Biblioteca Digital
F C E N - U B A

BIBLIOTECA CENTRAL LUIS F LELOIR
BIBLIOTECA CENTRAL LELOIR
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES UBA

Tesis de Posgrado

Origen y evolución de campos magnéticos asociados a las grandes estructuras cosmológicas

Kandus, Alejandra

2001

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:
Kandus, Alejandra. (2001). Origen y evolución de campos magnéticos asociados a las grandes estructuras cosmológicas. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3398_Kandus.pdf

Cita tipo Chicago:
Kandus, Alejandra. "Origen y evolución de campos magnéticos asociados a las grandes estructuras cosmológicas". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2001.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3398_Kandus.pdf

EXACTAS UBA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

UBA
Universidad de Buenos Aires

Dirección: Biblioteca Central Dr. Luis F. Leloir, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA - Tel. (++54 +11) 4789-9293

Contacto: digital@bl.fcen.uba.ar

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Departamento de Física

Tesis Doctoral

Origen y Evolución de Campos Magnéticos Asociados a las Grandes Estructuras Cosmológicas

Autor: Alejandra Kandus
Director: Dr. Esteban Calzetta

Lugar de Trabajo: Departamento de Física, F. C. E. y N. - UBA

Trabajo de Tesis para optar al título de Doctor en Ciencias Físicas

Noviembre 2001

51 3398

Je t'aime d'être imparfait. Si tu savais que je le vois, tu t'en irriterais. Pardon! Je n'ai rien vu... Mais moi, je ne suis pas comme toi: je veux que tu me voies imparfaite! Je le suis, je le suis; et j'y tiens; ce que j'ai d'imparfait, c'est moi, plus que le reste. Si tu me prends, tu le prends. Le prends-tu?... Mais tu ne veux pas le connaître. Quand te donneras-tu la peine enfin de me regarder?

d'après Romain Rolland, "L'Ame Enchantée"

Resumen

En esta tésis presentamos un nuevo mecanismo de inducción de campo magnético primordial, con el objetivo de poder explicar la presencia y características de los campos magnéticos que se observan en galaxias y cúmulos de galaxias.

Asumiendo que durante la etapa inflacionaria del universo existe un campo de materia cargado, el estado cuántico del campo cambia al producirse la transición de esa etapa a la siguiente, debido al cambio en la geometría del universo, dando lugar a la aparición de corrientes eléctricas estocásticas.

Como el valor medio de las corrientes es cero, también lo serán los valores medios de los campos por ellas inducidos. Sin embargo fluctuaciones cuánticas y estadísticas respecto del valor medio de la corriente construyen varianzas no nulas. Esas varianzas son entonces fuente de campo electromagnético, que también se manifiesta a través de desviaciones respecto de la media.

Calculamos el núcleo de ruido debido a las partículas creadas y lo usamos como fuente de las ecuaciones de Maxwell para la correspondiente función de dos puntos del campo magnético.

Calculamos la intensidad inducida a escala galáctica, teniendo en cuenta de manera fenomenológica la conductividad finita del plasma en el cual se propaga el campo magnético. Para el caso de transición instantánea de inflación a radiación la intensidad resultante es muy pequeña.

Para el caso en que la transición no sea instantánea, o sea el recalentamiento del universo tenga una cierta duración, el campo inducido podría tener intensidad suficiente como para explicar el campo galáctico. Además en este caso es posible enmarcar el mecanismo en el modelo supersimétrico de la física de partículas, ya que en él hay un campo de materia con las propiedades que requiere nuestro mecanismo, y además estos modelos predicen una baja tempertura de recalentamiento, lo que implicaría una menor disipación del campo inducido.

Para estudiar el efecto de la conductividad de las propias fuentes de campo magnético sobre la intensidad final inducida, planteamos ecuaciones consistentes para la evolución del sistema de cargas y campo electromagnético durante las etapas tempranas del recalentamiento, utilizando técnicas apropiadas para estudiar sistemas de campos cuánticos fuera del equilibrio. Encontramos que las cargas creadas se comportan como un medio superconductor y por lo tanto el campo inducido es apantallado.

En virtud de los resultados obtenidos, discutimos la validez del mecanismo estudiado.

Palabras claves:
Cosmología - Teoría de campos - Relatividad general - Campos magnéticos galácticos

Abstract

In this thesis we present a new mechanism to induce primordial magnetic fields, aimed at explaining the existence and features of those fields in galaxies and clusters of galaxies.

Asuming that during inflation there exists a charged matter field, the quantum state of the field changes when the transition from that epoch to the subsequent one occurs, due to the change in the geometry of the universe, giving rise to stochastic electric currents.

As the mean value of the currents is zero, the same will happen to the mean values of the induced electromagnetic fields. However quantum and statistical fluctuations around the mean value of the current build non null variances. Those variances induce fields, which also manifest throught their rms deviations around the mean.

We evaluated the noise kernel due to the created charges and used it as source in the Maxwell equations for the corresponding electromagnetic two point function.

We estimated the induced intensity on a galactic scale, taking into account in a phenomenological way the finit electric conductivity of the primordial plasma through which the field propagates.

For the case of instantaneous reheating of the universe the resulting intensity is too weak to account for the observed fields in galaxies. But if the reheating epoch has a certain duration, the induced fields are strong enough to seed further amplifying mechanisms that gave rise to the galactic fields. Besides, in this case we can frame the proposed mechanism in the supersymmetric version of the standard model of particle physics. It provides a candidate matter field with the required properties for our mechanism and also allows a low reheating temperature which in our case implies that the induced field will be less dissipated.

To study the effect of the own sources of the magnetic field on its final intensity, we derived consistent equations to study the system of charges and field during the first stages of reheating. This derivation was done using specific techniques to study quantum fields out of equilibrium.

We found that the created charges behave as a superconducting medium and hence screen the induced field.

In view of all the results obtained, we discuss the usefulness of the proposed mechanism to acount for the observations.

Keywords:
Cosmology - Quantum field theory - General relativity - Cosmological magnetic fields.

Contenido

1 Introducción 1

2 Estado actual del conocimiento sobre campos magnéticos cosmológicos 5
- 2.1 Observaciones 5
- 2.2 Generación de campos magnéticos 9
- 2.3 Cotas observacionales a los campos magnéticos primordiales 14

3 Generación de campos magnéticos por creación cosmológica de partículas 19
- 3.1 Electrodinámica escalar en un universo en expansión 20
- 3.2 Aproximación fenomenológica estocástica 23
- 3.3 Creación de partículas 24
- 3.4 Evaluación del campo magnético 27
- 3.5 Campo fermiónico 33
- 3.6 Discusión 35

4 Generación de campos magnéticos durante la etapa de recalentamiento: conexión con la teoría supersimétrica de partículas. 37
- 4.1 Modelo de la Física de Partículas 38
- 4.2 Evolución del campo escalar durante recalentamiento y durante radiación 40
- 4.3 Estimación del campo magnético 43
- 4.4 Discusión 46

5 Estimación Autoconsistente de Campos Magnéticos Durante la Etapa de Recalentamiento 49
- 5.1 Escenario para magnetogénesis 50
- 5.2 Dinámica de la función de dos puntos del campo electromagnético 54
- 5.3 Problema estocástico equivalente 59
- 5.4 Evaluación del campo magnético 63
- 5.5 Discusión 65

6 Conclusiones 67

A Factores de escala del universo, ecuación de Klein-Gordon y coeficientes de Bogoliubov 71
- A.1 Factores de escala del universo 71
- A.2 Solución de la ecuación de Klein Gordon para las diferentes etapas del universo 73
- A.3 Cálculo de los coeficientes de Bogoliubov 75

B Cálculo de los coeficientes de Bogoliubov para un campo fermiónico 79

C Electrodinámica escalar autoconsistente: acción efectiva irreducible de

dos partículas y camino temporal cerrado, y aproximación *1/N*. **83**
C.1 Funcional generatriz de camino temporal cerrado para N campos escalares en espacio-tiempo curvo 84
C.2 Acción efectiva irreducible de dos partículas 85
C.3 Ecuación para el propagador del campo escalar 88
C.4 Ecuación para el propagador electromagnético 88
C.5 Cambiando a tiempo conforme 89
C.6 Ecuaciones para los propagadores electromagnéticos retardado y de Hadamard 90

D Cálculo de los núcleos **93**
D.1 Sector ultravioleta 93
D.2 Sector infrarrojo 94

E Renormalización de la ecuación de vacío **97**

Capítulo 1

Introducción

Los campos magnéticos son ubicuos en nuestro universo. Las observaciones muestran que en planetas, estrellas, galaxias y cúmulos de galaxias existen campos magnéticos de variada intensidad y uniformidad. Por ejemplo

Estructura	**B (Gauss)**
Tierra	1
Sol	1
Núcleos gaácticos	$10^{-3} - 10^{-5}$
Nubes Moleculares	$10^{-3} - 10^{-5}$
Galaxias	10^{-6}
Medio intergaláctico	10^{-9}

A pesar de que la existencia campos homogéneos intensos a escala cosmológica han sido descartados por las observaciones realizadas en la radiación cósmica de fondo, no ocurre lo mismo para campos uniformes pero débiles.

El origen de los campos magnéticos observados en las galaxias y en los cúmulos de galaxias es uno de los problemas más importantes de la cosmología moderna e históricamente fue la primera motivación para buscar un origen primordial de los mismos. Se han propuesto algunos procesos magnetohidrodinámicos (MHD) locales, muy elaborados, para amplificar campos magnéticos *semilla*, muy débiles hasta campos de intensidad de μG (microgauss) observados en las galaxias. Estos mecanismos, conocidos como *dínamos galácticos* están basados en la conversión de la energía cinética del movimiento turbulento del medio conductor interestelar en energía magnética. Hoy ha sido cuestionada la eficiencia de tales procesos MHD, tanto por trabajos teóricos como por observaciones de galaxias muy corridas al rojo (donde el dínamo aún no actuó tiempo suficiente como para amplificar el campo débil hasta los μG) en las cuales se detectan campos de la misma intensidad que en las cercanas. En consecuencia es probable que el mecanismo responsable para el origen de los campos magnéticos galácticos deba buscarse en el pasado remoto, por lo menos en la época en que se formaron las galaxias. Además aunque el dínamo galáctico fuera eficiente, quedaría por desentrañar el origen del campo semilla que luego de la amplificacion da lugar al detectado.

Aún más misterioso es el origen de los campos magnéticos que se detectan en los

cúmulos de galaxias. Se ha observado que estos campos tienen intensidad y longitud de coherencia comparable a, y en algunos casos mayor que, la de los campos galácticos. En el escenario tradicional de formación de estructuras con materia oscura fría (MOF), los cúmulos se forman por agregación de galaxias y hoy día se acepta que los campos magnéticos en el medio interno del cúmulo no se pudieron formar por eyección de campos galácticos.

Para que un mecanismo de magnetogénesis sea eficaz en un universo en expansión, debe basarse en la ruptura de la *invariancia conforme* del campo electromagnético. Siendo éste un campo no masivo evolucionará de manera tal de conservar su flujo, lo que significa que, si $a(t)$ es el factor de expansión del universo, el campo inducido primordialmente se atenuará con la expansión del universo según $B_0 a^{-2}(t)$. Las formas de romper esa invariancia son acoplar el campo electromagnético a la curvatura del espacio tiempo de forma no trivial, o acoplarlo a un campo cuya evolución no sea invariante conforme.

Los procesos inflacionario y de recalentamiento del universo son los que proveen las condiciones más atractivas para mecanismos de generación de campos magnéticos primordiales, en particular porque la longitud de coherencia del campo primordial inducido por ellos puede resultar naturalmente grande, no necesitando apelar a procesos MHD para su extensión.

En esta tésis proponemos un mecanismo nuevo de generación de campo magnético primordial, que tiene lugar durante las etapas del universo de recalentamiento y dominada por la radiación, y que consiste en lo siguiente: asumamos que durante la etapa inflacionaria del universo, hay un campo de materia cargado, no acoplado al inflatón y mínimamente acoplado a la curvatura del espaciotiempo. Por el hecho de que el universo se está expandiendo, el estado cuántico del campo no permanece invariante, sino que cambia de instante a instante: en otras palabras, se crean cuantos de ese campo de materia. Al finalizar inflación y comenzar alguna de las etapas subsiguientes: radiación (en el caso de recalentamiento instantáneo del universo) o recalentamiento, la geometría del universo sufre una alteración debida al cambio en el factor de expansión del mismo. En ese proceso el cambio en el estado cuántico del campo de materia es muy grande y se traduce en una copiosa *creación de partículas.*

Debido a la conservación de la carga eléctrica y del cuadrimomento, los valores medios de la carga y de la corriente son nulos. Sin embargo fluctuaciones cuánticas y estadísticas respecto de las medias, construyen varianzas no nulas, usualmente denominadas *núcleos de ruido* que pueden dar lugar a campos electromagnéticos. Estos núcleos tienen una cierta distribución espectral. Dado que deseamos estimar un campo que sea coherente en una cierta escala, debemos filtrar este espectro de manera de eliminar las frecuencis mayores que la de nuestro interés.

Una primera estimación del efecto puede hacerse considerando que la transición de inflación a la etapa dominada por la radiación es instantánea. En este caso se puede estimar la creación de partículas sin tener en cuenta ningún tipo de acoplamiento de éstas con otros campos de materia. Considerando que los campos inducidos son débiles y que por ende no afectan a las corrientes inducidas, se puede calcular el campo inducido usando las ecuaciones de Maxwell usando como fuente a los núcleos antes mencionados, y teniendo en cuenta que el campo magnético se está propagando en un plasma en equilibrio térmico (conforme) de conductividad finita.

Esta primer debe ser perfeccionada en varios aspectos para lograr una predicción realista del campo magnetico generado. Por un lado, es importante dar al mecanismo estudiado un soporte en un modelo concreto de la física de partículas, como lo es el supersimétrico. Por otro lado, es necesario incorporar en el modelo los efectos asociados con la duración finita del periodo de recalentamiento y, fundamentalmente, los efectos de retroacción sobre el campo magnético de las mismas partículas cargadas que lo generan. Este último problema requiere la aplicación de tecnicas de teorías de campos fuera de equilibrio, ya que las fluctuaciones de la materia cargada, que en el periodo considerado se extienden sobre distancias mayores que el horizonte, no pueden ser tratadas mediante modelos hidrodinámicos ni cinéticos.

En el Capítulo 2 resumimos lo que se sabe actualmente sobre campos magnéticos cosmológicos: los datos observacionales en galaxias, cúmulos de galaxias y objetos muy alejados; las cotas sobre su intensidad provistas por nucleosíntesis y las anisotropías en la radiación de fondo. Finalmente describimos someramente los mecanismos más discutidos en la literatura.

En el Capítulo 3 presentamos nuestro mecanismo de inducción de campo primordial. Comenzamos considerando el caso en que el campo cargado es escalar, planteamos la acción para este campo acoplado al electromagnético en un universo de Friedmann - Roberson - Walker y deducimos las ecuaciones de evolución para ambos. Haciendo la hipótesis de que los campos inducidos son débiles, consideramos que la evolución del campo escalar está desacoplada del electromagnético. Asumiendo que la transición de la etapa inflacionaria a la dominada por la radiación fue instantánea, resolvemos la ecuación de Klein Gordon para el campo escalar en las etapas del universo involucradas en el proceso de magnetogénesis, y calculamos los coeficientes de Bogoliubov que dan la densidad espectral de partículas creadas. Como el valor medio de los campos es nulo, construímos una ecuación de evolución para la varianza del campo magnético, cuya fuente es la varianza de las corrientes creadas cosmológicamente. Evaluamos el campo inducido por ellas teniendo en cuenta varias expresiones fenomenológicas para la conductividad del plasma primordial como función de la temperatura del mismo, encontrando que en general la intensidad es muy débil. Por último consideramos el caso que el campo de materia sea fermiónico, encontrando en este caso que los campos inducidos son mucho más débiles que en el caso de campo escalar.

En el Capítulo 4 extendemos el mecanismo presentado en el Capítulo 3 al caso en que el recalentamiento del universo no es instantáneo. En este escenario, debido a que las temperaturas son menores que en el caso de recalentamiento instantáneo, si asumimos que la conductividad eléctrica es función de ella, entonces la atenuación en el campo inducido será menor. Efectivamente encontramos que esto es así, y las intensidades de campo resultan ser suficientemente altas como para tener impacto astrofísico. Por otra parte, enmarcamos nuestro mecanismo en el modelo supersimétrico de la física de partículas. En él encontramos un candidato a ser nuestro campo escalar cargado, el leptón $s - tau$ o *tau supersimétrico*. Además estos modelos contienen naturalmente escenarios de recalentamiento con bajas temperaturas.

Si bien una temperatura de recalentamiento baja favorece la propagación del campo inducido, no es claro que en esa situación la conductividad debida a las propias fuentes del campo magnético sea despreciable.

En el Capítulo 5 de esta tesis estudiamos el efecto que podrían tener las propiedades

conductoras de las propias fuentes de campo magnético sobre la propagación de este último. Para llevar a cabo este estudio necesitamos re-obtener ecuaciones consistentes de evolución para las varianzas de las corrientes y del campo magnético, que tengan en cuenta el hecho que nuestro sistema de campos está fuera del equilibrio. Esas ecuaciones se obtuvieron en el Apéndice 3 de esta tesis a partir de la acción efectiva de camino temporal cerrado y de dos partículas irreducible, junto con la aproximación de un número N grande de campos escalares. Considerando que durante los primeros instantes del recalentamiento el plasma primordial no es conductor, se encontró que las fuentes de campo magnético se comportan como un medio superconductor, apantallando fuertemente el campo inducido.

Finalmente en el Capítulo 6 discutimos las conclusiones e implicancias de nuestro trabajo.

Capítulo 2

Estado actual del conocimiento sobre campos magnéticos cosmológicos

En este capítulo repasamos el conocimiento que se tiene al presente sobre los campos magnéticos en las grandes estructuras de nuestro universo, comenzando con la descripción de los datos observacionales y las técnicas usuales para obtenerlos. Enumeramos los mecanismos propuestos para explicar su origen y finalmente comentamos las cotas que deben satisfacer las intensidades producidas por ellos.

2.1 Observaciones

Los principales trazadores observacionales de campos magnéticos galácticos y extra-galácticos son: el desdoblamiento Zeeman de las líneas espectrales; la intensidad y la polarización de la emisión de sincrotrón de electrones relativistas y la medida de la rotación de Faraday (RF) de la radiación electromagnética que atraviesa un medio ionizado [1, 2].

El desdoblamiento Zeeman, aunque directo, es típicamente demasiado débil como para ser usado para observaciones fuera de nuestra galaxia. A pesar de que la radiación de sincrotrón y la medida de rotación permiten trazar campos magnéticos en objetos muy distantes, desafortunadamente ambos tipos de mediciones requieren una determinación independiente de la densidad local de electrones, n_e. Esto es posible a veces, por ejemplo estudiando la emisión de rayos-X desde el gas de electrones cuando éste está muy caliente, lo cual ocurre típicamente dentro de los cúmulos de galaxias. En otros contextos puede no ser fácil determinar n_e, particularmente en medios muy rarificados como el intergaláctico. En el caso de la emisión de sincrotrón, cuya intensidad es proporcional a $n_e B^2$, suele darse una estimación para B asumiendo equipartición entre las densidades de energía magnética y del plasma.

Si el campo magnético a ser medido es muy lejano, se acepta usar la medición de la medida de rotación para determinar su intensidad. La concordancia que en general se encuentra entre la intensidad del campo determinada por la medida de rotación y la

inferida por el análisis de la emisión de sincrotrón en objetos relativamente cercanos da una razonable seguridad en el uso del método para sistemas alejados. Debe notarse sin embargo, que las observaciones de la emisión de sincrotrón y las de la medida de rotación son sensibles a diferentes componentes espaciales del campo magnético[2]. La medida de rotacion para una fuente con corrimiento al rojo z_s está dada por

$$RM\left(z_s\right) \equiv \frac{\Delta\left(\kappa\right)}{\Delta\left(\lambda^2\right)} = 8.1 \times 10^5 \int_0^{z_s} n_e B_{\|}\left(z\right)\left(1+z\right)^{-2} dl\left(z\right) \ \frac{rad}{m^2} \tag{2.1}$$

donde $B_{\|}$ es la intensidad de campo a lo largo de la línea de visual y

$$dl\left(z\right) = 10^{-6} H_0^{-1} \frac{\left(1+z\right)}{\left(1+\Omega z\right)^{1/2}} dz \ Mpc \tag{2.2}$$

siendo H_0 la constante de Hubble hoy. La expresión anterior vale para $\Lambda = 0$. donde Λ es la constante cosmológica. Este método requiere conocer la densidad de la columna de electrones y las posibles inversiones del campo. Por estas razones, la determinación del campo magnético intergaláctico usando la medida de rotación es muy difícil y sólo se obtienen límites superiores, muy dependientes de los modelos usados para la densidad de electrones y las inversiones del campo.

2.1.1 Campos magnéticos en galaxias

El campo magnético interestelar en la Vía Láctea fue determinado usando varios métodos que permitieron obtener información muy valiosa sobre su amplitud y estructura espacial. La intensidad promedio del campo es de $3 - 4\mu G$. Esta intensidad corresponde a una equipartición aproximada de energía entre el campo magnético, los rayos cósmicos confinados en la galaxia y el movimiento turbulento a pequeña escala [1].

$$\rho_m = \frac{B^2}{8\pi} \approx \rho_t \approx \rho_{rc} \tag{2.3}$$

Notablemente, la densidad de energía magnética casi coincide con la densidad de energía de la radiación cósmica de microondas de fondo (RCMF). El campo mantiene su orientación en escalas del orden de unos pocos kiloparsecs (kpc), comparable con el tamaño mismo de la galaxia, presentando dos inversiones entre los brazos galácticos [3], lo que sugiere que la morfología del campo galáctico puede ser simétrica. Campos magnéticos de similar intensidad han sido observados en muchas otras galaxias espirales. A pesar de que en varias de ellas se observaron campos consistentes con la equipartición de la energía, por ejemplo en M33, en otras como las Nubes de Magallanes y M82 el campo parece ser más intenso que el umbral de equipartición. En lo que se refiere a la estructura espacial de los campos galácticos, la situación observacional es nuevamente bastante confusa, con algunas galaxias presentando desde simetría axial hasta ninguna estructura reconocible [2]. A modo de ilustración, en la figura 2.1 mostramos un mapa del campo magnético en la galaxia irregular NGC 4449 [4]

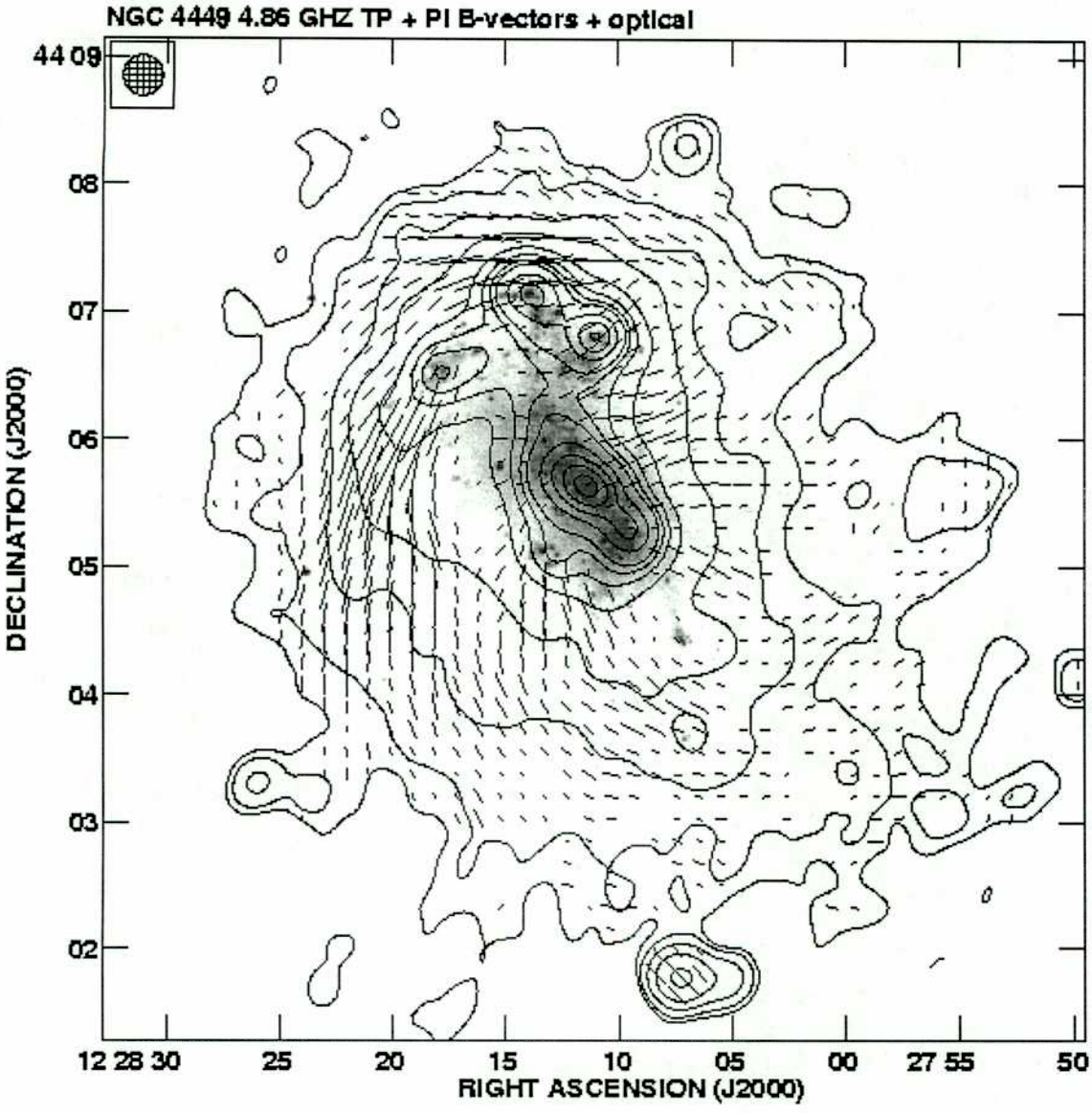

Figura 2.1: Mapa del campo magnético de la galaxia irregular NGC 4449: es apreciable la regularidad del campo magnético en un sistema que no presenta movimientos ordenados, característicos de un dínamo.

2.1.2 Campos magnéticos en cúmulos de galaxias

Observaciones realizadas en un gran número de cúmulos de Abel [5], algunos de los cuales tienen medida la emisión-X, dan información muy valiosa sobre los campos en los cúmulos de galaxias. La intensidad de campo magnético en el medio intracumular puede ser descrita con bastante buena aproximación por la ecuación fenomenológica

$$B_{IC} \sim 2\mu G \left(\frac{L}{10kpc}\right)^{-1/2} (h_{50})^{-1} \tag{2.4}$$

donde L es la longitud de inversión del campo y h_{50} es la constante de Hubble reducida. Los valores típicos de L son $10-100kpc$ lo que corresponde a intensidades de campo de $1-10\mu G$. El caso concreto del cúmulo Coma [6] puede ser ajustado con un campo magnético central $B \sim 8.3h_{100}^{1/2}$ G enredado a escalas del orden de 1 kpc. Un caso particular de cúmulo con campo magnético intenso es el de Hydra A, para el cual a partir de la medida de rotación de Faraday se determinó que posee un campo de 6 μG coherente en una escala de 100 kpc, al que se le superpone un campo aleatorio de intensidad 30 μG [7]. Un conjunto muy rico de imágenes de alta resolución de fuentes de radio interiores a los cúmulos de galaxias muestra evidencia de campos magnéticos intensos en las regiones centrales de los cúmulos [8]. La intensidad central típica está en el intervalo de $10-30$ μG, con valores de pico tan grandes como $\sim$ 70 μG. Es notable que para campos tan intensos, la presión magnética exceda a la del gas (deducida a partir de la emisión-X) sugiriendo que los campos magnéticos puedan jugar un papel significativo en la dinámica del cúmulo. Es interesante que exista discrepancia entre las estimaciones de la masa del cúmulo de Abell 2218 realizadas a partir de lensing gravitatorio y de observaciones de rayos-X [9], la cual puede ser explicada por la presión de soporte producida por campos magnéticos de intensidad del orden de $\sim$ 50 μG. Aún no es claro si la aparente disminución de la intensidad de campo magnético en las regiones externas de los cúmulos se debe a la estructura intrínseca del campo o es un efecto espúreo debido a la disminución de la densidad del gas. Las observaciones muestran también evidencia de una estructura filamentaria espacial del campo. Presuntamente estos filamentos estarían estructurados como una *soga de flujo*, esto es una estructura retorcida de campo, en la cual el campo está orientado a lo largo del eje en el centro del tubo y se vuelve helicoidal al alejarse del eje [8].

2.1.3 Campos magnéticos en objetos muy corridos al rojo

Determinaciones de alta resolución de la medida de rotación de Faraday de cuásares muy lejanos permitieron estudiar campos magnéticos en el pasado lejano. Las mediciones más significativas se deben a Kronberg y colaboradores [1]. La medida de rotación de las emisiones de radio del quasar 3C191 a $z = 1.945$, presuntamente debidas a una capa de gas magnetizado al mismo corrimiento al rojo, son consistentes con una intensidad de campo en el rango $0.4 - 4$ μG. Se encontró que el campo mantenía una dirección preferencial por unos $\sim$ 15 kpc, que es comparable con el tamaño de una galaxia espiral típica. El campo magnético de una galaxia espiral relativamente joven a $z = 0.395$ fue determinado por la medida de rotación de la emisión de radio del quasar PKS 1229-021 que se encuentra detrás de la galaxia, en $z = 1.038$. Se estimó que la intensidad del campo magnético está en el rango $1 - 4$ μG. Aún más interesante fue la observación de que el

campo se inverte en distancias aproximadamente iguales a la separación de los brazos de la espiral, como lo que sucede con nuestra Vía Láctea.

2.1.4 Campos magnéticos intergalácticos

La emisión en radiofrecuencias de cuásares distantes se usa también para acotar la intensidad de campos magnéticos en el medio intergaláctico, que se supone están presentes en todo el universo. Traducir las estimaciones de la medida de rotación en estimaciones de campo magnético es muy difícil para medios rarificados, en los cuales la densidad de gas ionizado y longitud de coherencia del campo son muy poco conocidas. Sin embargo pueden calcularse algunos límites interesantes sobre la base de estimaciones bien conocidas de la fracción de ionización del universo, adoptando al mismo tiempo valores razonables para la longitud de coherencia. Por ejemplo, asumiendo que el campo magnético tiene una longitud de coherencia de 1 Mpc e integrando la medida de rotación hasta $z_s \sim 2.5$, se encontró que $B_{IGM} \leq 10^{-9}\ G$ para la intensidad de campo magnético hoy [1].

Si bien el origen de los campos magnéticos en las galaxias podría explicarse por un proceso local [10], su existencia en todos los objetos cosmológicos, con intensidades semejantes para todos los corrimientos al rojo medidos, hacen pensar que mecanismos primordiales de generación son candidatos atractivos para explicar su existencia. En la sección siguiente repasaremos las características de los más estudiados.

2.2 Generación de campos magnéticos

Bajo la hipótesis de origen primordial, el mecanismo básico de generación de campos magnéticos en las galaxias, es la amplificación de un campo primordial *semilla*, homogéneo en la escala de la estructura de interés, originado por algún proceso primordial. Dos son los procesos de amplificación considerados en la literatura: efecto dínamo debido a la rotación del plasma cuando la galaxia se forma, o intensificación por colapso gravitatorio [11]. La intensidad del campo semilla, suele expresarse dando el valor que ese campo tendría hoy si no hubiera sido amplificado por alguno de los procesos mencionados, ellos son

$$\begin{aligned} \text{dínamo}: \ B_{sem} &\simeq 10^{-25} \text{ Gauss} \\ \text{colapso gravitatorio}: \ B_{sem} &\simeq 10^{-9} \text{ Gauss} \end{aligned}$$

La intensidad para alimentar el dínamo está basada en las últimas cotas obtenidas considerando que una parte sustancial de la energía del universo es una constante cosmológica [12].

El colapso gravitatorio también permitiría explicar la presencia de campos magnéticos en los filamentos y paredes que rodean los grandes vacíos [13] que se observan en el universo, ya sea porque se generan corrientes eléctricas en ese proceso [14] o porque las líneas de campo primordial son comprimidas en ese proceso.

En esta sección enumeramos y describimos algunos de los mecanismos de generación de campos magnéticos primordiales propuestos más recientemente, y que han merecido mayor atención por parte de la comunidad científica.

2.2.1 Campos magnéticos producidos por vorticidad primordial

La idea de que campos magnéticos primordiales pudieran ser producidos por movimiento vortical del plasma durante la época del universo dominada por la radiación fue propuesta por Harrison [15] en los años '70. El mecanismo se basa en considerar que las velocidades de rotación de los electrones y los protones deberían decrecer a razones diferentes en el universo en expansión, antes de recombinación, debido a que la dispersión de Thompson es mucho más efectiva para electrones que para iones. Esto significa que los electrones permanecen fuertemente acoplados a la radiación de fondo por mucho más tiempo, comportándose como materia relativista mientras que los iones ya son no relativistas. Se deduce entonces que durante la expansión del Universo la velocidad angular de los electrones decrece como $\omega_e \propto a^{-1}$ y la de los iones $\omega_i \propto a^{-2}$ siendo a el factor de escala del Universo. La diferencia entre estas dos velocidades se traduce en una corriente efectiva que generaría el campo magnético. Harrison [16] mostró que si un proceso turbulento primordial estuviera activo durante recombinación, este mecanismo podría producir campos magnéticos intergalácticos que hoy tendrían una intensidad $B \sim 10^{-8}\ G$ en escalas del orden de 1 Mpc.

El problema con este mecanismo es que las perturbaciones vorticales (o vectoriales) en la densidad de materia decaen con la expansión del universo. Para que éstas produzcan un efecto relevante en la época de recombinación deberían haber sido dominantes al momento de equilibrio radiación-materia, lo cual es incompatible con los escenarios mas o menos satisfactorios de formación de galaxias

2.2.2 Campos magnéticos producidos por la transición quark-hadrón

La cromodinámica cuántica predice que a alguna temperatura y/o densidad muy altas, la materia fuertemente interactuante sufre una transición de desconfinamiento, mediante la cual los grados de libertad quark/gluón son "liberados" de los hadrones. En el Universo temprano, debido a la expansión, el proceso es al revés, comenzando con un plasma de quarks y gluones, que a alguna temperatura crítica T_{QCD} condensa en hadrones incoloros. Cálculos de QCD en "lattice" sugieren que esta transición de fase es de primer orden y que habría tenido lugar a una temperatura $T_{QCD} \sim 150\ MeV$ [17]. Típicamente una transición de primer orden se produce mediante formación de burbujas o dominios. A medida que el plasma se sobreenfría por debajo de T_{QCD}, se forman y crecen burbujas que contienen la fase hadrónica. La velocidad de expansión de las paredes de la burbuja es supersónica, produciendose en consecuencia ondas de choque. Cuando estas ondas chocan entre sí, recalientan el plasma hasta nuevamente T_{QCD}, deteniendo el proceso de formación de dominios. Hasta este momento la transición QCD es un proceso fura del equilibrio. Posteriormente la formación de nuevas burbujas ocurre en equilibrio térmico dando lugar a la llamada *coexistencia de fases*. El calor latente liberado por estas burbujas compensa el enfriamiento debido a la expansión del universo, manteniendo la temperatura en T_{QCD}. La transición termina cuando gana la expansión y los bolsones de plasma quark-gluón son finalmente hadronizados.

El primer paso hacia un escenario de magnetogénesis basado en la transición QCD fue propuesto por Quashnock, Loeb y Spergel [18] y consistía en la formación de un campo eléctrico detrás de los frentes de choque que preceden a las burbujas en expansión. Este

campo es una consecuencia de la asimetría en el número de bariones que probablemente ya estuviera presente y que hace que la componente bariónica del plasma primordial esté cargada positivamente. Al mismo tiempo la componente leptónica debe estar cargada negativamente para garantizar la neutralidad de carga del universo. Por otra parte, los fluídos bariónico y leptónico obedecen a diferentes ecuaciones de estado. El resultado es que el fuerte gradiente de presiones producido por el pasaje de la onda de choque da lugar a un campo eléctrico radial detrás del frente. Estos campos eléctricos inducen corrientes eléctricas que generan campos magnéticos a escalas pequeñas, lo que hace que probablemente sean disipados rápidamente.

Campos más interesantes desde el punto de vista fenomenológico se producirían cuando los frentes de choque colisionan, dando lugar a turbulencia y vorticidad en escalas del orden de la distancia promedio entre los centros de las burbujas, ℓ. Quashnock y col. encontraron que el campo magnético producido a escala $\ell \sim 100\ cm$ tendría una intensidad $B_\ell \simeq 5\ G$. El campo magnético en escalas $L \gg \ell$ puede ser estimado promediando el campo producido por un número grande de dipolos magnéticos de tamaño ℓ orientados al azar en el espacio, obteniéndose $B_L = B_\ell\,(\ell/L)^{2/3}$. Después de finalizada la transición, si se asume que el plasma resultante tiene conductividad infinita, el campo magnético queda congelado en él y su evolución está dada por la ley de conservación del flujo magnético: $B\,(t)\,a^2\,(t) = B\,(t_i)\,a^2\,(t_i)$. Es fácil determinar la intensidad de campo en una escala L en la epoca de recombinación. La menor escala es la de disipación, que en ese momento es $L_{dis}\,(t_{rec}) \sim 5 \times 10^{10}\ cm$ y que hoy corresponde a 1 U.A.. En esta escala la intensidad de campo producida por la transición QCD es $B_L \sim 2 \times 10^{-17}\ G$. Si se considera la escala galáctica, que hoy sería de 1 Mpc, el campo inducido es muchos ordenes de magnitud menor. En consecuencia es practicamente imposible que los campos generados por este mecanismo tengan alguna importancia fenomenológica, aún si el dínamo galáctico fuera efectivo.

De acuerdo con un trabajo posterior de Cheng y Olinto [19], se podrían producir campos más intensos durante el período de coexistencia de fases de la transición QCD. La idea desarrollada por estos autores es que aún durante ese período de equilibrio, se formaría un exceso de bariones frente a la pared de la burbuja como resultado de la diferencia en la masa de bariones en los plasmas de quarks y de hadrones. La característica más importante para este mecanismo sería el espesor de la capa bariónica cargada la cual, debido a que está controlada por la difusión de bariones, es de $\sim 10^7\ fm$ en lugar de la escala QCD que es de $\sim 1\ fm$. En este contexto los campos magnéticos son generados por los movimientos peculiares de los dipolos eléctricos que se forman a partir de la convexión de calor latente liberado por las burbujas en expansión. La intensidad del campo estimada por Cheng y Olinto sería $B \simeq 10^8\ G$ al momento de la transición QCD, con una longitud de coherencia máxima $l_{coh} \simeq H_{QCD}^{-1}$. Asumiendo nuevamente que el plasma primordial es un conductor perfecto, al presente esta intensidad sería $B \simeq 10^{-16}\ G$ con una longitud de coherencia $l_0 \simeq 1\ pc$. Para la escala galáctica, siempre asumiendo que el universo es un conductor perfecto, estos autores encuentran que hoy $B_{gal} \simeq 10^{-20}\ G$.

En un trabajo posterior Sigl, Olinto y Jedamzik [20] investigaron el posible papel en la generación de campos magnéticos que tendrian las inestabilidades hidrodinámicas, producidas por las paredes de las burbujas en expansión. A pesar de no ser muy claro que estas inestabilidades puedan efectivamente desarrollarse durante la transición QCD, Sigl y col. afirmaron que esto no es imposible para una elección razonable de parámetros de

QCD. Tomando en cuenta el amortiguamiento producido por la viscosidad y conductividad térmica finitas del plasma, estos autores mostraron que la inestabilidad puede crecer de forma no lineal, produciendo turbulencia en una escala del orden del tamaño de la burbuja en la época de percolación. En este medio turbulento podría operar un dínamo MHD para amplificar el campo magnético inicial, pudiendo entonces alcanzarse la equipartición entre la energía magnética y la cinética. Los autores afirman que para escalas actuales del orden de 10 Mpc se obtendría un campo $B_{10} \simeq 10^{-20}\ G$.

2.2.3 Campos magnéticos generados por la transición electrodébil

Algunos de los ingredientes que pueden dar lugar a magnetogénesis durante la transición QCD tambien están presentes en la transición de fase electrodébil (EW). Así como en el caso de la transición discutida en la sección anterior, el proceso de magnetogénesis en la transición EW parece requerir que dicha transición sea de primer orden, o sea se realice a través de la formación de dominios. Si bien cálculos de "lattice" recientes dan resultados que parecen refutar fuertemente que esta transición sea de primer orden, ésta todavía es una posibilidad viable si se considera la extensión supersimétrica del modelo estándard de partículas.

De acuerdo con Baym, Bödeker y McLerran [21] se podrían generar campos magnéticos intensos en una transición EW de primer orden, por efecto dínamo. En este escenario los campos semilla serían provistos por fluctuaciones magnéticas aleatorias que siempre estarían presentes en escalas del orden de la longitud de onda térmica. Cuando el universo se sobreenfría por debajo de la temperatura crítica $T_{EW} \sim 100\ GeV$ el campo de Higgs tunelea localmente desde la fase $SU(2) \times U(1)_Y$ a la fase rota $U(1)_{em}$. Este tuneleo da lugar a la formación de burbujas de fase rota que se expanden convirtiendo la energía del vacío falso en energía cinética. A pesar de que la velocidad de la pared de la burbuja depende del modelo, se encuentra que para un rango muy amplio de parámetros del modelo estándard la expansión es supersónica, lo que da lugar a una onda de choque por delante de la pared. A medida que estas ondas colisionan se debería generar turbulencia en el cono asociado con la intersección de las burbujas. Efectivamente Baym y col. encontraron que el número de Reynolds para la colisión de dos burbujas es $Re \sim 10^{12}$ lo que indica que la turbulencia está completamente desarrollada en todas las escalas menores que el radio de la burbuja R_{bur}. Asumiendo que en ese momento la conductividad del plasma es infinita también se habría desarrollado una fuerte turbulencia MHD, y en esas condiciones hay equipartición entre la energía cinética del fluído y la contenida en el campo magnético, es decir $B^2(R_{bur}) \sim \epsilon(T_{EW})\, v_{fl}^2$ donde $\epsilon(T_{EW}) \sim g_* T_{EW}^4$ es la densidad de energía del plasma electrodébil. Para estimar la intensidad de campo magnético en una escala mayor que R_{bur}, Baym y col. consideraron que el campo magnético en esas escalas era una superposición del campo producido por dipolos de tamaño R_{bur}, asumiendo una distribución continua para estos dipolos en lugar de una distribución aleatoria. Ellos estimaron que actualmente el campo magnético homogéneo en una escala $l \sim 10\ UA$ sería $B \sim 10^{-7} - 10^{-9}\ G$, mientras que a una escala galáctica, $l_g \sim 10^9\ UA$ el campo sería $B_g \sim 10^{-17} - 10^{-20}\ G$.

2.2.4 Campos magnéticos a partir de inflación

Los primeros en notar que la etapa inflacionaria del universo podría ser un escenario adecuado para la generación de campos magnéticos primordiales fueron M. Turner y L. Widrow [22]. Ellos mostraron que inflación provee algunos ingredientes fundamentales para la magnetogénesis.

- Inflación produce de manera natural efectos en escalas mucho más grandes que el horizonte de Hubble a partir de procesos microfísicos que tienen lugar en regiones causalmente conexas. Si fluctuaciones electromagnéticas cuánticas son amplificadas durante inflación, ellas aparecerían hoy día como campos magnéticos estáticos y de gran escala.
- Inflación también provee los medios dinámicos para amplificar estas longitudes de onda largas. Si la invariancia conforme del campo electromagnético se rompe de alguna forma, se podrían excitar campos magnéticos durante la fase de expansión exponencial o la de recalentamiento.
- Durante inflación, y probablemente también durante la mayor parte del recalentamiento, el universo no es buen conductor. Esto significa que el flujo magnético no se conserva, pudiendo crecer la intensidad de campo magnético.

El principal obstáculo en este escenario para la generación de campo magnético primordial es el hecho que en una métrica conformemente plana, como la de Robertson-Walker usualmente considerada, el campo gravitatorio de fondo no induce producción de partículas del campo que se propaga, si éste es invariante conforme[23], como ocurre con los fotones.

Se propusieron varios mecanismos para salvar esta dificultad. Turner y Widrow [22] consideraron tres posibilidades. La primera era romper explícitamente la invariancia conforme mediante la introducción de un acoplamiento gravitatorio del tipo $RA_\mu A^\mu$ o $R_{\mu\nu}A^\mu A^\nu$, donde R es la curvatura escalar, $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci y A^μ es el potencial electromagnético. Todos estos términos rompen invariancia conforme y dan a los fotones una masa efectiva dependiente del tiempo. Uno de los límites mas severos a esta propuesta viene de la cota experimental a la masa del fotón, que hoy es $m_\gamma < 2 \times 10^{-16}\ eV$ [24]. Turner y Widrow mostraron que para algunas elecciones adecuadas de los parámetros, un tal mecanismo podría crear campos magnéticos galácticos sin necesidad de invocar un efecto dínamo para amplificarlos. Dolgov y Silk [25] propusieron un modelo diferente que invoca la ruptura espontánea de la invariancia de medida del electromagnetismo y que implica la no conservación de la carga eléctrica en el universo temprano.

La ruptura de invariancia conforme también puede ser producida por términos de la forma $R_{\mu\nu\lambda\kappa}F^{\mu\nu}F^{\lambda\kappa}/m^2$ o $RF^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, donde m es alguna escala de masa requerida por consideraciones dimensionales. Tales términos aparecen por efectos de polarización de vacío a un lazo en espacio - tiempo curvo y son invariantes de medida. Turner y Widrow mostraron que los campos producidos por este efecto son demasiado débiles como para ser considerados cosmológicamente interesantes. Mazzitelli y Spedalieri [26] reexaminaron la ruptura de invariancia conforme durante inflación, debida a acoplamientos del tipo $R^n F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ encontrando que el campo producido depende fuertemente de n. Además estudiaron el campo que resulta de una interacción efectiva entre la geometría y el campo

electromagnético en el contexto de la electrodinámica escalar. En ambos casos el campo producido es demasiado pequeño como para ser de interés astrofísico.

La anomalía conforme puede dar lugar a la ruptura de la invariancia conforme. Esta anomalía está relacionada con el diagrama "triángulo" que conecta dos fotones con un graviton [27]. Se sabe que este tipo de diagramas rompe invariancia conforme haciendo que la traza del tensor energía momento del campo electromagnético sea no nula. Dolgov [28] investigó los campos producidos por esta anomalía y obtuvo que pueden ser suficientemente intensos como para no necesitar amplificacion posterior. Lamentablemente los valores de los parámetros necesarios para producir un campo tan intenso son incompatibles con los valores aceptados por la física de partículas.

Ratra [29] sugirió que un acoplamiento de la forma $e^{\kappa\phi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, donde κ es un parámetro arbitrario y ϕ el inflatón, puede dar lugar a una amplificación muy grande durante inflación de las fluctuaciones cuánticas electromagnéticas en campos magnéticos de gran escala. Estos acoplamientos aparecen en algunos modelos inflacionarios particulares con potencial exponencial [30]. Los resultados de este modelo dependen fuertemente de los valores del parámetro, produciendose campos que hoy estarían en el intervalo $10^{-65} - 10^{-9}$ G.

En este sentido un modelo un poco más predictivo fue propuesto independientemente por Lemoine y Lemoine [31] y Gasperini, Giovannini y Veneziano [32], basado en cosmologia de supercuerdas. La idea es que en la teoría de cuerdas el campo electromagnético está acoplado no sólo a la métrica $g_{\mu\nu}$, sino también al dilatón ϕ. En el límite de bajas energías de la teoría, y después de reducir el espacio de 10 a 4 dimensiones espacio-temporales, este acoplamiento toma la forma $\sqrt{-g}e^{-\phi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ que rompe la invariancia conforme del campo electromagnético y coincide con el acoplamiento considerado por Ratra si $\kappa = -1$ (Ratra asumió que el potencial del campo escalar era el que producía inflación, y ese no es el caso de la cosmología de cuerdas). Lemoine y Lemoine estimaron que en el caso más simple de inflación producida por el dilatón, el campo magnético producido en escala galáctica es muy débil, $B \sim 10^{-62}$. Por otra parte Gasperini, Giovannini y Veneziano llegaron a la conclusión de que se podían producir campos de intensidad y coherencia suficientes como para explicar los campos galácticos. La razón para este resultado tan distinto es que ellos supusieron que existía una nueva fase entre la fase dominada por el dilatón y la fase de Robertson Walker durante la cual el potencial del dilatón es no nulo [33]. Como la duración de dicha fase es completamente desconocida el modelo no resulta predictivo.

Recientemente Giovannini [34] propuso un mecanismo de magnetogénesis basado en la variación temporal de la carga eléctrica durante inflación, obteniendo campos suficientemente intensos como para no necesitar amplificación posterior.

2.3 Cotas observacionales a los campos magnéticos primordiales

Las principales cotas observacionales a la intensidad de un campo magnético primordial provienen de las mediciones de las anisotropías en la radiación cósmica de fondo y de los resultados de nucleosíntesis primordial. Determinar estas cotas es sumamente importante a la hora de decidir entre los posibles mecanismos de producción de campo magnético en el universo temprano.

2.3.1 Cotas a partir de las anisotropías de la radiación cósmica de fondo

Efecto de un campo magnético homogéneo

A partir de la teoría general de la relatividad, se sabe que el campo electromagnético puede afectar la geometría del universo, dado que el tensor energía momento del mismo actúa como fuente en las ecuaciones de Einstein. En el caso de un campo electromagnético homogéneo ese tensor es anisótropo: hay un término de tensión (presión negativa) en la dirección del campo y términos de presión en las direcciones ortogonales. Se sabe que las tensiones aceleran la expansión y las presiones la desaceleran. Como consecuencia la expansión del universo será anisótropa si en él hay un campo magnético homogéneo y suficientemente intenso. Zel'dovich y Novikov [35] plantearon un modelo general de universo con campo magnético uniforme, con simetría axial, y encontraron que el cociente entre la energía magnética y la de la radiación de fondo, $r \equiv \rho_B/\rho_\gamma$, no permanece constante durante la época del universo dominada por la radiación, sino que decae logarítmicamente. La anisotropía resultante en la radiación de fondo, $\delta T/T$, producida por un campo $B \sim 10^{-9} - 10^{-10}\ G$ sería $\delta T/T \leq 10^{-6}$.

Este análisis previo fue revisado recientemente por Barrow, Ferreira y Silk [36], quienes basados en los datos sobre las anisotropías de la radiación de fondo tomados por el satélite COBE ($\delta T/T \sim 10^{-5}$ para escalas angulares de unos pocos grados) encontraron que la intensidad de un campo magnético homogéneo hoy debe ser $B < 3.5 \times 10^{-9}\ G$. De esto se deduce que los datos de COBE son compatibles con un origen primordial del campo magnético galáctico, aún sin invocar amplificación por efecto dínamo.

Efecto sobre los picos acústicos

A escalas pequeñas (es decir menores que el radio de Hubble en la superficie de último scattering) un campo magnético primordial puede afectar tanto la temperatura de la radiación de fondo como su polarización. Los procesos que pueden producir estas anisotropías son causales y por lo tanto no están relacionados con la estructura a gran escala del universo.

Las fluctuaciones primordiales en la densidad de energía que entran al horizonte tiempo antes que el último scatering, producen oscilaciones acústicas en el plasma primordial. Estas oscilaciones distorsionan el espectro primordial de anisotropías mediante varios efectos [37]: oscilaciones acústicas, efecto Doppler, corrimiento al rojo gravitatorio (efecto Sachs-Wolfe).

En presencia de campo magnético la naturaleza de las oscilaciones acústicas se modifica radicalmente, apareciendo tres clases de ellas: magnetosónicas rápidas, magnetosónicas lentas y de Alfvén [38]. En el límite de campo magnético débil, las magnetosónicas rápidas son las ondas sonoras ordinarias, es decir ondas longitudinales cuya velocidad de propagación es $c_+^2 \sim c_s^2 + v_A^2 \sin^2\theta$, donde θ es el ángulo entre $\vec{k}$ y $\vec{B}_0$ y $v_A = B_0/\sqrt{4\pi\,(\rho + p)} \ll c_s$. Estas ondas involucran fluctuaciones en la velocidad, densidad, campo magnético y campo gravitatorio y son básicamente longitudinales. Las magnetosónicas lentas se propagan con velocidad $c_-^2 \sim v_A^2 \cos^2\theta$, involucran fluctuaciones de la densidad y velocidad, pero estas últimas pueden ser tanto longitudinales como transversales. Finalmente para las ondas de Alfven tanto las fluctuaciones en la velocidad como en el campo magnético

están en un plano perpendicular al que contiene a $\vec{k}$ y $\vec{B}$, son ondas puramente rotacionales (no involucran fluctuaciones en la densidad) y están polarizadas linealmente.

Los posibles efectos de las ondas MHD fueron investigados por Adams y colaboradores [39]. En el caso de ondas magnetosónicas encontraron que en presencia de un campo homogéneo a una escala mayor que la escala de la fluctuación considerada, el primer pico acústico se desplaza hacia los multipolos menores y su altura disminuye. Para que las anisotropías en la radiación cósmica de fondo producidas por este efecto estén dentro de los límites detectados por los satélites MAP y PLANCK los autores mencionados encontraron que la intensidad del campo magnético de fondo debe ser $B_0 \leq 5 \times 10^{-8}\ G$.

Subramanian y Barrow [40] por una parte y Durrer y col. [41] por la otra estudiaron los efectos de una onda de Alfven sobre las anisotropías de la radiación de fondo, llegando a resultados similares. Según lo predicho por Adams y col. [39] las ondas de Alfven producirían picos Doppler con una periodicidad determinada por la velocidad de Alfven. Dado que para intensidades razonables de campo magnético, $v_A \ll 1$ estos picos serían muy difíciles de detectar. Durrer y col. argumentaron que esas ondas podrían dejar una marca más interesante desde el punto de vista cosmológico en las propiedades estadísticas de la radiación de fondo, más específicamente inducirían una correlación entre las amplitudes del desarrollo multipolar $a_{l+1,m}$ y $a_{l-1,m}$. Asumiendo un campo magnético de fondo uniforme, ellos encontraron que esas correlaciones serían compatibles con las observaciones realizadas por COBE durante los cuatro años, si la intensidad de campo magnético es tal que $B_0 \leq (2-7) \times 10^{-9}\ G$.

2.3.2 Cotas a partir de nucleosíntesis primordial

Las cotas a la intensidad de un campo magnético primordial se obtienen considerando los efectos que un tal campo tendría sobre distintos ingredientes y condiciones necesarios para que se produzca nucleosíntesis. Estos efectos serían

- **Efectos sobre la razón de conversión neutrón-protón:** Las reacciones responsables del equilibrio químico entre neutrones y protones en el universo temprano son los procesos débiles, que intercambian neutrones y protones liberando o absorbiendo electrones, positrones y neutrinos, según sea la transición [42]. El efecto principal de un campo magnético fuerte es aumentar la razón de conversión de neutrones en protones, lo que se traduce en que la fracción de neutrones a protones, n/p se congela a una temperatura menor y por lo tanto se produciría menos ^4He. Pero este efecto sería significativo si $B \gg m_p^2/e$ en la época en que se produce nucleosíntesis donde m_p es la masa del protón y e la carga del electrón, que equivale a $B \gg 10^{17}\ G$. Otro efecto son las correcciones a la diferencia entre las masas del neutrón y del protón, que resultan de considerar el efecto de un campo magnético débil en las interacciones de QCD [43], encontrándose que son despreciables.

- **Efectos sobre la expansión y enfriamiento del universo:** La temperatura a la cual la razón $(n/p)_{eq}$ se congela está determinada por la competencia entre la reacción débil mencionada en la subsección anterior y la expansión del universo [42]: se alcanza el equilibrio cuando $\Gamma_{n\to p}(T_F) \sim H(T_F)$ donde H es la constante de Hubble. Como H es proporcional a $\rho_{tot}^{1/2}$, donde $\rho_{tot} = \rho_{em}(t,B) + \rho_\nu + \rho_B$ es

la densidad de energía del universo y $\rho_{em}(t, B)$ es la densidad de energía en las componentes relativistas usuales (fotones, electrones y positrones), ρ_ν es la densidad de energía en neutrinos y ρ_B la densidad de energía en campo magnético estático. La presencia de un B incrementa esta densidad y por ende H. Esto significa por una parte, que una densidad de energía magnética alta haría que la razón n/p se congele antes, con lo cual la abundancia de ^4He sería mayor. Pero para las intensidades de campo magnético producidas por los mecanismos mencionados, este efecto es despreciable [24]. Otro efecto sería el de corregir el número efectivo de especies de neutrinos no masivos, a partir del valor de la densidad de energía total y de la de las componentes relativistas usuales.

- **Efectos sobre la termodinámica de los electrones:** La presencia de un campo magnético en el universo temprano cambia el volumen del espacio de fases de los electrones y positrones debido a que las componentes del momento de ellos, perpendiculares a la dirección de B se vuelven discretas (niveles de Landau) [44]. Esto hace que la densidad de energía, la densidad numérica y la presión del gas de electrones y positrones aumente respecto de sus valores sin campo magnético [24]. Este aumento en la densidad de energía se hace a expensas de los fotones de la componente relativista usual (un campo magnético estático no decae) que transfieren energía al nivel de Landau más bajo del gas de leptones. Kernan y col. [24] mostraron que esto significa una demora en la aniquilación de electrones y protones y por lo tanto una demora en el sobrecalentamiento de los fotones de la radiación de fondo respecto de los neutrinos. Esta demora también induce un incremento en la razón barión-fotón, η lo que produciría abundancias residuales menores de ^3He y D.

Tomando en cuenta estos efectos, y asumiendo además que el campo magnético no anisotropiza la expansión, que el número efectivo de especies de neutrinos es tres, que el potencial químico de estos últimos es despreciable y que las constantes fundamentales no variaron en el tiempo, Cheng y col. [45] y Grasso y Rubinstein [24] obtuvieron que al momento de producirse nucleosíntesis la máxima intensidad de campo magnético está dada por $B\left(T = 10^9\ K\right) \leq 1 \times 10^{13}\ G$, que hoy equivaldría a $B_0 \leq 7 \times 10^{-5}\ G$, en una escala del tamaño del horizonte de partículas al momento de producirse nucleosíntesis. A escala galáctica (1 Mpc) la cota que se obtiene es $B_0 \leq 7 \times 10^{-9}\ G$.

Es interesante notar que, a pesar de que la primera prueba testea campos cuyas escalas de coherencia son mucho mayores que el horizonte de partícula durante BBN, y la segunda en principio lo hace en todas las escalas, las cotas obtenidas son similares.

Capítulo 3

Generación de campos magnéticos por creación cosmológica de partículas

De acuerdo con lo explicado en la Introducción a esta tésis y en el primer capítulo de la misma, para que un mecanismo de inducción de campo magnético primordial pueda generar campos de intensidad relevante en astrofísica, debe basarse en la ruptura de la invariancia conforme del campo electromagnético.

Una de las formas más eficaces de romper dicha invariancia es acoplar el campo de gauge a otro campo cuya evolución no posea la invariancia mencionada. Típicamente esto implica considerar una corriente eléctrica que sea fuente del campo electromagnético. El problema entonces se traslada a encontrar un mecanismo de generación de corriente eléctrica en el universo temprano.

Si los campos magnéticos primordiales han de tener alguna ingerencia en la generación de los que se observan en galaxias y cúmulos de galaxias, una propiedad que deben poseer es la de ser coherentes en la escala de la estructura de interés. Por ejemplo para una galaxia, ese campo debe ser uniforme en una distancia $\lambda \simeq 100$ kpc al momento del desacople de la radiación y la materia, es decir cuando la estructura mencionada comienza a formarse.

Por último hay un tercer ingrediente fundamental para la evolución y determinación de la intensidad final del campo magnético, que es la conductividad eléctrica del plasma primordial en el cual se propaga. Según sea su valor, el campo primordial puede ser dramáticamente atenuado por efecto Joule

En este capítulo proponemos y describimos un nuevo mecanismo de generación de campos magnéticos en el universo temprano basado en la producción de corrientes estocásticas debidas a creación cosmológica de partículas cargadas [46]. La idea básica del mecanismo es la siguiente: durante la etapa inflacionaria del universo asumimos la presencia de un campo cargado, que puede ser escalar o fermiónico, en su estado cuántico fundamental. Cuando se produce la transición a la época dominada por la radiación, la variación en el potencial gravitatorio cambia el estado de vacío de la teoría y como consecuencia, el estado

del campo que era percibido como vacío al final de inflación, es detectado luego de ella como estado de multipartícula. El número de partículas creadas depende del acoplamiento [27] del campo de materia con la curvatura escalar del campo gravitatorio. En este sentido, de los acoplamientos tratados usualmente en la literatura consideraremos sólo el caso de acoplamiento mínimo.

Para un campo cargado, el número de cargas positivas creadas es igual al de negativas, con lo cual el valor medio de la corriente es cero, pero no necesariamente su varianza (o desviación cuadrática media) construída a partir de las fluctuaciones cuánticas y estocásticas respecto del valor medio.

Estas fluctuaciones pueden ser caracterizadas dando el valor de expectación de su anticonmutador, o función de dos puntos de Hadamard. El campo electromagnético inducido por estas fluctuaciones posee las mismas propiedades estocásticas que sus fuentes, y por lo tanto también debe ser estimado a partir de una función de Hadamard. En definitiva la evolución del campo magnético inducido por nuestras corrientes estocásticas estará dada por las ecuaciones de Maxwel para la función de Hadamard del campo magnético, cuya fuente es la correspondiente función simétrica para las corrientes.

Como el fenómeno de creación gravitatoria de partículas no es causal, las corrientes eléctricas están presentes en todas las escalas, inclusive en aquellas mayores que el horizonte de partícula. En consecuencia los campos inducidos por nuestro mecanismo poseen la coherencia necesaria para explicar las características de los que se observan en las galaxias.

La disipación del campo magnético por efecto Joule será tenida en cuenta incorporando a las ecuaciones de Maxwell una expresión fenomenológica de la conductividad.

El spin de las partículas es un ingrediente crucial en la eficacia del mecanismo: para campos escalares mínimamente acoplados a la curvatura, el número de partículas creadas es muy grande, en particular en la porción infrarroja del espectro. Para campos fermiónicos en cambio la situación es la inversa: debido a que para ellos los acoplamientos mínimo y conforme coinciden, el número de partículas creadas es muy pequeño y por lo tanto el campo inducido por ellas muy débil.

El grueso de este capítulo está dedicado a investigar la inducción de campo magnético por parte de cargas escalares. En la última sección mostramos que el campo generado por cargas fermiónicas es efectivamente muy débil.

La signatura elegida para el espacio-tiempo es $(-,+,+,+)$. Trabajamos en unidades naturales, esto es $c = 1$, $\hbar = 1$ con lo cual las distintas cantidades se miden en

$$\begin{aligned} \textit{longitud} = \textit{tiempo} &= (\textit{energía})^{-1} \\ \textit{intensidad de campo magnético} &= (\textit{energía})^{2} \end{aligned}$$

3.1 Electrodinámica escalar en un universo en expansión

En esta sección introducimos la acción para un campo escalar cargado acoplado a un campo electromagnético, en un universo de Friedmann - Robertson - Walker espacialmente plano, y a partir de ella obtenemos las ecuaciones de evolución para los campos.

La acción para un campo escalar cargado y acoplado al campo electromagnético, en un universo de Friedmann Robertson Walker está dada por

$$S = -\int d^4x\mathcal{L}\left[g^{\mu\nu}, \Phi, \Phi^\dagger, A_\mu\right] \tag{3.1}$$

donde $\mathcal{L}$ es el Lagrangiano

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \sqrt{-g}\left\{g^{\mu\nu}\left(\partial_\mu - ieA_\mu\right)\Phi\left(\partial_\nu + ieA_\nu\right)\Phi^\dagger\right. \\ &+ \left.\left(m^2 + \xi R\right)\Phi\Phi^\dagger + \frac{1}{4}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\right\}\end{aligned} \tag{3.2}$$

donde $g^{\mu\nu}$ es la métrica del espacio-tiempo, $\sqrt{-g}$ la raíz del determinante de la métrica, A_μ el potencial electromagnético del espacio de Minkowski, e la carga eléctrica, m la masa del campo escalar, R la curvatura escalar del espacio-tiempo y ξ la constante de acoplamiento de la misma con el campo escalar. $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es el tensor intensidad de campo electromagnético. El signo menos en la ecuación (3.1) tiene que ver con la signatura elegida y hace que el término cinético de la acción sea positivo.

Como el mecanismo de generación de campo magnético que estamos estudiando tiene lugar después de la expansión inflacionaria, podemos considerar tranquilamente que nuestro universo en expansión es un Friedmann Robertson Walker espacialmente plano. En este caso el tensor métrico es $g_{\mu\nu} = diag\left(-1, a^2(t), a^2(t), a^2(t)\right)$. Debido a las propiedades de invariancia conforme del campo electromagnético es conveniente trabajar en tiempo conforme, definido por

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)} \tag{3.3}$$

En este caso el tensor métrico está dado por $g_{\mu\nu} = a^2(\eta)\,\eta_{\mu\nu}$ siendo $\eta_{\mu\nu}$ el tensor métrico del espacio-tiempo de Minkowski, y su determinante $\sqrt{-g} = a^4(\eta)$. [27]

Las ecuaciones de evolución de los campos escalar y elctromagnético son las de Euler Lagrange

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left[\partial_\mu\Phi\right]} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} = 0, \quad \partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left[\partial_\nu A_\mu\right]} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} = 0 \tag{3.4}$$

Explícitamente tenemos

$$\begin{aligned}2a\dot{a}\left[\partial_0\Phi^\dagger + ieA_0\Phi^\dagger\right] + iea^2\partial_0 A_0\Phi^\dagger + 2iea^2 A_0\partial_0\Phi^\dagger \\ a^2\partial_0^2\Phi^\dagger - a^2\eta^{ij}\left[\partial_i\partial_j\Phi^\dagger + ie\partial_i A_j\Phi^\dagger + 2ieA_j\partial_i\Phi^\dagger\right] \\ +a^4\left[\left(m^2 + \xi R\right) + e^2a^{-2}\eta^{\mu\nu}A_\nu A_\mu\right]\Phi^\dagger &= 0\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$
\begin{aligned}
2a\dot{a}\left[\partial_0\Phi - ieA_0\Phi\right] - iea^2\partial_0 A_0\Phi - 2iea^2 A_0\partial_0\Phi \\
a^2\partial_0^2\Phi - a^2\eta^{ij}\left[\partial_i\partial_j\Phi - ie\partial_i A_j\Phi - 2ieA_j\partial_i\Phi\right] \\
+a^4\left[\left(m^2+\xi R\right) + e^2a^{-2}\eta^{\mu\nu}A_\nu A_\mu\right]\Phi &= 0
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

$$
\left[\partial_\nu\partial^\nu A_\mu - \partial_v\partial^\nu A_\nu\right] + a^2\eta^{\mu\nu}ie\left[\Phi\partial_\nu\Phi^\dagger - \partial_\nu\Phi\Phi^\dagger\right] - 2e^2a^2\eta^{\mu\beta}A_\beta\Phi\Phi^\dagger = 0 \tag{3.7}
$$

Transformando los campos según

$$
\Phi \to \frac{\varphi}{a}, \qquad A_\mu \to A_\mu. \qquad A^\mu \to \frac{A^\mu}{a^2} \tag{3.8}
$$

(notar la posición del índice en el potencial electromagnético) las ecuaciones anteriores quedan

$$
\begin{aligned}
\ddot{\varphi}^\dagger + 2ieA_0\dot{\varphi}^\dagger - \eta^{ij}\left[\partial_i\partial_j\varphi^\dagger + ie\partial_i A_j\varphi^\dagger + 2ieA_j\partial_i\varphi^\dagger\right] \\
+\left[a^2\left(m^2+\xi R\right) - \frac{\ddot{a}}{a} + ie\dot{A}_0 + e^2\eta^{\mu\nu}A_\nu A_\mu\right]\varphi^\dagger &= 0
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

$$
\begin{aligned}
\ddot{\varphi} - 2ieA_0\dot{\varphi} - \eta^{ij}\left[\partial_i\partial_j\varphi^\dagger - ie\partial_i A_j\varphi - 2ieA_j\partial_i\varphi\right] \\
+\left[a^2\left(m^2+\xi R\right) - \frac{\ddot{a}}{a} - ie\dot{A}_0 + e^2\eta^{\mu\nu}A_\nu A_\mu\right]\varphi &= 0
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Eligiendo el gauge temporal, $A_0 = 0$ nos queda

$$
\begin{aligned}
\ddot{\varphi}^\dagger - \nabla^2\varphi^\dagger + a^2\left(m^2 + \xi R - \frac{\ddot{a}}{a^3}\right)\varphi^\dagger \\
+\left[ie\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right)\varphi^\dagger + 2ie\left(\vec{A}.\vec{\nabla}\right)\varphi^\dagger\right] + e^2\left|\vec{A}\right|^2\varphi^\dagger &= 0
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

$$
\begin{aligned}
\ddot{\varphi} - \nabla^2\varphi + a^2\left(m^2 + \xi R - \frac{\ddot{a}}{a^3}\right)\varphi \\
+\left[ie\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right)\varphi - 2ie\left(\vec{A}.\vec{\nabla}\right)\varphi\right] + e^2\left|\vec{A}\right|^2\varphi &= 0
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

y la ecuación para el campo electromagnético

$$
\left[\partial_0^2 - \nabla^2\right]A_i + \partial_i\partial_j A^j = \eta^{ij}ie\left[\varphi\partial_j\varphi^\dagger - \varphi^\dagger\partial_j\varphi\right] - 2e^2\eta^{ij}A_j\varphi\varphi^\dagger \tag{3.13}
$$

3.2 Aproximación fenomenológica estocástica

La creación cosmológica de partículas es un fenómeno estocástico.

En el caso de que las partículas posean carga eléctrica, eso significa que el valor medio de las corrientes será nulo. Sin embargo fluctuaciones cuánticas y estadísticas pueden combinarse para dar una desviación cuadrática media no nula de esas corrientes.

Desde el punto de vista fenomenológico, la fuente en la ecuación para el campo electromagnético puede ser sustituída por una corriente estocástica gaussiana [47]. El objetivo de los cálculos de este capítulo es estimar el campo magnético producido por esta fuente estocástica cuya estadística, bajo la hipótesis de gaussianidad, queda determinada dando la función de correlación de dos puntos simétrica, o función de Hadamard.

En una primera aproximación y suponiendo que el campo magnético inducido es débil calcularemos esta función de correlación en ausencia de un campo electromagnético macroscópico. Esto significa que la fuente de la ecuación para el campo electromagnético es simplemente la corriente

$$j^i = ie\eta^{ij}\left[\varphi\partial_j\varphi^\dagger - \varphi^\dagger\partial_j\varphi\right] \tag{3.14}$$

Como nuestro objetivo final es estimar sólo el campo magnético inducido, tomamos rotor de la ecuación obteniendo

$$\left[\partial_0^2 - \nabla^2\right]\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{j} \tag{3.15}$$

Para estimar los efectos de la conductividad asumimos la validez de la ley de Ohm, $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ lo cual agrega a la ecuación anterior un término disipativo, que en espacio-tiempo curvo es

$$\left[\partial_\eta^2 - \nabla^2 + a(\eta)\,\sigma(\eta)\,\partial_\eta\right]\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{j} \tag{3.16}$$

Como explicamos antes, la estadística de las fluctuaciones está dada por su función de Hadamard, que a su vez determina la estadística del campo inducido.

3.2.1 Cálculo de la función de dos puntos de Hadamard

Como dijimos, las propiedades del estado de nuestro sistema cuántico estocástico están fijadas por la función de correlación simétrica de dos puntos, o función de Hadamard. En el problema que estamos estudiando, esa función es el anticonmutador de los rotores de dos corrientes. En términos de las componentes escribimos

$$N_{ii'}\left[(\eta,\vec{r}),(\eta',\vec{r}')\right] \equiv \left\langle\left\{\left(\vec{\nabla}\times\vec{j}\right)_i(\eta,\vec{r}),\left(\vec{\nabla}\times\vec{j}\right)_{i'}(\eta',\vec{r}')\right\}\right\rangle \tag{3.17}$$

que de ahora en más llamamo *núcleo de ruido*. Escribiendo el campo escalar en términos de dos campos reales, $\varphi(\eta,\vec{r}) = \left[\varphi_1(\eta,\vec{r}) + i\varphi_2(\eta,\vec{r})\right]/\sqrt{2}$, la corriente espacial es

$$j^i = e\eta^{ij}\left[\varphi_1\partial_j\varphi_2 - \varphi_2\partial_j\varphi_1\right] \tag{3.18}$$

con lo cual

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{j}\right)_i = 2e\left(\vec{\nabla}\varphi_1\right)\times\left(\vec{\nabla}\varphi_2\right) \tag{3.19}$$

Considerando que φ_1 y φ_2 conmutan podemos escribir el núcleo de ruido como

$$N_{ii'}\left[(\eta,\vec{r}),(\eta',\vec{r}')\right] = 4e^2\epsilon^{ijl}\epsilon^{i'j'l'}\left[\partial^2_{jj'}G^+\partial^2_{ll'}G^+ + \partial^2_{jj'}G^-\partial^2_{ll'}G^-\right] \tag{3.20}$$

donde hemos introducido los propagadores de frecuencia positiva, G^+, y frecuencia negativa, G^-, cuyas definiciones son

$$G^+ \equiv \left\langle\varphi(\eta,\vec{r})\,\varphi(\eta',\vec{r}')\right\rangle = \int\frac{d^3\kappa}{(2\pi)^{3/2}}G^+_\kappa(\eta,\eta')\exp\left[i\vec{\kappa}.\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)\right] \tag{3.21}$$

$$G^- \equiv \left\langle\varphi(\eta',\vec{r}')\,\varphi(\eta,\vec{r})\right\rangle = \int\frac{d^3\kappa}{(2\pi)^{3/2}}G^-_\kappa(\eta,\eta')\exp\left[i\vec{\kappa}.\left(\vec{r}'-\vec{r}\right)\right] \tag{3.22}$$

$$G^+(\kappa,\eta,\eta') = \varphi_\kappa(\eta)\,\varphi^*_\kappa(\eta') = G^-(\kappa,\eta',\eta) \tag{3.23}$$

siendo $\varphi_\kappa(\eta)$ los modos del campo escalar. Usando los desarrollos de Fourier de los propagadores el núcleo de ruido se expresa

$$\begin{aligned} N_{ii'}\left[(\eta,\vec{r}),(\eta',\vec{r}')\right] &= 4e^2\int\frac{d^3\kappa d^3\kappa'}{(2\pi)^3}\left(\vec{\kappa}\times\vec{\kappa}'\right)_i\left(\vec{\kappa}\times\vec{\kappa}'\right)_{i'}G^+(\kappa,\eta,\eta')\,G^+(\kappa',\eta,\eta') \\ &\quad\times\exp\left[i\left(\vec{\kappa}+\vec{\kappa}'\right).\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)\right] + \left(\eta,\vec{r}\leftrightarrow\eta',\vec{r}'\right) \end{aligned} \tag{3.24}$$

A partir de ahora es conveniente trabajar con magnitudes adimensionales. Considerando como dimensión básica la energía, usamos como *escala fundamental la constante de Hubble durante inflación*, H. Así tenemos que

$$\vec{r} = H^{-1}\bar{y},\quad \eta = H^{-1}\tau,\quad \kappa = Hk,\quad \varphi(\eta,\vec{r}) = H\psi(\tau,\bar{y}) \tag{3.25}$$

3.3 Creación de partículas

Como dijéramos en la introducción, al cambiar la geometría del universo el estado cuántico de los campos de materia cambia, hecho que se traduce en creación de partículas. Los operadores de creación y destrucción de los nuevos estados pueden escribirse como combinación lineal de los operadores en los viejos estados, siendo los coeficientes de esa combinación los coeficientes de Bogoliubov [27]. Ellos pueden ser determinados pidiendo que los modos del campo y sus derivadas temporales primeras sean continuos en el momento de la transición.

Por otra parte, la propia transición del universo de una etapa a otra debe realizarse en forma suficientemente suave como para que no haya sobreproducción de partículas. En el caso de un universo de Friedmann-Robertson-Walker, las condiciones mínimas que deben cumplirse son que el factor de expansión del universo y su primer derivada temporal sean continuas.

En tiempo conforme adimensional definido en la ecuación (3.25), los factores de escala del universo durante inflación y durante radiación fueron calculados en el Apéndice A, y están dados por

$$a_I(\tau) = \frac{1}{1-\tau} \tag{3.26}$$

$$a_\gamma(\tau) = (1+\tau) \tag{3.27}$$

donde además impusimos la condición de normalización $a_I(0) = a_\gamma(0) = 1$.

Como dijéramos en la introducción a esta sección, luego de producirse la transición inflación-radiación, el estado del campo escalar puede expresarse como combinación lineal de los autoestados en la nueva etapa. En términos de los modos del campo escalar esto se expresa

$$\psi_k(\tau) \sim \alpha_k \psi_k^\gamma(\tau) + \beta_k \psi_k^{\gamma *}(\tau) \tag{3.28}$$

donde ψ_k^γ son los modos de frecuencia positiva del campo escalar durante radiación, α_k y β_k los coeficientes de Bogoliubov. En la aproximación de campo inducido débil, los modos del campo escalar son solución de la ecuación de Klein Gordon

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + k^2 + \frac{m^2}{H^2} + (6\xi - 1)\frac{\ddot{a}}{a}\right]\psi_k(\tau) = 0 \tag{3.29}$$

Esta ecuación fue resuelta en el Apéndice A para las etapas del universo estudiadas, y sus soluciones de frecuencia positiva son

$$\psi_k^I(\tau) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-\tau}\,H_\nu^{(1)}[k(1-\tau)] \tag{3.30}$$

para inflación, y

$$\psi_k^\gamma(\tau) \sim \sqrt{\frac{H}{2m(1+\tau)}}\exp\left[-i\frac{m}{2H}(1+\tau)^2\right] \tag{3.31}$$

para radiación. Los coeficientes de Bogoliubov también fueron calculados en el Apéndice mencionado. Reteniendo los términos que dan la contribución mayor a los núcleos de ruido, su expresión es

$$\alpha_k^{I\gamma} \simeq -\sqrt{\pi}\left(\frac{H}{m}\right)^{1/4}\frac{k^{-3/2}}{2\Gamma(3/4)} \equiv \alpha_0 k^{-3/2} \tag{3.32}$$

y

$$\beta_k^{I\gamma} \simeq \sqrt{\pi}\left(\frac{H}{m}\right)^{1/4} \frac{k^{-3/2}}{2\Gamma(3/4)} \equiv \beta_0 k^{-3/2} \tag{3.33}$$

El valor no nulo de β_k refleja creación de partículas a partir del campo gravitatorio y no debida al decaimiento del inflatón. El número de ocupación para modos de longitud de onda larga diverge como k^{-3}, un comportamiento que excede la correspondiente forma k^{-1} de Raleigh - Jeans producida por el proceso de recalentamiento del universo. Este exceso de ruido resulta en una intensificación del campo magnético muy por encima del producido por las fluctuaciones de equilibrio. Cuando la escala correspondiente entra al horizonte se produce la aniquilación de partículas y antipartículas, desapareciendo la correspondiente fluctuación. La divergencia logarítimica en el número total de partículas creadas hasta un $k_{\max}$ puede ser removida con un adecuado cut-off infrarrojo, por ejemplo el correspondiente al horizonte de partícula actual.

3.3.1 Núcleo de ruido debido a la creación de partículas

En esta sección hallamos la forma general del núcleo $N_{ii'}\left[(\tau,\vec{y}),(\tau',\vec{y}')\right]$ que surge de reemplazar los propagadores de frecuencia positiva y negativa en términos de combinaciones lineales de modos del campo escalar correspondientes a la época en la cual se propaga el campo magnético.

Haciendo entonces el reemplazo mencionado, el núcleo de ruido puede expresarse [46]

$$\begin{aligned} N_{ii'}\left[(\tau,\vec{y}),(\tau',\vec{y}')\right] &= N^0_{ii'}\left[(\tau,\vec{y}),(\tau',\vec{y}')\right] \\ &+ N^1_{ii'}\left[(\tau,\vec{y}),(\tau',\vec{y}')\right] \\ &+ N^2_{ii'}\left[(\tau,\vec{y}),(\tau',\vec{y}')\right] \end{aligned} \tag{3.34}$$

El primer término es el ruido que está presente en ausencia de creación de partículas, y por lo tanto no da lugar a una corriente eléctrica efectiva. Los otros dos términos son la contribución de las partículas creadas y su forma es

$$\begin{aligned} N^1_{ii'}\left[(\tau,\vec{y}),(\tau',\vec{y}')\right] \rightarrow\ & 4e^2H^8\int\frac{d^3kd^3k'}{(2\pi)^3}\left(\vec{k}\times\vec{k}'\right)_i\left(\vec{k}\times\vec{k}'\right)_{i'}e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot(\vec{y}-\vec{y}')} \\ & \times G_{1k}\left(\tau,\tau'\right)\delta G_{1k'}\left(\tau,\tau'\right) \end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned} N^2_{ii'}\left[(\tau,\vec{y}),(\tau',\vec{y}')\right] \rightarrow\ & e^2H^8\int\frac{d^3kd^3k'}{(2\pi)^3}\left(\vec{k}\times\vec{k}'\right)_i\left(\vec{k}\times\vec{k}'\right)_{i'}e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot(\vec{y}-\vec{y}')} \\ & \times\delta G_{1k}\left(\tau,\tau'\right)\delta G_{1k'}\left(\tau,\tau'\right) \end{aligned} \tag{3.36}$$

donde

$$G_{1k}\left(\tau,\tau'\right) = G^+_k\left(\tau,\tau'\right) + G^-_k\left(\tau,\tau'\right) = \frac{\cos\Omega_k\left(\tau,\tau'\right)}{\sqrt{\omega_k\left(\tau\right)\omega_k\left(\tau'\right)}} \tag{3.37}$$

con $\Omega_k(\tau,\tau') = \Omega_k(\tau) - \Omega_k(\tau')$, $\Omega_k(\tau) = \int^\tau \omega_k(\tau")\, d\tau"$,

$$\omega_k(\tau) \simeq \sqrt{k^2 + \frac{m^2}{H^2} a^2(\tau)} \tag{3.38}$$

y

$$\delta G_{1k}(\tau,\tau') = 2\alpha_k \beta_k^* \psi_k^\gamma(\tau)\, \psi_k^\gamma(\tau') + 2\alpha_k^* \beta_k \psi_k^{\gamma *}(\tau)\, \psi_k^{\gamma *}(\tau') + 2|\beta_k|^2 G_{1k}(\tau,\tau') \tag{3.39}$$

3.4 Evaluación del campo magnético

En las secciones anteriores desarrollamos y presentamos las herramientas básicas para calcular el campo magnético inducido por corrientes eléctricas estocásticas. En esta sección llevaremos a cabo el cálculo de la intensidad de dicho campo, considerando que debe ser coherente sobre una escala λ y que sufre disipación debido a la conductividad del plasma primordial en el que se propaga.

A partir del núcleo de ruido obtenemos la función de correlación del campo magnético inducido como

$$\begin{aligned}
\left\langle B_i(\tau_0,\vec{y}_0)\, B_{i'}(\tau_0',\vec{y}_0') \right\rangle &= H^{-4} \int \frac{d\tau d^3\vec{y}}{(2\pi)^2} \frac{d\tau' d^3\vec{y}'}{(2\pi)^2} \\
&\times D^{ret}_{|\vec{k}+\vec{k}'|}(\tau_0,\vec{y}_0,\tau,\vec{y})\, D^{ret}_{|\vec{k}+\vec{k}'|}(\tau_0',\vec{y}_0',\tau',\vec{y}') \\
&\times \left\{ N^1_{ii'}\left[(\tau,\vec{y}),(\tau',\vec{y}')\right] + N^2_{ii'}\left[(\tau,\vec{y}),(\tau',\vec{y}')\right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.40}$$

donde $D^{ret}(\tau_0,\vec{y}_0,\tau,\vec{y})$ son los propagadores retardados de la ecuación de Maxwell (??). Transformando Fourier la parte espacial de los propagadores causales la expresión anterior queda

$$\begin{aligned}
&\left\langle B_i(\tau_0,\vec{y}_0)\, B_{i'}(\tau_0',\vec{y}_0') \right\rangle = e^2 H^4 \int d\tau d^3\vec{y} d\tau' d^3\vec{y}' \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3} e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot(\vec{y}-\vec{y}')} \\
&\times \left(\vec{k}\times\vec{k}'\right)_i \left(\vec{k}\times\vec{k}'\right)_{i'} D^{ret}_{|\vec{k}+\vec{k}'|}(\tau_0,\tau)\, D^{ret}_{|\vec{k}+\vec{k}'|}(\tau_0',\tau') \\
&\times \left\{ 4G_{1k}(\tau,\tau')\, \delta G_{1k'}(\tau,\tau') + \delta G_{1k}(\tau,\tau')\, \delta G_{1k'}(\tau,\tau') \right\}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

3.4.1 Filtrado de las altas frecuencias

La traza de la expresión (3.41) da la densidad de energía magnética en todas las escalas. La correspondiente densidad debida a modos que son coherentes sobre una determinada escala espacial λ está dada por la contribución de todos los modos con $k \leq 2\pi/\lambda$ y esta contribución se calcula filtrando los modos con una función ventana. Las más comunes son una gaussiana, o una función cuadrada. Por simplicidad, nosotros elegimos trabajar con

esta última ya que nuestro objetivo es estimar el orden de magnitud del campo magnético inducido por el mecanismo propuesto, más que dar un valor preciso. Es importante notar que el filtrado debe hacerse sobre cada uno de los factores $B_i(\tau_0, \vec{y}_0)$ *antes* de calcular la función de correlación, de lo contrario se estaría calculando la densidad de energía total en un volumen λ^3 lo que daría lugar a una sobreestimación del campo magnético inducido. El efecto de la función ventana en la función de correlación del campo magnético puede realizarse como

$$W_{kk'}(\lambda) = V_\lambda^{-1} \int_{V_\lambda} d^3\vec{y} e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{y}} \tag{3.42}$$

La densidad de energía magnética, coherente en una escala λ está dada por

$$\rho_B = \frac{\langle B_\lambda^2 \rangle(\tau)}{a^4(\tau)} \tag{3.43}$$

donde

$$\begin{aligned} \langle B_\lambda^2 \rangle(\tau_0) &= e^2 H^4 \int^{\tau_0} d\tau \int^{\tau_0} d\tau' \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3} W_{kk'}^2(\lambda) \left|\vec{k} \times \vec{k}'\right|^2 \\ &\times D^{ret}_{\left|\vec{k}+\vec{k}'\right|}(\tau_0, \tau) D^{ret}_{\left|\vec{k}+\vec{k}'\right|}(\tau_0, \tau') \\ &\times \left\{4G_{1k}(\tau, \tau') \delta G_{1k'}(\tau, \tau') + \delta G_{1k}(\tau, \tau') \delta G_{1k'}(\tau, \tau')\right\} \end{aligned} \tag{3.44}$$

Como la función ventana satisface

$$W_{kk'}(\lambda) \approx \begin{cases} 1 & \text{para} \quad \left|\vec{k}+\vec{k}'\right| \lambda \leq 1 \\ 0 & \text{para} \quad \left|\vec{k}+\vec{k}'\right| \lambda > 1 \end{cases} \tag{3.45}$$

elegir una función cuadrada equivale a cortar la integral en los momentos en el límite superior $k_{\max} \simeq 2\pi/\lambda_{\min}$ donde $\lambda_{\min}$ es la escala (adimensional) en la que nos interesa ver la coherencia del campo magnético.

3.4.2 Evaluación de los núcleos de ruido

En esta sección evaluamos explícitamente el núcleo de ruido en términos de los coeficientes de Bogoliubov 3.32 y 3.33 y de las funciones de Hadamard 3.37 y 3.39. En primer lugar tenemos que hacer una disgreción acerca de la propagación de las cargas en un plasma de alta temperatura: A pesar de que el campo escalar no está en equilibrio térmico con la radiación de fondo, la interacción electromagnética con él causa una corrección al valor de la masa del campo, proporcional a la temperatura del baño. Vamos a modelar de manera fenomenológica dicha corrección asumiéndola de la forma

$$m^2 = m_0^2 + cT^2 = m_0^2 + c\frac{T_{rc}^2}{a^2(\tau)} \tag{3.46}$$

En este capítulo no tenemos en cuenta la corrección térmica a la masa para calcular creación de partículas. Esa corrección se debe a un proceso de termalización de las especies, que suponemos fue posterior al proceso de creación de las mismas. Por lo tanto en el límite $k \ll m/H$ vamos a considerar que los coeficientes de Bogoliubov están dados por las ecuaciones (3.32) y (3.33) y los modos del campo escalar por la expresión

$$\psi_k^{\gamma}(\tau) \sim \frac{\exp\left[-i\Omega_k(\tau)\right]}{\sqrt{2\omega_k(\tau)}} \tag{3.47}$$

con $\Omega_k(\tau) = \int^{\tau} d\tau'' \omega(\tau'')$ y

$$\omega_k(\tau) = \sqrt{m_0^2 a^2(\tau)/H^2 + eT_{rc}^2/H^2} \tag{3.48}$$

De la expresión para la densidad de energía del campo magnético, ec. (3.44) vemos que la contribución principal proviene del subnúcleo N_{ii}^2 ya que es cuártico en los coeficientes de Bogoliubov. Efectuando los productos indicados en $\delta G_{1k}(\tau,\tau')\,\delta G_{1k'}(\tau,\tau')$ y reteniendo los términos no oscilantes (ya que ellos no dan lugar a cancelaciones) podemos tomar para una buena estimación del campo

$$\delta G_{1k}(\tau,\tau')\,\delta G_{1k'}(\tau,\tau') \sim \left|\beta_k^{I\gamma}\right|^2 \left|\beta_{k'}^{I\gamma}\right|^2 \frac{1}{\omega_k(\tau)\,\omega_k(\tau')} \tag{3.49}$$

Como las frecuencias no dependen de los números de onda, la integral en los momentos puede realizarse directamente, y así la densidad comoviente de energía magnética puede estimarse como

$$\left\langle B_\lambda^2 \right\rangle(\tau_0) \sim e^2\beta_0^4 H^4 k_{\max}^4 \int^{\tau_0} d\tau \int^{\tau_0} d\tau' \frac{D^{ret}_{|\vec{k}+\vec{k}'|}(\tau_0,\tau)\, D^{ret}_{|\vec{k}+\vec{k}'|}(\tau_0,\tau')}{\omega(\tau)\,\omega(\tau')} \tag{3.50}$$

3.4.3 Conductividad y propagación del campo magnético

En esta sección presentamos y discutimos una expresión fenomenológica para la conductividad eléctrica del plasma primordial en el que se propaga el campo magnético, basada en las consideraciones que al respecto aparecen en la literatura. Con ella hallamos el propagador retardado de un campo magnético de gran longitud de coherencia.

Conductividad eléctrica del plasma primordial

La evolución de un campo electromagnético depende fuertemente de las propiedades conductoras del medio en que se propaga. Cálculos realizados para determinar la conductividad del plasma primordial, tanto a temperaturas alrededor de la escala electrodébil ($T \sim 100$ GeV) [48] como alrededor de la epoca de aniquilación electrón - positrón ($T \sim 1$ MeV) [49] muestran que en general ella es proporcional a la temperatura del plasma

$$\sigma(\tau) \simeq e^{-2}T(\tau) \qquad \text{for } T < 100 \text{ GeV} \tag{3.51}$$

$$\sigma(\tau) \simeq e^{-2}\ln\left(1/e^2\right)T(\tau) \qquad \text{for } T \leq 100 \text{ GeV} \tag{3.52}$$

Como la diferencia entre ambas expresiones es sólo una constante de $\mathcal{O}(1)$, para nuestros propósitos es suficiente considerar una expresión general, digamos 3.51 para estudiar la evolución del campo magnético.

Con el objeto de estudiar la dependencia de la evolución del campo magnético con la conductividad, vamos a asumir que esta última depende del tiempo de una forma general que tomamos como

$$\sigma(\tau) \simeq \sigma(\tau_0)\frac{a^b(\tau_0)}{a^b(\tau)}, \qquad \sigma_0 = e^{-2}T_{rc} \tag{3.53}$$

donde T_{rc}, llamada usualmente *temperatura de recalentamiento*, es la temperatura al comienzo de la época dominada por la radiación. Considerando que ésta comenzó en $\tau_0 = 0$ y que en ese instante $a(0) = 1$, la expresión anterior queda

$$\sigma(\tau) \simeq \frac{\sigma_0}{a^b(\tau)} \tag{3.54}$$

que para $b = 1$ toma la forma usualmente considerada en la literatura.

Propagador retardado de un campo magnético homogéneo

En este parágrafo usamos la expresión para la conductividad (3.54) para hallar el propagador retardado de un campo magnético homogéneo. La ecuación que lo determina es

$$\left[\partial_\tau^2 + k^2 + a(\tau)\frac{\sigma(\tau)}{H}\partial_\tau\right] D_k^{ret}(\tau_0,\tau) = \delta(\tau_0 - \tau) \tag{3.55}$$

Reemplazando la expresión del factor de escala del universo como función del tiempo durante la era de radiación, dado en la ecuación (3.27), en la ecuación 3.55 para el propagador y despreciando k frente a σ_0/H ya que estamos interesados en longitudes de onda larga, obtenemos

$$\left[\partial_\tau^2 + (1+\tau)^{1-b}\frac{\sigma_0}{H}\partial_\tau\right] D_k^{ret}(\tau_0,\tau) = \delta(\tau_0 - \tau) \tag{3.56}$$

La solución es

$$D^{ret}(\tau_0,\tau) = -\exp\left[\frac{\sigma_0}{H}\frac{(1+\tau)^{2-b}}{(2-b)}\right]\int_\tau^{\tau_0} d\tau'' \exp\left[-\frac{\sigma_0}{H}\frac{(1+\tau'')^{2-b}}{(2-b)}\right] \tag{3.57}$$

Para $\tau_0 \gg \tau$ la contribución principal proviene del límite inferior de integración, por lo tanto, evaluando la integral por el método de Laplace [50] obtenemos

$$D^{ret}(\tau_0,\tau) \simeq -\frac{H}{\sigma_0}(1+\tau)^{b-1} \tag{3.58}$$

3.4.4 Cálculo de la intensidad de campo inducida

En esta sección evaluamos el campo magnético inducido por las corrientes estocásticas encontradas en las secciones anteriores, para distintos valores del parámetro b que determina la evolución en el tiempo de la conductividad.

Como el tiempo de observación del campo magnético es muy posterior a su generación, y para ese entonces las corrientes que lo originaron desaparecieron, el límite superior de las integrales temporales en la expresión para la densidad de energía magnética está dado por la vida media de la corriente inducida, $\tau_{1/2}$. En ausencia de expansión, y por lo tanto de horizonte de partícula, la vida media de las corrientes sería del orden de la inversa de la temperatura del plasma en el que se propagan. Al existir expansión y por lo tanto horizontes causales, una fluctuación de escala $\lambda > H^{-1}(\tau)$, donde $H(\tau)$ es la constante de Hubble en el instante τ, permanece congelada hasta que ingresa a la esfera de Hubble. Una vez producido su ingreso, las fluctuaciones decaen por aniquilación partícula - antipartícula. Sin embargo, si la vida media de las partículas escalares es menor que el intervalo de tiempo transcurrido desde su creación hasta su ingreso al horizonte, entonces la vida media de las corrientes coincidiría con la de las partículas. Esta última está determinada por el modelo de partícula considerado.

En las subseccions siguientes evaluamos el campo magnético inducido por las corrientes estocásticas, para dos formas particulares de la conductividad, una es la usual: $b = 1$ que corresponde a un plasma relativista, y la otra $b = 2$ que representaría un plasma no relativista, ya que en para este último la temperatura varía como $T(t) \propto a^{-2}(t)$,

El punto de partida para la evaluación del campo inducido, es la expresión 3.50 para la densidad comoviente de energía del campo magnético. Para estimar el campo inducido en la escala espacial de interés, es conveniente expresar $k_{\max}$ en términos del valor físico actual. El número de onda comoviente. κ_{gal} es el valor de κ_{gal}^{phys} en $\tau = 0$, es decir cuando $a(\tau) = 1$, o sea $\kappa_{gal} = a(\tau_{hoy})\,\kappa_{gal}^{phys}$. A partir de la adimensionalizacion de los modos, tenemos que $k_{gal} = \kappa_{gal}/H = a(\tau_{hoy})\,\kappa_{gal}^{phys}/H$. Por lo tanto la densidad de energía magnética es

$$\left\langle B_\lambda^{phys2} \right\rangle (\tau_0) \equiv \frac{\left\langle B_\lambda^2 \right\rangle (\tau_0)}{a^4(\tau_0)}$$
$$\sim e^2 \frac{H}{m_0} \kappa_{\max}^{phys4} \int^{\tau_0} d\tau \int^{\tau_0} d\tau' \frac{D^{ret}_{\left|\vec{k}+\vec{k}'\right|}(\tau_0,\tau)\, D^{ret}_{\left|\vec{k}+\vec{k}'\right|}(\tau_0,\tau')}{\omega(\tau)\,\omega(\tau')} \tag{3.59}$$

A partir de esta expresión inferimos el valor del campo magnético coherente a escala κ^{-1} en un instante τ_{obs} como

$$B_\lambda(\tau_{obs}) \sim \sqrt{\left\langle B_\lambda^{phys2} \right\rangle (\tau_{obs})} \tag{3.60}$$

Plasma relativista

En este caso, $b = 1$ y el propagador es

$$D_{rel}^{rel}(\tau_0, \tau) \simeq -\frac{H}{\sigma_0} \tag{3.61}$$

Evaluando ahora las integrales temporales en la expresión para la densidad de energía obtenemos

$$\begin{aligned} \langle B_\lambda^2 \rangle (\tau_0) &\sim e^2 \frac{H^3 \kappa_{\max}^{phys\,4}}{\sigma_0^2 m_0} \left[\int^{\tau_{1/2}} \frac{d\tau}{\sqrt{m_0^2 (1+\tau)^2 / H^2 + e T_{rc}^2 / H^2}} \right]^2 \\ &= e^2 \frac{H^4 \kappa_{\max}^{phys\,4}}{\sigma_0^2 m_0^2} \ln^2 \left[2\frac{m}{H} \sqrt{\frac{m_0^2}{H^2}(1+\tau_{1/2})^2 + e\frac{T_{rc}^2}{H^2}} + 2\frac{m_0^2}{H^2}(1+\tau_{1/2}) \right] \end{aligned} \tag{3.62}$$

o sea que la intensidad de campo inducido depende débilmente de la vida media de la corriente. En virtud de esto podemos estimar la densidad de energía magnética hoy como

$$\langle B_\lambda^2 \rangle_{phys} (\tau_0) \sim \frac{\langle B_\lambda^2 \rangle (\tau_0)}{a^4 (\tau_{hoy})} \sim e^2 \frac{H^4}{\sigma_0^2 m_0^2} \kappa_{\max}^{phys\,4} \tag{3.63}$$

de donde podemos estimar el campo magnético coherente sobre esa escala como

$$\langle B_\lambda \rangle_{phys} (\tau_0) \sim e \frac{H^2}{m_0 \sigma_0} \kappa_{gal}^{phys\,2} \tag{3.64}$$

Teníamos que $\sigma_0 = e^{-2} T_{rc}^{\gamma}$. Para el caso de recalentamiento instantáneo que estamos considerando, $T_{rc}^{\gamma} = \sqrt{H m_{pl}}$ siendo m_{pl} la masa de Planck, con lo cual

$$\langle B_\lambda \rangle_{gal} (\tau_0) \sim \frac{e^3 H^{3/2}}{m_0 \sqrt{m_{pl}}} \kappa_{gal}^{phys\,2} \tag{3.65}$$

La escala actual correspondiente a una galaxia es $\lambda_{gal}^{phys} \simeq 1\ Mpc \simeq 1.5 \times 10^{38}\ GeV^{-1}$, con lo cual $\kappa_{gal}^{phys} \simeq (2\pi/1.5) \times 10^{-38}\ GeV$. Considerando $H = 10^{13} GeV$, $m \simeq 100 GeV$, $m_{pl} = 10^{19}\ GeV$, $e^2 \sim 10^{-2}$ y que $1\ GeV^2 \simeq 10^{20}\ Gauss$ obtenemos

$$\langle B_\lambda \rangle_{gal} (\tau_0) \sim 10^{-51}\ Gauss \tag{3.66}$$

que es una intensidad 25 órdenes de magnitud más débil que la necesaria para alimentar el dínamo galáctico.

Plasma no relativista

Si bien esta situación no es realista para el plasma del universo temprano, no es claro que un campo magnético de longitud de coherencia mayor que el horizonte de partícula sea atenuado de la misma forma que otro cuya escala sea menor que el horizonte, y por lo tanto sea afectado por procesos causales. Estudiar la propagación del campo magnético en este plasma nos va a permitir hallar una cota superior a su intensidad.

En este caso, $b = 2$ y el propagador queda [46]

$$D^{ret}_{no-rel}(\tau_0, \tau) \simeq -\frac{H}{\sigma_0}(1+\tau) \tag{3.67}$$

con lo cual la expresión para la densidad de energía del campo magnético es ahora

$$\langle B^2_\lambda \rangle_{phys}(\tau_0) \sim e^2 \frac{H^5}{\sigma_0^2 m_0^3} \kappa^{phys4}_{\max} \left[\sqrt{\frac{m_0^2}{H^2}(1+\tau_{1/2})^2 + e\frac{T^2_{rc}}{H^2}} \right]^2 \tag{3.68}$$

Si consideramos que $\tau_{1/2}$ está dado por el tamaño del horizonte en el momento en que entra en él la escala considerada, tenemos que

$$\tau_{1/2} \sim \frac{1}{k_{gal}} = \frac{H}{a(\tau_{hoy})\,\kappa^{phys}_{\max}} \gg 1 \tag{3.69}$$

En este caso el primer término en la raíz supera al segundo por varios órdenes de magnitud, pudiendo entonces despreciar este último frente al primero. Usando que el factor de escala del universo y la temperatura de la radiación de fondo se relacionan según $T_{rc} = a(\tau_{hoy})\,T_{hoy}$ y la relación entre σ_0 y la temperatura de recalentamiento instantáneo, obtenemos

$$\langle B^2_\lambda \rangle_{phys}(\tau_0) \sim e^2 \frac{H^5}{\sigma_0^2 m_0} \frac{\kappa^{phys2}_{\max}}{a^2(\tau_{hoy})} = e^6 \frac{H^5}{m_0} \kappa^{phys2}_{\max} \frac{T^2_{hoy}}{H^2 m^2_{pl}} \tag{3.70}$$

y tomando los mismos valores usados en el cálculo para un plasma relativista obtenemos

$$\langle B_\lambda \rangle_{phys}(\tau_0) \sim e^3 \sqrt{\frac{H^3}{m_0}} \kappa^{phys}_{\max} \frac{T_{hoy}}{m_{pl}} \sim 10^{-34}\ Gauss \tag{3.71}$$

Si bien en este caso el campo es 15 órdenes de magnitud mayor que en el caso de propagación en un plasma relativista, tampoco resulta ser suficiente para alimentar el dínamo (si éste llegara a ser operativo), aún considerando las cotas que se obtienen para la intensidad de campo semilla para un universo con constante cosmológica [12].

Con el objeto de comparar la vida media de la corriente con la de partículas predichas por diferentes modelos, tenemos que dar el valor de esta vida en tiempo cosmológico. Este es simplemente

$$t_{1/2} = \frac{1}{\kappa^{phys}_{gal}} \simeq 10^{38} GeV^{-1} = 10^{13} seg \simeq 10^5\ años \tag{3.72}$$

valor que supera en muchos órdenes de magnitud al de las partículas consideradas en los modelos de partícula, tanto el standard como el supersimétrico.

3.5 Campo fermiónico

En esta sección evaluamos la intensidad de campo magnético inducido por un campo fermiónico. En el apéndice B se resolvió la ecuación de Dirac y se hallaron los coeficientes

de Bogoliubov correspondientes a la transición instantánea considerada en este capítulo. El núcleo de ruido en este caso se expresa [46]

$$N_{ii}(\tau,\tau') = 4e^2 \int d\vec{k} \int d\vec{p} \frac{f_k(\tau) f_p(\tau') f_k^*(\tau) f_p^*(\tau')}{N_k \bar{N}_k N_p \bar{N}_p} \times \left\{ \mathcal{M}_{k,p}^{(1)}(\tau,\tau') + \mathcal{M}_{k,p}^{(2)}(\tau,\tau') + \left|\vec{k}+\vec{p}\right|^2 \right\} \tag{3.73}$$

donde

$$N_k = \bar{N}_k = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{k^{1/2}} \tag{3.74}$$

$$\mathcal{M}_{k,p}^{(1)}(\tau,\tau') = \frac{\left|\vec{k}+\vec{p}\right|}{k^2 p^2} \left[ma(\tau') + i\frac{\dot{f}_k(\tau')}{f_k(\tau')} \right] \left[ma(\tau') + i\frac{\dot{f}_p(\tau')}{f_p(\tau')} \right] \times \left[ma(\tau) - i\frac{\dot{f}_k^*(\tau)}{f_k^*(\tau)} \right] \left[ma(\tau) - i\frac{\dot{f}_p^*(\tau)}{f_p^*(\tau)} \right] \tag{3.75}$$

$$\mathcal{M}_{k,p}^{(2)}(\tau,\tau') = \frac{\left[\vec{k}.\left(\vec{k}+\vec{p}\right)\right]\left[\vec{p}.\left(\vec{k}+\vec{p}\right)\right]}{k^2 p^2} \left\{ \left[ma(\tau') + i\frac{\dot{f}_k(\tau')}{f_k(\tau')} \right] \left[ma(\tau') + i\frac{\dot{f}_p(\tau')}{f_p(\tau')} \right] + \left[ma(\tau) - i\frac{\dot{f}_k^*(\tau)}{f_k^*(\tau)} \right] \left[ma(\tau) - i\frac{\dot{f}_p^*(\tau)}{f_p^*(\tau)} \right] \right\} \tag{3.76}$$

con

$$f_k(\tau) = \alpha_k \exp\left[im(1+\tau)^2/2 \right] + \beta_k \exp\left[im(1+\tau)^2/2 \right] \int_{z(\tau)}^{\infty} \exp\left(-s^2/2\right) ds \tag{3.77}$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_k &\sim -\frac{i}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}+im\right) \exp\left(\frac{im}{2}\right) \left(\frac{2}{k}\right)^{1/2+im} \\ \beta_k &\sim -\frac{i}{\pi}\Gamma\left(-\frac{1}{2}+im\right) \exp\left(\frac{im}{2}\right) \left(\frac{2}{k}\right)^{1/2+im} k^2 \end{aligned} \tag{3.78}$$

y

$$z(\tau) = (1+i)\sqrt{m}(1+\tau) \tag{3.79}$$

A partir de la expresión de los coeficientes de Bogoliubov vemos que no hay divergencia en el número creado de partículas y por lo tanto la intensidad de corriente va a ser muy pequeña. Esto se debe a que en el caso fermiónico los acoplamientos conforme y mínimo a la curvatura escalar son el mismo. Reemplazando en el núcleo, se puede ver que los dos primeros términos contribuyen por sobre el tercero. Considerando que la propagación se produce en un plasma no relativista obtenemos que la densidad de energía comoviente coherente en una escala λ debida a cada uno de los términos considerados es [46]

$$\left\langle B_\lambda^2 \right\rangle^{(1)} \sim 8e^2 \frac{H^8}{\sigma_0^2 m^2} \frac{\exp\left[2im\left(1+\tau_{1/2}\right)^2/H\right]}{\left(1/4+m^2/H^2\right)^2 \cosh^2(\pi m/H)} k_{\max}^{10} \tag{3.80}$$

$$\langle B_\lambda^2 \rangle^{(2)} \sim 64 e^2 \frac{H^8}{\sigma_0^2 m^2} \frac{1}{(1/4 + m^2/H^2)^2 \cosh^2(\pi m/H)} k_{\max}^8 \tag{3.81}$$

Considerando $m \simeq 10^{-11}\ GeV$ y σ_0 y $k_{\max}$ las usadas en el caso del campo escalar se obtiene $\left\langle B_\lambda^{phys} \right\rangle^{(1)} \sim 10^{-140}\ Gauss$ y $\left\langle B_\lambda^{phys} \right\rangle^{(2)} \sim 10^{-118}\ Gauss$, valores absolutamente insignificantes desde el punto de vista astrofísico.

3.6 Discusión

En este capítulo describimos un mecanismo nuevo de generación de campo magnético primordial basado en la generación de corrientes eléctricas estocásticas producidas por creación cosmológica de partículas cargadas. La ventaja principal de este mecanismo es que, debido a que no es causal, induce campos en todas las escalas espaciales, es decir incluso aquellas mayores que el horizonte de partícula. El mecanismo de creación de partículas es muy sensible al spin de los campos y a su acoplamiento a la gravedad. Efectivamente el mayor número de partículas se crea para un campo escalar mínimamente acoplado a la curvatura, mientras que para campos fermiónicos ese número es muy pequeño.

Como el proceso de creación de partículas es estocástico, los valores medios de las diferentes magnitudes que dependen de esa creación son nulos. Por lo tanto todo efecto se manifiesta a través de las fluctuaciones cuánticas y estadísticas, cuya información está dada por el valor de espectación de su anticonmutador, o función de Hadamard.

Estudiamos la inducción de campos magnéticos por corrientes escalares creadas cuando el universo realiza la transición de la época inflacionaria a la de radiación de forma instantánea. Para ello tuvimos en cuenta que las corrientes se desplazan en un plasma primordial de conductividad finita, y consideramos para él dos posibles casos límites: el relativista y el no relativista. En ambos casos la conductividad finita del plasma atenúa fuertemente la intensidad del campo. Para el caso de un plasma no relativista, se alcanzaría una intensidad astrofísicamente interesante sólo para valores poco realistas de la vida media de la partícula escalar.

Calculamos el campo inducido para el caso en que las cargas creadas son fermiónicas, comprobando que es muchos órdenes de magnitud menor que el obtenido en el caso escalar.

Todas estas consideraciones llevan a la conclusión que es necesario estudiar la generación y propagación del campo magnético primordial en una etapa del universo en la cual éste sea un mal conductor, o aún no se haya establecido un plasma primordial. Esa etapa es la de recalentamiento del universo. En otras palabras, debemos considerar que el recalentamiento no es instantáneo y estudiar la propagación del campo magnético durante él.

Por otra parte, independientemente de la intensidad final producida por nuestro mecanismo, debemos encontrar un candidato realista a ser nuestro campo escalar cargado.

Estos dos puntos son el objetivo del próximo capítulo.

Capítulo 4

Generación de campos magnéticos durante la etapa de recalentamiento: conexión con la teoría supersimétrica de partículas.

En el capítulo anterior vimos que la conductividad del universo juega un papel decisivo en la evolución de un campo magnético, cualquiera sea su mecanismo de inducción.

Durante la etapa del universo dominada por la radiación considerada en el capítulo anterior, vimos que la conductividad del plasma primordial estaba determinada por su temperatura. El campo magnético inducido resultaba ser proporcional a la inversa de dicha conductividad y por ende a la inversa de la temperatura. Asumir que el universo pasa instantáneamente de inflación a radiación, implica considerar que toda la densidad de energía del universo inflacionario se convirtió eficientemente en radiación en equilibrio térmico (conforme). En ese caso la temperatura al comienzo de la etapa radiativa, llamada temperatura de recalentamiento, T_{rc} es muy alta, del orden de $\sqrt{HM_{pl}}$, donde H es la constante de Hubble durante inflación, y M_{pl} la masa de Planck.

Si asumimos que la dependencia de la conductividad con la temperatura es una ley general, y sobretodo que durante la mayor parte del recalentamiento podemos asumir la existencia de una conductividad eléctrica, entonces para disminuir el efecto de ésta sobre la propagación del campo magnético necesariamente tenemos que considerar que el recalentamiento del universo no fue ni instantáneo ni eficiente, y que durante él la temperatura es mucho menor que el valor máximo mencionado en el párrafo anterior.

En los escenarios de recalentamiento estudiados últimamente, ese proceso tiene lugar básicamente en dos etapas. En la primera, llamada de *precalentamiento*, el inflatón transfiere toda su energía a los campos de materia primordiales, mediante amplificación paramétrica. En ella se alcanzaría una temperatura pico, T_M, pero tal que $T_M \ll \sqrt{HM_{pl}}$. La segunda etapa consiste en la termalización de los productos del precalentamiento, y

culmina cuando se alcanza equilibrio térmico (conforme). La temperatura del plasma primordial en ese momento se denomina *temperatura de recalentamiento*, T_{rc} y obviamente es muchísimo menor que en el caso de recalentamiento instantáneo. La baja temperatura del plasma primordial jugaría entonces en favor de una menor atenuación del campo magnético.

Estos estudios los enmarcamos en el modelo supersimétrico de la física de partícula, ya que en él hay un candidato natural para el campo escalar cargado de nuestro mecanismo: la partícula *tau supersimétrico*, $s - \tau$, que es el leptón supersimétrico más liviano. La vida media de esta partícula nos va a proveer una cota superior para la duración de la corriente. Por otra parte este modelo permite considerar temperaturas de recalentamiento relativamente bajas: considerando que la conductividad eléctrica del plasma primordial puede ser función de la temperatura, en virtud del análisis hecho en el capítulo anterior, el campo inducido podría ser más intenso.

Parte de los resultados de este capítulo fueron publicados en la referencia [51]

4.1 Modelo de la Física de Partículas

El propósito de esta sección es presentar las características generales del modelo supersimétrico de partícula, con el que damos soporte a nuestro mecanismo de generación de campo primordial.

Describimos brevemente el proceso de ruptura de simetría y la emergencia en este modelo de las partículas escalares más livianas, entre las que se encuentra el campo cargado de nuestro modelo. Además explicamos brevemente la relación entre la masa de la más liviana de estas partículas, el *gravitino* y la temperatura de recalentamiento del universo.

Además de predecir una amplia variedad de partículas, los modelos supersimétricos predicen naturalmente la unificación de las constantes de acoplamiento de gauge para altas energías.

4.1.1 Modelos supersimétricos de partícula con ruptura de supersimetría mediada por un bosón de gauge

En la versión más simple de estos modelos, la ruptura de supersimetría se transfiere al sector visible de la teoría a través de un conjunto de campos masivos, llamados *mensajeros*, que llevan números cuánticos no triviales bajo el grupo de gauge [52, 53]. Se suele asumir que los mensajeros, $\mathbf{\Phi}_I$ y $\bar{\mathbf{\Phi}}_I$ adquieren una masa explícita $\mathbf{M}_I$ a través del valor de espectación de un singlete de campo $\langle \mathbf{X}_I \rangle = \mathbf{M}_I$ con el que se acoplan en un superpotencial

$$\mathbf{W} = \mathbf{X}_I \bar{\mathbf{\Phi}}_I \mathbf{\Phi}_I \tag{4.1}$$

Un valor de espectación de vacío de la componente auxiliar $\mathbf{F}_I$ del campo $\mathbf{X}_I$ rompe la supersimetría y a través de las interacciones de gauge de los campos mensajeros induce las masas (de supersimetría rota) en el sector observable. Para el caso más simple de N conjuntos de campos mensajeros pertenecientes a la representación fundamental de $SU(5)$ más un singlete de campo $\mathbf{X}$, se obtienen las masas de los gauginos

$$\mathrm{M}_i = \frac{N\alpha_i}{4\pi}\frac{\mathbf{F}}{\mathrm{M}} \tag{4.2}$$

donde el índice $i = 1, 2, 3$ está asociado con los grupos de gauge $U(1)_Y$, $SU(2)$ y $SU(3)_c$ respectivamente.

Las masas escalares que no se ven afectadas por acoplamientos de Yukawa están dadas por

$$m_S^2 = \frac{2Nc_S^i}{16\pi^2}\alpha_i^2(0)\left(\frac{\mathbf{F}}{\mathrm{M}}\right)^2 - \frac{2c_S^i}{b_i}\mathrm{M}_i^2(0)\left[\frac{\alpha_i^2(\mu) - \alpha_i^2(0)}{\alpha_i^2(0)}\right] \tag{4.3}$$

donde m_s son las masas de supersimetría rota para gauginos y escalares, μ es la escala del grupo de renormalización con $\mu = 0$ correspondiente a la masa de los mensajeros, c_S^i es el operador cuadrático de Casimir de la partícula escalar correspondiente al grupo i de gauge y α_i y b_i el acoplamiento de gauge y función beta del modelo supersimétrico mínimo respectivamente.

Los escalares más livianos del espectro resultan ser los leptones supersimétricos derechos y, para $N > 1$ el *tau* supersimétrico, o *s-tau*, puede volverse fácilmente más liviano que el neutralino más liviano debido a efectos de mezclado. Sin embargo para valores característicos de la escala de ruptura de supersimetría F la partícula supersimétrica más liviana es el gravitino, cuya masa está dada por

$$m_{\tilde{G}} = \frac{F}{\sqrt{3}m_{pl}} \tag{4.4}$$

donde m_{pl} es la masa de Planck y donde identificamos F con la escala fundamental de ruptura de supersimetría F_0. Por lo tanto el gravitino es la partícula supersimétrica más liviana para cualquier valor de M mucho menor que la escala de Gran Unificación.

Asumiendo conservación de paridad-R [54], la siguiente partícula supersimétrica más liviana (partícula NLSP, del ingés *Next to Lightest Supersymmetrybreaking Particle*) decaería en un gravitino y una partícula estandard, con una vida media [55]

$$t_{1/2} = \frac{1}{\tilde{k}^2}\left(\frac{100\ GeV}{m_{NLSP}}\right)^5\left(\frac{\sqrt{F}}{100\ TeV}\right)^4 3\times 10^{11}\ GeV^{-1} \tag{4.5}$$

donde m_{NLSP} es la masa de la partícula NLSP y $\tilde{k}$ es un factor de proyección igual a la componente en NLSP del superpar de la partícula NLSP en el cual está decayendo la partícula NLSP. Para el caso de un *s-tau* decayendo en un *tau* y un gravitino, $\tilde{k} = 1$.

Se pueden obtener cotas al valor de la escala de ruptura de supersimetría pidiendo que la densidad de gravitinos no cierre el universo. Por ejemplo, si la masa del gravitino es tal que $m_{\tilde{G}} > 1\ keV$, la temperatura al comienzo de la etapa dominada por la radiación, T_{rc}, debe ser mucho menor que la escala de Gran Unificación a fin de evitar una sobreproducción de gravitinos [56]. La cota exacta sobre T_{rc} depende de la masa del gravitino. Para valores relativamente grandes de $m_{\tilde{G}}$, correspondientes a $\sqrt{F} \simeq 10^9\ GeV$, $(M \simeq 10^{13}\ GeV)$, se obtiene

$$T_{rc} \leq 10^7 \ GeV \tag{4.6}$$

(para valores grandes de la masa del gravitino, domina la producción no térmica de los mismos, lo cual da una cota más estricta para la temperatura de recalentamiento, que puede ser del orden de la escala débil). Esta cota es más pequeña para valores menores de F. Por otra parte para $m_{\tilde{G}} < 1 \ keV$ y para cualquier valor de la temperatura de recalentamiento mayor que la escala débil, los gravitinos van a estar en equilibrio desde tiempos tempranos y, para ese rango de masas, los gravitinos son suficientemente livianos como para dar valores aceptables de densidad remanente de los mismos.

En las secciones siguientes evaluamos la creación de partículas y el campo magnético inducido por ellas considerando una etapa de recalentamiento de duración no nula, al cabo de la cual se establece una temperatura de recalentamiento del universo mucho menor que la considerada en el capítulo anterior.

4.2 Evolución del campo escalar durante recalentamiento y durante radiación

En esta sección presentamos los ingredientes básicos para el estudio de la evolución del campo magnético primordial, esto es las soluciones de la ecuación de Klein - Gordon en cada una de las etapas del universo involucradas y los coeficientes de Bogoliubov. Además caracterizamos la época de recalentamiento por sus temperaturas pico, T_M y de recalentamiento T_{rc}, proponiendo una ley de evolución fenomenológica entre ambas.

Asumiendo que durante su etapa de recalentamiento el universo evoluciona como si estuviera dominado por la materia [57, 42], y que durante esa etapa la temperatura varía como $T \propto a^{-b}(\tau)$ [58] con $0 < b < 1$ los factores de escala en las distintas etapas del universo como función del tiempo conforme adimensional definido en el capítulo anterior son

$$\text{inflación} \qquad a_I(\tau) = \frac{1}{1-\tau} \tag{4.7}$$

$$\text{recalentamiento} \qquad a_R(\tau) = \left(1+\frac{\tau}{2}\right)^2 \tag{4.8}$$

$$\text{radiación} \qquad a_\gamma(\tau) = \left(\frac{T_M}{T_{rc}}\right)^{1/2b}\left(1+\frac{\tau}{2}\right) \tag{4.9}$$

(ver Apéndice A) donde T_M y T_{rc} son las temperaturas del universo al comienzo de la etapa de recalentamiento y al comienzo de radiación respectivamente.

La mayor parte de las partículas se crea en la transición inflación - recalentamiento [51]. Para su evaluación asumimos nuevamente que esa transición es instantánea y por lo tanto durante ella no se hizo efectiva la corrección térmica a la masa del campo escalar debida a la interacción del campo con el plasma de materia en el que decae el inflatón. Para el período inflacionario, como la temperatura es practicamente cero, esas correcciones son despreciables. Sin embargo en teorías de supergravedad la posible presencia

de acoplamientos no renormalizables del campo del inflatón, **I**, con el campo escalar en el potencial de Kähler [59]

$$K_{I,\Phi} = -\frac{C_H}{3}\frac{1}{m_{pl}^2}\mathbf{I}^\dagger\mathbf{I}^\dagger\Phi^\dagger\Phi \tag{4.10}$$

darían lugar a una contribución natural a la masa $\delta m^2 \simeq C_H H^2$. Por lo tanto en general se generaría una masa efectiva del orden de la constante de Hubble durante inflación, a pesar de que el coeficiente C_H pueda ser pequeño o aún cero en el caso que el acoplamiento efectivo específico esté prohibido por las simetrías de la teoría [60].

Considerando nuevamente acoplamiento mínimo, las soluciones de la ecuación de Klein - Gordon durante inflación, que corresponden a frecuencia positiva son nuevamente por la ecuación (3.32) del capítulo anterior, pero ahora con $\nu = (3/2)\sqrt{1 - 4m^2/9H^2}$ donde para los valores característicos de m_0 y H durante inflación, $m^2/H^2 \simeq C_H$. Para los desarrollos que haremos en este capítulo vamos a considerar $C_H \ll 1$, y al final discutiremos las consecuencias de valores diferentes de esta cantidad.

Para estudiar la evolución del campo magnético durante recalentamiento y radiación, sí tenemos que tener en cuenta las correcciones térmicas a la masa del campo escalar. En ambas etapas la forma de los modos será del tipo WKB, y se obtienen directamente de las expresiones halladas en el Apéndice A. En general la solución de frecuencia positiva se expresa

$$\psi_{sk}(\tau) \simeq \sqrt{\frac{1}{2\omega(\tau)}}\exp\left[-i\Omega(\tau)\right] \tag{4.11}$$

con $\Omega(\tau) = \int^\tau \omega(\tau")\, d\tau"$ y $\omega(\tau) = (m/H)\, a(\tau)$. Para la etapa de recalentamiento consideramos una dependencia de la masa con la temperatura de la forma

$$m^2 = m_0^2 + gT^2(\tau) = m_0^2 + gT_M^2\frac{a^{2b}(\tau_0)}{a^{2b}(\tau)} \tag{4.12}$$

donde T_M es la temperatura pico alcanzada durante el precalentamiento y b es un parámetro que tiene en cuenta el hecho que la termalización del plasma primordial no es un proceso adiabático. En los modelos supersimétricos de partícula suele tomarse $b = 3/8$ [61]. Por simplicidad vamos a asumir que la temperatura pico se alcanza a $\tau_0 = 0$, y en ese caso $a^{2b}(0) = 1$.Obviamente debe ser $0 \leq b < 1$. Entonces para $k \ll m/H$ tenemos para la etapa de recalentamiento

$$\omega_R(\tau) = \sqrt{\frac{m_0^2}{H^2}a^2(\tau) + g\frac{T_I^2}{H^2}a^{2-2b}(\tau)} \tag{4.13}$$

Para la etapa de radiación la corrección térmica a la masa es la dada por la ecuación (3.46) del capítulo anterior, y la frecuencia de los modos por la ecuación (3.48) del mismo capítulo.

Los coeficientes de Bogoliubov fueron calculados en el Apéndice A y son

$$\alpha_{sk}^{IR} \sim -i\frac{3}{4}\left(\frac{H}{m}\right)^{1/2}\frac{1}{k^{3/2}}\exp\left[i\frac{2}{3}\frac{m}{H}+ik\right] \tag{4.14}$$

$$\beta_{sk}^{IR} = -i\frac{3}{4}\left(\frac{H}{m}\right)^{1/2}\frac{1}{k^{3/2}}\exp\left[-i\frac{2}{3}\frac{m}{H}+ik\right] \tag{4.15}$$

4.2.1 Parámetros cosmológicos

Para estudiar la evolución del campo inducido durante el período de recalentamiento, debemos conocer la duración del mismo y sobretodo la temperatura pico T_M alcanzada durante el precalentamiento como funcion de T_{rc} y H. Esto puede hacerse a partir de la expresión de la edad del universo en función de las temperaturas

$$t_{hoy} \simeq \frac{2}{3H}\left(\frac{T_I}{T_\gamma}\right)^{3/2b}\left(\frac{T_\gamma}{T_M}\right)^2\left[\left(\frac{T_M}{T_{hoy}}\right)^{3/2}-1\right] \tag{4.16}$$

donde $T_{hoy} \simeq 10^{-13}\ GeV$ es la temperatura actual de la radiación de fondo, $T_M \simeq 1\ eV$ es su temperatura al comienzo de la era dominada por la materia. A partir de esta expresión hallamos

$$T_I \simeq T_\gamma^{(3-4b)/3}\left[\frac{3H}{2}T_M^{1/2}T_{hoy}^{3/2}\times t_{hoy}\right]^{2b/3} \simeq T_\gamma\left[\frac{Hm_{pl}}{T_\gamma^2}\right]^{2b/3} \tag{4.17}$$

donde la última igualdad se obtiene reemplazando $t_{hoy} \simeq m_{pl}T_{hoy}^{-3/2}T_M^{-1/2}$ [42]. Independientemente del valor de b y para $10^{11}\ GeV < H < 10^{13}\ GeV$, siempre se cumple que $T_I > T_\gamma$.

Respecto de la duración del recalentamiento, debemos compararla con la vida media del $s-tau$, para poder saber si la corriente tiene alguna chance de sobrevivir dicha etapa. En tiempo cosmológico, esa duración está dada por la ley de variación de la temperatura

$$t_{rc} \simeq \frac{2}{3H}\left(\frac{T_I}{T_\gamma}\right)^{3/2b} \tag{4.18}$$

usando $T_I/T_{rc} \simeq \left[Hm_{pl}/T_{rc}^2\right]^{2b/3}$ la expresión anterior queda

$$t_{rc} \simeq \frac{2}{3}\frac{m_{pl}}{T_{rc}^2} \tag{4.19}$$

Para un intervalo de temperaturas de recalentamiento $10^7\ GeV \leq T_{rc} \leq 10^2\ GeV$ obtenemos

$$10^{-20}\ seg \simeq 10^5\ GeV^{-1} \leq t_{rc} \leq 10^{15}\ GeV^{-1} \simeq 10^{-10}\ seg \tag{4.20}$$

Un intervalo aceptable de vidas medias del s-tau es

$$10^{12}\ GeV^{-1} \simeq 10^{-13}\ seg \leq t_{1/2} \leq 10^{-8}\ seg \simeq 10^{17}\ GeV^{-1} \tag{4.21}$$

con lo cual vemos que según sea el valor de la temperatura de recalentamiento, podemos considerar que $t_{1/2} > t_\gamma$.

En términos de τ las cotas anteriores son (para $H = 10^{13}\ GeV$)

$$10^6 \leq \tau_{rc} \simeq 2\left(\frac{Hm_{pl}}{T_{rc}^2}\right)^{1/3} \leq 10^9 \tag{4.22}$$

y

$$10^8 \leq \tau_{1/2} \leq 10^{10} \tag{4.23}$$

4.3 Estimación del campo magnético

En esta sección estimamos el campo magnético inducido por por las partículas cargadas creadas al pasar el universo de la etapa inflacionaria a la de recalentamiento. Para ello asumimos un modelo fenomenológico para la conductividad del plasma durante recalentamiento, asumiendo que ésta depende de la temperatura de la misma manera que durante la época radiativa,es decir $\sigma(\tau) \simeq e^{-2}T(\tau)$, pero en este caso la temperatura no evoluciona adiabáticamente, sino que lo hace siguiendo la ley propuesta en la ecuación (4.12), es decir $T(\tau) = T_M a^{-b}(\tau)$. Como ahora estamos trabajando con una partícula específica, el *s-tau*, la vida media de la corriente está dada por la de dicho leptón, pudiendo ser mayor que la duración de recalentamiento, según se desprende de las expresiones (4.22) y (4.23).

4.3.1 Conductividad eléctrica del plasma primordial y propagador causal del campo magnético

Como ya lo adelantáramos, ante la ausencia de un mecanismo más o menos aceptado para la formación del plasma primordial, vamos a considerar un modelo fenomenológico para describir la conductividad del mismo durante el recalentamiento del universo, basados en lo que se conoce para la época dominada por la radiación, es decir que ella es proporcional a la temperatura del plasma: $\sigma(\tau) \simeq e^{-2}T(\tau)$. A partir de esta expresión podemos plantear una forma funcional general para la conductividad del plasma durante las eras consideradas en este capítulo, y así hallar la expresión general para el propagador del campo magn ético.

Proponemos entonces como forma general de la conductividad

$$\sigma(\tau) = e^{-2}T(\tau) = \frac{\sigma_0}{(1+\gamma\tau)^\alpha} \tag{4.24}$$

donde para la etapa de recalentamiento, $\sigma_0 = e^{-2}T_I$, $\alpha = 2b$ y $\gamma = 1/2$, mientras que para la época dominada por la radiaci ón, $\sigma_0 = e^{-2}T_\gamma$, $\alpha = 1\,(2)$ para un plasma relativista (no relativista) y $\gamma = 1$.

El propagador causal del campo magnético, para modos cuya longitud de onda es tal que $k \ll \sigma_0$ es la solución de la ecuación

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + \frac{(1+\gamma\tau)^{n-\alpha}}{H}\frac{\partial}{\partial\tau}\right] D^{ret}(\tau_0,\tau) = \delta(\tau_0-\tau) \tag{4.25}$$

donde $n = 1$ para la era radiativa y $n = 2$ para la de recalentamiento. La solución general es

$$D^{ret}(\tau_0,\tau) = -\exp\left[\frac{\sigma_0(1+\gamma\tau)^{n-\alpha+1}}{H\gamma(1+n-\alpha)}\right]\int_\tau^{\tau_0} d\tau' \exp\left[-\frac{\sigma_0(1+\gamma\tau')^{n-\alpha+1}}{H\gamma(1+n-\alpha)}\right] \tag{4.26}$$

Para $\tau_0 \gg \tau$ la contribución principal a la integral proviene del límite inferior y podemos evaluar esta contribución mediante el método de Laplace [50] obteniendo

$$D^{ret}(\tau_0,\tau) \simeq \frac{\gamma H}{\sigma_0}(1+\gamma\tau)^{\alpha-n} \tag{4.27}$$

Particularizando para cada etapa tenemos

$$\text{Recalentamiento} \quad D_R^{ret}(\tau_0,\tau) \simeq \frac{e^2 H}{2T_I}\left(1+\frac{\tau}{2}\right)^{2(b-1)} \tag{4.28}$$

$$\text{Radiación} \quad D_\gamma^{ret}(\tau_0,\tau) \simeq \frac{e^2 H}{T_\gamma}(1+\tau)^{\alpha-1} \tag{4.29}$$

4.3.2 Evolución del campo magnético

Evaluamos la intensidad de campo inducido a partir de la densidad de energía magnética calculada en el capítulo anterior, ecuación (3.50) pero ahora con los coeficientes de Bogoliubov para esta transición, ecuaciones (4.14) y (4.15).

$$\left\langle B_\lambda^{phys2}\right\rangle(\tau_0) \sim e^2\left(\frac{H}{m_0}\right)^2 \kappa_{\max}^{phys1}\left[\int^{\tau_{1/2}} d\tau \frac{D^{ret}(\tau_0,\tau)}{\omega(\tau)}\right]^2 \tag{4.30}$$

Si la vida media de las partículas supera la duración de la etapa de recalentamiento, entonces

$$\left\langle B_\lambda^{phys2}\right\rangle(\tau_0) \sim e^2\left(\frac{H}{m_0}\right)^2 \kappa_{\max}^{phys1}\left[\int_0^{\tau_\gamma} d\tau \frac{D_R^{ret}(\tau_0,\tau)}{\omega_R(\tau)} + \int_{\tau_\gamma}^{\tau_{1/2}} d\tau \frac{D_\gamma^{ret}(\tau_0,\tau)}{\omega_\gamma(\tau)}\right]^2 \tag{4.31}$$

4.3.3 Evaluación del campo magnético generado durante recalentamiento y radiación

Tenemos que evaluar las integrales temporales correspondientes a la propagación del campo en cada etapa. Para la de recalentamiento tenemos

$$\int_0^{\tau_\gamma} d\tau \frac{D_R^{ret}(\tau_0,\tau)}{\omega_R(\tau)} \simeq -\frac{H^2}{g^{1/2}T_l\sigma_0^R}\frac{(1+\tau_\gamma/2)^{4b-4}}{(4b-4)}$$
$$\simeq -\frac{e^2H^2}{g^{1/2}T_\gamma^2}\frac{1}{4(b-1)}\left(\frac{T_\gamma^2}{Hm_{pl}}\right)^{(4-2b)/3} \quad (4.32)$$

mientras que para la de radiación

$$\int_{\tau_\gamma}^{\tau_{1/2}} d\tau \frac{D_\gamma^{ret}(\tau_0,\tau)}{\omega_\gamma(\tau)} \simeq -\frac{H}{\sigma_0^\gamma}\int_{\tau_\gamma}^{\tau_{1/2}} d\tau \frac{(1+\tau)^{\alpha-1}}{\sqrt{\frac{m_0^2}{H^2}(1+\tau)^2+g\frac{T_\gamma^2}{H^2}}} \quad (4.33)$$

donde $\alpha = 1$ corresponde a un plasma relativista y $\alpha = 2$ a uno no relativista y $\sigma_0^\gamma = e^{-2}T_\gamma$. Para el plasma relativista tenemos

$$\int_{\tau_\gamma}^{\tau_{1/2}} d\tau \frac{D_\gamma^{ret}(\tau_0,\tau)}{\omega_\gamma(\tau)} \simeq -\frac{H^2}{m_0\sigma_0^\gamma}\ln\left[2\frac{H}{m_0}\sqrt{\frac{m_0^2}{H^2}(1+\tau_{1/2})^2+g\frac{T_\gamma^2}{H^2}}+2\frac{m_0^2}{H^2}(1+\tau_{1/2})\right]$$
$$\simeq -\frac{e^2H^2}{m_0T_\gamma} \quad (4.34)$$

mientras que para el no relativista

$$\int_{\tau_\gamma}^{\tau_{1/2}} d\tau \frac{D_\gamma^{ret}(\tau_0,\tau)}{\omega_\gamma(\tau)} \simeq -\frac{H^3}{m_0^2\sigma_0^\gamma}\sqrt{\frac{m_0^2}{H^2}(1+\tau_{1/2})^2+g\frac{T_\gamma^2}{H^2}}$$
$$\simeq -\frac{e^2H^2}{m_0T_\gamma}(1+\tau_{1/2}) \quad (4.35)$$

Asumiendo $b = 3/8$ [61] y $T_\gamma = 10^2\ GeV$ se obtiene que, si consideramos el máximo valor posible para la vida media de la partícula, la contribución al campo magnético proveniente de la etapa de recalentamiento es despreciable frente a la producida durante radiación, con lo cual podemos tomar como estimación para la densidad de energía magnética

$$\langle B_\lambda^2\rangle_{phys}(\tau_0) \sim e^2\left(\frac{H}{m_0}\right)^2\kappa_{\max}^{phys4}\left[\int_{\tau_\gamma}^{\tau_{1/2}} d\tau\frac{D_\gamma^{ret}(\tau_0,\tau)}{\omega_\gamma(\tau)}\right]^2 \quad (4.36)$$

Para el caso en que la propagación se produce en un plasma relativista se tiene

$$\langle B_\lambda^2\rangle_{phys}^{rel}(\tau_0) \sim e^6\frac{H^6}{T_\gamma^2m_0^4}\kappa_{\max}^{phys4} \quad (4.37)$$

mientras que para el caso del plasma no relativista

$$\langle B_\lambda^2\rangle_{phys}^{no-rel}(\tau_0) \sim e^6\frac{H^6}{T_\gamma^2m_0^4}\kappa_{\max}^{phys4}(1+\tau_{1/2})^2 \quad (4.38)$$

y por lo tanto el campo magnético puede ser estimado como la raíz cuadrada de las expresiones anteriores, o sea. Para $H = 10^{13}$, $T_\gamma = 10^2\ GeV$, $m_0 = 10^2\ GeV$, $\tau_{1/2} = 10^{10}$, $\kappa_{\max}^{phys} \simeq 10^{-38}\ GeV$ obtenemos

$$\left\langle B_\lambda^{phys} \right\rangle_{phys}^{rel} (\tau_0) \sim 10^{-26}\ Gauss \tag{4.39}$$

$$\left\langle B_\lambda^{phys} \right\rangle_{phys}^{no-rel} (\tau_0) \sim 10^{-16}\ Gauss \tag{4.40}$$

Ambos valores son más interesantes que los hallados en el capítulo anterior, desde el punto de vista astrofísico. Efectivamente, ambos pueden alimentar al dínamo galáctico.

Vemos que en el caso realista de un plasma relativista la dependencia logarítmica con la vida media de la partícula hace que el resultado dependa débilmente de los parámetros de la teoría de partícula considerada, en particular de la escala de ruptura de supersimetría. El único parámetro que aún podría tener algún efecto en la intensidad de campo inducido es C_H. Si no se desprecia este término en el cálculo de los coeficientes de Bogoliubov, entonces la dependencia de éstos con el número de onda sería $k^{-\nu}$ con $\nu < 3/2$, con lo cual la dependencia final del campo sería $\kappa_{\max}^{(5-2\nu)}$ y la intensidad resultante menor que la hallada.

4.4 Discusión

En este capítulo extendimos los desarrollos del capítulo anterior al caso en que el universo realiza una transición no instantánea de la etapa inflacionaria a la de radiación. Esto es, consideramos que el recalentamiento del universo tuvo una cierta duración.

Por otra parte, enmarcamos nuestro mecanismo en un modelo concreto de física de partículas: el modelo supersimétrico con ruptura de supersimetría mediada con un bosón de gauge. Además de proveernos con un candidato concreto de partícula escalar, estos modelos poseen la ventaja adicional de permitir una baja temperatura de recalentamiento del universo.

Asumiendo que durante el período de recalentamiento hay un plasma cuya conductividad eléctrica depende también de la temperatura, la baja temperatura de recalentamiento provee un ingrediente importante al estudio de la propagación de un campo primordial, que es una baja conductividad eléctrica para el plasma primordial durante la etapa de radiación, gracias a lo cual la disipación del campo magnético es mucho menor que en el caso de recalentamiento instantáneo. La intensidad inducida final en este caso es suficientemente alta como para tener impacto en la generación de los campos galácticos.

Otra posibilidad muy considerada en la literatura es que la conductividad eléctrica durante la etapa de recalentamiento sea nula, por ende no habría disipación y en consecuencia la intensidad de campo podría ser muy alta. Sin embargo en este caso habría que considerar un ingrediente, que hasta ahora despreciamos, que es la *conductividad debida a las propias partículas creadas.*

Despreciar la conductividad de las cargas escalares en un recalentamiento instantáneo

es una aproximación razonable debido a que se asume que el plasma primordial se establece instantáneamente y, debido a la alta temperatura que se alcanza al comienzo de la etapa dominada por la radiación, la conductividad eléctrica del mismo es alta.

Durante un recalentamiento prolongado en cambio, es razonable considerar que hay un período de tiempo durante el cual aún no se estableció el plasma primordial y por ende durante él la conductividad eléctrica estará determinada por las propias cargas escalares.

En el capítulo siguiente encaramos el estudio de la propagación del campo magnético durante las primeras etapas del recalentamiento de manera consistente, esto es tomando en cuenta el efecto de las propias cargas en la propagación del campo inducido por ellas.

Capítulo 5

Estimación Autoconsistente de Campos Magnéticos Durante la Etapa de Recalentamiento

La principal dificultad para generar campos magnéticos en el Universo Temprano es romper la invariancia conforme del campo de Maxwell. En el segundo capítulo de esta tésis propusimos un mecanismo de ruptura de esta invariancia, que consistía en la generación de una corriente eléctrica estocástica mediante creación de partículas escalares cargadas durante la transición inflación-recalentamiento. En ese mismo capítulo y en el tercero investigamos además el efecto que tiene la conductividad eléctrica del plasma en el cual se propaga el campo sobre su intensidad final. Consideramos la propagación durante la etapa dominada por la radiación y durante los últimos estadíos del recalentamiento, y en todos los casos encontramos que la intensidad de campo era atenuada dramáticamente por la conductividad eléctrica del plasma primordial.

En este capítulo extendemos el análisis de la dependencia de la intensidad inducida con la conductividad a las etapas tempranas de la etapa de recalentamiento. Durante ese período los campos y sus fuentes se extienden sobre escalas mayores que el horizonte y por lo tanto el tratamiento consistente de su evolución requiere el uso de técnicas apropiadas de la teoría de campos fuera del equilibrio. Dado el conocimiento presente, un tratamiento basado en el uso de teoría de campos puede hacerse solamente dentro de un esquema perturbativo. Asumiremos que el modelo contiene N campos escalares idénticos, lo cual nos va a permitir hacer uso de la expansión $1/N$ [62, 63].

Como el valor medio de los campos inducidos es cero, debemos estimar su intensidad a partir de su varianza. Para ello necesitamos ecuaciones consistentes para las funciones de dos puntos, las que se obtienen usando el formalismo de Schwinger-Keldysh de camino temporal cerrado junto con el de acción efectiva irreducible de dos partículas [62, 64]. Estas herramientas han sido aplicadas al estudio de una amplia gama de sistemas fuera del equilibrio, desde colisiones de iones pesados y producción de pares en campos eléctricos intensos [63], hasta el estudio de la dinámica fuera del equilibrio del inflatón durante recalentamiento [65] y la evolución de campos cuánticos y producción de fluctuaciones en la densidad en la dinámica inflacionaria [66].

El recalentamiento del universo es una época muy difícil de estudiar, tanto desde la perspectiva conceptual como desde la técnica. Se conoce muy poco acerca del proceso de decaimiento del inflatón en los otros campos a los que está acoplado, y el posterior establecimiento del plasma primordial [67].

Una descripción completa de la evolución de nuestro sistema de cargas escalares y campo electromagnético debería tener en cuenta los posibles acoplamientos a los otros campos presentes. Intentar tener en cuenta todos estos efectos en forma consistente torna al problema conceptual y técnicamente insoluble. Sin embargo vamos a intentar tenerlas en cuenta en forma fenomenológica, considerando una *masa térmica* para las partículas escalares. Cualquier otro tipo de acoplamiento se reduciría a considerar una conductividad del plasma primordial, lo cual fue tenido en cuenta en los capítulos anteriores.

Recordemos que para preservar el acoplamiento débil del inflatón durante inflación [42], debemos asumir que el inflatón es neutro y está desacoplado de otras especies cargadas. Por lo tanto el plasma de partículas cargadas no resultará del decaimiento del inflatón, sino de algún mecanismo indirecto (por ejemplo, creación gravitatoria de partículas [68]). Como resultado, el plasma primordial de partículas cargadas que contribuye a la masa térmica de nuestros escalares no necesariamente está en equilibrio término con las partículas neutras, incluído el inflatón, que dan la contribución substancial a la densidad de energía del universo durante el recalentamiento y que tardan más en formarse. Como asumimos que el plasma primordial no se establece inmediatamente después de finalizada inflación, vamos a considerar que no hay conductividad eléctrica externa durante el período de tiempo en el que estudiamos la evolución de nuestro sistema de cargas y campo magnético: la atenuación de los campos y corrientes se deberá a su mutua interacción.

5.1 Escenario para magnetogénesis

Asumamos que en el universo temprano existe un campo escalar masivo, cargado. Consideremos también inflación tipo de Sitter, y que durante ese período de la historia del universo el campo escalar está en su estado de vacío invariante y que por lo tanto no hay creación de partículas [69]. Cuando se produce la transición de inflación a recalentamiento, debido al cambio en la geometría del universo, el estado de vacío se vuelve un estado de multi-partícula [27], lo que significa que se desarrolla una corriente eléctrica que induce campo magnético.

De acuerdo con lo que comentamos en la introducción de este capítulo, nuestras partículas cargadas se propagan en un mar de campos de materia en formación, y sería poco realista no considerar algún tipo de interacción entre esos sitemas, independientemente de lo poco que conozcamos sobre ellos. Vamos a considerar que esta posible interacción produce un cambio en el valor de la masa del campo escalar, que puede ser mucho mayor que la masa desnuda. Debido a las incertezas en el propio proceso de creación, como por ejemplo que el cambio en la geometría no es instantáneo y por lo tanto tampoco lo es el proceso de creación de partículas, vamos a tener en cuenta esta corrección a la masa en el cálculo de los coeficientes de Bogoliubov.

Además no vamos a considerar una posible conductividad primordial. Por una parte ésta es una suposición razonable para las primeras etapas del recalentamiento, y por otra

nos va a permitir investigar la atenuación del campo magnético debido a sus propias fuentes.

En consecuencia el escenario que estamos considerando es el siguiente: vamos a evaluar creación de partículas empalmando los modos del campo escalar y su primer derivada temporal en el instante de transición entre inflación y recalentamiento. Asumimos que este instante es $\tau = 0$ y que durante inflación el universo se expande exponencialmente. En las etapas tempranas del recalentamiento, la forma de materia dominante son las oscilaciones coherentes del inflatón y por lo tanto el universo se expande como si estuviera dominado por materia [42, 57]. No habiendo ningún argumento en contra, vamos a considerar que el campo escalar está mínimamente acoplado a la geometría. Para modelar la generación de campo magnético durante este período, vamos a considerar la interacción del campo de Maxwell con N campos escalares idénticos, mínimamente acoplados al campo de Maxwell. A orden más bajo en la expansión $1/N$, estos campos obedecen la ecuación de Klein-Gordon y pueden ser descompuestos en modos en la forma usual. Vamos a asumir nuevamente que la geometría está descripta por un universo de Friedmann-Robertson-Walker espacialmente plano, y signatura $(-,+,+,+)$.

5.1.1 Ecuaciones de campo y coeficientes de Bogoliubov

En esta sección vamos a resolver la ecuación de Klein-Gordon para el campo escalar, en las dos eras del universo involucradas en nuestro estudio y vamos a calcular los coeficientes de Bogoliubov. Si bien una parte de estos cálculos fue hecha en el Apéndice A, la repetimos aquí para facilitar el seguimiento de los desarrollos. De ahora en más trabajamos con variables adimensionales $\kappa = Hk$, $m \to m/H$, junto con la variable temporal adimensional τ definida antes.

Asumiendo acoplamiento mínimo a la curvatura, la ecuación de Klein-Gordon para los modos del campo escalar es

$$\left[\frac{d^2}{d\tau^2} + k^2 + \frac{m^2(\tau)}{H^2}a^2(\tau) - \frac{\ddot{a}(\tau)}{a(\tau)}\right] f_k(\tau) = 0 \tag{5.1}$$

De acuerdo con lo comentado en la introducción a este capítulo vamos tener en cuenta la posible interacción del campo escalar con otros campos de materia considerando una masa térmica dada por la expresión fenomenológica

$$m^2(\tau) = gT^2(\tau) \tag{5.2}$$

donde g es una constante de acoplamiento que consideramos de orden uno. Asumimos una forma genérica para la evolución de la masa térmica durante recalentamiento dada por

$$T(\tau) = \frac{a^b(0)}{a^b(\tau)}T_M \tag{5.3}$$

donde b es un parámetro que satisface $0 \leq b < 1$, y T_M es el valor máximo del corrimiento, alcanzado a $\tau \simeq 0$. Esta forma de corrección térmica está inspirada en el proceso de *precalentamiento*, donde una temperatura pico es alcanzada y decrece subsecuentemente a medida que se desarrolla el recalentamiento.

Elegir $b = 0$, $g = 1$ implica $T_M = m_0$, donde m_0 es la masa desnuda del campo escalar.Si $b > 0$, debe ser $T_M > m_0$.

Los coeficientes de Bogoliubov están dados por la expansión

$$f_k(\tau) = \alpha_k f_k^R(\tau) + \beta_k f_k^{R*}(\tau) \tag{5.4}$$

con $f_k^R(\tau)$ los modos del campo escalar durante recalentamiento, y pueden ser calculados pidiendo continuidad de los modos y sus derivadas en el momento de la transición.

Inflación

Durante este período, la temperatura del Universo es prácticamente cero y por lo tanto los modos satisfacen la ecuación sin corrección térmica a la masa,

$$\left[\frac{d^2}{d\tau^2} + k^2 - \frac{2 - m_0^2/H^2}{(1-\tau)^2}\right] f_k(\tau) = 0 \tag{5.5}$$

Escribiendo $f_k(\tau) = (1-\tau)^{1/2} h_k(\tau)$ obtenemos una ecuación de Bessel para $h_k(\tau)$:

$$\left[\frac{d^2}{d\tau^2} - \frac{1}{(1-\tau)}\frac{d}{d\tau} + k^2 - \frac{9/4 - m_0^2/H^2}{(1-\tau)^2}\right] h_k(\tau) = 0 \tag{5.6}$$

cuyas soluciones de frecuencia positiva son las funciones de Hankel de primer tipo, $H_\nu^{(1)}[k(1-\tau)]$ con $\nu = (3/2)\sqrt{1 - 4m_0^2/9H^2} \sim 3/2$; la última relación surge del hecho que durante inflación $m_0^2/H^2 \ll 1$. Los modos normalizados, de frecuencia positiva, durante inflación son

$$f_k^I(\tau) \simeq \frac{\sqrt{\pi}}{2}(1-\tau)^{1/2} H_{3/2}^{(1)}[k(1-\tau)] = -\frac{e^{ik(1-\tau)}}{\sqrt{2k}}\left[1 + \frac{i}{k(1-\tau)}\right] \tag{5.7}$$

La última igualdad se sigue de la expresión polinómica exacta para $H_{3/2}^{(1)}[k(1-\tau)]$ [71].

Recalentamiento

Para esta época la ecuación de Klein-Gordon está dada por

$$\left[\frac{d^2}{d\tau^2} + k^2 + g\frac{T_M^2}{H^2}\left(1 + \frac{\tau}{2}\right)^{4(1-b)} - \frac{1}{2(1+\tau/2)^2}\right] f_k(\tau) = 0 \tag{5.8}$$

En este caso la ecuación no tiene solución analítica conocida, de manera que la resolveremos en dos límites: el de longitudes de onda cortas, para el cual $k \gg \Delta \equiv g^{1/2} T_M/H$ y el de longitudes de onda largas, en el que se satisface $k \ll \Delta \equiv g^{1/2} T_M/H$. Esta separación en intervalos ultravioleta e infrarrojo debe considerarse con cuidado, ya que en la ecuación (5.8) el factor $g^{1/2} T_M/H$ está multiplicado por una función creciente del tiempo lo que significa que en principio esta separación es dependiente del tiempo. Afortunadamente esto no tendrá importancia al final de nuestros cálculos.

Límite ultravioleta La ecuación de Klein-Gordon en este límite es

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + k^2 - \frac{1}{2\left(1+\tau/2\right)^2}\right] f^R_{(l)k}\left(\tau\right) = 0 \tag{5.9}$$

proponiendo nuevamente $f^R_{(l)k}\left(\tau\right) = \left(1+\tau/2\right)^{1/2} h_{R(l)k}\left(\tau\right)$ obtenemos nuevamente una ecuación de Bessel para $h_k\left(\tau\right)$:

$$\ddot{h}_{R(l)k}\left(\tau\right) + \frac{1}{\left(1+\tau/2\right)}\dot{h}_{R(l)k}\left(\tau\right) + \left[4k^2 - \frac{9/4}{\left(1+\tau/2\right)^2}\right] h_{R(l)k}\left(\tau\right) = 0 \tag{5.10}$$

cuyas soluciones de frecuencia positiva son las funciones de Hankel de segunda clase $H^{(2)}_{3/2}\left[2k\left(1+\tau/2\right)\right]$. Los modos normalizados son

$$\begin{aligned} f^R_{(l)k}\left(\tau\right) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{\tau}{2}\right)^{1/2} H^{(2)}_{3/2}\left[2k\left(1+\frac{\tau}{2}\right)\right] \\ &= -\frac{e^{-i2k(1+\tau/2)}}{\sqrt{2k}}\left\{1 - \frac{i}{2k\left(1+\tau/2\right)}\right\} \end{aligned} \tag{5.11}$$

donde en la última línea usamos nuevamente la expresión polinómica para las funciones de Hankel [71].

Empalmando los modos y sus derivadas en $\tau = 0$ obtenemos

$$\alpha_{(l)k} = e^{i3k}\left[1 + \frac{3i}{2k} - \frac{9}{8k^2} - \frac{3i}{8k^3}\right] \tag{5.12}$$

$$\beta_{(l)k} = e^{-ik}\left[\frac{3}{8k^2} - \frac{3i}{8k^3}\right] \tag{5.13}$$

Límite infrarrojo Para números de onda pequeños, es decir para aquellos tales que $k \ll g^{1/2}T_M/H$, la ecuación de campo es

$$\left[\frac{d^2}{d\tau^2} + g\frac{T_M^2}{H^2}\left(1+\frac{\tau}{2}\right)^{4-4b} - \frac{1/2}{\left(1+\tau/2\right)^2}\right] f_{(s)k}\left(\tau\right) = 0 \tag{5.14}$$

Tomando como variable temporal $u = \left(1+\tau/2\right)$ y reemplazando $f^R_{(s)k}\left(z\right) = u^{1/2}h\left(u\right)$ obtenemos

$$\ddot{h}_{(s)k}\left(u\right) + \frac{1}{z}\dot{h}_{(s)k}\left(u\right) + \left[4g\frac{T_M^2}{H^2}u^c - \frac{9/4}{u^2}\right] h_{(s)k}\left(u\right) = 0 \tag{5.15}$$

con $c = 4 - 4b$. Definiendo $x = u^\gamma$ la ecuación queda

$$\frac{d^2}{dx^2}h_{(s)k}\left(x\right) + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}h_{(s)k}\left(x\right) + \left[4g\frac{T_M^2}{H^2}\frac{x^{c/p-2+2/p}}{\gamma^2} - \frac{9}{4\gamma^2x^2}\right] h_{(s)k}\left(x\right) = 0 \tag{5.16}$$

que puede ser llevada a la forma de una ecuación de Bessel pidiendo $c/\gamma + 2/\gamma - 2 = 0$. En ese caso $\gamma = (3 - 2b)$ y la ecuación queda

$$\frac{d^2}{dx^2}h_{(s)k}(x) + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}h_{(s)k}(x) + \left[4g\frac{T_M^2}{H^2}\frac{1}{\gamma^2} - \frac{9}{4\gamma^2 x^2}\right]h_{(s)k}(x) = 0 \tag{5.17}$$

cuyas soluciones de frecuencia positiva son nuevamente funciones de Bessel de segundo tipo, $H^{(2)}_{3/2\gamma}\left[\left(2g^{1/2}T_M/H\gamma\right)u^\gamma\right]$. Las soluciones normalizadas de la ecuación de campo son

$$f(\tau) = \sqrt{\frac{\pi}{2\gamma}}\frac{z^{1/2\gamma}}{z_0^{1/2\gamma}}H^{(2)}_{3/2\gamma}[z(\tau)] \tag{5.18}$$

$$z(\tau) = z_0\left(1 + \frac{\tau}{2}\right)^\gamma \qquad z_0 = \frac{2g^{1/2}}{\gamma}\frac{T_M}{H} \tag{5.19}$$

Empalmando con los modos que provienen de inflación obtenemos los coeficientes de Bogoliubov:

$$\alpha_k = -i\sqrt{\frac{\pi}{2\gamma}}\frac{e^{ik}}{\sqrt{2k}}\left\{\left[1 + \frac{i}{k}\right]g^{1/2}\frac{T_M}{H}H^{(1)}_{3/2\gamma+1}[z_0] - ikH^{(1)}_{3/2\gamma}[z_0]\right\} \tag{5.20}$$

$$\beta_k = -i\sqrt{\frac{\pi}{2\gamma}}\frac{e^{ik}}{\sqrt{2k}}\left\{ikH^{(2)}_{3/2\gamma}[z_0] - \left[1 + \frac{i}{k}\right]g^{1/2}\frac{T_M}{H}H^{(2)}_{3/2\gamma+1}[z_0]\right\} \tag{5.21}$$

y en el límite $z_0 \ll 1$, el cual es siempre válido. ellos se reducen a

$$\alpha_k = \beta_k \sim -i\sqrt{\frac{\gamma}{\pi}}2^{3/2\gamma-1}\Gamma\left(\frac{2\gamma+3}{2\gamma}\right)z_0^{-3/2\gamma}\frac{e^{ik}}{k^{3/2}} \tag{5.22}$$

Observemos que la divergencia aparente de estas ecuaciones en $\gamma = 0$ yace fuera del rango físico.

5.2 Dinámica de la función de dos puntos del campo electromagnético

La creación cosmológica de partículas es un proceso estocástico. Si las partículas están cargadas, las corrientes eléctricas generadas inducen campos electromagnéticos. Pero dado que sus valores medios son nulos, ellos se manifiestas a través de sus varianzas, o funciones de dos puntos. Las funciones que necesitamos para obtener información acerca de la evolución y del estado del campo son respectivamente el propagador *retardado* $D^{ret}_{\nu\gamma}(x,x')$ y el de *Hadamard* $D_{1\nu\gamma}(x,x')$, definidos como

$$D^{ret}_{\nu\gamma}(x,x') = i\left\langle\left[A_\nu(x), A_\gamma(x')\right]\right\rangle\Theta(\tau - \tau') \tag{5.23}$$

$$D_{1\nu\gamma}(x,x') = \langle\{A_\nu(x), A_\gamma(x')\}\rangle \tag{5.24}$$

Las ecuaciones de evolución para estos propagadores, conocidas como ecuaciones de Schwinger-Dyson (ver Apéndice C), son

$$\left[\eta^{\mu\nu}\Box_x + \left(1-\frac{1}{\zeta}\right)\partial^\mu\partial^\nu - e^2\Gamma_{11}^{\mu\nu}(x,x)\right] D_{\nu\gamma}^{ret}(x,x') \tag{5.25}$$
$$+ie^2\int dx"\,\Sigma_{ret}^{\mu\nu}(x,x")\,D_{\nu\gamma}^{ret}(x",x') = -\delta_\gamma^\mu\delta(x-x')$$

$$\left[\eta^{\mu\nu}\Box_x + \left(1-\frac{1}{\zeta}\right)\partial^\mu\partial^\nu - e^2\Gamma_{11}^{\mu\nu}(x,x)\right] D_{1\nu\gamma}(x,x') \tag{5.26}$$
$$+ie^2\int dx"\,\Sigma_{ret}^{\mu\nu}(x,x")\,D_{1\nu\gamma}(x",x') = -\frac{e^2}{2}\int dx"\,\Sigma_1^{\mu\nu}(x,x")\,D_{\nu\gamma}^{adv}(x",x')$$

donde ζ es una constante de fijado de gauge, $\Box_x = -\partial_\tau^2 + \nabla^2$, y

$$\Gamma_{cd}^{\mu\nu}(x,x') \equiv \eta^{\mu\nu}\left[G_{cd}^1(x,x) + G_{cd}^2(x,x)\right] \tag{5.27}$$

$$\Sigma_{cc',dd'}^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\alpha}(x)\eta^{\nu\beta}(x")\left[G_{cc'}^1(x,x")\,\overline{\partial}_\alpha\overline{\partial}_\beta" G_{dd'}^2(x,x")\right] \tag{5.28}$$

c y d son *índices de camino temporal cerrado* cuyos valores son 1 para el camino temporal directo y 2 para el camino temporal inverso y el supraindice $i = 1,2$ denota las partes real e imaginaria del campo escalar complejo. De acuerdo con los valores de los índices del camino temporal cerrado, tenemos que $G_{21}(x,x') \equiv \langle\phi(x)\,\phi(x')\rangle$ es la función de dos puntos de frecuencia positiva del campo escalar y $G_{12}(x,x') \equiv \langle\phi(x')\,\phi(x)\rangle$ la de frecuencia negativa. Con estos propagadores básicos podemos construir la función de dos puntos antisimétrica, o propagador de Jordan, $G(x,x') = G_{21}(x,x') - G_{12}(x,x')$ y la antisimétrica, o propagador de Hadamard, $G_1(x,x') = G_{21}(x,x') + G_{12}(x,x')$. $G_{11}(x,x') \equiv \langle T(\phi(x)\,\phi(x'))\rangle$ es el propagador de Feynman y $G_{22}(x,x') \equiv \left\langle\tilde{T}(\phi(x)\,\phi(x'))\right\rangle$ el de Dyson. Las funciones de dos puntos retardada y avanzada son $G_{ret}(x,x') = iG(x,x') = G_{adv}(x',x)$, o también $G_{ret}(x,x') = i[G_{11}(x,x') - G_{12}(x,x')]$, $G_{adv}(x,x') = i[G_{22}(x,x') - G_{12}(x,x')]$. Las mismas definiciones se aplican para la función de dos puntos del campo electromagnético, es decir que $D_{\mu\nu}^{21}(x,x') \equiv \langle A_\mu(x)\,A_\nu(x')\rangle$ es el propagador de frecuencia positiva, $D_{\mu\nu}^{12}(x,x') \equiv \langle A_\mu(x')\,A_\nu(x)\rangle$ la función de dos puntos de frecuencia negativa, y así siguiendo. Basados en estas definiciones construímos los núcleos en las ecuaciones (5.25) y (5.26), como $\Sigma_{ret}^{\mu\nu}(x,x") \equiv \Sigma_{11,11}^{\mu\nu}(x,x") - \Sigma_{12,12}^{\mu\nu}(x,x") \equiv \Sigma_{21,21}^{\mu\nu}(x,x") - \Sigma_{22,22}^{\mu\nu}(x,x")$ y $\Sigma_1^{\mu\nu}(x,x") \equiv \Sigma_{12,12}^{\mu\nu}(x,x") + \Sigma_{21,21}^{\mu\nu}(x,x") = \Sigma_{11,11}^{\mu\nu}(x,x") + \Sigma_{22,22}^{\mu\nu}(x,x")$.

Cada una de las ecuaciones (5.25) y (5.26) es en realidad un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas para las distintas componentes de las funciones de dos puntos retardada y de Hadamard del cuadripotencial electromagnético A_μ. La ecuación (5.26) es la que usaremos para evaluar el campo magnético.

5.2.1 Ecuación para las componentes espaciales de la función de dos puntos del campo electromagnético

Las ecuaciones para las funciones de dos puntos electromagnéticas forman un conjunto, donde las ecuaciones para los propagadores puramente espaciales y puramente temporales se acoplan a través de las funciones mixtas, es decir aquellas con una componente espacial y la otra temporal. El acoplamiento se realiza a través de los núcleos no locales, específicamente por sus componentes $0-i$, que en general son no nulas.

Cuando tomamos en cuenta la creación de partículas, los núcleos local y no local se separan en una contribución de vacío y otra debida a las partículas creadas, es decir $\Gamma_{11}^{\mu\nu}(x,x) = \Gamma_{11}^{\mu\nu(V)}(x,x) + \Gamma_{11}^{\mu\nu(P)}(x,x)$ y $\Sigma_{ret(1)}^{\mu\nu}(x,x") = \Sigma_{ret(1)}^{\mu\nu(V)}(x,x") + \Sigma_{ret(1)}^{\mu\nu(P)}(x,x")$. Como estamos interesados en el efecto de las partículas creadas vamos a resolver

$$\left[\eta^{\mu\nu}\Box_x + \left(1-\frac{1}{\zeta}\right)\partial^\mu\partial^\nu - e^2\Gamma_{11}^{\mu\nu(P)}(x,x)\right] D_{1\nu\gamma}(x,x') \tag{5.29}$$
$$+ie^2\int dx"\,\Sigma_{ret}^{\mu\nu(P)}(x,x")\,D_{1\nu_\gamma}(x",x') = -\frac{e^2}{2}\int dx"\,\Sigma_1^{\mu\nu(P)}(x,x")\,D_{\nu\gamma}^{adv}(x",x')$$

Las ecuaciones para parte de vacío contienen las divergencias ultravioletas usuales en teoría de campos que pueden ser absorbidas en la renormalización de la función de onda, la constante de fijación de gauge y la carga eléctrica (ver Apéndice E).

Para nuestro objetivo de evaluar el campo magnético, vamos a necesitar sólo las componentes espaciales del propagador $D_{1lj}(x,x')$, es decir la solución de las ecuaciones $i-j$, y en particular su parte transversa. Como la mayor parte de las partículas se crean en la porción infrarroja del espectro, la mayor contribución a los núcleos provendrá de ese sector (ver Apéndice D). Las componentes $0-i$ tienen forma de gradiente; como en el límite infrarrojo los modos dependen de los números de onda sólo a través de los módulos, al transformar Fourier y evaluar la integral en los momentos, ésta se anula para la parte transversa de las componentes mencionadas. Esto significa que las ecuaciones para la parte transversa de $D_{1lj}(x,x')$ se desacoplan lo cual facilita enormemente su resolución. Transformando Fourier espacialmente, las ecuaciones que utilizaremos son (ver ec. (5.26) y Apéndice C)

$$\left[\eta^{il}\left(\partial_\tau^2 + k^2\right) + e^2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\Gamma_{11}^{il(P)}(p,\tau,\tau)\right] D_{1lj}(k,\tau,\tau') \tag{5.30}$$
$$-ie^2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\int d\tau"\,\Sigma_{ret}^{il(P)}(p,k-p,\tau,\tau")\,D_{1lj}(k,\tau",\tau')$$
$$= \frac{e^2}{2}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\int d\tau"\,\Sigma_1^{il(P)}(p,k-p,\tau,\tau")\,D_{lj}^{adv}(k,\tau',\tau")$$

donde k es el número de onda comoviente de la transformada de Fourier de la función de dos puntos del campo electromagnético y p el correspondiente a la transformada de los propagadores del campo escalar.

Cuando reemplazamos la descomposición en modos (5.4), el núcleo local, por ejemplo queda

$$\Gamma_{11}^{il(P)}(p,\tau,\tau) = \eta^{il}\left\{2\left|\beta_p\right|^2\left|f_p(\tau)\right|^2 + \alpha_p\beta_p^* f_p^2(\tau) + \beta_p\alpha_p^* f_p^{\dagger 2}(\tau)\right\} \tag{5.31}$$

con $f_p(\tau)$ dada por la ec. (5.18) si estamos interesados en estudiar el caso infrarrojo o (5.11) si nos interesa el ultravioleta, Los coeficientes de Bogoliubov por (5.22) para el caso infrarrojo o (5.12)y (5.13) para el ultravioleta. Los núcleos no locales asumen expresiones semejantes. Por otra parte asumimos que la parte de vacío puede ser absorbida en una renormalización de la acción clásica, siendo despreciable el remanente.

5.2.2 Calculando los núcleos

En esta sección vamos a calcular los núcleos encontrados en las ecuaciones (5.30) para los propagadores del campo de Maxwell. Reemplazando directamente las expresiones para los modos y coeficientes de Bogoliubov, puede comprobarse que la contribución del sector ultravioleta es despreciable (ver Apéndice 4) en comparación con la que proviene del sector infrarrojo, hecho que puede entenderse debido a que el mayor número de partículas se crea en la porción infrarroja del espectro, como se deduce a partir de las expresiones de los coeficientes de Bogoliubov, ecuaciones (5.12), (5.13) y (5.22). Las funciones de modo están dadas por la ecuación (5.18) las cuales se ve que no dependen del número de onda p. Los coeficientes de Bogoliubov por otra parte mantienen la dependencia completa con el número de onda.

Cuando reemplazamos los modos y coeficientes, es decir las ecuaciones (5.18) y (5.22), encontramos una divergencia logarítmica en la integral en los momentos del núcleo local, ecuación (5.31), por lo que debemos introducir un cut-off infrarrojo, que podemos elegir como el modo comoviente, adimensional, Υ, correspondiente a la región inflacionaria inicial que dio lugar a nuestro universo observable. Para el límite superior de integración tomamos $\Delta \sim T_M/H$. Tenemos entonces que

$$\Gamma_{11}^{il}(\tau,\tau) = \int_{\Upsilon}^{\Delta} \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \Gamma_{11}^{il(P)}(p,\tau,\tau) \simeq \eta^{il}\tilde{\Gamma}, \tag{5.32}$$

$$\tilde{\Gamma} = 2^{3/\gamma-1}\Gamma^2\left(\frac{2\gamma+3}{2\gamma}\right)\ln\left(\frac{\Delta}{\Upsilon}\right) z_0^{-4/\gamma} F^2(z) \tag{5.33}$$

donde

$$F(z) = z^{1/2\gamma} J_{3/2\gamma}(z) \tag{5.34}$$

siendo $J_{3/2\gamma}(z)$ la función de Bessel de primera clase, con z y z_0 definidas más arriba en la ecuación (5.19).

El núcleo no local no tiene divergencias infrarrojas y es Δ^2 veces más pequeño que el local, con $\Delta \sim T_M/H \ll 1$ (ver Apéndice 4). Esta diferencia en órdenes de magnitud nunca decrece (aún si evaluamos la integral en el tiempo del término no local de la ecuación) y por lo tanto para nuestros fines de estimación del orden de magnitud del campo magnético

puede ser ignorado. Esta aproximación es muy importante, no sólo desde el punto de vista técnico, sino también desde el físico, ya que muestra que la disipación debido a la conductividad ordinaria de las cargas es despreciable.

Pasamos ahora a analizar el núcleo de Hadamard de ruido, $\Sigma_1^{ij(N)}(p, k-p, \tau, \tau")$ que es la fuente en la ecuación (5.30) para $D_1^{(N)}(k, \tau, \tau')$. Las mismas consideraciones hechas para el propagador retardado, respecto de la estructura de *gradiente* de la componente $0-i$ de la función de dos puntos vale para esta función. En consecuencia sólo necesitamos evaluar la componente puramente espacial, dada por

$$\Sigma_1^{il(P)}(p, k-p, \tau, \tau") \sim \frac{p^i p^l}{p^3 \left|\vec{k}-\vec{p}\right|^3} S_1(\tau, \tau'), \tag{5.35}$$

$$S_1(\tau, \tau'') = 2^{6/\gamma-1}\Gamma^4\left(\frac{2\gamma+3}{2\gamma}\right) z_0^{-8/\gamma} F^2[z(\tau)] F^2[z(\tau")] \tag{5.36}$$

Es importante notar que la misma función F aparece en este núcleo y en (5.33).

Vemos que después de reemplazar los modos y coeficientes de Bogoliubov, las expresiones resultantes de los núcleos dadas por las ecuaciones (5.33) y (5.36) son funciones reales. Esto es así debido a las expresiones (5.22) para los coeficientes de Bogoliubov y el hecho que los modos (5.18) no dependen de los números de onda. En otras palabras, después de reemplazar los coeficientes de Bogoliubov, los modos (5.18) se combinan de forma tal de dar funciones que oscilan coherentemente, una indicación de que efectivamente son más grandes que el horizonte y que por lo tanto están congelados.

5.2.3 Ecuaciones de evolución para el campo magnético

Al cabo de todas las consideraciones hechas, la ecuación para la parte transversa de la función de Hadamard puramente espacial para el potencial electromagnético es

$$\left[\eta^{il}\left(\partial_\tau^2 + k^2\right) + e^2\Gamma_{11}^{il(P)}(\tau, \tau)\right] D_{1lj}(k, \tau, \tau') = \Xi_{ij}(k, \tau, \tau') \tag{5.37}$$

$$\Xi_{ij}(k, \tau, \tau') = \frac{e^2}{2}\int_0^{\tau'} d\tau" \int_\Upsilon^\Delta \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \Sigma_1^{il}(p, k-p, \tau, \tau") D_{lj}^{ret}(k, \tau', \tau") \tag{5.38}$$

Introduzcamos ahora la función de Hadamard para el campo magnético:

$$\left\langle\left\{B_i(\tau, \vec{r}), B_j(\tau', \vec{r}')\right\}\right\rangle = H^4 \epsilon^{ikl}\epsilon^{jk'l'} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} k_k k_{k'} D_{1ll'}(k, \tau, \tau') \exp\left[i\vec{k}.(\vec{r}-\vec{r}')\right] \tag{5.39}$$

donde H^4 da las unidades.

Estamos interesados en el campo $B_i(\tau,\lambda)$ coherente en una escala λ, por lo tanto debemos filtrar las altas frecuencias con una *función ventana* de tamaño λ. En otras palabras tenemos que calcular

$$\frac{1}{V_\lambda^2}\int_{V_\lambda} d^3r \int_{V_\lambda} d^3r' \left\langle \left\{ B_i(\tau,\bar{r}), B_j(\tau',\bar{r}') \right\} \right\rangle \tag{5.40}$$

donde $V_\lambda \sim \lambda^3$ es un volumen comoviente en el que buscamos homogeneidad. La ecuación (5.40) implica calcular

$$\frac{1}{V_\lambda}\int_{V_\lambda} d^3r \exp\left[i\bar{k}.\bar{r}\right] = \frac{1}{V_\lambda}\int_{V_\lambda} d^3r' \exp\left[-i\bar{k}.\bar{r}'\right] \equiv W_\lambda(k) \tag{5.41}$$

Esta *función ventana* puede ser aproximada por

$$\begin{aligned} W_\lambda(k) &\sim 1 \quad if \quad k \leq K = 1/\lambda \\ &= 0 \quad \text{en otro caso} \end{aligned} \tag{5.42}$$

que a su vez puede ser implementada como un cut-off en la integral en k.

Para nuestro objetivo es suficiente calcular la autocorrelación $\left\langle \left\{ B^i(\tau,\lambda), B_i(\tau',\lambda) \right\} \right\rangle$. A partir de la ecuación para el propagador de Hadamard obtenemos

$$\left[\frac{d^2}{d\tau^2} + e^2\Gamma(\tau,\tau)\right] \left\langle \left\{ B^i(\tau,\lambda), B_i(\tau',\lambda) \right\} \right\rangle = \tag{5.43}$$
$$2e^2H^4 \int_0^K \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \int_\Upsilon^\Delta \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\tau d\tau'' \frac{\left|\bar{k}\times\bar{p}\right|^2}{p^3\left|k-p\right|^3} S_1(\tau''',\tau'') D^{ret}(\tau',\tau'')$$

donde usamos el hecho que, como $K \ll 1$, los gradientes espaciales son despreciables y en consecuencia D^{ret} resulta independiente del número de onda. La integral en los momentos puede evaluarse fácilmente obteniendo

$$\left[\frac{d^2}{d\tau^2} + e^2\Gamma(\tau,\tau)\right] \left\langle \left\{ B^i(\tau,\lambda), B_i(\tau',\lambda) \right\} \right\rangle = 2e^2H^4K^4 \int_0^\tau d\tau'' S_1(\tau,\tau'') D^{ret}(\tau',\tau'') \tag{5.44}$$

5.3 Problema estocástico equivalente

En lugar de resolver directamente la ecuación (5.44), vamos a cambiar nuestro lenguaje a uno físicamente más transparente, que es el de la formulación estocástica. Para ello, introduzcamos un campo estocástico $B(\tau)$ que obedece una ecuación de Langevin

$$\left[\frac{d^2}{d\tau^2} + e^2\Gamma(\tau,\tau)\right] B(\tau) = \xi(\tau) \tag{5.45}$$

donde $\xi(\tau)$ es un ruido Gaussiano con valor medio cero y autocorrelación

$$\langle \xi(\tau)\,\xi(\tau'')\rangle_{\xi} = 4e^2H^4K^4S_1(\tau,\tau'') \tag{5.46}$$

Es fácil ver que

$$\langle\{B^i(\tau,\lambda)\,.\,B_i(\tau',\lambda)\}\rangle = \langle B(\tau)\,B_i(\tau')\rangle_{\xi} \tag{5.47}$$

Más aún, debido a la estructura de la autocorrelación, podemos realizar el ruido como

$$\xi(\tau) = eH^2K^2 2^{3/\gamma}\Gamma^2\left(\frac{2\gamma+3}{2\gamma}\right) z_0^{-4/\gamma}F^2[z(\tau)]\,X \tag{5.48}$$

donde X es una única variable Gaussiana que satisface $\langle X\rangle = 0$ y $\langle X^2\rangle = 1$.

Como la ecuación es lineal podemos escribir

$$B(\tau) = eH^2K^2 2^{3/\gamma}\Gamma^2\left(\frac{2\gamma+3}{2\gamma}\right) z_0^{-4/\gamma}XB_s(\tau) \tag{5.49}$$

La ecuación que tenemos que resolver es entonces

$$\left[\frac{d^2}{d\tau^2} + C^2F^2[z(\tau)]\right] B_s(\tau) = F^2[z(\tau)] \tag{5.50}$$

$$C^2 = \tilde{e}^2 z_0^{-4/\gamma} \tag{5.51}$$

donde $e^2 2^{3/\gamma-1}\Gamma^2[(2\gamma+3)/2\gamma]\ln(\Delta/\Upsilon) = \tilde{e}^2$, con las condiciones de contorno $B_s(0) = \dot{B}_s(0) = 0$.

La ecuación (5.50) es semejante a la ecuación de London en un medio superconductor [70]. Esto significa que el campo inducido será más débil que el obtenido en el caso de propagación libre.

Escribiendo $B_s(\tau) = C^{-2}(1 + B_h(\tau))$ la ecuación para $B_h(\tau)$ queda

$$\left[\frac{d^2}{d\tau^2} + C^2F^2[z(\tau)]\right] B_h(\tau) = 0 \tag{5.52}$$

con condiciones iniciales $B_h(0) = -1$, $\dot{B}_h(0) = 0$. En este punto es conveniente adoptar la variable z como variable temporal independiente. La ecuación (5.52) ahora queda

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{(\gamma-1)}{\gamma z}\frac{d}{dz} + c^2g^2(z)\right] B_h(z) = 0 \tag{5.53}$$

donde $c^2 = 4\tilde{e}^2 z_0^{-6/\gamma}/\gamma^2$ y $g^2(z) = z^{-2(\gamma-1)/\gamma}F^2[z] = z^{(3-2\gamma)/\gamma}J^2_{3/2\gamma}(z)$. El campo magnético $B(\tau)$ estará entonces dado por

$$B(\tau) \sim H^2 K^2 (1 + B_h(\tau)) \tag{5.54}$$

Debido al comportamiento oscilatorio de $g^2(z)$, la ecuacion (5.52) se asemeja a una ecuación de Mathieu y por lo tanto podemos esperar que la atenuación debida a las corrientes de London no sea muy fuerte. Vamos a integrar numéricamente esta ecuación y evaluar el campo inducido a partir de la ecuación (5.54). Debido a las incertezas en los valores reales de γ y T_M no vamos a intentar estimar las intensidades inducidas para un intervalo amplio de posibles valores, sino que sólo nos limitaremos a ilustrar el efecto considerando una elección específica de valores de esos parámetros, más precisamente $\gamma = 5/2$ and $T_M/H = 10^{-2}$. Este valor de γ corresponde a $b = 1/4$ y describe una desviación fuerte de la evolución conforme para la masa térmica. Recordemos en este punto que el parámetro b no describe la evolución de la temperatura del plasma primordial de recalentamiento, es decir el formado por los productos del decaimiento del inflatón, sino el de la masa térmica de las cargas escalares.

Considerando el valor máximo permitido para la constante de Hubble durante inflación, $H = 10^{13}$ GeV, $T_M/H = 10^{-2}$ corresponde a $T_M = 10^{11}$ GeV, que es del orden de la máxima temperatura que se puede alcanzar en el proceso de *precalentamiento* del universo.

5.3.1 Límites de validez

La ecuación (5.53) describe correctamente la evolución de B_h durante un intervalo de tiempo en el cual son válidas las ecuaciones obtenidas a orden más bajo en el desarrollo $1/N$, es decir las ecuaciones (5.25) y (5.26). Para estimar este intervalo podemos comparar el crecimiento en la densidad de energía electromagnética con el correspondiente a la densidad de energía del campo escalar: asumiendo conversión eficiente de energía escalar en electromagnética, el momento en el que la densidad de la segunda supera a la de la primera puede considerarse como el tiempo límite de integración de nuestras ecuaciones. Efectivamente, a orden más bajo en el desarrollo *1/N* la ecuación para el propagador del campo escalar no contiene efectos de retroacción del campo electromagnético sobre sus fuentes (ver Apéndice C). Esto significa que a ese orden el campo inducido es muy débil y por lo tanto su contenido de energía mucho menor que el de sus fuentes. Cuando esta condición se viola, las ecuaciones de evolución para el campo electromagnétio pierden validez. La densidad de energía está dada por la componente 00 del tensor energía momento del sistema de campos, T^{00}, y para evaluarla, tratamos al campo electromagnético como clásico y al escalar como cuántico. Separamos entonces T^{00} en una contribución puramente escalar y otra electromagnética según

$$T_\varphi^{00} = H^4 \left[\dot{\varphi}^2 - 2\frac{\dot{a}}{a}\varphi\dot{\varphi} + \frac{1}{2}\eta^{ij}\partial_i\varphi\partial_j\varphi + \left(\frac{m^2(\tau)}{H^2} a^2(\tau) + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \varphi^2 \right] \tag{5.55}$$

$$\begin{aligned} T_A^{00} &= H^4 \frac{1}{4} \left[\tilde{F}^{ij}\tilde{F}_{ij} + 2\tilde{F}^{0j}\tilde{F}_{0j} \right] \\ &+ H^4 \left[\eta^{ij} e A_i \left(\partial_j\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1\partial_j\varphi_2 \right) + \frac{1}{2}\eta^{ij} e^2 A_i A_j \left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 \right) \right] \end{aligned} \tag{5.56}$$

donde se sobreentiende que todas las cantidades entre corchetes son adimensionales. Vamos a comparar $\langle T_{\varphi}^{00} \rangle$ con $\langle T_{A}^{00} \rangle$: el instante en el cual son iguales será considerado como el instante en el cual las ecuaciones obtenidas en el límite N grande dejan de ser válidas.

Tensor energía-momento del campo escalar

Considerando al campo escalar como cuántico y definendo $T^{00} = H^4 \tilde{T}^{00}$ podemos escribir

$$\left\langle \tilde{T}_{\varphi}^{00} \right\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \left\{ \dot{\varphi}_p^* (\tau)\, \dot{\varphi}_p (\tau) - \frac{\dot{a}}{a} \left[\varphi_p^* (\tau)\, \dot{\varphi}_p (\tau) + \dot{\varphi}_p^* (\tau)\, \varphi_p (\tau) \right] \right. \tag{5.57}$$
$$\left. + \eta^{ij} p_i p_j \varphi_p^* (\tau)\, \varphi_p (\tau) + \left(a^2 \frac{m^2 (\tau)}{H^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \varphi_p^* (\tau)\, \varphi_p (\tau) \right\}$$

Escribiendo los modos como $\varphi_p (\tau) \sim \alpha_p f_p (\tau) + \beta_p f_p^* (\tau)$ con las funciones $f_p (\tau)$ dadas por la ecuación (5.18) y los coeficientes de Bogoliubov por la ecuación. (5.22), la contribución de las partículas creadas a $\left\langle \tilde{T}_{\varphi}^{00} \right\rangle$ queda

$$\left\langle \tilde{T}_{\varphi}^{00} \right\rangle_{\beta} \simeq \int_{\Upsilon}^{\Delta} \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} |\beta_p|^2 \left\{ \left[\dot{f} (\tau) + \dot{f}^* (\tau) \right]^2 - 2\frac{\dot{a}}{a} \left[\dot{f} (\tau) + \dot{f}^* (\tau) \right] \left[f (\tau) + f^* (\tau) \right] \right. \tag{5.58}$$
$$\left. + \eta^{ij} p_i p_j \left[f (\tau) + f^* (\tau) \right]^2 + \left(a^2 \frac{m^2 (\tau)}{H^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \left[f (\tau) + f^* (\tau) \right]^2 \right\}$$

Despreciando el término del gradiente porque su contribución es muy pequeña en comparación con los otros términos y evaluando la integral en los momentos, obtenemos

$$\left\langle \tilde{T}_{\varphi}^{00} \right\rangle_{\beta} = \frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\gamma}{\pi} z_0^{-3/\gamma} \times \left\{ a^{\gamma-1} \frac{T_M^2}{H^2} \left[f (\tau) + f^* (\tau) \right]^2 \right. \tag{5.59}$$
$$\left. + \left(\left[\dot{f} (\tau) + \dot{f}^* (\tau) \right] - \frac{\dot{a}}{a} \left[f (\tau) + f^* (\tau) \right] \right)^2 \right\} \tag{5.60}$$

donde usamos $a^2 m^2 (\tau) / H^2 = a^{\gamma-1} T_M / H$.

Reemplazando los modos en términos de las funciones de Bessel mediante la ecuación (5.18), el factor de escala y sus derivadas en términos de z y z_0 y usando $T_M / H = \gamma z_0 / 2$ obtenemos

$$\left\langle \tilde{T}_{\varphi}^{00} \right\rangle = \frac{2\pi\gamma^2}{(2\pi)^{3/2}} \frac{z^{2-1/\gamma}}{z_0^{2/\gamma}} \left\{ J_{3/2\gamma}^2 [z (\tau)] + J_{3/2\gamma+1}^2 [z (\tau)] \right\} \tag{5.61}$$

Para $z \gg 1$ podemos reemplazar la expresión asintótica para las funciones de Bessel [71]. esto es $J_{\nu} [z (\tau)] \sim \sqrt{2/(\pi z)} \cos [z - \nu\pi/2 - \pi/4]$ y así obtener la expresión final para $\left\langle \tilde{T}_{\varphi}^{00} \right\rangle$:

$$\left\langle \tilde{T}_{\varphi}^{00} \right\rangle \sim \frac{4\gamma^2}{(2\pi)^{3/2}} \frac{z^{1-1/\gamma}}{z_0^{2/\gamma}} \tag{5.62}$$

la cual está graficada en la Figura 5.2.

Tensor energía-momento del campo electromagnético

Como se estableció en la ecuación (5.56), el tensor energía-momento del campo electromagnético consiste de una parte puramente electromagnética y otra de interacción. Procediendo con la ecuación (5.56) de forma similar que con T^{00} obtenemos

$$\left\langle \tilde{T}_{A}^{00} \right\rangle = \frac{1}{2}\left(\tilde{B}^2 + \tilde{E}^2\right) + e^2 \frac{B^2}{K^2} \frac{z^{1/\gamma}}{z_0^{4/\gamma}} J_{3/2\gamma}^2(z) \tag{5.63}$$

Usando que $\tilde{B} = B/H^2$ y

$$\tilde{E} = \frac{d}{d\tau}\frac{\tilde{B}}{K} = \frac{\gamma}{2K} \frac{z_0^{1/\gamma}}{z^{1/\gamma-1}} \frac{d\tilde{B}}{dz} \tag{5.64}$$

nos queda

$$\left\langle \tilde{T}_{A}^{00} \right\rangle = \frac{1}{2}\left[\tilde{B}^2 + \frac{\gamma^2}{4K^2} \frac{z_0^{2/\gamma}}{z^{2/\gamma-2}} \left(\frac{d\tilde{B}}{dz}\right)^2\right] + e^2 \frac{\tilde{B}^2}{K^2} \frac{z^{1/\gamma}}{z_0^{4/\gamma}} J_{3/2\gamma}^2(z) \tag{5.65}$$

Para evaluar esta expresión, resolvimos numéricamente la ecuación (5.53) y con los resultados reconstruímos B a partir de la ecuación (5.54). La ecuación (5.54) nos da el campo coherente sobre una escala comoviente K^{-1} en la cual podríamos estar interesados. Vemos a partir de esa ecuación que la intensidad de campo depende de la escala como K^2. A fin de hacer una estimación honesta de $\left\langle \tilde{T}_{A}^{00} \right\rangle$ debemos tener en cuenta la intensidad más alta posible producida por nuestro mecanismo, y ésta se obtiene para $K_{\max} \sim T_M/H$, es decir el cut-off que usamos para dividir el espectro. En la Figura 5.2 graficamos los resultados de estos cálculos.

5.4 Evaluación del campo magnético

Para estimar la intensidad de campo inducido coherente sobre una escala física κ^{-1} a un dado tiempo τ, debemos reemplazar

$$a(\tau)\,\kappa = HK \tag{5.66}$$

De manera que a partir de la ecuación (5.54) obtenemos

$$B_{phys}(\tau) = \frac{B(\tau)}{a^2(\tau)} \sim \kappa^2 \left(1 + B_h(\tau)\right) \tag{5.67}$$

Con los parámetros dados más arriba, $\gamma = 5/2$ y $T_M/H = 10^{-2}$, resolvimos numéricamenc la ecuación (5.53) y mostramos los resultados en la Figura 5.1. Vemos que $B_h\,[(z)]$ oscila con una amplitud que crece exponencialmente. Esto concuerda con la afirmación hecha en la sección previa, acerca de la semejanza de la ecuación (5.52) con una ecuación de Mathieu. Estimamos numéricamente el exponente de Floquet de la envolvente exponencial en el intervalo z considerado, encontrando $\mu = 1/8$.

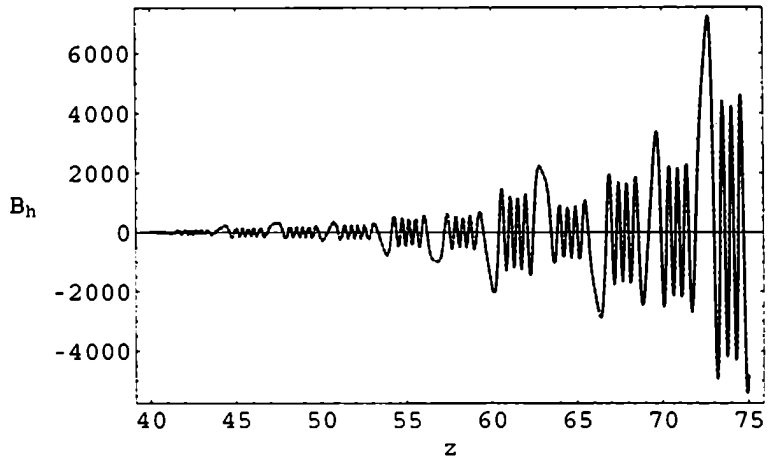

Figura 5.1: Gráfico de B_h vs. z: la intensidad de campo magnético crece exponencialmente, según muestra la curva punteada. El exponente de Floquet estimado numéricamente es $\mu = 1/8$ y la amplitud $B_{0h} = 200$

En el cálculo de $\langle T_A^{00} \rangle$ consideramos la envolvente exponencial y su derivada para estimar los campos magnético y eléctrico respectivamente. Podemos ver en la Figura 5.2 que en $z \sim 70$ la densidad de energía magnética se equipara con la del campo escalar y por lo tanto no podemos integrar nuestra ecuaciones más allá de ese instante. En ese tiempo puede verse en la Figura 1 que $(1 + B_h\,(\tau)) \sim 10^3$.

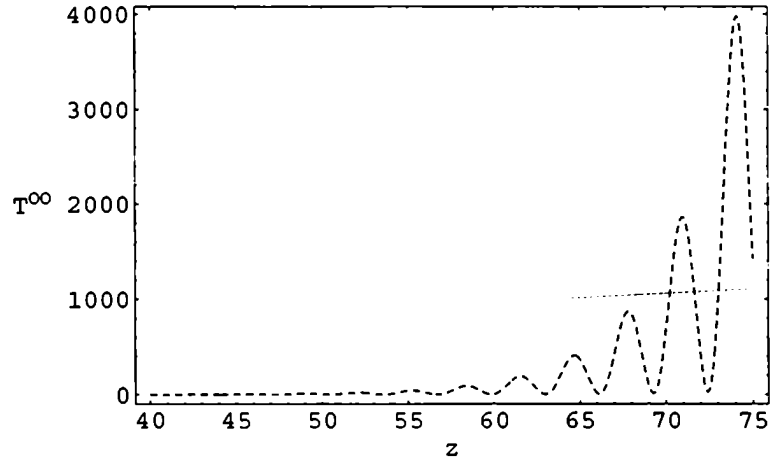

Figura 5.2: Densidad de energía del campo escalar (línea sólida) y del campo electromagnético (curva oscilatoria, punteada) como función de z. La energía magnética equipara a la escalar en $z \sim 70$

Por ejemplo, si consideramos la escala comoviente correspondiente a una galaxia hoy,

$\kappa \simeq 10^{-38}$ GeV y usamos la equivalencia $1GeV^2 \simeq 10^{20}$ Gauss, obtenemos una intensidad de campo magnético $B^{gal}_{phys}(\tau_{tod}) \simeq 10^{-53}$ Gauss, que es muy pequeña para alimentar cualquier proceso de amplificación que dé lugar al campo que se observa en las galaxias.

5.5 Discusión

En este capítulo evaluamos de manera consistente la inducción de campo magnético por corrientes eléctricas creadas en la transición inflación - recalentamiento. Como el valor medio de las corrientes es nulo, consideramos la corriente efectiva debida a las fluctuaciones cuánticas y estocásticas respecto del valor medio

Usando técnicas apropiadas para estudiar campos cuánticos fuera del equilibrio, como la acción efectiva irreducible de dos partículas y camino temporal cerrado, junto con la aproximación de N grande, obtuvimos ecuaciones de evolución consistentes para las funciones de dos puntos de los campos escalar y electromagnético, conocidas como ecuaciones de *Schwinger - Dyson.*

Tuvimos en cuenta los posibles acoplamientos de las partículas creadas a otros campos presentes durante la época de recalentamiento, usando una expresión fenomenológica para la masa del campo escalar, considerando que es una función de la temperatura. Como uno de nuestros principales objetivos es evaluar la conductividad eléctrica de las propias cargas escalares, cualquier otro tipo de acoplamiento con el plasma primordial se traduciría en una conductividad eléctrica debida a este último, lo cual eventualmente opacaría el efecto que estamos interesados en estudiar.

El primer resultado importante de este capítulo es que, a orden más bajo en la expansión $1/N$, no hay retroacción del campo magnético sobre sus fuentes.

El mayor número de partículas se crea en la porción infrarroja del espectro. Las ecuaciones de evolución para el propagador de Hadamard electromagnético presenta dos núcleos, uno local y otro no local. Cuando evaluamos estos núcleos con los modos infrarrojos y los correspondientes coeficientes de Bogoliubov, encontramos que el núcleo local domina por sobre el no local o disipativo, en varios órdenes de magnitud durante todo el período de recalentamiento. Físicamente esto significa que el campo magnético no sufrirá disipación debido a una conductividad eléctrica. Este hecho conlleva una ventaja técnica, ya que permite desacoplar las ecuaciones para las componentes puramente espaciales de la función de Hadamard, lo que facilita su resolución.

Para estimar el campo inducido reescribimos nuestra ecuación para la función de dos puntos como una ecuación de Langevin para un campo magnétco estocástico. Debido a la presencia del núcleo local, esa ecuación semeja a la ecuación de London para un medio superconductor. Esto significa que existe atenuación del campo inducido debido a sus propias fuentes, pero esa atenuación se debe a un efecto de *apantallamiento debido al hecho que las partículas cargadas se comportan como un medio superconductor.* Este es el segundo y más importante resultado de este capítulo.

Para visualizar el proceso de inducción de campo magnético, resolvimos numéricamente la ecuación (5.53) para $\gamma = 5/2$ y $T_M/H = 10^{-2}$ y encontramos que debido al hecho que la corriente de London oscila, el apantallamiento no es perfecto. El campo magnético crece

exponencialmente, un hecho que puede entenderse a partir de la similitud entre la ecuación (5.52) y la de Mathieu. La razón de crecimiento está dada por el índice de Floquet, que en el caso analizado es $\mu \simeq 1/8$. Debido al desconocimiento general acerca de los posibles acoplamientos de nuestro campo escalar con los otros campos presentes, nos limitamos a ilustrar lo que ocurre y no extendimos nuestro análisis a todo el rango posible de valores de los parámetros físicos y así poner cotas a las intensidades finales de campo magnético.

En general podemos estimar el tiempo de integración de la ecuación (5.53) como aquel en el que la densidad de energía en el campo electromagnético se equipara con la del campo escalar. Esta estimación se basa en el hecho que a orden más bajo en la expansión $1/N$, no hay retroacción del campo electromagnético sobre sus fuentes, lo que significa que la intensidad del campo inducido es muy pequeña. Cuando esta condición es violada, es decir cuando el campo electromagnético crece tanto que su densidad de energía iguala a la de sus fuentes, la aproximación se rompe y las ecuaciones dejan de ser válidas. Este criterio para estimar el tiempo durante el cual la aproximación de N grande es válida tiene validez general, es decir no sólo para el problema estudiado en este capítulo.

Para el conjunto de parámetros usados en este capítulo para ilustrar la inducción de campo, este intervalo de tiempo es muy corto y la intensidad resultante muy débil como para tener importancia astrofísica. Debido a la diferente dependencia con la escala, el término cinético en la ecuación (5.65) para la componente 00 del tensor energía-momento es despreciable respecto del término de interacción $e^2 A^2 \langle \varphi^2 \rangle$. El crecimiento de este término se debe principalmente al crecimiento en el campo magnético, el cual a su vez está determinado por el indice de Floquet de la exponencial. En consecuencia cuanto menor sea este índice, tanto más tarde se igualarán las energías, lo que significa que la intensidad final de campo podría ser mucho más grande que la estimada en este capítulo. Debido a nuestra ignorancia respecto de los posibles valores de los parámetros físicos que determinan ese índice, no podemos descartar por el momento la posibilidad de que sea efectivamente pequeño y que por lo tanto puedan inducirse campos más intensos.

Capítulo 6

Conclusiones

En esta tésis hemos estudiado un mecanismo nuevo de generación de campo magnético primordial, con el objetivo de poder explicar los campos que se observan en las galaxias. El mismo está basado en la generación de corrientes eléctricas estocásticas por creación cosmológica de partículas cargadas, al producirse la transición del universo desde inflación a la etapa subsiguiente del universo.

Al producirse la transición mencionada, la geometría del universo cambia debido a que cambia la razón de expansión del mismo. Un campo cuántico presente durante inflación cambiará drásticamente su estado cuántico en esa transición. Como consecuencia si antes de ella estaba en su estado fundamental, luego de ella se encontrará en un estado excitado o de multipartícula.

La creación de partículas es muy sensible al spin de los campos y a su acoplamiento a la gravedad. Efectivamente el mayor número de partículas se crea para un campo escalar mínimamente acoplado a la curvatura, mientras que para campos fermiónicos ese número es muy pequeño, con lo cual el mecanismo propuesto no es operativo para estos campos.

Como el proceso de creación de partículas es estocástico, los valores medios de las diferentes magnitudes que dependen de esa creación son nulos. Por lo tanto todo efecto se manifiesta a través de las fluctuaciones cuánticas y estadísticas, cuya información está dada por el valor de espectación de su anticonmutador, o función de Hadamard.

En primer lugar estudiamos la inducción de campos magnéticos por corrientes escalares creadas cuando el universo realiza la transición de la época inflacionaria a la de radiación de forma instantánea. Para ello tuvimos en cuenta que las corrientes se desplazan en un plasma primordial de conductividad finita, proporcional a la temperatura del plasma, y consideramos para él dos posibles casos límites: el relativista y el no relativista. En ambos casos la conductividad finita del plasma atenúa fuertemente la intensidad del campo. Para el caso de un plasma no relativista, se alcanzaría una intensidad astrofísicamente interesante sólo para valores poco realistas de la vida media de la partícula escalar.

El siguiente paso entonces fue extender los desarrollos del Capítulo 3 al caso en que el universo realiza una transición no instantánea de la etapa inflacionaria a la de radiación. Esto es, consideramos que el recalentamiento del universo tuvo una cierta duración, lo cual es más realista.

Además, para dar un sustento más sólido a nuestro mecanismo lo enmarcamos en un modelo concreto de física de partículas: el modelo supersimétrico con ruptura de supersimetría mediada con un bosón de gauge. Además de proveernos con un candidato concreto de partícula escalar, estos modelos poseen la ventaja adicional de permitir una baja temperatura de recalentamiento del universo.

Asumiendo que durante el período de recalentamiento hay un plasma cuya conductividad eléctrica depende también de la temperatura, la baja temperatura de recalentamiento provee un ingrediente importante al estudio de la propagación de un campo primordial, que es una baja conductividad eléctrica para el plasma primordial durante la etapa de radiación, gracias a lo cual la disipación del campo magnético es mucho menor que en el caso de recalentamiento instantáneo. Considerando el máximo valor posible para la vida media de la partícula escalar provista por el modelo supersimétrico, estimamos la intensidad de un campo magnético que se propaga durante recalentamiento y parte de la etapa dominada por la radiación y encontramos que para una temperatura de recalentamiento suficientemente baja, la intensidad inducida final es suficientemente alta como para tener impacto en la generación de los campos galácticos.

El establecimiento del plasma primordial durante la etapa de precalentamiento no es un proceso instantáneo, y por lo tanto tampoco lo es la aparición de las propiedades conductoras del mismo. Este hecho junto con el de la baja temperatura, y por ende conductividad eléctrica, durante recalentamiento, llevan a la conclusión de que es altamente probable que la conductividad de las propias partículas escalares tenga un papel importante en la evolución del campo por ellas inducido.

En el último capítulo de la tésis encaramos el estudio de la propagación del campo magnético de manera consistente, esto es tomando en cuenta el efecto de las propias cargas en la propagación del campo inducido por ellas.

Usando técnicas apropiadas para estudiar campos cuánticos fuera del equilibrio, como la acción efectiva de dos partículas irreducible y camino temporal cerrado, junto con la aproximación de N grande, obtuvimos ecuaciones de evolución consistentes para las funciones de dos puntos de los campos escalar y electromagnético, conocidas como ecuaciones *de Schwinger - Dyson*. Las mismas fueron deducidas en el Apéndice C de esta tésis.

Tuvimos en cuenta los posibles acoplamientos de las partículas creadas a otros campos presentes durante la época de recalentamiento, usando una expresión fenomenológica para la masa del campo escalar, considerando que es una función de la temperatura. Como uno de nuestros principales objetivos es evaluar la conductividad eléctrica de las propias cargas escalares, no consideramos otros acoplamiento con el plasma primordial, ya que ellos se traduciría en una conductividad eléctrica debida a este último, lo cual eventualmente opacaría el efecto que estamos interesados en estudiar.

El primer resultado importante es que, a orden más bajo en la expansión $1/N$, no hay retroacción del campo magnético sobre sus fuentes, es decir que el campo escalar puede considerarse libre.

Para estimar el campo inducido reescribimos nuestra ecuación para la función de dos puntos como una ecuación de Langevin para un campo magnétco estocástico. Debido a la presencia del núcleo local, esa ecuación semeja a la ecuación de London para un medio superconductor. Esto significa que la atenuación del campo inducido debido a sus propias

fuentes se debe a un efecto de *apantallamiento debido al hecho que las partículas cargadas se comportan como un medio superconductor.* Este es el segundo y más importante resultado de ese capítulo.

Para visualizar el proceso de inducción de campo magnético, resolvimos numéricamente la ecuación (5.53) para determinados valores de los parámetros f'ısicos y encontramos que el campo magnético crece exponencialmente, un hecho que puede entenderse a partir de la similitud entre la ecuación (5.52) y la de Mathieu.

Para el conjunto de parámetros usados en este capítulo para ilustrar la inducción de campo, este intervalo de tiempo es muy corto y la intensidad resultante muy débil como para tener importancia astrofísica. Debido a nuestra ignorancia respecto de los posibles valores de los parámetros físicos que determinan ese índice, no podemos descartar por el momento la posibilidad de que sea efectivamente pequeño y que por lo tanto puedan inducirse campos más intensos.

Como conclusión general podemos decir el mecanismo de inducción y propagación de campo propuesto en esta tésis es un buen candidato para producir campos magnéticos primordiales de intensidad suficiente como para explicar los que se observan en las grandes estructuras del universo.

Su validación o descarte definitivos dependen por una parte de la comprensión de la dinámica de los campos de materia durante el recalentamiento del universo y de sus posibles acoplamientos con las cargas escalares. Por la otra en etapas posteriores del universo pueden haber tenido lugar procesos magnetohidrodinámicos que produjeran una intensificación del campo inducido, tal como reconexión de líneas de campo coherente en escalas menores que la galáctica, dando lugar así a campos más fuertes en escalas mayores.

Entre las posibles extensiones de los estudios realizados en esta tésis está en primer lugar evaluar la intensidad de campo inducida para otros valores de los parámetros físicos utilizados en la estimación hecha en el último capítulo.

Otro escenario posible para la utilización de las ecuaciones utilizadas en el último capítulo de la tésis es la etapa de precalentamiento del universo: si durante él se crean partículas escalares cargadas por resonancia paramétrica, los campos inducidos por ellas deben ser estudiados en forma autoconsistente.

Apéndice A

Factores de escala del universo, ecuación de Klein-Gordon y coeficientes de Bogoliubov

A.1 Factores de escala del universo

En esta sección hallamos las expresiones de los factores de escala del universo en términos del tiempo conforme

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)} \tag{A.1}$$

A.1.1 Inflación

La expansión del universo en este período es exponencial. En ese caso la métrica del espacio-tiempo es la de de Sitter con secciones espaciales planas [27], es decir

$$ds^2 = dt^2 - e^{Ht}\left[dx^2 + dy^2 + dz^2\right] \tag{A.2}$$

El tiempo conforme está dado por

$$\eta - \eta_0 = \int e^{-Ht} dt = -\frac{1}{H} e^{-Ht} \tag{A.3}$$

y por lo tanto el factor de escala en tiempo conforme es

$$a_I(\eta) = \frac{1}{H(\eta_0 - \eta)} \equiv \frac{1}{(\tau_0 - \tau)} \tag{A.4}$$

donde hemos usado el *tiempo conforme adimensional* $\tau = H\eta$. Normalizamos este factor pidiendo $a_I(0) = 1$ lo que da $\tau_0 = 1$ y en consecuencia

$$a_I(\tau) = \frac{1}{(1 - \tau)} \tag{A.5}$$

A.1.2 Radiación

En este caso el factor de escala del universo es

$$a(t) = \left(\frac{t - t_1}{t_1^*}\right)^{1/2} \tag{A.6}$$

y el tiempo conforme es

$$\eta - \eta_1 = t_1^{*1/2} \int (t - t_1)^{-1/2} dt = 2t_1^{*1/2} (t - t_1)^{1/2} \tag{A.7}$$

y el factor de escala es

$$a_{R\gamma}(\eta) = \frac{\eta - \eta_1}{2t_1^*} \equiv \frac{\tau - \tau_1}{2Ht_1^*} \tag{A.8}$$

Pidiendo continuidad entre los factores de escala de inflación y radiación y sus derivadas en $\tau = 0$ obtenemos

$$-\frac{\tau_1}{2Ht_1^*} = 1: \quad \frac{1}{2Ht_1^*} = 1 \tag{A.9}$$

y en consecuencia queda

$$a_\gamma(\tau) = (1 + \tau) \tag{A.10}$$

Este es el factor de escala que usaremos para la época dominada por la radiación cuando la transición inflación-radiación es instantánea.

A.1.3 Recalentamiento

Usualmente se asume que durante este período el universo evoluciona como si estuviera dominado por la materia [57, 42], es decir que el factor conforme se expresa

$$a(t) = \left(\frac{t - t_2}{t_2^*}\right)^{2/3} \tag{A.11}$$

y el tiempo conforme

$$\eta - \eta_2 = t_2^{*2/3} \int (t - t_2)^{-2/3} dt = 3t_2^{*2/3} (t - t_2)^{1/3} \tag{A.12}$$

y el factor de escala toma la forma

$$a_R(\eta) = \left(\frac{\eta - \eta_2}{3t_2^*}\right)^2 \equiv \left(\frac{\tau - \tau_2}{3Ht_2^*}\right)^2 \tag{A.13}$$

Para el caso en que la transición inflación-radiación no es instantánea, debemos empalmar este factor de escala con el correspondiente a inflación en $\tau = 0$ y con el correspondiente a radiación en $\tau = \tau_\gamma$. Para el primer empalme tenemos

$$\left(\frac{-\tau_2}{3Ht_2^*}\right)^2 = 1: \quad -2\frac{\tau_2}{9H^2 t_2^{*2}} = 1 \tag{A.14}$$

con lo cual el factor de escala durante recalentamiento queda

$$a_R(\tau) = \left(1 + \frac{\tau}{2}\right)^2 \tag{A.15}$$

La expresión para el factor conforme durante radiación se obtiene empalmando la expresión anterior para $a_R(\tau)$ con la expresión (A.8) en τ_γ. Obtenemos

$$a_\gamma(\tau) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\tau_\gamma}{2}\right)(\tau + 2) \tag{A.16}$$

Es conveniente re-escribir este factor de expansión en términos de las temperaturas al comienzo y al final de la etapa de recalentamiento. T_M y T_R respectivamente. Para ello consideramos que durante recalentamiento la temperatura evoluciona no adiabáticamente, sino siguiendo una ley

$$T(\tau) = \frac{T_M}{a_R^b(\tau)} \tag{A.17}$$

En consecuencia

$$T_R = \frac{T_M}{(1 + \tau_\gamma/2)^{2b}} \rightarrow \left(1 + \frac{\tau_\gamma}{2}\right) = \left(\frac{T_M}{T_R}\right)^{1/2b} \tag{A.18}$$

y el factor conforme durante radiación puede expresarse

$$a_\gamma(\tau) = \left(\frac{T_M}{T_R}\right)^{1/2b}\left(1 + \frac{\tau}{2}\right) \tag{A.19}$$

A.2 Solución de la ecuación de Klein Gordon para las diferentes etapas del universo

En esta sección hallamos las soluciones de la ecuación de Klein Gordon para cada una de las etapas del universo mencionadas anteriormente.

A.2.1 Inflación

La ecuación de Klein Gordon en este caso es

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + k^2 + \frac{m^2}{H^2}(1-\tau)^2 - \frac{2}{(1-\tau)^2}\right]\psi_k^I(\tau) = 0 \tag{A.20}$$

Planteando como solución

$$\psi_k(\tau) = (1-\tau)^{1/2} f_k(\tau) \tag{A.21}$$

Se obtiene una ecuación de Bessel para $f(\tau)$:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \frac{1}{(1-\tau)}\frac{\partial}{\partial\tau} + k^2 - \frac{9/4 - m^2/H^2}{(1-\tau)^2}\right] f_k(\tau) = 0 \tag{A.22}$$

cuyas soluciones son las funciones de Hankel, $H_\nu^{(1)}[k(1-\tau)]$ y $H_\nu^{(2)}[k(1-\tau)]$, con $\nu = \sqrt{9/4 - m^2/H^2}$ La solución de frecuencia positiva es la que se comporta como $e^{-ik\tau}$ cuando $\tau \to -\infty$ y esa es $H_\nu^{(1)}[k(1-\tau)]$. Las solución ortonormalizada de frecuencia positiva es

$$\psi_k^I(\tau) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(1-\tau)^{1/2} H_\nu^{(1)}[k(1-\tau)] \tag{A.23}$$

Como $m/H \ll 3/2$ podemos aproximar $\nu \simeq 3/2$. En este caso la función de Hankel tiene una expresión polinómica [71] y los modos se expresan

$$\psi_k^I(\tau) = -\frac{e^{ik(1-\tau)}}{\sqrt{2k}}\left[1 + \frac{i}{k(1-\tau)}\right] \tag{A.24}$$

A.2.2 Radiación

La ecuación de Klein Gordon en este caso es

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + k^2 + \frac{m^2}{H^2}(1+\tau)^2\right]\psi_k^\gamma(\tau) = 0 \tag{A.25}$$

Tomando como nueva variable $z = \sqrt{2m/H}(1+\tau)$ la ecuación anterior se reduca a

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + q + \frac{z^2}{4}\right]\psi_k^\gamma(z) = 0 \tag{A.26}$$

con $q = Hk^2/m$, cuyas soluciones son las funciones cilindricas parabólicas [71, ?]

$$\psi_k^\gamma(z) = D_{-(1/2+iq)}[(1+i)z] \tag{A.27}$$

$$\psi_k^{\gamma*}(z) = D_{-(1/2-iq)}[(1-i)z] \tag{A.28}$$

donde D_p puede expresarse en términos de funciones hipergeométricas confluentes, que en notación de Whittaker quedan

$$\begin{aligned} D_{-(1/2+iq)}[(1+i)z] &= \sqrt{\pi}2^{-1/4-iq/2}e^{-iz^2/4}\left\{\frac{{}_1F_1\left(\frac{1}{4}+\frac{iq}{2},\frac{1}{2},\frac{iz^2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{iq}{2}\right)}\right. \\ &\left. - \frac{\sqrt{2}(1+i)z}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{iq}{2}\right)}\,{}_1F_1\left(\frac{3}{4}+\frac{iq}{2},\frac{3}{2},\frac{iz^2}{2}\right)\right\} \end{aligned} \tag{A.29}$$

Para la estimación del campo magnético va a ser suficiente utilizar la forma asintótica de estas funciones para $q \ll z$ y $k^2 \ll m^2/H^2$ que es

$$\psi_k^\gamma(\eta) \sim \sqrt{\frac{H}{2m(1+\eta)}}\exp\left[-i\frac{m}{2H}(1+\eta)^2\right] \tag{A.30}$$

A.2.3 Recalentamiento

En este caso la ecuación de Klein Gordon es

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+k^2+\frac{m^2}{H^2}\left(1+\frac{\tau}{2}\right)^4-\frac{1/2}{(1+\tau/2)^2}\right]\psi_k^R(\tau)=0 \tag{A.31}$$

la cual no puede reducirse a una ecuación conocida a menos que se realicen algunas aproximaciones. Como nos van a interesar los límites $k\to\infty$ y $k\to 0$ resolvemos la ecuación aproximada que resulta de tomarlos.

Límite $k\to 0$ La ecuación en este límite es

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+\frac{m^2}{H^2}\left(1+\frac{\tau}{2}\right)^4-\frac{1/2}{(1+\tau/2)^2}\right]\psi_{sk}^R(\tau)=0 \tag{A.32}$$

proponiendo como solución

$$\psi_k^R(\tau)=\left(1+\frac{\tau}{2}\right)^{1/2}f_{sk}^R\left[\left(1+\frac{\tau}{2}\right)^3\right] \tag{A.33}$$

obtenemos una ecuación de Bessel para $f_k^R(\tau)$. La expresion normalizada para los modos de frecuencia positiva resulta ser

$$\begin{aligned}\psi_{sk}^R(\tau) &= \sqrt{\frac{\pi}{6}}\left(1+\frac{\tau}{2}\right)^{1/2}H_{1/2}^{(2)}\left[\frac{2m}{3H}\left(1+\frac{\tau}{2}\right)^3\right] \\ &= i\sqrt{\frac{H}{2m}}\left(1+\frac{\tau}{2}\right)^{-1}\exp\left[-i\frac{2m}{3H}\left(1+\frac{\tau}{2}\right)^3\right]\end{aligned} \tag{A.34}$$

Límite $k\to\infty$ En este caso estamos interesados en el límite $k\gg m/H$, con lo cual la ecuación a resolver es

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+k^2-\frac{1/2}{(1+\tau/2)^2}\right]\psi_{lk}^R(\tau)=0 \tag{A.35}$$

Proponiendo como solución

$$\psi_{lk}^R(\tau)=\left(1+\frac{\tau}{2}\right)^{1/2}f_{lk}^R\left[2k\left(1+\frac{\tau}{2}\right)\right] \tag{A.36}$$

obtenemos nuevamente una ecuación de Bessel para f_{lk}^R. Y en este caso los modos normalizados de frecuencia positiva están dados por

$$\psi_{lk}^R(\tau)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{\tau}{2}\right)^{1/2}H_{3/2}^{(2)}\left[2k\left(1+\frac{\tau}{2}\right)\right] \tag{A.37}$$

A.3 Cálculo de los coeficientes de Bogoliubov

En esta sección procedemos a calcular los coeficientes de Bogoliubov para las transiciones inflación - radiación (recalentamiento instantáneo) e inflación - recalentamiento. Para

este último escenario no consideramos la creación de partículas debida a la transición recalentamiento - radiación por ser ésta una transición suave.

Asumiendo que la transición de inflación a cualquiera de las otras etapas se produjo a $\tau = 0$, en ese instante se verfica

$$\psi_k^I(0) = \alpha_k \psi_k(0) + \beta_k \psi_k^*(0) \tag{A.38}$$
$$\dot{\psi}_k^I(0) = \alpha_k \dot{\psi}_k(0) + \beta_k \dot{\psi}_k^*(0) \tag{A.39}$$

donde $\psi_k(0)$ representa el modo de frecuencia positiva en alguna de esas eras. A partir de la ecuación anterior se deduce directamente que

$$\alpha_k = \frac{\psi_k^I(0)\,\dot{\psi}_k^*(0) - \psi_k^*(0)\,\dot{\psi}_k^I(0)}{\psi_k(0)\,\dot{\psi}_k^*(0) - \psi_k^*(0)\,\dot{\psi}_k(0)} \tag{A.40}$$

$$\beta_k = \frac{\psi_k(0)\,\dot{\psi}_k^I(0) - \psi_k^I(0)\,\dot{\psi}_k(0)}{\psi_k(0)\,\dot{\psi}_k^*(0) - \psi_k^*(0)\,\dot{\psi}_k(0)} \tag{A.41}$$

donde las últimas igualdades se deben a que los modos usados para el cálculo están ortonormalizados. En las dos siguientes subsecciones particularizamos estas expresiones para las transiciones mencionadas.

A.3.1 Transición inflación - radiación

El cálculo de estos coeficientes es relativamente difícil debido a las características de las funciones hipergeométricas confluentes. Calculando las derivadas temporales de los modos y aproximando en ambos conjuntos de modos $m/H \ll 1$ nos queda

$$\alpha_k^{I\gamma} \simeq \pi \left\{ \left(\frac{H}{m}\right)^{1/4} \frac{ik^{1/2}}{2^{1/2}\Gamma(3/4)} F_2(k) + \left(\frac{m}{H}\right)^{1/4} \frac{(1+i)}{2\Gamma(1/4)} \left[F_1(k) + F_2(k)\right] \right\} \tag{A.42}$$

$$\beta_k^{I\gamma} \simeq \pi \left\{ -\left(\frac{H}{m}\right)^{1/4} \frac{ik^{1/2}}{2^{1/2}\Gamma(3/4)} F_2(k) + \left(\frac{m}{H}\right)^{1/4} \frac{(i-1)}{2\Gamma(1/4)} \left[F_1(k) + F_2(k)\right] \right\} \tag{A.43}$$

$$F_1(k) = e^{i\pi} H_{3/2}^{(1)}(k) \tag{A.44}$$
$$F_2(k) = e^{i\pi} k^{1/2} \left[\frac{2}{k^{1/2}} H_{3/2}^{(1)}(k) - k^{1/2} H_{5/2}^{(1)}(k) \right] \tag{A.45}$$

con lo cual

$$\alpha_k^{I\gamma} \simeq \sqrt{\pi} \left\{ -\left(\frac{H}{m}\right)^{1/4} \frac{k^{-3/2}}{2\Gamma(3/4)} + i \left(\frac{H}{m}\right)^{1/4} \frac{k^{-1/2}}{2\Gamma(3/4)} \right. \tag{A.46}$$
$$\left. + \left(\frac{H}{m}\right)^{1/4} \frac{k^{1/2}}{2^{1/2}\Gamma(3/4)} + \left(\frac{m}{H}\right)^{1/4} \frac{(i-1)\,k^{1/2}}{\sqrt{2}\Gamma(1/4)} \right\}$$

$$\beta_k^{I\gamma} \simeq \sqrt{\pi}\left\{\left(\frac{H}{m}\right)^{1/4}\frac{k^{-3/2}}{2\Gamma(3/4)} - i\left(\frac{H}{m}\right)^{1/4}\frac{k^{-1/2}}{2\Gamma(3/4)}\right. \tag{A.47}$$
$$\left. - \left(\frac{H}{m}\right)^{1/4}\frac{k^{1/2}}{2\Gamma(3/4)} + \left(\frac{m}{H}\right)^{1/4}\frac{(1+i)\,k^{1/2}}{\sqrt{2}\Gamma(1/4)}\right\}$$

A.3.2 Transición inflación - recalentamiento

Este cálculo es muy sencillo ya que en ambos límites los cálculos involucran funciones de Bessel de orden semi-entero, que pueden expresarse como polinomios.

Para $k \ll m/H$ obtenemos

$$\alpha_{sk}^{IR} = -\left(\frac{H}{2m}\right)^{1/2}\frac{1}{\sqrt{2k}}\left[\frac{3}{2} - i\frac{m}{H} + \frac{3i}{2k} + \frac{m}{Hk} - ik\right]\exp\left[i\frac{2}{3}\frac{m}{H} + ik\right] \tag{A.48}$$

$$\beta_{sk}^{IR} = -\left(\frac{H}{2m}\right)^{1/2}\frac{1}{\sqrt{2k}}\left[\frac{3}{2} + i\frac{m}{H} + \frac{3i}{2k} - \frac{m}{Hk} - ik\right]\exp\left[-i\frac{2}{3}\frac{m}{H} + ik\right] \tag{A.49}$$

Para $k \gg m/H$ obtenemos

$$\alpha_{lk}^{IR} = e^{i3k}\left[1 + \frac{3i}{2k} - \frac{9}{8k^2} - \frac{3i}{8k^3}\right] \tag{A.50}$$

$$\beta_{lk}^{IR} = e^{-ik}\left[\frac{3}{8k^2} - \frac{3i}{8k^3}\right] \tag{A.51}$$

Apéndice B

Cálculo de los coeficientes de Bogoliubov para un campo fermiónico

En esta sección mostramos que la creación de partículas para un campo fermiónico es despreciable en comparación con la que se produce para un campo escalar. La explicación para esto reside en el hecho que para fermiones los acoplamientos conforme y mínimo a la curvatura escalar coinciden.

Las expresiones de los factores de escala para las etapas inflacionaria y de radiación fueron halladas en las secciones anteriores.

La ecuación de Dirac para un campo spinorial en un universo de Friedmann Robertson Walker es [72, 73]

$$\left[i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - \frac{m}{H}a(\tau)\right]\chi(\tau,\vec{x}) = 0 \tag{B.1}$$

donde $\chi(\tau,\vec{x}) = a^{3/2}(\tau)\,\psi(\tau,\vec{x})$. La corriente eléctrica está dada por

$$j^{\mu} = e\bar{\chi}(\tau,\vec{x})\,\gamma^{\mu}\chi(\tau,\vec{x}) \tag{B.2}$$

donde $\bar{\chi}(\tau,\vec{x}) = \chi^{\dagger}(\tau,\vec{x})\,\gamma^{0}$ es el spinor adjunto de Dirac. Los spinores de energía positiva y negativa, u_{ks} y v_{ks} están dados por

$$u_{ks} = \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}.\vec{k}}{k^2}\left[\frac{m}{H}a(\tau) + i\frac{\dot{f}_k(\tau)}{f_k(\tau)}\right]C_s \\ C_s \end{pmatrix} f_k(\tau)\,e^{i\vec{k}.\vec{x}} \tag{B.3}$$

$$v_{ks} = \begin{pmatrix} C_s \\ \frac{\vec{\sigma}.\vec{k}}{k^2}\left[\frac{m}{H}a(\tau) - i\frac{\dot{f}_k^*(\tau)}{f_k^*(\tau)}\right]C_s \end{pmatrix} f_k^*(\tau)\,e^{-i\vec{k}.\vec{x}} \tag{B.4}$$

donde $f_k(\tau)$ es la solución de frecuencia positiva de la ecuación

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial^2\tau} + k^2 + \frac{m^2}{H^2}a^2(\tau) - i\frac{m}{H}\dot{a}(\tau)\right] f_k(\tau) = 0 \tag{B.5}$$

Los spinores se normalizan de acuerdo con el producto escalar (independiente del tiempo)

$$\int_\Sigma d\Sigma\bar{\chi}\gamma^0\chi \tag{B.6}$$

donde Σ es una hipersuperficie espacial.

La ecuación de Dirac para la etapa inflacionaria es

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial^2\tau} + k^2 + \frac{m^2/H^2 - im/H}{(1-\tau)^2}\right] f_k^I(\tau) = 0 \tag{B.7}$$

Las soluciones de la ecuación de Dirac que corresponden a frecuencia positiva para $\tau \to -\infty$ están dadas por

$$f_k^I(\tau) = (1-\tau)^{1/2} H_\nu^{(1)}[k(1-\tau)], \qquad \nu \simeq \frac{1}{2} + i\frac{m}{H} \tag{B.8}$$

El valor del órden de la función de Hankel ya es un indicador de que en este caso la potencia inversa de k en los coeficientes de Bogoliubov será $1/2$ lo cual no producirá un aumento divergente en el número de partículas creadas para $k \to 0$.

La ecuación de Dirac para la etapa dominada por la radiación es

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial^2\tau} + k^2 + \frac{m^2}{H^2}(1+\tau)^2 - i\frac{m}{H}\right] f_k^R(\tau) = 0 \tag{B.9}$$

En este caso y para obviar cálculos pesados, vamos a usar la aproximación WKB para estimar el número de partículas creadas. Esta aproximación a lo sumo puede cambiar el orden de magnitud de las constantes en los coeficientes, pero no su dependencia funcional con k. En esta aproximación los modos pueden expresarse [71]

$$\begin{aligned} f_k^I(\tau) &\simeq \exp\left[i\frac{m}{H}\frac{(1+\tau)^2}{2}\right] \\ f_k^{I*}(\tau) &\simeq \exp\left[i\frac{m}{H}\frac{(1+\tau)^2}{2}\right]\int_{z(\tau)}^{\infty}\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)ds \end{aligned} \tag{B.10}$$

donde $z(\tau)(1+i)(m/H)^{1/2}(1+\tau)$. Pidiendo continuidad de los modos y sus derivadas en el momento de la transición obtenemos los coeficientes de Bogoliubov, que en este caso son

$$\begin{aligned} \alpha_k &\sim -\frac{i}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2} + im\right)\exp\left(\frac{im}{2}\right)\left(\frac{2}{k}\right)^{1/2+im} \\ \beta_k &\sim -\frac{i}{\pi}\Gamma\left(-\frac{1}{2} + im\right)\exp\left(\frac{im}{2}\right)\left(\frac{2}{k}\right)^{1/2+im} k^2 \end{aligned} \tag{B.11}$$

Vemos que efectivamente en este caso no hay divergencia infrarroja lo que significa que se crean muy pocas partículas y por lo tanto la corriente eléctrica producida es muy pequeña.

Apéndice C

Electrodinámica escalar autoconsistente: acción efectiva irreducible de dos partículas y camino temporal cerrado, y aproximación *1/N*.

En este apéndice derivamos las ecuaciones autoconsistentes, causales, para la electrodinámica escalar, en la aproximación de N grande, usando la formulación de camino temporal cerrado de la teoría de campos en el universo de Friedmann-Robertson-Walker [64, 65]. Esta formulación permite identificar correctamente los diagramas de Feynmann que contribuyen en cada orden de la expansión $1/N$ de las ecuaciones.

El punto de partida para su obtención es la acción para un conjunto de N campos escalares cargados, acoplados al campo electromagnético, que en espacio-tiempo curvo es

$$\begin{aligned} S_F\left(\phi_i, \phi_i^\dagger, A_\mu\right) &= -\int d^4x\sqrt{-g}\left\{g^{\mu\nu}\left(\partial_\mu - ieA_\mu\right)\phi_i\left(\partial_\nu + ieA_\nu\right)\phi_i^\dagger\right. \\ &\left. + \left(m^2 + \chi R^2\right)\phi_i\phi_i^\dagger + \frac{1}{4}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\zeta}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\partial_\mu A_\alpha\partial_\nu A_\beta\right\} \end{aligned} \tag{C.1}$$

donde $x = (t, \bar{r})$, e es la carga eléctrica, $g^{\mu\nu}$ el tensor métrico, $\sqrt{-g}$ el determinante de la métrica, χ la constante de acoplamiento del campo escalar a la gravedad y ζ la constante de fijado de gauge electromagnético. Asumimos que índices repetidos representan suma respecto de ellos.

El campo escalar complejo puede expresarse en términos de dos campos reales según $\phi = [\phi_1 + i\phi_2]/\sqrt{2}$ y $\phi^\dagger = [\phi_1 - i\phi_2]/\sqrt{2}$. Para implementar el límite N grande, es conveniente re-escalear los campos y constantes de acoplamiento según

$$\phi_n^i \to \sqrt{N}\phi_n^i, \quad A_\mu \to \sqrt{N}A_\mu, \quad e \to \frac{e}{\sqrt{N}} \tag{C.2}$$

obteniendo

$$
\begin{aligned}
S_F^N &= -N\int d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi_1^i\partial_\nu\phi_2^i+\frac{1}{2}\left(m^2+\chi R^2\right)\left(\phi_1^{i2}+\phi_2^{n2}\right)\right. \qquad \text{(C.3)}\\
&+g^{\mu\nu}eA_\mu\left(\partial_\nu\phi_1^n\phi_2^n-\phi_1^n\partial_\nu\phi_2^n\right)+\frac{e^2}{2}g^{\mu\nu}A_\mu A_\nu\left(\phi_1^{n2}+\phi_2^{n2}\right)\\
&\left.+\frac{1}{4}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}-\frac{1}{2\zeta}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\partial_\mu A_\alpha\partial_\nu A_\beta\right\}
\end{aligned}
$$

lo que significa que cada vértice aparece N veces.

C.1 Funcional generatriz de camino temporal cerrado para N campos escalares en espacio-tiempo curvo

La funcional generatriz de camino temporal cerrado para las funciones de n puntos se obtiene acoplando los campos escalar y electromagnético a fuentes $J_a(x)$ en cada uno de los caminos temporales

$$
\begin{aligned}
Z[J,K] &= \mathcal{Z}_G\int\prod_{n=1}^{N}DA_\pm^\mu D\phi_{1\pm}^n D\phi_{2\pm}^n\exp\left\{iS_F^N\left[\phi_{1\pm}^n,\phi_{2\pm}^n,A_\pm^\mu\right]\right.\\
&+i\int d^4x\sqrt{-g}C^{ab}\left[J_a^{in}(x)\,\phi_{ib}^n(x)+J_a^\mu(x)\,A_{\mu b}(x)\right]\\
&+\frac{i}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\int d^4x'\sqrt{-g'}C^{ab}C^{de}\\
&\times\left[K_{ad}^{ijnm}(x,x')\,\phi_b^{in}(x)\,\phi_e^{jm}(x)+K_{ad}^{\mu\nu}(x,x')\,A_{\mu b}(x)\,A_{\nu e}(x')\right] \qquad \text{(C.4)}\\
&+\frac{i}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\int d^4x'\sqrt{-g'}C^{ab}C^{de}\\
&\left.\times K_{ad}^{in\mu}(x,x')\left[\phi_b^{in}(x)\,A_{\mu e}(x')+\phi_e^{in}(x')\,A_{\mu b}(x')\right]\right\}\\
&\equiv \exp\left[iW(J,K)\right]
\end{aligned}
$$

$$
S_F^N\left[\phi_{1\pm}^n,\phi_{2\pm}^n,A_\pm^\mu\right]=S_F^N\left[\phi_{1+}^n,\phi_{2+}^n,A_+^\mu\right]-S_F^N\left[\phi_{1-}^n,\phi_{2-}^n,A_-^\mu\right] \qquad \text{(C.5)}
$$

donde el signo "mas" (menos) corresponde a dirección temporal directa (inversa), $n,m=1\ldots N.$ e $i,j=1$ o 2 y $\mathcal{Z}_G$ es un factor constante global que proviene de la integración de los campos fantasma incluídos en la acción para garantizar que el resultado es invariante de gauge. Como estamos considerando campos de gauge Abelianos, esa integral se desacopla de las otras. De ahora en más, omitimos $\mathcal{Z}_G$ en los cálculos que siguen. C^{ab} es la métrica de camino temporal cerrado, cuyas componentes son

$$
C_{11}=1;\quad C_{22}=-1;\quad C_{12}=C_{21}=0 \qquad \text{(C.6)}
$$

La funcional generatriz para funciones *conexas* de n puntos está dada por

$$W = -i \ln Z\left[J, K\right] \tag{C.7}$$

A partir de ella definimos los valores medios

$$\hat{\phi}_{ia}^{n}\left(x\right) = C^{ab}\frac{\delta W}{\delta J_{ib}^{n}\left(x\right)}, \quad \hat{A}_{\mu a}\left(x\right) = C^{ab}\frac{\delta W}{\delta J_{b}^{\mu}\left(x\right)} \tag{C.8}$$

y las funciones de dos puntos

$$\hat{\phi}_{ia}^{n}\left(x\right)\hat{\phi}_{jb}^{m}\left(x'\right) + G_{ijab}^{nm}\left(x,x'\right) = 2C^{ar}C^{bs}\frac{\delta W}{\delta K_{rs}^{ijnm}\left(x,x'\right)} \tag{C.9}$$

$$\hat{A}_{\mu a}\left(x\right)\hat{A}_{\nu b}\left(x'\right) + D_{\mu\nu ab}\left(x,x'\right) = 2C^{ar}C^{bs}\frac{\delta W}{\delta K_{rs}^{\mu\nu}\left(x,x'\right)} \tag{C.10}$$

$$\frac{1}{2}\left[\hat{\phi}_{ia}^{n}\left(x\right)\hat{A}_{\mu b}\left(x'\right) + \hat{\phi}_{ia}^{n}\left(x'\right)\hat{A}_{\mu b}\left(x\right)\right] + H_{iab}^{n\mu}\left(x,x'\right) = 2C^{ar}C^{bs}\frac{\delta W}{\delta K_{irs}^{n\mu}\left(x,x'\right)} \tag{C.11}$$

C.2 Acción efectiva irreducible de dos partículas

La acción efectiva irreducible de dos partículas y camino temporal cerrado se define como

$$\begin{aligned}
\Gamma \;=\; & W - C^{ab}\int d^4x\sqrt{-g}\hat{\phi}_{a}^{in}\left(x\right)J_{b}^{in}\left(x\right) - C^{ab}\int d^4x\sqrt{-g}\hat{A}_{\mu a}\left(x\right)J_{b}^{\mu}\left(x\right) \\
& -\frac{1}{2}C^{ar}C^{bs}\int d^4x\sqrt{-g}\int d^4x'\sqrt{-g'} \\
& \times K_{ijab}^{nm}\left(x,x'\right)\left[\hat{\phi}_{ir}^{n}\left(x\right)\hat{\phi}_{js}^{m}\left(x'\right) + G_{ijrs}^{nm}\left(x,x'\right)\right] \\
& -\frac{1}{2}C^{ar}C^{bs}\int d^4x\sqrt{-g}\int d^4x'\sqrt{-g'} \\
& \times K_{ab}^{\mu\nu}\left(x,x'\right)\left[\hat{A}_{\mu r}\left(x\right)\hat{A}_{\nu s}\left(x'\right) + D_{\mu\nu rs}\left(x,x'\right)\right]
\end{aligned} \tag{C.12}$$

donde no hemos considerado términos que mezclan valores medios porque como vamos a trabajar con un sistema para el cual los valores medios de los campos son nulos, estos términos darán lugar a otros dependientes de los valores medios, y por lo tanto nulos.

A partir de esta acción definimos las fuentes

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\Gamma}{\delta\hat{\phi}_{ia}^{n}\left(x\right)} \;=\; & -C^{ab}\sqrt{-g}J_{b}^{in}\left(x\right) \\
& -\frac{1}{2}C^{ar}C^{bs}\int d^4x'\sqrt{-g}\sqrt{-g'}\left[K_{ijbr}^{nm}\left(x,x'\right) + K_{ijrb}^{nm}\left(x,x'\right)\right]\hat{\phi}_{js}^{m}\left(x'\right) \\
& -\frac{1}{2}C^{ar}C^{bs}\int d^4x'\sqrt{-g'}\left[K_{irb}^{\mu n}\left(x,x'\right) + K_{ibr}^{\mu n}\left(x,x'\right)\right]\hat{A}_{\mu s}\left(x'\right)
\end{aligned} \tag{C.13}$$

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\hat{A}_{\mu a}(x)} = -C^{ab}\sqrt{-g}J_b^{\mu}(x) \tag{C.14}$$
$$-\frac{1}{2}C^{ar}C^{bs}\int d^4x'\sqrt{-g}\sqrt{-g'}\left[K_{br}^{\mu\nu}(x,x')+K_{rb}^{\mu\nu}(x,x')\right]\hat{A}_{\nu s}(x')$$
$$-\frac{1}{2}C^{ar}C^{bs}\int d^4x'\sqrt{-g'}\left[K_{irb}^{\mu n}(x,x')+K_{ibr}^{\mu n}(x,x')\right]\hat{\phi}_{is}^{n}(x')$$

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta G_{rs}^{ijnm}(x,x')} = -\frac{1}{2}C^{ar}C^{bs}\sqrt{-g}\sqrt{-g'}K_{ijab}^{nm}(x,x') \tag{C.15}$$

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta D_{\mu\nu rs}(x,x')} = -\frac{1}{2}C^{ar}C^{bs}\sqrt{-g}\sqrt{-g'}K_{ab}^{\mu\nu}(x,x') \tag{C.16}$$

Invirtiendo estas expresiones, reemplazándolas en la acción efectiva y redefiniendo los campos como

$$\phi_a^{in}(x) = \hat{\phi}_a^{in}(x)+\varphi_a^{in}(x) \tag{C.17}$$
$$A_{\mu r}(x) = \hat{A}_{\mu r}(x)+a_{\mu r}(x) \tag{C.18}$$

obtenemos

$$\Gamma = C^{ap}C^{sq}\int d^4x\int d^4x'\left[\frac{\delta\Gamma}{\delta G_{pq}^{ijnm}(x,x')}G_{rs}^{ijnm}(x,x')+\frac{\delta\Gamma}{\delta D_{\mu\nu pq}(x,x')}D_{\mu\nu as}(x,x')\right]$$
$$-i\ln\int_{CTP}D\varphi Da_\mu\exp\left\{iS_F^N - iC^{ap}\int d^4x\left[\frac{\delta\Gamma}{\delta\hat{\phi}_p^{in}(x)}\varphi_a^{in}(x)+\frac{\delta\Gamma}{\delta\hat{A}_{\mu p}(x)}\varphi_a^{in}(x)\right]\right. \tag{C.19}$$
$$\left. - iC^{ap}C^{sq}\int d^4x\int d^4x'\left[\frac{\delta\Gamma}{\delta G_{pq}^{ijnm}(x,x')}\varphi_s^{jm}(x')\varphi_a^{in}(x)+\frac{\delta\Gamma}{\delta D_{\mu\nu pq}(x,x')}\varphi_a^{\mu}(x)a_s^{\nu}(x')\right]\right\}$$

Esta expresión puede interpretarse como una ecuación implícita cuya solución es la acción efectiva. Formalmente esta solución puede ser escrita como [62]

$$\Gamma = S_F^N - i\ln\det\left[G_1^{-1}\right] - i\ln\det\left[G_2^{-1}\right] - i\ln\det\left[D_{\mu\nu}^{-1}\right]+\Gamma_2 \tag{C.20}$$

donde Γ_2 es $-i\hbar$ veces todos los diagramas de vacío de dos partículas irreducibles, cuyas líneas están dadas por G_{iab} y cuyos vértices dados por la acción redefinida S_{int} dada por

$$S_{int}[\varphi] = S\left[\hat{\phi}+\varphi\right]-S\left[\hat{\phi}\right]-C^{ab}\int d^4x\frac{\delta S}{\delta\phi_a}\left[\hat{\phi}\right]\varphi_b \tag{C.21}$$
$$-C^{ab}C^{a'b'}\int d^4x\int d^4x'\frac{\delta^2 S}{\delta\phi_a(x)\,\delta\phi_{a'}(x')}\left[\hat{\phi}\right]\varphi_b(x)\varphi_{b'}(x')$$

Escribiendo

$$\mathcal{G}^{ij}_{nab}\left(x,x'\right) = \frac{\delta^2 S_F}{\delta\phi^i_{na}\left(x\right)\delta\phi^j_{nb}\left(x'\right)} \tag{C.22}$$

$$\mathcal{D}^{\mu\nu}_{ab}\left(x,x'\right) = \frac{\delta^2 S_F}{\delta A_{\mu a}\left(x\right)\delta A_{\nu b}\left(x'\right)}, \tag{C.23}$$

haciendo los escaleos

$$\begin{aligned}
G^{ij}_{1ab} &\rightarrow \frac{1}{N}G_{1ab}\delta^{ij} \\
G^{ij}_{2ab} &\rightarrow \frac{1}{N}G_{2ab}\delta^{ij} \\
D^{ab}_{\mu\nu}\left(x,x'\right) &\rightarrow \frac{1}{N}D^{ab}_{\mu\nu}\left(x,x'\right) \\
\mathcal{G}^{ij}_{1ab}\left(x,x'\right) &\rightarrow N\mathcal{G}_{1ab}\left(x,x'\right)\delta^{ij} \\
\mathcal{G}^{ij}_{2ab}\left(x,x'\right) &\rightarrow N\mathcal{G}_{2ab}\left(x,x'\right)\delta^{ij} \\
\mathcal{D}^{\mu\nu}_{ab}\left(x,x'\right) &\rightarrow N\mathcal{D}^{\mu\nu}_{ab}\left(x,x'\right)
\end{aligned} \tag{C.24}$$

y tomando en cuenta que cada lazo de campo escalar debe ser contado N veces, que cada traza sobre los índices del campo escalar también cuenta N veces y que hay un factor N global en la acción, la acción efectiva es

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{i}{2}N\ln\det\left[\left(G_1\right)^{-1}\right] + \frac{i}{2}N\ln\det\left[\left(G_2\right)^{-1}\right] + \frac{i}{2}\ln\det\left[\left(D^{\mu\nu}\right)^{-1}\right] \\
&+ \frac{N^2}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\int d^4x'\sqrt{-g'}\mathcal{G}_{1ab}\left(x,x'\right)G_{1ab}\left(x,x'\right) \\
&+ \frac{N^2}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\int d^4x'\sqrt{-g'}\mathcal{G}_{2ab}\left(x,x'\right)G_{2ab}\left(x,x'\right) \\
&+ \frac{N}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\int d^4x'\sqrt{-g'}\mathcal{D}^{\mu\nu}_{ab}\left(x,x'\right)D^{ab}_{\mu\nu}\left(x,x'\right) \\
-N &\ \frac{e^2}{2}C^{abcd}\int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}(x)D^{ab}_{\mu\nu}\left(x,x\right)\left[G_{1cd}\left(x,x\right)+G_{2cd}\left(x,x\right)\right] \\
&+ iN\frac{e^2}{2}C^{abc}C^{a'b'c'}\int d^4x\sqrt{-g}\int d^4x'\sqrt{-g'}D^{aa'}_{\mu\nu}\left(x,x'\right)g^{\mu\alpha}\left(x\right)g^{\nu\beta}\left(x'\right) \\
&\quad\times\left[G_{1bb'}\left(x,x'\right)\overline{\partial}_\alpha\overline{\partial}'_\beta G_{2cc'}\left(x,x'\right)\right]
\end{aligned} \tag{C.25}$$

con G^{ab} el propagador para el campo escalar, y $D^{\mu\nu}_{ab}$ el propagador para el campo electromagnético. La barra denota $\leftrightarrow$.

Se puede comprobar fácilmente que no hay más lazos que contribuyan a la acción efectiva irreducible de dos puntos, a este orden en el desarrollo *1/N*. En efecto, consideremos un gráfico que es de orden N^0: agregar un propagador escalar significa agregar dos vértices (y por lo tanto multiplicar por N^{-2}), una línea (otro N^{-1}) y una integral

en los momentos (un factor N), lo que da un gráfico que es de orden N^{-2}. Agregar un propagador electromagnético también implica agregar dos vértices y una línea, pero esta vez no hay integración en los momentos y por lo tanto el gráfico resultante es de orden N^{-3}.

C.3 Ecuación para el propagador del campo escalar

La ecuación de evolución para el propagador del campo escalar se obtiene tomando la derivada funcional de la acción efectiva con respecto a la función de dos puntos considerada, es decir

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Gamma}{\delta G_{1ab}} &= -\frac{i}{2}NG^{-1}_{ab}+\frac{1}{2}N\mathcal{G}_{1ab}\left(x,x'\right)\\ &\quad -i\frac{e^2}{2}g^{\mu\nu}\left(x\right)C^{abcd}D^{ab}_{\mu\nu}\left(x,x'\right)\delta\left(x-x'\right)\\ &\quad +\frac{e^2}{2}C^{acd}C^{bc'd'}D^{cc'}_{\mu\nu}\left(x,x'\right)\overline{\partial}_{\alpha}\overline{\partial}'_{\beta}G_{2dd'}\left(x,x'\right)=0\end{aligned} \tag{C.26}$$

de donde, a orden más bajo en el desarrollo $1/N$ tenemos

$$iG^{-1}_{ab}\left(x,x'\right)=\mathcal{G}_{1ab}\left(x,x'\right) \tag{C.27}$$

Reemplazando la expresión para $\mathcal{G}_{1ab}\left(x,x'\right)$ obtenemos

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\mu}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right)\partial_{\nu}+g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}-\left(m^2+\chi\mathcal{R}\right)\right\}C_{ab}G^{bc}\left(x,x'\right)\\ &=\frac{i}{\sqrt{-g}}\delta^{c}_{a}\delta\left(x-x'\right)\end{aligned} \tag{C.28}$$

donde la función delta de Dirac es función de las coordenadas. Vemos que a este orden en $1/N$, las ecuaciones para los campos escalar y electromagnético se desacoplan y por lo tanto no hay retroacción del campo electromagnético sobre sus fuentes.

C.4 Ecuación para el propagador electromagnético

Está dada por

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Gamma}{\delta D_{\mu\nu}} &= -\frac{i}{2}ND^{\mu\nu-1}_{ab}+\frac{1}{2}N\mathcal{D}^{\mu\nu}_{ab}\left(x,x'\right)-N\frac{e^2}{2}\left[G_{1ab}\left(x,x\right)+G_{2ab}\left(x,x\right)\right]\\ &\quad +iN\frac{e^2}{2}C^{acd}C^{bc'd'}g^{\mu\alpha}\left(x\right)g^{\nu\beta}\left(x'\right)\left[G_{1cc'}\left(x,x'\right)\overline{\partial}_{\alpha}\overline{\partial}'_{\beta}G_{2dd'}\left(x,x'\right)\right]\\ &= 0\end{aligned} \tag{C.29}$$

donde el factor N en el término $ND_{ab}^{\mu\nu\,-1}$ proviene del escaleo de la inversa del propagador. Esta ya es la ecuación a orden más bajo en $1/N$. Despejando $\mathcal{D}_{ab}^{\mu\nu}(x,x')$:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{ab}^{\mu\nu}(x,x') &= \sqrt{-g(x)}\left\{g^{\mu\nu}(x)\,\Box_x + \left(1-\frac{1}{\zeta}\right)g^{\mu\alpha}(x)\,g^{\nu\beta}(x)\,\partial_\alpha\partial_\beta\right.\\ &\quad -\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\alpha\left[\sqrt{-g}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\right]A_\beta F_{\mu\nu}\\ &\quad \left.-\frac{1}{\xi\sqrt{-g}}\partial_\mu\left[\sqrt{-g}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\right]A_\alpha\partial_\nu A_\beta\right\}C_{ab} \qquad \text{(C.30)}\\ &\equiv \Delta_{ab}^{\mu\nu}(x,x')\end{aligned}$$

la ecuación para el propagador electromagnético queda

$$\begin{aligned}&\Delta_{ab}^{\mu\nu}(x,x')\,D_{\nu\rho}^{bf}(x,x') - e^2 g^{\mu\nu}(x)\left[G_{1ab}(x,x)+G_{2ab}(x,x)\right]D_{\nu\rho}^{bf}(x,x')\\ &+ie^2 C^{acd}C^{bc'd'}\int dx''\sqrt{-g(x'')}g^{\mu\alpha}(x)\,g^{\nu\beta}(x'') \qquad \text{(C.31)}\\ &\times\left[G_{1cc'}(x,x'')\,\overline{\partial}_\alpha\overline{\partial}'_\beta G_{2dd'}(x,x'')\right]D_{\nu\rho}^{bf}(x'',x')\\ &=i\delta_{\mu\rho}\delta_{af}\frac{1}{\sqrt{-g(x)}}\delta(x-x')\end{aligned}$$

C.5 Cambiando a tiempo conforme

Definiendo el tiempo conforme $d\eta = dt/a(t)$, usando $\tau = H\eta$ y haciendo los escaleos

$$G_{iab}(x,x') \to \frac{G_{iab}(x,x')}{a(\tau)\,a(\tau')} \qquad \text{(C.32)}$$

puede comprobarse por un cálculo directo que la ecuación para el propagador escalar queda

$$\left\{\Box_x - \frac{m^2}{H^2}a^2(\tau) - (6\chi-1)\frac{\ddot{a}(\tau)}{a(\tau)}\right\}C_{ab}G^{bc}(x,x') = i\delta_a^c\delta(x-x') \qquad \text{(C.33)}$$

y

$$\begin{aligned}&\left[\tau^{\mu\nu}\Box_x + \left(1-\frac{1}{\zeta}\right)\tau^{\mu\alpha}\tau^{\nu\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\right]C_{ab}D_{\nu\rho}^{bf}(x,x')\\ &-e^2\Gamma_{cd}^{\mu\nu}(x,x')\,D_{\nu\rho}^{bf}(x,x') + ie^2 C^{acd}C^{bc'd'}\int dx''\Sigma_{cc',dd'}^{\mu\nu}(x,x')\,D_{\nu\rho}^{bf}(x'',x')\\ =\;& i\delta_{\mu\rho}\delta_{af}\delta(x-x') \qquad \text{(C.34)}\end{aligned}$$

donde

$$\Box_x = \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta = -\partial_0^2 + \nabla^2 \qquad \text{(C.35)}$$

y

$$\Gamma^{\mu\nu}_{cd}(x,x) \equiv \eta^{\mu\nu}\left[G_{1cd}(x,x) + G_{2cd}(x,x)\right] \tag{C.36}$$

$$\Sigma^{\mu\nu}_{cc',dd'} \equiv \eta^{\mu\alpha}(x)\eta^{\nu,3}(x^{"})\left[G_{1cc'}(x,x^{"})\,\overline{\partial}_{\alpha}\overline{\partial}''_{\beta}G_{2dd'}(x,x^{"})\right] \tag{C.37}$$

Para no cargar la notación, usamos x también como variable adimensional.

C.6 Ecuaciones para los propagadores electromagnéticos retardado y de Hadamard

En esta sección vamos a encontrar las ecuaciones para los propagadores retardado y de Hadamard. El último posee toda la información que necesitamos acerca del estado del campo electromagnético, mientras que el primero permite estudiar la evolución del campo, dadas las condiciones iniciales. Usando las definiciones de los propagadores según el valor de los índices de camino temporal cerrado, tenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
&\left[\eta^{\mu\nu}\Box_x + \left(1-\frac{1}{\zeta}\right)\partial^{\mu}\partial^{\nu} - e^2\Gamma^{\mu\nu}_{11}(x,x)\right] D^{11}_{\nu\gamma}(x,x') \\
&+ie^2\int dx^{"}\,\Sigma^{\mu\nu}_{11,11}(x,x^{"})\,D^{11}_{\nu\gamma}(x^{"},x') \\
&-ie^2\int dx^{"}\,\Sigma^{\mu\nu}_{12,12}(x,x^{"})\,D^{21}_{\nu\gamma}(x^{"},x') = i\delta^{\mu}_{\gamma}\delta(x-x')
\end{aligned} \tag{C.38}$$

$$\begin{aligned}
&\left[\eta^{\mu\nu}\Box_x + \left(1-\frac{1}{\zeta}\right)\partial^{\mu}\partial^{\nu} - e^2\Gamma^{\mu\nu}_{11}(x,x)\right] D^{12}_{\nu\gamma}(x,x') \\
&+ie^2\int dx^{"}\,\Sigma^{\mu\nu}_{11,11}(x,x^{"})\,D^{12}_{\nu\gamma}(x^{"},x') \\
&-ie^2\int dx^{"}\,\Sigma^{\mu\nu}_{12,12}(x,x^{"})\,D^{22}_{\nu\gamma}(x^{"},x') = 0
\end{aligned} \tag{C.39}$$

$$\begin{aligned}
&\left[\eta^{\mu\nu}\Box_x + \left(1-\frac{1}{\zeta}\right)\partial^{\mu}\partial^{\nu} - e^2\Gamma^{\mu\nu}_{22}(x,x)\right] D^{21}_{\nu\gamma}(x,x') \\
&+ie^2\int dx^{"}\,\Sigma^{\mu\nu}_{21,21}(x,x^{"})\,D^{11}_{\nu\gamma}(x^{"},x') \\
&-ie^2\int dx^{"}\,\Sigma^{\mu\nu}_{22,22}(x,x^{"})\,D^{21}_{\nu\gamma}(x^{"},x') = 0
\end{aligned} \tag{C.40}$$

$$\left[\eta^{\mu\nu}\Box_x + \left(1-\frac{1}{\zeta}\right)\partial^\mu\partial^\nu - e^2\Gamma_{22}^{\mu\nu}(x,x)\right] D_{\nu\gamma}^{22}(x,x') \tag{C.41}$$
$$+ie^2\int dx"\,\Sigma_{21,21}^{\mu\nu}(x,x")\,D_{\nu\gamma}^{12}(x",x')$$
$$-ie^2\int dx"\,\Sigma_{22,22}^{\mu\nu}(x,x")\,D_{\nu\gamma}^{22}(x",x') = -i\delta_\gamma^\mu\delta(x-x')$$

Restando miembro a miembro las dos primeras (o las dos últimas) ecuaciones y definiendo $\Sigma_{ret}^{\mu\nu} \equiv \Sigma_{11,11}^{\mu\nu} - \Sigma_{12,12}^{\mu\nu} \equiv \Sigma_{21,21}^{\mu\nu} - \Sigma_{22,22}^{\mu\nu}$, obtenemos

$$\left[\eta^{\mu\nu}\Box_x + \left(1-\frac{1}{\zeta}\right)\partial^\mu\partial^\nu - e^2\Gamma_{11}^{\mu\nu}(x,x)\right] D_{\nu\gamma}^{ret}(x,x') \tag{C.42}$$
$$+ie^2\int dx"\,\Sigma_{ret}^{\mu\nu}(x,x")\,D_{\nu\gamma}^{ret}(x",x') = -\delta_\gamma^\mu\delta(x-x')$$

y sumando las ecuaciones homogéneas

$$\left[\eta^{\mu\nu}\Box_x + \left(1-\frac{1}{\zeta}\right)\partial^\mu\partial^\nu - e^2\Gamma_{11}^{\mu\nu}(x,x)\right] D_{1\nu\gamma}(x,x') \tag{C.43}$$
$$+ie^2\int dx"\,\Sigma_{ret}^{\mu\nu}(x,x")\,D_{1\nu\gamma}(x",x') = -\frac{e^2}{2}\int dx"\,\Sigma_1^{\mu\nu}(x,x")\,D_{\nu\gamma}^{adv}(x",x')$$

donde $\Sigma_1^{\mu\nu} \equiv \Sigma_{12,12}^{\mu\nu} + \Sigma_{21,21}^{\mu\nu} = \Sigma_{11,11}^{\mu\nu} + \Sigma_{22,22}^{\mu\nu}$.

C.6.1 Transformada de Fourier espacial de las ecuaciones

En esta subsección vamos a encontrar las expresiones para las transformadas de Fourier espaciales de las ecuaciones de Schwinger-Dyson, en términos de las variables adimensionales definidas en el capítulo 4. El punto de partida es la transformada de Fourier de los propagadores, esto es

$$G_{cd}(x,x') = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} G_{cd}(p,\tau,\tau')\exp\left[-i\bar{p}.(\bar{y}-\bar{y}')\right] \tag{C.44}$$

donde en términos de los modos, las funciones $G_{cd}(p,\tau,\tau')$ se expresan

$$G_{21}(p,\tau,\tau') = f_p(\tau)\,f_p^*(\tau') \tag{C.45}$$
$$G_{12}(p,\tau,\tau') = f_p(\tau')\,f_p^*(\tau) \tag{C.46}$$

Para el núcleo no local tenemos

$$\Sigma_{ret}^{\mu\nu}(x,x") = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^{3/2}}\Sigma_{ret}^{\mu\nu}(p,q,\tau,\tau")\exp\left[i\left(\bar{p}+\bar{q}\right).(\bar{y}-\bar{y}")\right] \tag{C.47}$$

$$\Sigma^{00}_{ret}(p,q,\tau,\tau") = \eta^{00}\eta^{00}\left\{G^1_{11}(p,\tau,\tau")\,\bar{\partial}_0\bar{\partial}"_0 G^2_{11}(q,\tau,\tau") - G^1_{12}(p,\tau,\tau")\,\bar{\partial}_0\bar{\partial}"_0 G^2_{12}(p,\tau,\tau")\right\} \quad (C.48)$$

$$\Sigma^{0i}_{ret}(p,q,\tau,\tau") = -i(q_j - p_j)\,\eta^{00}\eta^{ij}\left\{G^1_{11}(p,\tau,\tau")\,\bar{\partial}_0 G^2_{11}(q,\tau,\tau") - G^1_{12}(p,\tau,\tau")\,\bar{\partial}_0 G^2_{12}(q,\tau,\tau")\right\} \quad (C.49)$$

$$\Sigma^{i0}_{ret}(p,q,\tau,\tau") = i(q_j - p_j)\,\eta^{00}\eta^{ij}\left\{G^1_{11}(p,\tau,\tau")\,\bar{\partial}"_0 G^2_{11}(q,\tau,\tau") - G^1_{12}(p,\tau,\tau")\,\bar{\partial}"_0 G^2_{12}(q,\tau,\tau")\right\} \quad (C.50)$$

$$\Sigma^{ij}_{ret}(p,q,\tau,\tau") = \left\{q^i q^j + p^i p^j - p^i q^j - p^j q^i\right\} \times \left\{G^1_{11}(p,\tau,\tau")\,G^2_{11}(q,\tau,\tau") - G^1_{12}(p,\tau,\tau")\,G^2_{12}(p,\tau,\tau")\right\} \quad (C.51)$$

Para las funciones de dos puntos electromagnética escribimos

$$D_{\nu\gamma}(x,x') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} D_{\nu\gamma}(k,\tau,\tau')\exp\left[i\bar{k}.(\bar{y}-\bar{y}')\right] \quad (C.52)$$

de manera que la transformada de Fourier espacial de las ecuaciones queda

$$\left[\eta^{\mu\nu}\left(\partial^2_\tau - \nabla^2\right) - \left(1-\frac{1}{\zeta}\right)\partial^\mu\partial^\nu + e^2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\Gamma^{\mu\nu}_{11}(p,\tau,\tau)\right] D^{ret}_{\nu\gamma}(k,\tau,\tau')$$
$$-ie^2\int d\tau"\,\Sigma^{\mu\nu}_{ret}(p,k-p,\tau,\tau")\,D^{ret}_{\nu\gamma}(k,\tau",\tau') = \delta^\mu_\gamma\,\delta(\tau-\tau') \quad (C.53)$$

Sumando las ecuaciones homogéneas tenemos.

$$\left[\eta^{\mu\nu}\left(\partial^2_\tau - \nabla^2\right) - \left(1-\frac{1}{\zeta}\right)\partial^\mu\partial^\nu + e^2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\Gamma^{\mu\nu}_{11}(p,\tau,\tau)\right] D_{1\nu\gamma}(k,\tau,\tau')$$
$$-ie^2\int d\tau"\,\Sigma^{\mu\nu}_{ret}(p,k-p,\tau,\tau")\,D_{1\nu\gamma}(k,\tau",\tau')$$
$$= \frac{e^2}{2}\int d\tau"\,\Sigma^{\mu\nu}_1(p,k-p,\tau,\tau")\,D^{adv}_{\nu\gamma}(k,\tau',\tau") \quad (C.54)$$

Apéndice D

Cálculo de los núcleos

D.1 Sector ultravioleta

La contribución de los modos de longitud de onda corta al núcleo local es

$$\Gamma_{11}^{il(P)}(\tau,\tau) = \eta^{il}\int_{\Lambda}^{\infty}\frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\left\{2\left|\beta_p\right|^2\left|f_p(\tau)\right|^2 + \alpha_p\beta_p^* f_p^2(\tau) + \beta_p\alpha_p^* f_p^{\dagger 2}(\tau)\right\} \tag{D.1}$$

donde Λ es el mínimo número de onda para el cual la aproximación de onda corta es válida. Reemplazando las ecuaciones (5.11) y (5.13) y realizando la integral en los momentos encontramos

$$\Gamma_{11}^{il(P)}(\tau,\tau) \simeq \frac{9\pi}{32\left(2\pi\right)^{3/2}\Lambda^2} - \frac{3}{2\left(2\pi\right)^{3/2}}\mathrm{Ci}\left[2\Lambda\tau\right] \tag{D.2}$$

Para el núcleo no local mixto

$$\Sigma_{ret}^{i0(P)}(p,k-p,\tau,\tau") = 0 \tag{D.3}$$

y para el no local puramente espacial

$$\begin{aligned}&\Sigma_{ret}^{il(P)}(p,k-p,\tau,\tau") \simeq \Theta\left(\tau-\tau''\right)4p^ip^l \\ &\left\{2\left|\beta_p\right|^2\left[f_p^2(\tau)\,f_p^{*2}(\tau") - f_p^{*2}(\tau)\,f_p^2(\tau")\right]\right. \\ &+2\alpha_p\beta_p^*\left[f_p(\tau)\,f_p^*(\tau") - f_p^*(\tau)\,f_p(\tau")\right]f_p(\tau)\,f_p(\tau") \\ &\left.2\beta_p\alpha_p^*\left[f_p(\tau)\,f_p^*(\tau") - f_p^*(\tau)\,f_p(\tau")\right]f_p^*(\tau)\,f_p^*(\tau")\right\}\end{aligned} \tag{D.4}$$

reemplazando los modos y coeficientes de Bogolyubov obtenemos

$$\begin{aligned}&\Sigma_{ret}^{il(P)}(p,k-p,\tau,\tau") \simeq \\ &4\Theta\left(\tau-\tau''\right)p^ip^l\left\{-\frac{9i}{64}\frac{1}{p^6}\sin\left[2p\left(\tau-\tau"\right)\right] + \frac{3}{8p^4}\cos\left[2p\tau\right] - \frac{3}{8p^4}\cos\left[2p\tau"\right]\right\}\end{aligned} \tag{D.5}$$

Para evaluar la integral en los momentos, debemos tener en cuenta que nos va a interesar la parte transversal de la función de dos puntos electromagnética, que se obtiene tomando el rotor de las ecuaciones correspondientes. Si suponemos que el campo magnético se propaga según la dirección z, entonces el rotor selecciones las componentes $x-x$, $x-y$ y $y-y$ de la ecuación, y de éstas sólo las $x-x$ y $y-y$ son no nulas. Por ejemplo para la $x-x$ obtenemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\Lambda}^{\infty} \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \Sigma_{ret}^{xx(P)}(p, k-p, \tau, \tau") = \\
&\eta^{xx}\sqrt{\frac{2}{9\pi}}\left\{-\frac{9i}{16}\frac{\sin[2\Lambda(\tau-\tau")]}{\Lambda}+\frac{9i}{8}(\tau-\tau")\,\mathrm{Ci}[2\Lambda(\tau-\tau")]\right. \\
&\left.-\frac{3}{4\tau}\cos[2\Lambda\tau]+\frac{3}{4\tau"}\cos[2\Lambda\tau"]\right\}
\end{aligned} \tag{D.6}$$

Vemos que para ambos núcleos la única contribución de los momentos proviene del límite inferior de integración, y estos términos deben cancelarse contra aquellos que provienen del límite superior de integración en el intervalo de momentos intermedios.

Para la parte puramente espacial del núcleo de Hadamard conservamos sólo los términos cuadráticos en los coeficientes de Bogolyubov, dado que ellos son los que dan la principal contribución en la porción ultravioleta del espectro, es decir

$$\begin{aligned}
&\Sigma_1^{il(P)}(p, k-p, \tau, \tau") \simeq 4p^i p^l \\
&\left\{2|\beta_p|^2\left[2|f_p(\tau)|^2|f_p(\tau")|+f_p^{*2}(\tau")f_p^2(\tau)+f_p^2(\tau")f_p^{*2}(\tau)\right]\right. \\
&+2\beta_p\alpha_p^*\left[|f_p(\tau)|^2 f_p^*(\tau")+|f_p(\tau")|^2 f_p^*(\tau)\right] \\
&\left.+2\beta_p^*\alpha_p\left[|f_p(\tau")|^2 f_p(\tau)+|f_p(\tau)|^2 f_p(\tau")\right]\right\}
\end{aligned} \tag{D.7}$$

Para estas componentes es válido el mismo razonamiento que para el núcleo retardado.

Podemos entonces concluir que el sector ultravioleta de partículas creadas no contribuye significativamente a los distintos núcleos que aparecen en las ecuaciones. Otra manera de comprender este hecho es observando que los modos para el campo escalar durante inflación y para el sector ultravioleta durante recalentamiento están dados por la misma función de Bessel, $H_{3/2}^{(2)}(z)$, pero con diferentes argumentos: esto significa que el número de partículas creadas es muy pequeño, como puede verse en la expresión para los β_p.

D.2 Sector infrarrojo

El núcleo local para esta porción del espectro de momentos fue calculada en el capítulo 4. En esta parte del apéndice vamos a evaluar el núcleo no local retardado y vamos a mostrar que efectivamente es despreciable frente al local. El cálculo del núcleo no local de Hadamard, Σ_1^{il}, es directa.

Para las componentes $i-0$ del núcleo retardado tenemos

$$\begin{aligned}
&\Sigma^{i0}_{ret}\left(p,k-p,\tau,\tau"\right) = -i\Theta\left(\tau-\tau''\right)\left(k^i-2p^i\right)\\
&\left\{\left(\beta^*_p\alpha_p-\beta^*_{k-p}\alpha_{k-p}\right)f\left(\tau\right)f\left(\tau\right)\left[\dot{f}^*\left(\tau"\right)f\left(\tau"\right)-f^*\left(\tau"\right)\dot{f}\left(\tau"\right)\right]\right.\\
&+\left(\alpha^*_{k-p}\beta_{k-p}-\alpha^*_p\beta_p\right)f^*\left(\tau\right)f^*\left(\tau\right)\left[\dot{f}\left(\tau"\right)f^*\left(\tau"\right)-f\left(\tau"\right)\dot{f}^*\left(\tau"\right)\right]\\
&\left.+2\left(\left|\beta_{k-p}\right|^2-\left|\beta_p\right|^2\right)f^*\left(\tau\right)f\left(\tau\right)\left[\dot{f}\left(\tau"\right)f^*\left(\tau"\right)-f\left(\tau"\right)\dot{f}^*\left(\tau"\right)\right]\right\}
\end{aligned} \tag{D.8}$$

mientras que para las componentes puramente espaciales nos queda

$$\begin{aligned}
&\Sigma^{il}_{ret}\left(p,k-p,\tau,\tau"\right) = \Theta\left(\tau-\tau''\right)\left(4p^ip^l+k^ik^l-2p^ik^l-2k^ip^l\right)\\
&\left\{\left(\left|\beta_p\right|^2+\left|\beta_{k-p}\right|^2\right)\left[f^2\left(\tau\right)f^{*2}\left(\tau"\right)-f^{*2}\left(\tau\right)f^2\left(\tau"\right)\right]\right.\\
&+\left(\alpha_{k-p}\beta^*_{k-p}+\alpha_p\beta^*_p\right)\left[f\left(\tau\right)f^*\left(\tau"\right)-f^*\left(\tau\right)f\left(\tau"\right)\right]f\left(\tau\right)f\left(\tau"\right)\\
&\left.+\left(\beta_{k-p}\alpha^*_{k-p}+\beta_p\alpha^*_p\right)\left[f\left(\tau\right)f^*\left(\tau"\right)-f^*\left(\tau\right)f\left(\tau"\right)\right]f^*\left(\tau\right)f^*\left(\tau"\right)\right.
\end{aligned} \tag{D.9}$$

Recordando nuevamente que vamos a tomar el rotor de las ecuaciones y considerando por ejemplo que el campo magnético se propaga según la dirección z, necesitamos solamente las componentes $0-x$ y $0-y$ del núcleo mixto y las $x-x$, $x-y$ e $y-y$ del puramente espacial. Pero salvo para las componentes $x-x$ e $y-y$ del núcleo puramente espacial, el resto de las componentes, en virtud de la independencia de las funciones de modo (5.18) de los momentos, son funciones impares de p y por lo tanto su integral respecto de los momentos es nula. En consecuencia obtenemos el deseado desacople de las ecuaciones para la parte transversa del propagador puramente espacial. Por supuesto las ecuaciones para la parte longitudinal de los propagadores se mantienen acopladas y llevan la información respecto de la conservación de la carga.

Realizando la integral en los momentos de la componente $\Sigma^{xx(N)}_{ret}$ por ejemplo, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\int_\Upsilon^\Delta \frac{d^3p}{\left(2\pi\right)^{3/2}}\Sigma^{xx(P)}_{ret}\left(p,k-p,\tau,\tau"\right) \sim \eta^{xx}\Theta\left(\tau-\tau''\right)\frac{8}{3}\Delta^2\\
&2^{3/\gamma-4}\Gamma^2\left(\frac{3+2\gamma}{2\gamma}\right)\left(\frac{\pi}{\gamma}\right)\frac{z^{1/\gamma}z"^{1/\gamma}}{z_0^{5/\gamma}}\\
&\left(H^{(2)}_{3/2\gamma}\left(z\right)H^{(1)}_{3/2\gamma}\left(z"\right)-H^{(2)}_{3/2\gamma}\left(z"\right)H^{(1)}_{3/2\gamma}\left(z\right)\right)\\
&\times\left[H^{(2)}_{3/2\gamma}\left(z\right)H^{(1)}_{3/2\gamma}\left(z"\right)+H^{(2)}_{3/2\gamma}\left(z"\right)H^{(1)}_{3/2\gamma}\left(z\right)\right.\\
&\left.+H^{(2)}_{3/2\gamma}\left(z"\right)H^{(2)}_{3/2\gamma}\left(z\right)+H^{(1)}_{3/2\gamma}\left(z\right)H^{(1)}_{3/2\gamma}\left(z"\right)\right]
\end{aligned} \tag{D.10}$$

Comparando el prefactor en esta ecuación con el correspondiente de la ecuación (5.33) vemos que en virtud de la dependencia logarí tmica de este último, el núcleo no local es varios órdenes de magnitud menor que el local y por lo tanto puede ser despreciado.

Apéndice E

Renormalización de la ecuación de vacío

En este apéndice esquematizamos la regularización de la ecuación que representa la transición vacío a vacío, que posee las divergencias ultravioletas. Como las ecuaciones son invariantes conformes y, para k grande las soluciones para la ecuación de Klein Gordon se asemejan a los modos del campo escalar en espacio-tiempo plano, vamos a llevar a cabo el proceso de regularización y renormalización en ese espacio-tiempo, asumiendo que los resultados valen en espacio-tiempo curvo, en virtud de la semejanza de las soluciones en el límite ultravioleta.

Las divergencias aparecen en el propagador de Feynman, ya que es el que tiene una parte real. Vamos a trabajar en la ecuación para el propagador retardado,

$$\left[\eta^{\mu\nu}\Box - \left(1-\frac{1}{\zeta}\right)\partial^{\mu}\partial^{\nu} - 2e^{2}G_{11}\left(x,x\right)\right] D^{ret}_{\mu\gamma}\left(x,x'\right) \tag{E.1}$$
$$+ie^{2}\int dx''\Sigma^{\mu\nu}_{ret}\left(x,x''\right) D^{ret}_{\nu\gamma}\left(x'',x'\right) = -\delta^{\mu}_{\gamma}\delta\left(x-x'\right)$$

Escribimos los distintos núcleos usando las expresiones de los distintos propagadores para el espacio-tiempo plano. Los términos que dan lugar a las divergencias son

$$G_{11}\left(x,x\right) = -i\int\frac{d^{4}p}{\left(2\pi\right)^{2}}\frac{1}{p^{2}-m^{2}-i\varepsilon} \tag{E.2}$$

y

$$\Sigma^{\mu\nu}_{11}\left(x,x''\right) = -\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\int\frac{d^{4}p}{\left(2\pi\right)^{2}}\int\frac{d^{4}q}{\left(2\pi\right)^{2}}\frac{e^{i(\bar{p}+\bar{q})\cdot(r-r'')}}{q^{2}-m^{2}}\frac{\left(p_{\alpha}p_{\beta}+q_{\alpha}q_{\beta}-p_{\alpha}q_{\beta}-q_{\alpha}p_{\beta}\right)}{p^{2}-m^{2}} \tag{E.3}$$

Desarrollando los propagadores en serie de Fourier

$$D^{ret}_{\mu\gamma}\left(x,x'\right) = \int\frac{d^{4}k}{\left(2\pi\right)^{2}}D^{ret}_{\mu\gamma}\left(k\right)e^{ik(x-x')} \tag{E.4}$$

reemplazando en (E.1) tenemos

$$\left[\eta^{\mu\nu}k^2 - \left(1-\frac{1}{\zeta}\right)k^\mu k^\nu + 2ie^2\int\frac{d^4p}{(2\pi)^2}\frac{1}{p^2-m^2}\right]D^{ret}_{\mu\gamma}(k) \tag{E.5}$$
$$-ie^2\int\frac{d^4q}{(2\pi)^2}\frac{(4q_\mu q_\nu + k_\mu k_\nu - 2k_\mu q_\nu - 2q_\mu k_\nu)}{[q^2-m^2]\left[(k-q)^2-m^2\right]}D^{ret}_{\nu\gamma}(k)$$
$$+ie^2\int\frac{d^4q}{(2\pi)^2}\Sigma^{\mu\nu}_{12}\left(q,k-q\eta,\eta''\right)D^{ret}_{\nu\gamma}(k) = -\delta_{\mu\gamma}$$

Siguiendo los pasos usuales para regularizar dimensionalmente [74, 75] obtenemos

$$\left\{(1-\Pi_0)\left[k^2\eta^{\mu\nu}-k^\mu k^\nu\right]+\frac{1}{\zeta}k^\mu k^\nu + e^2\Pi^{\mu\nu}_F\right\}D^{ret}_{\nu\gamma}(k) = -\delta_{\mu\gamma} \tag{E.6}$$

donde

$$\Pi_0 \equiv e^2/24\pi^2\varepsilon$$

y

$$\Pi^{\mu\nu}_F = -\frac{2\eta^{\mu\nu}}{(4\pi)^2}\int_0^1 dz\log\left[m^2-k^2z(1-z)\right]\left(m^2-k^2z[1-z]\right)D^{ret}_{\nu\gamma}(k) \tag{E.7}$$
$$-\frac{2\eta^{\mu\nu}}{(4\pi)^2}k_\mu k_\nu\int_0^1 dz\,(1-2z)^2\log\left[m^2-k^2z(1-z)\right]D^{ret}_{\nu\gamma}(k)$$
$$+i\int\frac{d^4q}{(2\pi)^2}\Sigma^{\mu\nu}_{12}\left(q,k-q\eta,\eta''\right)D^{ret}_{\nu\gamma}(k)$$

Definiendo

$$D^{ret}_{\nu\gamma}(k) = \frac{\tilde{D}^{ret}_{\nu\gamma}(k)}{(1-\Pi_0)} \tag{E.8}$$

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{(1-\Pi_0)}{\tilde{\zeta}} \tag{E.9}$$

$$e^2 = (1-\Pi_0)\,\tilde{e}^2 \tag{E.10}$$

donde el tilde refiere a las cantidades renormalizadas. La ecuación renormalizada es entonces.

$$\left\{k^2\eta^{\mu\nu}-\left(1-\frac{1}{\tilde{\zeta}}\right)k^\mu k^\nu + \tilde{e}^2\Pi^{\mu\nu}_F\right\}\tilde{D}^{ret}_{\nu\gamma}(k) = -\delta_{\mu\gamma} \tag{E.11}$$

Agradecimientos

Es imposible cerrar esta tesis sin agradecer sincera y profundamente a Esteban Calzetta, mi director y amigo, quien me enseñó a investigar, a cuestionar y además me tuvo una paciencia infinita. Sin él no habría podido hacer lo que hice.

A Diego Mazzitelli, con quien realicé parte de los trabajos de investigación y compartí agradables discusiones y viajes. A Diego Harari que siempre estuvo dispuesto a conversar y aclarar mis dudas. También a Carlos Wagner, bellísima persona, con quien tuve el placer de colaborar a la distancia y descubrir de esa manera otra forma eficiente de trabajar.

A mis diversos compañeros de oficina: Marc, Fabián, Fernando, Diego, con los que siempre pude contar y que además crearon un agradable clima de trabajo. Un agradecimiento especial a César a quien siempre molesté con mis problemas con las computadoras y quien además me proveyó el macro para escribir esta tesis. Y no me olvido de Ivan que, aunque no compartimos oficina, siempre me dio una mano en lo que pudiera necesitar.

Al Departamento de Física de la Facultad, donde concluí mis estudios de doctorado y donde pude interactuar con un montón de personas macanudas. A Susi y Milagros, siempre bien dispuestas y amables.

Agradezco también al IAFE, a toda la buena gente que trabaja en él. En ese lugar terminé mi licenciatura y comencé los estudios de doctorado, y siempre me sentí como en casa.

A mis queridas amigas Margarita, Majda, Mecki y Claudia, quienes siempre me pusieron el hombro cuando la vida me mostraba una cara fea, tanto en lo laboral como en lo personal.

A mi amigo Cesar Pietranera, quien me ayudó a pararme sobre mis propios pies.

A mi tío Alfredo, quien siempre se interesa en lo que hago.

A mi familia: mamá, mi hermana Patricia y mi sobrina Julia.

Bibliografía

[1] P. P. Kronberg, Rep. Prog. Phys, **47** (1994) 325.

[2] E. G. Zweibel and C. Heiles, Nature **385** (1997) 131.

[3] J. P. Vallée, Astron. Astrophys. **308** (1996) 433.

[4] K. T. Chyzy, R. Beck, S. Kohle, U. Klein and M. Urbanik, astro-ph/0001205.

[5] K. T. Kim, P. P. Kronberg and P. C. Tribble, Astrophys. J. **379** (1991) 80.

[6] L. Feretti et al., Astron. Astroph. **302** (1995) 680.

[7] G. B. Taylor and R. A. Perley, Astrophys. J **416** (1993) 554.

[8] J. Eilek, [astro-ph/9906485].

[9] A. Loeb and S. Mao, Astrophys. J. **435** (1994) L109.

[10] R. Kulsrud, R. Cen, J. Ostriker and D. Ryu, Astrophys. J. **480** (1997) 481.

[11] Ya. B. Zel'dovich, A. A. Ruzmaikin and D. D. Sokoloff, *Magnetic Fields in Astrophysics*, Gordon and Breach Scient. Pu. (1990).

[12] A. C. Davies, M. Lilley and O. Tornkvist, Phys. Rev. **D60** (1999) 021301.

[13] E. Calzetta and A. Kandus, Phys. Rev. **D55** (1997) 1795.

[14] D. Ryu, H. Kang and P. L. Biermann, Astron. and Astrophys. **335** (1998) 19.

[15] E. R. Harrison, Mon. Not. R. Astron. Soc. **147** (1970) 279.

[16] E. R. Harrison, Phys. Rev. Lett **30** (1973) 188.

[17] K. Kajantie and H. Kurki-Suonio, Phys. Rev. **D34** (1986) 1719.

[18] J. M. Quashnock, A. Loeb and D. N. Spergel, Astrophys. J. **344** (1989) L49.

[19] B. Cheng and A. Olinto, Phys. Rev. **D50** (1994) 2421

[20] G. Sigl, A. Olinto and K. Jedamzik, Phys. Rev. **D55** (1997) 4582.

[21] G. Baym, D. Bödeker and L. McLerran, Phys. Rev. **D53** (1996) 662.

[22] M. S. Turner and L. M. Widrow, Phys. Rev. **D37** (1988) 2743.

[23] L. Parker, Phys. Rev. Lett. **21** (1968) 562.

[24] D. Grasso and H. R. Rubinstein. Phys. Rep. **348** (2001) 163.

[25] A. Dolgov and J. Silk, Phys. Rev. **D47** (1993) 3144.

[26] F. D. Mazzitelli and F. M. Spedalieri, Phys. Rev. **D52** (1995) 6694.

[27] N. D. Birrell and P. C. W. Davies. *Quantum Field Theory in Curved Space*, Cambridge Univ. Press (1982).

[28] A. Dolgov, Phys. Rev. **D48** (1993) 2499.

[29] B. Ratra, Astrophys. J **391** (1992) L1.

[30] B. Ratra and P. J. Peebles, Phys. Rev. **D52** (1995) 1837.

[31] D. Lemoine and M. Lemoine. Phys. Rev. **D52** (1995) 1955.

[32] M. Gasperini, M. Giovannini and G. Veneziano, Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 3796.

[33] M. Gasperini and G. Veneziano. Astropart. Phys. **1** (1993) 317; Phys. Rev. **D50** (1994) 2519; M. Gasperini and M. Giovannini, Phys. Rev. **D47** (1993) 1519.

[34] M. Giovannini, astro-ph/0104290 (2001).

[35] Ya. B. Zel'dovich and I. D. Novikov. *The Structure and Evolution of the Universe*, The University of Chicago Press (1983).

[36] J. Barrow, P. Ferreira and J. Silk, Phys. Rev. Lett. **7** (1997) 3610.

[37] W. Hu, N. Sugiyama and J. Silk. Nature **386** (1997) 37; W. Hu and M. White. Astrophys. J. **471** (1996) 30.

[38] K. Jedamzik, V. Katalinic and A. V. Olinto, Phys. Rev. **D57** (1998) 3264.

[39] J. Adams, U. H. Danielsson. D. Grasso and H. Rubinstein, Phys. Lett. **B388** (1996) 253.

[40] K. Subrramanian and J. D. Barrow. Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 3575.

[41] R. Durrer, T. Kahniashvili and A. Yates, Phys. Rev. **D58** (1998) 123004.

[42] E. W. Kolb and M. S. Turner. The Early Universe, Addison Wesley (1989).

[43] M. Bander and H. R. Rubinstein, Phys. Lett. **B311** (1993) 187.

[44] C. Itzykson and J. B. Zuber. Quantum Field Theory, Mc Graw-Hill Book Co., (1980).

[45] B. Cheng, A. V. Olinto, D. N. Schramm and J. W. Truran, Phys. Rev. **D54** (1996) 4714.; B. Cheng, D. N. Schramm and J. W. Truran, Phys. Rev. **D49** (1994) 5006.y

[46] E. Calzetta, A. Kandus and F. D. Mazzitelli, Phys. Rev. **D57** (1998) 7139.

[47] E. Calzetta and B. L. Hu, Phys. Rev. **D55** (1997) 3536.

[48] G. Baym and H. Heiselberg. Phys. Rev. **D56** (1997) 5254.

[49] J. Ahonen and K. Enqvist, Phys. Lett. **B382** (1996) 40.

[50] F. Olver, *Asymptotics and Special Functions*, Academic Press (1974).

[51] A. Kandus, E. Calzetta, F. D. Mazzitelli and C. E. M. Wagner, Phys. Lett. **B472** (2000) 287.

[52] M. Dine, W. Fischler and M. Srednicki, Nucl. Phys. **B189** (1981) 575; S. Dimopoulos and S. Raby, Nucl. Phys. **B192** (1981) 353; M. Dine and W. Fischler, Phys. Lett. **B110** (1982) 227; M. Dine and M. Srednicki, Nucl. Phys. **B202** (1982) 238; M. Dine and W. Fischler, Nucl. Phys. **B204** (1982) 346; L. Alvarez-Gaumé, M. Claudson and M. Wise, Nucl. Phys. **B207** (1982) 96; C. R. Nappi and B. A. Ovrut, Phys. Lett. **B113** (1982) 175; S. Dimopoulos and S. Raby, Nucl. Phys. **B219** (1983) 479.

[53] M. Dine and A. E. Nelson, Phys. Rev. **D48** (1993) 1277; M. Dine, A. E. Nelson and Y. Shirman, Phys. Rev. **D51** (1995) 1362; M. Dine, A. E. Nelson, Y. Nir and Y. Shirman, Phys. Rev. **D53** (1996) 2658.

[54] M. Carena, S. Pokorski and C. E. M. Wagner, Phys. Lett. **B430** (1998) 281.

[55] S. Dimopoulos, M. Dine, S. Raby and S. Thomas, Phys. Rev. Lett **76** (1996) 3494; S. Ambrosanio, G. L. Kane, G. D. Kribs, S. P. Martin and S. Mrenna, Phys. Rev. **D54** (1996) 5395.

[56] T. Gherghetta, G. F. Giudice and A. Riotto, Phys. Lett. **B446** (1999) 28.

[57] A. A. Starobinskii, Phys. Lett. **B91** (1980) 99.

[58] D. J. H. Chung, E. W. Kolb and A. Riotto, Phys. Rev. **D60** (1999) 063504.

[59] G. F. Giudice, I. Tkachev and A. Riotto, JHEP 9908:009 (1999).

[60] M. K. Gaillard, H. Murayama and K. A. Olive, Phys. Lett. **B355** (1995) 71.

[61] S. Davidson, M. Losada and A. Riotto, Phys. Rev. Lett. **84** (2000) 4284.

[62] J. M. Cornwall, R. Jackiw and E. Tomboulis, Phys. Rev. **D10** (1974) 2428.

[63] F. Cooper, S. Habib, Y. Kluger, E. Mottola, J. P. Paz and P. Anderson, Phys. Rev. **D50** (1994) 2848.

[64] E. Calzetta and B. L. Hu, Phys. Rev. **D35** (1987) 495.

[65] S. Ramsey and B. L. Hu, Phys. Rev. **D56**, (1997) 661; ibid, Phys. Rev. **D56** (1997) 678.

[66] D. Boyanovsky and H. J. de Vega, Proceedings of the 7th Erice Chalonge School on Astrofundamental Physics, astro-ph/0006446, and references therein.

[67] R. H. Brandenberger, A Status Review of Inflationary Cosmology, hep-ph/0101119 (2001).

[68] P. J. E. Peebles and A. Vilenkin, Phys. Rev. **D59** (1999) 063505.

[69] B. Allen, Phys. Rev. **D32** (1985) 3136.

[70] J. R. Schrieffer, *Theory of Superconductivity*, Perseus Books, Reading, Massachusetts (1999).

[71] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover (NY) (1972).

[72] F. D. Mazzitelli, J. P. Paz and C. D. El Hasi, Phys. Rev. **D40** (1989) 955.

[73] L. P. Chimento and S. Mollerach, Phys. Rev. **D34** (1986) 3689.

[74] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison Wesley Pub. Co. (1995).

[75] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge Univ. Press (1985).