# Transformada de Hankel de funciones generalizadas n-dimensionales

Molina, Sandra Mónica

2002

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

# Transformada de Hankel de funciones generalizadas n-dimensionales

**Sandra Mónica Molina**

**Directora de Tesis:** DOCTORA SUSANA ELENA TRIONE
**Lugar de Trabajo:** DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA.
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES.
UNIVERSIDAD NACIONAL DE MAR DEL PLATA.

Trabajo de Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Marzo, 2002.

# Resumen

La transformación convencional de Hankel definida por:

$$(h_\mu f)(y) = \int_0^\infty f(x)\sqrt{xy}J_\mu(xy)\,dx$$

donde $0 < y < \infty$, $\mu \in I\!R$, $\mu \geq -\frac{1}{2}$ y $J_\mu$ la función de Bessel de primera clase y de orden $\mu$, fué estudiada por Zemanian in [10] sobre ciertos espacios $\mathcal{H}_\mu$, y extendida a $\mathcal{H}'_\mu$ mediante:

$$\langle h_\mu f, \phi\rangle = \langle f, h_\mu\phi\rangle$$

donde $\phi$, $h_\mu\phi \in \mathcal{H}_\mu$ y $f \in \mathcal{H}'_\mu$. En este trabajo se expone una generalización n-dimensional de todas las propiedades estudiadas por Zemanian y algunas aplicaciones de estos resultados a la resolución de cierto tipo de ecuaciones en derivadas parciales de la forma:

$$P(S_\mu)u = g,$$

donde $g$ es cierta función generalizada perteneciente a $\mathcal{H}'_\mu$, $u$ desconocida y $S_\mu$ una generalización n-dimensional del operador de Bessel.



Palabras claves: Transformaciones integrales, Hankel, funciones generalizadas, Operador de Bessel, ecuaciones diferenciales.

# Abstract

The Hankel transformation defined by:

$$(h_\mu f)(y) = \int_0^\infty f(x)\sqrt{xy}\,J_\mu(xy)\,dx$$

where $0 < y < \infty$, $\mu \in I\!R$, $\mu \geq -\frac{1}{2}$ and $J_\mu$ the Bessel function of first kind and order $\mu$, has been estudied by Zemanian in [10] on certain spaces $\mathcal{H}_\mu$. This transformation is extended to $\mathcal{H}'_\mu$ as

$$\langle h_\mu f, \phi\rangle = \langle f, h_\mu \phi\rangle$$

where $\phi$, $h_\mu \phi \in \mathcal{H}_\mu$ and $f \in \mathcal{H}'_\mu$. In this work, we extend the properties estudied by Zemanian to n-dimensional spaces $\mathcal{H}_\mu$ and $\mathcal{H}'_\mu$. Moreover, we obtain some applications of this results to find solutions to partial differential equations of the form

$$P(S_\mu)u = g$$

where $g$ is a given member of $\mathcal{H}'_\mu$ and $u$ is unknown and $S_\mu$ a generalization of the n-dimensional Bessel operator.



Palabras claves: Integral transforms, Hankel, generalized functions, Bessel operator, diferential equation.

# Glosario

| | Páginas |
|---|---|
| $\lvert k \rvert$, $k \in \mathbb{N}_0^n$ | 8 |
| $\binom{k}{n}$, $k, n \in \mathbb{N}_0^n$ | 8 |
| $k!$, $k \in \mathbb{N}_0^n$ | 8 |
| $\sum_{j=m}^{k}$, $m, k \in \mathbb{N}_0^n$ | 8 |
| $x^m$, $m \in \mathbb{N}_0^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ | 8 |
| $T_i$ | 9 |
| $T^i$ | 9 |
| $T_i^j$ | 9 |
| $T$ | 9 |
| $\gamma_{m,k}^{\mu}$ | 9 |
| $\mathcal{H}_\mu$ | 9 |
| $\mathcal{H}'_\mu$ | 22 |
| $\mathcal{O}$ | 30 |
| $N_{\mu,i}$ | 35 |
| $N_{\mu,i}^{-1}$ | 35 |
| $M_{\mu,i}$ | 35 |
| $N'_{\mu,i}$ | 43 |
| $M'_{\mu,i}$ | 43 |
| $N_{\mu,i}^m$ | 52 |
| $N_\mu^m$ | 52 |
| $J_\mu$ | 45 |
| $\hbar_\mu$ | 45 |
| $\hbar'_\mu$ | 63 |

# Introducción

La transformación de Hankel es definida por A.H. Zemanian en [10] de la siguiente manera,

$$(h_\mu f)(y) = \int_0^\infty f(x)\sqrt{xy}J_\mu(xy)\,dx$$

donde $0 < y < \infty$, $\mu \in I\!R$, $\mu \geq -\frac{1}{2}$ y $J_\mu$ la función de Bessel de primera clase y de orden $\mu$. Esta transformada ha sido estudiada en un espacio de prueba denotado por $\mathcal{H}_\mu$ que es numerablemente multinormado y además un espacio de Fréchet. Zemanian demostró que la transformación de Hankel es un automorfismo de $\mathcal{H}_\mu$ lo cual permite extender la transformación de Hankel al dual $\mathcal{H}'_\mu$ vía la transformación adjunta.

En este trabajo se expone una generalización n-dimensional de todas las propiedades estudiadas por Zemanian (distinta a la generalización estudiada por Koh en [4]) y también se exponen algunas aplicaciones a la resolución de ecuaciones en derivadas parciales. Esta exposición está distribuida en cinco capítulos:

- El Capítulo I comprende todo el estudio del espacio $\mathcal{H}_\mu$. Se demuestra que $\mathcal{H}_\mu$ es un espacio de Frechét y que sus miembros son funciones rápidamente decrecientes en el infinito.

- En el Capítulo II se introduce el espacio dual $\mathcal{H}'_\mu$, que resulta ser un espacio completo. Se estudian las relaciones de este espacio con otros espacios de funciones generalizadas, determinándose que dicho espacio contiene a las distribuciones clásicas de Schwartz de soporte compacto y que la restricción de un miembro de $\mathcal{H}_\mu$ al espacio $\mathcal{D}(I\!R^n_+)$ de funciones en $C^\infty$ con soporte compacto es un miembro del espacio $\mathcal{D}'(I\!R^n_+)$.

- En el Capítulo III, se estudia el espacio $\mathcal{O}$ como espacio de multiplicadores de los espacios $\mathcal{H}_\mu$ y $\mathcal{H}'_\mu$. También se estudian ciertos operadores que actúan sobre $\mathcal{H}_\mu$ y $\mathcal{H}'_\mu$, de importancia fundamental para el estudio de la transformada de Hankel n-dimensional.

- En el Capítulo IV se estudian las propiedades de la transformación de Hankel n-dimensional definida por:

$$(h_\mu\phi)(y) = \int_{I\!R^n_+} \phi(x_1,\ldots,x_n)\prod_{i=1}^{n}\left\{\sqrt{x_iy_i}J_{\mu_i}(x_iy_i)\right\}dx_1\ldots dx_n, \quad (0.1)$$

donde $I\!R^n_+ = (0,\infty) \times \ldots \times (0,\infty)$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, $\mu \in I\!R^n$, $\mu_i \geq -\frac{1}{2}$ para $i = 1, \ldots, n$ y las $J_{\mu_i}$ son funciones de Bessel de primera clase y de orden $\mu_i$. Se demuestra el teorema fundamental que afirma que la transformada de Hankel es un automorfismo sobre el espacio $\mathcal{H}_\mu$.

- En el Capítulo V se generaliza la transformación de Hankel al espacio $\mathcal{H}'_\mu$. Se estudian sus propiedades, análogas a la de la transformación de Hankel dada por (0.1). Finalmente, se expone una aplicación de todo lo anterior a la resolución de ciertas ecuaciones diferenciales que involucran al operador,

$$S_\mu = \sum_{i=1}^{n} M_{\mu,i} N_{\mu,i} = \sum_{i=1}^{n} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \left( \frac{4\mu_i^2 - 1}{4x_n^2} \right) \right]$$

donde,

$$M_{\mu,i} = x_i^{-\mu_i - \frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x_i} x_i^{\mu_i + \frac{1}{2}},$$

$$N_{\mu,i} = x_i^{\mu_i + \frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x_i} x_i^{-\mu_i - \frac{1}{2}}.$$

El operador $S_\mu$ puede ser visto como una generalización n-dimensional del operador de Bessel unidimensional dado por $S_\mu = x^{-\mu-\frac{1}{2}} D x^{2\mu+1} D x^{-\mu-\frac{1}{2}}$.

La generalización expuesta en este trabajo nos va a permitir en el futuro trabajar en varias direcciones: una de ellas es la de continuar profundizando las aplicaciones a la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Otra dirección es la de generalizar el operador de convolución para la transformación generalizada de Hankel, el cual ha sido estudiado por J.J. Betancor y B.J. Marrero en [5] para el caso unidimensional. Otro aspecto importante es el estudio de la transformación de Hankel n-dimensional sobre nuevos espacios de funciones generalizadas como también el estudio de la transformación de Hankel para otros valores del multiíndice $\mu$. También podrían estudiarse más propiedades topológicas del espacio $\mathcal{O}$ como también establecer una caracterización completa de los multiplicadores de los espacios $\mathcal{H}_\mu$ y $\mathcal{H}'_\mu$.

# Agradecimientos

Quiero dar las gracias a mi familia, y en especial a mis hijas, y a la Dra. Susana Elena Trione por su apoyo constante.

Sandra Molina

# Índice

# Capítulo 1

# El espacio $\mathcal{H}_\mu$

## 1.1 Notación

$I\!R^n$ denotará el conjunto de las n-uplas de números reales, $I\!R^n_+$ las n-uplas de números reales positivos. $I\!N$ el conjunto $\{1, 2, 3 \ldots\}$ y $I\!N_0 = I\!N \cup \{0\}$. Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in I\!R^n$ entonces $|x| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$. Si $x, y \in I\!R^n$ diremos $x < y$ si $x_i < y_i$ para $i = 1, \ldots, n$, si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = a$ con $a \in I\!R$ pondremos $x = a$. Con $e_j$, $j = 1, \ldots, n$ denotaremos a los miembros de la base canónica de $I\!R^n$. A un elemento $k \in I\!N_0^n$, $k = (k_1, \ldots, k_n)$ lo llamaremos multiíndice. Para $k, m$ multiíndices tenemos las siguientes convenciones:

$$|k| = k_1 + \ldots + k_n$$

$$k! = k_1!, \ldots, k_n!$$

$$\binom{k}{m} = \binom{k_1}{m_1} \cdots \binom{k_n}{m_n}$$

$$\sum_{j=m}^{k} f(j) = \sum_{j_1=m_1}^{k_1} \sum_{j_2=m_2}^{k_2} \quad \sum_{j_n=m_n}^{k_n} f(j_1, \ldots, j_n)$$

Si $x \in I\!R^n$ , $x = (x_1, \ldots, x_n)$ pondremos

$$x^m = x_1^{m_1} \ldots . x_n^{m_n}.$$

Si $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, \ldots, n$ pondremos

$$D^k f(x) = \frac{\partial^{|k|} f(x)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}}$$

## 1.2 El espacio $\mathcal{H}_\mu$

Sea $\phi : I\!R^n_+ \to C$, se definen los operadores $T_i$ y $T$ de la siguiente forma:

$$T_i\{\phi\} = T_i\phi = \left(x_i^{-1}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\phi = x_i^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

para $i = 1, \ldots, n$. Si $k$ es un multiíndice, $k = (k_1, \ldots, k_n)$ pondremos:

$$T^k = T_n^{k_n} \circ T_{n-1}^{k_{n-1}} \circ \ldots \circ T_1^{k_1}$$

donde $T_i^j = T_i \circ \ldots \circ T_i$ (j veces), "$\circ$" indica la composición usual. En lo sucesivo pondremos simplemente $T_iT_j$ para indicar $T_i \circ T_j$.

Para cada n-upla $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, $\mu_i \in I\!R$, definimos el espacio $\mathcal{H}_\mu$ como el conjunto de las funciones $\phi \in C^\infty(I\!R^n_+)$ y a valores complejos tales que para cada par de multiíndices $m, k$ se satisface que,

$$\gamma^\mu_{m,k}(\phi) = \sup_{x \in I\!R^n_+} |x^m T^k\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)\}| < \infty \tag{1.1}$$

donde $-\mu - \frac{1}{2} = (-\mu_1 - \frac{1}{2}, -\mu_2 - \frac{1}{2}, \ldots, -\mu_n - \frac{1}{2})$.

**Observación 1.2.1.** *$T_i$, $T$, $T^k$ son operadores lineales que satisfacen:*

$$T_iT_j = T_jT_i \quad \textit{para } i, j = 1, \ldots, n\,,$$

*y en general:*

$$T_i^n T_j^m = T_j^m T_i^n \quad \textit{para } n, m \in I\!N_0.$$

La linealidad de $T_i$, $T$ y $T^k$ es inmediata, además,

$$T_iT_j\{\phi\} = T_i\left\{x_j^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right\} = x_i^{-1}\left\{x_j^{-1}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}\right\} =$$

$$= x_j^{-1}\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{x_i^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right\} = T_jT_i\{\phi\}.$$

**Observación 1.2.2.** *$\mathcal{H}_\mu$ es un espacio vectorial con una familia numerable de seminormas:*

$$\{\gamma^\mu_{m,k}\}_{m,k \in I\!N_0^n}. \tag{1.2}$$

*Además (1.2) resulta una familia separada de seminormas.*

Si $\phi, \varphi \in \mathcal{H}_\mu$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$) entonces de la linealidad del operador $T^k$ sigue:

$$\gamma^\mu_{m,k}(\lambda\phi) = |\lambda|\gamma^\mu_{m,k}(\phi),$$
$$\gamma^\mu_{m,k}(\phi + \varphi) \leq \gamma^\mu_{m,k}(\phi) + \gamma^\mu_{m,k}(\varphi),$$

para cualquier valor de los multiíndices $m$ y $k$. Dado que $\{\gamma^\mu_{m,0}\}_{m\in\mathbb{N}_0^n}$ es una familia de normas, (1.2) resulta una familia separada de seminormas (i.e. dada $\phi \in \mathcal{H}_\mu$, $\phi \neq 0$, $\exists m, k$ multiíndices tales que $\gamma^\mu_{m,k}(\phi) \neq 0$).

**Proposición 1.2.1.** *Si $k$ es un multiíndice, vale la siguiente igualdad:*

$$T^k\{\theta.\varphi\} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} T^{k-j}\theta.T^j\varphi; \tag{1.3}$$

*donde ". " indica producto usual de funciones , $\binom{k}{j}$ y $\sum_{j=0}^k$ deben interpretarse como en la sección 1.1 con $j = 0 = (0,\ldots,0)$.*

**Demostración:** Si $k$ un multiíndice, $k = (k_1,\ldots,k_n)$, entonces dado que $T^k = T_n^{k_n}\ldots T_1^{k_1}$, probaremos primero que para $i, k \in \mathbb{N}$:

$$T_i^k\{\theta.\varphi\} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} T_i^{k-j}\theta.T_i^j\varphi. \tag{1.4}$$

La fórmula (1.4) resulta por inducción sobre $k$. Si $k = 1$ (1.4) es cierto pues

$$T_i\{\theta.\varphi\} = x_i^{-1}\frac{\partial}{\partial x_i}\{\theta.\varphi\} = \left(x_i^{-1}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\right).\varphi + \theta.\left(x_i^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) =$$
$$= T_i\{\theta\}.\varphi + \theta.T_i\{\varphi\}.$$

Suponiendo (1.4) válido para k, obtenemos:

$$T_i^{k+1}\{\theta.\varphi\} = T_iT_i^k\{\theta.\varphi\} = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}T_i\{T_i^{k-j}\{\theta\}.T_i^j\{\varphi\}\} =$$
$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left[T_i^{k+1-j}\{\theta\}.T_i^j\{\varphi\} + T_i^{k-j}\{\theta\}.T_i^{j+1}\{\varphi\}\right] =$$
$$= \binom{k}{0}T_i^{k+1}\{\theta\}.\varphi + \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}T_i^{k+1-j}\{\theta\}.T_i^j\{\varphi\} + \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}T_i^{k-j}\{\theta\}.T_i^{j+1}\{\varphi\}+$$
$$+\binom{k}{k}\theta.T_i^{k+1}\{\varphi\} =$$

$$= \binom{k+1}{0} T_i^{k+1}\{\theta\}.\varphi + \sum_{j=1}^{k}\left[\binom{k}{j} + \binom{k}{j-1}\right] T_i^{k+1-j}\{\theta\}.T_i^j\{\varphi\} +$$

$$+ \binom{k+1}{k+1}\theta.T_i^{k+1}\{\varphi\} = \sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j} T_i^{k+1-j}\theta.T_i^j\varphi.$$

Veamos ahora la validez de (1.3). Sea $k$ un multiíndice, $k = (k_1, \dots, k_n)$, entonces:

$$T_2^{k_2}T_1^{k_1}\{\theta\varphi\} = T_2^{k_2}\left\{\sum_{j_1=0}^{k_1}\binom{k_1}{j_1} T_1^{k_1-j_1}\{\theta\}.T_1^{j_1}\{\varphi\}\right\} =$$

$$= \sum_{j_1=0}^{k_1}\binom{k_1}{j_1} T_2^{k_2}\left\{T_1^{k_1-j_1}\{\theta\}.T_1^{j_1}\{\varphi\}\right\} =$$

$$= \sum_{j_1=0}^{k_1}\binom{k_1}{j_1}\left[\sum_{j_2=0}^{k_2}\binom{k_2}{j_2} T_2^{k_2-j_2}T_1^{k_1-j_1}\{\theta\}.T_2^{j_2}T_1^{j_1}\{\varphi\}\right] =$$

$$\sum_{j_1=0}^{k_1}\sum_{j_2=0}^{k_2}\binom{k_1}{j_1}\binom{k_2}{j_2}\left[T_2^{k_2-j_2}T_1^{k_1-j_1}\{\theta\}.T_2^{j_2}T_1^{j_1}\{\varphi\}\right].$$

Repitiendo este procedimiento tenemos

$$T^k\{\theta\varphi\} = T_n^{k_n}\dots T_2^{k_2}T_1^{k_1}\{\theta\varphi\} =$$

$$= \sum_{j_1=0}^{k_1}\sum_{j_2=0}^{k_2}\dots\sum_{j_n=0}^{k_n}\binom{k_1}{j_1}\binom{k_2}{j_2}\dots\binom{k_n}{j_n} T_n^{k_n-j_n}\dots T_1^{k_1-j_1}\{\theta\}.T_n^{j_n}\dots T_1^{j_1}\{\varphi\} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} T^{k-j}\{\theta\}.T^j\{\varphi\};$$

que es la conclusión de la proposición 1.2.1.

□

**Lema 1.2.1.** *Si $\phi \in \mathcal{H}_\mu$, entonces las funciones $D^k\phi$ son rápidamente decrecientes en el infinito, es decir, $\forall k, m$ multiíndices $x^m D^k\phi = o(1)$ cuando $x \to \infty$.*

Antes de demostrar este lema haremos la siguiente observación:

**Observación 1.2.3.** *Para todo multiíndice $k$ vale la siguiente igualdad:*

$$T^k\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi\} = x^{-\mu-\frac{1}{2}}\sum_{j=0}^{k} b_{k,j}\frac{D^j\phi}{x^{2k-j}}\ , \tag{1.5}$$

*para ciertas constantes $b_{k,j}$.*

Demostremos (1.5) por inducción sobre $|k|$. Si $|k| = 1$ entonces $k$ es de la forma $k = e_i$ donde $e_i$ es un miembro de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, luego,

$$T^{e_i}\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi\} = T_n^0 \dots T_i^1 \dots T_1^0\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi\} = x_i^{-1}\frac{\partial}{\partial x_i}\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi\} =$$

$$= x^{-\mu-\frac{1}{2}}\left(cx_i^{-2}\phi + x_i^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) = x^{-\mu-\frac{1}{2}}\left(c\frac{D^0\phi}{x^{2e_i}} + \frac{D^{e_i}\phi}{x^{2e_i-e_i}}\right)$$

de donde para $k = e_i$ se verifica (1.5).
Para el caso general, consideremos un multiíndice $k'$, $k' = (k_1', \dots, k_n')$ tal que $|k'| = |k| + 1$, luego $|k' - e_i| = |k'| - 1 = |k|$ para algún $i$, entonces,

$$T^{k'}\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi\} = T_n^{k_n'} \dots T_i^{k_i'-1+1} \dots T_1^{k_1'}\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi\} = T_i T^{k'-e_i}\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi\},$$

aplicando la hipótesis inductiva para $k'-e_i$ en la última expresión, obtenemos

$$T_i T^{k'-e_i}\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi\} = x_i^{-1}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\sum_{j=0}^{k'-e_i} b_{k'-e_i,j}\,\frac{D^j\phi}{x^{2(k'-e_i)-j}}\right\} =$$

$$= x_i^{-1}\left[(-\mu_i - \frac{1}{2})x^{-\mu-\frac{1}{2}}x_i^{-1}\sum_{j=0}^{k'-e_i}\left(b_{k'-e_i,j}\,\frac{D^j\phi}{x^{2(k'-e_i)-j}}\right) + \right.$$

$$\left. + x^{-\mu-\frac{1}{2}}\sum_{j=0}^{k'-e_i}\left(b_{k'-e_i,j}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\frac{D^j\phi}{x^{2(k'-e_i)-j}}\right\}\right)\right] =$$

$$= x^{-\mu-\frac{1}{2}}\left[\sum_{j=0}^{k'-e_i}\left((-\mu_i - \frac{1}{2})b_{k'-e_i,j}\,\frac{D^j\phi}{x^{2(k'-e_i)-j+2e_i}}\right) + \right.$$

$$\left. + x_i^{-1}\sum_{j=0}^{k'-e_i}\left(b_{k'-e_i,j}\left\{-2(k_i'-1) + j_i)x_i^{-1}\frac{D^j\phi}{x^{2(k'-e_i)-j}} + \frac{D^{j+e_i}\phi}{x^{2(k'-e_i)-j}}\right\}\right)\right] =$$

$$= x^{-\mu-\frac{1}{2}}\left[\sum_{j=0}^{k'-e_i} c_{k',j}\frac{D^j\phi}{x^{2k'-j}} + \sum_{j=0}^{k'-e_i} d_{k',j}\frac{D^j\phi}{x^{2k'-j}} + \sum_{j=0}^{k'-e_i} b_{k'-e_i,j}\frac{D^{j+e_i}\phi}{x^{2k'-(j+e_i)}}\right],$$

donde hemos considerado

$$c_{k',j} = (-\mu_i - \frac{1}{2})b_{k'-e_i,j},$$

y

$$d_{k',j} = b_{k'-c_i,j}(-2(k'_i - 1) + j_i).$$

Considerando $r = j + e_i$, en el último término de la última igualdad, para $j = 0, \ldots, k' - c_i$ y $e_{k',r} = b_{k'-c_i,r-c_i}$ para $r = c_i, \ldots, k'$, obtenemos,

$$T^{k'}\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi\} = x^{-\mu-\frac{1}{2}}\left[\sum_{j=0}^{k'-c_i} c_{k'j}\frac{D^j\phi}{x^{2k'-j}} + \sum_{j=0}^{k'-c_i} d_{k'j}\frac{D^j\phi}{x^{2k'-j}} + \sum_{r=c_i}^{k'} e_{k',r}\frac{D^r\phi}{x^{2k'-r}}\right],$$

con lo cual resulta la validez de (1.5).

**Demostración del lema 1.2.1:**

Sea $\phi \in \mathcal{H}_\mu$, veamos que si $k, m \in I\!N_0^n$, existe $C_{m,k} \in I\!R_+$ tal que,

$$|x^m D^k\phi(x)| < C_{m,k}, \tag{1.6}$$

para todo $x \in \mathcal{B}$ donde $\mathcal{B} = I\!R_+^n - Q$ con $Q = (0,1] \times \ldots \times (0,1]$ (n veces). De aquí, se deduce que $|x^m D^k(\phi)| = o(1)$ cuando $|x| \to \infty$. Demostremos (1.6) por inducción sobre $|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ donde $k = (k_1, \ldots, k_n)$. Para ello escribimos a $\mathcal{B}$ como una unión finita de subconjuntos disjuntos considerando para cada $1 \le s \le n$ la familia $\mathcal{P}_s = \{\mathcal{A}_{j_1\ldots j_s}\}_{\substack{j_1,\ldots,j_s=1\\ j_1<\ldots<j_s}}^n$ tales que,

$$\mathcal{A}_{j_1\ldots j_s} = \{x \in I\!R_+^n : x_{j_r} \in (1,\infty), r = 1, \ldots, s \text{ y } x_j \le 1 \text{ si } j \ne j_r\} \tag{1.7}$$

Es claro que $\mathcal{P}_n = (1,\infty)^n$. Sea entonces:

$$\mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{P}_i,$$

luego $\mathcal{B} = I\!R_+^n - Q = \bigcup_{\mathcal{A}\in\mathcal{P}} \mathcal{A}$.

I) Consideremos primero el caso en que $|k| = 0$, ($k = (0, \ldots, 0)$) y sea $m \in I\!N_0^n$. Elijamos un $m' \in I\!N_0^n$ suficientemente grande como para que $m < m' - \mu - \frac{1}{2}$. Dado que $\phi \in \mathcal{H}_\mu$ entonces para $k = (0, \ldots, 0)$ y $m'$ existe $C_{m',0} \in I\!R_+$ tal que,

$$\sup_{x\in I\!R_+^n} |x^{m'-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)| < C_{m',0}. \tag{1.8}$$

Por otra parte es

$$\sup_{x\in\mathcal{B}}|x^m\phi| = \max_{\mathcal{A}\in\mathcal{P}}\{\sup_{x\in\mathcal{A}}|x^m\phi|\}. \tag{1.9}$$

Sea $\mathcal{A}'\in\mathcal{P}$ el que realiza el máximo en (1.9), entonces $\mathcal{A}'\in\mathcal{P}_s$ para algún $1\leq s\leq n$, luego $\mathcal{A}'$ es de la forma (1.7). Sean entonces $j_1,\dots,j_s$ las coordenadas de $\mathcal{A}'$ mayores que 1, sea $C=\{x\in\mathcal{A}':\ x_i=1 \quad \text{para} \quad i\neq j_1\dots j_s\}$, luego para $x\in\mathcal{A}'$, resulta

$$|x^m\phi|\leq|x_{j_1}^{m_{j_1}}\dots x_{j_s}^{m_{j_s}}\phi|\leq|x_{j_1}^{m'_{j_1}-\mu_{j_1}-\frac{1}{2}}\dots x_{j_s}^{m'_{j_s}-\mu_{j_s}-\frac{1}{2}}\phi|\leq$$
$$\sup_{x\in C}|x^{m'-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)|\leq\sup_{x\in\mathbb{R}_+^n}|x^{m'-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)|.$$

De esta última desigualdad y de (1.8) y (1.9), obtenemos que

$$\sup_{x\in\mathcal{B}}|x^m\phi|\leq\sup_{x\in\mathcal{A}'}|x^m\phi|\leq\sup_{x\in\mathbb{R}_+^n}|x^{m'-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)|=\gamma_{m',0}^{\mu}\leq C_{m',0}\,, \tag{1.10}$$

con lo cual $\phi$ resulta ser rápidamente decreciente.

Demostremos ahora el caso general por inducción sobre $|k|$.

II) Sea $k\in\mathbb{N}_0^n$ tal que $|k|=1$. Sea entonces $k=(0,\dots,1,\dots,0)$. Dado que $\phi\in\mathcal{H}_\mu$ entonces para cada $m'\in\mathbb{N}_0^n$, $\gamma_{m',k}^{\mu}(\phi)\leq C_{m',k}$ con lo cual tenemos

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+^n}\left|x^{m'}T^k\left\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)\right\}\right|<C_{m',k}. \tag{1.11}$$

Luego, aplicando la fórmula (1.5) en (1.11), se obtiene que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+^n}\left|x^{m'}x^{-\mu-\frac{1}{2}}\left(b_{k,0}\frac{D^0\phi(x)}{x^{2k}}+b_{k,k}\frac{D^k\phi(x)}{x^k}\right)\right|<C_{m',k}.$$

Luego, para todo $x\in\mathbb{R}_+^n$, se verifica

$$\left|x^{m'-k}x^{-\mu-\frac{1}{2}}\,b_{k,k}\,D^k\phi(x)\right|-\left|x^{m'-2k}x^{-\mu-\frac{1}{2}}\,b_{k,0}\,\phi(x)\right|\leq$$

$$\leq \left| x^{m'-k} x^{-\mu-\frac{1}{2}}\, b_{k,k}\, D^k\phi(x) + x^{m'-2k} x^{-\mu-\frac{1}{2}}\, b_{k,0}\, \phi(x) \right| < C_{m',k}\,,$$

con lo cual,

$$\left| x^{m'-k} x^{-\mu-\frac{1}{2}}\; D^k\phi(x) \right| \leq C' \left| x^{m'-2k} x^{-\mu-\frac{1}{2}}\; \phi(x) \right| + C\,, \tag{1.12}$$

donde $C' = \frac{|b_{k,0}|}{|b_{k,k}|}$ y $C = \frac{C_{m',k}}{|b_{k,k}|}$. Dado que $\phi \in \mathcal{H}_\mu$ el término $\left| x^{m'-2k} x^{-\mu-\frac{1}{2}} \phi(x) \right|$ en la desigualdad (1.12) está acotado para $m' - 2k \geq 0$. Concluimos entonces que para cada $m'' \in I\!N_0^n$ con $m'' \geq k$ se cumple que,

$$\left| x^{m''} x^{-\mu-\frac{1}{2}}\; D^k\phi(x) \right| < C''$$

para alguna constante $C''$. Sea $m \in I\!N_0^n$, elegimos entonces $m''$ tal que $m < m'' - \mu - \frac{1}{2}$ y $m'' \geq k$. Con el mismo procedimiento utilizado en el caso $k = 0$ concluimos que

$$\left| x^m D^k\phi(x) \right| < C_{m,k}\,,$$

para alguna constante $C_{m,k}$.

III) Sea $k \in I\!N_0^n$. Si $\phi \in \mathcal{H}_\mu$ entonces para todo $m' \in I\!N_0^n$:

$$\gamma^{\mu}_{m',k}(\phi) = \sup_{x \in I\!R^n_+} \left| x^{m'} T^k \left\{ x^{-\mu-\frac{1}{2}} \phi(x) \right\} \right| < C_{m',k}. \tag{1.13}$$

Aplicando nuevamente la fómula (1.5) en (1.13) obtenemos,

$$\left| x^{m'} x^{-\mu-\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{j=0}^{k} b_{k,j} \frac{D^j\phi}{x^{2k-j}} \right\} \right| < C_{m',k}\,,$$

para todo $x \in I\!R^n_+$. Luego, resulta

$$\left| b_{k,k} x^{m'} x^{-\mu-\frac{1}{2}} \frac{D^k\phi}{x^k} \right| - \left| x^{m'} x^{-\mu-\frac{1}{2}} \sum_{j \leq k} b_{k,j} \frac{D^j\phi}{x^{2k-j}} \right| \leq \left| x^{m'} x^{-\mu-\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{j=0}^{k} b_{k,j} \frac{D^j\phi}{x^{2k-j}} \right\} \right|,$$

deducimos entonces de las dos últimas desigualdades que

$$|x^{m'-k}x^{-\mu-\frac{1}{2}}D^k\phi| \leq \sum_{j\leq k}\{d_{k,j}|x^{m'-2k+j}x^{-\mu-\frac{1}{2}}D^j\phi|\} + D_{k,m'}\,, \tag{1.14}$$

donde $d_{k,j} = \frac{|b_{k,j}|}{|b_{k,k}|}$ y $D_{k,m'} = \frac{C_{m',k}}{|b_{k,k}|}$. Analizando la suma de (1.14), vemos que las derivadas de orden j de $\phi$ corresponden a multiíndices $j$ tales que $|j| < |k|$ con lo cual por la hipótesis inductiva $D^j\phi$ es rápidamente decreciente en el infinito. Luego, puede verse que $|x^{m'-2k+j}x^{-\mu-\frac{1}{2}}D^j\phi|$ están acotados para $x \in \mathcal{B}$ de la misma forma que en el caso I) para $m'$ que verifique que $m' - 2k + j - \mu - \frac{1}{2} \geq 0$ para todo j tal que $0 \leq j \leq k$. Obtenemos entonces de (1.14) que para todo $m'$ tal que $m' - k - \mu - \frac{1}{2} \geq k$ vale que,

$$|x^{m'-k}x^{-\mu-\frac{1}{2}}D^k\phi| \leq C.$$

Concluimos, con el mismo razonamiento que se empleó para el caso $k = 0$ que dado $m \in I\!N_0^n$ se tiene,

$$|x^m D^k\phi| \leq |x^{m'-k}x^{-\mu-\frac{1}{2}}D^k\phi| \leq C$$

para $x \in \mathcal{B}$, con tal que $m < m' - k - \mu - \frac{1}{2}$ y $m' - k - \mu - \frac{1}{2} \geq k$.

□

**Corolario 1.2.1.** *Si $\phi \in \mathcal{H}_\mu$ y $\mu \geq -\frac{1}{2}$ entonces $\phi \in L^1(I\!R_+^n)$.*

**Demostración.** Si $\phi \in \mathcal{H}_\mu$, $\gamma_{0,0}^\mu(\phi) < C$, entonces $\Psi(x) = x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)$ es acotada en $I\!R_+^n$. Concluimos entonces que $\phi(x) = x^{\mu+\frac{1}{2}}\Psi(x)$ también es acotada en $I\!R_+^n$ para $\mu \geq -\frac{1}{2}$ y por ser rápidamente decreciente en el infinito $\phi \in L^1(I\!R_+^n)$.

□

**Lema 1.2.2.** *$\mathcal{H}_\mu$ es completo con lo cual resulta un espacio de Fréchet.*

**Demostración.** Sea $\{\phi_\nu\}_{\nu\in I\!N}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}_\mu$. Entonces dados $\varepsilon > 0$, $m, k \in I\!N_0^n$ existe $N_{\varepsilon,m,k} \in I\!N$ tal que si $\nu, \eta \geq N_{\varepsilon,m,k}$ es

$$\gamma_{m,k}^\mu(\phi_\nu - \phi_\eta) < \varepsilon. \tag{1.15}$$

En particular si $m = 0$, obtenemos,

$$\sup_{x\in \mathbb{R}^n_+}\left|T^k\left\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}(\phi_\nu-\phi_\eta)(x)\right\}\right| < \varepsilon, \quad \forall \nu,\eta \geq N_{\varepsilon,0,k}. \qquad (1.16)$$

Veamos que para cada multiíndice $k$, $\{D^k\phi_\nu\}_{\nu\in \mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre compactos $K \subset \mathbb{R}^n_+$.

I) Consideremos primero el caso $k = 0$. Sea $\varepsilon > 0$, $K \subset \mathbb{R}^n_+$ compacto, sea $M = \max_{x\in K}|x^{\mu+\frac{1}{2}}|$ y sea $\varepsilon' > 0$ tal que $\varepsilon' M < \varepsilon$. De acuerdo con (1.16), para $\varepsilon'$ y $k = 0$ obtenemos,

$$\sup_{x\in \mathbb{R}^n_+}\left|x^{-\mu-\frac{1}{2}}(\phi_\nu-\phi_\eta)(x)\right| < \varepsilon', \quad \forall \nu,\eta \geq N_{\varepsilon',0,k}.$$

En particular, para $x \in K$, resulta

$$\left|x^{-\mu-\frac{1}{2}}(\phi_\nu-\phi_\eta)(x)\right| < \varepsilon',$$

y se concluye que,

$$\left|\phi_\nu-\phi_\eta)(x)\right| < x^{\mu+\frac{1}{2}}\varepsilon' < \varepsilon \quad \forall \nu,\eta \geq N_{\varepsilon',0,k}.$$

Luego, $\{\phi_\nu\}_{\nu\in \mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre compactos en $\mathbb{R}^n_+$.

II) Obtendremos el caso general por inducción sobre $|k|$. Aplicando (1.5) en (1.16) resulta que para todo $x \in \mathbb{R}^n_+$ vale

$$\left|x^{-\mu-\frac{1}{2}}\left\{\sum_{j=0}^{k} b_{k,j}\frac{D^j(\phi_\nu-\phi_\eta)(x)}{x^{2k-j}}\right\}\right| < \varepsilon', \quad \forall \nu,\eta \geq N_{\varepsilon',0,k}.$$

Luego,

$$\left|x^{-\mu-\frac{1}{2}}b_{k,k}\frac{D^k(\phi_\nu-\phi_\eta)(x)}{x^k}\right| - \left|x^{-\mu-\frac{1}{2}}\left\{\sum_{j<k} b_{k,j}\frac{D^j(\phi_\nu-\phi_\eta)(x)}{x^{2k-j}}\right\}\right| \leq$$

$$\leq \left|x^{-\mu-\frac{1}{2}}\left\{\sum_{j=0}^{k} b_{k,j}\frac{D^j(\phi_\nu-\phi_\eta)(x)}{x^{2k-j}}\right\}\right| < \varepsilon', \quad \forall \nu,\eta \geq N_{\varepsilon',0,k}.$$

En consecuencia,

$$|D^k(\phi_\nu - \phi_\eta)(x)| < \sum_{j<k}\left|\frac{b_{k,j}}{b_{k,k}}\right||x^{-k+j}D^j(\phi_\nu - \phi_\eta)(x)| + \frac{\varepsilon'}{|b_{k,k}|}x^{\mu+\frac{1}{2}+k},$$

para $x \in I\!R^n_+$, $\nu,\eta \geq N_{\varepsilon',0,k}$. Luego, si $K \subset I\!R^n_+$ es compacto, por ser las funciones $x^{\mu+\frac{1}{2}+k}$ y $x^{-k+j}$ acotadas sobre $K$ y por la hipótesis inductiva, $|D^j(\phi_\nu - \phi_\eta)(x)|$ es arbitrariamente pequeño para $\nu$ y $\eta$ suficientemente grandes y para órdenes de derivación $j$ tal que $|j| < |k|$, concluimos que dado $\varepsilon > 0$, para $\nu,\eta \geq N_{\varepsilon,0,k}$ es

$$|D^k(\phi_\nu - \phi_\eta)(x)| < \varepsilon ,$$

para todo $x \in K$. Luego, $\{D^k\phi_\nu\}_{\nu\in I\!N}$ converge uniformemente sobre compactos $K \subset I\!R^n_+$. Concluimos entonces que existe $\phi \in C^\infty(I\!R^n_+)$ tal que $\phi_\nu \to \phi$ uniformemente sobre compactos.

Veamos ahora que $\phi_\nu \to \phi$ en $\mathcal{H}_\mu$ y que $\phi \in \mathcal{H}_\mu$. Por ser $\{\phi_\nu\}_{\nu\in I\!N}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}_\mu$ obtenemos de (1.15) que,

$$\left|x^m T^k\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}(\phi_\nu - \phi_\eta)(x)\}\right| < \varepsilon ,$$

para todo $x \in I\!R^n_+$, $\nu,\eta \geq N_{\varepsilon,m,k}$. Luego, haciendo tender $\eta \to \infty$, obtenemos,

$$\left|x^m T^k\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}(\phi_\nu - \phi)(x)\}\right| < \varepsilon.$$

De donde

$$\gamma^\mu_{m,k}(\phi_\nu - \phi) < \varepsilon, \quad \forall\nu > N_{\varepsilon,m,k}\,. \tag{1.17}$$

Luego $\phi_\nu \to \phi$ en $\mathcal{H}_\mu$. Por último, veamos que $\phi \in \mathcal{H}_\mu$. Vimos ya que $\phi \in C^\infty(I\!R^n_+)$, sean ahora $m,k$ multiíndices y un $\varepsilon > 0$ entonces de (1.17) y por propiedad de seminormas tenemos,

$$\gamma^\mu_{m,k}(\phi) \leq \gamma^\mu_{m,k}(\phi_\nu) + \gamma^\mu_{m,k}(\phi_\nu - \phi) < \gamma^\mu_{m,k}(\phi_\nu) + \varepsilon,$$

para todo $\nu > N_{\varepsilon,m,k}$. Dado que $\phi_\nu \in \mathcal{H}_\mu$ para todo $\nu$, concluimos que $\phi \in \mathcal{H}_\mu$.

□

**Ejemplo 1.2.1.** *Consideremos el caso $n = 1$, $\mu \in I\!R$, entonces la función $\psi : I\!R_+ \to C$, $\psi(x) = x^{\mu+\frac{1}{2}}e^{-x^2}$ pertenece a $\mathcal{H}_\mu$.*

En efecto, dado $k \in I\!N$ entonces tenemos

$$(x^{-1}D)^k\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\psi(x)\} = (-1)^k 2^k e^{-x^2},$$

luego;

$$\gamma^{\mu}_{m,k}(\psi) = \sup_{x\in I\!R_+} |x^m(x^{-1}D)^k\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\psi(x)\}| < \infty, \quad \forall m, k \in I\!N$$

por ser la función $e^{-x^2}$ rápidamente decreciente. Para el caso $n > 1$ haremos la siguiente observación:

**Observación 1.2.4.** *Sean $\phi_i : I\!R_+ \to C$ tal que $\phi_i \in \mathcal{H}_{\mu_i}$ para $i = 1, \ldots, n$. Entonces la función $\Phi$ definida por*

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \phi_i(x_i)$$

*pertenece a $\mathcal{H}_\mu$ con $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$.*

En efecto, $\Phi \in C^\infty(I\!R^n_+)$, pues $\phi_i \in C^\infty(I\!R_+)$ para $i = 1, \ldots, n$. Además, si $k, m$ son multiíndices, $k = (k_1, \ldots, k_n)$ y $m = (m_1, \ldots, m_n)$, entonces

$$\gamma^{\mu}_{m,k}(\Phi(x)) = \sup_{x\in I\!R^n_+}\left|x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}T_n^{k_n}\ldots T_1^{k_1}\left\{x_1^{-\mu_1-\frac{1}{2}}\ldots x_n^{-\mu_n-\frac{1}{2}}\prod_{i=1}^{n}\phi_i(x_i)\right\}\right| =$$

$$= \sup_{x\in I\!R^n_+}\left|x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}T_n^{k_n}\{x_n^{-\mu_n-\frac{1}{2}}\phi_n(x_n)\}\ldots T_1^{k_1}\{x_1^{-\mu_1-\frac{1}{2}}\phi_1(x_1)\}\right| =$$

$$= \sup_{x\in I\!R^n_+}\prod_{i=1}^{n}\left|x_i^{m_i}T_i^{k_i}\{x_i^{-\mu_i-\frac{1}{2}}\phi_i(x_i)\}\right| < \infty\,,$$

pues $\phi_i \in \mathcal{H}_{\mu_i}$ para $i = 1, \ldots, n$, con lo cual $\Phi \in \mathcal{H}_\mu$.

**Ejemplo 1.2.2.** *Para $n > 1$, la función:*

$$\Psi(x) = x^{\mu+\frac{1}{2}}e^{-|x|^2} = x_1^{\mu_1+\frac{1}{2}}\ldots x_n^{\mu_n+\frac{1}{2}}e^{-(x_1^2+\ldots+x_n^2)},$$

*pertenece a $\mathcal{H}_\mu$.*

Inmediato a partir de la Observación 1.2.4 y el Ejemplo 1.2.1.

**Proposición 1.2.2.** *Sea $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ la base canónica de $I\!R^n$ entonces para todo $q$ par, $q \in I\!N$ vale que $\mathcal{H}_{\mu+qe_i} \subset \mathcal{H}_\mu$ para todo $i = 1, \dots, n$.*

**Demostración:** Consideremos el caso $q = 2$, de donde se infiere el caso general con un argumento inductivo. Sea $\mu + 2e_i = (\mu_1, \dots, \mu_i + 2, \dots, \mu_n)$ y $\phi \in \mathcal{H}_{\mu+2e_i}$ y sea $k \in I\!N^n$, $k = (k_1, \dots, k_n)$, utilizando la fórmula (1.3) obtenemos

$$T^k\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)\} = T^k\{x_i^2 x^{-(\mu+2e_i)-\frac{1}{2}}\phi(x)\} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} T^{k-j}\{x^{-(\mu+2e_i)-\frac{1}{2}}\phi(x)\}.T^j\{x_i^2\}. \tag{1.18}$$

Los términos de la forma $T^j\{x_i^2\}$ son nulos salvo para los multíndices 0 y $e_i$. Luego, volviendo a (1.18), obtenemos

$$T^k\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)\} =$$
$$= T^0\{x_i^2\}T^k\{x^{-(\mu+2e_i)-\frac{1}{2}}\phi(x)\} + k_i T^{e_i}\{x_i^2\}T^{k-e_i}\{x^{-(\mu+2e_i)-\frac{1}{2}}\phi(x)\} =$$
$$= x_i^2 T^k\{x^{-(\mu+2e_i)-\frac{1}{2}}\phi(x)\} + 2k_i T^{k-e_i}\{x^{-(\mu+2e_i)-\frac{1}{2}}\phi(x)\},$$

donde $\binom{k}{0} = 1$ y $\binom{k}{e_i} = k_i$. Multiplicando por $x^m$, $m \in I\!N^n$, resulta

$$\gamma^{\mu}_{m,k}(\phi) \leq \gamma^{\mu+2e_i}_{m+2e_i,k}(\phi) + 2k_i\, \gamma^{\mu+2e_i}_{m,k-e_i}(\phi),$$

con lo cual $\phi \in \mathcal{H}_\mu$ y $\mathcal{H}_{\mu+2e_i} \subset \mathcal{H}_\mu$ .

□

**Observación 1.2.5.** *$\mathcal{D}(I\!R^n_+)$ será el conjunto de las funciones pertenecientes a $C^\infty(I\!R^n_+)$ con soporte compacto, y $\mathcal{E}(I\!R^n_+)$ será el conjunto de las funciones pertenecientes a $C^\infty(I\!R^n_+)$. Se cumplen las siguientes propiedades:*

*i) $\mathcal{D}(I\!R^n_+) \subset \mathcal{H}_\mu$ para todo $\mu \in I\!R^n$.*

*ii) $\mathcal{D}(I\!R^n_+)$ no es denso en $\mathcal{H}_\mu$.*

*iii) Para cada $\mu \in I\!R^n$, $\mathcal{H}_\mu \subset \mathcal{E}(I\!R^n_+)$. Además $\mathcal{H}_\mu$ es denso en $\mathcal{E}(I\!R^n_+)$.*

La primera afirmación es inmediata teniendo en cuenta que la función

$$x^m T^k\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)\},$$

tiene soporte compacto para todo par de multi- índices $k$ y $m$ y $\phi \in \mathcal{D}(I\!R^n_+)$. Para demostrar la segunda afirmación consideremos la función del Ejemplo 1.2.2, $\Psi(x) = x^{\mu+\frac{1}{2}}e^{-|x|^2}$, y veamos que existe un entorno $\mathcal{B}_\Psi$ para el cual:

$$\mathcal{B}_\Psi \bigcap \mathcal{D}(I\!R^n_+) = \emptyset \tag{1.19}$$

Sea

$$\mathcal{B}_\Psi = \left\{\phi \in \mathcal{H}_\mu : \gamma^\mu_{0,0}(\phi - \Psi) < \frac{1}{2}\right\}$$

Si $\xi \in \mathcal{D}(I\!R^n_+)$ con soporte $K \subset I\!R^n_+$, entonces resulta

$$\gamma^\mu_{0,0}(\xi - \Psi) = \sup_{x \in I\!R^n_+} |x^{-\mu-\frac{1}{2}}(\xi(x) - \Psi(x))| \geq$$

$$\geq \sup_{x \in I\!R^n_+ - K} |x^{-\mu-\frac{1}{2}}(\xi(x) - \Psi(x))| = \sup_{x \in I\!R^n_+ - K} |e^{-|x|^2}| = 1\,.$$

Luego (1.19) es cierto con lo cual deducimos la no densidad de $\mathcal{D}(I\!R^n_+)$ en $\mathcal{H}_\mu$.
La tercera afirmación se deduce inmediatamente observando que $\mathcal{D}(I\!R^n_+) \subset \mathcal{H}_\mu \subset \mathcal{E}(I\!R^n_+)$ y que $\mathcal{D}(I\!R^n_+)$ es denso en $\mathcal{E}(I\!R^n_+)$.

# Capítulo 2

# El espacio $\mathcal{H}'_\mu$

## 2.1 Propiedades de $\mathcal{H}'_\mu$ y relaciones con otros espacios de funciones generalizadas

**Observación 2.1.1.** *$\mathcal{H}_\mu$, $\mu \in I\!R$, con las seminormas $\gamma^\mu_{m,k}$, es un espacio de prueba sobre $I\!R^n_+$* ([10], Cap.II, §2.4), *pues satisface las siguientes condiciones:*

*(a) Si $f \in \mathcal{H}_\mu$ entonces $f \in C^\infty(I\!R^n_+)$.*

*(b) Hay una colección numerable de normas que hacen que $\mathcal{H}_\mu$ resulte un espacio completo.*

*(c) Si $\{\phi_\nu\}_{\nu\in I\!N}$ converge en $\mathcal{H}_\mu$ a cero entonces para todo $k \in I\!N^n_0$, $\{D^k\phi_\nu\}_{\nu\in I\!N}$ converge a cero uniformemente sobre todo compacto contenido en $I\!R^n_+$.*

Esta última condición se infiere de la demostración del Lema 1.2.2.

Denotaremos con $\mathcal{H}'_\mu$ al espacio dual de $\mathcal{H}_\mu$.

**Observación 2.1.2.** *$\mathcal{H}'_\mu$ es completo.*

Se sigue del Lema 1.2.2 y ([10], Cap.1, §1.8, t.1.8-3).

**Proposición 2.1.1.** *La convergencia en $\mathcal{D}(I\!R^n_+)$ implica la convergencia en $\mathcal{H}_\mu$. De esto se deduce que si $f \in \mathcal{H}'_\mu$ entonces la restricción de $f$ a $\mathcal{D}(I\!R^n_+)$ está en $\mathcal{D}'(I\!R^n_+)$.*

**Demostración:** Tomemos una sucesión $\{\phi_\nu\}_{\nu\in I\!N}$ en $\mathcal{D}(I\!R^n_+)$ tal que $\phi_\nu \to 0$ (para $\nu \to \infty$) en $\mathcal{D}(I\!R^n_+)$. Entonces existe un conjunto compacto $K_0 \subset I\!R^n_+$

tal que $sop(\phi_\nu) \subset K_0$ para todo $\nu$ y para todo multiíndice $j$, $D^j\phi_\nu$ converge uniformemente a 0. Veamos que $\{\phi_\nu\}_{\nu\in I\!N}$ converge a 0 en $\mathcal{H}_\mu$. Sean $m, k$ multiíndices, entonces

$$\gamma^\mu_{m,k}(\phi_\nu) = \sup_{x\in I\!R^n_+}\left|x^m T^k\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi_\nu(x)\}\right| = \sup_{x\in I\!R^n_+}\left|x^m x^{-\mu-\frac{1}{2}}\sum_{j=0}^{k} b_{k,j}\frac{D^j\phi_\nu}{x^{2k-j}}\right| \leq$$

$$\leq \sup_{x\in I\!R^n_+}\sum_{j=0}^{k}|b_{k,j}||x^{m-\mu-\frac{1}{2}-2k+j}||D^j\phi_\nu| \leq \sup_{x\in K_0}\sum_{j=0}^{k}|b_{k,j}|M_{k,m,j}|D^j\phi_\nu|,$$

donde $M_{k,m,j} = \sup_{x\in K_0}|x^{m-\mu-\frac{1}{2}-2k+j}|$. Luego, $\gamma^\mu_{m,k}(\phi_\nu) \to 0$ (para $\nu \to \infty$) con lo cual $\phi_\nu \to 0$ en $\mathcal{H}_\mu$ para todo $\mu \in I\!R^n$.
La segunda afirmación se deduce inmediatamente ya que si $f \in \mathcal{H}'_\mu$ y $\{\phi_\nu\}_{\nu\in I\!N}$ es una sucesión tal que $\phi_\nu \to 0$ (para $\nu \to \infty$) en $\mathcal{D}(I\!R^n_+)$ entonces $\phi_\nu \to 0$ en $\mathcal{H}_\mu$, con lo cual $(f, \phi_\nu) \to 0$ y $f/\mathcal{D}(I\!R^n_+) \in \mathcal{D}'(I\!R^n_+)$.

□

**Observación 2.1.3.** *Para cada $\mu \in I\!R^n$, $\mathcal{H}_\mu \subset \mathcal{E}(I\!R^n_+)$. Además $\mathcal{H}_\mu$ es denso en $\mathcal{E}(I\!R^n_+)$*

Esto se deduce inmediatamente observando que $\mathcal{D}(I\!R^n_+) \subset \mathcal{H}_\mu \subset \mathcal{E}(I\!R^n_+)$ y que $\mathcal{D}(I\!R^n_+)$ es denso en $\mathcal{E}(I\!R^n_+)$.

**Proposición 2.1.2.** *La topología de $\mathcal{H}_\mu$ generada por la familia de seminormas $\{\gamma^\mu_{m,k}\}_{m,k\in I\!N^n_0}$ definidas en §1.2, es más fuerte que la topología inducida por $\mathcal{E}(I\!R^n_+)$.*

**Demostración:** Llamemos $S$ a la familia de seminormas $\{\gamma^\mu_{m,k}\}_{m,k\in I\!N^n_0}$ en $\mathcal{H}_\mu$ y $T_2$ a la topología generada por la familia $S$. Llamemos $T_1$ la topología inducida por la topología de $\mathcal{E}(I\!R^n_+)$, es decir $T_1$ es la topología generada por la familia de seminormas $R = \{\gamma_{K',k}\}_{k\in I\!N^n_0, K'\in C}$, donde $C$ es la clase de los subconjuntos compactos de $I\!R^n_+$, que satisfacen a:

$$\gamma_{K',k}(\psi) = \sup_{x\in K'}|D^k\psi|, \quad \text{para } \psi \in \mathcal{E}(I\!R^n_+), k \in I\!N^n_0, K' \in C.$$

Para demostrar que $T_2$ es más fuerte que $T_1$ veamos que dada $\rho \in R$ existen finitas $\gamma_1, \ldots, \gamma_r \in S$ tal que para toda $\phi \in \mathcal{H}_\mu$ se verifica:

$$\rho(\phi) \leq c(\gamma_1(\phi) + \ldots + \gamma_r(\phi)) \tag{2.1}$$

para alguna constante $c$, ($c$ y $r$ dependen de la elección de $\rho$).
Fijemos un compacto $K'$ y consideremos primero el caso $k = 0$. Dada $\phi \in \mathcal{H}_\mu$ obtenemos

$$\gamma_{K',0}(\phi) = \sup_{x\in K'} |D^0\phi(x)| = \sup_{x\in K'} |x^{\mu+\frac{1}{2}}x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)| \leq$$

$$\leq c_0 \sup_{x\in K'} |x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)|,$$

donde $c_0 = \sup_{x\in K'} |x^{\mu+\frac{1}{2}}|$. Luego,

$$\gamma_{K',0}(\phi) \leq c_0 \sup_{x\in K'} |x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)| \leq c_0 \sup_{x\in \mathbb{R}^n_+} |x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)| = c_0\gamma^\mu_{0,0}(\phi),$$

resulta entonces que (2.1) es cierta para $\rho = \gamma_{K',0}$.

Veremos el caso general por inducción sobre $|k|$, para un compacto fijo $K'$:

I) Sea $k \in \mathbb{N}^n_0$, $|k| = 1$, $k = e_i$, y sea $\phi \in \mathcal{H}_\mu$, teniendo en cuenta la fórmula (1.5) obtenemos

$$T^{e_i}\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi\} = x^{-\mu-\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{e_i} b_{e_i,j} \frac{D^j\phi}{x^{2e_i-j}} =$$

$$= x^{-\mu-\frac{1}{2}} \left\{ b_{e_i,0}\frac{\phi}{x^{2e_i}} + b_{e_i,e_i}\frac{D^{e_i}\phi}{x^{e_i}} \right\},$$

luego,

$$D^{e_i}\phi = x_i \left\{ \frac{1}{b_{e_i,e_i}} x^{\mu+\frac{1}{2}} T^{e_i}\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi\} - \frac{b_{e_i,0}}{b_{e_i,e_i}} \frac{\phi}{x_i^2} \right\},$$

con lo cual,

$$\gamma_{K',e_i}(\phi) = \sup_{x\in K'} |D^{e_i}\phi(x)| \leq$$

$$\leq \left|\frac{1}{b_{e_i,e_i}}\right| c_1 \sup_{x\in K'} |x_i T^{e_i}\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi\}| + \left|\frac{b_{e_i,0}}{b_{e_i,e_i}}\right| c_2 \sup_{x\in K'} |\phi| =$$

$$= \left|\frac{1}{b_{e_i,e_i}}\right| c_1\, \gamma^{\mu}_{e_i,e_i}(\phi) + \left|\frac{b_{e_i,0}}{b_{e_i,e_i}}\right| c_2\, \gamma_{K',0}(\phi),$$

donde $c_1 = \sup_{x\in K'} |x^{\mu+\frac{1}{2}}|$ y $c_2 = \sup_{x\in K'}\left|\frac{1}{x_i^2}\right|$. Utilizando la desigualdad obtenida para el caso $k = 0$, se sigue que

$$\gamma_{K',e_i}(\phi) \leq \left|\frac{1}{b_{e_i,e_i}}\right| c_1\, \gamma^{\mu}_{e_i,e_i}(\phi) + \left|\frac{b_{e_i,0}}{b_{e_i,e_i}}\right| c_2\, c_0\, \gamma^{\mu}_{0,0}(\phi).$$

Sea $c = \max\left\{\left|\frac{1}{b_{e_i,e_i}}\right| c_1, \left|\frac{b_{e_i,0}}{b_{e_i,e_i}}\right| c_2\, c_0\right\}$, entonces

$$\gamma_{K',e_i}(\phi) \leq c\left\{\gamma^{\mu}_{e_i,e_i}(\phi) + \gamma^{\mu}_{0,0}(\phi)\right\}.$$

II) Sea k un multiíndice, supongo (2.1) cierta para $\rho = \gamma_{K',k'}$ con $|k'| < |k|$. Utilizando nuevamente la fórmula (1.5), resulta

$$T^k\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi\} = x^{-\mu-\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{k} b_{k,j} \frac{D^j\phi}{x^{2k-j}}$$

para $\phi \in \mathcal{H}_\mu$, entonces vale

$$D^k\phi = x^k\left\{\frac{x^{\mu+\frac{1}{2}}}{b_{k,k}} T^k\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi\} - \sum_{j<k} \frac{b_{k,j}}{b_{k,k}} \frac{D^j\phi}{x^{2k-j}}\right\}.$$

Tomando supremo sobre $K'$ a ambos miembros de la última igualdad, y utilizando la hipótesis inductiva se ve en forma similar al caso $|k| = 1$, que existe una constante c y una familia finita de seminormas $\gamma^{\mu}_{m_1,k_1}, \ldots, \gamma^{\mu}_{m_r,k_r} \in S$ tal que

$$\gamma_{K',k}(\phi) \leq c\,(\gamma^{\mu}_{m_1,k_1}(\phi) + \ldots + \gamma^{\mu}_{m_r,k_r}(\phi)).$$

□

**Observación 2.1.4.** *De la proposición anterior se infiere que la convergencia de una sucesión en $\mathcal{H}_\mu$ con la topología generada por la seminormas $\{\gamma^{\mu}_{m,k}\}_{m,k\in \mathbb{N}_0^n}$ implica la convergencia con la topología inducida por $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n_+)$. De esto, y por la densidad de $\mathcal{H}_\mu$ en $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n_+)$, se deduce que $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n_+) \subset \mathcal{H}'_\mu$ para todo $\mu \in \mathbb{R}^n$* ([10], §1.8, teo.1.8-2).

## 2.2 Funciones generalizadas regulares en $\mathcal{H}'_\mu$

Veamos ahora una caracterización importante para las $f \in \mathcal{H}'_\mu$. Para ello, definimos una familia numerable de normas en $\mathcal{H}_\mu$ dadas por

$$\rho_r^\mu(\phi) = \max_{0\leq m,k\leq r}\{\gamma_{m,k}^\mu(\phi)\}, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Para cada $r$, $\rho_r^\mu$ es una norma pues $\gamma_{0,0}^\mu$ lo es. Entonces, por ([10], §1.8), para cada $f \in \mathcal{H}'_\mu$ existe una constante positiva $C$ y un entero no negativo $r$ tal que para toda $\phi \in \mathcal{H}_\mu$ se satisface

$$|(f,\phi)| \leq C\,\rho_r^\mu(\phi), \tag{2.2}$$

donde $C$ y $r$ dependen de $f$ pero no de $\phi$.
Esta es una condición necesaria y suficiente para que $f$ pertenezca a $\mathcal{H}'_\mu$. Utilizaremos esta caracterización para demostrar la siguiente propiedad:

**Lema 2.2.1.** *Sea $f : \mathbb{R}_+^n :\longrightarrow \mathbb{C}$ una función integrable sobre cada compacto $K \subset \mathbb{R}_+^n$ (i.e. $f \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}_+^n)$) tal que $f$ es de crecimiento lento en el infinito (i.e. existe un número entero $r$ tal que $|f(x)| = O(|x|^r)$ cuando $|x| \to \infty$) y $x^{\mu+\frac{1}{2}}f(x)$, $\mu \in \mathbb{R}^n$, es absolutamente integrable en $Q = (0,1)^n \subset \mathbb{R}_+^n$. Entonces, $f$ define una función generalizada regular en $\mathcal{H}'_\mu$ dada por:*

$$(f,\phi) = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(x)\phi(x)\,dx, \quad \phi \in \mathcal{H}_\mu.$$

**Demostración:** Sea $\phi \in \mathcal{H}_\mu$, $Q = (0,1)^n$, entonces,

$$|(f,\phi)| = \Big|\int_{\mathbb{R}_+^n} f(x)\phi(x)\,dx\Big| \leq$$

$$\leq \Big|\int_Q f(x)\phi(x)\,dx\Big| + \Big|\int_{\mathbb{R}_+^n - Q} f(x)\phi(x)\,dx\Big|. \tag{2.3}$$

I) Analizando el primer sumando de (2.3), obtenemos:

$$\Big|\int_Q f(x)\phi(x)\,dx\Big| =\leq \Big|\int_Q x^{\mu+\frac{1}{2}}f(x)x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)\,dx\Big| \leq$$

$$\leq \gamma_{0,0}^\mu(\phi)\int_Q |x^{\mu+\frac{1}{2}}f(x)|dx \leq C_1\gamma_{0,0}^\mu(\phi), \tag{2.4}$$

donde hemos utilizado la hipótesis de que $x^{\mu+\frac{1}{2}}f(x)$ es absolutamente integrable en $Q$.

II) En el segundo sumando de (2.3) obtenemos:

$$\Big|\int_{I\!R^n_+-Q} f(x)\phi(x)\,dx\Big| \leq \Big|\int_{(I\!R^n_+-Q)\cap\{|x|\leq M\}} x^{\mu+\frac{1}{2}}f(x)x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)\,dx\Big|+$$

$$+\Big|\int_{(I\!R^n_+-Q)\cap\{|x|>M\}} f(x)\phi(x)\,dx\Big|. \tag{2.5}$$

Dado que $f\in L^1_{Loc}(I\!R^n_+)$ la función $x^{\mu+\frac{1}{2}}f(x)$ es integrable en el conjunto compacto $(I\!R^n_+-Q)\cap\{|x|\leq M\}$ ( observar que $x^{\mu+\frac{1}{2}}$ está acotada en cualquier compacto $K\subset I\!R^n_+$). Luego, el primer sumando del segundo término de la desigualdad (2.5) se halla acotado de la siguiente forma:

$$\Big|\int_{(I\!R^n_+-Q)\cap\{|x|\leq M\}} x^{\mu+\frac{1}{2}}f(x)x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)\,dx\Big| \leq C_2\gamma^{\mu}_{0,0}, \tag{2.6}$$

donde $C_2=\Big|\int_{(I\!R^n_+-Q)\cap\{|x|\leq M\}} x^{\mu+\frac{1}{2}}f(x)\,dx\Big|$.

Por hipótesis, existe un número entero $r$ tal que $|f(x)|=0(|x|^r)$ cuando $|x|\to\infty$ (sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $r$ es positivo y que $r+n+1=2q$ donde n es la dimensión del espacio). Esto significa que existe $M>0$ tal que $|f(x)|<C_3|x|^r$ para $|x|>M$. Además, teniendo en cuenta que $\phi$ es rápidamente decreciente en el $\infty$, obtenemos del segundo sumando de (2.5) la siguiente desigualdad:

$$\Big|\int_{(I\!R^n_+-Q)\cap\{|x|>M\}} f(x)\phi(x)\,dx\Big| \leq C_3\int_{(I\!R^n_+-Q)\cap\{|x|>M\}} |x|^r|\phi(x)|\,dx=$$

$$=C_3\int_{(I\!R^n_+-Q)\cap\{|x|>M\}} |x|^{r+n+1}|x|^{-(n+1)}|\phi(x)|\,dx\leq$$

$$\leq C_3\sup_{I\!R^n_+-Q}\{|x|^{r+n+1}|\phi(x)|\}\int_{(I\!R^n_+-Q)\cap\{|x|>M\}} |x|^{-(n+1)}\,dx.$$

Sabiendo que

$$|x|^{r+n+1} = |x|^{2q} = \left(|x|^2\right)^q = \sum_{1\leq i_1,\dots i_q\leq n} x_{i_1}^2 \dots x_{i_q}^2,$$

y teniendo en cuenta la desigualdad (1.10) del Capítulo 1, existe un conjunto finito de multiíndices $\Gamma$, tal que

$$\sup_{I\!R^n_+ - Q} \{|x|^{r+n+1}|\phi(x)|\} \leq \sum_{m\in\Gamma} \gamma^\mu_{m,0}(\phi).$$

Luego,

$$\left|\int_{(I\!R^n_+ - Q)\cap\{|x|>M\}} f(x)\phi(x)\,dx\right| \leq C_3 C_4 \sum_{m\in\Gamma} \gamma^\mu_{m,0}(\phi).$$

Finalmente obtenemos

$$|(f,\phi)| \leq C_1\gamma^\mu_{0,0}(\phi) + C_2\gamma^\mu_{0,0} + C_3C_4 \sum_{m\in\Gamma} \gamma^\mu_{m,0}(\phi)$$

de donde $f \in \mathcal{H}'_\mu$.

□

**Observación 2.2.1.** *Probamos en el lema anterior que bajo ciertas condiciones una función $f : I\!R^n_+ :\longrightarrow I\!\!C$ genera una función generalizada regular en $\mathcal{H}'_\mu$, para todo $\mu \in I\!R^n$. En el caso en que $\mu \in I\!R^n$ y $\mu \geq -\frac{1}{2}$, $f \in L^1(I\!R^n_+)$ entonces $f$ genera una función generalizada regular.*

Consideremos $f \in L^1(I\!R^n_+)$ y $\phi \in \mathcal{H}_\mu$. Dado que $\mu \geq -\frac{1}{2}$, es decir $\mu_i \geq -\frac{1}{2}$ para todo i, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, podemos elegir un $m$ entero positivo tal que $x^{\mu+\frac{1}{2}} < |x|^{2m}$, entonces,

$$|(f,\phi)| = \left|\int_{I\!R^n_+} f(x)\phi(x)\,dx\right| =$$

$$= \left|\int_{I\!R^n_+} x^{\mu+\frac{1}{2}}|x|^{-2m} f(x)|x|^{2m}x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)\,dx\right| \leq$$

$$\leq \int_{I\!R^n_+} |f(x)|\,|x|^{2m}|x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)|dx.$$

De la misma forma que en la demostración del Lema 2.2.1, arribamos a

$$|x|^{2m}|x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)| \leq \sum_{m'\in\Gamma} \gamma^{\mu}_{0,m'}(\phi),$$

para todo $x \in I\!R^n_+$ y para cierto conjunto finito $\Gamma$ de multiíndices. Luego,

$$|(f,\phi)| \leq c \sum_{m'\in\Gamma} \gamma^{\mu}_{0,m'}(\phi),$$

de donde se deduce la continuidad de $f$.

**Observación 2.2.2.** *$\mathcal{H}_\mu$ puede ser identificado con un subespacio de $\mathcal{H}'_\mu$ si $\mu \geq -\frac{1}{2}$.*

En efecto, si $f \in \mathcal{H}_\mu$ y $\mu \geq -\frac{1}{2}$, por Corolario 1.2.1 entonces $f \in L^1(I\!R^n_+)$ y por la observación anterior $f \in \mathcal{H}'_\mu$. Veamos que esta inclusión es inyectiva, es decir si $f, f' \in \mathcal{H}_\mu$ y $f \neq f'$ entonces difieren como miembros de $\mathcal{H}'_\mu$. Si $f \neq f'$ entonces difieren en un punto y por ser continuas, difieren también en un entorno $I \subset I\!R^n_+$. Luego, podemos elegir $\phi \in \mathcal{D}(I\!R^n_+)$ con soporte en $I$ tal que $(f,\phi) \neq (f',\phi)$, luego difieren en $\mathcal{H}'_\mu$.

**Ejemplo 2.2.1.** *Sea $a \in I\!R^n_+$, y sea $\nu$ un multiíndice, entonces la función $\delta^{(\nu)}(x-a)$ definida en $\mathcal{H}_\mu$ por:*

$$(\delta^{(\nu)}(x-a),\phi) = (-1)^{|\nu|}\phi^{(\nu)}(a), \quad \phi \in \mathcal{H}_\mu$$

*pertenece a $\mathcal{H}'_\mu$, (observar que $\delta^{(\nu)}(x-a) \in \mathcal{E}'(I\!R^n_+)$).*

# Capítulo 3

# Operaciones en $\mathcal{H}_\mu$ y $\mathcal{H}'_\mu$

## 3.1 El espacio $\mathcal{O}$

En esta sección estudiaremos algunas propiedades de un espacio de multiplicadores de los espacios $\mathcal{H}_\mu$ y $\mathcal{H}'_\mu$. Sea $\mathcal{O}$ el espacio de las funciones $\theta \in C^\infty(I\!R^n_+)$ que satisfacen que para cada multiíndice $k$ existe un número entero $n_k$ tal que

$$|(1+|x|^2)^{n_k}\, T^k\theta| < \infty \quad \forall x \in I\!R^n_+.$$

**Observación 3.1.1.** *El producto de dos miembros de $\mathcal{O}$ es un miembro de $\mathcal{O}$.*

En efecto, si $\theta, \theta' \in \mathcal{O}$ y $k$ es un multiíndice, $k = (k_1, \ldots, k_n)$, entonces por fórmula (1.3) del Capítulo 1 se tiene que

$$T^k\{\theta.\theta'\} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} T^j\theta.T^{k-j}\theta'. \tag{3.1}$$

Dado que $\theta \in \mathcal{O}$, para cada multiíndice $j$, $j = (j_1, \ldots, j_n)$ existen enteros $n_j$ tales que

$$|(1+|x|^2)^{n_j}\, T^j\theta| < \infty \quad \forall x \in I\!R^n_+.$$

De la misma forma, para $\theta'$, existen enteros $n'_{k-j}$, tales que

$$|(1+|x|^2)^{n'_{k-j}}\, T^{k-j}\theta'| < \infty \quad \forall x \in I\!R^n_+.$$

Elegimos entonces un entero $m_k$ con $m_k < \min_{0\leq j\leq k}\{n_j + n'_{k-j}\}$ con lo cual $m_k - (n_j + n'_{k-j}) = r_j$ con $r_j < 0$, luego,

$$|(1+|x|^2)^{m_k}T^k\{\theta.\theta'\}| = \left|\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}|(1+|x|^2)^{m_k}T^j\theta.T^{k-j}\theta'\right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}|(1+|x|^2)^{r_j}||(1+|x|^2)^{n_j}T^j\theta|.|(1+|x|^2)^{n'_{k-j}}T^{k-j}\theta'|,$$

y esta última expresión resulta acotada por la elección de $n_j$ y $n'_{k-j}$ y por ser $r_j < 0$, de donde $\theta.\theta' \in \mathcal{O}$.

**Observación 3.1.2.** *Si $\theta \in \mathcal{O}$ y $\phi \in \mathcal{H}_\mu$ entonces $\theta\phi \in \mathcal{H}_\mu$.*

Consideremos $\theta \in \mathcal{O}$ , $\phi \in \mathcal{H}_\mu$ y $m, k$ multiíndices. Aplicando (1.3) obtenemos,

$$\left|x^m T^k\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\theta\phi\}\right| = \left|x^m\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}T^j\theta.T^{k-j}\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi\}\right|.$$

Para cada $j$ elijamos $n_j$ entero tal que $|(1+|x|^2)^{n_j}\,T^j\theta| < \infty \quad \forall x \in I\!R^n_+$. Luego,

$$\left|x^m T^k\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\theta\phi\}\right| =$$

$$= \left|x^m\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(1+|x|^2)^{n_j}T^j\theta.(1+|x|^2)^{-n_j}T^{k-j}\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi\}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left|(1+|x|^2)^{n_j}T^j\theta\right|\ \left|(1+|x|^2)^{-n_j}x^m T^{k-j}\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi\}\right|.$$

Observando la última expresión, vemos que si para algún $j$, $n_j$ es positivo o cero, entonces $\left|(1+|x|^2)^{-n_j}\right| \leq 1$, de donde para esos $j$,

$$\left|(1+|x|^2)^{-n_j}x^m T^{k-j}\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi\}\right| \leq \gamma^\mu_{m,k-j}(\phi).$$

Para los $n_j$ negativos $(-n_j > 0)$, existe una familia finita de multiíndices $\Gamma_j$ (depende de $n_j$) tal que

$$\left|(1+|x|^2)^{-n_j}x^mT^{k-j}\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi\}\right| \leq \sum_{\alpha_j\in\Gamma_j}\left|x^{\alpha_j}T^{k-j}\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi\}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{\alpha_j\in\Gamma_j}\gamma^{\mu}_{\alpha_j,k-j}(\phi).$$

Finalmente, obtenemos que

$$\left|x^mT^k\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\theta\phi\}\right| \leq \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}C_j\left(\sum_{\alpha_j\in\Gamma_j}\gamma^{\mu}_{\alpha_j,k-j}(\phi)\right), \tag{3.2}$$

donde $C_j$ satisfacen que $\left|(1+|x|^2)^{n_j}T^j\theta\right| < C_j$ para $0 \leq j \leq k$. Entonces $\theta\phi \in \mathcal{H}_\mu$.

**Lema 3.1.1.** *Sea $\theta \in \mathcal{O}$, entonces el operador $\phi \mapsto \theta\phi$ es continuo de $\mathcal{H}_\mu$ en sí mismo. Además su operador adjunto $f \mapsto \theta f$ definido sobre $\mathcal{H}'_\mu$ por:*

$$\langle\theta f,\phi\rangle = \langle f,\theta\phi\rangle \quad f\in\mathcal{H}'_\mu,\ \theta\in\mathcal{O},\ \phi\in\mathcal{H}_\mu,$$

*es un operador lineal y continuo de $\mathcal{H}'_\mu$ en sí mismo.*

**Demostración:** La continuidad del operador $\phi \mapsto \theta\phi$ se deduce directamente de la desigualdad (3.2). De ([10], §1.10, t.1.10-1) obtenemos la continuidad del operador adjunto.

□

**Observación 3.1.3.** *El espacio $\mathcal{O}$ de multiplicadores de $\mathcal{H}_\mu$ y $\mathcal{H}'_\mu$ es un espacio vectorial topológico y de Hausdorff.*

En efecto, si definimos en $\mathcal{O}$ la familia de seminormas,

$$\{p^{\mu}_{m,k,B} : m,k \in I\!N_0^n,\ B\in\mathcal{B}_\mu\},$$

donde $\mathcal{B}_\mu$ es la clase de todos los subconjuntos acotados de $\mathcal{H}_\mu$ y

$$p^{\mu}_{m,k,B}(\theta) = \sup_{\phi\in B}\gamma^{\mu}_{m,k}(\theta\phi), \quad (\theta\in\mathcal{O}), \tag{3.3}$$

y teniendo en cuenta la desigualdad (3.2), resulta

$$\gamma^{\mu}_{m,k}(\theta\phi) \leq \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} C_j \Big( \sum_{\alpha\in\Gamma_j} \gamma^{\mu}_{\alpha,k-j}(\phi) \Big), \tag{3.4}$$

para $\theta \in \mathcal{O}$, $\phi \in \mathcal{H}_\mu$, $m, k$ multiíndices y donde $C_j$ dependen de $\theta$ (y de j) y los $\Gamma_j$ son conjuntos finitos de multiíndices que dependen de $j$, $m$ y de $\theta$ (pero no de $\phi$). Luego, para $\phi$ perteneciente a un subconjunto acotado de $\mathcal{H}_\mu$, toda seminorma está acotada ([7], t. 1.37), con lo cual las seminormas (3.3) están bien definidas.

Probemos ahora que (3.3) forman una familia separada de seminormas. Para ello, consideremos el conjunto $B_0 \in \mathcal{B}_\mu$, $B_0 = \{\phi_0\}$ con $\phi_0 : I\!R^n_+ \to \mathbb{C}$, $\phi_0(x) = x^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$, entonces, $B_0$ es un conjunto acotado en $\mathcal{H}_\mu$. Veamos que $p^{\mu}_{m,0,B_0}$ es una norma. Sea $\theta \in \mathcal{O}$ tal que $p^{\mu}_{m,0,B_0}(\theta) = 0$, entonces

$$p^{\mu}_{m,0,B_0}(\theta) = \sup_{\phi\in B_0} \gamma^{\mu}_{m,0}(\theta\phi) = \gamma^{\mu}_{m,0}(\theta\phi_0) = \sup_{x\in I\!R^n_+} |x^m T^0\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\theta\phi_0\}| =$$

$$\sup_{x\in I\!R^n_+} |x^m e^{-\frac{|x|^2}{2}} \theta(x)| = 0\,,$$

de donde $\theta \equiv 0$ y $p^{\mu}_{m,0,B_0}$ es una norma en $\mathcal{O}$. Concluimos entonces que $\mathcal{O}$ es un espacio vectorial topológico de Hausdorff ([7], t. 1.12).

**Lema 3.1.2.** *Sean $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios de una variable que no tienen raíces en $0 \leq x < \infty$. Entonces $\frac{P(|x|^2)}{Q(|x|^2)} \in \mathcal{O}$ para $x = (x_1, \ldots, x_n) \in I\!R^n$.*

**Demostración:** Demostremos primero que $P(|x|^2) \in \mathcal{O}$. Sea $k \in I\!N^n_0$, $k = (k_1, \ldots, k_n)$, entonces

$$T_1\Big\{P(|x|^2)\Big\} = \Big(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\Big)\Big\{P(|x|^2)\Big\} = 2P'(|x|^2),$$

$$T_1^2\Big\{P(|x|^2)\Big\} = T_1\Big\{2P'(|x|^2)\Big\} = 2^2 P''(|x|^2);$$

en el paso $k_1$ se obtiene que

$$T_1^{k_1}\Big\{P(|x|^2)\Big\} = 2^{k_1} P^{(k_1)}(|x|^2);$$

además,

$$T_2^{k_2}T_1^{k_1}\Big\{P(|x|^2)\Big\} = 2^{k_1}2^{k_2}P^{(k_1+k_2)}(|x|^2),$$

luego,

$$T^k\Big\{P(|x|^2)\Big\} = T_n^{k_n}\dots T_1^{k_1}\Big\{P(|x|^2)\Big\} = 2^{|k|}P^{(|k|)}(|x|^2)$$

donde $P^{|k|}$ indica la derivada $|k|$-ésima del polinomio $P$. Entonces, dado $k$ un multiíndice, elijo $n_k > gr(P^{(|k|)})$, $n_k$ entero, y obtenemos que

$$\left|\frac{1}{(1+|x|^2)^{n_k}}\,2^{|k|}\,P^{(|k|)}(|x|^2)\right| < \infty,$$

con lo cual, $P(|x|^2) \in \mathcal{O}$. Demostremos ahora que $\frac{1}{Q(|x|^2)}$ $\quad \frac{1}{Q}(|x|^2) \in \mathcal{O}$. De la misma forma que antes resulta

$$T^k\left\{\frac{1}{Q}(|x|^2)\right\} = 2^{|k|}\left(\frac{1}{Q}\right)^{|k|}(|x|^2).$$

La derivada $|k|$-ésima de $\frac{1}{Q}$ tiene la forma $\frac{N}{Q^{2^{|k|}}}$ donde $gr(N) < gr(Q^{2^{|k|}})$ y por hipótesis $Q$ no tiene raíces en $[0,\infty)$ con lo cual se deduce que $\frac{1}{Q(|x|^2)} \in \mathcal{O}$, y por la Observación 3.1.1 se concluye que $\frac{P(|x|^2)}{Q(|x|^2)} \in \mathcal{O}$.

□

**Lema 3.1.3.** *Para todo $r = (r_1,\dots,r_n)$ con $r_i \in \mathbb{N}_0 \cup \mathbb{N}^-$ y $\mu \in \mathbb{R}^n$, la función $h : \mathcal{H}_\mu \to \mathcal{H}_{\mu+r}$ tal que $h(\phi) = x^r\phi$ es un isomorfismo (sobreyectivo). Consecuentemente, el operador $h' : \mathcal{H}'_{\mu+r} \to \mathcal{H}'_\mu$, dado por $h'(f) = x^r f$ para $f \in \mathcal{H}'_{\mu+r}$, $x^r f \in \mathcal{H}'_\mu$ definido por*

$$(x^r f, \phi) = (f, x^r\phi), \quad \forall\phi \in \mathcal{H}_\mu,$$

*es un isomorfismo (sobreyectivo).*

**Demostración:** Sea $\phi \in \mathcal{H}_\mu$, $m$ y $k$ multiíndices, entonces

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n_+}\left|x^m T^k\{x^{-(\mu+r)-\frac{1}{2}}x^r\phi(x)\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n_+}\left|x^m T^k\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)\right| < \infty,$$

por lo tanto,

$$\gamma_{m,k}^{\mu+r}(x^r\phi) = \gamma_{m,k}^{\mu}(\phi); \tag{3.5}$$

luego $x^r f \in \mathcal{H}_{\mu+r}$. Además, por (3.5), $h$ es continua. La función $h^{-1} : \mathcal{H}_{\mu+r} \rightarrow \mathcal{H}_\mu$ definida por $h^{-1}(\phi) = x^{-r}\phi$ también es continua, con lo cual queda probado que $h$ es un isomorfismo. Se concluye que $h'$ también es un isomorfismo por ([10], §1.10, t. 1.10-2).

□

## 3.2 Los operadores $N_{\mu,i}$ y $M_{\mu,i}$

Sean $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ con $\mu_i \in I\!R$, $i = 1, \ldots, n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Definimos los operadores diferenciales:

- $N_{\mu,i} = x_i^{\mu_i+\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x_i} x_i^{-\mu_i-\frac{1}{2}}$,
- $M_{\mu,i} = x_i^{-\mu_i-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x_i} x_i^{\mu_i+\frac{1}{2}}$,

donde,

$$N_{\mu,i}\phi = x_i^{\mu_i+\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{x_i^{-\mu_i-\frac{1}{2}}\phi(x)\right\},$$

$$M_{\mu,i}\phi = x_i^{-\mu_i-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{x_i^{\mu_i+\frac{1}{2}}\phi(x)\right\}.$$

Definimos también el operador integral $N_{\mu,i}^{-1}$, de la siguiente forma:

- $N_{\mu,i}^{-1}\phi = x_i^{\mu_i+\frac{1}{2}} \int_\infty^{x_i} t^{-\mu_i-\frac{1}{2}}\phi(x_1, \ldots, t, \ldots, x_n)\, dt.$

**Lema 3.2.1.** *Los operadores $N_{\mu,i} : \mathcal{H}_\mu \rightarrow \mathcal{H}_{\mu+e_i}$ son lineales y continuos. Resultan ser también isomorfismos (sobreyectivos) con inversa $N_{\mu,i}^{-1}$.*

**Demostración:** Sea $\phi \in \mathcal{H}_\mu$, veamos que $N_{\mu,i}\phi \in \mathcal{H}_{\mu+e_i}$. Observemos primero lo siguiente:

$$N_{\mu,i}\phi = x_i^{\mu_i+\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{x_i^{-\mu_i-\frac{1}{2}}\phi(x)\right\} = x^{\mu+\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)\right\}.$$

Sean $m, k$ multiíndices, entonces

$$\gamma_{m,k}^{\mu+e_i}(N_{\mu,i}\phi) \quad \sup_{x\in I\!R^n_+}\left|x^m T^k\left\{x^{-(\mu+e_i)-\frac{1}{2}}N_{\mu,i}\phi\right\}\right| =$$

$$= \sup_{x\in I\!R^n_+}\left|x^m T^k\left\{x^{-(\mu+e_i)-\frac{1}{2}}x^{\mu+\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)\right\}\right\}\right| =$$

$$\sup_{x\in I\!R^n_+}\left|x^m T_n^{k_n}\dots T_1^{k_1}\left\{x_i^{-1}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)\right\}\right\}\right| =$$

$$= \sup_{x\in I\!R^n_+}\left|x^m T_n^{k_n}\dots T_1^{k_1}\left\{T_i\left\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)\right\}\right\}\right|.$$

Por la Observación 1.2.1, concluimos

$$\gamma_{m,k}^{\mu+e_i}(N_{\mu,i}\phi) = \sup_{x\in I\!R^n_+}\left|x^m T_n^{k_n}\dots T_i^{k_i+1}\dots T_1^{k_1}\left\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)\right\}\right| =$$

$$= \gamma_{m,k+e_i}^{\mu}(\phi).$$

Luego, $N_{\mu,i}\phi \in \mathcal{H}_{\mu+e_i}$ y de la igualdad anterior deducimos la continuidad de $N_{\mu,i}$.
Analicemos ahora $N_{\mu,i}^{-1}$. Por definición vemos que $N_{\mu,i}^{-1}$ está definido para toda $\phi \in \mathcal{H}_\mu$ y para todo $\mu \in I\!R^n$. Veamos entonces que el operador lineal $N_{\mu,i}^{-1} : \mathcal{H}_{\mu+e_i} \to \mathcal{H}_\mu$ es continuo. Para ello, hagamos primero la siguiente observación:

$$N_{\mu,i}^{-1}\phi = x_i^{\mu_i+\frac{1}{2}}\int_\infty^{x_i} t^{-\mu_i-\frac{1}{2}}\phi(x_1,\dots,t,\dots,x_n)\,dt =$$

$$= x^{\mu+\frac{1}{2}}\int_\infty^{x_i} x_1^{-\mu_1-\frac{1}{2}}\dots t^{-\mu_i-\frac{1}{2}}\dots x_n^{-\mu_n-\frac{1}{2}}\phi(x_1,\dots,t,\dots,x_n)\,dt.$$

Sea $\phi \in \mathcal{H}_{\mu+e_i}$ y sean $m, k$ multiíndices con $k \geq e_i$, observemos que,

$$T^k\Big\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}N_{\mu,i}^{-1}\phi\Big\} =$$

$$= T^k\Big\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}x^{\mu+\frac{1}{2}}\int_{\infty}^{x_i} x_1^{-\mu_1-\frac{1}{2}}\dots t^{-\mu_i-\frac{1}{2}}\dots x_n^{-\mu_n-\frac{1}{2}}\phi(x_1,\dots,t,\dots,x_n)\,dt\Big\} =$$

$$= T^{k-e_i}T_i\Big\{\int_{\infty}^{x_i} x_1^{-\mu_1-\frac{1}{2}}\dots t^{-\mu_i-\frac{1}{2}}\dots x_n^{-\mu_n-\frac{1}{2}}\phi(x_1,\dots,t,\dots,x_n)\,dt\Big\} =$$

$$= T^{k-e_i}\left\{x_i^{-1}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big\{\int_{\infty}^{x_i} x_1^{-\mu_1-\frac{1}{2}}\dots t^{-\mu_i-\frac{1}{2}}\dots x_n^{-\mu_n-\frac{1}{2}}\phi(x_1,\dots,t,\dots,x_n)\,dt\Big\}\right\} =$$

$$= T^{k-e_i}\Big\{x_i^{-1}x_1^{-\mu_1-\frac{1}{2}}\dots x_i^{-\mu_i-\frac{1}{2}}\dots x_n^{-\mu_n-\frac{1}{2}}\phi(x_1,\dots,x_n)\Big\} =$$

$$= T^{k-e_i}\Big\{x^{-e_i}x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)\Big\} = T^{k-e_i}\Big\{x^{-(\mu+e_i)-\frac{1}{2}}\phi(x)\Big\}.$$

Luego,

$$\gamma_{m,k}^{\mu}(N_{\mu,i}^{-1}\phi) = \sup_{x\in \mathbb{R}_+^n}\Big|x^mT^k\Big\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}N_{\mu,i}^{-1}\phi\Big\}\Big| =$$

$$= \sup_{x\in \mathbb{R}_+^n}\Big|x^mT^{k-e_i}\Big\{x^{-(\mu+e_i)-\frac{1}{2}}\phi(x)\Big\}\Big| = \gamma_{m,k-e_i}^{\mu+e_i}(\phi).$$

Consideremos ahora el caso en que $k$ no verifique $k \geq e_i$, es decir el caso en que $k = (k_1,\dots,k_n)$ verifique que $k_i = 0$. Entonces,

$$\gamma_{m,k}^{\mu}(N_{\mu,i}^{-1}\phi) = \sup_{x\in \mathbb{R}_+^n}\Big|x^mT^k\Big\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}N_{\mu,i}^{-1}\phi\Big\}\Big| =$$

$$= \sup_{x\in \mathbb{R}_+^n}\Big|x^mT^k\Big\{\int_{\infty}^{x_i} x_1^{-\mu_1-\frac{1}{2}}\dots t^{-\mu_i-\frac{1}{2}}\dots x_n^{-\mu_n-\frac{1}{2}}\phi(x_1,\dots,t,\dots,x_n)\,dt\Big\}\Big|.$$

Para simplificar la notación llamemos $x_t = (x_1,\dots,t,\dots,x_n)$ y observemos que el operador $T^k$ puede ser introducido dentro de la integral, por ser la función $\phi$ junto con todas sus derivadas rápidamente decreciente en el infinito (recordar que $k_i = 0$ con lo cual no interviene la derivación parcial respecto a $x_i$). Luego, en la última igualdad se obtiene:

$$\gamma^{\mu}_{m,k}(N^{-1}_{\mu,i}\phi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n_+}\left|x^m T^k\left\{\int_{\infty}^{x_i} x_t^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x_t)\,dt\right\}\right| =$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}^n_+}\left|\int_{\infty}^{x_i} x^m T^k\left\{x_t^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x_t)\right\}dt\right| \le \sup_{x\in\mathbb{R}^n_+}\left|\int_{\infty}^{x_i} x_t^m t T^k\left\{x_t^{-\mu-\frac{1}{2}}t^{-1}\phi(x_t)\right\}dt\right|. \tag{3.6}$$

Observemos que,

$$x_t^{-\mu-\frac{1}{2}}t^{-1} = x_1^{-\mu_1-\frac{1}{2}}\dots t^{-\mu_i-\frac{1}{2}}t^{-1}\dots x_n^{-\mu_n-\frac{1}{2}} = x_t^{-(\mu+e_i)-\frac{1}{2}}. \tag{3.7}$$

Por otro lado,

$$x_t^m t = x_1^{m_1}\dots t^{m_i+1}\dots x_n^{m_n},$$

y teniendo en cuenta que

$$t^{m_i+1} = \frac{t^{m_i+1}+t^{m_i+3}}{1+t^2},$$

resulta

$$x_t^m t = \frac{1}{1+t^2}(x_1^{m_1}\dots t^{m_i+1}\dots x_n^{m_n} + x_1^{m_1}\dots t^{m_i+3}\dots x_n^{m_n}) =$$

$$= \frac{1}{1+t^2}(x_t^{m+e_i}+x_t^{m+3e_i}). \tag{3.8}$$

Aplicando las igualdades (3.7) y (3.8) en la desigualdad (3.6), obtenemos

$$\gamma^{\mu}_{m,k}(N^{-1}_{\mu,i}\phi) \le \sup_{x\in\mathbb{R}^n_+}\left|\int_{\infty}^{x_i}\frac{1}{1+t^2}(x_t^{m+e_i}+x_t^{m+3e_i})T^k\left\{x_t^{-(\mu+e_i)-\frac{1}{2}}\phi(x_t)\right\}dt\right| \le$$

$$\le \sup_{x\in\mathbb{R}^n_+}\left|\int_{\infty}^{x_i}\frac{1}{1+t^2}\left|x_t^{m+e_i}T^k\left\{x_t^{-(\mu+e_i)-\frac{1}{2}}\phi(x_t)\right\}\right|+\right.$$

$$+\left|x_t^{m+3e_i}T^k\left\{x_t^{-(\mu+e_i)-\frac{1}{2}}\phi(x_t)\right\}\right|dt \leq \sup_{x\in \mathbb{R}^n_+}\left[\gamma^{\mu+e_i}_{m+e_i,k}(\phi)+\gamma^{\mu+e_i}_{m+3e_i,k}(\phi)\right]\int_\infty^{x_i}\frac{1}{1+t^2}dt.$$

Dado que $\int_\infty^{x_i}\frac{1}{1+t^2}\,dt < \infty$, entonces

$$\gamma^{\mu}_{m,k}(N^{-1}_{\mu,i}\phi) \leq C\left[\gamma^{\mu+e_i}_{m+e_i,k}(\phi) + \gamma^{\mu+e_i}_{m+3e_i,k}(\phi)\right], \tag{3.9}$$

para todo multiíndice $k$ que no verifique $k \geq e_i$. Anteriormente habíamos obtenido que para todo $k \geq e_i$ se verificaba que

$$\gamma^{\mu}_{m,k}(N^{-1}_{\mu,i}\phi) = \gamma^{\mu+e_i}_{m,k-e_i}(\phi); \tag{3.10}$$

concluimos entonces de (3.9) y (3.10) que $N^{-1}_{\mu,i}\phi \in \mathcal{H}_\mu$ y que $N^{-1}_{\mu,i}$ es un operador continuo.
Por último veamos que $N^{-1}_{\mu,i}N_{\mu,i}\phi = \phi$, para todo $\phi \in \mathcal{H}_\mu$. Sea $\phi \in \mathcal{H}_\mu$,

$$N^{-1}_{\mu,i}N_{\mu,i}\phi = x_i^{\mu_i+\frac{1}{2}}\int_\infty^{x_i} t^{-\mu_i-\frac{1}{2}}N_{\mu,i}\phi(x_t)\,dt =$$

$$x_i^{\mu_i+\frac{1}{2}}\int_\infty^{x_i} t^{-\mu_i-\frac{1}{2}}t^{\mu_i+\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial t}\left\{t^{-\mu_i-\frac{1}{2}}\phi(x_t)\right\}dt = x_i^{\mu_i+\frac{1}{2}}\int_\infty^{x_i}\frac{\partial}{\partial t}\left\{t^{-\mu_i-\frac{1}{2}}\phi(x_t)\right\}dt =$$

$$= x_i^{\mu_i+\frac{1}{2}}\left\{t^{-\mu_i-\frac{1}{2}}\phi(x_t)\right\}\Big|_\infty^{x_i} = \phi(x),$$

donde hemos tenido en cuenta que $\phi$ es rápidamente decreciente en el infinito. Finalmente el lema queda demostrado.

$\square$

**Lema 3.2.2.** *Los operadores lineales $M_{\mu,i} : \mathcal{H}_{\mu+e_i} \to \mathcal{H}_\mu$ son continuos.*

**Demostración:** Sea $\phi \in \mathcal{H}_{\mu+e_i}$, y sean $m, k$ multiíndices. Observemos primero que

$$M_{\mu,i}\phi = x_i^{-\mu_i-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{x_i^{\mu_i+\frac{1}{2}}\phi(x)\right\} = x^{-\mu-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{x^{\mu+\frac{1}{2}}\phi(x)\right\}.$$

Luego,

$$\gamma^{\mu}_{m,k}(M_{\mu,i}\phi) = \sup_{x\in \mathbb{R}^n_+}\left|x^m T^k\left\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}M_{\mu,i}\phi\right\}\right| =$$

$$= \sup_{x\in \mathbb{R}^n_+}\left|x^m T^k\left\{x^{-2\mu-1}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{x^{\mu+\frac{1}{2}}\phi(x)\right\}\right\}\right|. \tag{3.11}$$

Observemos que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{x^{\mu+\frac{1}{2}}\phi(x)\right\} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{x^{2\mu-\mu+e_i-e_i+1-\frac{1}{2}}\phi(x)\right\} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{x^{2\mu+e_i+1}x^{-(\mu+e_i)-\frac{1}{2}}\phi(x)\right\} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{x^{2\mu+e_i+1}\right\}x^{-(\mu+e_i)-\frac{1}{2}}\phi(x) + x^{2\mu+e_i+1}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{x^{-(\mu+e_i)-\frac{1}{2}}\phi(x)\right\}. \tag{3.12}$$

Además es

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{x^{2\mu+e_i+1}\right\} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{x_1^{2\mu_1+1}\ldots x_i^{2\mu_i+2}\ldots x_n^{2\mu_n+1}\right\} = (2\mu_i+2)x^{2\mu+1}$$

y reemplazando esta última igualdad en (3.12) resulta

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{x^{\mu+\frac{1}{2}}\phi(x)\right\} = (2\mu_i+2)x^{2\mu+1}x^{-(\mu+e_i)-\frac{1}{2}}\phi(x)+x_i x^{2\mu+1}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{x^{-(\mu+e_i)-\frac{1}{2}}\phi(x)\right\}.$$

Reemplazamos esta última expresión en (3.11), tenemos

$$\gamma^{\mu}_{m,k}(M_{\mu,i}\phi) =$$

$$= \sup_{x\in \mathbb{R}^n_+}\left|x^m T^k\left\{(2\mu_i+2)x^{-(\mu+e_i)-\frac{1}{2}}\phi(x) + x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{x^{-(\mu+e_i)-\frac{1}{2}}\phi(x)\right\}\right\}\right| \leq$$

$$\leq (2\mu_i + 2)\gamma_{m,k}^{\mu+e_i}(\phi) + \sup_{x\in \mathbb{R}_+^n}\left| x^m T^k\left\{ x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{ x^{-(\mu+e_i)-\frac{1}{2}}\phi(x)\right\}\right\}\right|. \tag{3.13}$$

Analicemos ahora el último término en (3.13). Tenemos

$$T^k\left\{ x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{ x^{-(\mu+e_i)-\frac{1}{2}}\phi(x)\right\}\right\} = T^k\left\{ x_i^2\left(x_i^{-1}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left\{ x^{-(\mu+e_i)-\frac{1}{2}}\phi(x)\right\}\right\} =$$

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} T^{k-j}\left\{ T_i\left\{ x^{-(\mu+e_i)-\frac{1}{2}}\phi(x)\right\}\right\} T^j\{x_i^2\}, \tag{3.14}$$

donde hemos aplicado la fórmula (1.3) del Capítulo 1. Si analizamos los términos $T^j\{x_i^2\} = T_n^{j_n}\dots T_1^{j_1}\{x_i^2\}$, vemos que estos son no nulos sólo en el caso en que $j_r = 0$ para $r \neq i$ y $j_i = 0, 1$. De (3.14), obtenemos

$$T^k\left\{ x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{ x^{-(\mu+e_i)-\frac{1}{2}}\phi(x)\right\}\right\} =$$

$$= \binom{k}{0} T^k T_i\left\{ x^{-(\mu+e_i)-\frac{1}{2}}\phi(x)\right\}.T^0\{x_i^2\} + \binom{k}{e_i} T^{k-e_i} T_i\left\{ x^{-(\mu+e_i)-\frac{1}{2}}\phi(x)\right\}.T^{e_i}\{x_i^2\} =$$

$$x_i^2 T^{k+e_i}\left\{ x^{-(\mu+e_i)-\frac{1}{2}}\phi(x)\right\} + 2k_i T^k\left\{ x^{-(\mu+e_i)-\frac{1}{2}}\phi(x)\right\}.$$

Reemplazando la última expresión en (3.13), obtenemos la siguiente desigualdad

$$\gamma_{m,k}^{\mu}(M_{\mu,i}\phi) \leq (2\mu_i + 2)\gamma_{m,k}^{\mu+e_i}(\phi) +$$

$$+ \sup_{x\in \mathbb{R}_+^n}\left| x^m\left[ x_i^2 T^{k+e_i}\left\{ x^{-(\mu+e_i)-\frac{1}{2}}\phi(x)\right\} + 2k_i T^k\left\{ x^{-(\mu+e_i)-\frac{1}{2}}\phi(x)\right\}\right]\right| \leq$$

$$\leq (2\mu_i + 2)\gamma_{m,k}^{\mu+e_i}(\phi) + \sup_{x\in \mathbb{R}_+^n}\left| x^{m+2e_i} T^{k+e_i}\left\{ x^{-(\mu+e_i)-\frac{1}{2}}\phi(x)\right\}\right| +$$

$$+\sup_{x\in \mathbb{R}^n_+}\left|2k_i x^m T^k\left\{x^{-(\mu+e_i)-\frac{1}{2}}\phi(x)\right\}\right| =$$

$$= (2\mu_i + 2)\gamma^{\mu+e_i}_{m,k}(\phi) + \gamma^{\mu+e_i}_{m+2e_i,k+e_i}(\phi) + 2k_i\gamma^{\mu+e_i}_{m,k}(\phi) =$$

$$= (2\mu_i + 2k_i + 2)\gamma^{\mu+e_i}_{m,k}(\phi) + \gamma^{\mu+e_i}_{m+2e_i,k+e_i}(\phi);$$

de donde, finalmente, concluimos que $M_{\mu,i}\phi \in \mathcal{H}_\mu$ y que el operador $M_{\mu,i}$ es continuo.

□

**Observación 3.2.1.**

- *El operador $M_{\mu,i}N_{\mu,i} : \mathcal{H}_\mu \to \mathcal{H}_\mu$ es continuo y verifica :*

$$M_{\mu,i}N_{\mu,i}\phi = \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \left(\frac{4\mu_i^2 - 1}{4x_i^2}\right)\right]\phi\,,$$

  *para $\phi \in \mathcal{H}_\mu$.*

- *El operador $S_\mu = \sum_{i=1}^n M_{\mu,i}N_{\mu,i} : \mathcal{H}_\mu \to \mathcal{H}_\mu$ también es continuo y verifica:*

$$S_\mu\phi = \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum_{i=1}^n\left(\frac{4\mu_i^2 - 1}{4x_i^2}\right)\right]\phi\,,$$

  *para $\phi \in \mathcal{H}_\mu$.*

## 3.3 Los operadores $N_{\mu,i}$ y $M_{\mu,i}$ generalizados

Hasta ahora definimos los operadores:

$$N_{\mu,i} : \mathcal{H}_\mu \to \mathcal{H}_{\mu+e_i},$$

$$M_{\mu,i} : \mathcal{H}_{\mu+e_i} \to \mathcal{H}_\mu,$$

y vimos que son operadores lineales y continuos, con lo cual podemos deducir que los operadores adjuntos:

$$N'_{\mu,i} : \mathcal{H}'_{\mu+e_i} \rightarrow \mathcal{H}'_{\mu},$$

$$M'_{\mu,i} : \mathcal{H}'_{\mu} \rightarrow \mathcal{H}'_{\mu+e_i},$$

definidos por:

$$(N'_{\mu,i}f, \phi) = (f, N_{\mu,i}\phi), \quad \text{para } \phi \in \mathcal{H}_{\mu}, f \in \mathcal{H}'_{\mu+e_i}$$

y

$$(M'_{\mu,i}g, \varphi) = (g, M_{\mu,i}\varphi), \quad \text{para } \varphi \in \mathcal{H}_{\mu+e_i}, g \in \mathcal{H}'_{\mu},$$

son lineales y continuos ([10], t.1.10-1). Veamos ahora que $N_{\mu,i}$ puede definirse sobre $\mathcal{H}'_{\mu}$ como el operador adjunto de $-M_{\mu,i}$, y de la misma forma $M_{\mu,i}$ puede definirse sobre $\mathcal{H}'_{\mu+e_i}$ como el operador adjunto de $-N_{\mu,i}$. Para ello, probaremos que $N_{\mu,i}$ y $-M'_{\mu,i}$ coinciden sobre ciertas distribuciones regulares. Si $f \in \mathcal{D}(I\!R^n_+)$, entonces puede ser considerada como una distribución regular en $\mathcal{H}'_{\mu}$ por el Lema 2.2.1 del Capítulo 2. Sean $f \in \mathcal{D}(I\!R^n_+)$ y $\phi \in \mathcal{H}_{\mu+e_i}$, luego resulta

$$(-M'_{\mu,i}f, \phi) = (f, -M_{\mu,i}\phi) = \int_{I\!R^n_+} -f M_{\mu,i}\phi \, dx =$$

$$\int_{I\!R^n_+} -f(x) x_i^{-\mu_i-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{x_i^{\mu_i+\frac{1}{2}}\phi(x)\right\} dx =$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \left[\int_0^\infty -f(x_1,...,x_n) x_i^{-\mu_i-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{x_i^{\mu_i+\frac{1}{2}}\phi(x_1,...,x_n)\right\} dx_i\right] dx_1...dx_n =$$

$$-\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left[ f(x_1,...,x_n)\phi(x_1,...,x_n)\Big|_0^\infty - \right.$$

$$\left. -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{f(x_1,...,x_n) x_i^{-\mu_i-\frac{1}{2}}\right\} x_i^{\mu_i+\frac{1}{2}}\phi(x_1,...,x_n)\, dx_i\right] dx_1...dx_n.$$

Dado que $sop(f) \subset I\!R^n_+$, entonces $f(0) = 0$, con lo cual $f(x)\phi(x)\Big|_0^\infty = 0$ ($\phi$ es rápidamente decreciente). Luego tenemos

$$(-M'_{\mu,i}f,\phi) = \int_{I\!R^n_+} x_i^{\mu_i+\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{f(x)x_i^{-\mu_i-\frac{1}{2}}\right\}\phi(x)dx =$$

$$= \int_{I\!R^n_+} N_{\mu,i}f\phi\, dx = (N_{\mu,i}f,\phi).$$

De la misma forma puede verse que $M_{\mu,i}$ es igual al operador adjunto de $-N_{\mu,i}$ sobre ciertas distribuciones regulares. Por consiguiente, podemos definir a $N_{\mu,i}$ y $M_{\mu,i}$ como operadores diferenciales generalizados sobre $\mathcal{H}'_\mu$ y $\mathcal{H}'_{\mu+e_i}$, respectivamente, de la siguiente forma:

$$N_{\mu,i} = -M'_{\mu,i}\,,$$

$$M_{\mu,i} = -N'_{\mu,i}\,.$$

Los operadores $N_{\mu,i}$ y $M_{\mu,i}$ como operadores diferenciales generalizados, son lineales y continuos. En el caso de $M_{\mu,i}$, es además un isomorfismo, es decir con operador inverso continuo, y se verifica que

$$M_{\mu,i}^{-1} = (-N'_{\mu,i})^{-1} = (-N_{\mu,i}^{-1})',$$

(cf. t. 1.10-2, [10]), y $N_{\mu,i}^{-1}$ es el operador inverso a $N_{\mu,i}$ definido en §1.2. Por la Observación 2.2.2 del Capítulo 2, $\mathcal{H}_\mu$ puede ser identificado con un subespacio de $\mathcal{H}'_\mu$ si $\mu \geq -\frac{1}{2}$. En este caso puede demostrarse que el operador generalizado $N_{\mu,i}$ cuando actúa sobre $\mathcal{H}_\mu$ coincide con el operador $N_{\mu,i}$ convencional, definido en §3.2. Esta demostración es similar al análisis del comportamiento de $-M'_{\mu,i}$ sobre $f \in \mathcal{D}(I\!R^n_+)$.

# Capítulo 4

# Transformada de Hankel en $\mathcal{H}_\mu$

## 4.1 Definición y propiedades

Definimos la transformada de Hankel n-dimensional como sigue:

**Definición 4.1.1.** *Sea $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n) \in I\!R^n$, $\mu \geq -\frac{1}{2}$, ($\mu_i \geq -\frac{1}{2}$ para $i = 1, ..., n$), $\phi \in \mathcal{H}_\mu$, entonces*

$$(h_\mu \phi)(y) = \int_{I\!R^n_+} \phi(x_1, ..., x_n) \prod_{i=1}^{n} \{ \sqrt{x_i y_i} J_{\mu_i}(x_i y_i) \} \, dx_1 ... dx_n, \tag{4.1}$$

*donde $J_{\mu_i}$ es la función de Bessel de primera clase y de orden $\mu_i$ dada por la fórmula*

$$J_{\mu_i}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\frac{z}{2})^{\mu_i + 2k}}{k! \Gamma(\mu_i + k + 1)}$$

Por Corolario 1.2.1 del Capítulo 1, si $\phi \in \mathcal{H}_\mu$ y $\mu \geq -\frac{1}{2}$ entonces $\phi \in L^1(I\!R^n_+)$. Además teniendo en cuenta las siguientes propiedades:

$$\sqrt{x_i y_i} J_{\mu_i}(x_i y_i) = O(x_i^{\mu_i + \frac{1}{2}}), \quad \text{cuando } x_i \to 0^+ \text{ , } \forall i = 1, ..., n \text{ ,} \tag{4.2}$$

y el desarrollo asintótico (ver [8], §4, capítulo 9):

$$\sqrt{x}J_\mu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(x - \frac{\mu}{2}\pi - \frac{\pi}{4}), \quad x \in I\!R_+, x \to \infty,\ \mu \in I\!R, \tag{4.3}$$

entonces

$$|\prod_{i=1}^{n}\{\sqrt{x_iy_i}J_{\mu_i}(x_iy_i)\}| < C,$$

para $(x_1, ..., x_n) \in I\!R^n_+$. Luego $h_\mu$ está bien definida.

Veamos ahora algunas propiedades de $h_\mu$.

**Lema 4.1.1.** *Sea $\mu \geq -\frac{1}{2}$, sea $\phi \in \mathcal{H}_\mu$ y $e_1, ..., e_n$ la base canónica de $I\!R^n$, entonces:*

*(a)* $h_{\mu+e_i}(-x_i\phi) = N_{\mu,i}h_\mu(\phi)$,

*(b)* $h_{\mu+e_i}(N_{\mu,i}\phi) = -y_ih_\mu(\phi)$,

*(c)* $h_\mu(-x_i^2\phi) = M_{\mu,i}N_{\mu,i}h_\mu(\phi)$,

*(d)* $h_\mu(M_{\mu,i}N_{\mu,i}\phi) = -y_i^2h_\mu(\phi)$.

*Si $\phi \in \mathcal{H}_{\mu+e_i}$, entonces*

*(e)* $h_\mu(x_i\phi) = M_{\mu,i}h_{\mu+e_i}(\phi)$,

*(f)* $h_\mu(M_{\mu,i}\phi) = y_ih_{\mu+e_i}(\phi)$.

**Demostración:**

(a) Sea $\phi \in \mathcal{H}_\mu$, $(h_\mu\phi)(y) = \Phi(y)$, entonces

$$N_{\mu,i}h_\mu\phi = N_{\mu,i}\Phi = y_i^{\mu_i+\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial y_i}\left\{y_i^{-\mu_i-\frac{1}{2}}\Phi(y)\right\} =$$

$$= y_i^{\mu_i+\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial y_i}\left\{y_i^{-\mu_i-\frac{1}{2}}\int_{I\!R^n_+}\phi(x)\prod_{j=1}^{n}\{\sqrt{x_jy_j}J_{\mu_j}(x_jy_j)\}\,dx,\right\} =$$

$$= y_i^{\mu_i+\frac{1}{2}}\int_{I\!R^n_+}\phi(x) - x_i^{\frac{3}{2}}y_i^{-\mu_i}J_{\mu_{i+1}}(x_iy_i)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\{\sqrt{x_jy_j}J_{\mu_j}(x_jy_j)\}\,dx =$$

$$= y_i^{\mu_i+\frac{1}{2}} \int_{I\!R^n_+} -x_i\phi(x) y_i^{-\mu_i-\frac{1}{2}} \sqrt{x_iy_i} J_{\mu_i+1}(x_iy_i) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \{\sqrt{x_jy_j} J_{\mu_j}(x_jy_j)\} dx, \quad (4.4)$$

donde hemos utilizado la fórmula $\frac{d}{dz}(z^{-\nu}J_\nu) = -z^{-\nu}J_{\nu+1}$ ([9], §17.21), para calcular

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left\{ y_i^{-\mu_i-\frac{1}{2}} \sqrt{x_iy_i} J_{\mu_i}(x_iy_i)\right\} =$$

$$= x_i^{\mu_i} x_i^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial y_i}\left\{ (x_iy_i)^{-\mu_i} J_{\mu_i}(x_iy_i)\right\} = -x_i^{\frac{3}{2}} y_i^{-\mu_i} J_{\mu_i+1}(x_iy_i).$$

Veamos que el procedimiento realizado en (4.4) es válido. Para ello estudiemos el último integrando de (4.4),

- $\sqrt{x_iy_i} J_{\mu_i+1}(x_iy_i) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \{\sqrt{x_jy_j} J_{\mu_j}(x_jy_j)\}$, está acotado en $I\!R^n_+$, por (4.2) y (4.3);
- $x_i\phi(x) \in L^1(I\!R^n_+)$, si $\mu \geq -\frac{1}{2}$, por estar acotada en el origen, como puede deducirse del Corolario 1.2.1 del Capítulo 1, y del hecho de ser $\phi$ rápidamente decreciente;
- la función $y_i^{-\mu_i-\frac{1}{2}}$ es acotada sobre compactos.

Deducimos entonces que la integral en (4.4) converge uniformemente sobre compactos, con lo cual es válido el procedimiento de derivación bajo el signo integral. Finalmente, obtenemos de (4.4),

$$N_{\mu,i} h_\mu \phi = h_{\mu+e_i}(-x_i\phi).$$

(b) Si $\phi \in \mathcal{H}_\mu$ entonces $N_{\mu,i}\phi \in \mathcal{H}_{\mu+e_i}$, luego

$$h_{\mu+e_i}(N_{\mu,i}\phi) = \int_{I\!R^n_+} N_{\mu,i}\phi \sqrt{x_iy_i}\, J_{\mu_i+1}(x_iy_i) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \{\sqrt{x_jy_j} J_{\mu_j}(x_jy_j)\} dx =$$

$$\int_{I\!R^n_+} x_i^{\mu_i+\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x_i}\{x_i^{-\mu_i-\frac{1}{2}}\phi\} \sqrt{x_iy_i}\, J_{\mu_i+1}(x_iy_i) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \{\sqrt{x_jy_j}\, J_{\mu_j}(x_jy_j)\} dx =$$

$$= \int_0^\infty \quad \int_0^\infty \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \{\sqrt{x_jy_j}\, J_{\mu_j}(x_jy_j)\}.$$

$$\cdot\Big[\int_0^\infty x_i^{\mu_i+\frac{1}{2}}\sqrt{x_iy_i}\, J_{\mu_i+1}(x_iy_i)\frac{\partial}{\partial x_i}\{x_i^{-\mu_i-\frac{1}{2}}\phi\}dx_i\Big]dx_1...dx_{i-1}dx_{i+1}...dx_n. \quad (4.5)$$

Este procedimiento es válido debido a que la función

$$N_{\mu,i}\phi\,\sqrt{x_iy_i}\, J_{\mu_{i+1}}(x_iy_i)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\{\sqrt{x_jy_j}J_{\mu_j}(x_jy_j)\}$$

es integrable en $I\!R_+^n$ para todo $y\in I\!R_+^n$, pues $N_{\mu,i}\phi\in\mathcal{H}_{\mu+c_i}$ (rápidamente decreciente) y la función $\sqrt{x_iy_i}J_{\mu_{i+1}}(x_iy_i)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\{\sqrt{x_jy_j}J_{\mu_j}(x_jy_j)\}$ está acotada. Sea ahora

$$\int_0^\infty x_i^{\mu_i+\frac{1}{2}}\sqrt{x_iy_i}\, J_{\mu_i+1}(x_iy_i)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big\{x_i^{-\mu_i-\frac{1}{2}}\phi\Big\}dx_i =$$

$$= \sqrt{x_iy_i}\, J_{\mu_i+1}(x_iy_i)\phi(x_1,...,x_n)\Big|_{x_i\to 0}^{x_i\to\infty} -$$

$$-\int_0^\infty x_i^{-\mu_i-\frac{1}{2}}\phi(x_1,...,x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big\{x_i^{\mu_i+\frac{1}{2}}\sqrt{x_iy_i}\, J_{\mu_i+1}(x_iy_i)\Big\}dx_i =$$

$$-\int_0^\infty x_i^{-\mu_i-\frac{1}{2}}\phi(x_1,...,x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big\{x_i^{\mu_i+\frac{1}{2}}\sqrt{x_iy_i}\, J_{\mu_i+1}(x_iy_i)\Big\}dx_i.$$

Hemos utilizado las propiedades

$$\sqrt{x_iy_i}\, J_{\mu_i+1}(x_iy_i)\phi(x_1,...,x_n)\to 0 \quad \text{cuando } x_i\to\infty,$$

por (4.3) y por ser $\phi$ es rápidamente decreciente en el infinito, y

$$\sqrt{x_iy_i}\, J_{\mu_i+1}(x_iy_i)\phi(x_1,...,x_n)\to 0 \quad \text{cuando } x_i\to 0,$$

por (4.2) y por ser $\phi$ acotada en el origen si $\mu\geq-\frac{1}{2}$. Obtenemos entonces de (4.5) la siguiente igualdad

$$h_{\mu+c_i}(N_{\mu,i}\phi) = \int_0^\infty \quad \int_0^\infty \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\{\sqrt{x_jy_j}\, J_{\mu_j}(x_jy_j)\}\cdot$$

$$\cdot\Big[-\int_0^\infty x_i^{-\mu_i-\frac{1}{2}}\phi(x_1,...,x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big\{x_i^{\mu_i+\frac{1}{2}}\sqrt{x_iy_i}\, J_{\mu_i+1}(x_iy_i)\Big\}dx_i\Big]dx_1...dx_n.$$

Utilizando la fórmula $\frac{d}{dz}\{z^{\nu}J_{\nu}\} = z^{\nu}J_{\nu-1}$, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\{x_i^{\mu_i+\frac{1}{2}}\sqrt{x_iy_i}\,J_{\mu_i+1}(x_iy_i)\} = y_i^{-\mu_i-1+\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x_i}\{(x_iy_i)^{\mu_i+1}\,J_{\mu_i+1}(x_iy_i)\} =$$

$$= y_i^{\frac{3}{2}}x_i^{\mu_i+1}\,J_{\mu_i}(x_iy_i).$$

Luego, arribamos a la fórmula siguiente,

$$h_{\mu+e_i}(N_{\mu,i}\phi) = \int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\{\sqrt{x_jy_j}\,J_{\mu_j}(x_jy_j)\}\cdot$$

$$\cdot\left[-\int_0^{\infty}x_i^{-\mu_i-\frac{1}{2}}\phi(x_1,\dots,x_n)y_i^{\frac{3}{2}}x_i^{\mu_i+1}\,J_{\mu_i}(x_iy_i)dx_i\right]dx_1\dots dx_n =$$

$$= \int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}-\phi(x_1,\dots,x_n)y_i\prod_{j=1}^{n}\{\sqrt{x_jy_j}\,J_{\mu_j}(x_jy_j)\}dx_1\dots dx_n =$$

$$= -y_ih_{\mu}\phi.$$

(c) Sea $\phi\in\mathcal{H}_{\mu+e_i}$, y observemos que $x_i\phi\in\mathcal{H}_{\mu+2e_i}$ por el Lema 3.1.3 (Capítulo 3). Además $\mathcal{H}_{\mu+2e_i}\subset\mathcal{H}_{\mu}$ por la Proposición 1.2.2 (Capítulo 1), con lo cual $h_{\mu}(x_i\phi)$ tiene sentido. Sean $(h_{\mu+e_i}(\phi))(y) = \Phi(y)$, $x = (x_1,\dots,x_n)$ y $y = (y_1,\dots,y_n)$, entonces

$$M_{\mu,i}(h_{\mu+e_i}(\phi))(y) = M_{\mu,i}\Phi(y) = y_i^{-\mu_i-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial y_i}\{y_i^{\mu_i+\frac{1}{2}}\Phi(y)\} =$$

$$y_i^{-\mu_i-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial y_i}\left\{y_i^{\mu_i+\frac{1}{2}}\int_{I\!R_+^n}\phi(x)\sqrt{x_iy_i}\,J_{\mu_i+1}(x_iy_i)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\{\sqrt{x_jy_j}\,J_{\mu_j}(x_jy_j)\}dx\right\} =$$

$$= y_i^{-\mu_i-\frac{1}{2}}\int_{I\!R_+^n}\phi(x)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\{\sqrt{x_jy_j}\,J_{\mu_j}(x_jy_j)\}\frac{\partial}{\partial y_i}\left\{y_i^{\mu_i+\frac{1}{2}}\sqrt{x_iy_i}\,J_{\mu_i+1}(x_iy_i)\right\}dx. \tag{4.6}$$

Para probar la validez del procedimiento de derivación bajo el signo integral, observemos primero que

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left\{y_i^{\mu_i+\frac{1}{2}}\sqrt{x_iy_i}\,J_{\mu_i+1}(x_iy_i)\right\} = x_i^{\frac{3}{2}}y_i^{\mu_i+1}\,J_{\mu_i}(x_iy_i),$$

donde la operación efectuada es análoga a la realizada para la demostración de (b). Luego, obtenemos de (4.6)

$$M_{\mu,i}\Phi(y) \qquad y_i^{-\mu_i-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n_+} \phi(x) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \{ \sqrt{x_j y_j}\, J_{\mu_j}(x_j y_j)\} x_i^{\frac{3}{2}} y_i^{\mu_i+1} J_{\mu_i}(x_i y_i) dx =$$

$$y_i^{\mu_i-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n_+} x_i \phi(x) y_i^{\mu_i+\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{n} \{ \sqrt{x_j y_j}\, J_{\mu_j}(x_j y_j)\} dx.$$

Con argumentos similares a los utilizados para la demostración de (a) resulta que la última integral converge uniformemente sobre compactos. Obtenemos finalmente que

$$M_{\mu,i}(h_{\mu+e_i}(\phi))(y) = y_i^{\mu_i-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n_+} x_i \phi(x) y_i^{\mu_i+\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{n} \{ \sqrt{x_j y_j}\, J_{\mu_j}(x_j y_j)\} dx =$$

$$= h_\mu(x_i \phi)(y).$$

(f) Sea $\phi \in \mathcal{H}_{\mu+e_i}$, observemos que por el Lema 3.2.2 $M_{\mu,i}\phi \in \mathcal{H}_\mu$. Sean $x = (x_1, \dots, x_n)$ y $y = (y_1, \dots, y_n)$ luego,

$$h_\mu(M_{\mu,i}\phi)(y) = \int_{\mathbb{R}^n_+} M_{\mu,i}\phi(x) \prod_{j=1}^{n} \{ \sqrt{x_j y_j}\, J_{\mu_j}(x_j y_j)\} dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n_+} x_i^{-\mu_i-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x_i}\{x_i^{\mu_i+\frac{1}{2}}\phi(x)\} \prod_{j=1}^{n} \{ \sqrt{x_j y_j}\, J_{\mu_j}(x_j y_j)\} dx =$$

$$= \int_0^\infty \quad \int_0^\infty \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \{ \sqrt{x_j y_j}\, J_{\mu_j}(x_j y_j)\} .$$

$$\cdot \left[ \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x_i}\{x_i^{\mu_i+\frac{1}{2}}\phi(x)\} y_i^{\frac{1}{2}} x_i^{-\mu_i} J_{\mu_i}(x_i y_i)\, dx_i \right] dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n . \tag{4.7}$$

Este procedimiento es válido debido a que la función

$$M_{\mu,i}\phi(x) \prod_{j=1}^{n} \{ \sqrt{x_j y_j}\, J_{\mu_j}(x_j y_j)\}$$

es integrable en $I\!R^n_+$ para todo $y$ (observemos que $M_{\mu,i}\phi(x) \in \mathcal{H}_\mu$ , (4.2) y (4.3)). Además, aplicando integración por partes, tenemos

$$y_i^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x_i}\{x_i^{\mu_i+\frac{1}{2}}\phi(x)\}x_i^{-\mu_i} J_{\mu_i}(x_i y_i)\, dx_i =$$

$$= y_i^{\frac{1}{2}}\left[x_i^{\mu_i+\frac{1}{2}}\phi(x)x_i^{-\mu_i}J_{\mu_i}(x_iy_i)\Big|_{x_i\to 0}^{x_i\to\infty} - \int_0^\infty x_i^{\mu_i+\frac{1}{2}}\phi(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\{x_i^{-\mu_i}J_{\mu_i}(x_iy_i)\}dx_i\right] =$$

$$= -y_i^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty x_i^{\mu_i+\frac{1}{2}}\phi(x) - x_i^{-\mu_i}y_iJ_{\mu_i+1}(x_iy_i)\}dx_i =$$

$$= \int_0^\infty \phi(x)\, y_i\, \sqrt{x_iy_i}\, J_{\mu_i+1}(x_iy_i)dx_i,$$

donde hemos utilizado la igualdad

$$y_i^{\frac{1}{2}}x_i^{\mu_i+\frac{1}{2}}\phi(x)x_i^{-\mu_i}J_{\mu_i}(x_iy_i)\Big|_{x_i\to 0}^{x_i\to\infty} \quad 0,$$

que se deduce con argumentos similares a los utilizados en el punto (b) y la fórmula $\frac{d}{dz}\{z^{-\nu}J_\nu\} = -z^{-\nu}J_{\nu+1}$. Luego, obtenemos en (4.7),

$$h_\mu(M_{\mu,i}\phi)(y) = \int_0^\infty \int_0^\infty \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n\{\sqrt{x_jy_j}\, J_{\mu_j}(x_jy_j)\}\cdot$$

$$\cdot\left[\int_0^\infty \phi(x)\, y_i\, \sqrt{x_iy_i}\, J_{\mu_i+1}(x_iy_i)dx_i\right]dx_1\ldots dx_{i-1}dx_{i+1}\ldots dx_n =$$

$$\int_{I\!R^n_+} y_i\phi(x)\sqrt{x_iy_i}\, J_{\mu_i+1}(x_iy_i)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n\{\sqrt{x_jy_j}\, J_{\mu_j}(x_jy_j)\}dx = y_ih_{\mu+e_i}\phi(y).$$

(c) Sea $\phi \in \mathcal{H}_\mu$ , observemos que $x_i\phi \in \mathcal{H}_{\mu+e_i}$ y $x_i^2\phi \in \mathcal{H}_{\mu+2e_i} \subset \mathcal{H}_\mu$, entonces

$$M_{\mu,i}N_{\mu,i}h_\mu\phi = M_{\mu,i}h_{\mu+e_i}(-x_i\phi) = h_\mu(-x_i^2\phi),$$

donde hemos aplicado las igualdades (a) y (e).

(d) Sea $\phi \in \mathcal{H}_\mu$, entonces

$$-y_i^2h_\mu\phi = y_i - y_ih_\mu\phi = y_ih_{\mu+e_i}(N_{\mu,i}\phi) = h_\mu(M_{\mu,i}N_{\mu,i}\phi),$$

donde hemos utilizado (b) y (f).

$\square$

## 4.2 Un teorema fundamental

En esta sección demostraremos una propiedad fundamental de la transformada de Hankel que dice que es un automorfismo sobre $\mathcal{H}_\mu$. Escribiremos antes algunas definiciones y observaciones.

Sea $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)$, $m$ un entero positivo, $\{e_1, ..., e_n\}$ la base canónica de $I\!R^n$, entonces para cada $i$ , $1 \leq i \leq n$ , definimos los operadores

$$N^m_{\mu,i} = N_{\mu+(m-1)e_i,i} \circ N_{\mu+(m-2)e_i,i} \circ \ldots \circ N_{\mu+e_i,i} \circ N_{\mu,i}\ , \tag{4.8}$$

donde $N_{\mu+je_i,i}$ para $0 \leq j \leq m-1$ es el operador definido anteriormente (§3.2, Capítulo.3), y " $\circ$ " indica la composición de operadores. De aquí en adelante omitiremos el símbolo $\circ$ y pondremos simplemente

$$N^m_{\mu,i} = N_{\mu+(m-1)e_i,i} N_{\mu+(m-2)e_i,i} \cdots N_{\mu+e_i,i} N_{\mu,i}.$$

Si $m = 0$ , definimos,

$$N^0_{\mu,i}\phi = \phi, \quad \phi \in \mathcal{H}_\mu. \tag{4.9}$$

**Observación 4.2.1.** *Si $\phi \in \mathcal{H}_\mu$, $m$ entero positivo entonces $N^m_{\mu,i}\phi \in \mathcal{H}_{\mu+me_i}$.*

Resulta de aplicar m-veces el Lema 3.2.1.

Sea m un muiltiíndice , $m = (m_1, ..., m_n)$. Definimos el siguiente operador

$$N^m_\mu = N^{m_n}_{\mu+m_1e_1+\ldots+m_{n-1}e_{n-1},n} \circ \ldots \circ N^{m_2}_{\mu+m_1e_1,2} \circ N^{m_1}_{\mu,1}, \tag{4.10}$$

donde $N^{m'}_{\mu',i}$ es el operador definido por (4.8). Podremos simplemente

$$N^m_\mu = N^{m_n}_{\mu+m_1e_1+\ldots+m_{n-1}e_{n-1},n} \cdots N^{m_2}_{\mu+m_1e_1,2} N^{m_1}_{\mu,1}.$$

**Observación 4.2.2.** *Si $\phi \in \mathcal{H}_\mu$, $m$ es un multiíndice entonces $N_\mu^m \phi \in \mathcal{H}_{\mu+m}$.*

Sigue de aplicar n-veces la Observación 4.2.1.

**Lema 4.2.1.** *Si $\phi \in \mathcal{H}_\mu$, $m$ es un multiíndice, entonces*

$$N_\mu^m \phi = x^{\mu+m+\frac{1}{2}} T^m \{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)\}. \tag{4.11}$$

**Demostración:** Para demostrar (4.11) observemos cómo actúan los operadores $N_{\mu',i}^{m_i}$ sobre $\phi \in \mathcal{H}_{\mu'}$. Demostremos, por inducción sobre $m_i$, que

$$N_{\mu',i}^{m_i}\phi = x^{\mu'+m_i c_i+\frac{1}{2}} T_i^{m_i}\{x^{-\mu'-\frac{1}{2}}\phi(x)\}. \tag{4.12}$$

Si $m_i = 1$, entonces

$$N_{\mu',i}^1\phi = N_{\mu',i}\phi = x^{\mu'+\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x_i}\{x^{-\mu'-\frac{1}{2}}\phi(x)\} = x^{\mu'+\frac{1}{2}}x_i x_i^{-1}\frac{\partial}{\partial x_i}\{x^{-\mu'-\frac{1}{2}}\phi(x)\} =$$
$$= x^{\mu'+c_i+\frac{1}{2}}T_i\{x^{-\mu'-\frac{1}{2}}\phi(x)\},$$

con lo cual (4.12) es cierta si $m_i = 1$. Supongo cierta la aseveración para $m_i - 1$, veamos que vale para $m_i$:

$$N_{\mu',i}^{m_i}\phi = N_{\mu'+(m_i-1)c_i,i}N_{\mu'+(m_i-2)c_i,i}\cdots N_{\mu'+c_i,i}N_{\mu',i}\phi =$$
$$N_{\mu'+(m_i-1)c_i,i}N_{\mu',i}^{m_i-1}\phi = N_{\mu'+(m_i-1)c_i,i}\left(x^{\mu'+(m_i-1)c_i+\frac{1}{2}}T_i^{m_i-1}\{x^{-\mu'-\frac{1}{2}}\phi(x)\}\right) =$$
$$= x^{\mu'+(m_i-1)c_i+\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{x^{-(\mu'+(m_i-1)c_i)-\frac{1}{2}}x^{\mu'+(m_i-1)c_i+\frac{1}{2}}T_i^{m_i-1}\{x^{-\mu'-\frac{1}{2}}\phi(x)\}\right\} =$$
$$= x^{\mu'+(m_i-1)c_i+\frac{1}{2}}x_i x_i^{-1}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{T_i^{m_i-1}\{x^{-\mu'-\frac{1}{2}}\phi(x)\}\right\} =$$
$$= x^{\mu'+m_i c_i+\frac{1}{2}}T_i T_i^{m_i-1}\{x^{-\mu'-\frac{1}{2}}\phi(x)\} = x^{\mu'+m_i c_i+\frac{1}{2}}T_i^{m_i}\{x^{-\mu'-\frac{1}{2}}\phi(x)\},$$

con lo cual (4.12) es válida para $m_i \in I\!N$. Para demostrar (4.11), observemos que por definición de $N_{\mu,i}^m$,

$$N_{\mu,i}^m\phi = N_{\mu+(m-1)c_i,i}N_{\mu+(m-2)c_i,i}\cdots N_{\mu+c_i,i}N_{\mu,i}\phi,$$

con lo cual la fórmula (4.11) se sigue por aplicación de (4.12) n-veces.

$\square$

**Lema 4.2.2.** *Sean $\phi \in \mathcal{H}_\mu$, $k$ un multiíndice, entonces:*

*(a)* $N_{\mu+k,i}\{x^k\phi\} = x^k N_{\mu,i}\phi$ *para* $1 \leq i \leq n$.

*(b)* $N^m_{\mu+k,i}\{x^k\phi\} = x^k N^m_{\mu,i}\phi$ *para* $1 \leq i \leq n$ *y* $m \in I\!N_0$.

*(c)* $N^m_{\mu+k}\{x^k\phi\} = x^k N^m_{\mu}\phi$ *para todo multiíndice* $m$.

**Demostración:**

(a) Observemos primero que si $\phi \in \mathcal{H}_\mu$ entonces por Lema 3.1.3, (Cap.3) $x^k\phi \in \mathcal{H}_{\mu+k}$ para todo multiíndice $k$, con lo cual tiene sentido la aplicación del operador $N_{\mu+k,i}$ a la función $x^k\phi$, luego

$$N_{\mu+k,i}\{x^k\phi\} = x^{\mu+k+\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{x^{-(\mu+k)-\frac{1}{2}}x^k\phi\right\} = x^k x^{\mu+\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi\right\} =$$
$$= x^k N_{\mu,i}\phi.$$

(b) Aplicando la definición (fórmula (4.8)) para el operador $N^m_{\mu+k,i}$ y la fórmula anterior, obtenemos

$$N^m_{\mu+k,i}\{x^k\phi\} = N_{\mu+k+(m-1)c_i,i}\cdots N_{\mu+k+2c_i,i}N_{\mu+k+c_i,i}N_{\mu+k,i}\{x^k\phi\} =$$
$$= N_{\mu+k+(m-1)c_i,i}\cdots N_{\mu+k+2c_i,i}N_{\mu+k+c_i,i}\{x^k N_{\mu,i}\phi\} =$$
$$= N_{\mu+k+(m-1)c_i,i}\cdots N_{\mu+k+2c_i,i}\{x^k N_{\mu+c_i,i}N_{\mu,i}\phi\},$$

y continuando con este procedimiento, obtenemos en el paso m-1:

$$N^m_{\mu+k,i}\{x^k\phi\} = N_{\mu+k+(m-1)c_i,i}\{x^k N_{\mu+(m-2)c_i,i}\cdots N_{\mu+c_i,i}N_{\mu,i}\phi\} =$$
$$= x^k N_{\mu+(m-1)c_i,i}N_{\mu+(m-2)c_i,i}\cdots N_{\mu+c_i,i}N_{\mu,i}\phi = x^k N^m_{\mu,i}\phi.$$

(c) Por la definición de $N^m_{\mu+k}$ (fórmula (4.10)) y la aplicación reiterada de la fórmula anterior, obtenemos

$$N^{m}_{\mu+k}\{x^k\phi\} = N^{m_n}_{\mu+k+m_1e_1+...+m_{n-1}e_{n-1},n}\cdots N^{m_2}_{\mu+k+m_1e_1,2}N^{m_1}_{\mu+k,1}\{x^k\phi\} =$$

$$= N^{m_n}_{\mu+k+m_1e_1+...+m_{n-1}e_{n-1},n}\cdots N^{m_2}_{\mu+k+m_1e_1,2}\{x^k N^{m_1}_{\mu,1}\phi\},$$

continuando el procedimiento, concluimos

$$N^{m}_{\mu+k}\{x^k\phi\} = x^k N^{m_n}_{\mu+m_1e_1+...+m_{n-1}e_{n-1},n}\cdots N^{m_2}_{\mu+m_1e_1,2}N^{m_1}_{\mu,1}\phi =$$

$$= x^k N^{m}_{\mu}\phi.$$

□

Probaremos a continuación el siguiente teorema fundamental para nuestro trabajo:

**Teorema 4.2.1.** *Sea $\mu \in I\!R^n$, $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)$ con $\mu \geq -\frac{1}{2}$ (es decir $\mu_i \geq -\frac{1}{2}$ para todo i). Entonces la transformada de Hankel n-dimensional $h_\mu$ (4.1) es un automorfismo de $\mathcal{H}_\mu$.*

**Demostración:** Sea $\phi \in \mathcal{H}_\mu$, $h_\mu(\phi)(y) = \Phi(y)$, veamos que $\Phi \in \mathcal{H}_\mu$. Sean $m, k$ multiíndices y consideremos la fómula obtenida en el lema anterior:

$$N^{m}_{\mu+k}\{x^k\phi\} = x^k N^{m}_{\mu}\phi. \tag{4.13}$$

Observemos que si $\phi \in \mathcal{H}_\mu$, entonces $x^k N^m_\mu \phi \in \mathcal{H}_{\mu+m+k}$, como puede deducirse de la Observación 4.2.2 y del Lema 3.1.3 del Capítulo 3. Luego, podemos aplicar $h_{\mu+m+k}$ a ambos miembros de (4.13)

$$h_{\mu+m+k}(N^{m}_{\mu+k}\{x^k\phi\}) = h_{\mu+m+k}(x^k N^{m}_{\mu}\phi). \tag{4.14}$$

Calculemos el primer miembro de la igualdad (4.14) en dos pasos:

Paso 1: Probemos

$$h_{\mu+m+k}(N^{m}_{\mu+k}\{x^k\phi\}) = (-y_1)^{m_1}(-y_2)^{m_2}...(-y_n)^{m_n} h_{\mu+k}(x^k\phi). \tag{4.15}$$

Paso 2: Probemos

$$h_{\mu+k}(x^k\phi) = (-1)^k N^k_\mu\{h_\mu\phi\} = (-1)^k N^k_\mu \Phi. \tag{4.16}$$

Para demostrar (4.15) analicemos primero cómo actúa la transformada de Hankel sobre los operadores del tipo $N^r_{\mu',i}$. Sean entonces $\mu' \in I\!R^n$, $\phi' \in \mathcal{H}_{\mu'}$, $1 \leq i \leq n$ y r entero positivo o cero, utilizando la fórmula (b) del Lema 4.1.1, obtenemos

$$h_{\mu'+rc_i}(N^r_{\mu',i}\phi') =$$

$$= h_{\mu'+(r-1)c_i+c_i}(N_{\mu'+(r-1)c_i,i}N_{\mu'+(r-2)c_i,i}\cdots N_{\mu'+c_i,i}N_{\mu',i}\phi') =$$

$$= (-y_i)h_{\mu'+(r-2)c_i+c_i}(N_{\mu'+(r-2)c_i,i}\cdots N_{\mu'+c_i,i}N_{\mu',i}\phi') =$$

$$= (-y_i)(-y_i)h_{\mu'+(r-3)c_i+c_i}(N_{\mu'+(r-3)c_i,i}\cdots N_{\mu'+c_i,i}N_{\mu',i}\phi').$$

Continuando este proceso, obtenemos,

$$h_{\mu'+rc_i}(N^r_{\mu',i}\phi') = (-y_i)^{r-1}h_{\mu'+c_i}(N_{\mu',i}\phi') = (-y_i)^r h_{\mu'}(\phi'),$$

aplicando reiteradas veces esta igualdad, para $m, k$ multiíndices, tenemos

$$h_{\mu+k+m}(N^m_{\mu+k}\{x^k\phi\}) =$$

$$= h_{\mu+k+m_1c_1+\ldots+m_nc_n}(N^{m_n}_{\mu+k+m_1c_1+\ldots+m_{n-1}c_{n-1},n}\cdots N^{m_2}_{\mu+k+m_1c_1,2}N^{m_1}_{\mu+k,1}\{x^k\phi\}) =$$

$$= (-y_n)^{m_n}h_{\mu+k+m_1c_1+\ldots+m_{n-1}c_{n-1}}(N^{m_{n-1}}_{\mu+k+m_1c_1+\ldots+m_{n-2}c_{n-2},n-1}\cdots$$

$$\cdots N^{m_2}_{\mu+k+m_1c_1,2}N^{m_1}_{\mu+k,1}\{x^k\phi\}) =$$

$$= (-y_n)^{m_n}(-y_{n-1})^{m_{n-1}}h_{\mu+k+m_1c_1+\ldots+m_{n-2}c_{n-2}}(N^{m_{n-2}}_{\mu+k+m_1c_1+\ldots+m_{n-3}c_{n-3},n-2}\cdots$$

$$\cdots N^{m_2}_{\mu+k+m_1c_1,2}N^{m_1}_{\mu+k,1}\{x^k\phi\}).$$

Continuando el procedimiento, obtenemos

$$= (-y_n)^{m_n}(-y_{n-1})^{m_{n-1}}...(-y_2)^{m_2}h_{\mu+k+m_1e_1}(N^{m_1}_{\mu+k,1}\{x^k\phi\}) =$$

$$= (-y_n)^{m_n}(-y_{n-1})^{m_{n-1}}...(-y_1)^{m_1}h_{\mu+k}(x^k\phi),$$

luego, (4.15) es cierta.
Para demostrar (4.16), observemos primero que dados $\mu' \in I\!R^n$, $\phi' \in \mathcal{H}_{\mu'}$, $1 \leq i \leq n$, $k$ un entero positivo se cumple que

$$h_{\mu'+ke_i}((-x_i)^k\phi) = N^k_{\mu',i}\{h_{\mu'}\phi\}. \tag{4.17}$$

En efecto, con la aplicación reiterada de la propiedad (a) del Lema 4.1.1, tenemos

$$h_{\mu'+ke_i}((-x_i)^k\phi) = h_{\mu'+(k-1)e_i+e_i}((-x_i)(-x_i)^{k-1}\phi) =$$

$$= N_{\mu'+(k-1)e_i,i}\, h_{\mu'+(k-1)e_i}((-x_i)^{k-1}\phi) =$$

$$= N_{\mu'+(k-1)e_i,i}\, N_{\mu'+(k-2)e_i,i}\, h_{\mu'+(k-2)e_i}((-x_i)^{k-2}\phi).$$

En el paso $k-1$, obtenemos

$$h_{\mu'+ke_i}((-x_i)^k\phi) = N_{\mu'+(k-1)e_i,i}\, N_{\mu'+(k-2)e_i,i}...N_{\mu'+e_i,i}\, h_{\mu'+e_i}(-x_i\phi) =$$

$$= N_{\mu'+(k-1)e_i,i}\, N_{\mu'+(k-2)e_i,i}...N_{\mu'+e_i,i}\, N_{\mu',i}\, h_{\mu'}(\phi) = N^k_{\mu',i}\{h_{\mu'}\phi\}.$$

Veamos ahora la demostración de la igualdad (4.16). Si $k = (k_1, ..., k_n)$ y $x = (x_1, ..., x_n)$ entonces, con la aplicación de la igualdad (4.17), tenemos

$$h_{\mu+k}(x^k\phi) = (-1)^k h_{\mu+k}((-1)^{k_1}x_1^{k_1}...(-1)^{k_n}x_n^{k_n}\phi) =$$

$$= (-1)^k h_{\mu+k_1e_1+...+k_ne_n}(-x_n^{k_n} \cdot - x_{n-1}^{k_{n-1}} ... - x_1^{k_1}\phi) =$$

$$= (-1)^k N^{k_n}_{\mu+k_1c_1+\ldots+k_{n-1}c_{n-1},n}\Big\{h_{\mu+k_1c_1+\ldots+k_{n-1}c_{n-1}}(-x^{k_{n-1}}_{n-1}\ldots - x_1^{k_1}\phi)\Big\}.$$

Continuando este procedimiento, obtenemos

$$h_{\mu+k}(x^k\phi) = (-1)^k N^{k_n}_{\mu+k_1c_1+\ldots+k_{n-1}c_{n-1},n}\, N^{k_{n-1}}_{\mu+k_1c_1+\ldots+k_{n-2}c_{n-2},n-1}\cdots$$

$$\ldots N^{k_2}_{\mu+k_1c_1,2}\Big\{h_{\mu+k_1c_1}(-x_1^{k_1}\phi)\Big\} =$$

$$= (-1)^k N^{k_n}_{\mu+k_1c_1+\ldots+k_{n-1}c_{n-1},n}\cdots N^{k_2}_{\mu+k_1c_1,2}\, N^{k_1}_{\mu,1}\Big\{h_\mu\phi\Big\} = (-1)^k N^k_\mu\{h_\mu\phi\}.$$

Vale entonces la igualdad (4.16). De las igualdades (4.15) y (4.16) obtenemos que el primer miembro de (4.14) es de la forma

$$h_{\mu+m+k}(N^m_{\mu+k}\{x^k\phi\}) \quad (-y_1)^{m_1}(-y_2)^{m_2}\ldots(-y_n)^{m_n} h_{\mu+k}(x^k\phi) =$$

$$= (-y_1)^{m_1}(-y_2)^{m_2}\ldots(-y_n)^{m_n}(-1)^k N^k_\mu\Phi.$$

La igualdad (4.14) resulta de la siguiente forma:

$$(-1)^k(-y_1)^{m_1}(-y_2)^{m_2}\ldots(-y_n)^{m_n}N^k_\mu\Phi = h_{\mu+m+k}(x^kN^m_\mu\phi).$$

Probamos cómo actuaban los operadores $N^m_\mu$ sobre una función $\phi \in \mathcal{H}_\mu$ (fórmula (4.11), Lema 4.2.1). Aplicando dicha fórmula al primer miembro de la igualdad anterior obtenemos:

$$(-1)^k(-y_1)^{m_1}(-y_2)^{m_2}\ldots(-y_n)^{m_n}y^{\mu+k+\frac{1}{2}}T^k\{y^{-\mu-\frac{1}{2}}\Phi(y)\} =$$

$$= \int_{I\!R^n_+} x^k\, N^m_\mu\phi(x)\prod_{i=1}^{n}\{\sqrt{x_iy_i}\, J_{\mu_i+m_i+k_i}(x_iy_i)\}\, dx_1\ldots dx_n.$$

Aplicamos nuevamente la fórmula (4.11) al segundo miembro de la última igualdad, y obtenemos la siguiente fórmula:

$$(-1)^{m+k}y^mT^k\{y^{-\mu-\frac{1}{2}}\Phi(y)\} =$$

$$= \int_{I\!R^n_+} \frac{x^k}{y^{\mu+k+\frac{1}{2}}} x^{\mu+m+\frac{1}{2}} T^m\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)\} \prod_{i=1}^{n}\{\sqrt{x_iy_i}\, J_{\mu_i+m_i+k_i}(x_iy_i)\}\, dx_1...dx_n =$$

$$= \int_{I\!R^n_+} x^{2\mu+2k+m+1} T^m\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)\} \frac{\prod_{i=1}^{n}\{J_{\mu_i+m_i+k_i}(x_iy_i)\}}{x^{\mu+k}y^{\mu+k}}\, dx_1...dx_n. \quad (4.18)$$

Demostremos ahora que $\Phi(y) \in \mathcal{H}_\mu$. Para ello, observemos que de (4.18) se obtiene que

$$(-1)^{m+k} y^m T^k\{y^{-\mu-\frac{1}{2}}\Phi(y)\} =$$

$$y^m \int_{I\!R^n_+} x^{2\mu+2k+2m+1} T^m\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)\} \frac{\prod_{i=1}^{n}\{J_{\mu_i+m_i+k_i}(x_iy_i)\}}{x^{\mu+k+m}y^{\mu+k+m}}\, dx_1...dx_n =$$

$$= y^m \int_{I\!R^n_+} x^{2\mu+2k+2m+1} T^m\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)\} \prod_{i=1}^{n}\left\{\frac{J_{\mu_i+m_i+k_i}(x_iy_i)}{(x_iy_i)^{\mu_i+k_i+m_i}}\right\} dx_1...dx_n. \quad (4.19)$$

Observemos que la expresión

$$\prod_{i=1}^{n}\left\{\frac{J_{\mu_i+m_i+k_i}(x_iy_i)}{(x_iy_i)^{\mu_i+k_i+m_i}}\right\}$$

está acotada. En efecto, vemos que para cada $1 \le i \le n$ , $\frac{J_{\mu_i+m_i+k_i}(x_iy_i)}{(x_iy_i)^{\mu_i+k_i+m_i}}$ está acotada si $0 < x_iy_i < \infty$, $\mu_i \ge -\frac{1}{2}$ pues,

$$\frac{J_{\mu_i+m_i+k_i}(x_iy_i)}{(x_iy_i)^{\mu_i+k_i+m_i}} = \frac{1}{(x_iy_i)^{\mu_i+k_i+m_i}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j(\frac{x_iy_i}{2})^{\mu_i+m_i+k_i+2j}}{j!\,\Gamma(\mu_i+m_i+k_i+j+1)},$$

de donde puede deducirse que es continua en un entorno del origen, con lo cual resulta acotada allí, y además

$$\frac{J_{\mu_i+m_i+k_i}(x_iy_i)}{(x_iy_i)^{\mu_i+k_i+m_i}} = \frac{1}{(x_iy_i)^{\mu_i+k_i+m_i+\frac{1}{2}}}(x_iy_i)^{\frac{1}{2}} J_{\mu_i+m_i+k_i}(x_iy_i),$$

con lo cual, también resulta acotada en el infinito por ser $\mu_i \ge -\frac{1}{2}$. Luego,

$$\left| x^{2\mu+2k+2m+1} T^m\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)\} \prod_{i=1}^{n}\left\{\frac{J_{\mu_i+m_i+k_i}(x_iy_i)}{(x_iy_i)^{\mu_i+k_i+m_i}}\right\}\right| \le$$

$$\le B_{m,k}\left| x^{2\mu+2k+2m+1} T^m\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)\}\right|.$$

Veamos que la función

$$x^{2\mu+2k+2m+1}T^{m}\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)\} \tag{4.20}$$

es integrable en $I\!R^n_+$ para todo par $m, k$ de multiíndices. Dado que $\phi \in \mathcal{H}_\mu$, entonces $\gamma^\mu_{k,m}(\phi) = \sup_{x\in I\!R^n_+} |x^k T^m\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)\}| < \infty$, luego

$$x^{2\mu+2k+2m+1}T^{m}\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)\} = x^{2\mu+k+2m+1}x^kT^{m}\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)\}$$

es integrable en un entorno del origen pues $2\mu + k + 2m + 1 \geq 0$ ($\mu \geq -\frac{1}{2}$). Además, teniendo en cuenta la fórmula (1.5) del Capítulo 1:

$$T^m\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi\} = x^{-\mu-\frac{1}{2}}\sum_{j=0}^{m} b_{m,j}\frac{D^j\phi}{x^{2m-j}}\ ,\quad b_{m,j} \text{ constantes,}$$

y el hecho que $D^j\phi$ son rápidamente decrecientes en el infinito para todo multiíndice $j$ (Lema 1.2.1, Capítulo 1) resulta que la función (4.20) es integrable en $I\!R^n_+$. Concluimos entonces que la función $y^mT^k\{y^{-\mu-\frac{1}{2}}\Phi(y)\}$ es continua para todo par de multiíndices $m, k$. Para el caso $m = k = 0$ deducimos la continuidad de $\Phi$ en $I\!R^n_+$. Considerando $m = 0$ y $|k| = 1$ ($k = e_i$), entonces $y^0T^{e_i}\{y^{-\mu-\frac{1}{2}}\Phi(y)\}$ es continua en $I\!R^n_+$ y aplicando la fórmula (1.5) para este caso obtenemos que vale

$$T^{e_i}\{y^{-\mu-\frac{1}{2}}\Phi(y)\} = y^{-\mu-\frac{1}{2}}\left\{b_{e_i,0}\frac{\Phi}{y_i^2} + b_{e_i,e_i}\frac{D^{e_i}\Phi}{y_i}\right\},$$

de donde deducimos la continuidad de $D^{e_i}\Phi$. Siguiendo este argumento inductivo se deduce la continuidad de $D^k\Phi$ para todo multiíndice $k$, con lo cual concluimos que $\Phi \in C^\infty(I\!R^n_+)$. Volviendo a (4.18), obtenemos que

$$(-1)^{m+k}y^mT^k\{y^{-\mu-\frac{1}{2}}\Phi(y)\} =$$
$$= \int_{I\!R^n_+} x^{2\mu+2k+m+1}T^m\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)\}\prod_{i=1}^{n}\left\{\frac{J_{\mu_i+m_i+k_i}(x_iy_i)}{(x_iy_i)^{\mu_i+k_i}}\right\}dx_1\ldots dx_n.$$

Entonces,

$$\gamma^\mu_{m,k}(\Phi) = \sup_{I\!R^n_+}\left|y^mT^k\{y^{-\mu-\frac{1}{2}}\Phi(y)\}\right| \leq$$
$$\leq B'_{m,k}\int_{I\!R^n_+}\left|x^{2\mu+2k+m+1}T^m\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)\}\right|dx, \tag{4.21}$$

donde $B'_{m,k}$ depende de los multiíndices $m$ y $k$ y satisface

$$\left|\prod_{i=1}^{n}\left\{\frac{J_{\mu_i+m_i+k_i}(x_iy_i)}{(x_iy_i)^{\mu_i+k_i}}\right\}\right| < B'_{m,k}, \quad \forall x,y \in I\!R^n_+.$$

Para cada $1 \leq i \leq n$ elijamos $\nu_i \in I\!N$ tal que $\nu_i > \mu_i + k_i + \frac{m_i+1}{2}$, luego

$$x_i^{2\mu_i+2k_i+m_i+1} = (x_i^2)^{\mu_i+k_i+\frac{m_i+1}{2}} < (1+x_i^2)^{\mu_i+k_i+\frac{m_i+1}{2}} < (1+x_i^2)^{\nu_i},$$

resulta

$$x^{2\mu+2k+m+1} < \prod_{i=1}^{n}(1+x_i^2)^{\nu_i}.$$

Teniendo en cuenta esta desigualdad, obtenemos de (4.21)

$$\begin{aligned}
\gamma^{\mu}_{m,k}(\Phi) &\leq B'_{m,k}\int_{I\!R^n_+}\left|x^{2\mu+2k+m+1}\right|\left|T^m\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)\}\right|dx \leq \\
&\leq B'_{m,k}\int_{I\!R^n_+}\prod_{i=1}^{n}(1+x_i^2)^{\nu_i}\left|T^m\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)\}\right|dx \leq \\
&\leq B'_{m,k}\int_{I\!R^n_+}\prod_{i=1}^{n}(1+x_i^2)^{\nu_i+1}\left|T^m\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)\}\right|\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1+x_i^2)}dx \leq \\
&\leq B'_{m,k}\sup_{x\in I\!R^n_+}\left|\prod_{i=1}^{n}(1+x_i^2)^{\nu_i+1}T^m\{x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)\}\right|\int_{I\!R^n_+}\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1+x_i^2)}dx = \\
&= B'_{m,k}\left(\frac{\pi}{2}\right)^n\sum_{j\in\Gamma}c_j\gamma^{\mu}_{j,m}(\phi),
\end{aligned}$$

para cierto subconjunto finito de multiíndices $\Gamma$. La última desigualdad prueba que $\Phi \in \mathcal{H}_\mu$ y que $h_\mu : \mathcal{H}_\mu \to \mathcal{H}_\mu$ es continua. Además $h_\mu = h_\mu^{-1}$ ([3], §4.4.3) , de donde resulta que $h_\mu$ es inyectiva (si $\mu \geq -\frac{1}{2}$) y finalmente concluimos que $h_\mu$ es un automorfismo de $\mathcal{H}_\mu$.

□

Daremos ahora un ejemplo importante de transformación de Hankel de funciones. Haremos antes una observación,

**Observación 4.2.3.** *Sea $\mu$ una n-upla $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)$ con $\mu_i \geq -\frac{1}{2}$, $\phi_i \in \mathcal{H}_{\mu_i}$, $\phi_i : I\!R_+ \to C$ y $\phi = \prod_{i=1}^n \phi_i$. Entonces por la Observación 1.2.4 del Capítulo 1, $\phi \in \mathcal{H}_\mu$ y además es*

$$h_\mu \phi = \prod_{i=1}^{n} h_{\mu_i} \phi_i.$$

La demostración de este hecho es inmediata a partir de la definición (4.1) de $h_\mu$.

**Ejemplo 4.2.1.** *Sea $\mu \in I\!R^n$, con $\mu_i \geq -\frac{1}{2}$ para $1 \leq i \leq n$ y sea*

$$\Psi(x) = \Psi(x_1, ..., x_n) = e^{-\frac{|x|^2}{2}} x^{\mu + \frac{1}{2}} = e^{-(x_1^2 + ... + x_n^2)} x_1^{\mu_1 + \frac{1}{2}} ... x_n^{\mu_n + \frac{1}{2}},$$

*entonces,*

$$h_\mu \Psi = \Psi. \tag{4.22}$$

Observemos que $\Psi \in \mathcal{H}_\mu$, como puede verse en el Ejemplo 1.2.2 del Capítulo 1. Además para el caso unidimensional se satisface:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} x^{\mu + \frac{1}{2}} \sqrt{yx} J_\mu(yx)\, dx = e^{-\frac{y^2}{2}} y^{\mu + \frac{1}{2}},$$

para $\mu \in I\!R$, $\mu \geq -\frac{1}{2}$, (ver [1], pág. 60). Entonces

$$h_\mu(e^{-\frac{x^2}{2}} x^{\mu + \frac{1}{2}}) = e^{-\frac{y^2}{2}} y^{\mu + \frac{1}{2}}. \tag{4.23}$$

Luego, del Ejemplo 1.2.2, la Observación 4.2.3 y la igualdad (4.23) concluimos que es válida la igualdad (4.22) (observemos que esta igualdad dice que $\Psi$ es una autofunción del operador $h_\mu$).

# Capítulo 5

# Transformada de Hankel en $\mathcal{H}'_\mu$

Extenderemos ahora la transformación de Hankel definida en el capítulo anterior al espacio de funciones generalizadas $\mathcal{H}'_\mu$. Para ello vamos a definir la transformada de Hankel generalizada $h'_\mu$ como la transformación adjunta de $h_\mu$ sobre $\mathcal{H}_\mu$ y estudiaremos algunas de sus propiedades. A lo largo de este capítulo consideraremos $\mu \in I\!R^n$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, con $\mu_i \geq -\frac{1}{2}$ para $1 \leq i \leq n$.

## 5.1 Definición y propiedades

**Definición 5.1.1.** *La función $h'_\mu : \mathcal{H}'_\mu \to \mathcal{H}'_\mu$ dada por*

$$(h'_\mu f, \phi) = (f, h_\mu \phi), \tag{5.1}$$

*donde $f \in \mathcal{H}'_\mu$ y $\phi \in \mathcal{H}_\mu$, la llamaremos transformada de Hankel generalizada.*

**Teorema 5.1.1.** *Si $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, con $\mu_i \geq -\frac{1}{2}$, $\mu_i \in I\!R$, la transformación de Hankel generalizada $h'_\mu$ es un automorfismo de $\mathcal{H}'_\mu$.*

**Demostración:** Se deduce inmediatamente del Teorema 1.10-2 de [10] y del Teorema 4.2.1 del Capítulo 4.

□

**Observación 5.1.1.** *Por ser $h_\mu = h_\mu^{-1}$, entonces*

$$(h'_\mu)^{-1} = (h_\mu^{-1})' = h'_\mu,$$

*como puede deducirse de* ([10], teo. 1.10-2). *Esto nos dice que la transformada de Hankel generalizada es igual a su inversa.*

**Observación 5.1.2.** *La transformación de Hankel $h_\mu$ definida en el capítulo anterior por*

$$(h_\mu\phi)(y) = \int_{I\!R^n_+} \phi(x_1, ..., x_n) \prod_{i=1}^{n} \{ \sqrt{x_i y_i} J_{\mu_i}(x_i y_i)\} \, dx_1...dx_n,$$

*para* $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)$, $\mu_i \geq -\frac{1}{2}$ *para todo* $i$ *y para* $\phi \in \mathcal{H}_\mu$, *puede extenderse a funciones de* $L^1(I\!R^n_+)$, *debido a que*

$$|\prod_{i=1}^{n} \{ \sqrt{x_i y_i} J_{\mu_i}(x_i y_i)\}| < C, \tag{5.2}$$

*para* $0 < x_i y_i < \infty$ (ver §4.1, Cap. 4).

Probemos el siguiente resultado similar a la conocida identidad de Parseval:

**Teorema 5.1.2.** *Sean* $f$ *y* $G$ *funciones pertenecientes a* $L^1(I\!R^n_+)$, $\mu \in I\!R^n$, $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)$ *con* $\mu_i \geq -\frac{1}{2}$, $F = h_\mu f$, $g = h_\mu G$, *entonces*

$$\int_{I\!R^n_+} f(x)g(x) \, dx = \int_{I\!R^n_+} F(y)G(y) \, dy. \tag{5.3}$$

**Demostración:** Observemos primero que la integral $\int_{I\!R^n_+} f(x)g(x) \, dx$ tiene sentido pues $f \in L^1(I\!R^n_+)$ y,

$$|g(x)| = |h_\mu(G(y))(x)| = \left| \int_{I\!R^n_+} G(y) \prod_{i=1}^{n} \{ \sqrt{y_i x_i} J_{\mu_i}(y_i x_i)\} dy \right| \leq$$

$$\leq C \int_{I\!R^n_+} |G(y)| \, dy < \infty,$$

donde hemos utilizado (5.2). Luego, $g$ está acotada y $f.g \in L^1(I\!R^n_+)$. Entonces:

$$\int_{I\!R^n_+} f(x)g(x) \, dx = \int_{I\!R^n_+} f(x) h_\mu G(x) \, dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} f(x)\left\{\int_{\mathbb{R}^n_+} G(y)\prod_{i=1}^{n}\{\sqrt{y_i x_i}J_{\mu_i}(y_i x_i)\}dy\right\}dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n_+}\left\{\int_{\mathbb{R}^n_+} f(x)\prod_{i=1}^{n}\{\sqrt{y_i x_i}J_{\mu_i}(y_i x_i)\}dx\right\}G(y)\,dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n_+} h_\mu f(y).G(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n_+} F(y).G(y)\,dy,$$

donde hemos aplicado el teorema de Fubini, lo cual es válido por ser la función $f(x)G(y)\prod_{i=1}^{n}\{\sqrt{y_i x_i}J_{\mu_i}(y_i x_i)\}$ integrable en $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$.

$\square$

**Corolario 5.1.1.** *Un resultado importante que se obtiene del teorema anterior es la siguiente igualdad para funciones $\phi, \varphi \in \mathcal{H}_\mu$:*

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \phi(y)\; h_\mu\varphi(y)\; dy = \int_{\mathbb{R}^n_+} h_\mu\phi(y)\; \varphi(y)\; dy.$$

**Demostración:** El resultado es inmediato observando que $\phi, \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n_+)$ (Corolario 1.2.1, Capítulo 1).

$\square$

Veamos entonces que la transformada de Hankel $h_\mu$ cuando actúa sobre una función de $L^1(\mathbb{R}^n_+)$ coincide con la transformada de Hankel generalizada $h'_\mu$ cuando actúa sobre funciones de $L^1(\mathbb{R}^n_+)$ consideradas como funcionales regulares en $\mathcal{H}'_\mu$ (ver Observación 2.2.1, Capítulo 2). Para ello, consideremos $f \in L^1(\mathbb{R}^n_+)$, entonces $f$ genera una función generalizada regular en $\mathcal{H}'_\mu$, $\mu \geq -\frac{1}{2}$ dada por

$$(f, \phi) = \int_{\mathbb{R}^n_+} f(x)\phi(x)\,dx\ , \text{ para } \phi \in \mathcal{H}_\mu.$$

Además, $h_\mu f$ dada por

$$h_\mu f(y) = \int_{\mathbb{R}^n_+} f(x)\prod_{i=1}^{n}\{\sqrt{x_i y_i}J_{\mu_i}(x_i y_i)\}dx,$$

es una función continua y acotada (teniendo en cuenta (5.2)). Luego, teniendo en cuenta el Lema 2.2.1 del Capítulo 2, $h_\mu f$ genera una función generalizada regular en $\mathcal{H}'_\mu$. Veamos que $h_\mu f$ coincide con $h'_\mu f$ (en el segundo caso la $f$ considerada como función generalizada regular) en $\mathcal{H}'_\mu$. Sea $\phi \in \mathcal{H}_\mu$, entonces

$$(h'_\mu f, \phi) = (f, h_\mu \phi) = \int_{I\!R^n_+} f(y)\, h_\mu\phi(y)\, dy = \int_{I\!R^n_+} h_\mu f(y)\, \phi(y)\, dy = (h_\mu f, \phi).$$

Luego, $h'_\mu f = h_\mu f$ en $\mathcal{H}'_\mu$. Veamos ahora el lema que dice que la transformada de Hankel generalizada $h'_\mu$ cumple propiedades análogas a las de la transformada de Hankel convencional. A partir de aquí identificaremos los símbolos $h'_\mu$ y $h_\mu$.

**Lema 5.1.1.** *Sea* $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, $\mu \geq -\frac{1}{2}$, $e_1, \dots, e_n$ *la base canónica de* $I\!R^n$ *y sea* $f \in \mathcal{H}'_\mu$, *entonces:*

*(a)* $h_{\mu+e_i}(-x_i f) = N_{\mu,i}\, h_\mu f$,

*(b)* $h_{\mu+e_i}(N_{\mu,i} f) = -y_i\, h_\mu f$,

*(c)* $h_\mu(-x_i^2 f) = M_{\mu,i} N_{\mu,i}\, h_\mu f$,

*(d)* $h_\mu(M_{\mu,i} N_{\mu,i} f) = -y_i^2 h_\mu f$.

*Si* $f \in \mathcal{H}'_{\mu+e_i}$, *entonces*

*(e)* $h_\mu(x_i f) = M_{\mu,i}\, h_{\mu+e_i} f$,

*(f)* $h_\mu(M_{\mu,i} f) = y_i\, h_{\mu+e_i} f$.

**Demostración:** Aclaremos que las igualdades *(a)* y *(b)* se entienden en $\mathcal{H}'_{\mu+e_i}$ y las igualdades *(c)*, *(d)*, *(e)* y *(f)* en $\mathcal{H}'_\mu$. Veamos primero la validez de *(b)*. Observemos que la igualdad tiene sentido pues para $f \in \mathcal{H}'_\mu$, $h_\mu f \in \mathcal{H}'_\mu$ con lo cual $y_i\, h_\mu f \in \mathcal{H}'_{\mu-e_i}$ (ver Lema 3.1.3), luego por Proposición 1.2.2 $y_i\, h_\mu f \in \mathcal{H}'_{\mu+e_i}$. Sea $\phi \in \mathcal{H}_{\mu+e_i}$, entonces

$$(h_{\mu+e_i}(N_{\mu,i} f), \phi) = (N_{\mu,i} f, h_{\mu+e_i}\phi) = (-M'_{\mu,i} f, h_{\mu+e_i}\phi) = (f, -M_{\mu,i} h_{\mu+e_i}\phi) =$$

$$(f, -h_\mu(y_i\phi)) = -(h_\mu f, y_i\phi) = (-y_i h_\mu f, \phi);$$

donde hemos utilizado la definición de $N_{\mu,i}$ como operador generalizado dada en §3.3 del Capítulo 3, la igualdad *(c)* del Lema 4.1.1 del Capítulo 4 y el Lema 3.1.3 del Capítulo 3. Luego *(b)* es válida.

Veamos *(a)*. Para ello aplicamos la igualdad *(b)* al caso $h_\mu f \in \mathcal{H}'_\mu$ y obtenemos

$$h_{\mu+c_i}(N_{\mu,i}h_\mu f) = -y_i h_\mu(h_\mu f) = -y_i f$$

Si aplicamos $h_{\mu+c_i}$ a ambos miembros de la última igualdad (notar que $y_i f \in \mathcal{H}'_{\mu-c_i} \subset \mathcal{H}'_{\mu+c_i}$), obtenemos

$$h_{\mu+c_i}\Big(h_{\mu+c_i}(N_{\mu,i}h_\mu f)\Big) \quad h_{\mu+c_i}(-y_i f)\,,$$

de donde obtenemos *(a)*.

Veamos *(f)*. Sea $\phi \in \mathcal{H}_\mu$, entonces

$$(h_\mu(M_{\mu,i}f),\phi) = (M_{\mu,i}f, h_\mu\phi) = (-N'_{\mu,i}f, h_\mu\phi) = (f, -N_{\mu,i}h_\mu\phi) =$$

$$(f, -h_{\mu+c_i}(-y_i\phi)) = (h_{\mu+c_i}f, y_i\phi) = (y_i h_{\mu+c_i}f, \phi)\,,$$

donde hemos utilizado la definición de $M_{\mu,i}$ como operador generalizado dada en §3.3 del Capítulo 3, la igualdad *(a)* del Lema 4.1.1 del Capítulo 4 y el Lema 3.1.3 del Capítulo 3. Luego *(f)* es válido.

Demostramos ahora *(e)* reemplazando en *(f)* a $f$ por $h_{\mu+c_i}f$ ($f \in \mathcal{H}'_{\mu+c_i}$), obteniéndose:

$$h_\mu(M_{\mu,i}\, h_{\mu+c_i}f) = y_i\, h_{\mu+c_i}(h_{\mu+c_i}f) = y_i f,$$

aplicando $h_\mu$ a ambos miembros de la última igualdad se sigue *(e)*.

Probemos *(c)*,

$$M_{\mu,i}N_{\mu,i}\, h_\mu f \quad M_{\mu,i}h_{\mu+c_i}(-x_i f) = h_\mu(-x_i^2 f),$$

donde hemos aplicado *(a)* y *(e)*.

La igualdad *(d)* se sigue de la aplicación sucesiva de las igualdades *(f)* y *(b)*.

$\square$

## 5.2 Aplicaciones

Daremos ahora una aplicación de la transformación de Hankel, para la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que involucran a funciones en $\mathcal{H}'_\mu$. Sea entonces $P$ un polinomio de una variable, sin raíces en $(-\infty, 0]$ y consideremos el operador $S_\mu$ (Observación 3.2.1 , Capítulo 3) dado por:

$$S_\mu = \sum_{i=1}^{n} M_{\mu,i} N_{\mu,i}.$$

Sea $S_\mu^k$ el operador $S_\mu$ iterado k-veces. Entonces, si $f \in \mathcal{H}'_\mu$ tenemos

$$h_\mu(S_\mu f) = h_\mu\left(\left[\sum_{i=1}^{n} M_{\mu,i} N_{\mu,i}\right] f\right) = \sum_{i=1}^{n} h_\mu(M_{\mu,i} N_{\mu,i} f) =$$
$$\sum_{i=1}^{n} -y_i^2 h_\mu f = -|y|^2 h_\mu f \,,$$

donde hemos utilizado la igualdad *(d)* del lema 5.1.1. En general se cumple que,

$$h_\mu(S_\mu^k f) = (-|y|^2)^k h_\mu f. \tag{5.4}$$

Supongamos que queremos hallar $f \in \mathcal{H}'_\mu$ que satisfaga a la siguiente ecuación diferencial definida en $\mathbb{R}^n_+$:

$$P(S_\mu) f = g \tag{5.5}$$

para una función $g \in \mathcal{H}'_\mu$ dada. El primer miembro de (5.5) debe ser interpretado en la siguiente forma:

$$P(S_\mu) f = \left[a_r S_\mu^r + a_{r-1} S_\mu^{r-1} + \ldots + a_0 S_\mu^0\right] f \,,$$

donde $P(x) = a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \ldots + a_0$, y $S_\mu^0 f = f$. Aplicando $h_\mu$ a ambos miembros de (5.5), obtenemos

$$P(-|y|^2)h_\mu f = h_\mu g.$$

Observemos que debido a que el polinomio $P$ no tiene raíces en $(-\infty, 0]$ entonces la función $\frac{1}{P(-|y|^2)}$ es miembro del espacio $\mathcal{O}$ de multiplicadores de los espacios $\mathcal{H}_\mu$ y $\mathcal{H}'_\mu$, como puede deducirse del Lema 3.1.2 del Capítulo 3. Luego, multiplicando a ambos miembros de la última igualdad por $\frac{1}{P(-|y|^2)}$ y aplicando nuevamente $h_\mu$, concluimos que una solución de (5.5) está dada por

$$f = h_\mu\left(\frac{1}{P(-|y|^2)}h_\mu g\right),$$

además, por ser $h_\mu$ un isomorfismo, la solución es única.

# Bibliografía


[1] N.I. Akhiezer: Lectures on Integral Transforms. Vol. 70. Amer. Math. Society. Translations of Math. Monographs, (1985).

[2] J.J. Betancor; B.J. González: A convolution operation for a distributional Hankel transformation, Studia Mathematica 117 (1), (1995).

[3] Yu. A. Brychkov; H. J. Glaeske; A.P. Prudnikov; Vu Kim Tuan: Multidimensional Integral Transformations, Gordon and Breach Science Publishers, (1992).

[4] E.L.Koh: The n-dimensional distributional Hankel transformation. Can. J. Math. , Vol. XXVII No 2, pp.423-433, (1975).

[5] I. Marrero; J.J. Betancor: Hankel convolution of generalized functions, Rendiconti di Matemática, Serie VII, Volume 15, Roma, 351-380, (1995).

[6] R.S. Pathak: Integral Transforms of Generalized Functions and Their Applications, Gordon and Breach Science Publishers, (1997).

[7] Walter Rudin: Functional Analysis. Second Edition. McGraw-Hill, (1991).

[8] L. Schwartz: Métodos matemáticos para las ciencias físicas, Selecciones Científicas, Madrid, (1969).

[9] E.T. Whittaker & G.N. Watson: A course of modern analysis. Fourth Edition, Cambridge University Press, (1927).

[10] A. H. Zemanian: Generalized Integral Transformations, Interscience, New York , (1968).

[11] A. H. Zemanian: A distributional Hankel transformation, SIAM J. Appl. Math. 14, 561-576, (1966).


Sandra M. Molina.



Susana Elena Trione