

Tesis de Posgrado

Estabilidad y estabilización de sistemas de control a datos muestreados

Mancilla Aguilar, José Luis

2001

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Mancilla Aguilar, José Luis. (2001). Estabilidad y estabilización de sistemas de control a datos muestreados. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3406_MancillaAguilar.pdf

Cita tipo Chicago:

Mancilla Aguilar, José Luis. "Estabilidad y estabilización de sistemas de control a datos muestreados". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2001. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3406_MancillaAguilar.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

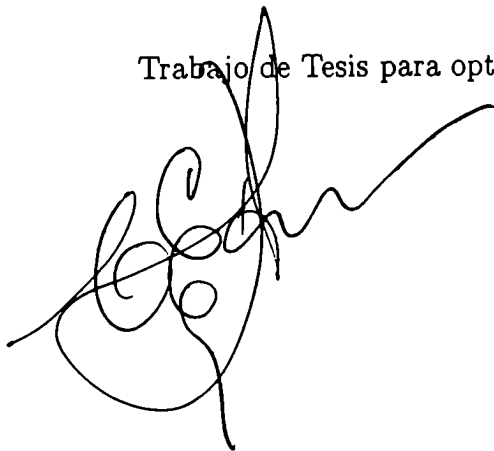
**Estabilidad y Estabilización de Sistemas de Control a
Datos Muestreados**

por José Luis Mancilla Aguilar

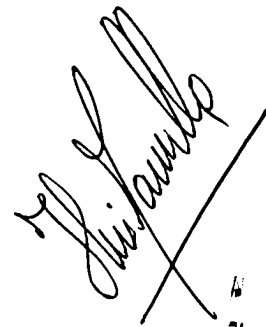
Director de Tesis: Dr. Carlos Enrique D'Attellis

Lugar de Trabajo: Depto. de Matemática, Fac. de Ingeniería, UBA

Trabajo de Tesis para optar por el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas



Octubre de 2001



4003

Estabilidad y Estabilización de Sistemas de Control a Datos Muestreados

Resumen

En este trabajo estudiamos la estabilidad y estabilización de sistemas de control a datos muestreados. Con tal fin introducimos un tipo de ecuación híbrida que permite modelar estos sistemas en toda la escala temporal, y estudiamos la estabilidad del sistema dinámico híbrido determinado por las soluciones de una de tales ecuaciones. Obtenemos así caracterizaciones de las distintas propiedades de estabilidad en términos de funciones de Lyapunov. Luego analizamos la estabilidad de sistemas híbridos lineales perturbados con perturbaciones evanescentes o persistentes y caracterizamos la estabilidad exponencial del sistema híbrido en términos de la estabilidad exponencial de su linealización (una extensión del Primer Método de Lyapunov). Aplicando estos resultados al estudio del problema de la estabilización exponencial de una planta no lineal mediante un controlador digital, obtenemos condiciones necesarias y suficientes para la existencia de estabilizadores exponenciales y demostramos la robustez de estos controladores.

También estudiamos la implementación digital de leyes de control estabilizantes vía muestreo y retención de orden cero. Demostramos que tal implementación estabiliza semiglobalmente al sistema a un entorno del origen. La técnica de demostración que empleamos nos permite por un lado obtener cotas para el paso de muestreo y por el otro derivar una condición suficiente para la estabilización asintótica.

Por último estudiamos la implementación digital de soluciones del problema de seguimiento de trayectorias. Mostramos un ejemplo en el cual la implementación digital vía muestreo y retención de orden cero produce un error de seguimiento inaceptable. Inspirados en construcciones desarrolladas por Krasovskii y Subbotin en el contexto de la teoría de juegos posicionales, presentamos un algoritmo de control que, a partir de una solución del problema de seguimiento de trayectorias y, empleando los datos muestreados del sistema, asegura la estabilidad práctica semiglobal del error de seguimiento, con error final arbitrariamente pequeño si el período de muestreo es suficientemente pequeño. También demostramos que el controlador propuesto es robusto respecto de pequeñas perturbaciones y de pequeños errores en los actuadores y en las mediciones, aún si la ley original no lo era.

Palabras Claves: Sistemas de Control a Datos Muestreados; Sistemas Híbridos; Lyapunov; Estabilidad; Seguimiento de Trayectorias.

Stability and Stabilization of Sampled-data Control Systems

Abstract

In this work we study the stability properties and the stabilization of sampled-data control systems. With this aim we introduce a class of hybrid equations that enables us to model these systems in the whole time scale and we study the stability properties of the hybrid dynamical system originated from the solutions of any of these equations. In this way we obtain, in terms of Lyapunov functions, characterizations of the various stability properties of this class of systems. Next, we analyze the stability of perturbed hybrid linear systems for both non-evanescent and evanescent perturbations, and we characterize the exponential stability of the hybrid system in terms of the exponential stability of its linearization (an extension of the Indirect Lyapunov Method). These results enable us to obtain necessary and sufficient conditions for the existence of digital exponential stabilizers for nonlinear continuous-time plants and to prove the robustness of these controllers.

We also study the digital implementation of stabilizing control laws via Sampling and Zero-order Hold (SZH), and we show that with this implementation practical semiglobal stabilization to the origin is obtained. The technic used in the derivation of these results enables us, on one hand, to obtain bounds for the sampling ratio and on the other, to establish a sufficient condition for the asymptotic stabilization of the origin.

Finally, we study the digital implementation of continuous-time trajectory tracking laws. We present an example where the SZH-implementation of one of these laws results in an unacceptable tracking error. Then, and based on certain results obtained by Krasovskii and Subottin in the context of positional games, we develop a control algorithm that guarantees semiglobal practical stability of the tracking error, with final error arbitrarily small for small enough sampling periods. This algorithm uses a known continuous-time solution of the tracking problem and the sampled-data of the system. We show that this controller is robust to small perturbations and to small errors in the measurements and in the actuators, even if the original continuous-time law is not so.

Keywords: Sampled-data Control Systems; Hybrid Systems; Lyapunov; Stability; Trajectory Tracking.

a Esther, Sara, Victoria y María

Reconocimientos

Son muchas las personas que de una u otra forma, directa o indirectamente, colaboraron para que este trabajo de tesis fuera posible, a todos ellos les estoy profundamente agradecido.

Sin embargo, algunos merecen un reconocimiento y agradecimiento especial.

En primer lugar quiero agradecer a mi familia, especialmente a mi madre y sobre todo a Esther, mi esposa, por su comprensión y paciencia.

A mis profesores del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, por lo que me enseñaron.

Al Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires, donde se realizó este trabajo, por el apoyo que me brindó y porque me permitió crecer, humana y profesionalmente.

A mis compañeros de trabajo de la Facultad de Ingeniería, tanto del Departamento de Matemática como del Laboratorio de Aplicaciones Electrónicas, por su amistad y por el ambiente que generaron.

A María Inés Troparevsky, con quien trabajé en mis comienzos.

Una mención especial merece Rafael García, no sólo por su valiosa colaboración y por las estimulantes discusiones técnicas que sostuvimos, sino también por su entrañable amistad.

Por último, deseo agradecer y reconocer a mi Director de Tesis, Carlos Enrique D'Attellis, quien, además de introducirme en el tema y guiarme sabiamente, me alentó y estimuló a lo largo de todos estos años.

Índice General

1	Introducción	1
1.1	Antecedentes bibliográficos	3
1.2	Organización de la tesis	7
2	Ecuaciones Híbridas	11
2.1	Introducción	11
2.2	Ecuaciones híbridas	12
2.2.1	Notación	12
2.2.2	Ecuaciones híbridas: definiciones generales	13
2.3	Sistemas de control a datos muestreados y ecuaciones híbridas	16
2.3.1	Caso I: única s.i.m.	16
2.3.2	Caso II: muestreo múltiple	18
2.4	Teoremas de existencia y continuidad	22
2.4.1	Existencia y unicidad de las soluciones	23
2.4.2	Continuidad de las soluciones respecto de las condiciones iniciales	26
2.4.3	Ecuaciones híbridas lineales	27
2.5	Una clase de sistemas dinámicos híbridos	28
2.6	Estabilidad de sistemas dinámicos híbridos	32
2.6.1	Sistema híbrido discretizado	34
2.6.2	Caracterización de las propiedades de estabilidad de un conjunto compacto invariante	36
2.7	Conclusiones	46
2.8	Apéndice I	46
2.9	Apéndice II	49
3	Sistemas Lineales Perturbados	55
3.1	Introducción	55
3.2	Estabilidad de sistemas híbridos lineales	55
3.3	Sistemas híbridos lineales perturbados	59

3.3.1	Perturbaciones evanescentes	60
3.3.2	Linealización de sistemas híbridos	65
3.3.3	Perturbaciones persistentes	70
3.3.4	Robustez de la estabilidad exponencial en primera aproximación . .	79
3.4	Estabilización exponencial de sistemas no lineales de control mediante controladores digitales	82
3.4.1	Período de muestreo único	83
3.4.2	Múltiples períodos de muestreo	93
3.5	Conclusiones	108
4	Implementación Digital de Leyes de Control Estabilizantes	111
4.1	Introducción	111
4.2	Análisis de estabilidad del sistema a lazo cerrado	113
4.3	Estabilidad asintótica	127
4.3.1	Implementación digital de estabilizadores exponenciales	133
4.4	Conclusiones	139
5	Un Algoritmo para el Seguimiento de Trayectorias en Sistemas de Control a Datos Muestreados	143
5.1	Introducción	143
5.2	El problema de seguimiento de trayectorias	144
5.2.1	Notación y terminología adicionales	144
5.2.2	El problema de seguimiento de trayectorias	144
5.3	Seguimiento de trayectorias en un intervalo acotado con datos muestreados	149
5.4	Un algoritmo de control para el seguimiento de trayectorias	154
5.5	Ejemplos	160
5.6	Conclusiones	164
A	Sistemas Dinámicos en Tiempo Discreto	167
A.1	Sistemas dinámicos en tiempo discreto: definiciones	167
A.2	Estabilidad de sistemas dinámicos en tiempo discreto	169
A.2.1	Un teorema inverso de Lyapunov para sistemas lineales	176

Capítulo 1

Introducción

El empleo de la computadora digital para el control de procesos industriales se ha generalizado en los últimos tiempos debido tanto a la baja en el precio de los equipos digitales como al incremento en las prestaciones que los mismos brindan. Otros motivos para su empleo son: a) la fácil implementación y mantenimiento de los controladores que con ella se construyen, b) la flexibilidad que otorgan al permitir modificar o cambiar el algoritmo de control, c) la confiabilidad de tales realizaciones.

Todavía existe otra razón para el empleo de la computadora digital en el control de un sistema en tiempo continuo: las leyes de control obtenidas mediante la aplicación de los modernos métodos de control no lineal, (por ejemplo linealización exacta, backstepping, control inteligente etc.), en general no pueden implementarse en forma analógica por ser demasiado complejas o por requerir el algoritmo de control la toma de decisiones lógicas de algún tipo.

Dentro de la teoría de control, los sistemas controlados mediante computadoras digitales forman parte de los denominados sistemas de control a datos muestreados, cuyo estudio se inició a mediados de los años cincuenta y que son de interés tanto práctico como teórico por las razones expuestas.

Esta tesis está dedicada al estudio de los sistemas de control a datos muestreados realimentados, esto es, al estudio de los sistemas de control en tiempo continuo que en el lazo de realimentación poseen un controlador digital. La figura 1.1 describe la clase de sistemas que consideraremos. \mathcal{P} es una planta en tiempo continuo y \mathcal{C} es un controlador digital. Supondremos que tanto la planta \mathcal{P} como el controlador \mathcal{C} pueden ser descritos por ecuaciones de estado, diferenciales para la primera y en diferencias para el segundo, ambas no necesariamente lineales. Las señales en tiempo continuo $u(t)$ e $y(t)$ son, respectivamente, la entrada y la salida de la planta \mathcal{P} , mientras que las señales en tiempo discreto $w(k)$ y $v(k)$ son la entrada del controlador \mathcal{C} y la salida del mismo. La conexión entre la planta y el controlador se efectúa a través del conversor analógico-digital

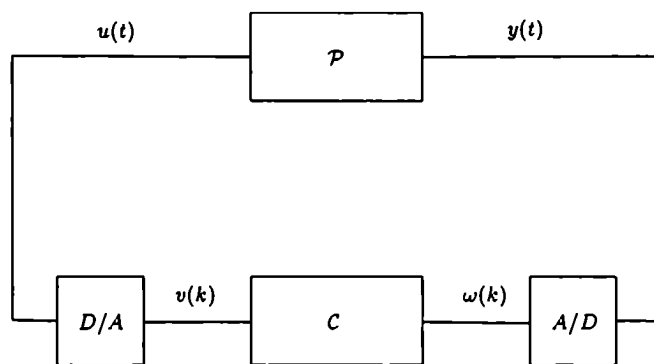


Figura 1.1:

A/D y del conversor digital-analógico D/A. El conversor A/D transforma la señal $y(t)$ en la señal $w(k)$, mientras que el conversor D/A transforma la señal $v(k)$ en la señal $u(t)$. El conversor A/D que consideraremos es el denominado *muestreador* (sampler). En lo que respecta al conversor D/A, consideraremos el más simple de ellos: el compuesto por un muestreador seguido de un *retenedor de orden cero* (zero order hold). En general supondremos que la frecuencia del muestreador no es necesariamente constante.

Por simplicidad no consideraremos los efectos de cuantización en las descripciones matemáticas de los conversores. Estos efectos en ciertos casos pueden considerarse como perturbaciones y estudiarse al analizar la robustez del controlador.

El sistema descrito por la figura 1 es un *sistema híbrido* en el sentido que algunas de sus variables evolucionan suavemente en un continuo de tiempo mientras que otras cambian sólo en un conjunto discreto de instantes. La coexistencia de estas dos escalas de tiempo, junto con la imposibilidad de modelar estos sistemas mediante un sólo tipo de ecuación, dificulta su análisis.

El análisis clásico de un sistema a datos muestreados se basa en el estudio del *sistema discretizado* asociado, que es un sistema dinámico en tiempo discreto que coincide con el original en los instantes de muestreo. De esta forma se eluden las dificultades enunciadas, pero, por otra parte, las conclusiones que se obtienen sobre el comportamiento del sistema sólo son válidas para los instantes de muestreo. El comportamiento entre muestras debe estudiarse en forma separada y en general mediante técnicas diferentes a las empleadas para el estudio del sistema discretizado. Es importante notar en este punto que son pocas las publicaciones que estudian el comportamiento del sistema *también* entre instantes de muestreo.

A nuestro juicio, una de las razones que llevaron a encarar el estudio de los sistemas a datos muestreados de esta forma es la ausencia de un marco teórico adecuado, es decir, la inexistencia de una teoría matemática que permita tratar sistemas de ecuaciones diferenciales y en diferencias acoplados.

La presentación de un marco teórico para el estudio de los sistemas de control a datos muestreados realimentados –al introducir y estudiar un tipo de ecuación que permite modelarlos en toda la escala temporal– es una de las contribuciones presentadas en esta tesis.

Dentro de este marco, en los capítulos siguientes desarrollaremos los siguientes tópicos:

1. El análisis de las propiedades de estabilidad de los sistemas de control a datos muestreados realimentados.
2. La implementación digital de leyes de control en tiempo continuo.

Sería redundante explicitar la importancia que tienen los análisis de estabilidad, en tanto y en cuanto, la estabilidad es una propiedad que necesariamente debe acompañar a la solución de la mayoría de los problemas de control.

Respecto del ítem 2, este punto es de particular interés ya que las leyes de control para sistemas no lineales, obtenidas aplicando los más recientes métodos de control no lineal, son tan complejas que ineludiblemente deben ser implementadas mediante una computadora digital. En este trabajo estudiaremos específicamente la implementación digital de las leyes de control estabilizantes y de las leyes de control que resuelven el problema de seguimiento de trayectorias.

1.1 Antecedentes bibliográficos

Como fue mencionado anteriormente, la forma clásica de encarar el estudio de los sistemas de control a datos muestreados consiste en reemplazar el sistema original por el sistema discretizado y entonces analizar este último empleando las técnicas desarrolladas en el marco de la teoría de los sistemas de control en tiempo discreto.

En este contexto, la discretización de la planta (o planta discretizada) tiene un papel fundamental. La planta discretizada es un sistema de control en tiempo discreto que tiene el mismo comportamiento entrada-estado que la planta original en los instantes de muestreo, si la entrada de ésta última se mantiene constante entre muestras.

Cuando la planta es lineal y tiempo invariante, la planta discretizada resulta también lineal y tiempo invariante; además es posible obtener, en forma explícita y sin mayores dificultades, una expresión de tal discretización, ya sea en transferencia o en estados [4]. Es posible demostrar que, salvo para un número finito de períodos de muestreo, las propiedades estructurales del sistema original, es decir, la controlabilidad, observabilidad, estabilizabilidad, detectabilidad, etc., son heredadas por la planta discretizada. (ver [72] entre otros).

En lo que respecta a los sistemas no lineales de control, en general no es posible obtener una expresión cerrada de la planta discretizada. Para los sistemas no lineales analíticos,

Monaco y Normand-Cyrot demuestran en la serie de trabajos [58, 59, 61] que la planta discretizada admite una representación en serie de potencias del período de muestreo. Esta representación fue empleada en [11] para el estudio del problema de regulación en sistemas de control a datos muestreados.

Las propiedades estructurales de la planta discretizada en relación con las de la planta en tiempo continuo fueron estudiadas durante la década del 80. Todos estos estudios tienen su base en la teoría geométrica de control, pues emplean de manera fundamental las caracterizaciones de las diversas propiedades estructurales que son obtenidas en esa teoría.

Sontag en [70] demuestra que la propiedad de accesibilidad se mantiene al muestrear si el período de muestreo es suficientemente pequeño. El mismo autor estudia en [69] la relación entre la observabilidad de la planta y la observabilidad de la planta discretizada.

En [23] Grizzle y Kokotovic demuestran que en general la equivalencia por realimentación y cambio de coordenadas del sistema no lineal con uno lineal se pierde al muestrear. Posteriormente en [3] Arapostathis *et al.* llegan a la siguiente conclusión: la propiedad de equivalencia del sistema no lineal con uno lineal por realimentación y cambio de coordenadas, se preserva al muestrear sólo si se imponen condiciones sumamente restrictivas a la estructura de la planta.

La dinámica de los ceros de un sistema no lineal afín a datos muestreados es estudiada en [60] por Monaco y Normand-Cyrot. Allí demuestran que tal dinámica siempre es inestable si el grado relativo del sistema en tiempo continuo es mayor que uno.

A fines de la década del 80 comienzan a aparecer trabajos que consideran el comportamiento del sistema de control a datos muestreados en toda la escala temporal y no sólo en los instantes de muestreo.

Como es de esperarse, la primera en desarrollarse fue la teoría correspondiente a los sistemas lineales. Durante la década del 90 esta teoría estuvo en constante crecimiento y numerosas herramientas y técnicas de estudio fueron introducidas. Como esta tesis trata con sistemas no lineales, y muchas de las técnicas desarrolladas en la teoría lineal no puede extenderse a este campo, sólo mencionaremos aquellos trabajos directamente relacionados con el nuestro.

En [17], Francis y Georgiou consideran el control de una planta lineal tiempo invariante mediante un controlador digital periódico y analizan en detalle tanto la estabilidad \mathcal{L}_∞ entrada-salida como la estabilidad interna del sistema a lazo cerrado. En particular demuestran que la estabilidad exponencial del sistema a lazo cerrado discretizado implica la estabilidad exponencial del sistema en toda la escala temporal. Este resultado es extendido por Iglesias en [35]. Allí se considera que tanto la planta como el controlador son lineales y tiempo variantes. Los resultados obtenidos en esta tesis generalizan al caso no lineal algunos de los resultados mencionados.

En [13] Chen y Francis estudian la estabilidad \mathcal{L}_p entrada-salida de un sistema de

control lineal conectado un controlador digital lineal. En la sección III de ese trabajo demuestran que la implementación digital de un controlador lineal analógico estabilizante, también estabiliza al sistema de control si el período de muestreo es suficientemente pequeño. Un resultado similar fue obtenido por diferentes medios en [75]. Estos resultados sobre implementación digital serán consecuencia directa de resultados más generales, obtenidos para la implementación digital de leyes estabilizantes en sistemas no lineales, que serán presentados en el capítulo 4. En este contexto, aunque no esté directamente relacionado con nuestro trabajo, es importante mencionar la publicación [39] de Keller y Anderson, en la que se presenta un método para la discretización de un controlador lineal analógico basado en la minimización de cierto criterio que tiene en cuenta la performance del controlador digital en relación con la performance del controlador analógico.

La teoría correspondiente a los sistemas no lineales se encuentra mucho menos desarrollada que la de los sistemas lineales y el número de publicaciones que tratan el tema es bastante más limitado.

En [24], Guillaume *et al.* diseñan leyes de control digitales para lograr la estabilización de sistemas no lineales analíticos y afines en el control. El análisis del lazo cerrado se realiza empleando un modelo aproximado de la discretización de la planta. Como resultado obtienen estabilidad práctica para el sistema discretizado y acotación entre muestras. El análisis del mismo lazo cerrado empleando las técnicas propuestas en esta tesis muestra que tales leyes en realidad estabilizan exponencialmente al sistema.

En la serie de trabajos [80, 79, 81, 55] Michel *et al.* presentan un modelo general de sistema dinámico híbrido junto con el esbozo de una teoría de la estabilidad y dan algunas condiciones suficientes para la estabilidad en términos de funciones de Lyapunov. Algunas de estas condiciones pueden aplicarse a los sistemas de control a datos muestreados, ya que éstos son una clase particular de sistemas dinámicos híbridos.

En [79], [29] y [81] se consideran sistemas de control a datos muestreados compuestos por una planta no lineal afín en el control y un controlador digital lineal, y se obtienen condiciones suficientes para la estabilidad asintótica del origen en términos de la linealización del sistema. Posteriormente Hu y Michel en [32], para el mismo tipo de planta y controlador que en los trabajos recién mencionados, estudian la estabilidad del lazo cerrado cuando se emplean múltiples períodos de muestreo, es decir, cuando la frecuencia de muestreo empleada para muestrear la salida del sistema en tiempo continuo es diferente de la frecuencia de muestreo empleada para muestrear la salida del controlador. Las condiciones suficientes para la estabilidad del sistema a lazo cerrado son formuladas en términos de la linealización de éste. En [55], las condiciones suficientes de estabilidad obtenidas en [79, 29, 81] en términos de la linealización del sistema son extendidas a una clase de sistema más general. Allí se supone que tanto la planta como el controlador son no lineales y que el período de muestreo no es necesariamente constante. En ese trabajo el sistema de control a datos muestreados es modelado como un sistema de ecuaciones

diferenciales afectadas por impulsos. Esta forma de encarar el análisis de los sistemas de control a datos muestreados también la emplean Barabanov y Starozhilov en [6] y Branicky en [9], donde, analizando los sistemas a través de su linealización, obtienen resultados similares a los de [55]. Los fundamentos teóricos de la teoría de la estabilidad para sistemas con impulsos puede encontrarse en el libro de Bainov y Simeonov [5].

Recientemente en [63] Nesić *et al.* analizan, con técnicas distintas a las desarrolladas por nosotros, las propiedades de estabilidad entrada-estado de la interconexión entre un sistema en tiempo continuo y un sistema en tiempo discreto, suponiendo que ambos son tiempo variantes y están afectados por perturbaciones. Para el caso en que las perturbaciones son nulas, los resultados que obtienen son un caso particular de los que obtenemos en el Capítulo 2 de esta tesis.

En esta tesis encaramos el estudio de los sistemas de control a datos muestreados de manera diferente. Presentamos una clase de ecuaciones que permite describir estos sistemas en toda la escala temporal y como consecuencia del estudio detallado de estas ecuaciones, obtenemos de manera unificada generalizaciones de algunos de los resultados mencionados. Nuestros resultados son más generales en varios sentidos: a) consideramos que tanto la planta como el controlador son tiempo variantes, b) obtenemos condiciones suficientes y necesarias para los diversos tipos de estabilidad en términos de funciones de Lyapunov y c) mostramos que la estabilidad exponencial de la linealización del sistema a datos muestreados es condición necesaria y suficiente para la estabilidad exponencial de éste.

Respecto del estudio de la implementación digital de leyes de control para sistemas no lineales, el único antecedente que hemos encontrado es el trabajo de Hsu y Sastry [31]. Allí los autores estudian el comportamiento de la implementación digital de una ley de control realimentado que estabiliza un sistema no lineal afín en los controles. Nuestros resultados generalizan los obtenidos en [31] ya que consideramos sistemas de control generales en lugar de sistemas afines en el control.

Respecto de la implementación digital de soluciones en tiempo continuo del problema de seguimiento de trayectorias en sistemas no lineales, no hemos encontrado antecedentes bibliográficos.

A pesar de no estar directamente relacionados con nuestro trabajo, no podemos dejar de mencionar las publicaciones [21] y [53]. En [21] Glad demuestra la existencia de un controlador dead-beat para un sistema no lineal afín, suponiendo que el sistema es mono-entrada mono-salida y de grado relativo uno. En [53] Mareels *et al.* presentan un algoritmo para el seguimiento de salidas en sistemas que admiten una descripción entrada-salida dada por ecuaciones diferenciales no lineales tiempo variantes de orden uno o superior en la salida y de orden cero o superior en la entrada. Este algoritmo sólo requiere el conocimiento en los instantes de muestreo de la salida y de las derivadas de ésta hasta un orden inferior al orden de la ecuación que describe la planta. Bajo ciertas hipótesis el

algoritmo logra el objetivo de seguimiento.

1.2 Organización de la tesis

Los lineamientos de organización de esta tesis son los siguientes.

- En el capítulo 2 introducimos las ecuaciones híbridas, las cuales nos permiten modelar en toda la escala temporal los sistemas de control a datos muestreados. Incluso aquellos en los cuales hay involucrados más de un período de muestreo.

A continuación definimos la noción de solución para estas ecuaciones y damos teoremas que garantizan la existencia, unicidad y prolongabilidad de éstas. Demostramos, bajo ciertas hipótesis, la continuidad de las soluciones respecto de las condiciones iniciales.

Una vez introducido el sistema dinámico híbrido originado por las soluciones de una ecuación híbrida, iniciamos el estudio del comportamiento asintótico de las trayectorias de éste; para ello damos primero la definición de conjunto invariante y respecto de éste las de estabilidad, estabilidad asintótica, estabilidad exponencial, etc.

Posteriormente introducimos la noción de sistema discretizado, el cual es un sistema dinámico en tiempo discreto cuyas trayectorias coinciden con las del sistema híbrido en el conjunto de instantes de muestreo. Demostramos que bajo ciertas condiciones las propiedades de estabilidad locales o globales de un conjunto compacto invariante respecto del sistema dinámico híbrido, son equivalentes a las propiedades de estabilidad locales o globales del mismo conjunto respecto del sistema discretizado. Esta equivalencia nos permite luego enunciar condiciones suficientes para las distintas propiedades de estabilidad de un conjunto invariante compacto en términos de funciones de Lyapunov. Tales condiciones son menos restrictivas que las obtenidas en [81] y en [9], ya que no presuponen ningún comportamiento especial de la función de Lyapunov entre muestras. Una de las condiciones suficientes que enunciamos extiende a los sistemas híbridos que consideramos, una condición formulada en [1] para sistemas de ecuaciones diferenciales tiempo variantes.

- En el capítulo 3, aplicando los resultados obtenidos en el capítulo 2 estudiamos algunas propiedades de las ecuaciones híbridas lineales y las propiedades de estabilidad de los sistemas híbridos originados por estas ecuaciones. Los resultados que obtenemos contienen como caso particular los obtenidos en [35].

Posteriormente analizamos la estabilidad de sistemas híbridos lineales perturbados, ya sean estas perturbaciones evanescentes o persistentes. Después de analizar el

caso de perturbaciones evanescentes, introducimos las nociones de ecuación linealizada alrededor de un punto de equilibrio y de sistema híbrido linealizado alrededor de un punto de equilibrio y demostramos, bajo ciertas hipótesis, que la estabilidad exponencial del sistema híbrido es equivalente a la estabilidad exponencial del sistema híbrido linealizado. A partir de este resultado obtenemos como corolario las condiciones suficientes obtenidas en [29, 30, 80, 81, 55] y las de [32] para sistemas con múltiples períodos de muestreo.

Para el caso de perturbaciones persistentes, demostramos que si el sistema lineal es exponencialmente estable, entonces el sistema perturbado es uniformemente finalmente acotado y la cota para el error final tiende a cero si la cota para las perturbaciones tiende a cero.

Los resultados que obtenemos para sistemas lineales perturbados se aplican luego al estudio del problema de la estabilización exponencial de una planta no lineal mediante un controlador digital. Para este problema obtenemos condiciones tanto necesarias como suficientes para la existencia de un estabilizador exponencial, ya sea que se empleen uno o más períodos de muestreo para muestrear las salidas y entradas de la planta. También obtenemos resultados respecto de la robustez de estos controladores estabilizantes.

- En el capítulo 4 estudiamos la implementación digital de leyes de control realimentado tiempo invariantes estabilizantes. Consideraremos que la ley es implementada digitalmente mediante muestreo y retención de orden cero. A diferencia del trabajo ya mencionado [31], suponemos que el sistema de control es uno general sin ninguna estructura adicional.

Demostramos que con la implementación mencionada es posible estabilizar semiglobalmente el sistema a un entorno del origen en forma asintótica. Más precisamente, demostramos que dados un conjunto compacto contenido en el dominio de atracción de la ley en tiempo continuo y un entorno arbitrario del origen, si el paso de muestreo es suficientemente pequeño, las trayectorias del sistema que se inician en ese conjunto compacto convergen asintóticamente al entorno del origen dado. La técnica de demostración empleada nos permite también obtener cotas para el paso de muestreo.

Mediante un ejemplo demostramos que en general no puede esperarse la estabilidad asintótica del sistema si no se imponen condiciones adicionales. Motivados por esto último, presentamos una condición suficiente para la estabilidad asintótica. Por último demostramos que tal condición es satisfecha si la ley que deseamos implementar estabiliza exponencialmente al sistema; más aún, mostramos que tal tipo de ley implementada vía muestreo y retención de orden cero estabiliza exponencialmente

al sistema.

- En el capítulo 5 estudiamos la implementación digital de soluciones del problema de seguimiento de trayectorias por parte de un sistema de control tiempo invariante.

Mostramos un ejemplo en el cual, para una sucesión de períodos de muestreo que converge a cero, la implementación vía muestreo y retención de orden cero produce un error de seguimiento inaceptable. Esto nos lleva a considerar un camino alternativo para solucionar el problema de implementación. En lugar de discretizar la ley de seguimiento, lo que hacemos es seguir las trayectorias que ésta ley genera en un modelo del sistema.

Basados en: (a) un conjunto de trayectorias “ideales” que son obtenidas aplicando la solución en tiempo continuo a un modelo de la planta, (b) el conocimiento de los estados del sistema en los instantes de muestreo y (c) técnicas desarrolladas en [42] por Krasovskii y Subbotin en el contexto de la teoría de juegos posicionales, diseñamos un controlador que asegura la estabilidad práctica semiglobal del error de seguimiento, con error final arbitrariamente pequeño si el período de muestreo es suficientemente pequeño.

También demostramos que el controlador propuesto es robusto respecto de pequeñas perturbaciones y de pequeños errores en los actuadores y en las mediciones, aún si la ley original no lo era.

- En el Apéndice A damos la definición de sistema dinámico en tiempo discreto que empleamos a lo largo de esta tesis, como así también enunciamos, en términos de funciones de Lyapunov, condiciones suficientes para los distintos tipos de estabilidad de un conjunto invariante respecto de un sistema dinámico en tiempo discreto. También damos algunos teoremas inversos de Lyapunov que utilizamos en los capítulos 2 y 3.

Es pertinente puntualizar que los capítulos 2 y 3 contienen como caso particular los resultados de nuestra publicación [50], que el capítulo 4 extiende los resultados que dieron origen a nuestras publicaciones [47] y [48] y, por último, que los resultados del capítulo 5 originaron las publicaciones [51], [49] y [52].



Capítulo 2

Ecuaciones Híbridas

2.1 Introducción

En este capítulo presentamos una clase de ecuaciones que nos permite modelar en toda la escala temporal, los sistemas de control a datos muestreados que se obtienen al conectar una planta en tiempo continuo con un controlador digital. Estas ecuaciones, que serán denominadas *ecuaciones híbridas*, son una combinación de ecuaciones diferenciales ordinarias con ecuaciones en diferencias.

Después de precisar las nociones de solución de una ecuación híbrida y de solución del problema a valores iniciales asociado con tal ecuación, presentamos algunos resultados acerca de la existencia, unicidad y prolongabilidad de estas soluciones. También obtenemos resultados que garantizan la continuidad de las soluciones respecto de las condiciones iniciales.

Con el objeto de estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones de una ecuación híbrida, consideramos el *sistema dinámico híbrido* compuesto por estas soluciones e introducimos la noción de conjunto invariante respecto de tal sistema dinámico. Luego de definir las distintas propiedades cualitativas que consideramos para un conjunto invariante, pasamos a su estudio. Para ello introducimos el *sistema híbrido discretizado*, que es un sistema dinámico en tiempo discreto relacionado con el sistema dinámico híbrido, y demostramos, bajo ciertas condiciones, que las propiedades de estabilidad de un conjunto compacto e invariante respecto del sistema dinámico híbrido son equivalentes a las que este conjunto posee respecto del sistema híbrido discretizado. Entonces, como consecuencia de la equivalencia establecida obtenemos condiciones tanto suficientes como necesarias para los distintos tipos de estabilidad. Finalizamos el capítulo formulando estas condiciones en términos de funciones de Lyapunov que se comportan de determinada forma en los instantes de muestreo.

2.2 Ecuaciones híbridas

2.2.1 Notación

En esta sección introducimos parte de la notación y terminología que emplearemos en éste y en los capítulos siguientes.

\mathbf{Z}^+ y \mathbb{R}^+ denotarán respectivamente al conjunto de números enteros no negativos y al de números reales no negativos. A lo largo de este capítulo y de los siguientes, t y k , sub o supra indicados, siempre representarán, respectivamente, números reales y enteros.

Si A y B son conjuntos, $A \subseteq B$ significará que A es un subconjunto de B y $A \subset B$ que A es un subconjunto propio de B .

\mathcal{X} siempre será un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y sus elementos serán denotados mediante la letra x sub o supra indicada.

\mathcal{Z} denotará un conjunto abierto o cerrado de \mathbb{R}^m y la letra z , sub o supra indicada, representará uno de sus elementos.

$|\cdot|$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotarán la norma Euclídea y el producto interno Euclídeo de \mathbb{R}^l cualquiera sea l , respectivamente.

Dados los conjuntos \mathcal{X} y \mathcal{Z} , consideraremos el espacio producto $\Omega = \mathcal{X} \times \mathcal{Z}$ y denotaremos $(x, z) = \omega$ a sus elementos. En Ω consideraremos la distancia d inducida por la norma $\|\omega\| = |x| + |z|$. Para $r > 0$ y $\omega_0 \in \Omega$, $B_r(\omega_0)$ denotará la bola abierta con centro ω_0 y radio r , mientras que $B_r[\omega_0]$ denotará la correspondiente bola cerrada. Si $\omega_0 = 0$ pondremos B_r en lugar de $B_r[\omega_0]$.

Dado un subconjunto $M \subseteq \Omega$, no vacío, consideraremos la distancia de ω a M , $d_M(\omega) = \inf\{d(\omega, \hat{\omega}) : \hat{\omega} \in M\}$ y para $\eta > 0$, M_η será el η -entorno cerrado de M , es decir, $M_\eta = \{\omega \in \Omega : d_M(\omega) \leq \eta\}$.

Diremos que una sucesión de números reales $\Pi = \{t_k : k \in \mathbf{Z}^+\}$ es una *sucesión de instantes de muestreo* (s.i.m.) si $0 = t_0 < t_1 < \dots$, $\sup_k(t_{k+1} - t_k) < +\infty$ y $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = +\infty$; $\|\Pi\| = \sup_k(t_{k+1} - t_k)$ es la norma de Π . Si $\Pi = \{t_k = k\delta\}$ para algún $\delta > 0$, diremos que Π es una s.i.m. regular y que δ es el período de muestreo. Dada una s.i.m. Π , \mathcal{J}_Π es la clase de intervalos de la forma $[t_k, t)$, $[t_k, t]$ o $[t_k, +\infty)$ y \mathcal{J}_{Π, k_0} es la subclase de \mathcal{J}_Π formada por aquellos intervalos cuyo extremo izquierdo es t_{k_0} . Cuando no haya peligro de confusión escribiremos \mathcal{J} y \mathcal{J}_{k_0} en lugar de \mathcal{J}_Π y de \mathcal{J}_{Π, k_0} .

Dado un intervalo $J \subseteq \mathbb{R}$, $AC^n(J)$ es la clase de funciones $\rho : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ localmente absolutamente continuas.

Para un intervalo $J \in \mathcal{J}_\Pi$, $E^m(J)$ es el conjunto de funciones $\phi : J \rightarrow \mathbb{R}^m$ tales que $\phi(t) = \phi(t_k)$ para $t \in [t_k, t_{k+1}) \cap J$. Para $J \in \mathcal{J}_\Pi$, $\mathcal{E}(J) = AC^n(J) \times E^m(J)$. Si J es cerrado y acotado, consideraremos el espacio funcional $\mathcal{E}(J)$ dotado con la norma

$$\|\rho\|_{\infty, J} = \max_{t \in J} |\rho_1(t)| + \max_{t \in J} |\rho_2(t)|,$$

donde $\rho = (\rho_1, \rho_2)$. Cuando quede claro del contexto quien es J , simplemente escribiremos $\|\rho\|_\infty$. Observamos que esta norma induce en $\mathcal{E}(J)$ la topología de la convergencia uniforme.

Para un intervalo $J \subseteq \mathbb{R}$, $L_{loc}^1(J)$ denota el conjunto de funciones medibles localmente integrables, esto es, el conjunto de funciones $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}$ tales que para cada intervalo $[a, b] \subseteq J$, $\int_a^b |\alpha(t)| dt < +\infty$.

Decimos que una función continua $\gamma : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}^+$ es de clase \mathcal{K} si $\gamma(0) = 0$ y es estrictamente creciente. Si además $r = +\infty$ y $\lim_{s \rightarrow +\infty} \gamma(s) = +\infty$, decimos que γ es de clase \mathcal{K}_∞ . Por último, $\beta : I \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, con $I = [0, r^*]$ ó $I = \mathbb{R}^+$, es de clase \mathcal{KL} si para cada $t \in \mathbb{R}^+$ $\beta(\cdot, t)$ es de clase \mathcal{K} y para cada $r \in I$, $\beta(r, \cdot)$ es decreciente y $\lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(r, t) = 0$.

2.2.2 Ecuaciones híbridas: definiciones generales

Las ecuaciones que presentaremos y que denominaremos híbridas, resultan de la combinación de una ecuación diferencial ordinaria con una ecuación en diferencias en la forma que a continuación describimos.

Consideremos una s.i.m. Π y funciones $f_1 : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{X} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $f_2 : \mathbb{Z}^+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{Z}$, entonces

Definición 2.1 La ecuación

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_1(t, x(t), x(t_k), z(t_k)) & t \in [t_k, t_{k+1}) \\ z(t_{k+1}) = f_2(k, x(t_k), z(t_k)) & k \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \quad (2.1)$$

es una *ecuación híbrida*.

Antes de introducir la definición de solución para esta clase de ecuaciones, explicaremos brevemente las razones que nos llevaron a adoptarla. En principio, la siguiente definición de solución parece ser la más natural: una solución de la ecuación (2.1) es un par (ρ_1, ρ_2) compuesto por una función $\rho_1 : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $J = [t_{k_0}, T)$, $J = [t_{k_0}, T]$ ó $J = [t_{k_0}, +\infty)$, continua y derivable en cada punto de $J - \Pi$, y una sucesión $\rho_2 = \{\rho_2(t_k), k \in \Pi \cap J\}$, que verifica

$$\dot{\rho}_1(t) = f_1(t, \rho_1(t), \rho_1(t_k), \rho_2(t_k)) \quad \forall t \in (t_k, t_{k+1}) \cap J \quad (2.2)$$

y

$$\rho_2(t_{k+1}) = f_2(k, \rho_1(t_k), \rho_2(t_k)) \quad \forall t_k, t_{k+1} \in \Pi \cap J. \quad (2.3)$$

No obstante, esta definición de solución no es del todo conveniente por la siguiente razón: el dominio de definición de sus componentes es de diferente naturaleza, ya que

para la primera de ellas es un conjunto continuo mientras que para la segunda es un conjunto discreto. La forma de sortear el escollo es sencilla, consideramos que la segunda componente de la solución, ρ_2 , en lugar de una sucesión es una función definida en J constante en cada intervalo de la forma $J \cap [t_k, t_{k+1})$, es decir, $\rho_2(t) = \rho_2(t_k) \forall t \in J \cap [t_k, t_{k+1})$, que verifica (2.3). Si adoptamos esta definición, para poder garantizar al menos la existencia de soluciones de la ecuación, deberemos trabajar con funciones f_1 que sean continuas o, más generalmente, continuas a tramos respecto de t . Como suponer que f_1 es continua a tramos respecto de t es algo restrictivo para las aplicaciones, la siguiente condición sobre ρ_1 es más adecuada: ρ_1 es localmente absolutamente continua en J y

$$\dot{\rho}_1(t) = f_1(t, \rho_1(t), \rho_1(t_k), \rho_2(t_k)) \quad \text{c.t.p. } t \in (t_k, t_{k+1}) \cap J,$$

en otras palabras, ρ_1 restringida al intervalo $J \cap [t_k, t_{k+1})$ es solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = f_1(t, x, \rho_1(t_k), \rho_2(t_k))$ en el sentido de Caratheodory ([15], [72]).

Sintetizando lo discutido, llegamos a la siguiente definición de solución de la ecuación híbrida (2.1):

Definición 2.2 Una función $\rho = (\rho_1, \rho_2) : J \rightarrow \Omega$ con $J \in \mathcal{J}_\Pi$ y $\rho \in \mathcal{E}(J)$ es solución de (2.1) si:

(a) En cada intervalo $[t_k, t_{k+1}) \cap J$ no vacío, ρ_1 es solución de la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f_1(t, x, \rho_1(t_k), \rho_2(t_k)),$$

es decir, $\dot{\rho}_1(t) = f_1(t, \rho_1(t), \rho_1(t_k), \rho_2(t_k))$ para casi todo $t \in [t_k, t_{k+1}) \cap J$;

(b) la sucesión $\{\rho_2(t_k) : t_k \in J\}$ satisface la relación de recurrencia

$$\rho_2(t_{k+1}) = f_2(k, \rho_1(t_k), \rho_2(t_k)).$$

Respecto de la noción de solución que recién introdujimos observamos lo siguiente.

Observación 2.1 Si $\Pi \cap J = \{t_{k_0}\}$, la condición (b) es trivialmente satisfecha. Por lo tanto, cuando $J = [t_{k_0}, T)$ con $T \leq t_{k_0+1}$, ρ es solución de la ecuación híbrida si y sólo si ρ_1 es solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = f_1(t, x, \rho_1(t_{k_0}), \rho_2(t_{k_0}))$.

Observación 2.2 Cuando \mathcal{Z} es un conjunto unitario, digamos $\mathcal{Z} = \{z^*\}$, la ecuación se reduce a una de la forma

$$\dot{x}(t) = \bar{f}(t, x(t), x(t_k)), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k \in \mathbf{Z}^+, \quad (2.4)$$

con $\bar{f}(t, x, \xi) = f_1(t, x, \xi, z^*)$. En este caso una solución es una función $\rho : J \rightarrow \mathcal{X}$, con $J \in \mathcal{J}_\Pi$ y $\rho \in AC^n(J)$, que en cada intervalo $[t_k, t_{k+1}) \cap J$ no vacío satisface la ecuación diferencial

$$\dot{x} = \bar{f}(t, x, \rho(t_k)).$$

Observación 2.3 Cuando la s.i.m. Π es regular y δ es el período de muestreo, siempre puede suponerse que $\delta = 1$ (caso contrario se considera el cambio de variable $t = \tau\delta$) y que la ecuación es de la forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_1(t, x(t), x(k), z(k)) & t \in [k, k+1) \\ z(k+1) = f_2(k, x(k), z(k)) & k \in \mathbf{Z}^+ \end{cases} \quad (2.5)$$

A continuación introducimos la definición de solución del problema a valores iniciales (PVI) naturalmente asociado a la ecuación híbrida (2.1).

Definición 2.3 Dados $t_{k_0} \in \Pi$ y $\omega_0 = (x_0, z_0)$, una función $\rho : J \rightarrow \Omega$ con $J \in \mathcal{J}_{\Pi, k_0}$ es solución del problema a valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_1(t, x(t), x(t_k), z(t_k)) & t \in [t_k, t_{k+1}) \\ z(t_{k+1}) = f_2(k, x(t_k), z(t_k)) & k \in \mathbf{Z}^+ \\ (x(t_{k_0}), z(t_{k_0})) = (x_0, z_0) \end{cases} \quad (2.6)$$

si es solución de (2.1) y $\rho(t_{k_0}) = \omega_0$.

A lo largo del capítulo consideraremos algunas clases particulares de ecuaciones híbridas, las cuales estarán determinadas no sólo por la forma del lado derecho de la ecuación sino también por la forma de la s.i.m. Π . Específicamente consideraremos las siguientes clases:

Definición 2.4 Una ecuación híbrida es *lineal* si $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Z} = \mathbb{R}^m$ y (2.1) es de la forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_{11}(t)x(t_k) + B_{12}(t)z(t_k) & t \in [t_k, t_{k+1}) \\ z(t_{k+1}) = B_{21}(k)x(t_k) + B_{22}(k)z(t_k) & k \in \mathbf{Z}^+ \end{cases} \quad (2.7)$$

donde, para cada $t \in \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbf{Z}^+$ y $j = 1, 2$, $A(t)$, $B_{1j}(t)$ y $B_{2j}(k)$ son matrices de dimensiones apropiadas.

Definición 2.5 La ecuación (2.1) es una *ecuación híbrida periódica* con período $\Upsilon \in \mathbb{N}$ si:

- La s.i.m. Π es regular con período de muestreo δ .
- f_1 es periódica con período $T = \Upsilon\delta$, es decir $f_1(t + T, x, \xi, z) = f_1(t, x, \xi, z)$.
- f_2 es periódica con período Υ , es decir, $f_2(k + \Upsilon, x, z) = f_2(k, x, z)$.

Definición 2.6 La ecuación (2.1) es una *ecuación híbrida tiempo invariante* si es 1-periódica.

2.3 Sistemas de control a datos muestreados y ecuaciones híbridas

En esta sección mostraremos que los sistemas de control a datos muestreados pueden modelarse en toda la escala temporal mediante las ecuaciones híbridas que recién introdujimos.

Consideremos el sistema descrito por la figura 1 del capítulo 1 con:

1. \mathcal{P} un sistema de control en tiempo continuo con espacio de estados $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, espacio de controles $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^q$ y espacio de salidas $\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^p$, descrito por las ecuaciones

$$P : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ y(t) = h(t, x(t)) \end{cases} \quad (2.8)$$

donde para cada $t \in \mathbb{R}^+$, $x(t) \in \mathcal{X}$, $u(t) \in \mathcal{U}$, $y(t) \in \mathcal{Y}$, y $f : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es medible Lebesgue respecto de t y continua en (x, u) ;

2. \mathcal{C} un controlador digital con espacio de estados $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{R}^m$, espacio de entradas $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^s$ y espacio de salidas $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^l$, descrito por las ecuaciones

$$C : \begin{cases} z_{k+1} = g(k, z_k, w_k) \\ v_k = r(k, z_k, w_k) \end{cases} \quad (2.9)$$

donde para cada $k \in \mathbb{Z}^+$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $w_k \in \mathcal{W}$ y $v_k \in \mathcal{V}$.

Respecto de la forma en que a planta \mathcal{P} se conecta con el controlador \mathcal{C} , vamos a considerar dos casos. En el primero consideramos la salida de la planta y la salida del controlador se muestrean en los mismos instantes. En el segundo caso consideramos que ambas salidas se muestrean en forma regular pero con diferentes períodos de muestreo. En otros términos, las s.i.m. que se emplean para muestrear las salidas (de la planta y del controlador) son regulares pero diferentes. Los sistemas de control a datos muestreados que resultan en este último caso se denominan en la literatura especializada *multirate sampled-data control systems*.

2.3.1 Caso I: única s.i.m.

En este caso consideraremos que los conversores A/D y D/A, a través de los cuales se conectan la planta con el controlador, admiten la siguiente descripción: para una s.i.m. $\Pi = \{t_k : k \in \mathbb{Z}^+\}$

1. el conversor A/D transforma la señal en tiempo continuo $y(\cdot)$ en la señal en tiempo discreto $\{w_k\}$, con $w_k = y(t_k)$, $t_k \in \Pi$;

2. el conversor D/A transforma la señal en tiempo discreto $\{v_k\}$ en la señal en tiempo continuo $u(\cdot)$, con $u(t) = v_k$ para $t \in [t_k, t_{k+1})$.

Notamos que para poder efectuar la interconexión de esta forma, es necesario que $\mathcal{W} = \mathcal{Y}$ y que $\mathcal{U} = \mathcal{V}$, es decir, que el espacio de salidas de \mathcal{P} coincida con el espacio de entradas de \mathcal{C} y que el espacio de controles de \mathcal{P} coincida con el espacio de salidas de \mathcal{C} .

Veamos ahora que las trayectorias del sistema de control a datos muestreados satisfacen una ecuación híbrida.

Supongamos que en el instante $t_{k_0} \in \Pi$ el estado de la planta \mathcal{P} es $x(t_{k_0}) = x_0$ y el estado del controlador \mathcal{C} es $z_{k_0} = z_0$. Con el fin de “pensar” a la variable de estado z como una señal en tiempo continuo, definamos $z(t)$ entre instantes de muestreo de la siguiente forma $z(t) = z(t_k) = z_k$ para $t \in [t_k, t_{k+1})$. Entonces, si $x(\cdot)$ y $z(\cdot)$ están definidas en el intervalo $J = [t_{k_0}, T)$, tenemos que $x(\cdot) \in AC^n(J)$ y $z(\cdot) \in E^m(J)$ y, además, en cada intervalo $[t_k, t_{k+1}) \cap J$, si éste no es vacío, $x(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)) \\ &= f(t, x(t), v_k) \\ &= f(t, x(t), r(k, z(t_k), h(t_k, x(t_k))))\end{aligned}$$

y la sucesión $\{z(t_k)\}$ satisface la relación de recurrencia

$$\begin{aligned}z(t_{k+1}) &= g(k, z(t_k), w_k) \\ &= g(k, z(t_k), y(t_k)) \\ &= g(k, z(t_k), h(t_k, x(t_k)))\end{aligned}$$

con lo cual, si consideramos $f_1 : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{X} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $f_2 : \mathbb{Z}^+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{Z}$ definidas de la siguiente manera:

- $f_1(t, x, \xi, z) := f(t, x, r(k, z, h(t_k, \xi)))$ para $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k \in \mathbb{Z}^+$,
- $f_2(k, x, z) := g(k, z, h(t_k, x))$,

tenemos que la trayectoria $(x(t), z(t))$ es una solución de la ecuación híbrida (2.1).

En algunos casos la ecuación híbrida que describe el sistema de control a datos muestreados adquiere una de las formas particulares mencionadas, por ejemplo:

A) Si el controlador \mathcal{C} es sin memoria, es decir $v_k = r(k, w_k)$, la ecuación adquiere la forma (2.4) con $\bar{f}(t, x, \xi) = f(t, x, r(k, h(t_k, \xi)))$ para $t \in [t_k, t_{k+1})$.

B) La ecuación híbrida resulta lineal si tanto la planta \mathcal{P} como el controlador \mathcal{C} son

lineales, esto es, si $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Z} = \mathbb{R}^m$, $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^p$, $\mathcal{U} = \mathbb{R}^q$ y, para cada $t \in \mathbb{R}^+$ y cada $k \in \mathbb{Z}^+$,

$$\begin{aligned} f(t, x, u) &= A(t)x + B(t)u \\ h(t, x) &= C(t)x \\ g(k, z, w) &= D(k)z + E(k)w \\ r(k, z, w) &= F(k)z + G(k)w \end{aligned}$$

con $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(k)$, $E(k)$, $F(k)$ y $G(k)$ matrices de dimensiones apropiadas.

En este caso la ecuación es de la forma (2.7) con la misma $A(t)$ que aparece en la definición de $f(t, x, u)$, $B_{11}(t) = B(t)G(k)C(t_k)$ y $B_{12}(t) = B(t)D(k)$ para cada $t \in [t_k, t_{k+1})$ y $B_{21}(k) = E(k)C(t_k)$ y $B_{22}(k) = F(k)$ para cada $k \in \mathbb{Z}^+$.

C) La ecuación resulta periódica con período $\Upsilon \in \mathbb{N}$ si la s.i.m. Π es regular con período δ , la planta es periódica con período $T = \Upsilon\delta$, esto es, $f(t+T, x, u) = f(t, x, u)$ y $h(t+T, x) = h(t, x)$ y el controlador es periódico con período Υ , es decir, $g(k+\Upsilon, z, w) = g(k, z, w)$ y $r(k+\Upsilon, z, w) = r(k, z, w)$.

D) La ecuación resulta tiempo invariante si la s.i.m. Π es regular y tanto la planta como el controlador son sistemas tiempo invariantes, o sea, $f = f(x, u)$, $h = h(x)$, $g = g(z, w)$ y $r = r(z, w)$.

2.3.2 Caso II: muestreo múltiple

Como ya hemos dicho, en este caso consideramos que las salidas de la planta y del controlador se muestrean en forma regular pero con diferentes períodos de muestreo. Dentro de este caso consideraremos dos situaciones diferentes: a) la salida del controlador se muestrea con mayor frecuencia que la salida de la planta; b) la salida de la planta se muestrea con mayor frecuencia que la del controlador. En ambos casos supondremos que uno de los períodos de muestreo es múltiplo entero del otro.

Caso II.1) En este caso suponemos que \mathcal{P} y \mathcal{C} satisfacen:

1. $\mathcal{W} = \mathcal{Y}$;
2. $\mathcal{V} = \mathcal{U}^N$ con $N \in \mathbb{N}$, con lo cual

$$r(k, z, w) = (r_1(k, z, w), \dots, r_N(k, z, w)), \quad r_i(k, z, w) \in \mathcal{U}, \quad i = 1, \dots, N,$$

y consideramos que la planta se conecta con el controlador de la siguiente manera:

Para Π_1 y Π_2 dos s.i.m. regulares con períodos de muestreo δ_1 y δ_2 respectivamente y tales que $\delta_1 = N\delta_2$,

1. el conversor A/D transforma la señal en tiempo continuo $y(\cdot)$ en la señal en tiempo discreto $\{w_k\}$, con $w_k = y(k\delta_1)$;
2. el conversor D/A transforma la señal $\{v_k = (v_{k,1}, v_{k,2}, \dots, v_{k,N})\}$ en la señal en tiempo continuo $u(\cdot)$, definida de la siguiente forma, $u(t) = v_{k,i}$ si $t \in [k\delta_1 + (i-1)\delta_2, k\delta_1 + i\delta_2)$.

En otros términos, en el instante $t_k = k\delta_1$ la entrada del controlador es $w_k = y(t_k)$ y la salida, obtenida a partir de w_k y z_k , es $v_k = (v_{k,1}, v_{k,2}, \dots, v_{k,m})$. Por otra parte, la entrada de la planta $u(\cdot)$ en el intervalo $[t_k, t_{k+1})$ puede describirse de la siguiente forma: si dividimos el intervalo $[t_k, t_{k+1})$ en los N intervalos de longitud δ_2 , $I_1 = [t_k, t_{k+1} + \delta_2), \dots, I_N = [t_k + (N-1)\delta_2, t_{k+1})$, entonces $u \equiv v_{k,i}$ en I_i .

Definiendo $z(t) = z_k$ si $t_k \leq t < t_{k+1}$ y $t_k = k\delta_1$, se demuestra, al igual que en el caso anterior, que cada trayectoria $(x(t), z(t))$ del sistema a datos muestreados es solución de la ecuación híbrida (2.1) si se consideran $\Pi = \Pi_1$ y $f_1 : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{X} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $f_2 : \mathbb{Z}^+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{Z}$ definidas de la siguiente manera:

- $f_1(t, x, \xi, z) := f(t, x, r_i(k, z, h(t_k, \xi)))$ para $t \in [t_k + (i-1)\delta_2, t_k + i\delta_2)$, $i = 1, \dots, N$;
- $f_2(k, x, z) := g(k, z, h(t_k, x))$.

Como en el caso I, si \mathcal{P} y \mathcal{C} son lineales la ecuación resulta lineal y si \mathcal{P} y \mathcal{C} son periódicas, la primera con período $\Upsilon\delta_1$ y la segunda con período Υ , la ecuación resulta Υ -periódica. Cuando \mathcal{P} y \mathcal{C} son tiempo invariantes, la ecuación híbrida resulta 1-periódica y por lo tanto tiempo invariante.

Caso II.2) En este caso, para que la conexión entre la planta \mathcal{P} y el controlador \mathcal{C} pueda efectuarse en la forma que describiremos, es necesario que \mathcal{P} y \mathcal{C} satisfagan las siguientes condiciones:

1. El espacio de salidas de \mathcal{P} es un espacio producto, es decir, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \times \dots \times \mathcal{Y}_p$, con lo cual

$$y = h(t, x) = (h_1(t, x), \dots, h_p(t, x)) = (y_1, \dots, y_p).$$

2. $\mathcal{V} = \mathcal{U}$ y la salida del controlador no depende explícitamente de la entrada de éste, es decir, $r = r(k, z)$.
3. $\mathcal{W} = \mathcal{Y}_1^{N_1} \times \dots \times \mathcal{Y}_p^{N_p}$ con $N_i \in \mathbb{N}$.

Suponiendo que la planta y el controlador satisfacen las condiciones descritas, la conexión entre \mathcal{P} y \mathcal{C} se efectúa en la siguiente forma:

Sean $\Pi_{1,1}, \dots, \Pi_{1,p}$ y Π_2 , s.i.m. regulares con, respectivamente, períodos de muestreo $\delta_{1,1}, \dots, \delta_{1,p}$ y δ_2 tales que $N_i \delta_{1,i} = \delta_2$, entonces:

1. el conversor A/D transforma la señal en tiempo continuo $y(\cdot)$ en la señal en tiempo discreto $\{w_k = (w_{k,1}, \dots, w_{k,p})\}$, siendo

$$w_{k,i} = (y_i(t_k), y_i(t_k + \delta_i^s), \dots, y_i(t_k + (N_i - 1)\delta_i^s)), \quad t_k = k\delta_2;$$

2. el conversor D/A transforma la señal en tiempo discreto $\{v_k\}$ en la señal en tiempo continuo $u(\cdot)$ con $u(t) = v_k$ para $t \in [t_k, t_{k+1})$.

En otras palabras, durante el intervalo $[t_k, t_{k+1})$, la entrada de la planta \mathcal{P} es constante e igual a v_k , la k -ésima salida del controlador. Por otra parte, las p componentes de la salida de la planta, $y_1(\cdot), \dots, y_p(\cdot)$, se muestrean en forma regular con, posiblemente, diferentes períodos de muestreo, todos ellos submúltiplos del período con que se muestrea la salida del controlador. Entonces, la k -ésima entrada del controlador w_k se obtiene a partir de la salida $y(\cdot)$ de la siguiente forma: si $y_{i,1}, \dots, y_{i,N_i}$ son las N_i muestras de $y_i(\cdot)$ obtenidas durante el intervalo $[t_k, t_{k+1})$,

$$w_k = (y_{1,1}, \dots, y_{1,N_1}, \dots, y_{p,1}, \dots, y_{p,N_p}).$$

En lo que sigue mostraremos que bajo ciertas condiciones, las trayectorias del sistema de control a datos muestreados descrito satisfacen una ecuación híbrida.

Supongamos en primer lugar que la planta \mathcal{P} es tiempo invariante, i.e. que las ecuaciones que la describen son

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (2.10)$$

y que se cumple lo siguiente: Para cada $x_0 \in \mathcal{X}$ y cada $u_0 \in \mathcal{U}$,

- el problema a valores iniciales

$$\dot{x} = f(x, u_0), \quad x(0) = x_0 \quad (2.11)$$

tiene una única solución $x(\cdot, x_0, u_0) : I_{x_0, u_0} \rightarrow \mathcal{X}$, maximalmente definida en el intervalo $I_{x_0, u_0} = (T^-(x_0, u_0), T^+(x_0, u_0))$;

- $x(\cdot, x_0, u_0)$ está al menos definida en $[0, \delta_2]$, en otras palabras, $T^+(u_0, x_0) > \delta_2$.

Para $0 \leq \tau \leq \delta_2$, consideremos la aplicación $F_\tau(x, u) : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$, $F_\tau(x, u) = x(\tau, x, u)$ y tengamos en cuenta lo siguiente:

(O1) Si en el instante $s \geq 0$ el estado de la planta \mathcal{P} es $x(s) = x_0$ y durante el intervalo $[s, s + \delta_2)$ la entrada de la planta es constante e igual a u , entonces la trayectoria en el espacio de estados $x(t)$ está definida para todo $t \in [s, s + \delta_2]$ y $x(s + \tau) = F_\tau(x_0, u)$.

Por último, para $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, N_i$, consideremos $H_{i,j} : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}_i$, $H_{i,j} := h_i \circ F_{(j-1)\delta_{1,i}}$ y $H : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{W}$,

$$H(x, u) = (H_{1,1}(x, u), \dots, H_{1,N_1}(x, u), \dots, H_{p,1}(x, u), \dots, H_{p,N_p}(x, u)).$$

Entonces, definiendo $z(t) = z_k$ para $t \in [t_k, t_{k+1})$, tenemos que cada trayectoria $(x(t), z(t))$ del sistema de control a datos muestreados satisface la ecuación híbrida (2.1) con $\Pi = \Pi_2$ y $f_1 : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{X} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $f_2 : \mathbb{Z}^+ \times \mathcal{X} \times \Omega$ definidas de la siguiente forma:

- $f_1(t, x, \xi, z) := f(x, r(k, z))$ para $t \in [t_k, t_{k+1})$;
- $f_2(k, x, z) := g(k, z, H(x, r(k, z)))$.

En efecto, en el intervalo $[t_k, t_{k+1}) = [t_k, t_k + \delta_2)$, la entrada a la planta es $u(t) = r(k, z_k) = r(k, z(t_k))$. Por lo tanto $x(t)$ satisface en tal intervalo la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), r(k, z(t_k))) \\ &= f_1(t, x(t), x(t_k), z(t_k)). \end{aligned}$$

Por otra parte, debido a (O1) y a la definición de H , tenemos para $i = 1, \dots, p$ y $j = 1, \dots, N_i$ que

$$y_i(t_k + (j-1)\delta_{1,i}) = h_i(x(t_k + (j-1)\delta_{1,i})) = H_{i,j}(x(t_k), r(k, z(t_k))).$$

Por lo tanto, $w_k = H(x(t_k), r(k, z(t_k)))$ y entonces

$$\begin{aligned} z(t_{k+1}) &= g(k, z(t_k), H(x(t_k), r(k, z(t_k)))) \\ &= f_2(k, x(t_k), z(t_k)). \end{aligned}$$

En general, si la planta \mathcal{P} es tiempo variante también es posible demostrar que las trayectorias del sistema de control a datos muestreados satisfacen una ecuación híbrida. Supongamos que vale lo siguiente:

Para cada $t_{k_0} \in \Pi_2$, $x_0 \in \mathcal{X}$ y $u_0 \in \mathcal{U}$,

- el problema a valores iniciales

$$\dot{x} = f(t, x, u_0), \quad x(t_{k_0}) = x_0 \quad (2.12)$$

tiene una única solución $x(\cdot, t_{k_0}, x_0, u) : I_{t_{k_0}, x_0, u_0} \rightarrow \mathcal{X}$ maximalmente definida en el intervalo $I_{x_0, u_0} = (T^-(t_{k_0}, x_0, u_0), T^+(t_{k_0}, x_0, u_0))$;

- $x(\cdot, x_0, u_0)$ está definida en $[t_{k_0}, t_{k_0} + \delta_2]$, o sea, $T^+(u_0, x_0) > t_{k_0} + \delta_2$.

Entonces, considerando para $0 \leq \tau \leq \delta_2$ y $k \in \mathbf{Z}^+$, $F_\tau(k, x_0, u_0) = x(t_k + \tau, t_k, x_0, u_0)$, y para $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, N_i$, $H_{i,j} := h_i \circ F_{(j-1)\delta_{1,i}}$ y

$$H(k, x, u) = (H_{1,1}(k, x, u), \dots, H_{1,N_1}(k, x, u), \dots, H_{p,1}(k, x, u), \dots, H_{p,N_p}(k, x, u)),$$

se demuestra en forma similar al caso tiempo invariante que las trayectorias del sistema de control a datos muestreados satisfacen la ecuación (2.1) con $\Pi = \Pi_2$ y $f_1 : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{X} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $f_2 : \mathbf{Z}^+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{Z}$ definidas de la siguiente forma:

- $f_1(t, x, \xi, z) := f(x, r(k, z))$ para $t \in [t_k, t_{k+1})$;
- $f_2(k, x, z) := g(k, z, H(k, x, r(k, z)))$.

Al igual que en los casos anteriores, si la planta y el controlador son de alguna clase determinada, la ecuación híbrida que describe al sistema de control a datos muestreados pertenece a alguna de las clases particulares que mencionamos. Por ejemplo, si la planta y el controlador son lineales, la ecuación resulta lineal, si son tiempo invariantes, la ecuación es tiempo invariante y si la planta es $\Upsilon\delta_2$ periódica y el controlador es Υ periódico, la ecuación resulta Υ -periódica.

2.4 Teoremas de existencia y continuidad

En esta sección consideraremos el problema a valores iniciales (2.6). Estudiaremos la existencia de las soluciones, su unicidad y la dependencia de las mismas respecto de las condiciones iniciales. Demostraremos que bajo ciertas condiciones, las soluciones maximalmente definidas del PVI son únicas y dependen continuamente de las condiciones iniciales.

A lo largo de esta sección consideraremos para las funciones que aparecen en el lado derecho de la ecuación (2.1) alguna de las siguientes condiciones .

(H1) Para cada $t \in \mathbb{R}^+$ y cada (ξ, z) , $f_1(t, \cdot, \xi, z)$ es continua en \mathcal{X} y, para cada $(x, \xi, z) \in \mathcal{X} \times \Omega$, $f_1(\cdot, x, \xi, z)$ es medible Lebesgue en \mathbb{R}^+ .

(H1F) Para cada $t \in \mathbb{R}^+$, $f_1(t, \cdot, \cdot, \cdot)$ es continua en $\mathcal{X} \times \Omega$ y, para cada $(x, \xi, z) \in \mathcal{X} \times \Omega$, $f_1(\cdot, x, \xi, z)$ es medible Lebesgue en \mathbb{R}^+ .

(H2) Para cada conjunto compacto $K \subset \mathcal{X}$ y cada $(\xi, z) \in \Omega$ existen $L_K \geq 0$ y $\alpha \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ tales que:

1. $|f_1(t, x, \xi, z)| \leq \alpha(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \forall x \in K,$
2. $|f_1(t, x, \xi, z) - f_1(t, x', \xi, z)| \leq L_K|x - x'| \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \forall x, x' \in K.$

(H2F) Para cada conjunto compacto $K \subset \mathcal{X} \times \Omega$ existen $L_K \geq 0$ y $\alpha \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ tales que:

1. $|f_1(t, x, \xi, z)| \leq \alpha(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \forall (x, \xi, z) \in K,$
2. $|f_1(t, x, \xi, z) - f_1(t, x', \xi, z)| \leq L_K|x - x'| \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \forall (x, \xi, z), (x', \xi, z) \in K.$

(H3) Para cada $k \in \mathbb{Z}^+$, $f_2(k, \cdot, \cdot)$ es continua en Ω .

Como veremos a continuación, las condiciones (H1) y (H2) garantizarán la existencia y unicidad de las soluciones, mientras que las condiciones más fuertes (H1F) y (H2F), junto con (H3), asegurarán la continuidad de las soluciones respecto de las condiciones iniciales.

2.4.1 Existencia y unicidad de las soluciones

Comenzaremos precisando que entendemos por una solución maximalmente definida del PVI.

Definición 2.7 Una solución $\rho^* : I^* \rightarrow \Omega$ del problema a valores iniciales (2.6) es *maximal*, o equivalentemente, está *maximalmente definida*, si satisface lo siguiente: si $\rho' : I' \rightarrow \Omega$ también es solución de (2.6), entonces $I' \subseteq I^*$ y $\rho^*|_{I'} = \rho'$.

En el siguiente teorema mostramos que las condiciones (H1) y (H2) son suficientes para garantizar la existencia y unicidad de la solución maximalmente definida del problema a valores iniciales (2.6).

Teorema 2.1 Supongamos que f_1 en (2.6) satisface (H1) y (H2). Entonces, para cada par $(t_{k_0}, \omega_0) \in \Pi \times \Omega$ existe una única solución maximal $\rho^* : I^* \rightarrow \Omega$ del problema a valores iniciales (2.6).

Demostración:

a) Consideremos el problema a valores iniciales

$$\dot{x} = f_1(t, x, x_0, z_0), \quad x(t_{k_0}) = x_0. \quad (2.13)$$

Como consecuencia del Teorema 2.13 del Apéndice I, existe una solución ρ_1 de (2.13) definida en un intervalo de la forma $[t_{k_0}, \tau)$, con $t_{k_0} < \tau < t_{k_0+1}$. Definiendo $\rho_2(t) = z_0$ para $t \in [t_{k_0}, \tau)$ resulta que $\rho(t) = (\rho_1(t), \rho_2(t))$ es una solución de (2.6) debido a la Observación 2.1.

b) Supongamos que ρ y ρ' son soluciones de (2.1) definidas en, respectivamente, J y J' y que $\rho(t_k) = \rho'(t_k) = \omega_1$ para algún $t_k \in I = J \cap J'$, entonces

$$\rho|_{I \cap [t_k, t_{k+1})} = \rho'|_{I \cap [t_k, t_{k+1})},$$

pues en $I \cap [t_k, t_{k+1})$, $\rho_1 = \rho'_1$ —ambas, ρ_1 y ρ'_1 , son soluciones del problema a valores iniciales (2.13) con ω_1 y t_k en lugar de ω_0 y t_{k_0} —, y $\rho_2 = \rho'_2 = z_1$. Si $t_{k+1} \in I$, por la continuidad de ρ_1 y ρ'_1 tenemos que $\rho_1(t_{k+1}) = \rho'_1(t_{k+1})$; por otra parte $\rho_2(t_{k+1}) = \rho'_2(t_{k+1}) = f_2(k, \omega_1)$, y, en consecuencia

$$\rho|_{I \cap [t_k, t_{k+1})} = \rho'|_{I \cap [t_k, t_{k+1})}.$$

Entonces, en forma inductiva se deduce que $\rho = \rho'$ en $I \cap [t_k, +\infty)$.

c) Consideremos el conjunto \mathcal{S} compuesto por los pares ordenados (ρ, I) con $\rho : I \rightarrow \Omega$ solución del problema a valores iniciales (2.6). Por a), \mathcal{S} no es vacío. Consideremos en \mathcal{S} el orden: $(\rho, I) \preceq (\rho', I')$ si $I \subseteq I'$ y $\rho'|_I = \rho$. Por b), \preceq es un orden total. Escribamos $\mathcal{S} = \{(\rho_\alpha, I_\alpha) : \alpha \in A\}$ con A un conjunto de índices y consideremos el intervalo $I^* = \cup_{\alpha \in A} I_\alpha$ y la función $\rho^* : I^* \rightarrow \Omega$ definida por $\rho^*|_{I_\alpha} = \rho_\alpha$. Entonces ρ^* es solución del problema a valores iniciales (2.6), con lo cual $(\rho^*, I^*) \in \mathcal{S}$. De la definición de I^* y de ρ^* se deduce fácilmente que (ρ^*, I^*) es el único elemento maximal de \mathcal{S} , con lo cual ρ^* está en las condiciones de la tesis del teorema. ■

Observación 2.4 Del Teorema 2.1 se desprenden los siguientes hechos:

1. Si $\rho : I \rightarrow \Omega$ es la solución maximal del problema a valores iniciales (2.6) con $\rho(t_{k_0}) = \omega_0$ y $t_{k_1} \in \Pi \cap I$, entonces $\rho' = \rho|_{I \cap [t_{k_1}, +\infty)}$ es la solución maximalmente definida del problema a valores iniciales (2.6) con $\rho'(t_{k_1}) = \omega_1 = \rho(t_{k_1})$.
2. Si la ecuación es Υ -periódica, entonces $\rho : [k_0\delta, \tau) \rightarrow \Omega$ es la solución maximal de (2.1) que satisface $\rho(k_0\delta) = \omega_0$ si y sólo si $\rho^* : [(k_0 + \Upsilon)\delta, \tau + \Upsilon\delta) \rightarrow \Omega$ con $\rho^*(t) = \rho(t - \Upsilon\delta)$, es la solución maximal de (2.1) que satisface $\rho^*((k_0 + \Upsilon)\delta) = \omega_0$.

En el siguiente teorema damos una condición suficiente para la existencia de una prolongación o continuación de una solución.

Teorema 2.2 Supongamos que f_1 en (2.1) satisface (H1) y (H2). Sea $\rho : J \rightarrow \Omega$ con $J \in \mathcal{J}_{k_0}$ una solución de (2.1) tal que para algún conjunto compacto $K \subset \mathcal{X}$, $\rho(J) \subset K \times \mathcal{Z}$. Entonces existen $J' \in \mathcal{J}_{k_0}$, con $J \subset J'$, y una solución de (2.1) $\rho' : J' \rightarrow \Omega$ tales que $\rho'|_J = \rho$.

Demostración: Supongamos en primer término que $J = [t_{k_0}, \tau)$. Sea t_{k_1} tal que $t_{k_1} < \tau \leq t_{k_1+1}$, entonces $\rho_1|_{[t_{k_1}, \tau)}$ es solución del problema a valores iniciales $\dot{x} = f_1(t, x, \rho_1(t_{k_1}), \rho_2(t_{k_1}))$, $x(t_{k_1}) = \rho_1(t_{k_1})$. Como f_1 satisface (H1) y (H2) y $\rho_1(t) \in K$ para todo $t \in [t_{k_1}, \tau)$, por el Lema 2.4 del Apéndice I sabemos que existe $\lim_{t \rightarrow \tau^-} \rho_1(t) = x_1$. Entonces definimos ρ' en $J' = [t_{k_0}, \tau]$ de la siguiente manera: para $t \in [t_{k_0}, \tau)$, $\rho'(t) = \rho(t)$ y para $t = \tau$ consideramos dos casos, a) si $\tau \notin \Pi$, $\rho'_1(\tau) = x_1$ y $\rho'_2(\tau) = \rho_2(t_{k_1})$, b) si $\tau \in \Pi$, es decir, $\tau = t_{k_1+1}$, $\rho'_1(\tau) = x_1$ y $\rho'_2(\tau) = f_2(t_{k_1}, \rho_1(t_{k_1}), \rho_2(t_{k_1}))$. Si $J = [t_{k_0}, \tau]$, con $t_{k_1} \leq \tau < t_{k_1+1}$, definimos ρ' de la siguiente manera:

$$\rho'(t) = \begin{cases} \rho(t) & \text{si } t \in [t_{k_0}, \tau] \\ \xi(t) & \text{si } t \in (\tau, \tau') \end{cases}$$

donde $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, ξ_1 es una solución del problema a valores iniciales

$$\dot{x} = f_1(t, x, \rho_1(t_{k_1}), \rho_2(t_{k_1})), \quad x(\tau) = \rho_1(t_{k_1})$$

definida en $[\tau, \tau')$ con $\tau' < t_{k_1+1}$ y $\xi_2(t) = \rho_2(t_{k_1})$ para $t \in [\tau, \tau')$. ■

Observación 2.5 Sea $\rho^* = (\rho_1^*, \rho_2^*) : I^* \rightarrow \Omega$, la solución maximal del problema a valores iniciales (2.6), entonces del Teorema 2.2 se deducen los siguientes hechos:

1. I^* es un intervalo abierto por la derecha, es decir, $I^* = [t_{k_0}, \tau)$ o $I^* = [t_{k_0}, +\infty)$.
2. Si existe un subconjunto compacto $K \subset \mathcal{X}$ tal que $\rho^*(t) \in K \times \mathcal{Z}$ para todo $t \in I^*$, entonces ρ^* está globalmente definida, es decir, $I^* = [t_{k_0}, +\infty)$.
3. Si $I^* = [t_{k_0}, \tau)$, entonces para cada subconjunto compacto $K \subset \mathcal{X}$ con $x_0 \in K$ existe $t^* \in [t_{k_0}, \tau)$ tal que $\rho^*(t^*) \notin K \times \mathcal{Z}$. En otras palabras, la trayectoria $\rho^*(t)$ abandona en tiempo finito cada subconjunto de la forma $K \times \mathcal{Z}$ con K compacto.
4. Si $I^* = [t_{k_0}, \tau)$ y $t_{k_1} < \tau \leq t_{k_1+1}$, entonces $\rho_1^*|_{[t_{k_1}, \tau)}$ es la solución maximal del problema a valores iniciales

$$\dot{x} = f_1(t, x, x_1, z_1), \quad x(t_{k_1}) = x_1$$

con $(x_1, z_1) = \rho^*(t_{k_1})$. Si así no fuese, es decir, si $\rho_1^*|_{[t_{k_1}, \tau)}$ no fuese la solución maximal de ese p.v.i., ρ_1^* podría extenderse con continuidad al intervalo $[t_{k_0}, \tau]$ y, en consecuencia, existiría un conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que $\rho_1^*(t) \in K \forall t \in I^*$, pero entonces por el punto 2, $I^* = [t_{k_0}, +\infty)$ lo cual sería absurdo.

Como consecuencia de la observación 2.5 y de resultados estándar para la existencia global de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias (ver por ejemplo Teorema II.4.3, pag. 188 de [78]) vale la siguiente:

Proposición 2.1 Supongamos que f_1 en (2.6) satisface (H1) y (H2) y que $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$. Supongamos, además, que para cada $\omega_0 = (x_0, z_0) \in \Omega$ existen $\gamma \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ y $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continua y no decreciente, tales que $\int_0^{+\infty} \phi^{-1}(s) ds = +\infty$ y

$$|f_1(t, x, x_0, z_0)| \leq \gamma(t)\phi(|x|) \quad \forall t \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces las soluciones maximales del problema a valores iniciales (2.6) están globalmente definidas.

2.4.2 Continuidad de las soluciones respecto de las condiciones iniciales

En lo que sigue estudiaremos la dependencia de las soluciones del problema a valores iniciales (2.6) respecto de las condiciones iniciales. Demostraremos que si el lado derecho de la ecuación híbrida satisface las condiciones (H1F), (H2F) y (H3), las soluciones maximalmente definidas de ésta dependen continuamente de las condiciones iniciales.

Teorema 2.3 Supongamos que en (2.6) f_1 y f_2 satisfacen las condiciones (H1F), (H2F) y (H3). Sea $\{\omega_m : m \in \mathbb{Z}^+\} \subset \Omega$ tal que $\lim_{m \rightarrow +\infty} \omega_m = \omega_0$ y sea ρ_m la única solución maximalmente definida del problema a valores iniciales (2.6), con $\rho(t_{k_0}) = \omega_m$. Entonces si ρ_0 está definida en el intervalo $J = [t_{k_0}, T]$, ρ_m está definida en J para m suficientemente grande y $\rho_m \rightarrow \rho_0$ en $\mathcal{E}(J)$, es decir,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|\rho_m - \rho_0\|_{\infty, J} = 0.$$

Demostración: Vamos a considerar dos casos:

a) Caso $t_{k_0} \leq T \leq t_{k_0+1}$. Sean $\omega_m = (x_m, z_m)$ y $f_m(t, x) = f_1(t, x, x_m, z_m)$ para $m = 0, 1, \dots$. Debido a las hipótesis sobre la sucesión $\{\omega_m\}$ y sobre f_1 , tenemos que tanto $\{x_m\}$ como $\{z_m\}$ están en las condiciones de la Proposición 2.4 del Apéndice I. Sea $\rho_0 = (\rho_{0,1}, \rho_{0,2})$, entonces $\rho_{0,1}|_{[t_{k_0}, T]} = \xi_0$ es solución del problema a valores iniciales $\dot{x} = f_0(t, x)$, $x(t_{k_0}) = x_0$. Por la Proposición 2.4 existe $M \in \mathbb{N}$ tal que ξ_m , la solución maximal del problema a valores iniciales $\dot{x} = f_m(t, x)$, $x(t_{k_0}) = x_m$, está definida en el intervalo $[t_{k_0}, T]$ si $m \geq M$ y además $\xi_m \rightarrow \xi_0$ uniformemente en $[t_{k_0}, T]$.

Si $T < t_{k_0+1}$, para $m \geq M$, la función η_m , definida en $[t_{k_0}, T]$ mediante $\eta_m(t) = (\xi_m(t), z_m)$, es solución de (2.1) con $\eta_m(t_{k_0}) = \omega_m$ y además $\eta_m \rightarrow \rho_0$ uniformemente en $[t_{k_0}, T]$. En otras palabras, $\{\eta_m\}$ converge a ρ_0 en $\mathcal{E}([t_{k_0}, T])$. Debido al Teorema 2.1, $\rho_m|_{[t_{k_0}, T]} = \eta_m$.

Si $T = t_{k_0+1}$, para $m \geq M$ definimos η_m en $[t_{k_0}, t_{k_0+1})$ como antes y $\eta_m(t_{k_0+1}) = (\xi_m(t_{k_0+1}), f_2(k_0, x_m, z_m))$. Razonando como en el caso anterior y teniendo en cuenta ahora la continuidad de f_2 , llegamos a la conclusión que η_m converge a ρ_0 en $\mathcal{E}([t_{k_0}, t_{k_0+1}])$ y que $\rho_m|_{[t_{k_0}, t_{k_0+1})} = \eta_m$. Con esto queda probada la validez de la tesis en el caso $t_{k_0} \leq T \leq t_{k_0+1}$.

b) Caso $T > t_{k_0+1}$. Este caso lo demostraremos en forma inductiva. Supongamos válida la tesis para $T \leq t_{k_0+k}$ y consideremos $t_{k_0+k} < T \leq t_{k_0+k+1}$. Entonces ρ_0 está definida en $[t_{k_0}, t_{k_0+k}]$ y por lo tanto para $m \geq M_k$, ρ_m también está definida en $[t_{k_0}, t_{k_0+k}]$ y $\rho_m \rightarrow \rho_0$ uniformemente en tal intervalo. Sin pérdida de generalidad suponemos $M_k = 1$ y consideramos $\omega'_m = \rho_m(t_{k_0+k})$. Entonces $\omega'_m \rightarrow \omega'_0$. De acuerdo con la Observación 2.4, la función $\rho'_m = \rho_m|_{J_m \cap [t_{k_0+k}, +\infty)}$ es la solución maximal del problema a valores iniciales (2.6) con t_{k_0+k} y ω'_m en lugar t_{k_0} y ω_m respectivamente. Entonces ρ'_0 está definida en $[t_{k_0+k}, T]$, $\omega'_m \rightarrow \omega'_0$ y $t_{k_0+k} < T \leq t_{k_0+k+1}$. Entonces ρ' , $\{\omega'_m\}$ y ω'_0 están en las condiciones del caso a) y, en consecuencia, ρ'_m está definida en $[t_{k_0+k}, T]$ para m suficientemente grande y ρ'_m converge uniformemente a ρ'_0 en tal intervalo, concluyendo la demostración del teorema. ■

2.4.3 Ecuaciones híbridas lineales

En esta sección estudiaremos algunas propiedades de las soluciones de la ecuación híbrida lineal (2.7).

En este caso consideraremos que el lado derecho de la ecuación verifica las siguientes condiciones:

(L1) Las aplicaciones $A(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_{11}(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ y $B_{12}(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ son medibles Lebesgue.

(L2) Las matrices $A(t)$, $B_{11}(t)$ y $B_{12}(t)$ son uniformemente acotadas, esto es, existe una constante $L \geq 0$ tal que

$$\|A(t)\| + \|B_{11}(t)\| + \|B_{12}(t)\| \leq L \quad \forall t \geq 0.$$

Observación 2.6 Como las condiciones (L1) y (L2) son necesarias y suficientes para que el lado derecho de la ecuación híbrida lineal (2.7) satisfaga las condiciones (H1F) y (H2F), y (H3) se verifica automáticamente, las soluciones maximales de la ecuación (2.7) son únicas y dependen continuamente de las condiciones iniciales. Además, debido a (L2), para cada $\omega_0 = (x_0, z_0)$,

$$|f_1(t, x, x_0, z_0)| = |A(t)x + B_{11}(t)x_0 + B_{12}(t)z_0| \leq L(\|\omega_0\| + |x|) \quad \forall t \geq 0,$$

con lo cual las hipótesis de la Proposición 2.1 se ven satisfechas y, en consecuencia, las soluciones maximales están globalmente definidas.

La siguiente proposición resume lo discutido en la Observación 2.6.

Proposición 2.2 Supongamos que las funciones a valores matriciales que aparecen en (2.7) satisfacen (L1) y (L2). Entonces vale lo siguiente:

1. La solución maximal ρ de la ecuación (2.7) que satisface $\rho(t_{k_0}) = \omega_0$ está definida en $[t_{k_0}, +\infty)$.
2. Si ρ y ρ' son las soluciones maximalmente definidas de (2.7) que satisfacen $\rho(t_{k_0}) = \omega_0$, $\rho'(t_{k_0}) = \omega_1$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\rho'' = \lambda\rho + \rho'$ es la solución maximalmente definida de (2.7) que satisface $\rho''(t_{k_0}) = \lambda\omega_0 + \omega_1$.
3. Para cada intervalo cerrado y acotado $J \in \mathcal{J}_{k_0}$ existe una constante $C = C(J)$ tal que vale lo siguiente: si ρ es una solución maximal de la ecuación (2.7) entonces $\|\rho|_J\|_{\infty, J} \leq C\|\rho(t_{k_0})\|$.

Demostración: Sólo demostraremos el punto 3. ya que el punto 1. fue discutido en la Observación 2.6 y el punto 2. se verifica directamente comprobando que ρ'' es solución de la ecuación.

Consideremos el operador $\Lambda_J : \Omega \rightarrow \mathcal{E}(J)$ definido por $\Lambda_J(\omega_0) = \rho|_J$, con ρ la solución maximalmente definida de la ecuación que satisface $\rho(t_{k_0}) = \omega_0$. Por el punto 2. Λ_J es lineal y, por la continuidad de las soluciones respecto de las condiciones iniciales, es continuo; por lo tanto Λ_J es acotado y queda demostrado el punto 3. ■

2.5 Una clase de sistemas dinámicos híbridos

En esta sección comenzaremos el estudio del comportamiento asintótico de las soluciones de una ecuación híbrida.

Para llevar a cabo este estudio, consideraremos al conjunto de soluciones de la ecuación híbrida como un sistema dinámico híbrido y adoptaremos el marco teórico presentado en [81] y en [55] para el estudio cualitativo de esta clase de sistema dinámico.

De acuerdo a esta teoría, un sistema dinámico híbrido es una familia de trayectorias parametrizadas por las posiciones e instantes iniciales, que evolucionan en un espacio métrico a lo largo de un espacio de tiempos abstracto. Es pertinente puntualizar que esta definición de sistema dinámico híbrido, la que considera que un sistema dinámico híbrido es una familia de trayectorias o movimientos, es una extensión de la de sistema dinámico empleada en [56], la cual a su vez está inspirada en la definición de sistema dinámico adoptada por Hahn en [26].

Los sistemas dinámicos determinados por ecuaciones híbridas son híbridos, no porque el espacio de tiempos a lo largo del cual evolucionan las trayectorias sea abstracto, ya que

éste es \mathbb{R}^+ , sino porque los instantes iniciales, es decir aquellos instantes en los cuales se inicia alguna trayectoria, no son arbitrarios sino que están restringidos a ser elementos de la sucesión de instantes de muestreo Π .

De aquí en adelante supondremos, sin mencionarlo cada vez, que las funciones que aparecen en el lado derecho de la ecuación híbrida (2.1) satisfacen las condiciones (H1) y (H2) que garantizan la existencia y unicidad de las soluciones maximalmente definidas.

Con el objeto de presentar el sistema dinámico híbrido determinado por la ecuación híbrida (2.1), precisamos introducir cierta notación. Para cada par $(t_{k_0}, \omega_0) \in \Pi \times \Omega$, denotemos $\mathbf{w}(\cdot, t_{k_0}, \omega_0) = \mathbf{w}_{t_{k_0}, \omega_0}(\cdot)$ a la solución maximal del problema a valores iniciales (2.6) y $J_{t_{k_0}, \omega_0} = [t_{k_0}, T(k_0, \omega_0))$ ($T(k_0, \omega_0)$ podría ser $+\infty$) al correspondiente intervalo de definición maximal.

Consideremos el conjunto de soluciones o trayectorias maximalmente definidas de la ecuación híbrida (2.1)

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{w}_{t_{k_0}, \omega_0} : J_{t_{k_0}, \omega_0} \rightarrow \Omega : t_{k_0} \in \Pi, \omega_0 \in \Omega\}.$$

Entonces, las trayectorias que componen la familia \mathcal{S} evolucionan en el espacio métrico Ω a lo largo del espacio de tiempos \mathbb{R}^+ , sus instantes iniciales son elementos de la sucesión Π y sus estados iniciales son elementos de Ω . Por lo tanto:

Observación 2.7 La penta-upla $\Sigma_H = \{\mathbb{R}^+, \Omega, \Omega, \mathcal{S}, \Pi\}$ es un sistema dinámico híbrido en el sentido de Ye *et al.* ([81]).

Definición 2.8 Σ_H es el *sistema dinámico híbrido* determinado por la ecuación híbrida (2.1).

Observación 2.8 Cuando la s.i.m. Π asociada a la ecuación híbrida es regular, por lo expresado en la Observación 2.3, siempre es posible suponer sin pérdida de generalidad que el período de muestreo $\delta = 1$. Por lo tanto, en tal caso, supondremos por simplicidad que $\Pi = \mathbb{Z}^+$ y que la ecuación es de la forma (2.5).

Los sistemas dinámicos híbridos determinados por ecuaciones híbridas poseen algunas propiedades que serán de importancia en el desarrollo subsiguiente. Con el objeto de precisar estas propiedades, consideremos el conjunto

$$\mathcal{D} = \{(t, t_k, \omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Pi \times \Omega : t_k \leq t < T(k, \omega)\}.$$

También consideremos para cada par $(t_{k_0}, t) \in \Pi \times \mathbb{R}^+$ con $t \geq t_{k_0}$, el conjunto

$$\mathcal{D}_{t_{k_0}, t} = \{\omega \in \Omega : (t, t_{k_0}, \omega) \in \mathcal{D}\}$$

y, si éste no es vacío, las aplicaciones

$$\Lambda_{t_{k_0}, t} : \mathcal{D}_{t_{k_0}, t} \rightarrow \mathcal{E}([t_{k_0}, t]), \quad \Lambda_{t_{k_0}, t}(\omega)(\cdot) = \mathbf{w}(\cdot, t_{k_0}, \omega)|_{[t_{k_0}, t]}$$

y

$$\Gamma_{t_{k_0}, t} : \mathcal{D}_{t_{k_0}, t} \rightarrow \Omega, \quad \Gamma_{t_{k_0}, t}(\omega) = \mathbf{w}(t, t_{k_0}, \omega).$$

A partir de la Observación 2.4 y de los Teoremas 2.2 y 2.3 se deducen las siguientes propiedades del sistema dinámico Σ_H :

Proposición 2.3 Sea Σ_H el sistema dinámico híbrido determinado por la ecuación (2.1).

Entonces vale lo siguiente:

(A1) $\mathbf{w}(t_k, t_k, \omega) = \omega \quad \forall (t_k, \omega) \in \Pi \times \Omega.$

(A2) Si $K \subset \mathcal{X}$ es compacto y $\mathbf{w}(t, t_k, \omega) \in K \times \mathcal{Z} \quad \forall t_k \leq t < T$, entonces $T < T(k, \omega).$

(A3) Si $t_{k_1} \in J_{t_{k_0}, \omega_0} \cap \Pi$ y $\omega_1 = \mathbf{w}(t_{k_1}, t_{k_0}, \omega_0)$ entonces $J_{t_{k_1}, \omega_1} = J_{t_{k_0}, \omega_0} \cap [t_{k_1}, +\infty)$ y $\mathbf{w}(t, t_{k_1}, \omega_1) = \mathbf{w}(t, t_{k_0}, \omega_0) \quad \forall t \in J_{t_{k_1}, \omega_1}.$

Si f_1 en (2.1) satisface (H1F) y (H2F) y f_2 en (2.1) satisface (H3), entonces Σ_H además verifica:

(A4) \mathcal{D} es abierto en $\bigcup_{t_k \in \Pi} [t_k, +\infty) \times \{t_k\} \times \Omega.$

(A5) $\Gamma_{t_{k_0}, t}$ es continua para cada $t_{k_0} \in \Pi$ y cada $t \geq t_{k_0}.$

(A6) $\Lambda_{t_{k_0}, t}$ es continua para cada $t_{k_0} \in \Pi$ y cada $t \geq t_{k_0}.$

Demostración: sólo demostraremos (A4) ya que el resto se deduce directamente, como hemos dicho, de la Observación 2.4 y de los Teoremas 2.2 y 2.3. Sea $(t, t_{k_0}, \omega_0) \in \mathcal{D}$, entonces $t_{k_0} \leq t < T(t_{k_0}, \omega_0)$ y por lo tanto $\mathbf{w}_{t_{k_0}, \omega_0}$ está definida en $[t_{k_0}, t + \Delta t]$ para algún $\Delta t > 0$. Si suponemos la inexistencia de $\delta_1 > 0$ y $r > 0$ tales que

$$(t - \delta_1, t + \delta_1) \times \{t_{k_0}\} \times B_r(\omega_0) \cap \bigcup_{t_k \in \Pi} [t_k, +\infty) \times \{t_k\} \times \Omega \subseteq \mathcal{D},$$

necesariamente existe una sucesión (t_m, ω_m) con $t_m \geq t_{k_0}$, $\lim_{m \rightarrow +\infty} t_m = t$, $\lim_{m \rightarrow +\infty} \omega_m = \omega_0$ y $(t_m, t_{k_0}, \omega_0) \notin \mathcal{D}$. Por otra parte, debido al Teorema 2.3, $\mathbf{w}_{t_{k_0}, \omega_m}$ está definida en $[t_{k_0}, t + \Delta t]$ para m suficientemente grande. Como $t_m \in [t_{k_0}, t + \Delta t]$ para m suficientemente grande, tenemos que $(t_m, t_{k_0}, \omega_m) \in \mathcal{D}$ si m es suficientemente grande y llegamos a una contradicción. ■

A continuación introducimos algunas clases particulares de sistemas dinámicos híbridos. La denominación que damos a cada clase particular está en relación directa con el tipo de ecuación híbrida que la origina.

Definición 2.9 Diremos que el sistema Σ_H es *lineal* si la ecuación híbrida asociada es lineal.

Observación 2.9 Cuando Σ_H es lineal, de la Proposición 2.2 se deduce que:

- $\Omega = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$;
- $\mathcal{D} = \bigcup_{t_k \in \Pi} [t_k, +\infty) \times \{t_k\} \times \Omega$;
- $\mathcal{D}_{t_k, t} = \Omega$ para cada $t_k \in \Pi$ y cada $t \geq t_k$;
- $\Gamma_{t_k, t} : \Omega \rightarrow \Omega$ y $\Lambda_{t_k, t} : \Omega \rightarrow \mathcal{E}([t_k, t])$ son operadores lineales continuos.

Otras clases particulares de sistemas que consideraremos son la de los sistemas Υ -periódicos y la de los sistemas tiempo-invariantes.

Definición 2.10 El sistema dinámico híbrido Σ_H es Υ -*periódico* si la ecuación híbrida que lo determina es Υ -periódica y es *tiempo-invariante* si la ecuación es tiempo-invariante.

Observación 2.10 Cuando el sistema Σ_H es Υ -periódico, por la Observación 2.4, valen:

1. $T(k + \Upsilon, \omega) = T(k, \omega) + \Upsilon$, con lo cual $t \in J_{k+\Upsilon, \omega}$ si y sólo si $t - \Upsilon \in J_{k, \omega}$, y $\mathbf{w}(t, k + \Upsilon, \omega) = \mathbf{w}(t - \Upsilon, k, \omega) \forall t \in J_{k+\Upsilon, \omega}$.
2. $\mathcal{D}_{k+\Upsilon, t+\Upsilon} = \mathcal{D}_{k, t}$ para cada $k \in \mathbf{Z}^+$ y cada $t \geq k$.
3. $\Gamma_{k+\Upsilon, t+\Upsilon}(\omega) = \Gamma_{k, t}(\omega) \forall \omega \in \mathcal{D}_{k, t}$.
4. $\Lambda_{k+\Upsilon, t+\Upsilon}(\omega)(\tau) = \Lambda_{k, t}(\omega)(\tau - \Upsilon) \forall \omega \in \mathcal{D}_{k, t}$ y $\forall \tau \in [k + \Upsilon, t + \Upsilon]$.

Observación 2.11 Si el sistema Σ_H es tiempo-invariante, es decir 1-periódico y denotamos $T(\omega) = T(0, \omega)$, $J_\omega = [0, T(\omega)) = J_{0, \omega}$, $\mathbf{w}_\omega(\cdot) = \mathbf{w}(\cdot, \omega) = \mathbf{w}(\cdot, 0, \omega)$, $\mathcal{D}_t = \mathcal{D}_{0, t}$, $\Lambda_t = \Lambda_{0, t}$ y $\Gamma_t = \Gamma_{0, t}$, la propiedades 1 a 4 de la Observación 2.10 se traducen en las siguientes:

1. $T(k, \omega) = T(\omega) + k$, con lo cual $t \in J_{k, \omega}$ si y sólo si $t - k \in J_\omega$, y $\mathbf{w}(t, k, \omega) = \mathbf{w}(t - k, \omega) \forall t \in J_{k, \omega}$.
2. $\mathcal{D}_{k, t} = \mathcal{D}_{t-k}$ para cada $k \in \mathbf{Z}^+$ y cada $t \geq k$.
3. $\Gamma_{k, t}(\omega) = \Gamma_{t-k}(\omega) \forall \omega \in \mathcal{D}_{t-k}$.
4. $\Lambda_{k, t}(\omega)(\tau) = \Lambda_{t-k}(\omega)(\tau - k) \forall \omega \in \mathcal{D}_{t-k}$ y $\forall \tau \in [k, t]$.

De lo anterior se deduce que todas las trayectorias de \mathcal{S} se obtienen trasladando en el tiempo las trayectorias de la familia

$$\mathcal{S}^* = \{\mathbf{w}_\omega : J_\omega \rightarrow \Omega : \omega \in \Omega\},$$

compuesta por las trayectorias de \mathcal{S} que comienzan en el instante inicial $t = 0$. Ésta es la razón por la cual hemos denominado tiempo-invariante a esta clase de sistema.

2.6 Estabilidad de sistemas dinámicos híbridos

En esta sección estudiaremos las distintas propiedades cualitativas de los sistemas dinámicos híbridos determinados por ecuaciones híbridas. Con tal fin, siguiendo [81], introduciremos la noción de conjunto invariante respecto del sistema dinámico híbrido y daremos las definiciones de las distintas propiedades cualitativas que respecto de éste puede gozar el sistema dinámico híbrido. Las definiciones de las propiedades cualitativas de los sistemas dinámicos híbridos que adoptaremos son extensiones naturales de las consideradas para los sistemas dinámicos determinados por ecuaciones diferenciales, en diferencias, etc. (ver [26], [25], [40], [56], entre otros).

En el estudio que emprenderemos sobre el comportamiento asintótico de las trayectorias del sistema dinámico híbrido determinado por una ecuación híbrida, la noción de conjunto invariante jugará un rol fundamental.

Definición 2.11 Diremos que un subconjunto no vacío $M \subseteq \Omega$ es invariante respecto de Σ_H si para cualquier par de condiciones iniciales $(t_{k_0}, \omega_0) \in \Pi \times M$, $\mathbf{w}(t, t_{k_0}, \omega_0) \in M \forall t \in J_{t_{k_0}, \omega_0}$.

En otros términos, un subconjunto M de Ω es invariante si las trayectorias que se inician en M permanecen allí mientras están definidas.

Observación 2.12 En general, de la mera definición de conjunto invariante no es posible deducir que las trayectorias que en él se inician están globalmente definidas. Sin embargo, debido a (A2), esta existencia global puede asegurarse si el conjunto invariante M es compacto en Ω , o, más generalmente, si para cada $z \in \mathcal{Z}$ la sección $M_z = \{x \in \mathcal{X} : (x, z) \in M\}$ de M tiene clausura compacta en \mathcal{X} .

Una clase de conjuntos invariantes de particular interés es la de los puntos de equilibrio.

Definición 2.12 Diremos que $\omega_e \in \Omega$ es un punto de equilibrio de Σ_H si $\{\omega_e\}$ es invariante respecto de Σ_H .

En términos de la ecuación híbrida (2.1) que determina al sistema híbrido, $\omega_e = (x_e, z_e)$ es un equilibrio de Σ_H si y sólo si $f_1(t, x_e, x_e, z_e) = 0 \forall t \in \mathbb{R}^+$ y $f_2(k, x_e, z_e) = z_e \forall k \in \mathbb{Z}^+$.

A continuación definimos las propiedades cualitativas que consideramos para un conjunto M invariante respecto del sistema Σ_H .

Definición 2.13 Estabilidad: El conjunto invariante M es *estable* (E) si para cada $\varepsilon > 0$ y cada $k \in \mathbb{Z}^+$ existe $\delta(k, \varepsilon) > 0$ tal que si $d_M(\omega) \leq \delta(k, \varepsilon)$, $d_M(\mathbf{w}(t, t_k, \omega)) < \varepsilon \forall t \geq t_k$.

Definición 2.14 Estabilidad Uniforme: El conjunto invariante M es *uniformemente estable* (UE) si es estable y para cada $\varepsilon > 0$ puede elegirse δ independiente de k , es decir $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Observamos que la definición de estabilidad requiere implícitamente que para cada instante inicial t_k , exista un δ_k -entorno cerrado de M tal que las trayectorias que se inician en tal entorno y en tal instante, se encuentren globalmente definidas. En el caso de la estabilidad uniforme, tal entorno debe además ser independiente de k .

Definición 2.15 Estabilidad Asintótica: El conjunto invariante M es *asintóticamente estable* (AE) si es estable y, además, para cada $k \in \mathbb{Z}^+$ existe $\eta = \eta(k) > 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow +\infty} d_M(\mathbf{w}(t, t_k, \omega)) = 0$ si $d_M(\omega) \leq \eta$.

Definición 2.16 Estabilidad Asintótica Uniforme: El conjunto invariante M es *uniformemente asintóticamente estable* (UAE) si es uniformemente estable y existe $\eta > 0$ para el cual vale lo siguiente: para cada $\varepsilon > 0$ existe $T = T(\varepsilon) \geq 0$ tal que $d_M(\mathbf{w}(t, t_k, \omega_k)) \leq \varepsilon$ si $d_M(\omega) \leq \eta$ y $t \geq t_k + T$.

Definición 2.17 Estabilidad Exponencial: El conjunto invariante M es *exponencialmente estable* (EE) si existen constantes positivas μ , κ y η tales que si $d_M(\omega) \leq \eta$, $d_M(\mathbf{w}(t, t_k, \omega)) \leq \mu d_M(\omega) e^{-\kappa(t-t_k)}$ para todo $t \geq t_k$.

Es inmediato que la estabilidad exponencial de un conjunto invariante implica la estabilidad asintótica uniforme del mismo.

Definición 2.18 Inestabilidad: El conjunto invariante M es *inestable* (I) si no es estable.

En las siguientes definiciones, de carácter global, suponemos $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{Z} = \mathbb{R}^m$ y $\Omega = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Definición 2.19 Estabilidad Asintótica Global: El conjunto invariante M es *globalmente asintóticamente estable* (GAE) si es estable y $\lim_{t \rightarrow +\infty} d_M(\omega(t, t_k, \omega)) = 0 \forall t_k \in \Pi$ y $\forall \omega \in \Omega$.

Definición 2.20 Estabilidad Asintótica Uniforme Global: El conjunto invariante M es *globalmente uniformemente asintóticamente estable* (GUAE) si:

1. Es uniformemente estable.
2. Para cada $\eta > 0$ existe $\nu = \nu(\eta)$ tal que si $d_M(\omega) \leq \eta$,

$$d_M(\mathbf{w}(t, t_k, \omega)) \leq \nu(\eta) \quad \forall t_k, \forall t \geq t_k.$$

3. Para cada $\varepsilon > 0$ y cada $\eta > 0$ existe $T = T(\varepsilon, \eta) \geq 0$ tal que si $d_M(\omega) \leq \eta$,

$$d_M(\mathbf{w}(t, t_k, \omega)) \leq \varepsilon \quad \forall t_k, \forall t \geq t_k + T.$$

Definición 2.21 Estabilidad Exponencial Global: El conjunto invariante M es *globalmente exponencialmente estable* (GUAE) si existen constantes positivas μ y κ tales que $\forall \omega \in \Omega, d_M(\mathbf{w}(t, t_k, \omega)) \leq \mu d_M(\omega) e^{-\kappa(t-t_k)} \forall t_k$ y $\forall t \geq t_k$.

Nuestro principal objetivo de ahora en más será el de obtener condiciones tanto suficientes como necesarias para las distintas propiedades de estabilidad que consideramos para un conjunto invariante respecto de un sistema híbrido Σ_H . En la derivación de estas condiciones el sistema discretizado, que a continuación introduciremos, será de fundamental importancia.

2.6.1 Sistema híbrido discretizado

A cada sistema dinámico híbrido Σ_H determinado por una ecuación híbrida le podemos asociar, de manera completamente natural, un sistema dinámico en tiempo discreto, (en el sentido dado al término en el Apéndice A) que denominaremos *sistema discretizado*. El sistema discretizado es el sistema dinámico en tiempo discreto que se obtiene al considerar las trayectorias del sistema Σ_H , sólo en el conjunto de instantes de muestreo Π . Es decir, es el sistema dinámico originado por las restricciones de las trayectorias de Σ_H al espacio de tiempos discreto Π .

Este sistema en tiempo discreto jugará un papel fundamental en el estudio de las propiedades de estabilidad del sistema dinámico híbrido. En efecto, después de probar, bajo cierta hipótesis, que las propiedades de estabilidad (o de inestabilidad) de un conjunto invariante M respecto del sistema híbrido, son equivalentes a las que posee M como

conjunto invariante respecto del sistema discretizado, será posible establecer condiciones, tanto necesarias como suficientes, para los distintos tipos de estabilidad que hemos considerado.

Con el objeto de definir formalmente la noción de sistema discretizado asociado al sistema Σ_H , consideremos para cada $t_{k_0} \in \Pi$ y cada $\omega_0 \in \Omega$ la *trayectoria muestreada* o *trayectoria discretizada* $\mathbf{wd}_{t_{k_0}, \omega_0} : J_{t_{k_0}, \omega_0} \cap \Pi \rightarrow \Omega$, definida por $\mathbf{wd}_{t_{k_0}, \omega_0}(t_k) = \mathbf{w}_{t_{k_0}, \omega_0}(t_k)$ si $t_k \in J_{t_{k_0}, \omega_0} \cap \Pi$.

Sea

$$\mathcal{S}_d = \{\mathbf{wd}_{t_{k_0}, \omega_0} : J_{t_{k_0}, \omega_0} \cap \Pi \rightarrow \Omega : t_{k_0} \in \Pi, \omega_0 \in \Omega\}$$

el conjunto formado por las restricciones de las trayectorias de Σ_H a Π . Entonces, las trayectorias que componen la familia \mathcal{S}_d evolucionan en Ω a lo largo del espacio de tiempos discreto Π y sus condiciones iniciales son elementos de Ω , por lo tanto la tetra-upla $\Sigma_{HD} = \{\Pi, \Omega, \Omega, \mathcal{S}_d\}$ es un sistema dinámico en tiempo discreto.

Definición 2.22 Σ_{HD} es el *sistema discretizado* asociado con Σ_H .

Debido a las propiedades (A1) y (A3) de Σ_H , el sistema discretizado Σ_{HD} está determinado por una ecuación en diferencias. En efecto, si consideramos el conjunto $\mathcal{D}_d = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}^+} k \times \Omega_k$, con $\Omega_k = \mathcal{D}_{t_k, t_{k+1}}$, y la aplicación $F : \mathcal{D}_d \rightarrow \Omega$ definida por

$$F(k, \omega) = \Gamma_{t_k, t_{k+1}}(\omega),$$

de las propiedades (A1) y (A3) y de la definición de la aplicación $\Gamma_{t_k, t_{k+1}}$, resulta que el sistema discretizado Σ_{HD} está determinado por la ecuación en diferencias

$$\omega(t_{k+1}) = F(k, \omega(t_k)), \quad (2.14)$$

pues, para cada par $(t_{k_0}, \omega_0) \in \Pi \times \Omega$, $\mathbf{wd}_{t_{k_0}, \omega_0}(\cdot)$ es la única solución maximalmente definida de la ecuación (2.14) que satisface la condición inicial $\mathbf{wd}_{t_{k_0}, \omega_0}(t_{k_0}) = \omega_0$.

Observación 2.13 Cuando el lado derecho de la ecuación híbrida (2.1) satisface las condiciones (H1F), (H2F) y (H3), por la Proposición 2.3 valen (A4) y (A5) y, en consecuencia, el lado derecho de la ecuación en diferencias (2.14) es una función continua cuyo dominio de definición es abierto en $\mathbf{Z}^+ \times \Omega$. En efecto, de (A5) se deduce la continuidad de F y de (A4) se deduce que Ω_k es un subconjunto abierto de Ω para cada $k \in \mathbf{Z}^+$.

Observación 2.14 Cuando el sistema híbrido Σ_H es Υ -periódico, por las propiedades 2. y 3. de la Observación 2.10, resultan $\Omega_k = \Omega_{k+\Upsilon} \forall k \in \mathbf{Z}^+$ y F periódica con período Υ , es decir, $F(k + \Upsilon, \omega) = F(k, \omega)$. En consecuencia, el sistema discretizado está determinado por una ecuación en diferencias periódica.

Si el sistema Σ_H es tiempo-invariante, por 2. y 3. de la Observación 2.11, resultan $\Omega_k = \mathcal{D}_1 \forall k$ y F independiente de k , esto es, $F(k, \omega) = F(\omega)$, por lo tanto podemos considerar que F es una aplicación definida en $\mathcal{D}_d = \mathcal{D}_1$ en lugar de $\mathcal{D}_d = \mathbf{Z}^+ \times \mathcal{D}_1$. Notamos que en este caso el sistema discretizado está determinado por la ecuación en diferencias autónoma

$$\omega(k+1) = F(\omega(k)). \quad (2.15)$$

2.6.2 Caracterización de las propiedades de estabilidad de un conjunto compacto invariante

Ya introducida la noción de sistema híbrido discretizado, comenzamos haciendo la siguiente:

Observación 2.15 Si M es un conjunto invariante respecto de Σ_H , es inmediato, a partir de la definición de sistema discretizado, que M también es invariante respecto de Σ_{HD} . Notamos que la recíproca no es necesariamente cierta.

En lo que sigue estudiaremos para un conjunto M invariante respecto de Σ_H , las relaciones que existen entre las propiedades cualitativas de M como conjunto invariante respecto de Σ_H y las de M como conjunto invariante respecto de Σ_{HD} .

No es difícil probar a partir de las definiciones, que algunas de las propiedades cualitativas de M como conjunto invariante de Σ_H se mantienen al considerar a M como conjunto invariante de Σ_{HD} . Por ejemplo, si M es E, UE, AE, UAE, EE, GAE, GUAE o GEE, respecto de Σ_H entonces M es, respectivamente, E, UE, AE, UAE, EE, GAE, GUAE o GEE, respecto de Σ_{HD} . Por otra parte, en general, la inestabilidad es la única propiedad cualitativa de M como conjunto invariante de Σ_{HD} que se mantiene al considerar a M como conjunto invariante de Σ_H . Las recíprocas, salvo que se impongan condiciones adicionales sobre M y sobre Σ_H , no son necesariamente ciertas.

De aquí en adelante supondremos que el conjunto invariante M es **compacto** en Ω . Tal suposición, no demasiado restrictiva para las aplicaciones, será conveniente por dos motivos: en primer lugar tendremos asegurada la existencia global de las trayectorias de Σ_H que se inician en M , con lo cual, debido a que $M \subseteq \Omega_k \forall k$, cada Ω_k no será vacío; en segundo lugar, podremos establecer la equivalencia entre las propiedades cualitativas de M respecto de Σ_H y las de M respecto de Σ_{HD} , imponiendo condiciones no demasiado restrictivas sobre el lado derecho de la ecuación híbrida que da origen al sistema híbrido Σ_H .

En el análisis de las relaciones que se pueden establecer entre las propiedades de M como conjunto invariante del sistema híbrido y las de M como conjunto invariante del sistema discretizado, consideremos las siguientes condiciones:

(A7) Existen $r^* > 0$ y $\gamma : [0, r^*] \rightarrow \mathbb{R}^+$ de clase \mathcal{K} tales que

(a) $M_{r^*} \subseteq \Omega_k \forall k \in \mathbb{Z}^+$,

(b) $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ y $\forall \omega \in M_{r^*}$, $d_M(\mathbf{w}(t, t_k, \omega)) \leq \gamma(d_M(\omega)) \forall t \in [t_k, t_{k+1})$.

(A8) Igual que (A7) pero con $\gamma(r) = cr$.

Si $\Omega = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ también consideraremos las condiciones de caracter global:

(A7G) Las trayectorias de Σ_H están globalmente definidas y existe $\gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ de clase \mathcal{K}_∞ tal que, $\forall k$ y $\forall \omega \in \Omega$ $d_M(\mathbf{w}(t, t_k, \omega)) \leq \gamma(d_M(\omega)) \forall t \in [t_k, t_{k+1})$.

(A8G) Igual que (A7G) pero con $\gamma(r) = cr$.

Las condiciones que recién introdujimos nos permitirán obtener conclusiones sobre el comportamiento de las trayectorias del sistema híbrido en toda la escala temporal, a partir del comportamiento de estas trayectorias en los instantes de muestreo. En otros términos, estas condiciones son las que nos permitirán inferir las propiedades cualitativas de un conjunto M invariante respecto de Σ_H a partir de las propiedades cualitativas de M como conjunto invariante respecto del sistema discretizado Σ_{HD} .

En los siguientes lemas, cuyas demostraciones se encuentran en el Apéndice II, damos algunas condiciones suficientes para el cumplimiento de las condiciones recién introducidas, en términos del lado derecho de la ecuación híbrida que determina al sistema Σ_H .

Lema 2.1 Sea M un conjunto compacto e invariante respecto del sistema dinámico híbrido Σ_H determinado por la ecuación híbrida (2.1).

Entonces

1. Σ_H satisface (A7) si verifica la siguiente condición:

(a) Para cada conjunto compacto $K \subset \mathcal{X} \times \Omega$ existen $L_K \geq 0$, $r_K > 0$ y $\gamma_K : [0, r_K] \rightarrow \mathbb{R}^+$ de clase \mathcal{K} tales que $\forall (x, \xi, z), (x', \xi', z') \in K : |x - x'| + |\xi - \xi'| + |z - z'| \leq r_K$ y $\forall t \in \mathbb{R}^+$,

$$|f_1(t, x, \xi, z) - f_1(t, x', \xi', z')| \leq L_K |x - x'| + \gamma_K (|\xi - \xi'| + |z - z'|).$$

2. Si $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ y $\Omega = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, Σ_H satisface (A7G) si satisface la siguiente condición:

(a) Existen $L \geq 0$ y $\hat{\gamma}$ de clase \mathcal{K}_∞ tales que

$$|f_1(t, x, \xi, z) - f_1(t, x', \xi', z')| \leq L|x - x'| + \hat{\gamma}(|\xi - \xi'| + |z - z'|)$$

$$\forall (x, \xi, z), (x', \xi', z') \in \mathcal{X} \times \Omega \text{ y } \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

3. Σ_H satisface (A8) si f_1 es localmente Lipschitz respecto de (x, ξ, z) , uniformemente respecto de $t \in \mathbb{R}^+$, esto es: para cada conjunto compacto $K \subset \mathcal{X} \times \Omega$ existe una constante $L_K \geq 0$ tal que $\forall (x, \xi, z), (x', \xi', z') \in K$ y $\forall t \in \mathbb{R}^+$

$$|f_1(t, x, \xi, z) - f_1(t, x', \xi', z')| \leq L_K(|x - x'| + |\xi - \xi'| + |z - z'|).$$

4. Si $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ y $\Omega = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, Σ_H satisface (A8G) si f_1 es globalmente Lipschitz respecto de (x, ξ, z) , uniformemente respecto de $t \in \mathbb{R}^+$, es decir, existe $L \geq 0$ tal que $\forall (x, \xi, z), (x', \xi', z') \in \mathcal{X} \times \Omega$ y $\forall t \in \mathbb{R}^+$,

$$|f_1(t, x, \xi, z) - f_1(t, x', \xi', z')| \leq L(|x - x'| + |\xi - \xi'| + |z - z'|)$$

Observación 2.16 La condición 1.(a) del Lema 2.1 se verifica si: i) f_1 satisface el punto 2. de (H2F), i.e. es localmente Lipschitz respecto de la variable x uniformemente en t y en compactos de (ξ, z) , y ii) f_1 es uniformemente continua en $\mathbb{R}^+ \times K$ para cada $K \subset \mathcal{X} \times \Omega$ compacto.

Entonces, en particular, Σ_H verifica la condición (A7) en el caso en que f_1 es continua, satisface (H2F).2. y es periódica en la variable t , ya que en ese caso f_1 verifica i) y ii).

Las condiciones que dimos en el Lema 2.1 para el cumplimiento de (A7), (A7G), (A8) y (A8G) por parte de Σ_H , pueden debilitarse considerablemente cuando M es un punto de equilibrio, como lo demuestra el siguiente lema cuya demostración se encuentra en el Apéndice II.

Lema 2.2 Sea $\omega_e = (x_e, z_e)$ un punto de equilibrio del sistema dinámico híbrido Σ_H determinado por la ecuación híbrida (2.1).

Entonces

1. Si existen $\bar{r} > 0$, $L^* \geq 0$ y $\gamma^* : [0, \bar{r}] \rightarrow \mathbb{R}^+$ de clase \mathcal{K} tales que $\forall (x, \xi, z)$ $|x - x_e| + |\xi - x_e| + |z - z_e| \leq \bar{r}$ y $\forall t \in \mathbb{R}^+$,

$$|f_1(t, x, \xi, z)| \leq L^*|x - x_e| + \gamma^*(|\xi - x_e| + |z - z_e|),$$

Σ_H satisface (A7) con $\gamma(r) = (r + \|\Pi\|\gamma^*(r))e^{L^*\|r\|}$.

2. Si $\Omega = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ y existen $L^* \geq 0$ y γ^* de clase \mathcal{K}_∞ tal que $\forall t \in \mathbb{R}^+$ y $\forall (x, \xi, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$,

$$|f_1(t, x, \xi, z)| \leq L^*|x - x_e| + \gamma^*(|\xi - x_e| + |z - z_e|),$$

Σ_H satisface (A7G) con la $\gamma(r)$ de 1.

3. Si existen $\bar{r} > 0$ y $L^* \geq 0$ tales que $\forall(x, \xi, z)$ con $|x - x_e| + |\xi - x_e| + |z - z_e| \leq \bar{r}$ y $\forall t \in \mathbb{R}^+$,

$$|f_1(t, x, \xi, z)| \leq L^*(|x - x_e| + |\xi - x_e| + |z - z_e|),$$

Σ_H satisface (A8) con $\gamma(r) = cr$ y $c = (1 + \|\Pi\|L^*)e^{L^*\|\Pi\|}$.

4. Si existe $L^* \geq 0$ tal que $\forall(x, \xi, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ y $\forall t \in \mathbb{R}^+$,

$$|f_1(t, x, \xi, z)| \leq L^*(|x - x_e| + |\xi - x_e| + |z - z_e|),$$

Σ_H satisface (A8G) con $\gamma(r)$ como en 3.

Por último, cuando Σ_H es Υ -periódico y valen las propiedades (A4) y (A6), Σ_H verifica automáticamente (A7). Cuando $\Omega = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, (A4), (A6) y la definición global de las trayectorias de Σ_H son suficientes para que se verifique (A7G). Más precisamente, se tiene el siguiente lema, cuya demostración también se encuentra en el Apéndice II.

Lema 2.3 Sea M un conjunto compacto e invariante respecto del sistema dinámico híbrido Σ_H determinado por la ecuación híbrida (2.1). Supongamos que Σ_H es Υ -periódico y que verifica (A4) y (A6).

Entonces Σ_H satisface (A7). Si $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Z} = \mathbb{R}^m$ y las trayectorias de Σ_H están globalmente definidas, entonces Σ_H satisface (A7G).

En el siguiente teorema establecemos, bajo hipótesis adecuadas, la equivalencia entre las propiedades cualitativas de un conjunto M compacto e invariante respecto de Σ_H y las propiedades cualitativas de M como conjunto invariante respecto de Σ_{HD} .

Teorema 2.4 Sea M un conjunto compacto e invariante respecto del sistema dinámico híbrido Σ_H determinado por la ecuación híbrida (2.1).

Entonces

1. Si Σ_H satisface (A7), M es I, E, UE, AE, UAE o GAE respecto de Σ_H si y sólo si M es, respectivamente, I, E, UE, AE, UAE o GAE respecto de Σ_{HD} .
2. Si Σ_H satisface (A7G), M es GUAE respecto de Σ_H si y sólo si M es GUAE respecto de Σ_{HD} .
3. Si Σ_H satisface (A8), M es EE respecto de Σ_H si y sólo M es EE respecto de Σ_{HD} .
4. Si Σ_H satisface (A8G), M es GEE respecto de Σ_H si y sólo M es GEE respecto de Σ_{HD} .

Demostración:

Comenzaremos probando el ítem 1. Supongamos que Σ_H satisface (A7). Que M es E, UE, AE, UAE o GAE respecto de Σ_{HD} si es, respectivamente, E, UE, AE, UAE o GAE respecto de Σ_H , se deduce directamente de las definiciones. También se deduce de la definición que M es I respecto de Σ_H si es I respecto de Σ_{HD} ; la recíproca, es decir, que la inestabilidad de M respecto de Σ_H implica la inestabilidad de M respecto de Σ_{HD} , quedará probada una vez que demos demos que la estabilidad de M respecto de Σ_{HD} implica la estabilidad de M respecto de Σ_H . Por lo dicho hasta aquí, para concluir la demostración del ítem 1. nos resta probar que si M es E, UE, AE, UAE o GAE respecto de Σ_{HD} entonces M es, respectivamente, E, UE, AE, UAE o GAE respecto de Σ_H .

Supongamos que M es E respecto de Σ_{HD} . Sean r^* y γ como en (A7). Fijemos $k_0 \in \mathbf{Z}^+$ y sea $0 < \varepsilon < \gamma(r^*)$. Consideremos $0 < \varepsilon' = \gamma^{-1}(\varepsilon)$ y $\bar{\varepsilon} = \min\{\varepsilon', r^*\}$. Por ser M estable respecto de Σ_{HD} , existe $\delta = \delta(k_0, \bar{\varepsilon}) > 0$ tal que

$$d_M(\mathbf{wd}(t_k, t_{k_0}, \omega)) < \bar{\varepsilon} \quad \forall t_k \geq t_{k_0} \quad \forall \omega : d_M(\omega) \leq \delta. \quad (2.16)$$

Entonces, si $d_M(\omega) \leq \delta$, de (2.16), (A2), (A7) y la definición de \mathbf{wd} , $\forall t_k \geq t_{k_0}$ y $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$, $d_M(\mathbf{w}(t, t_{k_0}, \omega)) \leq \gamma(d_M(\mathbf{wd}(t_k, t_{k_0}, \omega))) < \gamma(\bar{\varepsilon}) \leq \varepsilon$. En consecuencia, $\forall t \geq t_{k_0}$, $d_M(\mathbf{w}(t, t_{k_0}, \omega)) < \varepsilon$ y la estabilidad de M respecto de Σ_H queda probada.

Si M es UE respecto de Σ_{HD} , δ puede elegirse en forma independiente de k_0 y la estabilidad de M respecto de Σ_H resulta uniforme.

Antes de demostrar las implicaciones restantes, probaremos lo siguiente:

$$(I1) \quad \lim_{t_k \rightarrow +\infty} d_M(\mathbf{wd}(t_k, t_{k_0}, \omega)) = 0 \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} d_M(\mathbf{w}(t, t_{k_0}, \omega)) = 0.$$

Sea $\omega \in \Omega$ tal que $\lim_{t_k \rightarrow +\infty} d_M(\mathbf{wd}(t_k, t_{k_0}, \omega)) = 0$. Consideremos $0 < \varepsilon < r^*$ y sean ε' y $\bar{\varepsilon}$ como antes. Sea $\tau_d = \tau_d(\bar{\varepsilon}, k_0, \omega)$ tal que $d_M(\mathbf{wd}(t_k, t_{k_0}, \omega)) < \bar{\varepsilon}$ si $t_k \geq t_{k_0} + \tau_d$. Sea t_{k_1} el primer instante de la sucesión Π tal que $t_{k_1} \geq t_{k_0} + \tau_d$. Entonces, empleando argumentos similares a los empleados en la demostración de la estabilidad de M respecto de Σ_H , concluimos que $d_M(\mathbf{w}(t, t_{k_0}, \omega)) < \varepsilon \quad \forall t \geq t_{k_1}$. Como $t_{k_1} \leq t_{k_0} + \tau_d + \|\Pi\|$, resulta

$$d_M(\mathbf{w}(t, t_{k_0}, \omega)) < \varepsilon \quad \forall t \geq t_{k_0} + \tau_d + \|\Pi\| \quad (2.17)$$

y, por la arbitrariedad de ε , $\lim_{t \rightarrow +\infty} d_M(\mathbf{w}(t, t_{k_0}, \omega)) = 0$.

Probaremos ahora las implicaciones restantes. Si M es AE respecto de Σ_{HD} , M es estable respecto de Σ_H y, como $\lim_{t_k \rightarrow +\infty} d_M(\mathbf{wd}(t_k, t_{k_0}, \omega)) = 0$ para todo ω tal que $d_M(\omega) \leq \eta(k_0)$, por (I1), $\lim_{t \rightarrow +\infty} d_M(\mathbf{w}(t, t_{k_0}, \omega)) = 0$ para todo ω tal que $d_M(\omega) \leq \eta(k_0)$; por lo tanto M es AE respecto de Σ_H . Identicamente se demuestra que si M es GAE respecto de Σ_{HD} entonces M es GAE respecto de Σ_H .

Por último, si M es UAE respecto de Σ_{HD} , M es UE respecto de Σ_{HD} y por lo tanto M es UE respecto de Σ_H . Por otra parte, como τ_d en (2.17) puede elegirse en forma

independiente de k_0 y de ω si $d_M(\omega) \leq \eta$ y $\eta > 0$ es como en la definición de la propiedad UAE, M resulta UAE respecto de Σ_H , pues las condiciones de la Definición 2.16 se ven satisfechas con el mismo η y con $\tau(\varepsilon) = \tau_d(\bar{\varepsilon}) + \|\Pi\|$.

Probaremos ahora el punto 2. de la tesis del teorema. Sólo demostraremos que si M es GUAE respecto de Σ_{HD} entonces M es GUAE respecto de Σ_H , ya que la recíproca es inmediata. Supongamos que M es GUAE respecto de Σ_{HD} . Como (A7G) implica (A7), Σ_H resulta UE y queda probado el punto 1. de la definición de GUAE. Vamos a demostrar ahora el punto 2. de tal definición. Fijemos $\eta > 0$. Entonces existe $\nu^* = \nu^*(\eta)$ tal que

$$d_M(\mathbf{wd}(t_k, t_{k_0}, \omega)) \leq \nu^* \quad \forall t_{k_0} \quad \forall t_k \geq t_{k_0} \text{ y } \forall \omega : d_M(\omega) \leq \eta. \quad (2.18)$$

Sea $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$ como en (A7G), entonces de (2.18) y de (A7G),

$$d_M(\mathbf{w}(t, t_{k_0}, \omega)) \leq \gamma(\nu^*) \quad \forall t_{k_0} \quad \forall t \geq t_{k_0} \text{ y } \forall \omega : d_M(\omega) \leq \eta, \quad (2.19)$$

con lo cual, considerando $\nu(\eta) = \gamma(\nu^*(\eta))$, vale 2. de la Definición 2.20. Por último, la validez del punto 3. de la definición de la propiedad GUAE se demuestra con argumentos similares a los empleados para demostrar que si M es UAE respecto de Σ_{HD} entonces M es UAE respecto de Σ_H .

En lo siguiente probaremos los puntos 3. y 4. de la tesis.

Comenzamos probando 3. Supongamos que vale (A8). Sólo vamos a demostrar que M es EE respecto de $\Sigma_{HD} \implies M$ es EE respecto de Σ_H ya que la recíproca es trivial. Supongamos que M es EE respecto de Σ_{HD} . Entonces existen constantes positivas μ^* , κ^* y η^* tales que

$$d_M(\mathbf{wd}(t_k, t_{k_0}, \omega)) \leq \mu^* d_M(\omega) e^{-\kappa^*(t_k - t_{k_0})} \quad \forall t_{k_0}, \forall t_k \geq t_{k_0} \text{ y } \forall \omega : d_M(\omega) \leq \eta^*. \quad (2.20)$$

Sean r^* y $\gamma(r) = cr$ como en (A8) y consideremos $\eta = \min\{r^*/\mu^*, \eta^*\}$. De la definición de η y de (2.20) resulta válida la siguiente desigualdad:

$$d_M(\mathbf{wd}(t_k, t_{k_0}, \omega)) \leq \mu^* d_M(\omega) e^{-\kappa^*(t_k - t_{k_0})} < r^* \quad \forall t_{k_0}, \forall t_k \geq t_{k_0} \text{ y } \forall \omega : d_M(\omega) \leq \eta. \quad (2.21)$$

Entonces, combinando (2.21) con (A8) resulta $\forall \omega : d_M(\omega) \leq \eta$ y $\forall t_{k_0} \leq t_k \leq t < t_{k+1}$

$$\begin{aligned} d_M(\mathbf{w}(t, t_{k_0}, \omega)) &\leq c\mu^* d_M(\omega) e^{-\kappa^*(t_k - t_{k_0})} \\ &\leq c\mu^* e^{\kappa^*(t - t_k)} d_M(\omega) e^{-\kappa^*(t - t_{k_0})} \\ &\leq c\mu^* e^{\kappa^*\|\Pi\|} d_M(\omega) e^{-\kappa^*(t - t_{k_0})} \\ &\leq \mu d_M(\omega) e^{-\kappa^*(t - t_{k_0})} \end{aligned}$$

y la EE de M respecto de Σ_H queda probada.

El punto 4. de la tesis se prueba en forma similar al punto 3. y por lo tanto omitimos la demostración. ■

Observación 2.17 El teorema precedente muestra que en sistemas de control a datos muestreados, para determinar las propiedades de estabilidad de un conjunto invariante compacto en toda la escala de tiempo, es suficiente analizar el comportamiento del sistema respecto del mismo sólo en los instantes de muestreo.

Observación 2.18 El Teorema 2.4 generaliza los resultados locales que obtuvimos en nuestro trabajo [50] (Teorema 5), ya que allí consideramos una clase particular de sistema híbrido tiempo invariante, la de los sistemas determinados por ecuaciones híbridas cuyo lado derecho no depende explícitamente del tiempo (f_1 independiente de t y f_2 independiente de k).

El Teorema 2.4 también contiene como caso particular algunos de los resultados obtenidos en [63] respecto la estabilidad asintótica uniforme y exponencial de puntos de equilibrio de sistemas de control a datos muestreados.

Como veremos a continuación, a partir del Teorema 2.4 y de los resultados para la estabilidad de sistemas dinámicos en tiempo discreto que presentamos en el Apéndice A, podremos establecer condiciones, tanto suficientes como necesarias, para algunas de las propiedades cualitativas que hemos considerado. Tales condiciones serán formuladas en términos de funciones de Lyapunov que se comportan de determinada forma en los instantes de muestreo.

Los siguientes teoremas dan condiciones suficientes para las distintas propiedades locales de estabilidad de un conjunto invariante compacto. En el primero de ellos damos condiciones suficientes para la estabilidad, la estabilidad uniforme y la estabilidad asintótica uniforme mientras que en el segundo damos condiciones suficientes para la estabilidad exponencial.

Teorema 2.5 Sea M un conjunto compacto e invariante respecto del sistema dinámico híbrido Σ_H determinado por la ecuación híbrida (2.1). Supongamos que Σ_H satisface (A7).

Entonces, si existe una función $V : \mathbf{Z}^+ \times M_{r^*} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $r^* > 0$, que verifica las siguientes condiciones:

- 1) V es continua y existe $\alpha_1 \in \mathcal{K}$ tal que $\alpha_1(d_M(\omega)) \leq V(k, \omega) \forall k \in \mathbf{Z}^+$ y $\forall \omega \in M_{r^*}$;
- 2) existe $0 < r' \leq r^*$ tal que $V(k+1, \mathbf{w}(t_{k+1}, t_k, \omega)) - V(k, \omega) \leq 0, \forall k \in \mathbf{Z}^+$ y $\forall \omega \in M_{r'}$, M es E respecto de Σ_H .

Si en lugar de la condición 1) V verifica la condición:

- 1') Existen α_1 y α_2 de clase \mathcal{K} tales que $\alpha_1(d_M(\omega)) \leq V(k, \omega) \leq \alpha_2(d_M(\omega)) \forall k \in \mathbf{Z}^+$ y $\forall \omega \in M_{r^*}$,

entonces M es UE respecto de Σ_H .

Por último, si V verifica la condición 1') y la condición:

- 2') existen $0 < r' \leq r^*$ y α_3 de clase \mathcal{K} tales que $V(k+1, \mathbf{w}(t_{k+1}, t_k, \omega)) - V(k, \omega) \leq$

$-(t_{k+1} - t_k)\alpha_3(d_M(\omega)), \forall k \in \mathbf{Z}^+$ y $\forall \omega \in M_{r'}$,
 M es UAE respecto de Σ_H .

Demostración: se sigue directamente del Teorema A.1 del apéndice A y del punto 1. del Teorema 2.4. ■

Teorema 2.6 Sea M un conjunto compacto e invariante respecto del sistema dinámico híbrido Σ_H determinado por la ecuación híbrida (2.1). Supongamos que Σ_H satisface (A8).

Entonces, si existe una función $V : \mathbf{Z}^+ \times M_{r'} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $r^* > 0$, que verifica, para ciertas constantes positivas c_i , $i = 1, 2, 3$, las condiciones:

- 1) $c_1(d_M(\omega))^2 \leq V(k, \omega) \leq c_2(d_M(\omega))^2 \forall k \in \mathbf{Z}^+$ y $\forall \omega \in M_{r'}$;
- 2) existe $0 < r' \leq r^*$ tal que $V(k+1, \mathbf{w}(t_{k+1}, t_k, \omega)) - V(k, \omega) \leq -c_3(d_M(\omega))^2$, $\forall k \in \mathbf{Z}^+$ y $\forall \omega \in M_{r'}$,

M es EE respecto de Σ_H .

Demostración: Se deduce inmediatamente del Teorema A.2 del Apéndice A y del punto 3. del Teorema 2.4. ■

Los siguientes teoremas, de caracter global, dan condiciones suficientes tanto para la estabilidad asintótica uniforme global como para la estabilidad exponencial global de un conjunto invariante compacto.

Teorema 2.7 Sea M un conjunto compacto e invariante respecto del sistema dinámico híbrido Σ_H determinado por la ecuación híbrida (2.1). Supongamos que Σ_H satisface (A7G).

Entonces, si existe una función $V : \mathbf{Z}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ que verifica las condiciones:

- 1) $\alpha_1(d_M(\omega)) \leq V(k, \omega) \forall k \in \mathbf{Z}^+ \forall \omega \in \Omega$; y
 - 2) $V(k+1, \mathbf{w}(t_{k+1}, t_k, \omega)) - V(k, \omega) \leq -(t_{k+1} - t_k)\alpha_3(d_M(\omega)) \forall \omega \in \Omega$,
- con α_i , $i = 1, 2, 3$, de clase \mathcal{K}_∞ , entonces M es GUAE respecto de Σ_H .

Demostración: es inmediata a partir de Teorema A.3 del Apéndice A y del punto 2. del Teorema 2.4. ■

Teorema 2.8 Sea M un conjunto compacto e invariante respecto del sistema dinámico híbrido Σ_H determinado por la ecuación híbrida (2.1). Supongamos que Σ_H satisface (A8G).

Entonces, si existe una función $V : \mathbf{Z}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ que verifica, para ciertas constantes positivas c_i , $i = 1, 2, 3$, las condiciones:

- 1) $c_1(d_M(\omega))^2 \leq V(k, \omega) \leq c_2(d_M(\omega))^2 \forall k \in \mathbf{Z}^+$ y $\forall \omega \in \Omega$; y
- 2) $V(k+1, \mathbf{w}(t_{k+1}, t_k, \omega)) - V(k, \omega) \leq -c_3(d_M(\omega))^2 \forall k \in \mathbf{Z}^+$ y $\forall \omega \in \Omega$,

M es GEE respecto de Σ_H .

Demostración: Se deduce inmediatamente del Teorema A.4 del Apéndice A y del punto 4. del Teorema 2.4. ■

Observación 2.19 El Teorema 2.5 fue inicialmente probado en nuestro trabajo [50]. Allí se supuso que tanto f_1 como f_2 eran independientes del tiempo y que la s.i.m. Π era regular.

Observación 2.20 Las condiciones dadas en los Teoremas 2.5 y 2.6 para la estabilidad uniforme, asintótica uniforme y exponencial de un conjunto compacto e invariante respecto de un sistema dinámico híbrido determinado por una ecuación híbrida, son menos conservativas que las condiciones que dan para los sistemas dinámicos híbridos generales los Teoremas 4.1 y 4.2 de [81] y el Teorema 3.2 de [55], en tanto y en cuanto los Teoremas 2.5 y 2.6 no presuponen ningún comportamiento especial de la función de Lyapunov V entre instantes de muestreo.

Observación 2.21 El Teorema 2.5 puede ser considerado como una extensión de las condiciones obtenidas en [1] y en [65] para la estabilidad asintótica uniforme de puntos de equilibrio de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Cuando el sistema híbrido Σ_H verifica (A5), es decir, cuando el lado derecho de la ecuación en diferencias que determina al sistema discretizado es continuo, a partir de los teoremas inversos de Lyapunov para sistemas dinámicos en tiempo discreto que damos en el Apéndice A, es posible asegurar la existencia de funciones de Lyapunov V que, además de satisfacer las condiciones enunciadas en los teoremas que recién presentamos, también poseen alguna propiedad adicional, por ejemplo son continuas.

Teorema 2.9 Sea Σ_H el sistema dinámico híbrido determinado por la ecuación híbrida (2.1). Supongamos que Σ_H verifica (A5).

Entonces

1. Si M es un conjunto compacto invariante UE, existe una función $V : \mathbf{Z}^+ \times M_{r^*} \rightarrow \mathbb{R}^+$, con $r^* > 0$, que verifica las condiciones 1') y 2) del Teorema 2.5.
2. Si M es un conjunto compacto invariante UAE, existe una función continua $V : \mathbf{Z}^+ \times M_{r^*} \rightarrow \mathbb{R}^+$, con $r^* > 0$, que verifica las condiciones 1') y 2') del Teorema 2.5.

Además, tanto en 1. como en 2., la función V puede suponerse Υ -periódica o independiente de k si Σ_H es, respectivamente, Υ -periódico o tiempo invariante.

Demostración: Se deduce inmediatamente del Teorema A.5 del Apéndice A y del punto 1. del Teorema 2.4. ■

Teorema 2.10 Sea Σ_H el sistema dinámico híbrido determinado por la ecuación híbrida (2.1). Supongamos que Σ_H verifica (A5).

Entonces, si M es un conjunto compacto invariante EE, existe una función continua $V : \mathbf{Z}^+ \times M_{\tau^*} \rightarrow \mathbb{R}^+$, con $\tau^* > 0$, que verifica las condiciones 1) y 2) del Teorema 2.6.

Si además Σ_H es Υ -periódico o tiempo invariante, la función V puede suponerse, respectivamente, Υ -periódica o independiente de k .

Demostración: Se deduce inmediatamente del Teorema A.6 del Apéndice A y del punto 3. del Teorema 2.4. ■

Teorema 2.11 Sea Σ_H el sistema dinámico híbrido determinado por la ecuación híbrida (2.1). Supongamos que Σ_H verifica (A5).

Entonces, si M es un conjunto compacto invariante GUAE, existe una función continua $V : \mathbf{Z}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ que verifica las condiciones 1) y 2) del Teorema 2.7.

Si además Σ_H es Υ -periódico o tiempo invariante, la función V puede suponerse, respectivamente, Υ -periódica o independiente de k .

Demostración: Se deduce inmediatamente del Teorema A.7 del Apéndice A y del punto 2. del Teorema 2.4. ■

Teorema 2.12 Sea Σ_H el sistema dinámico híbrido determinado por la ecuación híbrida (2.1). Supongamos que Σ_H verifica (A5).

Entonces, si M es un conjunto compacto invariante GEE, existe una función continua $V : \mathbf{Z}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ que verifica las condiciones 1) y 2) del Teorema 2.8.

Si además Σ_H es Υ -periódico o tiempo invariante, la función V puede suponerse, respectivamente, Υ -periódica o independiente de k .

Demostración: Se deduce inmediatamente del Teorema A.8 del Apéndice A y del punto 4. del Teorema 2.4. ■

Observación 2.22 Los teoremas inversos de Lyapunov no sólo son un complemento de los teoremas directos. A partir de ellos muchas veces es posible establecer otras propiedades de los sistemas dinámicos que son en sí mismas importantes. Por ejemplo, los teoremas inversos son útiles, como veremos en el capítulo siguiente, en el estudio del comportamiento de sistemas que se encuentran afectados por perturbaciones; estudio que es de interés en las aplicaciones, pues, en el análisis de un sistema de control a datos muestreados, una forma de tener en cuenta los efectos de cuantización que introducen los convertidores, los errores en el modelado, en las mediciones y en los actuadores, etc., es considerarlos a todos ellos como perturbaciones que afectan el modelo del sistema.

2.7 Conclusiones

En este capítulo presentamos las ecuaciones híbridas, las cuales nos permiten modelar en toda la escala temporal los sistemas de control a datos muestreados, incluso aquellos en los cuales hay involucrados más de un período de muestreo.

Una vez definida la noción de solución hemos dado teoremas que garantizan la existencia, unicidad y prolongabilidad de éstas y demostrado, bajo ciertas hipótesis, la continuidad de las soluciones respecto de las condiciones iniciales.

Una vez introducido el sistema dinámico híbrido originado por las soluciones de una ecuación híbrida, estudiamos el comportamiento asintótico de las trayectorias de éste; con tal fin introdujimos la noción de sistema discretizado y demostramos bajo ciertas condiciones que las propiedades de estabilidad locales o globales de un conjunto compacto invariante respecto del sistema dinámico híbrido, son equivalentes a las propiedades de estabilidad del mismo conjunto respecto del sistema discretizado. Esta equivalencia nos permitió enunciar condiciones suficientes para las distintas propiedades de estabilidad de un conjunto invariante compacto en términos de funciones de Lyapunov. Tales condiciones son menos restrictivas que las obtenidas en [81] y en [9], ya que no presuponen ningún comportamiento especial de la función de Lyapunov entre muestras. Una de las condiciones suficientes que enunciamos extiende a los sistemas híbridos que consideramos, una condición formulada en [1] para sistemas de ecuaciones diferenciales tiempo variantes.

2.8 Apéndice I

En este apéndice enunciaremos algunos de los resultados sobre ecuaciones diferenciales ordinarias que empleamos a lo largo del capítulo.

Sea $f : \mathcal{I} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Dados $x_0 \in \mathcal{X}$ y $t_0 \in \mathcal{I}$, decimos que la función $\xi : J \rightarrow \mathcal{X}$ con $\xi \in AC^n(J)$, $J \subseteq \mathcal{I}$ y $t_0 \in J$, es una solución del problema a valores iniciales

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.22)$$

si $\dot{\xi}(t) = f(t, \xi(t))$ para casi todo $t \in J$ y $\xi(t_0) = x_0$ o, equivalentemente, si $\forall t \in J$

$$\xi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \xi(s)) ds.$$

En lo que sigue se supone que f satisface la siguientes condiciones:

(D1) Para cada $t \in \mathcal{I}$, $f(t, \cdot)$ es continua en \mathcal{X} y para cada $x \in \mathcal{X}$, $f(\cdot, x)$ es medible Lebesgue en \mathcal{I} .

(D2) Para cada subconjunto compacto $K \subset \mathcal{X}$, existen α y $\beta \in L^1_{loc}(\mathcal{I})$ tales que se verifica:

1. $|f(t, x)| \leq \alpha(t) \forall t \in \mathcal{I} \text{ y } \forall x \in K$ y
2. $|f(t, x) - f(t, x')| \leq \beta(t)|x - x'| \forall t \in \mathcal{I} \text{ y } \forall x, x' \in K$.

El teorema que sigue, cuya demostración puede encontrarse en [72], Teorema 54, pag. 476, es una versión del Teorema de existencia y unicidad de soluciones.

Teorema 2.13 Supongamos que f satisface las condiciones (D1) y (D2).

Entonces, para cada par $(t_0, x_0) \in \mathcal{I} \times \mathcal{X}$ existe una única solución del problema a valores iniciales (2.22), $\xi : J \rightarrow \mathcal{X}$ con $J \neq \emptyset$, maximalmente definida, esto es: si $\xi' : J' \rightarrow \mathcal{X}$ es solución de (2.22), entonces $J' \subseteq J$ y $\xi = \xi'$ en J' . Además, J resulta abierto relativo a \mathcal{I} .

Observamos que del Teorema 2.13 se desprende inmediatamente que sobre cada intervalo $J' \subseteq \mathcal{I}$ con $t_0 \in J'$, a lo sumo puede estar definida una solución de (2.22).

Lema 2.4 Supongamos que f satisface las condiciones (D1) y (D2), que $\xi : [t_0, \tau) \rightarrow \mathcal{X}$ con $[t_0, \tau) \subseteq \mathcal{I}$ es una solución de (2.22) y que para algún subconjunto compacto $K \subset \mathcal{X}$, $\xi(t) \in K$ para todo $t \in [t_0, \tau)$.

Entonces existe $\xi(\tau^-) := \lim_{t \rightarrow \tau^-} \xi(t)$.

Demostración: Este lema puede deducirse de la Proposición C.3.6, pag 481, de [72]. Sin embargo preferimos dar una demostración directa.

Por ser ξ solución de (2.22), $\forall t \in [t_0, \tau)$

$$\xi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \xi(s)) ds. \quad (2.23)$$

Por hipótesis, $\xi(t) \in K$ para todo $t \in [t_0, \tau)$. Entonces si $\alpha(\cdot)$ es la función que aparece en la condición (C2), a partir de (2.23) deducimos para $t_0 \leq t' \leq t < \tau$ que

$$|\xi(t) - \xi(t')| \leq \int_{t'}^t \alpha(s) ds.$$

De esta última desigualdad y de la integrabilidad de α en $[t_0, \tau]$ se deduce que $|\xi(t) - \xi(t')| \rightarrow 0$ si $t', t \rightarrow \tau$, y, a posteriori, la existencia de $\lim_{t \rightarrow \tau^-} \xi(t) = \xi(\tau^-)$. ■

Proposición 2.4 Consideremos la familia de problemas a valores iniciales

$$\dot{x} = f_m(t, x), \quad x(t_0) = x_m, \quad m = 0, 1, \dots \quad (2.24)$$

con $f_m : \mathcal{I} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $t_0 \in \mathcal{I}$ y $x_m \in \mathcal{X}$. Supongamos que cada f_m satisface las condiciones (D1) y (D2), esta última con funciones α y β independientes de m . Supongamos también que $\lim_{m \rightarrow +\infty} f_m(t, x) = f_0(t, x)$ y que $\lim_{m \rightarrow +\infty} x_m = x_0$. Sea ξ_m la solución maximalmente definida de (2.24).

Entonces si ξ_0 está definida en el intervalo $[t_0, T_0]$, ξ_m también está definida en $[t_0, T_0]$ para m suficientemente grande y $\xi_m \rightarrow \xi_0$ uniformemente en $[t_0, T_0]$.

Demostración:

Primero vamos a demostrar la proposición suponiendo que $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ y que además vale lo siguiente:

(*) Existen α y β localmente integrables tales que

1. $|f_m(t, x)| \leq \alpha(t) \forall t \in \mathcal{I}, \forall x \in \mathbb{R}^n$ y $\forall m \in \mathbb{Z}^+$.
2. $|f_m(t, x) - f_m(t, x')| \leq \beta(t)|x - x'| \forall t \in \mathcal{I} \forall x, x' \in \mathbb{R}^n$ y $\forall m \in \mathbb{Z}^+$.

Debido a 1., la solución maximal del PVI (2.24) ξ_m está globalmente definida, con lo cual sólo resta probar que $\xi_m \rightarrow \xi_0$ uniformemente en $[t_0, T_0]$.

Sea $t \in [t_0, T_0]$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} |\xi_m(t) - \xi_0(t)| &\leq |x_m - x_0| + \int_{t_0}^t |f_m(s, \xi_m(s)) - f_0(s, \xi_0(s))| ds \\ &\leq |x_m - x_0| + \int_{t_0}^t |f_m(s, \xi_m(s)) - f_m(s, \xi_0(s))| ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t |f_m(s, \xi_0(s)) - f_0(s, \xi_0(s))| ds \\ &\leq |x_m - x_0| + \int_{t_0}^t \beta(s) |\xi_m(s) - \xi_0(s)| ds \\ &\quad + \int_{t_0}^{T_0} |f_m(s, \xi_0(s)) - f_0(s, \xi_0(s))| ds. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Denominando $a_m = \int_{t_0}^{T_0} |f_m(s, \xi_0(s)) - f_0(s, \xi_0(s))| ds$, de (2.25) y el lema de Gronwall-Belman resulta que $\forall t \in [t_0, T_0]$

$$\begin{aligned} |\xi_m(t) - \xi_0(t)| &\leq a_m |x_m - x_0| e^{\int_{t_0}^t \beta(s) ds} \\ &\leq a_m |x_m - x_0| e^{\int_{t_0}^{T_0} \beta(s) ds}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Luego, la convergencia uniforme de ξ_m a ξ_0 sobre el intervalo $[t_0, T_0]$ se deduce inmediatamente de (2.26), si probamos que $a_m \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow +\infty$. Para probar esto último, consideremos la sucesión de funciones $\{g_m : m \in \mathbb{N}\}$, $g_m(s) = |f_m(s, \xi_0(s)) - f_0(s, \xi_0(s))|$, como $\lim_{m \rightarrow +\infty} g_m(s) = 0$ y $|g_m(s)| \leq 2\alpha(s)$, por el teorema de la convergencia mayorada de Lebesgue tenemos que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} a_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^{T_0} g_m(s) ds = \int_{t_0}^{T_0} \lim_{m \rightarrow +\infty} g_m(s) ds = 0,$$

que es lo que restaba probar.

El caso general se deduce del caso particular de la siguiente forma. Sea $K_0 = \xi_0([t_0, T_0]) \subset \mathcal{X}$. Como K_0 es compacto y \mathcal{X} es abierto, existe $r > 0$ tal que $K_0 \subset K_r \subset K_{2r} \subset \mathcal{X}$. Consideremos una función de clase C^∞ $\chi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\chi \equiv 1$ en K_r , $\chi \equiv 0$ en $\mathbb{R}^n - K_{2r}$ y $0 \leq \chi \leq 1$ en \mathbb{R}^n y, para cada $m \in \mathbb{Z}^+$, sea $\bar{f}_m : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n$, $\bar{f}_m(t, x) = \chi(x) f_m(t, x)$. Entonces, la familia $\{\bar{f}_m\}$ se encuentra en las hipótesis de la proposición y satisface la condición (*), esto último debido a que cada miembro de la familia $\{f_m\}$ satisface (D2) con α y β independientes de m . Luego, si $\bar{\xi}_m$ es la solución maximal del problema a valores iniciales (2.24) con \bar{f}_m en lugar de f_m , tenemos que $\bar{\xi}_m$ converge uniformemente a $\bar{\xi}_0$ sobre el intervalo $[t_0, T_0]$.

La demostración de la proposición finaliza teniendo en cuenta lo siguiente:

- i) Si en el intervalos $J \subseteq \mathcal{I}$, $\xi_m(J) \subseteq K_r$ o $\bar{\xi}_m \subseteq K_r$, entonces $\xi_m \equiv \bar{\xi}_m$ en J , pues, $\bar{f}_m \equiv f_m$ en $\mathcal{I} \times K_r$.
- ii) Entonces, como $\xi_0([t_0, T_0]) \subseteq K_0 \subset K_r$, $\xi_0 \equiv \bar{\xi}_0$ en $[t_0, T_0]$.
- iii) Debido a la convergencia uniforme de $\bar{\xi}_m$ a $\bar{\xi}_0$ y a que $\bar{\xi}_0([t_0, T_0]) = \xi_0([t_0, T_0]) \subseteq K_0$, existe $M \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\bar{\xi}_m([t_0, T_0]) \subseteq K_r \forall m \geq M$. Entonces por i) $\bar{\xi}_m \equiv \xi_m$ en $[t_0, T_0] \forall m \geq M$, con lo cual tenemos que ξ_m está definida en $[t_0, T_0]$ si $m \geq M$ y que $\xi_m \rightarrow \xi_0$ uniformemente en $[t_0, T_0]$. ■

2.9 Apéndice II

Demostración del Lema 2.1:

Supongamos que Σ_H cumple 1.(a). Sea $\mu > 0$ tal que el conjunto $K = \{(x, \xi, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{Z} : d_M((x, z)) \leq \mu \text{ y } d_M((\xi, z)) \leq \mu\} \subseteq \mathcal{X} \times \Omega$ y es compacto. Sean $L_K \geq 0$, $r_K > 0$ y $\gamma_K : [0, r_K] \rightarrow \mathbb{R}^+$ como en 1.(a).

Consideremos la función $\gamma : [0, r_K] \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por

$$\gamma(r) = (r + \|\Pi\| \gamma_K(r)) e^{L_K \|\Pi\|}, \quad (2.27)$$

la cual es evidentemente de clase \mathcal{K} , y sea $0 < r^* \leq r_K$ tal que

$$r^* + \gamma(r^*) \leq \min(r_K/2, \mu/2).$$

En lo que sigue vamos a demostrar que con tales r^* y γ valen los puntos (a) y (b) de (A7).

Fijemos $k \in \mathbf{Z}^+$ y consideremos $\omega = (x, z) \in M_{r^*}$ arbitrario. Sean $\mathbf{w}(t, t_k, \omega) = (x(t), z(t))$ y $[t_k, t^*] = [t_k, T(k, \omega)] \cap [t_k, t_{k+1}]$, entonces $\mathbf{w}(t, t_k, \omega) = (x(t), z)$ si $t \in [t_k, t^*]$. Elijamos $\bar{\omega} = (\bar{x}, \bar{z}) \in M$ tal que

$$\|\omega - \bar{\omega}\| = |x - \bar{x}| + |z - \bar{z}| = d_M(\omega) \leq r^*. \quad (2.28)$$

Entonces, por ser M invariante, $\mathbf{w}(t, t_k, \bar{\omega}) = (\bar{x}(t), \bar{z}) \in M \forall t \in [t_k, t_{k+1}]$.

De la definición de solución de la ecuación (2.1), $x(\cdot)$ y $\bar{x}(\cdot)$ satisfacen las siguientes igualdades en el intervalo $t_k \leq t < t^*$,

$$x(t) = x + \int_{t_k}^t f_1(s, x(s), x, z) ds$$

y

$$\bar{x}(t) = x + \int_{t_k}^t f_1(s, \bar{x}(s), \bar{x}, \bar{z}) ds,$$

por lo tanto, en el mismo intervalo,

$$|x(t) - \bar{x}(t)| \leq |x - \bar{x}| + \int_{t_k}^t |f_1(s, x(s), x, z) - f_1(s, \bar{x}(s), \bar{x}, \bar{z})| ds \quad (2.29)$$

Consideremos el intervalo de números reales

$$I = \{t \in [t_k, t^*] : \forall t_k \leq s \leq t, (x(s), x, z) \in K \text{ y } |x(s) - \bar{x}(s)| \leq r_K/2\}.$$

Como $(x(t_k), x, z) = (x, x, z) \in K$, pues $d_M((x, z)) \leq r^* \leq \mu/2$ y $|x(t_k) - \bar{x}(t_k)| = |x - \bar{x}| \leq d_M((x, z)) \leq r^* \leq r_K/2$, $t_k \in I$, y por lo tanto I no es vacío.

Sea $t \in I$. Por la definición de I y la elección de r^* , para todo $t_k \leq s \leq t$, $(\bar{x}(s), \bar{x}, \bar{z}) \in K$ y $|x(s) - \bar{x}(s)| + |x - \bar{x}| + |z - \bar{z}| \leq r_K/2 + r^* \leq r_K$, entonces por 1.(a), para $t_k \leq s \leq t$

$$|f_1(s, x(s), x, z) - f_1(s, \bar{x}(s), \bar{x}, \bar{z})| \leq L_k |x(s) - \bar{x}(s)| + \gamma_K (|x - \bar{x}| + |z - \bar{z}|), \quad (2.30)$$

y de esto, (2.29) y el lema de Gronwall-Belman, resulta la acotación

$$|x(t) - \bar{x}(t)| \leq (|x - \bar{x}| + \|\Pi\| \gamma_K (|x - \bar{x}| + |z - \bar{z}|)) e^{L_K \|\Pi\|} \quad (2.31)$$

$$\leq \gamma(r^*). \quad (2.32)$$

Entonces, de (2.31), la definición de γ y la arbitrariedad de $t \in I$, deducimos

$$d_M(\mathbf{w}(t, t_k, \omega)) \leq |x(t) - \bar{x}(t)| + |z - \bar{z}| \leq \gamma(d_M(\omega)) \quad \forall t \in I. \quad (2.33)$$

Si probamos que $I = [t_k, t_{k+1})$, tendremos probada la validez de (A7). En efecto, por un lado (2.33) prueba la acotación por la función de clase \mathcal{K} . Por el otro $(x(t), x, z) \in K \forall t \in [t_k, t_{k+1})$, con lo cual, $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$, $w(t, t_k, \omega) = (x(t), z) \in K^* = \{(x', z') \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{Z} : \exists \xi \in \mathbb{R}^n \text{ con } (x', \xi, z') \in K\} \subseteq \Omega$. Como K^* es compacto por ser la proyección del conjunto compacto K sobre la primer y tercer componente, resulta por (A2) que $w(\cdot, t_k, \omega)$ está definida por lo menos hasta $t = t_{k+1}$ o, equivalentemente, que $\omega \in \Omega_K$. Como $\omega \in M_{r^*}$ era arbitrario, resulta $M_{r^*} \subseteq \Omega_k$.

En primer lugar vamos a probar que $I = [t_k, t^*)$. Supongamos que esto no es cierto. Entonces $I = [t_k, t^{**}]$ con $t^{**} < t^*$. De (2.32) y la elección de r^* , tenemos que $|x(t^{**}) - \bar{x}(t^{**})| \leq \gamma(r^*) < r_K/2$ y de (2.33) y la elección de r^* tenemos que $d_M(x(t^{**}), z) \leq \gamma(r^*) < \mu/2$ y $d_M(x, z) \leq r^* < \mu/2$. Entonces, por la continuidad de $x(\cdot)$ y $\bar{x}(\cdot)$, existe $t^{**} < t' < t^*$ tal que $\forall t^{**} \leq s \leq t'$, $(x(s), x, z) \in K$ y $|x(s) - \bar{x}(s)| \leq r_K/2$. Pero entonces $t' \in I$, lo cual es absurdo. En consecuencia $I = [t_k, t^*)$.

Ahora vamos a probar que $t^* = t_{k+1}$. Si así no fuera, $t^* = T(k, \omega)$. Del hecho que $w(t, t_k, \omega) \in K^*$ en el intervalo $t_k \leq t < t^*$ y de la compacidad de K^* concluimos que $t^* < T(k, \omega)$, lo cual es absurdo. Por lo tanto $t^* = t_{k+1}$, concluyendo la demostración del punto 1. de la tesis.

La validez del punto 3. de la tesis del lema se deduce inmediatamente de la demostración precedente teniendo en cuenta que en ese caso Σ_H satisface 1.(a) con $\gamma_K(r) = L_K r$ y que por lo tanto vale (A7) con $\gamma(r) = (r + \|\Pi\| L_K r) e^{L_K \|\Pi\|} = cr$.

Supongamos ahora que nos encontramos en las condiciones del punto 2. Entonces consideremos la función $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por (2.27) con L y $\hat{\gamma}$ en lugar de L_K y γ_K . En este caso γ resulta evidentemente de clase \mathcal{K}_∞ . Fijemos $k \in \mathbb{Z}^+$ y tomemos $\omega \in \Omega$ arbitrario. Elijamos $\bar{\omega} \in M$ de modo tal que $d_M(\omega) = \|\omega - \bar{\omega}\|$. Empleando la misma notación y siguiendo los mismos pasos que al principio, de (2.29) y la condición 2.(a), resulta que (2.33) vale para todo $t \in [t_k, t^*)$. Probando que $t^* = t_{k+1}$ tendremos probado (A7G), ya que por un lado tendremos la acotación por una función de clase \mathcal{K}_∞ y por el otro, con argumentos similares a los empleados para demostrar (A7), tendremos $\Omega_k = \Omega$ y con ello la definición global de las trayectorias de Σ_H .

Al igual que en el caso anterior supongamos $t^* < t_{k+1}$, entonces $t^* = T(k, \omega)$. Por otra parte, por (2.33), $w(t, t_k, \omega) \in M_{\gamma(d_M(\omega))}$ para todo $t \in [t_k, t^*)$. Luego, por la compacidad de $M_{\gamma(d_M(\omega))}$ y (A2), $t^* < T(k, \omega)$, lo cual es absurdo. Entonces $t^* = t_{k+1}$ y queda probado (A7G).

La validez del punto 4. de la tesis del lema se deduce inmediatamente de la demostración punto 3. En efecto, si f_1 satisface las condiciones de 4., f_1 satisface las condiciones del punto 3. con la misma L y con $\hat{\gamma}(r) = Lr$; en consecuencia, Σ_H satisface (A7G) con $\gamma(r)$ lineal, es decir, vale (A8G). ■

Demostración del Lema 2.2:

Como la demostración de este lema se obtiene modificando ligeramente la demostración de Lema 2.1, sólo indicaremos que modificaciones que hay que efectuar.

La demostración de punto 1. se obtiene a partir de la del punto 1. del Lema 2.1 reemplazando en todos los pasos de dicha demostración, γ_K por γ^* y r_K por \bar{r} , y teniendo en cuenta que (2.30) sigue valiendo para todo $t \in I$, porque en este caso, $(\bar{x}(s), \bar{x}, \bar{z}) = (x_e, x_e, z_e)$, $f_1(t, x_e, x_e, z_e) = 0$ y suponemos que vale la acotación $|f_1(t, x, \xi, z)| \leq L^*|x - x_e| + \gamma^*(|\xi - x_e| + |z - z_e|)$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$ y para todo $(x, \xi, z) \in \xi \times \Omega : |x - x_e| + |\xi - x_e| + |z - z_e| \leq \bar{r}$.

Las demostraciones de los puntos 2., 3. y 4. se obtienen de las demostraciones de los correspondientes puntos del Lema 2.1 con modificaciones y consideraciones similares a las que mencionamos para la demostración el punto 1. ■

Demostración de Lema 2.3:

Supongamos que Σ_H es Υ -periódico y que valen (A4) y (A6). Debido a 2., 3. y 4. de la Observación 2.10, la propiedad (A7) quedará probada si mostramos la existencia de un número positivo r^* y de una función γ de clase \mathcal{K} tales que los puntos (a) y (b) de (A7) valen para $k = 1, \dots, \Upsilon - 1$.

Sean $r_1^*, \dots, r_{\Upsilon-1}^*$ constantes positivas tales que $M_{r_k^*} \subseteq \Omega_k$. Tales constantes existen pues, para cada k , $M \subseteq \Omega_k$ y Ω_k es abierto debido a (A4).

Sea $r^* = \min\{r_k^* : k = 1, \dots, \Upsilon - 1\}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer, por ser Ω localmente compacto (\mathcal{X} es abierto en \mathbb{R}^n y \mathcal{Z} es abierto o cerrado en \mathbb{R}^m), que M_{r^*} es compacto. Por la elección de r^* , $M_{r^*} \subseteq \Omega_k$ si $1 \leq k \leq \Upsilon - 1$.

Para $k = 1, \dots, \Upsilon - 1$ y $r \leq r^*$ sea

$$\gamma_k(r) = \sup\{d_M(\mathbf{w}(t, k, \omega)) : d_M(\omega) \leq r, t \in [k, k + 1]\}. \quad (2.34)$$

Entonces $\gamma_k : [0, r^*] \rightarrow \mathbb{R}$ es no negativa, no decreciente y $\lim_{r \rightarrow 0^+} \gamma_k(r) = 0$. Sólo probaremos que $\gamma_k(r)$ está bien definida para todo $r \in [0, r^*]$ y que $\lim_{r \rightarrow 0^+} \gamma_k(r) = 0$, ya que el resto se deduce inmediatamente de la misma definición de γ_k . Consideremos la aplicación $\Lambda_{k,k+1} : \Omega_k \rightarrow \mathcal{E}([k, k + 1])$, que es continua por (A6). Primero mostraremos que $\gamma_k(r)$ es finita. Sea $r \leq r^*$. Como M_r es compacto y $\Lambda_{k,k+1}$ es continua, $\Lambda_{k,k+1}(M_r)$ es acotado en $\mathcal{E}([k, k + 1])$ y por lo tanto existe una constante $m_k(r)$ tal que

$$\|\Lambda_{k,k+1}(\omega)\|_\infty \leq m_k(r) \quad \forall \omega \in M_r,$$

o, equivalentemente,

$$\|\mathbf{w}(t, k, \omega)\| \leq m_k(r) \quad \forall t \in [k, k + 1] \text{ y } \forall \omega \in M_r. \quad (2.35)$$

Sea $C_M = \max\{\|\omega\| : \omega \in M\}$, entonces de (2.35) y de la desigualdad triangular resulta $d_M(\mathbf{w}(t, k, \omega)) \leq m_k(r) + C_M \forall t \in [k, k+1]$ y $\forall \omega \in M_r$, con lo cual $\gamma_k(r) \leq m_k(r) + C_M < +\infty$.

Ahora vamos a demostrar que $\lim_{r \rightarrow 0^+} \gamma_k(r) = 0$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces, por la continuidad uniforme de $\Lambda_{k,k+1}$ sobre M_{r^*} , existe $\delta(\varepsilon, k) > 0$ tal que

$$\|\Lambda_{k,k+1}(\omega) - \Lambda_{k,k+1}(\omega')\|_\infty < \varepsilon, \text{ si } \omega, \omega' \in M_{r^*} \text{ y } \|\omega - \omega'\| < \delta(\varepsilon, k).$$

Fijemos $0 < r < \delta(\varepsilon, k)$ y sea $\omega \in M_{r^*}$ arbitrario pero tal que $d_M(\omega) \leq r$. Sea $\omega' \in M$ tal que $\|\omega - \omega'\| = d_M(\omega')$. Por ser M invariante, tenemos que $\mathbf{w}(t, k, \omega') \in M \forall t \in [k, k+1]$ y, en consecuencia,

$$d_M(\mathbf{w}(t, k, \omega)) \leq \|\mathbf{w}(t, k, \omega) - \mathbf{w}(t, k, \omega')\| \quad \forall t \in [k, k+1]. \quad (2.36)$$

Por otra parte, como $\|\omega - \omega'\| = d_M(\omega) \leq r < \delta(\varepsilon, k)$, para cada $t \in [k, k+1]$ vale

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}(t, k, \omega) - \mathbf{w}(t, k, \omega')\| &= \|\Lambda_{k,k+1}(\omega)(t) - \Lambda_{k,k+1}(\omega')(t)\| \\ &\leq \|\Lambda_{k,k+1}(\omega) - \Lambda_{k,k+1}(\omega')\|_\infty < \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Entonces, de (2.36) y (2.37), si $\omega \in M_{r^*}$ y $d_M(\omega) \leq r < \delta(\varepsilon, k)$,

$$d_M(\mathbf{w}(t, k, \omega)) < \varepsilon \quad \forall t \in [k, k+1]. \quad (2.38)$$

De esta última desigualdad y de la definición de γ_k resulta $\gamma_k(r) < \varepsilon \forall r < \delta(\varepsilon, k)$, por lo tanto $\lim_{r \rightarrow 0^+} \gamma_k(r) = 0$.

Sea $\gamma : [0, r^*] \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función de clase \mathcal{K} tal que $\gamma(r) \geq \gamma_k(r)$ para cada $r \in [0, r^*]$ y cada $k = 1, \dots, \Upsilon - 1$. (tal función existe debido a que cada una de las funciones γ_k es no decreciente y $\lim_{r \rightarrow 0^+} \gamma_k(r) = 0$). Entonces $M_{r^*} \subseteq \Omega_k$ para $k = 1, \dots, \Upsilon - 1$ y

$$d_M(\mathbf{w}(t, k, \omega)) \leq \gamma_k(d_M(\omega)) \leq \gamma(d_M(\omega)),$$

para cada $\omega \in M_{r^*}$, cada $t \in [k, k+1]$ y cada $k = 1, \dots, \Upsilon - 1$. En consecuencia, por lo dicho al comienzo, queda probado que Σ_H satisface (A7).

Supongamos ahora $\Omega = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ y que las trayectorias de Σ_H están globalmente definidas. Entonces, para cada $k = 1, \dots, \Upsilon - 1$ y cada $r \geq 0$ consideremos, como en el caso anterior

$$\gamma_k(r) = \sup\{d_M(\mathbf{w}(t, k, \omega)) : d_M(\omega) \leq r, t \in [k, k+1]\}.$$

Observamos que $\gamma_k(r)$ está bien definida para cada $r \geq 0$ por la continuidad uniforme de $\Lambda_{k,k+1}$ sobre M_{r^*} . Además, al igual que en el caso anterior, $\gamma_k : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ es no decreciente, no negativa y $\lim_{r \rightarrow 0^+} \gamma_k(r) = 0$.

Sea $\gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, una función de clase \mathcal{K}_∞ tal que $\gamma(r) \geq \gamma_k(r)$ para cada $r \geq 0$ y cada $k = 1, \dots, \Upsilon - 1$. Entonces, para cada $\omega \in M_{r^*}$, cada $t \in [k, k + 1]$ y cada $k = 1, \dots, \Upsilon - 1$,

$$d_M(\mathbf{w}(t, k, \omega)) \leq \gamma_k(d_M(\omega)) \leq \gamma(d_M(\omega)),$$

con lo cual queda probada la validez de (A7G). ■

Capítulo 3

Sistemas Lineales Perturbados

3.1 Introducción

En este capítulo estudiaremos, aplicando los resultados obtenidos en el capítulo anterior, la estabilidad de los sistemas híbrido lineales y de los sistemas híbridos lineales perturbados. Demostraremos que la estabilidad exponencial de un sistema híbrido lineal es una propiedad robusta en dos sentidos: a) si perturbamos el sistema lineal con lo que denominaremos perturbaciones *evanescentes* y estas perturbaciones son “suficientemente pequeñas”, entonces el sistema perturbado sigue siendo exponencialmente estable, y, b) si las perturbaciones que afectan al sistema lineal son *persistentes* y también “suficientemente pequeñas”, las trayectorias del sistema perturbado son *uniformemente acotadas* y *uniformemente finalmente acotadas*.

Los resultados de robustez respecto de perturbaciones evanescentes serán empleado luego para justificar el método de análisis por linealización, conocido también como *Primer Método de Lyapunov*.

Por último, estudiaremos detalladamente el problema de la estabilización exponencial de sistemas de control en tiempo continuo mediante controladores digitales, ya sea que se empleen uno o más períodos de muestreo para muestrear tanto las salidas del sistema de control como las salidas del controlador.

3.2 Estabilidad de sistemas híbridos lineales

En esta sección estudiaremos las propiedades de estabilidad del origen de coordenadas de $\Omega = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ respecto del sistema híbrido lineal Σ_{HL} determinado por la ecuación

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_{11}(t)x(t_k) + B_{12}(t)z(t_k) & t \in [t_k, t_{k+1}) \\ z(t_{k+1}) = B_{21}(k)x(t_k) + B_{22}(k)z(t_k) & k \in \mathbf{Z}^+ \end{cases} \quad (3.1)$$

donde $A(t)$, $B_{1j}(t)$ y $B_{2j}(k)$ son, para cada $t \geq 0$, cada $k \in \mathbf{Z}^+$ y cada $j = 1$ ó 2 , matrices de dimensiones apropiadas .

Para poder aplicar en la presente situación los resultados que obtuvimos en el capítulo 2, supondremos que el lado derecho de la ecuación (3.1) satisface las condiciones (L1) y (L2) introducidas en ese capítulo, es decir, supondremos que las funciones matriciales $A(\cdot)$, $B_{11}(\cdot)$ y $B_{12}(\cdot)$ son medibles Lebesgue y acotadas. Entonces, debido a la Observación 2.9, las trayectorias del sistema híbrido lineal Σ_{HL} estarán globalmente definidas y el sistema discretizado Σ_{HLD} asociado a Σ_{HL} estará determinado por la ecuación en diferencias lineal

$$\omega(t_{k+1}) = H(k)\omega(t_k), \quad (3.2)$$

con $H(k)\omega = \Gamma_{t_k, t_{k+1}}(\omega)$ para cada $\omega \in \Omega$ y cada $k \in \mathbf{Z}^+$. Resolviendo la ecuación lineal (3.1), es posible obtener una expresión explícita de la matriz $H(k)$. En efecto, si $\omega = (x, z)$ y $\Gamma_{t_k, t_{k+1}}(\omega) = \mathbf{w}(t_{k+1}, t_k, \omega) = (x_1, z_1)$, tenemos, por la formula de variación de los parametros, que

$$x_1 = \Phi(t_{k+1}, t_k)x + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, s)B_{11}(s)x ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, s)B_{12}(s)z ds, \quad (3.3)$$

siendo $\Phi(t, s)$ la solución de la ecuación diferencial matricial $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$, $X(s) = I$, con I la matriz identidad. Por otra parte

$$z_1 = B_{21}(k)x + B_{22}(k)z. \quad (3.4)$$

En consecuencia, de (3.3) y (3.4) resulta la siguiente representación en bloques de la matriz $H(k)$

$$H(k) = \begin{bmatrix} H_{11}(k) & H_{12}(k) \\ H_{21}(k) & H_{22}(k) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

con

$$H_{11}(k) = \Phi(t_{k+1}, t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, s)B_{11}(s)ds \quad (3.6)$$

$$H_{12}(k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, s)B_{12}(s)ds \quad (3.7)$$

$$H_{21}(k) = B_{21}(k) \quad (3.8)$$

$$H_{22}(k) = B_{22}(k). \quad (3.9)$$

Cuando la ecuación (3.1) es N -periódica, supondremos como en el capítulo anterior que el período de muestreo $\delta = 1$. Entonces, de acuerdo con la Observación 2.14 la ecuación en diferencias (3.2) que determina al sistema Σ_{HLD} resulta de la forma

$$\omega(k+1) = H(k)\omega(k) \quad (3.10)$$

con $H(k + N) = H(k) \forall k \in \mathbf{Z}^+$.

Notamos que en el caso particular en que (3.1) es tiempo invariante, $H(k) = H(0) = H \forall k \in \mathbf{Z}^+$ y la ecuación en diferencias (3.10) que determina al sistema híbrido discretizado se reduce a

$$\omega(k + 1) = H\omega(k). \quad (3.11)$$

Cuando el sistema es tiempo invariante y las matrices que aparecen en el lado derecho de la ecuación (3.1) son independientes del tiempo, H en (3.11) admite la siguiente representación

$$H = \begin{bmatrix} e^A(I + \int_0^1 e^{-As} B_{11} ds) & e^A \int_0^1 e^{-As} B_{12} ds \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Como hemos dicho al comienzo, el origen de coordenadas de Ω es un punto de equilibrio del sistema Σ_{HL} . El siguiente lema, que se deduce de las propiedades de linealidad de Σ_{HL} enunciadas en la Observación 2.9, muestra por un lado que las propiedades de estabilidad asintótica del origen son globales y por el otro que la estabilidad asintótica uniforme es equivalente a la estabilidad exponencial.

Lema 3.1 Sea Σ_{HL} el sistema dinámico híbrido determinado por la ecuación (3.1). Supongamos que el lado derecho de (3.1) satisface (L1) y (L2). Sea $\omega_0 = 0$ el origen de coordenadas de Ω , entonces

1. ω_0 es AE si y sólo si ω_0 es GAE.
2. ω_0 es UAE si y sólo si ω_0 es GUAE.
3. ω_0 es EE si y sólo si ω_0 es GEE.
4. ω_0 es GUAE si y sólo si ω_0 es GEE.

Demostración: sólo demostraremos las partes *sólo si* de los items 2. y 4. ya que las restantes implicaciones son triviales o se demuestran en forma similar.

Comenzamos suponiendo que ω_0 es UAE. Lo primero que vamos a demostrar es que las normas de los operadores lineales $\Gamma_{t_k, t}$ están uniformemente acotadas, es decir, que

$$\sup_{t \geq t_k, t_k \in \Pi} \|\Gamma_{t_k, t}\| \leq M \quad (3.13)$$

para algún $M \geq 0$.

Por ser ω_0 UE, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\forall \|\omega\| \leq \varepsilon_0$ y $\forall t_k \in \Pi$,

$$\|\Gamma_{t_k,t}(\omega)\| = \|\mathbf{w}(t, t_k, \omega)\| \leq 1 \quad \forall t \geq t_k.$$

Entonces, por la linealidad de $\Gamma_{t_k,t}$, resulta $\|\Gamma_{t_k,t}(\omega)\| \leq \varepsilon_0^{-1} \forall t \geq t_k, \forall t_k \in \Pi$ y $\forall \|\omega\| \leq 1$, con lo cual (3.13) vale con $M = \varepsilon_0^{-1}$.

Notamos que de (3.13) se deduce que

$$\|\mathbf{w}(t, t_k, \omega)\| = \|\Gamma_{t_k,t}(\omega)\| \leq M\|\omega\| \quad \forall t \geq t_k \forall t_k \in \Pi \text{ y } \forall \omega \in \Omega, \quad (3.14)$$

y que de esto último sigue la validez del punto 2. de la Definición 2.20.

Por último vamos a demostrar que el punto 3. de la Definición 2.20 se verifica.

Fijemos $\varepsilon > 0$ y $\eta > 0$, arbitrarios. Sea $\eta_0 > 0$ como en la definición de estabilidad asintótica uniforme y sean $r = \eta/\eta_0$ y $\varepsilon' = \varepsilon/r$. Sea $T = T(\varepsilon')$ tal que

$$\|\mathbf{w}(t, t_k, \omega)\| < \varepsilon' \quad \forall t \geq t_k + T \text{ y } \forall \|\omega\| \leq \eta_0. \quad (3.15)$$

Entonces, de (3.15) y la linealidad de $\mathbf{w}(t, t_k, \cdot)$ resulta

$$\|\mathbf{w}(t, t_k, \omega)\| = r\|\mathbf{w}(t, t_k, r^{-1}\omega)\| < r\varepsilon' = \varepsilon, \quad \forall t \geq t_k + T \text{ y } \forall \|\omega\| \leq \eta,$$

que es lo que queríamos demostrar.

Supongamos ahora que ω_0 es GUAE y sea $T^* > 0$ tal que

$$\|\mathbf{w}(t, t_k, \omega)\| < 1/2 \quad \forall t \geq t_k + T^* \text{ y } \forall \|\omega\| \leq 1. \quad (3.16)$$

Entonces, empleando la linealidad de $\mathbf{w}(t, t_k, \cdot)$, deducimos que

$$\|\mathbf{w}(t, t_k, \omega)\| < 1/2\|\omega\| \quad \forall t \geq t_k + T^* \text{ y } \forall \omega \in \Omega,$$

y de esto y (A4) que,

$$\|\mathbf{w}(t, t_k, \omega)\| < (1/2)^n\|\omega\| \quad \forall t \geq t_k + n(T^* + \|\Pi\|) \text{ y } \forall \omega \in \Omega. \quad (3.17)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Combinando (3.14) con (3.17) llegamos a la desigualdad

$$\|\mathbf{w}(t, t_k, \omega)\| < M^*(1/2)^n\|\omega\| \quad \forall t \geq t_k + nT^{**} \forall n \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } \forall \omega \in \Omega, \quad (3.18)$$

donde $M^* = \max(1, M)$ y $T^{**} = (T^* + \|\Pi\|)$. Entonces, si $[\cdot]$ denota la función parte entera, a partir de (3.18) resulta

$$\|\mathbf{w}(t, t_k, \omega)\| < M^* e^{-[\frac{t-t_k}{T^{**}}] \ln 2} \|\omega\| \quad \forall t \geq t_k \text{ y } \forall \omega \in \Omega,$$

y, a posteriori,

$$\|\mathbf{w}(t, t_k, \omega)\| < 2M^* e^{-\frac{\ln 2}{T^*}(t-t_k)} \|\omega\| \quad \forall t \geq t_k \text{ y } \forall \omega \in \Omega,$$

con lo cual, considerando $\mu = 2M^*$ y $\kappa = \frac{\ln 2}{T^*}$, estamos en las condiciones de la definición de estabilidad exponencial global. ■

El siguiente resultado, consecuencia inmediata del Teorema 2.4, establece la equivalencia entre las propiedades de estabilidad del origen de coordenadas de Ω respecto del sistema Σ_{HL} y las propiedades de estabilidad del origen de coordenadas de Ω respecto del sistema Σ_{HLD} .

Proposición 3.1 Sea Σ_{HL} el sistema dinámico híbrido determinado por la ecuación (3.1). Supongamos que el lado derecho de (3.1) satisface (L1) y (L2). Sea $\omega_0 = 0$ el origen de coordenadas de Ω , entonces ω_0 es un punto de equilibrio I, E, UE, GAE, GEE de Σ_{HL} si y sólo si ω_0 es un punto de equilibrio, respectivamente, I, E, UE, GAE, GEE de Σ_{HLD} .

Demostración: Por un lado (L1) y (L2) implican (H1) y (H2); por el otro (L2) implica la Lipschitzianidad del lado derecho de la primera de las ecuaciones de (3.1) y por lo tanto, por el punto 4. del Lema 2.1, Σ_{HL} satisface la condición (A8G) respecto de $M = \{\omega_0\}$. Entonces Σ_{HL} está en las condiciones del Teorema 2.4 y vale la tesis de la proposición. ■

El siguiente corolario se deduce inmediatamente de la proposición 3.1 y de resultados estándar para sistemas lineales periódicos en tiempo discreto.

Corolario 3.1 Sea Σ_{HL} el sistema dinámico híbrido determinado por la ecuación (3.1). Supongamos que (3.1) es N -periódica y que satisface (L1) y (L2). Consideremos la matriz $H = H(0)H(1) \dots H(N-1)$, con $H(k)$ como en (3.10) y sea ω_0 el origen de coordenadas de Ω . Entonces

1. ω_0 es un punto de equilibrio GEE respecto de Σ_{HL} si y sólo si la matriz H es Schur estable, es decir, si y sólo si los autovalores de H son de módulo menor que uno.
2. ω_0 es un punto de equilibrio I respecto de Σ_{HL} si algún autovalor de H tiene módulo mayor que uno.

3.3 Sistemas híbridos lineales perturbados

En lo siguiente estudiaremos las propiedades de estabilidad del origen de coordenadas de $\Omega = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ respecto del sistema dinámico híbrido Σ_H originado por la ecuación híbrida

lineal perturbada

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = G_1(t, x(t), x(t_k), z(t_k)) + g_1(t, x(t), x(t_k), z(t_k)) & t \in [t_k, t_{k+1}) \\ z(t_{k+1}) = G_2(k, x(t_k), z(t_k)) + g_2(k, x(t_k), z(t_k)) & k \in \mathbf{Z}^+ \end{cases}, \quad (3.19)$$

donde

$$G_1(t, x, \xi, z) = A(t)x + B_{11}(t)\xi + B_{12}(t)z,$$

$$G_2(k, x, z) = B_{21}(k)x + B_{22}(k)z,$$

$g_1 : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $g_2 : \mathbf{Z}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Además de suponer, como en la sección anterior, que $A(\cdot)$, $B_{11}(\cdot)$ y $B_{12}(\cdot)$ satisfacen las condiciones (L1) y (L2), supondremos que g_1 satisface las condiciones (H1) y (H2), con lo cual la existencia y unicidad de las trayectorias del sistema híbrido Σ_H determinado por la ecuación (3.19) quedará asegurada.

En lo siguiente interpretaremos al sistema Σ_H determinado por (3.19) como una perturbación del sistema lineal Σ_{HL} determinado por (3.1) y, a los términos g_1 y g_2 como *perturbaciones*. Entonces surge naturalmente la pregunta: ¿Qué se puede decir respecto del comportamiento de las trayectorias del sistema perturbado Σ_H a partir del comportamiento de las trayectorias del sistema nominal Σ_{HL} , si las perturbaciones son suficientemente pequeñas? Obviamente, para poder brindar una respuesta razonable a tal pregunta, será necesario por un lado imponer algún tipo de condición sobre el sistema nominal Σ_{HL} , por ejemplo la estabilidad exponencial, y, por el otro, precisar que clase de perturbaciones consideraremos y que entenderemos por perturbaciones suficientemente pequeñas.

En lo subsecuente consideraremos dos clases o tipos de perturbaciones. En primer lugar consideraremos perturbaciones que mantienen al origen como punto de equilibrio del sistema perturbado. Tales perturbaciones serán denominadas perturbaciones *evanescentes*, ya que necesariamente deberán anularse en el origen. Los resultados que obtendremos para esta clase de perturbaciones servirán luego para justificar el análisis de estabilidad de un punto de equilibrio de un sistema dinámico híbrido por linealización. En segundo término consideraremos perturbaciones *persistentes*, es decir perturbaciones que no se anulan necesariamente en el origen. En este caso el origen ya no será necesariamente un punto de equilibrio de Σ_H , y por lo tanto el comportamiento de las trayectorias de Σ_H ya no podrá ser descrito mediante los conceptos presentados en el capítulo anterior, sino que será necesario introducir dos nuevos conceptos, el de acotación uniforme y el de acotación final final uniforme.

3.3.1 Perturbaciones evanescentes

Como ya hemos dijimos, comenzaremos considerando el caso en que las perturbaciones se anulan en el origen, es decir $g_1(t, 0, 0, 0) = 0 \forall t \in \mathbb{R}^+$ y $g_2(k, 0, 0) \forall k \in \mathbf{Z}^+$, con lo cual el

origen de coordenadas de $\Omega = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ será un punto de equilibrio de Σ_H .

Nuestro objetivo inmediato será demostrar que si el origen es un equilibrio exponencialmente estable respecto del sistema nominal Σ_{HL} , entonces también es un equilibrio exponencialmente estable respecto del sistema perturbado Σ_H si las perturbaciones g_1 y g_2 son suficientemente pequeñas. Es decir, mostraremos que la estabilidad exponencial de los sistemas híbridos lineales es una propiedad "robusta". Con tal propósito consideraremos las siguientes condiciones de carácter local sobre las perturbaciones g_1 y g_2 .

(C1) Existen $r_1 > 0$ y $L_1 \geq 0$ tales que,

$$|g_1(t, x, \xi, z)| \leq L_1(|x| + |\xi| + |z|) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \text{ y } \forall (x, \xi, z) \in K_{r_1}, \quad (3.20)$$

donde $K_{r_1} = \{(x, \xi, z) \in \mathbb{R}^n \times \Omega : |x| + |\xi| + |z| \leq r_1\}$.

(C2) Existen $r_2 > 0$ y $L_2 \geq 0$ tales que,

$$|g_1(k, x, z)| \leq (t_{k+1} - t_k)L_2(|x| + |z|) \quad \forall k \in \mathbf{Z}^+ \text{ y } \forall (x, z) \in B_{r_2}, \quad (3.21)$$

donde $B_{r_2} = \{(x, z) \in \Omega : |x| + |z| \leq r_2\}$.

Observamos que en el caso en que $\inf_k(t_{k+1} - t_k) > 0$, la condición (C2) es equivalente a

(C2') Existen $r_2 > 0$ y $L_2 \geq 0$ tales que,

$$|g_1(k, x, z)| \leq L_2(|x| + |z|) \quad \forall k \in \mathbf{Z}^+ \text{ y } \forall (x, z) \in B_{r_2}. \quad (3.22)$$

Diremos que g_1 satisface (C1) en K_{r_1} cuando nos interese precisar la región en la cual es válida la desigualdad (3.20), con la misma intención diremos que g_2 satisface (C2) (o (C2')) en B_{r_2} .

Cuando g_1 satisface (3.20) para todo $(x, \xi, z) \in \mathbb{R}^n \times \Omega$, diremos que verifica la condición (C1) globalmente, y, similarmente, si g_2 satisface (3.21) (resp. (3.22)) para todo $(x, z) \in \Omega$ entonces diremos que verifica la condición (C2) (resp. (C2')) globalmente.

Observación 3.1 Si g_1 en (3.19) satisface (C1), se verifica

$$|G_1(t, x, \xi, z) + g_1(t, x, \xi, z)| \leq L^*(|x| + |\xi| + |z|) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \text{ y } \forall |x| + |\xi| + |z| \leq r_1$$

con $L^* = L + L_1$, L como en (L2) y, L_1 y r_1 , como en (C1). Por lo tanto, debido al Lema 2.2 el sistema Σ_H determinado por la ecuación (3.19) satisface la condición (A8) con $\gamma(r) = cr$ y $c = (1 + L^*\|\Pi\|)e^{L^*\|\Pi\|}$. Similarmente, cuando g_1 satisface globalmente (C1), Σ_H satisface (A8G) con la misma γ del caso anterior.

El siguiente lema sobre la forma de la ecuación en diferencias que determina al sistema perturbado discretizado Σ_{HD} será de utilidad luego.

Lema 3.2 Sea Σ_H el sistema híbrido determinado por la ecuación híbrida (3.19) y supongamos que las perturbaciones g_1 y g_2 satisfacen, respectivamente, (C1) y (C2). Entonces la ecuación en diferencias que determina al sistema discretizado Σ_{HD} es de la forma

$$\omega(t_{k+1}) = H(k)\omega(t_k) + \bar{G}(k, \omega(t_k)) \quad (3.23)$$

con $H(k)$ definida por las ecuaciones (3.5)-(3.9) y $\bar{G} : \mathcal{D}_d \rightarrow \Omega$ tal que, para cierto $\bar{r} > 0$,

1. $\mathbf{Z}^+ \times B_{\bar{r}} \subseteq \mathcal{D}_d$;
2. $\forall k \in \mathbf{Z}^+$ y $\forall \omega \in B_{\bar{r}}$,

$$\|\bar{G}(k, \omega)\| \leq (t_{k+1} - t_k)\zeta(L_1, L_2)\|\omega\| \quad (3.24)$$

con $\zeta(L_1, L_2) = L_1(1 + c)e^{L\|\Pi\|} + L_2$ y c como en la Observación 3.1.

Si g_1 y g_2 satisfacen (C1) y (C2) globalmente, $\mathcal{D}_d = \Omega$ y (3.24) vale para todo $\omega \in \Omega$.

Demostración: Sólo probaremos el caso local ya que el caso global se demuestra en forma similar, pero más sencilla. Por la Observación 3.1 vale (A8) con $\gamma(r) = cr$, es decir existe $r^* > 0$ tal que

$$\|\mathbf{w}(t, t_k, \omega)\| \leq c\|\omega\| \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}] \quad \forall k \in \mathbf{Z}^+ \text{ y } \forall \omega \in B_{r^*}, \quad (3.25)$$

siendo $\mathbf{w}(t, t_k, \omega)$ la trayectoria correspondiente al sistema Σ_H que se inicia en ω en el instante t_k . Por lo tanto, $\bar{G}(k, \omega) = \mathbf{w}(t_{k+1}, t_k, \omega) - H(k)\omega$ está definida para todo $k \in \mathbf{Z}^+$ y todo $\omega = (x, z) \in B_{r^*}$, con lo cual vale el punto 1. de la tesis para cualquier \bar{r} tal que $0 < \bar{r} \leq r^*$.

Sea $\bar{r} = \min\{r_2, r_1/(c + 1), r^*\}$ con r_1 como en (C1) y r_2 como en (C2). Sean $k \in \mathbf{Z}^+$, $\omega = (x, z) \in B_{\bar{r}}$ y $\mathbf{w}(t_{k+1}, t_k, \omega) = (x_1, z_1)$. Entonces, el lema quedará probado si demostramos que

$$|x_1 - H_{11}(k)x - H_{12}(k)z| \leq (t_{k+1} - t_k)L_1(1 + c)e^{L\|\Pi\|}(|x| + |z|) \quad (3.26)$$

y que

$$|z_1 - H_{21}(k)x - H_{22}(k)z| \leq (t_{k+1} - t_k)L_2(|x| + |z|). \quad (3.27)$$

Como (3.27) es inmediato por hipótesis, pues $z_1 - H_{21}(k)x - H_{22}(k)z = g_2(k, x, z)$ y g_2 satisface (3.21), sólo nos resta probar (3.26).

Como $x(\cdot)$ restringida al intervalo $[t_k, t_{k+1}]$ es solución del problema a valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B_{11}(t)x + B_{12}(t)z + g_1(t, x(t), x, z) \\ x(t_k) &= x \end{cases}$$

y $x_1 = x(t_k)$, empleando la fórmula de variación de parámetros obtenemos las igualdades

$$\begin{aligned}
x_1 &= \left(\Phi(t_{k+1}, t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, s) B_{11}(s) ds \right) x + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, s) B_{12}(s) z ds \\
&\quad + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, s) g_1(s, x(s), x, z) ds \\
&= H_{11}(k)x + H_{12}(k)z + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, s) g_1(s, x(s), x, z) ds
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Por lo tanto,

$$x_1 - H_{11}(k)x - H_{12}(k)z = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, s) g_1(s, x(s), x, z) ds. \tag{3.29}$$

Por (3.25) y la elección de \bar{r} , $\forall s \in [t_k, t_{k+1})$

$$|x(s)| + |x| + |z| \leq c(|x| + |z|) + |x| + |z| = (c+1)(|x| + |z|) < r_1.$$

Combinando esto último con (3.20), resulta para todo $s \in [t_k, t_{k+1})$,

$$\begin{aligned}
|g_1(s, x(s), x, z)| &< L_1(|x(s)| + |x| + |z|) \\
&\leq L_1(1+c)(|x| + |z|).
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Entonces de (3.29), (3.30) y la acotación de la norma de la matriz de transición Φ (ver [77]),

$$\|\Phi(t, s)\| \leq e^{L(t-s)} \quad \forall t \geq s \text{ y } \forall s \geq 0,$$

resulta

$$\begin{aligned}
|x_1 - H_{11}(k)x - H_{12}(k)z| &\leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\Phi(t_{k+1}, s)\| |g_1(s, x(s), x, z)| ds \\
&\leq (t_{k+1} - t_k) L_1(1+c) e^{L\|I\|} (|x| + |z|),
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. ▀

Ahora estamos en condiciones de probar el resultado sobre la robustez de la estabilidad exponencial de los sistemas híbridos lineales que hemos anunciado.

Teorema 3.1 Sea Σ_H el sistema dinámico híbrido determinado por (3.19) y supongamos que $\omega_0 = 0$ es un punto de equilibrio EE del sistema híbrido lineal Σ_{HL} determinado por (3.1).

Entonces existe una constante positiva η tal que se verifica lo siguiente. Si las perturbaciones g_1 y g_2 satisfacen, respectivamente, (C1) (resp. (C1) globalmente) y (C2) (resp. (C2) globalmente) y $\max(L_1, L_2) < \eta$, ω_0 es un punto de equilibrio EE (resp. GEE) de Σ_H .

Demostración: Consideremos primero el caso local. Como $\omega_0 = 0$ es un punto de equilibrio EE de Σ_{HL} , ω_0 es un punto de equilibrio EE respecto de la discretización de Σ_{HL} , Σ_{HLD} , por lo tanto las normas de las matrices $\{H(k), k \in \mathbf{Z}^+\}$ están uniformemente acotadas, es decir, existe $M_1 \geq 0$ tal que

$$\|H(k)\| \leq M_1 \quad \forall k \in \mathbf{Z}^+.$$

Por ser $\omega_0 = 0$ un punto de equilibrio EE de Σ_{HLD} , debido al Teorema A.9 del Apéndice A existe una función de Lyapunov $V : \mathbf{Z}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que, para ciertas $c_i > 0$, $i = 1, \dots, 4$,

1. $c_1 \|\omega\|^2 \leq V(k, \omega) \leq c_2 \|\omega\|^2 \quad \forall k \in \mathbf{Z}^+ \text{ y } \forall \omega \in \Omega;$
2. $V(k+1, H(k)\omega) - V(k, \omega) \leq -c_3(t_{k+1} - t_k) \|\omega\|^2 \quad \forall k \in \mathbf{Z}^+ \text{ y } \forall \omega \in \Omega;$
3. $|V(k, \omega) - V(k, \omega')| \leq c_4 \|\omega + \omega'\| \|\omega - \omega'\| \quad \forall k \in \mathbf{Z}^+ \text{ y } \forall \omega, \omega' \in \Omega.$

Sea ζ la función definida en el punto 2. del Lema 3.2 y consideremos $M_2 = \max\{\zeta(\tau, s) : 0 \leq \tau \leq 1, 0 \leq s \leq 1\}$ y $c_5 = c_4(2M_1 + \|\Pi\|M_2)$.

Sea $0 < \eta \leq 1$ tal que si $0 \leq L_1 < \eta$ y $0 < L_2 < \eta$ entonces $\zeta(L_1, L_2) < c_3/c_5$. La existencia de tal η está asegurada por la continuidad de ζ y porque $\zeta(0, 0) = 0$. Veremos ahora que con tal η se verifica la tesis del teorema.

Sean $0 \leq L_1 < \eta$, $0 \leq L_2 < \eta$ y, \bar{r} y \bar{G} como en el Lema 3.2. Sean $k \in \mathbf{Z}^+$, $\omega \in \Omega : \|\omega\| \leq \bar{r}$ y $\mathbf{w}(\cdot, t_k, \omega)$ la trayectoria de Σ_H que se inicia en el instante t_k en ω . Entonces por el Lema 3.2, $\mathbf{w}(t_{k+1}, t_k, \omega) = H(k)\omega + \bar{G}(k, \omega)$. Luego

$$\begin{aligned} V(k+1, \mathbf{w}(t_{k+1}, t_k, \omega)) - V(k, \omega) &= V(k+1, H(k)\omega + \bar{G}(k, \omega)) - V(k, \omega) \\ &\leq V(k+1, H(k)\omega + \bar{G}(k, \omega)) - V(k+1, H(k)\omega) \\ &\quad + V(k+1, H(k)\omega) - V(k, \omega) \\ &\leq V(k+1, H(k)\omega + \bar{G}(k, \omega)) - V(k+1, H(k)\omega) \\ &\quad - c_3(t_{k+1} - t_k) \|\omega\|^2. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta 2. del Lema 3.2 y la propiedad 3. de V ,

$$\begin{aligned} V(k+1, H(k)\omega + \bar{G}(k, \omega)) - V(k+1, H(k)\omega) &\leq c_4 \|2H(k)\omega + \bar{G}(k, \omega)\| \|\bar{G}(k, \omega)\| \\ &\leq \alpha(t_{k+1} - t_k) \|\omega\|^2 \end{aligned} \tag{3.32}$$

con $\alpha = c_4(2M_1 + \|\Pi\|\zeta(L_1, L_2))\zeta(L_1, L_2)$. De las definiciones de M_2 y c_5 , y de la elección de η , resulta $\alpha < c_3$. Entonces, considerando $\beta = c_3 - \alpha > 0$, de (3.31) y (3.32) y de la arbitrariedad de k y de ω vemos que

$$V(k+1, \mathbf{w}(t_{k+1}, t_k, \omega)) - V(k, \omega) \leq -\beta(t_{k+1} - t_k)\|\omega\|^2 \quad \forall k \in \mathbf{Z}^+ \quad \forall \|\omega\| \leq \bar{r}. \quad (3.33)$$

Entonces las hipótesis del Teorema 2.6 se ven satisfechas y el origen resulta un punto de equilibrio EE respecto de Σ_H .

Cuando (C1) y (C2) se cumplen globalmente, todos los pasos empleados en la demostración del caso local siguen siendo válidos sin necesidad de suponer $\|\omega\| \leq \bar{r}$. Por lo tanto (3.33) vale para todo $\omega \in \Omega$ y, aplicando el Teorema 2.8, resulta la estabilidad exponencial global. ■

Observación 3.2 Cuando la distancia entre dos instantes sucesivos cualesquiera de la s.i.m. Π está acotada inferiormente, es decir, $\inf_k(t_{k+1} - t_k) > 0$, en el Teorema 3.1 la condición (C2) puede reemplazarse por la condición (C2').

3.3.2 Linealización de sistemas híbridos

Consideremos el sistema híbrido determinado por la ecuación híbrida

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_1(t, x(t), x(t_k), z(t_k)) & t \in [t_k, t_{k+1}) \\ z(t_{k+1}) = f_2(k, x(t_k), z(t_k)) & k \in \mathbf{Z}^+ \end{cases} \quad (3.34)$$

con $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Z} = \mathbb{R}^m$ y f_1 que satisface (H1) y (H2). Supongamos además que el origen es un punto de equilibrio de la ecuación, es decir, que $f_1(t, 0, 0, 0) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$ y $f_2(k, 0, 0) = 0 \quad \forall k \in \mathbf{Z}^+$, que $f_1(t, \cdot, \cdot, \cdot)$ es diferenciable en $(0, 0, 0)$ para cada $t \in \mathbb{R}^+$ y, por último, que $f_2(k, \cdot, \cdot)$ es diferenciable en $(0, 0)$ para cada $k \in \mathbf{Z}^+$.

Entonces, si denominamos

$$A(t) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(t, 0, 0, 0), \quad B_{11}(t) = \frac{\partial f_1}{\partial \xi}(t, 0, 0, 0), \quad B_{12}(t) = \frac{\partial f_1}{\partial z}(t, 0, 0, 0), \quad (3.35)$$

$$B_{21}(k) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(k, 0, 0), \quad B_{22}(k) = \frac{\partial f_2}{\partial z}(k, 0, 0), \quad (3.36)$$

$$g_1(t, x, \xi, z) = f_1(t, x, \xi, z) - A(t)x - B_{11}(t)\xi - B_{12}(t)z \quad (3.37)$$

y

$$g_2(k, x, z) = f_2(k, x, z) - B_{21}(k)x - B_{22}(k)z, \quad (3.38)$$

la ecuación (3.34) puede escribirse en la forma (3.19), es decir, puede escribirse como una ecuación lineal perturbada, en la cual, además, las perturbaciones g_1 y g_2 satisfacen las condiciones

$$\lim_{|x|+|\xi|+|z|\rightarrow 0} \frac{|g_1(t, x, \xi, z)|}{|x| + |\xi| + |z|} = 0 \quad (3.39)$$

y

$$\lim_{|x|+|z|\rightarrow 0} \frac{|g_2(k, x, z)|}{(t_{k+1} - t_k)(|x| + |z|)} = 0. \quad (3.40)$$

La discusión previa motiva la siguiente definición.

Definición 3.1 La ecuación híbrida lineal

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_{11}(t)x(t_k) + B_{12}(t)z(t_k) & t \in [t_k, t_{k+1}) \\ z(t_{k+1}) = B_{21}(k)x(t_k) + B_{22}(k)z(t_k) & k \in \mathbf{Z}^+ \end{cases} \quad (3.41)$$

con $A(t)$, $B_{11}(t)$, $B_{12}(t)$, $B_{21}(k)$ y $B_{22}(k)$ definidas por (3.35) y (3.36), es la linealización de (3.34) alrededor del origen y Σ_{HL} , el sistema híbrido lineal determinado por (3.41), es el sistema linealizado o linealización de Σ_H .

Lo que nos proponemos ahora es determinar las propiedades de estabilidad del origen respecto del sistema Σ_H a partir de las propiedades de estabilidad del origen respecto del sistema linealizado, es decir, nuestro objetivo es establecer para los sistemas híbridos determinados por ecuaciones híbridas, un análogo al *Primer Método de Lyapunov* o *Método Indirecto de Lyapunov* para los sistemas dinámicos determinados por ecuaciones diferenciales o en diferencias.

Con este fin, consideremos el sistema lineal perturbado determinado por la ecuación lineal perturbada (3.19). Supongamos que la parte lineal de ésta satisface las condiciones (L1) y (L2), que la perturbación g_1 satisface (H1), (H2) y la condición

(C3)

$$\lim_{|x|+|\xi|+|z|\rightarrow 0} \frac{|g_1(t, x, \xi, z)|}{|x| + |\xi| + |z|} = 0 \quad \text{uniformemente respecto de } t \in \mathbb{R}^+; \quad (3.42)$$

y que la perturbación g_2 verifica

(C4)

$$\lim_{|x|+|z|\rightarrow 0} \frac{|g_2(k, x, z)|}{(t_{k+1} - t_k)(|x| + |z|)} = 0 \quad \text{uniformemente respecto de } k \in \mathbf{Z}^+. \quad (3.43)$$

Observamos que en el caso en que $\inf(t_{k+1} - t_k) > 0$, (C4) es equivalente a

(C4')

$$\lim_{|x|+|z|\rightarrow 0} \frac{|g_2(k, x, z)|}{|x| + |z|} = 0 \quad \text{uniformemente respecto de } k \in \mathbf{Z}^+. \quad (3.44)$$

Entonces vale el siguiente resultado.

Teorema 3.2 Sean Σ_H el sistema dinámico híbrido determinado por (3.19) y Σ_{HL} el sistema dinámico híbrido lineal determinado por (3.1). Supongamos que g_1 y g_2 satisfacen, respectivamente, (C3) y (C4).

Entonces el origen de coordenadas de Ω es un punto de equilibrio EE respecto de Σ_H si y sólo si es un punto de equilibrio EE respecto de Σ_{HL} .

Demostración: La parte *si* de la tesis del teorema se deduce inmediatamente del Teorema 3.1 ya que al verificarse las condiciones (C3) y (C4), se verifican, respectivamente, las condiciones (C1) y (C2) con constantes L_1 y L_2 arbitrariamente pequeñas.

Pasamos a demostrar la parte *sólo si*. Como valen (C1) y (C2), tenemos por el Lema 3.2 que para algún $\bar{r} > 0$, si $k \in \mathbf{Z}^+$ y $\|\omega\| \leq \bar{r}$, $\mathbf{w}(\cdot, t_k, \omega)$, la trayectoria de Σ_H que en el instante t_k se inicia en ω , verifica

$$\mathbf{w}(t_{k+1}, t_k, \omega) = H(k)\omega + \bar{G}(k, \omega). \quad (3.45)$$

Además, debido a que valen (C1) y (C2) con, respectivamente, constantes L_1 y L_2 arbitrarias y a que $\lim_{(L_1, L_2) \rightarrow (0,0)} \zeta(L_1, L_2) = 0$, $\bar{G}(k, \omega)$ verifica lo siguiente:

$$\lim_{\|\omega\| \rightarrow 0} \frac{\bar{G}(k, \omega)}{(t_{k+1} - t_k)\|\omega\|} = 0, \quad (3.46)$$

uniformemente respecto de $k \in \mathbf{Z}^+$. Entonces, la aplicación $F_k(\omega) := \mathbf{w}(t_{k+1}, t_k, \omega)$ resulta diferenciable en el origen y su diferencial $DF_k(0) = H(k)$.

Fijemos $k_0 \in \mathbf{Z}^+$, $k_1 \in \mathbf{Z}^+$ con $k_1 > k_0$ y $\omega \in \Omega$. Entonces, para $r > 0$ suficientemente pequeño,

$$\frac{\mathbf{w}(t_{k_1}, t_{k_0}, r\omega)}{r} = \frac{F_{k_1-1} \circ \dots \circ F_{k_0+1} \circ F_{k_0}(r\omega)}{r}.$$

Teniendo en cuenta la diferenciability en el origen de cada F_k , resulta

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{w}(t_{k_1}, t_{k_0}, r\omega)}{r} = H(k_1 - 1) \dots H(k_0 + 1)H(k_0)\omega. \quad (3.47)$$

Por otra parte, por ser el origen un equilibrio EE del sistema Σ_H , para ciertas constantes positivas μ , κ y η , $\|\mathbf{w}(t, t_k, \omega)\| \leq \mu e^{-\kappa(t-t_k)} \forall k \in \mathbf{Z}^+ \forall t \geq t_k$ y $\forall \|\omega\| < \eta$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \|H(k_1 - 1) \dots H(k_0 + 1)H(k_0)\omega\| &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \left\| \frac{\mathbf{w}(t_{k_1}, t_{k_0}, r\omega)}{r} \right\| \\ &\leq \mu e^{-\kappa(t_{k_1} - t_{k_0})} \|\omega\|. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\omega(t_{k_1}) = H(k_1 - 1) \dots H(t_{k_0})\omega$ es la trayectoria del sistema lineal discretizado Σ_{HLD} evaluada en el instante t_{k_1} , hemos demostrado que el origen es un punto de equilibrio EE de Σ_{HLD} y por lo tanto, por el Teorema 3.1 es un punto de equilibrio EE de Σ_{HL} , que es lo que queríamos probar. ■

Observación 3.3 Cuando la distancia entre dos instantes sucesivos cualesquiera de la s.i.m. Π está acotado inferiormente, es decir, $\inf_k(t_{k+1} - t_k) > 0$, el Teorema 3.1 sigue siendo válido si se considera la condición (C4) en lugar de la condición (C4').

Del Teorema 3.2 se deduce inmediatamente el siguiente resultado sobre la equivalencia entre la estabilidad exponencial del origen respecto del sistema híbrido y la estabilidad exponencial del origen respecto del sistema híbrido linealizado.

Teorema 3.3 Sea Σ_H el sistema híbrido determinado por la ecuación (3.34) y sea Σ_{HL} el sistema híbrido lineal determinado por la ecuación linealizada (3.41). Supongamos que las matrices $A(t)$, $B_{11}(t)$ y $B_{12}(t)$ están uniformemente acotadas y que los términos no lineales g_1 y g_2 , definidos respectivamente en (3.37) y (3.38), satisfacen, las condiciones (C3) y (C4), respectivamente.

Entonces el origen de coordenadas de Ω es un punto de equilibrio EE respecto de Σ_H si y sólo si es un punto de equilibrio EE respecto de Σ_{HL} .

Definición 3.2 Diremos que el sistema dinámico Σ_H determinado por la ecuación (3.34) es exponencialmente estable en primera aproximación, si satisface las condiciones del Teorema 3.3, es decir, si las matrices de derivadas parciales $A(t)$, $B_{11}(t)$ y $B_{12}(t)$ son acotadas, los términos no lineales g_1 y g_2 , definidos respectivamente en (3.37) y (3.38), satisfacen respectivamente las condiciones (C3) y (C4), y su linealización es exponencialmente estable.

Observación 3.4 Las hipótesis del Teorema 3.3 se ven satisfechas, por ejemplo, en los dos siguientes casos:

1. Para cada $t \in \mathbb{R}^+$ y cada $k \in \mathbf{Z}^+$ las funciones $f_1^t(x, \xi, z) = f_1(t, x, \xi, z)$ y $f_2^k(x, z) = f_2(k, x, z)(t_{k+1} - t_k)^{-1}$ son diferenciables con continuidad y, además, las correspondientes matrices jacobianas $Df_1^t(x, \xi, z)$ y $Df_2^k(x, z)$ satisfacen lo siguiente:

- a) para algún $r_1 > 0$, $Df_1^t(x, \xi, z)$ es acotada y Lipschitz en $\{(x, \xi, z) : |x| + |\xi| + |z| \leq r_1\}$, uniformemente respecto de $t \in \mathbb{R}^+$;
b) para algún $r_2 > 0$, $Df_2^k(x, z)$ es acotada y Lipschitz en $\{(x, z) : |x| + |z| \leq r_2\}$, uniformemente respecto de $k \in \mathbb{Z}^+$.

2. $\inf_k (t_{k+1} - t_k) > 0$ y f_1 y f_2 son, respectivamente, independientes de t y k .

Cuando Σ_H es tiempo invariante y f_1 y f_2 en (3.34) son, respectivamente, independientes de t y de k , a partir del Teorema 3.3, el punto 2. de la Observación 3.4 y el punto 1. del Corolario 3.1, resulta la siguiente caracterización de la estabilidad exponencial del origen.

Teorema 3.4 Supongamos que Σ_H , el sistema híbrido determinado por la ecuación (3.34), es tiempo invariante y que f_1 y f_2 son, respectivamente, independientes de t y de k .

Entonces el origen de coordenadas de Ω es un punto de equilibrio EE de Σ_H si y sólo si la matriz

$$H = \begin{bmatrix} e^A(I + \int_0^1 e^{-As} B_{11} ds) & e^A \int_0^1 e^{-As} B_{12} ds \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

con

$$A = \frac{\partial f_1}{\partial x}(0), \quad B_{11}(t) = \frac{\partial f_1}{\partial \xi}(0), \quad B_{12}(t) = \frac{\partial f_1}{\partial z}(0), \quad (3.49)$$

$$B_{21}(k) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(0), \quad B_{22}(k) = \frac{\partial f_2}{\partial z}(0), \quad (3.50)$$

es estable en el sentido de Schur.

Observación 3.5 El Teorema 3.3 extiende el Teorema 8 de nuestro trabajo [50], el cual trata con sistemas determinados por ecuaciones tiempo invariantes cuyo lado derecho es independiente del tiempo, es decir, f_1 independiente de t y f_2 independiente de k .

Observación 3.6 Los resultados que presentamos respecto de la linealización de sistemas híbridos, contienen, como casos particulares, resultados obtenidos por otros autores. La parte *si* del Teorema 3.3 contiene como caso particular algunos de los resultados recientemente obtenidos por A.N. Michel *et al.* en la serie de trabajos [81], [55] y [32]. En efecto, por un lado generaliza el Teorema 5.1 de [81] al considerar una clase más amplia de sistemas, por el otro, contiene como casos particulares las condiciones suficientes para la estabilidad asintótica uniforme del sistema híbrido dadas en el Corolario 2.1 de [55] y en el Teorema 2.1 de [33], ya que estas condiciones implican, casi en forma inmediata, la estabilidad exponencial de la discretización del sistema híbrido linealizado.

La parte *si* del Teorema 3.4 también generaliza el Teorema 1 de [66], el cual fue demostrado para sistemas determinados por ecuaciones de la forma (2.4).

3.3.3 Perturbaciones persistentes

Pasaremos ahora a considerar el caso en que las perturbaciones g_1 y g_2 que aparecen en la ecuación (3.19) no se anulan necesariamente en el origen. Entonces $\omega_0 = 0$ no es necesariamente un punto de equilibrio del sistema lineal perturbado Σ_H , y por lo tanto las propiedades cualitativas que introdujimos en el capítulo 2 ya no nos servirán para describir el comportamiento de las trayectorias de Σ_H . Los conceptos de acotación uniforme y acotación final uniforme que a continuación introduciremos, y que son análogos a los que se definen para sistemas dinámicos determinados por ecuaciones diferenciales ordinarias o en diferencias (ver por ej. [40], [55]), serán útiles para nuestros propósitos.

Definición 3.3 Las trayectorias del sistema dinámico híbrido Σ_H determinado por la ecuación (2.1) son uniformemente acotadas si existen $b > 0$ y $c > 0$ tales que

$$\|\mathbf{w}(t, t_k, \omega)\| \leq b \quad \forall t \geq t_k \quad \forall k \in \mathbf{Z}^+ \quad \text{y} \quad \forall \|\omega\| \leq c. \quad (3.51)$$

Diremos que las trayectorias de Σ_H son globalmente uniformemente acotadas si para cada $c > 0$ existe $b = b(c) \geq 0$ tal que vale (3.51).

Definición 3.4 Las trayectorias del sistema dinámico híbrido Σ_H determinado por la ecuación (2.1) son uniformemente finalmente acotadas si existen $b > 0$ y $c > 0$ tales que para cada $\alpha \in (0, c)$ existe $T(\alpha) \geq 0$ tal que

$$\|\mathbf{w}(t, t_k, \omega)\| \leq b \quad \forall t \geq t_k + T(\alpha) \quad \forall k \in \mathbf{Z}^+ \quad \text{y} \quad \forall \|\omega\| \leq c. \quad (3.52)$$

Diremos que las trayectorias son globalmente uniformemente finalmente acotadas si $c = \infty$, es decir, si vale (3.52) con α arbitrario.

Nuestro objetivo será demostrar que si el sistema nominal es exponencialmente estable y las perturbaciones son pequeñas en magnitud —lo cual querrá decir en el caso $\inf(t_{k+1} - t_k) > 0$, $|g_1| < \varepsilon$ y $|g_2| < \varepsilon$ con ε “pequeño”—, entonces las trayectorias de Σ_H son uniformemente acotadas y uniformemente finalmente acotadas. Como nuestra intención será la de extender este resultado a sistemas no lineales perturbados, vamos a suponer que las perturbaciones satisfacen condiciones un poco más generales que la acotación uniforme, a saber:

(C5) Existen $r_1 > 0$, $L_1 \geq 0$ y $\beta_1 \geq 0$ tales que,

$$|g_1(t, x, \xi, z)| \leq L_1(|x| + |\xi| + |z|) + \beta_1 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \text{y} \quad \forall (x, \xi, z) \in K_{r_1}. \quad (3.53)$$

(C6) Existen $r_2 > 0$, $L_2 \geq 0$ y $\beta_2 \geq 0$ tales que,

$$|g_2(k, x, z)| \leq (t_{k+1} - t_k)(L_2(|x| + |z|) + \beta_2) \quad \forall k \in \mathbf{Z}^+ \quad \text{y} \quad \forall (x, z) \in B_{r_2}. \quad (3.54)$$

Al igual que para perturbaciones evanescentes, diremos que g_1 satisface (C5) en $K_{\cdot,1}$ si estamos interesados en precisar la región en la cual vale (3.53), con la misma intención diremos que g_2 satisface (C6) en B_{r_2} . Si (3.53) vale para todo $(x, \xi, z) \in \mathbb{R}^n \times \Omega$ diremos que g_1 satisface globalmente la condición (C5) y, similarmente, si (3.54) vale para todo $(x, z) \in \Omega$ diremos que g_2 satisface globalmente (C6).

Comenzaremos considerando, por simplicidad, el caso global, es decir, el caso en que las perturbaciones que afectan al sistema lineal satisfacen globalmente (C5) y (C6). Los resultados locales serán deducidos luego a partir de los que obtengamos para el caso global.

Los siguientes lemas técnicos serán útiles para lo que nos proponemos demostrar.

Lema 3.3 Sea Σ_H el sistema híbrido determinado por la ecuación híbrida (3.19) y supongamos que g_1 satisface globalmente (C1) con constantes L_1 y β_1 .

Entonces, si $\mathbf{w}(\cdot, t_k, \omega)$ es la trayectoria de Σ_H que en el instante $t_k \in \Pi$ se inicia en $\omega \in \Omega$,

$$\|\mathbf{w}(t, t_k, \omega)\| \leq a_1 \|\omega\| + a_2 \quad \forall k \in \mathbf{Z}^+ \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \text{ y } \forall \omega \in \Omega \quad (3.55)$$

con $a_1 = L^* e^{L^* L_1 \|\Pi\|} (1 + \|\Pi\| (L + L_1))$, $a_2 = e^{L^* L_1 \|\Pi\|} L^* \|\Pi\| \beta_1$, L como en (L2) y $L^* = e^{L \|\Pi\|}$.

Demostración: Como la parte lineal de (3.19) satisface (L2) con constante L y g_1 satisface (C5) globalmente, para cada $(\xi, z) \in \Omega$ existe una constante d tal que $\|G_1(t, x, \xi, z) + g_1(t, x, \xi, z)\| \leq L|x| + d \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$. Entonces por la Proposición 2.1 las trayectorias de Σ_H están globalmente definidas.

Fijemos $k \in \mathbf{Z}^+$, $\omega = (x, z) \in \Omega$ y sea $\mathbf{w}(t, t_k, \omega) = (x(t), z(t))$. Entonces, para todo $t \in [t_k, t_{k+1})$, $z(t) = z$ y, con los mismos argumentos y la misma notación que empleamos en la demostración del Lema 3.2,

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(\Phi(t, t_k) + \int_{t_k}^t \Phi(t, s) B_{11}(s) ds \right) x + \int_{t_k}^t \Phi(t, s) B_{12}(s) z ds \\ &\quad + \int_{t_k}^t \Phi(t, s) g_1(s, x(s), x, z) ds. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Teniendo en cuenta (L2), (C5) y la acotación de la matriz de transición $\|\Phi(t, s)\| \leq e^{L(t-s)} \leq e^{L \|\Pi\|} = L^*$, resulta, para $t \in [t_k, t_{k+1})$, la desigualdad

$$|x(t)| \leq (L^* |x| + L^* \|\Pi\| (L + L_1) \|\omega\| + L^* \|\Pi\| \beta_1) + \int_{t_k}^t L^* L_1 |x(s)| ds,$$

y de ésta y el Lema de Gronwall-Bellman, la acotación

$$|x(t)| \leq (L^* |x| + L^* \|\Pi\| (L + L_1) \|\omega\| + L^* \|\Pi\| \beta_1) e^{L^* L_1 \|\Pi\|}. \quad (3.57)$$

Entonces, teniendo en cuenta (3.57), que $L^* \geq 1$ y la arbitrariedad de k y ω , resulta

$$\begin{aligned} \|\omega(t, t_k, \omega)\| &= |x(t)| + |z| \\ &\leq a_1 \|\omega\| + a_2 \end{aligned}$$

$\forall k \in \mathbf{Z}^+ \forall t \in [t_k, t_{k+1})$ y $\forall \omega \in \Omega$, que es lo que queríamos probar. ■

Lema 3.4 Sea Σ_H el sistema híbrido determinado por la ecuación híbrida (3.19) y supongamos que g_1 satisface globalmente (C1) con constantes L_1 y β_1 y que g_2 satisface globalmente (C2) con constantes L_2 y β_2 .

Entonces el sistema discretizado Σ_{HD} está determinado por una ecuación en diferencias de la forma

$$\omega(t_{k+1}) = H(k)\omega(t_k) + \tilde{G}(k, \omega(t_k)) \quad (3.58)$$

con $H(k)$ definida por las ecuaciones (3.5) a (3.9) y $\tilde{G} : \mathbf{Z}^+ \times \Omega \rightarrow \Omega$ que verifica

$$\|\tilde{G}(k, \omega)\| \leq (t_{k+1} - t_k)(a_3 \|\omega\| + a_4) \quad \forall k \in \mathbf{Z}^+ \text{ y } \forall \omega \in \Omega \quad (3.59)$$

con $a_3 = L^*L_1(a_1 + 1) + L_2$, $a_4 = L^*(L_1a_2 + \beta_2) + \beta_2$ y a_1, a_2 y L^* como en el Lema 3.3.

Demostración: Para $k \in \mathbf{Z}^+$ y $\omega = (x, z) \in \Omega$ fijos, sea $\mathbf{w}(t_{k+1}, t_k, \omega) = (x_1, z_1)$. Entonces $\tilde{G}(k, \omega) = (x_1, z_1) - H(k)\omega$. Siguiendo los pasos empleados en la primera parte de la demostración del Lema 3.2, tenemos que

$$x_1 - H_{11}(k)x - H_{12}(k)z = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, s)g_1(s, x(s), x, z)ds. \quad (3.60)$$

y que

$$z_1 - H_{11}(k)x - H_{12}(k)z = g_2(k, x, z).$$

Entonces, por (C6) es inmediato que

$$\begin{aligned} |z_1 - H_{11}(k)x - H_{12}(k)z| &\leq (t_{k+1} - t_k)(L_2(|x| + |z|) + \beta_2) \\ &\leq (t_{k+1} - t_k)(L_2\|\omega\| + \beta_2). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Por otra parte, de (3.60), la acotación $\|\Phi(t, s)\| \leq e^{L\|t-s\|} = L^*$, (C5) y (3.55) resulta que

$$\begin{aligned} |x_1 - H_{11}(k)x - H_{12}(k)z| &\leq (t_{k+1} - t_k)L^*(L_1(a_1 + 1)\|\omega\| + L_1a_2 + \beta_2) \\ &\leq (t_{k+1} - t_k)(\hat{a}_1\|\omega\| + \hat{a}_2), \end{aligned} \quad (3.62)$$

con

$$\hat{a}_1 := L^*L_1(a_1 + 1) \quad \text{y} \quad \hat{a}_2 := L^*(L_1a_2 + \beta_2).$$

Entonces, combinando (3.61) con (3.62) y teniendo en cuenta la arbitrariedad de k y ω , resulta (3.59), que es lo que queríamos demostrar. ■

Ahora estamos en condiciones de demostrar que si el sistema nominal es exponencialmente estable y las perturbaciones satisfacen cierta condición, las trayectorias del sistema perturbado son globalmente uniformemente acotadas y globalmente uniformemente finalmente acotadas, más precisamente.

Teorema 3.5 Sea Σ_H el sistema dinámico híbrido determinado por (3.19). Supongamos que el origen de coordenadas de Ω es un punto de equilibrio EE del sistema dinámico híbrido lineal Σ_{HL} determinado por (3.1).

Entonces existen dos constantes positivas η y μ y funciones continuas $b_i = b_i(\beta_1, \beta_2) \geq 0$, $i = 1, 2$, que verifican lo siguiente.

1. $b_1 \rightarrow 0$ y $b_2 \rightarrow 0$ cuando $(\beta_1, \beta_2) \rightarrow (0, 0)$.
2. Si g_1 satisface globalmente (C5), g_2 satisface globalmente (C6) y $\max(L_1, L_2) < \eta$, entonces:

- (a) Si $w(t, t_k, \omega)$ es la trayectoria de Σ_H que en el instante $t_k \in \Pi$ se inicia en $\omega \in \Omega$,

$$\|w(t, t_k, \omega)\| \leq \max(b_1, \mu\|\omega\| + b_2) \quad \forall t \geq t_k \quad \forall k \in \mathbf{Z}^+ \quad \text{y} \quad \forall \omega \in \Omega. \quad (3.63)$$

- (b) Para cada $\alpha > 0$ existe $T = T(\alpha) \geq 0$ tal que

$$\|w(t, t_k, \omega)\| \leq b_1 \quad \forall t \geq t_k + T \quad \forall k \in \mathbf{Z}^+ \quad \text{y} \quad \forall \|\omega\| \leq \alpha. \quad (3.64)$$

Antes de demostrar el Teorema 3.5 necesitamos el siguiente resultado para sistemas en tiempo discreto.

Proposición 3.2 Consideremos el sistema en tiempo discreto determinado por la ecuación en diferencias

$$\omega(t_{k+1}) = F(k, \omega(t_k)) \quad (3.65)$$

con $F : \mathbf{Z}^+ \times \Omega \rightarrow \Omega$ y supongamos la existencia de una función $\rho : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ no decreciente tal que $\|F(k, \omega)\| \leq \rho(\|\omega\|) \quad \forall \omega \in \Omega$.

Supongamos también que existen una función $V : \mathbf{Z}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ y una constante $R \geq 0$ tales que, para ciertas constantes positivas c_i , $i = 1, 2, 3$,

- (a) $c_1\|\omega\|^2 \leq V(k, \omega) \leq c_2\|\omega\|^2 \quad \forall k \in \mathbf{Z}^+ \quad \text{y} \quad \forall \omega \in \Omega$;

$$(b) \quad V(k+1, F(k, \omega)) - V(k, \omega) \leq -c_3(t_{k+1} - t_k)\|\omega\|^2 \quad \forall k \in \mathbf{Z}^+ \text{ y } \forall \|\omega\| \geq R.$$

Por último, sea $\bar{R} = \max(R, \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\rho(R))$.

Entonces vale lo siguiente

1. Si $\mathbf{w}(t_k, t_{k_0}, \omega)$ es la trayectoria de (3.65) que en el instante $t_{k_0} \in \Pi$ se inicia en $\omega \in \Omega$,

$$\|\mathbf{w}(t_k, t_{k_0}, \omega)\| \leq \max(\bar{R}, \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\|\omega\|) \quad \forall t_k \geq t_{k_0} \quad \forall k_0 \in \mathbf{Z}^+ \text{ y } \forall \omega \in \Omega. \quad (3.66)$$

2. Para cada $\alpha > 0$ existe $T = T(\alpha) \geq 0$ tal que

$$\|\mathbf{w}(t_k, t_{k_0}, \omega)\| \leq \bar{R} \quad \forall t_k \geq t_{k_0} + T \quad \forall k_0 \in \mathbf{Z}^+ \text{ y } \forall \|\omega\| \leq \alpha. \quad (3.67)$$

Demostración: Para $k_0 \in \mathbf{Z}^+$ y $\omega \in \Omega$, definamos

$$t(k_0, \omega) = \inf\{t_k \geq t_{k_0} : \|\mathbf{w}(t_k, t_{k_0}, \omega)\| \leq R\}.$$

Fijemos $\alpha > 0$, entonces

- 1) Existe $T(\alpha) > 0$ tal que

$$t_{k_0} \leq t(k_0, \omega) \leq t_{k_0} + T(\alpha) \quad \forall k_0 \in \mathbf{Z}^+ \text{ y } \forall \|\omega\| \leq \alpha.$$

En efecto, sea $T(\alpha) = \frac{c_2\alpha^2}{c_3R^2} + \|\Pi\|$. Para $k_0 \in \mathbf{Z}^+$ y $\omega \in \Omega$ con $\|\omega\| \leq \alpha$ fijos, sea t_{k^*} el primer instante de la sucesión Π tal que $t_{k^*} \geq t_{k_0} + \frac{c_2\alpha^2}{c_3R^2}$. Notamos que $t_{k^*} \leq t_{k_0} + T(\alpha)$. Supongamos $t(k_0, \omega) > t_{k_0} + T(\alpha)$, entonces, necesariamente $\|\mathbf{w}(t_k, t_{k_0}, \omega)\| > R$ para $t_{k_0} \leq t_k \leq t_{k^*}$. Sea $v(k) = V(k, \omega(t_k, t_{k_0}, \omega))$. Entonces, empleando (a), resulta

$$0 < c_1R^2 \leq c_1\|\mathbf{w}(t_{k^*}, t_{k_0}, \omega)\|^2 \leq v(k^*).$$

Por otra parte, empleando (a) y (b)

$$\begin{aligned} v(k^*) &= v(k_0) + \sum_{k=k_0+1}^{k^*} v(k) - v(k-1) \\ &\leq c_2\|\omega\|^2 - c_3(t_{k^*} - t_{k_0})R^2 \\ &\leq c_2\alpha^2 - c_3\frac{c_2\alpha^2}{c_3R^2}R^2 = 0, \end{aligned}$$

que es una contradicción. Por lo tanto $t(k_0, \omega) \leq t_{k_0} + T(\alpha)$.

- 2) $\|\mathbf{w}(t_k, t_{k_0}, \omega)\| \leq \max(R, \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\alpha) \quad \forall t_{k_0} \leq t_k \leq t(k_0, \omega) \text{ y } \forall \|\omega\| \leq \alpha.$

Si $t(k_0, \omega) = t_{k_0}$ no hay nada que probar. Supongamos $t_{k^*} = t(k_0, \omega) > t_{k_0}$, entonces $\|\mathbf{w}(t_k, t_{k_0}, \omega)\| > R$ para $t_{k_0} \leq t_k < t_{k^*}$. Por lo tanto, debido a (b), $v(k) \leq v(k_0)$ para $k_0 \leq k < k^*$ y entonces por (a), $\|\mathbf{w}(t_k, t_{k_0}, \omega)\|^2 \leq \frac{c_2}{c_1} \|\omega\|^2 \leq \frac{c_2}{c_1} \alpha^2$ para $k_0 \leq k < k^*$. La demostración del punto 2) finaliza teniendo en cuenta que por la definición de t_{k^*} , $\|\mathbf{w}(t_{k^*}, t_{k_0}, \omega)\| \leq R$.

Ahora, a partir de 2) vamos a demostrar:

3) Si $\|\omega\| \leq R$, $\|\mathbf{w}(t_k, t_{k_0}, \omega)\| \leq \max(R, \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \rho(R)) = \bar{R} \forall t_k \geq t_{k_0}$.

Sea $t_{k'} > t_{k_0}$ tal que $\|\mathbf{w}(t_{k'}, t_{k_0}, \omega)\| > R$. Entonces existe $t_{k_1} \leq t_{k'}$ tal que $\|\omega(t_{k_1-1}, t_{k_0}, \omega)\| \leq R$ y $\|\mathbf{w}(t_k, t_{k_0}, \omega)\| > R$ para $t_{k_1} \leq t_k \leq t_{k'}$. Sea $\omega_1 = \mathbf{w}(t_{k_1}, t_{k_0}, \omega)$, entonces $\omega_1 = F(k_1 - 1, \mathbf{w}(t_{k_1-1}, t_{k_0}, \omega))$ y por lo tanto $\|\omega_1\| \leq \|\rho(R)\|$. Entonces, aplicando 2) con $\alpha = \rho(R)$ y ω_1 y k_1 en lugar de ω y k_0 , y teniendo en cuenta que $\mathbf{w}(t_k, t_{k_0}, \omega) = \mathbf{w}(t_k, t_{k_1}, \omega_1)$ para $t_k \geq t_{k_1}$ y que $t(k_1, \omega_1) > t_{k'}$, resulta $\|\mathbf{w}(t_{k'}, t_{k_0}, \omega)\| = \|\mathbf{w}(t_{k'}, t_{k_1}, \omega_1)\| \leq \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \rho(R)$.

De 1), 2) y 3) se deducen inmediatamente los puntos 1. y 2. de la Proposición. ■

Demostración del Teorema 3.5

Por ser $\omega_0 = 0$ un punto de equilibrio EE de Σ_{HL} existen $M \geq 0$ tal que $\|H(k)\| \leq M \forall k \in \mathbf{Z}^+$ y una función escalar $V : \mathbf{Z}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ como la de la demostración del Teorema 3.1.

Elijamos $\eta > 0$ que verifique lo siguiente:

$$\max(L_1, L_2) \leq \eta \implies c_4 a_3 (2M + \|\Pi\| a_3) \leq \frac{c_3}{2}, \quad (3.68)$$

siendo $a_3 = a_3(L_1, L_2)$, la función definida en el Lema 3.4.

Como $a_3 \rightarrow 0$ cuando $(L_1, L_2) \rightarrow (0, 0)$, es segura la existencia de algún η en tal condición.

Consideremos, además de la función a_3 que ya mencionamos, las funciones $a_1 = a_1(L_1)$ y $a_2 = a_2(L_1, \beta_1)$ definidas en el Lema 3.3, la función $a_4 = a_4(L_1, \beta_1, \beta_2)$ definida en el Lema 3.4, las constantes

$$\bar{a}_1 = \max\{a_1(L_1) : 0 \leq L_1 \leq \eta\}, \quad (3.69)$$

$$\bar{a}_3 = \max\{a_3(L_1, L_2) : 0 \leq L_1 \leq \eta, 0 \leq L_2 \leq \eta\} \quad (3.70)$$

y las funciones

$$\bar{a}_2(\beta_1) = \max\{a_2(L_1, \beta_1) : 0 \leq L_1 \leq \eta\}, \quad (3.71)$$

$$\bar{a}_4(\beta_1, \beta_2) = \max\{a_4(L_1, \beta_1, \beta_2) : 0 \leq L_1 \leq \eta\}. \quad (3.72)$$

Supongamos que g_1 satisface globalmente (C5), que g_2 satisface globalmente (C6) y que $\max(L_1, L_2) < \eta$. Sea $F(k, \omega) = H(k)\omega + \bar{G}(k, \omega)$ con \bar{G} como en el Lema 3.4. Entonces, el sistema discretizado asociado a Σ_H está determinado por la ecuación (3.65). Veamos que el sistema discretizado satisface las hipótesis de la Proposición 3.2.

Consideremos

$$\rho(r) = (M + \|\Pi\|\bar{a}_3)r + \|\Pi\|\bar{a}_4, \quad (3.73)$$

claramente ρ es no decreciente y $\|F(k, \omega)\| \leq \rho(\|\omega\|) \forall k \in \mathbf{Z}^+$ y $\forall \omega \in \Omega$.

Veamos que el sistema discretizado verifica (a) y (b) de la Proposición 3.2 con la función escalar V mencionada al principio de la demostración. Como V verifica (a), bastará probar que se verifica (b) con cierto $R \geq 0$.

Con tal fin, consideremos $k \in \mathbf{Z}^+$, $\omega \in \Omega$ y $\delta_k = (t_{k+1} - t_k)$. Entonces, de las propiedades 2. y 3. de V resulta la desigualdad

$$V(k+1, F(k, \omega)) - V(k, \omega) \leq c_4 \|H(k)\omega + F(k, \omega)\| \|\bar{G}(k, \omega)\| - c_3 \delta_k \|\omega\|^2,$$

y, de esto, la acotación $\|H(k)\| \leq M$, (3.59), (3.68), (3.71) y (3.72), resulta

$$V(k+1, F(k, \omega)) - V(k, \omega) \leq -\delta_k \left(\frac{c_3}{2} \|\omega\|^2 - c_5 \|\omega\| - c_6 \right) \quad (3.74)$$

con $c_5 = 2c_4 \bar{a}_3 \bar{a}_4 \|\Pi\|$ y $c_6 = \bar{a}_4^2 \|\Pi\|$.

Entonces, si consideramos $R = 2(c_5 + \sqrt{c_5^2 + c_6})$, a partir de (3.74) se deduce fácilmente que

$$V(k+1, F(k, \omega)) - V(k, \omega) \leq -\delta_k \frac{c_3}{4} \|\omega\|^2 \quad \forall k \in \mathbf{Z}^+ \text{ y } \forall \|\omega\| \geq R,$$

con lo cual V verifica (b) y, en consecuencia, el sistema discretizado asociado a Σ_H verifica las hipótesis de la Proposición 3.2.

Entonces, por dicha proposición,

$$\|\mathbf{w}(t_k, t_{k_0}, \omega)\| \leq \max(\bar{R}, \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \|\omega\|) \quad \forall t_k \geq t_{k_0} \quad \forall k_0 \in \mathbf{Z}^+ \text{ y } \forall \omega \in \Omega,$$

con $\bar{R} = \max(R, \rho(R))$.

Entonces, combinando esto último con (3.55), (3.69) y (3.70) obtenemos

$$\|\mathbf{w}(t, t_{k_0}, \omega)\| \leq \max(b_1, \mu \|\omega\| + b_2) \quad \forall t \geq t_{k_0} \quad \forall k_0 \in \mathbf{Z}^+ \text{ y } \forall \omega \in \Omega, \quad (3.75)$$

con $b_1 = \bar{a}_1 \bar{R} + \bar{a}_2$, $\mu = \bar{a}_1 \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}$ y $b_2 = \bar{a}_2$.

Por otra parte, invocando nuevamente la Proposición 3.2, fijo $\alpha > 0$, existe $T = T(\alpha) > 0$ tal que

$$\|\mathbf{w}(t_k, t_{k_0}, \omega)\| \leq \bar{R} \quad \forall t_k \geq t_{k_0} + T \quad \forall k_0 \in \mathbf{Z}^+ \text{ y } \forall \|\omega\| \leq \alpha,$$

con lo cual, teniendo nuevamente en cuenta (3.55), (3.69) y (3.70), resulta

$$\|\mathbf{w}(t_k, t_{k_0}, \omega)\| \leq b_1 \quad \forall t \geq t_{k_0} + T \quad \forall k_0 \in \mathbf{Z}^+ \text{ y } \forall \|\omega\| \leq \alpha.$$

La demostración del teorema concluye notando que tanto la continuidad de b_1 y b_2 respecto de β_1 y β_2 como la validez del punto 1. de la tesis del teorema se deducen inmediatamente de las mismas definiciones de β_1 y β_2 . ■

En lo que sigue consideraremos el caso en que (C5) y (C6) se verifican localmente.

Teorema 3.6 Sea Σ_H el sistema dinámico híbrido determinado por (3.19). Supongamos que el origen de coordenadas de Ω es un punto de equilibrio EE del sistema dinámico híbrido lineal Σ_{HL} determinado por (3.1).

Entonces existen constantes positivas η y μ y funciones continuas $b_i = b_i(\beta_1, \beta_2) \geq 0$, $i = 1, 2$, que verifican lo siguiente.

1. $b_1 \rightarrow 0$ y $b_2 \rightarrow 0$ cuando $(\beta_1, \beta_2) \rightarrow (0, 0)$.
2. Para cada $r > 0$ existen $c = c(r) > 0$ y $\eta' = \eta'(r) > 0$ tales que, si g_1 satisface (C5) en K_r , g_2 satisface (C6) en B_r y, además, $\max(L_1, L_2) < \eta$ y $\max(\beta_1, \beta_2) < \eta'$, vale lo siguiente:

- (a) Si $\mathbf{w}(t, t_k, \omega)$ es la trayectoria de Σ_H que en el instante $t_k \in \Pi$ se inicia en $\omega \in \Omega$,

$$\|\mathbf{w}(t, t_k, \omega)\| \leq \max(b_1, \mu\|\omega\| + b_2) \quad \forall t \geq t_k \quad \forall k \in \mathbf{Z}^+ \text{ y } \forall \|\omega\| < c. \quad (3.76)$$

- (b) Para cada $\alpha \in (0, c)$ existe $T = T(\alpha) \geq 0$ tal que

$$\|\mathbf{w}(t, t_k, \omega)\| \leq b_1 \quad \forall t \geq t_k + T \quad \forall k \in \mathbf{Z}^+ \text{ y } \forall \|\omega\| \leq \alpha. \quad (3.77)$$

Demostración: Sean η , μ y b_i , $i = 1, 2$ como en la tesis Teorema 3.5.

Para $r > 0$ sean $\bar{r} = r/2$, $c = \frac{r}{4\mu}$ y elijamos $\eta' > 0$ con la siguiente propiedad:

$$\max(\beta_1, \beta_2) < \eta' \implies b_1 < \frac{1}{4}\bar{r} \text{ y } b_2 < \frac{1}{4}\bar{r}.$$

La existencia de tal η' está garantizada por el punto 1. del Teorema 3.5.

Ahora vamos a demostrar que con tales constantes y funciones se verifica la tesis del teorema.

Supongamos que g_1 satisface (C5) en K_r , que g_2 satisface (C6) en B_r , que $\max(L_1, L_2) < \eta$ y que $\max(\beta_1, \beta_2) < \eta'$.

Sean $\chi_1 : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $\chi_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase C^∞ , tales que:

a) $\chi_1(x, \xi, z) \equiv 1$ en K_r , $0 \leq \chi_1 \leq 1$ en $K_{\frac{3}{2}r} - K_r$ y $\chi_1(x, \xi, z) \equiv 0$ en $\mathbb{R}^n \times \Omega - K_{\frac{3}{2}r}$;

b) $\chi_2 \equiv 1$ en B_r , $0 \leq \chi_2 \leq 1$ en $B_{\frac{3}{2}r} - B_r$ y $\chi_2 \equiv 0$ en $\Omega - B_{\frac{3}{2}r}$,

y consideremos $\bar{g}_1 = \chi_1 g_1$ y $\bar{g}_2 = \chi_2 g_2$. Entonces \bar{g}_1 satisface globalmente (C5) con constantes L_1 y β_1 y \bar{g}_2 satisface globalmente (C6) con constantes L_2 y β_2 . Por lo tanto el sistema $\tilde{\Sigma}_H$ determinado por la ecuación (3.19) con \bar{g}_1 en lugar de g_1 y \bar{g}_2 en lugar de g_2 verifica el punto 2. de la tesis del Teorema 3.5, es decir, si denotamos $\tilde{w}(t, t_k, \omega)$ a la trayectoria de $\tilde{\Sigma}_H$ que en el instante $t_k \in \Pi$ se inicia en ω , tenemos

(i)

$$\|\tilde{w}(t, t_k, \omega)\| \leq \max(b_1, \mu\|\omega\| + b_2) \quad \forall t \geq t_k \quad \forall k \in \mathbf{Z}^+ \quad \text{y} \quad \forall \omega \in \Omega \quad (3.78)$$

y

(ii) para cada $\alpha > 0$ existe $T = T(\alpha) \geq 0$ tal que

$$\|\tilde{w}(t, t_k, \omega)\| \leq b_1 \quad \forall t \geq t_k + T \quad \forall k \in \mathbf{Z}^+ \quad \text{y} \quad \forall \|\omega\| \leq \alpha. \quad (3.79)$$

Si demostramos que las trayectorias de Σ_H que se inician en la bola B_c coinciden con las trayectorias de $\tilde{\Sigma}_H$ que se inician en la misma bola, tendremos demostrados (a) y (b) del punto 2. de la tesis del teorema y con ello el teorema, ya que en ese caso valdrían (i) con w en lugar de \tilde{w} y B_c en lugar de Ω y (ii) para $\alpha \in (0, c)$ y w en lugar de \tilde{w} .

Fijemos $k \in \mathbf{Z}^+$ y $\omega \in B_c$. Sea $\tilde{w}(t, t_k, \omega) = (x(t), z(t))$. Entonces de (i) y de las elecciones de c y η' , resulta la acotación

$$\|\tilde{w}(t, t_k, \omega)\| = |x(t)| + |z(t)| \leq \frac{\bar{r}}{2} \quad \forall t \geq t_k,$$

y de ésta, la acotación $|x(t_j)| + |x(t)| + |z(t)| < \bar{r} \quad \forall t_j \geq t_k \quad \text{y} \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1})$.

Entonces, de la definición de solución de ecuación híbrida y de las condiciones que satisfacen las funciones χ_i , $i = 1, 2$, tenemos para $t \in [t_j, t_{j+1})$ que

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= G_1(t, x(t), x(t_j), z(t_j)) + \tilde{g}_1(t, x(t), x(t_j), z(t_j)) \\ &= G_1(t, x(t), x(t_j), z(t_j)) + g_1(t, x(t), x(t_j), z(t_j)) \end{aligned}$$

y $\forall t_j \geq t_k$ que

$$\begin{aligned} z(t_{j+1}) &= G_2(j, x(t_j), z(t_j)) + \tilde{g}_2(j, x(t_j), z(t_j)) \\ &= G_2(j, x(t_j), z(t_j)) + g_2(j, x(t_j), z(t_j)), \end{aligned}$$

lo cual muestra que $(x(t), z(t))$ es solución de (3.19), que es lo que queríamos comprobar. ■

3.3.4 Robustez de la estabilidad exponencial en primera aproximación

Consideremos además de la ecuación híbrida (3.34), la ecuación híbrida perturbada

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_1(t, x(t), x(t_k), z(t_k)) + g_1(t, x(t), x(t_k), z(t_k)) & t \in [t_k, t_{k+1}) \\ z(t_{k+1}) = f_2(k, x(t_k), z(t_k)) + g_2(k, x(t_k), z(t_k)) & k \in \mathbf{Z}^+ \end{cases} \quad (3.80)$$

y supongamos, como hemos hecho habitualmente, que f_1 y g_1 satisfacen, ambas, las condiciones (H1) y (H2). Al igual que en el caso de una ecuación lineal perturbada, pensaremos al sistema híbrido Σ_H determinado por la ecuación (3.80) como una perturbación del sistema nominal Σ_{HN} determinado por la ecuación libre de perturbaciones (3.34).

Aplicando los resultados que obtuvimos sobre la robustez de la estabilidad exponencial de sistemas híbridos lineales, mostraremos en lo inmediato que la estabilidad exponencial en primera aproximación también es robusta. Más precisamente, demostraremos que la estabilidad exponencial en primera aproximación del sistema nominal Σ_{HN} , implica la estabilidad exponencial del sistema perturbado Σ_H cuando las perturbaciones son evanescentes y suficientemente pequeñas y la acotación final uniforme de las trayectorias de Σ_H cuando las perturbaciones son persistentes y suficientemente pequeñas. En efecto, se tienen los siguientes resultados.

Teorema 3.7 Sea Σ_H el sistema híbrido determinado por la ecuación (3.80). Supongamos que el sistema nominal Σ_{HN} determinado por la ecuación (3.34) es exponencialmente estable en primera aproximación.

Entonces existe una constante $\eta > 0$ que verifica lo siguiente. Si g_1 satisface (C1), g_2 satisface (C2) y $\max(L_1, L_2) < \eta$, entonces $\omega_0 = 0$ es un punto de equilibrio EE de Σ_H .

Demostración: Sea Σ_{HNL} la linealización del sistema nominal Σ_{HN} . Por hipótesis, Σ_{HNL} es exponencialmente estable, las matrices jacobianas $A(t)$, $B_{11}(t)$ y $B_{12}(t)$ definidas en (3.35) son uniformemente acotadas y

$$\bar{g}_1(t, x, \xi, z) = f_1(t, x, \xi, z) - A(t)x - B_{11}(t)\xi - B_{12}(t)z$$

satisface (C3) mientras que

$$\bar{g}_2(k, x, z) = f_2(k, x, z) - B_{21}(t)x - B_{22}(k)z$$

con $B_{21}(k)$ y $B_{22}(k)$ las matrices jacobianas definidas en (3.36), satisface (C4).

Como el sistema Σ_{HNL} satisface las condiciones del Teorema 3.1, existe $\eta > 0$ que verifica la tesis de dicho teorema, es decir, para tal η vale lo siguiente: si el sistema híbrido Σ es una perturbación de Σ_{HNL} y las perturbaciones satisfacen las condiciones (C1) y (C2), ambas con constantes menores que η , Σ es exponencialmente estable.

Veremos que con tal η se verifica la tesis del teorema. Supongamos que g_1 satisface (C1), que g_2 satisface (C2) y que $\max(L_1, L_2) = \eta^* < \eta$. La demostración concluye si probamos que Σ_H es exponencialmente estable. Con tal fin comenzamos notando que Σ_H puede pensarse como una perturbación de Σ_{HNL} . En efecto, la ecuación (3.80) puede escribirse en la forma (3.19) considerando en lugar de las perturbaciones g_1 y g_2 , las perturbaciones $\bar{g}_1 = \bar{g}_1 + g_1$ y $\bar{g}_2 = \bar{g}_2 + g_2$. Por otra parte, por satisfacer \bar{g}_1 y \bar{g}_2 respectivamente (C3) y (C4), resulta que \bar{g}_1 satisface (C1) con constante $L^* = (\eta - \eta^*)/2$ y que \bar{g}_2 satisface (C4) con la misma constante L^* . Pero entonces \bar{g}_1 verifica (C1) con constante $L_1^* = L_1 + L^* < \eta$ y \bar{g}_2 verifica (C2) con constante $L_2^* = L_2 + L^* < \eta$, por lo tanto, por la elección de η , Σ_H resulta exponencialmente estable. ■

Teorema 3.8 Sea Σ_H el sistema híbrido determinado por la ecuación (3.80). Supongamos que el sistema nominal Σ_{HN} determinado por la ecuación (3.34) es exponencialmente estable en primera aproximación.

Entonces existen constantes positivas η y μ y funciones continuas $b_i = b_i(\beta_1, \beta_2) \geq 0$, $i = 1, 2$, que verifican lo siguiente.

1. $b_1 \rightarrow 0$ y $b_2 \rightarrow 0$ cuando $(\beta_1, \beta_2) \rightarrow (0, 0)$.
2. Para cada $r > 0$ existen $c = c(r) > 0$ y $\eta' = \eta'(r)$ tales que, si g_1 satisface (C5) en K_r , g_2 satisface (C6) en B_r y, además, $\max(L_1, L_2) < \eta$ y $\max(\beta_1, \beta_2) < \eta'$, vale lo siguiente:

(a) Si $w(t, t_k, \omega)$ es la trayectoria de Σ_H que en el instante t_k se inicia en $\omega \in \Omega$,

$$\|w(t, t_k, \omega)\| \leq \max(b_1, \mu\|\omega\| + b_2) \quad \forall t \geq t_k \quad \forall k \in \mathbf{Z}^+ \quad \forall \|\omega\| < c. \quad (3.81)$$

(b) Para cada $\alpha \in (0, c)$ existe $T = T(\alpha) \geq 0$ tal que

$$\|w(t, t_k, \omega)\| \leq b_1 \quad \forall t \geq t_k + T \quad \forall k \in \mathbf{Z}^+ \quad \forall \|\omega\| \leq \alpha. \quad (3.82)$$

Demostración: Con los mismos argumentos que empleamos en la prueba del Teorema 3.7, tenemos que Σ_{HNL} , la linealización del sistema nominal Σ_{HN} , se encuentra en las condiciones del Teorema 3.6 y por lo tanto existen $\eta > 0$ y funciones continuas $b_i, i = 1, 2$ que verifican la tesis de dicho teorema. Tomemos $\eta^* = \eta/2$. Afirmamos que la tesis del teorema que queremos demostrar se verifica con tal η^* y con las funciones $b_i, i = 1, 2$, mencionadas. Como el punto 1. de la tesis se verifica automáticamente por la elección de las b_i , pasamos a demostrar el punto 2.

Sean \bar{g}_1 y \bar{g}_2 como en la demostración del Teorema 3.7. Entonces, por hipótesis, \bar{g}_1 satisface (C3) y \bar{g}_2 satisface (C4). En consecuencia es posible elegir $\bar{r} > 0$ tal que \bar{g}_1 satisface (C1) en $K_{\bar{r}}$ con constante η^* y \bar{g}_2 satisface (C2) en $B_{\bar{r}}$ también con constante η^* .

Fijemos $r > 0$ y sean $c(r)$ y $\eta'(r)$ como en la tesis del Teorema 3.6. Sea $r^* = \min(r, \bar{r})$ y consideremos $c^* = c^*(r) = c(r^*)$ y $\eta^{*'} = \eta^{*'}(r) = \eta'(r^*)$. Vamos a demostrar que el punto 2. de la tesis del teorema se cumple con c^* en lugar de c y $\eta^{*'}$ en lugar de η' . En efecto, supongamos que g_1 satisface (C5) en K_r , g_2 satisface (C6) en B_r , $\max(L_1, L_2) < \eta^*$ y $\max(\beta_1, \beta_2) < \eta^{*'}$. Entonces, como en la demostración del Teorema 3.7, Σ_H es una perturbación del sistema Σ_{HNL} con las perturbaciones $\tilde{g}_1 = \bar{g}_1 + g_1$ y $\tilde{g}_2 = \bar{g}_2 + g_2$. Además \tilde{g}_1 satisface (C1) en K_{r^*} con constantes L_1^* y β_1 siendo $L_1^* = L_1 + \eta^*$, \tilde{g}_2 satisface (C2) en B_{r^*} con constantes L_2^* y β_2 siendo $L_2^* = L_2 + \eta^*$, $\max(L_1^*, L_2^*) < 2\eta^* = \eta$ y por último $\max(\beta_1, \beta_2) < \eta^{*' = \eta'(r^*)}$. Entonces, valen (a) y (b) del punto 2. del Teorema 3.6, con c^* en lugar de c y con ello queda demostrado el punto 2. de la tesis, que es lo que queríamos probar. ■

Del teorema que recién demostramos se deduce inmediatamente que los sistemas exponencialmente estables en primera aproximación poseen la siguiente propiedad, análoga a la propiedad de estabilidad total o estabilidad respecto de perturbaciones persistentes de los sistemas dinámicos determinados por ecuaciones diferenciales o en diferencias, (ver, entre otros [26], [82], [41]).

Corolario 3.2 Sean Σ_H el sistema híbrido determinado por la ecuación (3.80) y Σ_{HN} el sistema híbrido determinado por la ecuación (3.34). Supongamos que Σ_{HN} es exponencialmente estable en primera aproximación.

Entonces vale lo siguiente. Para cada $\varepsilon > 0$ existen dos números positivos $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$ y $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon)$ tales que si g_1 y g_2 en (3.80) satisfacen

$$|g_1(t, x, \xi, z)| < \delta_2 \quad \forall (x, \xi, z) \in K_\varepsilon$$

y

$$\frac{|g_2(k, x, z)|}{t_{k+1} - t_k} < \delta_2 \quad \forall (x, z) \in B_\varepsilon,$$

entonces, $\mathbf{w}(\cdot, t_k, \omega)$, la trayectoria de Σ_H que en el instante t_k se inicia en ω , verifica la desigualdad

$$\|\mathbf{w}(t, t_k, \omega)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_k \quad \forall k \in \mathbf{Z}^+ \text{ y } \forall \|\omega\| < \delta_1.$$

3.4 Estabilización exponencial de sistemas no lineales de control mediante controladores digitales

En esta sección, basandonos en los resultados que obtuvimos en las secciones anteriores, obtendremos algunos resultados sobre la estabilización exponencial de sistemas no lineales de control en tiempo continuo mediante controladores digitales. Específicamente, estudiaremos en detalle el problema de la estabilización exponencial de una planta en tiempo continuo mediante un controlador digital, considerando que ambos, la planta y el controlador, son no lineales y tiempo invariantes, y que los conversores A/D y D/A a través de los cuales se conectan la planta con el controlador operan con uno o más períodos de muestreo. También analizaremos el efecto que producen en el comportamiento del sistema a lazo cerrado, la existencia de errores o perturbaciones en las entradas y salidas de la planta y del controlador, como así también la existencia de errores en los modelos de la planta y del controlador. Dentro de este análisis quedarán contempladas las cuantizaciones producidas por los conversores A/D y D/A tanto en la entrada como en la salida del controlador digital, ya que estas cuantizaciones pueden considerarse como perturbaciones (ver, entre otros, [16] y [57]).

Consideremos el sistema de control en tiempo continuo:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (3.83)$$

donde para cada $t \in \mathbb{R}^+$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es la variable de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^q$ es la variable de control, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ es la variable de salida. Supondremos de aquí en adelante que $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua y localmente Lipschitz en la variable de estado x , uniformemente en compactos de la variable de control u , y que $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ es continua.

También supondremos que $f(0, 0) = 0$, es decir que el par $x = 0, u = 0$, es un equilibrio del sistema de control, que $h(0) = 0$ y que ambas, f y h son diferenciables en $(0, 0)$ y en 0 , respectivamente.

Consideremos también el controlador digital

$$\mathcal{C} : \begin{cases} z_{k+1} = g(z_k, w_k) \\ v_k = \tau(z_k, w_k) \end{cases} \quad (3.84)$$

donde para cada $k \in \mathbf{Z}^+$, $z_k \in \mathbb{R}^m$, $w_k \in \mathbb{R}^s$ y $v_k \in \mathbb{R}^l$ son, respectivamente, las variables de estado, entrada y salida del controlador, $g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $\tau : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^l$.

Supondremos de aquí en más, que $g(0,0) = 0$, $r(0,0) = 0$ y que ambas, g y r , son diferenciables en el origen.

Respecto de la forma en que la planta \mathcal{P} se conecta con el controlador \mathcal{C} , consideraremos, como dijimos al principio, dos casos: a) los conversores A/D y D/A trabajan con el mismo período de muestreo, b) los conversores A/D y D/A trabajan con más de un período de muestreo.

Por conveniencia, ya que serán empleadas en el análisis de los casos mencionados, introducimos la linealización de la planta \mathcal{P} alrededor del par $(0,0)$,

$$\mathcal{P}_L : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}, \quad (3.85)$$

donde $A = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $B = \frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$ y $C = \frac{\partial h}{\partial x}(0)$, y la linealización del controlador \mathcal{C} alrededor del par $(0,0)$,

$$\mathcal{C}_L : \begin{cases} z_{k+1} = Dz_k + Ew_k \\ v_k = Fz_k + Gw_k \end{cases}, \quad (3.86)$$

donde $D = \frac{\partial g}{\partial z}(0,0)$, $E = \frac{\partial g}{\partial w}(0,0)$, $F = \frac{\partial r}{\partial z}(0,0)$ y $G = \frac{\partial r}{\partial w}(0,0)$.

También será conveniente introducir la siguiente notación: para $\tau > 0$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times q}$,

$$A_\tau = e^{A\tau} \quad \text{y} \quad B_\tau = \int_0^\tau e^{A(\tau-s)} B ds, \quad (3.87)$$

y recordar el criterio de "Kalman-Ho-Narendra" para la estabilizabilidad y detectabilidad de sistemas de control lineal a datos muestreados (ver [72]):

Estabilizabilidad: El par (A_τ, B_τ) ($\tau > 0$) es estabilizable si (A, B) es estabilizable y no existe un par de autovalores de A , λ, μ tales que $\lambda \neq \mu$ y para algún $k \in \mathbf{Z}$, $\tau(\lambda - \mu) = 2k\pi i$.

Detectabilidad: El par (A_τ, C) ($\tau > 0$) es detectable si (A, C) es detectable y no existe un par de autovalores de A , λ, μ tales que $\lambda \neq \mu$ y para algún $k \in \mathbf{Z}$, $\tau(\lambda - \mu) = 2k\pi i$.

3.4.1 Período de muestreo único

En primer término estudiaremos el caso en que la interconexión entre el sistema de control \mathcal{P} y el controlador digital \mathcal{C} se efectúa a través de conversores A/D y D/A que operan de la forma descrita en el apartado 2.3.1 del capítulo 2, según una única sucesión de instantes de muestreo regular $\Pi = \{t_k = k\delta_M : k \in \mathbf{Z}^+\}$, donde $\delta_M > 0$ es el período de

muestreo. Por lo tanto, en este caso, el espacio de salidas de la planta debe coincidir con el espacio de entradas del controlador, es decir $p = s$ y el espacio de entradas de la planta debe coincidir con el espacio de salidas del controlador, por lo tanto $l = q$.

De acuerdo con lo desarrollado en el apartado que recién mencionamos, el sistema a lazo cerrado que se obtiene al conectar \mathcal{P} con \mathcal{C} , y que denominaremos $(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \delta_M)$, es tiempo invariante y está determinado por la ecuación híbrida

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_1(x(t), x(t_k), z(t_k)) & t \in [t_k, t_{k+1}) \\ z(t_{k+1}) = f_2(x(t_k), z(t_k)) & k \in \mathbf{Z}^+ \end{cases} \quad (3.88)$$

con $\Omega = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $f_1 : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $f_1(x, \xi, z) = f(x, r(z, h(\xi)))$ y $f_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $f_2(x, z) = g(x, h(x))$. Además, el origen de Ω , $\omega_0 = 0$, es un punto de equilibrio de $(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \delta_M)$.

Definición 3.5 El controlador digital \mathcal{C} estabiliza exponencialmente la planta \mathcal{P} con período de muestreo δ_M si $\omega_0 = 0$ es un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema a lazo cerrado $(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \delta_M)$.

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(0) = A \quad \frac{\partial f_1}{\partial \xi}(0) = BGC \quad \frac{\partial f_1}{\partial z}(0) = BF$$

y que

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(0) = EC \quad \frac{\partial f_2}{\partial z}(0) = D,$$

como consecuencia inmediata del Teorema 3.4 tenemos que el controlador digital \mathcal{C} estabiliza exponencialmente la planta \mathcal{P} con período de muestreo δ_M si y sólo si la matriz

$$H = \begin{bmatrix} A_{\delta_M} + B_{\delta_M}GC & B_{\delta_M}F \\ EC & D \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

es estable en el sentido de Schur.

Por otra parte, si consideramos la interconexión de \mathcal{P}_L con \mathcal{C}_L , un simple cálculo muestra que el sistema lineal a lazo cerrado $(\mathcal{P}_L, \mathcal{C}_L, \delta_M)$ está determinado por la linealización de la ecuación (3.88), con lo cual $(\mathcal{P}_L, \mathcal{C}_L, \delta_M)$ resulta ser la linealización de $(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \delta_M)$ alrededor del origen. Por lo tanto, \mathcal{C} estabiliza exponencialmente la planta \mathcal{P} con período de muestreo δ_M si y sólo si \mathcal{C}_L estabiliza exponencialmente la planta \mathcal{P}_L con período de muestreo δ_M .

Consideremos ahora la δ_M -discretización de la planta linealizada \mathcal{P}_L ,

$$\mathcal{P}_L^{\delta_M} : \begin{cases} x_{k+1} = A_{\delta_M} x_k + B_{\delta_M} u_k \\ y_k = C x_k \end{cases} \quad (3.90)$$

que es el sistema de control en tiempo discreto que describe la evolución de los estados de \mathcal{P}_L en los instantes de muestreo $t_k = k\delta_M$, cuando la entrada de \mathcal{P} es constante entre instantes sucesivos de muestreo, es decir, si en el instante t_k el estado de la planta \mathcal{P}_L es $x(t_k) = x_k$ y en el intervalo $[t_k, t_{k+1})$ la entrada de la planta \mathcal{P}_L es constante e igual a u_k , el estado de la planta \mathcal{P}_L en el instante t_{k+1} es $x(t_{k+1}) = x_{k+1} = A_{\delta_M} x_k + B_{\delta_M} u_k$. (ver [72])

Entonces, si consideramos la interconexión de $\mathcal{P}_L^{\delta_M}$ con \mathcal{C} , obtenida al considerar $w_k = y_k$ y $u_k = v_k$, resulta que el sistema a lazo cerrado resultante tiene por matriz de transición a la matriz H . Por lo tanto la matriz H es de Schur si y sólo si \mathcal{C} estabiliza $\mathcal{P}_L^{\delta_M}$.

De lo discutido hasta aquí se desprende la validez del siguiente teorema.

Teorema 3.9 Sea $\delta_M > 0$ un período de muestreo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. El controlador digital \mathcal{C} estabiliza exponencialmente la planta \mathcal{P} con período de muestreo δ_M .
2. El controlador digital lineal \mathcal{C}_L estabiliza exponencialmente la planta lineal \mathcal{P}_L con período de muestreo δ_M .
3. La matriz H definida en (3.89) es estable en el sentido de Schur.
4. El controlador digital lineal \mathcal{C}_L estabiliza exponencialmente la planta lineal en tiempo discreto $\mathcal{P}_L^{\delta_M}$.

Observamos que a partir de la equivalencia 1. \Leftrightarrow 2. del teorema recién establecido, se deduce la siguiente condición necesaria para la existencia de un controlador digital \mathcal{C} que estabilice exponencialmente la planta \mathcal{P} con período de muestreo δ_M .

Teorema 3.10 Supongamos que la planta \mathcal{P} es estabilizada exponencialmente por el controlador digital \mathcal{C} con período de muestreo $\delta_M > 0$. Entonces la planta linealizada \mathcal{P}_L es estabilizable y detectable.

Demostración: En primer lugar demostraremos que el sistema lineal \mathcal{P}_L es estabilizable. Para ello emplearemos la siguiente caracterización de la propiedad de estabilizabilidad (ver [72]).

El sistema lineal \mathcal{P}_L es estabilizable si y sólo si para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe un control a lazo abierto $u : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^q$ tal que, si $x(\cdot)$ es la trayectoria del sistema \mathcal{P}_L correspondiente al control $u(\cdot)$ y a la condición inicial x_0 , $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y sea $(x(t), z(t))$ la trayectoria del sistema a lazo cerrado $(\mathcal{P}_L, \mathcal{C}_L, \delta_M)$ que verifica la condición inicial $(x(0), z(0)) = (x_0, 0)$. Entonces $x(t) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow +\infty$, pues, por el Teorema 3.9, el controlador digital \mathcal{C}_L estabiliza exponencialmente \mathcal{P}_L con período de muestreo δ_M . Como por otra parte $x(t)$ es la trayectoria de \mathcal{P}_L correspondiente al control a lazo abierto $u(\cdot)$ definido mediante la igualdad $u(t) = Fz(t_k) + GCx(t_k) \forall t \in [t_k, t_{k+1})$, y a la condición inicial x_0 , la cual es arbitraria, concluimos que el sistema \mathcal{P}_L es estabilizable.

Vamos a probar ahora la detectabilidad de \mathcal{P}_L . Sea S el subespacio no observable de \mathcal{P}_L . Entonces $AS \subseteq S$ y $S \subseteq \text{Ker}(C) = \{x \in \mathbb{R}^n : Cx = 0\}$. La detectabilidad de \mathcal{P}_L quedará establecida si demostramos que $A|_S$ es Hurwitz, o, equivalentemente, si probamos que para cada $x_0 \in S$, $e^{At}x_0 \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

Sea $x_0 \in S$. Entonces, una vez que se tiene en cuenta que $Ce^{At}x_0 = 0$ para todo $t \geq 0$, es fácil verificar que $(x(t), z(t)) = (e^{At}x_0, 0)$ es la trayectoria del sistema $(\mathcal{P}_L, \mathcal{C}_L, \delta_M)$ que en el instante $t = 0$ se inicia en $(x_0, 0)$. Por lo tanto $e^{At}x_0 \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$ y la detectabilidad de \mathcal{P}_L queda demostrada. ■

Basandonos en el criterio de Kalman-Ho-Narendra para la estabilizabilidad o detectabilidad de la δ -discretización de una planta lineal, y en la equivalencia 1. \Leftrightarrow 4. del Teorema 3.9, establecemos la siguientes condiciones suficientes para la existencia de un controlador C que establezca \mathcal{P} con período de muestreo δ_M .

Teorema 3.11 Sea $\delta_M > 0$. Supongamos que \mathcal{P}_L es estabilizable, detectable y que no existe un par de autovalores de A , μ y λ , tales que $\mu \neq \lambda$ y $\delta_M(\mu - \lambda) = 2k\pi i$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Entonces existe un controlador digital C que estabiliza exponencialmente \mathcal{P} con período de muestreo δ_M .

Demostración: Si \mathcal{P}_L satisface las hipótesis, por el criterio de Kalman-Ho-Narendra, $\mathcal{P}_L^{\delta_M}$ es estabilizable y detectable. Por lo tanto, existen matrices D , E , F y G , tales que el controlador digital lineal \mathcal{C}_L definido en (3.86), estabiliza exponencialmente $\mathcal{P}_L^{\delta_M}$. Pero entonces, por el Teorema 3.9, el mismo controlador estabiliza exponencialmente la planta \mathcal{P} con período de muestreo δ_M . ■

Los resultados que hemos presentado hasta aquí respecto de la estabilización de plantas en tiempo continuo mediante controladores digitales, sólo son válidos en el caso "ideal", es decir, en el caso en el que el modelo matemático de la planta \mathcal{P} es perfectamente conocido,

las señales de entrada y de salida, tanto de la planta como del controlador, están libres de perturbaciones, no existen errores de medición, los conversores A/D y D/A son ideales y por lo tanto las señales no son cuantizadas, no se cometen errores al efectuar los computos necesarios para calcular la salida del controlador, etc. Una forma de tener en cuenta en el análisis del comportamiento del sistema a lazo cerrado planta-controlador los items que hemos mencionado, y, por lo tanto, efectuar un análisis más realista, consiste en considerar que las entradas y salidas, tanto de \mathcal{P} como de \mathcal{C} , se encuentran afectadas por perturbaciones aditivas al igual que los modelos matemáticos que describen la planta y el controlador. Más precisamente, consideremos en lugar de \mathcal{P} , la planta perturbada,

$$\mathcal{P}' : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) + \eta_1(t) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases}, \quad (3.91)$$

en lugar del controlador digital \mathcal{C} , el controlador perturbado

$$\mathcal{C}' : \begin{cases} z_{k+1} = g(z_k, w_k) + \eta_{2k} \\ v_k = r(z_k, w_k) \end{cases} \quad (3.92)$$

con g y r continuas y supongamos que las entradas de \mathcal{P}' y de \mathcal{C}' están afectadas por perturbaciones, es decir, que la k -ésima entrada al controlador perturbado \mathcal{C}' es

$$w_k = y(t_k) + \eta_{3k}, \quad (3.93)$$

y que la entrada a la planta perturbada \mathcal{P}' durante el intervalo $[t_k, t_{k+1})$ es

$$u(t) = v_k + \eta_4(t). \quad (3.94)$$

No consideraremos explícitamente el error en el modelado de la función de salida h , ni los errores o perturbaciones que afectan la salida de la planta, ya que en el análisis del sistema a lazo cerrado, éstos pueden considerarse parte de la perturbación η_{3k} que afecta la entrada del controlador. Por razones similares a las recién expuestas, tampoco consideraremos explícitamente los errores en el modelado de r ni la existencia de errores o perturbaciones en la salida del controlador.

De aquí en más suponemos que las perturbaciones son desconocidas pero acotadas, con cotas que conocemos. En otras palabras, suponemos el conocimiento de números $e_i \geq 0$, $i = 1, \dots, 4$, tales que $|\eta_1(t)| \leq e_1 \forall t \geq 0$, $|\eta_{2k}| \leq e_2 \forall k \in \mathbf{Z}^+$, $|\eta_{3k}| \leq e_3 \forall k \in \mathbf{Z}^+$ y $|\eta_4(t)| \leq e_4 \forall t \geq 0$. También suponemos, por razones técnicas, que $\eta_1(\cdot)$ y $\eta_4(\cdot)$ son funciones medibles en el sentido de Lebesgue.

En lo inmediato, basados en los resultados obtenidos sobre la robustez de la estabilidad exponencial en primera aproximación, demostraremos que si el controlador \mathcal{C} estabiliza exponencialmente la planta \mathcal{P} con período de muestreo δ_M , y la magnitud de las perturbaciones no supera una determinada cota, las trayectorias del sistema a lazo cerrado $(\mathcal{P}', \mathcal{C}', \delta_M)$ son uniformemente finalmente acotadas y, además, el error final tiende a cero si las cotas de las perturbaciones tienden a cero.

Teorema 3.12 Supongamos que el controlador digital \mathcal{C} estabiliza exponencialmente la planta \mathcal{P} con período de muestreo δ_M .

Entonces existen constantes positivas e^* , μ^* y c^* , y dos funciones continuas de clase \mathcal{K} , $\rho_i : [0, \eta^*) \rightarrow \mathbb{R}^+$, $i = 1, 2$, tales que vale lo siguiente. Si $\max_{i=1, \dots, 4} e_i = e < e^*$ entonces

1. Si $\mathbf{w}(t, t_{k_0}, \omega)$ es la trayectoria del sistema a lazo cerrado $(\mathcal{P}', \mathcal{C}', \delta_M)$ que se inicia en $\omega \in \Omega$ en el instante $t_{k_0} = k_0 \delta_M$,

$$\|\mathbf{w}(t, t_{k_0}, \omega)\| \leq \max(\rho_1(e), \mu\|\omega\| + \rho_2(e)) \quad \forall t \geq t_{k_0} \quad \forall k \in \mathbf{Z}^+ \quad \text{y} \quad \forall \|\omega\| < c^*. \quad (3.95)$$

2. Para cada $\alpha \in (0, c^*)$ existe $T = T(\alpha)$ tal que

$$\|\mathbf{w}(t, t_{k_0}, \omega)\| \leq \rho_1(e) \quad \forall t \geq t_{k_0} + T \quad \forall k_0 \in \mathbf{Z}^+ \quad \text{y} \quad \forall \|\omega\| \leq \alpha. \quad (3.96)$$

Demostración: En primer lugar probaremos el teorema suponiendo que las funciones f , g y r son uniformemente continuas en sus dominios de definición.

Sea $\mathbf{w}(t, t_{k_0}, \omega) = \omega(t) = (x(t), z(t))$ la trayectoria del sistema a lazo cerrado $(\mathcal{P}', \mathcal{C}', \delta_M)$ que se inicia en $\omega = (x, z) \in \Omega$ en el instante t_{k_0} . Entonces, teniendo en cuenta las ecuaciones (3.91)-(3.94), $(x(t), z(t))$ satisface la ecuación híbrida

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), r(z(t_k), h(x(t_k)) + \eta_{3k}) + \eta_4(t)) + \eta_1(t) & t \in [t_k, t_{k+1}) \\ z(t_{k+1}) = g(z(t_k), r(z(t_k), h(x(t_k)) + \eta_{3k})) + \eta_{2k} & k \in \mathbf{Z}^+ \end{cases}$$

la cual puede escribirse en la forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_1(x(t), x(t_k), z(t_k)) + \eta(t) & t \in [t_k, t_{k+1}) \\ z(t_{k+1}) = f_2(x(t_k), z(t_k)) + \nu(k) & k \in \mathbf{Z}^+ \end{cases}, \quad (3.97)$$

con $f_1(x, \xi, z) = f(x, r(z, h(\xi))), f_2(x, z) = g(z, h(x))$,

$$\begin{aligned} \eta(t) &= f(x(t), r(z(t_k), h(x(t_k)) + \eta_{3k}) + \eta_4(t)) + \eta_1(t) \\ &\quad - f(x(t), r(z(t_k), h(x(t_k)))) \quad t \in [t_k, t_{k+1}) \end{aligned} \quad (3.98)$$

y

$$\nu(k) = g(z(t_k), r(z(t_k), h(x(t_k)) + \eta_{3k})) + \eta_{2k} - g(z(t_k), r(z(t_k), h(x(t_k)))). \quad (3.99)$$

De la continuidad uniforme de f , g y r en sus respectivos dominios de definición, se deduce fácilmente la existencia de una función $\bar{\rho}$ de clase \mathcal{K} que verifica lo siguiente: si $\omega(\cdot)$ está definida en el intervalo $[t_{k_0}, t')$, entonces

$$|\eta(t)| \leq \bar{\rho}(e) \quad \forall t \in [t_{k_0}, t') \quad \text{y} \quad |\nu(k)| \leq \bar{\rho}(e) \quad \forall t_{k_0} \leq t_k < t'.$$

Como por hipótesis \mathcal{C} estabiliza exponencialmente a \mathcal{P} con período de muestreo δ_M , el sistema a lazo cerrado $(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \delta_M)$, cuya ecuación es (3.88), es exponencialmente estable y, *a fortiori*, es exponencialmente estable en primera aproximación; por lo tanto, $(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \delta_M)$ verifica las hipótesis del Teorema 3.8. Sean η , μ , b_1 , b_2 , c , η' y T como en la tesis de dicho teorema.

Consideremos $r^* > 0$ arbitrario. Elijamos $e^* > 0$ tal que $\rho(e^*) \leq \eta'(r^*)$ y definamos para $r \in [0, e^*]$,

$$\rho_1(r) = \max\{b_1(r_1, r_2) : 0 \leq r_1 \leq \bar{\rho}(r), 0 \leq r_2 \leq \bar{\rho}(r)\}$$

y

$$\rho_2(r) = \max\{b_2(r_1, r_2) : 0 \leq r_1 \leq \bar{\rho}(r), 0 \leq r_2 \leq \bar{\rho}(r)\}.$$

Es claro que tanto ρ_1 como ρ_2 son continuas, no decrecientes y nulas en el origen. Supongamos, sin perder generalidad, que además son estrictamente crecientes, y por lo tanto de clase \mathcal{K} . (Caso contrario se reemplazan por funciones de clase \mathcal{K} que las acoten superiormente). Por último, sea $c^* = c(r^*)$.

Afirmamos que con tales c^* , e^* , μ , T , ρ_1 y ρ_2 se verifican los items 1. y 2. de la tesis del teorema que queremos demostrar.

En efecto, si $\max_{i=1, \dots, 4}(e_i) = e < e^*$, $\omega(t)$ satisface la ecuación perturbada (3.97) con $|\eta(t)| \leq \bar{\rho}(e) < \bar{\rho}(e^*) \leq \eta'(r^*)$ y $|\nu_k| \leq \bar{\rho}(e) < \bar{\rho}(e^*) \leq \eta'(r^*)$, entonces por el punto 2.(a) de la tesis del Teorema 3.8, si $\|\omega\| < c^*$, $\omega(\cdot)$ está definida en $[t_{k_0}, +\infty)$ y

$$\begin{aligned} \|\omega(t)\| &\leq \max(b_1(\bar{\rho}(e), \bar{\rho}(e)), \mu\|\omega\| + b_2(\bar{\rho}(e), \bar{\rho}(e))) \\ &\leq \max(\rho_1(e), \mu\|\omega\| + \rho_2(e)) \quad \forall t \geq t_{k_0}. \end{aligned}$$

Además, si $\|\omega\| < \alpha < c^*$, por el punto 2. (b) del teorema citado, resulta

$$\|\omega(t)\| \leq \rho_1(e) \quad \forall t \geq t_{k_0} + T(\alpha).$$

Ahora deduciremos el caso general. Para $\bar{r} > 0$ arbitrario, consideremos funciones $\bar{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\bar{g} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $\bar{r} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, uniformemente continuas y tales que:

$$\text{a) } f(x, u) = \bar{f}(x, u) \quad \forall |x| \leq \bar{r} \text{ y } \forall |u| \leq \bar{r},$$

$$\text{b) } g(z, w) = \bar{g}(z, w) \text{ y } r(z, w) = \bar{r}(z, w) \quad \forall |z| \leq \bar{r} \text{ y } \forall |w| \leq \bar{r}.$$

Por ejemplo, puede considerarse, $\bar{f} = \chi f$, con χ de clase C^∞ tal que $\chi \equiv 1$ en $B_{\bar{r}} \times B_{\bar{r}}$ y $\chi \equiv 0$ fuera de $B_{2\bar{r}} \times B_{2\bar{r}}$, y, en forma similar, \bar{g} y \bar{r} .

Consideremos la planta $\bar{\mathcal{P}}$ y la planta perturbada $\bar{\mathcal{P}}'$ que se obtienen reemplazando f por \bar{f} en las ecuaciones de \mathcal{P} y \mathcal{P}' , y el controlador $\bar{\mathcal{C}}$ y el controlador perturbado $\bar{\mathcal{C}}'$ que se obtienen reemplazando g y r por, respectivamente, \bar{g} y \bar{r} en las ecuaciones de \mathcal{C} y \mathcal{C}' . Denominemos $\bar{w}(t, t_{k_0}, \omega)$ a la trayectoria del sistema a lazo cerrado $(\bar{\mathcal{P}}', \bar{\mathcal{C}}', \delta_M)$ que en el instante t_{k_0} se inicia en ω . Entonces, como $\bar{\mathcal{C}}$ estabiliza exponencialmente $\bar{\mathcal{P}}$ con período de muestreo δ_M , existen e^* , μ^* , c^* , T , ρ_1 y ρ_2 para los cuales los puntos 1. y 2. de la tesis del teorema se verifican con $\bar{w}(t, t_{k_0}, \omega)$ en lugar de $w(t, t_{k_0}, \omega)$.

Sean $0 < c^{**} \leq c^*$, $0 < e^{**} < e^*$ y $0 < r_0 < \bar{r}$ tales que:

- i) $\rho_1(e^{**}) < r_0$;
- ii) $c^{**} + \rho_2(e^{**}) < r_0$;
- iii) $\max\{|\bar{h}(x)| : |x| \leq r_0\} + e^{**} = r_1 < \bar{r}$; 5
- iv) $\max\{|\bar{r}(z, w)| : |z| \leq r_1, |w| \leq r_1\} + e^{**} < \bar{r}$.

Ahora vamos a demostrar la tesis del teorema con \mathcal{P} y \mathcal{C} . Consideremos los mismos μ^* , T , ρ_1 y ρ_2 que para $\bar{\mathcal{P}}$ y $\bar{\mathcal{C}}$, y c^{**} en lugar de c^* y e^{**} en lugar de e^* .

Es claro que los puntos 1. y 2. de la tesis del teorema se verán satisfechos si mostramos que $w(\cdot, t_{k_0}, \omega)$ coincide con $\bar{w}(\cdot, t_{k_0}, \omega)$ si las cotas para las perturbaciones satisfacen $\bar{e} < e^{**}$ y $\|\omega\| < c^{**}$.

Supongamos entonces $\bar{e} < e^{**}$, $\|\omega\| < c^{**}$ y denotemos $\bar{w}(t, t_{k_0}, \omega) = \bar{w}(t) = (\bar{x}(t), \bar{z}(t))$. Entonces,

$$|\bar{x}(t)| + |\bar{z}(t)| = \|\bar{w}(t)\| \leq \max(\rho_1(\bar{e}), \mu^*\|\omega\| + \rho_2(\bar{e})) \leq r_0 < \bar{r},$$

pues $\bar{e} < e^{**} < e^*$, $\|\omega\| < c^{**} < c^*$ y valen i) y ii). En consecuencia, para todo $t \geq t_{k_0}$, $|\bar{x}(t)| \leq r_0 < \bar{r}$ y $|\bar{z}(t)| \leq r_0 < \bar{r}$. De la acotación obtenida para $|\bar{x}(t)|$ y iii), resulta $|w_k| = |h(\bar{x}(t)) + \eta_{3k}| \leq r_1 \leq \bar{r}$; entonces de ésta última acotación, la acotación obtenida para $|z(t)|$ y iv), resulta que en el intervalo $[t_k, t_{k+1})$, $|u(t)| = |\bar{r}(\bar{x}(t), w_k) + \eta_4(t)| < \bar{r}$ y, por lo tanto, en el mismo intervalo, $u(t) = r(\bar{x}(t), w_k) + \eta_4(t)$. Luego, en $[t_k, t_{k+1})$, $\bar{x}(\cdot)$ satisface la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{f}(\bar{x}(t), u(t)) + \eta_1(t) \\ &= f(\bar{x}(t), u(t)) + \eta_1(t) \\ &= f(\bar{x}(t), r(\bar{x}(t), h(\bar{x}(t)) + \eta_{3k}) + \eta_4(t)) + \eta_1(t) \end{aligned}$$

y, para $k \geq k_0$, $\bar{z}(\cdot)$ satisface la ecuación en diferencias

$$\begin{aligned} \bar{z}(t_{k+1}) &= \bar{g}(\bar{z}(t_k), w_k) + \eta_{2k} \\ &= g(\bar{z}(t_k), w_k) + \eta_{2k} \\ &= g(\bar{z}(t_k), h(\bar{x}(t)) + \eta_{3k}) + \eta_{2k}, \end{aligned}$$

con lo cual $\bar{w}(\cdot, t_{k_0}, \omega)$ es la trayectoria del sistema a lazo cerrado $(\mathcal{P}', \mathcal{C}', \delta_M)$ que en el instante t_{k_0} se inicia en ω , que es lo que queríamos probar. ■

Observación 3.7 Los resultados sobre el problema de estabilización exponencial mediante controladores digitales que presentamos en los Teoremas 3.9, 3.10 y 3.11, fueron demostrados en nuestro trabajo [50], suponiendo que las funciones que intervienen en la descripción del controlador son continuas.

Un ejemplo

Para ilustrar los resultados obtenidos, consideraremos como ejemplo la interconexión de dos redes neuronales de Hopfield, la primera en tiempo continuo y la segunda en tiempo discreto.

Consideremos el sistema de control no lineal afín descrito por las ecuaciones

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + \tanh(a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + \tanh(a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + u(t)) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (3.100)$$

Estas ecuaciones describen la evolución de una red neuronal continua compuesta de dos neuronas, cuyos estados son x_1 y x_2 y cuyos pesos sinápticos son a_{ij} , $i, j = 1, 2$ ([28]).

Consideremos también el sistema en tiempo discreto descrito por las ecuaciones

$$\mathcal{C} : \begin{cases} z_{1k+1} = \tanh(b_{11}z_{1k} + b_{12}z_{2k} + d_1w_k) \\ z_{2k+1} = \tanh(b_{21}z_{1k} + b_{22}z_{2k} + d_2w_k) \\ v_k = d_3z_{1k} \end{cases} \quad (3.101)$$

las cuales describen la evolución de una red neuronal discreta de dos neuronas cuyos estados son z_1 y z_2 , y cuyos pesos sinápticos son b_{ij} , $i, j = 1, 2$ ([28]).

Por último, suponemos que u y w pueden ser manipuladas con el objeto de alterar la topología de la red.

Estos modelos son simplificaciones de redes continuas (discretas) más complejas donde un cierto grupo de neuronas ocultas, representadas aquí mediante x_2 (z_2), modifican los puntos de equilibrio de la red completa, forzando el recuerdo de memorias diferentes de las usuales (ver [12]).

El sistema resultante de la interconexión de \mathcal{P} con \mathcal{C} via $u(t) = v_k$, $k\delta_M = t_k \leq t < (k+1)\delta_M = t_{k+1}$, y $v_k = y(t_k)$, modela la inhibición de ciertos recuerdos de la “mente conciente” (\mathcal{P}) mediante el “controlador de pensamientos” (\mathcal{C}), el cual altera los puntos de equilibrio de \mathcal{P} de acuerdo a la actividad “consciente” (representada por $y(t)$) y a sus propios parámetros.

Para este modelo simplificado suponemos que los pesos sinápticos de la red \mathcal{P} son conocidos, pues ellos son determinados por las memorias que la red es capaz de recordar

([28], [27]) y que tenemos dados los pesos sinápticos y el coeficiente d_3 del controlador C . Entonces el problema que planteamos consiste en encontrar, si ello es posible, valores de los pesos d_1 y d_2 para que C estabilice exponencialmente a \mathcal{P} con período de muestreo δ_M .

Supongamos los pesos sinápticos de las redes son: $a_{11} = -10.8$, $a_{12} = a_{21} = 5.33$, $a_{22} = -1.83$ y $b_{11} = 0.125$, $b_{12} = b_{21} = -0.3$, $b_{22} = 0.0625$, y el coeficiente correspondiente a la salida de C , $d_3 = 0.8$.

Con estos valores tenemos que la linealización de la planta \mathcal{P} alrededor del origen es

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -11.8x_1(t) + 5.33x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 5.33x_1(t) - 2.83x_2(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (3.102)$$

que es controlable y observable, y por lo tanto estabilizable y detectable. Además, los autovalores de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -11.8 & 5.35 \\ 5.35 & -2.83 \end{bmatrix}$$

son $\lambda_1 = -14.281$ y $\lambda_2 = 0.35$. Entonces, de acuerdo con el Teorema 3.11, para cualquier período de muestreo δ_M existe un controlador digital que estabiliza exponencialmente a \mathcal{P} .

Por supuesto, este resultado no garantiza para el problema que hemos planteado la existencia para un período de muestreo arbitrario δ_M , de un controlador que, con la arquitectura impuesta a C , estabilice exponencialmente a \mathcal{P} .

Tomemos $\delta_M = 1$. Para tal período de muestreo H en (3.89) resulta

$$H = \begin{bmatrix} 0.125 & 0.2698 & 0.2369 & 0 \\ 0.2698 & 0.5797 & 0.5650 & 0 \\ d_1 & 0 & 0.125 & -0.3 \\ d_2 & 0 & -0.3 & 0.0625 \end{bmatrix}.$$

Entonces, nuestro problema quedará resuelto, de acuerdo con el Teorema 3.9, si encontramos valores de las constantes d_1 y d_2 tales que H resulte estable en el sentido de Schur; por ejemplo con $d_1 = 0.5$ y $d_2 = -0.4$ los autovalores de H resultan 0.9338, 0.0582, 0.1134 y -0.2132 .

En las siguientes figuras se muestran dos simulaciones del comportamiento del sistema interconectado, considerando las condiciones iniciales $x_1(0) = -3$, $x_2(0) = 1.5$, $z_1(0) = 2$ y $z_2(0) = -4$ y los pesos para el controlador: $d_1 = 0.5$ y $d_2 = -0.4$.

En la primera de ellas no se consideraron ni perturbaciones en los modelos de la planta y del controlador, ni errores en los actuadores y en las mediciones de la salida $y(t)$.

La figura 3.1 muestra la evolución de las variables de estado x_1 y x_2 de la red neural en tiempo continuo, mientras que en la figura 3.2 muestra el comportamiento de las variables de estado z_1 y z_2 del controlador. Como puede apreciarse, las figuras muestran la estabilidad del sistema a lazo cerrado predicha.

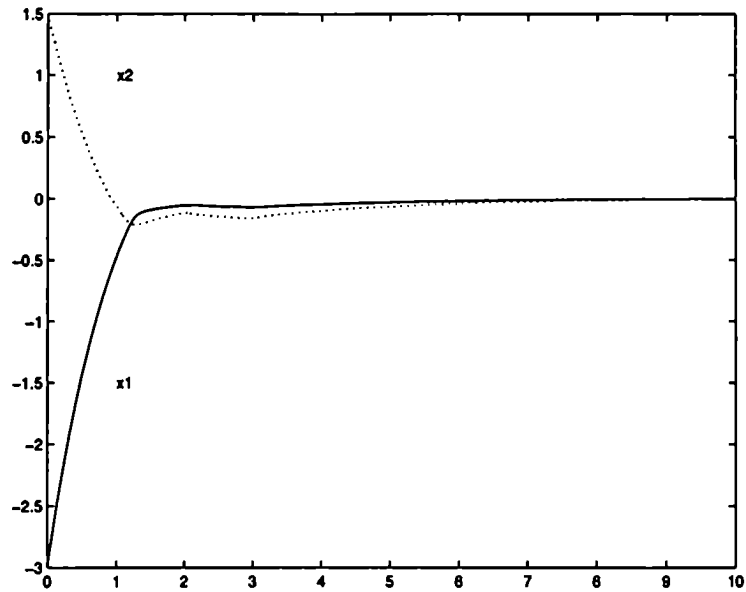


Figura 3.1: Evolución de los estados de la red en tiempo continuo

En la segunda simulación consideramos a la planta \mathcal{P} afectada por una perturbación aleatoria aditiva $\eta_1(t) = (\eta_{11}(t), \eta_{12}(t))$, con $\eta_{1j}(t)$ uniformemente distribuida en $[-0.1, 0.1]$ para $j = 1, 2$, al controlador \mathcal{C} afectado por otra perturbación aleatoria aditiva $\eta_{2k} = (\eta_{21k}, \eta_{22k})$ con $\eta_{1j}(t)$ uniformemente distribuida en $[-0.2, 0.2]$ para $j = 1, 2$, un error aleatorio η_{3k} en la medición de la salida $y(t)$ en el instante t_k , uniformemente distribuido en el intervalo $[-0.2, 0.2]$, con lo cual $w_k = y(t_k) + \eta_{3k}$ y, por último, un error aleatorio $\eta_4(t)$ en la entrada de la planta, uniformemente distribuido en $[-0.1, 0.1]$, con lo cual $u(t) = v_k + \eta_4(t)$ si $t \in [k, k + 1)$.

La figura 3.3 muestra la evolución de las variables de estado x_1 y x_2 de la red neural en tiempo continuo perturbada, mientras que en la figura 3.4 muestra el comportamiento de las variables de estado z_1 y z_2 del controlador perturbado. Como puede apreciarse, las figuras muestran la acotación final del sistema a lazo cerrado.

3.4.2 Múltiples períodos de muestreo

Consideraremos ahora el caso en el que el período (o los períodos) con que se muestrean las salidas de \mathcal{P} es distinto al período (o los períodos) con que se muestrea la salida de \mathcal{C} . Más precisamente, consideraremos que la conexión entre la planta y el controlador se efectúa de una de las dos formas descritas en el apartado 2.3.2 del capítulo 2. En primer lugar trataremos el caso en que la salida del controlador se muestrea con mayor frecuencia que la salida de la planta (Caso II.1 del apartado 2.3.2); el caso en que las salidas de la

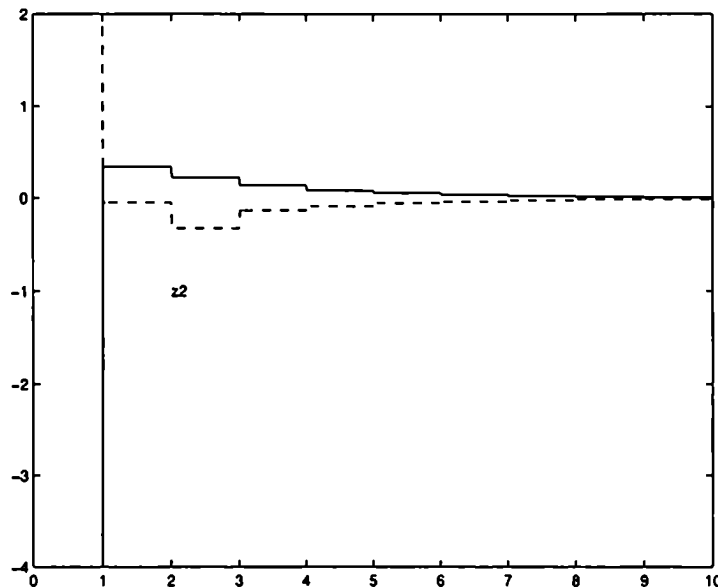


Figura 3.2: Evolución de los estados de la red en tiempo discreto

planta se muestrean con mayor frecuencia que la salida del controlador será tratado en último término (Caso II.2 del apartado 2.3.2).

1. La salida de \mathcal{C} se muestrea con mayor frecuencia que la salida de \mathcal{P}

Consideremos la planta \mathcal{P} descrita en (3.83), el controlador digital \mathcal{C} descrito en (3.84) y supongamos que la interconexión se efectúa como en el Caso II.1 del apartado 2.3.2. Por lo tanto las salidas de la planta y del controlador se muestrean regularmente con períodos de muestreo δ_1 para la primera y δ_2 para la segunda, y δ_1 es un múltiplo entero de δ_2 , esto es, $\delta_1 = N\delta_2$ con $N \in \mathbb{N}$. Recordemos que en este caso, para que la conexión entre \mathcal{P} y \mathcal{C} pueda efectuarse en esta forma, el espacio de entradas de \mathcal{C} debe coincidir con el espacio de salidas de \mathcal{P} , es decir, $p = s$, y el espacio de salidas del controlador digital debe ser el producto cartesiano de N copias del espacio de entradas de la planta, y, por lo tanto, identificando $(\mathbb{R}^q)^N \cong \mathbb{R}^{Nq}$, $Nq = l$. Por conveniencia particionamos la función de salida de \mathcal{C} , $r : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^l$ en la forma $r = (r_1, \dots, r_N)$ con $r_i : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, $i = 1, \dots, N$.

De acuerdo con lo desarrollado en el Caso II.1 del apartado del capítulo 2 que ya mencionamos, el sistema a lazo cerrado que obtenemos al interconectar de esta forma \mathcal{P} con \mathcal{C} , y que denominaremos $(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \delta_1, \delta_2)$ o más brevemente $(\mathcal{P}, \mathcal{C})$ cuando no haya peligro

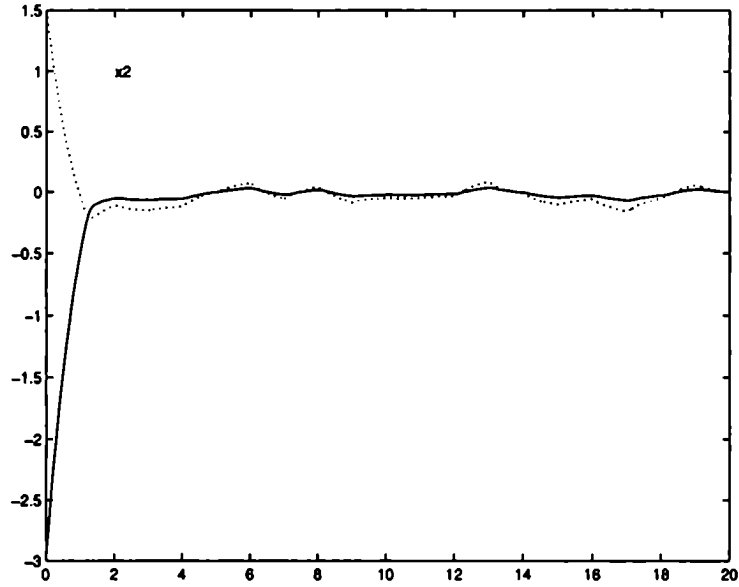


Figura 3.3: Evolución de los estados de la red en tiempo continuo con perturbaciones

de confusión, está determinado por la ecuación híbrida tiempo-invariante,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_1(t, x(t), x(t_k), z(t_k)) & t \in [t_k, t_{k+1}) \\ z(t_{k+1}) = f_2(x(t_k), z(t_k)) & k \in \mathbf{Z}^+ \end{cases} \quad (3.103)$$

con $\Pi = \{t_k = k\delta_1 : k \in \mathbf{Z}^+\}$, $\Omega = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ y $f_1 : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $f_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ definidas como sigue:

- $f_1(t, x, \xi, z) = f(x, r_i(z, h(\xi)))$ si $t \in [t_k + (i-1)\delta_2, t_k + i\delta_2)$, $i = 1, \dots, N$;
- $f_2(x, z) = g(z, h(x))$.

Notamos además que el origen de Ω , $\omega_0 = 0$, es un punto de equilibrio de éste sistema.

La siguiente definición es análoga a la que introdujimos en el caso anterior.

Definición 3.6 El controlador digital \mathcal{C} estabiliza exponencialmente \mathcal{P} con períodos de muestreo (δ_1, δ_2) si el origen es un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema a lazo cerrado $(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \delta_1, \delta_2)$.

Al igual que en el caso en que se emplea el mismo período de muestreo para muestrear las salidas de la planta y del controlador, que es un caso particular de éste si se considera $\delta_1 = \delta_2 = \delta_M$, daremos condiciones necesarias y suficientes para que el controlador \mathcal{C} estabilice exponencialmente la planta \mathcal{P} con períodos de muestreo (δ_1, δ_2) , en términos de

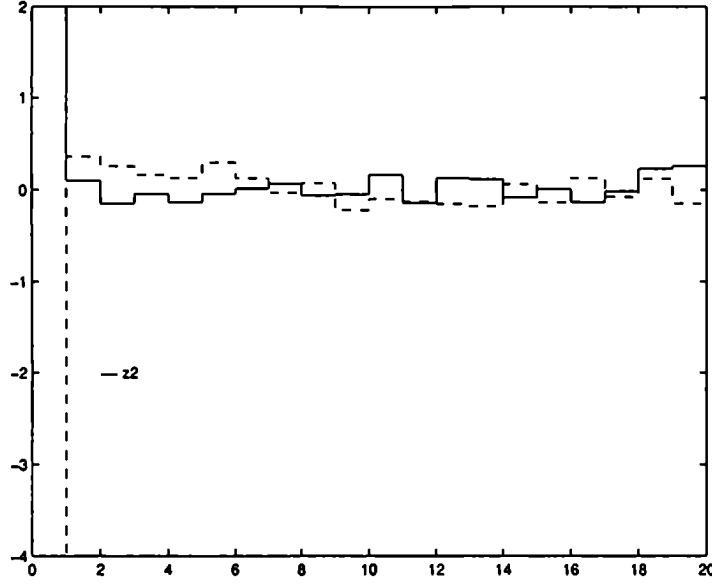


Figura 3.4: Evolución de los estados de la red en tiempo discreto con perturbaciones

la estabilidad Schur de cierta matriz; también daremos algunas condiciones para que la planta \mathcal{P} admita un estabilizador exponencial digital para un determinado par de períodos de muestreo (δ_1, δ_2) . Por último analizaremos el caso en que las salidas y entradas de los sistemas están afectadas por errores.

Consideremos la linealización de la planta \mathcal{P} alrededor del par $(0, 0)$, \mathcal{P}_L , dada por la ecuación (3.85) y la linealización del controlador \mathcal{C} , también alrededor del origen $(0, 0)$, \mathcal{C}_L , dada por la ecuación (3.86). Teniendo en cuenta la partición $r = (r_1, \dots, r_N)$, las matrices F y G que aparecen en (3.86) pueden escribirse en la forma $F = [F_1, \dots, F_N]$ con $F_i = \frac{\partial r_i}{\partial z}(0, 0) \in \mathbb{R}^{q \times m}$ y $G = [G_1, \dots, G_N]$ con $G_i = \frac{\partial r_i}{\partial w}(0, 0) \in \mathbb{R}^{q \times p}$.

Entonces, la ecuación de la linealización del sistema a lazo cerrado $(\mathcal{P}, \mathcal{C})$ resulta

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_{11}x(t_k) + B_{12}(t)z(t_k) & t \in [t_k, t_{k+1}) \\ z(t_{k+1}) = B_{21}x(t_k) + B_{22}z(t_k) & t_k \in \Pi \end{cases} \quad (3.104)$$

con $B_{21} = EC$, $B_{22} = D$ y $B_{12}(t)$ y $B_{11}(t)$ tales que

- $B_{11}(t) = BG_iC \forall t \in [t_k + (i-1)\delta_2, t_k + i\delta_2)$, $i = 1, \dots, N$, y
- $B_{12}(t) = BF_i \forall t \in [t_k + (i-1)\delta_2, t_k + i\delta_2)$, $i = 1, \dots, N$.

Como (3.104) también es la ecuación del sistema a lazo cerrado $(\mathcal{P}_L, \mathcal{C}_L, \delta_1, \delta_2)$ y f_1 y f_2 satisfacen, respectivamente, las condiciones (C3) y (C4), aplicando el Teorema 3.3

resulta que \mathcal{C} estabiliza exponencialmente \mathcal{P} con períodos de muestreo (δ_1, δ_2) si y sólo si \mathcal{C}_L estabiliza exponencialmente \mathcal{P}_L con períodos de muestreo (δ_1, δ_2) .

Por otra parte, el sistema a lazo cerrado $(\mathcal{P}_L, \mathcal{C}_L)$ además de lineal es tiempo invariante, con lo cual su discretización está determinada por una ecuación en diferencias de la forma

$$\omega(t_{k+1}) = H\omega(t_k)$$

con $H \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$. Entonces, por el Corolario 3.1, resulta que $(\mathcal{P}_L, \mathcal{C}_L)$ es exponencialmente estable si y sólo si la matriz H es estable en el sentido de Schur.

Para continuar con el análisis es conveniente introducir el siguiente sistema de control lineal en tiempo discreto,

$$\mathcal{P}_L^{\delta_1, \delta_2} : \begin{cases} x_{k+1} = A_{\delta_1} x_k + B_{\delta_1, \delta_2} U_k \\ y_k = C x_k \end{cases}, \quad (3.105)$$

donde $x_k \in \mathbb{R}^n$, $U_k = (u_{k1}, u_{k2}, \dots, u_{kN})$ con $u_{ki} \in \mathbb{R}^q$, $i = 1, \dots, N$, $y_k \in \mathbb{R}^p$ y $B_{\delta_1, \delta_2} \in \mathbb{R}^{n \times Nq}$ es la matriz en bloques

$$B_{\delta_1, \delta_2} = [A_{\delta_2}^{N-1} B_{\delta_2}, A_{\delta_2}^{N-2} B_{\delta_2}, \dots, B_{\delta_2}],$$

y tener en cuenta la siguiente:

Observación 3.8 Si en el instante t_k el estado de la planta \mathcal{P}_L es $x(t_k) = x_k$ y en el intervalo $[t_k, t_{k+1})$, $u(t)$ es tal que

$$u(t) = u_{ki} \quad \forall t \in [t_k + (i-1)\delta_2, t_k + i\delta_2), \quad i = 1, \dots, N,$$

entonces en el instante t_{k+1} el estado de la planta $x(t_{k+1}) = x_{k+1}$ es

$$x_{k+1} = A_{\delta_1} x_k + B_{\delta_1, \delta_2} U_k.$$

Ahora estamos en condiciones de calcular la matriz H cuyas propiedades de estabilidad determinan la estabilidad exponencial de la interconexión $(\mathcal{P}_L, \mathcal{C}_L)$ y por ende la estabilidad exponencial de $(\mathcal{P}, \mathcal{C})$.

Fijemos $\omega = (x, z) \in \Omega$ y sea $\mathbf{w}(t, 0, \omega) = (x(t), z(t))$ la trayectoria de $(\mathcal{P}_L, \mathcal{C}_L)$ que se inicia en ω en el instante $t = 0$. Entonces $(x(t_1), z(t_1)) = H\omega$. Por otra parte, $x(t)$ es la trayectoria del sistema de control \mathcal{P}_L correspondiente a la condición inicial $x(0) = x$ y al control $u(t)$ definido en el intervalo $[0, t_1)$ de la siguiente manera:

$$u(t) = v_{0i} = F_i z + G_i C x = u_{0i} \quad \forall t \in [(i-1)\delta_2, i\delta_2), \quad i = 1, \dots, N.$$

Por lo tanto, si $U_0 = (u_{01}, \dots, u_{0N})$, por la Observación 3.8, tenemos que

$$x(t_1) = A_{\delta_1} x + B_{\delta_1, \delta_2} U_0,$$

y, como $U_0 = Fz + GCx$, resulta

$$x(t_1) = (A_{\delta_1} + B_{\delta_1, \delta_2} GC)x + B_{\delta_1, \delta_2} Fz.$$

Entonces, teniendo en cuenta que de la ecuación (3.103) resulta

$$z(t_1) = ECx + Dz,$$

obtenemos la siguiente expresión de H ,

$$H = \begin{bmatrix} (A_{\delta_1} + B_{\delta_1, \delta_2} GC) & B_{\delta_1, \delta_2} F \\ EC & D \end{bmatrix}. \quad (3.106)$$

Por otra parte, H es la matriz del sistema lineal que se obtiene al conectar $\mathcal{P}_L^{\delta_1, \delta_2}$ con \mathcal{C}_L considerando $U_k = v_k$ y $w_k = y_k$, con lo cual H es estable en el sentido de Schur si y sólo si el controlador \mathcal{C}_L estabiliza la planta $\mathcal{P}_L^{\delta_1, \delta_2}$.

El siguiente teorema resume los resultados obtenidos en el análisis precedente.

Teorema 3.13 Sea (δ_1, δ_2) un par de períodos de muestreo con $\delta_2 > 0$ y $\delta_1 = N\delta_2$ con $N \in \mathbb{N}$.

Entonces las siguientes afirmaciones resultan equivalentes.

1. \mathcal{C} estabiliza exponencialmente \mathcal{P} con períodos de muestreo (δ_1, δ_2) .
2. \mathcal{C}_L estabiliza exponencialmente \mathcal{P}_L con períodos de muestreo (δ_1, δ_2) .
3. La matriz H definida en (3.106) es estable en el sentido de Schur.
4. \mathcal{C}_L estabiliza $\mathcal{P}_L^{\delta_1, \delta_2}$

Al igual que en el caso tratado anteriormente, es posible enunciar condiciones tanto necesarias como suficientes para la existencia de un controlador digital que estabilice la planta \mathcal{P} para un determinado par de períodos de muestreo (δ_1, δ_2) .

En efecto, supongamos la existencia de un controlador digital \mathcal{C} tal que $(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \delta_1, \delta_2)$ es exponencialmente estable. Entonces, de la equivalencia 1. \Leftrightarrow 2., resulta que \mathcal{C}_L estabiliza exponencialmente \mathcal{P}_L con períodos de muestreo (δ_1, δ_2) y, *a posteriori*, con demostración similar a la dada para el Teorema 3.10, deducimos que la planta linealizada \mathcal{P}_L es estabilizable y detectable.

Respecto de la existencia de un controlador que estabilice exponencialmente la planta con períodos de muestreo (δ_1, δ_2) , ésta quedará garantizada si el sistema de control lineal en tiempo discreto $\mathcal{P}_L^{\delta_1, \delta_2}$ es estabilizable y detectable, ya que en ese caso existirá un controlador lineal \mathcal{C} que estabilice $\mathcal{P}_L^{\delta_1, \delta_2}$, que a la vez, por la equivalencia 1. \Leftrightarrow 4., estabilizará \mathcal{P} con períodos de muestreo (δ_1, δ_2) . Por lo tanto, de esta discusión se desprende que dar

condiciones suficientes para la existencia de un controlador que estabilice \mathcal{P} con períodos de muestreo (δ_1, δ_2) es equivalente a dar condiciones suficientes para la estabilizabilidad y detectabilidad de $\mathcal{P}_L^{\delta_1, \delta_2}$, que es lo que haremos a continuación.

Por un lado tenemos que una condición suficiente para la detectabilidad del par (A_{δ_1}, C) es, por el criterio de Kalman-Ho-Narendra, la siguiente: (A, C) es detectable y no existe un par de autovalores de A , λ y μ , tales que $\lambda \neq \mu$ y $\delta_1(\lambda - \mu) = 2k\pi i$ para algún $k \in \mathbf{Z}$.

Por otra parte, teniendo en cuenta la siguiente:

Observación 3.9 El par $(A_{\delta_1}, B_{\delta_1, \delta_2})$ es estabilizable si $(A_{\delta_2}, B_{\delta_2})$ es estabilizable.

La validez de esta afirmación es consecuencia directa del siguiente hecho:

Si consideramos el sistema de control en tiempo discreto

$$x_{k+1} = A_{\delta_2}x_k + B_{\delta_2}u_k,$$

entonces $\{\bar{x}_k = x_{Nk}\}$ es la trayectoria del sistema de control $\mathcal{P}_L^{\delta_1, \delta_2}$ correspondiente al control $\{U_k = (u_{Nk}, u_{Nk+1}, \dots, u_{Nk+N-1})\}$ y la condición inicial $\bar{x}_0 = x_0$; y de la siguiente caracterización de estabilizabilidad (ver [72]):

El sistema de control en tiempo discreto $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$ es estabilizable si y sólo si para cada condición inicial x_0 existe un control $\{u_k\}$ tal que la trayectoria del sistema $\{x_k\}$ correspondiente a tal control y tal condición inicial satisface: $x_k \rightarrow 0$ si $k \rightarrow +\infty$.

Entonces, también por aplicación del criterio de Kalman-Ho-Narendra, obtenemos la siguiente condición suficiente para la estabilizabilidad del par $(A_{\delta_1}, B_{\delta_1, \delta_2})$:

(A, B) es estabilizable y no existe un par de autovalores de A , λ y μ , tales que $\lambda \neq \mu$ y $\delta_2(\lambda - \mu) = 2k\pi i$ para algún $k \in \mathbf{Z}$.

Como $\delta_1 = N\delta_2$, esta última condición se cumplirá si (A, B) es estabilizable y se cumple la condición suficiente que dimos para la detectabilidad de (A_{δ_1}, C) .

Lo discutido en los párrafos anteriores puede resumirse en el siguiente teorema, el cual da condiciones para la existencia de un controlador digital que estabilice exponencialmente una planta no lineal para un par de períodos de muestreo dado.

Teorema 3.14 Sea (δ_1, δ_2) un par de períodos de muestreo con $\delta_2 > 0$ y $N\delta_2 = \delta_1$ con $N \in \mathbf{N}$.

Entonces, si el controlador digital \mathcal{C} estabiliza exponencialmente la planta \mathcal{P} con período de muestreo (δ_1, δ_2) , la planta linealizada \mathcal{P}_L es estabilizable y detectable.

Recíprocamente, si \mathcal{P}_L es estabilizable y detectable y, además, no existen un par de autovalores de A , λ y μ , tales que $\lambda \neq \nu$ y para algún $k \in \mathbf{Z}$, $\delta_1(\lambda - \mu) = 2k\pi i$, existe un controlador digital \mathcal{C} que estabiliza exponencialmente la planta \mathcal{P} con período de muestreo (δ_1, δ_2) .

Notamos que el Teorema 3.14 que recién establecimos extiende los resultados obtenidos para el caso en que existe un único período de muestreo (Teoremas 3.10 y 3.11) al caso considerado en esta sección.

También pueden extenderse a este caso, los resultados de robustez respecto de pequeños errores en las entradas y salidas tanto de la planta como del controlador, que obtuvimos en el Teorema 3.12 para los controladores digitales que estabilizan exponencialmente una planta no lineal con un único período de muestreo.

En efecto, consideremos, como en la sección anterior, la planta perturbada \mathcal{P}' dada en (3.91), el controlador perturbado \mathcal{C}' dado en (3.92), con g y r continuas y supongamos que tanto la entradas de \mathcal{P}' como las entradas de \mathcal{C}' están afectadas por errores, es decir, que la k -ésima entrada del controlador w_k está dada por (3.93) y que la entrada de la planta $u(t)$ en el intervalo $[t_k, t_{k+1})$ está dada por (3.94). Supongamos también que todos los errores están acotados por constantes conocidas, es decir, que conocemos números $e_i \geq 0$, $i = 1, \dots, 4$, tales que $|\eta_1(t)| \leq e_1 \forall t \geq 0$, $|\eta_{2k}| \leq e_2 \forall k \in \mathbf{Z}^+$, $|\eta_{3k}| \leq e_3 \forall k \in \mathbf{Z}^+$ y $|\eta_4(t)| \leq e_4 \forall t \geq 0$ y que η_1 y η_4 son medibles Lebesgue.

Entonces, empleando argumentos similares a los empleados en la demostración del Teorema 3.12, (esencialmente que las trayectorias del sistema a lazo cerrado perturbado verifican una ecuación híbrida perturbada con perturbaciones cuyas magnitudes tienden a cero si las cotas de los errores tienden a cero y el Teorema 3.8), es posible probar el siguiente teorema.

Teorema 3.15 Supongamos que el controlador digital \mathcal{C} estabiliza exponencialmente la planta \mathcal{P} con períodos de muestreo (δ_1, δ_2) .

Entonces existen constantes positivas e^* , μ^* y c^* , y dos funciones continuas de clase \mathcal{K} , $\rho_i : [0, \eta^*) \rightarrow \mathbb{R}^+$, $i = 1, 2$, tales que vale lo siguiente. Si $\max_{i=1, \dots, 4} e_i = e < e^*$ entonces

1. Si $\mathbf{w}(t, t_{k_0}, \omega)$ es la trayectoria del sistema a lazo cerrado $(\mathcal{P}', \mathcal{C}', \delta_1, \delta_2)$ que se inicia en $\omega \in \Omega$ en el instante $t_{k_0} = k_0 \delta_1$,

$$\|\mathbf{w}(t, t_{k_0}, \omega)\| \leq \max(\rho_1(e), \mu^* \|\omega\| + \rho_2(e)) \quad \forall t \geq t_{k_0} \quad \forall k \in \mathbf{Z}^+ \quad \text{y} \quad \forall \|\omega\| < c^* \quad (3.107)$$

2. Para cada $\alpha \in (0, c^*)$ existe $T = T(\alpha)$ tal que

$$\|\mathbf{w}(t, t_{k_0}, \omega)\| \leq \rho_1(e) \quad \forall t \geq t_{k_0} + T \quad \forall k_0 \in \mathbf{Z}^+ \quad \text{y} \quad \forall \|\omega\| \leq \alpha. \quad (3.108)$$

2. La salida de \mathcal{P} se muestrea con mayor frecuencia que la salida de \mathcal{C}

Por último, consideramos el caso en que la planta \mathcal{P} se conecta con el controlador \mathcal{C} en la forma descrita en el Caso II.2 del apartado 2.3.2. En este caso suponemos que cada componente de la salida de \mathcal{P} , $y_i(t) = h_i(x(t)) \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, p$, se muestrea

regularmente con período de muestreo $\delta_{1,i}$. Respecto de la salida de \mathcal{C} , que en este caso no debe depender de la k -ésima entrada de \mathcal{C} , es decir, $v_k = r(z_k)$, suponemos que se muestrea regularmente con período de muestreo δ_2 , el cual debe ser múltiplo entero de cada uno de los períodos $\delta_{1,i}$, es decir, $\delta_2 = N_i \delta_{1,i}$ con $N_i \in \mathbb{N}$. Entonces, de acuerdo con lo desarrollado en 2.3.2, para que la conexión entre \mathcal{P} y \mathcal{C} pueda efectuarse, por un lado el espacio de entradas de \mathcal{P} debe coincidir con el espacio de salidas de \mathcal{C} , con lo cual $q = l$, y por el otro, el espacio de entradas del controlador debe coincidir con el producto cartesiano $\mathbb{R}^{N_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{N_p} \cong \mathbb{R}^{(N_1 + \dots + N_p)p}$, y por lo tanto $s = (N_1 + \dots + N_p)p$.

Además de las hipótesis que hicimos sobre f en el comienzo de la sección 3.4, supondremos, por el momento, que f satisface la siguiente condición:

(CL) Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y cada $u \in \mathbb{R}^q$, $x(t, x, u)$, la trayectoria de \mathcal{P} correspondiente al control $u(t) = u \forall t \in \mathbb{R}^+$ que satisface la condición inicial $x(0, x, u) = x$, está al menos definida en el intervalo $[0, \delta_2]$.

Entonces, como consecuencia de resultados estándar sobre la continuidad y diferenciabilidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias respecto de las condiciones iniciales y de parámetros, (ver por ej.: [72], [15], [40]), para cada $0 \leq \tau \leq \delta_2$, la aplicación $F_\tau : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por $F_\tau(x, u) = x(\tau, x, u)$, es continua en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ y diferenciable en el origen, siendo

$$\frac{\partial F_\tau}{\partial x}(0, 0) = A_\tau \quad \text{y} \quad \frac{\partial F_\tau}{\partial u}(0, 0) = B_\tau, \quad (3.109)$$

con $A = \frac{\partial f}{\partial x}(0)$, $B = \frac{\partial f}{\partial u}(0)$ y A_τ y B_τ como en (3.87).

Por último, consideremos las aplicaciones $H_{i,j} = h_i \circ F_{(j-1)\delta_{1,i}}$, $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, N_i$, y $H = (H_{1,1}, \dots, H_{1,N_1}, \dots, H_{p,1}, \dots, H_{p,N_p})$, y denominemos $\bar{\delta}_1 = (\delta_{1,1}, \dots, \delta_{1,p})$, entonces, de acuerdo con lo desarrollado en 2.3.2, el sistema a lazo cerrado que se obtiene conectando \mathcal{P} con \mathcal{C} en la forma allí descripta, y que denominaremos $(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \bar{\delta}_1, \delta_2)$ o más brevemente $(\mathcal{P}, \mathcal{C})$ cuando quede claro del contexto quien es $(\bar{\delta}_1, \delta_2)$, está determinado por la ecuación

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_1(x(t), z(t_k)) & t \in [t_k, t_{k+1}) \\ z(t_{k+1}) = f_2(x(t_k), z(t_k)) & k \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \quad (3.110)$$

con $\Pi = \{t_k = k\delta_2 : k \in \mathbb{Z}^+\}$, $\Omega = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $f_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $f_1(x, z) = f(x, r(z))$ y $f_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $f_2(x, z) = g(z, H(x, r(z)))$.

Observamos que al igual que en los dos casos que ya analizamos, $\omega_0 = 0$ también resulta un punto de equilibrio de $(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \bar{\delta}_1, \delta_2)$. Entonces, en forma análoga a lo desarrollado en dichos casos, introducimos la siguiente:

Definición 3.7 El controlador digital \mathcal{C} estabiliza exponencialmente la planta \mathcal{P} con períodos de muestreo $(\bar{\delta}_1, \delta_2)$ si $\omega_0 = 0$ es un punto de equilibrio exponencialmente estable de $(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \bar{\delta}_1, \delta_2)$.

En lo que sigue veremos que para este caso es posible establecer resultados análogos a los que probamos para el caso en que la salida del controlador se muestrea con mayor frecuencia que la salida de la planta, es decir, es posible dar teoremas análogos a los Teoremas 3.13, 3.14 y 3.15.

Comenzamos estableciendo el análogo del Teorema 3.13. Consideremos las respectivas linealizaciones de \mathcal{P} y \mathcal{C} , \mathcal{P}_L y \mathcal{C}_L . En este caso, debido a que suponemos que r sólo depende de z tenemos que $G = \frac{\partial r}{\partial w}(0) = 0$, y que $C_i = \frac{\partial h_i}{\partial x}(0)$, $i = 1, \dots, p$, es la i -ésima fila de la matriz C . Entonces, teniendo en cuenta (3.109) y las definiciones de f_1 y f_2 , resultan las igualdades

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(0) = A \quad \frac{\partial f_1}{\partial \xi}(0) = 0 \quad \frac{\partial f_1}{\partial z}(0) = BF \quad (3.111)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(0) = E\bar{C} \quad \frac{\partial f_2}{\partial z}(0) = D + EJF \quad (3.112)$$

con

$$\bar{C} = \frac{\partial H}{\partial x}(0) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A_{\delta_{1,1}} \\ C_1 A_{(N_1-1)\delta_{1,1}} \\ \vdots \\ C_p \\ C_p A_{\delta_{1,p}} \\ C_p A_{(N_1-1)\delta_{1,p}} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad J = \frac{\partial H}{\partial u}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ C_1 B_{\delta_{1,1}} \\ C_1 B_{(N_1-1)\delta_{1,1}} \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ C_p B_{\delta_{1,p}} \\ C_p B_{(N_1-1)\delta_{1,p}} \end{bmatrix}. \quad (3.113)$$

Por lo tanto, la ecuación

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + BFz(t_k) & t \in [t_k, t_{k+1}) \\ z(t_{k+1}) = E\bar{C}x(t_k) + (D + EJF)z(t_k) & k \in \mathbf{Z}^+ \end{cases} \quad (3.114)$$

es la linealización de (3.110) alrededor del origen.

Como (3.114) es la ecuación del sistema a lazo cerrado $(\mathcal{P}_L, \mathcal{C}_L, \bar{\delta}_1, \delta_2)$, resulta que también en este caso, $(\mathcal{P}_L, \mathcal{C}_L, \bar{\delta}_1, \delta_2)$ es la linealización de $(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \bar{\delta}_1, \delta_2)$ alrededor del origen.

Entonces, por un lado, aplicando el Teorema 3.4, resulta que $(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \bar{\delta}_1, \delta_2)$ es exponencialmente estable si y sólo si la matriz

$$H^* = \begin{bmatrix} A_{\delta_2} & B_{\delta_2}F \\ E\bar{C} & D + E J F \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

es estable en el sentido de Schur; por el otro, \mathcal{C} estabiliza exponencialmente \mathcal{P} con períodos de muestreo $(\bar{\delta}_1, \delta_2)$ si y sólo si \mathcal{C}_L estabiliza exponencialmente \mathcal{P}_L con períodos de muestreo $(\bar{\delta}_1, \delta_2)$.

Para completar la analogía con el Teorema 3.13, consideremos el sistema de control lineal en tiempo discreto

$$\mathcal{P}_L^{\bar{\delta}_1, \delta_2} : \begin{cases} x_{k+1} = A_{\delta_2}x_k + B_{\delta_2}u_k \\ \bar{y}_k = \bar{C}x_k + Ju_k \end{cases} \quad (3.116)$$

Entonces, H^* resulta la matriz de transición del sistema a lazo cerrado que se obtiene al conectar $\mathcal{P}_L^{\bar{\delta}_1, \delta_2}$ con \mathcal{C}_L haciendo $w_k = \bar{y}_k$ y $u_k = v_k$, y, en consecuencia, H^* es de Schur si y sólo si \mathcal{C}_L estabiliza $\mathcal{P}_L^{\bar{\delta}_1, \delta_2}$.

Hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 3.16 Sea $(\bar{\delta}_1, \delta_2)$ un par de períodos de muestreo con $\bar{\delta}_1 = (\delta_{1,1}, \dots, \delta_{1,p})$, $\delta_2 > 0$ y $N_i\delta_{1,i} = \delta_2$, $N_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, p$.

Entonces las siguientes afirmaciones resultan equivalentes.

1. \mathcal{C} estabiliza exponencialmente \mathcal{P} con períodos de muestreo $(\bar{\delta}_1, \delta_2)$.
2. \mathcal{C}_L estabiliza exponencialmente \mathcal{P}_L con períodos de muestreo $(\bar{\delta}_1, \delta_2)$.
3. La matriz H^* definida en (3.115) es estable en el sentido de Schur.
4. \mathcal{C}_L estabiliza $\mathcal{P}_L^{\bar{\delta}_1, \delta_2}$.

A continuación estableceremos un teorema análogo al Teorema 3.14. Con argumentos similares a los empleados en los dos casos ya analizados, de la equivalencia 1. \Leftrightarrow 2. del Teorema 3.16 se deduce que la existencia de un controlador \mathcal{C} que estabiliza exponencialmente \mathcal{P} con períodos de muestreo $(\bar{\delta}_1, \delta_2)$ implica la estabilizabilidad y detectabilidad de la planta linealizada \mathcal{P}_L . Por otra parte, de la equivalencia 1. \Leftrightarrow 4. se concluye que la existencia de un controlador \mathcal{C} que estabiliza exponencialmente \mathcal{P} con períodos de muestreo $(\bar{\delta}_1, \delta_2)$, queda garantizada si el sistema $\mathcal{P}_L^{\bar{\delta}_1, \delta_2}$ es estabilizable y detectable, lo cual sucede, por ejemplo, si \mathcal{P}_L es estabilizable, detectable y no existen autovalores de A , λ y μ , tales que $\lambda \neq \mu$ y $\delta_2(\lambda - \mu) = 2k\pi i$ con $k \in \mathbb{Z}$. En efecto, si se cumple esta condición, por el criterio de Kalman-Ho-Narendra, tenemos por un lado que el par $(A_{\delta_2}, B_{\delta_2})$

es estabilizable y, por el otro, que el par (A_{δ_2}, C) es detectable, con lo cual el par (A_{δ_2}, \bar{C}) resulta también detectable, pues las filas de la matriz C son a su vez filas de la matriz \bar{C} .

Por lo tanto, vale el siguiente teorema.

Teorema 3.17 Sea $(\bar{\delta}_1, \delta_2)$ un par de períodos de muestreo con $\bar{\delta}_1 = (\delta_{1,1}, \dots, \delta_{1,p})$, $\delta_2 > 0$ y $N_i \delta_{1,i} = \delta_2$, $N_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, p$.

Entonces, si el controlador digital C estabiliza exponencialmente la planta \mathcal{P} con período de muestreo $(\bar{\delta}_1, \delta_2)$, la planta linealizada \mathcal{P}_L es estabilizable y detectable.

Recíprocamente, si \mathcal{P}_L es estabilizable y detectable y, además, no existen un par de autovalores de A , λ y μ , tales que $\lambda \neq \mu$ y para algún $k \in \mathbb{Z}$, $\delta_2(\lambda - \mu) = 2k\pi i$, existe un controlador digital C que estabiliza exponencialmente la planta \mathcal{P} con período de muestreo $(\bar{\delta}_1, \delta_2)$.

Finalizaremos el estudio de este caso analizando la robustez de un controlador digital C que suponemos estabiliza exponencialmente la planta \mathcal{P} . El resultado que obtendremos es análogo al que obtuvimos para el caso que analizamos anteriormente, es decir, para el caso en que la salida del controlador se muestrea con mayor frecuencia que la salida de la planta.

Consideremos la planta perturbada \mathcal{P}' dada por (3.91), el controlador perturbado C' dado por (3.92) con g y r continuas y $r = r(z)$, y supongamos que la k -ésima entrada del controlador es

$$w_k = (y_1(t_k), \dots, y_1(t_k + (N_1 - 1)\delta_{1,1}), \dots, y_p(t_k), \dots, y_p(t_k + (N_p - 1)\delta_{1,p})) + \eta_{3k}$$

y que la entrada de la planta en el instante $t \in [t_k, t_{k+1})$, $u(t)$, está dada por (3.94). Supongamos como en los casos anteriores, la existencia de constantes $e_i \geq 0$, $i = 1, \dots, 4$, tales que $|\eta_1(t)| \leq e_1 \forall t \geq 0$, $|\eta_{2k}| \leq e_2 \forall k \in \mathbb{Z}^+$, $|\eta_{3k}| \leq e_3 \forall k \in \mathbb{Z}^+$, $|\eta_4(t)| \leq e_4 \forall t \geq 0$, y, por último, que η_1 y η_4 son medibles Lebesgue.

Entonces vale el siguiente teorema, que es análogo al Teorema 3.15.

Teorema 3.18 Sea $(\bar{\delta}_1, \delta_2)$ un par de períodos de muestreo con $\bar{\delta}_1 = (\delta_{1,1}, \dots, \delta_{1,p})$, $\delta_2 > 0$ y $N_i \delta_{1,i} = \delta_2$, $N_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, p$. Supongamos que el controlador digital C estabiliza exponencialmente la planta \mathcal{P} con períodos de muestreo $(\bar{\delta}_1, \delta_2)$.

Entonces existen constantes positivas e^* , μ^* y c^* , y dos funciones continuas de clase \mathcal{K} , $\rho_i : [0, \eta^*) \rightarrow \mathbb{R}^+$, $i = 1, 2$, tales que vale lo siguiente. Si $\max_{i=1, \dots, 4} e_i = e < e^*$ entonces

1. Si $\mathbf{w}(t, t_{k_0}, \omega)$ es la trayectoria del sistema a lazo cerrado $(\mathcal{P}', C', \bar{\delta}_1, \delta_2)$ que se inicia en $\omega \in \Omega$ en el instante $t_{k_0} = k_0 \delta_2$,

$$\|\mathbf{w}(t, t_{k_0}, \omega)\| \leq \max(\rho_1(e), \mu^* \|\omega\| + \rho_2(e)) \quad \forall t \geq t_{k_0} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{y} \quad \forall \|\omega\| < c^* \quad (3.117)$$

2. Para cada $\alpha \in (0, c^*)$ existe $T = T(\alpha)$ tal que

$$\|\mathbf{w}(t, t_{k_0}, \omega)\| \leq \rho_1(e) \quad \forall t \geq t_{k_0} + T \quad \forall k_0 \in \mathbf{Z}^+ \text{ y } \forall \|\omega\| \leq \alpha. \quad (3.118)$$

Demostración: Como este teorema puede demostrarse básicamente de la misma forma que el Teorema 3.12, sólo haremos un esbozo de la demostración.

Comenzamos demostrando el teorema en el caso en que f , g y h son uniformemente continuas en su dominio de definición y f , además, es globalmente Lipschitz respecto de x , uniformemente respecto de u , i.e. existe $L \geq 0$ tal que $|f(x, u) - f(x', u)| \leq L|x - x'|$ para todo $x, x' \in \mathbb{R}^n$ y para todo $u \in \mathbb{R}^q$.

Sea $\mathbf{w}(t, t_{k_0}, \omega) = \omega(t) = (x(t), z(t))$ la trayectoria del sistema a lazo cerrado $(\mathcal{P}', \mathcal{C}')$ que se inicia en ω en el instante t_{k_0} . Entonces $\omega(t)$ está definida $\forall t \geq t_{k_0}$ y es solución de la ecuación perturbada

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_1(x(t), z(t_k)) + \eta(t) & t \in [t_k, t_{k+1}) \\ z(t_{k+1}) = f_2(x(t_k), z(t_k)) + \nu(k) & t_k \in \Pi \end{cases}, \quad (3.119)$$

Siendo f_1 y f_2 las funciones que aparecen en la ecuación (3.110) que describe el lazo cerrado $(\mathcal{P}, \mathcal{C})$ y η_1 y ν las perturbaciones definidas como sigue

$$\eta(t) = f(x(t), r(z(t_k))) + \eta_4(t) + \eta_1(t) - f_1(x(t), r(z(t_k))) \quad t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (3.120)$$

y

$$\nu(k) = g(z(t_k), w_k) + \eta_{2k} - g(z(t_k), H(x(t_k), r(z(t_k))))). \quad (3.121)$$

Una vez demostrada la existencia de una función $\bar{\rho}$ de clase \mathcal{K} que verifica lo siguiente:

$$|\eta(t)| \leq \bar{\rho}(e) \quad \forall t \geq t_{k_0} \quad \text{y} \quad |\nu(k')| \leq \bar{\rho}(e) \quad \forall k \geq k_0,$$

la validez de la tesis del teorema se demuestra prosiguiendo igual que en la primera parte de la demostración del Teorema 3.12.

Debido a la continuidad uniforme de f y g , la existencia de tal función $\bar{\rho}$ quedará demostrada si probamos la existencia de una función γ de clase \mathcal{K} tal que $|w_k - H(x(t_k), r(z(t_k)))| \leq \gamma(\bar{e}) \quad \forall k \geq k_0$.

Veamos la existencia de tal γ . Primero vamos a estimar el módulo de la diferencia entre las componentes de w_k y las correspondientes componentes de $H(x(t_k), r(z(t_k)))$. Por un lado, $w_{ki,j} = y_i(t_k + (j-1)\delta_{i,j}) = h_i(x(t_k + (j-1)\delta_{1,j}))$, por el otro, $H_{i,j}(x(t_k), z(t_k)) = h_i(F_{(j-1)\delta_{1,j}}(x(t_k), r(z_{t_k})))$. Entonces, por la continuidad uniforme de h , existe γ_1 de clase \mathcal{K} tal que

$$|w_{ki,j} - H_{i,j}(x(t_k), z(t_k))| \leq \gamma_1(|x(t_k + (j-1)\delta_{1,j}) - F_{(j-1)\delta_{1,j}}(x(t_k), r(z_{t_k}))|). \quad (3.122)$$

Ahora vamos a estimar $|x(t_k + (j-1)\delta_{1,j}) - F_{(j-1)\delta_{1,j}}(x(t_k), r(z_{t_k}))|$. Por una parte, por ser $(x(t), z(t))$ solución de la ecuación híbrida (3.119), tenemos que para $\tau \in [0, \delta_2)$,

$$x(t_k + \tau) = x(t_k) + \int_0^\tau f(x(t_k + s), r(z(t_k)) + \eta_4(t_k + s))ds + \eta_1(t_k + \tau),$$

por la otra, de la definición de la aplicación F_τ , tenemos que

$$F_\tau(x(t_k), r(z(t_k))) = \xi(\tau) = x(t_k) + \int_0^\tau f(\xi(s), r(z(t_k)))ds.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |x(t_k + \tau) - \xi(\tau)| &\leq \int_0^\tau |f(x(t_k + s), r(z(t_k)) + \eta_4(t_k + s)) - f(\xi(s), r(z(t_k)))|ds \\ &\quad + \int_0^\tau |\eta_1(s)|ds \\ &\leq \int_0^\tau |f(x(t_k + s), r(z(t_k)) + \eta_4(t_k + s)) - f(x(t_k + s), r(z(t_k)))|ds \\ &\quad + \int_0^\tau |f(x(t_k + s), r(z(t_k))) - f(\xi(s), r(z(t_k)))|ds + \bar{\epsilon}\delta_2. \end{aligned} \quad (3.123)$$

Teniendo en cuenta que f es uniformemente continua, y por lo tanto existe γ_2 de clase \mathcal{K} tal que

$$|f(x, u) - f(x', u')| \leq \gamma_2(|x - x'| + |u - u'|) \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}^n \quad \text{y} \quad \forall u, u' \in \mathbb{R}^q,$$

resulta la siguiente acotación

$$\int_0^\tau |f(x(t_k + s), r(z(t_k)) + \eta_4(t_k + s)) - f(x(t_k + s), r(z(t_k)))|ds \leq \gamma_2(\bar{\epsilon})\delta_2. \quad (3.124)$$

Por otra parte, por ser f globalmente Lipschitz en x ,

$$\int_0^\tau |f(x(t_k + s), r(z(t_k))) - f(\xi(s), r(z(t_k)))|ds \leq \int_0^\tau L|x(t_k + s) - \xi(s)|ds. \quad (3.125)$$

Entonces, de (3.123), (3.124), (3.125) y el lema de Gronwall-Belman, para todo $\tau \in [0, \delta_2)$

$$|x(t_k + \tau) - F_\tau(x(t_k), r(z(t_k)))| = |x(t_k + \tau) - \xi(\tau)| \leq (\bar{\epsilon} + \gamma_2(\bar{\epsilon}))\delta_2 e^{L\delta_2}. \quad (3.126)$$

En consecuencia, llamando γ_3 a la función de clase \mathcal{K} , $\gamma_3(\tau) = (\tau + \gamma_2(\tau))\delta_2 e^{L\delta_2}$, obtenemos la estimación

$$|x(t_k + (j-1)\delta_{1,j}) - F_{(j-1)\delta_{1,j}}(x(t_k), r(z_{t_k}))| \leq \gamma_3(\bar{\epsilon}),$$

que combinada con (3.122) permite deducir la desigualdad

$$|w_{ki,j} - H_{i,j}(x(t_k), z(t_k))| \leq \gamma_1 \circ \gamma_3(\bar{\epsilon}),$$

con lo cual, llamando $\gamma(r) = (N_1 + \dots + N_p)\gamma_1 \circ \gamma_3(r)$, resulta $|w_k - H(x(t_k), r(z(t_k)))| \leq \gamma(\bar{\epsilon})$, que es lo que queríamos probar.

Una vez probado el teorema para el caso particular en que f , g y h son uniformemente continuas y f es globalmente Lipschitz en x , uniformemente respecto de u , el caso general se demuestra, con modificaciones obvias, de la misma forma que se probó el caso general a partir del caso particular en el Teorema 3.12. Sintéticamente, se consideran funciones \bar{f} , \bar{h} y \bar{g} que coincidan con, respectivamente, f , h y g en entornos del origen del correspondiente espacio, y que además satisfagan las condiciones de la primer parte de la demostración. A continuación se consideran, como en la demostración del Teorema 3.12, la planta $\bar{\mathcal{P}}$, la planta perturbada $\bar{\mathcal{P}}'$, el controlador $\bar{\mathcal{C}}$ y el controlador perturbado $\bar{\mathcal{C}}'$. Entonces, la demostración concluye teniendo en cuenta que el teorema vale para $\bar{\mathcal{P}}'$ y $\bar{\mathcal{C}}'$ y que las trayectorias del lazo cerrado $(\bar{\mathcal{P}}', \bar{\mathcal{C}}')$ coinciden con las del lazo cerrado $(\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{C}})$, si las cota para las perturbaciones y la norma de condición inicial son suficientemente pequeñas. ■

Observación 3.10 Todos los resultados que hemos obtenido para el caso que analizamos, i.e. los Teoremas 3.16, 3.17 y 3.18, a diferencia de los otros casos, han sido demostrados suponiendo que la planta satisface la condición adicional (CL). La razón por la cual hicimos la hipótesis (CL) es de carácter técnico. Con ella, la aplicación H que interviene en la expresión de la ecuación híbrida que satisfacen las trayectorias del sistema a lazo cerrado planta-controlador, está globalmente definida, y el análisis se ve notablemente simplificado.

Sin embargo, todos los resultados —que recordamos son de carácter local—, permanecen válidos *sin la hipótesis (CL)*. Los argumentos para sostener esta afirmación son los siguientes.

Fijemos $\bar{r} > 0$. Consideremos $\chi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^∞ tal que $\chi \equiv 1$ en $B_{\bar{r}}$ y $\chi \equiv 0$ fuera de $B_{2\bar{r}}$, $\bar{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\bar{f}(x, u) = \chi(x)f(x, u)$ y la planta $\bar{\mathcal{P}}$ que se obtiene considerando en la ecuación (3.83) de la planta \mathcal{P} , \bar{f} en lugar de f . Observamos que es inmediato el cumplimiento de (CL) por parte de $\bar{\mathcal{P}}$, pues, para un control arbitrario $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^q$, las trayectorias de esta planta están globalmente definidas.

Por otra parte, por la forma en que definimos \bar{f} , resulta inmediato que para un control $u(\cdot)$ dado, las trayectorias de la planta $\bar{\mathcal{P}}$ que evolucionan dentro de $B_{\bar{r}}$ son trayectorias de \mathcal{P} y que, reciprocamente, las trayectorias de la planta \mathcal{P} que evolucionan en $B_{\bar{r}}$ son trayectorias de $\bar{\mathcal{P}}$; como consecuencia de esto, las trayectorias del lazo cerrado $(\mathcal{P}, \mathcal{C})$ que evolucionan en $B_{\bar{r}} \times \mathbb{R}^m$ son a su vez trayectorias del lazo cerrado $(\bar{\mathcal{P}}, \mathcal{C})$ y viceversa, con lo

cual se deduce inmediatamente que \mathcal{C} estabiliza exponencialmente \mathcal{P} si y sólo si \mathcal{C} estabiliza exponencialmente $\bar{\mathcal{P}}$. A partir de esta equivalencia, del hecho que las linealizaciones de las plantas \mathcal{P} y $\bar{\mathcal{P}}$ coinciden y de la validez de los teoremas 3.16 y 3.17 para la planta $\bar{\mathcal{P}}$, se deduce la validez de dichos teoremas para la planta \mathcal{P} .

Por último, la validez del Teorema 3.18 resulta de la validez del mismo para la planta $\bar{\mathcal{P}}$ y del hecho que las trayectorias del sistema a lazo cerrado perturbado $(\mathcal{P}', \mathcal{C}')$ que evolucionan en $B_{\bar{r}} \times \mathbb{R}^m$ coinciden con las trayectorias del sistema a lazo cerrado perturbado $(\bar{\mathcal{P}}', \bar{\mathcal{C}}')$ que evolucionan en la misma región.

Observación 3.11 Los resultados que hemos presentado para el problema de estabilización de plantas en tiempo continuo mediante controladores digitales, ya sea que se empleen uno o varios períodos de muestreo, contienen como casos particulares algunos resultados reportados en la literatura. En efecto, nuestro Teorema 3.9 contiene como caso particular el Teorema 6 de [45], el cual fue demostrado con técnicas muy diferentes a las que empleamos nosotros aquí. Por otra parte, los resultados de los trabajos [29], [30] y [32] también son casos particulares de los que hemos obtenido, ya que en todos ellos se considera que la planta es lineal en el control y que el controlador digital es lineal.

3.5 Conclusiones

En este capítulo, aplicando los resultados obtenidos en el capítulo 2, estudiamos las propiedades de estabilidad de los sistemas híbridos originados por ecuaciones híbridas lineales. Los resultados obtenidos contienen como caso particular los de [35].

También analizamos la estabilidad de los sistemas híbridos lineales perturbados, ya sean estas perturbaciones evanescentes o persistentes. Para el caso de perturbaciones evanescentes demostramos que la estabilidad exponencial del sistema lineal implica la estabilidad exponencial del sistema perturbado si las perturbaciones satisfacen cierta condición. A partir de ese resultado obtuvimos, bajo ciertas condiciones, la equivalencia entre la estabilidad exponencial del sistema y la estabilidad exponencial del sistema linealizado (“Primer Método de Lyapunov”). Nuestros resultados sobre perturbaciones evanescentes contienen como corolarios las condiciones suficientes obtenidas en [29, 30, 80, 81, 55] y las de [32] para sistemas con múltiples períodos de muestreo.

Para el caso de perturbaciones persistentes, demostramos que si el sistema lineal es exponencialmente estable entonces el sistema perturbado es uniformemente finalmente acotado y que la cota para el error final tiende a cero si la cota para las perturbaciones tiende a cero.

Los resultados obtenidos para sistemas lineales perturbados fueron luego aplicados al estudio del problema de la estabilización exponencial de una planta no lineal mediante un controlador digital. Para ese problema obtuvimos condiciones tanto necesarias como

suficientes para la existencia de un estabilizador exponencial, ya sea que se empleen uno o más períodos de muestreo para muestrear las salidas y entradas de la planta.

También obtuvimos resultados respecto de la robustez de estos controladores estabilizantes.

Capítulo 4

Implementación Digital de Leyes de Control Estabilizantes

4.1 Introducción

Durante las dos últimas décadas la teoría de control no lineal se desarrolló enormemente, motivada por problemas fundamentales como el de estabilización, seguimiento de trayectorias o salidas, desacoplamiento de perturbaciones, diseño de observadores, etc. Estos problemas fueron estudiados por diferentes autores, y diferentes teorías y métodos fueron desarrollados con el objeto de resolverlos, por ejemplo: control geométrico y linealización exacta ([36], [64]), estabilidad entrada-estado (ISS) y sus variantes ([71], [37]), backstepping ([43]), pasividad ([67]), sliding-mode ([76]), etc.

Sin embargo, las leyes de control realimentado que resultan de la aplicación de estos métodos de diseño son tan complejas, que es prácticamente inevitable su implementación en forma digital ([23], [64]); por lo tanto, resulta de interés tanto práctico como teórico determinar el efecto que produce la implementación digital de una ley de control realimentado en el comportamiento de un sistema de control en tiempo continuo.

Usualmente la implementación digital de una ley de control en tiempo continuo consiste en una ley de control constante por tramos que la aproxima en algún sentido. Comúnmente, esta ley de control aproximada se obtiene discretizando la ley original mediante la técnica de muestreo y retención de orden cero (*sampling and zero order hold*), que abreviaremos MROC y que consiste en lo siguiente: si la ley de control a implementar es $u = \gamma(t, x)$, entonces la aproximación que se emplea es $u(t) = \gamma(t_k, x(t_k)) \forall t \in [t_k, t_{k+1})$, donde $t_k \in \Pi$ y Π es el conjunto de instantes de muestreo.

A lo largo de este capítulo estudiaremos el comportamiento del sistema dinámico híbrido que surge al emplear en un sistema de control en tiempo continuo, la implementación digital vía MROC de una ley de control realimentado estabilizante, específicamente

en el caso en que ambos, el sistema de control y la ley, son tiempo invariantes.

Más precisamente, consideremos el sistema de control no lineal

$$\mathcal{P} : \dot{x} = f_c(x, u) \quad (4.1)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ la variable de estado, $u \in \mathbb{R}^q$ la variable de control y $f(0, 0) = 0$, y una ley de control realimentado estática $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ que estabiliza a \mathcal{P} , es decir, una ley tal que el sistema (4.1) sujeto a la realimentación $u = \gamma(x)$,

$$\Sigma : \dot{x} = f_c(x, \gamma(x)) := g(x), \quad (4.2)$$

tiene al origen como un punto de equilibrio asintóticamente estable.

En este capítulo estudiaremos el comportamiento del sistema dinámico híbrido Σ_{Π} ,

$$\Sigma_{\Pi} : \dot{x}(t) = f_c(x(t), \gamma(x(t_k))) := f(x(t), x(t_k)) \quad t \in [t_k, t_{k+1}) \quad k \in \mathbf{Z}^+, \quad (4.3)$$

que surge de aplicar en (4.1) la implementación digital mediante MROC de la ley γ .

No consideraremos explícitamente el caso en que la ley de control estabilizante es dinámica, i.e., aquel en el que la ley de control es de la forma

$$\begin{cases} \dot{z} = N(z, x) \\ u = M(z, x) \end{cases}, \quad (4.4)$$

con $z \in \mathbb{R}^s$, y el sistema a lazo cerrado (4.1)-(4.4)

$$\begin{cases} \dot{x} = f_c(x, M(z, x)) \\ \dot{z} = N(z, x) \end{cases} \quad (4.5)$$

tiene a $(0, 0)$ como un punto de equilibrio asintóticamente estable, porque el estudio de la implementación digital vía MROC de la ley dinámica (4.4) se reduce al estudio de la implementación digital vía MROC de cierta ley de control estabilizante estática. En efecto, si consideramos la implementación digital vía MROC de (4.4),

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = N(z(t), x(t_k)) \\ u(t) = M(z(t_k), x(t_k)) \end{cases} \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (4.6)$$

resulta que el sistema a lazo cerrado (4.1)-(4.6)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_c(x(t), M(z(t_k), x(t_k))) \\ \dot{z}(t) = N(z(t), x(t_k)) \end{cases} \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (4.7)$$

coincide con el sistema a lazo cerrado que resulta de emplear en el sistema de control ampliado

$$\begin{cases} \dot{x} = f_c(x, u) \\ \dot{z} = N(z, v) \end{cases} \quad (4.8)$$

la implementación digital vía MROC de la ley de control estática $(u, v) = (M(z, x), x)$, que es estabilizante para (4.8).

En las secciones siguientes vamos a demostrar que las trayectorias del sistema Σ_{Π} son: a) semiglobalmente uniformemente acotadas y, b) uniformemente finalmente acotadas con error final que tiende a cero cuando $\|\Pi\|$ tiende a cero. A partir de las construcciones que efectuemos para demostrar este resultado, obtendremos por un lado cotas explícitas para el paso de muestreo y por el otro una condición suficiente para la convergencia de las trayectorias al origen en lugar de a un entorno de éste, i.e., una condición suficiente para que la implementación digital vía MROC estabilice el sistema. Por último, mostraremos que esta condición es satisfecha, por ejemplo, por las leyes de control realimentado que estabilizan exponencialmente al sistema.

4.2 Análisis de estabilidad del sistema a lazo cerrado

Como dijimos en la introducción, estudiaremos el comportamiento del sistema híbrido Σ_{Π} determinado por la ecuación (4.3), bajo la hipótesis que γ es un estabilizador del sistema \mathcal{P} , es decir, suponiendo que el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable de Σ .

Con el objeto de asegurar la existencia y unicidad de las trayectorias del sistema Σ , de aquí en más supondremos que tanto $f_c : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$ en (4.1) como γ son funciones localmente Lipschitz. Con tales hipótesis, g en (4.2) resultará localmente Lipschitz y la existencia y unicidad de las trayectorias de Σ quedará asegurada.

En primer lugar estudiaremos el caso en que γ es un estabilizador global de \mathcal{P} , es decir, el caso en el que el origen es un punto de equilibrio globalmente uniformemente asintóticamente estable (GUAE) de Σ .

En lo que sigue, vamos a demostrar el siguiente resultado.

Teorema 4.1 Supongamos que γ es un estabilizador global de \mathcal{P} .

Entonces existen M de clase \mathcal{K}_{∞} y $0 < \bar{\delta}(s, r)$, $0 < s \leq r$, tales que se verifica lo siguiente: dados $0 < \varepsilon \leq R$ y $0 < \delta < \bar{\delta}(\varepsilon, R)$, si $\|\Pi\| \leq \delta$ y $x(t, t_{k_0}, x_0)$ es la trayectoria de Σ_{Π} que en el instante t_{k_0} se inicia en $x_0 \in B_R$ entonces:

1. $|x(t, t_{k_0}, x_0)| \leq M(R) \forall t \geq t_{k_0}$;
2. existe $\bar{T} = \bar{T}(\varepsilon, R, \delta) \geq 0$ tal que $|x(t, t_{k_0}, x_0)| \leq \varepsilon \forall t \geq t_{k_0} + \bar{T}$.

Observación 4.1 En otras palabras, el Teorema 4.1 afirma lo siguiente, dadas las regiones del espacio de estados B_R y B_{ε} , con $0 < \varepsilon \leq R$, existe una cota $\bar{\delta}$ para el paso de muestreo tal que si éste no la supera, entonces las trayectorias que se inician en B_R ,

además de permanecer uniformemente acotadas, luego de transcurrido cierto tiempo ingresan en la bola B_ε y permanecen allí para siempre. Entonces, si pensamos a la s.i.m. Π como un parámetro, tenemos que la familia de controladores compuesta por las implementaciones digitales vía MROC de γ estabiliza a \mathcal{P} semiglobalmente —pues R puede hacerse tan grande como se quiera— y prácticamente —pues ε puede elegirse tan pequeño como se quiera.

La demostración que haremos del teorema estará basada en una serie de resultados que iremos probando a lo largo de la sección. Si bien es posible dar demostraciones más cortas del teorema, preferimos dar ésta por dos razones: 1) permite obtener cotas explícitas para el paso de muestreo, 2) permite derivar una condición suficiente para la convergencia de las trayectorias al origen.

Demostración del Teorema 4.1:

Como estamos suponiendo que γ es un estabilizador global de \mathcal{P} , el origen de coordenadas es un punto de equilibrio GUAÉ de Σ y por lo tanto, por los teoremas inversos de Lyapunov (ver por ej. [54], [44], [26]), existe una función de Lyapunov global para Σ , es decir, existe una función escalar $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ de clase C^1 tal que para ciertas funciones α_1 , α_2 y α_3 de clase \mathcal{K}_∞ ,

1. $\alpha_1(|x|) \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$;
2. $\nabla V(x) \cdot g(x) \leq -\alpha_3(|x|) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Fijemos una de tales funciones V de Lyapunov para Σ y consideremos para cada par de números $0 \leq r \leq r'$ los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} J(r) &= \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq r\}, \\ \partial J(r) &= \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) = r\}, \\ K_{r,r'} &= \{x \in \mathbb{R}^n : r \leq V(x) \leq r'\}, \end{aligned}$$

los cuales resultan compactos, pues, son cerrados por la continuidad de V y acotados por la propiedad 1.

Debido a las propiedades 1. y 2. de la función de Lyapunov V , los conjuntos $J(r)$ que recién introdujimos gozan de las siguientes propiedades con respecto a Σ :

1. Para cada $r \geq 0$, $J(r)$ es positivamente invariante;
2. para cada $r \geq 0$, $J(r)$ es globalmente uniformemente asintóticamente estable.

Estas propiedades de los conjuntos $J(r)$, la invariancia y la estabilidad asintótica, no se mantienen al reemplazar Σ por Σ_{Π} , pues, ni $J(r)$ resulta necesariamente invariante respecto de Σ_{Π} para $r > 0$, ni $J(r)$ resulta necesariamente GUAE en caso de resultar invariante con respecto a Σ_{Π} . Sin embargo, si en lugar de considerar las propiedades de los conjuntos $J(r)$ respecto del sistema Σ_{Π} cuando Π es una s.i.m. arbitraria, consideramos las propiedades de estos conjuntos respecto de los sistemas Σ_{Π} cuando $\|\Pi\| \rightarrow 0$, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 4.1 Sea V una función de Lyapunov global para Σ .

Entonces, para cada par $0 < \varepsilon \leq R$ existe $\delta^* = \delta^*(\varepsilon, R) > 0$ tal que:

1. Para cada $r \in [\varepsilon, R]$, $J(r)$ es invariante respecto de Σ_{Π} si $\|\Pi\| < \delta^*$.
2. Para cada $0 < \delta < \delta^*$ existe $T^* = T^*(\varepsilon, R, \delta)$ tal que si $\|\Pi\| \leq \delta$ entonces

$$x(t, t_{k_0}, x_0) \in J(\varepsilon) \quad \forall t \geq t_{k_0} + T^* \text{ y } \forall x_0 \in J(R). \quad (4.9)$$

Con el objeto de demostrar la Proposición 4.1, consideremos la función $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(x, y) = \nabla V(x) \cdot (g(x) + y) \quad (4.10)$$

y las funciones no negativas G , P y L definidas para $r > 0$ de la siguiente manera:

$$G(r) = \max\{|g(x)| : x \in J(r)\}, \quad (4.11)$$

$$\tilde{L}(r) = \sup \left\{ \frac{|\theta(x, \xi)|}{|x - \xi|} : x, \xi \in J(r), x - \xi \neq 0 \right\}$$

$$L(r) = \lim_{r' \rightarrow r^+} \tilde{L}(r') \quad (4.12)$$

$$P(r) = \sup\{\eta \in \mathbb{R}^+ : \partial J(r) \times B_{\eta} \subset h^{-1}(\mathbb{R}_{<0})\}, \quad (4.13)$$

donde $\theta(x, \xi) = f(x, \xi) - g(x)$ y $\mathbb{R}_{<0} = (-\infty, 0)$.

Notamos que de las definiciones de las funciones G , L y P se deduce inmediatamente que

$$|g(x)| \leq G(r) \quad \forall x \in J(r), \quad (4.14)$$

$$|\theta(x, \xi)| \leq L(r)|x - \xi| \quad \forall x, \xi \in J(r), \quad (4.15)$$

$$h(x, y) < 0 \quad \forall x \in \partial J(r) \text{ y } \forall |y| < P(r). \quad (4.16)$$

Las propiedades de las funciones G , P y L que enunciamos a continuación serán utilizadas más adelante.

Lema 4.1 G es no decreciente y continua, L es no decreciente y continua por la derecha y P es positiva y semicontinua inferiormente.

Demostración: Que G es no decreciente se deduce inmediatamente de la definición de G y de la inclusión $J(r') \subseteq J(r)$ si $0 \leq r' \leq r$. Veamos la continuidad de G . Sea $r_0 > 0$ y probemos que $\lim_{r \rightarrow r_0^+} G(r) = G(r_0^+) = \lim_{r \rightarrow r_0^-} G(r) = G(r_0^-) = G(r_0)$.

Comenzamos probando que $G(r_0^+) = G(r_0)$. Como $G(r) \geq G(r_0)$, bastará probar que $G(r_0^+) \leq G(r_0)$. Primero vamos a demostrar lo siguiente: para cada $\varepsilon > 0$ existe $\Delta r > 0$ tal que $J(r + \Delta r) \subseteq [J(r)]_\varepsilon$, donde $[J(r)]_\varepsilon$ es el ε -entorno cerrado de $J(r)$, i.e. $[J(r)]_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : d_{J(r)}(x) \leq \varepsilon\}$. Si no fuese cierto, para cada $\Delta r_n = 1/n$, existe un x_n tal que $V(x_n) \leq r + 1/n$ y $d_{J(r)}(x_n) > \varepsilon$. Por compacidad, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que $x_{n_k} \rightarrow x^*$. Entonces, por la continuidad de V , $V(x^*) \leq r$ y por lo tanto $x^* \in J(r)$. Por otra parte, $d_{J(r)}(x^*) = \lim_{k \rightarrow +\infty} d_{J(r)}(x_{n_k}) \geq \varepsilon$, con lo cual $x^* \notin J(r)$ llegando a una contradicción. Por lo tanto la existencia de tal $\Delta r > 0$ queda asegurada.

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, por la continuidad uniforme de g en $[J(r)]_1$, existe $0 < \varepsilon < 1$ tal que $|g(x) - g(x')| < \varepsilon$ para todo par $x, x' \in [J(r)]_1$ tal que $|x - x'| \leq \varepsilon$. Sea $\Delta r > 0$ tal que $J(r + \Delta r) \subseteq [J(r)]_\varepsilon$. Si probamos que para todo $r_0 < r \leq r_0 + \Delta r$, $G(r) \leq G(r_0) + \varepsilon$, la continuidad por derecha de G quedará establecida. Fijemos r con $r_0 < r \leq r_0 + \Delta r$ y sea x_r tal que $|g(x_r)| = G(r)$. Como $J(r) \subseteq [J(r_0)]_\varepsilon$, existe $x \in J(r_0)$ tal que $|x - x_r| \leq \varepsilon$ y por lo tanto $G(r) \leq |g(x)| + \varepsilon \leq G(r_0) + \varepsilon$.

Ahora probaremos que $G(r_0^-) = G(r_0)$ (suponiendo $r_0 > 0$). Por la monotonía de G , bastará probar que $G(r_0^-) \geq G(r_0)$. Sea $x_0 \in J(r_0)$ tal que $|g(x_0)| = G(r_0)$. Consideremos la función $v(s) = V(\xi(s))$, donde $\xi(s)$ es la curva $\xi(s) = x_0 + sg(x_0)$. Como $\dot{v}(0) = \nabla V(x_0)g(x_0) < 0$, tenemos que $v(s)$ es estrictamente decreciente en el intervalo $[0, s^*]$ para algún $s^* > 0$ suficientemente pequeño. Por lo tanto, para cada $r \in [v(s^*), r_0]$ existe un único $s = s(r)$ tal que $s \in [0, s^*]$ y $v(s) = r$. Entonces, teniendo en cuenta que $\xi(s(r)) \in J(r)$ y que $s \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow r_0$, resulta que $G(r_0^-) = \lim_{r \rightarrow r_0^-} G(r) \geq \lim_{r \rightarrow r_0^-} |g(\xi(s(r)))| = |g(x_0)| = G(r_0)$, con lo cual queda demostrada la continuidad de G .

Pasamos a demostrar ahora las aseveraciones hechas sobre de P . Fijemos $r > 0$. A partir de la propiedad 2. de V es inmediato que $\partial J(r) \times \{0\} \subset h^{-1}(\mathbb{R}_{<0})$. Entonces, de la compacidad de $\partial J(r)$ y del hecho que $h^{-1}(\mathbb{R}_{<0})$ es abierto, por el lema del tubo (ver por ej.[62]) se deduce la existencia de $\eta > 0$ tal que $\partial J(r) \times B_\eta \subset h^{-1}(\mathbb{R}_{<0})$; en consecuencia $0 < \eta \leq P(r)$ y la positividad de P queda probada.

Veamos ahora la semicontinuidad inferior. Fijemos $r_0 > 0$. La semicontinuidad inferior de P en r_0 quedará probada, si probamos que para cada $\eta > 0$ tal que $\eta < P(r_0)$, existe $\Delta r > 0$ tal que $P(r) \geq \eta$ para todo $r \in [r_0 - \Delta r, r_0 + \Delta r]$. Sea entonces η tal que $0 < \eta < P(r_0)$. Como $\partial J(r_0) \times B_\eta \subset h^{-1}(\mathbb{R}_{<0})$, existe un conjunto abierto U tal que $J(r_0) \subset U$ y $U \times B_\eta \subset h^{-1}(\mathbb{R}_{<0})$. En efecto, si $x \in J(r_0)$, de la inclusión $\{x\} \times B_\eta \subset h^{-1}(\mathbb{R}_{<0})$ y del lema del tubo, se deduce la existencia de $r_x > 0$ tal que

$B_{r_x}(x) \times B_\eta \subset h^{-1}(\mathbb{R}_{<0})$. Entonces, $U = \cup_{x \in J(r_0)} \text{int}(B_{r_x}(x))$ es abierto y se verifica la inclusión $U \times B_\eta \subset h^{-1}(\mathbb{R}_{<0})$.

Con argumentos similares a los que empleamos en la primera parte de la demostración, se deduce la existencia de $\Delta r > 0$ tal que para cada $r \in [r_0 - \Delta r, r_0 + \Delta r]$, $\partial J(r) \subset U$. Por lo tanto, $\forall r \in [r_0 - \Delta r, r_0 + \Delta r]$, $\partial J(r) \times B_\eta \subset h^{-1}(\mathbb{R}_{<0})$, y, en consecuencia, de esto y de la definición de P resulta $P(r) \geq \eta \forall r \in [r_0 - \Delta r, r_0 + \Delta r]$, que es lo que queríamos demostrar.

Por último, respecto de L sólo demostraremos la buena definición de \tilde{L} para cada $r > 0$, ya que el resto es inmediato de las mismas definiciones y de las relaciones de inclusión que verifican los conjuntos $J(r)$.

Fijemos $r > 0$. Entonces, como γ es Lipschitz en $J(r)$ y f_c es Lipschitz en $J(r) \times \gamma(J(r))$, existe una constante $M \geq 0$ tal que $|\theta(x, \xi)| = |f_c(x, \gamma(\xi)) - f_c(x, \gamma(x))| \leq M|x - \xi| \forall x, \xi \in J(r)$, y por lo tanto $\tilde{L}(r)$ resulta finita. ■

Ya introducidas las funciones G , L y P , consideremos para cada par ε , R con $0 < \varepsilon \leq R$,

$$A_{\varepsilon, R} = \left\{ \delta \geq 0 : \delta e^{L(r)\delta} < \frac{P(r)}{L(r)G(r)} \forall r \in [\varepsilon, R] \right\}$$

y

$$\delta^*(\varepsilon, R) = \sup A_{\varepsilon, R}. \quad (4.17)$$

Observamos que $\delta^*(\varepsilon, R) > 0$, pues, G y L son acotadas en $(0, R]$ y

$$\min\{P(r) : r \in [\varepsilon, R]\} > 0$$

por la positividad y semicontinuidad inferior de P .

También observamos que de la definición de δ^* resultan las siguientes propiedades de monotonía que será empleadas más adelante,

$$\delta^*(\varepsilon, R) \leq \delta^*(\varepsilon, R') \quad \forall R \geq R' \quad (4.18)$$

$$\delta^*(\varepsilon', R) \leq \delta^*(\varepsilon, R) \quad \forall 0 < \varepsilon' \leq \varepsilon. \quad (4.19)$$

En lo que sigue vamos a demostrar que con tal δ^* se verifica el punto 1. de la Proposición 4.1.

Antes necesitamos el siguiente lema técnico.

Lema 4.2 Supongamos que para cierto $t \in [t_k, t_{k+1}]$, la trayectoria $x(\tau) = x(\tau, t_{k_0}, x_0)$ de Σ_Π verifica $x(\tau) \in J(r) \forall t_k \leq \tau < t \leq t_{k+1}$.

Entonces

$$|\theta(x(t), x(t_k))| \leq L(r)G(r)(t - t_k)e^{L(r)(t-t_k)}. \quad (4.20)$$

Demostración: Como $x(\tau)$ en el intervalo $[t_k, t)$ es solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x, x(t_k)) = g(x) + \theta(x, x(t_k))$, para todo $\tau \in [t_k, t)$

$$x(\tau) - x(t_k) = \int_{t_k}^{\tau} g(x(s))ds + \int_{t_k}^{\tau} \theta(x(s), x(t_k))ds.$$

Entonces, tomando módulo y teniendo en cuenta que $x(s) \in J(r)$ para $t_k \leq s \leq \tau < t$, (4.14) y (4.15), tenemos que para todo $\tau \in [t_k, t)$

$$|x(\tau) - x(t_k)| \leq (t - t_k)G(r) + \int_{t_k}^{\tau} L(r)|x(s) - x(t_k)|ds,$$

en consecuencia, por el lema de Gronwall-Belman, $|x(t) - x(t_k)| \leq (t - t_k)G(r)e^{L(r)(t-t_k)}$. Combinando esta última desigualdad con (4.15) resulta (4.20).■

Demostración de 1. de la Proposición 4.1

Supongamos que la s.i.m Π es tal que $\|\Pi\| < \delta^*(\varepsilon, R)$. Que $J(r)$ es invariante respecto de Σ_{Π} para $\varepsilon \leq r \leq R$, quedará probado si mostramos que para cada $x_0 \in J(r)$ con $\varepsilon \leq r \leq R$, $x(t, t_{k_0}, x_0) \in J(r) \forall t \in [t_{k_0}, t_{k_0+1}]$ y $\forall t_{k_0} \in \Pi$.

Fijemos $t_{k_0} \in \Pi$ y $x_0 \in J(r)$ y consideremos $x(t) = x(t, t_{k_0}, x_0)$. Consideremos también el intervalo de números reales

$$\mathcal{I} = \{t \in [t_{k_0}, t_{k_0+1}] : x(\tau) \in J(r) \forall \tau \in [t_{k_0}, t]\}. \quad (4.21)$$

Notamos que $\mathcal{I} \neq \emptyset$ pues $t_{k_0} \in \mathcal{I}$, y que \mathcal{I} es cerrado, i.e. $\mathcal{I} = [t_{k_0}, t^*]$, por ser $x(\cdot)$ continua y $J(r)$ cerrado. Si probamos que $t^* = t_{k_0+1}$, quedará demostrado el punto. Supongamos por el contrario que $t^* < t_{k_0+1}$. Entonces debido a la continuidad de $x(\cdot)$, $x(t^*) \in \partial J(r)$, en otras palabras, $V(x(t^*)) = r$. Definiendo $v(t) = V(x(t))$, resulta

$$\begin{aligned} \dot{v}(t^*) &= \nabla V(x(t^*)) \cdot f(x(t^*), x(t_{k_0})) \\ &= \nabla V(x(t^*)) \cdot [g(x(t^*)) + \theta(x(t^*), x(t_{k_0}))] \\ &= h(x(t^*), \theta(x(t^*), x(t_{k_0}))). \end{aligned}$$

Como $x(t^*) \in J(r)$ y, por el Lema 4.2 y la definición de δ^* ,

$$|\theta(x(t^*), x(t_{k_0}))| \leq \|\Pi\|L(r)G(r)e^{L(r)\|\Pi\|} < P(r),$$

por (4.15), $\dot{v}(t^*) = h(x(t^*), \theta(x(t^*), x(t_{k_0})) < 0$. Por lo tanto existe t^{**} con $t^* < t^{**} \leq t_{k_0+1}$, tal que $v(t) \leq v(t^*) = r$ para todo $t \in [t^*, t^{**}]$. En consecuencia, $x(t) \in J(r)$ para todo $t \in [t^*, t^{**}]$ y por ende $[t_{k_0}, t^{**}] \subset \mathcal{I}$, llegando a un absurdo. Por lo tanto $t^* = t_{k_0+1}$ que es

lo que queríamos probar. ■

Nos resta demostrar el punto 2. de la Proposición 4.1. Es decir, nos resta probar que todas las trayectorias que se inician en $J(R)$ llegan en tiempo finito a $J(\varepsilon)$, y que este tiempo está uniformemente acotado si $\|\Pi\|$ pertenece al intervalo $(0, \delta]$ con $\delta < \delta^*$.

Para ello vamos a necesitar un par de lemas técnicos.

Lema 4.3 Sea $0 < \delta < \delta^*(\varepsilon, R)$, entonces existen constantes positivas $\bar{\Delta}$ y \bar{c} tales que para cada $r \in [\varepsilon, R]$ se verifica:

1. $-\max\{h(x, y) : x \in K_{r-\bar{\Delta}, r}, |y| \leq \delta L(r)G(r)e^{L(r)\delta}\} = c(r) \geq \bar{c}$;
2. $\delta L(r)G(r)e^{L(r)\delta} < P(r')$ para todo $r' \in [r - \bar{\Delta}, r]$.

Demostración: Consideremos la función $\nu(r) = \delta L(r)G(r)e^{L(r)\delta}$. Notamos que ν es no decreciente y continua por la derecha debido a las propiedades de L y G .

En primer lugar vamos a mostrar que para cada $r \in [\varepsilon, R]$, existe $\Delta(r) > 0$ tal que:

- $-\max\{h(x, y) : x \in K_{r-\Delta(r), r+\Delta(r)}, |y| \leq \nu(r + \Delta(r))\} = \bar{c}(r) > 0$.
- $\nu(r + \Delta(r)) < P(r')$ para todo $r' \in [r - \Delta(r), r + \Delta(r)]$.

Fijemos $r \in [\varepsilon, R]$. Como $\delta < \delta^*(\varepsilon, R)$, existe $\eta_r > 0$ tal que

$$\nu(r) < \eta_r < P(r).$$

Entonces, por la semicontinuidad inferior de P , existe $\Delta_1 > 0$ tal que $\eta_r < P(r')$ para todo $r' \in [r - \Delta_1, r + \Delta_1]$. Por otra parte, debido a la continuidad por derecha de ν existe $\Delta_2 > 0$ tal que $\nu(r + \Delta_2) < \eta_r$. Entonces, tomando $\Delta(r) = \min(\Delta_1, \Delta_2)$ y teniendo en cuenta la monotonía de ν respecto de r , resulta

$$\nu(r + \Delta(r)) = \eta_r^* < \eta_r < P(r') \quad \forall r' \in [r - \Delta(r), r + \Delta(r)], \quad (4.22)$$

con lo cual el segundo item queda demostrado.

Respecto del primer item, observamos que de (4.22), la monotonía de ν y (4.16), se deduce que $h(x, y) < 0$ si $x \in K_{r-\Delta(r), r+\Delta(r)}$ y $|y| \leq \eta_r^*$. Por lo tanto $K_{r-\Delta(r), r+\Delta(r)} \times B_{\eta_r^*} \subset h^{-1}(\mathbb{R}_{<0})$ y

$$\bar{c}(r) = -\max\{h(x, y) : (x, y) \in K_{r-\Delta(r), r+\Delta(r)} \times B_{\eta_r^*}\} > 0.$$

Consideremos el cubrimiento por abiertos de $[\varepsilon, R]$, $\{(r - \Delta(r)/2, r + \Delta(r)/2)\}$. Como $[\varepsilon, R]$ es compacto, existen r_1, \dots, r_N , con $\varepsilon \leq r_i \leq R$, tales que

$$[\varepsilon, R] \subset \bigcup_{i=1}^N (r_i - \Delta(r_i)/2, r_i + \Delta(r_i)/2).$$

Sean $\bar{\Delta} = \min\{\Delta(r_i)/2 : i = 1, \dots, N\} > 0$ y $\bar{c} = \min\{\bar{c}(r_i) : i = 1, \dots, N\} > 0$. Veamos que la tesis del lema se verifica con tales $\bar{\Delta}$ y \bar{c} .

Fijemos $r \in [\varepsilon, R]$. Entonces para algún $1 \leq i \leq N$,

$$[r - \bar{\Delta}, r] \subseteq [r_i - \Delta(r_i), r_i + \Delta(r_i)].$$

En consecuencia $\nu(r) \leq \nu(r_i + \Delta(r_i)) < P(r')$ para todo $r' \in [r_i - \Delta(r_i), r_i + \Delta(r_i)]$ y por lo tanto se verifica el punto 2. de la tesis del lema.

Por otra parte,

$$\begin{aligned} c(r) &= -\max\{h(x, y) : x \in K_{r-\bar{\Delta}, r}, |y| \leq \nu(r)\} \\ &\geq -\max\{h(x, y) : x \in K_{r-\Delta(r_i), r+\Delta(r_i)}, |y| \leq \nu(r + \Delta(r_i))\} \\ &= \bar{c}(r_i) \geq \bar{c} > 0, \end{aligned}$$

con lo que queda verificado el punto 1. de la tesis del lema, que era lo que nos restaba demostrar. ■

Lema 4.4 Para $0 < \delta < \delta^*(\varepsilon, R)$, sean $\bar{\Delta}$, \bar{c} y $c(r)$ como en el Lema 4.3.

Entonces, si definimos $c^*(r) = \min\{\bar{\Delta}/\delta, c(r)\}$ para $r \in [\varepsilon, R]$, vale lo siguiente:

1. $c^*(r) \geq \min\{\bar{c}, \bar{\Delta}/\delta\} > 0$.
2. Si $\|\Pi\| \leq \delta$ y $V(x_0) = r$ con $\varepsilon \leq r \leq R$,

$$V(x(t_{k+1}, t_k, x_0)) - V(x_0) \leq -c^*(r)(t_{k+1} - t_k).$$

Demostración: La validez del punto 1. es inmediata, pues, por el Lema 4.3, $c(r) \geq \bar{c} > 0$. Pasamos a demostrar el punto 2.

Supongamos $\|\Pi\| \leq \delta$ y $V(x_0) = r$ con $\varepsilon \leq r \leq R$. Sean $x(t) = x(t, t_k, x_0)$ y $v(t) = V(x(t))$, entonces vale lo siguiente:

- (a) Si $x(\tau) \in K_{r-\bar{\Delta}, r} \forall t_k \leq \tau < t \leq t_{k+1}$ entonces $v(t) - v(t_k) \leq -c(r)(t - t_k)$.
- (b) Si para algún $t^* \in [t_k, t_{k+1})$, $v(t^*) = r - \bar{\Delta}$, entonces $v(t) \leq r - \bar{\Delta} \forall t \in [t^*, t_{k+1}]$.

Veamos (a) Por el Lema 4.2 tenemos que para todo $t_k \leq \tau < t$,

$$\begin{aligned} |\theta(x(\tau), x(t_k))| &\leq (\tau - t_k)L(r)G(r)e^{L(r)(\tau-t_k)} \\ &\leq \delta L(r)G(r)e^{L(r)\delta}. \end{aligned}$$

Entonces, por el punto 1. del Lema 4.3,

$$\dot{v}(\tau) = h(x(\tau), \theta(x(\tau), x(t_k))) \leq -c(r) \quad \forall \tau \in [t_k, t),$$

y, por ende, $v(t) - v(t_k) = \int_{t_k}^t \dot{v}(\tau) d\tau \leq c(\tau)(t - t_k)$.

Veamos ahora (b) Supongamos que para algún $t^* \in [t_k, t_{k+1})$, $v(t^*) = r - \bar{\Delta}$. Consideremos el conjunto

$$\mathcal{A} = \{t \in [t^*, t_{k+1}] : v(\tau) \leq r - \bar{\Delta} \quad \forall t^* \leq \tau \leq t\}.$$

Por la continuidad de v , \mathcal{A} resulta un intervalo cerrado, i.e. $\mathcal{A} = [t^*, t^{**}]$. Entonces, si $t^{**} = t_{k+1}$, quedará demostrado el punto (b). Supongamos por el contrario que $t^{**} < t_{k+1}$. Entonces necesariamente $v(t^{**}) = r - \bar{\Delta}$ o, equivalentemente, $x(t^{**}) \in \partial J(r - \bar{\Delta})$. Como además $|\theta(x(t^*), x(t_k))| \leq \delta L(r)G(r)e^{L(r)\delta}$, por el punto 2. del Lema 4.3, $|\theta(x(t^*), x(t_k))| < P(r - \bar{\Delta})$ y por lo tanto, por (4.16), $\dot{v}(t^{**}) = h(x(t^{**}), \theta(x(t^*), x(t_k))) < 0$. Pero entonces para algún $\Delta t > 0$ suficientemente pequeño, $v(t) \leq v(t^{**}) = r - \bar{\Delta}$ para todo $t^{**} \leq t \leq t^{**} + \Delta t < t_{k+1}$, con lo cual $[t^*, t^{**} + \Delta t] \subseteq \mathcal{A}$, llegando a una contradicción. Luego $t^{**} = t_{k+1}$ y el punto (b) queda demostrado.

Ahora, de (a) y (b) vamos a demostrar la validez del punto 2. de la tesis del lema, i.e. que $v(t_{k+1}) - v(t_k) \leq -c^*(r)(t_{k+1} - t_k)$.

Consideremos dos casos:

- c1) $c^*(r) = c(r)$, es decir $c(r)\delta \leq \bar{\Delta}$;
- c2) $c^*(r) = \bar{\Delta}/\delta < c(r)$.

Supongamos que nos encontramos en el caso c1). Entonces tenemos dos posibilidades, i) para algún $t_k < t^* < t_{k+1}$, $v(t^*) = r - \bar{\Delta}$, ii) $v(t) > r - \bar{\Delta}$ para todo $t \in [t_k, t_{k+1}]$. Si estamos en el caso i), por el punto (b) recién demostrado, $v(t_{k+1}) \leq r - \bar{\Delta}$. Por lo tanto $v(t_{k+1}) - v(t_k) \leq -\bar{\Delta} \leq -c(r)\delta \leq -c^*(r)(t_{k+1} - t_k)$.

Si por el contrario sucede ii), entonces $x(t) \in K_{r-\bar{\Delta}, r} \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}]$ y por lo tanto, por el punto (a), $v(t_{k+1}) - v(t_k) \leq -c(r)(t_{k+1} - t_k) = -c^*(r)(t_{k+1} - t_k)$.

Si nos encontramos en el caso c2) y sucede i), tenemos que $v(t_{k+1}) \leq r - \bar{\Delta}$. Por lo tanto $v(t_{k+1}) - v(t_k) \leq -\bar{\Delta} \leq -(\bar{\Delta}/\delta)(t_{k+1} - t_k) = -c^*(r)(t_{k+1} - t_k)$. Si sucede ii), con los mismos argumentos que empleamos en el caso c.2) ii), $v(t_{k+1}) - v(t_k) \leq -c(r)(t_{k+1} - t_k) = -c^*(r)(t_{k+1} - t_k)$. ■

Demostración de 2. de la Proposición 4.1:

Sea $c^*(r)$ como en el Lema 4.4. Recordemos que debido al punto 1. de tal lema, $\inf_{r \in [\bar{c}, R]} c^*(r) = c^* \geq \min\{\bar{c}, \bar{\Delta}/\delta\} > 0$. Entonces afirmamos que el punto 2. de la tesis de la Proposición 4.1 se verifica con $T^* = T^*(\epsilon, R, \delta) = (R - \epsilon)/c^* + \delta$. En efecto, fijemos $x_0 \in J(R)$. Si $V(x_0) \leq \epsilon$, $x(t, t_{k_0}, x_0) \in J(\epsilon)$ para todo $t \geq t_{k_0}$ y no hay nada que probar. Supongamos entonces que $x_0 \in J(R) - J(\epsilon)$, o, equivalentemente, que $\epsilon < V(x_0) \leq R$. Sea t_{k^*} el primer instante de Π tal que $t_{k^*} \geq t_{k_0} + (R - \epsilon)/c^*$, entonces, necesariamente $t_{k^*} \leq t_{k_0} + T^*$. Sean $x(t) = x(t, t_{k_0}, x_0)$ y $v(t) = V(x(t))$, entonces por ser $J(R)$ invariante,

$v(t) \leq R$ para todo $t \geq t_{k_0}$. Supongamos que $v(t_k) = r_k > \varepsilon$ para todo $t_{k_0} \leq t_k \leq t_{k^*}$. Entonces, por el punto 2. del Lema 4.4,

$$\begin{aligned} v(t_{k^*}) &= v(t_{k_0}) + \sum_{k=k_0}^{k^*-1} v(t_{k+1}) - v(t_k) \\ &\leq r_0 - \sum_{k=k_0}^{k^*-1} c^*(r_k)(t_{k+1} - t_k) \\ &\leq r_0 - c^*(t_{k^*} - t_{k_0}) \\ &\leq r_0 - R + \varepsilon \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

lo cual es absurdo. Por lo tanto, para algún t_k con $t_{k_0} \leq t_k \leq t_{k^*} \leq t_{k_0} + T^*$, $v(t_k) \leq \varepsilon$, i.e. $x(t_k) \in J(\varepsilon)$, con lo cual, por la invariancia de $J(\varepsilon)$, $x(t) \in J(\varepsilon)$ para todo $t \geq t_k$. ■

Una vez demostrada la Proposición 4.1, concluimos la demostración del Teorema 4.1.

Conclusión de la demostración del Teorema 4.1

Sean α_1 y α_2 funciones de clase K_∞ tales que $\alpha_1(|x|) \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|) \forall x \in \mathbb{R}^n$. Para $0 < \varepsilon \leq R$ consideremos las constantes positivas

$$\varepsilon' = \alpha_1(\varepsilon) \quad \text{y} \quad R' = \alpha_2(R), \quad (4.23)$$

y notemos que con ellas se verifican las inclusiones $J(\varepsilon') \subseteq B_\varepsilon$ y $B_R \subseteq J(R')$.

Entonces la tesis del Teorema 4.1 se verifica con $M(r) = \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2(r)$, $\bar{\delta}(\varepsilon, R) = \delta^*(\varepsilon', R')$ y $\bar{T}(\varepsilon, R, \delta) = T^*(\varepsilon', R', \delta)$, con los mismos δ^* y T^* de la Proposición 4.1.

En efecto, supongamos que $\|\Pi\| \leq \delta < \bar{\delta}(\varepsilon, R)$ y que $x_0 \in B_R$. Entonces, como $x_0 \in J(R')$, por el punto 1. de la proposición 4.1, tenemos que $|V(x(t, t_{k_0}, x_0))| \leq R' \forall t \geq t_{k_0}$. Pero entonces $\alpha_1(|x(t, t_{k_0}, x_0)|) \leq |V(x(t, t_{k_0}, x_0))| \leq R' \forall t \geq t_{k_0}$, o, lo que es equivalente, $|x(t, t_{k_0}, x_0)| \leq \alpha_1^{-1}(R') = M(R) \forall t \geq t_{k_0}$.

Por otra parte, por el punto 2. de la misma proposición, tenemos que $x(t, t_{k_0}, x_0) \in J(\varepsilon') \forall t \geq t_{k_0} + T^*(\varepsilon', R', \delta)$. Pero entonces $x(t, t_{k_0}, x_0) \in B_\varepsilon \forall t \geq t_{k_0} + \bar{T}(\varepsilon, R, \delta)$. ■

Observación 4.2 Observamos que de la demostración del Teorema 4.1 se desprende que si V es una función de Lyapunov global para Σ y α_1 y α_2 son funciones de clase K_∞ tales que $\alpha_1(|x|) \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces la tesis de dicho teorema se verifica con

$$M(r) = \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2(r), \quad (4.24)$$

$$\bar{\delta}(\varepsilon, R) = \delta^*(\alpha_1(\varepsilon), \alpha_2(R)), \quad (4.25)$$

donde δ^* está dado por (4.17).

Observación 4.3 El Teorema 4.1 generaliza los resultados dados en el Teorema 4 de [31] respecto de la implementación digital vía MROC de leyes de control estabilizantes para sistemas no lineales afines en el control.

Cuando la ley de control γ estabiliza localmente a \mathcal{P} , es decir, cuando el origen es un punto de equilibrio localmente asintóticamente estable de Σ , con demostración similar a la del Teorema 4.1 es posible demostrar el siguiente resultado.

Teorema 4.2 Supongamos que γ es un estabilizador local de \mathcal{P} .

Entonces existen un entorno del origen U y una función positiva $\bar{\delta} : (0, \varepsilon'] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que, dados $0 < \varepsilon \leq \varepsilon'$ y $0 < \delta < \bar{\delta}(\varepsilon)$, si $\|\Pi\| \leq \delta$ y $x_0 \in U$ se verifican:

1. $x(t, t_{k_0}, x_0) \in U \forall t \geq t_{k_0}$;
2. existe $\bar{T} = \bar{T}(\varepsilon, \delta)$ tal que $|x(t, t_{k_0}, x_0)| \leq \varepsilon \forall t \geq t_{k_0} + \bar{T}$.

Demostración: Como la demostración de este resultado es esencialmente la misma que la que dimos para el Teorema 4.1, sólo haremos un esbozo de ella.

Consideremos una función V de Lyapunov local para Σ , es decir, una función continuamente diferenciable $V : B_{r^*} \rightarrow \mathbb{R}^+$, con $r^* > 0$, que verifica

1. $\alpha_1(|x|) \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|) \forall x \in B_{r^*}$;
2. $\nabla V(x) \cdot g(x) \leq -\alpha_3(|x|) \forall x \in B_{r^*}$,

con α_i , $i = 1, 2, 3$ de clase \mathcal{K} . La existencia de V está garantizada por los teoremas inversos de Lyapunov al igual que en el caso de la estabilidad asintótica global uniforme. Para tal función V consideremos $0 < R' < \alpha_1(r^*)$ y definamos, para $0 \leq r \leq R'$, $P(r)$, $G(r)$ y $h(x, y)$ de la misma forma que en el caso global. Consideremos, para $0 < \varepsilon \leq R'$,

$$\delta^*(\varepsilon) = \sup \left\{ \delta \geq 0 : \delta e^{L(\tau)\delta} < \frac{P(\tau)}{L(\tau)G(\tau)} \forall \tau \in [\varepsilon, R'] \right\}, \quad (4.26)$$

y notemos que $\delta^*(\varepsilon) > 0$. Entonces, teniendo en cuenta que para $0 \leq r \leq R'$, por la elección de R' , $\partial J(r) = \{x \in B_{r^*} : V(x) = r\}$, pues $J(R') \cap \partial B_{r^*} = \emptyset$ debido a que $R' < \min\{V(x) : |x| = r^*\}$, tenemos, con demostración idéntica a la de la Proposición 4.1, que vale la siguiente:

Proposición 4.2 Sea V una función de Lyapunov local para Σ .

Entonces, para cada $0 < \varepsilon \leq R'$ se verifica:

1. Si $\|\Pi\| < \delta^*(\varepsilon)$, $J(r)$ es invariante respecto de Σ_Π para cada $r \in [\varepsilon, R']$.

2. Para cada $0 < \delta < \delta^*$ existe $T^* = T^*(\epsilon, \delta)$ tal que si $\|\Pi\| \leq \delta$ entonces

$$x(t, t_{k_0}, x_0) \in J(\epsilon) \quad \forall t \geq t_{k_0} + T^* \text{ y } \forall x_0 \in J(R'). \quad (4.27)$$

La demostración del teorema concluye de la siguiente manera. Para $0 < \epsilon \leq \bar{\epsilon} = \alpha_1^{-1}(R')$, sea $\epsilon = \alpha_1(\epsilon)$, con lo que se verifica la inclusión $J(\epsilon) \subseteq B_\epsilon$. Entonces la tesis del teorema se verifica con $U = J(R')$, $\bar{\delta}(\epsilon) = \delta^*(\epsilon)$ y $\bar{T}(\epsilon, \delta) = T^*(\epsilon, \delta)$. En efecto, si $\|\Pi\| \leq \delta < \bar{\delta}$, por el punto 1. de la Proposición 4.2 $x_0 \in U$, $x(t, t_{k_0}, x_0) \in U$ para todo $t \geq t_{k_0}$ y por el punto 2. de la misma proposición $x(t, t_{k_0}, x_0) \in J(\epsilon) \subseteq B_\epsilon$ para todo $t \geq t_{k_0} + \bar{T}$. ■

Observación 4.4 De la prueba del Teorema 4.2 se deduce que si $V : B_{r^*} \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función de Lyapunov local para Σ , α_1 es una función de clase \mathcal{K} tal que $\alpha_1(|x|) \leq V(x)$ para todo $x \in B_{r^*}$ y $R' > 0$ es tal que $R' < \alpha_1(r^*)$, entonces la tesis de dicho teorema se verifica con

$$U = J(R') \quad \text{y} \quad \bar{\delta}(\epsilon) = \delta^*(\alpha_1(\epsilon)), \quad 0 < \epsilon \leq \bar{\epsilon} = \alpha_1^{-1}(R'),$$

y δ^* definido en (4.26).

Observación 4.5 A partir del Teorema 4.2 es posible deducir los resultados obtenidos en [24] respecto de la estabilización práctica de sistemas de control muestreados (Teorema 4).

Observación 4.6 Los teoremas 4.1 y 4.2 extienden respectivamente los Teoremas 3.1 y 3.2 de nuestro trabajo [48] (ver también [47]), en los cuales sólo se consideraron s.i.m. regulares.

Ejemplo 4.1 Consideremos el sistema de control

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = u_2 \end{cases} \quad (4.28)$$

y la ley de control realimentado

$$\gamma(x_1, x_2) = (x_2 - (x_1^2 + x_2^2)x_1, -x_1 - (x_1^2 + x_2^2)x_2),$$

la cual estabiliza globalmente a \mathcal{P} , pues el sistema a lazo cerrado que se obtiene al considerar en (4.28) $(u_1, u_2) = \gamma(x_1, x_2)$,

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - (x_1^2 + x_2^2)x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - (x_1^2 + x_2^2)x_2 \end{cases} \quad (4.29)$$

tiene al origen como un punto de equilibrio globalmente asintóticamente estable, lo cual se comprueba fácilmente verificando que la función $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ es una función de Lyapunov global para Σ .

De acuerdo con el Teorema 4.1, dados $0 < \varepsilon < R$, existe una cota $\bar{\delta} = \bar{\delta}(R, \varepsilon)$ tal que si el sistema (4.28) se controla mediante la implementación digital de $\gamma(x)$ vía MROC, y la s.i.m Π que se emplea para tal implementación satisface la condición $\|\Pi\| < \bar{\delta}$, cada trayectoria del sistema a lazo cerrado Σ_Π que se inicia en B_R llega en tiempo finito a B_ε y permanece allí para siempre.

Siguiendo los pasos de la demostración del teorema mencionado, vamos a determinar $\bar{\delta}(R, \varepsilon)$ para este caso.

En el cálculo de $\bar{\delta}$ emplearemos la función de Lyapunov $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, con lo cual podemos considerar $\alpha_1(r) = \alpha_2(r) = r^2$ y, por lo tanto, de acuerdo con la observación 4.2 $\bar{\delta}(\varepsilon, R) = \delta^*(\varepsilon^2, R^2)$, con δ^* dado por (4.17).

Teniendo en cuenta que en este caso $g(x) = (x_2 - |x|^2 x_1, -x_1 - |x|^2 x_2)$, $\theta(x, \xi) = g(\xi)$ y $h(x, y) = (-2x, g(x) + y) = -2|x|^4 + 2(x, y)$ y que $J(r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq \sqrt{r}\}$ y $\partial J(r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = \sqrt{r}\}$, $G(r)$, $L(r)$ y $P(r)$ en (4.11)-(4.13) resultan $G(r) = \sqrt{(1+r^2)r}$, $L(r) \leq 1 + 3r$ y $P(r) = r^{3/2}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \bar{\delta}(\varepsilon, R) &= \delta^*(\varepsilon^2, R^2) \\ &= \sup \left\{ \delta \geq 0 : \delta e^{L(r)\delta} < \frac{P(r)}{L(r)G(r)} \quad \forall r \in [\varepsilon^2, R^2] \right\} \\ &\geq \sup \left\{ \delta \geq 0 : \delta e^{(1+3r)\delta} < \frac{r^{3/2}}{(1+3r)\sqrt{(1+r^2)r}} \quad \forall r \in [\varepsilon^2, R^2] \right\}. \end{aligned}$$

En el caso particular $R = 1$, $\varepsilon = 0.1$, obtenemos $\bar{\delta} \geq 0.01$ y para $R = 1$, $\varepsilon = 0.05$, obtenemos $\bar{\delta} \geq 0.0025$.

Las siguientes figuras muestran simulaciones del sistema (4.28) controlado por la implementación digital de γ vía MROC, considerando primero una s.i.m regular de período $\delta = 0.01$ y luego una s.i.m regular de período $\delta = 0.0025$. En ambos casos se consideró la condición inicial $x(0) = (0, 1)$.

La figura 4.1 muestra la trayectoria del sistema a lazo cerrado correspondiente al período de muestreo $\delta = 0.01$. En la figura 4.2 se observa la evolución del módulo del vector de estados de dicho sistema. Como puede apreciarse, la trayectoria ingresa en $B_{0.01}$ aproximadamente en el instante $t = 60$ permaneciendo allí para $t \geq 60$.

Las figuras 4.3 y 4.4 muestran, respectivamente, la trayectoria y el módulo del vector de estados del sistema a lazo cerrado correspondiente ahora al período de muestreo $\delta = 0.0025$. Como puede observarse en la figura 4.4, la trayectoria ingresa en $B_{0.005}$ aproximadamente en el instante $t = 250$ permaneciendo allí para instantes posteriores.

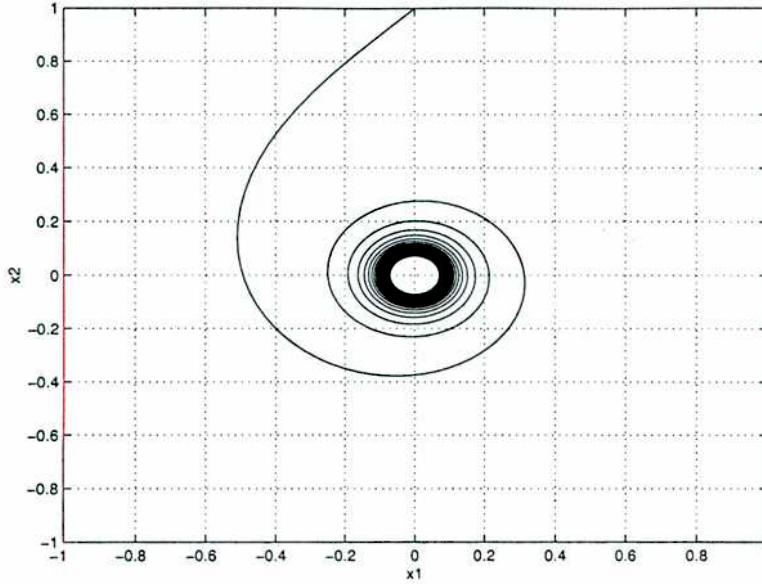


Figura 4.1: Trayectoria correspondiente a $\delta = 0.01$

Como puede apreciarse, en ambos casos la trayectoria no converge al origen. Estas simulaciones nos sugieren que el sistema a lazo cerrado Σ_{Π} no es asintóticamente estable para los períodos de muestreo empleados en la simulación. En lo que sigue probaremos que cualquiera sea el período de muestreo $\delta > 0$, la implementación digital vía MROC de γ , empleando la s.i.m regular Π_{δ} de período δ , nunca estabiliza asintóticamente al sistema (4.28), pues, como veremos, el origen siempre resulta un punto de equilibrio inestable del sistema a lazo cerrado $\Sigma_{\Pi_{\delta}}$.

En efecto, consideremos el sistema discretizado asociado a $\Sigma_{\Pi_{\delta}}$, $\Sigma_{\Pi_{\delta}D}$, el cual, debido a que las trayectorias de $\Sigma_{\Pi_{\delta}}$ verifican la ecuación híbrida

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t_k) - (x_1^2(t_k) + x_2^2(t_k))x_1(t_k) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t_k) - (x_1^2(t_k) + x_2^2(t_k))x_2(t_k) \end{aligned} \quad t \in [t_k, t_{k+1}),$$

está determinado por la ecuación en diferencias

$$\begin{aligned} x_1(t_{k+1}) &= x_1(t_k) + (x_2(t_k) - (x_1^2(t_k) + x_2^2(t_k))x_1(t_k))\delta \\ x_2(t_{k+1}) &= x_2(t_k) - (x_1(t_k) + (x_1^2(t_k) + x_2^2(t_k))x_2(t_k))\delta \end{aligned} \quad (4.30)$$

Como la linealización de la ecuación (4.30) alrededor del origen

$$\begin{aligned} x_1(t_{k+1}) &= x_1(t_k) + x_2(t_k)\delta \\ x_2(t_{k+1}) &= x_2(t_k) - x_1(t_k)\delta \end{aligned}$$

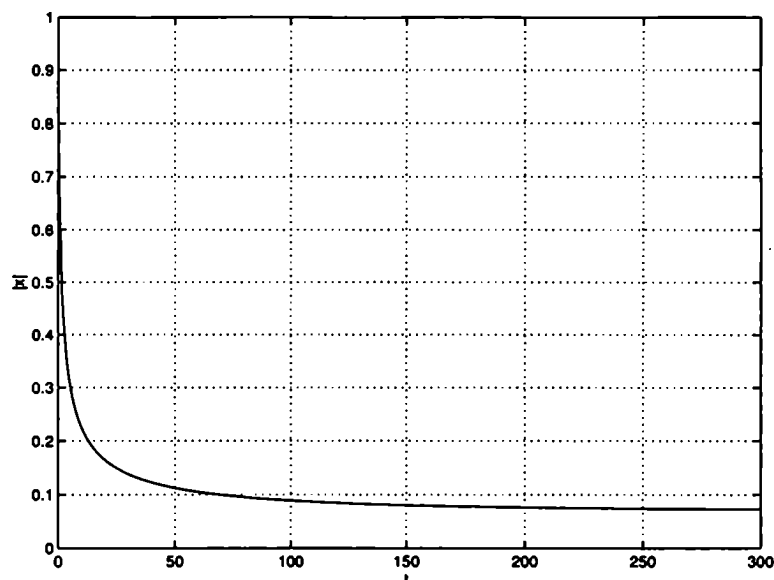


Figura 4.2: $|x(t)|$ para $\delta = 0.01$

es inestable, pues los autovalores de la correspondiente matriz de transición son $\lambda_1 = 1 + i\delta$ y $\lambda_2 = 1 - i\delta$, el origen es un punto de equilibrio inestable respecto de $\Sigma_{\Pi, D}$ y, en consecuencia, también es un punto de equilibrio inestable respecto de $\Sigma_{\Pi, \delta}$ como habíamos afirmado.

4.3 Estabilidad asintótica

Como lo demuestra el Ejemplo 4.1, en general no es posible obtener resultados más fuertes que los dados por el Teorema 4.1, en el sentido que sin hipótesis adicionales no puede demostrarse la convergencia de los estados al origen, es decir, no puede probarse la estabilidad asintótica del origen. En consecuencia, para asegurar la estabilidad asintótica del origen es necesario el cumplimiento de condiciones adicionales. Una de tales condiciones, sugerida por la demostración del Teorema 4.1, es la siguiente.

D Existe una función de Lyapunov local para Σ tal que

$$\liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{P(r)}{L(r)G(r)} > 0, \quad (4.31)$$

con $G(r)$, $P(r)$ y $L(r)$ como en (4.11), (4.13) y (4.12) respectivamente.

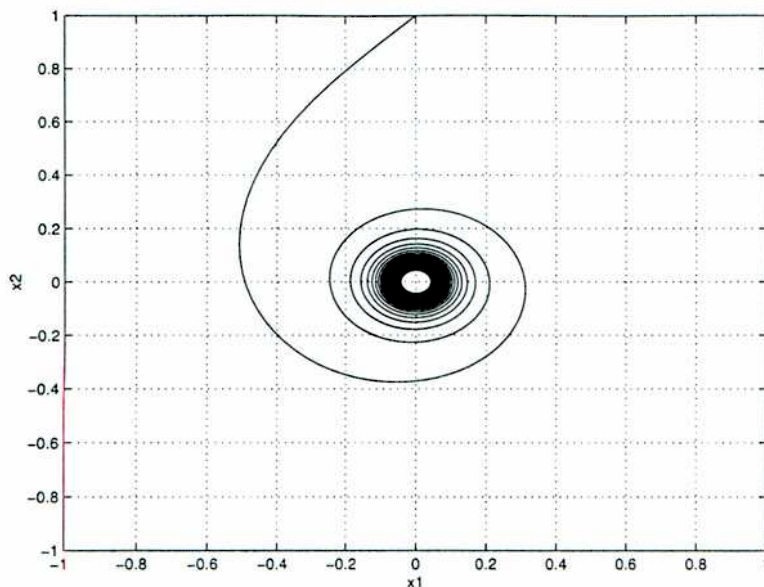


Figura 4.3: Trayectoria correspondiente a $\delta = 0.0025$

En lo que resta de la sección demostraremos que la condición **D** es suficiente para asegurar la estabilidad asintótica uniforme del origen respecto de Σ_{Π} si $\|\Pi\|$ es suficientemente pequeña. En primer lugar trataremos el caso en que γ es un estabilizador global de \mathcal{P} y demostraremos el siguiente resultado.

Teorema 4.3 Supongamos que γ estabiliza globalmente a \mathcal{P} y que vale la condición **D**.

Entonces existen una función M de clase \mathcal{K}_{∞} y una función positiva y no decreciente $\bar{\delta} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ tales que se verifica lo siguiente: dado $R > 0$, si $\|\Pi\| < \bar{\delta}(R)$ entonces

1. $|x(t, t_{k_0}, x_0)| \leq M(|x_0|) \forall t \geq t_{k_0}$ y $\forall x_0 \in B_R$;
2. para cada $0 < \delta < \bar{\delta}(R)$, $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} |x(\tau + t_{k_0}, t_{k_0}, x_0)| = 0$ uniformemente en $t_{k_0} \in \Pi$, $x_0 \in B_R$ y $\Pi : \|\Pi\| \leq \delta$.

Observación 4.7 Del Teorema 4.3 se deduce inmediatamente que si $\|\Pi\| < \delta^*(R)$ entonces el origen es un punto de equilibrio uniformemente asintóticamente estable respecto de Σ_{Π} y que B_R se encuentra contenida en el dominio de atracción de este punto de equilibrio. En efecto, del punto 1. del teorema se deduce que el origen es un punto de equilibrio uniformemente estable respecto de Σ_{Π} , mientras que del punto 2. se concluye que las trayectorias de Σ_{Π} que se inician en B_R en algún instante inicial $t_{k_0} \in \Pi$ son uniformemente atraídas por el origen.

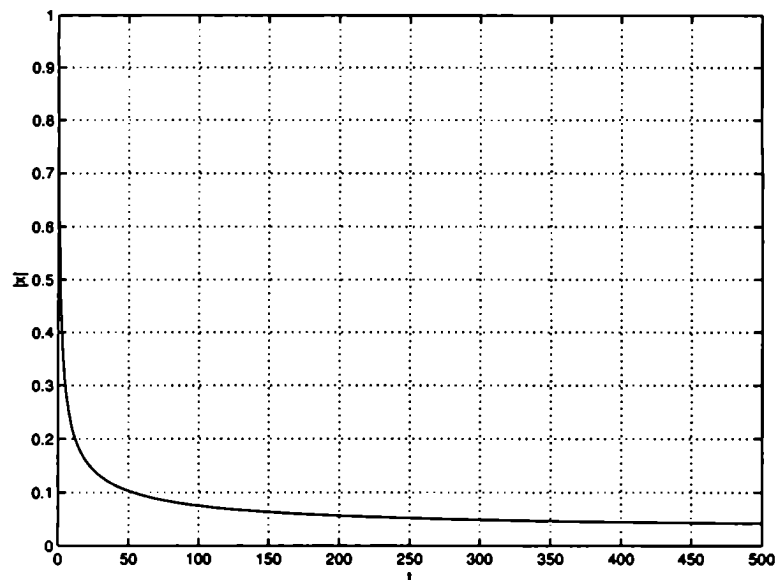


Figura 4.4: $|x(t)|$ para $\delta = 0.0025$

Demostración del Teorema 4.3: Comenzamos notando que debido al siguiente lema, cuya demostración daremos más adelante, siempre puede suponerse, sin perder generalidad, que la función de Lyapunov con la cual se verifica la condición **D** es una función de Lyapunov global para Σ .

Lema 4.5 Supongamos que el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable de Σ y que $W : B_{r^*} \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función de Lyapunov local para Σ .

Entonces existe una función V de Lyapunov global para Σ tal que $W|_{B_r} = V|_{B_r}$ para cierto $0 < r \leq r^*$.

En efecto, si el origen es un punto de equilibrio globalmente estable de Σ y W es una función de Lyapunov local que satisface (4.31), por el lema precedente existe una función de Lyapunov global V que coincide con W en un entorno del origen. Por lo tanto V también verifica (4.31) y la condición **D** se ve satisfecha con una función de Lyapunov global para Σ .

Sea entonces V una función de Lyapunov global para Σ que satisface (4.31). Para tal función V consideremos $\delta^*(\varepsilon, R)$ como en (4.17). Entonces, para $R > 0$ sea $\hat{\delta}(R) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \delta^*(\varepsilon, R) > 0$. Notamos que la existencia del límite está garantizada por (4.19) mientras que su positividad resulta de (4.31). Observamos también que de (4.18) se deduce que $\hat{\delta}(R) \leq \hat{\delta}(R')$ si $R \geq R'$, mientras que de (4.19) se desprende que $\hat{\delta}(R) \leq \delta^*(\varepsilon, R)$ para todo $\varepsilon \in (0, R)$.

Afirmamos que la tesis del teorema se verifica con

$$M(\tau) = \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2(\tau) \quad \text{y} \quad \bar{\delta}(R) = \hat{\delta}(\alpha_2(R)),$$

donde α_1 y α_2 son funciones de clase \mathcal{K}_∞ tales que $\alpha_1(|x|) \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Notemos que debido a que $\hat{\delta}$ es no creciente y α_2 es monótona creciente, $\bar{\delta}$ resulta no creciente.

Antes de probar que con M y $\bar{\delta}$ se verifica la tesis del teorema, notamos que debido a la Observación 4.2, la tesis del Teorema 4.1 se verifica con la función M que recién definimos y con $\bar{\delta}(s, r) = \delta^*(\alpha_1(s), \alpha_2(r))$.

Fijemos $R > 0$. Vamos a demostrar primero el item 1. Supongamos que $\|\Pi\| < \bar{\delta}(R)$ y que $x_0 \in B_R - \{0\}$. Entonces

$$\|\Pi\| < \bar{\delta}(R) \leq \delta^*(\alpha_1(|x_0|/2), \alpha_2(R)) \leq \delta^*(\alpha_1(|x_0|/2), \alpha_2(|x_0|)),$$

donde la última desigualdad se debe a (4.18). Por lo tanto, $\|\Pi\| < \bar{\delta}(|x_0|/2, |x_0|)$ y, en consecuencia, por el punto 1. del Teorema 4.1 (considerando $|x_0|/2$ en lugar de ε y $|x_0|$ en lugar de R), tenemos que $|x(t, t_{k_0}, x_0)| \leq M(|x_0|)$ para todo $t \geq t_{k_0}$.

Con el objeto de demostrar el punto 2. de la tesis, fijemos $0 < \delta < \bar{\delta}(R)$. Sea $0 < \varepsilon \leq R$, entonces $\delta < \bar{\delta}(R) \leq \delta^*(\alpha_1(\varepsilon), \alpha_2(R)) \leq \bar{\delta}(\varepsilon, R)$. Por lo tanto, por 2. del Teorema 4.1 existe $\bar{T} = \bar{T}(\varepsilon, R, \delta)$ tal que para cualquier Π con $\|\Pi\| \leq \delta$, cualquier $t_{k_0} \in \Pi$ y cualquier $x_0 \in B_R$,

$$|x(\tau + t_{k_0}, t_{k_0}, x_0)| \leq \varepsilon \quad \forall \tau \geq \bar{T}.$$

Entonces $|x(\tau + t_{k_0}, t_{k_0}, x_0)| \rightarrow 0$ cuando $\tau \rightarrow +\infty$ uniformemente en $t_{k_0} \in \Pi$, $x_0 \in B_R$ y $\Pi : \|\Pi\| \leq \delta$ y el teorema queda demostrado. ■

Observación 4.8 De la demostración del Teorema 4.3 se desprende que si V es una función de Lyapunov global para Σ que satisface (4.31) y α_1 y α_2 son funciones de clase \mathcal{K}_∞ tales que $\alpha_1(|x|) \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces la tesis de dicho teorema se verifica con

$$M(\tau) = \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2(\tau) \quad \text{y} \quad \bar{\delta}(R) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \delta^*(\varepsilon, \alpha_2(R)) \quad (4.32)$$

con δ^* como en (4.17).

Demostración del Lema 4.5: Sea V_1 una función de Lyapunov global para Σ y sea $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ de clase \mathcal{C}^1 tal que $\varphi \equiv 1$ en $B_{r^* \cdot 1/2}$ y $\varphi \equiv 0$ fuera de $B_{3r^* \cdot 1/4}$. Consideremos las siguientes constantes

$$\begin{aligned} r_1 &= \min_{|x| \geq \frac{r^*}{2}} V_1(x) \\ m &= \min_{\frac{r^*}{2} \leq |x| \leq \frac{3r^*}{4}} -\nabla V_1(x) \cdot g(x) \\ M &= \max_{\frac{r^*}{2} \leq |x| \leq \frac{3r^*}{4}} W(x) |\nabla \varphi(x) \cdot g(x)|. \end{aligned}$$

Observamos que por ser V_1 una función de Lyapunov para Σ , tanto r_1 como m resultan positivas.

Sea $\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función continuamente diferenciable tal que $\alpha \equiv 0$ en $[0, r_1/2]$, $\alpha'(r)$ es estrictamente creciente en $[r_1/2, +\infty)$, $\lim_{r \rightarrow +\infty} \alpha'(r) = +\infty$ y $\alpha'(r_1) > M/m$. Por ejemplo, $\alpha(r) = \int_0^r \phi(s) ds$ con $\phi(r) = 0$ para todo $r \in [0, r_1/2]$ y $\phi(r) = c(r - r_1/2)^2$ para $r \geq r_1/2$ con c positivo y tal que $\phi(r_1) > M/m$. Entonces la función $V(x) = \varphi(x)W(x) + \alpha \circ V_1(x)$ se encuentra en las condiciones del lema. Primero probaremos que V es de Lyapunov global para Σ . Como la existencia de funciones de clase \mathcal{K}_∞ que acoten a V tanto por arriba como por abajo es equivalente a que V sea definida positiva, i.e. $V(0) = 0$ y $V(x) > 0$ si $x \neq 0$, y radialmente no acotada, i.e. $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$ (ver [40]), probaremos que V verifica estas dos últimas propiedades.

Veamos la positividad de V . Como es inmediato que $V(0) = 0$, pasamos a comprobar que $V(x) > 0$ si $x \neq 0$. Supongamos que $0 < |x| \leq r^*/2$, entonces $V(x) = \varphi(x)W(x) + \alpha(V_1(x)) = W(x) + \alpha(V_1(x)) > 0$. Si por el contrario $|x| > r^*/2$, $V(x) = \varphi(x)W(x) + \alpha(V_1(x)) \geq \alpha(V_1(x)) > 0$ pues $V_1(x) \geq r_1$.

La no acotación radial de V se deduce inmediatamente de la desigualdad $V(x) \geq \alpha(V_1(x))$ para $|x| > r^*/2$, de la no acotación radial de V_1 y de que $\alpha(r) \rightarrow +\infty$ si $r \rightarrow +\infty$.

Para concluir que V es una función de Lyapunov global para Σ , resta probar que $D(x) = -\nabla V(x).g(x)$ está acotada inferiormente por una función de clase \mathcal{K}_∞ , o, equivalentemente, que es definida positiva y radialmente no acotada.

Como en la región $0 < |x| \leq r^*/2$,

$$\begin{aligned} D(x) &= -[\nabla W(x).g(x) + \alpha'(V_1(x))\nabla V_1(x).g(x)] \\ &\geq -\nabla W(x).g(x) > 0 \end{aligned} \tag{4.33}$$

y en la región $3r^*/4 \leq |x|$, $D(x) = -\alpha'(V_1(x))\nabla V_1(x).g(x) > 0$, la positividad de W quedará probada si mostramos que $W(x)$ es positiva para todo $x : r^*/2 < |x| < 3r^*/4$. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $r^*/2 < |x| < 3r^*/4$, entonces

$$\begin{aligned} D(x) &= -[W(x)\nabla\varphi(x).g(x) + \varphi(x)\nabla W(x).g(x) + \alpha'(V_1(x))\nabla V_1(x).g(x)] \\ &\geq -[W(x)\nabla\varphi(x).g(x) + \alpha'(V_1(x))\nabla V_1(x).g(x)] \\ &\geq -M + \alpha'(V_1(x))m \\ &> 0, \end{aligned}$$

pues, como $V_1(x) \geq r_1$, $\alpha'(V_1(x)) \geq \alpha'(r_1) > M/m$.

Por otra parte, la no acotación radial de D se deduce inmediatamente de la igualdad $D(x) = -\alpha'(V_1(x))\nabla V_1(x).g(x)$ para $|x| \geq 3r^*/4$, de la no acotación radial del término $-\nabla V_1(x).g(x)$ y de la monotonía de $\alpha'(r)$.

Para finalizar la demostración, sea $0 < r \leq r^*/2$ tal que $V_1(x) \leq r_1/2$. La existencia de r en tales condiciones se deduce de la continuidad de V_1 en el origen y del hecho que $V_1(0) = 0$. Entonces, si $x \in B_r$, $\varphi(x) = 1$ y $\alpha(V_1(x)) = 0$, y, por lo tanto, $V(x) = W(x)$. ■

En el caso en que γ es un estabilizador local y se verifica la condición **D**, es posible demostrar el siguiente resultado.

Teorema 4.4 Supongamos que γ estabiliza localmente a \mathcal{P} y que vale la condición **D**.

Entonces existen un entorno del origen U y una constante positiva $\bar{\delta}_0$ que verifican lo siguiente: si $\|\Pi\| < \bar{\delta}_0$ entonces el origen es un punto de equilibrio uniformemente asintóticamente estable de Σ_Π y U está contenido en el dominio de atracción de éste. Más aún, para cada $0 < \delta < \bar{\delta}_0$, $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} |x(\tau + t_{k_0}, t_{k_0}, x_0)| = 0$ uniformemente en $t_{k_0} \in \Pi$, $x_0 \in U$ y $\Pi : \|\Pi\| \leq \delta$.

Demostración: Sea $V : B_{r^*} \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función de Lyapunov local para Σ que verifica (4.31) y sean α_1 y α_2 de clase \mathcal{K} tales que $\alpha_1(|x|) \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|)$ para todo $x \in B_{r^*}$. Para tal función V consideremos $0 < R' < \alpha_1(r^*)$ y, para $0 < \varepsilon \leq R'$, $\delta^*(\varepsilon)$ como en (4.26); recordemos que con tales R' y δ^* se verifica la tesis de la Proposición 4.2. Consideremos también $U = J(R')$ y $\bar{\delta}(\varepsilon) = \varepsilon^*(\alpha_1(\varepsilon))$ y notemos que con ellos, debido a la Observación 4.4, se verifica la tesis del Teorema 4.2.

Sea $\bar{\delta}_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \delta^*(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \bar{\delta}(\varepsilon)$, entonces debido a (4.31), $\bar{\delta}_0 > 0$.

En consecuencia la tesis del teorema se verifica con $U = J(R')$ y $\bar{\delta}_0$.

Sólo nos limitaremos a demostrar que si $\|\Pi\| < \bar{\delta}_0$ el origen es un punto de equilibrio uniformemente estable respecto de Σ_Π , pues, la parte de la tesis referente a la convergencia de las trayectorias de Σ_Π que se inician en U se demuestra con argumentos similares a los empleados en la prueba del Teorema 4.3, invocando en esta ocasión al Teorema 4.2 en lugar del Teorema 4.1.

Con el objeto de probar la estabilidad uniforme del origen, supongamos que $\|\Pi\| < \bar{\delta}_0$. Fijemos $0 < \eta < r^*$ y consideremos $0 < \varepsilon' \leq R'$ tal que $J(\varepsilon') \subseteq B_\eta$ y $0 < \varepsilon \leq r^*$ tal que $B_\varepsilon \subseteq J(\varepsilon')$ (cualquier par ε' , ε positivos y tales que $\varepsilon' \leq \alpha_1(\eta)$ y $\alpha_2(\varepsilon) < \varepsilon'$ sirve). Sea $x_0 \in B_\varepsilon$, entonces $x_0 \in J(\varepsilon')$. Como $\|\Pi\| < \bar{\delta}_0 \leq \delta^*(\varepsilon')$, (recordemos que δ^* es no decreciente), por la Proposición 4.2 $J(\varepsilon')$ es invariante respecto de Σ_Π y por lo tanto $x(t, t_{k_0}, x_0) \in J(\varepsilon') \subseteq B_\eta$ para todo $t \geq t_{k_0}$. ■

Observación 4.9 Si $V : B_{r^*} \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función de Lyapunov local para Σ , α_1 es una función de clase \mathcal{K} tal que $\alpha_1(|x|) \leq V(x)$ para todo $x \in B_{r^*}$ y $R' > 0$ es tal que $R' < \alpha_1(r^*)$, entonces la tesis de dicho teorema se verifica con

$$U = J(R') \quad \text{y} \quad \bar{\delta}_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \delta^*(\varepsilon)$$

con δ^* dado por (4.26).

4.3.1 Implementación digital de estabilizadores exponenciales

En lo siguiente estudiaremos el comportamiento del sistema Σ_{Π} en el caso particular en que la ley de control γ estabiliza localmente exponencialmente a \mathcal{P} , i.e., en el caso en que el origen resulta un punto de equilibrio localmente exponencialmente estable de Σ .

En este caso, además de las hipótesis sobre f_c y γ que venimos sosteniendo desde el comienzo, supondremos que g es diferenciable en el origen. Con tal suposición adicional veremos que es posible mostrar que si γ estabiliza exponencialmente a \mathcal{P} , entonces se verifica **D**. Antes hacemos la siguiente observación.

Observación 4.10 Cuando el origen es un punto de equilibrio exponencialmente estable de Σ y g es diferenciable en el origen, existe una función de Lyapunov $V : B_{r^*} \rightarrow \mathbb{R}^n$ para Σ que verifica:

1. $c_1|x|^2 \leq V(x) \leq c_2|x|^2 \forall x \in B_{r^*}$,
2. $\nabla V(x) \cdot g(x) \leq -c_3|x|^2 \forall x \in B_{r^*}$ y
3. $|\nabla V(x)| \leq c_4|x| \forall x \in B_{r^*}$

con $c_i > 0$ para $i = 1, \dots, 4$ (ver [40], [41]).

Lema 4.6 Supongamos que γ estabiliza localmente exponencialmente a \mathcal{P} y que g en (4.2) es diferenciable en el origen. Entonces vale **D**.

Demostración: por ser el origen un punto de equilibrio exponencialmente estable de Σ y g diferenciable en 0, existe una función de Lyapunov local para Σ que verifica los puntos 1. a 3. de la Observación 4.10. Veamos que tal función también verifica (4.31). Sea $0 < R' < c_1 r^{*2}$ y sea μ tal que $|g(x)| \leq \mu|x|$ para todo $x \in J(R')$. Entonces, empleando las desigualdades 1. a 3. vamos a demostrar que para cada $0 < r \leq R'$,

$$P(r) \geq \frac{c_3}{c_2 c_4} \sqrt{c_1 r} \quad (4.34)$$

$$G(r) \leq \mu \sqrt{\frac{r}{c_1}}. \quad (4.35)$$

Veamos ahora (4.34) y (4.35). Antes conviene tener en cuenta que para cada $x \in J(r)$, de 1. se deducen las desigualdades: a) $|x| \leq \sqrt{\frac{r}{c_1}}$ y b) $|x| \geq \sqrt{\frac{r}{c_2}}$.

Entonces, de a) resulta que para todo $x \in J(r)$, $|g(x)| \leq \mu|x| \leq \mu \sqrt{\frac{r}{c_1}}$ y de esto sigue (4.35).

Respecto de (4.34), denominemos η al lado derecho de tal desigualdad. Entonces la validez de (4.34) quedará verificada si probamos que $h(x, y) = \nabla V(x) \cdot (g(x) + y) < 0$ cada

vez que $x \in \partial J(r)$ y $|y| < \eta$. Veamos esto último. Sean $x \in \partial J(r)$ y $|y| < \eta$ arbitrarios. Entonces, empleando 2., 3. a) y b) resulta la cadena de desigualdades

$$\begin{aligned} \nabla V(x).g(x) + \nabla V(x).y &\leq -c_3|x|^2 + |\nabla V(x)||y| \\ &< -\frac{c_3 r}{c_2} + c_4 \sqrt{\frac{r}{c_1}} \eta \\ &= 0, \end{aligned}$$

y con ello la validez de (4.34).

Una vez probadas (4.34) y (4.35), la demostración del lema finaliza, pues de éstas se deduce inmediatamente que V verifica (4.31), es decir, que $\liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{P(r)}{L(r)G(r)} > 0$. ■

Combinando el Lema 4.6 con el Teorema 4.4 se deduce inmediatamente que si γ es un estabilizador exponencial de \mathcal{P} y g es diferenciable en $x_e = 0$, entonces existe una constante positiva $\bar{\delta}$ tal que x_e es un punto de equilibrio uniformemente asintóticamente estable de Σ_Π si $\|\Pi\| < \bar{\delta}$.

A continuación vamos a demostrar un resultado más fuerte que éste, vamos a demostrar que si $\|\Pi\|$ es suficientemente pequeña, el origen es un equilibrio exponencialmente estable de Σ_Π .

Teorema 4.5 Supongamos que γ estabiliza localmente exponencialmente a \mathcal{P} y que g en (4.2) es diferenciable en el origen.

Entonces existen un entorno del origen U y una constante positiva $\bar{\delta}_1$ tales que si $\|\Pi\| < \bar{\delta}_1$, el origen es punto de equilibrio exponencialmente estable de Σ_Π y U está contenido en el dominio de atracción de éste.

Demostración: Sea $V: B_{r^*} \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función de Lyapunov para Σ que verifica los puntos 1. a 3. de la Observación 4.10. Tomemos $R' > 0$ tal que $R' < c_1 r^{*2}$ y $U = J(R')$. Consideremos $\mu \geq 0$ tal que $|g(x)| \leq \mu|x|$ para todo $x \in U$ y $L > 0$ tal que $|\theta(x, \xi)| \leq L|x - \xi|$ para todo $x, \xi \in U$.

Sea

$$\bar{\delta}_1 = \sup \left\{ \delta : \delta e^{L\delta} < \frac{k_1}{Lk_2} \right\}, \quad (4.36)$$

con $k_1 = \frac{c_3 \sqrt{c_1}}{c_2 c_4}$ y $k_2 = \frac{\mu}{\sqrt{c_1}}$. Teniendo en cuenta que valen (4.34) y (4.35) $\forall r \in (0, R']$ (ver la demostración del Lema 4.6), se deduce fácilmente que $\bar{\delta}_1 \leq \bar{\delta}_0$, con $\bar{\delta}_0$ la constante de la Observación 4.9. Como U también se encuentra en las condiciones de dicha observación, resulta que el origen es un punto de equilibrio uniformemente asintóticamente estable de Σ_Π y que U está contenido en el dominio de atracción de éste, si $\|\Pi\| < \bar{\delta}_1$.

Ahora vamos a demostrar que el origen es un punto de equilibrio exponencialmente estable si $\|\Pi\| < \bar{\delta}_1$. Como se verifica la propiedad (A8) del capítulo 2, pues el lado derecho de la ecuación híbrida (4.3) es localmente Lipschitz, por el Teorema 2.6 del mismo capítulo bastará mostrar la existencia de una función de Lyapunov en las condiciones de ese teorema.

Supongamos $\|\Pi\| < \bar{\delta}_1$ y consideremos $x \in U - \{0\}$ y $t_k \in \Pi$, arbitrarios. Entonces, si $x(t) = x(t, t_k, x)$ y $v(t) = V(x(t))$, $v(t_k) = V(x) = r \in (0, R']$. Como $J(r)$ es invariante respecto de $\Sigma_\Pi \forall r \in [0, R']$, pues $\bar{\delta}_0$ se encuentra en las condiciones de la demostración del Teorema 4.4 y $\|\Pi\| < \bar{\delta}_0$, tenemos que $v(t) \leq r$ para todo $t \geq t_k$ y que, de acuerdo con (4.20) y (4.35), $|\theta(x(t), x(t_k))| \leq L\|\Pi\|G(r)e^{L\|\Pi\|} \leq L\|\Pi\|k_2\sqrt{r}e^{L\|\Pi\|}$.

Entonces, como por las propiedades de V , h en (4.10) satisface para todo $x \in U$ la desigualdad

$$h(x, y) \leq -\lambda V(x) + c_4 \sqrt{\frac{V(x)}{c_1}} |y|,$$

con $\lambda = c_3/c_2$, tenemos que para cada $t \in [t_k, t_{k+1})$

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) = h(x(t), \theta(x(t), x(t_k))) &\leq -\lambda v(t) + c_4 \sqrt{\frac{r}{c_1}} |\theta(x(t), x(t_k))| \\ &\leq -\lambda v(t) + c_4 \sqrt{\frac{1}{c_1}} L\|\Pi\|k_2 e^{L\|\Pi\|} r \\ &= -\lambda v(t) + c_4 \sqrt{\frac{1}{c_1}} \beta k_1 r, \end{aligned} \quad (4.37)$$

con $\beta = L\|\Pi\|k_2 e^{L\|\Pi\|}/k_1 < 1$, esto último debido a la definición de $\bar{\delta}_1$ y a que $\|\Pi\| < \bar{\delta}_1$. Entonces, de (4.37) y de resultados bien conocidos para inecuaciones diferenciales, obtenemos la acotación $v(t_{k+1}) \leq v(t_k)e^{-\lambda\Delta_k} + \frac{c_4 k_1}{\sqrt{c_1}\lambda} \beta r(1 - e^{-\lambda\Delta_k})$, donde $\Delta_k = (t_{k+1} - t_k)$. Teniendo en cuenta que $v(t_k) = V(x) = r$ y $\frac{c_4 k_1}{\sqrt{c_1}\lambda} = 1$, la desigualdad anterior se puede escribir

$$V(x(t_{k+1}, t_k, x)) \leq (e^{-\lambda\Delta_k} + \beta(1 - e^{-\lambda\Delta_k}))V(x).$$

Entonces, denominando $\lambda' = (1 - \beta) \inf_{s \in (0, \|\Pi\|]} (1 - e^{-\lambda s})s^{-1} > 0$ y restando en ambos miembros de la última desigualdad el término $V(x)$, obtenemos la siguiente acotación para el incremento de V entre dos instantes sucesivos de muestreo,

$$\begin{aligned} V(x(t_{k+1}, t_k, x)) - V(x) &\leq -(1 - \beta)(1 - e^{-\lambda\Delta_k})V(x) \\ &\leq -\lambda'\Delta_k V(x). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Luego, empleando la propiedad 1. de V , (4.38) y teniendo en cuenta la arbitrariedad de $x \in U$ y $t_k \in \Pi$, se llega finalmente a que $\forall k \in \mathbf{Z}^+$ y $\forall x \in U$ vale la desigualdad

$$V(x(t_{k+1}, t_k, x)) - V(x) \leq -\lambda^{**} \Delta_k |x|^2, \quad (4.39)$$

con $\lambda^{**} = \lambda'/c_2$. Entonces, por el Teorema 2.6 del capítulo 2, el origen resulta un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema discretizado. ■

Observación 4.11 De la demostración del Teorema 4.5 se desprende los siguientes hechos.

1. Si conocemos una función de Lyapunov V para Σ en las condiciones de la Observación 4.10, U y $\bar{\delta}_1$ en el Teorema 4.5 pueden determinarse de la siguiente manera: Como U podemos tomar cualquier conjunto de la forma $U = J(R')$, siempre que $0 < R' < c_1 r^{*2}$. Una vez elegido U en la forma descripta, para determinar $\bar{\delta}_1$ consideramos constantes $\mu > 0$ y $L > 0$ tales

$$|g(x)| \leq \mu|x| \quad \forall x \in U \quad \text{y} \quad |\theta(x, \xi)| \leq L|x - \xi| \quad \forall x, \xi \in U, \quad (4.40)$$

y tomamos

$$\bar{\delta}_1 = \sup \left\{ \delta : \delta e^{L\delta} < \frac{c_3 c_1}{L \mu c_2 c_4} \right\}. \quad (4.41)$$

Sin embargo es importante notar dos cosas: por un lado, que el entorno U y la cota $\bar{\delta}_1$ obtenidos de este modo dependen fuertemente de la función de Lyapunov empleada para su cálculo y, por el otro, que el valor de $\bar{\delta}_1$ puede ser demasiado conservativo, lo cual es de esperar en tanto y en cuanto surge de un análisis de "peor caso".

2. Cuando existe una función de Lyapunov V que satisface las condiciones 1. a 3. de la Observación 4.10 globalmente y tanto f_c en (4.1) como γ son globalmente Lipschitz, el origen es un punto de equilibrio globalmente exponencialmente estable de Σ_Π si $\|\Pi\| < \bar{\delta}_1$ y $\bar{\delta}_1$ está dado por (4.41) con, en este caso, μ y L constantes positivas tales que

$$|g(x)| \leq \mu|x| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \text{y} \quad |\theta(x, \xi)| \leq L|x - \xi| \quad \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

En efecto, si $\|\Pi\| < \bar{\delta}_1$, siguiendo los mismos pasos que en la demostración del Teorema 4.5, llegamos a la conclusión que (4.39) vale para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Por otra parte, como f_c y γ son globalmente Lipschitz, f en (4.3) también resulta globalmente Lipschitz, y por lo tanto Σ_Π satisface (A8G) (ver Lema 2.2). Entonces, Σ_Π verifica las hipótesis del Teorema 2.8 y, en consecuencia, el origen es un punto de equilibrio globalmente exponencialmente estable respecto de Σ_Π .

3. Cuando el sistema de control \mathcal{P} es lineal, i.e., $f_c(x, u) = Ax + Bu$ con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times q}$, y γ es un estabilizador de \mathcal{P} también lineal, es decir $\gamma(x) = Fx$ con $F \in \mathbb{R}^{q \times n}$ y por lo tanto $g(x) = \bar{\Sigma}x$ con $\bar{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ estable en el sentido de Hurwitz, la implementación digital vía MROC de la ley γ estabiliza exponencialmente a \mathcal{P} si el paso de muestreo es suficientemente pequeño.

En efecto, por un lado tenemos que tanto f_c como γ son globalmente Lipschitz por ser lineales. Por otra parte, si $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la única solución simétrica y definida positiva de la ecuación de Lyapunov $\bar{\Sigma}^T P + P \bar{\Sigma} = -Q$, con Q una matriz simétrica definida positiva, se tiene que $V(x) = x^T P x$ es una función de Lyapunov para Σ que verifica globalmente los puntos 1. a 3. de la Observación 4.10 con constantes

$$c_1 = \lambda_m(P), \quad c_2 = \lambda_M(P), \quad c_3 = -\lambda_m(Q) \quad \text{y} \quad c_4 = 2\|P\|,$$

donde $\lambda_m(P)$ y $\lambda_M(P)$ son, respectivamente, el mínimo y el máximo autovalor de P , $\lambda_m(Q)$ es el mínimo autovalor de Q y $\|P\|$ denota la norma inducida de P al considerarla como operador lineal.

Entonces, por lo discutido en el punto anterior, existe una constante positiva $\bar{\delta}_1$ tal que si $\|\Pi\| < \bar{\delta}_1$, el origen es un punto de equilibrio globalmente exponencialmente estable de Σ_Π . Más aún, teniendo en cuenta que $|g(x)| = |\bar{\Sigma}x| \leq \|\bar{\Sigma}\| \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ y que $|\theta(x, \xi)| = |BF(\xi - x)| \leq \|BF\| \|x - \xi\| \quad \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n$, tomando $\mu = \|\bar{\Sigma}\|$ y $L = \|BF\|$, se tiene, de acuerdo con (4.41), que puede tomarse

$$\bar{\delta}_1 = \sup \left\{ \delta : \delta e^{\|BF\|\delta} < \frac{\lambda_m(P)\lambda_m(Q)}{2\|BF\|\|\bar{\Sigma}\|\|P\|\lambda_M(P)} \right\}.$$

Observación 4.12 Los resultados que hemos dado para el caso de estabilizadores exponenciales, extienden, con demostración diferente, los resultados obtenidos en [31] para sistemas no lineales afines en el control (Teorema 3). Sin embargo, es importante observar que en dicha publicación también se analizan los efectos que producen los errores de truncación y, para el caso de leyes dinámicas, los efectos que producen los errores que aparecen al integrar numéricamente la ecuación diferencial que aparece en (4.6).

Respecto de los resultados dados en el punto 3. de la Observación 4.11 para el caso lineal, estos fueron obtenidos por otros medios en [13] (Teorema 3) y en [75] (donde también se dan cotas para el paso de muestreo), para el caso en que la s.i.m. Π es regular.

Ejemplo 4.2 Consideremos el sistema de control no lineal

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 + (1 + x_1^2)u \end{cases} \quad (4.42)$$

La ley de control realimentado $u = \gamma(x_1, x_2)$ con

$$\gamma(x_1, x_2) = -\frac{x_1 x_2}{1 + x_1^2} - \frac{2x_1 + 3x_2}{1 + x_1^2}$$

es un estabilizador global del sistema (4.42), ya que el sistema a lazo cerrado es

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 \end{cases} \quad (4.43)$$

y la matriz

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

es estable en el sentido de Hurwitz.

De acuerdo con el Teorema 4.5, existen un entorno del origen U y una cota $\bar{\delta}_1 > 0$ tales que la implementación digital vía MROC de la ley de control α , empleando en tal implementación una s.i.m Π con $\|\Pi\| < \bar{\delta}_1$, estabiliza exponencialmente al sistema (4.42) y además U está contenido en el dominio de atracción.

Consideremos la función $V(x) = x^T P x$ con

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

la única solución simétrica y definida positiva de la ecuación $\Sigma^T P + P \Sigma = -I$. Entonces $V(x)$ es una función global de Lyapunov para el sistema (4.43) que verifica los puntos 1. a 3. de la Observación 4.10 en todo el espacio de estados con las constantes $c_1 = 0.191$, $c_2 = 1.309$, $c_3 = 1$ y $c_4 = 2.618$.

De acuerdo con el punto 1. de la Observación 4.11, como U podemos tomar cualquier conjunto de la forma $U = J(R)$. Consideremos por ejemplo $R = 0.19$, es decir $U = J(0.19)$.

Para calcular $\bar{\delta}_1$, emplearemos la fórmula (4.41). Como μ y L en (4.40) resultan $\mu = 3.702$ y $L = 3.621$, obtenemos $\bar{\delta}_1 = 0.0041$.

Las siguientes figuras muestran los resultados de la simulación del sistema (4.42) controlado por la implementación digital de la ley de control realimentado α vía MROC, considerando una s.i.m. regular de período 0.004; la condición inicial considerada fue $x_d(0) = (x_{1d}(0), x_{2d}(0)) = (0.5257, 0.8507)$.

En las mismas figuras mostramos también, a modo de contraste, la trayectoria $x(t)$ del sistema (4.42) controlado por la ley α . La figura 4.5 muestra las evoluciones x_1 y x_{1d} del primer estado del sistema, que como se puede apreciar, prácticamente coinciden.

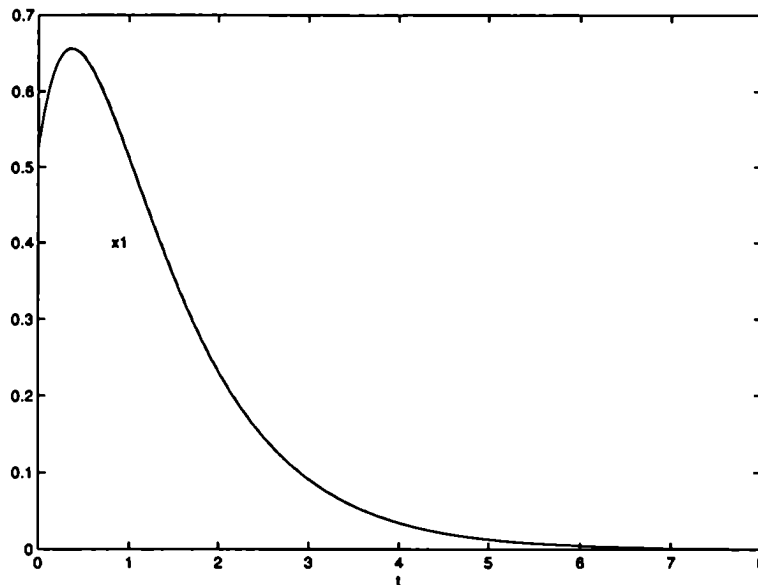


Figura 4.5: Evolución de x_1 y x_{1d} , $\delta = 0.004$

En la figura 4.6, y con un comportamiento similar, se pueden ver las evoluciones x_2 y x_{2d} del segundo estado del sistema. La figura 4.7 muestra las diferencias $e_1 = x_{1d} - x_1$ y $e_2 = x_{2d} - x_2$.

Como dijimos en el punto 1. de la Observación 4.11, la cota $\bar{\delta}_1$ obtenida puede resultar demasiado conservativa. Las figuras 4.8, 4.9 y 4.10, se obtuvieron simulando el sistema controlado por la implementación digital de α con una s.i.m regular de período de muestreo $\delta = 0.04$. En las figuras 4.8 y 4.9 se observa la convergencia al origen de los estados del sistema controlado por la implementación digital ((x_{1d}, x_{2d})). En las mismas figuras se observa que ahora esta trayectoria coincide con la del sistema controlado por α para instantes posteriores a $t = 6$, como puede apreciarse también en la figura 4.10, que muestra los errores $e_1 = x_{1d} - x_1$ y $e_2 = x_{2d} - x_2$.

4.4 Conclusiones

A lo largo del capítulo hemos estudiado la implementación digital de leyes de control estabilizantes mediante muestreo y retención de orden cero, en el caso en que ambas, la planta y la ley, son tiempo invariantes. El siguiente es un resumen de los resultados más importantes del capítulo.

Si la ley de control estabiliza globalmente al sistema de control se puede asegurar:

- Acotación final con error final arbitrariamente pequeño y región de atracción arbi-

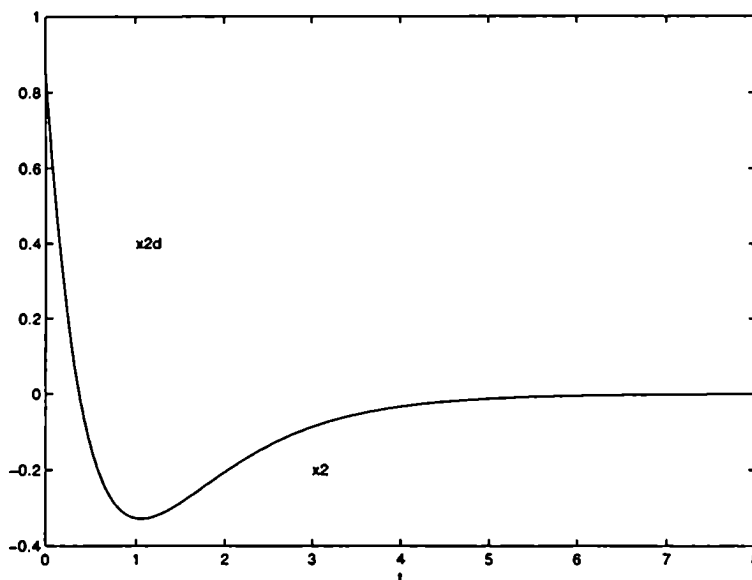


Figura 4.6: Evolución de x_2 y x_{2d} , $\delta = 0.004$

trariamente grande, si el paso de muestreo es suficientemente pequeño. (Teorema 4.1)

- Con hipótesis adicionales (condición **D**), el origen resulta un punto de equilibrio uniformemente asintóticamente estable y la cuenca de atracción puede hacerse arbitrariamente grande si el paso de muestreo se achica convenientemente. (Teorema 4.3)
- Estabilidad exponencial local si la ley de control es un estabilizador exponencial local y el paso de muestreo es suficientemente pequeño. (Teorema 4.5)

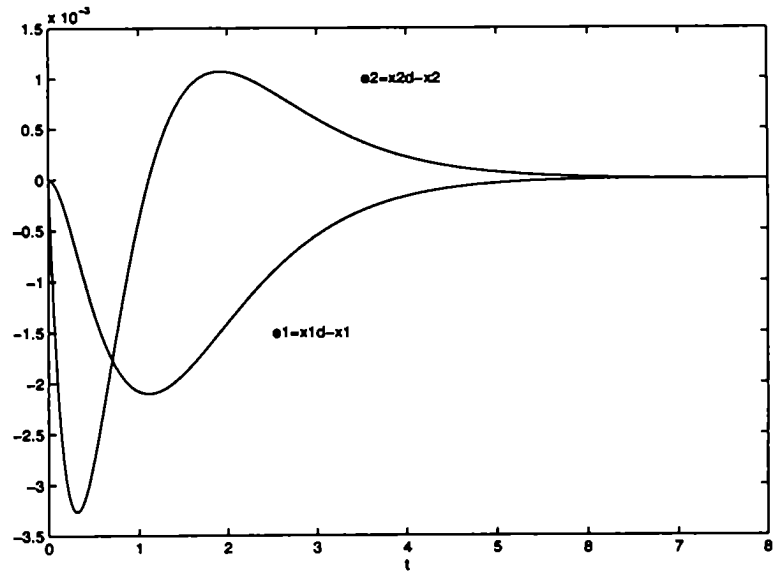


Figura 4.7: Evolución de los errores e_1 y e_2 , $\delta = 0.004$

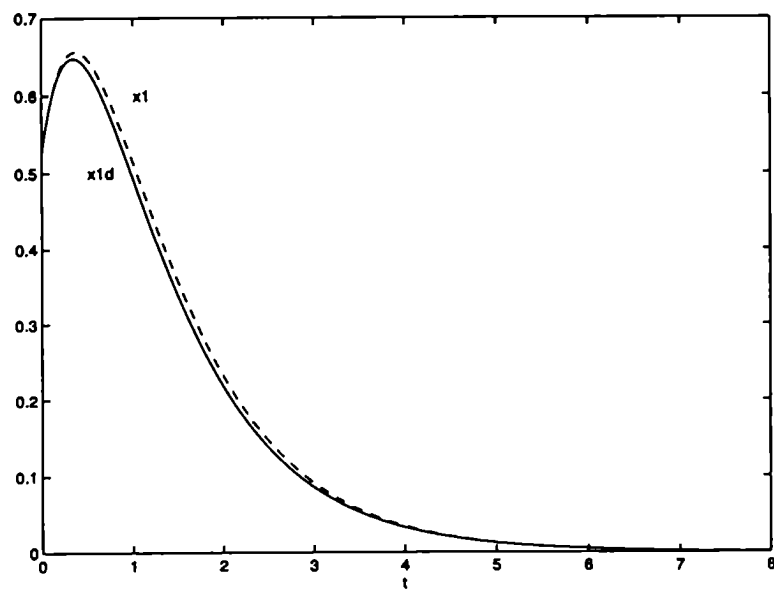


Figura 4.8: Evolución de x_1 y x_{1d} , $\delta = 0.04$

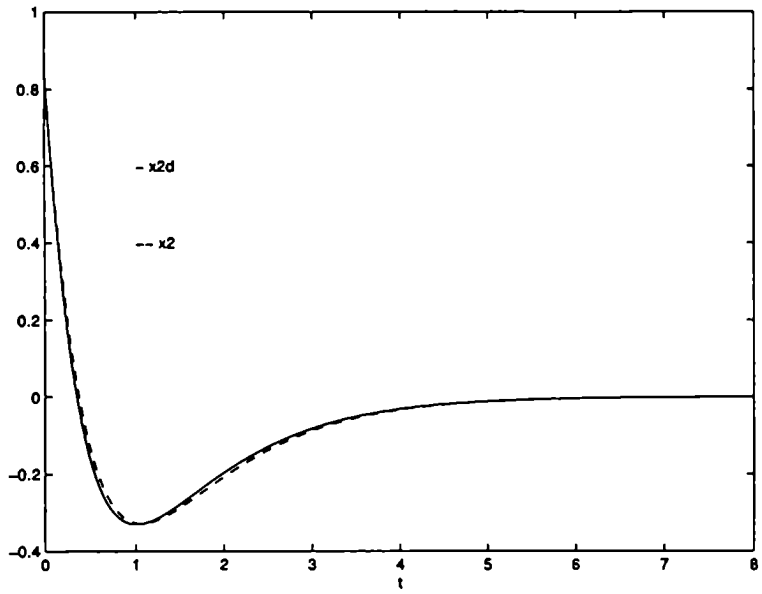


Figura 4.9: Evolución de x_2 y x_{2d} , $\delta = 0.04$

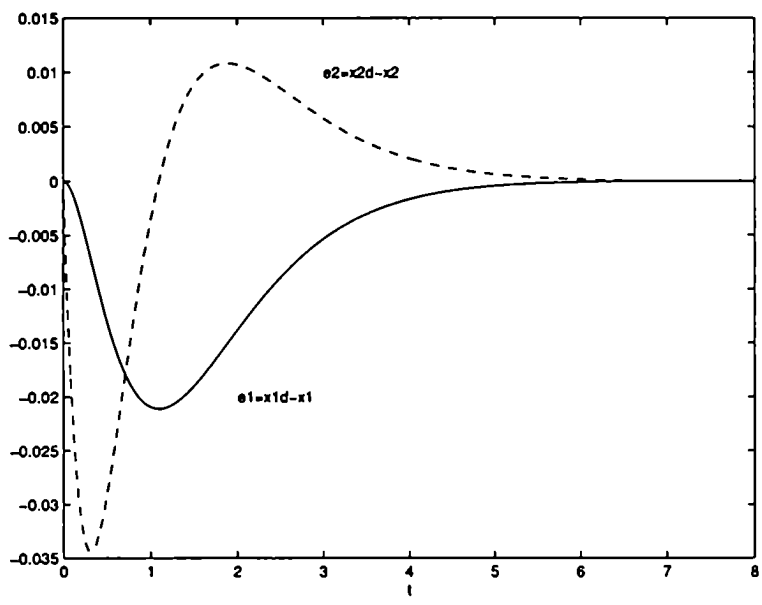


Figura 4.10: Evolución de los errores e_1 y e_2 , $\delta = 0.04$

Capítulo 5

Un Algoritmo para el Seguimiento de Trayectorias en Sistemas de Control a Datos Muestreados

5.1 Introducción

En el capítulo anterior hemos estudiado la implementación digital de leyes de control realimentado estabilizantes, específicamente en el caso en que ambos, el sistema y la ley de control, son tiempo invariantes y la implementación digital se efectúa mediante muestreo y retención de orden cero (MROC). Una de las conclusiones que obtuvimos en ese capítulo fue la siguiente: tal tipo de implementación estabiliza al sistema en forma práctica semiglobal, en el sentido que el error final puede hacerse arbitrariamente pequeño achicando convenientemente el paso de muestreo (Observación 4.1). En cierto sentido, este resultado nos dice que la implementación digital mediante MROC de una ley de control tiempo invariante que estabiliza a un sistema de control también tiempo invariante, se comporta satisfactoriamente si el paso de muestreo se elige en forma adecuada.

Como la estabilización, i.e. la regulación a un punto de equilibrio del sistema de control, es un caso particular de seguimiento de trayectorias, se podría conjeturar que para la implementación digital vía MROC de leyes de control realimentado que resuelven el problema de seguimiento de trayectorias pueden obtenerse resultados similares. Desafortunadamente esos resultados no pueden generalizarse, como será mostrado en la siguiente sección. Es decir, en general, no hay razones para esperar un “buen” comportamiento de la implementación digital vía MROC de una ley de control realimentado que resuelve el problema de seguimiento de trayectorias en un sistema de control tiempo invariante.

Por otra parte, tampoco puede esperarse que la implementación digital vía MROC de leyes de control que resuelven el problema de seguimiento de trayectorias a lazo abierto

se comporte en forma adecuada, debido a la fragilidad de esta clase de controles respecto de pequeños cambios en las acciones de control ([72]).

Estos hechos motivan la búsqueda de un camino alternativo para el diseño de un controlador digital para el seguimiento de trayectorias basado en una ley de control en tiempo continuo que resuelve el problema, es decir, basado en una ley de control que resuelve el problema de seguimiento suponiendo que se conoce el estado del sistema en todo instante. En lugar de discretizar la ley de control en tiempo continuo, lo que haremos es diseñar un controlador digital que hará que el sistema siga las trayectorias que le proporciona un modelo del sistema controlado por la ley en tiempo continuo.

Entonces, basados en: (a) un conjunto de trayectorias “ideales” que se obtienen aplicando la solución en tiempo continuo a un modelo de la planta, (b) el conocimiento de los estados del sistema en los instantes de muestreo y (c) técnicas desarrolladas en [42] por Krasovskii y Subbotin en el contexto de la teoría de juegos posicionales, en lo que resta del capítulo diseñaremos un controlador que asegura la estabilidad práctica semiglobal del error de seguimiento, con error final arbitrariamente pequeño si el período de muestreo es suficientemente pequeño.

También demostraremos que el controlador propuesto es robusto respecto de pequeñas perturbaciones y de pequeños errores en los actuadores y en las mediciones, aún cuando la ley original de control no lo sea.

5.2 El problema de seguimiento de trayectorias

5.2.1 Notación y terminología adicionales

En esta breve sección introduciremos notación y terminología adicionales a las que introdujimos en el apartado 2.2.1 del capítulo 2.

Dados dos conjuntos X y U , $\varphi : X \rightarrow 2^U$ denota una multifunción de X en U , es decir, para cada $x \in X$, $\varphi(x)$ es un subconjunto de U .

Diremos que una función $u : I \rightarrow \mathbb{R}^q$, con $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, es un control a lazo abierto si u es medible Lebesgue y localmente acotada. Una función $\gamma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ es una ley de control realimentado si para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $\gamma(\cdot, x)$ es medible Lebesgue y para cada $t \in \mathbb{R}^+$, $\gamma(t, \cdot)$ es continua. Por último, dada una curva $z : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $z(I)$ es la imagen de I por z y $[z(I)]_r$, para $r \geq 0$, es el conjunto de puntos de \mathbb{R}^n cuya distancia a $z(I)$ es igual o menor que r .

5.2.2 El problema de seguimiento de trayectorias

Un problema que surge con frecuencia en las aplicaciones es el de encontrar controles que fuercen a un sistema de control dado a seguir una determinada trayectoria $x^*(t)$ en el

espacio de estados. Para establecerlo con precisión, consideremos el sistema de control no lineal

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (5.1)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ la variable de estado, $u \in \mathbb{R}^q$ la variable de control y $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ localmente Lipschitz en x uniformemente en conjuntos compactos de u , i.e., para cada par de conjuntos compactos $K \subset \mathbb{R}^n$ y $U \subset \mathbb{R}^q$, existe una constante $l_{K,U} \geq 0$ tal que

$$|f(x, u) - f(x', u)| \leq l_{K,U}|x - x'| \quad \forall x, x' \in K, \forall u \in U. \quad (5.2)$$

Diremos que una curva en el espacio de estados $x^* : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $I \subseteq \mathbb{R}^+$, $I = [t_0, t_f]$ ó $I = [t_0, +\infty)$ es una *referencia* o *trayectoria admisible* del sistema (5.1) si es acotada, i.e. existe un conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que $x^*(I) \subseteq K$, y existe un control a lazo abierto $u^* : I \rightarrow \mathbb{R}^q$ tal que x^* es solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x, u^*(t))$. En tal caso nos referiremos a u^* como un *generador* de x^* .

Entonces el problema de seguimiento de trayectorias consiste en, dada una referencia $x^*(t)$ definida en $[0, +\infty)$, hallar una ley de control tal que la trayectoria $x(t)$ del sistema (5.1) controlado por esa ley sea tal que el error de seguimiento

$$e(t) = |x(t) - x^*(t)| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow +\infty. \quad (5.3)$$

Claro está, aún nos falta precisar que entendemos por “ley de control”. Nosotros consideraremos dos tipos diferentes de leyes de control y por lo tanto dos tipos diferentes de soluciones para el problema de seguimiento de trayectorias, a saber: soluciones a lazo cerrado y soluciones a lazo abierto. Comencemos estableciendo que entendemos por una solución a lazo cerrado.

Definición 5.1 (*Solución a lazo cerrado*): Dada una referencia $x^* : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, decimos que una ley de control realimentado $\gamma(t, x)$ es una *solución lazo cerrado* (SLC) del problema de seguimiento de trayectorias si la ecuación que verifica el error de seguimiento $e(t)$,

$$\dot{e} = f(x^*(t) + e, \gamma(t, x^*(t) + e)) - f(x^*(t), u^*(t)) := G(t, e) \quad (5.4)$$

tiene solución única para cada condición inicial y $e = 0$ es un punto de equilibrio globalmente uniformemente asintóticamente estable.

La existencia de soluciones a lazo cerrado para el problema de seguimiento de trayectorias ha sido extensamente estudiada en el campo de la robótica, incluso considerando restricciones en el control y el empleo de estimadores de los estados en el lazo de realimentación (ver [8, 10, 68, 74]). Para sistemas linealizables exactamente, el problema fue

resuelto en [36] y [64] e, incluyendo restricciones en los controles y empleando estimadores para los estados, en [46], [19] y [20].

Sin embargo, como al presente no hay razones para esperar que siempre existan soluciones a lazo cerrado para el problema de seguimiento de trayectorias en sistemas generales de control, es razonable buscar definiciones de solución que sean más generales que la de SLC pero que retengan algunas de sus propiedades. Inspirados en la noción de presíntesis, que surge en el contexto de la teoría de control óptimo (ver [7]), justamente debido a la imposibilidad de asegurar la existencia de leyes de control realimentado óptimas, introducimos la definición de solución a lazo abierto que, como veremos enseguida, bajo ciertas condiciones contiene como caso particular a la de solución a lazo cerrado. Antes de presentar la definición formal de solución a lazo abierto, preferimos discutirla brevemente.

Supongamos que γ es una SLC del problema de seguimiento de trayectorias, y consideremos para cada condición inicial (t_0, x_0) el control a lazo abierto $\hat{u}(t; t_0, x_0) = \gamma(t, x(t))$ con $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ la única solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x, \gamma(t, x))$ tal que $x(t_0) = x_0$. De este modo obtenemos una familia de controles a lazo abierto $\mathcal{F} = \{\hat{u}(\cdot, t_0, x_0) : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^q : (t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n\}$ tal que para cada condición inicial (t_0, x_0) , el control $\hat{u}(t; t_0, x_0)$ genera la trayectoria $x(t; t_0, x_0)$. Además, como $e = 0$ es un punto de equilibrio globalmente uniformemente asintóticamente estable de la ecuación (5.4), cada trayectoria $x(\cdot; x_0, t_0)$ verifica $|x(\tau + t_0; t_0, x_0) - x^*(\tau + t_0)| \rightarrow 0$ cuando $\tau \rightarrow +\infty$, y la convergencia es uniforme respecto de $t_0 \in \mathbb{R}^+$ y de $x_0 \in K$ si $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto, o, equivalentemente (ver [40]), es posible hallar una función β de clase \mathcal{KL} tal que

$$|x(t; t_0, x_0) - x^*(t)| \leq \beta(|x_0 - x^*(t_0)|, t - t_0) \quad \forall t \geq t_0, \forall t_0 \in \mathbb{R}^+ \text{ y } \forall x_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (5.5)$$

Teniendo en cuenta lo anterior, parece razonable considerar como solución a lazo abierto a una familia de controles a lazo abierto $\mathcal{F} = \{\hat{u}(\cdot, t_0, x_0) : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^q : (t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n\}$ tal que para alguna función β de clase \mathcal{KL} , toda trayectoria $x(\cdot; t_0, x_0)$ del sistema (5.1) generada por $\hat{u}(\cdot, t_0, x_0)$ con $x(t_0; t_0, x_0) = x_0$, satisface la acotación (5.5).

Sin embargo, por cuestiones técnicas, es conveniente además imponer que cada control \hat{u} sea acotado por una cota que sólo dependa del error inicial, es decir, que exista una función $\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, que sin pérdida de generalidad puede suponerse no decreciente, tal que

$$|\hat{u}(t, t_0, x_0)| \leq \alpha(|x_0 - x^*(t_0)|) \quad \forall t \geq t_0, \forall t_0 \in \mathbb{R}^+ \text{ y } \forall x_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (5.6)$$

De esta forma llegamos a la siguiente

Definición 5.2 (Solución a lazo abierto): Dada una referencia $x^* : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, decimos que una familia de controles a lazo abierto $\mathcal{F} = \{\hat{u}(\cdot, t_0, x_0) : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^q : (t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n\}$ es una *solución a lazo abierto* (SLA) del problema de seguimiento de

trayectorias si existen una función β de clase \mathcal{KL} y una función no decreciente $\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tales que valen (5.6) y (5.5), esta última con $x(\cdot; t_0, x_0)$ la trayectoria del sistema (5.1) generada por $\hat{u}(\cdot; t_0, x_0)$ que verifica $x(t_0; t_0, x_0) = x_0$.

Observación 5.1 Como se desprende de la discusión precedente a la definición de SLA, una SLC γ del problema de seguimiento de trayectorias no genera necesariamente una SLA del mismo problema, pues la familia de controles a lazo abierto determinada por la SLC no satisface necesariamente (5.6) para alguna función α . Por lo tanto, para considerar a una SLC como SLA es necesario imponer condiciones adicionales sobre γ , por ejemplo la siguiente:

Existe una función $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ no decreciente tal que $|\gamma(t, x)| \leq \phi(|x - x^*(t)|)$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$ y para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

En efecto, para todo $t \geq t_0$ tenemos que $|\hat{u}(t; t_0, x_0)| = |\gamma(t, x(t))| \leq \phi(|e(t)|)$. Como $|e(t)| \leq \beta(|e(t_0)|, t - t_0) \leq \beta(|e(t_0)|, 0)$, tenemos que $|\hat{u}(t; t_0, x_0)| \leq \phi(\beta(|e(t_0)|, 0))$, con lo cual (5.6) se verifica con $\alpha(r) = \phi(\beta(r, 0))$.

La existencia de soluciones a lazo abierto para el problema de seguimiento de trayectorias puede caracterizarse en término de funciones de Lyapunov a partir del trabajo de Albertini y Sontag [2] sobre controlabilidad asintótica al origen de sistemas de control tiempo variantes. Más precisamente, para una trayectoria admisible x^* del sistema (5.1) y un generador u^* de la misma, consideremos la ecuación diferencial que satisface la diferencia $e(t) = x(t) - x^*(t)$ entre una trayectoria $x(t)$ de (5.1) generada por un control $u(t) = u^*(t) + v(t)$ y la trayectoria $x^*(t)$,

$$\dot{e} = G(t, e, v) \quad (5.7)$$

con $G(t, e, v) = f(x^*(t) + e, u^*(t) + v) - f(x^*(t), u^*(t))$, e interpretemosla como un sistema de control tiempo-variante con variable de estado e y variable de control v .

Entonces, siguiendo la terminología empleada en ([2]), es fácil ver que la existencia de una SLA del problema de seguimiento de la trayectoria x^* es equivalente a que el sistema (5.7) sea *globalmente asintóticamente controlable al origen* (GACO). Por otra parte, el sistema (5.7) es GACO si y sólo si tal sistema admite una función de Lyapunov de control, lo cual, en términos del sistema (5.1) y del par (x^*, u^*) significa la existencia de una función continua $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ que verifica:

1. $\alpha_1(|x - x^*(t)|) \leq V(t, x - x^*(t)) \leq \alpha_2(|x - x^*(t)|)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y para todo $t \in \mathbb{R}^+$, con α_1 y α_2 de clase \mathcal{K}_∞ .
2. Existen $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continua y creciente y α_3 de clase \mathcal{K} tales que para cada $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ existe $t_1 > t_0$ y un control a lazo abierto $\tilde{u} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^q$ con

$|\tilde{u}(t) - u^*(t)| \leq \phi(|x_0 - x^*(t_0)|)$ para todo $t \in [t_0, t_1)$ tal que

$$\liminf_{t \rightarrow t_0^+} \frac{V(t, x(t) - x^*(t)) - V(t_0, x_0)}{t - t_0} \leq -\alpha_3(|x_0 - x^*(t_0)|)$$

siendo $x(t)$ la trayectoria de (5.1) generada por el control \tilde{u} que verifica $x(t_0) = x_0$.

Las soluciones a lazo abierto del problema de seguimiento de trayectorias no han sido tratadas en la literatura, quizá debido a que su implementación directa exhibe ausencia de robustez en presencia de errores en el modelado, en la condición inicial y en los actuadores, y de perturbaciones externas. Sin embargo, como veremos más adelante, el algoritmo que presentaremos para la implementación digital de una SLA, eliminará las deficiencias mencionadas.

Cerraremos la sección mostrando, mediante un ejemplo, que la implementación digital de una SLC del problema de seguimiento de trayectorias vía MROC no siempre funciona adecuadamente.

Consideremos el sistema de control lineal descrito por

$$\dot{x}(t) = u(t) \tag{5.8}$$

con $x(t) \in \mathbb{R}$ y $u(t) \in \mathbb{R}$. Sea $u^* : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ un control a lazo abierto acotado que verifica lo siguiente:

Para cada $N \in \mathbb{N}$ existe $k^* = k(N) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $t_k = k2^{-N}$ con $k \in \mathbb{N}$ y $k \geq k^*$ vale lo siguiente:

1. $u^*(t_k) = 1$;
2. $\int_{t_k}^{t_{k+1}} u^*(t) dt = 0$.

Por ejemplo puede considerarse el control u^* definido como sigue:

Para $N \in \mathbb{N}$, $j = 0, 1, \dots, 2^N - 1$ y $I_j^N = [N - 1 + j2^{-N}, N - 1 + (j + 1)2^{-N})$,

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in I_j^N \text{ y } j \text{ es par} \\ -1 & \text{si } t \in I_j^N \text{ y } j \text{ es impar.} \end{cases} \tag{5.9}$$

Si la referencia x^* a seguir es la trayectoria generada por u^* y $x^*(0) = 0$, es decir, es la solución del problema a valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u^*(t) \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{5.10}$$

es claro que x^* es acotada y por lo tanto admisible, y que la ley de control realimentado $\gamma(t, x) = u^*(t) - (x - x^*(t))$ es una SLC, pues, para tal ley, la ecuación del error de seguimiento es

$$\dot{e} = -e. \quad (5.11)$$

Sin embargo la implementación digital de γ vía MROC no produce un error final de seguimiento aceptable cuando el período de muestreo es $\delta_N = 2^{-N}$ con $N = 1, 2, \dots$

En efecto, fijemos $N^* \in \mathbb{N}$ y consideremos el período de muestreo $\delta = \delta_{N^*}$, los instantes de muestreo $t_k = k\delta$ y la implementación digital de γ vía MROC, es decir, $u(t) = \gamma(t_k, x(t_k)) = u^*(t_k) - (x(t_k) - x^*(t_k))$ para $t \in [t_k, t_{k+1})$. Entonces usando 1. y 2. es fácil ver que para $k \geq k^*(N^*)$, la sucesión de errores $e(t_k) = x(t_k) - x^*(t_k)$ satisface la ecuación en diferencias

$$e(t_{k+1}) = (1 - \delta)e(t_k) + \delta$$

y, por lo tanto, $e(t_k) \rightarrow 1$ cuando $k \rightarrow \infty$. Es decir, independientemente de $N \in \mathbb{N}$, si el período de muestreo es $\delta = 2^{-N}$, la implementación digital vía MROC de γ no puede producir un error final de seguimiento inferior a 1.

5.3 Seguimiento de trayectorias en un intervalo acotado con datos muestreados

En esta sección presentaremos un algoritmo de control para el seguimiento de una trayectoria admisible del sistema (5.1) a lo largo de un intervalo de tiempo acotado, que emplea los datos muestreados del sistema. Este algoritmo ha sido inspirado por ciertas técnicas desarrolladas por Krasovskii y Subbotin en el contexto de la teoría de Juegos Posicionales ([42]).

Con el objeto de tener en cuenta en los análisis que efectuemos la posible existencia de errores de modelado, perturbaciones externas y errores en los actuadores, consideremos asociado a (5.1) el sistema perturbado

$$\dot{x} = f(x, u) + \eta_1(t), \quad (5.12)$$

donde $\eta_1(t)$ es una perturbación externa al sistema que suponemos medible Lebesgue y acotada para todo $t \geq 0$. No consideramos explícitamente los errores en los actuadores ya que al ser f en (5.1) uniformemente continua en conjuntos compactos, cualquier perturbación acotada de u puede ser considerada como parte de la perturbación externa $\eta_1(t)$.

En lo que sigue supondremos, por simplicidad, que la sucesión de instantes de muestreo es regular, es decir, que $t_k = k\delta$, con $\delta > 0$ el período de muestreo, y que disponemos

de mediciones del estado $x(t)$ del sistema en esos instantes, es decir, supondremos que en lugar $x(t_k)$ conocemos

$$\hat{x}(t_k) = x(t_k) + \eta_2(t_k) \quad (5.13)$$

y que el error de medición $\eta_2(t_k)$ es acotado para todo $k \geq 0$.

Con el objeto de describir el algoritmo de control que proponemos para seguir una trayectoria admisible del sistema (5.1), asociemos a cada conjunto compacto $U \subset \mathbb{R}^q$ del espacio de controles, la *multifunción de seguimiento* $\varphi_U : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow 2^U$ definida como sigue:

$$\varphi_U(x, z) = \left\{ u \in U : \langle z - x, f(x, u) \rangle = \max_{v \in U} \langle z - x, f(x, v) \rangle \right\}. \quad (5.14)$$

Entonces, dados

- un conjunto compacto $U \subset \mathbb{R}^q$ dentro del cual variará la variable de control;
- un período de muestreo $\delta > 0$;
- la longitud $T > 0$ del intervalo en el cual se efectuará el seguimiento;
- una trayectoria admisible de (5.1) z^* definida en un intervalo de la forma $[t^{z^*}, t^{z^*} + T]$ con $t^{z^*} = k^* \delta$.

el algoritmo de control que proponemos para el seguimiento de z^* en el intervalo $[t^{z^*}, t^{z^*} + T]$ por parte del sistema de control, usando los datos muestreados $\{\hat{x}(t_k)\}$ y que de aquí en adelante denominaremos $\mathcal{A}(U, \delta, T, z^*)$, es el siguiente.

Algoritmo de control $\mathcal{A}(U, \delta, T, z^*)$:

Sean $t_k = k\delta$ $k \geq k^*$ los instantes de muestreo, entonces el control $u(t)$ a ser aplicado en la planta perturbada (5.12) durante el intervalo $[t^{z^*}, t^{z^*} + T] = [t_{k^*}, t_{k^*} + T]$, se define recursivamente mediante:

$$u(t_k) \in \varphi_U(z^*(t_k), \hat{x}(t_k)) \quad (5.15)$$

$$u(t) = u(t_k) \quad t_k \leq t < t_{k+1}. \quad (5.16)$$

En otras, palabras, en cada instante de muestreo t_k , se elige el control $u(t_k)$ que se aplicará en la planta durante el intervalo $[t_k, t_{k+1})$, de modo tal que de los productos internos $\langle f(\hat{x}(t_k), v), z^*(t_k) - \hat{x}(t_k) \rangle$, con $v \in U$, el producto $\langle f(\hat{x}(t_k), u(t_k)), z^*(t_k) - \hat{x}(t_k) \rangle$ sea máximo (Figura 5.1).

Antes de iniciar el análisis del comportamiento del sistema (5.12) controlado por $\mathcal{A}(U, \delta, T, z^*)$ creemos conveniente puntualizar los dos siguientes hechos respecto de la implementación práctica del algoritmo.

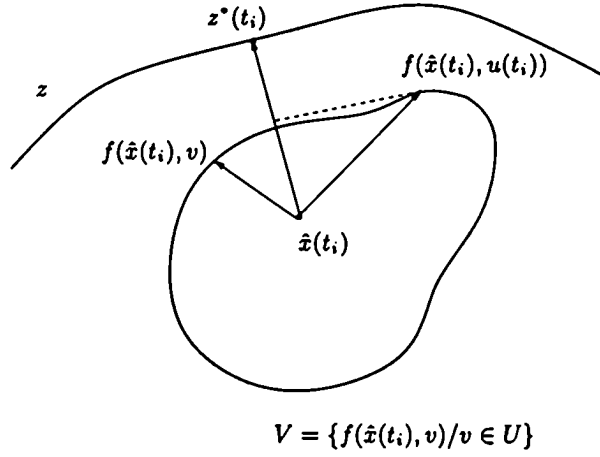


Figura 5.1:

- El algoritmo requiere sólo los valores de la referencia z^* en los instantes de muestreo t_k y estos valores pueden ser obtenidos integrando numéricamente la ecuación (5.1) si se conoce un generador de z^* .
- No es necesario conocer explícitamente la multifunción de seguimiento φ_U , ya que los valores $u(t_k)$ pueden ser calculados *on-line*. Sin embargo debemos reconocer que en el caso de sistemas $f(x, u)$ demasiado complejos el tiempo de cómputo puede ser excesivamente largo. En el caso en que el sistema es afín en el control, es decir $f(x, u) = g_0(x) + G(x)u$, y U es la cápsula convexa de un número finito de puntos, la evaluación de $u(t_k)$ se reduce a un problema de programación lineal; más aún, en ciertos casos es posible encontrar una expresión explícita para una selección de φ_U .

Con el objeto de estudiar el seguimiento de una trayectoria admisible z^* por parte del sistema perturbado (5.12) controlado por $\mathcal{A}(U, \delta, T, z^*)$, es conveniente definir para un conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, las siguientes constantes y funciones:

$$m_{K,U} = \max_{x \in K, u \in U} |f(x, u)| \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= 4m(2m + \eta_1) + 4l(m + \eta_1) \\ \Lambda_2 &= 4(m + l), \end{aligned} \quad (5.18)$$

donde $m = m_{K,U}$ y $l = l_{K,U}$ siendo $l_{K,U}$ la constante de Lipschitz que aparece en (5.2). Finalmente, para $\tau \geq 0$, sea

$$\Gamma_{K,U}(\tau, \delta, \eta_1, \eta_2) = \left[\eta_2^2 e^{2l\tau} + \frac{(e^{2l\tau} - 1)}{2l} (\Lambda_1 \delta + \Lambda_2 \eta_2 + 2\eta_1) \right]^{1/2} \quad (5.19)$$

Observación 5.2 Notamos que $\Gamma_{K,U}$ es creciente respecto de cada una de sus variables y que además

$$\lim_{|\delta|+|\eta_1|+|\eta_2|\rightarrow 0} \Gamma(\tau, \delta, \eta_1, \eta_2) = 0$$

uniformemente en conjuntos compactos de τ .

También será conveniente introducir, para K, U, T y δ como arriba, la subclase $\text{Adm}(K, U, T, \delta)$ de la clase de trayectorias admisibles de (5.1), definida como sigue:

$z^* \in \text{Adm}(K, U, T, \delta)$ si z^* es una trayectoria admisible de (5.1) definida en un intervalo de la forma $[t^{z^*}, t^{z^*} + T]$ con $t^{z^*} = k^*\delta$, $[z([t^{z^*}, t^{z^*} + T])]_2 \subset K$ y existe un generador de z^* , v^* tal que $v^*(t) \in U$ para todo $t \in [t^{z^*}, t^{z^*} + T]$.

El siguiente lema, que es una variación de uno debido a Krasovskii y Subbotin (ver [42], pag. 66), describe el comportamiento del sistema (5.12) controlado por $\mathcal{A}(U, \delta, T, z^*)$

Lema 5.1 Sean $U \subset \mathbb{R}^q$ y $K \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos compactos, sean $T > 0$, $\delta > 0$, $\eta_1 \geq 0$ y $\eta_2 \geq 0$ tales que $\Gamma_{K,U}(T, \delta, \eta_1, \eta_2) < 1$ y sea $z^* \in \text{Adm}(K, U, T, \delta)$.

Entonces, si $\eta_1(t)$ en (5.12) verifica $|\eta_1(t)| \leq \eta_1$, $\forall t^{z^*} \leq t \leq t^{z^*} + T$, $\eta_2(t_k)$ en (5.13) verifica $|\eta_2(t_k)| \leq \eta_2$, $\forall t^{z^*} \leq t_k \leq t^{z^*} + T$ y $x(t)$ es una trayectoria del sistema (5.12) controlado por $\mathcal{A}(U, \delta, T, z^*)$ tal que $|x(t^{z^*}) - z(t^{z^*})| \leq \eta_2$, se tiene que para todo $t^{z^*} \leq t \leq t^{z^*} + T$,

$$|x(t) - z(t)| \leq \Gamma_{K,U}(t - t^{z^*}, \delta, \eta_1, \eta_2) \quad (5.20)$$

$$\leq \Gamma_{K,U}(T, \delta, \eta_1, \eta_2). \quad (5.21)$$

Demostración: Sea $x(t)$ una trayectoria del sistema (5.12) controlado por $\mathcal{A}(U, \delta, T, z^*)$ tal que $|x(t^{z^*}) - z(t^{z^*})| \leq \eta_2$ y sea $e(t) = x(t) - z^*(t)$.

Sea $I = \{t \in [t^{z^*}, t^{z^*} + T] : |e(\tau)| \leq 1 \forall \tau \in [t^x, t]\}$. Entonces I es un intervalo cerrado, es decir, $I = [t^x, t^x]$ y, además, $t^x > t^{z^*}$ debido a que $|e(t^{z^*})| \leq \eta_2 \leq (\Gamma_{K,U}(T, \delta, \eta_1, \eta_2)) < 1$. Si demostramos que (5.20) vale para todo $t \in I$, quedará demostrado el lema, pues en ese caso necesariamente $t^x = t^{z^*} + T$. En efecto, si $t^x < t^{z^*} + T$, de (5.20) se deduce que $|e(t^x)| \leq \Gamma_{K,U}(T, \delta, \eta_1, \eta_2) < 1$; entonces, por la continuidad de $e(t)$ existe $t' > t^x$ tal que $|e(t)| \leq 1$ para todo $t^x \leq t \leq t'$ y, en consecuencia, $[t^{z^*}, t'] \subseteq I$, lo cual es absurdo.

Con el objeto de probar que (5.20) vale para todo $t \in I$, consideremos $s(t) = |e(t)|^2$. $s(t)$ es absolutamente continua en I y, para casi todo punto t de I ,

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &\leq 2\langle e(t), f(x(t), u(t)) + \eta_1(t) - f(z^*(t), v^*(t)) \rangle \\ &\leq 2|e(t)||\eta_1(t)| + 2\langle e(t), f(x(t), u(t)) - f(z^*(t), v^*(t)) \rangle \\ &\leq 2\eta_1 + 2\langle e(t), f(x(t), u(t)) - f(z^*(t), v^*(t)) \rangle \end{aligned} \quad (5.22)$$

Con el objeto de acotar el término $c(t) = \langle e(t), f(x(t), u(t)) - f(z^*(t), v^*(t)) \rangle$, escribamos

$$c(t) = c_1(t) + c_2(t) + c_3(t) + c_4(t) + c_5(t) \quad (5.23)$$

con

$$\begin{aligned}
c_1(t) &= \langle e(t), f(x(t), v^*(t)) - f(z^*(t), v^*(t)) \rangle \\
c_2(t) &= \langle e(t), f(x(t), u(t)) - f(\hat{x}(t_k), u(t)) + f(\hat{x}(t_k), v^*(t)) - f(x(t), v^*(t)) \rangle \\
c_3(t) &= \langle e(t) - e(t_k), f(\hat{x}(t_k), u(t)) - f(\hat{x}(t_k), v^*(t)) \rangle \\
c_4(t) &= \langle x(t_k) - \hat{x}(t_k), f(\hat{x}(t_k), u(t)) - f(\hat{x}(t_k), v^*(t)) \rangle \\
c_5(t) &= \langle \hat{x}(t_k) - z^*(t_k), f(\hat{x}(t_k), u(t)) - f(\hat{x}(t_k), v^*(t)) \rangle,
\end{aligned}$$

donde t_k es el instante de muestreo tal que $t_k \leq t < t_{k+1}$.

Para proseguir es necesario notar que para todo $t \in I$ y todo $t_k \in I$, $z^*(t) \in K$ y $v^*(t) \in U$ por hipótesis, $u(t) \in U$ por definición, y, como $|x(t) - z^*(t)| \leq 1$ y $|\hat{x}(t_k) - z^*(t_k)| \leq |\hat{x}(t_k) - x(t_k)| + |x(t_k) - z^*(t_k)| \leq \eta_2 + 1 < 2$ y $[z^*[t^{z^*}, t^{z^*} + T]]_2 \subset K$, $x(t) \in K$ y $\hat{x}(t_k) \in K$.

Entonces, de (5.2) con $l = l_{K,U}$ resulta

$$c_1(t) \leq l|e(t)||e(t)| = ls(t). \quad (5.24)$$

Por otra parte de (5.2), (5.17) con $m = m_{K,U}$ y de las acotaciones

$$\begin{aligned}
|x(t) - x(t_k)| &\leq \int_{t_k}^t (|f(x(s), u(s))| + |\eta_1(s)|) ds \\
&\leq (m + \eta_1)\delta, \\
|x(t) - \hat{x}(t_k)| &\leq |x(t) - x(t_k)| + |x(t_k) - \hat{x}(t_k)| \\
&\leq (m + \eta_1)\delta + \eta_2,
\end{aligned}$$

y

$$|z^*(t) - z^*(t_k)| \leq \int_{t_k}^t (|f(z(s), v^*(s))|) ds \leq m\delta,$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
c_2(t) &\leq 2|e(t)l||x(t) - \hat{x}(t_k)| \\
&\leq 2l[(m + \eta_1)\delta + \eta_2], \quad (5.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_3(t) &\leq 2|e(t) - e(t_k)|m \\
&\leq 2m(2m + \eta_1)\delta, \quad (5.26)
\end{aligned}$$

$$c_4(t) \leq 2m\eta_2. \quad (5.27)$$

Por último, de (5.15), (5.16) y de la definición de φ_U , resulta

$$c_5(t) \leq 0. \quad (5.28)$$

Entonces, combinando (5.23) con las desigualdades (5.24)-(5.28) tenemos que

$$c(t) \leq ls(t) + 2l[(m + \eta_1)\delta + \eta_2] + 2m(2m + \eta_1)\delta + 2m\eta_2,$$

con lo cual, volviendo a (5.22), resulta

$$\dot{s}(t) \leq 2ls(t) + (\Lambda_1\delta + \Lambda_2\eta_2 + 2\eta_1)$$

para casi todo $t \in I$. En consecuencia, por resultados conocidos para inecuaciones diferenciales, para todo $t \in I$

$$\begin{aligned} s(t) &\leq s(t^{z^*})e^{2l(t-t^{z^*})} + \frac{(e^{2l(t-t^{z^*})} - 1)}{2l}(\Lambda_1\delta + \Lambda_2\eta_2 + 2\eta_1) \\ &\leq \eta_2^2 e^{2l(t-t^{z^*})} + \frac{(e^{2l(t-t^{z^*})} - 1)}{2l}(\Lambda_1\delta + \Lambda_2\eta_2 + 2\eta_1) \\ &= (\Gamma(t - t^{z^*}, \delta, \eta_1, \eta_2))^2, \end{aligned}$$

o, equivalentemente,

$$|e(t)| \leq \Gamma(t - t^{z^*}, \delta, \eta_1, \eta_2) \quad \forall t \in I$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

Observación 5.3 Del Lema 5.1 y de la Observación 5.2 se deduce inmediatamente lo siguiente: dados $T^* > 0$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarios, existen números positivos δ^* , η_1^* y η_2^* tales que dados $0 < T < T^*$, $0 < \delta < \delta^*$ y $z(\cdot) \in \text{Adm}(K, U, T, \delta)$, si $\eta_1(t)$ en (5.12) verifica $|\eta_1(t)| \leq \eta_1^*$, $\forall t^{z^*} \leq t \leq t^{z^*} + T$, $\eta_2(t_k)$ en (5.13) verifica $|\eta_2(t_k)| \leq \eta_2^*$, $\forall t^{z^*} \leq t_k \leq t^{z^*} + T$, y $x(\cdot)$ es una trayectoria del sistema (5.12) controlado por $\mathcal{A}(U, \delta, T, z(\cdot))$ que satisface $|x(t_{k^*}) - z(t_{k^*})| \leq \eta_2^*$ entonces:

$$|x(t) - z(t)| \leq \varepsilon \quad \forall t \in [t^{z^*}, t^{z^*} + T].$$

En efecto, basta elegir números positivos δ^* , η_1^* y η_2^* tales que $\Gamma_{K,U}(T^*, \delta^*, \eta_1^*, \eta_2^*) \leq \min(\varepsilon, 1)$, los cuales existen debido a que $\lim_{|\delta|+|\eta_1|+|\eta_2| \rightarrow 0} \Gamma(T^*, \delta, \eta_1, \eta_2) = 0$, tener en cuenta que $\Gamma_{K,U}$ es creciente respecto de cada una de sus variables y aplicar el Lema 5.1.

5.4 Un algoritmo de control para el seguimiento de trayectorias

Si nuestro objetivo es que el sistema perturbado (5.12) siga asintóticamente una trayectoria admisible de (5.1), es claro que el algoritmo presentado en la sección precedente

tiene dos desventajas: a) el estado inicial del sistema debe estar suficientemente cerca del estado inicial de la trayectoria que se pretende seguir y b) el intervalo temporal en el cual se quiere seguir la trayectoria debe ser acotado. La limitación que impone la restricción b) no reside en el hecho que el intervalo sobre el cual se quiere seguir la trayectoria sea infinito, ya que siempre puede suponerse que el proceso finalizará en tiempo finito, sino en que el período de muestreo necesario para asegurar un error de seguimiento aceptable resulte tan pequeño que el algoritmo no pueda ser implementado.

En esta sección presentaremos un algoritmo de control que basado en los datos muestreados del sistema y en una SLA del problema de seguimiento de trayectorias, soluciona las desventajas que presenta el algoritmo descrito en la sección anterior.

El algoritmo propuesto dependerá de los siguientes parámetros:

- un conjunto compacto $U \subset \mathbb{R}^q$ dentro del cual variará la variable de control;
- un período de muestreo $\delta > 0$;
- un período de conmutación $T > 0$;
- una SLA \mathcal{F} del problema de seguimiento de la trayectoria admisible x^* por parte del sistema (5.1)

y será denominado $\mathcal{C}(U, \delta, T, \mathcal{F})$.

Con el objeto de describir la idea en la que se basa el algoritmo $\mathcal{C}(U, \delta, T, \mathcal{F})$, supongamos que el período de conmutación T es un múltiplo entero del período de muestreo δ , digamos $T = T(\delta) = n_T \delta$ y consideremos los instantes de conmutación $T_N(\delta) = NT(\delta)$ con $N = 0, 1, \dots$, y la sucesión de intervalos consecutivos de longitud T , $[0, T_1(\delta))$, $[T_1(\delta), T_2(\delta))$, \dots . Entonces, la idea consiste en seguir en cada uno de los intervalos $[T_N(\delta), T_{N+1}(\delta))$ una referencia admisible z_N que se elige en el instante $T_N(\delta)$, mediante el algoritmo $\mathcal{A}(U, \delta, T, z_N)$ descrito en la sección anterior. Para ilustrar como procede el algoritmo, mostraremos su evolución durante los dos primeros intervalos (Figura 5.2):

- En el primer intervalo $[0, T_1(\delta))$, consideramos como referencia a la trayectoria z_0 que resulta de aplicar en (5.1) el control a lazo abierto de la SLA \mathcal{F} correspondiente a la condición inicial $(0, \hat{x}(0))$, e intentamos seguirla mediante el algoritmo de control $\mathcal{A}(U, \delta, T(\delta), z_0)$ hasta el instante T_1 . Más precisamente, con la notación de la sección anterior:

durante el intervalo $[0, T_1(\delta))$ aplicamos a la planta el control dado por el algoritmo $\mathcal{A}(U, \delta, T(\delta), z_0)$, con $z_0 : [0, T_1(\delta)] \rightarrow \mathbb{R}^n$ la solución del problema a valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{z}_0 &= f(z_0, \hat{u}(t; 0, \hat{x}(0))) \\ z_0(0) &= \hat{x}(0) \end{cases}$$

- En el instante $T_1(\delta)$ cambiamos la referencia z_0 por la referencia z_1 que resulta de aplicar en (5.1) el control a lazo abierto de SLA \mathcal{F} correspondiente ahora a la condición inicial $(T_1(\delta), \hat{x}(T_1(\delta)))$, e intentamos seguirla durante el intervalo $[T_1(\delta), T_2(\delta))$ empleando $\mathcal{A}(U, \delta, T(\delta), z_1)$, es decir:
En el intervalo $[T_1(\delta), T_2(\delta))$ aplicamos el control dado por $\mathcal{A}(U, \delta, T(\delta), z_1)$, con $z_1 : [T_1(\delta), T_2(\delta)) \rightarrow \mathbb{R}^n$ la solución del problema a valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = f(z_1, \hat{u}(t; T_1(\delta), \hat{x}(T_1(\delta)))) \\ z_1(T_1(\delta)) = \hat{x}(T_1(\delta)) \end{cases}$$

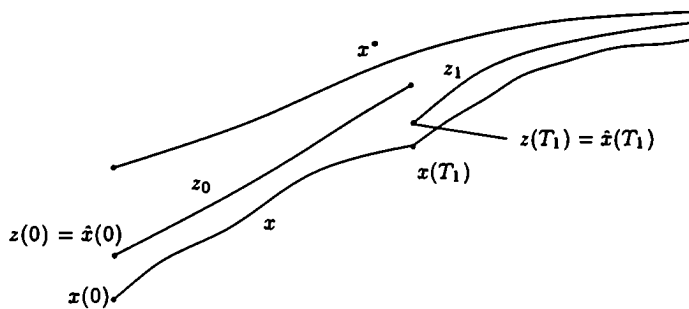


Figura 5.2:

Entonces, la estrategia de control descrita es la siguiente:

Algoritmo de control $\mathcal{C}(U, \delta, \mathbf{T}, \mathcal{F})$:

- En el intervalo $[T_N(\delta), T_{N+1}(\delta))$, con $T_N = NT(\delta)$, $N = 0, 1, \dots$, aplique el control $u(t)$ dado por el algoritmo $\mathcal{A}(U, \delta, T(\delta), z_N)$, con $z_N : [T_N(\delta), T_{N+1}(\delta)) \rightarrow \mathbb{R}^n$ la solución del problema a valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{z}_N = f(z_N, \hat{u}(t; T_N(\delta), \hat{x}(T_N(\delta)))) \\ z_N(T_N(\delta)) = \hat{x}(T_N(\delta)). \end{cases}$$

En el caso general, es decir, si $T/\delta \notin \mathbb{N}$, se considera el primer número natural r tal que $r\delta \geq T$ y el algoritmo se implementa de la misma forma que antes, pero con $T(\delta) = r\delta$.

Observación 5.4 El controlador que proponemos consta de dos componentes a) un generador de referencias que se obtienen a través de un modelo interno de la planta controlado por una SLA \mathcal{F} , y que se actualizan a períodos de longitud $T(\delta)$ y, b) un algoritmo que proporciona el control necesario para el seguimiento de la referencia dada por el generador de referencias.

Observación 5.5 Si en lugar de una SLA, conocemos una SLC $\gamma(t, x)$, que es el caso más frecuente, y ésta se encuentra en las condiciones de la Observación 5.1, en el intervalo $[T_N(\delta), T_{N+1}(\delta))$ se emplea la referencia $z_N : [T_N(\delta), T_{N+1}(\delta)] \rightarrow \mathbb{R}^n$, que es la solución del problema a valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{z} &= f(z, \gamma(t, z)) \\ z(T_N(\delta)) &= \hat{x}(T_N(\delta)). \end{cases}$$

A continuación demostraremos que el controlador propuesto asegura la estabilidad práctica semiglobal del error de seguimiento, y que además es robusto respecto de perturbaciones externas, errores en los actuadores y errores en las mediciones, cuando todos éstos son suficientemente pequeños. Más precisamente, demostraremos que dados un conjunto de condiciones iniciales acotado y un número positivo ε_0 , el error final de seguimiento puede hacerse menor que ε_0 si se eligen adecuadamente U , T y δ , y η_1 y η_2 son suficientemente pequeños.

Teorema 5.1 Sea \mathcal{F} una SLA y sean R_0 y ε_0 números reales positivos.

Entonces existen un conjunto compacto $U \subset \mathbb{R}^q$ y números reales positivos T , δ^* , η_1^* y η_2^* tales que si $\eta_1(t)$ en (5.12) verifica $|\eta_1(t)| \leq \eta_1^* \forall t \geq 0$ y $\eta_2(t_k)$ en (5.13) verifica $|\eta_2(t_k)| \leq \eta_2^* \forall t_k \geq 0$, se verifica lo siguiente:

Existen Ψ de clase \mathcal{K} y $T^* > 0$ tales que si $x(t)$ es una trayectoria del sistema (5.12) controlado por $\mathcal{C}(U, \delta, T, \mathcal{F})$ con $0 < \delta \leq \delta^*$ que verifica $|x(0) - x^*(0)| \leq R_0$, entonces $x(t)$ satisface:

1. $|x(t) - x^*(t)| \leq \Psi(R_0 + \varepsilon_0) + \varepsilon_0 \forall t \geq 0$;
2. $|x(t) - x^*(t)| \leq \varepsilon_0 \forall t \geq T^*$.

Demostración: Sean α y β como en la Definición 5.2 de SLA y sea $U \subset \mathbb{R}^q$ un conjunto compacto tal que $B_{\alpha(R_0+1)} \subseteq U$. Elijamos un número positivo ε'_0 que verifique las siguientes condiciones:

1. $\varepsilon'_0 < \min(\varepsilon_0/2, R_0/2, 1)$;
2. $\beta(3\varepsilon'_0, 0) \leq \varepsilon_0/2$.

Con el objeto de elegir T , procedemos como sigue: para cada $\tau > 0$ consideremos la sucesión definida recursivamente mediante

$$\begin{cases} r_0 &= R_0 \\ r_{j+1} &= \beta(r_j + \varepsilon'_0, \tau) + \varepsilon'_0 \end{cases}$$

y el conjunto $\mathcal{T} = \{\tau > 0 : \forall j \ r_j \leq R_0 \text{ y } \limsup_{j \rightarrow \infty} r_j \leq 3/2\varepsilon'_0\}$. Elijamos cualquier $T \in \mathcal{T}$ ($\mathcal{T} \neq \emptyset$ pues si τ es tal que $\beta(R_0 + \varepsilon'_0, \tau) \leq \varepsilon'_0/2$ entonces $\tau \in \mathcal{T}$). Para el T elegido consideremos la sucesión $\{\tau_j\}$ definida arriba.

En lo que sigue vamos a determinar las constantes positivas δ_0 , η_1^* y η_2^* . Con tal fin, consideremos un conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que para cualquier par $t_0 \geq 0$, $z_0 \in \mathbb{R}^n$ con $|z_0 - x^*(t_0)| \leq R_0 + \varepsilon'_0$, la trayectoria $z(t)$ de (5.1) generada por $\hat{u}(t; t_0, z_0)$ que verifica $z(t_0) = z_0$, satisfaga la condición: $\{z([t_0, +\infty))\}_2 \subset K$.

Es fácil comprobar que, debido a la acotación de x^* , el conjunto $K = [x^*([0, +\infty))]_\varrho$ con $\varrho = \beta(R_0 + \varepsilon', 0) + 2$ sirve. En efecto, sea $|z_0 - x^*(t_0)| \leq R_0 + \varepsilon'$ y sea $\xi \in \{z([t_0, +\infty))\}_2$. Fijemos $\varepsilon > 0$ y elijamos $t_\varepsilon \geq t_0$ tal que $|\xi - z(t_\varepsilon)| \leq 2 + \varepsilon$. Entonces $|\xi - x^*(t_\varepsilon)| \leq |\xi - z(t_\varepsilon)| + |z(t_\varepsilon) - x^*(t_\varepsilon)| \leq 2 + \beta(R_0 + \varepsilon'_0, t_\varepsilon - t_0) + \varepsilon \leq \rho + \varepsilon$; como ε es arbitrario, la distancia de ξ a $x^*([0, +\infty))$ resulta menor o igual a ρ y por lo tanto $\xi \in K$.

Para los conjuntos U y K considerados, sean l y m como en (5.2) y (5.17) respectivamente, y sea Γ como en (5.19). Entonces elegimos δ_0 , η_1^* y η_2^* positivos y tales que

$$\eta_2^* \leq \varepsilon'_0 \quad \text{y} \quad \Gamma(T + \delta_0, \delta_0, \eta_1^*, \eta_2^*) \leq \varepsilon'_0. \quad (5.29)$$

Habiendo ya seleccionado U , T , δ_0 , η_1^* y η_2^* , procedemos a probar la tesis del teorema.

Fijemos $0 < \delta \leq \delta_0$ y supongamos que $\eta_1(t)$ en (5.12) verifica $|\eta_1(t)| \leq \eta_1^*$, $\forall t \geq 0$ y $\eta_2(t_k)$ en (5.13) verifica $|\eta_2(t_k)| \leq \eta_2^*$, $\forall t_k \geq 0$. Sea $x(t)$ una trayectoria del sistema (5.12) controlado por $\mathcal{C}(U, \delta, T, \mathcal{F})$ tal que la condición inicial verifica $|x(0) - x^*(0)| \leq R_0$.

Primero vamos a probar por inducción en N que

- (a) $|x(T_N) - x^*(T_N)| \leq r_N \ \forall N$;
- (b) $|x(t) - z_N(t)| \leq \varepsilon_0 \ \forall t \in [T_N, T_{N+1}]$,

donde, para simplificar la notación, $T_N = T_N(\delta)$.

Si $N = 0$, $|x(0) - x^*(0)| \leq R_0 = r_0$, y por lo tanto vale (a). Con el objeto de probar (b), notamos que la trayectoria z_0 restringida al intervalo $[0, T_1]$ pertenece a la clase $\text{Adm}(K, U, \delta, T_1)$, pues $\{z_0([0, T_1])\}_2 \subset K$ y el generador $\hat{u}(t; 0, \hat{x}(0)) \in U \ \forall t \in [0, T_1]$, ya que $|\hat{x}(0) - x^*(0)| \leq |\hat{x}(0) - x(0)| + |x(0) - x^*(0)| \leq \eta_2^* + R_0 \leq R_0 + 1$ y por lo tanto $|\hat{u}(t; 0, \hat{x}(0))| \leq \alpha(R_0 + 1)$, con lo cual $\hat{u}(t; 0, \hat{x}(0)) \in B_{\alpha(R_0+1)} \subset U$. Como $x(t)$ restringida a $[0, T_1]$ está generada por el control dado por $\mathcal{A}(U, \delta, T_1, z_0)$ y además $|x(0) - z_0(0)| = |\hat{x}(0) - x(0)| \leq \eta_2^*$ y $\Gamma_{K,U}(T_1, \delta, \eta_1^*, \eta_2^*) \leq \Gamma_{K,U}(T + \delta_0, \delta_0, \eta_1^*, \eta_2^*) \leq \varepsilon'_0 < 1$, nos encontramos en las condiciones del Lema 5.1, y, por lo tanto

$$|x(t) - z_0(t)| \leq \Gamma_{K,U}(T_1, \delta, \eta_1^*, \eta_2^*) \leq \varepsilon'_0 \quad \forall t \in [0, T_1].$$

Supongamos ahora que (a) y (b) valen para N . Como $r_N \leq R_0$, $|z_N(T_N) - x^*(T_N)| \leq |x(T_N) - x^*(T_N)| + |z_N(T_N) - x(T_N)| = |x(T_N) - x^*(T_N)| + |\hat{x}_N(T_N) - x(T_N)| \leq r_N + \eta_2^* \leq$

$R_0 + \varepsilon'_0$. Por lo tanto para todo $t \in [T_N, T_{N+1}]$, $|z_N(t) - x^*(t)| \leq \beta(R_0 + \varepsilon'_0, t - T_N)$. En consecuencia $|z_N(T_{N+1}) - x^*(T_{N+1})| \leq \beta(R_0 + \varepsilon'_0, T_1)$. De esta última acotación y de la validez de (b) para N , deducimos que $|x(T_{N+1}) - x^*(T_{N+1})| \leq |x(T_{N+1}) - z_N(T_{N+1})| + |z_N(T_{N+1}) - x^*(T_{N+1})| \leq \beta(R_0 + \varepsilon'_0, T_1) + \varepsilon'_0 \leq \beta(R_0 + \varepsilon'_0, T) + \varepsilon'_0 = r_{N+1}$, quedando probado que (a) vale para $N + 1$.

De la validez de (a) para $N + 1$ y del hecho que $r_{N+1} \leq R_0$, es posible deducir en forma similar al caso $N = 0$, que la trayectoria z_{N+1} restringida al intervalo $[T_{N+1}, T_{N+2}]$ pertenece a la clase $\text{Adm}(K, U, \delta, T_1)$; entonces usando los mismos argumentos que en el caso $N = 0$, se deduce que (b) vale para $N + 1$.

Ahora, de (a) y (b) probaremos los items 1. y 2. de la tesis. Sea $\Psi(r) = \beta(r, 0)$. Entonces, para $t \in [T_N, T_{N+1})$,

$$\begin{aligned} |x(t) - x^*(t)| &\leq |x(t) - z_N(t)| + |z_N(t) - x^*(t)| \\ &\leq \varepsilon'_0 + \beta(|z_N(T_N) - x^*(T_N)|, 0) \\ &= \varepsilon'_0 + \beta(|\hat{x}(T_N) - x^*(T_N)|, 0) \\ &\leq \varepsilon'_0 + \beta(R_0 + \varepsilon'_0, 0) \\ &= \Psi(R_0 + \varepsilon'_0) + \varepsilon'_0, \end{aligned}$$

y 1. queda probado.

Sea N^* tal que $r_N \leq 2\varepsilon'_0$ si $N \geq N^*$. Entonces, para $t \in [T_N, T_{N+1})$ con $N \geq N^*$, tenemos que

$$\begin{aligned} |x(t) - x^*(t)| &\leq |x(t) - z_N(t)| + |z_N(t) - x^*(t)| \\ &\leq \varepsilon'_0 + \beta(|z_N(T_N) - x^*(T_N)|, 0) \\ &= \varepsilon'_0 + \beta(|\hat{x}(T_N) - x^*(T_N)|, 0) \\ &\leq \varepsilon'_0 + \beta(r_N + \varepsilon'_0, 0) \\ &\leq \varepsilon'_0 + \beta(3\varepsilon'_0, 0) \\ &\leq \varepsilon'_0 + \varepsilon_0/2 \leq \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Tomando $T^* = N^*(T + \delta_0)$ y notando que $T_{N^*} = N^*T_1(\delta) \leq N^*(T + \delta_0) = T^*$, queda demostrado el item 2. y con ello el teorema. ■

Observación 5.6 De acuerdo con la demostración del Teorema 5.1, la única condición que debe cumplir el período de conmutación T es su pertenencia al conjunto \mathcal{T} . Para la implementación práctica del algoritmo es conveniente que T sea lo más pequeño posible, pues, teniendo en cuenta (5.29) y la monotonía de $\Gamma_{K,U}$ respecto de cada una de sus variables, tal elección permite mayores márgenes para las cotas δ_0 y η_1^* .

Observación 5.7 La demostración del Teorema 5.1 es un argumento matemático que valida el algoritmo presentado, es decir, afirma la existencia de un conjunto de parámetros para los cuales queda asegurado el cumplimiento del objetivo de control. Si bien puede servir de guía para la selección de tales parámetros, no puede considerarse un método de diseño pues, como veremos en las simulaciones que presentaremos en la siguiente sección, los parámetros que resultan siguiendo los pasos de la demostración, sobre todo en lo que respecta al período de muestreo, pueden ser demasiado conservativos.

Observación 5.8 Puede mostrarse que en el caso en que β en (5.5) es una función exponencial, $\beta(r, t) = ce^{-\eta t}r$ con $c \geq 1$ y $\eta > 0$, i.e, cuando la convergencia del error de seguimiento es exponencial, T puede elegirse como $T = \ln(5c)/\eta$, independientemente de los valores de R_0 y ε_0 .

5.5 Ejemplos

En esta sección aplicaremos el algoritmo presentado en la sección anterior a dos ejemplos: en el primero de ellos, la planta y la referencia son las del contraejemplo dado en la sección 5.2, donde mostramos que la implementación vía MROC de la ley de control realimentada que resuelve el problema de seguimiento a lazo cerrado, no produce un error final aceptable si el período de muestreo es $\delta_N = 2^{-N}$.

En el segundo ejemplo el modelo de la planta es una ecuación de Van der Pol con el agregado de un término de entrada y de un término de perturbación, y las mediciones se suponen ruidosas. En este caso, la referencia a seguir está generada por un sistema lineal de segundo orden tiempo invariante.

Como veremos, en ambos casos el algoritmo produce la estabilidad práctica semiglobal del error de seguimiento.

Ejemplo 1

Para el sistema (5.8) consideramos el control u^* definido en (5.9) y la referencia $x^*(t)$ generada por u^* que verifica $x^*(0) = 0$. Como hemos visto en la sección 5.2, la ley de control realimentado $\gamma(t, x) = u^*(t) - (x - x^*(t))$ es una SLC del problema de seguimiento de trayectorias, ya que el error de seguimiento verifica la ecuación (5.11).

Para la simulación consideramos que la cota para el error inicial $R_0 = 0.3$ y la cota para el error final $\varepsilon_0 = 0.3$. Debido a (5.11), podemos elegir $\beta(t, r) = e^{-t}r$ y, como $|\gamma(t, x)| \leq 1 + |x - x^*(t)|$, resulta, de la Observación 5.1, $\alpha(r) = 1 + r$.

Siguiendo los pasos de la demostración del Teorema 5.1 y teniendo en cuenta la Observación 5.8, obtenemos $U = [-1.3, 1.3]$, $T = 1$ y $\delta_0 = 0.0007$. Como afirmamos en la Observación 5.7, el valor δ_0 obtenido a partir de la demostración del teorema podría

ser demasiado conservativo, por lo tanto usaremos un período de muestreo más grande, $\delta = 2^{-5}$.

Con los valores obtenidos para U , T y δ , hicimos dos simulaciones, ambas con condición inicial $x(0) = 0.3$. En la primera de ellas no se consideraron ni perturbaciones en el sistema ni errores en las mediciones de los estados.

En la Figura 5.3 se muestra la trayectoria del sistema junto con la referencia x^* .

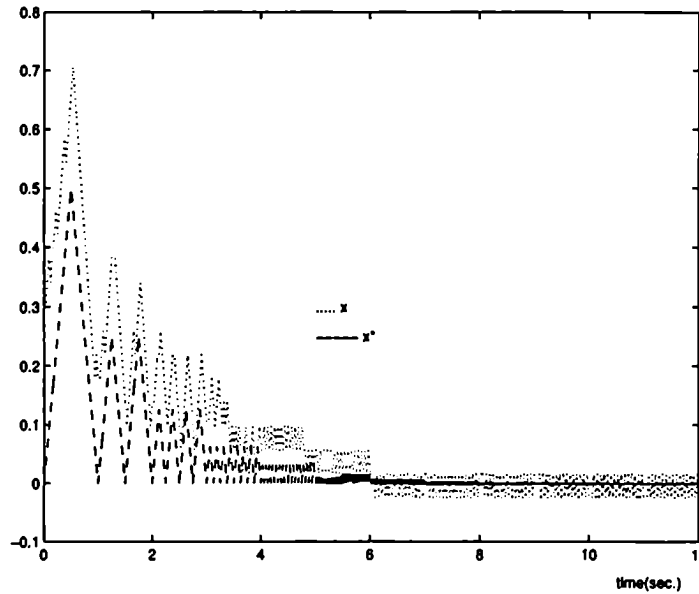


Figura 5.3: Ej. 1. Seguimiento de trayectoria sin errores de medición

La Figura 5.4 muestra el error de seguimiento. Allí se observa que el módulo del error de seguimiento es inferior a 0.025 después de aproximadamente 5 unidades de tiempo. Observamos que esta cota es considerablemente menor que la cota teórica $\varepsilon_0 = 0.3$.

En la segunda simulación consideramos una perturbación en el modelo de la planta $\eta_1(t)$ aleatoria, uniformemente distribuida en el intervalo $[-0.05, 0.05]$ y que el error de medición de los estados es una variable aleatoria $\eta_2(t_k)$, también uniformemente distribuida en el intervalo $[-0.05, 0.05]$.

En la figura 5.5 se muestra la trayectoria del sistema junto con la referencia.

La figura 5.6 muestra que en este caso el módulo del error de seguimiento permanece acotado por 0.15 después de aproximadamente 6 unidades de tiempo.

Ejemplo 2

En este caso consideramos el sistema descrito por la ecuación

$$\ddot{y}(t) = (1 - y(t))^2 \dot{y}(t) + u(t) + \eta_1(t), \quad (5.30)$$

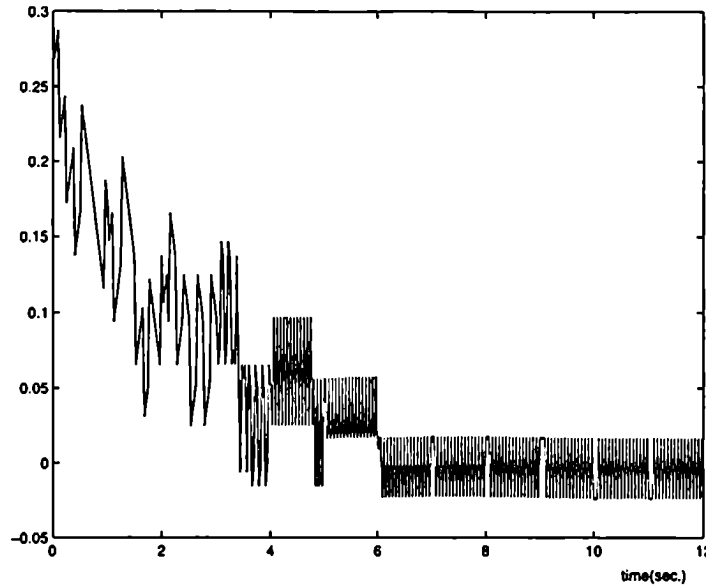


Figura 5.4: Ej. 1. Error de seguimiento sin errores de medición

donde la perturbación está dada por: $\eta_1(t) = 0$ si $t < 10$ o $t > 30$ y $\eta_1(t) = 0.5$ si $10 \leq t \leq 30$.

La referencia considerada es la solución del sistema lineal tiempo invariante de segundo orden

$$\ddot{\omega}(t) = -2.2\dot{\omega}(t) - 2.25\omega(t) + v(t) \quad (5.31)$$

con entrada de referencia $v(t) = \cos(t)$ y condiciones iniciales nulas.

Realizando las transformaciones usuales en (5.30) y en (5.31) obtenemos las ecuaciones diferenciales de primer orden que describen la planta y la referencia, respectivamente:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = (1 - (x_1(t))^2)x_2(t) - x_1(t) + u(t) + \eta_1(t) \end{cases} \quad (5.32)$$

y

$$\begin{cases} \dot{x}_1^*(t) = x_2^*(t) \\ \dot{x}_2^*(t) = -2.2x_2^*(t) - 2.25x_1^*(t) + v(t). \end{cases} \quad (5.33)$$

Suponemos además que las mediciones del vector de estado x en los instantes de muestreo son ruidosas, es decir $\hat{x}(t_k) = x(t_k) + \eta_2(t_k)$, con $\eta_2(t_k)$ un vector aleatorio compuesto por dos variables aleatorias uniformemente distribuidas en $[-0.05, 0.05]$.

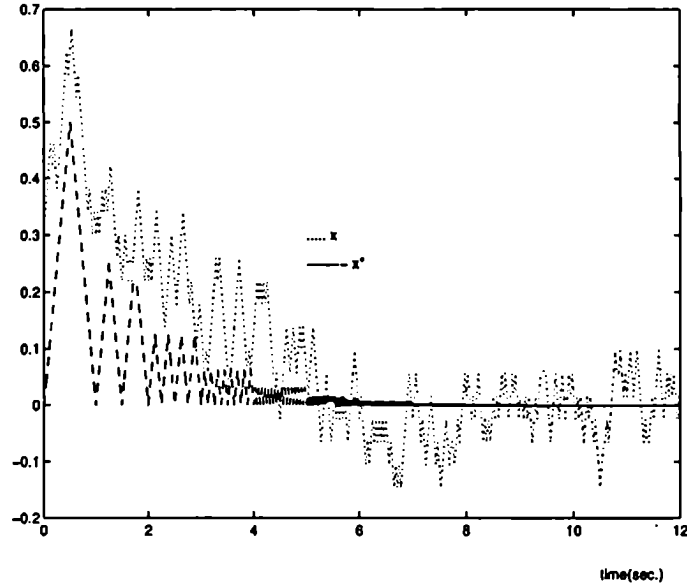


Figura 5.5: Ej.1. Seguimiento de trayectoria con errores de medición

La ley de control realimentado

$$\begin{aligned} \gamma(t, x) = & -(1 - x_1^2)x_2 + x_1 - 2.2(x_1 - x_1^*(t)) - 2.25(x_2 - x_2^*(t)) \\ & - 2.25x_1^* - 2.2x_2^*(t) + v(t) \end{aligned}$$

es una SLC del problema de seguimiento de la referencia x^* por parte del sistema (5.30) no perturbado (i.e, con $\eta_1(t) \equiv 0$), pues con tal ley, la ecuación del error de seguimiento $e(t) = x(t) - x^*(t)$ resulta

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = e_2(t) \\ \dot{e}_2(t) = -4.4e_1(t) - 4.5e_2(t), \end{cases} \quad (5.34)$$

que es uniformemente asintóticamente estable, más aún, la norma del error de seguimiento tiene un decaimiento exponencial dado por $|e(t)| \leq 3.2|e(0)|e^{-1.125t}$. Siguiendo el mismo procedimiento que en el ejemplo anterior, obtenemos $T = 2.46$ y, para la cota del error inicial $R_0 = 1$, determinamos $U = [-5.5, 5.5]$. Para la cota del error final $\varepsilon_0 = 0.3$, que es compatible con las cotas para la perturbación $\eta_1^* = 0.5$ y para el error de medición $\eta_2^* = 0.05$ obtenemos para el período de muestreo la cota $\delta_0 = 4 \cdot 10^{-5}$. Nuevamente el valor obtenido δ_0 es demasiado conservativo, como lo muestra la simulación.

Para la simulación usamos el período de muestreo $\delta_0 = 0.02$ y la condición inicial $x(0) = (-0.8, 0.9)$.

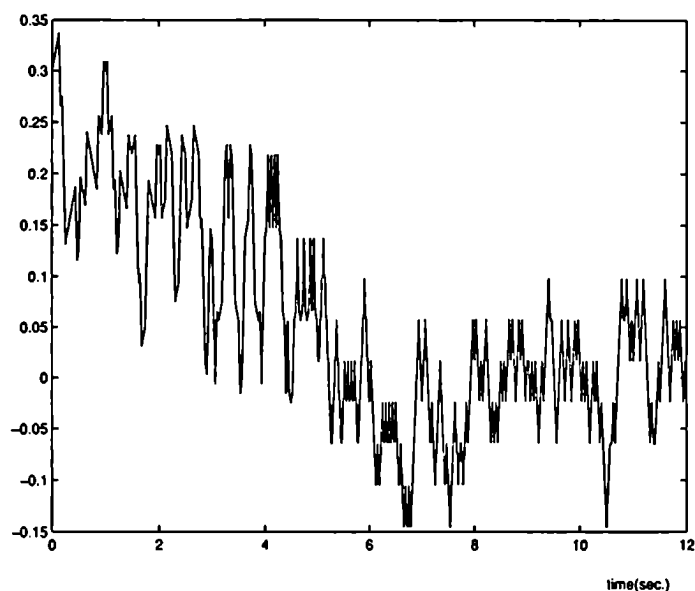


Figura 5.6: Ej.1. Error de seguimiento con errores de medición

La Figura 5.7 muestra los errores de seguimiento $x_1 - x_1^*$ (línea punteada) y el error $z_1 - x_1^*$ (línea de trazos). Se observa que el módulo del error $x_1 - x_1^*$ permanece acotado por 0.1 después de 5 unidades de tiempo.

La Figura 5.8 muestra la referencia $\omega = x_1^*$ (línea de trazo) junto con la variable $y = x_1$ (línea punteada).

5.6 Conclusiones

En este capítulo hemos presentado un algoritmo de control que, basado en una solución en tiempo continuo del problema de seguimiento de trayectorias, resuelve el problema de seguimiento de trayectorias en sistemas generales de control a datos muestreados. En ese sentido, el algoritmo presentado puede considerarse como la implementación digital de la ley en tiempo continuo en la cual está basado. Este algoritmo garantiza la estabilidad práctica semiglobal del error de seguimiento con error final arbitrariamente pequeño si el período de muestreo es suficientemente pequeño. También demostramos que el algoritmo es robusto respecto de pequeñas perturbaciones en la planta y de pequeños errores en las mediciones de los estados, aún cuando la ley de control en tiempo continuo en la cual éste se basa no lo sea. Con el objeto de ilustrar el comportamiento del controlador propuesto, presentamos dos ejemplos de aplicación, ambos incluyendo perturbaciones en el modelo de la planta y errores en las mediciones de los estados. Las simulaciones presentadas mues-

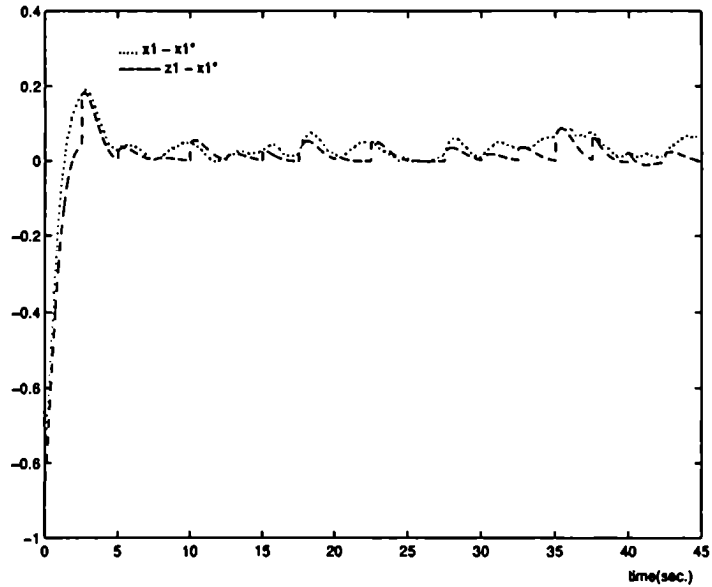


Figura 5.7: Ej. 2. Errores de seguimiento

tran un comportamiento aceptable del error de seguimiento. Sin embargo es importante puntualizar que el algoritmo presenta algunas deficiencias cuando es aplicado en sistemas afines en el control y el espacio de controles es la cápsula convexa de un número finito de puntos; en tal caso, al surgir el control de un proceso de maximización, éste toma sus valores en los vértices del convexo, lo cual en ciertas ocasiones origina un efecto de *chattering* que es indeseable. Actualmente se está trabajando para mejorar tales deficiencias y ya se han obtenido algunos resultados positivos en tal sentido (ver [14]).

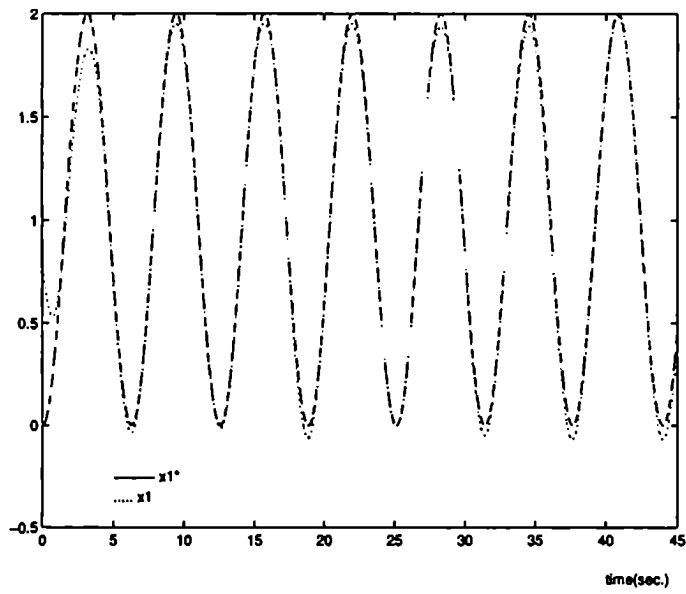


Figura 5.8: Ej. 2. Seguimiento de trayectoria

Apéndice A

Sistemas Dinámicos en Tiempo Discreto

En este breve apéndice damos la definición de sistema dinámico en tiempo discreto que empleamos a lo largo de esta tesis, como así también enunciamos, en términos de funciones de Lyapunov, condiciones suficientes para los distintos tipos de estabilidad de un conjunto invariante respecto de un sistema dinámico en tiempo discreto. También damos algunos teoremas inversos de Lyapunov que utilizamos en los capítulos 2 y 3.

A.1 Sistemas dinámicos en tiempo discreto: definiciones

La definición de sistema dinámico en tiempo discreto que adoptamos es una ligera generalización de la dada por Michel y Wang en [56]. Empleamos esta definición pues, en vista de la definición de sistema dinámico híbrido que consideramos a lo largo de este trabajo, creemos que es la más adecuada para introducir la noción de sistema dinámico híbrido discretizado.

En términos informales un sistema dinámico en tiempo discreto es simplemente una familia de trayectorias que evolucionan dentro de un espacio métrico (Ω, d) a lo largo de una s.i.m. Π . Para ser más precisos, consideremos la siguiente

Definición A.1 Sean (Ω, d) un espacio métrico y Π una s.i.m. Entonces una trayectoria es una aplicación $\omega_d : I \rightarrow \Omega$, donde $I = \{t_k \in \Pi : t_{k_0} \leq t_k \leq t_{k_1}\}$ ó $I = \{t_k \in \Pi : t_k \geq t_{k_0}\}$. Diremos que t_{k_0} es el instante inicial y que $\omega_0 = \omega_d(t_0)$ es la condición inicial.

Dado un subconjunto $\Omega_0 \subseteq \Omega$, denotemos con \mathcal{T}_{Ω_0} al conjunto de trayectorias con condición inicial en Ω_0 .

Dadas estas definiciones, estamos en condiciones de dar la definición de sistema dinámico en tiempo discreto que emplearemos.

Definición A.2 Sean (Ω, d) un espacio métrico, Π una s.i.m, Ω_0 un subconjunto no vacío de Ω y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}_{\Omega_0}$ una familia no vacía de trayectorias, entonces la tetra-upla $\Sigma_d = \{\Pi, \Omega, \Omega_0, \mathcal{S}\}$ es un sistema dinámico en tiempo discreto.

Nótese que esta definición de sistema dinámico no requiere de la existencia de al menos una trayectoria para cada par de condiciones iniciales (t_0, ω_0) , ni de su unicidad en caso de que exista alguna.

Una clase particular de sistemas dinámicos en tiempo discreto es la de los determinados por ecuaciones en diferencias, es decir, la de aquellos en los que $\Omega_0 = \Omega$ y \mathcal{S} es el conjunto de soluciones maximalmente definidas de una ecuación en diferencias.

Más precisamente, dadas una s.i.m Π y una aplicación $F : \mathcal{D}_d \rightarrow \Omega$ con $\mathcal{D}_d \subseteq \mathbf{Z}^+ \times \Omega$, sea $\mathbf{wd}_{t_{k_0}, \omega_0} : I_{k_0, \omega_0} \rightarrow \Omega$, con $t_{k_0} \in \Pi$ y $\omega_0 \in \Omega$, la solución maximalmente definida de la ecuación en diferencias

$$\omega(t_{k+1}) = F(k, \omega(t_k)) \quad (\text{A.1})$$

que verifica $\mathbf{wd}_{t_{k_0}, \omega_0}(t_{k_0}) = \omega_0$. Observamos que en caso que $(t_{k_0}, \omega_0) \notin \mathcal{D}_d$, consideramos $I_{k_0, \omega_0} = \{t_{k_0}\}$ y $\mathbf{w}_{t_{k_0}, \omega_0}(t_{k_0}) = \omega_0$, i.e., consideramos que la solución maximal $\mathbf{w}_{t_{k_0}, \omega_0}$ sólo está definida en el instante inicial t_{k_0} . De este modo permitimos que para un determinado $k \in \mathbf{Z}^+$, la sección $\Omega_k = \{\omega \in \Omega : (k, \omega) \in \mathcal{D}\}$ pueda ser vacía; en tal caso, toda solución maximal de la ecuación cuyo instante inicial sea menor o igual que t_k estará definida a lo sumo hasta el instante t_k . En el caso extremo en que $\mathcal{D}_d = \emptyset$, todas las soluciones maximales de la ecuación estarán sólo definidas en el instante inicial.

Denominemos $\mathcal{S}_{(\text{A.1})} = \{\mathbf{wd}_{t_{k_0}, \omega_0} : t_{k_0} \in \Pi, \omega_0 \in \Omega\}$. Entonces

Definición A.3 La tetra-upla $\Sigma_d = \{\Pi, \Omega, \Omega, \mathcal{S}_{(\text{A.1})}\}$ es el sistema dinámico en tiempo discreto determinado por la ecuación en diferencias (A.1).

Definición A.4 Diremos que un sistema en tiempo discreto determinado por una ecuación en diferencias es Υ -periódico con período $\Upsilon \in \mathbb{N}$, si Π es regular, $\Omega_{k+\Upsilon} = \Omega_k \forall k \in \mathbf{Z}^+$ y $F(k + \Upsilon, \omega) = F(k, \omega) \forall \omega \in \Omega_k$ y $\forall k \in \mathbf{Z}^+$; diremos que es tiempo-invariante si es 1-periódico. En tal caso $\Omega_k = \Omega \forall k \in \mathbf{Z}^+$ y F no depende de k , es decir $F(k, \omega) = F(\omega)$.

Observación A.1 Observamos que en el caso en que el sistema es Υ -periódico, resulta $\mathbf{wd}_{t_{k_0} + \Upsilon, \omega_0}(t_k) = \mathbf{wd}_{t_{k_0}, \omega_0}(t_k - t_{\Upsilon}) \forall \omega_0 \in \Omega, \forall k_0 \in \mathbf{Z}^+$ y $\forall k \in \mathbf{Z}^+$ con $k \geq k_0$. Por lo tanto, el conjunto de trayectorias $\mathcal{S}_{(\text{A.1})}$ está determinado por las trayectorias correspondientes a los primeros Υ instantes iniciales $t_0, t_1, \dots, t_{\Upsilon-1}$. En el caso particular en que el sistema es tiempo invariante, i.e. $\Upsilon = 1$, $\mathbf{wd}_{t_{k_0}, \omega_0}(t_k) = \mathbf{wd}_{\omega_0}(t_k - t_{k_0}) \forall \omega_0 \in \Omega, \forall k_0 \in \mathbf{Z}^+$ y

$\forall k \in \mathbf{Z}^+$ con $k \geq k_0$, de donde se desprende que todas las trayectorias del sistema dinámico se obtienen trasladando en el tiempo las trayectorias correspondientes al instante inicial $t_0 = 0$.

A.2 Estabilidad de sistemas dinámicos en tiempo discreto

Para los sistemas dinámicos en tiempo discreto que estamos considerando, es posible extender de forma natural las definiciones de conjunto invariante y de punto de equilibrio y, respecto de éstos, las de inestabilidad, estabilidad, estabilidad uniforme, estabilidad asintótica, etc., que se consideran para los sistemas en tiempo discreto clásicos. En lo que sigue enunciaremos algunas condiciones suficientes, como así también algunas necesarias, para los distintos tipos de estabilidad de un conjunto invariante respecto de un sistema dinámico en tiempo discreto.

Los teoremas que enunciaremos a continuación, dan condiciones suficientes para los distintos tipos de estabilidad de un conjunto invariante de un sistema dinámico en tiempo discreto determinado por una ecuación en diferencias, en términos de funciones de Lyapunov. Estos teoremas son extensiones de teoremas estándar en la teoría de la estabilidad de Lyapunov de sistemas dinámicos en tiempo discreto clásicos, y sus demostraciones se obtienen modificando ligeramente las demostraciones de esos teoremas (ver por ejemplo [38], [56]).

Teorema A.1 Sea M un conjunto invariante respecto del sistema dinámico en tiempo discreto Σ_d determinado por la ecuación en diferencias (A.1). Entonces, si existe una función $V : \mathbf{Z}^+ \times M_{r^*} \rightarrow \mathbb{R}^+$, con $r^* > 0$, que verifica las siguientes condiciones:

- 1) V es continua y existe $\alpha_1 \in \mathcal{K}$ tal que $\alpha_1(d_M(\omega)) \leq V(k, \omega) \forall k \in \mathbf{Z}^+$ y $\forall \omega \in M_{r^*}$;
- 2) existe $0 < r' \leq r^*$ tal que $V(k+1, F(k, \omega)) - V(k, \omega) \leq 0, \forall k \in \mathbf{Z}^+$ y $\forall \omega \in M_{r'}$,

M es estable respecto de Σ_d .

Si en lugar de la condición 1) V verifica la condición:

- 1') Existen α_1 y α_2 de clase \mathcal{K} tales que $\alpha_1(d_M(\omega)) \leq V(k, \omega) \leq \alpha_2(d_M(\omega)) \forall k \in \mathbf{Z}^+$ y $\forall \omega \in M_{r^*}$,

M es uniformemente estable respecto de Σ_d .

Por último, si V verifica la condición 1') y la condición:

- 2') existen $0 < r' \leq r^*$ y α_3 de clase \mathcal{K} tales que $V(k+1, F(k, \omega)) - V(k, \omega) \leq -(t_{k+1} - t_k)\alpha_3(d_M(\omega)), \forall k \in \mathbf{Z}^+$ y $\forall \omega \in M_{r'}$,

M es uniformemente asintóticamente estable respecto de Σ_d .

Teorema A.2 Sea M un conjunto invariante respecto del sistema dinámico en tiempo discreto Σ_d determinado por la ecuación en diferencias (A.1).

Entonces, si existe una función $V : \mathbf{Z}^+ \times M_{r^*} \rightarrow \mathbb{R}^+$, con $r^* > 0$, que verifica, para ciertas constantes positivas c_i , $i = 1, 2, 3$, las condiciones:

- 1) $c_1(d_M(\omega))^2 \leq V(k, \omega) \leq c_2(d_M(\omega))^2 \forall k \in \mathbf{Z}^+$ y $\forall \omega \in M_{r^*}$;
- 2) existe $0 < r' \leq r^*$ tal que $V(k+1, F(k, \omega)) - V(k, \omega) \leq -c_3(t_{k+1} - t_k)(d_M(\omega))^2$, $\forall k \in \mathbf{Z}^+$ y $\forall \omega \in M_{r'}$,

M es exponencialmente estable respecto de Σ_d .

Los siguientes teoremas, de caracter global, dan condiciones suficientes tanto para la estabilidad asintótica uniforme global como para la estabilidad exponencial global de un conjunto invariante.

Teorema A.3 Sea M un conjunto compacto e invariante respecto del sistema dinámico híbrido Σ_H determinado por la ecuación en diferencias (A.1).

Entonces, si existe una función $V : \mathbf{Z}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ que verifica las condiciones:

- 1) $\alpha_1(d_M(\omega)) \leq V(k, \omega) \leq \alpha_2(d_M(\omega)) \forall k \in \mathbf{Z}^+ \forall \omega \in \Omega$; y
 - 2) $V(k+1, F(k, \omega)) - V(k, \omega) \leq -(t_{k+1} - t_k)\alpha_3(d_M(\omega)) \forall \omega \in \Omega$,
- con α_i , $i = 1, 2, 3$, de clase \mathcal{K}_∞ , M es globalmente uniformemente asintóticamente estable respecto de Σ_d .

Teorema A.4 Sea M un conjunto invariante respecto del sistema dinámico en tiempo discreto determinado por la ecuación en diferencias (A.1).

Entonces, si existe una función $V : \mathbf{Z}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ que verifica, para ciertas constantes positivas c_i , $i = 1, 2, 3$, las condiciones:

- 1) $c_1(d_M(\omega))^2 \leq V(k, \omega) \leq c_2(d_M(\omega))^2 \forall k \in \mathbf{Z}^+$ y $\forall \omega \in \Omega$; y
 - 2) $V(k+1, F(k, \omega)) - V(k, \omega) \leq -c_3(t_{k+1} - t_k)(d_M(\omega))^2 \forall k \in \mathbf{Z}^+$ y $\forall \omega \in \Omega$,
- M es globalmente exponencialmente estable respecto de Σ_d .

Cuando F en (A.1) es continua, es posible demostrar que algunas de las condiciones suficientes que hemos dado para los distintos tipos de estabilidad, también son necesarias. En lo que sigue daremos algunos teoremas inversos de Lyapunov, los cuales extienden a la clase de sistemas en tiempo discreto que estamos considerando, algunos resultados conocidos para sistemas en tiempo discreto clásicos (Teoremas 4.5.2 y 4.5.3 de [56], Teorema 3 de [22]).

Dado que la validez de estos teoremas no se obtiene modificando en forma obvia las demostraciones de los teoremas mencionados, y con el objeto de hacer el trabajo autocontenido, incluimos también sus demostraciones.

Teorema A.5 Sea Σ_d el sistema dinámico en tiempo discreto determinado por la ecuación en diferencias (A.1). Supongamos que F en (A.1) es continua.

Entonces

1. Si M es un conjunto invariante uniformemente estable, existe una función $V : \mathbf{Z}^+ \times M_{r^*} \rightarrow \mathbb{R}^+$, con $r^* > 0$, que verifica las condiciones 1') y 2) del Teorema A.1.
2. Si M es un conjunto invariante uniformemente asintóticamente estable, existe una función continua $V : \mathbf{Z}^+ \times M_{r^*} \rightarrow \mathbb{R}^+$, con $r^* > 0$, que verifica las condiciones 1') y 2') del Teorema A.1.

Además, tanto en 1. como en 2., la función V puede suponerse Υ -periódica o independiente de k si Σ_d es, respectivamente, Υ -periódico o tiempo invariante.

Teorema A.6 Sea Σ_d el sistema dinámico en tiempo discreto determinado por la ecuación en diferencias (A.1). Supongamos que F en (A.1) es continua.

Entonces, si M es un conjunto invariante exponencialmente estable, existe una función continua $V : \mathbf{Z}^+ \times M_{r^*} \rightarrow \mathbb{R}^+$, con $r^* > 0$, que verifica las condiciones 1) y 2) del Teorema A.2.

Si además Σ_d es Υ -periódico o tiempo invariante, la función V puede suponerse, respectivamente, Υ -periódica o independiente de k .

Teorema A.7 Sea Σ_d el sistema dinámico en tiempo discreto determinado por la ecuación en diferencias (A.1). Supongamos que F en (A.1) es continua.

Entonces, si M es un conjunto invariante globalmente uniformemente asintóticamente estable, existe una función continua $V : \mathbf{Z}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ que verifica las condiciones 1) y 2) del Teorema A.3.

Si además Σ_d es Υ -periódico o tiempo invariante, la función V puede suponerse, respectivamente, Υ -periódica o independiente de k .

Teorema A.8 Sea Σ_d el sistema dinámico en tiempo discreto determinado por la ecuación en diferencias (A.1). Supongamos que F en (A.1) es continua.

Entonces, si M es un conjunto invariante globalmente exponencialmente estable, existe una función continua $V : \mathbf{Z}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ que verifica las condiciones 1) y 2) del Teorema A.4.

Si además Σ_d es Υ -periódico o tiempo invariante, la función V puede suponerse, respectivamente, Υ -periódica o independiente de k .

En las demostraciones de los teoremas inversos emplearemos las siguientes caracterizaciones de los distintos tipos de estabilidad en términos de acotaciones por funciones de clase \mathcal{K} y \mathcal{KL} , cuyas demostraciones son similares a las correspondientes a sistemas en tiempo continuo determinados por ecuaciones diferenciales (ver por ejemplo [40]). Denotemos para cada $t_{k_0} \in \Pi$ y $\omega_0 \in \Omega$, $\mathbf{wd}(\cdot, t_{k_0}, \omega_0) = \mathbf{wd}_{t_{k_0}, \omega_0}(\cdot)$.

Lema A.1 Sea Σ_d el sistema dinámico en tiempo discreto determinado por la ecuación (A.1) y sea M un conjunto invariante respecto de Σ_d .

Entonces

1. M es uniformemente estable si y sólo si existen $r^* > 0$ y una función $\alpha : [0, r^*] \rightarrow \mathbb{R}^+$ de clase \mathcal{K} tales que $d_M(\mathbf{wd}(t_k, t_{k_0}, \omega_0)) \leq \alpha(d_M(\omega_0)) \forall t_k \geq t_{k_0}, \forall t_{k_0}$ y $\forall \omega_0 \in M_{r^*}$.
2. M es uniformemente asintóticamente estable si y sólo si existen $r^* > 0$ y una función $\beta : [0, r^*] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ de clase \mathcal{KL} tales que $d_M(\mathbf{wd}(t_k, t_{k_0}, \omega_0)) \leq \beta(d_M(\omega_0), t_k - t_{k_0}) \forall t_k \geq t_{k_0}, \forall t_{k_0}$ y $\forall \omega_0 \in M_{r^*}$.
3. M es globalmente uniformemente asintóticamente estable si y sólo si existe una función $\beta : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ de clase \mathcal{KL} tal que $d_M(\mathbf{wd}(t_k, t_{k_0}, \omega_0)) \leq \beta(d_M(\omega_0), t_k - t_{k_0}) \forall t_k \geq t_{k_0}, \forall t_{k_0}$ y $\forall \omega_0 \in \Omega$.

También emplearemos el siguiente resultado debido a Sontag (Proposición 7 de [73]):

Lema A.2 Sea $\beta : I \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, con $I = [0, r^*]$ ó $I = \mathbb{R}^+$, una función de clase \mathcal{KL} , entonces existen σ y ϕ de clase \mathcal{K}_∞ tales que

$$\sigma(\beta(r, t)) \leq e^{-t}\phi(r) \quad \forall t \geq 0 \text{ y } \forall r \in I. \quad (\text{A.2})$$

Demostración de los Teoremas A.5 y A.7

Demostración de 1. de la tesis de Teorema A.5:

Supongamos que M es un conjunto invariante uniformemente estable. Entonces, por 1. del Lema A.1, existen $\alpha \in \mathcal{K}$ y $r^* > 0$ tales que

$$d_M(\mathbf{wd}(t_k, t_{k_0}, \omega_0)) \leq \alpha(d_M(\omega_0)) \quad \forall t_k \geq t_{k_0}, \forall t_{k_0} \text{ y } \forall \omega_0 \in M_{r^*}. \quad (\text{A.3})$$

Para $k \in \mathbb{Z}^+$ y $\omega \in M_{r^*}$ consideremos las función no negativa

$$V(k, \omega) = \sup\{d_M(\mathbf{wd}(t_j, t_k, \omega)) : t_j \geq t_k\},$$

la cual está bien definida por (A.3).

Entonces, para $k \in \mathbb{Z}^+$ y $\omega \in M_{r^*}$, de la igualdad $\mathbf{wd}(t_k, t_k, \omega) = \omega$ y de la definición de V , resulta $V(k, \omega) \geq d_M(\omega)$; por otra parte, de (A.3) y de la definición de V , se obtiene la desigualdad $V(k, \omega) \leq \alpha(d_M(\omega))$. En consecuencia, considerando $\alpha_1(r) = r$ y $\alpha_2(r) = \alpha(r)$, $\alpha_1(d_M(\omega)) \leq V(k, \omega) \leq \alpha_2(\omega) \forall k \in \mathbb{Z}^+$ y $\forall \omega \in M_{r^*}$ y por lo tanto V satisface la condición 1') del Teorema A.1.

Sea $r' > 0$ tal que $\alpha(r') \leq r^*$. Fijemos $k \in \mathbf{Z}^+$ y $\omega \in M_{r'}$. Como $d_M(\mathbf{wd}(t_{k+1}, t_k, \omega)) \leq \alpha(d_M(\omega)) \leq \alpha(r') \leq r^*$, tenemos que $\mathbf{wd}(t_{k+1}, t_k, \omega) = F(k, \omega) \in M_{r^*}$ y por lo tanto $V(k+1, F(k, \omega))$ está definida. Además

$$\begin{aligned} V(k+1, F(k, \omega)) &= \sup\{d_M(\mathbf{wd}(t_j, t_{k+1}, F(k, \omega))) : t_j \geq t_{k+1}\} \\ &= \sup\{d_M(\mathbf{wd}(t_j, t_k, \omega)) : t_j \geq t_{k+1}\} \\ &\leq \sup\{d_M(\mathbf{wd}(t_j, t_k, \omega)) : t_j \geq t_k\} \\ &= V(k, \omega), \end{aligned}$$

con lo cual $V(k+1, F(k, \omega)) - V(k, \omega) \leq 0 \forall k \in \mathbf{Z}^+$ y $\forall \omega \in M_{r'}$, y V verifica la condición 2) del Teorema A.1.

Si Σ_d es Υ -periódico, de la definición de V y de la igualdad $\mathbf{wd}(t_{j+\Upsilon}, t_{k+\Upsilon}, \omega) = \mathbf{wd}(t_j, t_k, \omega)$ se deduce inmediatamente que V resulta Υ -periódica. En efecto

$$\begin{aligned} V(k, \omega) &= \sup\{d_M(\mathbf{wd}(t_j, t_k, \omega)) : t_j \geq t_k\} \\ &= \sup\{d_M(\mathbf{wd}(t_{j+\Upsilon}, t_{k+\Upsilon}, \omega)) : t_j \geq t_k\} \\ &= \sup\{d_M(\mathbf{wd}(t_j, t_{k+\Upsilon}, \omega)) : t_j \geq t_{k+\Upsilon}\} \\ &= V(k + \Upsilon, \omega). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que el caso Σ_d tiempo invariante es un caso particular del anterior, ($\Upsilon = 1$), se deduce que V resulta independiente de k si Σ_d es tiempo invariante.

Demostración de 2. de la tesis del Teorema A.5:

De acuerdo con 2. del Lema A.1, por ser M un conjunto invariante uniformemente asintóticamente estable, existen β de clase \mathcal{KL} y $r^* > 0$ tales que

$$d_M(\mathbf{wd}(t_k, t_{k_0}, \omega_0)) \leq \beta(d_M(\omega_0), t_k - t_{k_0}) \quad \forall t_k \geq t_{k_0}, \forall t_{k_0} \text{ y } \forall \omega_0 \in M_{r^*}. \quad (\text{A.4})$$

Sean σ y ϕ funciones de clase \mathcal{K}_∞ como en el Lema A.2. Definamos, para $k \in \mathbf{Z}^+$ y $\omega \in M_{r^*}$, las funciones no negativas

$$\begin{aligned} V_1(k, \omega) &= \max\{d_M(\mathbf{wd}(t_j, t_k, \omega)) : t_j \geq t_k\}, \\ V_2(k, \omega) &= \sum_{j \geq k} (t_{j+1} - t_j) \sigma(d_M(\mathbf{wd}(t_j, t_k, \omega))) \end{aligned}$$

y

$$V(k, \omega) = V_1(k, \omega) + V_2(k, \omega).$$

Notamos que $V_1(k, \omega)$ está bien definida porque $d_M(\mathbf{wd}(t_j, t_k, \omega)) \rightarrow 0$ cuando $j \rightarrow +\infty$.

Empleando los mismos argumentos que en el punto anterior, concluimos que, denominando $\alpha(r) = \beta(r, 0)$ y tomando $r' > 0$ con $\alpha(r') \leq r^*$, V_1 verifica:

- i) $d_M(\omega) \leq V_1(k, \omega) \leq \alpha(d_M(\omega)) \forall k \in \mathbf{Z}^+$ y $\forall \omega \in M_{r^*}$ y
 ii) $V(k+1, F(k, \omega)) - V(k, \omega) \leq 0 \forall k \in \mathbf{Z}^+$ y $\forall \omega \in M_{r^*}$.

Veamos que V_1 es continua. Como la continuidad de V_1 para cada $\omega \in \overline{M}$ se deduce inmediatamente de i), bastará demostrar que $V_1(k, \cdot)$ es continua en $M_{r_1, r^*} = \{\omega \in \Omega : 0 < r_1 < \omega \leq r^*\}$. Fijemos $0 < r_1 < r^*$ y consideremos $T > 0$ tal que $\beta(r^*, t) \leq r_1/2$. Entonces, teniendo en cuenta que

$$r_1 \leq d_M(\omega) \leq V(k, \omega) \quad \forall k \in \mathbf{Z}^+ \text{ y } \forall \omega \in M_{r_1, r^*}$$

y que, $\forall t_j > t_k + T, \forall k \in \mathbf{Z}^+$ y $\forall \omega \in M_{r_1, r^*}$,

$$d_M(\mathbf{wd}(t_j, t_k, \omega)) \leq \beta(d_M(\omega), t_j - t_k) \leq \beta(d_M(\omega), T) \leq r_1/2,$$

resulta la igualdad

$$V_1(k, \omega) = \max\{d_M(\mathbf{wd}(t_j, t_k, \omega)) : t_k \leq t_j \leq t_j + T\} \quad \forall k \in \mathbf{Z}^+ \text{ y } \forall \omega \in M_{r_1, r^*}, \quad (\text{A.5})$$

y de ella, la continuidad de $V_1(k, \omega)$ respecto de ω en M_{r_1, r^*} . En efecto, por (A.5), V_1 restringida a M_{r_1, r^*} resulta el máximo de un número finito de funciones continuas ($\mathbf{wd}(t_j, t_k, \omega)$ es continua respecto de ω por serlo F) y por ende continua.

Consideremos ahora V_2 . Observamos que para $k \in \mathbf{Z}^+$ y $\omega \in M_{r^*}$, $\sigma(d_M(\mathbf{wd}(t_j, t_k, \omega))) \leq \sigma(\beta(d_M(\omega), t_j - t_k)) \leq e^{-(t_j - t_k)} \phi(d_M(\omega))$. Entonces, para $k \in \mathbf{Z}^+$ y $\omega \in M_{r^*}$,

$$\begin{aligned} V_2(k, \omega) &= \sum_{j \geq k} (t_{j+1} - t_j) \sigma(d_M(\mathbf{wd}(t_j, t_k, \omega))) \\ &\leq \sum_{j \geq k} (t_{j+1} - t_j) e^{-(t_j - t_k)} \phi(d_M(\omega)) \\ &= \left(\sum_{j \geq k} (t_{j+1} - t_j) e^{-(t_j - t_k)} \right) \phi(d_M(\omega)) \quad (\text{A.6}) \\ &\leq \left(\sum_{j \geq k} (t_{j+1} - t_j) e^{-(t_{j+1} - t_k)} e^{(t_{j+1} - t_j)} \right) \phi(d_M(\omega)) \\ &\leq \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} dt \right) e^{\|\Pi\|} \phi(d_M(\omega)) \\ &= e^{\|\Pi\|} \phi(d_M(\omega)). \end{aligned}$$

En consecuencia, $V_2(k, \omega)$ está bien definida y $0 \leq V(k, \omega) \leq \alpha^*(d_M(\omega)) \forall k \in \mathbf{Z}^+$ y $\forall \omega \in M_{r^*}$, siendo α^* la función de clase \mathcal{K}_∞ definida por $\alpha^*(r) = e^{\|\Pi\|} \phi(r)$.

Además, como la serie que define V_2 converge uniformemente respecto de ω en M_{r^*} , (se desprende de (A.6)), y cada uno de sus términos depende continuamente de ω , V_2 resulta continua respecto de ω en M_{r^*} .

Por último, si $\omega \in M_{r'}$, con r' como antes, $F(k, \omega) \in M_{r'}$ y además

$$\begin{aligned}
V_2(k+1, F(k, \omega)) - V_2(k, \omega) &= \sum_{j \geq k+1} (t_{j+1} - t_j) \sigma(d_M(\mathbf{wd}(t_j, t_{k+1}, F(k, \omega)))) \\
&\quad - \sum_{j \geq k} (t_{j+1} - t_j) \sigma(d_M(\mathbf{wd}(t_j, t_k, \omega))) \\
&= \sum_{j \geq k+1} (t_{j+1} - t_j) \sigma(d_M(\mathbf{wd}(t_j, t_k, \omega))) \\
&\quad - \sum_{j \geq k} (t_{j+1} - t_j) \sigma(d_M(\mathbf{wd}(t_j, t_k, \omega))) \\
&= -(t_{k+1} - t_k) \sigma(d_M(\omega)).
\end{aligned}$$

Entonces, combinando lo que dedujimos para V_1 y V_2 , obtenemos inmediatamente que V resulta continua en $M_{r'}$ y que verifica las condiciones 1') y 2) del Teorema A.1 con las funciones de clase \mathcal{K}_∞ $\alpha_1(r) = r$, $\alpha_2(r) = \alpha(r) + \alpha^*(r)$ y $\alpha_3(r) = \sigma(r)$.

Para finalizar la demostración del Teorema A.5, observamos que por construcción, V resulta Υ -periódica si Σ_d es Υ -periódico e independiente de k si Σ_d es tiempo invariante.

Demostración del teorema A.7:

Supongamos que M es un conjunto invariante globalmente uniformemente asintóticamente estable y consideremos β como en 3. del Lema A.1 y σ y ϕ como en el Lema A.2. Entonces, definiendo para $k \in \mathbf{Z}^+$ y $\omega \in \Omega$, $V_1(k, \omega)$, $V_2(k, \omega)$ y $V(k, \omega)$ como en la prueba del punto 2. de la tesis del Teorema A.5, y empleando los mismos argumentos que en la demostración del caso local, se concluye que V es continua respecto de ω en Ω , y que valen 1) y 2) del Teorema A.3 con $\alpha_1(r) = r$, $\alpha_2(r) = \beta(r, 0) + e^{\|\Pi\|} \phi(r)$ y $\alpha_3(r) = \sigma(r)$, que son funciones de clase \mathcal{K}_∞ . Además, por construcción, V resulta Υ -periódica si el sistema dinámico lo es, e independiente de k si el sistema es tiempo invariante. ■

Demostración de los Teoremas A.6 y A.8

Como las demostraciones de estos teoremas son similares, sólo demostraremos el caso local. Supongamos que M es un conjunto invariante exponencialmente estable. Entonces existen μ, κ y r^* positivos tales que $d_M(\mathbf{wd}(t_j, t_k, \omega)) \leq \mu e^{-\kappa(t_j - t_k)} d_M(\omega) \forall j \geq k, \forall k \in \mathbf{Z}^+$ y $\forall \omega \in M_{r^*}$.

Para $k \in \mathbf{Z}^+$ y $\omega \in M_{r^*}$ definamos las funciones:

$$\begin{aligned}
V_1(k, \omega) &= \max\{(d_M(\mathbf{wd}(t_j, t_k, \omega)))^2 : t_j \geq t_k\}, \\
V_2(k, \omega) &= \sum_{j \geq k} (t_{j+1} - t_j) (d_M(\mathbf{wd}(t_j, t_k, \omega)))^2
\end{aligned}$$

y

$$V(k, \omega) = V_1(k, \omega) + V_2(k, \omega).$$

Entonces, procediendo de forma similar a como lo hicimos en la demostración del Teorema A.5, se demuestra que: i) V_1 es continua respecto de ω , $(d_M(\omega))^2 \leq V_1(k, \omega) \leq \mu^2 (d_M(\omega))^2 \forall \omega \in M_{r^*}$ y $V_1(k+1, F(k, \omega)) - V_2(k, \omega) \leq 0 \forall \omega \in M_{r'}$ con $r' = r^*/\mu$, y ii) V_2 es continua respecto de ω , $0 \leq V_2(k, \omega) \leq \mu^2 e^{2\kappa\|\Pi\|} / (2\kappa) (d_M(\omega))^2 \forall \omega \in M_{r^*}$ y $V_1(k+1, F(k, \omega)) - V_2(k, \omega) \leq -(t_{k+1} - t_k) (d_M(\omega))^2 \forall \omega \in M_{r'}$.

A partir de i) y ii) es inmediato que V es continua en M_{r^*} y que verifica 1) y 2) del Teorema A.2 con las constantes $c_1 = 1$, $c_2 = \mu^2 + \mu^2 e^{2\kappa\|\Pi\|} / (2\kappa)$ y $c_3 = 1$.

Por último, por construcción, si el sistema en tiempo discreto es Υ -periódico V resulta Υ -periódica. Similarmente, si el sistema es tiempo-invariante, V resulta independiente de k . ■

A.2.1 Un teorema inverso de Lyapunov para sistemas lineales

Cuando el sistema en tiempo discreto es lineal y el origen es un punto de equilibrio exponencialmente estable, es posible demostrar la existencia de una función de Lyapunov localmente Lipschitz que satisface las condiciones 1) y 2) del Teorema A.8.

Consideremos el sistema lineal en tiempo discreto

$$\omega(t_{k+1}) = A(k)\omega(t_k) \tag{A.7}$$

con $\omega(t_k) \in \mathbb{R}^n$ y $A(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ para cada $k \in \mathbb{Z}^+$. En este caso la solución maximalmente definida de la ecuación correspondiente a la condición inicial (t_{k_0}, ω_0) , $\text{wd}(t_k, t_{k_0}, \omega_0) = \Phi(t_k, t_{k_0})\omega_0$, donde $\Phi(t_k, t_{k_0})$ es la *matriz de transición*, que verifica

- $\Phi(t_{k_0}, t_{k_0}) = I$ y
- $\Phi(t_k, t_{k_0}) = A_{k-1}A_{k-2} \cdots A_{k_0} \quad \forall k > k_0$.

Si el origen es un equilibrio exponencialmente estable del sistema lineal y $\|\cdot\|$ es una norma en \mathbb{R}^n , existen constantes positivas μ y κ tales que, $\|\text{wd}(t_k, t_{k_0}, \omega_0)\| = \|\Phi(t_k, t_{k_0})\omega_0\| \leq \mu\|\omega_0\|e^{-\kappa(t_k - t_{k_0})}$ para todo $k \geq k_0$ y todo $\omega_0 \in \mathbb{R}^n$; por lo tanto, la norma inducida de la matriz de transición verifica la acotación $\|\Phi(t_k, t_{k_0})\| \leq \mu e^{-\kappa(t_k - t_{k_0})}$ para todo $k \geq k_0$.

El siguiente teorema inverso de Lyapunov se emplea en el Capítulo 3.

Teorema A.9 Supongamos que el origen es un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema lineal en tiempo discreto determinado por (A.7).

Entonces existe $V : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ que verifica, para todo $k \in \mathbb{Z}^+$ y para todo par $\omega, \omega' \in \mathbb{R}^n$:

a) $c_1\|\omega\|^2 \leq V(k, \omega) \leq c_2\|\omega\|^2$;

$$\text{b) } V(k+1, A(k)\omega) - V(k, \omega) \leq -(t_{k+1} - t_k)c_3\|\omega\|^2;$$

$$\text{c) } |V(k, \omega) - V(k, \omega')| \leq c_4\|\omega + \omega'\|\|\omega - \omega'\|,$$

con c_1, \dots, c_4 positivas.

Demostración: Para $k \in \mathbf{Z}^+$ y $\omega \in \mathbb{R}^n$ consideremos las funciones V_1, V_2 y V , definidas en la demostración del Teorema A.8. Como en este caso $M = \{0\}$ y $d_M(\omega) = \|\omega\|$, V_1 y V_2 resultan

$$V_1(k, \omega) = \max\{\|(\mathbf{wd}(t_j, t_k, \omega))\|^2 : t_j \geq t_k\}, \quad \text{y}$$

$$V_2(k, \omega) = \sum_{j \geq k} (t_{j+1} - t_j) \|\mathbf{wd}(t_j, t_k, \omega)\|^2.$$

Por la demostración del Teorema A.8, $V = V_1 + V_2$ resulta continua y además satisface a) y b).

Con el objeto de probar c), vamos a suponer, sin pérdida de generalidad por la equivalencia de todas las normas de \mathbb{R}^n , que $\|\cdot\|$ es la norma Euclídea.

Entonces, teniendo en cuenta que $\mathbf{wd}(t_j, t_k, \omega) = \Phi(t_j, t_k)\omega$ y que $\|\mathbf{wd}(t_j, t_k, \omega)\|^2 = \omega^T \Phi^T(t_j, t_k) \Phi(t_j, t_k) \omega$,

$$V_1(k, \omega) = \max_{j \geq k} \omega^T \Phi^T(t_j, t_k) \Phi(t_j, t_k) \omega$$

y

$$V_2(k, \omega) = \omega^T P(k) \omega$$

con $P(k)$ la matriz simétrica y definida positiva

$$P(k) = \sum_{j \geq k} (t_{j+1} - t_j) \Phi^T(t_j, t_k) \Phi(t_j, t_k).$$

Como V verifica a) y $V_2 \leq V$, resulta $0 \leq \omega^T P(k) \omega = V_2(k, \omega) \leq c_2 \|\omega\|^2 \forall \omega \in \mathbb{R}^n$, y, en consecuencia, $\|P(k)\| \leq c_2 \forall k \in \mathbf{Z}^+$. Sean $\omega, \omega' \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\begin{aligned} |V_2(k, \omega) - V_2(k, \omega')| &= |\omega^T P(k) \omega - \omega'^T P(k) \omega'| \\ &= |(\omega + \omega')^T P(k) (\omega + \omega')| \\ &\leq c_2 \|\omega + \omega'\| \|\omega - \omega'\|. \end{aligned} \tag{A.8}$$

V_1 también satisface una acotación similar. Sea $k \geq 0$; entonces para cada $\omega \in \mathbb{R}^n$ existe $j^* = j^*(\omega) \geq k$ tal que

$$V_1(k, \omega) = \omega^T \Phi(t_{j^*}, t_k)^T \Phi(t_{j^*}, t_k) \omega.$$

En consecuencia, para $\omega, \omega' \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} V_1(k, \omega) - V_1(k, \omega') &\leq \omega^T \Phi(t_{j^*}, k)^T \Phi(t_{j^*}, k) \omega - \omega'^T \Phi(t_{j^*}, k)^T \Phi(t_{j^*}, k) \omega' \\ &\leq \mu^2 \|\omega + \omega'\| \|\omega - \omega'\|, \end{aligned}$$

con μ como antes. Como por simetría, $V_1(k, \omega') - V_1(k, \omega) \leq \mu^2 \|\omega + \omega'\| \|\omega - \omega'\|$, resulta

$$|V_1(k, \omega) - V_1(k, \omega')| \leq \mu^2 \|\omega + \omega'\| \|\omega - \omega'\|.$$

Entonces, combinando esto último con (A.8) demostramos que V verifica c) con $c_4 = c_2 + \mu^2$, y con ello el teorema. ■

Bibliografía

- [1] D. Aeyels y J. Peuteman, *A new asymptotic stability criterion for nonlinear time-variant differential equations*, IEEE Trans. Autom. Contr., Vol. 43, Nro. 7, pags. 968-971, 1998.
- [2] F. Albertini y E.D. Sontag, *Continuous control-Lyapunov functions for asymptotically controllable time-varying systems*, Int. J. Control, vol. 72, pags. 1630-1641, 1999.
- [3] A. Arapostathis, B. Jacobczyk, H. G. Lee y E.D. Sontag, *The effect of sampling on linear equivalence and feedback linearization*, Syst. & Contr. Letters, vol. 13, pags. 373-381, 1989.
- [4] K.T. Astrom y B. Wittenmark, *Computer Controlled Systems: Theory and Design*, Prentice-Hall, 1984.
- [5] D. D. Bainov y P.S. Simeonov, *Systems with Impulse Effects: Stability Theory and Applications*, Halsted, New York, 1989.
- [6] A. T. Barabanov y Ye. F. Starozhilov, *Investigations of the stability of continuous discrete systems by Lyapunov's second method*, Sov. J. Autom. Inf. Sci., Vol. 21, Nro. 6, pags. 35-41, 1988.
- [7] M. Bardi y I. Capuzzo-Dolcetta, *Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations*, Birkhauser, Boston, 1997.
- [8] J.E. Bobrow, S. Dubowsky y J.S. Gibson, *On the optimal control of robotic manipulators with actuators constraints*, Proc. 1983 American Control Conference, San Francisco, pags. 782-787, 1983.
- [9] M.S. Branicky, *Stability of hybrid systems: state of the art*, Proc. 36th IEEE Conference on Decision and Control, San diego, CA, pags. 120-125, 1997.
- [10] C. Canudas de Wit, N. Fixot y K.J. Astrom, *Trajectory tracking in robot manipulators via nonlinear state feedback*, IEEE Trans. Rob. and Autom., Vol. 8, pp. 138-144, 1992.

- [11] B. Castillo, S. di Gennaro, S. Monaco y D. Normand-Cyrot, *On regulation under sampling*, IEEE Trans. Autom. Contr., Vol. 42, pags.864-868, 1997.
- [12] B. Cernuschi-Frías, R.A. García y S. Zanutto, *A neural network model of memory under stress*. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Vol. 27, pags. 278-283, 1997.
- [13] T. Chen y B.A. Francis, *Input-output stability of sampled-data systems*, IEEE Trans. Autom. Contr., Vol. 36, pags.50-58, 1991.
- [14] V.A. Costa, R.A. García y M.I. Troparevsky, *An output feedback algorithm for trajectory tracking in control affine nonlinear systems*, Anales de la IX Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control, pags. 485-490, 2001.
- [15] E.A. Coddington y N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.
- [16] J.A. Farrell y A.N. Michel, *Estimates of asymptotic trajectory bounds in digital implementation of linear feedback control systems*, IEEE Trans. Autom. Contr., Vol. 34, pags.1319-1324, 1989.
- [17] B.A. Francis y T.T. Georgiou, *Stability theory for linear time-invariant plants with periodic digital controllers*, IEEE Trans. Autom. Contr., Vol. 33, pags.269-279, 1988.
- [18] G.F. Franklin y Powel, *Digital Control of Dynamical Systems*, Addison-Wesley, New York, 1980.
- [19] R.A. García y C.E. D'Attellis, *Trajectory tracking in nonlinear systems via nonlinear reduced observers*, Int. J. Control, Vol. 62, pp. 685-715, 1995.
- [20] R.A. García, J.L. Mancilla Aguilar y C.E. D'Attellis, *Restricted Trajectory Tracking in Nonlinear Systems*, Latin American Applied Research, Vol. 31, pags. 7-16, 2001.
- [21] S.T. Glad, *Output dead-beat control of nonlinear systems by gain output feedback*, Syst. & Contr. Letters, vol. 9, pags. 249-255, 1987.
- [22] S. P. Gordon, *On the converses to the stability theorems for difference equations*, SIAM J. Contr., vol. 10, pags. 76-81, 1972.
- [23] W. Grizzle y P. Kokotovic, *Feedback linearization of sampled-data systems*, IEEE Trans. Autom. Contr., Vol. 33, pags.857-859, 1988.
- [24] A.M. Guillaume, G. Bastin y G. Campion, *Sampled-data adaptive control of a class of continuous nonlinear systems*, Int. J. Contr., vol. 60, pags. 569-594, 1994.

- [25] W. Hahn, *Theory and Applications of Lyapunov's Direct methods*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1963.
- [26] W. Hahn, *Stability of Motion*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967.
- [27] J. Hertz, A. Krogh y R. Palmer, *Introduction to the Neural Computation*, Addison-Wesley, California, 1991.
- [28] J.J. Hopfield, *Neurons with graded response have collective computational capabilities like those of two-state neurons*. Proc. United States National Academy of Science, vol. 81, pags. 3088-3092, 1984.
- [29] L. Hou, A.N. Michel y H.Ye, *Some qualitative properties of sampled-data control systems*, Proc. 35th IEEE Conference on Decision and Control, pags. 911-917, 1996.
- [30] L. Hou, A.N. Michel y H.Ye, *Some qualitative properties of sampled-data control systems*, IEEE Trans. Autom. Contr., Vol. 42, pags.1721-1725, 1997.
- [31] P. Hsu y S. Sastry, *The effect of discretized feedback in a closed loop system*, Proc. 26th IEEE Conference on Decision and Control, Los Angeles, CA, pags. 1518-1523, 1987.
- [32] B. Hu y A.N. Michel, *Some qualitative properties of multirate digital control systems*, IEEE Trans. Autom. Contr., Vol. 44, pags.765-770, 1999.
- [33] B. Hu y A.N. Michel, *Stability analysis of digital feedback control systems with time-varying sampling periods*, Automatica, Vol. 36, pags. 897-905, 2000.
- [34] B. Hu y A.N. Michel, *Robustness analysis of digital feedback control systems with time-varying sampling periodos*, Journal of the Franklin Institute, Vol. 337, pags. 117-130, 2000.
- [35] P. Iglesias, *On the stability of sampled-data linear time varying feedback systems*, Proc. 33rd IEEE Conference on Decision and Control, Lake Buena Vista, FL, pags. 4228-4234, 1994.
- [36] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems: an Introduction*, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [37] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems II*, Springer-Verlag, Londres, 1999.
- [38] R.E. Kalman y J.E. Bertram, *Control systems analysis and desing via the "second method" of Lyapunov II: discrete-time systems*, Trans. ASME Ser. D J. Basic Engrg., vol. 80, pags. 394-400, 1960.

- [39] J. Keller y B.D.O. Anderson, *A new approach to the discretization of continuous time controllers*, IEEE Trans. Autom. Contr., Vol. 37, pags.214-223, 1992.
- [40] H.K. Khalil, *Nonlinear Systems, 2nd edition*, Macmillan publishing Co., New York, 1996.
- [41] N.N. Krasovskii, *Stability of Motion*, Stanford University Press, Stanford, California, 1963.
- [42] N.N. Krasovskii y A.I. Subbotin, *Game-Theoretical Control Problems*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [43] M. Krstic, I. Kanellakopoulos y P. Kokotovic, *Nonlinear and Adaptive Control Design*, Wiley, New york, 1995.
- [44] J. Kurzweil, *On the inverse of Lyapunov's second theorem on stability of motion*, Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, vol. 24, pags. 19-77, 1956.
- [45] D.A. Lawrence, *Stability analysis of nonlinear sampled-data systems*, Proc. 36th IEEE Conference on Decision and Control, San Diego, CA, pags.365-366, 1997.
- [46] J.L. Mancilla Aguilar, R.A. García y C.E. D'Attellis, *Exact Linearization of nonlinear systems: trajectory tracking with bounded controls and states constraints*, Int. J. Control, Vol. 65, pags. 455-468, 1996.
- [47] J.L. Mancilla Aguilar, R.A. García y M.I. Troparevsky, *Digital implementation of static feedback laws via SZH*, Proc. 1997 American Control Conference, pags. 3631-3635, Albuquerque, 1997.
- [48] J.L. Mancilla Aguilar, R.A. García y M.I. Troparevsky, *Hybrid dynamical systems and digital implementation of feedback laws*, Latin American Applied Research, Vol 30, No. 3, pags.193-200, 2000.
- [49] J.L. Mancilla Aguilar, R.A. García y M.I. Troparevsky, *Trajectory tracking in sampled-data nonlinear systems*, Proc. 2000 American Control Conference, pags. 3353-3357, Chicago, 2000.
- [50] J.L. Mancilla Aguilar, R.A. García y M.I. Troparevsky, *Stability of a certain class of hybrid dynamical systems*, Int. J. Control, Vol. 73, No. 15, 2000
- [51] J.L. Mancilla Aguilar, R.A. García y M.I. Troparevsky, *An Algorithm for trajectory tracking in sampled data nonlinear system*, Latin American Applied Research, Vol. 30, No 2, pags.93-98, 2000.

- [52] J.L. Mancilla Aguilar, R.A. García y M.I. Troparevsky, *An Algorithm for the digital implementation of trajectory tracking controllers*, Asian Journal of Control, Vol. 2, No. 3, pags. 169-178, 2000.
- [53] I.M. Mareels, H.B. Pendfold y R.J. Evans, *Controlling time-varying systems via Euler aproximations*, Automatica, vol.4, pags. 681-696, 1992.
- [54] J.L. Massera, *Contributions to stability theory*, Annals of Math., vol. 64, pags. 182-206, 1956.
- [55] A.N. Michel y B. Hu, *Towards a stability theory of hybrid dynamical systems*, Automatica, 1999.
- [56] A. N. Michel y K. Wang, *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, Marcel Dekker, New York, 1995.
- [57] R.K. Miller, A.N. Michel y J.A. Farrell, *Quantizer effects on steady-state error specifications of digital feedback control systems*, IEEE Trans. Autom. Contr., Vol. 34, pags. 651-654, 1989.
- [58] S. Monaco y D. Normand-Cyrot, *On the sampling of a linear analytic control system*, Proc. 24th IEEE Conference on Decision and Control, Ft. Lauderdale, FL, pags. 1457-1462, 1985.
- [59] S. Monaco, D. Normand-Cyrot y S. Stornelli, *On the linearizing feedback in nonlinear sampled-data schemes*, Proc. 25th IEEE Conference on Decision and Control, Atenas, Grecia, pags. 2056-2060, 1986.
- [60] S. Monaco y D. Normand-Cyrot, *Zero dynamics of sampled data nonlinear systems*, Syst. & Contr. Letters, vol. 11, pags. 229-234, 1988.
- [61] S. Monaco y D. Normand-Cyrot, *Quelques éléments sur la commande numérique non linéaire*, en *Systemes non linéaires*, Vol. 3, A.J. Fossard y D. Normand-Cyrot, Eds., Masson, Paris, 1993.
- [62] J.R. Munkres, *Topology: A First Course*, Prentice-Hall, Englewoods Cliffs, New Jersey, 1974.
- [63] D. Nesić, A.R. Teel y E.D. Sontag, *Formulas relating \mathcal{KL} stability estimates of discrete-time and sampled-data nonlinear systems*, Syst. & Contr. Letters, vol. 38, pags. 49-60, 1999.

- [64] H. Nijmeijer y A.J. van der Schaft, *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [65] J. Peuteman y D. Aeyels, *Averaging results and the study of uniform asymptotic stability of homogeneous differential equations that are not fast time-varying*, SIAM J. Control Optim., vol. 37, Nro. 4, pags. 997-1010, 1999.
- [66] C. Rui, I. Kolmanovsky y N.H. McClamroch, *Hybrid control for stabilization of a class of cascade nonlinear systems*, Proc. American Control Conf., Albuquerque, NM, pags. 2800-2804, 1997.
- [67] R. Sepulchre, M. Jankovic y P. Kokotovic, *Constructive Nonlinear Control*, Springer-Verlag, Londres, 1997.
- [68] J.-J. Slotine y M. Spong, *Robust robot control with bounded input torques*, J. Rob. Syst., Vol. 2, pags. 329-352, 1985.
- [69] E.D. Sontag, *A concept of local observability*, Syst. & Contr. Letters, vol. 7, pags. 41-47, 1984.
- [70] E.D. Sontag, *Orbit theorems and sampling*, en *Algebraic and Geometric Methods in Nonlinear Control Theory*, Fliess, M. y Hazewinkel, M., Eds., Reidel, Dordrecht, 1986.
- [71] E.D. Sontag, *Smooth stabilization implies coprime factorization*, IEEE Trans. Autom. Contr., Vol. 34, pags.435-443, 1989.
- [72] E.D. Sontag, *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems, 2da Edición*, Springer-Verlag, New-York, 1998.
- [73] E.D. Sontag, *Comments on integral variants of ISS*, Syst. & Contr. Letters, vol. 34, pags. 93-100, 1998.
- [74] M. Spong, J. Thorp y J. Kleinwaks, *The control of robotics manipulators with bounded input*, IEEE Trans. Automat. Control, Vol. 31, pags. 483-489, 1986.
- [75] J. Toakrzewski y A. W. Olbrot, *Sufficient stability condition for a sampled-data system with digital controller*, IEEE Trans. Autom. Contr., Vol. 40, pags.1241-1243, 1995.
- [76] V.I. Utkin, *Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems*, MIR. Moscú, 1978.
- [77] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis, 2da Edición*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1993.

- [78] J. Warga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Academic Press, New York, 1972.
- [79] H. Ye, A.N. Michel y P.J. Antsaklis, *A general model for the qualitative analysis of hybrid dynamical systems*, Proc. 34th IEEE Conference on Decision and Control, New Orleans, LA, pags. 1473-1477, 1995.
- [80] H. Ye, A.N. Michel y L.A. Hou, *Stability theory for hybrid dynamical systems*, Proc. 34th IEEE Conference on Decision and Control, New Orleans, LA, pags. 2679-2684, 1995.
- [81] H. Ye, A.N. Michel y L.A. Hou, *Stability theory for hybrid dynamical systems*, IEEE Trans. Autom. Contr., Vol. 43, pags.461-474, 1998.
- [82] T. Yoshizawa, *Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions*, Springer-Verlag, New York, 1975.

