

## Tesis de Posgrado

# Desparametrización y cuantización de modelos cosmológicos homogéneos

Simeone, Claudio

2001

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

**Cita tipo APA:**

Simeone, Claudio. (2001). Desparametrización y cuantización de modelos cosmológicos homogéneos. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. [http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_3417\\_Simeone.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3417_Simeone.pdf)

**Cita tipo Chicago:**

Simeone, Claudio. "Desparametrización y cuantización de modelos cosmológicos homogéneos". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2001. [http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_3417\\_Simeone.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3417_Simeone.pdf)

**EXACTAS** UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



**UBA**

Universidad de Buenos Aires

**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**

**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**

**Departamento de Física**

**Desparametrización y Cuantización  
de Modelos Cosmológicos Homogéneos**

*por Claudio Simeone*

Director de Tesis: Dr. Aníbal Gattone

Lugar de Trabajo: Laboratorio TANDAR, CNEA

Trabajo de Tesis para optar por el título de Doctor en Ciencias Físicas

*Diciembre de 2001*

**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**

**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**

**Departamento de Física**

**Desparametrización y Cuantización de Modelos Cosmológicos  
Homogéneos**

por *Claudio Simeone*

Director de Tesis: .....  ..... ANIBAL GATTONE

Lugar de Trabajo:

Trabajo de Tesis para optar por el título de Doctor en Ciencias Físicas

*Diciembre de 2001*

## Resumen

Existen diferentes puntos de vista acerca de cómo debería construirse el formalismo de la cosmología cuántica, y también acerca de la interpretación de dicho formalismo. Una razón para esto es un problema peculiar que proviene del hecho de que estamos buscando una teoría para todo el universo: mientras que lo usual es tratar con sistemas para los cuales la noción de “evolución” es clara porque es posible suponer que existe algo externo que juega el papel de reloj, esto no es posible en cosmología. Existen entonces dos posibilidades: se puede abandonar la idea de una descripción con una noción clara de tiempo; o se puede asumir que un subconjunto de las variables que describen el estado del universo pueden usarse como reloj para el resto del sistema. Aquí se presenta una propuesta para tratar modelos cosmológicos en este último marco. Esta propuesta consiste en suponer que el vínculo hamiltoniano de la teoría refleja la existencia de un tiempo escondido entre las variables canónicas, que es entonces identificado mediante la elección del gauge, para luego proceder a la cuantización, tanto vía integral funcional como en la forma canónica.

# DEPARAMETRIZATION AND QUANTIZATION OF HOMOGENEOUS COSMOLOGICAL MODELS

Claudio Simeone

## ABSTRACT

There are different points of view about how the formalism of quantum cosmology should be constructed, and also about its interpretation. A reason for this is a peculiar problem which comes from the fact that we are looking for a theory of the whole universe: while one usually deals with systems for which the meaning of "evolution" is clear as it is possible to assume that there is something external which plays the role of a clock, this is not possible in cosmology. There are then two possibilities: one could abandon the idea of a description with a clear notion of time; or we can assume that a subset of the variables describing the state of the universe can be used as a clock for the remaining of the system. Here a proposal for dealing with cosmological models within this last framework is presented. This proposal consists in assuming that the Hamiltonian constraint of the theory reflects the existence of a time hidden among the canonical variables, which is then identified by means of gauge fixation; then we proceed to the quantization, both in the path integral approach, and by canonical methods.

KEY WORDS: Constrained Hamiltonian system - Minisuperspace - Path integral - Quantum cosmology

# Contenidos

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>El campo gravitatorio como sistema hamiltoniano con vínculos</b>	<b>11</b>
2.1	Vínculos lineales y cuadrático	11
2.2	Minisuperespacios como sistemas con vínculos	14
2.3	Cuantización	17
2.3.1	Cuantización canónica	17
2.3.2	Integral de camino	19
<b>3</b>	<b>Desparametrización e integral de camino</b>	<b>22</b>
3.1	Identificación del tiempo	22
3.1.1	Fijación del gauge y desparametrización	23
3.1.2	Topología de la superficie de vínculo: tiempo intrínseco y extrínseco	26
3.2	Acción invariante de gauge para un sistema parametrizado	28
3.2.1	Términos de superficie	28
3.2.2	Observables y tiempo .	30
3.2.3	Vínculos no separables	33
3.3	Integral de camino	34
3.3.1	Formalismo general	34
3.3.2	La función $f$ y el hamiltoniano reducido. Unitariedad .	37
3.4	Ejemplos .	39

3.4.1	Propagador de Feynman para la ecuación de Klein–Gordon .	39
3.4.2	El reloj ideal	42
3.4.3	Probabilidad de transición para modelos vacíos de Friedmann–Robertson–Walker .	46
<b>4</b>	<b>Modelos cosmológicos</b>	<b>51</b>
4.1	Modelos relativistas isótropos	51
4.1.1	Un modelo de juguete	52
4.1.2	Grados de libertad verdaderos. El problema de Gribov	54
4.1.3	Un vínculo más general .	58
4.1.4	Tiempo extrínseco. El modelo de de Sitter cerrado	65
4.2	Universos anisótropos .	68
4.2.1	El universo de Kantowski–Sachs .	70
4.2.2	El universo de Taub	75
4.2.3	Otros modelos anisótropos	82
4.3	Cosmologías de la teoría de cuerdas	83
4.3.1	Acción efectiva de bajas energías	84
4.3.2	Modelos cosmológicos .	86
4.3.3	Acción invariante de gauge .	89
4.3.4	Tiempo extrínseco	90
4.3.5	Tiempo intrínseco e integral de camino	92
4.3.6	Resumen .	95
<b>5</b>	<b>Cuantización canónica</b>	<b>97</b>
5.1	Soluciones aproximadas de la ecuación de Wheeler–DeWitt	98
5.2	Fijación del gauge y ecuación de Schrödinger para modelos isótropos .	99
5.3	El universo de Taub	101

5.3.1	Procedimiento usual	101
5.3.2	Condiciones de contorno y ecuación de Schrödinger	102
5.3.3	Ecuación de Wheeler–DeWitt con tiempo extrínseco .	104
5.4	Cosmologías de la teoría de cuerdas	107
5.4.1	Ecuación de Wheeler–DeWitt	108
5.4.2	Ecuación de Schrödinger	110
<b>6</b>	<b>Discusión</b>	<b>112</b>
<b>A</b>	<b>Sistemas hamiltonianos con vínculos</b>	<b>118</b>
A.1	Formalismo hamiltoniano para sistemas con vínculos	118
A.2	Transformaciones de gauge y fijación del gauge . .	121
<b>B</b>	<b>Integral de camino y producto interno</b>	<b>124</b>
B.1	Sistemas sin vínculos	124
B.2	Sistemas con vínculos .	126
B.3	Producto interno para sistemas con vínculos	127
B.4	Propagador y núcleo proyectado .	128
<b>C</b>	<b>Vínculo de partícula libre para minisuperespacios</b>	<b>131</b>

# Capítulo 1

## Introducción

La obtención de una teoría cuántica consistente para la gravitación, en la cual la función de onda tenga un significado claro, es todavía un problema abierto; esto es así, en parte, debido al problema del tiempo [Kuchař (1981), Hájíček (1986)]: mientras que en la mecánica cuántica ordinaria el tiempo tiene un sentido absoluto, en la teoría de la gravitación es un parámetro arbitrario que identifica hipersuperficies espaciales, y las cantidades físicas son invariantes ante cambios generales de las coordenadas. Como la evolución se da en términos de un parámetro  $\tau$  que no tiene significado físico, la acción de la gravitación es la de un sistema parametrizado, con un hamiltoniano canónico que se anula sobre las trayectorias físicas del sistema, esto es, con un vínculo  $\mathcal{H} \approx 0$ .

A partir de esta situación se han seguido principalmente dos caminos. Uno de ellos es el esquema de cuantización usual de Dirac–Wheeler–DeWitt, cuyo formalismo no contiene al tiempo de manera explícita y no tiene una forma evolucionaria; esto lleva al problema de definir una probabilidad conservada que sea definida positiva, dado que la propia noción del tiempo en el cual dicha conservación se verificaría no es clara. Otra posibilidad es obtener una teoría suponiendo que el tiempo se encuentra de alguna manera escondido entre las coordenadas y momentos del sistema, que debe entonces ser desparametrizado como paso previo a la cuantización; aquí adoptaremos este punto de vista.

La propuesta del presente trabajo se basa en el hecho de que la identificación del tiempo

está íntimamente realacionada con la fijación del gauge: en la teoría de la gravitación la evolución dinámica está dada por una hipersuperficie espacial que se mueve en el espacio-tiempo a lo largo de la dirección temporal. Este movimiento incluye deformaciones locales arbitrarias que dan como resultado una multiplicidad de tiempos. Desde otro punto de vista, el mismo movimiento puede generarse mediante transformaciones de gauge, y por lo tanto al fijar un gauge se define una foliación particular del espacio-tiempo [Barvinsky (1993)].

Para modelos de minisuperespacio tenemos una funcional acción de la forma

$$S[q^i, p_i, N] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( p_i \frac{dq^i}{d\tau} - N\mathcal{H} \right) d\tau \quad (1.1)$$

donde  $N$  es un multiplicador de Lagrange asociado con el vínculo hamiltoniano cuadrático

$$\mathcal{H} = G^{ij} p_i p_j + V(q) \approx 0, \quad (1.2)$$

con  $G^{ij}$  la versión reducida de la supermétrica de DeWitt. La condición de extremal  $\delta S = 0$  conduce a las ecuaciones canónicas

$$\frac{dq^i}{d\tau} = N[q^i, \mathcal{H}], \quad \frac{dp_i}{d\tau} = N[p_i, \mathcal{H}]. \quad (1.3)$$

La solución de estas ecuaciones describe la evolución de una superficie espacial a lo largo de la dirección temporal; debido a la presencia del multiplicador de Lagrange, el movimiento contiene una arbitrariedad que se asocia con una versión simplificada de lo que, en la teoría completa, es una pluralidad de tiempos posibles. Por otro lado, el vínculo  $\mathcal{H} \approx 0$  actúa como un generador de transformaciones de gauge de la forma

$$\delta_\epsilon q^i = \epsilon(\tau)[q^i, \mathcal{H}], \quad \delta_\epsilon p_i = \epsilon(\tau)[p_i, \mathcal{H}], \quad \delta_\epsilon N = \frac{\partial \epsilon(\tau)}{\partial \tau}. \quad (1.4)$$

Las ecuaciones (1.3) y (1.4) muestran que la evolución dinámica puede ser reproducida por una transformación de gauge que evoluciona con el tiempo, es decir, dos puntos cualesquiera sobre cualquier trayectoria clásica están conectados por una transformación de

gauge. Por lo tanto, la fijación de un gauge puede pensarse no solamente como una forma de seleccionar un camino de cada clase de caminos físicamente equivalentes, sino también como un procedimiento de reducción por el cual se identifica un tiempo para el sistema.

Una dificultad importante con un programa de desparametrización basado en esta idea es que las condiciones de gauge admisibles son aquellas que pueden alcanzarse desde cualquier camino mediante transformaciones de gauge que dejan invariante la acción, y la acción de la gravitación no tiene invariancia de gauge en los extremos [Teitelboim (1982)]: ante una transformación definida por los parámetros  $\epsilon^m$  la acción de un sistema con vínculos  $C_m$  se modifica en

$$\delta_\epsilon S = \left[ \epsilon^m(\tau) \left( p_i \frac{\partial C_m}{\partial p_i} - C_m \right) \right]_{\tau_1}^{\tau_2} \quad (1.5)$$

Los sistemas de gauge ordinarios contienen vínculos que son lineales y homogéneos en los momentos, más un hamiltoniano no nulo  $H_0$  que es la energía total; por ejemplo, en el caso del campo electromagnético los momentos son las cuatro cantidades  $F^{\mu 0}$ ; para  $\mu = 1, 2, 3$  tenemos las tres componentes del campo eléctrico, pero para  $\mu = 0$  tenemos el vínculo primario  $F^{00} = 0$  [Dirac (1964)]. Entonces es  $\delta_\epsilon S = 0$ , y los gauges de la forma  $\chi(q, p, \tau) = 0$  (*gauges canónicos*) son admisibles. En el caso de la gravitación, en cambio, el vínculo hamiltoniano es cuadrático en los momentos y tendríamos  $\delta_\epsilon S \neq 0$  a menos que  $\epsilon(\tau_1) = \epsilon(\tau_2) = 0$ ; por lo tanto deberían utilizarse gauges en términos de derivadas de multiplicadores de Lagrange, como  $\chi \equiv dN/d\tau = 0$  [Halliwell (1988)]. Estas condiciones de gauge no definen un tiempo en términos de las variables canónicas. Al nivel cuántico esto tiene como consecuencia que los gauges canónicos no podrían usarse para cuantizar el sistema vía una integral de camino en la manera usual de Fadeev y Popov para sistemas de gauge ordinarios [Fadeev & Popov (1967), Fadeev & Slavnov (1980)].

Aquí mostraremos, sin embargo, que si la ecuación de Hamilton–Jacobi asociada al vínculo hamiltoniano es separable, la acción de un sistema parametrizado descrito por las coordenadas y momentos  $(q^i, p_i)$  puede ser convertida en la de un sistema de gauge

ordinario descrito por las variables canónicas  $(Q^i, P_i)$  por medio de una transformación canónica que identifica el vínculo hamiltoniano  $\mathcal{H}$  con uno de los nuevos momentos, y de esta manera la coordenada conjugada a ese momento puede utilizarse para fijar el gauge y por lo tanto para definir un tiempo [Simeone (1999)]. Como resultado de dicha transformación canónica, la acción escrita en términos de las variables originales contiene términos de superficie que la proveen de invariancia de gauge en los extremos [Henneaux et al. (1992)]. Una vez identificado un tiempo, la amplitud de transición puede obtenerse por medio de una integral de camino en una forma simple que muestra claramente la separación entre grados de libertad físicos y tiempo. No es así en la cuantización con gauges no canónicos, en la cual la noción de evolución no es clara. Por otro lado, el uso de gauges no canónicos no permite, en principio, visualizar a priori la posibilidad de que se presente el problema de Gribov [Gribov (1978), Henneaux & Teitelboim (1992)]; esto se resuelve con nuestro procedimiento. Desde otro punto de vista, veremos que la identificación de un tiempo global permite también encarar la cuantización canónica evitando los problemas formales mencionados al comienzo.

Nuestra propuesta muestra también claramente las restricciones que surgen de la geometría de la superficie de vínculo: puede definirse un tiempo global en términos de solamente las coordenadas  $q^i$  (*tiempo intrínseco* [Kuchař (1992)]) sólo si el potencial del vínculo hamiltoniano tiene un signo definido; en este caso la definición depende de la hoja del vínculo sobre la cual evoluciona el sistema, y la elección se logra a través de un signo en la elección del gauge. Cuando sólo existe un tiempo en términos de las coordenadas y los momentos (*tiempo extrínseco* [York (1972), Kuchař (1971)]) veremos que si queremos obtener una cuantización consistente tanto en el formalismo de integral de camino como en el formalismo canónico, deberemos incluir los momentos en la definición de los estados, o abandonar la descripción en términos de las variables originales y pasar a un conjunto de variables tales que una de las nuevas coordenadas es un tiempo global. Si elegimos

el primer camino se presentarán ciertos problemas que son peculiares de la gravitación, mientras que si elegimos el segundo la interpretación requerirá de cierto cuidado.

En el presente trabajo se estudian modelos relativistas homogéneos y modelos isótropos de la teoría de cuerdas. La restricción a modelos de minisuperespacio, esto es, a modelos cuyo espacio de configuración es de dimensión finita, simplifica notablemente el análisis de lo que sería realmente un problema de teoría de campos, dado que el número de grados de libertad de la teoría completa es infinito. Por cierto, por esa simplificación pagaremos un precio: la interpretación no será necesariamente la de una aproximación a la teoría completa, dado que congelar grados de libertad antes de cuantizar no está del todo justificado a partir del carácter especial que tiene la superposición de amplitudes en la mecánica cuántica [Kuchař & Ryan (1989)]. Por esto algunos autores han sugerido que no debería pensarse en los minisuperespacios como una herramienta para hacer predicciones físicas con cierta aproximación, sino más bien como modelos en los cuales pueden ponerse a prueba soluciones para ciertos problemas de la teoría completa [Halliwell (1990)]. Los modelos tratados aquí se han elegido con el propósito de ejemplificar los diferentes problemas y las soluciones propuestas, pero todos ellos tienen en sí mismos un interés físico que los ha hecho objeto de estudio en diferentes contextos.

El trabajo se organiza así: En el capítulo 2 se introduce el formalismo hamiltoniano para el campo gravitatorio; se presenta el problema del tiempo, y se discuten los esquemas de cuantización canónica de Dirac–Wheeler–DeWitt y de cuantización vía integral de camino.

El capítulo 3 comienza con la propuesta de identificar el tiempo mediante la fijación del gauge. Se construye una acción invariante de gauge para un sistema genérico con un vínculo hamiltoniano cuadrático al cual se puede asociar una ecuación de Hamilton–Jacobi separable; se muestra cómo utilizar gauges canónicas para desparametrizar el sistema, y se da la forma general de la integral de camino para el sistema reducido. El procedimiento se ilustra con con ejemplos simples, como la partícula libre relativista y el reloj ideal; el

capítulo termina con una aplicación de los resultados del reloj ideal a la cuantización de algunos universos usualmente llamados “de juguete”.

La aplicación directa de nuestro programa de desparametrización y cuantización a modelos cosmológicos comienza en el capítulo 4 con modelos isótropos relativistas (incluyendo el de de Sitter), que se utilizan para mostrar el resultado de diferentes desparametrizaciones y las posibles soluciones de problemas que se presentarán en modelos de más interés físico. Se estudian modelos vacíos y con un campo escalar, con y sin constante cosmológica. Después pasamos a modelos anisótropos relativistas. Se desparametriza y se obtiene la amplitud de transición en el caso de los modelos de Kantowski–Sachs y de Taub, que es un caso particular del modelo de Bianchi de tipo IX. El modelo de mayor interés, y por lo tanto el que estudiamos con más detalle, es el de Taub, ya que presenta el problema de la inexistencia de un tiempo intrínseco. También se identifica un tiempo para los modelos de Bianchi del tipo I y el de Szekeres homogéneo. Finalmente, extendemos nuestro análisis más allá del marco relativista, y estudiamos modelos cosmológicos que se obtienen de la teoría de cuerdas bosónicas en el límite de bajas energías. La cuantización de modelos de la teoría de cuerdas ha recibido recientemente mucha atención [Gasperini (1999), Gasperini (2000)], y se ha señalado que dicha cuantización requiere de un tratamiento cuidadoso de las sutilezas que son típicas de la cuantización de sistemas de gauge [Cavaglià & De Alfaro (1997), Cavaglià & Ungarelli (1999)]. Nos ocupamos aquí de modelos con un campo dilatónico, una 2-forma, y el campo tensorial  $g_{\mu\nu}$  que determina la geometría de fondo del espacio-tiempo. Para esto comenzamos por poner la acción efectiva de la teoría en la forma hamiltoniana, y luego la proveemos de invariancia de gauge en los extremos. A partir de ahí los modelos se desparametrizan de la misma forma que los modelos relativistas. La identificación del tiempo se extiende a modelos no separables encontrando una prescripción para que un tiempo de un modelo separable lo sea también de uno no separable.

En el capítulo 5 tratamos la cuantización canónica de Dirac–Wheeler–DeWitt y de Schrödinger tanto para modelos relativistas como para modelos de la teoría de cuerdas. Comenzamos por revisar algunas variantes de la cuantización canónica, con y sin previa desparametrización. El modelo de Taub vuelve a estudiarse en detalle desde distintos enfoques, pues permite un análisis que lleva a ilustrar claramente el papel que los momentos juegan en la caracterización de los estados, y también la forma en que se trata el tema de las condiciones de contorno. Los modelos de la teoría de cuerdas de bajas energías, por su parte, permiten estudiar la posibilidad de la identificación de soluciones de las ecuaciones de Wheeler–DeWitt y de Schrödinger, y demostrar que el procedimiento seguido en trabajos previos con otros modelos, como el de Taub, no es válido en general.

En la Discusión del final se tratan ciertos problemas abiertos del formalismo y de interpretación de la teoría. En los Apéndices se dan algunos resultados marginales, pero también se incluye un resumen del formalismo hamiltoniano para sistemas con vínculos y del método de cuantización de integral de camino.

## Capítulo 2

# El campo gravitatorio como sistema hamiltoniano con vínculos

### 2.1 Vínculos lineales y cuadrático

Como punto de partida para construir una teoría cuántica de la gravitación es usual comenzar con la acción clásica de Einstein para el campo gravitatorio. Si no hay campos de materia la acción  $S$  es una funcional de la métrica espacio-temporal  $g_{\mu\nu}(X)$ , y la dinámica que resulta de la condición de extremal  $\delta S = 0$  está dada por una sucesión de hipersuperficies tridimensionales espaciales en el espacio-tiempo de cuatro dimensiones. Si se introduce el parámetro temporal  $\tau$  y los puntos sobre cada superficie se identifican con las coordenadas internas  $x^a$  ( $a = 1, 2, 3$ ), las superficies se describen como

$$X^\mu = e^\mu(\mathbf{x}, \tau).$$

En cada punto de una dada hipersuperficie podemos definir los vectores normal y tangentes  $n_\mu$  y  $e_a^\mu$ :

$$n_\mu e_a^\mu = 0, \quad g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = -1, \quad e_a^\mu = \frac{\partial e^\mu(\mathbf{x}, \tau)}{\partial x^a}.$$

La teoría puede ser así reparametrizada cambiando de la métrica espacio-temporal  $g_{\mu\nu}(X)$  a una nueva base dada por la 3-métrica espacial  $g_{ab}$  sobre una hipersuperficie y la velocidad

$U^\mu$  con la cual dicha superficie evoluciona en el espacio-tiempo:

$$g_{ab} = e_a^\mu g_{\mu\nu} e_b^\nu, \quad U^\mu = \frac{\partial e^\mu(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau}.$$

Las componentes normal y tangencial de la velocidad  $U^\mu$  son las funciones de lapso y corrimiento ("shift")

$$N(\mathbf{x}, \tau) = -n_\mu \frac{\partial e^\mu}{\partial \tau}, \quad N^a(\mathbf{x}, \tau) = g^{ab} e_b^\mu g_{\mu\nu} \frac{\partial e^\nu}{\partial \tau}$$

definidas por Kuchař [Kuchař (1976)] como una generalización de las introducidas por Arnowitt, Deser y Misner  $N = (-g^{00})^{-1/2}$ ,  $N^a = g^{ab} g_{b0}$  [Arnowitt et al. (1962)]. La deformación de la hipersuperficie espacial embebida en el espacio-tiempo y evolucionando en la dirección temporal está descrita por la curvatura extrínseca

$$K_{ab} = \frac{1}{2N} \left( \nabla_a N_b + \nabla_b N_a - \frac{dg_{ab}}{d\tau} \right),$$

donde  $\nabla$  denota una derivada espacial covariante. En términos de las funciones de lapso y shift y de las coordenadas  $(\tau, \mathbf{x})$ , la forma lagrangiana de la acción de Einstein con constante cosmológica es

$$S[g_{ab}, N, N^a] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int d^3x N({}^3g)^{1/2} (K_{ab}K^{ab} - K^2 + {}^3R - 2\Lambda) \quad (2.1)$$

donde  ${}^3R$  es la curvatura escalar del espacio. El conjunto de todas las posibles 3-métricas es llamado superespacio; este espacio está dotado de una métrica, la supermétrica de DeWitt

$$G^{abcd} = \frac{1}{4}({}^3g)^{1/2}(g^{ac}g^{bd} + g^{ad}g^{bc} - 2g^{ab}g^{cd}).$$

Si definimos los momentos canónicos

$$p^{ab} = -2G^{abcd}K_{cd}$$

podemos escribir la acción en su forma hamiltoniana:

$$S[g_{ab}, p^{ab}, N, N^a] = \int d\tau \int d^3x (p^{ab} \frac{dg_{ab}}{d\tau} - N\mathcal{H} - N^a\mathcal{H}_a) \quad (2.2)$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \frac{1}{2}G_{abcd}p^{ab}p^{cd} - ({}^3g)^{1/2}({}^3R - 2\Lambda), \\
\mathcal{H}_a &= -2g_{ac}\nabla_d p^{cd}, \\
G_{abcd} &= ({}^3g)^{-1/2}(g_{ac}g_{bd} + g_{ad}g_{bc} - 2g_{ab}g_{cd}).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Los campos de materia  $\phi$  pueden incluirse en la acción también mediante una combinación de las funciones de lapso y shift, y por lo tanto en la formulación canónica obtenemos términos adicionales  $\mathcal{H}_{\text{matt}}$  y  $\mathcal{H}_{\text{a,matt}}$ . Se define entonces el conjunto extendido de coordenadas y momentos

$$\begin{aligned}
q^i &\equiv (g_{ab}(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x})) \\
p_i &\equiv (p^{ab}(\mathbf{x}), p_\phi(\mathbf{x})).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

El principio variacional conduce a las ecuaciones de la dinámica para las coordenadas y momentos, que en la formulación de paréntesis de Poisson tienen la forma

$$\begin{aligned}
\frac{dq^i}{d\tau} &= N[q^i, \mathcal{H}] + N^a[q^i, \mathcal{H}_a] \\
\frac{dp_i}{d\tau} &= N[p_i, \mathcal{H}] + N^a[p_i, \mathcal{H}_a].
\end{aligned} \tag{2.5}$$

No se obtienen ecuaciones para el lapso y el shift, que quedan entonces como cantidades arbitrarias; en cambio, al pedir que la acción sea estacionaria ante una variación arbitraria de  $N$  y  $N^a$  se obtiene los que se llaman *vínculo hamiltoniano y de momentos*

$$\mathcal{H} = 0, \quad \mathcal{H}_a = 0. \tag{2.6}$$

La presencia de estos vínculos refleja la covariancia general de la teoría, esto es, que la teoría de la gravitación es covariante ante cambios generales de las coordenadas. El lapso  $N$  determina la separación normal entre dos hipersuperficies sucesivas, mientras que  $N^a d\tau$  determina el corrimiento entre sus sistemas de coordenadas internos. La arbitrariedad

de  $N$  y  $N^a$  lleva a la existencia de una multiplicidad de tiempos, pues estas funciones se asocian con deformaciones locales arbitrarias de la hipersuperficie en evolución. Esto puede entenderse fácilmente si se considera una dada hipersuperficie y las direcciones normal y tangentes, y el movimiento en el caso especial de un shift nulo: Dado que el lapso corresponde a la velocidad del movimiento de la 3-hipersuperficie en la dirección normal, como  $N$  depende de  $\mathbf{x}$  y  $\tau$  la separación entre dos hipersuperficies sucesivas es diferente en diferentes puntos del espacio-tiempo, y por lo tanto el tiempo tiene un carácter local.

## 2.2 Minisuperespacios como sistemas con vínculos

La restricción a un espacio de configuración de dimensión finita, conocida como aproximación de minisuperespacio, y la elección de un lapso homogéneo dan como resultado la acción

$$S[q^i, N] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} N \left( \frac{1}{2N^2} G_{ij} \frac{dq^i}{d\tau} \frac{dq^j}{d\tau} - V(q) \right) d\tau \quad (2.7)$$

donde  $G_{ij}$  es la versión reducida de la supermétrica de DeWitt y  $V$  es el potencial, que depende de la curvatura e incluye términos correspondiente a la interacción entre la métrica y campos de materia; se entiende que ya se ha integrado sobre todo el espacio de manera que sólo queda la integración sobre  $\tau$ . La forma hamiltoniana de la acción es

$$S[q^i, p_i, N] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( p_i \frac{dq^i}{d\tau} - N\mathcal{H} \right) d\tau, \quad (2.8)$$

donde

$$\mathcal{H} = G^{ij} p_i p_j + V(q). \quad (2.9)$$

Como el shift es nulo los momentos son proporcionales a derivadas de las coordenadas:

$$p_i = \frac{1}{N} G_{ij} \frac{dq^j}{d\tau}.$$

Por ejemplo, en el caso de un modelo vacío isótropo tendríamos sólo una coordenada,  $q = \Omega \sim \ln a(\tau)$  ( $a$  el factor de escala del modelo) y sólo un momento,  $p = \pi_\Omega =$

$-(e^{3\Omega}/N)d\Omega/d\tau$ . La acción (2.8) describe un sistema que, como veremos inmediatamente, es invariante ante redefiniciones del parámetro  $\tau$ , esto es, lo que se llama un sistema parametrizado. La invariancia ante reparametrizaciones es lo que queda de la covariancia general de la teoría completa luego de que todos excepto un número finito de grados de libertad han sido “congelados”. Nótese que aunque el shift es nulo y el lapso es homogéneo,  $N$  sigue siendo una función de  $\tau$ , de manera que la separación entre dos 3-superficies sucesivas, aunque es globalmente la misma, permanece indeterminada.

Calculemos la variación más general de la acción (2.8). Ante cambios arbitrarios de las coordenadas y momentos y del lapso  $N$  se obtiene

$$\begin{aligned} \delta S = & p_i \delta q^i \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} + \\ & + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[ \left( \frac{dq^i}{d\tau} - N \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left( \frac{dp_i}{d\tau} + N \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) \delta q^i - \mathcal{H} \delta N \right] d\tau. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Si se pide que la acción sea estacionaria cuando se fijan las coordenadas en los extremos, sobre el camino clásico se obtienen las ecuaciones canónicas

$$\frac{dq^i}{d\tau} = N[q^i, \mathcal{H}], \quad \frac{dp_i}{d\tau} = N[p_i, \mathcal{H}] \quad (2.11)$$

y el vínculo hamiltoniano

$$\mathcal{H} \approx 0 \quad (2.12)$$

(usamos  $\approx$  para notar una igualdad débil, esto es, que vale sólo sobre la superficie de vínculo).

Debemos señalar dos propiedades de la dinámica del sistema. La primera es que el vínculo hamiltoniano  $\mathcal{H} = 0$  restringe las condiciones iniciales a las que se encuentran sobre la superficie de vínculo. La segunda es que la evolución del lapso es arbitraria, ya que no queda determinada por las ecuaciones canónicas; por lo tanto, existe una familia de trayectorias clásicas para cada conjunto de condiciones iniciales. El hecho de que la solución

de las ecuaciones dinámicas no quede completamente determinada se asocia siempre con la existencia de una simetría en la acción. Consideremos entonces las invariancias de la acción (2.8). Esta acción es invariante ante la transformación

$$\delta q^i = \epsilon(\tau) \frac{dq^i}{d\tau}, \quad \delta p_i = \epsilon(\tau) \frac{dp_i}{d\tau}, \quad \delta N = \frac{d(N\epsilon)}{d\tau} \quad (2.13)$$

con  $\epsilon(\tau_1) = \epsilon(\tau_2) = 0$ . Esta transformación se llama reparametrización porque es equivalente a cambiar  $\tau$  por  $\tau + \epsilon(\tau)$  sobre el camino dado por  $q^i(\tau)$  y  $p_i(\tau)$ , manteniendo invariante la integral

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} N d\tau.$$

La invariancia de la acción ante una reparametrización significa que  $\tau$  no es el tiempo, sino un parámetro físicamente irrelevante. Cuando un sistema tiene una acción como la (2.8) la solución de las ecuaciones dinámicas no queda parametrizada por  $\tau$  sino que queda en la forma

$$q^i = q^i \left( \int N d\tau \right), \quad p_i = p_i \left( \int N d\tau \right),$$

de modo que el que podemos llamar “tiempo propio”  $\int N d\tau$ , en lugar de  $\tau$ , juega el papel de tiempo. Cuando estas ecuaciones pueden ser resueltas globalmente para  $\int N d\tau$ , esto es, si se puede encontrar  $t(q^i, p_i) = \int N d\tau$ , se dice que existe un tiempo global  $t(q^i, p_i)$  para el sistema.

Consideremos ahora una transformación de gauge:

$$\delta_\epsilon q^i = \epsilon(\tau)[q^i, \mathcal{H}], \quad \delta_\epsilon p_i = \epsilon(\tau)[p_i, \mathcal{H}], \quad \delta_\epsilon N = \frac{\partial \epsilon(\tau)}{\partial \tau}. \quad (2.14)$$

En este caso tenemos

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon S &= p_i \delta_\epsilon q^i \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\partial(\epsilon \mathcal{H})}{d\tau} d\tau \\ &= \left[ \epsilon(\tau) \left( p_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \mathcal{H} \right) \right]_{\tau_1}^{\tau_2} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Vemos que sobre el camino clásico la reparametrización (2.13) es equivalente a una transformación de gauge de parámetro  $N\epsilon$  y con las condiciones de contorno  $\epsilon(\tau_1) = \epsilon(\tau_2) = 0$ . Como en el caso de los sistemas como el campo gravitatorio el vínculo no es lineal y homogéneo en los momentos, la variación de la acción ante una transformación de gauge es igual a los términos de superficie dados por (2.15); la acción es invariante sólo si se restringe las transformaciones de gauge a aquéllas que mapean los extremos en sí mismos, esto es, si restringimos los posibles gauges a los que verifican

$$\epsilon(\tau_1) = \epsilon(\tau_2) = 0. \quad (2.16)$$

La invariancia de gauge es usualmente considerada como una consecuencia de la existencia de grados de libertad espúreos. Sin embargo, la invariancia de gauge de los sistemas parametrizados se relaciona con que la variable físicamente irrelevante no es una variable dinámica sino el parámetro temporal  $\tau$ . Para todos los minisuperespacios considerados aquí, podrá identificarse un tiempo verdadero, pero esto no es así en general; un ejemplo de una acción parametrizada a la que no puede asociarse un tiempo es la acción de Jacobi, cuya variación lleva a curvas del espacio de fases con una dada energía, sin información sobre la evolución temporal [Lanczos (1986), Brown & York (1989)].

## 2.3 Cuantización

### 2.3.1 Cuantización canónica

En la cuantización canónica de Dirac–Wheeler–DeWitt se introduce una función de onda  $\Psi$  que debe obedecer la ecuación de vínculo  $\mathcal{H} \approx 0$ ,

$$\mathcal{H}\Psi = 0, \quad (2.17)$$

donde los momentos se reemplazan en la manera usual por operadores en términos de derivadas de las coordenadas:

$$p_i = -i \frac{\partial}{\partial q^i}$$

(en la teoría completa las  $q^i$  son funciones de las coordenadas espacio-temporales, y se tienen entonces derivadas funcionales). Como el hamiltoniano es cuadrático en todos los momentos  $p_i$  se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden, llamada ecuación de Wheeler–DeWitt [DeWitt (1967)]. Dado que la supermétrica depende de las coordenadas debería prestarse atención al ordenamiento de los operadores; si estamos interesados sólo en una aproximación al orden más bajo este punto puede soslayarse. Es claro que la solución  $\Psi$  no depende explícitamente del parámetro temporal  $\tau$ , sino sólo de las coordenadas  $q^i$ , lo cual refleja la invariancia de la teoría ante reparametrizaciones. En el contexto del presente trabajo debemos señalar que éste es el principal problema con la cuantización de Dirac–Wheeler–DeWitt, porque la ausencia de una noción clara de tiempo dificulta definir una probabilidad conservada definida positiva, y por lo tanto garantizar la unitariedad de la teoría. Para construir el espacio de estados físicos se necesita definir un producto interno que tenga en cuenta que puede haber un tiempo escondido entre las variables canónicas del sistema. El producto interno debe definirse introduciendo un operador lineal  $\hat{\mu}$  que fije el tiempo al efectuar la integración:

$$(\Psi_2|\Psi_1) \equiv \langle \Psi_2|\hat{\mu}|\Psi_1 \rangle = \int \Psi_2^* \hat{\mu} \Psi_1 dq. \quad (2.18)$$

Si el tiempo es  $t(q, p)$  entonces  $\hat{\mu}_{t'} = \delta(t(q, p) - t')$ , de manera que evalúa el producto al tiempo fijo  $t'$ . Por lo tanto para obtener una teoría cerrada por este camino necesitamos una definición de tiempo formalmente correcta.

Si se ha podido aislar el tiempo como una función de las variables canónicas, podría llevarse a cabo una transformación a nuevas coordenadas  $(t, q^\gamma)$  y los momentos  $(p_t, p_\gamma)$ . Si la transformación lleva a un vínculo cuadrático en  $p_t$ , entonces puede sustituirse  $p_t = -i\partial/\partial t$ ,  $p_\gamma = -i\partial/\partial q^\gamma$  para obtener una ecuación de Wheeler–DeWitt cuya solución depende de  $t$ , de manera que tendrá una forma evolucionaria. Se ha señalado (véase el capítulo 6) que, dependiendo de la elección de la transformación, sería posible incluso obtener un vínculo lineal en  $p_t$ ; en ese caso se obtiene una ecuación de Schrödinger con un hamiltoniano

verdadero  $\hbar$

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hbar\Psi.$$

La relación entre las soluciones de esta ecuación y las correspondientes a la ecuación de Wheeler–DeWitt requeriría cierto análisis, pues no sólo hay de por medio un cambio de variables, sino que la ecuación de Wheeler–DeWitt es hiperbólica, mientras que la de Schrödinger es parabólica, y por lo tanto su número de soluciones es diferente (demostraremos que este procedimiento será válido sólo para una clase de modelos muy limitada; véase más adelante). Volveremos sobre este punto en el contexto de la cuantización del modelo de Taub.

### 2.3.2 Integral de camino

Otra forma de cuantización es la de la integral de camino, que permite calcular el propagador cuántico para el sistema (ver el Apéndice B). Si, la amplitud de transición se calcula como la suma sobre todas las historias de la exponencial de la acción (2.8), el resulta diverge debido a la integración sobre caminos del espacio de fases que son redundantes porque están conecados por transformaciones de gauge. Esto se resuelve imponiendo condiciones de gauge que seleccionan un camino de cada clase de caminos equivalentes. La integral de camino da una amplitud para la transición entre estados caracterizados por por las variables que se fijan en los extremos en el principio variacional; luego, si pedimos  $\delta S = 0$  para  $\delta q_1^i = \delta q_2^i = 0$  la integral da la amplitud para la transición  $|q_1^i\rangle \rightarrow |q_2^i\rangle$ . En su expresión en términos de las variables del espacio de fases el propagador toma la forma

$$\langle q_2^i | q_1^i \rangle = \int Dq^i Dp_i DN \delta(\chi) |[\chi, \mathcal{H}]| \exp(iS[q^i, p_i, N]) \quad (2.19)$$

( $\tau$  no aparece porque no tiene sentido físico).  $\chi = 0$  es una función de fijado del gauge y  $|[\chi, \mathcal{H}]|$  es el determinante de Fadeev y Popov, que hace el resultado independiente de la elección del gauge (ver el Apéndice B). Las condiciones de gauge admisibles son las que

pueden alcanzarse desde cualquier camino llevando a cabo una transformación que sea compatible con las simetrías de la acción. Consideremos una trayectoria que difiere de un dado gauge en una cantidad infinitesimal  $\Delta$ ; las transformaciones de gauge que llevan a las variables sobre la condición de gauge deben ser tales que

$$\delta_\epsilon \chi = -\Delta. \quad (2.20)$$

Como deben satisfacerse las dos condiciones  $\epsilon(\tau_1) = \epsilon(\tau_2) = 0$ , la ecuación (2.20) debería ser de segundo orden en  $\epsilon$ . Dado que  $\delta_\epsilon N = d\epsilon/d\tau$ , el gauge más simple sería una función de  $dN/d\tau$ , como

$$\chi = \frac{dN}{d\tau} = 0 \quad (2.21)$$

(la forma más general de un gauge admisible es  $\chi \equiv dN/d\tau - \chi^*(q^i, p_i, N) = 0$  [Halliwell (1988)]).

Cualquier elección particular de  $N(\tau)$  puede llevarse a  $dN/d\tau = 0$  mediante transformaciones canónicas sucesivas de la forma  $\delta_\epsilon N = d\epsilon/d\tau$ ; estas transformaciones son posibles porque no existen restricciones sobre  $d\epsilon/d\tau$ , sino sólo sobre el parámetro  $\epsilon$  en los extremos. Las condiciones de gauge como (2.21) son llamadas “gauges derivativos”. Notemos que aunque (2.21) no fija el valor de  $N$  sino que sólo dice que  $N$  es una constante sobre la trayectoria, su valor queda determinado por el principio variacional cuando los datos en  $\tau_1$  y  $\tau_2$  son suficientes para determinar el tiempo global  $t(q, p) = \int N d\tau$  en los extremos [Ferraro & Simeone (1997)]. Efectivamente, entonces tenemos  $N = \Delta t / \Delta \tau$  y no quedan ambigüedades sobre la trayectoria clásica. Una cuantización que involucre gauges derivativos tiene un problema análogo al mencionado en la cuantización canónica, en el sentido de que no hay una distinción clara entre grados de libertad verdaderos y tiempo. Por otro lado, los gauges no canónicos no permiten prever fácilmente cómo evitar el problema de Gribov.

Señalemos que en la formulación de la integral de camino el problema del ordenamiento de los operadores se traslada a la esqueletización: los conmutadores de operadores a un

mismo tiempo son descartados, y son tenidos en cuenta para operadores causalmente conectados separados por intervalos temporales no nulos.

En la práctica, los caminos en el espacio de fases se dividen en segmentos caracterizados por dos conjuntos de puntos diferentes, uno para las coordenadas y uno para los momentos. La elección precisa de estos puntos determina el ordenamiento de los operadores en el hamiltoniano (para los detalles véase [Barvinsky (1993)] y [Henneaux & Teitelboim (1992)]).

## Capítulo 3

# Desparametrización e integral de camino

### 3.1 Identificación del tiempo

Hemos visto que, en el caso de la dinámica del campo gravitatorio, dada una condición inicial sobre las variables canónicas todo el conjunto de diferentes trayectorias clásicas en el espacio de configuración correspondientes a diferentes elecciones del lapso  $N$  pueden generarse mediante transformaciones de gauge. Dado un punto sobre una trayectoria clásica asociado con un lapso  $N_1(\tau)$ , una transformación de gauge finita cuya forma infinitesimal es (2.14) lo conecta con otro punto sobre otra trayectoria asociada con un lapso diferente  $N_2(\tau)$ . De manera análoga, podemos tomar las condiciones iniciales y partiendo de ellas construir cualquier trayectoria clásica por medio de una sucesión de transformaciones de gauge finitas. En otras palabras, la evolución dinámica, que incluye el problema de la multiplicidad de tiempos asociada con que la separación entre superficies espaciales sucesivas es arbitraria, puede reproducirse mediante transformaciones de gauge [Barvinsky (1993)]. Es entonces natural pensar que la fijación del gauge debería ser una forma de identificar un tiempo; pero el hecho de que los gauges admisibles no son de la forma canónica  $\chi(q^i, p_i, \tau)$ , debido a la ausencia de invariancia de gauge en los extremos de la acción, impediría pasar de esta idea a un programa concreto de desparametrización [Simeone (1999)].

### 3.1.1 Fijación del gauge y desparametrización

La elección de las condiciones de gauge  $\chi = 0$  adecuadas para seleccionar un camino entre cada clase de caminos equivalentes está restringida por:

1. Una condición de gauge admisible debe poder alcanzarse desde cualquier camino mediante transformaciones de gauge que dejen a la acción invariante.
2. Sólo un punto de cada órbita, es decir, de cada conjunto de puntos de la superficie de vínculo conectados por transformaciones de gauge, debe encontrarse sobre la variedad definida por  $\chi = 0$ . Esto suele requerir cierto cuidado: si la hipersuperficie definida por la ecuación  $\mathcal{H} = 0$  es topológicamente no trivial, puede ser difícil intersectarla con una condición de gauge que sea cortada una sola vez por cada órbita. En esto consiste el llamado *problema de Gribov*.

Supongamos que es posible llevar a cabo una transformación canónica  $(q^i, p_i) \rightarrow (Q^i, P_i)$  tal que el vínculo hamiltoniano  $\mathcal{H}$  se identifica con uno de los nuevos momentos, por ejemplo  $P_0$ . Entonces, en términos de las nuevas variables  $(Q^i, P_i)$  la funcional acción incluiría un vínculo que es lineal y homogéneo en los momentos, y sería invariante de gauge en los extremos. Esto es equivalente a decir que las variables canónicas  $(Q^i, P_i)$  describen un sistema de gauge ordinario. Serían admisibles así las condiciones de gauge canónicas

$$\chi(Q^i, P_i, \tau) = 0$$

ya que verificarían la condición (1).

La condición (2) requiere que una transformación de gauge mueva un punto de una órbita fuera de la superficie  $\chi = 0$ ; como las transformaciones de gauge son generadas por el vínculo  $\mathcal{H}$ , entonces se debería verificar que

$$\delta_\epsilon \chi = \epsilon(\tau)[\chi, \mathcal{H}] \neq 0 \quad (3.1)$$

a menos que  $\epsilon = 0$ ; esto se cumple si

$$[\chi, \mathcal{H}] \neq 0. \quad (3.2)$$

Como  $Q^0$  y  $P_0$  son variables conjugadas,

$$[Q^0, P_0] = 1 \quad (3.3)$$

y como hemos identificado  $\mathcal{H} \equiv P_0$ , una condición de gauge de la forma

$$\chi \equiv Q^0 - T(\tau) = 0 \quad (3.4)$$

con  $T$  una función monótona es una buena elección. Estrictamente, la ecuación (3.1) solamente asegura que las órbitas no son tangentes a la superficie  $\chi = 0$ ; sin embargo, como (3.4) define un plano  $Q^0 = \text{constante}$  para cada  $\tau$ , si en algún  $\tau$  cualquier órbita fuera cortada más de una vez (dando entonces lugar a la existencia de copias de Gribov), en algún otro  $\tau$  debería ser  $[\chi, P_0] = 0$ . Por lo tanto esta forma de fijar el gauge evita el problema de Gribov. Esta elección no es la única posible con esta propiedad: por ejemplo, podría multiplicarse  $Q^0$  por cualquier función que conmutara con  $P_0$  y que fuera no nula en todas partes.

Desde un punto de vista diferente, dado un sistema parametrizado con coordenadas y momentos  $(q^i, p_i)$  una función suave  $t(q^i, p_i)$  que cumple

$$[t, \mathcal{H}] > 0 \quad (3.5)$$

es un tiempo global para el sistema [Hájíček (1986)], y sus valores a lo largo de cualquier trayectoria clásica pueden usarse para parametrizar su evolución. Dado que los paréntesis de Poisson son invariantes ante una transformación canónica, de (3.3) y (3.5) se sigue que un gauge globalmente bueno dado en términos de la coordenada  $Q^0$  del sistema de gauge puede usarse para definir un tiempo global  $t$  para el sistema parametrizado en términos de sus coordenadas y momentos  $(q^i, p_i)$ . En otra palabras, *una elección de gauge*

para el sistema de gauge define una foliación particular del espacio-tiempo para el sistema parametrizado [Simeone (1999)]. Si tenemos la seguridad de que hemos encontrado una elección del gauge que evita el problema de Gribov, entonces dicho gauge provee de una definición de tiempo que es globalmente buena. Una transformación tal que  $\mathcal{H} = P_0$  puede siempre encontrarse localmente; el punto es obtener una transformación canónica que funcione en todo el espacio de fases.

La condición para que una función  $t(q^i, p_i)$  sea un tiempo global puede entenderse como sigue: Definamos el vector hamiltoniano

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \equiv H^A &= (H^q, H^p) \\ &= \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Entonces la condición

$$[t, \mathcal{H}] > 0$$

es equivalente a

$$H^A \frac{\partial t}{\partial x^A} > 0$$

donde  $x^A = (q^i, p_i)$ . Esto significa que  $t(q^i, p_i)$  crece monótonamente a lo largo de una trayectoria dinámica, esto es, cada superficie  $t = \text{constante}$  en el espacio de fases es atravesada por una trayectoria dinámica sólo una vez (de manera que las líneas de campo del vector hamiltoniano  $\mathbf{H}$  son abiertas): luego, los sucesivos estados del sistema pueden ser parametrizados por  $t(q^i, p_i)$ .

Supongamos ahora que definimos un vínculo escaleado

$$H = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{H}, \quad \mathcal{F} > 0.$$

Puede mostrarse fácilmente que  $H$  y  $\mathcal{H}$  son vínculos equivalentes en el sentido de que describen el mismo sistema parametrizado: sus líneas de campo, que coinciden con las

trayectorias clásicas, son proporcionales sobre la superficie de vínculo. Por lo tanto, si podemos encontrar una función  $\bar{t}(q^i, p_i)$  con la propiedad

$$[\bar{t}, H] > 0,$$

sabemos que  $\bar{t}(q^i, p_i)$  crece monótonamente a lo largo de las trayectorias dinámicas asociadas con  $H$  y  $\mathcal{H}$ , y es también un tiempo global. El hecho de que si el vínculo es multiplicado por una función definida positiva se obtiene un vínculo equivalente, puede a veces simplificar la solución del problema de la desparametrización, ya que ésta estará basada en la posibilidad de resolver la ecuación de Hamilton–Jacobi asociada con el vínculo hamiltoniano.

### 3.1.2 Topología de la superficie de vínculo: tiempo intrínseco y extrínseco

Como hemos señalado, una función  $t(q^i, p_i)$  es un tiempo global si  $[t, \mathcal{H}] > 0$ . Como la supermétrica  $G^{ik}$  no depende de los momentos, una función  $t(q^i)$  es un tiempo global si

$$\begin{aligned} [t(q^i), \mathcal{H}] &= [t(q^i), G^{ik} p_i p_k] \\ &= 2 \frac{\partial t}{\partial q^i} G^{ik} p_k > 0. \end{aligned}$$

Si la supermétrica es diagonal y uno de los momentos se anula en algún punto del espacio de fases, entonces ninguna función de solamente su coordenada conjugada puede ser un tiempo. Para un vínculo cuyo potencial se anula para valores finitos de las coordenadas, los momentos  $p_k$  pueden ser todos nulos simultáneamente, y  $[t(q^i), \mathcal{H}]$  puede anularse. Luego, puede definirse un tiempo intrínseco  $t(q^i)$  sólo si el potencial tiene un signo definido. En el caso más general un tiempo global debe ser una función de las coordenadas y los momentos; en este caso se dice que el sistema tiene un tiempo extrínseco  $t(q^i, p_i)$ , porque los momentos se relacionan con la curvatura extrínseca.

Es habitual considerar un tiempo intrínseco como más “natural”, mientras que la necesidad de trabajar con uno extrínseco suele pensarse como algo de alguna manera

patológico. Sin embargo, esto es quizá nada más que una consecuencia de trabajar usualmente con sistemas parametrizados simples, como la partícula relativista (ver más abajo); el formalismo para estos sistemas, puesto en forma manifiestamente covariante, incluye al tiempo entre sus coordenadas, y la evolución se da en términos de un parámetro temporal que carece de sentido físico. Pero mientras para estos sistemas la coordenada temporal se refiere siempre a un reloj externo, este no es, claramente, el caso de la cosmología; por ejemplo, en el caso de la dinámica del campo gravitatorio puro, las coordenadas son los elementos de la métrica  $g_{ab}$  sobre superficies espaciales, y en principio no necesariamente existe alguna conexión entre  $g_{ab}$  y algo “externo”. En cambio, una relación de ese tipo podría pensarse que existe para las derivadas  $dg_{ab}/dr$  de la métrica, dado que ellas aparecen en la expresión de la curvatura extrínseca  $K_{ab}$  que describe la evolución de las superficies espaciales tridimensionales en el espacio-tiempo cuatridimensional. Si no hay materia presente, los momentos canónicos están dados por

$$p_i \equiv p^{ab} = -2G^{abcd}K_{cd},$$

y por lo tanto debe esperarse que los momentos aparezcan en la definición de un tiempo global [Giribet & Simeone (2001b)]. La existencia de un tiempo en términos de solamente las coordenadas debería entonces entenderse como una suerte de “accidente” relacionado con el hecho de que, en algunos casos que no representan las propiedades generales de la teoría de la gravitación, existe una relación que permite obtener las coordenadas en términos de los momentos sin ambigüedades. Al nivel de la cuantización, esto significa que tendremos que revisar algunos aspectos a los cuales estamos acostumbrados: como veremos más adelante, existen modelos cosmológicos para los cuales una descripción cuántica en términos de solamente las coordenadas originales será imposible si se quiere trabajar en una teoría con una noción clara de tiempo.

## 3.2 Acción invariante de gauge para un sistema parametrizado

En esta sección desarrollaremos un procedimiento para obtener una acción invariante de gauge para sistemas parametrizados cuya ecuación de Hamilton–Jacobi es separable. Hemos ya señalado que la variación de la acción de un sistema tal ante una transformación de gauge es igual a términos de superficie; la acción de la gravitación no tiene entonces invariancia de gauge en los extremos de la trayectoria, y los gauges canónicos no serían admisibles. Pero en la sección anterior hicimos notar que si era posible hacer una transformación canónica tal que el vínculo hamiltoniano se identificaba con un nuevo momento, el sistema se transformaba en un sistema de gauge ordinario; luego, podrían usarse condiciones de gauge canónicas para seleccionar un camino de cada clase de equivalencia en el espacio de fases. De hecho, veremos que cuando se puede encontrar dicha transformación el resultado es equivalente a agregar términos de superficie, y la variación de estos términos cancela exactamente la variación de la acción original. Desde este punto de vista, no habría una verdadera diferencia conceptual entre un sistema parametrizado y uno de gauge ordinario: aunque el valor práctico de tener vínculos lineales ha llevado a una distinción, la existencia de una simetría de gauge particular no sería nada más que una consecuencia de una dada elección de las variables con que se describe el sistema, y podría ser que las que aparecen en primera instancia como más naturales no son las mejores para construir un formalismo consistente.

### 3.2.1 Términos de superficie

Consideremos una solución completa [Landau & Lifshitz (1960)]  $W(q^i, \alpha_\mu, E)$  de la ecuación de Hamilton–Jacobi

$$H\left(q^i, \frac{\partial W}{\partial q^i}\right) = E \quad (3.7)$$

done  $H$  no es necesariamente el hamiltoniano original, sino que puede ser un hamiltoniano escalado, esto es,  $H = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{H}$  donde  $\mathcal{F}$  es una función definida positiva de las  $q^i$ . Si  $E$  y las

constantes de integración  $\alpha_\mu$  se igualan a los nuevos momentos  $\bar{P}_0$  y  $\bar{P}_\mu$  respectivamente, entonces  $W(q^i, \bar{P}_i)$  resulta ser el generador de una transformación canónica  $(q^i, p_i) \rightarrow (\bar{Q}^i, \bar{P}_i)$  definida por las ecuaciones

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q^i}, \quad \bar{Q}^i = \frac{\partial W}{\partial \bar{P}_i}, \quad \bar{K} = N\bar{P}_0 = NH \quad (3.8)$$

donde  $\bar{K}$  es un nuevo hamiltoniano. Las nuevas coordenadas y momentos verifican

$$[\bar{Q}^\mu, \bar{P}_0] = [\bar{Q}^\mu, H] = 0$$

$$[\bar{P}_\mu, \bar{P}_0] = [\bar{P}_\mu, H] = 0$$

$$[\bar{Q}^0, \bar{P}_0] = [\bar{Q}^0, H] = 1.$$

La acción resultante

$$\bar{S}[\bar{Q}^i, \bar{P}_i, N] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( \bar{P}_i \frac{d\bar{Q}^i}{d\tau} - N\bar{P}_0 \right) d\tau \quad (3.9)$$

describe un sistema con un hamiltoniano verdadero nulo, y un vínculo que es lineal y homogéneo en el momento  $P_0$ . De esta manera la acción  $\bar{S}$  tiene invariancia de gauge en los extremos. La acción  $\bar{S}$  puede relacionarse con la original  $S$  a partir de que

$$p_i dq^i = d(W(q^i, \bar{P}_i) - \bar{Q}^i \bar{P}_i) + \bar{P}_i d\bar{Q}^i,$$

como se deduce de (3.8). Por lo tanto en términos de las variables originales tenemos

$$\begin{aligned} \bar{S}[q^i, p_i, N] &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( p_i \frac{dq^i}{d\tau} - NH \right) d\tau \\ &+ \left[ \bar{Q}^i(q^i, p_i) \bar{P}_i(q^i, p_i) - W(q^i, \bar{P}_i) \right]_{\tau_1}^{\tau_2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Vemos que la acción invariante  $\bar{S}$  difiere de la original en los términos de superficie

$$\bar{B} = \left[ \bar{Q}^i(q^i, p_i) \bar{P}_i(q^i, p_i) - W(q^i, \bar{P}_i) \right]_{\tau_1}^{\tau_2} \quad (3.11)$$

Es sencillo verificar que estos términos efectivamente cancelan la variación de  $S$  ante una transformación de gauge: escribiendo

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon \bar{B} &= \left[ \delta_\epsilon (\bar{Q}^i \bar{P}_i - W) \right]_{\tau_1}^{\tau_2} \\ &= \left[ \epsilon(\tau) \bar{P}_0 - \frac{\partial W}{\partial q^i} \delta_\epsilon q^i - \frac{\partial W}{\partial \bar{P}_i} \delta_\epsilon \bar{P}_i \right]_{\tau_1}^{\tau_2}\end{aligned}$$

y usando que  $[\bar{P}_i, \bar{P}_0] = 0$  y  $\delta_\epsilon q^i = \epsilon(\tau)[q^i, H]$  obtenemos

$$\delta_\epsilon \bar{B} = - \left[ \epsilon(\tau) \left( p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H \right) \right]_{\tau_1}^{\tau_2}$$

(compárese con la (2.15)). Los términos de superficie dotan a la acción de invariancia de gauge en los extremos, y no modifican la dinámica, pues pueden incluirse en el integrando de la acción como una derivada total respecto del parámetro  $\tau$ .

### 3.2.2 Observables y tiempo

Dado que  $\bar{Q}^\mu$  y  $\bar{P}_\mu$  conmutan con  $\bar{K} = N\bar{P}_0$  entonces son observables *conservados* que describen lo que llamaremos el *sistema reducido*. Su carácter conservado imposibilita caracterizar las trayectorias dinámicas del sistema mediante una elección arbitraria de los valores de  $\bar{Q}^\mu$  en los extremos  $\tau_1$  y  $\tau_2$ . Si se quiere obtener un conjunto de observables tales que la elección de las nuevas coordenadas sea suficiente para caracterizar la evolución dinámica deberíamos buscar observables no conservados, y por lo tanto deberíamos definir una nueva transformación canónica dependiente de  $\tau$ , que llevará a un hamiltoniano no nulo. En otras palabras, se necesita una segunda transformación, ahora en el espacio de observables. La segunda transformación dará como resultado nuevos términos de superficie; como la primera  $(q^i, p_i) \rightarrow (\bar{Q}^i, \bar{P}_i)$  condujo a una acción invariante, los nuevos términos de superficie deben ser invariantes.

Consideremos la transformación generada por

$$F(\bar{Q}^i, P_i, \tau) = P_0 \bar{Q}^0 + f(\bar{Q}^\mu, P_\mu, \tau). \quad (3.12)$$

Entonces

$$H = \bar{P}_0 = \frac{\partial F}{\partial Q^0} = P_0, \quad \bar{P}_\mu = \frac{\partial F}{\partial \bar{Q}^\mu} = \frac{\partial f}{\partial \bar{Q}^\mu},$$

$$Q^0 = \frac{\partial F}{\partial P_0} = \bar{Q}^0, \quad Q^\mu = \frac{\partial F}{\partial P_\mu} = \frac{\partial f}{\partial P_\mu}.$$

La transformación en el espacio de fases reducido está definida por el generador  $f$ . Las coordenadas y momentos  $(Q^\mu, P_\mu)$  son observables porque conmutan con el vínculo  $H = P_0$ ,

$$[Q^\mu, P_0] = [P_\mu, P_0] = 0,$$

pero son cantidades no conservadas, porque su evolución está dada por el hamiltoniano no nulo

$$K = NP_0 + \frac{\partial f}{\partial \tau} = NH + \frac{\partial f}{\partial \tau} \quad (3.13)$$

(ver, por ejemplo, la discusión acerca de “perennials” [Kuchař (1993)]). En efecto,

$$\frac{dQ^\mu}{d\tau} = \frac{\partial K}{\partial P_\mu} = \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial P_\mu} f(\bar{Q}^\mu(Q^\mu, P_\mu), P_\mu, \tau)$$

$$\frac{dP_\mu}{d\tau} = \frac{\partial K}{\partial Q^\mu} = \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial Q^\mu} f(\bar{Q}^\mu(Q^\mu, P_\mu), P_\mu, \tau), \quad (3.14)$$

de modo que

$$h(Q^\mu, P_\mu, \tau) \equiv \frac{\partial}{\partial \tau} f(\bar{Q}^\mu(Q^\mu, P_\mu), P_\mu, \tau) \quad (3.15)$$

juega el papel de un hamiltoniano verdadero para el sistema reducido. La función  $f$  y por lo tanto  $h$  no se definirán por el momento; más adelante daremos una prescripción para elegir  $f$ . Para la coordenada conjugada al vínculo se tiene

$$\frac{dQ^0}{d\tau} = [Q^0, K] = N[Q^0, P_0] = N. \quad (3.16)$$

La segunda transformación  $(\bar{Q}^i, \bar{P}_i) \rightarrow (Q^i, P_i)$  conduce a los nuevos términos de superficie

$$\left[ Q^i P_i - F(\bar{Q}^i, P_i, \tau) \right]_{\tau_1}^{\tau_2} = \left[ Q^\mu P_\mu - f(\bar{Q}^\mu(Q^\mu, P_\mu), P_\mu, \tau) \right]_{\tau_1}^{\tau_2}.$$

Estos términos dependen sólo de observables, y por lo tanto son efectivamente invariantes de gauge. La acción invariante de gauge que resulta de la dos transformaciones  $(q^i, p_i) \rightarrow (\bar{Q}^i, \bar{P}_i) \rightarrow (Q^i, P_i)$  es

$$S[Q^i, P_i, N] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( P_i \frac{dQ^i}{d\tau} - NP_0 - \frac{\partial f}{\partial \tau} \right) d\tau \quad (3.17)$$

y en términos de las variables originales se escribe

$$S[q^i, p_i, N] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( p_i \frac{dq^i}{d\tau} - NH \right) d\tau + \left[ \bar{Q}^i \bar{P}_i - W(q^i, \bar{P}_i) + Q^\mu P_\mu - f(\bar{Q}^\mu, P_\mu, \tau) \right]_{\tau_1}^{\tau_2}, \quad (3.18)$$

done  $\bar{Q}^i, \bar{P}_i, Q^\mu$  y  $P_\mu$  deben ponerse en términos de  $q^i$  y  $p_i$ . La acción  $S[Q^i, P_i, N]$  describe un sistema de gauge ordinario con un vínculo  $P_0 \approx 0$ , de manera que la coordenada  $Q^0$  es puro gauge, esto es,  $Q^0$  no está asociada con un grado de libertad físico. Esta coordenada puede definirse como una función arbitraria de  $\tau$  mediante la elección de un gauge canónico

$$\chi \equiv Q^0 - T(\tau) = 0.$$

Escribiendo  $Q^0$  en términos de  $q^i$  y  $p_i$  tenemos una función de las variables del espacio de fases original cuyo paréntesis de Poisson con  $H = P_0$  está definido positivo; como  $H$  difiere del vínculo original en una función positiva, entonces podemos definir un tiempo global como

$$t(q^i, p_i) \equiv Q^0(q^i, p_i) \quad (3.19)$$

pues

$$[t(q^i, p_i), H(q^i, p_i)] = [Q^0, P_0] = 1, \quad (3.20)$$

y por lo tanto

$$[t(q^i, p_i), \mathcal{H}(q^i, p_i)] > 0. \quad (3.21)$$

Hemos entonces mostrado que imponiendo una condición de gauge sobre el sistema de gauge descrito por  $(Q^i, P_i)$  hemos identificado un tiempo global para el sistema parametrizado caracterizado por  $(q^i, p_i)$ . El punto clave ha sido que en términos de las variables del sistema de gauge tenemos una elección natural de una función cuyo paréntesis de Poisson con el vínculo no se anula nunca. Más aún, el paso a las nuevas variables da a la superficie de vínculo una geometría trivial que permite fijar el gauge de una manera que evita las copias de Gribov. Como veremos más adelante en el contexto de la cuantización de minisuperespacios, la elección del gauge puede relajarse para permitir diferentes definiciones del tiempo. En general, preferiremos la más simple compatible con la topología de la superficie de vínculo.

### 3.2.3 Vínculos no separables

Nuestro método de desparametrización y cuantización se basa en una transformación canónica generada por una solución de la ecuación de Hamilton–Jacobi, de manera que, en principio, no es aplicable cuando dicha ecuación no es separable. Esta es una restricción importante, pero no estamos más limitados que a nivel clásico, dado que podemos cuantizar aquellos modelos que son clásicamente integrables. Un punto importante en este sentido es que en la cosmología de cuerdas los hamiltonianos separables aparecen de manera natural en el límite de bajas energías; la razón es que en este límite se tienen campos no masivos, de manera que el vínculo no incluye la combinación de potencias y exponenciales que es el obstáculo más usual.

Un tratamiento posible para hamiltonianos no separables podría ser buscar una solución aproximada restringiéndonos a regiones del espacio de fases donde uno u otro término del potencial puede despreciarse, tal como se hace a veces en la cuantización canónica al obtener soluciones aproximadas de la ecuación de Wheeler–DeWitt. Por el momento no nos ocuparemos de este tema (véase el capítulo 5 y, por ejemplo, [Halliwell (1990)]).

### 3.3 Integral de camino

#### 3.3.1 Formalismo general

La acción  $S[Q^i, P_i, N]$  es estacionaria cuando se fijan las coordenadas  $Q^i$  en los extremos. Las variables  $(Q^i, P_i)$  describen un sistema de gauge con un vínculo lineal, de manera que esta acción permite obtener la amplitud para la transición  $|Q_1^i, \tau_1\rangle \rightarrow |Q_2^i, \tau_2\rangle$  mediante el método usual de Fadeev y Popov:

$$\begin{aligned} \langle Q_2^i, \tau_2 | Q_1^i, \tau_1 \rangle &= \int DQ^0 DP_0 DQ^\mu DP_\mu DN \delta(\chi) |[\chi, P_0]| e^{iS[Q^i, P_i, N]} \\ S[Q^i, P_i, N] &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( P_i \frac{dQ^i}{d\tau} - NP_0 - \frac{\partial f}{\partial \tau} \right) d\tau, \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde  $\chi$  puede ser cualquier gauge canónico. El determinante de Fadeev y Popov  $|[\chi, P_0]|$  asegura que el resultado no depende de la elección del gauge. A diferencia de lo que ocurre con las variables originales (ver la (2.19)), aquí la amplitud depende de  $\tau_1$  y  $\tau_2$ ; esto refleja que después de la transformación canónica ya no tenemos un sistema parametrizado, sino que en cambio tenemos un grado de libertad espúreo y el parámetro  $\tau$  es un tiempo. Si integramos sobre  $N$  obtenemos

$$\begin{aligned} \langle Q_2^i, \tau_2 | Q_1^i, \tau_1 \rangle &= \int DQ^0 DQ^\mu DP_\mu \delta(\chi) |[\chi, P_0]| \\ &\quad \times \exp \left( i \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[ P_\mu \frac{dQ^\mu}{d\tau} - h(Q^\mu, P_\mu, \tau) \right] d\tau \right), \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde  $h \equiv \partial f / \partial \tau$  es el hamiltoniano verdadero (no nulo) del sistema reducido. La integral da la amplitud para la transición entre estados caracterizados por las variables que hacen que la acción sea estacionaria cuando se las fija en los extremos, de manera que debemos elegir el gauge para que  $Q^0$  quede como función de las otras coordenadas  $Q^\mu$ , de  $\tau$  y de constantes:

$$\chi \equiv Q^0 - T(Q^\mu, c_\nu, \tau) = 0. \quad (3.24)$$

Luego de una integración trivial obtenemos:

$$\begin{aligned}
\langle Q_2^i, \tau_2 | Q_1^i, \tau_1 \rangle &= \\
&= \int DQ^\mu DP_\mu \exp \left( i \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[ P_\mu \frac{dQ^\mu}{d\tau} - h(Q^\mu, P_\mu, \tau) \right] d\tau \right) \\
&= \langle Q_2^\mu, \tau_2 | Q_1^\mu, \tau_1 \rangle.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Ahora queremos relacionar esta integral con una amplitud entre estados caracterizados por las variables originales del sistema. Como la acción original  $S$  es estacionaria cuando se fijan las  $q^i$  en los extremos, es usual buscar un propagador de la forma

$$\langle q_2^i | q_1^i \rangle, \tag{3.26}$$

Pero en cosmología no es siempre posible definir un tiempo global en términos de las  $q^i$ ; así, la amplitud  $\langle q_2^i | q_1^i \rangle$  no es la respuesta a una pregunta como “cuál es la probabilidad de que un observable del sistema tome un cierto valor a un tiempo  $t$  si en un tiempo anterior tomó algún valor dado?”.

Formalmente esto puede entenderse así: Si queremos que la amplitud  $\langle Q_2^\mu, \tau_2 | Q_1^\mu, \tau_1 \rangle$  sea equivalente a  $\langle q_2^i | q_1^i \rangle$  debería verificarse que los caminos fueran pesados en la integral de la misma manera por  $S$  y por  $\tilde{S}$  (la función  $f$  será importante en este aspecto), y que los estados  $|Q^\mu, \tau\rangle$  sean equivalentes a  $|q^i\rangle$ . Como la integral en las variables  $(Q^i, P_i)$  es invariante de gauge, esto ocurre si es posible elegir un gauge  $\tilde{\chi} = 0$  globalmente bueno tal que defina  $\tau = \tau(q^i)$ . Pero en ese caso  $t(q^i)$  sería un tiempo global, y sólo existe un tiempo intrínseco si el potencial tiene un signo definido, esto es, si la superficie de vínculo se separa en dos hojas. En el caso más general esto no ocurre, y por lo tanto si queremos cuantizar el sistema con una noción clara de tiempo deberíamos admitir una caracterización de los estados en términos de las coordenadas  $q^i$  y también de los momentos  $p_i$ .

Esto sugiere que debemos abandonar la idea de obtener una amplitud para estados caracterizados por las coordenadas originales. Sin embargo, mientras una desparametrización

en términos de los momentos puede ser completamente válida a nivel clásico, ha sido señalado por Barvinsky que al nivel cuántico existe un obstáculo que es peculiar de la gravitación [Barvinsky (1993)]: Existen básicamente dos representaciones para los operadores, la de coordenadas y aquella en la cual los estados se dan mediante números de ocupación asociados a valores de los momentos. Esta última requiere la existencia de estados asintóticos libres, y en cosmología dichos estados en general no existen. Una representación adecuada debe ser capaz de manejarse con interacciones no lineales y no polinómicas, y una representación así es la de coordenadas. En esta representación los estados están dados por una función de onda que depende de las coordenadas. El esquema de cuantización de Dirac–Wheeler–DeWitt, con operadores de momentos en la representación de coordenadas y actuando sobre  $\Psi(q)$  sigue esta línea; pero, como hemos notado, dicha formulación, en su forma usual, carece de una noción clara de tiempo y evolución.

Adoptaremos entonces una solución intermedia: cuando el vínculo admite un tiempo intrínseco aplicaremos directamente nuestro método de desparametrización y cuantización para obtener una amplitud de transición entre estados caracterizados por las coordenadas originales; esto nos dará una cuantización con una distinción clara entre tiempo y grados de libertad físicos, aunque el tiempo puede llegar a ser una función no trivial de las coordenadas (el modelo de anisótropo de Kantowski–Sachs será un buen ejemplo de esto [Simeone (2000)]). Cuando sólo exista tiempo extrínseco, en cambio, a menos que los modelos sean lo bastante simples como para entender los resultados a partir de las variables  $(Q^i, P_i)$ , procederemos como sigue: para hacer compatible una definición globalmente buena de tiempo con una representación de coordenadas haremos una transformación canónica de  $(q^i, p_i)$  al conjunto  $(\bar{q}^i, \bar{p}_i)$  definido de manera tal que el vínculo de un dado modelo cosmológico tiene un potencial que no se anula; entonces existe un tiempo intrínseco en términos de las  $\bar{q}^i$ . La acción  $S[\bar{q}^i, \bar{p}_i, N]$  es estacionaria cuando las  $\bar{q}^i$  se fijan en los

extremos, y por lo tanto aplicaremos nuestro procedimiento para obtener la amplitud

$$\langle \bar{q}_2^i | \bar{q}_1^i \rangle,$$

que en general dependerá de las coordenadas y momentos originales. Aunque a primera vista esto parece oscurecer la interpretación del propagador o la función de onda, veremos que los momentos originales quedarán confinados a la variable temporal, mientras que las nuevas coordenadas correspondientes a los grados de libertad físicos dependerán solamente de las coordenadas originales (una discusión detallada se dará en el contexto de la cuantización del modelo anisótropo de Taub, tanto en el formalismo de integral de camino como en el canónico).

### 3.3.2 La función $f$ y el hamiltoniano reducido. Unitariedad

Como mencionamos, hasta ahora la función  $f$  y el hamiltoniano reducido  $h$  no están definidos. Haremos uso de esta libertad para elegir  $f$  de manera que la amplitud  $\langle Q_2^\mu, \tau_2 | Q_1^\mu, \tau_1 \rangle$  sea equivalente a  $\langle \bar{q}_2^i | \bar{q}_1^i \rangle$ .

1. El hamiltoniano es tal que se puede elegir un gauge  $\tilde{\chi} = 0$  globalmente bueno que defina  $\tau = \tau(\bar{q}^i)$ . Esto equivale a la existencia de un tiempo intrínseco en términos de las coordenadas  $\bar{q}^i$  (pero no necesariamente de las  $q^i$ ). Entonces una elección particular de las coordenadas invariantes  $Q^\mu$  y de  $\tau$  define un punto en el espacio de configuración de las  $\bar{q}^i$ .

Esto no asegura que las amplitudes son equivalentes; de hecho, como en términos de las coordenadas  $(\bar{q}^i, \bar{p}_i)$  la acción invariante  $S$  contiene términos adicionales de superficie  $B$ , los caminos no son pesados de la misma forma por  $S$  y por  $S$ . Entonces debemos pedir que:

2. Los términos de superficie  $B$  se cancelen sobre la superficie de vínculo en el gauge  $\tilde{\chi} = 0$  que define  $\tau = \tau(\tilde{q}^i)$ , esto es,

$$B = \left[ \overline{Q}^i \overline{P}_i - W + Q^\mu P_\mu - f \right]_{\tau_1}^{\tau_2} \Big|_{P_0=0, \tilde{\chi}=0} = 0. \quad (3.27)$$

Como  $S$  es invariante de gauge, esto asegura que con cualquier gauge los caminos son pesados de la misma forma por  $S$  y por  $S$ . Esta condición da una prescripción para el generador  $f(\overline{Q}^\mu, P_\mu, \tau)$ , y por lo tanto también determina el hamiltoniano reducido  $h = \partial f / \partial \tau$ . Nótese que como  $f$  depende sólo de observables,  $h$  conmuta con el hamiltoniano completo  $K = NP_0 + h$ , de forma que

$$\frac{dh}{d\tau} = \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2}.$$

Luego, si se pudiera definir  $f$  como una función lineal en  $\tau$  obtendríamos un hamiltoniano conservado para el sistema reducido

El hamiltoniano reducido podría ser tanto positivo como negativo. La posibilidad de un doble signo no es necesariamente una dificultad seria: por ejemplo, un doble signo aparece en la teoría para una partícula relativista, y la interpretación es la de partículas y antipartículas (ver la sección siguiente); a menos que se incluya una interacción que anule la masa efectiva –y por lo tanto haga que se toquen ambas hojas del vínculo–, se puede trabajar con dos teorías disjuntas [Barvinsky (1993)]. Por lo tanto si en nuestra formulación aparece un doble signo la podríamos entender de la misma manera (el problema de un potencial dependiente del tiempo [Kuchař (1981)] se discutirá más adelante; véanse los capítulos 4 y 5). Una dificultad importante, en cambio, es la de un hamiltoniano reducido que se anula o incluso se hace imaginario. Un hamiltoniano imaginario no puede asociarse a un operador autoadjunto, y la teoría resultante no es unitaria [Hájíček (1986)] (véase el capítulo 5). Como estamos buscando una teoría unitaria, nuestro análisis se restringirá a modelos cosmológicos para los cuales existe un momento que no se anula, de manera que

existe un tiempo intrínseco, o modelos tales que puede llevarse a cabo la transformación a las coordenadas  $\tilde{q}^i$  en términos de las cuales puede definirse un tiempo. Como veremos, los dos signos posibles del momento que no se anula estarán en correspondencia con los dos posibles hamiltonianos reducidos; el formalismo resultante incluirá dos teorías para los grados de libertad físicos, una para cada signo de  $h$  asociado a cada hoja del vínculo. La integral de camino dará como resultado dos propagadores, uno para la evolución de las funciones de onda de cada teoría; la ecuación de Wheeler–DeWitt dará como resultado dos conjuntos de funciones, asociados a energías positivas y negativas (véase [Barvinsky (1993)] y [Hájíček (1986)]).

### 3.4 Ejemplos

Ilustraremos nuestro procedimiento con algunos ejemplos usuales, como la partícula relativista y el reloj ideal. La analogía entre el formalismo hamiltoniano para la partícula relativista y cosmologías simples, en particular la invariancia ante reparametrizaciones, ha llevado a usar a la primera como una especie de modelo ‘de juguete’ de la gravitación; sin embargo, recordemos que la partícula relativista libre no puede reproducir el problema del potencial que se anula, y que lleva a la inexistencia de un tiempo intrínseco.

#### 3.4.1 Propagador de Feynman para la ecuación de Klein–Gordon

Obtendremos el propagador de Feynman para la ecuación de Klein–Gordon asociada a la partícula libre relativista:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 + m^2\right)\psi = 0.$$

En el formalismo canónico la partícula relativista es descrita por el vínculo

$$\mathcal{H} = p_0^2 - p^2 - m^2 \approx 0. \quad (3.28)$$

La presencia del vínculo refleja que se ha incluido al verdadero tiempo entre las variables canónicas: si calculamos el paréntesis de  $x^0$  con el vínculo obtenemos

$$[x^0, \mathcal{H}] = 2p_0,$$

de manera que el tiempo es  $x^0$  sobre la hoja  $p_0 > 0$ , y  $-x^0$  sobre la hoja  $p^0 < 0$ . Obtendremos el propagador calculando el promedio funcional de la función de Heaviside  $\theta(s)$ , donde  $s$  es el tiempo propio.

La ecuación de Hamilton–Jacobi para este sistema tiene la solución

$$W_{\pm}(x, x^0, \bar{P}, \bar{P}_0) = \bar{P}x \pm x^0 \sqrt{\bar{P}^2 + \bar{P}_0 + m^2}.$$

donde hemos identificado las constantes  $E = \bar{P}_0$  y  $\alpha = \bar{P}$ . La generatriz  $f$  que cancela los términos de superficie en el gauge canónico  $\bar{\chi} \equiv x^0 - T(\tau) = 0$  (que da  $\tau = \tau(q^i)$ ) es

$$f(\bar{Q}, P, \tau) = \bar{Q}P \mp T(\tau) \sqrt{P^2 + m^2}.$$

Esta elección de gauge es globalmente buena porque  $[\bar{\chi}, \mathcal{H}] \neq 0$ , y entonces  $\bar{\chi}$  puede usarse para definir un tiempo global  $t$ ; como ya vimos, podemos definir  $t = \pm x^0$ . Los términos de superficie son

$$B \equiv \mp \frac{m^2(x^0 - T(\tau))}{\sqrt{P^2 + m^2}}, \quad (3.29)$$

y las nuevas variables están dadas por

$$\begin{aligned} Q^0 &= \pm \frac{mx^0}{\sqrt{P^2 + P_0 + m^2}} \\ Q &= x \pm \frac{Px^0}{\sqrt{P^2 + P_0 + m^2}} \mp \frac{PT(\tau)}{\sqrt{P^2 + m^2}} \\ p_0 &= \pm \sqrt{P^2 + P_0 + m^2} \\ p &= P. \end{aligned}$$

Luego, en términos de las variables originales la acción invariante de gauge se escribe

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( p_0 \frac{dx^0}{d\tau} + p \frac{dx}{d\tau} - N\mathcal{H} \right) d\tau \mp m^2 \left[ \frac{x^0 - T(\tau)}{\sqrt{P^2 + m^2}} \right]_{\tau_1}^{\tau_2} \quad (3.30)$$

y la amplitud para la transición  $x_1 \rightarrow x_2$  es

$$\begin{aligned}
\langle x_2, x_2^0 | x_1, x_1^0 \rangle &= \int D\mathbf{x}^0 Dp_0 D\mathbf{x} Dp DN \delta(\chi) |[\chi, H]| \\
&\times \exp \left( i \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( p_0 \frac{d\mathbf{x}^0}{d\tau} + p \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} - N\mathcal{H} \right) d\tau \right) \\
&\times \exp \left( \mp i m^2 \left[ \frac{x^0 - T(\tau)}{\sqrt{p^2 + m^2}} \right]_{\tau_1}^{\tau_2} \right). \tag{3.31}
\end{aligned}$$

La integral de camino puede calcularse con cualquier gauge canónico; para cualquier función  $T$  tenemos  $|[\chi, \mathcal{H}]| = 2|p_0|$ . La integración sobre  $N$  da una función  $\delta$  del vínculo que puede escribirse

$$\delta(p_0^2 - p^2 - m^2) = \frac{1}{2|p_0|} \delta(p_0 - \sqrt{p^2 + m^2}) + \frac{1}{2|p_0|} \delta(p_0 + \sqrt{p^2 + m^2}).$$

En un gauge independiente de  $\tau$  tenemos  $\theta(s) = \theta(x_2^0 - \frac{p_0(\tau_2)}{p_0(\tau_1)} x_1^0)$  para  $p_0 > 0$  y  $\theta(s) = \theta(x_1^0 - \frac{p_0(\tau_1)}{p_0(\tau_2)} x_2^0)$  para  $p_0 < 0$ ; entonces, en el gauge  $\chi \equiv x^0 = 0$  obtenemos

$$\begin{aligned}
\langle x_2, x_2^0 | \theta(s) | x_1, x_1^0 \rangle &= \\
&= \int D\mathbf{x} Dp \theta \left( x_2^0 - \frac{p_0(\tau_2)}{p_0(\tau_1)} x_1^0 \right) \\
&\times \exp \left( i \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} d\tau - i m^2 \left[ \frac{-T(\tau)}{p_0} \right]_{\tau_1}^{\tau_2} \right) \\
&+ \int D\mathbf{x} Dp \theta \left( x_1^0 - \frac{p_0(\tau_1)}{p_0(\tau_2)} x_2^0 \right) \\
&\times \exp \left( i \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} d\tau + i m^2 \left[ \frac{-T(\tau)}{p_0} \right]_{\tau_1}^{\tau_2} \right), \tag{3.32}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\int_{\tau_1}^{\tau_2} p \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} d\tau \pm \left[ \frac{m^2 T(\tau)}{p_0} \right]_{\tau_1}^{\tau_2} &= \\
&= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[ p \frac{d}{d\tau} \left( \mathbf{x} \mp \frac{pT(\tau)}{\sqrt{p^2 + m^2}} \right) \pm \sqrt{p^2 + m^2} \frac{dT}{d\tau} \right] d\tau \\
&= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[ P \frac{dQ}{d\tau} \pm \sqrt{P^2 + m^2} \frac{dT}{d\tau} \right] d\tau.
\end{aligned}$$

Notemos que, de acuerdo con la forma de la acción, al nivel del grado de libertad físico tenemos dos teorías, una para cada signo del hamiltoniano reducido. Esqueletizando los caminos obtenemos  $N - 1$  funciones  $\delta$  de la forma  $\delta(P_m - P_{m-1})$ , y como  $P = p$  y los valores de  $Q$  en los extremos están dados por la elección que cancela los términos de superficie,  $Q(\tau_1) = x_1$  y  $Q(\tau_2) = x_2$ , y obtenemos

$$\begin{aligned} \langle x_2, x_2^0 | \theta(s) | x_1, x_1^0 \rangle &= \\ &= \theta(x_2^0 - x_1^0) \int dp \exp \left( ip(x_2 - x_1) - ip_0(x_2^0 - x_1^0) \right) \\ &\quad + \theta(x_1^0 - x_2^0) \int dp \exp \left( ip(x_2 - x_1) + ip_0(x_2^0 - x_1^0) \right), \end{aligned} \tag{3.33}$$

que es el propagador de Feynman para la ecuación de Klein-Gordon.

El doble signo que aparece refleja que la ecuación de Klein-Gordon describe partículas y antipartículas; mientras no se incluya una interacción que haga posible  $p_0 = 0$  la interpretación de dos teorías disjuntas de una partícula puede mantenerse. En otra teoría con un vínculo cuadrático, como la gravitación, la interpretación no será en general tan simple.

### 3.4.2 El reloj ideal

Consideremos un sistema mecánico descrito por las variables canónicas  $(q^k, p_k)$ . Su funcional acción se escribe

$$S[q^k, p_k] = \int_{t_1}^{t_2} \left[ p_k \frac{dq^k}{dt} - H_0(q^k, p_k) \right] dt, \tag{3.34}$$

pero como la dinámica no cambia si agregamos al integrando una derivada total de  $t$ , podemos escribir

$$S[q^k, p_k] = \int_{t_1}^{t_2} \left[ p_k \frac{dq^k}{dt} - H_0(q^k, p_k) + R(t) \right] dt. \tag{3.35}$$

Podemos dar la evolución en términos de un parámetro arbitrario  $\tau$  incluyendo el tiempo entre las coordenadas, de manera que aparece un momento conjugado  $p_t$ . Como la acción

debe conducir a la misma dinámica que la acción original, debe incluirse el vínculo

$$\mathcal{H} = p_t + H_0 - R(t) \approx 0;$$

así, la acción para el sistema parametrizado dado por  $(q^i, p_i)$  es

$$\begin{aligned} S[q^i, p_i, N] &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[ p_t \frac{dt}{d\tau} + p_k \frac{dq^k}{d\tau} - N (p_t + H_0(q^k, p_k) - R(t)) \right] d\tau \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[ p_i \frac{dq^i}{d\tau} - N \mathcal{H}(q^i, p_i) \right] d\tau, \end{aligned} \quad (3.36)$$

donde  $N$  es un multiplicador de Lagrange. Variando la acción deberíamos obtener las ecuaciones canónicas usuales para  $(q^k, p_k)$ . En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{dq^i}{d\tau} &= N \frac{\partial}{\partial p_i} (p_t + H_0(q^k, p_k)) \\ \frac{dp_i}{d\tau} &= -N \frac{\partial}{\partial q^i} (H_0(q^k, p_k) - R(t)) \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{dq^k}{dt} &= \frac{\partial}{\partial p_k} H_0(q^k, p_k) \\ \frac{dp_k}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial q^k} H_0(q^k, p_k) \end{aligned}$$

Si eliminamos las variables  $(q^k, p_k)$ , obtenemos un sistema con sólo un grado de libertad y un vínculo, el *reloj ideal*; su acción es

$$S[t, p_t, N] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( p_t \frac{dt}{d\tau} - N \mathcal{H} \right) d\tau \quad (3.37)$$

$$\mathcal{H} = p_t - R(t) \approx 0, \quad (3.38)$$

y las ecuaciones de movimiento son

$$\frac{dt}{d\tau} = N, \quad \frac{dp_t}{d\tau} = N \frac{\partial R(t)}{\partial t}.$$

Ejemplificaremos nuestro método de cuantización transformando el reloj ideal en un sistema de gauge ordinario y calculando la integral de camino imponiendo gauges canónicos. Para esto se necesitan dos transformaciones canónicas. La primera  $(t, p_t) \rightarrow (\bar{Q}^0, \bar{P}_0)$ , es generada por la función  $W$  solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial W}{\partial t} - R(t) = E; \quad (3.39)$$

igualando  $E = \bar{P}_0$ , un cálculo simple da

$$W(t, \bar{P}_0) = \bar{P}_0 t + \int R(t) dt, \quad (3.40)$$

de manera que

$$\bar{Q}^0 = \frac{\partial W}{\partial \bar{P}_0} = t, \quad p_t = \frac{\partial W}{\partial t} = \bar{P}_0 + R(t), \quad \bar{K} = N\mathcal{H}. \quad (3.41)$$

Las variables  $\bar{Q}^0$  y  $\bar{P}_0$  verifican

$$[\bar{Q}^0, \bar{P}_0] = [\bar{Q}^0, \mathcal{H}] = 1,$$

y así  $\bar{Q}^0$  puede usarse para fijar el gauge.

La segunda transformación es generada por

$$F = P_0 \bar{Q}^0 + f(\tau), \quad (3.42)$$

lo cual da

$$\bar{P}_0 = \frac{\partial F}{\partial \bar{Q}^0} = P_0, \quad Q^0 = \frac{\partial F}{\partial P_0} = \bar{Q}^0, \quad (3.43)$$

y un nuevo hamiltoniano no nulo

$$K = \bar{K} + \frac{\partial f}{\partial \tau} = NP_0 + \frac{\partial f}{\partial \tau} \approx \frac{\partial f}{\partial \tau}. \quad (3.44)$$

Luego, como funcional de  $Q^0$  y  $P_0$  la acción invariante de gauge se escribe

$$S[Q^0, P_0, N] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( P_0 \frac{dQ^0}{d\tau} - NP_0 - \frac{\partial f}{\partial \tau} \right) d\tau \quad (3.45)$$

y en términos de las variables originales

$$\begin{aligned} S[t, p_t, N] &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( p_t \frac{dt}{d\tau} - N(p_t - R(t)) \right) d\tau + [B(\tau)]_{\tau_1}^{\tau_2}, \\ B(\tau) &= Q^0 P_0 - W - f(\tau) = - \int R(t) dt - f(\tau). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Para asegurar que la nueva acción pesa los caminos de la misma forma que la original, y que la amplitud en términos de  $Q^0$  es equivalente a la asociada a  $t$  elegimos  $f$  de manera que  $B$  se anule para  $\tau = \tau(t)$ . En el gauge

$$\chi \equiv Q^0 - \tau = t - \tau = 0 \quad (3.47)$$

debemos elegir

$$f(\tau) = - \int R(\tau) d\tau. \quad (3.48)$$

De (3.47) tenemos  $||[\chi, \mathcal{H}]|| = ||[Q^0, P_0]|| = 1$ ,  $\delta(\chi) = \delta(Q^0 - \tau) = \delta(t - \tau)$ , de manera que la amplitud es

$$\begin{aligned} \langle t_2 | t_1 \rangle &= \langle Q_2^0, \tau_2 | Q_1^0, \tau_1 \rangle \\ &= \int DQ^0 DP_0 DN \delta(Q^0 - \tau) \\ &\quad \times \exp \left( i \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[ P_0 \frac{dQ^0}{d\tau} - N P_0 - \frac{\partial f}{\partial \tau} \right] d\tau \right) \\ &= \int DQ^0 DP_0 \delta(P_0) \delta(Q^0 - \tau) \\ &\quad \times \exp \left( i \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[ P_0 \frac{dQ^0}{d\tau} - \frac{\partial f}{\partial \tau} \right] d\tau \right) \\ &= \exp \left( i \int_{\tau_1}^{\tau_2} R(\tau) d\tau \right). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Por lo tanto, la probabilidad para la transición de  $t_1$  en  $\tau_1$  a  $t_2$  en  $\tau_2$  es

$$|\langle t_2 | t_1 \rangle|^2 = |\langle Q_2^0, \tau_2 | Q_1^0, \tau_1 \rangle|^2 = 1 \quad (3.50)$$

para  $t_1$  y  $t_2$  cualesquiera. Esto simplemente refleja que el sistema no tiene grados de libertad verdaderos, porque dado  $\tau$  tenemos sólo un  $t$  posible. Notemos que aunque hemos

usado un gauge que hace esto explícito, podríamos haber usado cualquier gauge canónico, y el resultado habría sido el mismo. Por ejemplo, hagamos la cuenta con las variables originales y la acción (3.46), y fijemos el gauge  $\chi \equiv t = 0$ :

$$\begin{aligned}
\langle t_2 | t_1 \rangle &= \int Dt Dp_t DN \delta(\chi) |[\chi, H]| \\
&\times \exp \left( i \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[ p_t \frac{dt}{d\tau} - NH \right] d\tau \right) \\
&\times \exp \left( -i \int_{t(\tau_1)}^{t(\tau_2)} R(t) dt + i \int_{\tau_1}^{\tau_2} R(\tau) d\tau \right) \\
&= \int Dt Dp_t \delta(\chi) \delta(p_t - R(t)) |[\chi, H]| \\
&\times \exp \left( i \int_{\tau_1}^{\tau_2} p_t \frac{dt}{d\tau} d\tau \right) \\
&\times \exp \left( -i \int_{t(\tau_1)}^{t(\tau_2)} R(t) dt + i \int_{\tau_1}^{\tau_2} R(\tau) d\tau \right) \\
&= \exp \left( i \int_{\tau_1}^{\tau_2} R(\tau) d\tau \right). \tag{3.51}
\end{aligned}$$

Aunque los términos de superficie no se cancelan en el gauge  $t = 0$ , sino con la elección  $t = \tau$ , hemos obtenido la misma amplitud anterior.

### 3.4.3 Probabilidad de transición para modelos vacíos de Friedmann–Robertson–Walker

En el próximo capítulo daremos un procedimiento directo para deparametrizar y obtener la integral de camino para modelos cosmológicos. Sin embargo, podemos ya hacer un análisis preliminar y obtener algunos resultados sobre la cuantización de ciertos minisuperespacios. La idea es utilizar que el vínculo hamiltoniano de los modelos de Friedmann–Robertson–Walker sin materia puede obtenerse a partir del vínculo del reloj ideal mediante una transformación canónica [Beluardi & Ferraro (1995), De Cicco & Simeone (1999b)]. El vínculo para un modelo vacío (véase el próximo capítulo)

$$\mathcal{H} = -G(\Omega)\pi_{\Omega}^2 + V(\Omega) \approx 0$$

se obtiene del correspondiente al reloj ideal con  $R(t) = t^2$ ,

$$H = p_t - t^2 \approx 0,$$

definiendo

$$\tilde{V}(\Omega) = \text{sign}(V) \left( \frac{3}{2} \int \sqrt{\frac{|V|}{G}} d\Omega \right)^{2/3} \quad (3.52)$$

y haciendo

$$\pi_\Omega = -t \frac{\partial \tilde{V}(\Omega)}{\partial \Omega}, \quad p_t = \tilde{V}(\Omega). \quad (3.53)$$

Sobre la superficie de vínculo  $p_t - t^2 = 0$  obtenemos

$$t = \pm \sqrt{\tilde{V}(\Omega)}, \quad (3.54)$$

y podemos intentar cuantizar los minisuperespacios por medio de una integral de camino en las variables  $t, p_t$ . Si queremos un amplitud entre estados dados por la coordenada  $\Omega$ , esta posibilidad claramente depende de que exista una relación

$$\tilde{V}(\Omega) \leftrightarrow \Omega,$$

pero, como veremos, la principal restricción vendrá dada por la geometría de la superficie de vínculo.

La forma más general del potencial para un modelo de Friedmann–Robertson–Walker vacío es

$$V(\Omega) = -k e^\Omega + \Lambda e^{3\Omega}. \quad (3.55)$$

Consideremos primero los modelos simples con  $k = 0$  o  $\Lambda = 0$ . Para  $k = 0$  (universo plano con constante cosmológica no nula) tenemos

$$V(\Omega) = \Lambda e^{3\Omega},$$

y para  $\Lambda = 0, k = -1$  (universo abierto) tenemos el potencial

$$V(\Omega) = e^\Omega.$$

En ambos casos, así como para el modelo abierto con constante cosmológica  $\Lambda > 0$ ,

$$V(\Omega) = e^\Omega + \Lambda e^{3\Omega},$$

dado  $V$  y por lo tanto  $\bar{V}(\Omega)$  podemos obtener  $\Omega = \Omega(\bar{V})$  en forma unívoca. Como  $\Omega \sim \ln a(\tau)$ , de (3.54) vemos que en los casos más simples nuestro procedimiento es básicamente equivalente a identificar el factor de escala  $a(\tau)$  de la métrica con el tiempo  $t$  del reloj ideal. Como en estos casos el potencial tiene un signo definido, la superficie de vínculo se separa en dos hojas disjuntas

$$\pi_\Omega = \pm \sqrt{\frac{V(\Omega)}{G(\Omega)}}.$$

Por lo tanto la fijación del gauge en términos de  $t$ , que selecciona un único camino en el espacio de fases  $(t, p_t)$  también selecciona un único camino en el espacio  $(\Omega, \pi_\Omega)$ ; esto hace que la cuantización de dichos modelos sea trivial, con una probabilidad de transición de  $\Omega_1$  a  $\Omega_2$  igual a la unidad:

$$|\langle \Omega_2 | \Omega_1 \rangle|^2 = 1. \quad (3.56)$$

En el caso  $k = 1$ ,  $\Lambda > 0$  (modelo cerrado con constante cosmológica positiva) el potencial

$$V(\Omega) = -e^\Omega + \Lambda e^{3\Omega},$$

no es una función monótona de  $\Omega$ , sino que cambia su pendiente cuando

$$\Omega = \ln \left( \frac{1}{\sqrt{3\Lambda}} \right) \quad (3.57)$$

donde tiene un mínimo, y entonces para un valor dado de  $V(\Omega)$  se tienen dos valores posibles de  $\Omega$ . Sin embargo, los estados físicos se encuentran sobre la superficie de vínculo

$$-G(\Omega)\pi_\Omega^2 - e^\Omega + \Lambda e^{3\Omega} = 0,$$

que equivale a

$$\pi_\Omega = \pm \sqrt{\frac{e^\Omega(\Lambda e^{2\Omega} - 1)}{G}}.$$

Como  $G$  es una función positiva de  $\Omega$ , el movimiento está restringido a la región

$$\Omega \geq \ln \left( \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \right). \quad (3.58)$$

que es llamada el “tamaño natural” del espacio de configuración [Hájícek (1986)]. Luego, el potencial no cambia de signo sobre la superficie de vínculo, y se puede obtener

$$\Omega = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\Lambda^{2/3} \bar{V} + 1}{\Lambda} \right).$$

Existe, sin embargo, un problema que resulta del hecho de que el potencial no tiene un signo definido: Como  $\pi_\Omega = 0$  es posible en este modelo, el sistema puede ir de  $\Omega_1$  a  $\Omega_2$  por dos caminos. Entonces, dada una condición de gauge en términos de  $t$  no obtenemos una parametrización del modelo cosmológico en términos de únicamente  $\Omega$ , y no podemos decir que la integral de camino para  $|t_1\rangle \rightarrow |t_2\rangle$  es equivalente a la integral para  $|\Omega_1\rangle \rightarrow |\Omega_2\rangle$ . Esto se relaciona con que, precisamente porque el potencial no tiene un signo definido, este modelo no admite un tiempo intrínseco.

Como hemos remarcado, la elección del gauge no es solamente una forma de evitar divergencias en la cuantización de un sistema con vínculos, sino también un procedimiento de reducción a los grados de libertad físicos. Cuando elegimos un gauge para llevar a cabo la integración funcional, en cada  $\tau$  seleccionamos un punto de cada clase de puntos equivalentes; si hacemos esto con un sistema que es puro gauge, esto es, que tiene un único grado de libertad y un vínculo, elegimos un único punto del espacio de fases en cada  $\tau$ . Por ejemplo, el gauge (3.47) de la sección 3.4.2,  $t - \tau = 0$ , implica que los caminos en el espacio de fases pueden solamente ir de  $t_1 = \tau_1$  en  $\tau_1$  a  $t_2 = \tau_2$  en  $\tau_2$ ; no hay otra posibilidad. Luego, la probabilidad de que el sistema evolucione de  $t_1$  en  $\tau_1$  a  $t_2$  en  $\tau_2$  no puede ser más que la unidad. Así, si podemos escribir el tiempo  $t$  en términos de solamente la coordenada  $\Omega$  de un minisuperespacio, su evolución está parametrizada por  $\Omega$ , hay un único valor de  $\Omega$  en cada  $\tau$ , y la cuantización del modelo resulta trivial. En el caso de que  $\Omega$  no resulte suficiente para parametrizar la evolución, sin embargo, deberíamos de todos

modos obtener una amplitud de transición igual a la unidad, pues el modelo es puro gauge y existe un único estado físico. El punto es entonces cómo deben definirse los estados para que se obtenga la amplitud correcta. Esto se discutirá en detalle en el próximo capítulo.

# Capítulo 4

## Modelos cosmológicos

### 4.1 Modelos relativistas isótropos

Un modelo isótropo y homogéneo da una descripción aceptable del estado actual del universo. Por ejemplo, una propiedad esencial de tal modelo es su carácter no estacionario, el cual constituye una buena explicación para el corrimiento al rojo observado en las galaxias lejanas. El elemento de distancia de un modelo cosmológico isótropo tiene la forma

$$dl^2 = g_{ab} dx^a dx^b$$

donde  $g_{ab}$  es la métrica espacial, cuyas componentes son funciones del tiempo. La hipótesis de homogeneidad e isotropía conduce a que la curvatura dependa de un único parámetro: para  $k = 0$  tenemos un universo plano, para  $k = -1$  uno abierto, y para  $k = 1$  uno cerrado. La métrica del espacio-tiempo tiene entonces la forma de Friedmann–Robertson–Walker [Landau & Lifshitz (1975), Misner et al. (1997)]

$$ds^2 = N^2 d\tau^2 - a^2(\tau) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right), \quad (4.1)$$

donde  $a(\tau)$  es el factor de escala espacial. La dinámica de la parte puramente gravitatoria del universo de Friedmann–Robertson–Walker está dada por la evolución del factor de escala; esta evolución está determinada por la densidad y presión de la materia, por la curvatura, y por la existencia de una constante cosmológica no nula. Consideraremos aquí

modelos vacíos con y sin constante cosmológica, y modelos con materia en la forma de un campo escalar sin presión. En particular, trataremos el modelo de de Sitter cerrado para introducir el problema de cuantizar con tiempo extrínseco.

### 4.1.1 Un modelo de juguete

Consideremos un “universo” cerrado, vacío, y sin constante cosmológica. Para trabajar en el formalismo hamiltoniano definimos la coordenada  $\Omega$  y su momento conjugado como:

$$\Omega = \ln \left( \sqrt{\frac{4}{3\pi\mathcal{G}}} a(\tau) \right), \quad \pi_\Omega = -\frac{1}{N} e^{3\Omega} \frac{d\Omega}{d\tau},$$

de manera tal que  $a^2 \sim e^{2\Omega}$ . La forma hamiltoniana de la acción es

$$S[\Omega, \pi_\Omega, N] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[ \pi_\Omega \frac{d\Omega}{d\tau} - N\mathcal{H} \right] d\tau, \quad (4.2)$$

donde el vínculo es

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{4} e^{-3\Omega} \pi_\Omega^2 + e^\Omega \approx 0. \quad (4.3)$$

De acuerdo con el análisis de la sección anterior, encontramos que  $t = \pm\sqrt{V(\Omega)} \sim e^{2\Omega/3}$  debe ser un tiempo, dado que  $t$  es la única coordenada del reloj ideal. Para reproducir este resultado será conveniente aplicar nuestro procedimiento al vínculo escaleado  $H = e^{\Omega/3}\mathcal{H}$ :

$$H = -\frac{1}{4} e^{-8\Omega/3} \pi_\Omega^2 + e^{4\Omega/3} \approx 0. \quad (4.4)$$

Los vínculos  $H$  y  $\mathcal{H}$  son equivalentes porque sólo difieren en un factor definido positivo. La ecuación de Hamilton–Jacobi asociada con  $H$  es

$$-\left( \frac{\partial W}{\partial \Omega} \right)^2 + 4e^{4\Omega} = 4e^{8\Omega/3} E \quad (4.5)$$

e igualando  $E = \bar{P}_0$  tenemos

$$W(\Omega, \bar{P}_0) = \pm 2 \int d\Omega \sqrt{e^{4\Omega} - \bar{P}_0 e^{8\Omega/3}}, \quad (4.6)$$

con + para  $\pi_\Omega > 0$  y - para  $\pi_\Omega < 0$ . De acuerdo con (4.6), sobre la superficie de vínculo se tiene

$$\bar{Q}^0 = \left[ \frac{\partial W}{\partial \bar{P}_0} \right]_{\bar{P}_0=0} = -\eta e^{2\Omega/3} \quad (4.7)$$

con  $\eta = \text{sign}(\pi_\Omega)$ . Siguiendo el procedimiento de la sección 3.2.2, para cuantizar este modelo definimos

$$F = \bar{Q}^0 P_0 + f(\tau)$$

de manera que el hamiltoniano reducido y las nuevas variables son

$$h = \frac{\partial f}{\partial \tau}, \quad Q^0 = \bar{Q}^0, \quad P_0 = \bar{P}_0.$$

El sistema descrito por  $Q^0$  y  $P_0$  tiene un vínculo que es lineal y homogéneo en los momentos. Su funcional acción es entonces invariante ante transformaciones generales de gauge, de manera que los gauges canónicos son admisibles. Si elegimos  $\chi \equiv Q^0 - T(\tau) = 0$  con  $T$  una función monótona de  $\tau$  podemos definir el tiempo como

$$t \equiv Q^0, \quad (4.8)$$

porque  $[Q^0, H] = [Q^0, P_0] = 1$ . Tenemos así un tiempo global que puede escribirse en términos de solamente la coordenada  $\Omega$ , mediante una expresión adecuada para cada hoja de la superficie de vínculo:

$$\begin{aligned} t(\Omega) &= -e^{2\Omega/3} & \pi_\Omega > 0 \\ t(\Omega) &= +e^{2\Omega/3} & \pi_\Omega < 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Como sobre la superficie de vínculo tenemos

$$\pi_\Omega = \pm 2e^{2\Omega}, \quad (4.10)$$

podemos escribir el tiempo también como

$$t(\Omega, \pi_\Omega) = -\frac{1}{2} e^{-4\Omega/3} \pi_\Omega. \quad (4.11)$$

Como podemos escribir  $t = t(\Omega)$ , la amplitud de transición entre dos estados dados por  $Q^0$  puede identificarse con la amplitud para la transición  $|\Omega_1\rangle \rightarrow |\Omega_2\rangle$ ; de acuerdo con la ecuación (??), como este modelo no tiene grados de libertad genuinos resulta

$$\begin{aligned}\langle \Omega_2 | \Omega_1 \rangle &= \langle Q_2^0, \tau_2 | Q_1^0, \tau_1 \rangle \\ &= \exp \left( -i \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\partial f}{\partial \tau} d\tau \right).\end{aligned}\quad (4.12)$$

La amplitud es la exponencial de una fase arbitraria; luego, la probabilidad de la transición  $|\Omega_1\rangle \rightarrow |\Omega_2\rangle$  es igual a la unidad. Por cierto, el resultado coincide con el que obtuvimos anteriormente transformando este modelo en un reloj ideal, y solamente refleja que el sistema es puro gauge.

#### 4.1.2 Grados de libertad verdaderos. El problema de Gribov

Consideremos un modelo isótropo y homogéneo plano ( $k = 0$ ) con constante cosmológica no nula y un campo escalar no masivo  $\phi$ . Supongamos  $\Lambda > 0$ , de manera que sin campo escalar el modelo sería exactamente el universo de de Sitter; este universo no tiene punto de retorno en su evolución clásica, lo cual se refleja en la forma del vínculo hamiltoniano. Si definimos el momento asociado con el campo  $\phi$  como

$$\pi_\phi = \frac{1}{N} e^{3\Omega} \frac{d\phi}{d\tau}$$

obtenemos la acción

$$S[\Omega, \phi, \pi_\Omega, \pi_\phi, N] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[ \pi_\Omega \frac{d\Omega}{d\tau} + \pi_\phi \frac{d\phi}{d\tau} - N\mathcal{H} \right] d\tau, \quad (4.13)$$

con el vínculo

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4} e^{-3\Omega} (\pi_\phi^2 - \pi_\Omega^2) + \Lambda e^{3\Omega} \approx 0. \quad (4.14)$$

Vemos que mientras  $\pi_\phi$  (y por ende  $d\phi/d\tau$ ) puede anularse,  $\pi_\Omega$  (y por lo tanto, lo mismo con  $d\Omega/d\tau$ ) no se anula sobre la superficie de vínculo. La evolución está restringida a una

de las dos superficies

$$\pi_\Omega = \pm \sqrt{\pi_\phi^2 + 4\Lambda e^{6\Omega}}$$

separadas por  $\pi_\Omega = 0$ ; desde un punto de vista geométrico esto significa que la topología de la superficie de vínculo es la de dos semiplanos disjuntos.

La ecuación de Hamilton–Jacobi asociada con el vínculo  $\mathcal{H}$  es

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \phi}\right)^2 - \left(\frac{\partial W}{\partial \Omega}\right)^2 + 4\Lambda e^{6\Omega} = 4E e^{3\Omega}. \quad (4.15)$$

Igualando las constantes de integración con  $\bar{P}$  y  $\bar{P}_0$  obtenemos las soluciones

$$W_\pm = \bar{P}\phi \pm \int d\Omega \sqrt{\bar{P}^2 - 4\bar{P}_0 e^{3\Omega} + 4\Lambda e^{6\Omega}}$$

que son de la forma

$$W = C(q^i)\bar{P} \pm w(q^0, \bar{P}_0, \bar{P})$$

con  $q^0 = \Omega$ ,  $q = \phi$ . El doble signo  $\pm$  corresponde a las dos hojas  $\pi_\Omega > 0$  y  $\pi_\Omega < 0$  de la superficie de vínculo. Fijando el gauge mediante la condición canónica

$$\chi \equiv \bar{Q}^0 - g(\bar{P}, T(\tau)) = 0 \quad (4.16)$$

con  $T(\tau)$  una función monótona de  $\tau$ , como  $\bar{Q}^0 = \partial W_\pm / \partial \bar{P}_0 = \bar{Q}^0(q^0, \bar{P}_0, \bar{P})$ , si elegimos

$$g(\bar{P}, T(\tau)) = \bar{Q}^0(q^0 = T(\tau), \bar{P}_0 = 0, \bar{P})$$

en términos de las variables originales tenemos

$$q^0 = \Omega = T(\tau). \quad (4.17)$$

En el espacio de fases original la superficie definida por la condición  $\chi = 0$  es entonces un plano  $\Omega = \text{constante}$  para cada  $\tau$ . Dado que la topología de la superficie de vínculo es trivial, esto asegura que el gauge (4.16) no produce copias de Gribov [De Cicco & Simeone (1999b)]: si en algún  $\tau$  una órbita fuese intersectada más de una vez por la superficie  $\chi = 0$ , en algún

otro  $\tau$  ambas deberían ser tangentes, con lo cual  $[\chi, H] = 0$ . Pero esto no es posible a partir de la forma de fijar el gauge, porque  $[\bar{Q}^0, \bar{P}_0] = 1$  y el gauge sólo incluye a  $\bar{Q}^0$ ,  $\tau$  y  $\bar{P}$ , que es una cantidad conservada. Un tiempo global es entonces

$$t = \eta\Omega \quad (4.18)$$

con  $\eta = 1$  si el sistema evoluciona sobre la hoja dada por  $\pi_\Omega < 0$ , y  $\eta = -1$  si el sistema evoluciona sobre la hoja  $\pi_\Omega > 0$ .

Para cuantizar el sistema debemos hacer una segunda transformación a observables no conservados. Esta transformación en el espacio de fases reducido es generada por la función  $f$ , que debe elegirse de manera que los términos de superficie  $B$  que proveen de invariancia de gauge en los extremos se cancelen en un gauge que de como resultado  $\tau = \tau(q^i)$ . Con la elección de gauge (4.16) la generatriz apropiada es

$$f = \bar{Q}P \mp w(T(\tau), \bar{P}_0 = 0, \bar{P} = P).$$

Luego, en ese gauge y sobre la superficie de vínculo tenemos

$$Q = \frac{\partial f}{\partial P} = C(q^i) \quad (4.19)$$

que, junto con (4.17), garantiza que  $Q$  y  $\tau$  definen una hipersuperficie en el espacio de configuración original. La forma explícita del grado de libertad verdadero y del hamiltoniano del sistema reducido descrito por  $(Q, P)$  es

$$\begin{aligned} Q &= \phi \pm \frac{\partial}{\partial P} \int_{T(\tau)}^{\Omega} \sqrt{P^2 + 4\Lambda e^{6\Omega}} d\Omega, \\ h &= \frac{\partial f}{\partial \tau} = \mp \sqrt{P^2 + 4\Lambda e^{6T}} \frac{dT}{d\tau}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

con  $\mp = \text{sign}(\pi_\Omega)$ . En el gauge (4.16) y sobre la superficie de vínculo la integral de camino tiene la forma simple

$$\langle \phi_2, \Omega_2 | \phi_1, \Omega_1 \rangle = \int DQDP \exp \left( i \int_{T_1}^{T_2} \left[ P \frac{dQ}{dT} \pm \sqrt{P^2 + 4\Lambda e^{6T}} \right] dT \right), \quad (4.21)$$

donde los extremos están dados por  $T_1 = \Omega_1$  y  $T_2 = \Omega_2$ ; como en el gauge (4.16) tenemos  $\Omega = T$ , los caminos van de  $Q_1 = \phi_1$  a  $Q_2 = \phi_2$  (nótese que una vez fijado el gauge la coordenada  $Q$  no es más un observable, en el sentido de que  $Q|_{x=0} = \phi$  ya no conmuta con el vínculo). El resultado muestra la separación entre grados de libertad físicos ( $\phi$ ) y tiempo ( $\Omega$ ). El sistema reducido está gobernado por un hamiltoniano verdadero (esto es, no nulo) dependiente del tiempo; esto refleja que el campo  $\phi$  evoluciona sujeto a condiciones ‘externas’ que cambian, la métrica que juega el papel de reloj del sistema. El hamiltoniano del sistema reducido es análogo al de una partícula relativista de masa dependiente de  $T$ ,  $m = 2\Lambda^{1/2}e^{3T}$ . Para ser precisos, debemos decir que tenemos dos teorías, una para una “partícula de energía positiva” en la hoja  $\pi_\Omega > 0$  y una de una “antipartícula” en la hoja  $\pi_\Omega < 0$ .

La expresión (4.21) permite calcular el propagador infinitesimal correspondiente a cada uno de los dos hamiltonianos reducidos de la (4.20) (para obtener el propagador finito resta una integración sobre  $Q$ ). A partir de la analogía con la partícula relativista y usando los resultados de la referencia [Ferraro (1992)] (véase la ecuación (68)) con  $\nu = \mp 1$ ,  $\gamma = 1$  y  $\sigma = \frac{1}{2}\sqrt{(T_2 - T_1)^2 - (Q_2 - Q_1)^2}$  se obtiene [De Cicco & Simeone (1999b)]

$$\begin{aligned} \langle \phi_2, \Omega_1 + \varepsilon | \phi_1, \Omega_1 \rangle = \\ \pm \frac{\varepsilon \Lambda^{1/2} e^{3\Omega_1}}{\sqrt{\varepsilon^2 - (\phi_2 - \phi_1)^2}} H_1^{(1)}(2\Lambda e^{3\Omega_1} \sqrt{\varepsilon^2 - (\phi_2 - \phi_1)^2}), \end{aligned} \quad (4.22)$$

donde  $H_1^{(1)}$  es la función de Hankel definida en términos de las funciones de Bessel  $J_1$  y  $N_1$  como  $H_1^{(1)} = J_1 + iN_1$ . El doble signo corresponde a los dos signos posibles de  $\pi_\Omega$  que definen cada hoja de la superficie de vínculo. Este propagador verifica la condición

$$\langle \phi_2, \Omega_1 + \varepsilon | \phi_1, \Omega_1 \rangle \rightarrow \delta(\phi_2 - \phi_1)$$

cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Debemos enfatizar que hemos logrado obtener una amplitud de transición en términos de las coordenadas originales y con una noción clara de tiempo porque el potencial tiene un signo definido; esto permite parametrizar el sistema en términos de  $\Omega$ , pero no es éste el caso general. Un punto no del todo satisfactorio es que hemos desparametrizado el modelo en una forma tal que el potencial en el hamiltoniano reducido es dependiente del tiempo. El propagador (4.21) es entonces el que obtendríamos escribiendo la versión escaleada del vínculo (4.14) como el producto de dos vínculos lineales:

$$H = \left( \pi_\Omega + \sqrt{\pi_\phi^2 + \Lambda e^{6\Omega}} \right) \left( -\pi_\Omega + \sqrt{\pi_\phi^2 + \Lambda e^{6\Omega}} \right) \approx 0, \quad (4.23)$$

e identificando directamente  $\phi$  como el grado de libertad físico y  $\pm\Omega$  como el tiempo. Tenemos entonces dos hamiltonianos verdaderos, y obtenemos una teoría para el grado de libertad físico para cada uno en la forma de la(s) integral(es) (4.21); cada teoría es unitaria, porque cada hamiltoniano reducido es real. Pero como el tiempo aparece en el potencial, al nivel cuántico el vínculo (4.23) y la forma escaleada de (4.14) no son equivalentes (véase el capítulo 5).

### 4.1.3 Un vínculo más general

Consideremos un vínculo hamiltoniano de la forma

$$\mathcal{H} = G(\Omega)(\pi_\phi^2 - \pi_\Omega^2) + V(\phi, \Omega) \approx 0, \quad (4.24)$$

donde  $G(\Omega) > 0$  y  $V(\phi, \Omega)$  es el potencial. La acción tiene la forma usual dada en (4.13). Restringiremos nuestro análisis a los casos en que el potencial  $V(\phi, \Omega)$  tiene un signo definido. Como los casos  $V > 0$  y  $V < 0$  son formalmente análogos, consideraremos solamente  $V > 0$ . Definamos las coordenadas

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\phi + \Omega), \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}(\phi - \Omega) \quad (4.25)$$

de modo que  $(\partial x/\partial\phi) = (\partial x/\partial\Omega)$ ,  $(\partial y/\partial\phi) = -(\partial y/\partial\Omega)$ . Los momentos  $\pi_x$  y  $\pi_y$  están dados por

$$\pi_\phi = \frac{\partial x}{\partial\phi}\pi_x + \frac{\partial y}{\partial\phi}\pi_y, \quad \pi_\Omega = \frac{\partial x}{\partial\Omega}\pi_x + \frac{\partial y}{\partial\Omega}\pi_y, \quad (4.26)$$

y entonces

$$\pi_\phi^2 - \pi_\Omega^2 = 4 \frac{\partial x}{\partial\phi} \frac{\partial y}{\partial\phi} \pi_x \pi_y = -4 \frac{\partial x}{\partial\Omega} \frac{\partial y}{\partial\Omega} \pi_x \pi_y.$$

Si es posible elegir las coordenadas  $x$  e  $y$  de forma tal que  $4(\partial x/\partial\phi)(\partial y/\partial\phi) = (V/G)$ , como  $(V/G) > 0$  entonces podemos multiplicar el vínculo  $\mathcal{H}$  por el factor definido positivo  $(4G(\partial x/\partial\phi)(\partial y/\partial\phi))^{-1}$  y así obtener un vínculo  $H$  equivalente a  $\mathcal{H}$ :

$$H = \pi_x \pi_y + 1 \approx 0. \quad (4.27)$$

Transformaremos el sistema descrito por  $(x, y, \pi_x, \pi_y)$  en un sistema de gauge ordinario.

La ecuación de Hamilton-Jacobi independiente de  $\tau$  para el vínculo (4.27) es

$$\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} + 1 = E,$$

e igualando las constantes de integración  $\alpha, E$  a los nuevos momentos  $\bar{P}, \bar{P}_0$  su solución es

$$W(x, y, \bar{P}_0, \bar{P}) = \bar{P}x + y \left( \frac{\bar{P}_0 - 1}{\bar{P}} \right). \quad (4.28)$$

Luego

$$\begin{aligned} \pi_x &= \frac{\partial W}{\partial x} = \bar{P}, & \pi_y &= \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\bar{P}_0 - 1}{\bar{P}} \\ \bar{Q}^0 &= \frac{\partial W}{\partial \bar{P}_0} = \frac{y}{\bar{P}}, & \bar{Q} &= \frac{\partial W}{\partial \bar{P}} = x + \frac{y}{\bar{P}^2} (1 - \bar{P}_0). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Para pasar del conjunto  $(\bar{Q}^i, \bar{P}_i)$  a  $(Q^i, P_i)$  definimos

$$F = \bar{Q}^0 P_0 + \bar{Q} P + \eta \frac{T(\tau)}{P} \quad (4.30)$$

con  $\eta = \pm 1$  y  $T(\tau)$  una función monótona. Entonces obtenemos:

$$Q^0 = \frac{y}{P},$$

$$\begin{aligned}
Q &= x + \frac{1}{P^2} (y(1 - P_0) - \eta T(\tau)), \\
P_0 &= \pi_x \pi_y + 1, \\
P &= \pi_x.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

No hay problema con  $P$  como denominador porque  $P = \pi_x$  no puede anularse sobre la superficie de vínculo.

Como  $[Q^0, P_0] = 1$  tenemos  $[y/\pi_x, H] = 1$ ;  $H$  difiere de  $\mathcal{H}$  en un factor definido positivo, digamos  $\mathcal{F}^{-1}$ , de manera que  $1 = [y/\pi_x, H] = [y/\pi_x, \mathcal{F}^{-1}\mathcal{H}] = [y/\pi_x, \mathcal{F}^{-1}]\mathcal{H} + [y/\pi_x, \mathcal{H}]\mathcal{F}^{-1} \approx [y/\pi_x, \mathcal{H}]\mathcal{F}^{-1}$ ; luego

$$[y/\pi_x, \mathcal{H}] > 0 \tag{4.32}$$

y un gauge canónico de la forma  $\chi \equiv Q^0 - T(\tau) = 0$  con  $T$  una función monótona de  $\tau$ , impuesto sobre el sistema de gauge descrito por  $Q^i$  y  $P_i$  define un tiempo global

$$t \equiv \frac{y}{\pi_x}$$

para el minisuperespacio descrito por  $\phi, \Omega, \pi_\phi, \pi_\Omega$ . De (4.26) tenemos  $\pi_x = (\pi_\phi + \pi_\Omega) (2\partial x / \partial \phi)^{-1}$  y por lo tanto

$$t(\phi, \Omega, \pi_\phi, \pi_\Omega) = 2 \frac{y(\phi - \Omega)}{\pi_\phi + \pi_\Omega} \frac{\partial x(\phi + \Omega)}{\partial \phi}. \tag{4.33}$$

La función de  $\tau$  dada por la última ecuación depende de las coordenadas y los momentos, y es por tanto un tiempo extrínseco. También podemos identificar un tiempo intrínseco, pero, como veremos, la definición depende de la hoja de la superficie de vínculo sobre la cual se mueve el sistema. La identificación de un tiempo intrínseco nos permitirá obtener la amplitud de transición entre estados caracterizados por las coordenadas. Los términos de superficie asociados con la transformación canónica (4.31) son

$$\begin{aligned}
B(\tau) &= \frac{y}{\pi_x} - y\pi_y - 2\eta \frac{T(\tau)}{\pi_x} \\
&= 2Q^0 - Q^0 P_0 - 2\eta \frac{T(\tau)}{P}.
\end{aligned}$$

Estos términos se cancelan con la elección de gauge

$$\chi \equiv \eta Q^0 P - T(\tau) = 0 \quad (4.34)$$

que da

$$[\chi, P_0] = \eta P = \eta \pi_x, \quad (4.35)$$

y dado que  $\eta Q^0 P = \eta y$  tenemos  $[\eta y, H] = \eta \pi_x$ . Como antes, dado que  $H$  y  $\mathcal{H}$  difieren en un factor definido positivo, si podemos definir  $\eta$  tal que  $[\eta y, H] > 0$  entonces  $[\eta y, \mathcal{H}] > 0$  y

$$t \equiv \eta y$$

es un tiempo global. Podemos elegir  $\partial x / \partial \phi$  como una función definida positiva (y ajustar apropiadamente el signo de  $\partial y / \partial \phi$ ) para obtener  $\text{sign}(\pi_x) = \text{sign}(\pi_\phi + \pi_\Omega)$ . De la ecuación del vínculo obtenemos

$$\pi_\Omega = \pm \sqrt{\frac{V(\phi, \Omega)}{G(\Omega)} + \pi_\phi^2} \quad (4.36)$$

y como  $V/G$  es positivo,  $\pi_\Omega \neq 0$  y la evolución del sistema está restringida a una de las dos superficies disjuntas (4.36), cada una topológicamente equivalentes a un semiplano. Más aún, de (4.36) tenemos que  $|\pi_\Omega| > |\pi_\phi|$ , o cual asegura que  $\text{sign}(\pi_x) = \text{sign}(\pi_\Omega)$ . Por lo tanto, tenemos una definición correcta de tiempo sobre cada hoja del vínculo eligiendo adecuadamente  $\eta$  de acuerdo con el signo de  $\pi_\Omega$ :

$$\begin{aligned} t(\phi, \Omega) &= +y(\phi - \Omega) & \pi_\Omega > 0 \\ t(\phi, \Omega) &= -y(\phi - \Omega) & \pi_\Omega < 0. \end{aligned} \quad (4.37)$$

No podemos, claro, escribir una única expresión para el tiempo válida en ambas hojas del vínculo si nos restringimos a  $t(q^i)$ , pero esto es natural, porque las hojas están identificadas por el signo de un momento. El tiempo extrínseco (4.33), por eso, no tiene esa dificultad.

De acuerdo con la ecuación (4.30) la función  $f$  es igual a  $\bar{Q}P + \eta T(\tau)/P$  y por lo tanto el hamiltoniano verdadero para el sistema reducido descrito por  $(Q, P)$  es

$$h(Q, P, \tau) = \frac{\eta}{P} \frac{dT}{d\tau},$$

con  $\eta = \text{sign}(\pi_\Omega)$ . Como en el gauge (4.34) los términos de superficie se anulan, la nueva acción invariante de gauge y la original pesan los caminos de la misma forma. Sustituyendo  $h$  en la ecuación (??) obtenemos el propagador para la transición  $|\phi_1, \Omega_1\rangle \rightarrow |\phi_2, \Omega_2\rangle$  en la forma

$$\langle \phi_2, \Omega_2 | \phi_1, \Omega_1 \rangle = \int DQDP \exp \left[ i \int_{T_1}^{T_2} \left( P dQ - \frac{\eta}{P} dT \right) \right], \quad (4.38)$$

donde los extremos están dados por  $T_1 = \pm y(\phi_1 - \Omega_1)$  y  $T_2 = \pm y(\phi_2 - \Omega_2)$ . Notemos que en el gauge (4.34) que define un tiempo intrínseco el observable  $Q$  se reduce a una función de solamente las coordenadas originales:

$$Q|_{x=0} = x(\phi + \Omega).$$

De esta manera, los caminos van de  $Q_1 = x(\phi_1 + \Omega_1)$  a  $Q_2 = x(\phi_2 + \Omega_2)$ . El propagador es el de un sistema con un grado de libertad verdadero dado por la coordenada  $Q$ . Observemos que, a diferencia de lo que ocurría con el ejemplo de la sección precedente, ahora el hamiltoniano reducido es independiente del tiempo, de modo que hemos obtenido la integral de camino para un sistema conservativo. Considerando ambos signos posibles del hamiltoniano reducido, la integral da la amplitud de transición para las dos teorías correspondientes a las hojas  $\pi_\Omega > 0$  y  $\pi_\Omega < 0$ .

- *Ejemplo 1:* Un modelo cerrado ( $k = 1$ ) con constante cosmológica  $\Lambda > 0$  y un campo escalar no masivo  $\phi$ , cuyo vínculo hamiltoniano es

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4} e^{-3\Omega} (\pi_\phi^2 - \pi_\Omega^2) - e^\Omega + \Lambda e^{3\Omega} \approx 0 \quad (4.39)$$

no resulta separable en términos de las variables  $x(\phi + \Omega)$ ,  $y(\phi - \Omega)$ ; más aún, su potencial no tiene un signo definido. Sin embargo, se puede mostrar que el tiempo extrínseco obtenido para el caso  $k = 0$  es también un tiempo global para el caso  $k = 1$ . Consideremos el vínculo

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{4} e^{-3\Omega} (\pi_\phi^2 - \pi_\Omega^2) + \Lambda e^{3\Omega} \approx 0$$

que es equivalente a

$$H_0 = \pi_\phi^2 - \pi_\Omega^2 + 4\Lambda e^{6\Omega} \approx 0.$$

Eligiendo  $y = -(1/3)e^{3(\Omega-\phi)}$ ,  $x = (1/3)e^{3(\Omega+\phi)}$  obtenemos el tiempo extrínseco

$$t = -\left(\frac{2}{3}\right) \frac{\Lambda e^{6\Omega}}{\pi_\phi + \pi_\Omega}. \quad (4.40)$$

Sobre la superficie  $\mathcal{H}_0 = 0$  podemos escribir

$$t = \frac{1}{6}(\pi_\phi - \pi_\Omega)$$

(así, hemos obtenido un tiempo extrínseco para el modelo de la sección anterior; de hecho, como aquel modelo tiene un potencial simple definido positivo y que crece con  $\Omega$ , cualquier función de la forma  $\sim -\pi_\Omega$  es un tiempo:  $[-\pi_\Omega, e^{3\Omega}] = 3e^{3\Omega} > 0$ ). Notemos, sin embargo, que si queremos verificar que este tiempo vale para el modelo con  $k = 1$  no debemos escribirlo de la última forma, pues la obtuvimos sobre el vínculo original. Si calculamos el paréntesis de Poisson de  $t = -(2/3)\Lambda e^{6\Omega}/(\pi_\phi + \pi_\Omega)$  con el vínculo  $H = 4e^{3\Omega}\mathcal{H}$  obtenemos  $[t, H] = [t, H_0] + [t, -4e^{4\Omega}]$ , que, como resulta sencillo comprobar, es la suma de dos términos positivos. Como  $\mathcal{H}$  y  $H$  son equivalentes, obtenemos

$$[t, \mathcal{H}] > 0$$

y  $t$  es un tiempo global también para el modelo dado por (4.39).

Esta deparametrización también nos provee de otro propagador para el modelo de la sección 4.1.2; éste se obtiene de (4.38) identificando  $T_a = \pm y_a = \mp(1/3)e^{3(\Omega_a - \phi_a)}$ ,  $Q_a = x_a = (1/3)e^{3(\Omega_a + \phi_a)}$ ,  $a = 1, 2$ . Esta cuantización tiene la ventaja de un hamiltoniano conservado, pero presenta la dificultad práctica de evaluar efectivamente la integral, dada la forma del integrando.

- *Ejemplo 2:* Consideremos un universo plano con constante cosmológica  $\Lambda > 0$  y un

campo escalar masivo  $\phi$ . El vínculo correspondiente tiene la forma

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4}e^{-3\Omega}(\pi_\phi^2 - \pi_\Omega^2) + m^2\phi^2 + \Lambda e^{3\Omega} \approx 0. \quad (4.41)$$

Este modelo admite un tiempo intrínseco. En el caso  $m = 0$  obtenemos el vínculo equivalente  $H_0$  del ejemplo precedente. La misma elección de variables permite definir el tiempo intrínseco

$$t = -y \text{sign}(\pi_\Omega) = -\frac{1}{3} \text{sign}(\pi_\Omega) e^{3(\Omega - \phi)}, \quad (4.42)$$

y como el término adicional asociado con la masa del campo escalar es positivo (y depende de solamente las coordenadas) es fácil comprobar que es un tiempo también para el caso  $m \neq 0$ .

Es interesante señalar lo siguiente: Si eliminamos el campo  $\phi$ , el momento  $\pi_\phi$  desaparece, y el método de desparametrización de la sección anterior conduce a tiempos extrínsecos de la forma

$$t \sim -\frac{e^{\alpha\Omega}}{\pi_\Omega}.$$

Esta expresión es análoga a lo que en cosmología clásica es usualmente identificado como un tiempo en términos de la constante de Hubble  $H$  [Kolb & Turner (1988)]: es común trabajar con el tiempo

$$t_H \equiv H^{-1}$$

donde  $H$  se define como  $\dot{a}/a$  con  $a$  el factor de escala. Ahora bien, como  $a \sim e^\Omega$  y  $\pi_\Omega \sim -e^{3\Omega}(d\Omega/d\tau)$ , entonces

$$t_H \sim -\frac{e^{3\Omega}}{\pi_\Omega},$$

que es análogo al tiempo que obtuvimos. Por cierto, un tiempo tal está globalmente bien definido mientras el vínculo no permita  $\pi_\Omega = 0$ .

#### 4.1.4 Tiempo extrínseco. El modelo de de Sitter cerrado

Nuestro método de desparametrización da una forma simple de investigar cómo las propiedades geométricas de la superficie de vínculo imponen restricciones en la definición de un tiempo global. Hasta ahora hemos considerado modelos cuyo hamiltoniano incluye un potencial que no se anula en ningún punto del espacio de fases. En esta sección examinaremos un modelo que, a pesar de su simplicidad, es un buen ejemplo para entender la cuantización con tiempo extrínseco.

Consideremos el vínculo del modelo vacío, isótropo y homogéneo más general:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{4}e^{-3\Omega}\pi_\Omega^2 - ke^\Omega + \Lambda e^{3\Omega} \approx 0. \quad (4.43)$$

Este hamiltoniano corresponde a un universo con una curvatura arbitraria  $k = -1, 0, 1$  y una constante cosmológica no nula; supondremos  $\Lambda > 0$ . En el caso  $k = 0$  obtenemos el universo de de Sitter; aunque la ausencia de materia hace de este universo básicamente un modelo ‘de juguete’, ha recibido considerable atención porque reproduce el comportamiento de modelos con materia o curvatura no nula cuando el factor de escala  $a \sim e^\Omega$  es suficientemente grande [Weinberg (1972)]. La evolución clásica se obtiene fácilmente, y corresponde a una expansión exponencial. De hecho, desde un punto de vista geométrico, tanto para  $k = 0$  como para  $k = -1$  el momento  $\pi_\Omega$  no puede cambiar su signo. Para el modelo cerrado ( $k = 1$ ), en cambio,  $\pi_\Omega = 0$  es posible.

Si aplicamos el procedimiento de la sección 3.4.3 considerando que este modelo es un reloj ideal después de una transformación canónica, obtenemos que

$$t \sim -e^{-2\Omega}\pi_\Omega \quad (4.44)$$

es un tiempo global. Para poder comparar los resultados aplicaremos nuestro procedimiento al vínculo escaleado  $H = e^{-\Omega}\mathcal{H}$ :

$$H = -\frac{1}{4}e^{-4\Omega}\pi_\Omega^2 - k + \Lambda e^{2\Omega} \approx 0. \quad (4.45)$$

La ecuación de Hamilton-Jacobi asociada con  $H$  es

$$-\left(\frac{\partial W}{\partial \Omega}\right)^2 - 4ke^{4\Omega} + 4\Lambda e^{6\Omega} = 4e^{4\Omega} E \quad (4.46)$$

e igualando  $E = \bar{P}_0$  obtenemos la solución

$$W(\Omega, \bar{P}_0) = \pm 2 \int d\Omega e^{2\Omega} \sqrt{\Lambda e^{2\Omega} - k - \bar{P}_0}, \quad (4.47)$$

con  $+$  para  $\pi_\Omega > 0$  y  $-$  para  $\pi_\Omega < 0$ . De acuerdo con la ecuación 4.47), sobre la superficie de vínculo tenemos

$$\bar{Q}^0 = \left[ \frac{\partial W}{\partial \bar{P}_0} \right]_{\bar{P}_0=0} = \mp \Lambda^{-1} \sqrt{\Lambda e^{2\Omega} - k}. \quad (4.48)$$

Como antes, introducimos una transformación que define un hamiltoniano verdadero  $h = \partial f / \partial \tau$  y las variables  $Q^0$  y  $P_0$  del sistema de gauge en el cual convertimos el modelo. El gauge puede fijarse mediante una condición dependiente de  $\tau$  como  $\chi \equiv Q^0 - T(\tau) = 0$ . Entonces podemos definir

$$t = Q^0 = \theta(-\pi_\Omega) \Lambda^{-1} \sqrt{\Lambda e^{2\Omega} - k} - \theta(\pi_\Omega) \Lambda^{-1} \sqrt{\Lambda e^{2\Omega} - k} \quad (4.49)$$

como un tiempo global para el modelo. Despejando de la ecuación de vínculo

$$\pi_\Omega = \pm 2e^{2\Omega} \sqrt{\Lambda e^{2\Omega} - k} \quad (4.50)$$

(vemos que en el caso  $k = 1$  el tamaño natural del espacio de configuración es  $\Omega \geq -\ln(\sqrt{\Lambda})$ ), podemos escribir

$$t(\Omega, \pi_\Omega) = -\frac{1}{2} \Lambda^{-1} e^{-2\Omega} \pi_\Omega, \quad (4.51)$$

que concuerda con (4.44). Surge aquí una importante diferencia entre los casos  $k = -1$  y  $k = 1$ : para  $k = -1$  el potencial tiene un signo definido, y el vínculo se separa en dos hojas disjuntas. En este caso la evolución puede parametrizarse con una función de solamente la coordenada  $\Omega$ . La desparametrización del modelo con  $k = 0$  es totalmente análoga.

Para el modelo cerrado, en cambio, el potencial se anula en un punto y la topología de la superficie de vínculo ya no es la de dos semiplanos disjuntos. Aunque para  $\Omega = -\ln(\sqrt{\Lambda})$  tenemos  $V(\Omega) = 0$  y  $\pi_\Omega = 0$ , es fácil verificar que  $d\pi_\Omega/d\tau \neq 0$  en este punto. Luego, en este caso la coordenada  $\Omega$  no es suficiente para parametrizar la evolución, ya que el sistema puede ir de  $(\Omega, \pi_\Omega)$  a  $(\Omega, -\pi_\Omega)$ ; es necesario entonces definir el tiempo global como una función que incluya al momento.

El sistema tiene un único grado de libertad y un vínculo, de manera que es puro gauge. En otras palabras, hay un único estado físico, en el sentido de que desde un punto dado del espacio de fases podemos alcanzar cualquier otro mediante una transformación de gauge. Esto nos provee de una forma de probar la consistencia de nuestro procedimiento de desparametrización [Giribet & Simeone (2001b)]: si caracterizamos los estados mediante una variable que defina un buen tiempo global, debemos obtener una probabilidad de transición igual a la unidad.

Efectivamente, si procedemos como en el caso de la sección 4.1.1, obtenemos

$$\langle Q_2^0, \tau_2 | Q_1^0, \tau_1 \rangle = \exp \left( -i \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\partial f}{\partial \tau} d\tau \right),$$

y por lo tanto la probabilidad para la transición de  $Q_1^0$  en  $\tau_1$  a  $Q_2^0$  en  $\tau_2$  es

$$|\langle Q_2^0, \tau_2 | Q_1^0, \tau_1 \rangle|^2 = 1.$$

Cuando el modelo es abierto o plano las coordenadas  $\Omega$  y  $Q^0$  están relacionadas de forma unívoca, y el resultado puede entenderse fácilmente en el sentido de que una vez que se ha fijado el gauge hay un único valor posible del factor de escala para cada  $\tau$ . Pero en el caso del modelo cerrado hay dos  $\Omega$  posibles para cada  $\tau$ ; en cambio, en cada  $\tau$  hay un único valor posible de  $\pi_\Omega$ . En efecto,  $\pi_\Omega$  evoluciona monótonamente con  $\tau$ , ya que  $[\pi_\Omega, H]$  no se anula sobre la superficie de vínculo. Luego, la amplitud en términos de  $Q^0$  no corresponde a la evolución de la coordenada  $\Omega$ , sino a la del momento, de manera que

$$|\langle \pi_{\Omega,2} | \pi_{\Omega,1} \rangle|^2 = 1.$$

Debemos concluir que  $\langle Q_2^0, \tau_2 | Q_1^0, \tau_1 \rangle$  corresponde a  $\langle \pi_{\Omega,2} | \pi_{\Omega,1} \rangle$ . Que en los modelos plano y abierto ésta a su vez coincida con una amplitud para la coordenada  $\Omega$  no es más que una peculiaridad de esos modelos, y no algo que deba tomarse como base de un programa de desparametrización.

De acuerdo con nuestro análisis previo, el hecho de que en el caso  $k = 1$  la amplitud  $\langle Q_2^0, \tau_2 | Q_1^0, \tau_1 \rangle$  no sea equivalente a  $\langle \Omega_2 | \Omega_1 \rangle$  es natural, ya que la inexistencia de un tiempo intrínseco hace imposible encontrar un gauge globalmente bueno que de a  $\tau$  como una función de únicamente  $\Omega$  (véase la sección 3.3.1). Pero precisamente por esta razón, esto no debería tomarse como una falla del procedimiento de cuantización, ya que una caracterización de los estados en términos de solamente las coordenadas originales no es correcta si queremos mantener una noción correcta de tiempo durante toda la evolución.

## 4.2 Universos anisótropos

Mientras que los modelos isótropos de Friedmann–Robertson–Walker pueden constituir una buena descripción del universo presente, al estudiar el universo temprano deberían considerarse modelos un poco más generales. Por supuesto, cualquier modelo anisótropo es de o interés físico en tanto evolucione hacia un grado pequeño de anisotropía, de manera que resulte compatible con el estado actual del universo.

Las hipótesis de homogeneidad e isotropía determinan por completo la forma de la métrica espacial, dejando libre sólo la curvatura; si restringimos las hipótesis a únicamente la homogeneidad la clase de modelos se amplía notablemente. La homogeneidad implica que las propiedades métricas son las mismas en todo punto del espacio. La definición matemática precisa de este concepto está dada por el grupo de transformaciones que dejan invariante a la métrica. Como el espacio es tridimensional, las transformaciones deben estar dadas por tres parámetros independientes.

En el espacio euclídeo la homogeneidad se manifiesta en la invariancia de la métrica

ante traslaciones del sistema de coordenadas cartesiano. Los tres parámetros que definen una traslación son las tres componentes del vector asociado a un desplazamiento del origen. Una traslación deja invariantes tres diferenciales independientes ( $dx, dy, dz$ ) de los cuales se obtiene el diferencial de longitud.

Cuando se considera un espacio homogéneo no euclídeo las transformaciones del grupo de simetría también dejan invariantes tres formas diferenciales lineales; sin embargo, estas formas no son diferenciales totales de funciones de las coordenadas, sino

$$\sigma^i = e_a^i dx^a$$

donde  $a = 1, 2, 3$  and  $e^i$  son tres vectores independientes que son funciones de las coordenadas. Las formas diferenciales verifican  $d\sigma^i = \epsilon_{ijk}\sigma^j \times \sigma^k$  (véase, por ejemplo, [Schutz (1980), Schutz (1985)]). La métrica espacial invariante puede entonces escribirse [Landau & Lifshitz (1975)]

$$dl^2 = g_{ij}\sigma^i\sigma^j = g_{ij}(e_a^i dx^a)(e_b^j dx^b),$$

de manera que el tensor métrica espacial tiene las componentes

$$g_{ab} = g_{ij}e_a^i e_b^j.$$

Los modelos anisótropos están comprendidos por los de Bianchi y el de Kantowski-Sachs [Ryan & Shepley (1975)]. En esta sección aplicaremos nuestro plan de desparametrización al modelo de Kantowski-Sachs [Kantowski & Sachs (1966)], y al de Taub [Taub (1951)], el cual es un caso particular del tipo IX de Bianchi (estos modelos han merecido considerable atención en diferentes programas de desparametrización y cuantización; véase, por ejemplo, [Higuchi & Wald (1995)]). Introduciendo la matriz diagonal  $\beta_{ij}$  de  $3 \times 3$ , ambas métricas espacio-temporales pueden ponerse en la forma

$$ds^2 = N^2 d\tau^2 - e^{2\Omega(\tau)}(e^{2\beta(\tau)})_{ij}\sigma^i\sigma^j. \quad (4.52)$$

Debemos señalar, sin embargo, que la geometría espacial de estos dos modelos es esencialmente diferente, en el sentido de que no hay una transformación continua que lleve de una a la otra (ver más adelante).

### 4.2.1 El universo de Kantowski–Sachs

El universo de Kantowski–Sachs está definido por

$$ds^2 = N^2 d\tau^2 - S^2(\tau) dz^2 - R^2(\tau)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (4.53)$$

El modelo puede cerrarse haciendo  $0 \leq z \leq 4\pi$  (y sustituyendo entonces  $z$  por el ángulo  $\psi$ ). El comportamiento clásico de este modelo es análogo al del de Friedmann–Robertson–Walker cerrado en el hecho de que el volumen, definido como

$$V = \int d^3x \sqrt{-({}^3g)},$$

crece hasta un máximo y luego vuelve a cero. Para aplicar el formalismo hamiltoniano es conveniente escribir la métrica en la forma (4.52); para eso definimos

$$\beta_{ij} = \text{diag}(-\beta, -\beta, 2\beta)$$

y las formas diferenciales  $\sigma^1 = d\theta$ ,  $\sigma^2 = \sin \theta d\varphi$ ,  $\sigma^3 = d\psi$ . Entonces

$$ds^2 = N^2 d\tau^2 - e^{2\Omega(\tau)} \left( e^{2\beta(\tau)} d\psi^2 + e^{-\beta(\tau)} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right). \quad (4.54)$$

Notemos que aún para  $\beta = 0$  el modelo es anisótropo; ésta es la diferencia central con los modelos de Bianchi.

En ausencia de materia la forma hamiltoniana de la acción es

$$S[\Omega, \beta, \pi_\Omega, \pi_\beta, N] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( \pi_\beta \frac{d\beta}{d\tau} + \pi_\Omega \frac{d\Omega}{d\tau} - N\mathcal{H} \right) d\tau \quad (4.55)$$

donde  $\mathcal{H} = e^{-3\Omega} H \approx 0$  es el vínculo hamiltoniano y

$$H = -\pi_\Omega^2 + \pi_\beta^2 - e^{4\Omega+2\beta}. \quad (4.56)$$

El modelo de Kantowski–Sachs tiene la interesante propiedad de que, si bien el potencial  $V(\Omega, \beta) = -e^{4\Omega+2\beta}$  tiene un signo bien definido y por eso puede definirse un tiempo intrínseco, el tiempo no coincide trivialmente con una función del factor de escala (esto resulta justamente de que el volumen no evoluciona monótonamente). Aunque en algunos de los primeros trabajos sobre este modelo se utilizó  $\Omega$  como tiempo, es sencillo ver que ninguna función  $\Theta(\Omega)$  puede ser un tiempo global para el modelo de Kantowski–Sachs:

$$[\Theta(\Omega), \mathcal{H}] = -2 \frac{\partial \Theta(\Omega)}{\partial \Omega} e^{-3\Omega} \pi_\Omega,$$

y para  $\pi_\beta = \pm e^{2\beta+\Omega}$  tenemos  $\pi_\Omega = 0$ , de manera que  $[\Theta(\Omega), \mathcal{H}]$  se anula. En los trabajos mencionados el momento  $\pi_\Omega$  era definido como el hamiltoniano reducido; esto es insatisfactorio, porque aún si se restringe el espacio de configuración a su “tamaño natural” para evitar un hamiltoniano imaginario que lleve a una evolución no unitaria,  $\pi_\Omega = 0$  hace posibles las transiciones de estados de “energía positiva” a estado de “energía negativa”.

El hamiltoniano no es separable en términos de las variables originales; entonces definimos

$$e^{3(\Omega+\beta)} \equiv 3x, \quad e^{\Omega-\beta} \equiv 4y,$$

y obtenemos el vínculo equivalente

$$H' \equiv -(\pi_x \pi_y + 1) \approx 0. \quad (4.57)$$

Siguiendo un procedimiento similar al de la sección 4.1.3 resolvemos la ecuación de Hamilton–Jacobi

$$-\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} - 1 = E',$$

para obtener el generador  $W$  de una transformación canónica de  $(x, y, \pi_x, \pi_y)$  a las variables  $(\bar{Q}^i, \bar{P}_i)$  del sistema de gauge en el cual convertimos al minisuperespacio; luego llevamos a cabo una transformación dependiente de  $\tau$  en el espacio de observables. Las variables

canónicas del sistema de gauge son entonces

$$\begin{aligned} Q^0 &= \frac{e^{\Omega-\beta}}{4P}, \\ Q &= -\frac{1}{3}e^{3(\Omega+\beta)} - \frac{1}{P^2} \left( \frac{e^{\Omega-\beta}}{4}(1+P_0) + \eta T(\tau) \right), \\ P_0 &= (\pi_\beta^2 - \pi_\Omega^2)e^{-4\Omega-2\beta} - 1, \\ P &= -\frac{1}{2}(\pi_\beta + \pi_\Omega)e^{-3(\Omega+\beta)} \end{aligned}$$

con  $\eta = \pm 1$  ( $P = -\pi_x$  no se anula sobre la superficie de vínculo). El hamiltoniano del sistema reducido descrito por  $(Q^i, P_i)$  es

$$h \equiv \frac{\eta}{P} \frac{dT}{d\tau}.$$

Luego, la acción invariante de gauge  $\mathcal{S}$  puede escribirse como

$$\mathcal{S}[Q^i, P_i, N] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( P \frac{dQ}{d\tau} + P_0 \frac{dQ^0}{d\tau} - NP_0 - \frac{\eta}{P} \frac{dT}{d\tau} \right) d\tau, \quad (4.58)$$

o en términos de las variables originales

$$\mathcal{S}[\Omega, \beta, \pi_\Omega, \pi_\beta, N] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( \pi_\beta \frac{d\beta}{d\tau} + \pi_\Omega \frac{d\Omega}{d\tau} - N\mathcal{H} \right) d\tau + B(\tau_2) - B(\tau_1), \quad (4.59)$$

donde

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\pi_\Omega + \pi_\beta} \left[ 4e^{3(\Omega+\beta)} \left( \frac{1}{4}e^{\Omega-\beta} + \eta T(\tau) \right) + \frac{1}{2}(-\pi_\Omega^2 + \pi_\beta^2 - e^{4\Omega+2\beta}) \right] \\ &= - \left[ 2 \left( Q^0 + \eta \frac{T(\tau)}{P} \right) + Q^0 P_0 \right]. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Ante una transformación de gauge generada por  $\mathcal{H}$  tenemos  $\delta_\epsilon B = -\delta_\epsilon \mathcal{S}$ , y por lo tanto  $\delta_\epsilon \mathcal{S} = 0$ . Sobre la superficie  $H' = P_0 = 0$  estos términos claramente se anulan en el gauge

$$\chi \equiv Q^0 P + \eta T(\tau) = 0 \quad (4.61)$$

que es equivalente a  $T(\tau) = \pm(1/4)e^{\Omega-\beta}$ , y por lo tanto define  $\tau = \tau(\Omega, \beta)$ . Un tiempo intrínseco  $t$  puede definirse escribiendo  $t = -\eta Q^0 P$ , con  $\eta = \pm 1$ , y eligiendo apropiadamente  $\eta$ :

$$[t, H'] = [-\eta Q^0 P, P_0] = -\eta P,$$

y dado que  $P = -\pi_x$  debemos elegir  $\eta = 1$  si  $\pi_x > 0$  y  $\eta = -1$  si  $\pi_x < 0$ ; como  $\pi_x = (1/2)(\pi_\Omega + \pi_\beta)e^{-3(\Omega+\beta)}$  y sobre la superficie de vínculo es  $|\pi_\beta| > |\pi_\Omega|$ , tenemos  $sign(\pi_x) = sign(\pi_\Omega + \pi_\beta) = sign(\pi_\beta)$ ; por lo tanto el tiempo es

$$\begin{aligned} t(\Omega, \beta) &= +\frac{1}{4}e^{\Omega-\beta} & \text{if } \pi_\beta < 0, \\ t(\Omega, \beta) &= -\frac{1}{4}e^{\Omega-\beta} & \text{if } \pi_\beta > 0. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Notemos que  $\pi_\beta$  no puede cambiar de signo, de manera que el tiempo está bien definido para toda la evolución del sistema.

Es sencillo comprobar que un tiempo extrínseco puede definirse imponiendo un gauge canónico de la forma  $\chi \equiv Q^0 + T(\tau) = 0$ . Igualando  $t = -T$  se obtiene

$$t(\Omega, \beta, \pi_\Omega, \pi_\beta) = Q^0 = -\frac{e^{4\Omega+2\beta}}{2(\pi_\Omega + \pi_\beta)} \quad (4.63)$$

con  $[t, \mathcal{H}] > 0$ . Usando la ecuación de vínculo (4.56) podemos escribir

$$t(\pi_\Omega, \pi_\beta) = \frac{1}{2}(\pi_\Omega - \pi_\beta). \quad (4.64)$$

Vemos que un gauge que involucra uno de los nuevos momentos define un tiempo en términos de solamente las coordenadas originales, mientras que uno que incluye sólo las nuevas coordenadas da un tiempo extrínseco, esto es, uno que incluye a los momentos originales.

Como la integral de camino en las variables  $(Q^i, P_i)$  es invariante de gauge, podemos calcularla en cualquier gauge canónico. Con la elección (4.61), sobre la superficie de vínculo  $P_0 = 0$ , y después de integrar en  $N$ ,  $P_0$  y  $Q^0$ , la amplitud de transición está dada por

$$\langle \Omega_2, \beta_2 | \Omega_1, \beta_1 \rangle = \int DQDP \exp \left[ i \int_{T_1}^{T_2} \left( P dQ - \frac{\eta}{P} dT \right) \right], \quad (4.65)$$

donde  $T_1 = \pm(1/4)e^{\Omega_1-\beta_1}$  y  $T_2 = \pm(1/4)e^{\Omega_2-\beta_2}$ ; como sobre la superficie de vínculo y en el gauge (4.61) el grado de libertad físico se reduce a  $Q = -x = -(1/3)e^{3(\Omega+\beta)}$ , then the paths

in phase space go from  $Q_1 = -(1/3)e^{3(\Omega_1 + \beta_1)}$  to  $Q_2 = -(1/3)e^{3(\Omega_2 + \beta_2)}$ . Hemos obtenido así la integral de camino para un sistema con un grado de libertad físico y un hamiltoniano verdadero. El resultado muestra la separación entre grados de libertad genuinos y tiempo que resulta de una elección sencilla del gauge.

Notemos que la coordenada  $\beta$  es en sí misma un tiempo. Estrictamente, como  $\pi_\beta$  no se anula sobre la superficie de vínculo, tenemos que

$$[\beta, H] = 2\pi_\beta \neq 0$$

de manera que

$$t^* \equiv \beta \text{sign}(\pi_\beta)$$

es un tiempo global. Esto hace posible una interpretación del propagador como la amplitud asociada con la transición de  $\Omega_1$  al tiempo  $t_1^* = \pm\beta_1$  a  $\Omega_2$  al tiempo  $t_2^* = \pm\beta_2$ :

$$\langle \Omega_2, \beta_2 | \Omega_1, \beta_1 \rangle = \langle \Omega_2, t_2^* | \Omega_1, t_1^* \rangle,$$

con un signo  $\pm$  que depende de la hoja de la superficie de vínculo definida por el signo de  $\pi_\beta$ .

Si incluimos un campo de materia el hamiltoniano se convierte en

$$H = -\pi_\Omega^2 + \pi_\beta^2 + \pi_\phi^2 - e^{4\Omega + 2\beta} + V(\phi)e^{6\Omega} \approx 0, \quad (4.66)$$

y la correspondiente ecuación de Hamilton–Jacobi será resoluble o no dependiendo de la forma de  $V(\phi)$ . En el caso de un campo escalar sin masa podemos mostrar que el tiempo intrínseco (4.62) no es más un tiempo global, pero el tiempo extrínseco (4.63) sigue siéndolo: si calculamos el paréntesis de Poisson para  $t(\Omega, \beta) = -(1/4)\text{sign}(\pi_\beta)e^{\Omega - \beta}$  obtenemos

$$[t, H] = \frac{1}{2}\text{sign}(\pi_\beta)(\pi_\Omega + \pi_\beta)e^{\Omega - \beta}.$$

El resultado no es definido positivo, porque el signo de  $\pi_\beta$  y el de  $\pi_\Omega + \pi_\beta$  no son necesariamente el mismo, como resultado del término  $\pi_\phi^2$  en el nuevo hamiltoniano. En cambio,

sobre la (nueva) superficie de vínculo tenemos que

$$t = t(\pi_\Omega, \pi_\beta, \pi_\phi) = \pi_\Omega - \pi_\beta - \frac{\pi_\phi^2}{\pi_\Omega + \pi_\beta}$$

y si calculamos el paréntesis de Poisson obtenemos

$$[t, H] = 2e^{4\Omega+2\beta} \left( 1 + \frac{3\pi_\phi^2}{(\pi_\Omega + \pi_\beta)^2} \right)$$

que es definido positivo.

Observemos que ahora, cuando incluimos un campo de materia, el grado de libertad asociado con la anisotropía del modelo deja de ser un buen tiempo. La razón es que como la materia entra en el formalismo a través de un término definido positivo en el hamiltoniano, el momento conjugado a la coordenada  $\beta$  puede anularse.

## 4.2.2 El universo de Taub

La generalización anisótropa del universo cerrado de Friedmann–Robertson–Walker es el universo de Bianchi de tipo IX, cuya métrica se de la forma (4.52) con  $\beta_{ij}$  la matriz diagonal de  $3 \times 3$

$$\beta_{ij} = \text{diag}[\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-, \beta_+ - \sqrt{3}\beta_-, -\beta_+].$$

Los parámetros  $\beta_+$  y  $\beta_-$  determinan el grado de anisotropía. Si fijamos  $\beta_- = 0$  obtenemos la métrica del universo de Taub.

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( \pi_+ \frac{d\beta_+}{d\tau} + \pi_\Omega \frac{d\Omega}{d\tau} - N\mathcal{H} \right) d\tau, \quad (4.67)$$

con el vínculo hamiltoniano

$$\mathcal{H} = e^{-3\Omega}(\pi_+^2 - \pi_\Omega^2) + \frac{1}{3}e^\Omega(e^{-8\beta_+} - 4e^{-2\beta_+}) \approx 0. \quad (4.68)$$

Como  $e^{-3\Omega}$  es definido positivo, este vínculo es equivalente a

$$H = \pi_+^2 - \pi_\Omega^2 + \frac{1}{3}e^{4\Omega}(e^{-8\beta_+} - 4e^{-2\beta_+}) \approx 0. \quad (4.69)$$

El universo de Taub es posiblemente el mejor modelo para ejemplificar nuestro método de desparametrización y cuantización; nos provee de un sistema con un hamiltoniano separable pero con un potencial que se anula, de manera que no es posible proceder a la cuantización con un tiempo intrínseco. Como es sencillo comprobar, para  $\beta_+ = -(1/6)\ln 4$  el potencial es nulo.

El Hamiltoniano no es separable en términos de las variables originales  $(\Omega, \beta_+, \pi_\Omega, \pi_+)$ . Por lo tanto definimos

$$x = \Omega - 2\beta_+, \quad y = 2\Omega - \beta_+ \quad (4.70)$$

de manera que  $\pi_x^2 - \pi_\Omega^2 = 3(\pi_x^2 - \pi_y^2)$ , y podemos escribir

$$H = \pi_x^2 - \pi_y^2 + \frac{1}{9}(e^{4x} - 4e^{2y}) \approx 0. \quad (4.71)$$

El potencial se anula para  $y = 2x - (1/2)\ln 4$  y por eso no existe un tiempo global en términos de solamente  $x, y$ . Por lo tanto, antes de transformar al modelo en un sistema de gauge, haremos una transformación canónica a las variables  $(x, s, \pi_x, \pi_s)$  definidas de tal manera que el (nuevo) potencial sólo tiene un único término definido positivo. Las nuevas coordenadas corresponden así a las  $\bar{q}^i$  en términos de las cuales puede definirse un tiempo global.

El vínculo puede escribirse como  $H = H_1(x, \pi_x) + H_2(y, \pi_y)$  con  $H_1 > 0$  y  $H_2 < 0$ . Haremos una transformación que identifique  $H_2(y, \pi_y) = -\pi_s^2$ , de forma tal que  $\pi_s = \pm\sqrt{-H_2(y, \pi_y)}$ . Introducimos la generatriz de primer tipo

$$\Phi_1(y, s) = \pm\frac{2}{3}e^y \sinh s. \quad (4.72)$$

Los momentos están dados entonces por

$$\begin{aligned} \pi_y &= \pm\frac{2}{3}e^y \sinh s \\ \pi_s &= \pm\frac{2}{3}e^y \cosh s \end{aligned} \quad (4.73)$$

de donde

$$\pi_y^2 + \frac{4}{9}e^{2y} = \frac{4}{9}e^{2y}(\sinh^2 s + 1) = \pi_s^2$$

y el hamiltoniano puede escribirse

$$H(s, x, \pi_s, \pi_x) = -\pi_s^2 + \pi_x^2 + \frac{1}{9}e^{4x} \approx 0. \quad (4.74)$$

Como resultado de la transformación canónica (4.73) hemos obtenido un vínculo que, en términos de las nuevas variables, tiene dos hojas identificadas por el signo del momento  $\pi_s$ .

Es importante señalar la razón por la cual hemos introducido dos definiciones posibles para  $\Phi_1$ : el vínculo puede escribirse

$$H = \left( -\pi_s + \sqrt{\pi_x^2 + \frac{1}{9}e^{4x}} \right) \left( \pi_s + \sqrt{\pi_x^2 + \frac{1}{9}e^{4x}} \right) \approx 0, \quad (4.75)$$

y de haber elegido un único signo sólo uno de los factores sería nulo. Pero al nivel de las variables  $(x, s, \pi_x, \pi_s)$  no hay razón para preferir uno de los signos posibles de  $\pi_s$ ; consideraremos el vínculo hamiltoniano (4.74) como el punto de partida para aplicar nuestro procedimiento, y no volveremos a las variables originales. Un punto que debe resaltarse es que el potencial dentro de la raíz cuadrada no depende de la coordenada  $s$ , sino solamente de  $x$ . Esto asegura que como operadores las dos formas (4.74) y (4.75) son equivalentes, dado que así no aparecen términos adicionales asociados con conmutadores (véase el capítulo 5).

La acción  $S[x, s, \pi_x, \pi_s, N]$  diferirá de  $S[\Omega, \beta_+, \pi_\Omega, \pi_+, N]$  en términos de superficie  $D$  asociados con la transformación generada por  $\Phi_1$ :

$$\begin{aligned} S[x, s, \pi_x, \pi_s, N] &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( \pi_x \frac{dx}{d\tau} + \pi_s \frac{ds}{d\tau} - NH(x, s, \pi_x, \pi_s) \right) d\tau \\ &= S[\Omega, \beta_+, \pi_\Omega, \pi_+, N] + [D(\tau)]_{\tau_1}^{\tau_2}, \end{aligned}$$

y cuando transformamos el sistema en uno de gauge ordinario obtenemos términos adicionales  $B$ ; pero como no estamos interesados en una transición entre estados caracteri-

zados por las coordenadas originales  $q^i$ , sino por las  $\tilde{q}^i$ , no pediremos  $D + B = 0$ , sino solamente  $B = 0$  en un gauge que defina  $t = t(\tilde{q}^i)$ .

Introduzcamos las coordenadas

$$u = \frac{1}{12}e^{2(x+s)}, \quad v = \frac{1}{12}e^{2(x-s)}$$

que llevan al vínculo equivalente

$$H' = \pi_u \pi_v + 1.$$

Esto permite aplicar directamente el procedimiento de la sección 4.1.3 con la sustitución  $x \rightarrow u$ ,  $y \rightarrow v$ ,  $\phi \rightarrow x$ ,  $\Omega \rightarrow y$ . Entonces podemos volver a las variables  $(x, s, \pi_x, \pi_s)$ . Las variables  $(Q^i, P_i)$  del sistema de gauge están dadas por

$$\begin{aligned} Q^0 &= \frac{e^{2(x-s)}}{12P}, \\ Q &= \frac{1}{12}e^{2(x+s)} + \frac{1}{P^2} \left( \frac{1}{12}e^{2(x-s)}(1 - P_0) - \eta T(\tau) \right), \\ P_0 &= 9(\pi_x^2 - \pi_s^2)e^{-4x} + 1, \\ P &= 3(\pi_s + \pi_x)e^{-2(x+s)}, \end{aligned}$$

con  $\eta = \pm 1$ . Así tenemos un tiempo extrínseco

$$t(x, s, \pi_x, \pi_s) = \frac{1}{36} \frac{e^{4x}}{\pi_x + \pi_s}. \quad (4.76)$$

La superficie de vínculo se separa en dos hojas dadas por el signo de  $\pi_s$ . Sobre cada hoja el tiempo intrínseco se define como

$$t(x, s) = \frac{1}{12} \text{sign}(\pi_s) e^{2(x-s)}, \quad (4.77)$$

el cual se asocia con el gauge canónico  $\eta Q^0 P - T(\tau) = 0$  porque  $P$  es proporcional a  $\pi_s + \pi_x$  y  $\text{sign}(\pi_s + \pi_x) = \text{sign}(\pi_s)$ . Los términos de superficie asociados con la transformación  $(\tilde{q}^i, \tilde{p}_i) \rightarrow (Q^i, P_i)$  son

$$\begin{aligned} B(\tau) &= 2Q^0 - Q^0 P_0 - 2\eta \frac{T(\tau)}{P} \\ &= \frac{1}{3(\pi_s + \pi_x)} \left( \frac{e^{4x}}{6} - 2\eta e^{2(x+s)} T(\tau) \right) \end{aligned}$$

y con la elección de gauge que define un tiempo intrínseco se anulan sobre la superficie  $P_0 = 0$ . La expresión para el propagador es

$$\langle \mathbf{x}_2, s_2 | \mathbf{x}_1, s_1 \rangle = \int DQDP \exp \left[ i \int_{T_1}^{T_2} \left( P dQ - \frac{\eta}{P} dT \right) \right]. \quad (4.78)$$

Los extremos son  $T_1 = \pm(1/12)e^{2(\mathbf{x}_1 - s_1)}$  y  $T_2 = \pm(1/12)e^{2(\mathbf{x}_2 - s_2)}$ . Notemos que en el gauge que define un tiempo intrínseco la nueva coordenada  $Q$  coincide con  $(1/12)e^{2(\mathbf{x}+s)}$ , de modo que los caminos van de  $Q_1 = (1/12)e^{2(\mathbf{x}_1+s_1)}$  a  $Q_2 = (1/12)e^{2(\mathbf{x}_2+s_2)}$ . Hemos obtenido un propagador con una distinción clara entre el tiempo y el grado de libertad físico. La integral es la de un sistema conservativo con hamiltoniano  $\eta/P$ . Como  $\eta = \text{sign}(\pi_s)$  entonces al nivel de los grados de libertad físicos tenemos dos teorías disjuntas, una en cada hoja de la superficie de vínculo.

Análogamente al caso de  $\beta$  en el modelo de Kantowski–Sachs como el momento  $\pi_s$  no se anula la coordenada  $s$  es también un tiempo (véase la discusión en la sección 3.3.2):

$$[s, H] = -2\pi_s \neq 0.$$

En efecto, sobre cada hoja de la superficie de vínculo podemos definir un tiempo en la forma

$$t^* \equiv -s \text{ sign}(\pi_s).$$

Aunque en la integral de camino no usamos este tiempo como parámetro de integración, la interpretación de los resultados se aclara a partir de esta identificación, ya que podemos escribir la amplitud de transición como

$$\langle \mathbf{x}_2, t_2^* | \mathbf{x}_1, t_1^* \rangle$$

con un signo que depende del signo de  $\pi_s$ . Con esta interpretación el propagador es análogo al de un sistema mecánico con una coordenada  $\mathbf{x}$  cuya evolución se da en función de un tiempo verdadero  $t^*$ . Observemos que aunque los momentos originales están necesariamente involucrados en la descripción de los estados, se encuentran confinados a la variable

que se identifica con el tiempo:

$$\begin{aligned} s &= \pm \operatorname{arcsenh} \left( \frac{3}{2} \pi_y e^{-y} \right) \\ &= \pm \operatorname{arcsenh} \left( \frac{1}{2} (\pi_\Omega + \pi_+) e^{(-2\Omega + \beta_+)} \right), \end{aligned}$$

mientras que  $x$  es una función sencilla de solamente las coordenadas  $\Omega$  y  $\beta_+$ .

En este punto resulta natural preguntarse si este tiempo no podía obtenerse en forma directa mediante nuestro método de desparametrización. La respuesta es que sí es posible, aún en el caso de incluir materia en el modelo. Consideremos el vínculo del modelo de Taub con un campo escalar no interactuante y cuya masa puede despreciarse:

$$H = -\pi_\Omega^2 + \pi_\phi^2 + \pi_+^2 + \frac{1}{3} e^{4\Omega} (e^{-8\beta_+} - 4e^{-2\beta_+}) \approx 0. \quad (4.79)$$

Si hacemos el cambio a las coordenadas  $x$  e  $y$ , y llevamos a cabo la transformación canónica generada por  $\Phi_1(y, s)$ , obtenemos el vínculo equivalente

$$H = -\pi_s^2 + \pi_\phi^2 + \pi_x^2 + \frac{1}{9} e^{4x} \approx 0, \quad (4.80)$$

donde hemos redefinido  $\pi_\phi \rightarrow \pi_\phi/\sqrt{3}$ . La ecuación de Hamilton-Jacobi correspondiente es separable:

$$-\left(\frac{\partial W}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \phi}\right)^2 + \frac{1}{9} e^{4x} = E, \quad (4.81)$$

y su solución es claramente de la forma  $W_1(x, \pi_x) + W_2(\phi, \pi_\phi) + W_3(s, \pi_s)$ . Introduciendo las constantes de integración  $b^2 = \pi_\phi^2$  y  $a^2$  tales que  $a^2 + b^2 - E = \pi_s^2$  obtenemos

$$\begin{aligned} W &= \operatorname{sign}(\pi_x) \int dx \sqrt{a^2 - \frac{1}{9} e^{4x}} \\ &\quad + s \operatorname{sign}(\pi_s) \sqrt{a^2 + b^2 - E} + \phi \operatorname{sign}(\pi_\phi) \sqrt{b^2}. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Si igualamos  $E = \bar{P}_0$  resulta

$$\bar{Q}^0 = \left[ \frac{\partial W}{\partial \bar{P}_0} \right]_{\bar{P}_0=0} = -\operatorname{sign}(\pi_s) \frac{s}{2\sqrt{a^2 + b^2}} = -\frac{s}{2\pi_s}.$$

Como  $[\overline{Q}^0, \overline{P}_0] = 1$  entonces podemos inmediatamente definir un tiempo extrínseco como

$$t(s, \pi_s) \equiv \overline{Q}^0 = -\frac{s}{2\pi_s}. \quad (4.83)$$

En las variables  $(s, x, \phi, \pi_s, \pi_x, \pi_\phi)$  la superficie de vínculo es topológicamente equivalente a dos planos disjuntos, cada uno correspondiente a  $\pi_s > 0$  y a  $\pi_s < 0$ ; luego podemos definir un tiempo intrínseco como

$$\begin{aligned} t(s) &\equiv 2\pi_s \text{sign}(\pi_s) \overline{Q}^0 \\ &= -s \text{sign}(\pi_s), \end{aligned} \quad (4.84)$$

que coincide con el tiempo  $t^*$  encontrado antes (este tiempo resulta de la condición de gauge canónica  $\chi \equiv 2\overline{Q}^0 \sqrt{a^2 + b^2} - T(\tau) = 0$ ).

Todos los resultados incluyen el signo del momento  $\pi_s$ , que proviene del doble signo en la definición de  $\Phi_1$ . Algunos autores han sugerido, sin embargo, que el vínculo de un sistema parametrizado típico, que es lineal en el momento conjugado al tiempo, puede hallarse de alguna manera escondido en el formalismo hamiltoniano para el campo gravitatorio [Ferraro (1999), Catren & Ferraro (2001)]. De acuerdo con este punto de vista, debería elegirse sólo uno de los signos posibles del generador  $\Phi_1$ , y no habría dos teorías coexistentes. Nuestros resultados, en cambio, reflejan que estamos considerando el vínculo cuadrático  $H(x, s, \pi_x, \pi_s)$  como el punto de partida porque nuestro formalismo requiere la existencia de un conjunto de variables tales que el vínculo admite un tiempo intrínseco, y al nivel de dicho vínculo no hay razón para elegir un signo para el momento no nulo  $\pi_s$ . De todos modos, debemos señalar que, como el hamiltoniano del sistema reducido es una cantidad no nula conservada, en nuestra interpretación no hay transiciones de estados de una hoja a estados sobre la otra hoja del vínculo, y por lo tanto ambos puntos de vista no llevan a una contradicción esencial. Volveremos a este punto en el capítulo 5, en el contexto de la cuantización canónica del universo de Taub.

### 4.2.3 Otros modelos anisótropos

Existen otros modelos anisótropos cuyos hamiltonianos llevan a una ecuación de Hamilton-Jacobi aún más sencilla que las encontradas hasta aquí. Un ejemplo es el modelo de Bianchi del tipo I con  $\beta_{ij}$  una matriz diagonal, cuya métrica es de la forma dada en (4.52) con las formas lineales iguales a diferenciales de las coordenadas:  $\sigma^i = dx^i$ . La curvatura escalar  ${}^3R$  de este modelo es nula, de manera que en el caso vacío se obtiene el vínculo hamiltoniano

$$\mathcal{H} = -\pi_\Omega^2 + \pi_+^2 + \pi_-^2 \approx 0. \quad (4.85)$$

Esta forma del vínculo ha llevado a una interpretación basada en la analogía con una partícula libre relativista en dos dimensiones. De hecho, esto es correcto en el sentido de que todos los momentos son constantes de movimiento. Sin embargo, debemos señalar que la ausencia de una masa (o un potencial no nulo) impide identificar a  $\Omega$  como el tiempo, dado que es claro que el paréntesis de Poisson  $[\Omega, \mathcal{H}]$  se anula para  $\pi_\Omega = 0$ . El tiempo global debe ser extrínseco, y es fácil ver que el procedimiento de las secciones anteriores lleva a

$$t(\Omega, \pi_\Omega) = -\frac{\Omega}{2\pi_\Omega}. \quad (4.86)$$

(Pueden darse expresiones análogas en términos de  $\beta_\pm$  y  $\pi_\pm$  con la propiedad  $[t, \mathcal{H}] > 0$ ).

Un ejemplo menos trivial lo provee la versión homogénea del universo de Szekeres [Szekeres (1975)]. Con una elección adecuada de las coordenadas, este modelo está descrito por la métrica espacio-temporal

$$ds^2 = e^{\alpha(\tau)} (N^2 d\tau^2 - dz^2) - e^{\beta(\tau)} (e^p dx_+^2 + e^{-p} dx_-^2), \quad (4.87)$$

done  $p$  es una constante definida positiva que se relaciona usualmente con la presión de la materia. Esta métrica es invariante ante traslaciones a lo largo del eje  $z$  (en su versión original las funciones  $\alpha$  y  $\beta$  también dependen de  $z$ , de manera que el modelo no es

homogéneo). Podemos redefinir  $(e^{p/2}x_+, e^{-p/2}x_-) \rightarrow (x, y)$  para poner la métrica en la forma axisimétrica

$$ds^2 = e^{\alpha(\tau)} (N^2 d\tau^2 - dz^2) - e^{\beta(\tau)} (dx^2 + dy^2). \quad (4.88)$$

Si se desprecia la materia en la dinámica del modelo, podemos escribir su lagrangiano como

$$\mathcal{L} = N^3 R \sqrt{-(^3g)} = \frac{1}{N} e^{\beta} \left( \dot{\alpha}\dot{\beta} - 2\dot{\alpha}^2 + \frac{5}{2}\dot{\beta}^2 \right),$$

donde hemos descartado derivadas totales que contribuirían con términos de superficie (hemos usado puntos para designar derivadas respecto de  $\tau$ ). Notemos que no hay términos asociados a un potencial, pero las derivadas aparecen mezcladas, de manera que la supermétrica no es diagonal. Definimos entonces las nuevas coordenadas  $u$  y  $v$  tales que

$$\begin{aligned} \alpha &= v \\ \beta &= u - \frac{1}{5}v. \end{aligned}$$

Esto permite escribir el vínculo

$$\mathcal{H} = e^{-u+v/5} \left( \frac{2}{5}\pi_u^2 - \frac{5}{12}\pi_v^2 \right) \approx 0, \quad (4.89)$$

que es similar al de una partícula libre no masiva en una dimensión espacial, escaleado por la función definida positiva  $e^{-u+v/5}$ . Como el potencial es nulo, el tiempo no puede definirse en términos de únicamente las coordenadas; aplicando nuestro procedimiento de desparametrización encontramos que, dependiendo de la elección de las variables de separación en la ecuación ed Hamilton–Jacobi, el tiempo extrínseco puede darse como  $t(u, \pi_u) \sim u/\pi_u$  o como  $t(v, \pi_v) \sim -v/\pi_v$ .

### 4.3 Cosmologías de la teoría de cuerdas

Con el objeto de dar ejemplos de desparametrización y cuantización más allá de la relatividad general, aplicaremos ahora las técnicas desarrolladas en las secciones anteriores a

modelos de minisuperespacios que aparecen como soluciones de la acción efectiva de bajas energías de la teoría de cuerdas cerradas bosónicas.

### 4.3.1 Acción efectiva de bajas energías

La acción del modelo  $\sigma$  no lineal que describe la dinámica sobre la hoja de mundo de cuerdas sobre una variedad curva y en presencia de campos de fondo tiene la forma

$$S_{ws} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\sigma d\tau \sqrt{h} (h_{\alpha\beta} g_{\mu\nu}(X) + i\varepsilon_{\alpha\beta} B_{\mu\nu}(X)) \partial^\alpha X^\mu \partial^\beta X^\nu + \frac{1}{2\pi} \int d\sigma d\tau \sqrt{h} R(X) \phi(X), \quad (4.90)$$

donde  $h_{\alpha\beta}$  es la métrica sobre la hoja de mundo de la cuerda,  $R$  es el escalar de Ricci asociado con esta métrica,  $g_{\mu\nu}$  es la métrica del espacio-tiempo que fija la geometría de fondo,  $B_{\mu\nu}$  es una 2-forma y  $\phi$  es el dilatón. Estos son los campos de fondo que surgen como estados del espectro no masivo de las cuerdas bosónicas cerradas. Aquí  $\alpha, \beta$  identifican la hoja de mundo bidimensional, mientras que los índices  $\mu, \nu, \rho$  se reservan para el espacio  $D$ -dimensional. El parámetro  $\alpha'$  se interpreta como la inversa de la tensión  $T = 1/(2\pi\alpha')$ , lo cual introduce la escala de la teoría a nivel cuántico.

La teoría de campos bidimensional definida por (4.90) es invariante ante transformaciones de gauge de la forma

$$\begin{aligned} \delta B_{\mu\nu} &= \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu, \\ \delta \phi &= \phi_0, \end{aligned} \quad (4.91)$$

donde  $\Lambda_\mu$  es un vector arbitrario y  $\phi_0$  es un valor constante.

Definamos el tensor  $H_{\mu\nu\rho}$  asociado con el campo antisimétrico  $B_{\mu\nu}$  como sigue:

$$H_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho} - \partial_\rho B_{\mu\nu} + \partial_\nu B_{\rho\mu} \quad (4.92)$$

Si requerimos la invariancia de Weyl para la teoría (4.90) sobre la hoja de mundo obtenemos

$$R_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu \phi - \frac{1}{4} H_{\mu\rho\delta} H_\nu^{\rho\delta} = 0$$

$$\begin{aligned}
\nabla^\delta \mathbf{H}_{\delta\mu\nu} - \nabla^\delta \phi \mathbf{H}_{\delta\mu\nu} &= 0 \\
c - \nabla_\mu \nabla^\mu \phi + \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - \frac{1}{6} \mathbf{H}_{\mu\nu\rho} \mathbf{H}^{\mu\nu\rho} &= 0
\end{aligned} \tag{4.93}$$

donde  $c = 2(D - 26)/(3\alpha')$ . Remarquemos que estas ecuaciones están escritas hasta el primer orden en el desarrollo en potencias de  $\alpha'$ .

Estas ecuaciones pueden entenderse como las de Euler-Lagrange de una teoría de campos asociada con la siguiente acción:

$$S_{sf} = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^D x \sqrt{-g} e^{-\phi} \left( -c + R + \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - \frac{1}{12} \mathbf{H}_{\mu\nu\rho} \mathbf{H}^{\mu\nu\rho} \right). \tag{4.94}$$

Así, podemos interpretar  $S_{sf}$  como la acción efectiva de bajas energías de la teoría de cuerdas bosónicas cerradas. De esta manera, los campos deben satisfacer la condición de ser una solución clásica resultante del principio variacional con la acción (4.94) (al menos al primer orden en un desarrollo en potencias de  $\alpha'$ ).

La acción puede ponerse en una forma más familiar redefiniendo

$$g_{\mu\nu} \rightarrow e^\phi g_{\mu\nu}, \tag{4.95}$$

con lo cual se obtiene

$$\begin{aligned}
S_{ef} &= \frac{1}{16\pi G_N} \int d^D x \sqrt{-g} \\
&\times \left[ R - c e^{2\phi/(D-2)} + \frac{1}{D-2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - \frac{e^{4\phi/(D-2)}}{12} \mathbf{H}_{\mu\nu\rho} \mathbf{H}^{\mu\nu\rho} \right].
\end{aligned} \tag{4.96}$$

Esta es la acción de Einstein-Hilbert con términos particulares de acoplamiento entre el dilatón y el campo  $B_{\mu\nu}$ .

En el caso particular  $D = 4$ , el principio variacional  $\delta S = 0$  impuesto a esta nueva forma de la acción lleva a ecuaciones de movimiento de la forma

$$\nabla_\mu \partial^\mu \phi + c e^\phi - \frac{1}{16} e^{-2\phi} \mathbf{H}^2 = 0 \tag{4.97}$$

$$\nabla_\delta \mathbf{H}_{\mu\nu}^\delta + 2\nabla_\delta \phi \mathbf{H}_{\mu\nu}^\delta = 0 \quad (4.98)$$

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \frac{c}{2}g_{\mu\nu}e^\phi &= \frac{1}{2} \left( \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\nabla\phi)^2 \right) + \\ &+ \frac{1}{4}e^{-2\phi} \left( \mathbf{H}_{\mu\rho\delta} \mathbf{H}_\nu^{\rho\delta} - \frac{1}{6}g_{\mu\nu} \mathbf{H}^2 \right) \end{aligned} \quad (4.99)$$

y a las identidades de Bianchi

$$\nabla_{[\mu} \mathbf{H}_{\mu\rho\delta]} = 0. \quad (4.100)$$

Así obtenemos en (4.99) las ecuaciones de Einstein con una función cosmológica  $\Lambda(x) = ce^{\phi(x)}$  y términos de acoplamiento con el tensor energía-momento de los campos de fondo.

### 4.3.2 Modelos cosmológicos

Las ecuaciones de Euler-Lagrange que resultan de la acción (4.94) admiten soluciones isotrópicas y homogéneas en cuatro dimensiones [Antoniadis et al. (1988), Tseytlin (1992), Tseytlin & Vafa (1992), Goldwirth & Perry (1994)]. Dichas soluciones tienen la forma de Friedmann-Robertson-Walker

$$ds^2 = N(\tau)d\tau^2 - e^{2\Omega(\tau)} \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right). \quad (4.101)$$

Por otro lado, la isotropía y homogeneidad imponen al dilatón  $\phi$  y al tensor  $H_{\mu\nu\rho}$  las condiciones

$$\begin{aligned} \phi &= \phi(\tau) \\ \mathbf{H}_{ijk} &= \lambda(\tau)\varepsilon_{ijk} \end{aligned} \quad (4.102)$$

donde  $\varepsilon_{ijk}$  es el volumen sobre las superficies de tiempo constante y  $\lambda$  es un número real. El requerimiento de satisfacer las identidades de Bianchi (4.100) inmediatamente implica que  $\lambda$  no depende del tiempo.

Para  $\lambda = 0$  la acción de Einstein en cuatro dimensiones está dada por

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} N e^{3\Omega} \left[ -\frac{\dot{\Omega}^2}{N^2} + \frac{\dot{\phi}^2}{N^2} - 2ce^\phi + ke^{-2\Omega} \right] \quad (4.103)$$

(aquí usaremos puntos para denotar derivadas respecto de  $\tau$ ). Por otro lado, en el caso  $k = 0$  podemos escribir

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} N e^{3\Omega} \left[ -\frac{\dot{\Omega}^2}{N^2} + \frac{\dot{\phi}^2}{N^2} - 2ce^\phi - \lambda^2 e^{-6\Omega - 2\phi} \right]. \quad (4.104)$$

En ambos casos hemos absorbido el factor  $(8\pi G_N)^{-1}$  mediante una redefinición de los campos. Si ponemos la acción en la forma hamiltoniana tenemos

$$S = \int d\tau \left[ \pi_\Omega \dot{\Omega} + \pi_\phi \dot{\phi} - N\mathcal{H} \right]. \quad (4.105)$$

Para  $\lambda = 0$ , que corresponde a  $B_{\mu\nu}$  igual a cero, obtenemos el vínculo hamiltoniano

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{2} e^{-3\Omega} \left( -\pi_\Omega^2 + \pi_\phi^2 + 2ce^{6\Omega + \phi} - ke^{4\Omega} \right) \approx 0, \quad (4.106)$$

mientras que para  $k = 0$  se obtiene el vínculo

$$\mathcal{H}_2 = \frac{1}{2} e^{-3\Omega} \left( -\pi_\Omega^2 + \pi_\phi^2 + 2ce^{6\Omega + \phi} + \lambda^2 e^{-2\phi} \right) \approx 0. \quad (4.107)$$

La forma hamiltoniana de la acción será de utilidad para nuestro análisis de la cuantización de la teoría. La presencia del vínculo refleja que la teoría de cuerdas presenta las mismas simetrías de la relatividad general, y entonces el problema del tiempo en cosmología cuántica reaparece en esta teoría.

Si evaluamos las ecuaciones (4.101) y (4.102) para el caso isótropo y homogéneo obtenemos

$$c + 6\dot{\Omega}\dot{\phi} - 6\dot{\Omega}^2 - \dot{\phi}^2 + 2\lambda^2 e^{-6\Omega} - 6ke^{-2\Omega} = 0, \quad (4.108)$$

$$\ddot{\phi} - 3\Omega^2 - 3\Omega = 0, \quad (4.109)$$

$$+3\dot{\Omega}^2 - \Omega - \dot{\Omega}\dot{\phi} - 2\lambda^2 e^{-6\Omega} + 2ke^{-2\Omega} = 0. \quad (4.110)$$

Estas ecuaciones admiten soluciones clásicas que representan fases distintas de los modelos cosmológicos de cuerdas. Un aspecto importante de estas ecuaciones es que existe una dualidad- $T$  [Veneziano (1991), Gasperini & Veneziano (1993)] reflejada en la transformación  $\Omega(\tau) \rightarrow -\Omega(-\tau)$ . Esta simetría provee de un punto muy importante para justificar el estudio de la cosmología en el marco de la teoría de cuerdas: la idea de una singularidad asociada con el big bang es sustituida por la existencia de una transición de curvatura finita entre una fase pre-big bang y una fase post-big bang, lo cual implica una diferencia no trivial con la cosmología standard [Gasperini (1999), Veneziano (1999)]. En la literatura puede encontrarse un análisis bastante completo de las soluciones clásicas. Entre estas soluciones podemos encontrar el comportamiento del factor de escala como potencia

$$a(\tau) \equiv e^{\Omega(\tau)} = a_0 \tau^\alpha \quad (4.111)$$

con, por ejemplo,  $\alpha = -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/3, \dots$ . Consecuentemente para satisfacer las ecuaciones (4.110), el campo dilatónica toma la forma

$$\phi(\tau) = \frac{3}{2}\alpha(1 - \alpha) \ln(\tau) + \eta\tau + \phi_0. \quad (4.112)$$

Más aún, podemos encontrar un universo estático de Einstein dado por

$$\begin{aligned} a &= a_0 = \sqrt{\lambda}, \\ k &= 1, \\ c &= \eta^2 + \frac{4}{\lambda}, \\ \phi(\tau) &= \eta\tau + \phi_0. \end{aligned} \quad (4.113)$$

que es posible por la existencia simultánea del la 2-forma y del parámetro de Weyl anómalo  $c$  [Giribet & Simeone (2001)].

### 4.3.3 Acción invariante de gauge

Volvamos a los hamiltonianos (4.106) y (4.107), que reescribiremos como

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}e^{-3\Omega} \left( -\pi_{\Omega}^2 + \pi_{\phi}^2 + 2ce^{6\Omega+\phi} - \delta_{\lambda,0}ke^{4\Omega} + \delta_{k,0}\lambda^2e^{-2\phi} \right) \quad (4.114)$$

donde las  $\delta$ 's fueron introducidas para considerar los casos plano con 2-forma no nula, y abierto o cerrado con  $\lambda = 0$ . Encontraremos un tiempo global y daremos la amplitud de transición para los modelos cuya ecuación de Hamilton–Jacobi es separable; algunos resultados serán válidos también para modelos más generales [Giribet & Simeone (2001a)].

Comenzaremos nuestro análisis por la siguiente forma genérica del vínculo hamiltoniano escaleado  $H \equiv 2e^{3\Omega}\mathcal{H}$  :

$$H = -\pi_{\Omega}^2 + \pi_{\phi}^2 + 4Ae^{n\Omega+m\phi} \approx 0, \quad (4.115)$$

donde  $A$  es una constante real arbitraria y  $m \neq n$ . En general, este hamiltoniano no es separable en términos de las variables originales. Entonces definimos

$$\begin{aligned} x &\equiv \left( \frac{2}{n+m} \right) e^{(n+m)(\Omega+\phi)/2}, \\ y &\equiv \left( \frac{2}{n-m} \right) e^{(n-m)(\Omega-\phi)/2}, \end{aligned} \quad (4.116)$$

de manera que dividiendo por  $(n^2 - m^2)xy > 0$  podemos redefinir

$$H' \equiv \frac{H}{(n^2 - m^2)xy} = -\pi_x\pi_y + A \approx 0, \quad (4.117)$$

cuya correspondiente ecuación de Hamilton–Jacobi resulta

$$-\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} + A = E'.$$

Reproduciendo los mismos pasos de la sección 4.1.3 encontramos que las variables canónicas  $(Q^i, P_i)$  están dadas por

$$Q^0 = -\frac{2e^{(n-m)(\Omega-\phi)/2}}{(n-m)P},$$

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{2e^{(n+m)(\Omega+\phi)/2}}{(n+m)} - \frac{1}{P^2} \left( \frac{2e^{(n-m)(\Omega-\phi)/2}}{(n-m)} (A - P_0) + \eta T(\tau) \right), \\
P_0 &= 4(\pi_\phi^2 - \pi_\Omega^2) e^{-(n+m)(\phi+\Omega)} + A, \\
P &= \frac{1}{2}(\pi_\Omega + \pi_\phi) e^{-(n+m)(\Omega+\phi)},
\end{aligned}$$

donde  $\eta = \pm 1$ . Las coordenadas y momentos  $(Q^i, P_i)$  describen un sistema de gauge ordinario con un vínculo  $P_0 = 0$  y un hamiltoniano verdadero  $\partial f / \partial \tau = (1/P)(dT/d\tau)$  que conmuta con  $K$ . Su acción es

$$S[Q^i, P_i, N] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( P \frac{dQ}{d\tau} + P_0 \frac{dQ^0}{d\tau} - NP_0 - \frac{\eta}{P} \frac{dT}{d\tau} \right) d\tau. \quad (4.118)$$

Si escribimos  $S$  en términos de las variables originales tenemos

$$S[\Omega, \phi, \pi_\Omega, \pi_\phi, N] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( \pi_\phi \frac{d\phi}{d\tau} + \pi_\Omega \frac{d\Omega}{d\tau} - N\mathcal{H} \right) d\tau + B(\tau_2) - B(\tau_1), \quad (4.119)$$

donde

$$\begin{aligned}
B(\tau) &= \frac{1}{\pi_\Omega + \pi_\phi} \left( \frac{\pi_\phi^2 - \pi_\Omega^2 + 4Ae^{n\Omega+m\phi}}{n-m} \right) \\
&\quad + \frac{4Ae^{(n+m)(\Omega+\phi)/2}}{\pi_\phi + \pi_\Omega} \left( \frac{2e^{(n-m)(\Omega-\phi)/2}}{n-m} + \eta \frac{T(\tau)}{A} \right).
\end{aligned}$$

Como  $\pi_x = P = (1/2)(\pi_\Omega + \pi_\phi) e^{-(n+m)(\Omega+\phi)/2}$  podemos escribir

$$B(\tau) = -Q^0 P_0 - 2A \left( Q^0 - \eta \frac{T(\tau)}{AP} \right).$$

Ante una transformación generada por  $\mathcal{H}$  tenemos  $\delta_\epsilon B = -\delta_\epsilon S$ , de manera que la acción  $S$  efectivamente tiene invariancia de gauge sobre toda la trayectoria y los gauges canónicos son admisibles.

#### 4.3.4 Tiempo extrínseco

Un tiempo global  $t$  debe verificar  $[t, \mathcal{H}] > 0$ , pero como  $\mathcal{H} = \mathcal{F}(\Omega, \phi)H' = \mathcal{F}(\Omega, \phi)P_0$  con  $\mathcal{F} > 0$ , si  $t$  es un tiempo global también tenemos  $[t, P_0] > 0$ . Dado que  $[Q^0, P_0] = 1$ , se puede identificar un tiempo extrínseco imponiendo un gauge de la forma

$$\chi \equiv Q^0 - T(\tau) = 0$$

y definiendo

$$t \equiv T.$$

Obtenemos así

$$t(\Omega, \phi, \pi_\Omega, \pi_\phi) = \frac{4e^{n\Omega+m\phi}}{(m-n)(\pi_\Omega + \pi_\phi)}. \quad (4.120)$$

Usando la ecuación de vínculo (4.115) podemos escribir

$$t(\pi_\Omega, \pi_\phi) = \frac{\pi_\phi - \pi_\Omega}{(n-m)A}.$$

Para el hamiltoniano escaleado  $H = 2e^{3\Omega}\mathcal{H}$  con  $k = \lambda = 0$  tenemos  $4A = 2c$ ,  $n = 6$ ,  $m = 1$ , y el tiempo es

$$t(\Omega, \phi, \pi_\Omega, \pi_\phi) = -\frac{4e^{6\Omega+\phi}}{5(\pi_\Omega + \pi_\phi)}. \quad (4.121)$$

Podemos volver al vínculo  $H$  con  $k \neq 0$  y evaluar  $[t, H]$ . Para un modelo abierto ( $k = -1$ ) un cálculo sencillo muestra que  $[t, H] > 0$  tanto para  $c < 0$  como para  $c > 0$ . En el caso  $k = 1$ , en cambio, un tiempo global es

$$t(\pi_\Omega, \pi_\phi) = \frac{2}{5c}(\pi_\phi - \pi_\Omega)$$

si  $c < 0$ .

Para el vínculo con  $c = k = 0$  tenemos  $4A = \lambda^2$ ,  $n = 0$ ,  $m = -2$ , y el tiempo extrínseco resulta

$$t(\Omega, \phi, \pi_\Omega, \pi_\phi) = -\frac{2e^{-2\phi}}{\pi_\Omega + \pi_\phi}. \quad (4.122)$$

Si entonces consideramos  $c \neq 0$  y calculamos el paréntesis  $[t, H]$  encontramos que es definido positivo si  $c < 0$ . Luego el tiempo (4.122) también es un tiempo global para este caso. De hecho, podemos dar una prescripción sencilla para determinar si un tiempo para un dado hamiltoniano es también un tiempo para un vínculo más general. Como definimos  $H' = g^{-1}(q)H$  con  $g > 0$ , y dado que  $P_0 \equiv H'$ , entonces  $t \equiv Q^0$  cumple  $[t, H'] = 1$  (y por lo tanto  $[t, H] = g > 0$  sobre  $H = 0$ ). Si consideramos un hamiltoniano extendido

$\tilde{H} = g(q)H' + h$  y calculamos el paréntesis, obtenemos

$$[t, \tilde{H}] = g + H'[t, g] + [t, h].$$

Usando  $\tilde{H} \approx 0$  resulta la condición

$$[t, \tilde{H}] = g - g^{-1}h[t, g] + [t, h] > 0$$

sobre la nueva superficie de vínculo para que  $t$  sea un tiempo para el sistema descrito por  $\tilde{H}$ . Para el sistema asociado al vínculo (4.115), de (4.116) y (4.117) tenemos que  $g = 4e^{n\Omega+m\phi}$ ; si agregamos un término de la forma  $h = \alpha e^{r\Omega+s\phi}$  a  $H$  la condición de más arriba queda como

$$\alpha \frac{e^{r\Omega+s\phi}}{(\pi_\phi + \pi_\Omega)^2} \left[ \frac{(n+m) - (r+s)}{n-m} \right] > -1.$$

Este análisis puede ser útil, por ejemplo, en el caso de que un desarrollo ulterior de la teoría más allá de la aproximación de bajas energías provea de un potencial efectivo para el dilatón, que debería incluirse en el hamiltoniano en una descripción de los estados más tempranos del universo.

### 4.3.5 Tiempo intrínseco e integral de camino

Sobre la superficie  $H' = P_0 = 0$  los términos  $B(\tau)$  claramente se anulan en el gauge

$$\chi \equiv \eta Q^0 - \frac{T(\tau)}{AP} = 0 \quad (4.123)$$

que equivale a  $T(\tau) = \pm 2(m-n)^{-1} A e^{(n-m)(\Omega-\phi)/2}$ , y por lo tanto define  $\tau = \tau(\Omega, \phi)$ . Dado que  $Q^0 P = -y(\Omega, \phi)$ , se puede definir un tiempo intrínseco

$$t \equiv \eta Q^0 P / 2$$

si elegimos apropiadamente  $\eta$ . Tenemos

$$[t, H'] = \frac{\eta}{2} [Q^0 P, P_0] = \frac{\eta}{2} P,$$

y dado que  $P = \pi_x$  entonces para asegurar que  $t$  es un tiempo global debemos elegir  $\eta = \text{sign}(\pi_x) = \text{sign}(\pi_\Omega + \pi_\phi)$ .

Si  $A > 0$  entonces  $|\pi_\Omega| > |\pi_\phi|$  (de modo que  $\text{sign}(\pi_x) = \text{sign}(\pi_\Omega)$ ) y la superficie de vínculo se separa en dos hojas identificadas por el signo de  $\pi_\Omega$ ; si  $A < 0$  entonces  $|\pi_\phi| > |\pi_\Omega|$  y las dos hojas de la superficie de vínculo están dadas por el signo de  $\pi_\phi$ . Por lo tanto para  $A > 0$  el tiempo extrínseco es

$$t(\Omega, \phi) = \left( \frac{1}{m-n} \right) \text{sign}(\pi_\Omega) e^{(n-m)(\Omega-\phi)/2}, \quad (4.124)$$

y para  $A < 0$  obtenemos

$$t(\Omega, \phi) = \left( \frac{1}{m-n} \right) \text{sign}(\pi_\phi) e^{(n-m)(\Omega-\phi)/2}. \quad (4.125)$$

Para el vínculo con  $k = \lambda = 0$  el tiempo intrínseco es

$$t(\Omega, \phi) = -\frac{1}{5} \text{sign}(\pi_\Omega) e^{5(\Omega-\phi)/2} \quad c > 0,$$

y

$$t(\Omega, \phi) = -\frac{1}{5} \text{sign}(\pi_\phi) e^{5(\Omega-\phi)/2} \quad c < 0.$$

Evaluando  $[t, H]$  para  $H$  con  $k \neq 0$  encontramos que el tiempo para  $c > 0$  es también un tiempo global para el modelo abierto ( $k = -1$ ), y que el tiempo para  $c < 0$  lo es también para  $k = 1$ .

En el caso del vínculo con  $c = k = 0$  obtenemos

$$t(\Omega, \phi) = -\frac{1}{2} \text{sign}(\pi_\Omega) e^{(\Omega-\phi)},$$

y un cálculo simple muestra que éste es también un tiempo global para  $c > 0$ .

Dado que mostramos que existe un gauge tal que  $\tau = \tau(q^i)$  y en el que se anulan los términos de superficie, podemos obtener la amplitud de la transición  $|\Omega_1, \phi_1\rangle \rightarrow |\Omega_2, \phi_2\rangle$  mediante una integral de camino en las variables  $(Q^i, P_i)$  con la acción (4.118). La integral

es invariante de gauge, de manera que la podemos calcular en cualquier gauge. De acuerdo con (??), sobre la superficie  $P_0 = 0$  y con la elección de gauge (4.123), la amplitud es

$$\langle \phi_2, \Omega_2 | \phi_1, \Omega_1 \rangle = \int DQ DP \exp \left[ i \int_{T_1}^{T_2} \left( P dQ - \frac{\eta}{P} dT \right) \right], \quad (4.126)$$

donde

$$T_a = \pm \left( \frac{2A}{m-n} \right) e^{(n-m)(\Omega_a - \phi_a)/2}$$

( $a = 1, 2$ ); como sobre la superficie de vínculo y en el gauge (4.123) es  $Q = x$ , entonces

$$Q_a = \left( \frac{2}{n+m} \right) e^{(n+m)(\Omega_a + \phi_a)/2}.$$

Para el hamiltoniano con  $\lambda = 0$  y curvatura nula tenemos  $T_a = \mp (c/5) e^{5(\Omega_a - \phi_a)/2}$ , y  $Q_a = (2/7) e^{7(\Omega_a + \phi_a)/2}$ . En el caso  $c = k = 0$  es  $T_a = -(\lambda^2/4) e^{(\Omega_a - \phi_a)}$  y  $Q_a = -e^{-(\Omega_a + \phi_a)}$ . Después de fijar el gauge hemos obtenido la integral de camino para un sistema con un grado de libertad físico. Un punto interesante es el siguiente: aunque hemos identificado el tiempo como una función de ambas coordenadas  $\phi$  y  $\Omega$  encontramos que, dependiendo del signo de  $A$ , también  $\Omega$  o  $\phi$  por separado pueden utilizarse como tiempo. Para  $A > 0$  tenemos  $\pi_\Omega \neq 0$  y para  $A < 0$  tenemos  $\pi_\phi \neq 0$ , de manera que también podemos definir

$$\begin{aligned} t_1^* &= -\Omega \operatorname{sign}(\pi_\Omega) & A > 0, \\ t_2^* &= +\phi \operatorname{sign}(\pi_\phi) & \text{si } A < 0. \end{aligned}$$

Esto puede hacer más clara la interpretación de la amplitud  $\langle \phi_2, \Omega_2 | \phi_1, \Omega_1 \rangle$  dada por (4.126).

Señalemos que en el caso particular  $\lambda = 0$ ,  $k = -1$ ,  $c = 0$ , obtenemos un hamiltoniano análogo al de la sección 4.1.2,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} e^{-3\Omega} (-\pi_\Omega^2 + \pi_\phi^2) + e^\Omega \approx 0.$$

Este modelo puede ser desparametrizado y cuantizado en la misma forma que antes, de manera que podemos definir el tiempo como

$$t = -\Omega \operatorname{sign}(\pi_\Omega),$$

mientras que el propagador infinitesimal puede ser calculado explícitamente, y cuando se lo escribe en términos de las funciones de Hankel resulta

$$\langle \phi_2, \Omega_1 + \varepsilon | \phi_1, \Omega_1 \rangle = \pm \frac{\varepsilon e^{2\Omega_1}}{\sqrt{\varepsilon^2 - (\phi_2 - \phi_1)^2}} H_1^{(1)}(2e^{2\Omega_1} \sqrt{\varepsilon^2 - (\phi_2 - \phi_1)^2}).$$

Como antes, el doble signo corresponde a las dos hojas de la superficie de vínculo dadas por el signo de  $\pi_\Omega$ . (Obsérvese que este procedimiento tiene el problema antes mencionado de un potencial dependiente del tiempo).

### 4.3.6 Resumen

Hemos así analizado modelos de la teoría de cuerdas de dos clases: 1) modelos con un campo dilatónico homogéneo y campo antisimétrico  $B_{\mu\nu}$  nulo ( $\lambda = 0$ ); 2) modelos que representan universos planos ( $k = 0$ ) con un campo dilatónico homogéneo y campo antisimétrico no nulo. Para todos los casos considerados logramos identificar un tiempo global. Podemos resumir los resultados así:

- Cuando  $\lambda = 0$  el hamiltoniano tiene la forma

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{2} e^{-3\Omega} \left( -\pi_\Omega^2 + \pi_\phi^2 + 2ce^{6\Omega+\phi} - ke^{4\Omega} \right) \approx 0.$$

y los tiempos para los distintos casos están dados por

$$t(\Omega, \phi, \pi_\Omega, \pi_\phi) = -\frac{4e^{6\Omega+\phi}}{5(\pi_\Omega + \pi_\phi)} \quad k = -1, 0$$

$$t(\pi_\Omega, \pi_\phi) = \frac{2}{5c}(\pi_\phi - \pi_\Omega) \quad \text{si} \quad \begin{cases} c > 0, k = -1, 0 \\ c < 0, k = 0, 1 \end{cases}$$

$$t(\Omega, \phi) = \begin{cases} -(1/5)\text{sign}(\pi_\Omega)e^{5(\Omega-\phi)/2} & \text{si } c > 0, k = -1, 0 \\ -(1/5)\text{sign}(\pi_\phi)e^{5(\Omega-\phi)/2} & \text{si } c < 0, k = 0, 1. \end{cases}$$

- En el caso  $k = 0$ , el hamiltoniano toma la forma

$$\mathcal{H}_2 = \frac{1}{2} e^{-3\Omega} \left( -\pi_\Omega^2 + \pi_\phi^2 + 2ce^{6\Omega+\phi} + \lambda^2 e^{-2\phi} \right) \approx 0.$$

Para estos modelos podemos clasificar los tiempos como sigue:

$$\begin{aligned}
 t(\Omega, \phi, \pi_\Omega, \pi_\phi) &= -\frac{2e^{-2\phi}}{\pi_\Omega + \pi_\phi} & c \leq 0 \\
 t(\pi_\Omega, \pi_\phi) &= \frac{2}{\lambda^2}(\pi_\phi - \pi_\Omega) & c \geq 0 \\
 t(\Omega, \phi) &= -\frac{1}{2}\text{sign}(\pi_\Omega)e^{(\Omega-\phi)} & c \geq 0.
 \end{aligned}$$

El tiempo intrínseco para el caso  $k = 0$ ,  $\lambda = 0$  es un tiempo también para  $k = 1$ ,  $c < 0$  and for  $k = -1$ ,  $c > 0$ . El tiempo extrínseco identificado para el caso  $k = 0$ ,  $\lambda = 0$  también permite desparametrizar el modelo más general con curvatura no nula. Cuando tanto  $\lambda$  como  $c$  son no nulos, los modelos admiten como tiempo global los encontrados para el caso  $c = 0$ .

Hemos restringido nuestro análisis a los aspectos formales de la cuantización de minisuperespacios. Una discusión completa acerca de los límites de dicha aproximación, así como de la aplicación de nuestro método a las cuestiones relacionadas con los nuevos escenarios para el universo temprano que propone la teoría de cuerdas, está fuera del alcance de este trabajo.

# Capítulo 5

## Cuantización canónica

En esta parte estudiaremos la cuantización canónica de modelos relativistas y de la teoría de cuerdas. Además de dar un breve repaso de diferentes procedimientos ya conocidos, nuestro objetivo es ahora mostrar cómo los desarrollos de los capítulos previos pueden ser de utilidad en el contexto de la obtención de una función de onda para minisuperespacios. Comenzamos por revisar un análisis de un modelo isótropo tratado por Halliwell con el fin de discutir la obtención de soluciones aproximadas, válidas en diferentes regiones del espacio de fases. Continuamos con una formulación basada en una ecuación de Schrödinger para modelos isótropos con diferentes campos acoplados con la métrica, y que son reducidos por medio del fijado del gauge. Luego analizamos diferentes tratamientos del modelo de Taub, con y sin desparametrización previa, incluyendo una solución posible para el problema de las condiciones de contorno. Esto sirve como introducción para presentar nuestra propuesta de una ecuación de Wheeler–DeWitt para este modelo trabajando con una definición formalmente correcta de tiempo, de manera que se obtiene una función de onda en la cual la noción de evolución es clara y el producto interno entre los estados puede definirse correctamente; en particular, mostramos que en nuestro tratamiento el papel de los momentos queda confinado a aparecer en la variable temporal. Finalmente, resolvemos la ecuación Wheeler–DeWitt con una coordenada en el papel de tiempo global para una forma genérica de modelo isótropo de la teoría de cuerdas, y estudiamos la

elección de las soluciones físicas a partir de la existencia de un límite libre de la teoría; también estudiamos la posible cuantización vía una ecuación de Schrödinger para estos modelos, y analizamos la relación entre una elección correcta de tiempo y la obtención de una cuantización unitaria.

## 5.1 Soluciones aproximadas de la ecuación de Wheeler–DeWitt

Consideremos el vínculo hamiltoniano de un modelo cerrado ( $k = 1$ ) isótropo y homogéneo, con un campo escalar  $\phi$  y constante cosmológica nula; supongamos una dependencia genérica del potencial con  $\phi$ , digamos  $V(\phi)$ . La ecuación de Wheeler–DeWitt que se obtiene reemplazando  $p \rightarrow -i\partial/\partial q$  (y considerando el ordenamiento trivial) es

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \Omega^2} - \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + V(\phi)e^{6\Omega} - e^{4\Omega} \right) \Psi(\Omega, \phi) = 0. \quad (5.1)$$

Halliwell ha analizado la región del espacio de fases tal que  $|V'/V| \ll 1$  y ha encontrado soluciones cuya variación con el campo escalar es pequeña, de manera que la derivada respecto de  $\phi$  puede despreciarse. En la región en la cual el factor de escala es pequeño las soluciones WKB tienen la forma exponencial [Halliwell (1990)]

$$\Psi(\Omega, \phi) \sim \exp\left( \pm \frac{1}{3V(\phi)} (1 - e^{2\Omega} V(\phi))^{3/2} \right), \quad (5.2)$$

y se asocian con una región clásicamente prohibida. Cuando el factor de escala es grande, las soluciones WKB tienen la forma oscilatoria

$$\Psi(\Omega, \phi) \sim \exp\left( \pm \frac{i}{3V(\phi)} (e^{2\Omega} V(\phi) - 1)^{3/2} \right). \quad (5.3)$$

La última corresponde a la que usualmente se considera la región clásicamente permitida. Ambas clases de soluciones pueden conectarse en la forma WKB usual. En el caso  $e^{2\Omega} V(\phi) \ll 1$  puede mostrarse que la función de onda oscilatoria está “concentrada”

alrededor de una solución de la forma

$$e^\Omega \sim e^{\sqrt{V}\tau}, \quad \phi \sim \phi_0,$$

que corresponde aun comportamiento inflacionario. (Para el caso  $V(\phi)=0$  se puede encontrar una solución exacta en la forma de una combinación de funciones de Bessel modificadas; considerando su comportamiento asintótico podrían compararse con la solución aproximada. Este es también el caso si  $V(\phi)=0$  en un modelo plano ( $k = 0$ ) con constante cosmológica no nula). Notemos que, dependiendo de la forma de  $V(\phi)$ , las regiones consideradas por Halliwell podrían relacionarse con aquellas a las cuales deberíamos restringir el análisis si quisiéramos definir un tiempo intrínseco “local”, esto es, no válido globalmente.

## 5.2 Fijación del gauge y ecuación de Schrödinger para modelos isótropos

Un enfoque interesante en el marco del formalismo canónico es el presentado en [Cavaglià et al. (1995)]. En una línea próxima a la de Barvinsky y Ponomariov [Barvinsky & Ponomariov (1986)], se reduce el sistema dando un grado de libertad en términos de los restantes y del parámetro  $\tau$ , y se define un hamiltoniano no nulo que los autores denominan “efectivo”; este hamiltoniano puede depender, en general, del parámetro temporal. El criterio para la elección del gauge que da un grado de libertad en función de los otros es la simplicidad del hamiltoniano del sistema reducido. Una vez que se ha llevado a cabo la reducción, entonces el sistema se cuantiza en el espacio reducido mediante una ecuación de Schrödinger.

Los autores analizaron un universo de Friedmann–Robertson–Walker con matyeria en la forma de un campo escalar conforme (CS) y un campo  $SU(2)$  de Yang–Mills (YM) [Cavaglià & De Alfaro (1994)]. Definen el hamiltoniano correspondiente a cada campo como

$$H_{CS} = \frac{1}{2} (\pi_\chi^2 + V(\chi))$$

$$H_{YM} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \pi_{\xi}^2 + V(\xi) \right),$$

de modo que si  $H_{GR}$  es el hamiltoniano del campo gravitatorio puro, el vínculo es

$$-H_{GR} + H_{CS} + H_{YM} \approx 0. \quad (5.4)$$

Se utilizan entonces diferentes gauges y se exploran las diferentes ecuaciones de Schrödinger que resultan. Para un gauge en términos del campo gravitatorio como [Filippov (1989)]

$$\pi_{\Omega} + \frac{1}{12} e^{\Omega} \cot \tau = 0$$

se obtiene la ecuación

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi(\xi, \chi, \tau) = (H_{CS} + H_{YM}) \Psi(\xi, \chi, \tau). \quad (5.5)$$

Su solución da una función de onda para ambos campos de materia. Una elección bastante diferente conecta al tiempo con el campo escalar conforme:

$$\pi_{\chi} - \chi \cot \tau = 0.$$

Este gauge lleva a una ecuación de Schrödinger para la métrica y el campo de Yang-Mills:

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi(\xi, \Omega, \tau) = (H_{YM} - H_{GR}) \Psi(\xi, \Omega, \tau). \quad (5.6)$$

Una solución explícita se da para el caso sencillo de un universo cerrado con un campo escalar field  $\phi$  tal que  $V(\phi) = 0$ . La condición de gauge

$$\pi_{\Omega} - 12e^{\Omega} \sinh \left( \frac{\tau}{\sqrt{3}} \right) = 0$$

da la ecuación

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tau} \mp \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \Psi(\phi, \tau) = 0 \quad (5.7)$$

para el único grado de libertad físico  $\phi$ . Las soluciones son de la forma

$$\Psi(\phi, \tau) = f(\phi \pm \tau). \quad (5.8)$$

Una solución particular es  $\Psi(\phi, \tau) = Ae^{-(\phi \pm \tau)^2/2\sigma}$ , la cual representa un universo cuya probabilidad máxima sigue el camino clásico  $\phi = \pm\tau$ .

Obsérvese que si las condiciones de gauge estuvieran bien definidas globalmente, de manera que las variables involucradas en la fijación del gauge definieran un tiempo global, este procedimiento sería en cierta medida similar al que daremos en la sección 5.3.3 para el modelo de Taub (ver más abajo).

## 5.3 El universo de Taub

### 5.3.1 Procedimiento usual

En la literatura pueden encontrarse diferentes soluciones para el universo de Taub. Un ejemplo importante entre los que no parten de una desparametrización previa es la solución encontrada por Moncrief y Ryan [Moncrief & Ryan (1991)] en el contexto de un análisis del modelo de Bianchi del tipo IX con un ordenamiento general de los operadores en el vínculo hamiltoniano [Hartle & Hawking (1983)]. En el caso del ordenamiento más trivial se resuelve la ecuación de Wheeler-DeWitt para obtener una función de onda que se da en la forma de una integral

$$\Psi(\Omega, \beta_+) = \int_0^\infty d\omega F(\omega) K_{i\omega} \left( \frac{1}{6} e^{2\Omega - 4\beta_+} \right) K_{2i\omega} \left( \frac{2}{3} e^{2\Omega - \beta_+} \right), \quad (5.9)$$

con  $K_{i\omega}$  funciones de Bessel modificadas de argumento imaginario (las funciones modificadas  $I$  son descartadas porque no se comportan bien para  $\beta_+ \rightarrow \pm\infty$ ). En el caso particular en que  $F(\omega) = \omega \sinh(\pi\omega)$  se muestra que la función de onda puede escribirse en la forma (véase también [Martinez & Ryan (1983)])

$$\Psi(\Omega, \beta_+) = R(\Omega, \beta_+) e^{-S} \quad (5.10)$$

$$S = \frac{1}{6} e^{2\Omega} (e^{-4\beta_+} + 2e^{2\beta_+}).$$

Una característica importante de esta función de onda es que para valores de  $\Omega$  cercanos a la singularidad (esto es, el factor de escala cercano a cero) la probabilidad se dispersa sobre todos los grados de anisotropía dados por  $\beta_+$ , mientras que para valores grandes del factor de escala la probabilidad se concentra alrededor del universo isótropo cerrado de Friedmann–Robertson–Walker.

### 5.3.2 Condiciones de contorno y ecuación de Schrödinger

Una aproximación al problema bastante diferente, que comienza por la identificación de un tiempo global puede encontrarse en un trabajo reciente [Catren & Ferraro (2001)], en el cual los autores obtienen una ecuación de Schrödinger y sus soluciones son utilizadas para seleccionar un subconjunto de soluciones de la ecuación de Wheeler–DeWitt. La idea subyacente es que el vínculo típico de un sistema parametrizado, lineal en el momento conjugado al tiempo, se encuentra escondido en el formalismo de la gravitación. Esto constituye una extensión de la analogía (que nosotros ya utilizamos más arriba) entre el reloj ideal y modelos isótropos vacíos [Beluardi & Ferraro (1995), Ferraro (1999)]: El vínculo del reloj ideal

$$\mathcal{H} = p_t - t^2 \approx 0$$

lleva a la ecuación de Schrödinger

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -t^2 \Psi \quad (5.11)$$

que es tipo parabólico, y tiene la única solución  $\Psi = e^{it^3/3}$ . Como primer paso para obtener el vínculo de un minisuperespacio se lleva a cabo la transformación canónica  $Q = p_t$ ,  $P = -t$ , tal que

$$\mathcal{H} = -P^2 + Q \approx 0.$$

(El hamiltoniano de modelos isótropos vacíos resulta de la segunda transformación  $Q = \tilde{V}(\Omega)$ ,  $P = \pi_\Omega(d\tilde{V}/d\Omega)^{-1}$ , con  $\tilde{V}$  el potencial definido en la sección 3.4.3). La ecuación

diferencial asociada al vínculo es ahora de tipo parabólico:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Q^2} + Q\Psi = 0. \quad (5.12)$$

Como esta ecuación es de segundo orden, tiene dos soluciones independientes, que son las funciones de Airy  $Ai(-Q)$  y  $Bi(-Q)$ . El punto central es que mientras  $Bi(-Q)$  diverge para  $Q \rightarrow -\infty$ ,  $Ai(-Q)$  se comporta bien (de hecho, se anula) en ese límite, y es la transformada de Fourier de la solución (5.11). Esto provee de un criterio para seleccionar soluciones de la ecuación hiperbólica: las soluciones físicas serían las que se encuentran en correspondencia con las de la ecuación de Schrödinger.

Esta línea se sigue entonces para cuantizar minisuperespacios con grados de libertad verdaderos. En el caso del modelo de Taub, los autores parten de un hamiltoniano como el de la (4.71) (con una elección diferente de las constantes) y resuelven una ecuación de Wheeler-DeWitt

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{9}e^{4x} + \frac{4}{9}e^{2y} \right) \Psi(x, y) = 0. \quad (5.13)$$

Obtienen soluciones de la forma

$$\begin{aligned} \Psi_\omega(x, y) = & \left[ a(\omega)I_{i\omega} \left( \frac{2}{3}e^y \right) + b(\omega)K_{i\omega} \left( \frac{2}{3}e^y \right) \right] \\ & \times \left[ c(\omega)I_{i\omega/2} \left( \frac{1}{6}e^{2x} \right) + d(\omega)K_{i\omega/2} \left( \frac{1}{6}e^{2x} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.14)$$

donde  $I$  y  $K$  son las funciones de Bessel modificadas. Entonces consideran una transformación canónica análoga a la (4.73) pero solamente con el signo menos, de modo que el momento  $\pi_s$  es definido negativo, y el tiempo es  $t = s$ ; luego, en la ecuación (4.75) el primer factor es definido positivo, y el segundo es un vínculo lineal en  $\pi_s = \pi_t$  que incluye un hamiltoniano verdadero  $h = \sqrt{\pi_x^2 + (1/9)e^{4x}}$  que no depende del tiempo (esta propiedad hace posible la equivalencia del vínculo lineal y el vínculo cuadrático original;

ver más adelante). Este vínculo lleva a la ecuación de Schrödinger

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \left( -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{9} e^{4x} \right)^{1/2} \Psi(x, t). \quad (5.15)$$

Esta ecuación permite proponer soluciones de la forma  $\sim \phi(x)e^{-i\omega t}$ . De acuerdo con esta interpretación, la contribución de las funciones  $I_{i\omega/2}((1/6)e^{2x})$  es descartada, porque divergen la región clásicamente prohibida asociada con el potencial exponencial  $\frac{1}{9}e^{4x}$ ; las funciones  $I_{i\omega}((2/3)e^y)$ , en cambio, no se descartan, porque en este marco la coordenada  $y$  se asocia con la definición del tiempo. De hecho, transformando las soluciones de la ecuación de Wheeler–DeWitt se muestra que las que corresponden a las soluciones de la ecuación de Schrödinger son precisamente las funciones  $I_{i\omega}((2/3)e^y)$ , mientras que las  $K_{i\omega}((2/3)e^y)$  deben descartarse porque no pueden asociarse a estados de energía definida del hamiltoniano verdadero  $h$ . Es interesante señalar que las funciones en el subespacio elegido no decaen en la zona clásicamente prohibida (nótese la diferencia con el resultado de la sección precedente).

### 5.3.3 Ecuación de Wheeler–DeWitt con tiempo extrínseco

Consecuentemente con nuestros análisis previos, nuestra idea es ahora aplicar algunos resultados de la propuesta de desparametrización de los capítulos precedentes en el procedimiento canónico de cuantización. Comenzamos entonces con una forma del hamiltoniano tal que un tiempo global se identifica fácilmente entre sus coordenadas; esto se refleja en la ecuación de Wheeler–DeWitt correspondiente, y por lo tanto la función de onda contiene una noción clara de evolución y podría interpretarse como es usual en la mecánica cuántica ordinaria (véase, sin embargo, la Discusión más adelante). Respecto de la solución de Moncrief y Ryan, nuestro tratamiento tiene esta ventaja, y además la de que el producto interno entre los estados obtenidos puede definirse correctamente al estar identificada la coordenada que debe mantenerse constante al efectuar la integración.

El vínculo (4.74) permite definir inmediatamente el tiempo como

$$t = -s \operatorname{sign}(\pi_s).$$

Como mostramos en la sección 4.2.2, este tiempo se obtiene de un gauge canónico sencillo, que en las variables  $\bar{q}^i$  tiene la forma  $s = \eta T(\tau)$ ,  $\eta = \pm 1$ . Con la sustitución usual  $p_k \rightarrow -i\partial/\partial q^k$  obtenemos la ecuación de Wheeler-DeWitt

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} - \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{1}{9} e^{4\mathbf{x}} \right) \Psi(\mathbf{x}, s) = 0. \quad (5.16)$$

Si proponemos una solución de la forma  $\Psi(\mathbf{x}, s) = A(\mathbf{x})B(s)$  obtenemos

$$\frac{1}{A} \frac{\partial^2 A}{\partial \mathbf{x}^2} - \frac{1}{9} e^{4\mathbf{x}} = -\omega^2 = \frac{1}{B} \frac{\partial^2 B}{\partial s^2}. \quad (5.17)$$

La ecuación para  $B$  se resuelve fácilmente, y sus soluciones son de la forma  $e^{\pm i\omega s}$ ; para determinar  $A$  hacemos la sustitución  $u = (1/6)e^{2\mathbf{x}}$  que conduce a

$$\frac{\partial^2 A}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial A}{\partial u} - \left( 1 - \frac{\omega^2}{4u^2} \right) A = 0. \quad (5.18)$$

Esta es una ecuación de Bessel modificada con  $\nu^2 = -\omega^2/4$ , cuya solución es una combinación de funciones de Bessel modificadas  $I_\nu$  y  $K_\nu$  (hemos adoptado la convención de [Gradshteyn & Ryshik (1965)]). Por lo tanto la ecuación de Wheeler-DeWitt tiene el conjunto de soluciones [Giribet & Simeone (2001c)]

$$\begin{aligned} \Psi_\omega(\mathbf{x}, s) = & \left[ a(\omega)e^{i\omega s} + b(\omega)e^{-i\omega s} \right] \\ & \times \left[ c(\omega)I_{i\omega/2} \left( \frac{1}{6}e^{2\mathbf{x}} \right) + d(\omega)K_{i\omega/2} \left( \frac{1}{6}e^{2\mathbf{x}} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.19)$$

donde  $\pm s$  es un tiempo global. El resultado puede entenderse como un conjunto de soluciones de energías positivas y negativas; esta posibilidad se relaciona con que el potencial no depende del tiempo (la contribución de las funciones  $I_{i\omega/2}$  debería descartarse porque no se comportan bien para valores grandes de  $\mathbf{x}$ ).

Hay dos aspectos que merecen cierto análisis: El primero es que hemos elegido la constante de separación como  $-\omega^2$ ; de haber elegido una constante positiva la forma funcional de las soluciones hubiera sido distinta. La razón para nuestra elección es la analogía formal entre el vínculo del modelo de Taub en las variables  $(x, s, \pi_x, \pi_s)$  y el vínculo de algunos modelos de la teoría de cuerdas, para los cuales tenemos un criterio natural para elegir una clase de soluciones (ver más adelante). El segundo es que no hemos descartado las soluciones de energía negativa; esto habría sido equivalente a elegir una hoja de la superficie de vínculo. Como ya señalamos en el contexto de la cuantización vía integral de camino, una vez que hemos decidido trabajar y dar los resultados en términos de las variables  $(x, s, \pi_x, \pi_s)$  no hay razón para elegir un signo para el momento  $\pi_s$ . Si tomamos la forma cuadrática del hamiltoniano como una propiedad esencial de la gravitación, sólo deberíamos admitir transformaciones canónicas que lleven a un vínculo equivalente al original; luego, ambos signos de la generatriz deben considerarse simultáneamente para garantizar que ambos vínculos dan como resultado ecuaciones diferenciales con el mismo número de soluciones.

La mitad de las soluciones de nuestra ecuación de Wheeler-DeWitt corresponde a las de la sección precedente, que resultan de una ecuación de Schrödinger. Nuestro procedimiento permite obtenerlas sin necesidad de definir la acción del operador dentro de una raíz cuadrada, sino sólo con el ordenamiento trivial. La principal ventaja no es esa, sin embargo, sino la generalidad del método, del cual carece el anterior, como veremos más adelante.

La solución puede extenderse fácilmente al caso en que se incluye materia en la forma de un campo escalar cuya masa puede despreciarse en la dinámica. La adición en el hamiltoniano del correspondiente término  $\pi_\phi^2$  sólo modifica el resultado (5.19) en un factor oscilante que depende de  $\phi$ , de manera que las soluciones de la ecuación de Wheeler-DeWitt son

$$\Psi_{\omega,p}(x, \phi, s) = [a(\alpha)e^{i\alpha s} + b(\alpha)e^{-i\alpha s}]$$

$$\begin{aligned}
& \times [f(p)e^{ip\phi} + g(p)e^{-ip\phi}] \\
& \times \left[ c(\omega)I_{i\omega/2} \left( \frac{1}{6}e^{2x} \right) + d(\omega)K_{i\omega/2} \left( \frac{1}{6}e^{2x} \right) \right].
\end{aligned}
\tag{5.20}$$

donde  $\alpha = \sqrt{\omega^2 + p^2}$ . Como mostramos en el capítulo 4, la coordenada  $s$  sigue siendo un tiempo si está presente un campo no masivo; por lo tanto la función de onda sigue conteniendo una noción clara de tiempo.

Un punto para señalar es que en esta descripción el papel de los momentos originales (inevitable, dada la topología de la superficie de vínculo en las variables originales) queda restringido al tiempo global  $s = \pm \text{arcsenh} \left( \frac{1}{2}(\pi_{\Omega} + \pi_{+})e^{(-2\Omega + \beta_{+})} \right)$ ; las otras coordenadas que aparecen en la función de onda son funciones simples de solamente las coordenadas originales.

## 5.4 Cosmologías de la teoría de cuerdas

Como señalamos anteriormente, la cuantización de modelos de la teoría de cuerdas es de interés no sólo por las mismas razones de los modelos relativistas, sino también porque permiten descripciones conceptualmente nuevas de los estados más tempranos del universo. Sin embargo, en el contexto del presente trabajo, estamos interesados principalmente en cuestiones formales, y en este sentido analizaremos los modelos para obtener una mejor comprensión de las posibles clases de soluciones de la ecuación de Wheeler-DeWitt. También usaremos estos modelos para reproducir y ampliar un análisis de Hájícek [Hájícek (1986)] en términos de una ecuación de Schrödinger, con lo que ilustraremos algunas dificultades que se encuentran en la búsqueda de una cuantización unitaria por este camino.

### 5.4.1 Ecuación de Wheeler–DeWitt

Comenzaremos por encontrar soluciones de la ecuación de Wheeler–DeWitt para modelos cosmológicos en los casos particulares en que el hamiltoniano escaleado tiene la forma

$$H = -\pi_\Omega^2 + \pi_\phi^2 + 4Ae^{n\Omega+m\phi}. \quad (5.21)$$

Esta forma genérica incluye los siguientes casos:  $\{2A = c, n = 6, m = 1\}$ ,  $\{4A = \lambda^2, n = 0, m = -2\}$  y el mencionado  $\{4A = -k, n = 4, m = 0\}$ . Definimos ahora las variables  $x$  e  $y$  como

$$\begin{aligned} x &\equiv \frac{1}{2}(n\Omega + m\phi) \\ y &\equiv \frac{1}{2}(m\Omega + n\phi). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Dado que para los modelos de esta teoría tenemos  $n > m$ , podemos reescalar el hamiltoniano en la forma siguiente

$$H \rightarrow \frac{4}{n^2 - m^2} H \quad (5.23)$$

y por lo tanto obtener el vínculo equivalente

$$H = -\pi_x^2 + \pi_y^2 + \zeta e^{2x} \quad (5.24)$$

donde  $\zeta = 16A/(n^2 - m^2)$ . Ahora definamos  $u = \sqrt{|\zeta|}e^x$ . En términos de  $u$  e  $y$  podemos escribir la ecuación de Wheeler-DeWitt en la forma

$$\left( u^2 \frac{d^2}{du^2} + u \frac{d}{du} + \text{sign}(\zeta)u^2 - \frac{d^2}{dy^2} \right) \Psi(u, y) = 0 \quad (5.25)$$

Esta ecuación claramente admite un conjunto de soluciones del tipo  $\Psi = A(u)B(y)$ ; volviendo a la variable  $x$ , para el caso  $\text{sign}(\zeta) > 0$  obtenemos

$$\begin{aligned} \Psi_\omega(x, y) &= [a_+(\omega)e^{i\omega y} + a_-(\omega)e^{-i\omega y}] \\ &\times [b_+(\omega)J_{i\omega}(\sqrt{|\zeta|}e^x) + b_-(\omega)N_{i\omega}(\sqrt{|\zeta|}e^x)], \end{aligned} \quad (5.26)$$

donde  $J_{i\omega}$  y  $N_{i\omega}$  son las funciones de Bessel y Neumann de orden imaginario respectivamente; para el caso  $\text{sign}(\zeta) < 0$ , las soluciones son de la forma

$$\begin{aligned} \Psi_\omega(x, y) = & \left[ a_+(\omega)e^{i\omega y} + a_-(\omega)e^{-i\omega y} \right] \\ & \times \left[ b_+(\omega)I_{i\omega}(\sqrt{|\zeta|}e^x) + b_-(\omega)K_{i\omega}(\sqrt{|\zeta|}e^x) \right], \end{aligned} \tag{5.27}$$

donde  $I_{i\omega}$  y  $K_{i\omega}$  son, como antes las funciones de Bessel modificadas. En el caso  $\zeta < 0$  el momento  $\pi_y$  no se anula sobre la superficie de vínculo; entonces, a menos de un signo definido por el signo de  $\pi_y$ , la coordenada  $y$  es un tiempo global, y podríamos separar las funciones en (5.27) como soluciones de energías positivas y negativas. En el caso  $\zeta > 0$  el tiempo es  $\pm x$ , y la posibilidad de una interpretación tal ya no resulta clara: en lugar de los factores usuales  $\sim e^{i\omega t}$  asociados con estados de energía definida, para  $\zeta > 0$  la dependencia temporal aparece en el argumento de las funciones de Bessel.

Notemos que la forma de las soluciones está determinada por el hecho de que, para obtener la solución libre de la ecuación de Wheeler–DeWitt en el límite  $A \rightarrow 0$ , tenemos que considerar el subconjunto  $\omega \in \mathcal{R}$  en las soluciones de la ecuación de Bessel resultante [Giribet & Simeone (2001c)]. Esto es equivalente a la elección de la constante de separación igual a  $-\omega^2/4$  en el caso del universo de Taub. Si bien el límite libre (potencial nulo) no tiene significado para el modelo de Taub, queremos obtener soluciones análogas para hamiltonianos de formas similares.

Es interesante observar que si sustituimos  $\phi$  por  $\beta$  y ponemos  $A = -1/4$ ,  $n = 4$  y  $m = 2$  en el hamiltoniano (5.21), obtenemos el universo de Kantowski–Sachs. Por lo tanto las soluciones halladas (5.27) incluyen las de este modelo, con la coordenada  $y = 4\Omega + 2\beta$  jugando el papel de tiempo.

## 5.4.2 Ecuación de Schrödinger

Hemos visto que, dependiendo del signo de la constante  $\zeta$  en el vínculo (5.21), estos modelos admiten como tiempo global las coordenadas  $x$  o  $y$ . En el caso  $\zeta > 0$  el tiempo es  $t = \pm x$ , de manera que siguiendo la referencia [Hájíček (1986)] podemos definir los hamiltonianos reducidos como  $h_{\pm} = \pm\sqrt{\pi_y^2 + \zeta e^{2x}}$ , y escribir las ecuaciones de Schrödinger

$$i\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x, y) = \mp\left(-\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \zeta e^{2x}\right)^{1/2}\Psi(x, y) \quad (5.28)$$

(notemos que en este caso obtenemos un potencial dependiente del tiempo). Si, en cambio, es  $\zeta < 0$ , el tiempo es  $t = \pm y$  y los hamiltonianos reducidos correspondientes a cada hoja de la superficie de vínculo son  $h_{\pm} = \pm\sqrt{\pi_x^2 - \zeta e^{2y}}$ ; las ecuaciones de Schrödinger asociadas son

$$i\frac{\partial}{\partial y}\Psi(x, y) = \mp\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \zeta e^{2y}\right)^{1/2}\Psi(x, y). \quad (5.29)$$

De acuerdo con [Hájíček (1986)], tanto para  $\zeta > 0$  como para  $\zeta < 0$  tendríamos un par de espacios de Hilbert, cada uno con sus correspondientes funciones de onda. Esto es análogo a la obtención de dos propagadores, uno para cada teoría disjunta, mencionado en el contexto de la cuantización vía integral de camino. En ambos casos el hamiltoniano es real, de manera que el operador de evolución es autoadjunto y la cuantización resultante es unitaria. Notemos que un punto crucial ha sido la elección correcta del tiempo; una elección equivocada, como por ejemplo  $t = \pm x$  en el caso  $\zeta < 0$ , lleva a un hamiltoniano imaginario para el sistema reducido, y se obtiene una teoría no unitaria.

Hay un punto muy importante, sin embargo, que debe ser señalado. Para cada caso  $\zeta < 0$  y  $\zeta > 0$  el vínculo puede escribirse como el producto de dos vínculos lineales, y cada uno de estos vínculos lleva a una ecuación de Schrödinger. En el caso  $\zeta < 0$ ,  $t = \pm y$ , las dos ecuaciones de Schrödinger son equivalentes a la ecuación de Wheeler-DeWitt, ya que provienen de hamiltonianos clásicos que en su versión cuántica en términos de operadores tienen la misma forma. Esto es así porque el potencial en el hamiltoniano reducido es

independiente del tiempo. En el caso  $\zeta > 0$ , en cambio, tenemos  $t = \pm x$  y el potencial depende del tiempo. Por lo tanto el producto que llevaría a dos ecuaciones de Schrödinger se escribiría:

$$H = \left(-\pi_x + \sqrt{\pi_y^2 + \zeta e^{2x}}\right) \left(\pi_x + \sqrt{\pi_y^2 + \zeta e^{2x}}\right) \approx 0. \quad (5.30)$$

A nivel clásico este producto es equivalente al vínculo (5.21); pero en sus versiones como operadores ambos vínculos difieren en términos correspondientes a conmutadores entre  $\pi_x$  y el potencial  $\zeta e^{2x}$ . Luego, dependiendo de cuál de los dos hamiltonianos clásicamente equivalentes tomamos como punto de partida, obtendríamos diferentes cuantizaciones; buscar una correspondencia entre las soluciones de Schrödinger y de Wheeler-DeWitt, como se ha hecho para el modelo de Taub, carece entonces de sentido. Notemos que esta peculiaridad surge en el caso en el cual la ecuación de Wheeler-DeWitt tiene una solución en la cual la identificación de estados de energías positivas y negativas no es evidente (véase la sección anterior). No está del todo claro por qué deberíamos preferir una cuantización ante la otra; sin embargo, la elección usual es la de las soluciones de la ecuación de Wheeler-DeWitt.

# Capítulo 6

## Discusión

La dificultad para definir un conjunto de observables y una noción de evolución dinámica en una teoría en la cual el espacio-tiempo es en sí mismo una variable dinámica, como es el caso de la Relatividad General, lleva al problema del tiempo en cosmología cuántica. En el formalismo hamiltoniano para el campo gravitatorio esta dificultad se refleja en el hecho de que la evolución dinámica puede ser reproducida por transformaciones de gauge generadas por el vínculo hamiltoniano  $\mathcal{H} = 0$ . Como la función de onda del universo debe ser una solución de  $\mathcal{H}\Psi = 0$ , entonces da solamente una correlación entre las coordenadas, pero carece de una noción de evolución. Además, la ausencia de una distinción entre verdaderos grados de libertad y tiempo dificulta definir un producto interno conservado entre los estados cuánticos.

Esta situación ha llevado a diferentes programas de desparametrización o reducción a los grados de libertad físicos como paso previo a la cuantización, como por ejemplo [Hájíček (1986), Barvinsky & Ponomarev (1986), Barvinsky (1986), Barvinsky (1993), Kuchař (Wald (1993), Higuchi & Wald (1995), Cavaglià et al. (1995), Beluardi & Ferraro (1995), Ferraro (1999), Simeone (1999)]. La dificultad práctica encontrada al intentar construir el espacio de fases reducido ha llevado a algunos a abandonar el intento, y a sugerir que la separación entre variables dinámicas verdaderas y tiempo puede ser imposible de realizar en la teoría completa. Sin embargo, las cosas son diferentes en la aproximación

de minisuperespacio, donde se trabaja con modelos con un número finito de grados de libertad. Aquí hemos presentado una propuesta basada en la identificación de un tiempo global comenzando por transformar la acción de modelos cosmológicos en la acción de un sistema de gauge ordinario, para luego imponer condiciones de gauge canónicas. Los modelos así desparametrizados pueden ser entonces cuantizados tanto con el procedimiento de integral de camino de Fadeev–Popov como con el procedimiento canónico de Dirac–Wheeler–DeWitt. En el primer caso se obtiene un propagador para el sistema reducido con una noción de tiempo formalmente correcta; en el segundo caso, el resultado es una función de onda con una noción de evolución y la existencia de un producto interno bien definido. Hemos sugerido que, mientras la noción de tiempo más natural debería ser la de tiempo extrínseco, la mejor elección para nuestros propósitos es la de un nuevo conjunto de variables canónicas tales que el tiempo puede darse en términos de sólo las coordenadas.

Hemos comenzado por definir un tiempo y la forma reducida de la integral de camino para un sistema parametrizado genérico cuyo hamiltoniano cuadrático tiene asociada una ecuación de Hamilton–Jacobi separable, y hemos ilustrado nuestro procedimiento con sistemas simples como la partícula libre relativista y el reloj ideal. Luego hemos estudiado modelos cosmológicos relativistas isótropos y anisótropos, así como modelos de la teoría de cuerdas de bajas energías; los modelos han sido elegidos principalmente para ilustrar las soluciones a los diferentes problemas técnicos que presenta la teoría. Una restricción importante para la aplicación de nuestro método es la separabilidad de la ecuación de Hamilton–Jacobi asociada con los vínculo (si bien en algunos casos hemos podido extender la definición del tiempo a modelos no separables); no hemos estudiado aquí el problema general de la separabilidad, sino que lo hemos analizado en forma particular para cada modelo considerado. Una discusión acerca de modelos separables puede encontrarse, por ejemplo, en [Salopek & Bond (1990), Salopek & Stewart (1992)], mientras que un análisis riguroso de las propiedades geométricas del vínculo se da en

[Hájícek (1989), Hájícek (1990), Schön & Hájícek (1990)].

Los modelos más interesantes tratados aquí, debido a los problemas formales que presentan pero también por su interés físico, han sido los de de Sitter cerrado y el universo anisótropo de Taub. Además de permitir introducir el problema del tiempo extrínseco, el primero provee de una prueba de la consistencia de nuestra propuesta de desparametrización y cuantización; el segundo permite resolver el problema de la cuantización de un modelo con grados de libertad físicos que no admite una definición de tiempo en términos de las coordenadas, y esto lleva a la introducción de una transformación canónica que lleva a un vínculo con diferentes propiedades geométricas. Por otro lado, se ha usado un modelo isótropo con constante cosmológica y un campo escalar para analizar la resolución del problema de Gribov.

Como ya hemos dicho, nos hemos ocupado principalmente de problemas formales, y el estudio de modelos de la teoría de cuerdas se ha encarado en ese sentido. Dichos modelos han sido de utilidad para analizar, en el contexto de la cuantización canónica, el problema de las condiciones de contorno y la elección de subconjuntos de soluciones de la ecuación de Wheeler-DeWitt; en particular, han permitido mostrar las restricciones a la aplicación de propuestas de reducción previas, basadas en la obtención de una ecuación de Schrödinger.

Por cierto, la cuantización de modelos de la teoría de cuerdas tiene un interés físico más allá de los aspectos puramente formales, fundamentalmente por la predicción de dicha teoría de escenarios nuevos para el universo temprano. En el contexto de la cosmología de la teoría de cuerdas, cuando los modos de energías altas de las cuerdas se tornan irrelevantes la evolución del universo comenzaría a ser dominada por campos no masivos que aparecen como fuente de las ecuaciones del campo gravitatorio. Esta fase del universo se llama *era dilatónica*, y está descrita por la teoría efectiva del capítulo 4. Como ya hemos mencionado, la simetría de la teoría sugiere que la idea de una singularidad (el big bang) debería ser sustituida por la hipótesis de la existencia de una transición de curvatura

finita entre dos fases pre- y post-big bang; este es uno de los puntos de interés centrales de la cosmología de cuerdas. Una cuestión abierta importante es la de la dinámica del universo durante esa transición; una respuesta a esta cuestión requeriría una comprensión de la teoría más allá de la aproximación de bajas energías, de manera de incluir la forma funcional del potencial efectivo para el dilatón en esa época, que debería surgir de términos de orden superior de la teoría. La forma de dicho potencial efectivo (aún no conocido) condicionará la posible aplicación del formalismo desarrollado aquí a la obtención de una cuantización consistente para esa fase del universo.

Si bien en el presente trabajo hemos dedicado más espacio a la cuantización vía integral funcional con una distinción entre grados de libertad físicos y tiempo, hemos revisado y explorado también los métodos canónicos, en particular los que parten de una identificación previa del tiempo. El interés en este sentido surge de que las expresiones formales obtenidas aquí por medio del formalismo de integral funcional no permiten, al menos a primera vista, una comprensión cualitativa de su comportamiento cuántico. Creemos, en cambio, que una comprensión tal puede ser alcanzada con más facilidad en el marco de la cuantización de Dirac–Wheeler–DeWitt si se la provee de una noción clara de tiempo y evolución. Por lo tanto, si queremos ir más allá del desarrollo de un formalismo, la mejor línea a seguir parece ser una combinación de nuestro programa de desparametrización con la cuantización vía una ecuación de Wheeler–DeWitt o de Schrödinger. Hemos hecho esto en las últimas secciones de este trabajo, donde obtuvimos soluciones con una definición globalmente buena de tiempo para las ecuaciones de Wheeler–DeWitt correspondientes al modelo anisótropo de Taub y a modelos dilatónicos. El formalismo canónico también nos ha permitido analizar el problema de la unitariedad y de la no equivalencia a nivel cuántico de formulaciones diferentes obtenidas de hamiltonianos que son clásicamente equivalentes.

Más allá de estas consideraciones, queremos enfatizar que cuando nos referimos a una mejor comprensión de la teoría estamos hablando de sus aspectos técnicos; llamamos

una buena definición de tiempo y de observables a una que cumple con las propiedades matemáticas requeridas. Esto no significa, sin embargo, que una descripción diferente no pueda ser también de interés físico; por ejemplo, la solución para el modelo de Taub obtenida en [Moncrief & Ryan (1991)], aunque carece de una definición precisa de evolución, da una predicción definida acerca de la correlación entre las variables que a primera vista son las más naturales. Sin embargo, nuestro procedimiento del capítulo 5, aplicado al mismo modelo, es satisfactorio desde ambos puntos de vista: tenemos una noción formalmente correcta de tiempo y evolución, y podemos también obtener una correlación entre las variables originales, leyendo los resultados en términos de ellas. En este sentido, remarquemos que la única de las nuevas variables que contiene a los momentos originales es el tiempo global, mientras que las otras variables que aparecen en la función de onda dependen solamente de las coordenadas originales.

Por supuesto, quedan cuestiones abiertas relacionadas con la interpretación de las expresiones matemáticas mencionadas; mientras que es usual aceptar la noción de tiempo como la de la variable que fija las condiciones para determinar las probabilidades para valores dados de las variables dinámicas, la definición misma de probabilidad es problemática en cosmología. Además de las razones técnicas, hay una razón evidente que, como el problema del tiempo, proviene de que estamos tratando de construir una teoría para todo el universo. Por lo tanto, los dos puntos de vista usuales acerca de la interpretación de la mecánica cuántica tienen problemas cuando se los trata de aplicar a la cosmología: mientras que la interpretación estadística [Ballentine (1998), Blokhintsev (1964)] requeriría cierta reformulación, la interpretación standard que requiere de un observador clásico externo al sistema para hacer colapsar la función de onda carece claramente de sentido para un sistema que no es un subsistema de ningún otro. Volviendo a cuestiones menos fundamentales, otro problema no resuelto es que aunque se puede dar un procedimiento sistemático para desparametrizar minisuperespacios, no es claro si diferentes elecciones de

tiempo, que son equivalentes a nivel clásico, llevan a teorías cuánticas equivalentes; incluso se ha señalado que esto puede ser un problema insoluble que proviene de las formas esencialmente diferentes en que se trata el tiempo en relatividad y en mecánica cuántica [Kuchař (1981)]. No he discutido estos puntos aquí; aunque el estudio y la resolución de estas y otras cuestiones acerca de la interpretación del formalismo deberían ser objeto de un análisis profundo, éste se encuentra claramente más allá del alcance del presente trabajo.

# Apéndice A

## Sistemas hamiltonianos con vínculos

### A.1 Formalismo hamiltoniano para sistemas con vínculos

Para un sistema sin vínculos, el principio variacional  $\delta S = 0$  escrito en forma hamiltoniana

$$\delta \int \left( p_i \frac{dq^i}{dt} - H_0(q^i, p_i) \right) dt = 0 \quad (\text{A.1})$$

conduce a las ecuaciones canónicas

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial q^i}. \quad (\text{A.2})$$

La primera permite obtener las velocidades en términos de las coordenadas y los momentos, pues  $H_0$  es una función de  $q^i$  y  $p_i$ . En un sistema con vínculos, en cambio, los momentos no son independientes, sino que su variación está restringida a la superficie definida por las condiciones de vínculo  $\psi_m = 0$ . Así, ahora debemos encontrar una extremal para la funcional  $S$  sujeta a las restricciones  $\psi_m(q^i, p_i) = 0$  y debemos hacer

$$\delta \int \left( p_i \frac{dq^i}{dt} - H_0(q^i, p_i) - u^m \psi_m(q^i, p_i) \right) dt = 0, \quad (\text{A.3})$$

donde las  $u^m$  son funciones arbitrarias (véase, por ejemplo, [Gelfand & Fomin (1963)]).

Las funciones  $\psi_m(q^i, p_i)$  son los *vínculos primarios*. Esto lleva a las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dq^i}{dt} &= \frac{\partial H_0}{\partial p_i} + u^m \frac{\partial \psi_m}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H_0}{\partial q^i} - u^m \frac{\partial \psi_m}{\partial q^i}, \\ \psi_m &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Dado un punto sobre la superficie  $\psi_m = 0$ , podemos usar la primera ecuación para obtener la correspondiente velocidad. Las funciones arbitrarias  $u_m$  se comportan entonces como coordenadas sobre la variedad de velocidades  $dq^m/dt$ , haciendo la transformación unívoca en ambos sentidos.

En la formulación de paréntesis de Poisson (véase [Landau & Lifshitz (1960)]), para cualquier cantidad física  $a$  podemos escribir

$$\frac{da}{dt} = [a, H_0] + u^m [a, \psi_m]. \quad (\text{A.5})$$

Sobre la superficie de vínculo tenemos

$$u^m [a, \psi_m] = [a, u^m \psi_m] \quad (\text{A.6})$$

porque

$$[a, u^m \psi_m] = u^m [a, \psi_m] + [a, u^m] \psi_m \quad (\text{A.7})$$

y el último término se anula sobre  $\psi_m = 0$ . Por lo tanto podemos escribir la igualdad “débil” (es decir restringida a la superficie de vínculo)

$$\frac{da}{dt} \approx [a, H_T] \quad (\text{A.8})$$

donde  $H_T = u^m \psi_m + H_0$ .

Los vínculos deben preservarse, de modo que

$$\frac{d\psi_m}{dt} = [\psi_m, H_0] + u^{m'} [\psi_m, \psi_{m'}] \approx 0. \quad (\text{A.9})$$

Obtenemos así  $m$  condiciones de consistencia, una para cada vínculo [Dirac (1964)]. Estas condiciones pueden: i) Verificarse automáticamente. ii) Dar lugar a nuevas ecuaciones de la forma

$$\theta(q^i, p_i) = 0, \quad (\text{A.10})$$

que se denominan *vínculos secundarios*. iii) Llevar a nuevas condiciones sobre las  $u^m$ . Consideremos las ecuaciones

$$[\psi_j, H_0] + u^m[\psi_j, \psi_m] \approx 0 \quad (\text{A.11})$$

donde  $\psi_j$  son todos los vínculos, primarios y secundarios. Su solución general es

$$u^m = U^m + \lambda^a V_a^m \quad (\text{A.12})$$

donde  $V_a^m$  resuelven las ecuaciones homogéneas

$$u^m[\psi_j, \psi_m] = 0, \quad (\text{A.13})$$

y  $U^m$  son soluciones particulares. De esta manera podemos escribir

$$H_T = H_0 + U^m \psi_m + \lambda^a V_a^m \psi_m. \quad (\text{A.14})$$

Las  $U^m$  y  $V_a^m$  son funciones de las  $q^i$  y  $p_i$ , pero los  $\lambda^a$  son coeficientes arbitrarios cuyo número es menor o igual que el de las  $u^m$ . Definiendo

$$H = H_0 + U^m \psi_m, \quad R_a = V_a^m \psi_m, \quad (\text{A.15})$$

la (A.14) puede reescribirse

$$H_T = H + \lambda^a R_a. \quad (\text{A.16})$$

Los coeficientes  $\lambda$  introducen funciones arbitrarias del tiempo en las ecuaciones de movimiento, de manera que las variables a un dado tiempo no están completamente determinadas por sus valores iniciales.

Los  $R_a$  son combinaciones lineales de los vínculos primarios  $\psi_m$ , y por lo tanto son también vínculos primarios. Vemos que el número de funciones arbitrarias en las ecuaciones de movimiento es igual al número de los  $R_a$ .

Puede verse fácilmente que el paréntesis de Poisson de los vínculos  $R$  con  $\psi_j = (\psi_m, \theta)$  es débilmente nulo:

$$[R_a, \psi_j] \approx 0. \quad (\text{A.17})$$

Cualquier cantidad con esta propiedad se denomina *de primera clase*. A las que no la verifican se las llama *de segunda clase*. Como los  $\psi_j$  son las únicas funciones independientes que se anulan débilmente, entonces el paréntesis  $[R, \psi_j]$  de cualquier función de primera clase debe ser una combinación lineal de los  $\psi_j$ :

$$[R, \psi_j] = r_{jj'} \psi_{j'}. \quad (\text{A.18})$$

como los  $R_a$  son combinaciones lineales de los  $\psi_m$ , es claro que

$$[R_a, R_b] \approx 0. \quad (\text{A.19})$$

## A.2 Transformaciones de gauge y fijación del gauge

En términos de  $H$  y  $R_a$  la evolución de una variable  $x$  que no depende explícitamente de  $t$  está dada por

$$\frac{dx}{dt} = [x, H] + \lambda^a [x, R_a] \quad (\text{A.20})$$

donde  $\lambda$  son coeficientes indeterminados; la arbitrariedad de su elección hace que la evolución de  $x$  no esté por completo determinada: Para una condición inicial dada  $x(t_0) = x_0$ , al tiempo  $t$  posterior a  $t_0$ ,  $x$  puede tomar diferentes valores de acuerdo con la elección de  $\lambda^a$ . Sin embargo, el estado físico del sistema no puede depender de una elección arbitraria de los coeficientes, y por lo tanto diferentes valores de  $x$  deben corresponder al mismo estado físico.

Si  $x$  evoluciona con dos conjuntos diferentes de coeficientes tenemos

$$\begin{aligned} x_\lambda(\Delta t) &= x_0 + [x, H]\Delta t + \lambda^a \Delta t [x, R_a], \\ x_{\lambda'}(\Delta t) &= x_0 + [x, H]\Delta t + \lambda'^a \Delta t [x, R_a]. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

y por lo tanto tenemos una diferencia

$$\delta x = (\lambda^a - \lambda'^a) \Delta t [x, R_a]. \quad (\text{A.22})$$

Una evolución infinitesimal da

$$\delta_\epsilon x = \epsilon^a(t)[x, R_a], \quad (\text{A.23})$$

donde  $\epsilon^a(t) = (\lambda^a - \lambda^{a'})\delta t$ . Esta es la expresión para una transformación de gauge infinitesimal; la transformación es generada por la función  $\epsilon^a R_a$ .

Los vínculos secundarios también generan transformaciones de gauge [Hanson et al. (1976), Sundermeyer (1982), Dirac (1964)]; si  $\{C_a\}$  es el conjunto de todos los vínculos de primera clase, la transformación de gauge más general se escribe

$$\delta_\epsilon x = \epsilon^a(t)[x, C_a]. \quad (\text{A.24})$$

Los vínculos  $C_a$  cumplen

$$[C_a, C_b] = c_{ab}{}^c C_c \approx 0 \quad (\text{A.25})$$

porque son de primera clase. Si además hay vínculos de segunda clase, el paréntesis puede redefinirse (*paréntesis de Dirac*; ver [Henneaux & Teitelboim (1992)]). Notemos que (A.24) y (A.25) implican que  $\delta_\epsilon C_b \approx 0$ .

Las funciones  $X$  cuyo paréntesis de Poisson con los vínculos es débilmente nulo son invariantes de gauge, y son llamadas *observables*. Los conjuntos de puntos del espacio de fases conectados por transformaciones de gauge se llaman *órbitas*; los observables tienen el mismo valor a lo largo de una órbita, mientras que las funciones que no son invariantes de gauge contienen información acerca de los diferentes puntos de las órbitas, pero dicha información es físicamente irrelevante.

En principio es siempre posible eliminar la ambigüedad en la evolución eligiendo una de todas las configuraciones equivalentes. Esto se logra imponiendo *condiciones de gauge* de la forma

$$\chi(q^i, p_i, t) = 0. \quad (\text{A.26})$$

Puede verse que el número de condiciones de gauge necesarias es siempre igual al de vínculos: si hay  $m$  vínculos, la dimensión de cada órbita es  $m$ , pues cada puntos se alcanza

eligiendo  $m$  parámetros de gauge  $\epsilon^a$ , y las condiciones de gauge deben definir una variedad de dimensión  $2 \times$  número  $n$  de grados de libertad  $- m$  para cortar cada órbita sólo una vez.

La condición de que sólo un punto de cada órbita se encuentre en la variedad definida por las condiciones de gauge significa que una transformación de gauge debe mover un punto de una órbita fuera de la superficie  $\chi^b = 0$ :

$$\delta\chi^b = \epsilon^a [\chi^b, C_a] \neq 0 \quad (\text{A.27})$$

a menos que  $\epsilon^a = 0$  (see [Henneaux & Teitelboim (1992)]). Esto significa que

$$\det ([\chi^b, C_a]) \neq 0. \quad (\text{A.28})$$

En un sentido estricto, esta condición sólo asegura localmente que la órbita y la condición de gauge no son tangentes: existe la posibilidad del *problema de Gribov*, es decir que se verifique la (A.28) pero que una órbita sea cortada más de una vez.

# Apéndice B

## Integral de camino y producto interno

### B.1 Sistemas sin vínculos

Una presentación muy clara de la formulación de la mecánica cuántica en términos de integrales de camino puede encontrarse en el libro de Feynman [Feynman (1965)] y en [Schulman (1981)], mientras que el desarrollo original de la idea puede encontrarse en [Dirac (1933), Feynman (1948)]. Aquí daremos una introducción a los conceptos más básicos. Consideremos el hamiltoniano

$$H(q, p) = f(p^2) + V(q) \quad (\text{B.1})$$

y evaluemos el propagador, esto, la amplitud de probabilidad de que la coordenada tome el valor  $q_f$  al tiempo  $t_f$  dado el valor  $q_i$  en  $t_i$ . Si separamos  $t_f - t_i$  en intervalos  $t_{k+1} - t_k = \epsilon$  e insertamos  $n - 1$  veces la identidad

$$1 = \int dq_k |q_k, t_k\rangle \langle q_k, t_k| \quad (\text{B.2})$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle &= \int dq_1 dq_2 \dots dq_{n-1} \langle q_f, t_f | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle \\ &\quad \times \langle q_{n-1}, t_{n-1} | \dots | q_1, t_1 \rangle \langle q_1, t_1 | q_i, t_i \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Para efectivamente llevar a cabo la integración necesitamos el propagador infinitesimal

$$\langle q', t + \varepsilon | q, t \rangle = \langle q' | e^{-i\varepsilon H(q,p,t)} | q \rangle \quad (\text{B.4})$$

que al primer orden en  $\varepsilon$  es igual a

$$\langle q' | e^{-i\varepsilon(f(p^2)+V(q))} | q \rangle. \quad (\text{B.5})$$

Si introducimos

$$1 = \int dp' |p'\rangle \langle p'| = \int dp |p\rangle \langle p| \quad (\text{B.6})$$

y usamos que  $\langle p' | p \rangle = \delta(p' - p)$  obtenemos

$$\langle q', t + \varepsilon | q, t \rangle = \int dp e^{i\varepsilon[pdq/dt - H(q,p,t)]}. \quad (\text{B.7})$$

Como  $pdq/dt - H(q, p, t)$  es el lagrangiano, el argumento de la exponencial es proporcional a la acción. Tomando el límite, la integral se transforma en una integral funcional que suma sobre todos los caminos entre  $(q_i, t_i)$  y  $(q_f, t_f)$ ; su notación usual es

$$K \equiv \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \int Dq(t) Dp(t) e^{iS[q(t), p(t)]} \quad (\text{B.8})$$

con  $S$  la funcional acción de Hamilton. Las variables  $q$  y  $p$  definen un camino esqueletizado en el espacio de fases. Para ser precisos,  $q$  debe entenderse como el valor de la coordenada al tiempo  $t_a$ , mientras que  $p$  debería entenderse como el valor del momento a un tiempo intermedio  $\bar{t}$ ,  $t_a < \bar{t} < t_{a+1}$ .

La integral permite “propagar” (de ahí su nombre) la función de onda haciendo:

$$\begin{aligned} \Psi(q, t) = \langle q, t | \Psi \rangle &= \int dq_0 \langle q, t | q_0, t_0 \rangle \langle q_0, t_0 | \Psi \rangle \\ &= \int dq_0 \langle q, t | q_0, t_0 \rangle \Psi(q_0, t_0). \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Podemos así obtener la función de onda a cualquier tiempo  $t$  si la conocemos a un dado tiempo  $t_0$ .

## B.2 Sistemas con vínculos

Sean  $Z^A$  las variables del espacio de fases de un sistema con vínculos, y supongamos que  $(Q^\mu, P_\mu)$  son un conjunto completo de observables:

$$[Q^\mu, C_a] \approx 0 \approx [P_\mu, C_a]$$

donde  $C_a$  son vínculos de primera clase. Si cuantizamos el sistema definido por las funciones invariantes de gauge  $(Q^\mu, P_\mu)$  tenemos una integral de camino que es una suma sobre trayectorias en el espacio de fases reducido:

$$\begin{aligned} K &= \int DQ^\mu DP_\mu (\det(\sigma_{\mu\nu}))^{1/2} \exp(iS[Q^\mu, P_\mu]), \\ S[Q^\mu, P_\mu] &= \int \left[ P_\mu \frac{dQ^\mu}{dt} - h(Q^\mu, P_\mu) \right] dt, \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

donde  $\det(\sigma_{\mu\nu})$  es el determinante de la inversa de los paréntesis de Poisson de las  $Q^\mu$  y los  $P_\mu$ , y  $h(Q^\mu, P_\mu)$  es el hamiltoniano invariante de gauge para el sistema reducido.

El espacio de fases reducido puede no ser fácil de identificar. Una forma posible de obtener el propagador es elegir un camino de cada clase de caminos equivalentes en el espacio de fases. Definimos entonces condiciones de gauge globalmente buenas

$$\chi_a = 0$$

que junto con los vínculos  $C_a$  forman un sistema de vínculos de segunda clase:  $\chi_\rho \equiv (\chi_a, C_a)$ . Las condiciones de gauge  $\chi_\rho$  cumplen

$$\det[\chi_\rho, \chi_\sigma] = (\det[C_a, \chi_b])^2.$$

Con estas definiciones podemos reescribir la integral en el espacio reducido como

$$K = \int DZ^A D\lambda^a \delta(\chi_a) \det[C_a, \chi_b] \exp\left(iS'[Z^A(t)] - i \int \lambda^a C_a dt\right) \quad (\text{B.11})$$

donde  $S'$  contiene un término de superficie necesario para asegurar que  $S'[Z^A(t)]$  es equivalente a  $S[Q^\mu, P_\mu]$  sobre la superficie definida por  $\chi_a = 0$  and  $C_a = 0$ . La integración

funcional sobre los multiplicadores  $\lambda^a$  lleva a una  $\delta$  de Dirac  $\delta$  de cada vínculo. (Ver [Henneaux & Teitelboim (1992)] para más detalles).

### B.3 Producto interno para sistemas con vínculos

Consideremos un sistema con  $n$  grados de libertad y un vínculo de la forma  $P_l = 0$ . El producto interno entre los estados  $x$  e  $y$  del espacio de Hilbert se define

$$\langle x|y\rangle = \int dQ^1 \dots dQ^l \dots dQ^n x^*(Q^1 \dots Q^n) y(Q^1 \dots Q^n). \quad (\text{B.12})$$

Si  $x$  e  $y$  verifican el vínculo, el integrando no depende de  $Q^l$  y la integral diverge. Para evitarlo, la integración sobre  $Q^l$ , que no es un grado de libertad físico, se elimina introduciendo una condición de gauge  $\chi$  y definiendo el *producto interno físico* como

$$\langle x|y\rangle \equiv \int dQ^1 \dots dQ^l \dots dQ^n \delta(\chi) |[\chi, P_l]| x^*(Q^1 \dots Q^n) y(Q^1 \dots Q^n), \quad (\text{B.13})$$

donde  $\chi$  da a  $Q^l$  como una función de las demás variables y de  $\tau$ . El jacobiano asegura que la integral no depende de la elección de  $\chi$ :

$$\delta(\chi)|[\chi, P_l]| = \delta(\chi)|\partial\chi/\partial Q^l| = \delta(Q^l). \quad (\text{B.14})$$

La ecuación (B.13) puede reescribirse

$$\langle x|y\rangle = \langle x|\hat{\mu}|y\rangle, \quad (\text{B.15})$$

donde  $\hat{\mu}$  es un operador que elimina la integración sobre las variables que son puro gauge.

El producto  $\langle x|y\rangle$  es igual a

$$\int dQ^1 \dots dQ^{l-1} dQ^{l+1} \dots dQ^n x^*(Q^1 \dots Q^{l-1} Q^{l+1} \dots Q^n) y(Q^1 \dots Q^{l-1} Q^{l+1} \dots Q^n) \quad (\text{B.16})$$

para los estados físicos, y coincide con el producto escalar en el espacio reducido. Si escribimos

$$x^*(Q) = \langle x|Q\rangle, \quad y(Q) = \langle Q|y\rangle,$$

el producto interno puede ponerse en la forma

$$(x|y) = \int dQ(x|Q)\hat{\mu}(Q|y) \quad (\text{B.17})$$

y esto permite definir el operador identidad en el subespacio de estados físicos:

$$1 = \int dQ|Q\rangle\hat{\mu}\langle Q|. \quad (\text{B.18})$$

Análogamente, si los vectores  $|\Psi_\alpha\rangle$  son una base para el subespacio de estados físicos, tenemos

$$1 = \sum |\Psi_\alpha\rangle\langle\Psi_\alpha|. \quad (\text{B.19})$$

## B.4 Propagador y núcleo proyectado

El propagador se define como el operador  $U_0(Q', t'; Q, t)$  que, aplicado sobre la función de onda  $\Psi(Q, t)$ , la transforma en  $\Psi(Q', t')$ :

$$\Psi(Q', t') = \langle Q'|U_0|\Psi(Q, t)\rangle. \quad (\text{B.20})$$

Introduciendo la identidad obtenemos

$$\Psi(Q', t') = \sum \int dQ \langle Q'|\Psi_\alpha\rangle\langle\Psi_\alpha|U_0|\Psi_\beta\rangle\langle\Psi_\beta|Q\rangle\hat{\mu}\Psi(Q, t). \quad (\text{B.21})$$

Como

$$\langle Q'|\Psi_\alpha\rangle = \Psi_\alpha(Q'), \quad \langle\Psi_\beta|Q\rangle = \Psi_\beta^*(Q),$$

y  $\sum |\Psi_\alpha\rangle\langle\Psi_\alpha|$  es el proyector sobre el subespacio de estados físicos  $|\Psi_\alpha\rangle$ , se define el *núcleo proyectado*

$$U_0^P(Q', t'; Q, t) = \sum \Psi_\alpha(Q')\langle\Psi_\alpha|U_0|\Psi_\beta\rangle\Psi_\beta^*(Q) \quad (\text{B.22})$$

(ver, por ejemplo, [Henneaux & Teitelboim (1992)]). El núcleo  $U_0^P$  contiene información sobre la acción del propagador sobre los estados físicos: la función de onda  $\Psi$  al tiempo  $t'$

es el resultado de hacer evolucionar la función  $\Psi$  al tiempo  $t$  con el núcleo proyectado, y podemos escribir:

$$\Psi(Q', t') = \int dQ U_0^P(Q', t'; Q, t) \hat{\mu} \Psi(Q, t). \quad (\text{B.23})$$

Cuando se calcula la integral de camino para un sistema con vínculos y la integración se restringe a la superficie de vínculo el resultado coincide con el núcleo proyectado  $U_0^P$ . En general, el operador  $\hat{\mu}$  puede identificarse con  $\delta(\chi)|[\chi, G]$  sólo si el vínculo tiene la forma

$$G \equiv P_l + \frac{\partial V}{\partial Q_l}.$$

Si esto no ocurre en las variables originales, puede llegar a verificarse si es posible una transformación a nuevas variables  $\{Q^0, Q^\mu, P_0, P_\mu\}$  tales que  $G \equiv P_0 \approx 0$ .

- *Ejemplo:* Consideremos el reloj ideal descrito por el hamiltoniano

$$\mathcal{H} = p_t - R(t) \approx 0. \quad (\text{B.24})$$

$t$  es la única coordenada del sistema, cuyos estados son identificados por el parámetro no físico  $\tau$ . Los estados físicos no dependen de  $\tau$  y son de la forma

$$\Psi(t, \tau) = e^{i \int^t R(t) dt} \quad (\text{B.25})$$

Como el sistema es puro gauge (hay una coordenada y un vínculo),  $t$  no es un verdadero grado de libertad físico, y entonces

$$\hat{\mu} = \delta(t - t_0). \quad (\text{B.26})$$

El producto interno físico entre dos estados  $\Psi$  y  $\Psi'$  está dado por

$$(\Psi' | \Psi) = \int dt \Psi'^* \hat{\mu} \Psi \quad (\text{B.27})$$

y por lo tanto

$$(\Psi | \Psi) = \int dt e^{-i \int^t R(t) dt} \delta(t - t_0) e^{i \int^t R(t) dt} = 1. \quad (\text{B.28})$$

Si usamos la (B.23) para obtener  $\Psi(t', \tau')$  resulta:

$$\Psi(t', \tau') = \int dt U_0^P(t', \tau'; t, \tau) \delta(t - t_0) \Psi(t, \tau), \quad (\text{B.29})$$

y dado que  $\Psi$  no depende de  $\tau$ , entonces

$$\begin{aligned} e^{i \int^{t'} R(t) dt} &= \int dt U_0^P(t', \tau'; t, \tau) \delta(t - t_0) e^{i \int^t R(t) dt} \\ &= U_0^P(t', \tau'; t_0, \tau) e^{i \int^{t_0} R(t) dt}. \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Por lo tanto

$$U_0^P(t', \tau'; t, \tau) = e^{i \int_t^{t'} R(t) dt}, \quad (\text{B.31})$$

que coincide con el resultado de la sección 3.4.2 obtenido por medio de una integral de camino.

## Apéndice C

# Vínculo de partícula libre para minisuperespacios

En la sección 4.2.3 desparametrizamos dos modelos cosmológicos cuyo hamiltoniano era análogo al de una partícula libre relativista. Tales vínculos simples pueden obtenerse, por ejemplo, para modelos con un hamiltoniano que pueda llevarse a la forma

$$H = -\pi_x^2 + \pi_y^2 + Ae^{2y} \approx 0 \quad (\text{C.1})$$

con  $A > 0$ . El momento  $\pi_x$  no se anula, de modo que  $\pm x$  es un tiempo intrínseco. Definiendo una transformación canónica como la de (4.73),

$$\begin{aligned} \pi_y &= \pm\sqrt{A}e^y \sinh z \\ \pi_z &= \pm\sqrt{A}e^y \cosh z \end{aligned}$$

podemos poner el vínculo en la forma

$$H = -\pi_x^2 + \pi_z^2 \approx 0, \quad (\text{C.2})$$

que es el de una partícula libre relativista no masiva. De acuerdo con el análisis de la sección 4.2.3, un tiempo extrínseco para tal vínculo es  $t \sim -q/p$ , con  $q$  y  $p$  cualquiera de ambos pares de variables conjugadas. A este nivel ambos grados de libertad son equivalentes, en el sentido de que cualquiera de ellos puede ser el reloj para la evolución del otro.

Sin embargo, deberíamos tener en mente que, de acuerdo con la forma original del hamiltoniano, el momento  $\pi_x$  no podía anularse, de manera que lo mismo vale para  $\pi_z$ ; de hecho, la definición de  $\pi_z$  como un producto de una exponencial y un coseno hiperbólico no permite que se anule. Por lo tanto, la asimetría existente entre  $x$  e  $y$  en la forma original del vínculo lleva a que tanto  $x$  como  $z$  puedan definirse como tiempo global. Aunque esto no es evidente al nivel del vínculo de partícula libre (C.2), el punto es que la transformación canónica se define no sólo por la relación entre las viejas y las nuevas variables, sino que debe incluir una prescripción que preserve el rango de sus posibles valores; este rango debería entonces darse junto con la expresión del vínculo resultante. Por ejemplo, cuando desparametrizamos el modelo de Bianchi del tipo I y decimos que sólo admite tiempos extrínsecos, estamos teniendo en cuenta que los momentos pueden tomar cualquier valor entre  $-\infty$  e  $+\infty$ .

# Bibliografía

- [Antoniadis et al. (1988)] Antoniadis I., Bachas C., Ellis J. and Nanopoulos D. V., Phys. Lett. **B221**, 393, (1988).
- [Arnowitt et al. (1962)] Arnowitt R., Deser S. and Misner C., in *Gravitation, an Introduction to Current Research*, edited by L. Witten, Wiley, New York (1962).
- [Ballentine (1998)] Ballentine L., *Quantum Mechanics*, World Scientific, Singapore (1998).
- [Barvinsky & Ponomariov (1986)] Barvinsky A. O. and Ponomariov V. N., Phys. Lett. **B167**, 289 (1986).
- [Barvinsky (1986)] Barvinsky A. O., Phys. Lett. **B175**, 401 (1986).
- [Barvinsky (1987)] Barvinsky A. O., Phys. Lett. **B195**, 289 (1987).
- [Barvinsky (1993)] Barvinsky A. O., Phys. Rep. **230**, 237 (1993).
- [Beluardi & Ferraro (1995)] Beluardi S. C. and Ferraro R., Phys. Rev. **D52**, 1963 (1995).
- [Blokhintsev (1964)] Blokhintsev D. I., *Quantum Mechanics*, D. Reidel Publishing, Dordrecht (1964).
- [Brown & York (1989)] Brown J. D. and York J. W., Phys. Rev. **D40**, 3312 (1989).
- [Catren & Ferraro (2001)] Catren G. and Ferraro R., Phys. Rev. **D63**, 023502 (2001).

- [Cavaglià & De Alfaro (1994)] Cavaglià M. and De Alfaro A., *Mod. Phys. Lett.* **A9**, 569 (1994).
- [Cavaglià et al. (1995)] Cavaglià M., De Alfaro V. and Filippov A. T., *Int. J. Mod. Phys* **A10**, 611 (1995).
- [Cavaglià & De Alfaro (1997)] Cavaglià M. and De Alfaro A., *Gen. Rel. Grav.* **29**, 773 (1997).
- [Cavaglià & Ungarelli (1999)] Cavaglià M. and Ungarelli C., *Class. Quant. Grav.* **16**, 1401 (1999).
- [De Cicco & Simeone (1999a)] De Cicco H. and Simeone C., *Gen. Rel. Grav.* **31**, 1225 (1999).
- [De Cicco & Simeone (1999b)] De Cicco H. and Simeone C., *Int. J. Mod. Phys.* **A14**, 5105 (1999).
- [DeWitt (1967)] DeWitt B. S., *Phys. Rev.* **160**, 1113 (1967).
- [Dirac (1933)] Dirac P. A. M., *Physik. Zeits. Sowjetunion* **3**, 64 (1933)
- [Dirac (1964)] Dirac P. A. M., *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York (1964).
- [Fadeev & Popov (1967)] Fadeev L. D. and Popov V. N., *Phys. Lett.* **B25**, 29 (1967).
- [Fadeev & Slavnov (1980)] Fadeev L. D. and Slavnov A. A., *Gauge Fields: Introduction to Quantum Theory*, Benjamin/Cummings Publishing (1980).
- [Ferraro (1992)] Ferraro R., *Phys. Rev.* **D45**, 1198 (1992).
- [Ferraro & Simeone (1997)] Ferraro R. and Simeone C., *J. Math. Phys.* **38**, 599 (1997).

- [Ferraro (1999)] Ferraro R., *Grav. Cosm.* **5**, 195 (1999).
- [Ferraro & Sforza (1999)] Ferraro R. and Sforza D., *Phys. Rev.* **D59**, 107503 (1999).
- [Feynman (1948)] Feynman R. P., *Rev. Mod. Phys.* **20**, 367 (1948).
- [Feynman (1965)] Feynman R. P. and Hibbs A. R., *Quantum Mechanics and Path Integrals*, Mc Graw-Hill, New York (1965).
- [Filippov (1989)] Filippov A. T., *Mod. Phys. Lett.* **A4**, 463 (1989).
- [Gasperini & Veneziano (1993)] Gasperini M. and Veneziano G., *Astropart. Phys.* **1**, 317 (1993).
- [Gasperini (1999)] Gasperini M., in *Proceedings of the 2nd SIGRAV School on Gravitational Waves in Astrophysics, Cosmology and String Theory, Villa Olmo, Como*, edited by V. Gorini, hep-th/9907067.
- [Gasperini (2000)] Gasperini M., *Class. Quant. Grav.* **17** R1 (2000).
- [Gelfand & Fomin (1963)] Gelfand I. M. and Fomin S. V., *Calculus of Variations*, Prentice-Hall, New Jersey (1963).
- [Giribet & Simeone (2001)] Giribet G., en preparación (2001).
- [Giribet & Simeone (2001a)] Giribet G. and Simeone C., *Mod. Phys. Lett.* **A16**, 19 (2001).
- [Giribet & Simeone (2001b)] Giribet G. and Simeone C., *Phys. Lett. A* **287**, 344 (2001).
- [Giribet & Simeone (2001c)] Giribet G. and Simeone C., en preparación (2001).
- [Goldwirth & Perry (1994)] Goldwirth D. S. and Perry M. J., *Phys. Rev.* **D49**, 5019 (1994).

- [Gradshteyn & Ryshik (1965)] Gradshteyn I. S. and Ryshik I. M., *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, New York (1965).
- [Gribov (1978)] Gribov V. N., Nucl. Phys. **B139**, 1 (1978).
- [Hájíček (1986)] Hájíček P., Phys. Rev. **D34**, 1040 (1986).
- [Hájíček (1989)] Hájíček P., J. Math. Phys. **30**, 2488 (1989).
- [Hájíček (1990)] Hájíček P., Class. Quantum. Grav. **7**, 871 (1990).
- [Halliwell (1988)] Halliwell J. J., Phys. Rev. **D38**, 2468 (1988).
- [Halliwell (1990)] Halliwell J. J., in *Introductory Lectures on Quantum Cosmology*, Proceedings of the Jerusalem Winter School on Quantum Cosmology and Baby Universes, edited by T. Piran, World Scientific, Singapore (1990).
- [Hanson et al. (1976)] Hanson A., Regge T. and Teitelboim C., in *Constrained Hamiltonian Systems*, Accademia Nazionale dei Lincei, Roma (1976).
- [Hartle & Hawking (1983)] Hartle J. and Hawking S., Phys. Rev. **D28**, 2960 (1983).
- [Henneaux et al. (1992)] Henneaux M., Teitelboim C. and Vergara J. D., Nucl. Phys. **B387**, 391 (1992).
- [Henneaux & Teitelboim (1992)] Henneaux M. and Teitelboim C., *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press, New Jersey (1992).
- [Higuchi & Wald (1995)] Higuchi A. and Wald R. M., Phys. Rev. **D51**, 544 (1995)
- [Kantowski & Sachs (1966)] Kantowski R. and Sachs R. K., J. Math. Phys. **7**, 443 (1966).
- [Kolb & Turner (1988)] Kolb E. W. and Turner M. S., *The Early Universe*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1988).

- [Kuchař (1971)] Kuchař K. V., *Phys. Rev.* **D4**, 955 (1971).
- [Kuchař (1976)] Kuchař K. V., *J. Math. Phys.* **17**, 777 (1976).
- [Kuchař (1981)] Kuchař K. V., in *Quantum Gravity 2: A Second Oxford Symposium*, edited by C. J. Isham, R. Penrose and D. W. Sciama, Clarendon Press (1981).
- [Kuchař & Ryan (1989)] Kuchař K. V. and Ryan M. P., *Phys. Rev.* **D40**, 3982 (1989).
- [Kuchař (1992)] Kuchař K. V., in *Proceedings of the 4th Canadian Conference on General Relativity and Relativistic Astrophysics*, edited by G. Kunstatter, D. Vincent and J. Williams, World Scientific, Singapore (1992).
- [Kuchař (1993)] Kuchař K. V., in *General Relativity and Gravitation 1992*, Proceedings of the 13th International Conference on General Relativity and Gravitation, Córdoba, Argentina, edited by R. Gleiser, C. N. Kozameh and O. M. Moreschi, IOP Publishing, Bristol (1993).
- [Kuchař et al. (1997)] Kuchař K. V., Romano J. D. and Varadajan M., *Phys. Rev.* **D55**, 795 (1997).
- [Lanczos (1986)] Lanczos C., *The Variational Principles of Mechanics*, Dover, New York (1986).
- [Landau & Lifshitz (1960)] Landau L. D. and Lifshitz E. M., *Mechanics*, Pergamon Press, Oxford (1960).
- [Landau & Lifshitz (1975)] Landau L. D. and Lifshitz E. M., *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press, Oxford (1975).
- [Martinez & Ryan (1983)] Martinez S. and Ryan M., in *Relativity, Cosmology, Topological Mass and Supergravity*, Proceedings of the Fourth Silarg Symposium, Caracas, Venezuela, 1982, edited by C. Aragone, Singapore (1983).

- [Meissner & Veneziano (1993)] Meissner K. and Veneziano G., *Mod. Phys. Lett.* **A8**, 3397 (1991).
- [Misner et al. (1997)] Misner W., Thorne K. S. and Wheeler J. A., *Gravitation*, Freeman New York (1997).
- [Moncrief & Ryan (1991)] Moncrief V. and Ryan M. P., *Phys. Rev.* **D44**, 2375 (1991).
- [Ryan & Shepley (1975)] Ryan M. P. and Shepley L. C., *Homogeneous Relativistic Cosmologies*, Princeton Series in Physics, Princeton University Press, New Jersey (1975).
- [Salopek & Bond (1990)] Salopek D. S. and Bond J. R., *Phys. Rev.* **D42**, 3936 (1990).
- [Salopek & Stewart (1992)] Salopek D. S. and Stewart J. M., *Class. Quantum Grav.* **9**, 1943 (1992).
- [Schön & Hájíček (1990)] Schön M. and Hájíček P., *Class. Quantum Grav.* **7**, 861 (1990).
- [Schulman (1981)] Schulman L. S., *Techniques and Applications of Path Integration*, Wiley, New York (1981).
- [Schutz (1980)] Schutz B. F., *Geometrical Methods of Mathematical Physics*, Cambridge University Press, Cambridge (1980).
- [Schutz (1985)] Schutz B. F., *A First Course in General Relativity*, Cambridge University Press, Cambridge (1985).
- [Simeone (1998)] Simeone C., *J. Math. Phys.* **39**, 3131 (1998).
- [Simeone (1999)] Simeone C., *J. Math. Phys.* **40**, 4527 (1999).
- [Simeone (2000)] Simeone C., *Gen. Rel. Grav.* **32**, 1835 (2000).

- [Sundermeyer (1982)] Sundermeyer K., *Constrained Dynamics*, Lecture Notes in Physics **169**, Springer-Verlag, Berlin (1982).
- [Szekeres (1975)] Szekeres P., Phys. Rev. **D12**, 2941 (1975).
- [Taub (1951)] Taub A., Ann. Math. **53**, 472 (1951).
- [Teitelboim (1982)] Teitelboim C., Phys. Rev. **D25**, 3159 (1982).
- [Tseytlin (1992)] Tseytlin A. A., Class. Quant. Grav. **9**, 979, (1992).
- [Tseytlin & Vafa (1992)] Tseytlin A. A. and Vafa C., Nucl. Phys. **B372**, 443, (1992).
- [Veneziano (1991)] Veneziano G., Phys. Lett. **B265**, 387 (1991).
- [Veneziano (1999)] Veneziano G., *String Cosmology: The pre-big bang scenario*, Lectures delivered in Les Houches (1999), hep-th/0002094.
- [Wald (1993)] Wald R. M., Phys. Rev. **D48**, R2377 (1993).
- [Weinberg (1972)] Weinberg S., *Gravitation and Cosmology*, Wiley, New York (1973).
- [York (1972)] York J. W., Phys. Rev. Lett. **28**, 1082 (1972).