# Soluciones de ecuaciones no lineales del tipo p-Laplaciano.

De Nápoli, Pablo Luis

2001

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

# Soluciones de Ecuaciones No Lineales del Tipo p-Laplaciano

Por Pablo Luis De Nápoli

Directora de Tesis: Dra. María Cristina Mariani
Lugar de Trabajo: Departamento de Matemática- FCEyN (UBA)

Trabajo de Tesis para optar por el título de
Doctor en Ciencias Matemáticas



11 de octubre de 2001

# Resumen

En este trabajo se estudian ecuaciones elípticas no lineales, del tipo del p-Laplaciano. Se introduce una noción de funcional uniformemente convexa. Se encuentran soluciones, en espacios de Sobolev, aplicando principios de mini-max como el lema del paso de la montaña. Se estudian problemas en dominios no acotados, utilizando espacios de Sobolev con pesos. Se prueba la existencia de al menos tres soluciones para un problema en $\mathbb{R}^N$, con la no linealidad próxima a la resonancia. Se demuestran estimaciones de las soluciones en espacios de Lorentz. Finalmente se estudian sistemas elípticos de tipo resonante.

**Palabras Clave**: p-Laplaciano, convexidad uniforme, lema del paso de la montaña, espacios de Lorentz, resonancia, sistemas elípticos.

# Abstract

In this work we study some nonlinear elliptic equations, of the p-Laplacian type. We introduce a notion of uniformly convex functional. We find solutions, in Sobolev Spaces, using mini-max principles like the mountain-pass lemma. We also study problems in unbounded domains, using weighted Sobolev spaces. We prove the existence of at least three solutions to a problem in $\mathbb{R}^N$ near resonance. We also prove estimates fot the solutions in the Lorentz spaces. Finally we study nonlinear elliptic systems of resonant type.

**Keywords:** p-Laplacian, uniform convexity, mountain-pass lemma, Lorentz spaces, resonance, elliptic systems.

# Dedicatoria y Agradecimientos

Dedico esta tesis a mis padres Magdalena y Enrique, y a mi hermana María Cristina por todo el apoyo que me brindaron durante todos estos años. Sin su afecto, este trabajo no hubiera sido posible.

Deseo agradecer muy especialmente a mi directora Dra. María Cristina Mariani, por su paciencia, esfuerzo y dedicación. Y a los Dres. Pablo Amster y Diego Rial, por sus valiosas sugerencias y observaciones.

También deseo agradecer a la Universidad de Buenos Aires, especialmente al departamento de matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales donde se realizó este trabajo, y a la Secretaría de Ciencia y Técnica que me apoyó, otorgándome una beca de doctorado. A todos los profesores de esta casa, que a lo largo de mi carrera me han estimulado para que desarrollara mi vocación matemática, les estoy profundamente agradecido.

No quisiera olvidarme tampoco de los amigos que me acompañaron en este camino. A todos ellos tambien, muchas gracias.

Finalmente dos agradecimientos puntuales: a Mabel Cuesta por enviarme las notas de un curso sobre el p-Laplaciano, y a los desarrolladores del programa LyX que usé para escribir la tesis.

# Introducción

El operador $-\Delta_p u = \text{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ $(1 < p < \infty)$, conocido como el p-laplaciano, es una generalización del laplaciano (usual) (que corresponde al caso $p = 2$), y ha sido extensamente estudiado en la literatura como un modelo de operador elíptico no lineal en forma de divergencia. El hecho de que este operador sea no lineal (cuando $p \neq 2$) hace su estudio más difícil que el del laplaciano usual. En líneas generales podemos decir que los métodos basados en el cálculo de variaciones funcionan bien para el p-laplaciano, pero otros métodos que dependen fuertemente de la linealidad del operador (como los basados en el análisis armónico) no pueden ser usados. Al estudiar problemas que involucran el p-Laplaciano es natural trabajar en el espacio de Sobolev $W^{1,p}$, y buscar las soluciones en sentido débil.
Consideremos por ejemplo el problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= f(x,u) \quad \text{en } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio (acotado), y $f \in L^{p'}(\Omega)$. Entonces $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es una solución débil del problema (1) si

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi \, dx = \int_\Omega f(x,u)\varphi \, dx \; \forall\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Es fácil ver que esto ocurre si y sólo si $u$ es un punto crítico de la funcional $J : W_0^{1,p} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx - \int_\Omega F(x,u) \, dx \tag{2}$$

donde $F_u = f$. En la literatura ([18],[23]), principios de mini-max tales como el lema del paso de la montaña ([3]), y sus variantes han sido utilizados para encontrar puntos críticos de esta funcional.

Uno de los objetivos de este trabajo es extender esta idea a funcionales más generales, de la forma:

$$J(u) = \int_\Omega A(x, \nabla u)\, dx - \int_\Omega F(x, u)\, dx$$

Al hacer esto aparece una dificultad: para poder aplicar el lema del paso de la montaña, es necesario demostrar que $J$ satisface alguna condición de compacidad, como la condición de Palais-Smale o sus variantes. Sin embargo para el p-laplaciano esto se hace usualmente (ver [18]) utilizando la convexidad uniforme del espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ provisto de la norma:

$$\|u\|_{1,p} = \left( \int_\Omega |\nabla u|^p\, dx \right)^{1/p} \tag{3}$$

Por ello nos vemos llevados a introducir un concepto de funcional uniformemente convexa (definición 2.2.1), que generaliza la noción de norma uniformemente convexa. En el capítulo 2 se introduce este concepto, y se aplica para demostrar que el problema

$$\begin{cases} N(u) \equiv -\mathrm{div}(a(x, \nabla u)) & = f(x, u) \quad \text{en } \Omega \\ u & = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{4}$$

posee al menos una solución débil no trivial en el espacio de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$, bajo adecuadas suposiciones sobre $a$ y $f$ (teorema 2.3.1). Veremos que la hipótesis de convexidad uniforme de la funcional, permite probar que el operador $N$ verifica la llamada condición $(S_+)$ (proposición 2.2.9), que es la propiedad clave necesaria para demostrar que se verifica la condición de Palais-Smale.

También se prueba que si $f$ y $a$ son impares en el segundo argumento, el problema admite infinitas soluciones (teorema 2.4.2). La demostración de este hecho se apoya en una versión "simétrica"del lema del paso de la montaña. Nuestros resultados se pueden aplicar, por ejemplo, al operador de curvatura media generalizado

$$M_p(u) = -\mathrm{div}((1 + |\nabla u|^2)^{(p-2)/2} \nabla u)$$

cuando $p \geq 2$.

En el capítulo 3 se considera un problema análogo, pero en un dominio no acotado. Tenemos entonces una dificultad adicional, ya que la inmersión de Sobolev

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \text{ si } 1 \leq p < N,\ p \leq q < p^*$$

no es compacta si el dominio no es acotado. Tener inmersiones compactas resulta fundamental para los argumentos variacionales, y en particular para probar que se verifica la condición de Palais-Smale. Como veremos, es posible resolver esta dificultad trabajando en espacios de Sobolev con pesos. De esta manera obtenemos un resultado (teorema 3.3.1), que generaliza el obtenido en ([24]) para el caso en que $p = 2$, y $A$ es una forma cuadrática definida positiva.
En el capítulo 4 se aplican estas ideas para demostrar que un problema con el p-laplaciano en $\mathbb{R}^N$, en el que la no-linealidad "está próxima a la resonancia" admite al menos tres soluciones distintas (teorema 4.1.3). Esto generaliza los resultados obtenidos en [31] para el caso de un dominio acotado. Nuevamente, la principal dificultad es que la inmersión de Sobolev

$$D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$$

donde $D^{1,p}(\mathbb{R}^N$ es la completación de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ con respecto a la norma (3), no es compacta. Sin embargo probamos que $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ está compactamente incluido en espacios $L^q$ (con $q < p^*$) con un peso conveniente (proposición 4.2.1). También utilizamos un teorema sobre la existencia y simplicidad del primer autovalor para el p-laplaciano con pesos (de [28]).
En el capítulo 5 se demuestra que algunas acotaciones clásicas de las soluciones de ecuaciones del tipo p-laplaciano en los espacios $L^p$, pueden generalizarse a los espacios de Lorentz. Los espacios de Lorentz, introducidos en [20], son una generalización de los espacios de Lebesgue que son ampliamente utilizados en el análisis armónico, en relación con los teoremas de interpolación ([30], [26]). La demostración se basa en la técnica de truncamiento de Stampacchia ([27]), y en una versión de la desigualdad de Sobolev en los espacios de Lorentz ([29]).
Finalmente en el capítulo 6, consideramos un sistema elíptico de tipo gradiente, esto es, de la forma:

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= F_u(x,u,v) \quad \text{en} \quad \Omega \\ -\Delta_q v &= F_v(x,u,v) \quad \text{en} \quad \Omega \\ u = v &= 0 \qquad\qquad\quad \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{5}$$

y nos interesamos por el caso en que el sistema es "de Tipo Resonante", ésto es, de acuerdo a la nomenclatura introducida en [5]:

$$|F(x,u,v)| \le C(|u|^p + |v|^q)$$

En dicho trabajo L. Boccardo y D. de Figueiredo introdujeron, para evitar la resonancia, una hipótesis relacionada con el primer autovalor de un sistema elíptico asociado. Nosotros probamos, en primer lugar, que este tipo de sistema admite infinitos autovalores. Además encontramos nuevas condiciones para la existencia de soluciones de (5), que involucran el primer y el segundo autovalor del problema asociado. Para hacer esto aplicamos dos teoremas abstractos de mini-max ([2] y [11]).

# Índice General

# Algunas Notaciones Utilizadas

| | |
|---|---|
| $\mathbb{R}^N$ | Espacio Euclideo $N$-dimensional |
| $\Omega$ | Un abierto de $\mathbb{R}^N$ |
| $p' = \frac{p}{p-1}$ | Exponente conjugado de $p$ para la desigualdad de Hölder |
| $W^{1,p}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)$ | Espacios de Sobolev |
| $p^* = \frac{pN}{N-p}$ | Exponente crítico de Sobolev |
| Condición $(PS)$ | Condición de Palais-Smale |
| $x_n \rightharpoonup x$ | $x_n$ converge débilmente a $x$ |
| $X^*$ | El dual del espacio de Banach $X$ |
| $\Delta_p u \equiv \operatorname{div}(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u)$ | El p-Laplaciano |
| $\lambda_{1,p}(\Omega)$ | El primer autovalor del p-Laplaciano con condiciones de Dirichlet |

## Espacios Funcionales

| | |
|---|---|
| $C_0^1(\Omega)$ | Funciones $C^1$ con soporte compacto en $\Omega$ |
| $L^p(X,\mu),\ L^p(\Omega)\ (1 \le p \le \infty)$ | Espacios de Lebesgue |
| $W^{1,p}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)$ | Espacios de Sobolev |
| $L^p_w(\Omega) = L^p(\Omega; w)$ | Espacios de Lebesgue con pesos |
| $W^{1,p}(\Omega; v_0, v_1), W_0^{1,p}(\Omega; v_0, v_1)$ | Espacios de Sobolev con pesos |
| $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ | Completación de $C_0^1(\mathbb{R}^N)$ con respecto a la norma $\|\| \cdot \|\|_{1,p}$ |
| $L^{p,q}(X,\mu), L^{p,q}(\Omega)$ | Espacios de Lorentz |

# Capítulo 1

# Definiciones y Resultados Conocidos

En este capítulo presentamos una colección de definiciones y resultados que necesitaremos en el resto de nuestro trabajo. El propósito de este capítulo es facilitar la lectura de este trabajo, haciéndolo más autocontenido. En general son resultados bien conocidos, por eso omitiremos las demostraciones, que se pueden encontrar en la bibliografía citada.

## 1.1 Espacios de Sobolev

Al estudiar ecuaciones que involucran el p-laplaciano por métodos variacionales, es natural trabajar en el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ cuya definición es la siguiente:

**Definición 1.1.1** *Sean $1 \le p < \infty$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto. Dada $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ se dice que $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ es la derivada $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ (donde $1 \le i \le N$) en sentido débil si*

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)\, dx = -\int_\Omega g(x)\phi(x)\, dx\ \forall\ \varphi \in C^1_0(\Omega)$$

*donde $C^1_0(\Omega)$ denota el espacio de funciones $C^1$ con soporte compacto en $\Omega$.*

*El espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ se define como el conjunto de funciones de $L^p(\Omega)$ tales que admiten derivadas débiles $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ pertencientes a $L^p(\Omega)$ para todo $i$ con $1 \le i \le N$. Provisto de la norma*

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left\{ \|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p_{L^p(\Omega)} \right\}^{1/p}$$

*$W^{1,p}(\Omega)$ resulta un espacio de Banach. Para tener en cuenta las condiciones de borde de tipo Dirichlet, se introduce el espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ como la clausura de $C_0^1(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$.*

Las propiedades fundamentales de los espacios de Sobolev que necesitamos son las siguientes:

**Teorema 1.1.2 (Inmersión de Sobolev)** *Si $1 \le p < N$, existe una constante $C = C(N,p) > 0$ tal que*

$$\left( \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} \right)^{1/p^*} \le C \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^p \right)^{1/p} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

*donde $p^* = \frac{pN}{N-p}$ se conoce como exponente critico de Sobolev. En consecuencia tenemos la inmersión continua:*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$$

*Interpolando con el hecho de que $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ (por definición) deducimos que:*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N)\ \forall\ q \text{ tal que } p \le q \le p^*$$

*también con inmersión continua. En el caso límite $p = N$ se tiene la inmersión continua:*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N)\ \forall q \text{ tal que } p \le q < \infty$$

**Teorema 1.1.3 (Morrey)** *Si $p > N$ entonces $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N)$ con inmersión continua. Además para toda $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ se verifica que:*

$$|u(x) - u(y)| \le C|x-y|^\alpha \|\nabla u\|_{L^p} \text{ c.t. } x, y \in \mathbb{R}^N$$

*con $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ y $C = C(p,N)$ una constante. En particular cada $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tiene un representante continuo y en este sentido $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset C(\mathbb{R}^N)$.*

**Corolario 1.1.4** *Para cualquier $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ se tienen las inmersiones continuas:*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^q(\Omega) & si \quad 1 \leq p < N \quad y \quad p \leq q \leq p^* \\ L^q(\Omega) & si \quad p = N \quad y \quad p \leq q < \infty \\ C(\overline{\Omega}) & si \quad p > N \end{cases} \tag{1.1}$$

*Si $\Omega$ es acotado y $\partial\Omega$ es $C^1$ se verifica que:*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^q(\Omega) & si \quad 1 \leq p < N \quad y \quad 1 \leq q \leq p^* \\ L^q(\Omega) & si \quad p = N \quad y \quad 1 \leq q < \infty \\ C(\overline{\Omega}) & si \quad p > N \end{cases} \tag{1.2}$$

*con inmersión continua.*

Para aplicar los métodos variacionales es fundamental saber cuando estas inmersiones son compactas:

**Teorema 1.1.5 (Rellich-Kondrachov)** *Si $\Omega$ es acotado y $\partial\Omega$ es $C^1$ se verifica que:*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^q(\Omega) & si \quad 1 \leq p < N \quad y \quad 1 \leq q < p^* = \frac{pN}{N-p} \\ L^q(\Omega) & si \quad p = N \quad y \quad 1 \leq q < \infty \\ C(\overline{\Omega}) & si \quad p > N \end{cases}$$

*con inmersión compacta.*

Referencias sobre espacios de Sobolev: [1],[7[,[12]

## 1.2 Funciones Convexas y Operadores Monótonos

**Definición 1.2.1** *Sea $X$ un espacio de Banach. Se dice que una funcional $A : X \to \mathbb{R}$ es **convexa** si:*

$$A((1-t)u + tv) \leq (1-t)A(u) + tA(v) \, \forall u, v \in X, t \in [0,1]$$

*o sea si el epigrafo de $A$ : $\text{Epi}(A) = \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : y \geq A(x)\}$ es convexo.*

**Definición 1.2.2** *Sea $X$ un espacio de Banach, $X^*$ su dual. Un operador (no lineal) $a : X \to X^*$ se dice* ***monótono*** *si*

$$\langle a(u) - a(v), u - v \rangle \geq 0 \, \forall u, v \in X$$

*$a$ se dice* ***estrictamente monótono*** *si*

$$u, v \in X, u \neq v \Rightarrow \langle a(u) - a(v), u - v \rangle > 0$$

*Diremos que $a : X \to X^*$ es* ***p-fuertemente monótono*** *(donde $p \geq 2$ ) si verifica que:*

$$\langle a(u) - a(v), u - v \rangle \geq c \, \|u - v\|^p \; \forall u, v \in X$$

*siendo $c > 0$ una constante.*

Una manera de obtener operadores monótonos es la siguiente:

**Proposición 1.2.3** *Sea $X$ un espacio de Banach y $A : X \to \mathbb{R}$ una funcional diferenciable en el sentido de Frechet, siendo $a = DA = A' : X \to X^*$ su derivada. Entonces $A$ es convexa si y sólo si $a$ es monótona.*

Por ejemplo si $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ y $A(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p$ entonces $A$ es convexa, $a(u) = -\Delta_p u$, por lo que el p-laplaciano (como operador de $W_0^{1,p}(\Omega)$ en su dual) es monótono.

## 1.3 Débil Semicontinuidad Inferior

**Definición 1.3.1** *Sea $X$ un espacio de Banach y $A : X \to \mathbb{R}$:*

- Se dice que $A$ es **coerciva** si $A(x) \to +\infty$ cuando $\|x\| \to \infty$ .
- Se dice que $A$ es **débilmente semicontinua inferiormente** (débilmente s.c.i.) si es s.c.i. para la topología débil de $X$, o sea: si para cada $c \in \mathbb{R}$ el conjunto $A^{-1}((c, +\infty))$ es abierto en la topología débil de $x$, o lo que es lo mismo $A^{-1}((-\infty, c])$ es cerrado. En términos de redes: si $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ es una red y $x_\alpha \rightharpoonup x$, entonces $A(x) \leq \liminf A(x_\alpha)$

**Proposición 1.3.2** *Sea $X$ un espacio de Banach. Si $A : X \to \mathbb{R}$ es convexa y continua, entonces es débilmente semicontinua inferiormente.*

**Teorema 1.3.3** *Sea $X$ un espacio de Banach reflexivo y $A \in C^1(X, \mathbb{R})$ una funcional que es coerciva y débilmente semicontinua inferiormente. Entonces $A$ alcanza un mínimo en $X$*

Referencias sobre Operadores Monótonos: [17]

### 1.3.1 Convexidad Uniforme

**Definición 1.3.4** *Se dice que un espacio de Banach $X$ es* ***uniformemente convexo*** *si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in X$ , $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ y $\|x - y\| \geq \varepsilon$ entonces $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 - \delta$. Notamos que esta propiedad depende de la norma que utilizamos en $X$ (y no sólo de su topología): un espacio puede ser uniformemente convexo con una norma y no serlo con otra norma equivalente.*

**Teorema 1.3.5** *Todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo.*

**Proposición 1.3.6** *Sea $X$ un espacio de Banach uniformemente convexo, y $x_n$ una sucesión en $X$ tal que $x_n \rightharpoonup x$ (en la topología débil de $X$). Si* $\limsup \|x_n\| \leq \|x\|$, *entonces $x_n \to x$ en la topología fuerte.*

**Teorema 1.3.7 (Desigualdades de Clarkson)** . *Sean $f, g \in L^p(X, \mu)$ entonces:*

1. *Si $2 \leq p < \infty$ entonces:*

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p}^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_{L^p}^p \leq \frac{1}{2}\left(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p\right)$$

2. *Si $1 < p \leq 2$ entonces:*

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p}^{p'} + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_{L^p}^{p'} \leq \left[\frac{1}{2}\|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{2}\|g\|_{L^p}^p\right]^{1/(p-1)}$$

***Corolario 1.3.8*** *Si $1 < p < \infty$, $L^p(X, \mu)$ es uniformemente convexo (con la norma usual). $W_0^{1,p}(\Omega)$ es uniformemente convexo si usamos la norma* $\|u\|_{1,p} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)^{1/p}$.

Referencias sobre espacios uniformemente convexos: [1],[7],[18]

# 1.4 Teorema del Paso de la Montaña

**Definición 1.4.1** *Sea $X$ un espacio de Banach y $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Se dice que $\varphi$ satisface la condición de Palais-Smale a nivel $c$ $(PS)_c$ si toda sucesión $(u_n) \subset X$ tal que $\varphi(u_n) \to c$ y $\varphi'(u_n) \to 0$, contiene una subsucesión convergente.*

En [3] Ambrosetti y Rabinowitz demostraron el siguiente teorema:

**Teorema 1.4.2** *(del Paso de la montaña, [3]) Sean $X$ un espacio de Banach $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$, $v \in X$ y $r > 0$ tales que $\|v\| > r$ y*

$$b = \inf_{\|u\|=r} \varphi(u) > \varphi(0) \geq \varphi(v)$$

*Si $\varphi$ satisface la condición $(PS)_c$ con*

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} \varphi(\gamma(t))$$

*donde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = v\}$, entonces $c$ es un valor crítico de $\varphi$ .*

En este trabajo utilizaremos (además de este teorema), diversas generalizaciones y variantes, que enunciaremos oportunamente. Existe una amplia literatura sobre este tema (ver por ejemplo [32], [25]).

# 1.5 Autovalores del p-Laplaciano

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado, y $1 < p < \infty$. Consideramos el problema de autovalores:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.3}$$

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Definamos:

$$\lambda_{1,p} = \lambda_{1,p}(\Omega) = \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^p : u \in S_p \right\} \tag{1.4}$$

donde
$$S_p = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \int_\Omega |u|^p dx = 1 \right\}$$

La compacidad de la inmersión $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ permite probar este ínfimo se alcanza para una función $u = \varphi_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ con $\int_\Omega |\varphi_1|^p\, dx = 1$. En particular $\lambda_{1,p} > 0$. Tenemos la desigualdad de Poincaré:

$$\int_\Omega |u|^p \leq \frac{1}{\lambda_{1,p}} \int_\Omega |\nabla u|^p \; \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

**Proposición 1.5.1** *1. $\lambda_{1,p}$ es el menor autovalor de (1.3), y para cualquier $v \in S_p$, $v$ realiza el ínfimo en (1.4) si y sólo si es una autofunción asociada a $\lambda_{1,p}$.*

*2. Las autofunciones asociadas a $\lambda_{1,p}$ son o bien positivas, o bien negativas en $\Omega$.*

*3. $\lambda_{1,p}$ es simple en el sentido de que las autofunciones asociadas a $\lambda_{1,p}$ forman un subespacio unidimensional.*

Definimos el espectro del p-laplaciano $\sigma_p(\Omega)$ como el conjunto de los $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales el problema (1.3) posee una solución $u$ no nula. Entonces tenemos:

**Proposición 1.5.2** *$\lambda_{1,p}$ es aislado, esto es: existe $\delta > 0$ tal que $(\lambda_{1,p}, \lambda_{1,p} + \delta) \cap \sigma_P(\Omega) = \emptyset$*

Utilizando la teoría de Ljusternik-Schnirelman es posible probar que (1.3) admite una secuencia no acotada de autovalores. En el capítulo 6 haremos esto para un sistema elíptico análogo.

Referencias sobre los autovalores del p-laplaciano: [9]

## 1.6 Operadores de Nemitsky

En muchos problemas de análisis no lineal es importante saber cuando un operador $u \mapsto f(x,u)$, llamado operador de Nemitsky, es continuo en los espacios $L^p$. El siguiente teorema da condiciones para que esto ocurra:

**Proposición 1.6.1** *Asumamos que* $|\Omega| < \infty$, $1 \leq p, r < \infty$, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es una función de Caratheodory, que verifica la condición de crecimiento:*

$$|f(x,u)| \leq c(1 + |u|^{p/r})$$

*donde* $c > 0$ *es una constante. Entonces, para cada* $u \in L^p(\Omega)$, $f(\cdot, u) \in L^r(\Omega)$ *y el operador:*

$$N_f : L^p(\Omega) \to L^r(\Omega) : u \mapsto f(x,u)$$

*es continuo.*

Este resultado permite probar por ejemplo lo siguiente:

**Proposición 1.6.2** *Sean* $q \geq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *con* $|\Omega| < \infty$, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función de Caratheodory que verifica la condición de crecimiento*

$$|f(x,s)| \leq c(1 + |s|^{q-1}) \ (c > 0)$$

*Entonces la funcional*

$$J(u) = \int_\Omega F(x,u)\, dx$$

*donde*

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\, dt$$

*es de clase* $C^1(L^q(\Omega))$, *y su derivada en el sentido de Frechét viene dada por:*

$$\langle J'(u), v\rangle = \int_\Omega f(x,u) \cdot v\, dx \ \forall v \in L^q(\Omega)$$

La demostración de la proposición 1.6.1 se basa en el siguiente lema, que también utilizaremos en este trabajo:

**Lema 1.6.3** *Sea* $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ *un espacio de medida y* $1 \leq p < \infty$ . *Si* $u_n \to u$ *en* $L^p(\Omega, \mu)$ *entonces existe una sub-sucesión* $(u_{n_k})$ *y una función* $g \in L^p(\Omega, \mu)$ *tales que*

$$u_n(x) \to u(x) \text{ en c.t.p } x \in \Omega$$

*y* $|u_n(x)|, |u(x)| \leq g(x)$.

Diversas generalizaciones de la poposición 1.6.1 son posibles para el caso en que $\Omega$ tiene medida infinita. En el capítulo 3 demostraremos una versión de esta proposición trabajando en espacios con pesos.

Referencias sobre operadores de Nemitsky: [32],[25]

# Capítulo 2

# Ecuaciones del Tipo p-Laplaciano

## 2.1 Introducción

En la literatura el lema del paso de la montaña ha sido aplicado a ecuaciones cuasilineales de la forma:

$$-\Delta_p u = f(x, u)$$

En este capítulo consideraremos ecuaciones que involucran un operador elíptico no lineal en forma de divergencia:

$$-\mathrm{div}(a(x, \nabla u)) = f(x, u)$$

Tales operadores aparecen, por ejemplo, cuando escribimos el p-laplaciano usando coordenadas curvilineas. Para aplicar a estas ecuaciones el teorema del paso de la montaña o sus variantes, debemos verificar que la funcional asociada verifica la condición de Palais-Smale. En el caso del p-laplaciano esto se hace utilizando la convexidad uniforme de $W_0^{1,p}(\Omega)$ con la norma

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{1,p} = \left( \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \right)^{1/p}$$

Para extender esta idea a ecuaciones más generales, introduciremos una noción de funcional uniformemente convexa.

## 2.2 Funcionales Uniformemente Convexas

En esta sección $X$ denotará un espacio de Banach.

**Definición 2.2.1** *Diremos que la funcional convexa $A : X \to \mathbb{R}$ es uniformemente convexa sobre el conjunto (convexo) $C \subset X$ si dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que*

$$A\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}A(x) + \frac{1}{2}A(y) - \delta(\varepsilon)$$

*si $x, y \in C$ y $\|x-y\| > \varepsilon$. Si $A$ es uniformemente convexa sobre cada bola de $X$, diremos que $A$ es localmente uniformemente convexa.*

**Observación 2.2.2** *Decir que $X$ es uniformemente convexo significa que su norma es localmente uniformemente convexa.*

**Lema 2.2.3** *Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función $C^1$. Supongamos que $F'$ es fuertemente p-mónotona, esto es:*

$$\frac{F'(y) - F'(x)}{(y-x)^{p-1}} \geq c \;\forall x, y \in \mathbb{R} \text{ tales que } y > x$$

*siendo $p > 2$, entonces $F$ verifica la siguiente desigualdad de tipo Clarkson:*

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2}F(y) - \frac{c}{2^{p+1}}|x-y|^p \tag{2.1}$$

**Dem:** Sea $z = \frac{x+y}{2}$. Tenemos

$$F(y) - F(z) = \int_z^y F'(t)dt$$

$$F(z) - F(x) = \int_x^z F'(s)ds$$

Restando y haciendo el cambio de variable $t = s + \frac{y-x}{2}$ concluimos que:

$$\frac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2}F(y) - F(z) = \frac{1}{2}\int_x^z \left[F'\left(s + \frac{y-x}{2}\right) - F'(s)\right] ds$$

Pero

$$F'\left(s + \frac{y-x}{2}\right) - F'(s) \geq c\left(\frac{y-x}{2}\right)^{p-1}$$

Deducimos que:

$$\frac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2}F(y) - F(z) \geq \frac{c}{2}\left(\frac{y-x}{2}\right)^p$$

**Ejemplo:** $x \mapsto x^p$ fuertemente p-monótona si $p \geq 2$.

**Definición 2.2.4** *Sea $A : X \to \mathbb{R}$ una funcional. Si $A$ verifica una desigualdad de la forma*

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}A(x) + \frac{1}{2}A(y) - c\|x-y\|^p \tag{2.2}$$

*para alguna constante $c > 0$, diremos que es* **p-uniformemente-convexa.**

**Corolario 2.2.5** *Supongamos que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifica que $|F(x)| \leq c(1 + |x|^p)$, y es fuertemente p-monótona, y que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado. Para $u \in L^p(\Omega)$ definamos $A(u) = \int_\Omega F(u)$ entonces $A$ es una funcional localmente uniformemente convexa.*

El siguiente lema es una generalización de la primera desigualdad de Clarkson

**Lema 2.2.6** *Supongamos que $A$ es una función $p-$uniformemente convexa y que $\alpha > 1$, entonces $A(x)^\alpha$ es $q$ - uniformemente convexa donde $q = \alpha p$.*

**Dem:** Como $A$ es por hipótesis $p$-uniformemente convexa, existe una constante $c > 0$ tal que:

$$A\left(\frac{x+y}{2}\right) + c\left|\frac{x-y}{2}\right|^p \leq \frac{1}{2}A(x) + \frac{1}{2}A(y)$$

Como $\alpha > 1$ tenemos

$$s^\alpha + t^\alpha \leq (s+t)^\alpha \, \forall s, t \geq 0$$

eligiendo $s = A\left(\frac{x+y}{2}\right)$ y $t = c\left|\frac{x-y}{2}\right|^p$ tenemos:

$$A\left(\frac{x+y}{2}\right)^\alpha + c^\alpha\left|\frac{x-y}{2}\right|^q \leq \left[A\left(\frac{x+y}{2}\right) + c\left|\frac{x-y}{2}\right|^p\right]^\alpha$$

Siendo $x \mapsto x^\alpha$ creciente, deducimos que:

$$A\left(\frac{x+y}{2}\right)^\alpha + c^\alpha\left|\frac{x-y}{2}\right|^q \leq \left[\frac{1}{2}A(x) + \frac{1}{2}A(y)\right]^\alpha$$

Ahora como $x \mapsto x^\alpha$ es convexa, tenemos que:

$$A\left(\frac{x+y}{2}\right)^\alpha + c^\alpha\left|\frac{x-y}{2}\right|^q \leq \frac{1}{2}A(x)^\alpha + \frac{1}{2}A(y)^\alpha$$

Lo que precisamente dice que $A^\alpha$ es q-uniformemente convexa.

**Ejemplos:** 1) Si tomamos $A(x) = |x|^2$ vemos que $|x|^p$ es p-uniformemente convexa si $p \geq 2$, de lo que se obtiene la desigualdad de Clarkson usual. De hecho tenemos:

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|^p + \left|\frac{x-y}{2}\right|^p \leq \frac{|x|^p}{2} + \frac{|y|^p}{2}$$

2) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz simétrica definida positiva y $Q(x) = \langle Ax, x\rangle$ es la forma cuadrática asociada, entonces $Q$ es 2-uniformemente convexa. De hecho por la fórmula de polarización:

$$Q\left(\frac{x+y}{2}\right) + Q\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{1}{2}Q(x) + \frac{1}{2}Q(y)$$

Pero

$$Q\left(\frac{x-y}{2}\right) \geq c|x-y|^2$$

ya que $A$ es definida positiva. Se sigue que

$$Q\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}Q(x) + \frac{1}{2}Q(y) - c|x-y|^2$$

lo que dice que $Q$ es uniformemente 2-convexa. Por el lema anterior $Q(x)^{p/2}$ es uniformemente p-convexa cuando $p \geq 2$.

Una manera más general de obtener funcionales uniformemente 2-convexas se da en el siguiente lema:

**Lema 2.2.7** *Sea $A : X \to \mathbb{R}$ una funcional de clase $C^2$. Supongamos que $D^2A$ es uniformemente definida positiva en el siguiente sentido: existe una constante $c > 0$ tal que*

$$D^2A(x)(\xi,\xi) \geq c|\xi|^2 \ \forall\, x, \xi \in X$$

*entonces $A$ es uniformemente 2-convexa.*

**Dem:** Tomemos $x, y \in X$ y definamos $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ por $g(t) = A((1-t)x + ty)$. Entonces por la regla de la cadena:

$$g'(t) = DA((1-t)x + ty)(y - x)$$

$$g''(t) = D^2A((1-t)x+ty)(y-x, y-x) \geq c|x-y|^2$$

por la hipótesis. Del teorema del valor medio se deduce que si $s, t \in [0,1]$

$$\frac{g'(s)-g'(t)}{s-t} = g''(\theta) \geq c|x-y|^2$$

(donde $\theta \in [0,1]$ ). Por el lema (2.2.3) deducimos que:

$$g\left(\frac{s+t}{2}\right) \leq \frac{1}{2}g(s) + \frac{1}{2}g(t) - \frac{c}{4}|x-y|^2|s-t|^2$$

Tomando $s=1$ y $t=0$ esto nos dice que:

$$A\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}A(x) + \frac{1}{2}A(y) - \frac{c}{4}|x-y|^2$$

Es decir: $A$ es 2-uniformemente convexa.

### 2.2.1 La condición $(S)_+$

**Definición 2.2.8** *Se dice que un operador $a : X \to X^*$ verifica la condición $(S_+)$ si: $x_n \rightharpoonup x$ y $\limsup_{n\to\infty} \langle a(x_n), x_n - x\rangle \leq 0$ implican que $x_n \to x$ fuertemente.*

**Proposición 2.2.9** *Sea $A : X \to \mathbb{R}$ una funcional $C^1$ que es localmente uniformemente convexa y localmente acotada. Entonces $a = DA : X \to X^*$ verifica la condición $(S_+)$.*

**Dem:** Sea $(x_n)$ una sucesión en $X$ tal que $x_n \rightharpoonup x$ y

$$\limsup_{n\to\infty} \langle a(x_n), x_n - x\rangle \leq 0$$

Como $(x_n)$ es débilmente convergente, es acotada, digamos que $\|x_n\| < R$. Como $A$ es localmente acotada deducimos que $A(x_n)$ es acotada. Pasando a una subsucesión podemos asumir que $A(x_n) \to c$. Por la débil semicontinuidad inferior:

$$A(x) \leq \liminf A(x_n) = c$$

y por otro lado como $A$ es convexa, su gráfico está por encima de su hiperplano tangente en $x_n$:

$$A(x) \geq A(x_n) + \langle a(x_n), x - x_n\rangle$$

Usando entonces la hipótesis de que $\limsup_{n\to\infty} \langle a(x_n), x_n - x\rangle \leq 0$ deducimos que: $A(x) \geq c$. O sea que: $A(x) = c$. Por otro lado $\frac{x_n+x}{2} \rightharpoonup x$, y utilizando nuevamente la débil semicontinuidad inferior, tenemos que

$$c = A(x) \leq \liminf A\left(\frac{x + x_n}{2}\right) \tag{2.3}$$

Si suponemos que $x_n$ no tiende a $x$ entonces existe un $\varepsilon > 0$ y una subsucesión $x_{n_k}$ que verifica $\|x - x_{n_k}\| \geq \varepsilon$. Sea $\delta > 0$ el que corresponde a $\varepsilon$ por la convexidad uniforme de $A$ en la bola $B(0, R)$. Entonces:

$$\frac{1}{2}A(x) + \frac{1}{2}A(x_{n_k}) - A\left(\frac{x + x_{n_k}}{2}\right) \geq \delta(\varepsilon)$$

Cuando $k \to \infty$ tenemos que

$$\limsup A\left(\frac{x + x_{n_k}}{2}\right) \leq c - \delta(\varepsilon)$$

lo que es una contradicción con (2.3).

## 2.3 Aplicaciones a ecuaciones del tipo p-laplaciano

**Teorema 2.3.1** *Asumamos que se verifican las siguientes condiciones:*

1. $p \geq 2$ *y* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *es un dominio acotado.*

2. *Sea* $A : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $A = A(x, \xi)$ *una función continua en* $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N$, *y con derivada continua respecto a* $\xi$, $a = DA = A'$ *que verifica:*

   *(a)* $A(x, 0) = 0 \;\forall\; x \in \Omega$.

   *(b)* $a$ *satisface la condición de crecimiento:*

   $$|a(x, \xi)| \leq c_1(1 + |\xi|^{p-1}) \;\forall\, x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^N \tag{2.4}$$

   *para alguna constante* $c_1 > 0$.

   *(c)* $A(x, \cdot)$ *es uniformemente p-convexa uniformemente en* $x$*: Existe una constante* $k > 0$ *tal que:*

   $$A\left(x, \frac{\xi + \eta}{2}\right) \leq \frac{1}{2}A(x, \xi) + \frac{1}{2}A(x, \eta) - k|\xi - \eta|^p \;\forall\, x \in \overline{\Omega}\ \xi, \eta \in \mathbb{R}^N$$

(d) *A es p-subhomogénea:*

$$0 < a(x,\xi)\cdot\xi \le pA(x,\xi) \ \ \forall\, x\in\overline{\Omega},\ \xi\in\mathbb{R}^N \tag{2.5}$$

(e) *A satisface la condición de elipticidad:*

$$A(x,\xi) \ge \Lambda|\xi|^p \,\forall\ \ x\in\overline{\Omega}, \xi\in\mathbb{R}^N \tag{2.6}$$

*siendo* $\Lambda > 0$ *una constante.*

3. $f : \overline{\Omega}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *es una función continua que verifica:*

(a) *La condición de crecimiento subcrítico:*

$$|f(x,s)| \le c(1+|s|^{q-1})\ \forall\, x\in\Omega, s\in\mathbb{R} \tag{2.7}$$

*donde* $c > 0$, *y* $p < q < p^* = \frac{Np}{N-p}$ *si* $p < N$, *o* $p < q < +\infty$ *si* $p \ge N$.

(b) *La condición de Ambrosetti-Rabinowitz:* $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\,dt$ *es* $\theta$*-superhomogénea en infinito, es decir que existe* $s_0 > 0$ *tal que:*

$$0 < \theta F(x,s) \le f(x,s)s\ \forall s\in\mathbb{R}\ \textit{tal que}\, |s| \ge s_0, x\in\overline{\Omega} \tag{2.8}$$

*donde* $\theta > p$.

4. *Asumimos que*

$$\limsup_{s\to 0}\frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s} \le \lambda \tag{2.9}$$

*uniformemente para* $x\in\Omega$, *donde*

$$\lambda < \lambda_{1,p}(\Omega)p\Lambda$$

*Entonces el problema de Dirichlet:*

$$\left\{\begin{array}{lcll} -\mathrm{div}(a(x,\nabla u)) & = & f(x,u) & en\ \ \Omega \\ u & = & 0 & en\ \ \partial\Omega \end{array}\right. \tag{2.10}$$

*tiene al menos una solución débil no trivial en* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

**Ejemplos:**

1. Si tomamos $A(x,s) = \frac{1}{p}|s|^p$, $a(x,s) = |s|^{p-2}s$, con lo que obtenemos el p-laplaciano usual.

2. Supongamos que tenemos una matriz $(a^{ij}(x)) \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{N\times N})$ simétrica y definida positiva:
$$a^{ij}(x) = a^{ji}(x)$$
$$\sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)\ \xi_i\xi_j \geq c|\xi|^2\ \forall\ x \in \overline{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}^N\ \ c > 0$$
entonces tomando
$$A(x,\xi) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\ \xi_i\xi_j$$
vemos que el teorema puede aplicarse al operador elíptico lineal en forma de divergencia
$$L[u] = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a^{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$$

3. Si consideramos $A(x,s) = \frac{1}{p}(1+|s|^2)^{p/2} - 1$ obtenemos el operador de curvatura media generalizado
$$M_p(u) = \operatorname{div}((1+|\nabla u|^2)^{(p-2)/2}\nabla u)$$
Para ver que $A$ es p-uniformemente convexa, notemos que $1+|s|^2$ es uniformemente 2 -convexa, luego por la proposición 2.2.6 $(1+|s|^2)^{p/2}$ es uniformemente p-convexa, y por lo tanto $A$ es uniformemente p-convexo. Para $p = 1$ (que no está incluido en nuestros resultados), este operador aparece en la ecuación de curvatura media prescripta para una superficie en forma no paramétrica. En [19], E. Lami Dozo y M.C. Mariani aplicaron una variante del lema del paso de la montaña a la ecuación de curvatura prescripta en forma paramétrica.

### 2.3.1 Algunas observaciones sobre nuestras hipótesis

**Observación 2.3.2** *Integrando (2.4) deducimos que $A$ verifica la condición de crecimiento:*

$$|A(x,\xi)| \leq c_2(|\xi| + |\xi|^p) \ \ \forall\, x \in \overline{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}^N \tag{2.11}$$

*para alguna constante $c_2 > 0$.*

En efecto, tenemos:

$$A(x,\xi) = \int_0^1 \frac{d}{dt} A(x,t\xi)dt = \int_0^1 a(x,t\xi)\cdot\xi\, dt$$

Y usando la hipótesis (2.4) deducimos que:

$$A(x,\xi) \leq c_1 \int_0^1 (1 + |\xi|^{p-1}t^{p-1})|\xi|dt \leq c_1|\xi| + \frac{c_1}{p}|\xi|^p$$

**Observación 2.3.3** *La condición (2.5) implica que*

$$A(x,s\xi) \leq A(x,\xi)s^p \ \forall s \geq 1, x \in \overline{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}^N$$

Definimos $g(t) = A(x,t\xi)$, entonces

$$g'(t) = a(x,t\xi)\cdot\xi = \frac{1}{t}a(x,t\xi)\cdot(t\xi) \leq \frac{p}{t}A(x,t\xi) = \frac{p}{t}g(t)$$

$$\frac{g'(t)}{g(t)} \leq \frac{p}{t}$$

Integrando entre 1 y $s$ tenemos:

$$\log g(s) - \log g(1) \leq p \log s$$

luego

$$\frac{g(s)}{g(1)} \leq s^p$$

Lo que implica que

$$A(x,s\,\xi) \leq A(x,\xi)s^p$$

Análogamente tenemos:

**Observación 2.3.4** *La condición (2.8) implica que:*

$$F(x,sv) \geq F(x,v)s^\theta \,\forall v \text{ tal que } |v| \geq s_0,\ s \geq 1, x \in \overline{\Omega}$$

## 2.3.2 Prueba del teorema 2.3.1

Bajo las condiciones del teorema 2.3.1, definimos la funcional:

$$J(u) = \int_\Omega A(x, \nabla u) - \int_\Omega F(x, u)$$

$J : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ está bien definida y es de clase $C^1$ (ver proposición 1.6.2). Su derivada es dada por:

$$\langle J'(u), \varphi \rangle = \int_\Omega a(x, \nabla u) \cdot \nabla\varphi - \int_\Omega f(x, u)\varphi$$

Para demostrar el teorema 2.3.1 aplicaremos a esta funcional el teorema del paso de la Montaña. Dividiremos la verificación de las condiciones necesarias en dos lemas.

**Lema 2.3.5** *J verifica la condición de Palais-Smale.*

**Dem:** Si $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ es una sucesión de Palais-Smale, verifica que: $J(u_n) \to c$ y $J'(u_n) \to 0$. Primero probaremos que $(u_n)$ es acotada:

$$J(u_n) - \frac{1}{\theta} \langle J'(u_n), u_n \rangle = \int_\Omega \left[ A(x, \nabla u_n) - \frac{1}{\theta} a(x, \nabla u_n) \cdot \nabla u_n \right] +$$

$$\int_\Omega \left[ \frac{1}{\theta} f(x, u_n) u_n - F(x, u_n) \right]$$

Por la condición (2.5), vemos que:

$$J(u_n) - \frac{1}{\theta} \langle J'(u_n), u_n \rangle \geq \left(1 - \frac{p}{\theta}\right) \int_\Omega A(x, \nabla u_n) +$$

$$\int_\Omega \left[ \frac{1}{\theta} f(x, u_n) u_n - F(x, u_n) \right]$$

luego

$$\left(1 - \frac{p}{\theta}\right) \int_\Omega A(x, \nabla u_n) \leq J(u_n) - \frac{1}{\theta} \langle J'(u_n), u_n \rangle$$

$$- \int_{\{x \in \Omega : |u_n(x)| > s_0\}} \left[ \frac{1}{\theta} f(x, u_n) u_n - F(x, u_n) \right] + M|\Omega|$$

donde $M = \sup\{\left|\frac{1}{\theta}f(x,s)s - F(x,s)\right| : x \in \overline{\Omega}, |s| \leq s_0\}$. Por la condición de Ambrosetti-Rabinowitz (2.8), deducimos que:

$$\left(1 - \frac{p}{\theta}\right) \int_\Omega A(x, \nabla u_n) \leq J(u_n) - \frac{1}{\theta} \langle J'(u_n), u_n \rangle + M|\Omega|$$

Por la condición de elipticidad (2.6), deducimos que:

$$C \int_\Omega |\nabla u_n|^p \leq J(u_n) - \theta \langle J'(u_n), u_n \rangle + M|\Omega|$$

donde $C = \left(1 - \frac{p}{\theta}\right) \Lambda > 0$, o sea:

$$C \|u_n\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq J(u_n) + \theta \|J'(u_n)\|_* \|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + M|\Omega|$$

donde $\|\cdot\|_*$ es la norma en el espacio dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$. Si $u_n$ no es acotada, para una subsucesión podemos asumir que: $\|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \to +\infty$. Entonces dividiendo por $\|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ y haciendo que $n \to \infty$ se obtiene una contradicción. Esto prueba que $u_n$ está acotada.
Por la reflexividad de $W_0^{1,p}(\Omega)$ podemos extraer una subsucesión débilmente convergente $u_{n_k} \rightharpoonup u$, que por simplicidad seguiremos llamando $u_n$. Para probar que $u_n$ converge fuertemente a $u$, notamos que siendo $A$ uniformemente $p$-convexa, por la proposición 2.2.9 se sigue si consideramos la funcional:

$$J_0(u) = \int_\Omega A(x, \nabla u)$$

su derivada $J_0'$ verifica la condición $(S_+)$, de modo que basta ver que:

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega a(x, \nabla u_n) \cdot (\nabla u_n - \nabla u) \leq 0$$

Además

$$\int_\Omega a(x, \nabla u_n) \cdot (\nabla u_n - \nabla u) = \langle J'(u_n), u_n - u \rangle + \int_\Omega f(x, u_n)(u_n - u)$$

Ahora como la inmersión de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ es compacta, ya que $q < p^*$ en (2.7); obtenemos (tomando nuevamente una subsucesión) que: $u_n \to u$ fuertemente en $L^q(\Omega)$, y por la condición de crecimiento sobre $f$, $f(x, u_n)$ es acotada en $L^{q'}(\Omega)$. Se sigue que:

$$\int_\Omega f(x, u_n)(u_n - u) \to 0$$

Por otro lado como $J'(u_n) \to 0$ por hipótesis y $u_n - u$ es acotada en $W_0^{1,p}(\Omega)$, deducimos que

$$\langle J'(u_n), u_n - u\rangle \to 0$$

Concluimos que:

$$\int_\Omega a(x, \nabla u_n) \cdot (\nabla u_n - \nabla u) \to 0$$

y entonces por la condición $(S_+)$, $u_n \to u$ fuertemente.

**Lema 2.3.6** *J tiene la geometría del teorema del paso de la montaña, es decir:*

1. *Existe $r > 0$ tal que:*

$$\inf_{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=r} J(u) = b > 0$$

2. *Existe $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que*

$$J(tu_0) \to -\infty \textit{ cuando } t \to \infty$$

**Demostración:** 1. Elegimos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, de modo que:

$$\Lambda > \frac{\lambda + \varepsilon}{p\lambda_{1,p}}$$

entonces por la condición (2.9), existe $\delta > 0$ tal que:

$$\frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s} \leq \lambda + \varepsilon \text{ para } |s| \leq \delta, x \in \Omega$$

por lo que

$$f(x,s) \begin{cases} \leq (\lambda+\varepsilon)s^{p-1} & \text{si} \quad s > 0 \\ \geq -(\lambda+\varepsilon)|s|^{p-1} & \text{si} \quad s < 0 \end{cases}$$

Integrando deducimos que:

$$F(x,s) \leq \frac{1}{p}(\lambda+\varepsilon)|s|^p \text{ para } |s| \leq \delta$$

En consecuencia, utilizando la hipótesis (2.7):

$$J(u) \geq \int_\Omega A(x, \nabla u) - \int_{\{x\in\Omega:|u|\leq\delta\}} \frac{(\lambda+\varepsilon)}{p}|u|^p - \int_{\{x\in\Omega:|u|>\delta\}} C|u|^q$$

$$\geq \Lambda \int_\Omega |\nabla u|^p - \frac{\lambda+\varepsilon}{p\lambda_{1,p}} \int_\Omega |\nabla u|^p - C\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)^{q/p} = \phi(r)$$

con $r = \int_\Omega |\nabla u|^p$, en virtud de la inmersión de Sobolev (1.1), ya que $q < p^*$ Además $\phi(r) > 0$ para $r > 0$ suficientemente pequeño, ya que $q > p$.

2. Como $A$ es p-subhomogénea y $F(x,s)$ es $\theta$-superhomogénea si $|s| \geq s_0$, para $t > 1$ tenemos que:

$$J(tu_0) = \int_\Omega A(x, t\nabla u_0) - \int_\Omega F(x, tu_0)$$

$$\leq t^p \int_\Omega A(x, \nabla u) - t^\theta \int_{\{x\in\Omega:|u_0|\geq s_0\}} F(x, u_0) + M|\Omega|$$

donde $M = \sup\{|F(x,s)| : x \in \overline{\Omega}, |s| \leq s_0\}$.

Como $\theta > p$, deducimos que $J(tu_0) \to -\infty$ cuando $t \to +\infty$, si elegimos $u_0$ tal que

$$|\{x \in \Omega : u_0(x) \geq s_0\}| > 0$$

por la condición (2.8).

## 2.4 Soluciones Multiples

Necesitaremos la siguiente versión "$\mathbb{Z}_2$-simétrica" (para funcionales pares) del teorema del Paso de la Montaña (ver [25], teorema 9.12).

**Teorema 2.4.1** *Sea $X$ un espacio de Banach real de dimensión infinita y sea $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ par, que satisface la condición de $(PS)$ y $I(0) = 0$. Si*

- $(I_1)$ *Existen constantes $\rho, \alpha > 0$ tales que $I(x) \geq \alpha$ si $\|x\| = \rho$.*
- $(I_2)$ *Para cada subespacio de dimensión finita $X_1 \subset X$, el conjunto $\{x \in X_1 : I(x) \geq 0\}$ es acotado.*

*entonces $I$ posee una sucesión no acotada de valores críticos.*

**Teorema 2.4.2** *Supongamos que las funciones $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ son impares en el segundo argumento:*

$$f(x,-s) = -f(x,s), \quad a(x,-\xi) = -a(x,\xi)$$

*y que además se satisfacen las condiciones del teorema 2.3.1. Entonces el problema (2.10) posee infinitas soluciones.*

Para demostrar este resultado necesitamos el siguiente lema:

**Lema 2.4.3** *Las condiciones del teorema 2.3.1 implican que si $X_1 \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ es un subespacio de dimensión finita, el conjunto $S = \{u \in X_1 : J(u) \geq 0\}$ es acotado en $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

**Demostración:** De la condición (2.7), $F$ satisface:

$$|F(x,s)| \leq C_1(|s|^q + 1)\, \forall x \in \Omega, s \in \mathbb{R} \tag{2.12}$$

Afirmamos que existe $\gamma \in L^\infty(\Omega)$, $\gamma > 0$ en $\Omega$, tal que:

$$F(x,s) \geq \gamma(x)|s|^\theta\, \forall x \in \Omega, |s| \geq s_0 \tag{2.13}$$

De hecho tenemos, como $F$ es $\theta$-superhomogénea:

$$F(x,s) \geq \gamma_1(x)|s|^\theta\, \forall x \in \Omega, s \geq s_0$$

donde $\gamma_1(x) = \frac{F(x,s_0)}{s_0^\theta}$. En virtud de (2.12), $\gamma_1 \in L^\infty(\Omega)$ y de la condición (2.8) concluimos que $\gamma_1 > 0$ en $\Omega$.
Un razonamiento similar muestra que

$$F(x,s) \geq \gamma_2(x)|s|^\theta\, \forall x \in \Omega, s \leq -s_0$$

donde $\gamma_2 = \frac{F(x,-s_0)}{s_0^\theta}$. De nuevo $\gamma_2 \in L^\infty(\Omega)$ y $\gamma_2 > 0$. Entonces (2.13) vale con $\gamma(x) = \min(\gamma_1(x), \gamma_2(x))$ para $x \in \Omega$ como afirmamos.
Probaremos que $J$ satisface una estimación de la forma:

$$J(u) \leq c_3\, \|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + c_4\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega \gamma(x)|u|^\theta + K\, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{2.14}$$

con $c_3$, $c_4$ y $K$ constantes no negativas.

Sea $v$ arbitrariamente elegido en $W_0^{1,p}(\Omega)$ y notemos:

$$\begin{aligned} \Omega_< &= \{x \in \Omega : |v(x)| < s_0\} \\ \Omega_\geq &= \Omega - \Omega_< \end{aligned}$$

Por (2.12) tenemos:

$$\int_{\Omega_<} F(x,v) \geq -C_1 \int_{\Omega_<} (|v|^q + 1) \geq -C_1 \int_\Omega (s_0^q + 1) = -C_1(s_0^q + 1)|\Omega| = K_1$$

y por (2.13) vale que:

$$\int_{\Omega_\geq} F(x,v) \geq \int_{\Omega_\geq} \gamma(x)|v|^\theta$$

Entonces por (2.11):

$$\begin{aligned} J(v) &= \int_\Omega A(x,\nabla v) - \left( \int_{\Omega_<} F(x,v) + \int_{\Omega_\geq} F(x,v) \right) \\ &\leq c_2 \|v\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + c_2 \|\nabla v\|_{L^1(\Omega)} - \int_{\Omega_\geq} \gamma(x)|v|^\theta - K_1 = \\ &\leq c_2 \|v\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + c_2|\Omega|^{1/p'} \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega \gamma(x)|v|^\theta + \int_{\Omega_<} \gamma(x)|v|^\theta - K_1 \\ &\leq c_2 \|v\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + c_3 \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega \gamma(x)|v|^\theta + K \end{aligned}$$

donde $K = \|\gamma\|_{L^\infty} s_0^q |\Omega| - K_1$ y $c_3 = c_2|\Omega|^{1/p'}$, con lo que (2.14) queda demostrada. La funcional $\|\cdot\|_\gamma : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\|v\|_\gamma = \left( \int_\Omega \gamma(x)|v|^\theta \right)^{1/\theta}$$

es una norma en $W_0^{1,p}$. En el subespacio de dimensión finita $X_1$ las normas $\|\cdot\|_{1,p}$ y $\|\cdot\|_\gamma$ son equivalentes, luego existe una constante $\tilde{K} = \tilde{K}(X_1)$ tal que:

$$\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \tilde{K} \left( \int_\Omega \gamma(x)|v|^\theta \right)^{1/\theta}$$

Consecuentemente en $X_1$ vale que:

$$J(v) \leq c_2\tilde{K}^p \|v\|_\gamma^p + c_3\tilde{K} \|v\|_\gamma - \|v\|_\gamma^\theta + K$$

Por lo tanto

$$c_2\tilde{K}^p \|v\|_\gamma^p + c_3\tilde{K}\|v\|_\gamma - \|v\|_\gamma^\theta + K \geq 0 \,\forall v \in S$$

y teniendo en cuenta que $\theta > p$ concluimos que $S$ es acotado.

**Prueba del Teorema** 2.4.2: Como las funciones $f$ y $a$ son impares en el segundo argumento, la funcional $J$ es par. Se verifica que $J(0) = 0$. Por el lema 2.3.5, $J$ satisface la condición $(PS)$. Por el lema 2.3.6, existen constantes $\alpha, \rho > 0$ tales que $J(u) \geq \alpha$ si $\|u\|_{1,p} = \rho$ Por el lema previo $\{v \in X_1 : J(u) \geq 0\}$ es acotado cuando $X_1$ es un subespacio de dimensión finita de $W_0^{1,p}(\Omega)$. Entonces el teorema 2.4.1 se puede aplicar a la funcional $J$, lo que concluye la demostración.

# Capítulo 3

# Ecuaciones del Tipo p-Laplaciano en Dominios no Acotados

## 3.1 Espacios de Sobolev con pesos

Al estudiar problemas en dominios no acotados, es con frecuencia conveniente trabajar en espacios de Sobolev con pesos. Esto se debe a que en general el espacio $W^{1,p}(\Omega)$ no está compactamente contenido en $L^q(\Omega)$ para ningún $q$ si $\Omega$ no es acotado, pero esto puede remediarse, como veremos, trabajando en espacios con pesos.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio (no acotado). Un peso es una función $w \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $w \geq 0$ (en c.t.p.). El espacio $L^p(\Omega; w) = L^p_w(\Omega)$ es el conjunto de las (clases módulo igualdad en c.t.p. de) funciones medibles $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que la norma:

$$\|u\|_{p,\Omega,w} = \left( \int_\Omega |u|^p w(x)\, dx \right)^{1/p}$$

es finita. Si identificamos el peso $w$ con la medida:

$$w(E) = \int_E w\, dx \quad E \subset \Omega$$

$L^p_w$ no es otra cosa que el espacio $L^p$ asociado a esta medida. El espacio de Sobolev con pesos $W^{1,p}(\Omega; w_0, w_1)$ se define entonces como el espacio de las funciones $L^p_{w_0}(\Omega)$ cuyas derivadas distribucionales $\frac{\partial u}{\partial x_i}(1 \leq i \leq N)$ pertenecen a $L^p_{w_1}(\Omega)$. La correspondiente norma se define por:

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega;w_0,w_1)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p w_1(x) + \int_\Omega |u|^p w_0(x)dx\right)^{1/p} \qquad (3.1)$$

El espacio $W_0^{1,p}(\Omega; w_0, w_1)$ se define como la clausura de $C_0^1(\Omega)$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$. Hacemos notar que en la literatura aparecen otras definiciones de espacios de Sobolev con pesos que no siempre son equivalentes. Por ejemplo si definimos $H^p(\Omega; w_0, w_1)$ como la completación de $C^\infty(\overline{\Omega})$ en la norma (3.1) tendremos que $H^p(\Omega; w_0, w_1) = W^{1,p}(\Omega; w_0, w_1)$ cuando $w_0$ y $w_1$ están en la clase $A_p$ de Muckenhoupt (ver [14]).

### 3.1.1 Inmersiones en espacios con pesos:

En los argumentos variacionales juega un papel muy importante saber cuando el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega; v_0, v_1)$ está incluido (compactamente) en un espacio $L^p(\Omega; w)$. Existen en la literatura varios resultados sobre esta cuestión.

### 3.1.2 El teorema de Kufner-Opic

En esta sección enunciamos un teorema sobre inmersiones en espacios con pesos que utilizaremos en lo sucesivo. Aunque el enunciado es algo técnico, veremos con ejemplos que puede ser aplicado en casos concretos.

Notamos $\Omega_n = \{x \in \Omega : |x| < n\} = \Omega \cap B(0, n)$ y $\Omega^n = \{x \in \Omega : |x| > n\}$. Asumimos que existe un $\tilde{n}$ tal que $\Omega^{\tilde{n}} = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| > \tilde{n}\}$, es decir $\overline{B}(0, \tilde{n})^c \subset \Omega$ para algún $\tilde{n}$. Sea $r(x)$ una función positiva definida en $\Omega^{\tilde{n}}$ tal que:

$$\begin{array}{rcc} r(x) \le \frac{|x|}{3} & \text{para casi todo} & x \in \Omega^{\tilde{n}} \\ c_r^{-1} \le r(y)/r(x) \le c_r & \text{para casi todo} & x \in \Omega^{\tilde{n}}, y \in B(x, r(x)) \end{array}$$

donde $c_r$ es una constante.

**Teorema 3.1.1 ([24],Teorema 2.1)** *Sean* $1 \le p \le q < \infty$, $\frac{N}{q} - \frac{N}{p} + 1 \ge 0$ *y supongamos que existen constantes* $0 \le k_0 \le K_0$, $0 \le c_0 \le C_0$, $0 \le c_1 \le C_1$, *funciones medibles positivas* $b_0, b_1$ *definidas en* $\Omega^{\tilde{n}}$, *tales que los pesos* $v_0, v_1, w$

*satisfacen:*

$$\begin{array}{lclclll} k_0 v_0(x) & \leq & v_1(x) r^{-p}(x) & \leq & K_0(x) v_0(x) & p.c.t. & x \in \Omega^{\tilde{n}} \\ c_0 b_0(x) & \leq & w(y) & \leq & C_0 b_0(x) & p.c.t. & x \in \Omega^{\tilde{n}}, y \in B(x, r(x)) \\ c_1 b_1(x) & \leq & v_1(y) & \leq & C_1 b_1(x) & p.c.t. & x \in \Omega^{\tilde{n}}, y \in B(x, r(x)) \end{array}$$

*Supongamos que la inmersión* $W^{1,p}(\Omega_n; v_0, v_1) \hookrightarrow L^q(\Omega_n; w)$ *es compacta para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces la inmersión*

$$W^{1,p}(\Omega; v_0, v_1) \hookrightarrow L^q(\Omega; w)$$

*es compacta si y sólo si*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{B}_n = 0 \textit{ donde } \mathcal{B}_n = \sup_{x \in \Omega^n} \frac{b_0(x)^{1/q}}{b_1(x)^{1/p}} r^{\left(\frac{N}{q} - \frac{N}{p} + 1\right)}$$

*Además dicha inmersión es continua si la inmersión* $W^{1,p}(\Omega_n; v_0, v_1) \hookrightarrow L^q(\Omega_n; w)$ *es continua para cada* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\lim_{n\to\infty} \mathcal{B}_n < \infty$.

### Ejemplos de aplicaciones del teorema de Kufner-Opic

Supongamos que $\Omega$ es un dominio que verifica las hipótesis del teorema de Kufner-Opic.

1. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y definamos

   $$v_0(x) = (1 + |x|)^{\beta - p}, v_1(x) = (1 + |x|)^{\beta}, w(x) = (1 + |x|)^{\alpha}$$

   Si elegimos $b_0 = w$, $b_1 = v_1$ y $r(x) = (1 + |x|)/6$ las hipótesis del teorema 3.1.1 se verifican si

   $$\frac{N}{q} - \frac{N}{p} + 1 > 0 \text{ y } \frac{\alpha}{q} - \frac{\beta}{p} + \frac{N}{q} - \frac{N}{p} + 1 < 0$$

   luego la inmersión $W^{1,p}(\Omega; v_0, v_1) \hookrightarrow L^q(\Omega; w)$ es compacta.

2. Definimos $v_0(x) = v_1(x) = e^{\beta|x|}$ y $w(x) = e^{\alpha|x|}$. Si elegimos $b_0 = w$, $b_1 = w_1$ y $r(x) = 1$, entonces las hipótesis del teorema 3.1.1 se verifican si

   $$\frac{N}{q} - \frac{N}{p} + 1 > 0 \text{ y } \frac{\alpha}{p} - \frac{\beta}{q} < 0$$

### 3.1.3 Desigualdades de Hardy

Otra herramienta que necesitamos para estudiar ecuaciones del tipo p-laplaciano en dominios no acotados son las desigualdades de Hardy.

**Teorema 3.1.2 ([24],Teorema 2.3)** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio, con la propiedad de que si $x \in \Omega$ y $t \geq 1$, entonces $tx \in \Omega$. Supongamos que $v_0$ y $v_1$ son pesos radiales, o sea de la forma $v_0(|x|), v_1(|x|)$ y son acotados en cada subintervalo compacto de $(0, \infty)$. Asumamos además que existen constantes $k, B, t_0 > 0$ tales que:*

$$v_0(t) \geq k v_1(t) t^{-p} \text{ para c.t. } t > t_0$$

$$B(x) = \left\{ \int_0^x v_0(t) t^{N-1} \, dt \right\}^{1/p} \left\{ \int_x^\infty v_1(t)^{-1/(p-1)} t^{-\frac{N-1}{p-1}} \, dt \right\}^{1/p'} \leq B \tag{3.2}$$

*Entonces existe una constante $C > 0$ tal que:*

$$\int_\Omega |u|^p v_0(x) \, dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^p v_1(x) \, dx \;\forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega; v_0, v_1) \tag{3.3}$$

**Ejemplo:** Si tomamos

$$v_0(x) = (1 + |x|)^{\beta - p}, \; v_1(x) = (1 + |x|)^\beta$$

donde $0 \leq \beta \leq p$, y $N > p - \beta$, entonces

$$v_0(t) \geq \frac{1}{2^p} v_1(t) t^{-p}$$

y la condición (3.2) se verifica, ya que

$$B(x) \leq \left( \int_0^x t^{\beta - p + N - 1} \, dt \right)^{1/p} \left( \int_0^\infty t^{\frac{-\beta - (N-1)}{p-1}} dt \right)^{1/p'} \leq C$$

por lo que si $\Omega$ verifica las hipótesis del teorema 3.1.2, vale la desigualdad (3.3).

## 3.2 La acción de los operadores de Nemitsky en espacios con pesos

**Proposición 3.2.1** *Sea $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función de Caratheodory. Sean $1 \leq p, q < \infty$ y $0 < \alpha \leq \frac{p}{q}$, y sean $w_1$ y $w_2$ dos pesos. Supongamos que $f$ verifica la condición de crecimiento:*

$$|f(x,s)| \leq f_0(x) + f_1(x)|s|^{\alpha}$$

*donde $f_0 \in L^q(\Omega; w_2)$ y*

- $f_1 \in L^{pq/(p-\alpha q)}(\Omega; \tilde{w})$ *con* $\tilde{w} = w_2^{p/(p-\alpha q)} w_1^{-\alpha q/(p-\alpha q)}$ *si* $0 < \alpha < \frac{p}{q}$
- $f_1(x)^q w_2(x) \leq C w_1(x)$ *en c.t.p para alguna constante $C$ si* $\alpha = \frac{p}{q}$

*entonces el operador de Nemitsky $N_f : u \mapsto f(x,u)$ es continuo de $L^p(\Omega; w_2)$ en $L^q(\Omega; w_2)$.*

**Demostración:** Primero probamos que $N_f$ manda $L^p(\Omega; w_1)$ en $L^q(\Omega; w_2)$. Si $r > 1$ por la desigualdad de Hölder:

$$\int_\Omega |f(x,u)|^q w_2(x)dx \leq \int_\Omega 2^q[f_0(x)^q + f_1(x)^q|u|^{\alpha q}]w_2(x)dx$$

$$\leq C\,\|f\|^q_{L^q(\Omega;w_2)} + C\left(\int_\Omega f_1(x)^{qr'} w_2^{r'}(x) w_1^{-1/(r-1)}\right)^{1/r'}\left(\int_\Omega |u|^{\alpha q r} w_1(x)dx\right)^{1/r}$$

Elegimos $\alpha q r = p$, o sea: $r = \frac{p}{\alpha q}$ . Entonces $r' = \frac{p}{p-\alpha q}$ y $\frac{1}{r-1} = \frac{\alpha q}{p-\alpha q}$, y $r > 1$ si $0 < \alpha < \frac{p}{q}$. Esto prueba que $N_f(u) \in L^q(w_2)$
Cuando $\alpha = \frac{p}{q}$, entonces $r' = \infty$ y podemos acotar así:

$$\int_\Omega |f(x,u)|^q w_2(x)dx \leq C\,\|f\|^q_{L^q(\Omega;w_2)} + C\left\|f_1(x)^q w_2(x) w_1^{-1}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^p(\Omega;w_1)}$$

luego $N_f(u) \in L^q(w_2)$. Ahora probaremos que $N_f$ es continuo de $L^p(\Omega; w_1)$ en $L^q(\Omega; w_2)$. Sea $(u_n)$ una sucesión tal que $u_n \to u$ en $L^p(\Omega; w_1)$. Queremos ver que $N_f(u_n)$ converge a $N_f(u)$. Para ello basta ver que cualquier subsucesión $(u_{n_k})$ de $(u_n)$ contiene una sub-subsucesión que converge a $u$. Por el lema 1.6.3 existe una sub-subsucesión $u_{n_{k_j}}$ de $(u_{n_k})$ tal que $u_{n_{k_j}} \to u$ en casi todo punto respecto a la medida $w_1$ y existe $g \in L^p(\Omega; w_1)$ tal que $|u_n(x)| \leq g(x)$. Entonces:

$$|f(x,u) - f(x,u_{n_{k_j}})|^q \leq 2^q[|f(x,u)|^q + |f(x,u_{n_{k_j}})|^q]$$
$$\leq 2^{q+1}[f_0(x)^q + f_1(x)^q|g|^{q\alpha}] = h$$

Utilizando la desigualdad de Hölder como antes, tenemos que $h \in L^1(\Omega; w_2)$. Por lo que podemos usar el teorema de la convergencia mayorada de Lebesgue para ver que:

$$\int_\Omega |f(x,u) - f(x,u_{n_{k_j}})|^q w_2(x)dx \to 0$$

ya que $f(x,u_{n_{k_j}}) \to f(x,u)$ en casi todo punto (respecto a $w_2$ ).
Nos interesa particularmente el caso especial en que $q = p'$ y $w_1 = w$ y $w_2 = w^{-1/(p-1)}$. Entonces:

$$\tilde{w} = w^{-p/[(p-\alpha q)(p-1)]} w^{-\alpha q/(p-\alpha q)}$$

$$\frac{p}{(p-\alpha q)(p-1)} + \frac{\alpha q}{p-\alpha q} = \frac{p'+\alpha q}{p-\alpha q} = \frac{p'(1+\alpha)}{p'(p-1-\alpha)} = \frac{1+\alpha}{p-1-\alpha}$$

$$\frac{pq}{p-\alpha q} = \frac{\frac{p}{p-1}}{1-\alpha\frac{1}{p-1}} = \frac{p}{p-1-\alpha}$$

y obtenemos:

**Corolario 3.2.2** *Sea $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función de Caratheodory. Sean $1 \leq p, q < \infty$ y $0 < \alpha \leq p-1$, y sea $w$ un peso. Supongamos que $f$ verifica la condición de crecimiento:*

$$|f(x,s)| \leq f_0(x) + f_1(x)|s|^\alpha$$

*donde $f_0 \in L^{p'}(\Omega; w^{-1/(p-1)})$ y*

- $f_1 \in L^{p/(p-1-\alpha)}(\Omega; \tilde{w})$ con $\tilde{w} = v^{(1+\alpha)/(p-1-\alpha)}$ si $0 < \alpha < \frac{p}{q}$
- $f_1(x) \leq Cw(x)$ en c.t.p. para alguna constante $C$ si $\alpha = p-1$ entonces el operador de Nemitsky $N_f : u \mapsto f(x,u)$ es continuo de $L^p(\Omega; w)$ en $L^q(\Omega; w)$.

**Nota:** El caso $\alpha = p-1$ de este corolario es el lema 3.1 en [24].

## 3.3 Ecuaciones del tipo p-laplaciano en dominios no acotados

En esta sección enunciaremos un teorema análogo al teorema 2.3.1 para dominios no acotados, trabajando en espacios de Sobolev con pesos (con hipótesis algo diferentes).

**Teorema 3.3.1** *Asumamos que se verifican las siguientes condiciones:*

1. $2 \leq p < N$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *es un dominio (posiblemente no acotado), y los pesos* $v_0$,$v_1$ *y* $w$ *son elegidos de modo de la inmersión de Sobolev:*

$$W_0^{1,p}(\Omega; v_0, v_1) \subset L^q(\Omega; w) \tag{3.4}$$

   *resulte continua si* $p \leq q \leq p^*$ *y compacta si* $p < q < p^*$ *(donde* $p^* = \frac{pN}{N-p}$*), y que valga la desigualdad de Hardy:*

$$\int_\Omega |u|^p v_0(x)\, dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^p v_1(x)\, dx \;\forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega; v_0, v_1)$$

   *Notamos que entonces*

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega, v_1)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p v_1(x)\, dx\right)^{1/p}$$

   *es una norma equivalente a* $\|\cdot\|_{W_0^{1,p}(\Omega; v_0, v1)}$ *en* $W_0^{1,p}(\Omega; v_0, v_1)$.

2. $A : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *es una función continua en* $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N$, *y con derivada continua respecto a* $\xi$, $a = DA = A'$ *que verifica:*

   *(a)* $A(x, 0) = 0 \;\forall\; x \in \Omega$.

   *(b)* $a$ *satisface la condición de crecimiento:*

$$|a(x,\xi)| \leq a_0(x) + a_1(x)|\xi|^{p-1} \;\forall\, x \in \Omega,\; \xi \in \mathbb{R}^N \tag{3.5}$$

   *donde* $a_0$ *y* $a_1$ *son funciones que satisfacen:*

$$a_0 \in L^{p'}(\Omega,\; v_1^{1/(p-1)}), a_0(x) \leq c_1 v_1(x),\; a_1(x) \leq c_2 v_1(x)$$

(c) *A es uniformemente p-convexa con el peso $v_1(x)$, en el siguiente sentido: Existe una constante $c_2 > 0$ tal que:*

$$A\left(x, \frac{\xi+\eta}{2}\right) \leq \frac{1}{2}A(x,\xi) + \frac{1}{2}A(x,\eta) - c_2 v_1(x)|\xi-\eta|^p \ \forall\, x \in \overline{\Omega}\ \xi, \eta \in \mathbb{R}^N \tag{3.6}$$

(d) *A es p-subhomogénea:*

$$0 < a(x,\xi)\cdot\xi \leq pA(x,\xi) \ \ \forall\, x \in \overline{\Omega},\ \xi \in \mathbb{R}^N \tag{3.7}$$

(e) *A satisface la condición de elipticidad:*

$$A(x,\xi) \geq \Lambda|\xi|^p v_1(x)\ \forall\ \ x \in \overline{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}^N \tag{3.8}$$

*siendo $\Lambda > 0$ una constante.*

3. *$f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de Caratheodory que verifica:*

(a) *La condición de crecimiento subcrítico:*

$$|f(x,s)| \leq f_0(x) + f_1(x)|s|^{q-1}\ \forall\, x \in \Omega, s \in \mathbb{R} \tag{3.9}$$

*donde $p < q < p^* = \frac{Np}{N-p}$, y $f_0$, $f_1$ son funciones positivas que satisfacen:*

$$f_0(x) \in L^{q'}(\Omega, w^{-1/(q-1)}),\ f_0(x) \leq Cw(x)\ f_1(x) \leq Cw(x)$$

*donde $C$ es una constante.*

(b) *La condición de Ambrosetti-Rabinowitz: $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\,dt$ es $\theta$-superhomogénea*

$$0 < \theta F(x,s) \leq f(x,s)s\ \forall s \in \mathbb{R}, x \in \overline{\Omega} \tag{3.10}$$

*donde $\theta > p$.*

4. *Se verifica:*

$$f(x,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x,t)}{|t|^{p-1}v_0(x)} = 0 \tag{3.11}$$

*uniformemente en $x \in \Omega$.*

5. *Existe un abierto no vacío $O \subset \Omega$ y un número $s_0 > 0$ tal que*

$$F(x,s) > 0 \, \forall x \in O, |s| \geq s_0. \tag{3.12}$$

*Entonces el problema de Dirichlet:*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla \mathrm{u}) & = & f(x,u) & en \ \Omega \\ u & = & 0 & en \ \partial\Omega \end{cases} \tag{3.13}$$

*tiene al menos una solución débil no trivial en $W_0^{1,p}(\Omega; v_0, v_1)$.*

### 3.3.1 Demostración del teorema 3.3.1

De manera análoga a lo que hicimos en el capítulo anterior, para demostrar el teorema 3.3.1, aplicamos el teorema del paso de la montaña a la funcional

$$J(u) = \int_\Omega A(x, \nabla u) - \int_\Omega F(x,u)$$

pero ahora trabajamos en el espacio de Sobolev con pesos $W_0^{1,p}(\Omega; v_0, v_1)$.

Como consecuencia del colorario (3.2) y de las inmersiones de Sobolev con pesos que tenemos por hipótesis, es fácil ver que $J \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega; v_0, v_1))$ (como en en lema 3.2 de [24]), y que:

$$\langle J'(u), v\rangle = \int_\Omega a(x, \nabla u) \cdot \nabla v - \int_\Omega f(x,u)v$$

Dividiremos la verificación de las condiciones necesarias para aplicar el teorema del paso de la montaña en dos lemas:

**Lema 3.3.2** *J verifica la condición de Palais-Smale.*

**Dem:** Si $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega; v_0, v_1)$ es una sucesión de Palais-Smale, verifica que: $J(u_n) \to c$ y $J'(u_n) \to 0$. Primero probaremos que $(u_n)$ es acotada:

$$J(u_n) - \frac{1}{\theta}\langle J'(u_n), u_n\rangle = \int_\Omega \left[A(x, \nabla u_n) - \frac{1}{\theta} a(x, \nabla u_n) \cdot \nabla u_n\right] +$$

$$\int_\Omega \left[\frac{1}{\theta} f(x, u_n)u_n - F(x, u_n)\right]$$

Por la condición (3.7), vemos que:

$$J(u_n) - \frac{1}{\theta}\langle J'(u_n), u_n\rangle \geq \left(1 - \frac{p}{\theta}\right)\int_\Omega A(x, \nabla u_n) +$$

$$\int_\Omega \left[\frac{1}{\theta} f(x, u_n)u_n - F(x, u_n)\right]$$

Por la condición de Ambrosetti-Rabinowitz (3.10), deducimos que:

$$\left(1 - \frac{p}{\theta}\right)\int_\Omega A(x, \nabla u_n) \leq J(u_n) - \frac{1}{\theta}\langle J'(u_n), u_n\rangle$$

Por la condición de elipticidad (3.8), deducimos que:

$$C\int_\Omega |\nabla u_n|^p v_1(x) \leq J(u_n) - \frac{1}{\theta}\langle J'(u_n), u_n\rangle$$

donde $C = \left(1 - \frac{p}{\theta}\right)\Lambda > 0$, o sea:

$$C\,\|u_n\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega;v_0,v_1)} \leq J(u_n) + \frac{1}{\theta}\|J'(u_n)\|_*\,\|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega;v_0,v_1)}$$

donde $\|\cdot\|_*$ es la norma del espacio dual de $W_0^{1,p}(\Omega; v_0, v_1)$.
Si $(u_n)$ no es acotada en $W_0^{1,p}(\Omega; v_0, v_1)$ , para una subsucesión podemos asumir que:

$$\|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega;v_0,v_1)} \to \infty$$

Entonces dividiendo por $\|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega;v_0,v_1)}$ y haciendo que $n \to \infty$ tenemos una contradicción. Esto prueba que $u_n$ está acotada.
Por la reflexividad de $W_0^{1,p}(\Omega; v_0, v_1)$ podemos extraer una subsucesión débilmente convergente $u_{n_k} \rightharpoonup u$. Para probar que $u_{n_k}$ converge fuertemente a $u$, notamos que por la condición (3.6),

$$J_0(u) = \int_\Omega A(x, \nabla u)$$

localmente uniformemente convexa en el espacio $W_0^{1,p}(\Omega; v_0, v_1)$. Por la proposición 2.2.9 se sigue que su derivada $J_0'\cdot$ verifica la condición $(S_+)$, de modo que basta ver que:

$$\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega a(x, \nabla u_n)\cdot(\nabla u_n - \nabla u) \leq 0$$

Tenemos que:

$$\int_\Omega a(x, \nabla u_n)\cdot(\nabla u_n - \nabla u) = \langle J'(u_n), u_n - u\rangle + \int_\Omega f(x, u_n)(u_n - u) \quad (3.14)$$

Como por hipótesis, la inmersión de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega; v_0, v_1) \hookrightarrow L^q(\Omega; w)$ es compacta, obtenemos que: $u_n \to u$ fuertemente en $L^q(\Omega; w)$, y por la condición de crecimiento sobre $f$, $f(x, u_n)$ es acotada en $L^{q'}(\Omega; w^{-1/(q-1)})$. Se sigue que:

$$\int_\Omega f(x, u_n)(u_n - u) \to 0$$

Por otro lado como $J'(u_n) \to 0$ por hipótesis y $u_n - u$ es acotada en $W_0^{1,p}(\Omega; v_0, v_1)$, deducimos que

$$\langle J'(u_n), u_n - u\rangle \to 0$$

Por (3.14), concluimos que:

$$\int_\Omega a(x, \nabla u_n)\cdot(\nabla u_n - \nabla u) \to 0$$

y entonces por la condición $(S_+)$, $u_n \to u$ fuertemente en $W_0^{1,p}(\Omega; v_0, v_1)$.

**Lema 3.3.3** *$J$ tiene la geometría del lema del paso de la montaña, es decir:*

1. *Existe $r > 0$ tal que:*

$$\inf_{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega; v_0, v_1)} = r} J(u) = b > 0 \;\forall\; u \in W_0^{1,p}(\Omega; v_0, v_1)$$

2. *Existe $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega; v_0, v_1)$ tal que*

$$J(tu_0) \to -\infty \text{ cuando } t \to \infty$$

**Demostración:** De la condición (3.11), dado $\varepsilon > 0$ tenemos que:

$$|f(x, t)| < \varepsilon |t|^{p-1} v_0(x) \text{ si } |t| < \delta$$

Integrando deducimos que

$$|F(x, t)| \leq \varepsilon \frac{|t|^p}{p} v_0(x) \text{ si } |t| < \delta$$

En consecuencia:

$$\int_{\{x\in\Omega:|u|<\delta\}} |F(x,u)| \le \int_\Omega \varepsilon \frac{|u|^p}{p} v_0(x) \le \frac{\varepsilon}{p}\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega;v_0,v_1)}$$

Por otro lado, de la condición (3.9), deducimos que:

$$|F(x,t)| \le f_0(x)|t| + f_1(x)\frac{|t|^q}{q}$$

y en consecuencia:

$$\int_{\{x\in\Omega:|u|\ge\delta\}} |F(x,u)| \le \int_{\{x\in\Omega:|u|\ge\delta\}} f_0(x)|u| + f_1(x)\frac{|u|^q}{q} \le$$

$$C_\delta \int_\Omega (f_0(x)+f_1(x))|u|^q \le C_1 \int_\Omega |u|^q w(x)\, dx \le C_2\|u\|^q_{W^{1,p}(\Omega;v_0,v_1)}$$

por la inmersión de Sobolev (3.4). En conclusión obtenemos que

$$J(u) = \int_\Omega A(x,u) - \int_\Omega F(x,u) \ge$$

$$\int_\Omega \Lambda v_1(x)|\nabla u|^p dx - \frac{\varepsilon}{p}\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega:v_0,v_1)} - C_2\|u\|^q_{W_0^{1,p}(\Omega:v_0,v_1)} = \phi(r)$$

donde $r = \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega;v_0,v_1)}$. Como $q > p$, deducimos que $\phi(r) > 0$ si $r$ y $\varepsilon$ son positivos y pequeños.

Para probar que se verifica la segunda condición del enunciado, tomamos $u_0 \in W^{1,p}(\Omega;v_0,v_1)$ tal que $u_0(x) \ge s_0$ $\forall x \in O$ (donde $s_0$ y $O$ satisfacen la condición (3.12)). Entonces como $A$ es p-subhomogénea y $F(x,s)$ es $\theta$-superhomogénea, para $t > 1$ tenemos que:

$$J(tu_0) = \int_\Omega A(x,t\nabla u_0) - \int_\Omega F(x,tu_0)$$

$$\le t^p \int_\Omega A(x,\nabla u_0) - t^\theta \int_O F(x,u_0)$$

Como $\theta > p$, deducimos que $J(tu_0) \to -\infty$ cuando $t \to +\infty$.

## 3.3.2 Un Ejemplo

Consideramos el problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.15}$$

siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio que satisface las hipótesis de los teoremas 3.1.1 y 3.1.2, y $2 \le p < N$. En este caso tomamos:

$$A(x,s) = \frac{1}{p}|s|^p$$

Para el ejemplo, elegimos los pesos

$$v_0(x) = (1+|x|)^{-p}, v_1(x) = 1, w(x) = (1+|x|)^{-\alpha} \ (\alpha > 0)$$

y asumimos que $f$ satisface las condiciones del teorema 3.3.1. Para que la inmersión

$$W^{1,p}(\Omega; (1+|x|)^{-p}, 1) \subset L^q(\Omega; (1+|x|)^{-\alpha})$$

sea compacta debemos pedir que

$$-\frac{\alpha}{q} + \frac{N}{q} - \frac{N}{p} + 1 < 0$$

La desiguadad de Hardy se verfica pues $2 \le p < N$. Bajo estas condiciones el teorema 3.3.1 se aplica a este ejemplo, y se concluye que el problema 3.15 tiene al menos una solución débil no trivial.

# Capítulo 4

# Tres soluciones de algunas ecuaciones cuasilineales en $\mathbb{R}^N$ cerca de la resonancia

## 4.1 Introducción

### 4.1.1 Algunos resultados previos

J. Mawhin y K. Smichtt [21], probaron la existencia de por lo menos tres soluciones para el problema de contorno:

$$-u'' - u + \varepsilon u = f(x,u) + h(x),\ u(0) = u(\pi) = 0$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, $h$ ortogonal a $\sin x$ y $f$ acotada satisfaciendo la condición de signo: $uf(x,u) > 0$. En [31], To Fu Ma y L. Sanchez consideraron el problema

$$-\Delta_p u - \lambda_1 |u|^{p-2}u + \varepsilon|u|^{p-2}u = f(x,u) + h(x) \tag{4.1}$$

en $W_0^{1,p}(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado y $\lambda_1$ el primer autovalor de:

$$-\Delta_p u = \lambda|u|^{p-2}u \text{ en } \Omega,\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega \tag{4.2}$$

y probaron el siguiente resultado:

**Teorema 4.1.1** *Supongamos que $p \geq 2$ y que se verifican las siguientes dos condiciones: (H1) $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y existe $\theta > \frac{1}{p}$ tal que*

$$\theta u f(x,u) - F(x,u) \to -\infty \textit{ cuando } |u| \to \infty$$

*siendo* $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\,ds$ *(H2) Existe* $R > 0$ *que verifica*

$$uf(x,u) > 0\ \forall x \in \Omega\ |u| \geq R$$

*Entonces para toda* $h \in L^{p'}(\Omega)$ *con* $\int_\Omega h(x)\varphi_1(x)dx = 0$, *donde* $\varphi_1$ *es la primer autofunción de (4.2), la ecuación (4.1) tiene por lo menos tres soluciones para* $\varepsilon > 0$ *suficientemente pequeño.*

Puede probarse que las suposiciones sobre $f$ implican la siguiente condición de crecimiento

$$|f(x,u)| \leq c_1 + c_2|u|^\sigma$$

con $\sigma = \frac{1}{\theta} < p$. En efecto si $|s|$ es suficientemente grande tendremos:

$$F(x,ts) \leq t^{1/\theta} F(x,s)$$

de donde

$$f(x,s) \leq \frac{1}{\theta}\frac{F(x,s)}{s} \leq \frac{1}{\theta} s^{\frac{1}{\theta}-1} F(x,1)$$

### El marco funcional

Nuestro objetivo es extender este resultado a ecuaciones en $\mathbb{R}^N$. Como $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ no está contenido compactamente en $L^p(\mathbb{R}^N)$, vamos a trabajar en el espacio $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$,que es la completación de $C_0^1(\mathbb{R}^N)$ con respecto a la norma:

$$\|u\|_{1,p} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

Por la desigualdad de Sobolev tenemos:

$$D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$$

si $p < N$, con $p^* = \frac{Np}{N-p}$. Esta inmersión no es compacta, pero en la Proposición 4.2.1 probaremos que la inmersión $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^p_g(\mathbb{R}^N)$ sí es compacta para $g \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N) \cap L^{(N/p)+\varepsilon}_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

### Simplicidad del primer autovalor con pesos

Recordamos que la simplicidad del primer autovalor del p-laplaciano con pesos fue probada en [28]. Ellos estudiaron el problema

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda g(x)|u|^{p-2}u \; x \in \mathbb{R}^N \\ 0 < u \text{ en } \mathbb{R}^N, &\lim_{|x|\to+\infty} u(x) = 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

donde $1 < p < N$, y probaron el siguiente teorema, asumiendo las condiciones enumeradas más abajo:

(G) $g$ es una función suave, por lo menos $C^{0,\gamma}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para algún $\gamma \in (0,1)$, tal que $g \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ y $g(x) > 0$ en $\Omega^+$con $|\Omega^+| > 0$, y

- $(G^+)$ $g$ satisface (G) y $g(x) \geq 0$ en c.t.p. en $\mathbb{R}^N$
- $(G^-)$ $g$ satisface (G) y $g(x) < 0$ para $x \in \Omega^-$, con $|\Omega^-| > 0$.

**Teorema 4.1.1** *1. Sea $g$ que satisface $(G^+)$. Entonces la ecuación (4.3) admite un primer autovalor positivo dado por:*

$$\lambda_1 = \inf_{B(u)=1} \|u\|^p_{1,p} \tag{4.4}$$

*con*

$$B(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^p g(x) dx$$

*2. Sea $g$ que satisface $(G^-)$. Entonces el problema (4.3) admite dos primeros autovalores de signos opuestos dados por:*

$$\lambda_1^+ = \inf_{B(u)=1} \|u\|^p_{1,p}$$

$$\lambda_1^- = -\inf_{B(u)=-1} \|u\|^p_{1,p}$$

*3. En ambos casos, las autofunciones asociadas $\varphi_1$,$\varphi_1^+$, $\varphi_1^-$pertenecen a $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$.*

*4. El conjunto de autofunciones correspondientes a $\lambda_1$ (respectivamente a $\lambda_1^\pm$) es un subespacio unidimensional.*

**Observación 4.1.2** *Bajo la hipótesis $(G^+)$, la primer autofunción $\varphi_1$ no cambia de signo en $\mathbb{R}^N$, por lo que podemos suponer que $\varphi_1 \geq 0$.*

**Demostración:** Tomando $\varphi_1^-$ como función de prueba en (4.3) con $\lambda = \lambda_1$ vemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\varphi_1^-)|^p = \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_1^-|^p g(x)dx$$

Se sigue que $\varphi_1^- = 0$ (y $\varphi_1 \geq 0$ ), o bien $\varphi_1^-$ es también una solución del problema de minimización (4.4). En este último caso, por la simplicidad del primer autovalor $\varphi_1^- = c\varphi_1$. Se sigue que $\varphi_1^- = -\varphi_1$, luego $\varphi_1 \leq 0$.

### 4.1.2 Nuestro principal resultado: Existencia de múltiples soluciones para ecuaciones cuasilineales cerca de la resonancia.

En este capítulo consideramos la siguiente ecuación cuasilineal:

$$-\Delta_p u = (\lambda_1 - \varepsilon)g(x)|u|^{p-2}u + f(x,u) + h(x) \tag{4.5}$$

en $\mathbb{R}^N$. Suponemos que:

1. $1 < p < N$ y $\varepsilon > 0$
2. Sobre el peso $g$ hacemos las mismas suposiciones $(G^+)$ de [28]
3. $h \in L^{p^{*\prime}}(\mathbb{R}^N)$ y $\int_{\mathbb{R}^N} h\varphi_1 dx = 0$
4. Asumimos que la no linealidad $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y satisface:
   - (H0) La condición de crecimiento

     $$|f(x,u)| \leq c_1(x) + c_2(x)|u|^{\sigma-1}$$

     con $\sigma < p$ y $c_1 \in L^{(p^*)'}(\mathbb{R}^N)$, $c_2 \in L^{(p^*/\sigma)'}(\mathbb{R}^N) \cap L_{loc}^{(p/\sigma)'+\eta}(\mathbb{R}^N)$ para algún $\eta > 0$.
   - (H1) Si $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt$ entonces

     $$\frac{1}{\sigma}uf(x,u) - F(x,u) \to -\infty \text{ , cuando } |u| \to \infty$$

- (H2) La siguiente condición de signo: existe $R > 0$ tal que:

$$uf(x,u) > 0 \, \forall x \in \mathbb{R}^N \ , |u| \geq R$$

Integrando la condición $(H0)$ obtenemos:

$$F(x,u) \leq c_1(x)|u| + c_2(x)\frac{|u|^\sigma}{\sigma}$$

En la siguiente sección si queremos que la funcional $C(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx$ sea de clase $C^1(D^{1,p}(\mathbb{R}^N))$, la condición $(H0)$ es la natural. El principal resultado de este capítulo es el siguiente:

**Teorema 4.1.3** *Bajo las hipótesis anteriores (1 a 4), el problema (4.5) tiene por lo menos tres soluciones en $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño.*

## 4.2 Algunos lemas técnicos

Para la prueba del teorema 4.1.3 necesitaremos los siguientes resultados:

### 4.2.1 Un resultado de compacidad en espacios $L^p$ con peso

Si $u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N$, $1 \leq q \leq p^*$, $\frac{1}{r} + \frac{q}{p^*} = 1$ y $g \in L^r, g \geq 0$, entonces de las desigualdades de Hölder y Sobolev, tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q g \leq C \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \tag{4.6}$$

y se sigue que $D^{1,p} \subset L^q_g$. El siguiente resultado prueba que bajo condiciones apropiadas, esta inmersión es compacta. (Otros resultados previos pueden verse en [15]).

**Proposición 4.2.1** *Sean $1 \leq q < p^*$, $\frac{1}{r} + \frac{q}{p^*} = 1$, $g \in L^r \cap L^{r+\varepsilon}_{loc}$ para algún $\varepsilon > 0$. Entonces la inmersión*

$$D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q_g(\mathbb{R}^N)$$

*es compacta.*

**Demostración:** Sea $(u_n) \subset D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ una sucesión acotada:

$$\|u_n\|_{1,p} \le C$$

Entonces, como $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ es reflexivo, podemos extraer una subsucesión débilmente convergente $(u_{n_k})$. Por simplicidad asumiremos que that $u_n \rightharpoonup u$. Queremos probar que de hecho $u_n \to u$ fuertemente. De las desigualdades de Hölder y Sobolev tenemos que:

$$\int_{|x|>R} g|u-u_n|^q \le \left(\int_{|x|>R} |g|^r\right)^{1/r} \left(\int_{|x|>R} |u_n - u|^{p^*}\right)^{p/p^*} \le C\left(\int_{|x|>R} |g|^r\right)^{1/r}$$

Dado $\varepsilon > 0$, como $g \in L^r$ podemos elegir $R > 0$ verificando

$$\int_{|x|>R} g|u - u_n|^q \le \frac{\varepsilon}{2}$$

Ahora bien, $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ continuamente, y por el terorema de Rellich-Kondrachov

$$u_n \to u \text{ fuertemente en } L^t(B_R)$$

si $1 \le t < p^*$. Elegimos $s > 1$ tal que $s' = r + \varepsilon$ entonces $s < \frac{p^*}{q}$, and

$$\int_{|x|\le R} g|u_n - u|^q \le \left(\int_{|x|\le R} |g|^{s'}\right)^{1/s'} \left(\int_{|x|<R} |u - u_n|^{qs}\right)^{1/s} \le \frac{\varepsilon}{2}$$

si $n \ge n_0(\varepsilon)$. Luego $u_n \to u$ en $L^p_g(\mathbb{R}^N)$.

### 4.2.2 Algunos resultados sobre la funcional asociada

Bajo las mismas hipótesis del teorema 4.1.3, tenemos los siguientes resultados:

**Lema 4.2.2** *Sea $C : D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dada por $C(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx$. Entonces $C \in C^1(D^{1,p}(\mathbb{R}^N))$ y $C'(u)(h) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)h$*

Por la desigualdad de Hölder tenemos que

$$|C(u)| \le \int_{\mathbb{R}^N} c_1(x)|u| + c_2(x)\frac{|u|^\sigma}{\sigma}dx \le \|c_1\|_{(p^*)'} \|u\|_{p^*} + \frac{1}{\sigma}\|c_2\|_{(p^*/\sigma)'} \|u\|^\sigma_{p^*}$$

De la inmersión $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ concluimos que $C(u)$ está bien definido. De manera similar,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)h\right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} c_1(x)h + c_2(x)|u|^{\sigma-1}|h|$$

$$\leq \|c_1\|_{(p^*)'} \|h\|_{p^*} + \|c_2\|_{(p^*/\sigma)'} \|u\|_{p^*}^{\sigma-1} \|h\|_{p^*}$$

y tenemos que $\int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)h$ también está bien definida. Usando un argumento similar al de [23], concluimos la demostración.

**Lema 4.2.3** *Supongamos que $f(x,u)$ es una función de Caratheodory que verifica:*

$$|f(x,u)| \leq c_1(x) + c_2(x)|u|^{\sigma-1}$$

*donde $1 \leq \sigma < p^*$, $c_1 \in L^{s_1}(\mathbb{R}^N)$ con $s_1 = p^{*\prime}$, y $c_2 \in L^{s_2} \cap L^{s_2+\varepsilon}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ con $s_2 = \frac{p^*}{p^*-\sigma}$. Entonces el operador de Nemitsky $N_f : D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \to L^{p^{*\prime}}(\mathbb{R}^N)$ dado por $N_f(u) = f(x,u)$ es compacto.*

**Demostración:** Sea $(u_n)$ una sucesión en $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ débilmente en $D^{1,p}$. Podemos suponer, pasando a una subsucesión, que

$$u_n \to u \text{ en c.t.p.}$$

Como $\sigma < p^*$, aplicamos la proposición 4.2.1 con $q = (\sigma-1)s_1 < p^*$, $g = c_2^{s_1}$. Notamos que $g \in L^r \cap L^{r+\varepsilon'}_{loc}$ con $r = \frac{p^*-1}{p^*-\sigma}$. Para una subsucesión obtenemos que:

$$u_n \to u \;\text{ en } L^q_g$$

Por el lema 1.6.3, obtenemos después de pasar a una subsucesión, una función $m \in L^q_g(\mathbb{R}^N)$ tal que:

$$|u_n(x)| \leq m(x)$$

en c.t.p. con respecto a la medida $g(x)dx$. Entonces por la condición $(H0)$ deducimos que

$$|f(x,u)-f(x,u_n)|^{s_1} \leq 2^{s_1}[|f(x,u)|^{s_1}+|f(x,u_n)|^{s_2}] \leq 2^{s_1+1}[c_1(x)^{s_1}+c_2(x)^{s_1}|m|^{(\sigma-1)s_1}]$$

y podemos aplicar el teorema de convergencia mayorada a la integral

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x,u) - f(x,u_n)|^{s_1} dx$$

para ver que $f(x,u_n) \to f(x,u)$ in $L^{s_1}(\mathbb{R}^N)$.

**Observación 4.2.4** *Las soluciones débiles de la ecuación (4.5) son los puntos críticos en $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ de la funcional*

$$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx - \frac{\lambda_1 - \varepsilon}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p g(x)dx - \int_{\mathbb{R}^N}[F(x,u) + h(x)u]$$

*Bajo las suposiciones anteriores, es fácil chequear que $J_\varepsilon \in C^1(D^{1,p})$.*

Sea

$$W = \left\{ w \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) : \int g(x)|\varphi_1|^{p-2}\varphi_1 w = 0 \right\}$$

Observamos que como consecuencia de la proposición 4.2.1, $W$ es un subespacio débilmente cerrado.

**Lema 4.2.5** *Si $\varepsilon < \lambda_1$, $J_\varepsilon$ es coerciva en $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, y existe $m > 0$ tal que*

$$inf_{u\in W} J_\varepsilon(u) \geq -m$$

**Demostración:** Suponemos $0 < \varepsilon < \lambda_1$, entonces

$$J_\varepsilon(u) \geq \frac{1}{p}\left(1 - \frac{\lambda_1 - \varepsilon}{\lambda_1}\right)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p - \int_{\mathbb{R}^N}(F(x,u) + hu)$$

y

$$J_\varepsilon(u) \geq \frac{\varepsilon}{p\lambda_1}\|u\|_{1,p}^p - C_1 - C_2\|u\|_{1,p}^\sigma - \|h\|_{(p^*)'}\|u\|_{p^*}.$$

Como $\sigma < p$, se sigue que $J_\varepsilon$ es coerciva. Definimos:

$$\lambda_W = \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 : w \in W, \int_{\mathbb{R}^N} g(x)|w(x)|^p = 1\right\}$$

Afirmamos que $\lambda_W > \lambda_1$. De hecho, si fuera $\lambda_1 = \lambda_W$ entonces existiría $w \in W$ verificando

$$\int_{\mathbb{R}^N} |w|^p = \lambda_1, \int_{\mathbb{R}^N} |w|^p g(x)dx = 1$$

Luego por la simplicidad del primer autovalor, $w = c\varphi_1$ pero esto contradice la definición de $W$. Entonces, para $u \in W$ tenemos

$$J_\varepsilon(u) \geq \frac{\lambda_W - \lambda_1}{p\lambda_W}\|u\|_{1,p}^p - C_1 - C_2\|u\|_{1,p}^\sigma - \|h\|_{(p^*)'}\|u\|_{p^*}.$$

Luego $J_\varepsilon$ es uniformememente coerciva en $W$ respecto a $\varepsilon$, y en particular es uniformemente acotada inferiormente.
Para el próximo resultado necesitamos las siguientes definiciones: Consideramos los conjuntos abiertos:

$$O^+ = \left\{ w \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) : \int g(x)|\varphi_1|^{p-2}\varphi_1 w > 0 \right\}$$

$$O^- = \left\{ w \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) : \int g(x)|\varphi_1|^{p-2}\varphi_1 w < 0 \right\}$$

La siguiente es una variante de la condición de Palais-Smale $(PS)$. Diremos que una funcional $\phi$ verifica la condición $(PS)_{O^\pm,c}$ si cualquier sucesión $(u_n)$ en $O^+$ (respectivamente en $O^-$) con $\phi(u_n) \to c$, $\phi'(u_n) \to 0$, tiene una subsucesión convergente $(u_{n_k}) \to u \in O^+$.

**Proposición 4.2.6** *El operador* $-\Delta_p : D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \to D^{1,p}(\mathbb{R}^N)^*$ *verifica la condición* $(S_+)$*: si* $u_n \rightharpoonup u$ *(débilmente en* $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *)y* $\limsup_{n\to\infty} \langle -\Delta_p u_n, u_n - u \rangle \leq 0$, *entonces* $u_n \to u$ *(fuertemente en* $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *)*

**Demostración:** Esto se sigue de la convexidad uniforme de $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ (ver [28]). Es un caso particular de la proposición 2.2.9

**Lema 4.2.7** $J_\varepsilon$ *verifica la condición* $(PS)$, *y verifica* $(PS)_{O^\pm,c}$ *si* $c < -m$.

**Demostración:** Sea $(u_n) \subset D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ una sucesión de $(PS)$:

$$J_\varepsilon(u_n) \to c, \; J'_\varepsilon(u_n) \to 0$$

Como $J_\varepsilon$ es coerciva, se sigue que $(u_n)$ está acotada en $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, que es reflexivo, luego (después de pasar a una subsucesión) podemos asumir que $u_n \to u$ débilmente. Queremos mostrar que de hecho, $u_n \to u$ fuertemente. Tenemos que

$$J'_\varepsilon(u_n)(u_n - u) = \int |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla(u_n - u) - (\lambda_1 - \varepsilon)\int |u_n|^{p-2}u_n(u_n - u)g(x)dx$$

$$-\int h(u_n - u) - \int f(x, u_n)(u_n - u)$$

Claramente $\int h(u_n - u) \to 0$, ya que $u_n \rightharpoonup u$ débilmente. $u_n \to u$ fuertemente en $L^p_g(\mathbb{R}^N)$, ya que la inmersión $D^{1,p} \subset L^p_g$ es compacta. Se sigue que:

$\int |u_n|^{p-2}u_n(u_n - u)g(x)dx \to 0$ De la proposición 4.2.3 y la desigualdad de Hölder deducimos

$$\int f(x,u_n)(u_n-u)dx = \int [f(x,u)-f(x,u_n)](u_n-u)dx + \int f(x,u)(u_n-u) \to 0$$

Como $J'_\varepsilon(u_n)(u_n - u) \to 0$, se sigue que:

$$\int |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla(u_n - u)dx \to 0$$

o de manera equivalente,

$$\langle -\Delta_p u_n, u_n - u\rangle \to 0$$

Por la condición $(S_+)$, ésto implica que $u_n \to u$ fuertemente en $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ Para probar que $J_\varepsilon$ satisface $(PS)_{O^\pm,c}$ para $c < -m$, sea $(u_n) \subset O^\pm$ una sucesión de $(PS)_c$. Entonces existe una subsucesión convergente: $u_{n_k} \to u$, y basta probar que $u \in O^\pm$, pero si $u \in \partial O^\pm = W$, entonces $c = J(u) \geq -m$, lo que es una contradicción.

**Lema 4.2.8** *Si $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño, existen dos números*

$$t^- < 0 < t^+$$

*tales que $J_\varepsilon(t^\pm\varphi_1) < -m$.*

**Demostración:** Como $\int h(x)\varphi_1(x)dx = 0$, tenemos que:

$$J_\varepsilon(t\varphi_1) = \frac{1}{p}\int \varepsilon t^p\varphi_1^p g(x) - \int F(x, t\varphi_1(x))dx$$

y como $\varphi_1 \in L^\infty$, podemos asumir que

$$0 \leq \varphi_1(x) \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Primero, como $\varphi_1^p g \in L^1$, podemos elegir $\rho$ suficientemente grande como para que:

$$\frac{1}{p}\int_{|x|>\rho} \varphi_1^p g dx < \frac{m}{2}$$

y partimos la integral $J_\varepsilon$ en dos partes:

$$J_\varepsilon = J_\varepsilon^1 + J_\varepsilon^2$$

donde $J_\varepsilon^1$ es la integral sobre $|x| \leq \rho$, y $J_\varepsilon^2$ es la integral sobre $|x| > \rho$. Definimos:

$$A(t) = \{x : |x| \leq \rho : \varphi_1(x) > R/t\}$$
$$B(t) = \{x : |x| \leq \rho : \varphi_1(x) \leq R/t\}$$

Entonces

$$\int_{B(t)} \left[\frac{\varepsilon}{p} t^p \varphi_1^p - F(x, t\varphi_1(x))\right] dx$$

es uniformemente acotada en $\varepsilon$ y $t$ para $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Sea

$$M_\varepsilon(t) = \int_{A(t)} \left(\frac{1}{p} t\varphi_1(x) f(x, t\varphi_1(x)) - F(x, t\varphi_1(x))\right) dx$$
$$+ \int_{B(t)} \left[\frac{\varepsilon}{p} t^p \varphi_1^p - F(x, t\varphi_1(x))\right] dx$$

Entonces, por $(H1)$ y el lema de Fatou

$$M_\varepsilon(t) < -2m$$

para $t$ suficientemente grande, y $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Por $(H2)$ existe $0 < \varepsilon_t \leq \varepsilon_0$ tal que:

$$\varepsilon_t u^{p-1} g(x) < f(x, u) \quad \text{en } \overline{B_\rho} \times [R, t]$$

Luego, si $\varphi_1(x) > R/t$ y $|x| \leq \rho$ tenemos:

$$\varepsilon_t t^{p-1} \varphi_1(x)^{p-1} g(x) < f(x, t\varphi_1)$$

y entonces,

$$J_\varepsilon^1(t\varphi_1) \leq M_\varepsilon(t) < -2m$$

Por $(H2)$, como $F(x, t\varphi_1) \geq 0$, si elegimos $\varepsilon_t$ que verifique

$$\varepsilon_t < \frac{1}{t^p}$$

entonces,

$$J_{\varepsilon_t}^2(t\varphi_1) \leq \frac{1}{p} \int_{|x|>\rho} \varepsilon_t t^p \varphi_1^p dx < \frac{m}{2}$$

y concluimos que

$$J_{\varepsilon_t}(t\varphi_1) < -m$$

para cualquier $\varepsilon_t \leq \varepsilon_0$. De modo similar, eligiendo primero $t$ suficientemente grande, y después $\varepsilon_t$ pequeño, podemos probar que $J_{\varepsilon_t}(-t\varphi_1) < -m$

### 4.2.3 Demostración del teorema 4.1.3

Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, de los lemas 4.2.7 y 4.2.8 se deduce que:

$$-\infty < \inf_{O^{\pm}} J_\varepsilon < -m$$

y como $(PS)_{c,O^{\pm}}$ vale para $c < -m$, se sigue del lema de deformación que los ínfimos anteriores se alcanzan, digamos en $u^- \in O^-$y $u^+ \in O^+$. Como $O^{\pm}$ son ambos abiertos en $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, hemos encontrado dos puntos críticos de $J_\varepsilon$.
Sea

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J_\varepsilon(\gamma(t))$$

con

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], D^{1,p}(\mathbb{R}^N) : \gamma(0) = u^-, \gamma(1) = u^+\}$$

Notamos que $\gamma([0,1]) \cap W \neq 0$ para cualquier $\gamma \in \Gamma$, de modo que

$$c = \inf_{W} J_\varepsilon \geq -m$$

$J_\varepsilon$ verifica $(PS)$, y entonces del teorema del paso de la montaña de Ambrossetti-Rabinowitz [3] concluimos que $c$ es un tercer valor crítico de $J_\varepsilon$, y como $J_\varepsilon(u^{\pm}) < -m$, el correspondiente punto crítico es distinto de $u^+, u^-$.

# Capítulo 5

# Soluciones de Ecuaciones del tipo del p-Laplaciano en espacios de Lorentz

## 5.1 Introducción

Consideramos el problema lineal

$$\begin{cases} L(u) \equiv \operatorname{div}(M(x)\nabla u) & = & \operatorname{div} F & \text{en} & \Omega \\ u & = & 0 & \text{en} & \partial\Omega \end{cases} \tag{5.1}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado y $M(x)$ es una matriz simétrica en $L^\infty(\Omega)^{N\times N}$ satisfaciendo la condición de elipticidad:

$$M(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2 \text{ para } x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^N\ (\alpha > 0) \tag{5.2}$$

y el problema no lineal

$$\begin{cases} N(u) \equiv \operatorname{div}(a(x, u(x), \nabla u(x))) & = & \operatorname{div} F & \text{en} & \Omega \\ u & = & 0 & \text{en} & \partial\Omega \end{cases} \tag{5.3}$$

Específicamente, consideramos un operador monótono del tipo de Leray-Lions ([17],[16]): $A(u) = \operatorname{div}(a(x, u, \nabla u))$, donde $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una función de Caratheodory que verifica las siguientes condiciones:

1. Existen dos constantes $\alpha, \beta > 0$ y una función $d(x)$ en $L^{p'}(\Omega)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) tal que:
$$a(x, s, \xi)\xi \geq \alpha|\xi|^p \tag{5.4}$$

$$|a(x,s,\xi)| \leq \beta(d(x) + |s|^{p-1} + |\xi|^{p-1})$$

2. Para $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$, $\xi \neq \eta$, y en c.t.p. para $x \in \Omega$ :

$$[a(x,s,\xi) - a(x,s,\eta)] \cdot (\xi - \eta) > 0$$

Remarcamos que para $a(x,s,\xi) = |\xi|^{p-2}\xi$, el operador de Leray-Lions $A = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ es el p-laplaciano.
Los principales resultados de este capítulo son:

**Teorema 5.1.1** *Sea $F \in L^{q,q^\#}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, con $L^{q,q^\#}$ el espacio de Lorentz, que se define a continuación , $2 < q < N$, $q^* = \frac{Nq}{N-q}$ y $q^\# = \frac{q(N-2)}{N-q}$. Entonces existe una única solución $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^{q^*,q^\#}(\Omega)$ de (5.1). Además tenemos la estimación a-priori:*

$$\|u\|_{L^{q^*,q^\#}(\Omega)} \leq C|F|_{L^{q,q^\#}} \ (C > 0)$$

**Teorema 5.1.2** *Sea $F \in L^{q,q^\#}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, con $L^{q,q^\#}$ el espacio de Lorentz y:*

$$p' < q < \frac{N}{p-1}$$

$$q^\# = \frac{(N-p)q}{N-(p-1)q}$$

*Entonces existe una única solución $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^{r,s}(\Omega)$ de (5.3) donde:*

$$r = \frac{N(p-1)q}{N-(p-1)q}$$

$$s = \frac{(N-p)(p-1)q}{N-(p-1)q}$$

*y además tenemos la estimación a-priori:*

$$\|u\|_{L^{r,s}} \leq C\|F\|_{L^{q,q^\#}}^{1/(p-1)} \ (C > 0)$$

**Observación 5.1.3** *La formulación débil del problema (5.1) es: encontrar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla\varphi = \int_\Omega F \cdot \nabla\varphi \ \forall\varphi \in H_0^1(\Omega)$$

Si $F \in (L^2(\Omega))^N$, entonces div$F \in H^{-1}(\Omega)$ y por el lema de Lax-Milgram obtenemos la existencia de una única solución en $H_0^1(\Omega)$.

Cuando $F \in L^q$ con $q > 2$, obtenemos una mejor sumabilidad de la solución de acuerdo al siguiente teorema de G. Stampachia ([27], Teorema 4.2)

**Teorema 5.1.4** *Sea $F \in L^q(\Omega, \mathbb{R}^N)$con $q > 2$, y supongamos que $u$ es una solución débil del problema (5.1). Entonces tenemos:*

1. *Si $2 < q < N$ entonces $u \in L^{q^*}(\Omega)$*
2. *Si $q = N$ entonces $u \in L^p(\Omega)$ para cualquier $p < +\infty$*
3. *Si $q > N$ tenemos que $u \in L^\infty(\Omega)$*

Aquí $q^* = \frac{qN}{N-q}$ es el exponente crítico de Sobolev.

Como fue observado por Boccardo ([6]), un resultado similar vale en el caso no lineal para operadores de tipo monótono.

En el teorema 5.1.1, tenemos que $q^\# > q$, luego $L^q(\Omega) \subset L^{q,q^\#}(\Omega)$, y $q^\# < q^*$, por lo que $L^{q^*,q^\#}(\Omega) \subset L^{q^*}(\Omega)$

## 5.2 Preliminares: Espacios de Lorentz

Los espacios de Lorentz [20] son una generalización de los espacios $L^p$ y están relacionados con varias cuestiones del análisis armónico, en conección con el teorema de interpolación de Marcinkiewicz (ver [30], [26]) y los operadores de convolución (ver [22]).

En esta sección recordamos ciertas definiciones y resultados [29] que son necesarios para probar los teoremas.

**Definición 5.2.1** *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $u : X \to \mathbb{R}^k$ una función medible. Supongamos que $\mu(x \in X : u(x) > t) < \infty$ para todo $t$. La función de distribución de $u$ se define por:*

$$d(t) = d_u(t) = \mu(\{x \in X : |u(x)| > t\})$$

$u^*$, el reordenamiento decreciente de $u$, se define por $u^*(s) = \min\{t \geq 0 : d_u(t) \leq s\}$.

Para $1 < p < \infty$ se define la pseudo-norma

$$|u|_{p,q} = |u|_{L^{p,q}} = \left\{ \int_0^\infty (s^{1/p} u^*(s))^q \frac{ds}{s} \right)^{1/q}$$

y

$$|u|_{p,\infty} = \sup_{s>0} s^{1/p} u^*(s)$$

El espacio de Lorentz $L^{p,q}(X)$ se define como el conjunto de funciones medibles con $|u|_{p,q} < \infty$. Definiendo:

$$u^{**}(s) = \frac{1}{s} \int_0^s u^*(t) dt$$

tenemos que:

$$(u+v)^{**} \leq u^{**} + v^{**}$$

y entonces

$$\|u\|_{p,q} = \left( \int_0^\infty (s^{1/p} u^{**}(s))^q \frac{ds}{s} \right)^{1/q}$$

es una norma.

**Lema 5.2.2** *(ver [29], (4.v))*

1. *Si* $p > 1$ *entonces:*

$$\|u\|_{L^{p,1}} = \frac{p}{p-1} \int_0^\infty s^{1/p} u^*(s) \frac{ds}{s}$$

2. *Si* $p > 1$ *y* $1 < q \leq \infty$ *entonces:*

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right) \|u\|_{L^{p,q}} \leq |u|_{L^{p,q}} \leq \|u\|_{L^{p,q}}$$

Los espacios de Lorentz $L^{p,p}$ coinciden con los espacios $L^p$ clásicos:

**Proposición 5.2.3** *(ver [22], lemma 2.2) Sean* $1 < p < \infty$ *y* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, *entonces tenemos:*

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^{p,p}} \leq p'\|f\|_{L^p}$$

Usando este resultado y el siguiente podemos ver las diferencias entre el resultado que se obtiene en $L^p$ y el obtenido en los espacios de Lorentz.

**Lema 5.2.4** *(ver [29], 4.vii)) Sea $p > 1$ y $1 \leq q < r \leq \infty$. Entonces $L^{p,q} \subset L^{p,r}$ con inclusión continua.*

En los espacios de Sobolev es posible mejorar la inmersión de Sobolev:

**Teorema 5.2.5** *([29], Teorema 4.A) Sea $1 \leq p < N$ entonces $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p^*,p}(R^N)$, donde $p^* = \frac{Np}{N-p}$, con inclusión continua.*

Usando un argumento usual de densidad obtenemos:

**Corolario 5.2.6** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $1 < p < N$, entonces $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{p,p^*}(\Omega)$ siendo $p^* = \frac{pN}{N-p}$ con inclusión continua, y para $\partial\Omega \in C^1$ tenemos el mismo resultado para $W^{1,p}(\Omega)$.*

También tenemos una desigualdad de tipo Hölder:

**Lema 5.2.7** *Sean $f \in L^{p,q}(X)$ y $g \in L^{p',q'}(X)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Entonces $f \cdot g \in L^1(X)$ y vale la siguiente desigualdad:*

$$\int_X |f \cdot g| d\mu \leq |f|_{p,q} |g|_{p',q'}$$

Observamos que por ([29], Teorema 1.A) tenemos:

$$\int_X |f \cdot g| d\mu \leq \int_0^\infty f^*(s) g^*(s) ds = \int_0^\infty s^{1/p} f^*(s) \frac{1}{s^{1/q}} s^{1/p'} g^*(s) \frac{1}{s^{1/q'}} ds$$

$$\leq \left\{ \int_0^\infty \left(s^{1/p} f^*(s)\right)^q \frac{ds}{s} \right\}^{1/q} \left\{ \int_0^\infty \left(s^{1/p'} g^*(s)\right)^{q'} \frac{ds}{s} \right\}^{1/q'} = |f|_{p,q} |g|_{p',q'}$$

donde la última desigualdad se sigue de la desigualdad de Hölder usual.

**Observación 5.2.8** *Para $k > 0$ y $x \in \mathbb{R}$ definimos la función de truncamiento:*

$$T_k(x) = \begin{cases} -k & si \quad x < -k \\ x & si \quad -k \leq x \leq k \\ k & si \quad x > k \end{cases}$$

*Sea $u : X \to \mathbb{R}$ una función medible. Entonces tenemos:*

$$T_k(u^*)(x) = (T_k(u))^*(x)$$

*Se sigue que si*

$$\|T_k(u)\|_{L^{(p,q)}(X)} \leq C \, \forall k$$

*entonces $u \in L^{p,q}(X)$ y$\|u\|_{L^{(p,q)}(X)} \leq C$.*

**Observación 5.2.9** *Sean $f \in L^{p,q}$y $m > 0$. Entonces $|f|^m \in L^{pm,qm}$*

$$||f|^m|_{p,q} = |f|^m_{mp,mq}$$

De hecho tenemos

$$d_{|u|^m}(t) = d_u(t^{1/m})$$

Se sigue que $(|u|^m)^* = (u^*)^m$ y por lo tanto:

$$||u|^m|_{p,q} = \left\{ \int_0^\infty (s^{1/pm} u^*(s))^{mq} \frac{ds}{s} \right)^{1/q} = |u|^m_{pm,qm}$$

## 5.3 El Problema Lineal. Prueba del Teorema 5.1.1

Elegimos $\varphi = \frac{1}{2m+1}|T_k(u)|^{2m}T_k(u)$ como función de prueba en la formulación débil del problema. Luego $\nabla\varphi = |T_k(u)|^{2m}\nabla(T_k u)$, $\varphi \in H_0^1$ y

$$\int_\Omega |T_k(u)|^{2m} M(x)\nabla u \cdot \nabla T_k(u) = \int_\Omega |T_k(u)|^{2m} F \cdot \nabla T_k(u) \tag{5.5}$$

Usando la condición de elipticidad (5.2), podemos estimar el primer término de la siguiente manera:

$$\int_\Omega |T_k(u)|^{2m} M(x)\nabla u \cdot \nabla T_k(u) = \int_{\{|u|\leq k\}} |T_k(u)|^{2m} M(x)\nabla T_k(u) \cdot \nabla T_k(u)$$

$$= \int_\Omega |T_k(u)|^{2m} M(x)\nabla T_k(u)\cdot\nabla T_k(u) \geq \alpha \int_\Omega |\nabla T_k(u)|^2 |T_k(u)|^{2m}$$

En cuanto al segundo término, obtenemos:

$$\int_\Omega |T_k(u)|^{2m} F\cdot\nabla T_k(u) \leq \int_\Omega |T_k(u)|^{2m}|F|\cdot|\nabla T_k(u)|$$

$$= \int_\Omega (|T_k(u)|^m|F|)\cdot(|T_k(u)|^m|\nabla T_k(u)|)$$

$$\leq \left(\int_\Omega |T_k(u)|^{2m}|F|^2\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |T_k(u)|^m|\nabla T_k(u)|^2\right)^{1/2}$$

De la desigualdad de Hölder en los espacios de Lorentz,

$$\int_\Omega |T_k(u)|^{2m}|F|^2 \leq \left||F|^2\right|_{L^{q/2,q^\#/2}(\Omega)}\left||T_k(u)|^{2m}\right|_{L^{q/(q-2),q^\#/(q^\#-2)}(\Omega)}$$

$$\leq |F|^2_{L^{q,q^\#}}|T_k u|^{2m}_{L^{2mq/(q-2),2mq^\#/(q^\#-2)}}$$

De modo que el segundo término de (5.5) es más pequeño que

$$|F|_{L^{q,q^\#}}|T_k u|^m_{L^{2mq/(q-2),2mq^\#/(q^\#-2)}}\left(\int_\Omega |T_k(u)|^{2m}|\nabla T_k(u)|^2\right)^{1/2}$$

y escribiendo todo junto,

$$\alpha\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^2|T_k(u)|^{2m} \leq |F|_{L^{q,q^\#}}|T_k u|^m_{L^{2mq/(q-2),2mq^\#/(q^\#-2)}}\left(\int_\Omega |T_k(u)|^{2m}|\nabla T_k(u)|^2\right)^{1/2}$$

o equivalentemente,

$$\alpha\left(\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^2|T_k(u)|^{2m}\right)^{1/2} \leq |F|_{L^{q,q^\#}}|T_k u|^m_{L^{2mq/(q-2),2mq^\#/(q^\#-2)}(\Omega_k)}$$

Por otro lado tenemos que:

$$|\nabla T_k(u)|^2|T_k(u)|^{2m} = \left|\nabla\left(\frac{|T_k(u)|^{m+1}}{m+1}\right)\right|^2$$

entonces

$$\alpha\left\|\nabla\left(\frac{|T_k(u)|^{m+1}}{m+1}\right)\right\|_{L^2(\Omega)} \leq |F|_{L^{q,q^\#}(\Omega)}|T_k u|^m_{L^{2mq/(q-2),2mq^\#/(q^\#-2)}}$$

y por la desigualdad de Sobolev en los espacios de Lorentz:

$$\| |T_k(u)|^{m+1} \|_{L^{2^*,2}(\Omega)} \leq C|F|_{L^{q,q^\#}} |T_k u|^m_{L^{2mq/(q-2),2mq^\#/(q^\#-2)}}$$

donde $C$ es una constante que depende de la constante de elipticidad, de la constante en la desigualdad de Sobolev y de $m$, pero no de $k$. Finalmente tenemos que:

$$\|T_k(u)\|^{m+1}_{L^{2^*(m+1),2(m+1)}(\Omega_k)} \leq C|F|_{L^{q,q^\#}} |u|^m_{L^{2mq/(q-2),2mq^\#/(q^\#-2)})}$$

Ahora elegimos los exponentes de modo de tener la misma norma en ambos miembros de la desigualdad:

i) $2^*(m+1) = \frac{2mq}{q-2}$

ii) $2(m+1) = \frac{2mq^\#}{q^\#-2}$.

La condición i) es la misma del teorema de Stampachia, y nos da: $m = \frac{N(q-2)}{2(N-q)}$. Con este valor de $m$, obtenemos

$$2^*(m+1) = \frac{2mq}{q-2} = \frac{2q}{q-2}\frac{N(q-2)}{2(N-q)} = \frac{qN}{N-q} = q^*$$

Finalmente, de ii) obtenemos

$$q^\# = 2(m+1) = \frac{q(N-2))}{N-q}$$

y entonces

$$\|T_k(u)\|_{L^{q^*,q^\#}} \leq C|F|_{L^{q,q^\#}}$$

con $C$ independente de $k$. Concluimos (por la observación 5.2.8 ) que $u \in L^{q^*,q^\#}(\Omega)$ y

$$\|u\|_{L^{q^*,q^\#}(\Omega)} \leq C|F|_{L^{q,q^\#}}$$

como queríamos demostrar.

## 5.4 El Problema No Lineal. Prueba del teorema 5.1.2

Recordamos que si $F \in L^{p'}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, entonces $\mathrm{div}F \in (W_0^{1,p}(\Omega))'$, de modo que por el teorema de Leray-Lions ([17]) existe una única solución del problema:

$$\begin{cases} N(u) \equiv \mathrm{div}(a(x,u(x)\nabla u(x))) = \mathrm{div}F & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

en $W_0^{1,p}(\Omega)$. Para probar el teorema 5.1.2, elegimos:

$$\varphi = \frac{|T_k(u)|^{mp} T_k(u)}{mp+1}$$

como función de prueba en la formulación débil. Obtenemos:

$$\int_\Omega |T_k(u)|^{mp} a(x,u,\nabla u) \cdot \nabla T_k(u) = \int_\Omega |T_k(u)|^{mp} F \cdot \nabla T_k(u)$$

Podemos estimar el primer término de la siguiente manera, utilizando la condición (5.4):

$$\int_\Omega |T_k(u)|^{mp} a(x,u,\nabla u) \cdot \nabla T_k(u) = \int_{\{|u|\le k\}} |T_k(u)|^{mp} a(x.u,\nabla u) \cdot \nabla T_k(u)$$

$$= \int_\Omega |T_k(u)|^{pm} a(x,u,\nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u) \geq \alpha \int_\Omega |\nabla T_k(u)|^p |T_k(u)|^{2m}$$

y usando la desigualdad de Hölder en el segundo miembro, obtenemos:

$$\int_\Omega |T_k(u)|^{mp} F \cdot \nabla T_k(u) \leq \int_\Omega (|T_k(u)|^{m(p-1)}|F|) \cdot |T_k(u)|^m |\nabla T_k(u)|$$

$$\leq \left(\int_\Omega |T_k u|^{mp} |F|^{p'}\right)^{1/p'} \left(\int_\Omega |T_k(u)|^{mp} |\nabla T_k u|^p\right)^{1/p}$$

y entonces:

$$\int_\Omega |T_k u|^{mp} |\nabla T_k u|^p \leq \frac{1}{\alpha^{p'}} \int_\Omega |T_k u|^{mp} |F|^{p'}$$

De la desigualdad de Hölder y del hecho de que $F \in L^{q,q^\#}(\Omega)$, obtenemos:

$$\int_\Omega |T_k(u)|^{mp} |F|^{p'} \leq \left\| |F|^{p'} \right\|_{L^{q/p',q^\#/p'}} \| |T_k(u)|^{mp} \|_{L^{q/(q-p'),q^\#/(q^\#-p')}}$$

o de manera equivalente:

$$\int_\Omega |T_k(u)|^{mp} |F|^{p'} \leq \|F\|^{p'}_{L^{q,q^\#}} \|T_k(u)\|^{mp}_{L^{r,s}}$$

donde

$$r = \frac{mpq}{q-p'}, s = \frac{mpq^\#}{q^\# - p'}$$

Por otro lado:

$$\int_\Omega |T_k(u)|^{mp}|\nabla T_k u|^p = \int_\Omega \left|\nabla\left(\frac{|T_k(u)|^m T_k(u)}{m+1}\right)\right|^p$$

$$\geq C\, \| |T_k(u)|^m T_k(u)\|^p_{L^{p^*,p}} = C\, \|T_k(u)\|^{(m+1)p}_{L^{p^*(m+1),p(m+1)}}$$

con $C = C(m,\Omega)$, por la desigualdad de Sobolev. Entonces:

$$\|T_k(u)\|^{(m+1)p}_{L^{p^*(m+1),p(m+1)}} \leq C\, \|F\|^{p'}_{L^{q,q^\#}}\, \|T_k(u)\|^{mp}_{L^{r,s}}$$

Ahora elegimos $m$ y $q^\#$de modo que:
$r = p^*(m+1) = \frac{mp'q}{q-p'}$, y $s = p(m+1) = \frac{mp'q^*}{q^*-p'}$.
Resolviendo la primera ecuación obtenemos el valor de $m$:

$$m = \frac{\frac{1}{(p-1)q} - \frac{1}{N}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{(p-1)q}}$$

(Para tener que $m > 0$ suponemos que $p' < q < \frac{N}{p-1}$ ) y entonces:

$$r = p^*(m+1) = \frac{N(p-1)q}{N-(p-1)q}$$

$$s = p(m+1) = \frac{(N-p)(p-1)q}{N-(p-1)q}$$

y de la segunda ecuación tenemos:

$$q^\# = \frac{(N-p)q}{N-(p-1)q}$$

De la observación 5.2.8 obtenemos:

$$\|u\|_{L^{r,s}} \leq C\|F\|^{1/(p-1)}_{L^{q,q^\#}}$$

Esto concluye la demostración.

# Capítulo 6

# Sistemas Elípticos Cuasilineales y Problemas de Autovalores No Lineales

## 6.1 Introducción

### 6.1.1 El problema y algunos resultados previos

En este capítulo consideramos un sistema elíptico de tipo gradiente:

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= F_u(x,u,v) \\ -\Delta_q v &= F_v(x,u,v) \end{cases} \tag{6.1}$$

Primero describiremos algunos resultados del trabajo de L. Boccardo y D. de Figueiredo ([5]). Es sabido que las soluciones (débiles) de este sistema en $W = W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ son los puntos críticos de la funcional:

$$\Phi(u,v) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla v|^q - \int_\Omega F(x,u,v)$$

bajo las siguientes suposiciones:

1. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado, $1 < p, q < N$ de modo que tenemos la inmersión continua:

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega), W_0^{1,q}(\Omega) \subset L^{q^*}(\Omega)$$

2. $F : \overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es $C^1$. Para que $\Phi$ esté bien definida en $W$, $F$ tiene que verificar la siguiente condición de crecimiento:

$$|F(x,s,t)| \leq c(1 + |s|^{p^*} + |t|^{q^*}) \tag{6.2}$$

$\Phi$ será $C^1$ bajo las siguientes hipótesis más fuertes:

$$\begin{cases} |F_s(x,s,t)| \leq C(1 + |s|^{p^*-1} + |t|^{\frac{q^*(p^*-1)}{p^*}}) \\ |F_t(x,s,t)| \leq C(1 + |t|^{q^*-1} + |s|^{\frac{p^*(q^*-1)}{q^*}}) \end{cases} \tag{6.3}$$

3. La geometría de $\Phi$ depende de los valores de $\alpha$ y $\beta$ en la siguiente estimación:

$$|F(x,s,t)| \leq c(1 + |s|^{\alpha} + |t|^{\beta}) \tag{6.4}$$

donde $\alpha \leq p^*, \beta \leq q^*$. Nos interesamos en el caso en que $\alpha = p, \beta = q$ (sistemas de tipo resonante).

Para evitar la resonancia, Boccardo y de Figueiredo ([5]) introdujeron una hipótesis sobre $F$ que involucra un problema de autovalores:

$$\begin{cases} -\Delta_p u - aG_u(u,v) &= \lambda|u|^{p-2}u \\ -\Delta_q v - aG_v(u,v) &= \lambda|v|^{q-2}v \end{cases} \tag{6.5}$$

donde $a = a(x) \in L^{\infty}(\Omega)$ y $G$ es una función par $C^1$, $G : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$, que verifica:

$$G(c^{1/p}s, c^{1/q}t) = c\, G(s,t)\ \forall\ c > 0 \tag{6.6}$$

$$G(s,t) \leq K\left(\frac{1}{p}|s|^p + \frac{1}{q}|t|^q\right) \tag{6.7}$$

Diremos que una función $G$ que verifica estas condiciones es $(p,q)$-homogénea.

- Es fácil ver que (6.6) implica (6.7)
- Una función $(p,q)$-homogénea satisface:

$$\frac{1}{p}G_s(s,t)s + \frac{1}{q}G_t(s,t)t = G(s,t) \tag{6.8}$$

- Algunos ejemplos de funciones $(p,q)$-homogéneas son:

1. $G(s,t) = c_1|s|^p + c_2|t|^q$
2. $G(s,t) = c|s|^\alpha|t|^\beta$ con $\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} = 1$

donde $c_1, c_2$ constantes.

Es adecuado asumir la siguiente hipótesis sobre $F$: consideramos la función

$$L(x,s,t) = \frac{1}{p}F_s(x,s,t)s + \frac{1}{q}F_t(x,s,t)t - F(x,s,t) \tag{6.9}$$

Entonces suponemos que:

$$\lim_{\|(s,t)\|\to\infty} L(x,s,t) = \pm\,\infty \text{ uniformemente para } x \in \Omega \tag{6.10}$$

Esta suposición implica que $\Phi$ satisface la siguiente condición de compacidad de Cerami:

**Definición 6.1.1** *Sea $X$ un espacio de Banach y $\Phi \in C^1(X,\mathbb{R})$. Dado $c \in \mathbb{R}$, diremos que $\Phi$ satisface la condición $(C_c)$, si*

**i)** *Toda sucesión acotada $(u_n) \subset X$ tal que $\Phi(u_n) \to c$ y $\Phi'(u_n) \to 0$ tiene una subsucesión convergente ;*

**ii)** *Existen constantes $\delta, R, \alpha > 0$ tales que*

$$\|\Phi'(u)\|\|u\| \geq \alpha \text{ para cada} u \in \Phi^{-1}([c-\delta, c+\delta]) \text{ con } \|u\| \geq R.$$

*Si $\Phi \in C^1(X,\mathbb{R})$ satisface la condición $(C_c)$ para todo $c \in \mathbb{R}$, diremos que $\Phi$ satisface $(C)$.*

Esta condición fue introducida por Cerami [8]. En [4] fue mostrado que esta condición $(C)$ es suficiente para obtener un lema de deformación, lo que es fundamental para obtener teoremas de mini-max.
Los siguientes teoremas fueron demostrados en [5]:

**Teorema 6.1.1** *El problema (6.5) tiene un primer autovalor $\lambda_1(a)$, que puede ser caracterizado variacionalmente por:*

$$\lambda_1(a) = \inf_{(u,v)\neq(0,0)} \frac{\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla v|^q - \int_\Omega aG(u,v)}{\frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p + \frac{1}{q}\int_\Omega |v|^q}$$

*y depende con continuidad de $a$ en la norma de $L^\infty$.*

**Teorema 6.1.2** *Asumamos ( 6.3), (6.4) con $\alpha = p, \beta = q$ y las siguientes condiciones:*

1. *Existen números positivos $c$, $R$, $\mu$ y $\nu$ tales que:*

$$\frac{1}{p}sF_s(x,s,t) + \frac{1}{q}tF_t(x,s,t) - F(x,s,t) \geq c(|s|^\mu + |t|^\nu) \text{ para } |s|, |t| > R$$

2. 

$$\limsup_{|s|,|t|\to\infty} \frac{F(x,s,t)}{G(s,t)} \leq a(x) \in L^\infty$$

*donde $\lambda_1(a) > 0$.*

*Entonces la funcional $\Phi$ es acotada inferiormente y el ínfimo se alcanza.*

### 6.1.2 La existencia de infinitas autofunciones

Sea $\mathcal{C}$ la clase de los subconjuntos compactos y simétricos ($C = -C$ ) del espacio $W$. Recordamos que para $C \in \mathcal{C}$ el género de Krasnoselskii gen$(C)$ se define como el mínimo entero $n$ tal que existen una aplicación continua impar $\varphi : C \to (\mathbb{R}^n - \{0\})$ (ver por ejemplo [2] ). Notamos que:

$$\mathcal{C}_k = \{C \in \mathcal{C} : \text{gen}(C) \geq k\}$$

Para un subconjunto simétrico $S$ de $W - \{0\}$ el género sobre compactos $\gamma(S)$ se define por:

$$\gamma(S) = \sup\{\text{gen}(C) : C \subset S, C \in \mathcal{C}, C \text{ compacto}\}$$

Ahora enunciaremos nuestro principal resultado sobre el problema de autovalores:

**Teorema 6.1.2** *El problema de autovalores (6.5) tiene infinitos autovalores dadas por:*

$$\lambda_k(a) = \inf_{C\in\mathcal{C}_k} \sup_{(u,v)\in C} \frac{\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla v|^q - \int_\Omega aG(u,v)}{\frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p + \frac{1}{q}\int_\Omega |v|^q}$$

*y $\lambda_k(a) \to \infty$ cuando $k \to \infty$. Además, $\lambda_k$ depende con continuidad de $a$ en la norma de $L^\infty$.*

**Observación 6.1.3** *De manera equivalente si definimos*

$$S = \left\{ (u,v) \in W : \frac{1}{p} \int_\Omega |u|^p + \frac{1}{q} \int_\Omega |v|^q = 1 \right\}$$

*tenemos:*

$$\lambda_k(a) = \inf_{C \in \mathcal{C}_k, C \subset S} \sup_{(u,v) \in C} \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p + \frac{1}{q} \int_\Omega |\nabla v|^q - \int_\Omega aG(u,v)$$

### 6.1.3 El resultado de existencia para sistemas de tipo resonante

Aplicando el resultado anterior y un principio abstracto de minimax de ([11]), probaremos el siguiente teorema:

**Teorema 6.1.4** *Asumamos ( 6.3), (6.4) con $\alpha = p, \beta = q$, (6.10), y que $a_1, a_2 \in L^\infty(\Omega)$ son tales que:*

$$a_1(x) \le \liminf_{|s|,|t| \to \infty} \frac{F(x,s,t)}{G_1(s,t)} \le \limsup_{|s|,|t| \to \infty} \frac{F(x,s,t)}{G_2(s,t)} \le a_2(x) \qquad (6.11)$$

*con $G_1$ and $G_2$ dos funciones $(p,q)$-homogéneas y $\lambda_1(a_1) < 0 < \lambda_2(a_2)$. Entonces el problema (6.1) tiene al menos una solución en $W$.*

**Observación 6.1.5** *Las condiciones anteriores pueden ser reformuladas en términos de otro problema diferente de autovalores, para $a(x) > 0$.*

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \mu a G_u(u,v) \\ -\Delta_q v &= \mu a G_v(u,v) \end{cases} \qquad (6.12)$$

*Este problema también posee infinitos autovalores dados por:*

$$\mu_k(a) = \inf_{C \in \mathcal{C}_k} \sup_{(u,v) \in C} \frac{\frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p + \frac{1}{q} \int_\Omega |\nabla v|^p}{\int_\Omega aG(u,v)}$$

*Entonces la condición $\lambda_1(a) < 0$ es equivalente a $\mu_1(a) < 1$, y la condición $\lambda_2(a) > 0$ es equivalente a $\mu_2(a) > 1$.*

**Observación 6.1.6** *Como un ejemplo para el teorema 6.1.4, podemos tomar:*

$$G_1(s,t) = G_2(s,t) = |s|^\alpha |t|^\beta$$

*donde* $\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} = 1$,

$$F(s,t) = \lambda |s|^\alpha |t|^\beta + c|s|^\mu |t|^\delta + h(x)$$

*donde* $c \neq 0$ *es una constante y* $h(x) \in L^\infty(\Omega)$.

$$\mu_1(1) < \lambda < \mu_2(1)$$

*y* $\mu < \alpha$, $\delta < \beta$.

# 6.2 El Problema de Autovalores

## 6.2.1 El marco funcional

Aplicaremos el siguiente teorema abstracto de mini-max debido a H. Amman ([2])

**Teorema 6.2.1** *Supongamos que las siguientes hipótesis son satisfechas:*

- $X$ *es un espacio de Banach real de dimensión infinita, que es uniformemente convexo.*

- $A : X \to X^*$ *es un operador potencial impar (lo que significa que* $A$ *es la derivada de Gateaux de* $\mathcal{A} : X \to \mathbb{R}$*) que es uniformemente continuo sobre conjuntos acotados y satisface la condición* $(S)_1$*: Si* $u_j \rightharpoonup u$ *y* $A(u_j) \to v$*, entonces tenemos que* $u_j \to u$.

- *Para una constante dada* $\alpha > 0$ *el conjunto de nivel*

$$M_\alpha = \{u \in X : \mathcal{A}(u) = \alpha\}$$

*es acotado y cada rayo por el origen intersecta a* $M_\alpha$. *Además, para cada* $u \neq 0$, $\langle A(u), u\rangle > 0$ *y existe una constante* $\rho_\alpha > 0$ *tal que* $\langle A(u), u\rangle \geq \rho_\alpha$ *en* $M_\alpha$.

- *La aplicación* $B : X \to X^*$ *es un operador potencial que es fuertemente secuencialmente continuo (con potencial* $\mathcal{B}$*) tal que* $\mathcal{B}(u) \neq 0$ *implica que* $B(u) \neq 0$.

*Sea*

$$\beta_k = \sup_{C \in \mathcal{C}, C \subset M_\alpha} \inf_{u \in C} \mathcal{B}(u)$$

*Entonces si $\beta_k > 0$, existe una autofunción $u_k \in M_\alpha$ con $\mathcal{B}(u) = \beta_k$. Si*

$$\gamma(\{u \in M_\alpha : \mathcal{B}(u) \neq 0\}) = \infty \tag{6.13}$$

*entonces existen infinitas autofunciones distintas.*

Trabajaremos en el espacio de Banach:

$$W = W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$$

con la norma:

$$\|(u,v)\|_W = \sqrt{\|u\|_p^2 + \|v\|_q^2}$$

Como cada factor es uniformemente convexo, $W$ también lo es (ver [10]). Dado $(u^*, v^*) \in W^{-1,p'} \oplus W^{-1,q'}$ podemos pensarlo como un elemento de $W^*$:

$$\langle (u^*, v^*), (u,v) \rangle = \langle u^*, u \rangle + \langle v^*, v \rangle$$

Entonces tenemos que $W^* \cong W^{-1,p'} \oplus W^{-1,q'}$ (isomorfismo isométrico) donde la norma en $W^*$ es dada por:

$$\|(u^*, v^*)\|_{W^*} = \sqrt{\|u^*\|^2 + \|v^*\|^2}$$

Con las notaciones del teorema previo, definimos:

$$\mathcal{A}_0(u,v) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla v|^q$$

$$\mathcal{A}(u,v) = \mathcal{A}_0(u,v) - \int_\Omega aG(u,v) + M\left(\frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p + \frac{1}{q}\int_\Omega |v|^q\right)$$

donde $M$ es una constante fija tal que $M > K\|a\|_{L^\infty}$, siendo $K$ la constante en (6.7).

Escribimos $\mathcal{A}_a$ en lugar de $\mathcal{A}$ cuando queremos enfatizar la dependencia del peso $a$.

$$A(u,v) = (-\Delta_p u - aG_u(u,v) + M|u|^{p-2}u, -\Delta_q v - aG_q(u,v) + M|v|^{q-2}v)$$

$$\mathcal{B}(u,v) = \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p + \int_\Omega \frac{1}{q}|v|^q$$

$$B(u,v) = (|u|^{p-2}u, |v|^{q-2}v)$$

**Proposición 6.2.1** *1. $A$ es uniformemente continua sobre conjuntos acotados.*

*2. $A$ verifica la condición $(S)_1$.*

**Demostración:** Escribimos $A = A_1 - A_2$, donde

$$\begin{aligned} A_1(u,v) &= (-\Delta_p u, -\Delta_q v) \\ A_2(u,v) &= (aG_u(u,v) - M|u|^{p-2}u, aG_v(u,v) - M|v|^{q-2}v) \end{aligned}$$

Afirmamos que $A_2 : W \to W^*$ verifica la siguiente condición: si $(u_j, v_j) \rightharpoonup (u,v)$ en $W$, entonces $A_2(u_j,v_j) \to A_2(u,v)$ en $W^*$. De hecho si $(u_j,v_j) \rightharpoonup (u,v)$, entonces

$$(u_j,v_j) \to (u,v) \text{ en } L^p(\Omega) \times L^q(\Omega)$$

y por lo tanto

$$G_u(u_j,v_j) \to G_u(u,v) \text{ en } L^{p'}(\Omega)$$

$$G_v(u_j,v_j) \to G_v(u,v) \text{ en } L^{q'}(\Omega)$$

y en consecuencia, $A_2(u_j,v_j) \to A_2(u,v)$ in $W^*$. Sea $(u_j,v_j) \rightharpoonup (u,v)$ en $W$ tal que:

$$A(u_j,v_j) \to (z,w)$$

Entonces $A_2(u_j,v_j) \to A_2(u,v)$ y por lo tanto $A_1(u_j,v_j) \to (z,w) - A_2(u,v)$. Como $A_1$ verifica la condición $(S)_1$, se sigue que $(u_j,v_j) \to (u,v)$.

**Proposición 6.2.2** *1. El conjunto $M_\alpha = \{(u,v) \in W : \mathcal{A} = \alpha\}$ es acotado.*

*2. Cada rayo $t \cdot (u,v)$ con $(u,v) \neq 0$ intersecta a $M_\alpha$.*

*3. Existe una constante $\rho_\alpha > 0$ tal que:*

$$\langle A(u,v),(u,v)\rangle \leq \rho_\alpha$$

*4. La condición (6.13) se satisface.*

**Demostración:**

1. Como hemos fijado $M > K\|a\|_{L^\infty}$, en $M_\alpha$ tenemos:

$$\alpha = \mathcal{A}(u,v) \geq \frac{1}{p}|\nabla u|^p + \frac{1}{q}|\nabla v|^q$$

Esto completa la demostración.

2. Sea $f(c) = \mathcal{A}(c(u,v))$, $f(0) = 0$

$$f(c) = \frac{c^p}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p + \frac{c^q}{q}\int_\Omega |\nabla v|^q - \int_\Omega aG(cu,cv) + M\left(\frac{c^p}{p}\int_\Omega |u|^p + \frac{c^q}{q}\int_\Omega |v|^q\right)$$

Como antes

$$f(c) \geq \frac{c^p}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p + \frac{c^q}{q}\int_\Omega |\nabla v|^q \to +\infty$$

cuando $c \to \infty$. Como $f$ es continua existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = \alpha$ .

3.

$$\langle A(u,v),(u,v)\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^p + \int_\Omega |\nabla v|^q - \int_\Omega a[G_u(u,v)u + G_v(u,v)v]$$
$$+M\left(\int_\Omega |u|^p + \int_\Omega |v|^q\right)$$

De modo que utilizando (6.8)

$$\langle A(u,v),(u,v)\rangle \geq \min(p,q)\mathcal{A}(u,v) = \min(p,q)\alpha$$

4. Para ver que $\gamma(M_\alpha) \geq k$, puede mostrarse que $M_\alpha$ contiene subconjuntos homeomorfos a la esfera unitaria en $\mathbb{R}^k$ por un homeomorfismo impar. Esto completa la demostración.

### 6.2.2 La dependencia continua de $\lambda_k(a)$ en $a$

**Proposición 6.2.3** *$\lambda_k(a)$ depende con continuidad de $a$ en la norma de $L^\infty$*

**Demostración:** Tenemos que:

$$|\mathcal{A}_a(u,v) - \mathcal{A}_b(u,v)| \leq K\, \|a-b\|_{L^\infty} \left(\frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p + \frac{1}{q}\int_\Omega |v|^q\right)$$

donde $K$ está dada por la condición (6.7).

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $C \in \mathcal{C}_k, C \subset S$ tal que

$$\sup_{(u,v)\in C} \mathcal{A}_a(u,v) \leq \lambda_k(a) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Entonces para cualquier $(u,v) \in C$, si $\|a-b\|_{L^\infty} \leq \delta = \frac{\varepsilon}{2K}$ obtenemos:

$$\mathcal{A}_b(u,v) \leq \mathcal{A}_a(u,b) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \lambda_k(a) + \varepsilon$$

Se sigue que:

$$\sup_{(u,v)\in C} \mathcal{A}_b(u,v) \leq \lambda_2(a) + \varepsilon$$

y por lo tanto:

$$\lambda_k(b) \leq \lambda_k + \varepsilon$$

Intercambiando los roles de $a$ y $b$, obtenemos: $|\lambda_k(a) - \lambda_k(b)| \leq \varepsilon$

## 6.3 La Demostración del Teorema de Existencia

### 6.3.1 Un Principio de Minimax

Nuestra principal herramienta para probar el teorema 6.1.4 será un principio abstracto de minimax debido a El Amrouss y Moussaoui ([11]):

**Teorema 6.3.1** *Sea $\Phi$ una funcional de clase $C^1$ en $X$ que satisface la condición $(C)$, sea $Q$ un subconjunto cerrado y conexo de $X$ tal que $\partial Q \cap \partial(-Q) \neq \emptyset$ y sea $\beta \in \mathbb{R}$ Asumamos que:*

1. *$\forall K \in \mathcal{C}_2$ existe $v_K \in K$ tal que $\Phi(v_K) \geq \beta$ y $\Phi(-v_K) \geq \beta$*

*2.* $a = \sup_{\partial Q} \Phi < \beta$

*3.* $\sup_Q \Phi < \infty$

*Entonces $\Phi$ tiene un valor crítico $c \geq \beta$ dado por:*

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \sup_{x \in Q} \Phi(h(x))$$

*donde* $\Gamma = \{h \in C(X, X) : h(x) = x \; \forall \; x \in \partial Q\}$.

### 6.3.2 Condiciones de Compacidad

**Lema 6.3.1** *Supongamos que $F$ satisface (6.4), (6.10) y (6.11). Entonces $\Phi$ satisface la condición de Cerami.*

**Demostración:** La prueba de la condición $(C_c)$ i) es similar a la del lema 3.1 en [11]. Para probar que se verifica la condición $(C_c)$ ii) asumamos por contradicción que existe una sucesión $(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset W$ tal que:

$$\begin{cases} \Phi(u_n, v_n) \to c \\ \varepsilon_n = \|\Phi'(u_n, v_n)\| \|(u_n, v_n)\| \to 0 \\ \|(u_n, v_n)\| \to \infty \end{cases} \tag{6.14}$$

En consecuencia:

$$\left| \frac{1}{p} \langle \Phi_u(u_n, v_n), u_n \rangle + \frac{1}{q} \langle \Phi_v(u_n, v_n), v_n \rangle - \Phi(u_n, v_n) \right| \to c$$

o de manera equivalente:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \int_\Omega \frac{1}{p} F_u(x, u_n, v_n) u_n + \frac{1}{q} F_v(x, u_n, v_n) v_n - F(x, u_n, v_n) \right| = c \tag{6.15}$$

Definimos:

$$\begin{cases} z_n &= \alpha_n^{1/p} u_n \\ w_n &= \alpha_n^{1/q} v_n \end{cases}$$

donde

$$\alpha_n = \frac{1}{\mathcal{A}_0(u_n, v_n)} \to 0$$

$\mathcal{A}_0(z_n, w_n) = 1$, luego $(z_n, w_n)$ es acotada en $W$. Pasando a una subsucesión, podemos asumir que

$$z_n \rightharpoonup z \text{ en } W^{1,p}(\Omega)$$

$$w_n \rightharpoonup w \text{ en } W^{1,q}(\Omega)$$

y que

$$z_n \to z \text{ en } L^p(\Omega) \text{ y en c.t.p. de } \Omega$$

$$w_n \to w \text{ en } L^q(\Omega) \text{ y en c.t.p. de } \Omega$$

Ahora mostraremos que $(z, w) \neq (0, 0)$:

$$\frac{\Phi(u_n, v_n)}{\mathcal{A}_0(u_n, v_n)} = 1 - \frac{\int_\Omega F(x, u_n, v_n)}{\mathcal{A}_0(u_n, v_n)}$$

por (6.11)

$$\int_\Omega F(x, u_n, v_n) \leq \int_\Omega (a_2(x) + \varepsilon) G_2(u_n, v_n) + C_\varepsilon |\Omega|$$

entonces

$$\frac{\int_\Omega F(x, u_n, v_n)}{\mathcal{A}_0(u_n, v_n)} \leq \alpha_n \int_\Omega (a_2(x) + \varepsilon) G_2(u_n, v_n) + C_\varepsilon |\Omega| \alpha_n$$

Como

$$\alpha_n \int_\Omega G_2(u_n, v_n) = \int_\Omega G_2(z_n, w_n)$$

en el límite obtenemos que:

$$0 \geq 1 - \int_\Omega (a_2(x) + \varepsilon) G_2(z, w)$$

lo que muestra que $G_2(z, w) \neq 0$. Sea

$$L(x, s, t) = \frac{1}{p} F_s(x, s, t) s + \frac{1}{q} F_t(x, s, t) t - F(x, s, t)$$

Haremos la demostración para el caso en que en 6.10 el límite es $-\infty$ (siendo la demostración para el caso en que es $+\infty$ análoga). Por (6.10) (siendo $L$ continua): $L(x, s, t) \leq -M$

$$\int_\Omega L(x, u_n, v_n) \leq \int_{G(z,w)\neq 0} L(x, u_n, v_n) + M|\{x : G_2(z(x), w(x)) = 0\}|$$

Notemos que

$$\alpha_n G_2(u_n, v_n) \to G_2(z, w)$$

De modo que en el conjunto $\{x : G_2(z(x), w(x)) \neq 0\}$, $G_2(u_n, v_n) \to +\infty$ y entonces por (6.6) tenemos que $u_n(x), v_n(x) \to \infty$. Se sigue que $L(u_n, v_n) \to -\infty$ por la condición (6.10). Se sigue que la primer integral tiende a $-\infty$ por el lema de Fatou, de modo que obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega L(x, u_n, v_n) = -\infty$$

Esto contradice (6.15), y concluye la demostración.

### 6.3.3 Condiciones Geométricas

**Lema 6.3.2** *Si se satisfacen las hipótesis del teorema 6.1.4, entonces:*

1. *Existe* $(\varphi, \psi) \in W$ *tal que* $\Phi(c^{1/p}\varphi, c^{1/q}\psi) \to -\infty$ *cuando* $c \to +\infty$
2. $\forall K \in \mathcal{C}_2$ *existe* $(u_K, v_k) \in K$ *y* $\beta \in \mathbb{R}$ *tal que* $\Phi(u_K, v_K) \geq \beta$ *y* $\Phi(-u_K, -v_k) \geq \beta$

**Demostración:** 1) Como $\lambda_1(a_1) < 0$, podemos elegir $\varepsilon > 0$ tal que $\lambda_1(a_1 - \varepsilon) < 0$. Sea $(\varphi, \psi)$ la primer autofunción del problema:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta_p u - (a_1(x) - \varepsilon)G_{1u}(u, v) & = & \lambda|u|^{p-2}u & \text{en } \Omega \\ -\Delta_q v - (a_1(x) - \varepsilon)G_{1v}(u, v) & = & \lambda|v|^{q-2}v & \text{en } \Omega \\ u = v & = & 0 & \text{en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

normalizada por:

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\varphi|^p + \frac{1}{q}\int_\Omega |\psi|^q = 1$$

Entonces:

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla\varphi|^p + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla\psi|^q - \int_\Omega (a_1(x) - \varepsilon)G_1(u, v) = \lambda_1(a_1(x) - \varepsilon)$$

Por (6.11) tenemos que:

$$F(x,s,t) \geq (a_1(x)-\varepsilon)G_1(s,t) - C_\varepsilon$$

Se sigue que:

$$\Phi(c^{1/p}\varphi, c^{1/q}\psi) \leq c\left(\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla\varphi|^p + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla\psi|^q - \int_\Omega (a_1(x)-\varepsilon)G_1(\varphi,\psi)\right) + C_\varepsilon|\Omega|$$
$$\leq c\lambda_1(a_1-\varepsilon) + C_\varepsilon|\Omega|$$

y entonces $\Phi(c^{1/p}\varphi, c^{1/q}\psi) \to -\infty$ cuando $c \to +\infty$

2) Como $\lambda_2(a_2) > 0$, podemos elegir $\varepsilon > 0$ tal que $\lambda_2(a_2+\varepsilon) > 0$. Dado $K \in \mathcal{C}_2$ y éste $\varepsilon > 0$ afirmamos que existe $(u_K, v_K) \in K$ tal que

$$\lambda_2(a_2+\varepsilon)\left(\frac{1}{p}\int_\Omega |u_K|^p + \frac{1}{q}\int_\Omega |v_K|^q\right) \leq$$
$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_K|^p + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla v_K|^q - \int_\Omega (a_2(x)+\varepsilon)G_2(u_K,v_K)$$

Por (6.11):

$$F(x,s,t) \leq (a_2(x)+\varepsilon)G_2(s,t) + C_\varepsilon$$

Se sigue que:

$$\Phi(u_K,v_K) \geq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_K|^p + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla v_K|^q - \int_\Omega (a_2(x)+\varepsilon)G_2(u_K,v_K) - C_\varepsilon|\Omega|$$
$$\geq \lambda_2(a_2+\varepsilon)\left(\frac{1}{p}\int_\Omega |u_K|^p + \frac{1}{q}\int_\Omega |v_K|^q\right) - C_\varepsilon|\Omega| \geq -C_\varepsilon|\Omega| = \beta$$

Similarmente:

$$\Phi(-u_K,-v_K) \geq -C_\varepsilon|\Omega| = \beta$$

### 6.3.4 Demostración del teorema 6.1.4:

Aplicamos el teorema anteriormente citado de [11]. Tomamos:

$$Q = \{(|c|^{1/p-1}c\phi, |c|^{1/q-1}c\varphi) : \ -R \leq c \leq R\}$$

donde $(\varphi, \psi)$ está dado por el lema anterior. $Q$ es conexo y compacto (Es la imagen del intervalo $[-R, R]$ por una aplicación continua). Además $\partial Q = \partial(-Q) = \{(\pm R^{1/p}\Phi, \pm R^{1/q}\psi)\} \neq \emptyset$ . Por el lema 6.3.2 si elegimos $R$ suficientemente grande tenemos que:

$$\sup_{\partial Q} \Phi < \beta$$

Además $\sup_Q \Phi < +\infty$ ya que $Q$ es compacto y $\Phi$ es continua. Además $\Phi$ verifica la condición $(C)$. Por lo que se cumplen todas las condiciones del teorema citado, lo que concluye la demostración.

# Bibliografía


[1] R. Adams *Sobolev Spaces.* Academic Press, (1975).

[2] H. Amann. *Lusternik-Schnirelmann Theory and Nonlinear Eigenvalue Problems.* Math. Ann. 199, pag. 55–72 (1972).

[3] A. Ambrosetti, P. Rabinowitz. *Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications.* Journal Functional Analysis, (14), pag. 349–381, (1973).

[4] V. Benci, D. Fortunato, P.Bartolo. *Abstract Critical Point Theorems and Applications to some Nonlinear Problems with Strong Resonance at Infinity.* Nonlinear Analysis, 7, pag. 981–1012, (1983).

[5[ L. Boccardo, D. G. de Figueiredo. *Some Remarks on a System of Quasilinear Elliptic Equations.* Relatório de Pesquisa 51/97 UNICAMP-IMECC (1997)

[6] L. Boccardo. *Probleme Ellittici con Termine Noto $l^1$ e Misura* (course notes) 114/96/m. Technical Report 114/96/M, S.I.S.A., (1996).

[7] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle.* Masson, Paris, (1983).

[8] G. Cerami. *Un Criterio de Esistenza per i Punti Critici su Varietá Ilimitate.* Rc. Ist. Lomb. Sci. Lett., (121), pag. 332–336, (1978).

[9] M. Cuesta. *On the Fucik Spectrum of the Laplacian and the p-Laplacian.* "2000 Seminar in Differential Equations'. mayo-junio Kvilda (República Checa). (2000)

[10] M. Day. *Some more Uniformly Convex Spaces.* Bulletin AMS, (1940).

[11] A.R. El Amrouss , M. Moussaoui. *Minimax principles for critical point theory in applications to quasilinear boundary-value problems.* Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2000 Nro. 18, pag. 1–9, (2000).

[12] D. Gilbarg, N. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer-Verlag, (1977).

[13] J. P. Gossez. *Some Remarks on the Antimaximum Principle.* Revista de la Unión Matemática Argentina, Volumen 41, Nro. 1 pag. 79–84, (1998).

[14] T. Kilpeläinen. *Weighted Sobolev Spaces and Capacity.* Annales Academiae Scientiarum Fennicae, pag. 19:95–113, (1994).

[15] I. Kuziw, S. Pohozaev. *Entire Solutions of Semilinear Elliptic Equations*, volumen 33 de la serie *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications.* Birkhäuser. (1993)

[16] J. L. Lions. *Quelques Méthodes de Ré solution des Problé mes aux Limites Non Lineaires Paris).* Dunod - Gauthier-Villars, Paris, (1969).

[17[ J. Leray, J.L. Lions. *Quelques Résultats de Visik sur les Prolèmes Elliptiques Non Linéaires par les Méthodes de Minty-Browder. Bull. Soc. math. France*, (93), pag. 97–107, November (1965).

[18] J. Mawhin G. Dinca, P.Jebelean. *Variational and Topological Methods for Dirichlet Problems with p-Laplacian.* Port. Math. (N.S.) 58, No.3, pag. 339-378 (2001).

[19] E. Lami Dozo, M. C. Mariani. *Solutions to the Plateau Problem for the Prescribed Mean Curvature Equation via the Mountain Pass Lemma.* Studies in Applied Mathematics, (96), pag. 351–358, (1996).

[20] G.G. Lorentz. *Some New Functional Spaces.* Annals of Mathematics, Nro. 51, pag. 37–55, (1950).

[21] J. Mawhin , K. Schmitt. *Nonlinear Eigenvalue Problems with the Parameter near Resonance.* Ann. Polonici Math. LI, pag. 241–248, (1990).

[22[ R. O'Neil. *Convolution operators and* $l(p,q)$ *spaces.* Duke Math.J., (30), pag. 129–142, (1963).

[23] João Marcos B. do Ó. *Solutions to Perturbed Eigenvalue Problems of the p-Laplacian in $\mathbb{R}^n$*. Electronic Journal of Diff. Eq., Volumen 1997, Nro. 1, pag. 1–15, (1997).

[24] K. Pflüger. *Semilinear Elliptic Problems in Unbounded Domains: Solutions in Weighted Sobolev Spaces. Preprint* Institut für Mathematik I. Freie Universität. Berlin. Preprint Nr.21 A 95 (1995)

[25] P. Rabinowitz. *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations.* Expository Lectures from the CBMS Regional Conference held at the University of Miami. American Mathematical Society, (1984).

[26] N. M. Riviere. *Interpolación a la Marcinkiewicz.* Revista de la Unión Matemática Argentina, Volumen 25, pag. 363–377, (1971).

[27] G. Stampacchia. *Le problème de Dirichlet pour les Équations Elliptiques du Second Ordre à Coefficients Discontinus. Ann.Inst. Fourier, Grenoble,* 15(1) pag. 189–258, (1965).

[28] N.M. Sreavrakakis, J. Fleckinger, R.F. Manásevich and F. De Thélin. *Principal Eigenvalues for some Quasilinear Elliptic Equations on $R^N$*. Advances in Differential Equations, Volumem 2, Número 6, pag. 981–1003, Noviembre (1997).

[29[ G. Talenti. *Inequallities in Rearrangement Invariant Function Spaces,* Nonlinear analysis, function spaces and applications, Vol.5 , pag.177–230, (1995) Prometheus Publishing House, Praha , *Proceedings of the Spring School held in Prague,* May 23-28, (1994). (Internet Addres: http://rattler.cameron.edu/emis/procedings/praha94/8.html)

[30] E.M.Stein, G.Weiss. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* Princeton University Press, (1971).

[31] To Fu Ma, L. Sanchez. *Three Solutions of a Quasilinear Elliptic Problem near Resonance.* Technical Report 21/95, Universidade de Lisboa CAUL/CAMAF, (1995).

[32] M. Willem. *Minimax Theorems,* volumen 24 de la serie *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications.* Birkhäuser, Boston, (1996).