Shomer, Fortsch.Phys. **49** (2001) 409-418.
- [84] T. Fukuda y K. Hosomichi, JHEP **0109** (2001) 003
- [85] Y. Satoh, Nucl.Phys. **B629** (2002) 188-208. K. Hosomichi y Y. Satoh, Mod.Phys.Lett. **A17** (2002) 683-693
- [86] A. Larsen y N. Sánchez, Phys.Rev **D62** (2000) 046003. A. Larsen y N. Sánchez, Nucl.Phys. **B618** (2001) 301
- [87] S. Hwang y Fjlestad, *Sectors of solutions in three-dimensional gravity and Black Holes*, hep-th/0110235. S. Hemming, E. Keski-Vakkuri, The spectrum of strings on BTZ black holes and spectral flow in the $SL(2, R)$ model, hep-th/0110252. S. Hwang y Fjlestad, Phys.Lett. **B466** (1999) 227-233
- [88] Y. Satoh, *Study of Three Dimensional Quantum Black Holes*, hep-th/9705209
- [89] C. Bachas y M. Petropoulos, JHEP **0102** (2001) 025
- [90] Giveon y Kutasov, *Comments on D-branes in AdS_3* , Nucl.Phys. **B615** (2001) 133-168
- [91] Fateev y A.B. Zamolodchikov, Sov.J.Nucl.Phys. **43** (4) (1986) 657.
- [92] O. Andreev, Phys.Lett. **B363** (1995) 166, hep-th/9504082
- [93] Awata y Yamada, Mod.Phys.Lett. **A7** 3 (1992) 1185.
- [94] B. Ponsot, Nucl.Phys. **B642** (2002) 114-138.
- [95] P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Sénéchal, *Conformal Field Theory*, Springer (1996).